

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica

**Método sem malha hp-Clouds
na análise de placas de Reissner-Mindlin**

Dissertação Submetida à Universidade Federal de Santa
Catarina para Obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Oscar Alfredo Garcia

Florianópolis, Março de 1999

Método sem malha hp-Clouds na análise de placas de Reissner-Mindlin

Oscar Alfredo Garcia

Esta Dissertação foi Julgada Adequada para Obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

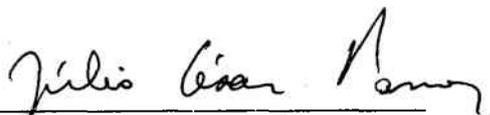
Especialidade Engenharia Mecânica, Área de Concentração Projeto e
Análise de Componentes Mecânicos, e Aprovada em sua Forma Final pelo
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica



Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Orientador



Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.
Coorientador



Júlio César Passos, D.Sc.
Coordenador do Curso

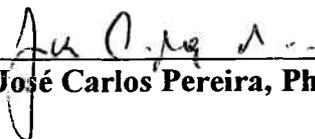
Banca Examinadora



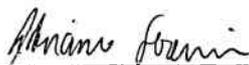
Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.
Presidente da Banca



Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.



José Carlos Pereira, Ph.D.



Adriano Scremin, D.Sc.

A meus pais, Aramir e Esther, que com sua simplicidade e espírito de luta sempre me apoiaram e incentivaram nas horas mais difíceis desta trajetória.

A meu cunhado Hipólito, minha irmã Adriana e meus sobrinhos Hipólito, Adriana (Gorda) e Vinícius (Vini), com gratidão pelo constante incentivo, pelos longos papos e pelo indispensável apoio logístico.

A meu irmão Marcial, com todo o carinho e admiração.

A meu querido irmão Aramir (Gordo), velho soldado de tantas batalhas que juntos enfrentamos, pelo exemplo de coragem e determinação que de ti recebi.

AGRADECIMENTOS

A meu orientador, Prof. Eduardo Alberto Fancello , pela paciência e dedicação que me dispensou durante o andamento desta pesquisa.

Ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos, pela sua indispensável contribuição nas etapas fundamentais deste trabalho.

Ao Prof. Lauro Nicolazzi, pela amizade e cooperação dispensadas.

A todos os amigos e colegas de trabalho, Valdir Mendes Cardoso, Raimundo Matos, Maichael Fernandes, Lauro Junior, Nederson da Silva, Jucelio Pereira, Andre A. Novotny e Eriberto Nascente Silveira, pela amizade e colaboração recebidas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro a esta pesquisa através da bolsa de estudos concedida.

Resumo

O conteúdo deste trabalho trata da aplicação do método sem malha hp-Clouds ou simplesmente método de nuvens (C. A. Duarte e J. T. Oden [8]) à solução de problemas de placas de Reissner-Mindlin.

Inicia-se o mesmo fazendo um abordagem sucinta das técnicas sem malha precursoras da metodologia adotada, destacando suas potencialidades e limitações. A seguir é apresentado o princípio variacional modificado dos Trabalhos Virtuais, proposto por Y.Y. Lu, T. Belytschko e L. Gu [4], adaptado ao problema de placas semi espessas de Reissner-Mindlin.

São estabelecidos os alicerces matemáticos necessários na construção do espaço de aproximação, que se fundamentam na partição da unidade e nas funções denominadas Moving Least Square (MLS). É definida a função de Shepard como um caso especial das funções MLS bem como seu caráter de partição da unidade. Posteriormente, são construídas as bases do espaço de aproximação por meio de produto tensorial com polinômios de Legendre ou por produtos com conjuntos completos de polinômios.

Culmina-se o trabalho apresentando resultados numéricos, onde se verifica o comportamento do espaço de aproximação quanto ao fenômeno de Travamento (Locking) e quanto à convergência de deslocamento transversal e esforços (momentos e cortantes). Como item anexo é feita a comparação de resultados, entre a metodologia utilizada e MEF.

Abstract

The content of this work consists on the application of the mesh less hp-Clouds method (C. A. Duarte and J. T. Oden [8]) to the solution of problems of the Reissner-Mindlin thick plates.

It begins with a brief approach of the mesh less techniques of the adopted methodology, emphasizing its potentialities and restraints. Then, the modified variational principle of the Virtual Works is presented, as proposed by Y. Y. Lu, T. Belytschko and L. Gu [4], adapted to the problem of the Reissner-Mindlin plates.

The necessary mathematical foundations for the construction of the approximation space are set, which are based on the partition of the unity and the functions named Moving Least Square (MLS). The function of Shepard is defined as a special case of the MLS function, as well as its character of partition of unity.

Afterwards, the bases of the approximation space are built through tensorial products with Legendre's polynomials or through complete set of polynomials.

The work finishes presenting numerical results, where one verifies the behavior of the approximation space in relation to the phenomenon of locking and to the convergence of transversal dislocation and efforts (moments and shear).

As an annexed item, the comparison of results is done between the methodology used and FEM.

Sumário

0.1	Lista de Figuras	3
0.2	Lista de Símbolos	6
1	Introdução	10
1.1	Objetivos do Trabalho	15
1.2	Descrição do Trabalho	16
1.2.1	Capítulo 1.	16
1.2.2	Capítulo 2.	16
1.2.3	Capítulo 3.	17
1.2.4	Capítulo 4	17
1.2.5	Capítulo 5	17
1.2.6	Capítulo 6	18
2	Placas de Mindlin	19
2.1	Hipóteses Cinemáticas.	20
2.2	Equações constitutivas	22
2.3	Princípio da energia potencial	25
2.3.1	Equações de Equilíbrio	28
2.4	Uso de Multiplicadores de Lagrange para imposição das condições de contorno essenciais	29
2.5	Princípio Variacional Modificado	32
3	Método das Nuvens hp	36
3.1	Partição da Unidade	37
3.1.1	Funções partição da unidade com sinal	37
3.1.2	Funções partição da unidade tipo Lipschitz	38
3.2	Funções Moving Least Square (MLS).	38
3.2.1	Método dos Mínimos Quadrados	39
3.2.2	Método dos Mínimos Quadrados Móveis.	40
3.2.3	Funções Peso	47
3.3	Element Free Galerkin Method (EFGM)	48
3.4	Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)	49
3.5	Método das Nuvens hp	53
3.5.1	Construção das famílias $\mathcal{F}_N^{k,p}$	53

4	Formulação de Galerkin & Procedimentos Computacionais	66
4.1	Método de Bubnov-Galerkin	66
4.2	Resultados de Pós Processamento:	82
4.3	Aspectos Computacionais	84
4.3.1	Código CLOUDS++	86
5	Resultados Numéricos	90
5.1	Integração Numérica	92
5.1.1	Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno	94
5.1.2	Placa quadrada engastada no contorno	96
5.1.3	Placa circular engastada no contorno	97
5.2	Análise de Convergência	99
5.2.1	Resultados numéricos para a placa quadrada	100
5.2.2	Resultados numéricos para a placa circular	113
5.3	Comparação de Resultados com MEF.	118
5.3.1	Placa Quadrada	119
5.3.2	Placa Circular	122
5.3.3	Placa Triangular	124
5.3.4	Placa em Anel	128
5.3.5	Placa Rômbica	131
6	Conclusões & Sugestões	134

0.1 Lista de Figuras

Figura 2.1. Elemento estrutural de placa	1
Figura 2.2. Estado de tensões de um elemento diferencial de placa em equilíbrio estático	2
Figura 3.1. Cobertura aberta do domínio Ω pelo conjunto $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$	3
Figura 3.2. Cobertura aberta do domínio Ω pelo conjunto $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^5$	4
Figura 3.3. Função partição da unidade φ_5^0	5
Figura 3.4. Componentes do gradiente da função partição da unidade $\left(\frac{\partial \varphi_5^0}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial \varphi_5^0}{\partial y}\right)$	6
Figura 3.5. Função partição da unidade enriquecida $L_1(x)L_1(y)\varphi_5^0(x,y)$	7
Figura 3.6. Função partição da unidade φ_4^0	8
Figura 3.7. Componentes do gradiente da função partição da unidade $\left(\frac{\partial \varphi_4^0}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial \varphi_4^0}{\partial y}\right)$	9
Figura 3.8. Partição da unidade enriquecida $(0.85+x)(0.85-y)\varphi_4^0$	10
Figura 4.1. (a) Conjunto de células de integração, (b) cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^5$	11
Figura 5a.(a) Malha suporte de integração, (b) cobertura	12
Figura 5.1. Placa quadrada simplesmente apoiada: (a) modelo, (b) cobertura	13
Figura 5.2. Verificação de Locking: deslocamento transversal central normalizado para a placa quadrada sob condições de apoio rígido (hard)	14
Figura 5.3. Verificação de Locking: Deslocamento transversal normalizado para o ponto central da placa quadra da engastada no contorno	15
Figura 5.4. Placa circular engastada, (a) modelo e (b) cobertura	16
Figura 5.2. Verificação de Locking: deslocamento transversal central normalizado para a placa circular engastada no contorno	17
Figura 5b. Raio da nuvem r_c determinado pelo software CLOUDS++ para malha de elementos triangulares	18
Figura 5.6. Número de Condicionamento $\mathbf{NC}(\mathbf{K})$ em função de \mathbf{FR}	19
Figura 5.7. Número de Condicionamento $\mathbf{NC}(\mathbf{K})$ em função de \mathbf{NGL}	20
Figura 5.8. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Convergência da norma L^2 do erro relativo de w em função de \mathbf{RF}	21
Figura 5.9. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Convergência em função do número de pontos de integração por célula no domínio, (a) valores normalizados do deslocamento transversal para o ponto central da placa, (b) convergência da norma L^2 do erro relativo de w	22
Figura 5.10. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Convergência em função do número de pontos de integração na fronteira de Dirichlet, (a) convergência da norma L^2 do erro relativo de w , (b) valores normalizados do deslocamento transversal no ponto central da placa	23
Figura 5.11. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Resultados de convergência da norma L^2 do deslocamento transversal w	24
Figura 5.12. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Resultados do deslocamento transversal no centro da placa, (a) resultados na escala $[0, 1.2]$, (b) ampliação do resultado anterior para a escala $[0.998, 1.004]$	25

Figura 5.13. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Resultados de momentos, (a) norma L^2 do erro relativo em momentos, (b) valores normalizados de M_{xx} para o ponto central da placa	26
Figura 5.14. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Resultados de esforço cortante, (a) norma L^2 do erro relativo em cortantes, (b) valores normalizados de Q_x para o ponto médio do lado	27
Figura 5.15. Placa circular engastada: Norma L^2 para o erro relativo do deslocamento transversal	28
Figura 5.16. Placa circular engastada: Deslocamento transversal normalizado para o ponto central da placa	29
Figura 5.17. Placa circular engastada: Norma L^2 do erro relativo em momentos	30
Figura 5.18. Placa circular engastada: Momento M_r normalizado no ponto central da placa	31
Figura 5.19. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Deslocamento transversal normalizado para o ponto central da placa obtidos pelo método de nuvens e por MEF para o elemento de casca shell 93	32
Figura 5.20. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Diagrama de isocamadas do quadrante inferior da placa para o campo de deslocamento transversal	33
Figura 5.21. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Diagrama de isocamadas do quadrante inferior da placa para a componente M_{xx} do campo de momentos	34
Figura 5.22. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Diagrama de isocamadas do quadrante inferior da placa para a componente Q_x do campo de esforços cortantes	35
Figura 5.23. Placa circular engastada: Deslocamento transversal normalizado para o ponto central da placa obtidos pelo método de nuvens e por MEF para o elemento shell 93	36
Figura 5.24. Placa circular engastada: Diagrama de isocamadas do quadrante superior da placa para o campo de deslocamento transversal	37
Figura 5.25. Placa circular engastada: Diagrama de isocamadas do quadrante superior da placa para a componente M_{xx} do campo de momentos	38
Figura 5.26. Placa triangular simplesmente apoiada: (a) modelo, (b) cobertura de 10 nuvens, (c) cobertura de 28 nuvens	39
Figura 5.27. Placa triangular simplesmente apoiada: Deslocamento transversal normalizado no ponto CG (centroide da placa triangular) obtidos pelo método de nuvens para as coberturas de 10 e 28 nuvens e por MEF para o elemento shell 93	40
Figura 5.28. Placa triangular simplesmente apoiada: Momento M_{yy} normalizado no ponto CG (centroide da placa triangular) obtidos pelas coberturas de 10 e 28 nuvens respectivamente	41
Figura 5.29. Placa triangular simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas para o campo de deslocamento transversal	42
Figura 5.30. Placa triangular simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas para a componente M_{yy} do campo de momentos	43
Figura 5.31. Placa anelar simplesmente apoiada sob cobertura de 36 nuvens para um setor de πrad	44

Figura 5.32. Placa anelar simplesmente apoiada: Deslocamento transversal normalizado para o ponto A, obtidos pelo método de nuvens para uma cobertura de 36 nuvens do setor de πrad e por MEF para o elemento shell 93	44
Figura 5.33. Placa anelar simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas do setor de πrad para o campo de deslocamento transversal	45
Figura 5.34. Placa anelar simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas do setor de πrad para a componente M_{yy} do campo de momentos	46
Figura 5.35. Placa rômbrica simplesmente apoiada, (a) geometria, (b) carga, (c) cobertura de 25 nuvens	47
Figura 5.36. Placa rômbrica simplesmente apoiada: Deslocamento transversal para ponto central da placa obtido pelo método de nuvens para uma cobertura de 25 nuvens e por MEF para o elemento shell 93	48
Figura 5.37. Placa rômbrica simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas para o campo de deslocamento transversal	49

0.2 Lista de Símbolos

Ω	Domínio aberto do problema de valores no contorno
$\bar{\Omega}$	Domínio fechado do problema de valores no contorno
$\partial\Omega$	Fronteira do problema de valores no contorno
Σ	Plano médio da placa
$\partial\Sigma_N$	Fronteira de Newmann
$\partial\Sigma_D$	Fronteira de Dirichlet
$\mathbf{u}(x, y, z)$	Campo de deslocamentos
$\nabla\mathbf{u}$	Gradiente do campo de deslocamentos
$\varepsilon(\mathbf{u})$	Tensor de Green para pequenos deslocamentos
$\varepsilon_b(\boldsymbol{\theta})$	Vetor correspondente à parcela simétrica do gradiente de rotações
$\varepsilon_s(\mathbf{u})$	Vetor correspondente à parcela de cisalhamento do tensor de deformações
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor de rotações
w	Deslocamento transversal
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$	Vetor de tensões
$\sigma_b(\mathbf{u})$	Vetor de tensões correspondentes à flexão
$\sigma_s(\mathbf{u})$	Vetor de tensões correspondentes à cisalhamento
\mathbf{C}^1	Matriz de coeficientes elásticos da parcela de flexão
\mathbf{C}^2	Matriz de coeficientes elásticos da parcela de cisalhamento
\mathbf{C}_b	Matriz de coeficientes elásticos da parcela de flexão da equação constitutiva expressa em momentos
\mathbf{C}_s	Matriz de coeficientes elásticos da parcela de cisalhamento da equação constitutiva expressa em esforços cortantes
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coefficiente de Poisson
$\mathbf{M}(\mathbf{u})$	Vetor de momentos
$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u})$	Tensor de momentos
$\mathbf{Q}(\mathbf{u})$	Vetor de esforços cortantes
D	Coefficiente de rigidez à flexão da placa
k_s	Coefficiente de Reissner
$\Pi_i(\mathbf{u})$	Energia potencial interna de deformação
$\Pi_e(\mathbf{u})$	Trabalho de deformação das forças externas
$\nabla\boldsymbol{\theta}$	Gradiente de rotações
$\nabla^s\boldsymbol{\theta}$	Gradiente simétrico de rotações
$\nabla^a\boldsymbol{\theta}$	Gradiente antissimétrico de rotações
div	Divergente de um tensor
\int_{Σ}	Integral no domínio
$\int_{\partial\Sigma_N}$	Integral na fronteira de Newmann
$\int_{\partial\Sigma_D}$	Integral na fronteira de Dirichlet
$\mathcal{K}in$	Conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis
$\mathcal{V}ar$	Conjunto de variações
$\bar{\mathbf{M}}\mathbf{n}(\mathbf{u})$	Componente do tensor de momentos na fronteira de normal \mathbf{n}
$\mathbf{Q}\mathbf{n}(\mathbf{u})$	Componente do vetor de esforço cortante na fronteira de normal \mathbf{n}

$\bar{\mathbf{m}}$	Vetor de momentos distribuídos sobre a fronteira de Newmann
q	Carga vertical uniformemente distribuída sobre o domínio
\mathbf{m}	Vetor de momentos distribuído sobre o domínio
\bar{q}	Carga uniformemente distribuída sobre a fronteira de Newmann
$a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$	Funcional bilinear correspondente à energia potencial interna de deformação
$l(\mathbf{u})$	Funcional linear correspondente ao trabalho das forças externas
λ	Multiplicador de Lagrange transversal
λ^b	Multiplicador de Lagrange que força rotações
λ^s	Multiplicador de Lagrange que força deslocamento transversal
$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda^b, \lambda^s)$	Funcional Lagrangeano
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Operador de variação
$H^1(\Sigma)$	Espaços de Sobolev de primeira ordem definido em Σ
$L^2(\partial\Sigma)$	Espaço das funções quadrado integráveis sobre a fronteira de Dirichlet
$\bar{\theta}$	Rotações prescritas sobre a fronteira de Dirichlet
\bar{w}	Deslocamentos transversais prescritos sobre a fronteira de Dirichlet
\mathbf{n}^b	Matriz de projeção do vetor de momentos sobre a fronteira de Dirichlet
\mathbf{n}^s	Matriz de projeção do vetor de cortantes sobre a fronteira de Dirichlet
$\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$	Cobertura aberta do domínio por N subdomínios Ω_α centrados nos pontos x_α
$\varphi_\alpha(\mathbf{x})$	Função partição da unidade
$\ \cdot\ _{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$	Norma infinita de um vetor em \mathbb{R}^n
C_∞	Constante finita que limita o valor da norma infinita de um vetor
C_G	Constante finita que limita o valor da norma infinita do gradiente de um vetor
C_0^∞	Espaço das funções de suporte compacto e regularidade infinita no domínio
C^p	Espaço das funções de regularidade p no domínio, para $p = 1, 2, \dots, +\infty$
\mathbb{E}	Erro quadrático
$\mathbb{E}(\mathbf{x})$	Erro quadrático ponderado
$diam(\Omega_\alpha)$	Diâmetro do suporte Ω_α
\mathbf{V}	Matriz de valores nodais da base polinomial
$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y})$	Função peso associada à nuvem centrada em \mathbf{x}_α e avaliada em \mathbf{y}
$\mathbf{W}(\mathbf{x})$	Matriz diagonal de funções peso
(\cdot, \cdot)	Produto interno ponderado
$(L_{\mathbf{y}}\mathbf{u})(\mathbf{x})$	Funcional que aproxima a função $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ no ponto \mathbf{y} com mínimos quadrados móveis
\mathbf{p}	Base polinomial usada para construir as funções MLS
\mathbf{P}	Matriz de valores nodais da base polinomial \mathbf{p}
D^β	Operação de derivação de ordem β
h_α	Raio do suporte da nuvem
\mathcal{V}	Espaço vetorial de PUFEM
\mathcal{V}_α	Espaço de aproximação local de PUFEM
v_α	Funções associadas ao espaço de aproximação local de PUFEM

$\binom{\beta}{\gamma}$	Número binomial de ordem β e classe γ
$\delta_{\alpha\beta}$	Operador delta de Kronecker
<i>card</i>	Cardinalidade
<i>supp</i>	Suporte do domínio
\mathbb{M}	Limite de cardinalidade da cobertura
$\psi_\gamma(\mathbf{x})$	Funções obtidas por enriquecimento da partição da unidade
$\mathbb{L}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x})$	Polinômios de Lagrange
$\mathcal{F}_N^{k,p}$	Base do espaço de aproximação no método hp-Clouds
\mathcal{P}_p	Espaço vetorial dos polinômios de grau $g \leq p$
$\text{span} \left\{ \mathcal{F}_N^{k,p} \right\}$	Espaço vetorial gerado pela base $\mathcal{F}_N^{k,p}$
\mathcal{L}_p	Conjunto que representa o produto tensorial com polinômios de Legendre $L_{ij}(\mathbf{x})$ em \mathbb{R}^2 onde i ou $j \leq p$, i ou $j > k$ e $p \geq k$ onde i e j representam o grau dos polinômios envolvidos no produto
\mathcal{L}_k	Conjunto que representa o produto tensorial com polinômios de Legendre $L_{ij}(\mathbf{x})$ em \mathbb{R}^2 onde i e $j \leq k$
p	Grau da base polinomial usada para enriquecer o espaço de aproximação
k	Grau da base polinomial utilizada para construir a função partição da unidade do tipo MLS (moving least square)
Π_k	Produtos completos de polinômios $L_{ij}(\mathbf{x})$ onde $i + j \leq k$
Π_p	Produto completo de polinômios $L_{ij}(\mathbf{x})$ onde $k < i + j \leq p$
$\widehat{\Omega}_\alpha$	Domínio do suporte definido dado por $\ \xi\ < 1$
ξ	Vetor posição de um ponto do domínio mapeado $\widehat{\Omega}_\alpha$
\mathbf{U}	Vetor de parâmetros de deslocamento
θ_h	Campo de rotações aproximado
w_h	Campo de deslocamento transversal aproximado
\mathbf{N}_θ	Matriz de valores da função que aproximam rotações
\mathbf{N}_w	Matriz de valores da função que aproximam deslocamentos verticais
\mathbf{B}_b	Matriz do gradiente do espaço de aproximação da parcela de flexão
\mathbf{B}_s	Matriz do gradiente do espaço de aproximação da parcela de cisalhamento
$\bar{\mathbf{N}}_\theta$	Matriz de valores da função sobre a fronteira de Dirichlet que aproximam rotações
$\bar{\mathbf{N}}_w$	Matriz de valores da função sobre a fronteira de Dirichlet que aproximam deslocamento vertical
Λ	Vetor de parâmetros de Lagrange
$\bar{\mathbf{U}}$	Vetor de deslocamentos prescritos
\mathbf{K}_Σ	Parcela da matriz de rigidez correspondente ao domínio
\mathbf{G}	Parcela da matriz de rigidez correspondente à fronteira de Dirichlet
\mathbf{F}	Parcela do vetor de cargas equivalentes correspondente à carregamentos externos
\mathbf{H}	Parcela do vetor de cargas equivalentes correspondentes à deslocamentos prescritos na fronteira de Dirichlet
W_i	Fator peso da integração numérica para um ponto i
J	Jacobiano da célula de integração
$\mathbf{K}_{\partial\Omega D}$	Parcela da matriz de rigidez correspondente à fronteira de Dirichlet

$\ e_{rw}\ _{L^2}$	Norma L^2 do erro relativo em deslocamentos transversais
$\ e_{rm}\ _{L^2}$	Norma L^2 do erro relativo em momentos
$\ e_{rQ}\ _{L^2}$	Norma L^2 do erro relativo em cortantes
\mathbf{x}	Vetor posição do ponto \mathbf{x} em coordenadas cartesianas onde $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$[\boldsymbol{\lambda}_b, (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})]_{\partial\Sigma_D}$	Projeção sobre a fronteira $\partial\Sigma_D$ das rotações $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ na direção do vetor $\boldsymbol{\lambda}_b$
$[\lambda_w, (w - \bar{w})]_{\partial\Sigma_D}$	Projeção sobre a fronteira $\partial\Sigma_D$ dos deslocamentos verticais na direção de λ_w

Capítulo 1

Introdução

Dentre os grandes avanços nos métodos numéricos do século vinte, temos o surgimento do Método dos Elementos Finitos (MEF) que, juntamente com o avanço da ciência da computação, marcam uma nova era na física na matemática e na Engenharia através da simulação numérica de problemas reais. Nos últimos vinte anos, vemse delineando uma nova geração de métodos numéricos, sendo o objetivo principal destas pesquisas modificar a estrutura interna do método tradicional de elementos finitos, de forma a torná-lo mais flexível, versátil e robusto. Os trabalhos têmse concentrado naqueles pontos onde o MEF tradicional apresenta limitações tais como movimentos descontínuos, fraturas ou choques, malhas complexas, adaptatividade, etc. Por exemplo, o caráter estruturado dos elementos finitos encontra sua aplicação limitada em problemas de simulação de impactos de alta velocidade, problemas de erosão, problemas de dano do material e falha estrutural e problemas de mudança de fase. Em muitos destes casos, os chamados métodos sem malha mostram sua eficiência e versatilidade, proveniente da independência das funções de aproximação de uma malha, evitando problemas de distorção da mesma e à diminuição do custo computacional devido à não-necessidade de remalhamento.

Entre as primeiras propostas dos métodos sem malha temse a de R.A.Gingold e J.J.Monaghan com Smooth Particles Hydrodynamics (SPH)[27], e o método Moving Least Square (MLS), de P. Lancaster e K. Salkaushkas[26]. Recentemente a importância dada aos métodos sem malha temse refletido no surgimento de uma série de outros métodos, tais como:

- *Diffuse Element Method (DEM) (Nayroles, Touzot e Villon) [29]*
- *Element Free Galerkin (EFG) (T.Belytschko e co-autores) [2]*
- *Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) (Liu e co-autores) [30]*
- *hp-Clouds (J.T.Oden e C.A.Duarte) [8]*
- *Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) (Babuska e Melenk) [12]*

O método SPH, representa a forma mais flexível dos métodos sem malha, sendo de simples implementação. Este usa o conceito de colocação para construir o conjunto de equações discretizadas que governam o problema. O processo de integração usado em \mathbb{R}^1 é a regra do trapézio que, além de não ser uma regra ótima, integra exatamente, no máximo, funções lineares. As funções de interpolação usadas nos núcleos das equações integrais têm a mesma forma que as funções de grau zero do método MLS, conhecida como função de Shepard. O inconveniente de sua utilização é a baixa precisão de aproximação. Além disto, o método SPH apresenta inconsistência linear quando são usadas determinadas funções de interpolação (funções spline cúbicas). Situação similar acontece nas fronteiras, onde não se tem como garantir a consistência nem para funções lineares, nem para as constantes. Portanto, embora seja um método muito simples de ser implementado, ele apresenta a limitação de usar funções de aproximação de baixa precisão e um processo de integração pouco adequado, exigindo um número elevado de pontos integração para obter-se uma precisão satisfatória.

Os métodos EFG e DEM, ao contrário do SPH, usam a formulação de Bubnov Galerkin para obter o conjunto de equações discretizadas junto a técnica de Moving Least Square (MLS) para a construção das funções de aproximação. Entretanto, o DEM mostra baixa precisão, principalmente devido à consideração inadequada das condições de contorno na fronteira de Dirichlet, ao emprego de regras de integração de baixa ordem no conjunto de células suportes de integração e, principalmente, à omissão de certos termos das derivadas das funções de interpolação.

O EFG vem como uma forma de aprimorar o DEM, usando regras de quadratura de alta ordem, incluindo certos termos nas derivadas das funções de aproximação que não são considerados por Naylor, e o emprego de multiplicadores de Lagrange para forçar condições de contorno essenciais. As taxas de convergência bem como a precisão atingidas são, em muitas situações, melhores do que em MEF, como é o caso de problemas de dinâmica de fratura, mostrado por Y.Y.Lu, T. Belytschko, M. Tabbara [5], já que as funções não apresentam sensibilidade que comprometa a precisão para uma distribuição não uniforme de nós. Esta característica torna este método muito atraente para refinamentos h adaptativos, não correndo o risco de malhas distorcidas para ajustar-se a geometria do problema. Por outro lado, o refinamento p adaptativo torna-se mais simples que em MEF, já que não se tem a dificuldade da descontinuidade de funções nas fronteiras entre os elementos.

Embora o método EFG apresente uma excelente linha a ser seguida para contornar problemas onde os métodos tradicionais com malha apresentam limitações, o custo computacional na etapa de processamento é alto, já que para calcular as funções de aproximação é necessário inverter uma matriz em cada ponto de integração. Uma forma de evitar a inversão desta matriz foi apresentada no trabalho de Y.Y.Lu, T. Belytschko, M. Tabbara [5], no qual é usado um processo de ortonormalização das funções peso-polinomiais resultando uma matriz diagonal. Porém o custo computacional do processo de ortonormalização é tão caro quanto inverter a matriz. O método EFG, quando aplicado a problemas regulares, não oferece vantagens em relação ao MEF convencional, já que nestas circunstâncias a etapa de pré-processamento para gerar a malha é de baixo custo computacional, se comparada com a etapa de processamento utilizando o método EFG. Portanto, um procedimento com o qual se consegue elevada precisão de resultados em regiões críticas, e ao mesmo tempo, baixo custo computacional, é conseguido, com a divisão do domínio em duas regiões: uma crítica, onde se aplica o método EFG, e outra regular, no qual se aplica MEF convencional, conforme apresentado por D. Hegen [7]. Uma outra dificuldade que surge em EFG convencional está intimamente relacionada com a forma de impor as condições de

contorno essenciais, utilizando multiplicadores de Lagrange. Este procedimento, quando usado de forma direta no princípio variacional clássico, resulta numa matriz de rigidez que não é positiva definida, apresentando problemas de mal condicionamento quando se trabalha com bases polinomiais de grau elevado.

Uma forma de contornar os problemas relacionados aos multiplicadores de Lagrange é apresentada por Y.Y.Lu, T Belytscho e L.Gu [4], empregando o princípio variacional modificado. Neste caso, é usado o significado físico dos multiplicadores de Lagrange, que correspondem aos vetores tração sobre a fronteira de Dirchlet necessários para forçar as condições de contorno prescritas. A grande vantagem do emprego desta técnica consiste na diminuição do número de graus de liberdade e no surgimento de uma matriz sem grandes problemas de mal condicionamento.

O emprego do método EFG é estendido ao tratamento de domínios constituídos de materiais diferentes de L.W.Cordes, B. Moran[6], onde novamente é usado o significado físico dos multiplicadores de Lagrange para forçar condições de contorno essenciais e na fronteira definida entre os materiais. Outra variação do método é o tratamento do EFG com integração nodal, ou seja, onde não é preciso o conjunto de células para integração numérica Sephen Beissel e Ted Belytscho[3]. Neste caso, o problema da sub-integração, também chamado de instabilidade tensorial é contornado incorporando na equação do princípio variacional o quadrado do resíduo de energia.

Como uma sequência natural ao método EFG, surgem os métodos que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento externo da partição da unidade, como o hp Clouds, de C. A. Duarte e J. T. Oden [8], e o Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM), de J.M. Melenk e I.Babuska [12].

No método hp-Clouds, aqui denominado Método das Nuvens, o espaço de aproximação é construído por enriquecimento da função partição da unidade com sinal. Este enriquecimento podese dar por produto tensorial destas funções com polinômios de Legendre, ou por conjuntos completos de polinômios.

Embora não tenha sido adotado neste trabalho, no qual as condições de contorno

essenciais são impostas de forma fraca, nesta metodologia, as funções de aproximação podem ser construídas de forma a possuir a propriedade delta de Kronecker (C. A. Duarte e J. T. Oden [11]). Nestes casos, as condições de contorno são impostas de forma similar a do MEF, em que são utilizados elementos hierárquicos.

A principal vantagem deste método sobre o EFG é o de poder usar partições de unidade de grau zero (funções de Shepard). Esta característica torna este método muito atrativo para o uso de estratégias adaptativas, devido ao baixo custo computacional necessário para obter o espaço de aproximação. O emprego de funções de Shepard na construção do espaço de aproximação representa uma economia de tempo de processamento, já que não há vantagem em construir funções partição da unidade usando bases polinomiais de grau maior do que zero, como provado numérica e matematicamente por C. A. Duarte e J. T. Oden [8].

O Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) se caracteriza por construir o seu espaço de aproximação por enriquecimento das funções partição da unidade do tipo Lipschitz com funções que apresentam boas propriedades de aproximação (polinômios de Legendre, polinômios de Lagrange e funções que fazem parte do PVC). Dentro das funções partição da unidade possíveis de serem usadas se encontram as funções globais de MEF.

As principais características do método são:

- Habilidade de incluir, a priori, conhecimento sobre o comportamento local da solução no espaço de elementos finitos. Isto o torna apropriado na abordagem de problemas em que as soluções são fortemente oscilatórias e o uso de bases polinomiais não resolve as características principais da solução. Um exemplo de problemas com soluções fortemente oscilatórias são os problemas de elasticidade para materiais laminados, materiais endurecidos e a equação de Helmholtz para pequeno comprimento de onda;
- habilidade de construir o espaço de aproximação de regularidade desejada;
- pelo fato de não precisare de uma malha no sentido clássico de elementos finitos, o

método se torna sem malha;

- pode ser entendido como uma generalização das versões $h p$ e hp de MEF.

Dentre as dificuldades encontradas podem ser citadas as seguintes:

- A escolha da base do espaço de interpolação, pois dela depende o número de condicionamento da matriz de rigidez;
- A incorporação das condições de contorno essenciais no problema, já que as funções de interpolação podem não ter a propriedade seletiva do Delta de Kronecker, tendo que forçar as condições de contorno por meio de funções de penalização ou outras técnicas;
- O processo de integração numérica torna-se mais difícil do que o MEF convencional, já que as funções não estão amarradas à malha, tendo que determinar para cada ponto de integração o número de patch (domínios da partição da unidade) que o cobre, bem como os valores das funções e seus gradientes correspondentes no ponto de integração.

1.1 Objetivos do Trabalho

A finalidade deste trabalho é a análise do comportamento do espaço de aproximação construído mediante o Método das Nuvens na resolução de problemas de elasticidade, especificamente na análise de problemas de placas de Mindlin. Para tal, foram executadas as seguintes tarefas:

- Implementação de uma estrutura computacional para a solução numérica de problemas de elasticidade, segundo os métodos sem malha, em particular o método hp Clouds, ou simplesmente método das nuvens. A estrutura computacional foi construída em POO (programação orientada a objetos), com arquitetura aberta, ou seja, elaborada de forma tal que permita a implementação de problemas específicos, usando a estrutura já existente. Este é o caso da estrutura computacional específica

para o problema de placas de Mindlin (que é o problema específico a ser abordado), problemas de elasticidade plana etc;

- verificação do desempenho do método para o problema de placas de Mindlin, através da análise de:
 - Fenômeno de travamento (Locking);
 - Convergência em termos de erro relativo na norma L^2 ;
 - Convergência local avaliada em termos de valores máximos normalizados em relação à solução analítica.

Como complemento anexo as verificações citadas é feita uma análise comparativa com resultados obtidos utilizando MEF.

1.2 Descrição do Trabalho

1.2.1 Capítulo 1.

Constiu-se de uma introdução à metodologia sem malha apresentada anteriormente.

1.2.2 Capítulo 2.

Este capítulo analisa o problema estático de placas, considerando a deformação cisalhante. Nesta abordagem são apresentadas as hipóteses cinemáticas e as correspondentes equações de deslocamento para teoria de primeira ordem, caracterizando, desta forma, o modelo de placas de Reissner-Mindlin. São definidos para o modelo apresentado o tensor de deformações de Green para pequenos deslocamentos e as equações constitutivas para material elástico linear isotrópico. O princípio da energia potencial conforme K. Washizu [16] é utilizado como ponto de partida para determinar o princípio variacional dos trabalhos virtuais (PTV). São definidas as equações de PTV incorporando as condições de contorno essenciais por meio de funções de penalização (multiplicadores de Lagrange) e pelo Princípio Variacional Modificado, que usa o significado físico dos multiplicadores de

Lagrange conforme Y.Y. Lu, T. Belytschko e L. Gu [4], adaptado ao problema de placas de Mindlin.

1.2.3 Capítulo 3.

Apresentam-se neste capítulo as características fundamentais do espaço de aproximação no método das nuvens. São definidos os fundamentos matemáticos dos métodos precursores do EFG, hp-Clouds e PUFEM, como *Moving Least Square(MLS)* e o *Método da Partição da Unidade*. É comentada de forma sucinta a construção do espaço de aproximação do EFG e do PUFEM, ressaltando suas potencialidades e limitações. Finalmente é abordada de forma detalhada a construção do espaço de aproximação do método hp-Clouds, conforme C. A. Duarte e J. T. Oden [8].

1.2.4 Capítulo 4

Neste capítulo se estabelece a formulação de Bubnov Galerkin para o campo de deslocamentos e, a partir destas, a equação integral do Princípio Variacional Clássico com variáveis discretizadas, no qual surgem as matrizes $\bar{\mathbf{N}}_w$ e $\bar{\mathbf{N}}_\theta$, e os vetores de parâmetros de Lagrange Λ , responsáveis por introduzir as condições de contorno essenciais.

Como uma forma alternativa de contornar as dificuldades de impor as condições de contorno essenciais é apresentada a equação com variáveis discretizadas para o Princípio Variacional Modificado. Como complemento deste capítulo são apresentadas de forma sucinta as características fundamentais da programação orientada a objetos (OOP), bem como a estrutura básica do código CLOUDS++ utilizado neste trabalho.

1.2.5 Capítulo 5

São apresentados e discutidos aqui os resultados numéricos, através dos quais se verifica o comportamento do espaço de aproximação, a influência da geometria e das condições de contorno. São utilizadas nesta análise placas quadradas com apoios rígidos e placas quadradas e circulares engastadas, todas sujeitas a carregamento uniformemente distribuído no domínio. É analisado o fenômeno de travamento (locking), assim como o resultado

de convergência em termos de erro relativo na norma L^2 e de valor local máximo normalizado, para os campos de deslocamento transversal e esforços (momentos e cortantes).

Encerra-se o capítulo comparando os resultados obtidos para convergência local do deslocamento transversal com MEF, para os seguintes casos:

- Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno (apoio rígido, "hard ");
- Placa circular engastada no contorno;
- Placa triangular (triângulo equilátero) simplesmente apoiada no contorno;
- Placa anular simplesmente apoiada no contorno;
- Placa rômbrica simplesmente apoiada no contorno.

1.2.6 Capítulo 6

São discutidas as potencialidades e limitações desta metodologia na abordagem do problema de placas de Mindlin, em função dos resultados numéricos dos exemplos analisados no capítulo cinco. Finalmente são apresentadas sugestões de linhas de pesquisa futuras.

Capítulo 2

Placas de Mindlin

As placas são elementos estruturais que se caracterizam por apresentar uma dimensão (espessura) muito menor que as outras duas e rádio de curvatura infinito, conforme Figura 2.1. Assim, o domínio da placa Ω é definido como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in R^3 / z \in \left[\frac{-t}{2}, \frac{t}{2} \right], (x, y) \in \Sigma, \Sigma \in R^2 \right\}$$

onde Σ representa o plano médio da placa, $\partial\Omega$ o seu contorno e t a espessura.

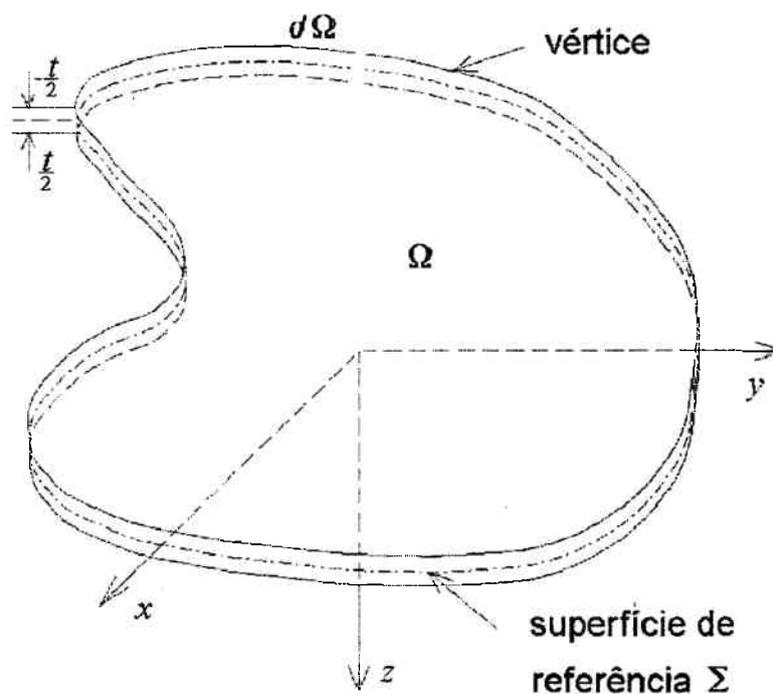


Figura 2.1. Elemento estrutural de placa

O modelo de primeira ordem, também conhecido como modelo de Reissner-Mindlin para placas semi-espessas, não mais considera a rigidez no cisalhamento infinita, como na teoria clássica de Kirchhoff. Neste caso, depois da estrutura deformada, as fibras não permanecem perpendiculares ao plano médio, e sim defasadas de um ângulo γ em relação à perpendicular, correspondente à rotação devida ao cisalhamento. Neste modelo, o campo cinemático é construído em função dos deslocamentos transversais e das rotações de pontos no plano médio da placa e é representado por funções lineares com relação à coordenada z da espessura, o que caracteriza o modelo cinemático de primeira ordem. Partindo da definição do próprio campo de deslocamento, pode-se constatar que as tensões cisalhantes τ_{xz} e τ_{yz} são constantes ao longo da espessura. Este fato caracteriza uma limitação desta teoria já que se sabe que a tensão cisalhante se distribue de forma aproximadamente parabólica ao longo da espessura da placa. Esta limitação foi contornada por Mindlin e Reissner através de um fator de correção da distribuição de tensões de cisalhamento transversais. Este fator de correção foi calculado em comparação com a solução analítica apresentada pela teoria da elasticidade tridimensional, sendo o primeiro valor determinado por Reissner (1945) com $k_c = \frac{5}{6}$, e posteriormente por Mindlin (1951) define $k_c = \frac{\pi^2}{12}$.

2.1 Hipóteses Cinemáticas.

As hipóteses simplificativas básicas para o modelo cinemático de 1ª ordem são:

- (a) Espessura $t \ll L/10$ no qual L é a largura média da placa;
- (b) $\sigma_{zz} = 0$;
- (c) As fibras retas continuam retas após a deformação;
- (d) As fibras perpendiculares ao plano médio não variam de dimensão após a deformação.

Na presente abordagem não são levadas em consideração as deformações de membrana. Isto pode ser feito sem perda da generalidade, já que no modelo de placa de Mindlin os

mecanismos de deformação de esforços de membrana e flexão se encontram desacoplados. Assim, pode-se descrever o deslocamento de um ponto qualquer $P(x, y, z)$ da placa em função do deslocamento vertical w e dos giros θ_x e θ_y do ponto $P_0(x, y)$ da superfície média como :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u_1(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_x(x, y) \\ -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde u_1 , u_2 e u_3 são os deslocamentos nas direções x , y e z respectivamente.

O gradiente de deslocamento é dado por

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -z\theta_{x,x} & -z\theta_{y,x} & w_{,x} \\ -z\theta_{x,y} & -z\theta_{x,y} & w_{,y} \\ -\theta_x & -\theta_y & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

e o tensor de deformações de Green é definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.3)$$

Substituindo 2.2 em 2.3,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -z\theta_{x,x} & -\frac{z}{2}(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) & \frac{1}{2}(w_{,x} - \theta_x) \\ \text{sim} & -z\theta_{y,y} & \frac{1}{2}(w_{,y} - \theta_y) \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Devido à simetria do tensor de deformações de Green, pode-se escrever o mesmo como um vetor de cinco componentes como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_{x,x} \\ -z\theta_{y,y} \\ -z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \\ (w_{,x} - \theta_x) \\ (w_{,y} - \theta_y) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

O vetor acima pode ser decomposto em função dos mecanismos de formação atuantes, ou seja, em uma parcela correspondente à deformações de flexão e à outra cisalhante, como mostrados abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z\varepsilon_b(\mathbf{u}) \quad (2.6a)$$

onde $\varepsilon_b(\mathbf{u})$ é o vetor formado pela parcela simétrica do gradiente de rotações, definido a seguir como:

$$\varepsilon_b(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} -\theta_{x,x} \\ -\theta_{y,y} \\ -(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \end{Bmatrix} \quad (2.6b)$$

Em forma análoga,

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \varepsilon^s(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} w_{,x} - \theta_x \\ w_{,y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \nabla w - \boldsymbol{\theta} \quad (2.7)$$

onde $\boldsymbol{\theta}^T = \{\theta_x, \theta_y\}$.

2.2 Equações constitutivas

Devido ao fato de se considerar uma espessura $t \ll \frac{L}{10}$, admite-se que as tensões normais σ_{zz} são desprezíveis em relação as outras. Esta hipótese incorporada na relação cinemática de um sólido elástico linear isotrópico (Lei de Hooke) permite obter a seguinte equação:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Esta equação constitutiva pode ser expressa levando em consideração os diferentes mecanismos de deformação que ocorrem na placa:

$$\boldsymbol{\sigma}_b(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

ou em forma compacta,

$$\boldsymbol{\sigma}_b(\mathbf{u}) = z\mathbf{C}^1\boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}) \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}) = \mathbf{C}^2\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}) \quad (2.12)$$

onde:

$$\mathbf{C}^1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{C}^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

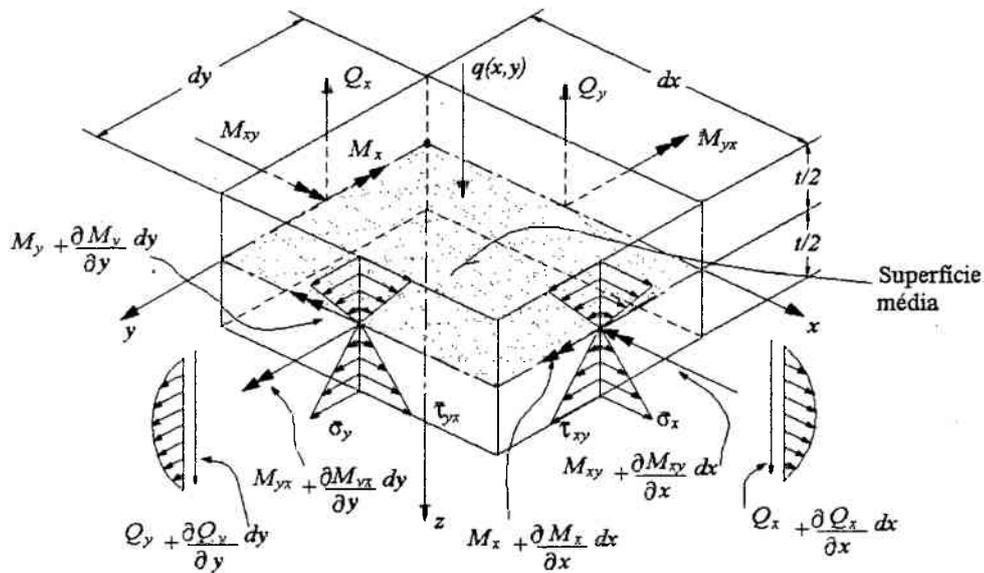


Figura 2.2. Estado de tensões de um elemento de placa em equilíbrio estático

Dado o estado de tensões de um elemento da placa com dimensões dx e dy mostrado na Figura 2.2, os esforços internos estão relacionados aos momentos e esforços de cisalhamento distribuídos dados pelas expressões:

$$M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\sigma_{xx}dz \quad (2.15)$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\sigma_{yy}dz \quad (2.16)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\tau_{xy}dz \quad (2.17)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz}dz \quad (2.18)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz}dz \quad (2.19)$$

Desta forma, utilizando a Eq. 2.11 e integrando os momentos de primeira ordem na espessura define-se:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\boldsymbol{\sigma}_b(\mathbf{u}) dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2\mathbf{C}^1\boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}) dz = \frac{t^3}{12}\mathbf{C}^1\boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}) = \mathbf{C}_b\boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}) \quad (2.20)$$

onde pode-se escrever \mathbf{C}_b como:

$$\mathbf{C}_b = \frac{t^3}{12}\mathbf{C}^1 = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Na Eq. 2.21 D o coeficiente de rigidez à flexão da placa é definido por:

$$D = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \quad (2.22)$$

De forma análoga, a partir da Eq. 2.12, define-se:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} k_s\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}) dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} k_s\mathbf{C}^2\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}) dz = k_s t\mathbf{C}^2\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}) = \mathbf{C}_s\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}) \quad (2.23)$$

A matriz \mathbf{C}_s de coeficientes elásticos tem a forma:

$$\mathbf{C}_s = k_s t\mathbf{C}^1 = \frac{k_s t E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

O Coeficiente k_s é denominado de coeficiente de correção de cisalhamento, sendo adotado o valor de $k_s = \frac{5}{6}$ (Reissner 1945)

2.3 Princípio da energia potencial

O princípio da energia potencial mínima estabelece que a função $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, que minimiza o funcional Π (energia de deformação total) corresponde a uma configuração de equilíbrio do sistema. Partindo da expressão da energia potencial de deformação interna, pode-se determinar o sistema de cargas compatíveis com o modelo cinemático como observa-se a seguir:

Conforme K.Washizu[16], a energia potencial interna de deformação fica definida como:

$$\Pi_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{M}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}) + \mathbf{Q}(u) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u})) d\Sigma \quad (2.25)$$

Por motivos de comodidade no formalismo matemático, define-se a seguir a seguinte igualdade (ver expressão 2.6b)

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b(u) = -\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\theta} \quad (2.26)$$

onde,

$$\overline{\mathbf{M}}(u) = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\nabla^s \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} & \frac{1}{2}(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \\ \text{sim} & \theta_{y,y} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Substituindo as Eqs. 2.26 e 2.7 na Eq. 2.25, pode-se escrever a energia potencial interna de deformação como:

$$\Pi_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (-\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\theta} - \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \nabla w) d\Sigma \quad (2.29)$$

As parcelas do integrando 2.29, que se constituem de produtos internos com gradientes de rotações e gradientes de deslocamentos transversais, podem ser desdobradas, com a intenção de reduzir a ordem da integral.

Parte-se, inicialmente, da definição do Gradiente $\nabla\theta$ como uma soma da parcela simétrica $\nabla^s\theta$ definido em 2.28 responsável pelas deformações, e da parcela anti-simétrica responsável pela rotação de corpo rígido,

$$\nabla\theta = (\nabla^s\theta + \nabla^a\theta) \quad (2.30)$$

na qual $\nabla^a\theta$ representa a parte anti-simétrica do gradiente com a seguinte forma matricial:

$$\nabla^a\theta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\theta_{x,y} - \theta_{y,x}) \\ \frac{1}{2}(\theta_{y,x} - \theta_{x,y}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Com a finalidade de expressar $\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s\theta$ do integrando de 2.29 em função de divergentes, emprega-se a seguinte identidade da álgebra tensorial:

$$\text{div}(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u})\theta) = \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla\theta + \theta \cdot \text{div}\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}). \quad (2.32)$$

Substituindo a Eq. 2.30 em 2.32, obtem-se:

$$\text{div}(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u})\theta) = \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot (\nabla^s\theta + \nabla^a\theta) + \theta \cdot \text{div}\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \quad (2.33)$$

ou,

$$\text{div}(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u})\theta) = \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s\theta + \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^a\theta + \theta \cdot \text{div}\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}). \quad (2.34)$$

Como $\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^a\theta = \mathbf{0}$ em 2.34, já que o produto interno de uma matriz simétrica por uma anti-simétrica é nulo, chega-se à seguinte expressão para $-\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s\theta$:

$$-\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s\theta = -\text{div}(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u})\theta) + \theta \cdot \text{div}\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \quad (2.35)$$

Para determinar $\mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \nabla w$ em função de divergentes procede-se de forma similar à anterior e obtem-se a seguinte expressão para $\mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \nabla w$:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \nabla w = \text{div}(\mathbf{Q}(\mathbf{u}) w) - w \text{div} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \quad (2.36)$$

Substituindo as Eqs. 2.35 e 2.36 em 2.29 obtém-se:

$$\Pi_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Sigma} [-\text{div}(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\theta} \cdot \text{div} \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u})] d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} d\Sigma \right. \\ \left. + \int_{\Sigma} [\text{div}(\mathbf{Q}(\mathbf{u}) w) - w \text{div} \mathbf{Q}(\mathbf{u})] d\Sigma \right\} \quad (2.37)$$

Rescrevendo a Eq. 2.37 chega-se a:

$$\Pi_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Sigma} -\text{div}(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\theta}) d\Sigma + \int_{\Sigma} \boldsymbol{\theta} \cdot \text{div} \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} d\Sigma \right. \\ \left. + \int_{\Sigma} \text{div}(\mathbf{Q}(\mathbf{u}) w) d\Sigma - \int_{\Sigma} w \text{div} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) d\Sigma \right\} \quad (2.38)$$

Aplicando o teorema da divergência às integrais primeira e quarta de 2.38, conclui-se que:

$$\Pi_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Sigma} (\text{div} \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) - \mathbf{Q}(\mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\theta} d\Sigma - \int_{\Sigma} w \text{div} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) d\Sigma - \int_{\partial \Sigma} \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta} d\partial \Sigma + \int_{\partial \Sigma} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} w d\partial \Sigma \right\} \quad (2.39)$$

Portanto, a equação completa do Funcional $\Pi(\mathbf{u})$ pode ser escrita como:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Sigma} [(\text{div} \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) - \mathbf{Q}(\mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\theta} - w \text{div} \mathbf{Q}(\mathbf{u})] d\Sigma \right. \\ \left. + \int_{\partial \Sigma} [-\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} w] d\partial \Sigma \right\} \\ - \int_{\Sigma} q w d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} d\Sigma - \int_{\partial \Sigma_N} \bar{q} w d\partial \Sigma - \int_{\partial \Sigma_N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta} d\partial \Sigma \quad (2.40)$$

Na Eq. 2.40, tem-se que:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi_i(\mathbf{u}) - \Pi_e(\mathbf{u}) \quad (2.41)$$

no qual $\Pi_i(\mathbf{u})$ corresponde à Eq. 2.39, e $\Pi_e(\mathbf{u})$ ao trabalho realizado pelas forças externas, ou seja:

$$\Pi_e(\mathbf{u}) = \int_{\Sigma} qw d\Sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} d\Sigma + \int_{\partial\Sigma_N} \bar{q}w d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma_N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta} d\partial\Sigma \quad (2.42)$$

Minimizando este funcional, chega-se à equação de trabalhos virtuais em que o problema consiste em determinar $\mathbf{u} \in \mathcal{Kin}$ que satisfaz a equação abaixo:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Sigma} [(\text{div}\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) - \mathbf{Q}(\mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\theta}^* - w^* \text{div}\mathbf{Q}] d\Sigma + \quad (2.43)$$

$$\int_{\partial\Sigma} [-\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}w^*] d\partial\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma} qw^* d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\Sigma - \int_{\partial\Sigma_N} \bar{q}w^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma = 0$$

$$\forall \boldsymbol{\theta}^* \quad e \quad \forall w^* \in \mathcal{Var}$$

$$\mathcal{Kin} = \{ \boldsymbol{\theta}, w : \boldsymbol{\theta}, w \in H^1(\Sigma), \boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}}, w = \bar{w} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Sigma_D \} \quad (2.44)$$

$$\mathcal{Var} = \{ \boldsymbol{\theta}^*, w^* : \boldsymbol{\theta}^*, w^* \in H^1(\Sigma), \boldsymbol{\theta}^* = 0, w^* = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Sigma_D \} \quad (2.45)$$

2.3.1 Equações de Equilíbrio

Partindo da Eq. 2.43 obtem-se a seguinte configuração de equilíbrio:

Em Σ :

$$\text{div}\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) - \mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \mathbf{m} \quad (2.46)$$

$$\text{div}\mathbf{Q}(\mathbf{u}) + q = 0 \quad (2.47)$$

Considerando uma base cartesiana, essas equações podem ser escritas como:

$$\partial \bar{M}_{xx} / \partial x + \partial \bar{M}_{yx} / \partial y - Q_x = m_x \quad (2.48)$$

$$\partial \bar{M}_{yx} / \partial x + \partial \bar{M}_{yy} / \partial y - Q_y = m_y \quad (2.49)$$

$$\partial Q_x / \partial x + \partial Q_y / \partial y + q = 0 \quad (2.50)$$

Em $\partial \Sigma_N$, tem-se:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{m}_s \quad (2.51)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = q_s \quad (2.52)$$

Procedendo de forma similar para as Eqs. 2.51 e 2.52, chega-se a:

$$\bar{M}_{xx} n_x + \bar{M}_{xy} n_y = -m_{sx} \quad (2.53)$$

$$\bar{M}_{yx} n_x + \bar{M}_{yy} n_y = -m_{sy} \quad (2.54)$$

$$Q_x n_x + Q_y n_y = q_s \quad (2.55)$$

2.4 Uso de Multiplicadores de Lagrange para imposição das condições de contorno essenciais

No MEF tradicional as funções de interpolação apresentam a propriedade delta de Kronecker permitindo, desta forma, impor condições de contorno essenciais de forma forte. No procedimento aqui adotado, não se conta com esta propriedade. Portanto, as condições de contorno devem ser incorporadas através da combinação linear dos parâmetros das

funções que têm valores não-nulos nesta fronteira. Esta combinação pode ser obtida mediante a utilização de multiplicadores de Lagrange, como indicado a seguir. O problema de equilíbrio pode ser expresso mediante a minimização do funcional $\Pi(\mathbf{u})$, ou seja:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{K}_{in}} \Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u}). \quad (2.56)$$

Na Eq. 2.56, o funcional bilinear $\frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ e linear $l(\mathbf{u})$ tem as seguintes formas para o problema de placas,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Sigma} (\mathbf{M}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}) + \mathbf{Q}(u) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u})) d\Sigma \quad (2.57)$$

$$l(\mathbf{u}) = \int_{\Sigma} q w d\Sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} d\Sigma + \int_{\partial\Sigma_N} \bar{q} w d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma_N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta} d\partial\Sigma \quad (2.58)$$

Observe-se que a Eq. 2.56 corresponde ao problema de minimização de um funcional convexo em \mathbf{u} , dentro do conjunto restrito

$$\mathcal{K}_{in} = \{ \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, w) : \boldsymbol{\theta}, w \in H^1(\Sigma), \boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}}, w = \bar{w} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Sigma_D \} \quad (2.59)$$

As propriedades de $\Pi(\mathbf{u})$ assim como da restrição sobre \mathbf{u} garantem, pelo teorema de Lax-Migram (Oden [33])

a existência e unicidade da solução.

Por outro lado, a utilização de multiplicadores de Lagrange permite eliminar a restrição explícita sobre \mathbf{u} na fronteira de Dirichlet. Se \mathbf{u} é a solução do problema 2.56, isto é.

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{K}_{in}} \Pi(\hat{\mathbf{u}}) \quad (2.60)$$

então existem as funções $\boldsymbol{\lambda}_b \in L^2(\partial\Sigma_D)$ e $\lambda_w \in L^2(\partial\Sigma_D)$ tal que o lagrangeano

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_b, \lambda_w) = \Pi(\mathbf{u}) + [\boldsymbol{\lambda}_b, (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})]_{\partial\Sigma_D} + [\lambda_w, (w - \bar{w})] \quad (2.61)$$

é estacionário em, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}_b$ e λ_w (Luenberger[31]):

$$\langle \delta \mathbf{u} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_b, \lambda_w), \mathbf{u}^* \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in H^1(\Sigma) \quad (2.62)$$

$$\langle \delta \boldsymbol{\lambda}_b \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_b, \lambda_w), \boldsymbol{\lambda}_b^* \rangle + \langle \delta \lambda_w \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_b, \lambda_w), \lambda_w^* \rangle = 0 \quad (2.63)$$

$$\forall \boldsymbol{\lambda}_b^* e \lambda_w^* \in L^2(\partial \Sigma_D)$$

Operando as Eqs 2.62 e 2.63 chega-se às seguintes condições de estacionário:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) - l(\mathbf{u}^*) - \int_{\partial \Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial \Sigma - \int_{\partial \Sigma_D} \lambda_s w^* d\partial \Sigma = 0 \quad (2.64)$$

$$\int_{\partial \Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b^* \cdot (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) d\partial \Sigma + \int_{\partial \Sigma_D} \lambda_s^* (w - \bar{w}) d\partial \Sigma = 0. \quad (2.65)$$

Assim, as Eqs. 2.64 e 2.65 definem o equilíbrio do corpo já incorporadas às condições de contorno. Colocando estas em forma explicita, é possível afirmar que o problema de equilíbrio consiste em determinar $\boldsymbol{\theta}$ e $w \in H^1(\Sigma)$ e $\boldsymbol{\lambda}_b$ e $\lambda_s \in L^2(\partial \Sigma_D)$, de forma que:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} [\mathbf{M}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}^*) + \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}^*)] d\Sigma - \int_{\Sigma} q w^* d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\Sigma \\ - \int_{\partial \Sigma_N} \bar{q} w^* d\partial \Sigma - \int_{\partial \Sigma_N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial \Sigma \\ - \int_{\partial \Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial \Sigma - \int_{\partial \Sigma_D} \lambda_s w^* d\partial \Sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\int_{\partial \Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b^* \cdot (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) d\partial \Sigma + \int_{\partial \Sigma_D} \lambda_s^* (w - \bar{w}) d\partial \Sigma = 0 \quad (2.67)$$

$$\forall \boldsymbol{\theta}^* e w^* \in H^1(\Sigma) \quad e \quad \boldsymbol{\lambda}_b^* e \lambda_s^* \in L^2(\partial \Sigma_D).$$

O sistema de equações formado por 2.66 e 2.67 constitui o princípio variacional clássico, forçando as condições de contorno essenciais através de multiplicadores de Lagrange.

Este princípio variacional tem o inconveniente de gerar uma matriz de rigidez que não é positiva definida, além de apresentar problemas de mal condicionamento quando se trabalha com funções de aproximação obtidas por enriquecimento. Como no caso de placas é comum trabalhar com funções de interpolação de ordem $p=3$ e $p=4$ para obter uma boa precisão, optou-se por usar o princípio variacional modificado, no qual é utilizado o significado físico dos multiplicadores de Lagrange que, no problema de placas, correspondem as componentes de momento e forças cortantes nas fronteiras de Dirichlet. Através deste procedimento se obtém uma matriz de rigidez similar à utilizada em MEF convencional, sem problemas graves de mal condicionamento e com redução do número de graus de liberdade do problema. Entretanto, como no Princípio Variacional Modificado os multiplicadores de Lagrange são colocados em função dos deslocamentos, a qualidade de resultados é inferior ao procedimento anterior.

2.5 Princípio Variacional Modificado

Subtraindo a Eq.2.67 da Eq. 2.66, resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} [\mathbf{M}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}^*) + \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}^*)] d\Sigma - \int_{\Sigma} q w^* d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\Sigma \quad (2.68) \\ & - \int_{\partial\Sigma_N} \bar{q} w^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma \\ & - \int_{\partial\Sigma_D} \lambda_s w^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b^* \cdot (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \lambda_s (w - \bar{w}) d\partial\Sigma = 0 \end{aligned}$$

$$\forall \boldsymbol{\theta}^* \text{ e } w^* \in H^1(\Sigma) \text{ e } \boldsymbol{\lambda}_b^* \text{ e } \lambda_s^* \in L^2(\partial\Sigma_D)$$

Substituindo as identidades 2.35 e 2.36 na primeira integral de 2.68, obtém-se:

$$\int_{\Sigma} [-div(\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\theta}^*) + div \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta}^* - \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta}^*] d\Sigma$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Sigma} [\operatorname{div}(\mathbf{Q}(\mathbf{u}) w^*) - \operatorname{div} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) w^*] d\Sigma - \int_{\Sigma} q w^* d\Sigma \\
& - \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\Sigma - \int_{\partial\Sigma_N} \bar{q} w^* - \int_{\partial\Sigma_N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma \\
& - \int_{\partial\Sigma_D} \lambda_s w^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b^* \cdot (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \lambda_s^* (w - \bar{w}) d\partial\Sigma = 0
\end{aligned}$$

$$\forall \boldsymbol{\theta}^* \text{ e } w^* \in H^1(\Sigma) \text{ e } \boldsymbol{\lambda}_b^* \text{ e } \lambda_s^* \in L^2(\partial\Sigma_D)$$

Aplicando o teorema da divergência às primeiras parcelas do primeiro e segundo integrando e agrupando os termos em função de $\boldsymbol{\theta}^*$ e w^* , a equação toma a forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) - \mathbf{Q}(\mathbf{u}) - \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\Sigma - \int_{\Sigma} (\operatorname{div} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) + q) w^* d\Sigma \\
& + \int_{\partial\Sigma_N} (\mathbf{Q}_n(\mathbf{u}) - \bar{q}) w^* d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma_N} (-\mathbf{M}_n(\mathbf{u}) - \bar{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma \\
& + \int_{\partial\Sigma_D} (-\mathbf{M}_n(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\lambda}_b) \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma_D} (\mathbf{Q}_n(\mathbf{u}) - \lambda_s) d\partial\Sigma \\
& - \int_{\partial\Sigma_D} \boldsymbol{\lambda}_b^* \cdot (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \lambda_s (w - \bar{w}) d\partial\Sigma = 0
\end{aligned}$$

$$\forall \boldsymbol{\theta}^* \text{ e } w^* \in H^1(\Sigma) \text{ e } \boldsymbol{\lambda}_b^* \text{ e } \lambda_s^* \in L^2(\partial\Sigma_D)$$

Esta última expressão permite evidenciar o conjunto de equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno a que está submetida a placa. Ou seja:

em Σ

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) - \mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \mathbf{m} \quad (2.69)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{Q}(\mathbf{u}) + q = 0 \quad (2.70)$$

em $\partial\Sigma_N$

$$\mathbf{M}_n(\mathbf{u}) = -\bar{\mathbf{m}} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{Q}_n(\mathbf{u}) = \bar{q} \quad (2.72)$$

em $\partial\Sigma_D$

$$\mathbf{M}_n(\mathbf{u}) = -\lambda_b \quad (2.73)$$

$$\mathbf{Q}_n(\mathbf{u}) = \lambda_s \quad (2.74)$$

$$\theta = \bar{\theta} \quad (2.75)$$

$$w = \bar{w} \quad (2.76)$$

As Eqs. 2.73 e 2.74, mostram o significado físico dos multiplicadores λ_b e λ_s . Assim, substituindo 2.73 e 2.74 em 2.68 se obtém a seguinte expressão para o princípio variacional modificado:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} [\mathbf{M}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{u}^*) + \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}^*)] d\Sigma - \int_{\Sigma} q w^* d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\Sigma \quad (2.77) \\ & - \int_{\partial\Sigma_N} \bar{q} w^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma_D} \mathbf{M}_n(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta}^* d\partial\Sigma - \\ & \int_{\partial\Sigma_D} \mathbf{Q}_n(\mathbf{u}) w^* d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma_D} \mathbf{M}_n(\mathbf{u}^*) \cdot (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \mathbf{Q}_n(\mathbf{u}^*) (w - \bar{w}) d\partial\Sigma = 0 \end{aligned}$$

$$\forall \theta^* \text{ e } w^* \in H^1(\Sigma)$$

Na Eq. 2.77 se tem:

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{n}_b \mathbf{M} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{xx}n_x + M_{xy}n_y \\ M_{xy}n_x + M_{yy}n_y \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

$$Q_n = \mathbf{n}_s \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = Q_x n_x + Q_y n_y \quad (2.79)$$

As formulações e definições apresentadas neste capítulo fundamentam as diretrizes teóricas para o capítulo quatro, onde será empregado o método de Bobnov-Galerkin para obter o sistema de equações discretizadas.

Capítulo 3

Método das Nuvens hp

O método "hp-Clouds", ou Método das Nuvens, igualmente ao Método de Elementos Finitos (MEF), é orientado à construção automática de uma base de funções capazes de aproximar a solução de problemas de valores no contorno.

Esta família de funções, denominadas simplesmente de Nuvens hp, estão definidas igualmente ao MEF em suportes compactos dentro do domínio. Estes suportes, denominados nuvens, diferenciam-se dos suportes do MEF convencional por não estarem ligados a uma conectividade específica. Por este motivo, desaparecem os conceitos de malha e elemento, e permanece o de funções globais de aproximação (Galerkin). A malha se resume a um conjunto de células de integração, sendo, portanto, desnecessário construí-la com os cuidados que seriam necessários em MEF. A única exigência é a distribuição adequada de pontos sobre o domínio, o que dependera do problema a ser analisado.

Como será visto, este método permite com relativa facilidade, a incorporação de funções de enriquecimento adequadas ao problema em análise, inclusive de funções que fazem parte da solução do P.V.C (problema de valores no contorno).

Inicia-se este capítulo apresentando os fundamentos matemáticos da construção do espaço de aproximação do método Moving Least Square (MLS) da versão de P. Lankaster e K.Salkauska [26], e das funções partição da unidade, que correspondem ao ponto de partida do Método de Nuvens usado neste trabalho.

A seguir, são mostrados os métodos que constróem seus espaços de aproximação com funções MLS, como é o caso do método Element Free Galerkin (EFGM), de T.Belytsko,

Y.Y. Lu e L. Gu[2], e os métodos que constroem a base do espaço de aproximação por produto da partição de unidade com funções que apresentam boas propriedades de interpolação. Dentre estes últimos são citados o método Partition of Unity Finit Element (PUFEM), de I. Babuska e J. M. Melenk[12], e o método hp Clouds, de C.Armando Duarte e J.Tinsley Oden[8]. Este último é apresentado de forma mais detalhada por ser o tema principal deste trabalho.

3.1 Partição da Unidade

O método da partição da unidade de uso difundido em simulações numéricas por apresentar excelentes propriedades de interpolação, constrói o seu espaço a partir de um conjunto de funções $\{\varphi_\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^N$ associadas à cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, para $\alpha = 1, \dots, N$ (N é o número de sub-domínios Ω_α que cobrem Ω). Assim, que para um domínio Ω definido pelo PVC(problema de valores no contorno) se tem que $\Omega \subset \cup_{\alpha=1}^N \Omega_\alpha$. As funções $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ se caracterizam por serem não nulas unicamente dentro de uma região compacta $supp\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ ($supp$ representa o suporte da função), e por ser a soma dos valores das funções e cada ponto do domínio Ω igual à unidade.

As características citadas anteriormente são as que definem uma partição da unidade independentemente do espaço ao qual suas funções pertencem. Quanto ao espaço no qual estas funções são definidas, elas são classificadas em partições de unidade com sinal e do tipo Lipschitz, cujas propriedades são dadas a seguir.

3.1.1 Funções partição da unidade com sinal

As funções que caracterizam uma partição de unidade com sinal não necessitam satisfazer a condição $\varphi_\alpha(\mathbf{x}) \geq 0 \forall x \in \Omega$ e apresentam as seguintes propriedades:

1. $\varphi_\alpha(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega_\alpha)$
2. $\sum \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \forall x \in \Omega$

3.1.2 Funções partição da unidade tipo Lipschitz

Estas funções se caracterizam por $\varphi_\alpha \in H^1(\overline{\Omega_\alpha})$, em que para $n = 1, 2, 3$ apresenta as seguintes propriedades:

1. $\text{supp } \varphi_\alpha \in \overline{\Omega_\alpha}$, isto é, cada função está definida no fechamento da cobertura Ω_α .
2. $\sum \varphi_\alpha(x) = 1$
3. $\|\varphi_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\infty$
4. $\|\nabla \varphi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_G/\text{diam}(\Omega_\alpha)$
5. A partição é de grau m se $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset C^m(\mathbb{R}^n)$.

Em função das características acima citadas, a escolha de uma partição de unidade é baseado em alguns aspectos, tais como:

- Complexidade da geometria do domínio;
- regularidade requerida a partir da aproximação C^0 , C^1 , ou ordens maiores;
- a importância do caráter sem malha da aproximação.

Os fundamentos matemáticos das funções partição da unidade e das funções MLS lançam as bases para a construção dos espaços de aproximação dos métodos EFGM, PUFEM e hp-Clouds, os quais são comentados a seguir.

3.2 Funções Moving Least Square (MLS).

As funções Moving Least Square (MLS) foram usadas pela primeira vez por Nayroles, que as desenvolveu partindo das noções dos Diffuse Elements. Posteriormente, P. Lankaster e K.Salkauska [26] propoem um novo enfoque, que é usado neste trabalho.

Antes, porém, de entrar na construção das funções MLS, será apresentado como conhecimento básico indispensável na compreensão deste procedimento o método de aproximação dos Mínimos Quadrados e Mínimos Quadrados Móveis para \mathbb{R}^1 .

3.2.1 Método dos Mínimos Quadrados

A idéia fundamental do método é obter o polinômio que minimiza o erro quadrático com relação a um conjunto de valores conhecidos da função a ser aproximada, que pode ser descrito pela seguinte abordagem matemática.

Sejam N pares de valores (x_α, f_α) onde $x_\alpha \in Q = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ e $f_\alpha \in \mathbf{f}^T = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ que corresponde ao vetor de valores conhecidos da função a ser aproximada nos pontos do conjunto Q . A finalidade do problema é determinar o polinômio $p(x) = \{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m\}$ de grau m , com $m < N$ que melhor represente o valor da função nestes pontos. Para tal, define-se o erro quadrático a ser minimizado pela expressão,

$$\mathbb{E} = \sum_{\alpha=0}^N [p(x_\alpha) - f_\alpha]^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{f}) \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{p}^T = \{p_0, p_1, \dots, p_N\}$.

Definindo os vetores $\mathbf{a}^T = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ e $\mathbf{X}^T = \{1, x, x^2, \dots, x^m\}$, o polinômio $p(x)$ pode ser escrito como

$$p(x) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.2)$$

O melhor polinômio é aquele cujo \mathbb{E} minimiza, isto é,

$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial a_j} = \sum_{\alpha=0}^N 2[p(x_\alpha) - f_\alpha] \frac{\partial p(x_\alpha)}{\partial a_j} = 2 \sum_{\alpha=0}^N x_\alpha^j [p(x_\alpha) - f_\alpha] = 0 \quad (3.3)$$

onde $j = 0, \dots, m$, $\alpha = 1, \dots, N$.

A Eq. 3.3 dá como resultado o seguinte sistema linear,

$$\begin{bmatrix} \sum_{\alpha} x_{\alpha}^0 & \sum_{\alpha} x_{\alpha}^1 & \dots & \sum_{\alpha} x_{\alpha}^m \\ \sum_{\alpha} x_{\alpha}^1 & \sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 & \dots & \sum_{\alpha} x_{\alpha}^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{\alpha} x_{\alpha}^m & \sum_{\alpha} x_{\alpha}^{m+1} & \dots & \sum_{\alpha} x_{\alpha}^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha} f_{\alpha} \\ \sum_{\alpha} x_{\alpha}^1 f_{\alpha} \\ \vdots \\ \sum_{\alpha} x_{\alpha}^m f_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Escrevendo o mesmo em forma matricial se obtém,

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{a} = \mathbf{V}^T \mathbf{f} \quad (3.5)$$

em que

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & \cdots & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & \cdots & \cdots & x_N^m \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

No método dos mínimos quadrados o vetor \mathbf{a} é constituído de valores constantes, sendo o erro, em qualquer ponto x do domínio de aproximação, influenciado igualmente por todos os pontos de Q . Uma proposta para aumentar a precisão da aproximação é comentada a seguir no Método dos Mínimos Quadrados Móveis.

3.2.2 Método dos Mínimos Quadrados Móveis.

O método dos mínimos quadrados móveis introduz uma função peso $\mathcal{W}_\alpha(x)$ no cálculo do erro, de tal forma que reduza ou elimine a influência dos pontos $x_\beta \in Q$ fora de uma certa vizinhança do ponto $x \in [x_1, x_N]$ onde se quer determinar o erro. Portanto, o erro de aproximação num ponto arbitrário x é dado por:

$$\mathbb{E}(x) = \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha(x) [p(x_\alpha) - f_\alpha]^2 \quad (3.7)$$

Aplicando as condições necessárias de mínimo $\partial E / \partial a_j = 0$ determinam-se os coeficientes a_j correspondentes ao polinômio que minimiza o erro no ponto x , como segue:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(x)}{\partial a_j} = 2 \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha(x) [p(x_\alpha) - f_\alpha] \partial p(x_\alpha) / \partial a_j = 0 \quad (3.8)$$

$$\sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha(x) [p(x_\alpha) - f_\alpha] x_\alpha^j = 0 \quad (3.9)$$

onde $j = 0, \dots, m$, $\alpha = 1, \dots, N$.

Partindo da definição 3.2 e da equação 3.9, chega-se ao seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{bmatrix} \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^0 & \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^1 & \cdots & \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^m \\ \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^1 & \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^2 & \cdots & \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^m & \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^{m+1} & \cdots & \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^{2m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^0 f_\alpha \\ \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^1 f_\alpha \\ \cdots \\ \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_\alpha x_\alpha^m f_\alpha \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Definindo $\mathbf{W}(x) = \text{Diag} [\mathcal{W}_0(x), \mathcal{W}_1(x), \mathcal{W}_2(x), \dots, \mathcal{W}_N(x)]$, pode-se escrever o sistema na forma matricial a seguir:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{W}(x) \mathbf{V} \mathbf{a} = \mathbf{V}^T \mathbf{W}(x) \mathbf{f} \quad (3.11)$$

Observa-se agora que os coeficientes $a_i = a_i(x)$ com $i = 1, \dots, m$ são funções de x , ao contrário dos mínimos quadrados, nos quais estes eram constantes.

Usando como ponto de partida o método dos mínimos quadrados móveis, constrõem-se as funções MLS, provando posteriormente o caráter de partição de unidade com sinal destas. Para tal, define-se o seguinte problema:

Seja Ω um domínio aberto em \mathbb{R}^n $n = 1, 2, 3$ limitado por uma fronteira $\partial\Omega$, como mostrado na Figura 3.1, e Q_N um conjunto arbitrário de N pontos $\mathbf{x}_\alpha \in \bar{\Omega}$, definido por $Q_N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$, onde $\bar{\Omega}$ é o fechamento de Ω .

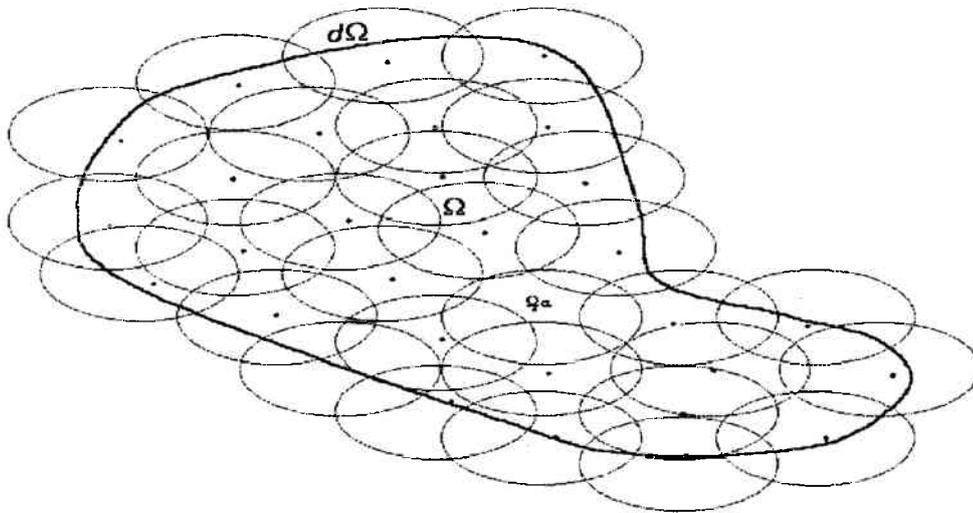


Figura 3.1. Cobertura aberta do domínio Ω pelo conjunto $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$

Seja $\mathfrak{S}_N = \{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma cobertura aberta finita de Ω constituída de N nuvens Ω_α , com centros em \mathbf{x}_α $\alpha = 1, 2, \dots, N$ e tendo as seguintes propriedades:

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \overline{\Omega}_\alpha \quad (3.12)$$

Uma nuvem Ω_α pode ter qualquer formato, sendo que nesta abordagem é usado o domínio esférico definido por:

$$\Omega_\alpha = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_\alpha\| < h_\alpha\} \quad (3.13a)$$

Seja $\mathcal{W}_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $n = 1, 2, 3$. uma função peso com as propriedades:

- $\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) \geq 0 \forall \mathbf{y} \in \Omega$
- $\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) = \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y} - \mathbf{x}_\alpha)$

em que a função $\mathcal{W}_\alpha \in C_0^s(\mathcal{B}_{h_\alpha})$, isto é, \mathcal{W}_α pertence ao espaço de funções que são contínuas de suporte compacto e que possuem as $s \geq 0$ derivadas contínuas, definidas numa bola \mathcal{B} de rádio h , com centro no ponto \mathbf{x}_α .

Seja, ainda, o produto interno ponderado num ponto \mathbf{y} definido por

$$(f, g)_\mathbf{y} = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) f(\mathbf{x}_\alpha) g(\mathbf{x}_\alpha) \quad f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in C^l(\Omega), \quad l \geq 0 \quad (3.13b)$$

e atrelado à seguinte proposição:

Proposição 1: Dado um conjunto de funções $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, onde para $i = 1, \dots, m$, $p_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $p_i \in C^l(\Omega)$ $l \geq 0$, diz-se que se a função peso \mathcal{W}_α definida acima e as funções p_i são tais que $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ se tem:

$$\sum_{i=0}^m a_i (p_i, p_k)_\mathbf{x} \equiv 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, m \text{ se e somente se } a_i \equiv 0 \text{ para } i = 1, \dots, m$$
 a expressão 3.13b é um produto interno no espaço definido por \mathbf{p} .

As condições necessárias e suficientes para satisfazer a proposição 1 são apresentadas em C. A. Duarte e J. T. Oden [8].

Portanto, para uma função contínua $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ define-se a aproximação num ponto $\mathbf{y} \in \bar{\Omega}$ por mínimos quadrados móveis por

$$(L_{\mathbf{y}}u)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i(\mathbf{y}) p_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{p}_i \in \mathbf{P}^T = \{p_i\}_{i=1}^m \quad (3.14)$$

onde os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{y}) = \{a_i(\mathbf{y})\}_{i=1}^m$ são determinados com a resolução do problema abaixo.

Encontrar $\mathbf{a}_i^*(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$ que minimiza o funcional J no ponto \mathbf{y} , onde:

$$J = \left(u - \sum_{i=1}^m a_i p_i, u - \sum_{i=1}^m a_i p_i \right)_{\mathbf{y}} \quad (3.15)$$

O funcional J definido em 3.15 nada mais é que o produto interno ponderado definido em 3.13b.

Aplicando condições necessárias de mínimo ao funcional definido em 3.15, chega-se a:

$$\sum_{i=1}^m (p_i, p_j)_{\mathbf{y}} a_i^* = (u, p_j)_{\mathbf{y}}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.16)$$

Já que a proposição 1 é satisfeita, a matriz A_{ij} correspondente ao produto interno $\sum_{i=1}^m (p_i, p_j)_{\mathbf{y}}$ não é singular e, portanto, pode-se escrever 3.16 na forma do seguinte sistema linear:

$$A_{ij} a_i^* = b_j$$

em que os a_i^* são obtidos invertendo a matriz $\mathbf{A} = (A_{ij})$ como segue:

$$a_i^*(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^m A_{ij}^{-1} (u, p_j)_{\mathbf{y}} \quad (3.17)$$

Substituindo $a_i^*(\mathbf{y})$ definido em 3.17 na expressão 3.14 se obtém

$$(L_{\mathbf{y}}u)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^m A_{ij}^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{y}) p_j(\mathbf{x}_{\alpha}) u_{\alpha} \quad (3.18)$$

ou ainda,

$$(L_y u)(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}^y(\mathbf{x}) u_{\alpha} \quad (3.19)$$

onde :

$$\varphi_{\alpha}^y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_i(\mathbf{x}) A_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{y}) p_j(\mathbf{x}_{\alpha}) \quad (3.20)$$

Se se movimentar o ponto de aproximação \mathbf{y} junto com a variável \mathbf{x} de avaliação da função, isto é, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, chega-se a

$$\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_i(\mathbf{x}) A_{ij}^{-1}(\mathbf{x}) \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_{\alpha}). \quad (3.21)$$

A expressão 3.21 pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

na qual,

- $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P}$

onde,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ p_1(x_N) & p_2(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} W(x-x_1) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & W(x-x_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & W(x-x_N) \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{B}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{\alpha})$

Nesta equação $\mathbf{x}_{\alpha} \in \bar{\Omega}$ e corresponde ao centro da nuvem. Será provado a seguir que 3.22 satisfaz as propriedades 1 e 2 das funções partição da unidade com sinal.

Lema 3.1

1. Se $p_i \quad i = 1, 2, \dots, m. \in C^m(\Omega)$ e $\mathcal{W}_\alpha \quad \alpha = 1, \dots, N \in C^l(\Omega)$, então:

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) \in C_0^{\min(m,l)}(\Omega). \quad (3.23)$$

Prova:

Partindo das seguintes definições abaixo,

$$\mathbf{C}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

$$\varphi_\alpha(x) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_\alpha(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{C}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{x}) \quad (3.26)$$

e usando a fórmula de Leibnitz se obtém:

$$\begin{aligned} D^\beta(\mathbf{A}\mathbf{C}_\alpha) &= \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \mathbf{A} D^{\beta-\gamma} \mathbf{C}_\alpha = D^\beta \mathbf{B}_\alpha \\ &= \mathbf{A} D^\beta \mathbf{C}_\alpha + \sum_{\substack{\gamma < \beta \\ \gamma \neq 0}} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \mathbf{A} D^{\beta-\gamma} \mathbf{C}_\alpha \end{aligned}$$

$$D^\beta \mathbf{C}_\alpha = \mathbf{A}^{-1} \left[D^\beta \mathbf{B}_\alpha - \sum_{\substack{\gamma < \beta \\ \gamma \neq 0}} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \mathbf{A} D^{\beta-\gamma} \mathbf{C}_\alpha \right] \quad (3.27)$$

A expressão 3.27 faz sentido desde que \mathbf{A}^{-1} exista. Assumindo a diferenciabilidade de \mathcal{W}_α , $D^\beta \mathbf{B}_\alpha$ e $D^\beta \mathbf{A}$ igualmente existem se $|\beta| \leq l$. As derivadas de baixa ordem de \mathbf{C}_α que aparecem do lado direito podem ser determinadas usando a expressão acima. Desta forma, chega-se a que $\mathbf{C}_\alpha \in C^l(\Omega)$ e a conclusão do Lema é imediata.

1. Se $1 \in \mathbf{p}$, já que as funções $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ definidas em 3.21 são \mathbf{p} redutíveis no conjunto Q_N , a segunda condição das funções partição de unidade com sinal é satisfeita.

Prova:

Sendo $p_l \in \mathbf{p}$ então,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N p_l(\mathbf{x}_\alpha) \varphi_\alpha(\mathbf{x}) &= \sum_{\alpha=1}^N p_l(\mathbf{x}_\alpha) \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1}(\mathbf{x}) \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_\alpha) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha=1}^N p_l(\mathbf{x}_\alpha) p_j(\mathbf{x}_\alpha) \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1}(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m A_{lj}(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1}(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

como a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é simétrica por construção, já que $\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P} = (\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P})^T$, pode-se escrever na forma indicial que $A_{kj}(\mathbf{x}) = A_{jk}(\mathbf{x})$, e ainda $A_{lj}(\mathbf{x}) A_{jk}^{-1}(\mathbf{x}) = A_{lj}(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1}(\mathbf{x}) = \delta_{lk}$. Portanto, chega-se a

$$\sum_{\alpha=1}^N p_l(\mathbf{x}_\alpha) \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \delta_{lk} p_k(\mathbf{x}) = p_l(\mathbf{x}). \quad (3.28)$$

Desde que $1 \in \mathbf{p}$, partindo de 3.28 obtém-se:

$$1 = \sum_{\alpha=1}^N 1(\mathbf{x}_\alpha) \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \quad (3.29)$$

$$\forall \mathbf{x}_\alpha \in \Omega_\alpha$$

A identidade 3.29 comprova a segunda propriedade da partição da unidade.

As partições de unidade que serão apresentadas a seguir são funções de aproximação MLS (Moving Least Square) obtidas com base polinomial $\mathbf{p} = \{1\}$, também conhecidas como funções de Shepard. Para $\mathbf{p} = \{1\}$, 3.21 toma as formas,

$$B_\alpha(\mathbf{x}) = \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x})$$

$$A^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sum_{\beta=1}^N \mathcal{W}_\beta(\mathbf{x})}$$

e conseqüentemente

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x})}{\sum_\beta \mathcal{W}_\beta(\mathbf{x})} \quad (3.30)$$

3.2.3 Funções Peso

Um componente fundamental na construção das funções *MLS*, são as funções peso $\mathcal{W}(\mathbf{x})$, pois delas é herdada a regularidade das primeiras. A seguir são comentados alguns exemplos de funções peso de uso mais difundido, juntamente com as características das funções de aproximação com elas obtidas em \mathbb{R}^1 .

1. Funções peso exponenciais: estas funções são usadas para construir o espaço de aproximação no método Element Free Galerkin (EFG), conferindo às funções MLS obtidas a partir delas regularidade infinita. Um exemplo das mesmas é dado a seguir:

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(x-x_\alpha)^2/d}, & \|x - x_\alpha\| \leq d \\ 0, & \|x - x_\alpha\| > d \end{cases} \quad (3.31)$$

Na função 3.31, d é uma constante real e arbitrária que limita o suporte da função.

2. Funções peso Spline: São aquelas construídas com funções spline cúbicas e de quarta ordem. A seguir são mostrados dois exemplos desta classe de funções, sendo o primeiro uma função peso spline cúbica usada no método Smooth Particles Hydrodynamics (SPH) para construir as funções de aproximação, e o segundo corresponde a função peso spline de quarta ordem usada neste trabalho.

$$\mathcal{W}_\alpha(s, h) = \frac{2}{3h} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{para } q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & \text{para } 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & \text{para } q \geq 2 \end{cases} \quad (3.32a)$$

Na função definida em 3.32(a) se tem que $s = \|x - x_\alpha\|$, h é o raio do $\text{supp}\mathcal{W}_\alpha(s, h)$ e $q = s/h$.

$$\mathcal{W}_\alpha(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{\pi}} \left(1 - \frac{\|y-x_\alpha\|}{h_\alpha}\right)^4, & \text{se } \|y - x_\alpha\| < h_\alpha \\ 0, & \text{se } \|y - x_\alpha\| \geq h_\alpha \end{cases} \quad (3.32b)$$

3. **Funções peso com singularidades** : estas funções se caracterizam por apresentar singularidade no ponto $x = x_\alpha$, como as funções mostradas a seguir:

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \frac{1}{(x - x_\alpha)^k} \quad (3.33)$$

e

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \begin{cases} ax^{-k}\{1-(x-x_\alpha/2)^2\}^k, & \|x - x_\alpha\| \leq d \\ 0, & \|x - x_\alpha\| > d \end{cases} \quad (3.34)$$

A constante d pode ser estendida ao infinito; a e k são também constantes pré-determinadas de forma a alterar o comportamento da curva.

Para eliminar o inconveniente da singularidade é usado o processo da normalização no qual para um conjunto de funções $\{\mathcal{W}_\alpha(x)\}_{\alpha=1}^N$ estas são redefinidas da seguinte forma:

$$\mathcal{U}_\alpha(x) = \frac{\mathcal{W}_\alpha(x)}{\sum_{\beta=1}^N \mathcal{W}_\beta(x)} \quad (3.35)$$

onde os \mathcal{U}_α são as novas funções.

As funções definidas em 3.34 gozam das seguintes propriedades:

- $\mathcal{U}_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta = 1, \dots, N.$
- $0 \leq \mathcal{U}_\alpha \leq 1, \mathcal{U}_\alpha = 0 \Leftrightarrow x = x_\beta, \alpha \neq \beta.$
- $\sum_{\alpha=1}^N \mathcal{U}_\alpha(x) = 1.$
- $\lim_{d \rightarrow \infty} \mathcal{U}_\alpha(x) = 1/N$

3.3 Element Free Galerkin Method (EFGM)

A idéia fundamental do método é o emprego de funções de aproximação MLS associadas a uma distribuição de nós sobre o domínio. Nesta metodologia o espaço de aproximação é enriquecido com o aumento da ordem da base polinomial usada para construir as funções definidas em 3.21.

Não obstante o conjunto de aproximação construído com funções MLS confira ao EFGM excelentes propriedades, tais como, não evidenciar locking volumétrico e altas taxas de convergência, este apresenta limitações na construção das funções de aproximação, que estão intimamente ligadas a forma de obtenção destas últimas. Estas restrições são comentadas no teorema 2.3 do trabalho de C. Armando Duarte e J. Tinsley Oden[8], e estão ligadas à singularidade da matriz A definida anteriormente.

No entanto, o que torna este método computacionalmente caro é a necessidade de ter que inverter a matriz A em cada ponto de integração. Esta dificuldade apresentada pelo método exige que para bases polinomiais de grau elevado, usadas para construir as funções de aproximação, seja necessário uma cardinalidade também elevada da cobertura para garantir a não singularidade da matriz A . Esta cardinalidade elevada pode ser traduzida num exesso de cobertura que ocasiona diminuição das taxas de convergência.

Pode-se citar ainda como limitações apresentadas por este método:

- malha suporte de integração numérica não adaptada à geometria do problema, podendo, portanto, ocorrer sub-integração nas regiões próximas às fronteiras;
- utiliza unicamente refino " p " homogêneo;

Com base na dificuldade anteriormente citada, surgem os métodos que constroem seus campos de aproximação através do enriquecimento da partição da unidade *por forma*, ou seja, por produto destas funções com outras que apresentam boas propriedades de aproximação. Entre estes métodos encontram-se o Partition of Unity Finite Element (PUFEM) e o hp Clouds, que são comentados a seguir.

3.4 Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)

O espaço de aproximação do Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) se caracteriza por apresentar uma técnica para construção do espaço de aproximação $\mathcal{V} \subset H^1(\Omega)$ usando funções partição da unidade do tipo Lipschitz subordinadas a uma cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n = 1, 2, 3$, um conjunto aberto, e $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma cobertura aberta do domínio que satisfaz as condições de fechamento

$$\exists M \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{card} \{ \alpha : \mathbf{x} \in \Omega_\alpha \} \leq M \quad (3.36)$$

e $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma partição da unidade do tipo Lipschitz em que

$$\text{supp} \varphi_\alpha \subset \overline{\Omega}_\alpha \quad \forall \alpha. \quad (3.37)$$

Igualmente ao que acontece em MEF, o espaço de aproximação é definido pela combinação linear das funções partição da unidade, subordinadas a sub-espços locais Ω_α , de forma que:

$$\mathcal{V} = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha} = \left\{ \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} v_{\alpha} : v_{\alpha} \in \mathcal{V}_{\alpha} \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (3.38)$$

onde,

$$\mathcal{V}_{\alpha} \subset H^1(\Omega_{\alpha} \cap \Omega) \quad (3.39)$$

Em 3.38 \mathcal{V} é chamado de espaço de PUFEM, o qual é, considerado de grau $m \in \mathbb{N}$ se $\mathcal{V} \subset C_0^m(\Omega)$, e é definido pelo teorema 2.1 do trabalho de I. Babuska e J. M. Melenk[12].

A constante M controla a cobertura dos patches, isto é não mais do que M patches cobrem um determinado ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ (os patches correspondem às coberturas Ω_α).

As funções lineares do elemento triangular em \mathbb{R}^2 utilizado em FEM satisfaz as propriedades da partição da unidade de Lipschitz, em que $M = 3$ e $C_\infty = 1$. Para o caso de elementos quadrangulares se tem $M = 4$, e $C_\infty = 1$.

Já que o espaço de aproximação do PUFEM se fundamenta na partição da unidade, são comentadas a seguir algumas formas de obtenção destas funções.

Uma possível escolha para um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ são as funções lineares globais associadas a elementos finitos triangulares ou retangulares, como comentado anteriormente, sendo que uma escolha mais geral é dada pela técnica de normalização como segue:

Seja $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma cobertura sobre Ω e sejam $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ o conjunto de funções que tem como suporte os sub-domínios locais Ω_α . Portanto, pela técnica da normalização se pode construir uma função

$$\psi_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\sum_\beta \varphi_\beta} \quad (3.40)$$

com as características de uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$. Note-se que para um dado α o somatório em 3.40 se estende sobre os β tais que satisfazem $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$. As funções ψ_α obtidas por este procedimento herdam a regularidade das funções φ_α . Desta forma, a técnica de normalização fornece uma possível construção de espaços de elementos finitos de grande regularidade como, por exemplo, subespaços H^2 .

O método do PUFEM é muito similar à versão h e p adaptativos se os espaços \mathcal{V}_α são escolhidos como espaços polinomiais. De fato, mantendo-se o grau da polinomial fixo, a convergência é atingida aumentando o número de patches h . Por outro lado, fixando-se h , a aproximação local é feita aumentando-se p .

Um exemplo da aplicação do PUFEM é apresentado por Babuska e Melenk na resolução da equação de Helmholtz em uma dimensão, na qual é introduzida uma aproximação da forma:

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha^0(x) \begin{pmatrix} a_{0\alpha} + a_{1\alpha}x + \dots + a_{k\alpha}x^k + \\ b_{1\alpha} \sinh nx + b_{2\alpha} \cosh nx \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Colocando o segundo termo entre parênteses como um produto interno de vetores obtém-se,

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha^0(x) \sum_\gamma \beta_{\alpha\gamma} p_\gamma(x) \quad (3.42)$$

onde

$$\beta_\alpha^T = [a_{0\alpha}, a_{1\alpha}, \dots, a_{k\alpha}, b_{1\alpha}, b_{2\alpha}] \quad (3.43)$$

e

$$\mathbf{p}^T = [1, x, \dots, x^k, \sinh nx, \cosh nx] \quad (3.44)$$

Na expressão 3.41 $\varphi_\alpha^0(x)$ é uma função MLS de ordem zero (função de Shepard). Os coeficientes $a_{0\alpha}, a_{1\alpha}, \dots, a_{k\alpha}, b_{1\alpha}, b_{2\alpha}$, correspondem às coordenadas generalizadas que podem ser obtidas pelo processo de Galerkin ou por Colocação. As funções $\cosh nx$ e $\sinh nx$, também conhecidas como base extrínseca, são responsáveis pelo aumento da precisão de resultados para o problema específico.

Babuska e Melenk também introduzem uma aproximação usando polinômios de Lagrange, com o objetivo de construir um campo de aproximação onde as funções apresentem a propriedade do delta de Kronecker. Portanto, se tem

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^0(x) \sum_{\gamma} b_{\gamma} \mathbb{L}_{\alpha\gamma}(x) \quad (3.45)$$

ou,

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{\gamma} \psi_{\gamma}(x) b_{\gamma} \quad (3.46)$$

onde,

$$\psi_{\gamma}(x) = \sum_{\alpha: x_{\alpha} \in \Omega_{\alpha}} \varphi_{\alpha}^0(x) \mathbb{L}_{\alpha\gamma}(x). \quad (3.47)$$

As funções definidas em 3.47 apresentam a propriedade $\psi_{\gamma}(x_{\alpha}) = \delta_{\gamma\alpha}$.

Com este exemplo se encerra esta abordagem sucinta do método, cumprindo com o objetivo de comentar os seus fundamentos matemáticos essenciais. A seguir, como uma continuação dos métodos que se baseiam na partição da unidade para construção do espaço de aproximação, é feita uma abordagem detalhada do método Hp Clouds, de Carlos A. Duarte e J. Tinsley Oden.

3.5 Método das Nuvens hp

A idéia fundamental do método das nuvens consiste na construção do espaço de aproximação por enriquecimento das funções MLS (Moving Least Square).

Este enriquecimento é feito por meio de produto de funções que apresentam boas propriedades de aproximação, como é o caso de polinômios de Legendre, polinômios definidos no suporte real da nuvem, ou funções que fazem parte da solução de problemas específicos (soluções de placas, soluções singulares, etc.).

3.5.1 Construção das famílias $\mathcal{F}_N^{k,p}$

O passo mais importante no método das nuvens hp é a construção da família $\mathcal{F}_N^{k,p}$ usando a partição de unidade com sinal $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, definida em 3.21. Esta classe de funções pode ser construída a baixo custo e tem a propriedade de que $\mathcal{P}_p \subset \text{span} \{ \mathcal{F}_N^{k,p} \}$, em que \mathcal{P}_p denota o espaço vetorial dos polinômios de grau $g \leq p$. Esta família de funções é construída por produto com o conjunto \mathcal{L}_p , que representa o produto tensorial de polinômios de Legendre $L_{ij}(\mathbf{x})$, definido em \mathbb{R}^2 por

$$L_{ij}(\mathbf{x}) = L_i(x_1) L_j(x_2) \quad (3.48)$$

onde

$$0 \leq i, j \leq p \quad i \text{ ou } j > k, \quad p \geq k$$

ou por enriquecimento da partição da unidade com conjuntos completos de polinômios Π_k e Π_p , que podem ser de Legendre ou funções polinomiais definidas no domínio real Ω_α , em ambos os casos com grau $g \leq p$.

Para definir $\text{span} \{ \mathcal{F}_N^{k,p} \}$ deve-se levar em consideração que os elementos do produto tensorial \mathcal{L}_k são linearmente dependentes da função $\varphi_\alpha^k(\mathbf{x})$, conforme indicado em 3.28. Sendo assim, a família de funções $\mathcal{F}_N^{k,p}$ é definida em caso de produto tensorial por

$$\mathcal{F}_N^{k,p} = \{ \{ \varphi_\alpha^k(\mathbf{x}) \} \cup \{ \varphi_\alpha^k L_{ij}(\mathbf{x}) \} : 1 \leq \alpha \leq N, 0 \leq i, j \leq p \} \quad (3.49a)$$

ou i ou $j > k; \quad k \leq p$.

Se for construído o espaço $\text{span} \left\{ \mathcal{F}_N^{k,p} \right\}$ através de enriquecimento por conjuntos completos de plinômios Π_k e Π_p , a família $\mathcal{F}_N^{k,p}$ é definida como:

$$\mathcal{F}_N^{k,p} = \left\{ \left\{ \varphi_\alpha^k(\mathbf{x}) \right\} \cup \left\{ \varphi_\alpha^k L_{ij}(\mathbf{x}) \right\} : 1 \leq \alpha \leq N, 0 \leq i, j \leq p \right. \quad (3.49b)$$

$$\left. k < i + j \leq p; \quad k \leq p \right\}$$

Este tipo de enriquecimento permite que a nova base $\mathcal{F}_N^{k,p}$, obtida a partir das funções $\left\{ \varphi_\alpha^k(\mathbf{x}) \right\}_{\alpha=1}^N$, possa representar polinômios de grau maior do que k .

Quando o enriquecimento é feito usando base polinomial de Legendre é necessário mapear o domínio da nuvem Ω_α para $\widehat{\Omega}_\alpha$, já que nossas funções \widehat{L}_{ij} ficam definidas em $[-1, 1]^2$. Sendo assim,

$$\Omega_\alpha = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2} < h_\alpha \right\} \quad (3.50)$$

e

$$\widehat{\Omega}_\alpha = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^2} < 1 \right\}, \quad (3.51)$$

onde $F_\alpha : \widehat{\Omega}_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$ é uma função de mapeamento definida por:

$$F_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = h_\alpha \boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_\alpha, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widehat{\Omega}_\alpha \quad (3.52)$$

Portanto, as funções de nuvens hp ficam finalmente definidas por,

$$\varphi_\alpha L_{ij}(\mathbf{x}) := \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \widehat{L}_{ij} \circ F_\alpha^{-1}(\mathbf{x})$$

onde $F_\alpha^{-1} : \Omega_\alpha \rightarrow \widehat{\Omega}_\alpha$ é dado por

$$F_{\alpha}^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}}{h_{\alpha}} \quad (3.53)$$

em que $\widehat{L}_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ é o produto tensorial de polinômios de Legendre em $[-1, 1]^2$. A seguir será apresentado um exemplo de obtenção da família $\mathcal{F}_2^{1,3}$.

A família $\mathcal{F}_2^{1,3}$ é construída inicialmente enriquecendo a partição da unidade com produtos tensoriais de polinômios de Legendre $\mathcal{L}_{k=1}$ e $\mathcal{L}_{p=3}$, como se observa abaixo:

$x_1 \backslash x_2$	$L_0(x_2)$	$L_1(x_2)$	$L_2(x_2)$	$L_3(x_2)$
$L_0(x_1)$	$L_0(x_1)L_0(x_2)$	$L_0(x_1)L_1(x_2)$	$L_0(x_1)L_2(x_2)$	$L_0(x_1)L_3(x_2)$
$L_1(x_1)$	$L_1(x_1)L_0(x_2)$	$L_1(x_1)L_1(x_2)$	$L_1(x_1)L_2(x_2)$	$L_1(x_1)L_3(x_2)$
$L_2(x_1)$	$L_2(x_1)L_0(x_2)$	$L_2(x_1)L_1(x_2)$	$L_2(x_1)L_2(x_2)$	$L_2(x_1)L_3(x_2)$
$L_3(x_1)$	$L_3(x_1)L_0(x_2)$	$L_3(x_1)L_1(x_2)$	$L_3(x_1)L_2(x_2)$	$L_3(x_1)L_3(x_2)$

(3.54)

Deve-se observar que $L_{ij}(x_1, x_2) = L_i(x_1)L_j(x_2)$ com $i, j = 0, 1$ constituem o conjunto $\mathcal{L}_{k=1}$, cujos elementos reduzem a partição da unidade em Q_2 . Sendo assim, cada partição de unidade é multiplicada por 12 produtos, perfazendo um total de 26 funções para a família $\mathcal{F}_2^{1,3}$.

Em forma compacta pode-se definir esta base como:

$$\mathcal{F}_2^{1,3} = \{ \{ \varphi_{\alpha}^k(x_1, x_2) \} \cup \{ \varphi_{\alpha}^k(x_1, x_2) L_{ij}(x_1, x_2) \} : 1 \leq \alpha \leq N, 0 \leq i, j \leq p; \\ \text{ou } i \text{ ou } j > k; k \leq p \} \text{ onde } k = 1, p = 3, N = 2, \alpha = 1, \dots, N \quad i, j = 0, \dots, 3.$$

Uma outra forma de construir a família $\mathcal{F}_2^{1,3}$ é usar os conjuntos de polinômios completos $\Pi_{k=1}$ e $\Pi_{p=3}$.

$$L_0(x_1)L_0(x_2) \quad (3.55)$$

$$L_0(x_1)L_1(x_2) \quad L_1(x_1)L_0(x_2)$$

$$L_0(x_1)L_2(x_2) \quad L_1(x_1)L_1(x_2) \quad L_2(x_1)L_0(x_2)$$

$$L_0(x_1)L_3(x_2) \quad L_1(x_1)L_2(x_2) \quad L_2(x_1)L_1(x_2) \quad L_3(x_1)L_0(x_2)$$

Novamente neste exemplo $\Pi_{k=1}$ reduz a partição da unidade em Q_2 . Portanto os $L_{ij}(x_1, x_2)$, $i + j > 1$ não multiplicam a partição da unidade, e a família $\mathcal{F}_2^{1,3}$ é constituída de 16 funções, que são definidas como:

$$\mathcal{F}_2^{1,3} = \{ \{ \varphi_\alpha^k(x_1, x_2) \} \cup \{ \varphi_\alpha^k(x) L_{ij}(x_1, x_2) \} : 1 \leq \alpha \leq N, 0 \leq i, j \leq p; \\ k < i + j \leq p; k \leq p \} \text{ onde } k = 1, p = 3, N = 2, \alpha = 1, \dots, N \quad i, j = 0, \dots, 3$$

É importante observar que a dimensão destas famílias corresponde ao número de funções que aproximam cada grau de liberdade do modelo correspondente ao problema de contorno em questão.

As famílias $\mathcal{F}_N^{k,p}$ representam a generalização de algumas classes de funções usadas para aproximar soluções de diversos tipos de problemas de contorno. Apresentamos, a seguir, algumas delas.

- Funções de Shepard

$$\mathcal{F}_N^{k=0,p=0} = \{ \varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_N^0 \}$$

- Técnica de aproximação desenvolvida por Liszka

$$\mathcal{F}_N^{k=2,p=2} = \{ \varphi_1^2, \varphi_2^2, \dots, \varphi_N^2 \}$$

- Funções MLS usadas por Belitschko em EFGM

$$\mathcal{F}_N^{k,p=k} = \{ \varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_N^k \}$$

- Funções do campo de aproximação no método das Nuvens hp

$$\mathcal{F}_N^{k,p} = \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1^k & \varphi_2^k & \dots & \varphi_N^k \\ \varphi_1^k L_{s=1} & \varphi_2^k L_{s=1} & \dots & \varphi_N^k L_{s=1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^k L_{s=M} & \varphi_2^k L_{s=M} & \dots & \varphi_N^k L_{s=M} \end{array} \right\} \quad (3.56)$$

onde, se for usado produto tensorial com polinômios de Legendre, o número de produtos para cada função partição da unidade é dado por

$$M = ((p+1)^2 - (k+1)^2). \quad (3.57)$$

Observando a expressão 3.57, confirma-se o que foi mostrado pelos exemplos anteriores, nos quais o número total de funções que enriquecem cada partição da unidade é 12 para o caso de produto tensorial. Quando é usado enriquecimento com conjuntos completos Π_k e Π_p , o valor de M é dado por

$$M = \binom{p+2}{n} - \binom{k+2}{n} \quad (3.58)$$

onde $n = 2$, já que se trata de \mathbb{R}^2 .

A seguir são apresentados dois teoremas que justificam o uso das famílias $\mathcal{F}_N^{k,p}$ para aproximar funções.

Teorema 3.3: O conjunto $\mathcal{F}_N^{k,p}$ tem as seguintes propriedades:

1. Se o conjunto de MLS $\{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$ é linearmente independente em \mathbb{R}^2 , o conjunto $\mathcal{F}_N^{k,p}$ é também um conjunto de funções linearmente independentes em \mathbb{R}^2 .
2. $\dim \mathcal{F}_N^{k,p} = N + N((p+1)^2 - (k+1)^2)$, se o enriquecimento for feito por produto tensorial.
3. $\dim \mathcal{F}_N^{k,p} = N + N\left(\binom{p+2}{n} - \binom{k+2}{n}\right)$, se for enriquecida através de produto com o conjunto de polinômios com Π_k e Π_p para $n = 1, 2, 3$.

Prova:(para n=2)

Supor que:

$$\sum_{\alpha}^N \left(a_{\alpha} \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq p \\ i \text{ or } j > k}} b_{\alpha ij} \varphi_{\alpha}^k L_{ij}(\mathbf{x}) \right) = 0 \quad (3.59)$$

$$\sum_{\alpha}^N \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) \left(a_{\alpha} + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq p \\ i \text{ or } j > k}} b_{\alpha ij} L_{ij}(\mathbf{x}) \right) = 0 \quad (3.60)$$

Já que $\{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$ é linearmente independente resulta que

$$a_\alpha + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq p \\ i \text{ or } j > k}} b_{\alpha ij} L_{ij}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.61)$$

para $\alpha = 1, \dots, N$

Como o conjunto $\{L_{ij}\}$ é linearmente independente e não há combinação linear possível das funções $L_{ij}(\mathbf{x})$ que forneçam uma constante, conclui-se que:

$$a_\alpha \equiv 0, b_{\alpha ij} \equiv 0 \quad (3.62)$$

As identidades 3.62 comprovam o primeiro item do teorema. As confirmações dos itens posteriores são verificadas partindo das definições 3.49(a) e 3.49(b), e das Eqs. 3.57 e 3.58, ambas decorrentes da conclusão 3.28.

Teorema 3.4: $L_{ij} \in \text{span}(\mathcal{F}_N^{k,p})$, para $0 \leq i, j \leq p$.

Prova:

Se $L_{rs}, 0 \leq r, s \leq p \in \text{span}(\mathcal{F}_N^{k,p})$ então $\exists a_\alpha$ e $b_{\alpha ij}$ tal que:

$$L_{rs}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha}^N \left(a_\alpha \varphi_\alpha^k(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq p \\ i \text{ or } j > k}} b_{\alpha ij} L_{ij} \varphi_\alpha^k(\mathbf{x}) \right) \quad (3.63)$$

Se $r, s \leq k$ então:

$$a_\alpha = L_{rs}(\mathbf{x}_\alpha) \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (3.64)$$

$$b_{\alpha ij} \equiv 0 \quad (3.65)$$

Por outro lado, como as funções φ_α^k são \mathcal{L}_k redutíveis, se r , ou $s > k$, então se obtém:

$$a_\alpha \equiv 0 \quad (3.66)$$

$$b_{\alpha ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = r, j = s \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases} \quad (3.67)$$

para $\alpha = 1, \dots, N$. Aplicando 3.66 e 3.67 em 3.63 chega-se finalmente à expressão

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha}^N \left(a_{\alpha} \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq p \\ i \text{ or } j > k}} b_{\alpha ij} \varphi_{\alpha}^k L_{ij}(\mathbf{x}) \right) &= \sum_{\alpha}^N b_{\alpha rs} \varphi_{\alpha}^k L_{rs}(\mathbf{x}) \\ &= L_{rs}(\mathbf{x}) \sum_{\alpha}^N \varphi_{\alpha}^k(x) = L_{rs}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

A seguir será apresentado um exemplo prático de construção da base $\mathcal{F}_{N=5}^{k=0, p=2}$. São considerados os casos de construção da base citada por produto tensorial da partição da unidade (neste exemplo funções de Shepard) com os conjuntos $\mathcal{L}_{k=0}$ e $\mathcal{L}_{p=2}$ definidos em $[-1, 1]^2$ e posteriormente, por produto com polinômios completos $\Pi_{k=0}$ e $\Pi_{p=2}$. Este último corresponde à base polinomial definida no domínio real da nuvem 3.50.

O domínio do PVC utilizado no exemplo apresenta as seguintes características:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 2, \text{ e } -2 \leq y \leq 2\} \quad (3.69)$$

A cobertura aberta para 3.69 é definida pelo conjunto $\mathfrak{S}_N = \{\Omega_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{N=5}$, e um conjunto Q_N de centros \mathbf{x}_{α} de subdomínios locais definido por:

$Q_N = \{(-0.85, -0.85), (0.85, -0.85), (0.85, 0.85), (-0.85, 0.85), (0, 0)\}$ e representado na Figura 3.2.

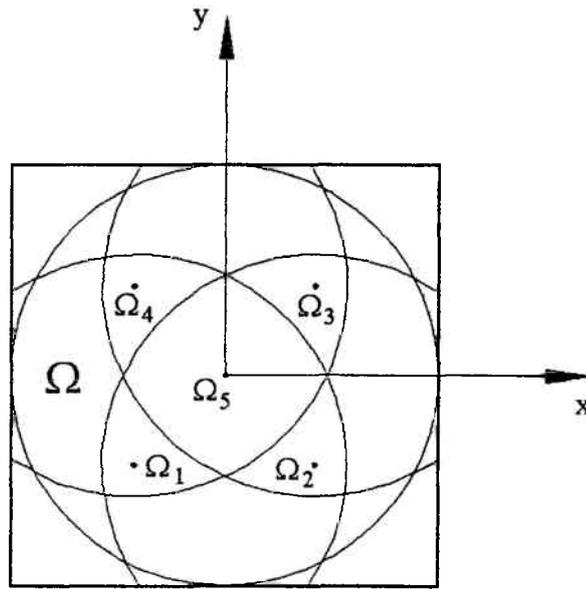


Figura 3.2. Cobertura aberta do domínio Ω pelo conjunto $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^{N=5}$.

A função peso \mathcal{W}_α utilizada no exemplo é uma spline de quarta ordem e foi escolhida em detrimento das funções peso exponenciais por não apresentar problemas de integração numérica.

A função peso apresentada a seguir servirá de base para a construção das funções partição de unidade, e é definida pela expressão,

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{\pi}} \left(1 - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_\alpha\|}{h_\alpha}\right)^4, & \text{se } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_\alpha\| < h_\alpha \\ 0, & \text{se } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_\alpha\| \geq h_\alpha \end{cases} \quad (3.70)$$

onde,

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x, y)$$

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$$

$h_\alpha = 2$, para $\alpha = 1, \dots, 5$.

Partindo da expressão 3.30 se tem cinco funções de Shepard definidas por

$$\varphi_\alpha^0 = \frac{W_\alpha}{\sum_{\beta=1}^N W_\beta} \quad (3.71)$$

para $\alpha = 1, \dots, 5$ e $\beta = 1, \dots, 5$.

Definida a função de Shepard para cada nuvem, o próximo passo é a construção do espaço $\text{span} \left(\mathcal{F}_{N=5}^{k=0, p=2} \right)$, inicialmente usando enriquecimento da função partição da unidade (funções de Shepard) por produto tensorial com polinômios de Legendre como mostrado abaixo.

Sejam os conjuntos $\mathbf{p}_1 = \{ \widehat{L}_0(\xi), \widehat{L}_1(\xi), \widehat{L}_2(\xi) \}$ e $\mathbf{p}_2 = \{ \widehat{L}_0(\eta), \widehat{L}_1(\eta), \widehat{L}_2(\eta) \}$ constituídos de polinômios de Legendre, em que através do seu produto tensorial, chega-se aos conjuntos $\mathcal{L}_{k=0}$ e $\mathcal{L}_{p=2}$ definidos em $[-1, 1]^2$, e cuja técnica de construção é dada a seguir:

$x \backslash y$	$L_0(x)$	$L_1(x)$	$L_2(x)$	
$L_0(y)$	$L_0(y) L_0(x)$	$L_0(y) L_1(x)$	$L_0(y) L_2(x)$	(3.72)
$L_1(y)$	$L_1(y) L_0(x)$	$L_1(y) L_1(x)$	$L_1(y) L_2(x)$	
$L_2(y)$	$L_2(y) L_0(x)$	$L_2(y) L_1(x)$	$L_2(y) L_2(x)$	

onde $L_i(x) L_j(y) = \widehat{L}_i(\xi) \circ F_\alpha^{-1}(x) \widehat{L}_j(\eta) \circ F_\alpha^{-1}(y)$ com $i, j = 0, \dots, 2$ tal que $\widehat{L}_i(\xi) \in \mathbf{p}_1$ e $\widehat{L}_j(\eta) \in \mathbf{p}_2$.

Neste caso, observando 3.72 verifica-se que $L_0(x) L_0(y)$ é linearmente dependente da partição da unidade. Portanto $M = 8$, como confirmado por 3.57 e $\dim \mathcal{F}_{N=5}^{k=0, p=2} = 45$, de acordo com a propriedade 2 do teorema 3.3.

Definindo agora $L_s \in \mathcal{L}_{p=2}$ de forma que $L_s(x, y) = L_i(x) L_j(y)$, sendo que $0 \leq i, j \leq 2$ e i ou $j > 0$ e $s = 1, \dots, 8$. Logo, a base $\mathcal{F}_{N=5}^{k=0, p=2}$ do espaço de aproximação é definida como:

$$\mathcal{F}_{N=5}^{k=0, p=2} = \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1^0 & \varphi_2^0 & \dots & \varphi_5^0 \\ \varphi_1^0 L_{s=1} & \varphi_2^0 L_{s=1} & \dots & \varphi_5^0 L_{s=1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^0 L_{s=8} & \varphi_2^0 L_{s=8} & \dots & \varphi_5^0 L_{s=8} \end{array} \right\}. \quad (3.73)$$

Se, ao contrário de produto tensorial, forem usados os conjuntos $\Pi_{k=0}$ e $\Pi_{p=2}$ de polinômios completos definidos no domínio real 3.50 se tem:

$$L_0(x)L_0(y) \tag{3.74}$$

$$L_0(x)L_1(y) \quad L_1(x)L_0(y)$$

$$L_0(x)L_2(y) \quad L_1(x)L_1(y) \quad L_2(x)L_0(y) .$$

Novamente verifica-se que $L_0(x)L_0(y)$ reduz a partição da unidade. Assim $M = 5$, conforme a expressão 3.58 e a $\dim \mathcal{F}_{N=5}^{k=0,p=2} = 30$, de acordo com a propriedade 3 do teorema 3.3. Portanto, a base $\mathcal{F}_{N=5}^{k=0,p=2}$ do espaço de aproximação, neste caso, fica definida como:

$$\mathcal{F}_{N=5}^{k=0,p=2} = \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1^0 & \varphi_2^0 & \dots & \varphi_5^0 \\ \varphi_1^0 L_{S=1} & \varphi_2^0 L_{S=1} & \dots & \varphi_5^0 L_{S=1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^0 L_{S=5} & \varphi_2^0 L_{S=5} & \dots & \varphi_5^0 L_{S=5} \end{array} \right\} \tag{3.75}$$

Será feita a seguir a exploração gráfica de algumas das funções que formam a base $\mathcal{F}_{N=5}^{k=0,p=2}$ e suas respectivas derivadas, dando uma idéia do tipo de funções e do gradiente do espaço de aproximação.

Um dos aspectos a serem constatados é a suavidade destas e de seus gradientes para alguns elementos de 3.73 e de 3.75, e para as nuvens $\Omega_{\alpha=4}(-0.85, -0.85)$ e $\Omega_{\alpha=5}(0, 0)$ respectivamente.

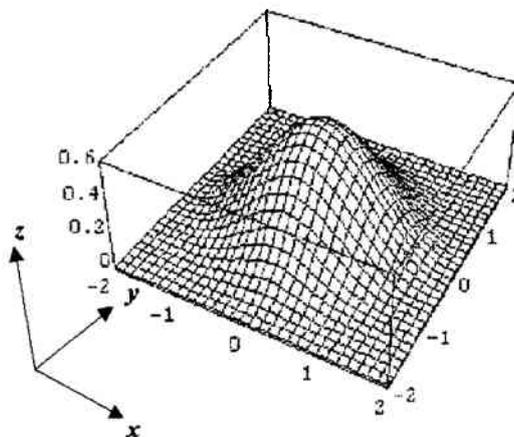


Figura 3.3. Função partição da unidade φ_5^0

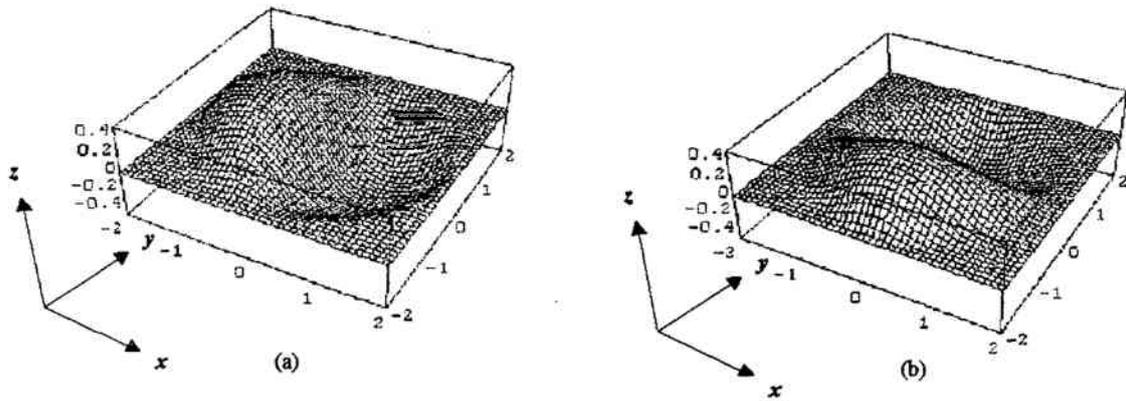


Figura 3.4. Componentes do gradiente da função partição da unidade $\left(\frac{\partial \varphi_5^0}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial \varphi_5^0}{\partial y}\right)$

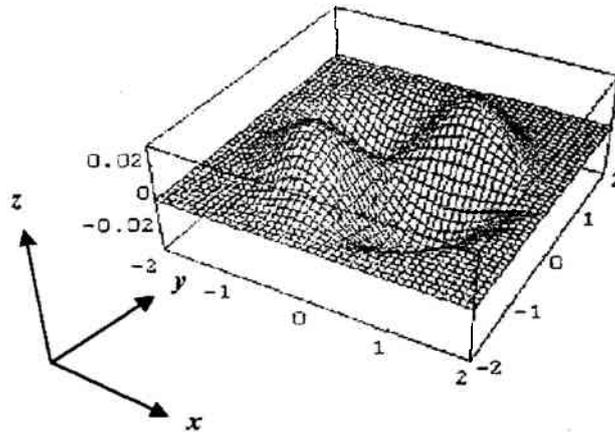


Figura 3.5. Função partição da unidade enriquecida $L_1(x)L_1(y)\varphi_5^0(x,y)$

Se, ao contrário de usar polinômios de Legendre, forem usados produtos com conjuntos completos definidos no domínio real como em 3.50, se tem as seguintes formas para algumas das funções e suas derivadas de 3.75. As funções graficadas agora correspondem à nuvem $\Omega_{\alpha=4}$, com centro $(-0.85, 0.85)$.

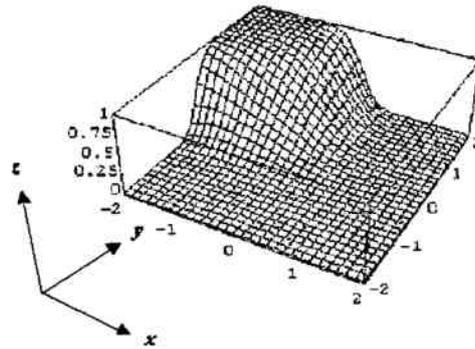


Figura 3.6. Função partição da unidade φ_4^0

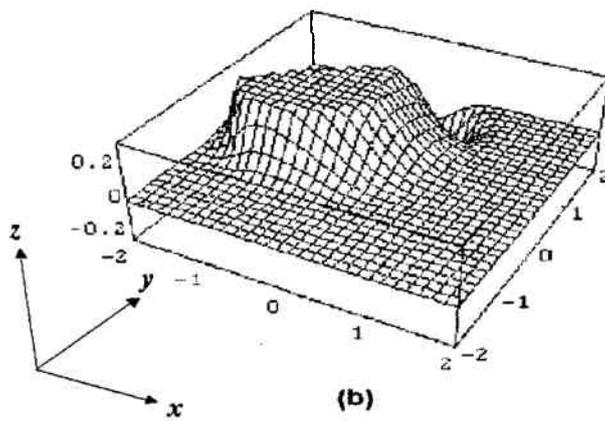
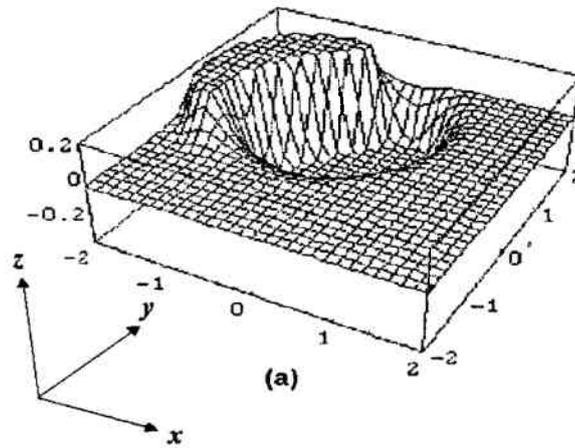


Figura 3.7. Componentes do gradiente da função partição da unidade $\left(\frac{\partial \varphi_4^0}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial \varphi_4^0}{\partial y}\right)$

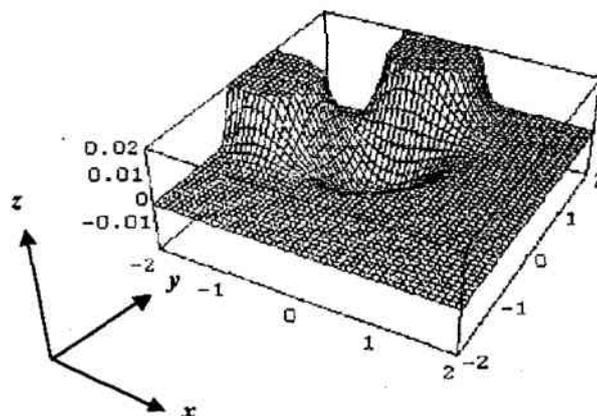


Figura 3.8. Partição da unidade enriquecida $(0.85 + x)(0.85 - y)\varphi_4^0$

Com os exemplos acima citados encerra-se este capítulo, sendo os alicerces lançados para uma futura implementação computacional. Além disso, foram mostradas as idéias e fundamentos matemáticos básicos existentes por trás das metodologias precursoras à usada neste trabalho.

Capítulo 4

Formulação de Galerkin & Procedimentos Computacionais

Nos capítulos 2 e 3 foram introduzidas a teoria de placas para o modelo de Mindlin e a teoria básica de construção das funções do espaço de aproximação, formando a base necessária para a montagem das equações de Galerkin e a posterior implementação do código computacional. O objetivo deste capítulo é utilizar o espaço das funções de aproximação no modelo de placas de Mindlin. A montagem de matriz de rigidez e vetor de carga para pontos de integração localizados no domínio e na fronteira de Dirichlet é abordada através de um exemplo. Embora, aqui, seja usado o princípio variacional modificado, será visto, a título ilustrativo, o princípio variacional clássico usando multiplicadores de Lagrange para forçar condições de contorno na fronteira de Dirichlet, com comentários a respeito das vantagens e desvantagens do emprego de cada um deles. Finalmente são comentadas as características da programação orientada a objeto (POO) juntamente com os aspectos computacionais fundamentais do código CLOUDS++.

4.1 Método de Bubnov-Galerkin

O método de Galerkin consiste na aproximação de grandezas de um espaço vetorial de dimensão infinita por um espaço vetorial de dimensão finita. Neste problema pretende-se aproximar o campo de deslocamentos reais, que pertence a um conjunto ou variedade linear de dimensão infinita, pela combinação linear das funções da base de um espaço veto-

rial de dimensão finita, que corresponde ao espaço das funções de interpolação de nuvens. Este vetor, nada mais é do que a projeção da solução real no espaço de aproximação.

Seja $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, w) \in V$ o campo de deslocamentos real, e o campo de deslocamentos aproximado $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\theta}_h, w_h) \in \text{span} \left\{ \mathcal{F}_N^{k,p} \right\}$ (espaço vetorial de aproximação definido em 3.49). O método de Galerkin propõe:

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, w) \cong \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\theta}_h, w_h) \quad (4.1)$$

onde, por consequência,

$$\boldsymbol{\theta}(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{array} \right\} \cong \boldsymbol{\theta}_h(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \psi^i \theta_x^i \\ \psi^i \theta_y^i \end{array} \right\}, \quad (4.2)$$

$$w(x, y) \cong w_h(x, y) = \psi^i w^i \quad (4.3)$$

onde $\psi^i(x, y) \in \text{span} \left\{ \mathcal{F}_N^{k,p} \right\}$ e $i = 1, \dots, \dim \left\{ \mathcal{F}_N^{k,p} \right\}$ onde $\dim \left\{ \mathcal{F}_N^{k,p} \right\}$ é determinado conforme os itens 2 e 3 do teorema 3.3. Definindo o vetor de parâmetros de deslocamentos \mathbf{U} como

$$\mathbf{U}^T = [w^1, \theta_x^1, \theta_y^1, \dots, w^N, \theta_x^N, \theta_y^N]$$

pode-se agora escrever 4.2 e 4.3 na forma matricial, como segue:

$$\boldsymbol{\theta} \cong \boldsymbol{\theta}_h = \mathbf{N}_\theta \mathbf{U}, \quad (4.4)$$

$$w \cong w_h = \mathbf{N}_w \mathbf{U}, \quad (4.5)$$

em que

$$\mathbf{N}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & \psi^1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \psi^N & 0 \\ 0 & 0 & \psi^1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \psi^N \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{N}_w = [\psi^1 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \psi^N \ 0 \ 0]. \quad (4.7)$$

Substituindo as Eqs. 4.4 e 4.5 nas Eqs. 2.6 e 2.7, é possível obter as expressões discretas das deformações $\epsilon_b(\mathbf{u})$ e $\epsilon_s(\mathbf{u})$, e os tensores de momento e cortante $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$, como segue:

$$\epsilon_b(\mathbf{u}) \cong \mathbf{B}_b \mathbf{U}, \quad (4.8)$$

$$\epsilon_s(\mathbf{u}) \cong \mathbf{B}_s \mathbf{U}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}) \cong \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \mathbf{U}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cong \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \mathbf{U}, \quad (4.11)$$

onde

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_{,x}^1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\psi_{,x}^N & 0 \\ 0 & 0 & -\psi_{,y}^1 & \dots & \dots & 0 & 0 & -\psi_{,y}^N \\ 0 & -\psi_{,y}^1 & -\psi_{,x}^1 & \dots & \dots & 0 & -\psi_{,y}^N & -\psi_{,x}^N \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

e

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \psi_{,x}^1 & -\psi^1 & 0 & \dots & \dots & \psi_{,x}^N & -\psi^N & 0 \\ \psi_{,y}^1 & 0 & -\psi^1 & \dots & \dots & \psi_{,y}^N & 0 & -\psi^N \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Na discretização dos multiplicadores de Lagrange é preciso levar em consideração os graus de liberdades que estão sendo prescritos. Desta forma, são usadas as matrizes $\bar{\mathbf{N}}_\theta$ e $\bar{\mathbf{N}}_w$ ao invés de \mathbf{N}_θ e \mathbf{N}_w , sendo obtidas as seguintes expressões matriciais para λ_b e λ_s :

$$\lambda^b \cong \bar{\mathbf{N}}_\theta \Lambda \quad (4.14)$$

$$\lambda^s \cong \bar{\mathbf{N}}_w \Lambda \quad (4.15)$$

em que, sendo m a dimensão do espaço de aproximação na fronteira $\partial\Sigma_D$,

$$\Lambda^T = [\lambda_1^1 \quad \lambda_2^1 \quad \lambda_3^1 \quad \dots \quad \lambda_1^m \quad \lambda_2^m \quad \lambda_3^m], \quad (4.16)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & S_{\theta_x} \psi_1 & 0 & \dots & 0 & S_{\theta_x} \psi_m & 0 \\ 0 & 0 & S_{\theta_y} \psi_1 & \dots & 0 & 0 & S_{\theta_y} \psi_m \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_w = [S_w \psi_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad S_w \psi_m \quad 0 \quad 0] \quad (4.18)$$

O operador S_{dof} , sendo $S_{dof} = \{S_{\theta_x}, S_{\theta_y}, S_w\}$, é definido da seguinte forma:

$$S_{dof} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists \text{ condições de contorno prescritas em } \partial\Sigma_D \\ 0 & \text{se não } \exists \text{ condições de contorno prescritas em } \partial\Sigma_D \end{cases}$$

Partindo das Eqs. 4.4 a 4.18, e substituindo nas Eqs. 2.66 e 2.67 do princípio variacional clássico, o problema de equilíbrio consiste em determinar $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{3N}$ e $\Lambda \in \mathbf{R}^{3m}$, de forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* \left\{ \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) \mathbf{U} \, d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{N}_w^T \bar{q} \, d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{N}_\theta^T \bar{\mathbf{m}} \, d\Sigma \right. \\ \left. - \int_{\partial\Sigma_N} \mathbf{N}_w^T \bar{q} \, d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_N} \mathbf{N}_\theta^T \bar{\mathbf{m}} \, d\partial\Sigma \right. \\ \left. - \int_{\partial\Sigma_D} \mathbf{N}_\theta^T \bar{\mathbf{N}}_\theta \Lambda \, d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \mathbf{N}_w^T \bar{\mathbf{N}}_w \Lambda \, d\partial\Sigma \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\forall \mathbf{U}^* \in \mathbf{R}^{3N}$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda^* \left\{ \int_{\partial\Sigma_D} \bar{\mathbf{N}}_\theta^T \mathbf{N}_\theta \mathbf{U} \, d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \bar{\mathbf{N}}_\theta^T \mathbf{N}_\theta \bar{\mathbf{U}} \, d\partial\Sigma \right. \\ \left. + \int_{\partial\Sigma_D} \bar{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{N}_w \mathbf{U} \, d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma_D} \bar{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{N}_w \bar{\mathbf{U}} \, d\partial\Sigma \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\forall \Lambda^* \in \mathbf{R}^{3m}$$

Pela arbitrariedade dos vetores \mathbf{U}^* e Λ^* , as Eqs. 4.19 e 4.20 configuram o seguinte sistema linear a ser resolvido:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & | & \mathbf{G}^T \\ \hline -\mathbf{G} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

A matriz de rigidez é assim constituída da matriz \mathbf{K} , correspondente ao trabalho virtual no domínio, e a matriz \mathbf{G} , correspondente ao trabalho virtual na fronteira, na qual são prescritas as condições de contorno essenciais. Os vetores \mathbf{U} e Λ correspondem aos parâmetros de deslocamentos e parâmetros de Lagrange, respectivamente, sendo estes últimos equivalentes às reações de apoio na fronteira $\partial\Sigma_D$. O vetor \mathbf{F} é o vetor de esforços equivalentes correspondentes ao carregamento no domínio e na fronteira $\partial\Sigma_N$. Finalmente, o vetor \mathbf{H} considera a parcela de carregamento correspondente a deslocamentos prescritos em $\partial\Sigma_D$.

$$\mathbf{K} = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) d\Sigma, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\partial\Sigma_D} (\tilde{\mathbf{N}}_{\theta}^T \mathbf{N}_{\theta} + \tilde{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{N}_w) d\partial\Sigma, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Sigma} \mathbf{N}_w^T q d\Sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{m} d\Sigma \quad (4.25)$$

$$+ \int_{\partial\Sigma_N} \mathbf{N}_w^T \bar{q} d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma_N} \mathbf{N}_{\theta}^T \bar{\mathbf{m}} d\partial\Sigma$$

$$\mathbf{H} = \int_{\partial\Sigma_D} (\tilde{\mathbf{N}}_{\theta}^T \mathbf{N}_{\theta} + \tilde{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{N}_w) \bar{\mathbf{U}} d\partial\Sigma. \quad (4.26)$$

A formulação estabelecida nas Eqs. de 4.22 a 4.26 apresenta limitações decorrentes de sua própria formulação, como a matriz de rigidez global que não é positiva definida, podendo apresentar problemas de mal condicionamento, já que as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{G}^T podem ter valores muito diferentes comparados com os da matriz \mathbf{K} .

O procedimento de montagem da matriz de rigidez global é feita de forma similar como em elementos finitos, com a diferença que em MEF clássico, o número de funções é o tipo de funções que cobrem cada ponto de integração dentro de um elemento, é sempre o mesmo. Isto permite realizar o cálculo da matriz de rigidez e termos independentes mediante o conceito de matriz elementar, produto da integração parcial em cada elemento e sua posterior incorporação na matriz global.

No presente caso, ao haver uma independência entre região de integração e função de aproximação é necessário verificar quais são as funções de aproximação diferentes de zero no ponto de integração. Este número depende do número de nuvens e do número de funções associadas a estas nuvens.

Assim, nasce o conceito de **matriz de rigidez do ponto de integração**. Feita uma partição do domínio em células de integração, para cada ponto de integração é construída uma matriz que contém as contribuições das funções de aproximação diferentes de zero neste ponto, sendo incorporada a matriz de rigidez global via conectividade, na forma usual.

Já que, o procedimento não é o clássico do MEF, é mostrado, a seguir um exemplo de obtenção da matriz de rigidez e do vetor de cargas para pontos de integração no domínio e na fronteira $\partial\Sigma_D$.

Exemplo 1:

Seja uma placa retangular simplesmente apoiada, sujeita a uma carga distribuída no domínio, como mostrado na Figura 4.1(a) e 4.1(b), coberta por 5 nuvens e apresentando um conjunto de 4 células triangulares de integração no domínio. São usadas unicamente funções partição da unidade associadas a cada nuvem, enriquecidas por polinômios de Legendre num segundo exemplo.

Quando se aplica o princípio variacional clássico, no qual os multiplicadores de Lagrange são introduzidos de forma direta, a matriz de rigidez global para o exemplo da Figura 4.1 apresenta uma parcela correspondente a pontos de integração localizados no domínio, e outra associada a pontos de integração sobre a fronteira. Na primeira abordagem, ao serem usadas unicamente funções de Shepard, cada grau de liberdade do modelo é aproximado por uma função. Desta forma, a parcela \mathbf{K} da matriz de rigidez correspondente ao domínio tem dimensão (15×15) , já que se tem 5 nuvens e 3 graus de liberdade característicos do modelo, correspondentes ao vetor $\{w, \theta_x, \theta_y\}$ de coordenadas generalizadas. Na parcela correspondente à fronteira, são usados apenas os graus de liberdade prescritos na determinação da matriz \mathbf{G} . Como se trata, nesse caso, de uma placa simplesmente apoiada no contorno, o único grau de liberdade prescrito é o deslocamento transversal w . Assim, a matriz \mathbf{G} tem dimensão de (4×15) .

O vetor de carregamento equivalente tem um tratamento análogo à matriz de rigidez, e uma parcela deste corresponde às cargas no domínio (no exemplo, uma carga uniformemente distribuída no domínio) e outra, à fronteira, que neste exemplo é nula, já que o deslocamento transversal prescrito na fronteira também tem valor nulo.

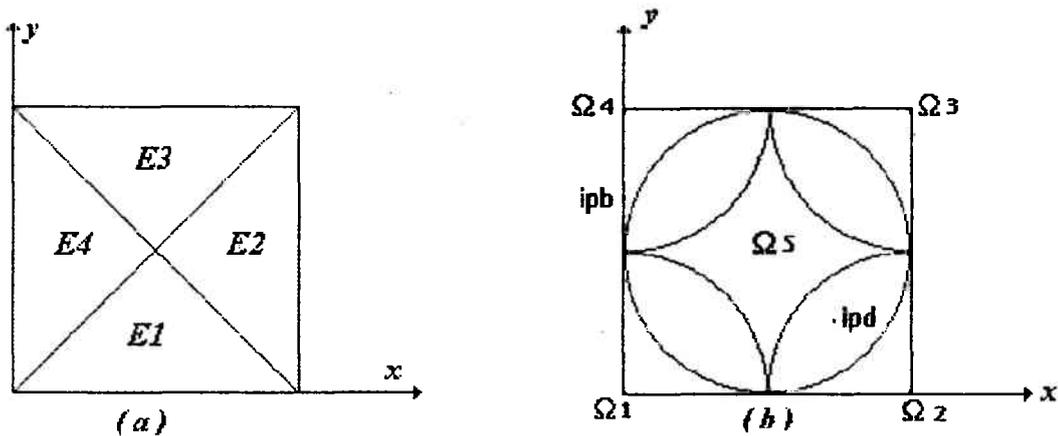


Figura 4.1: (a) Conjunto de células de integração, (b) cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^{N=5}$

A seguir é feita a montagem da matriz de rigidez e do vetor de cargas equivalentes para os pontos ipd sobre o domínio e ipb sobre a fronteira, com suas correspondentes contribuições na construção da matriz de rigidez e do vetor de carga equivalente.

A matriz de rigidez do ponto de integração ipd é definida a seguir:

$$\mathbf{K}_{ipd} = (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) W_{ipd} J_{E1} \quad (4.27)$$

Como somente duas nuvens (2 e 5) cobrem o ponto de integração, i. e, uma única função de aproximação por nuvem, a matriz de rigidez do ponto é de (6X6). As matrizes de deformação são:

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_{2,x} & 0 & 0 & -\varphi_{5,x} & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_{2,y} & 0 & 0 & -\varphi_{5,y} \\ 0 & -\varphi_{2,y} & -\varphi_{2,x} & 0 & -\varphi_{5,y} & -\varphi_{5,x} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

e

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \varphi_{2,x} & -\varphi_2 & 0 & \varphi_{5,x} & -\varphi_5 & 0 \\ \varphi_{2,y} & 0 & -\varphi_2 & \varphi_{5,y} & 0 & -\varphi_5 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

O sub índices associados às funções de Shepard nas Matrizes 4.28 e 4.29 indicam a nuvem envolvida.

Os termos \mathbf{C}_b e \mathbf{C}_s na Eq. 4.27 são as matrizes de coeficientes elásticos referentes à flexão e ao cisalhamento, respectivamente correspondentes às expressões 2.21 e 2.24. Na expressão 4.27, W_{ipd} e J_{E1} correspondem ao peso referente à regra de integração de Gauss específica e o jacobiano do elemento $E1$. Para o vetor de cargas tem-se a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{F}_{ipd} = \mathbf{N}_{ipd}^T q W_{ipd} J_{E1} \quad (4.31)$$

em que

$$\mathbf{N}_{ipd} = [\varphi_2 \quad 0 \quad 0 \quad \varphi_5 \quad 0 \quad 0] \quad (4.32)$$

e q corresponde à carga distribuída no domínio.

A superposição da matriz de rigidez e do vetor de cargas equivalentes do ponto de integração é efetuada mediante a informação da conectividade, deste ponto. Para obter esta conectividade é preciso definir a matriz **ID** do domínio e, a partir dela, a matriz **LM** para o ponto de integração. A matriz **ID**, ou matriz de identificação, indica os índices

das equações associadas a cada nuvem. A matriz LM obtida a partir da matriz ID em função das nuvens que cobrem o ponto de integração indica o índice das equações para as quais ponto de integração tem contribuição.

No caso do exemplo, a matriz ID é dada por:

$$\mathbf{ID} = \begin{array}{c|ccc} \text{Nuv} \backslash \text{GL} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 13 & 14 & 15 \end{array} \quad (4.33)$$

Olhando a matriz de 4.33 verifica-se que os graus de liberdade 1,2 e 3 estão associadas à nuvem Ω_1 , e os graus de liberdade 4,5 e 6 à nuvem Ω_2 , e assim por diante. A matriz LM correspondente ao ponto de integração ipd é constituída pelos graus de liberdade associados as nuvens 2 e 5, como indicado a seguir:

$$\mathbf{LM}_{ipd} = [4 \ 5 \ 6 \ 13 \ 14 \ 15] \quad (4.34)$$

A posição da matriz e vetor de carga local \mathbf{K}_{ipd} e \mathbf{F}_{ipd} é assim dada por:

$$\mathbf{K}_{ipd} = \begin{array}{c|cccccc} \text{L} \backslash \text{C} & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 4 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ 5 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ 6 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ 13 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 14 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 15 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{array} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{F}_{ipd}^T = \begin{array}{c|cccccc} \text{C} \backslash \text{L} & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 1 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \end{array} \quad (4.36)$$

A montagem da matriz de rigidez e do vetor de cargas equivalentes para pontos na fronteira, bem como sua contribuição na matriz de rigidez e no vetor de cargas equivalentes globais, é feita de forma análoga àquela construída no domínio para pontos no domínio. Ela é exemplificada através da montagem da matriz de rigidez e do vetor de cargas equivalentes para o ponto ipb da Figura 4.1.

Considerando apenas uma nuvem Ω_4 cobrindo o ponto ipb , a matriz \mathbf{G}_{ipb} e o vetor $\mathbf{H}_{pi f}$ têm dimensão (3×3) e (3×1) , respectivamente.

$$\mathbf{G}_{ipb} = \left(\bar{\mathbf{N}}_{\theta}^T \mathbf{N}_{\theta} + \bar{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{N}_w \right) W_{ipb} \frac{L_{\overline{DA}}}{2} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{H}_{ipb} = \left(\bar{\mathbf{N}}_{\theta}^T \mathbf{N}_{\theta} + \bar{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{N}_w \right) \bar{\mathbf{U}} W_{ipb} \frac{L_{\overline{DA}}}{2} \quad (4.38)$$

Na equação 4.37, novamente $W_{pi f}$ corresponde ao peso do ponto de integração e $L_{\overline{DA}}$ ao jacobiano do elemento linear \overline{AD} . As matrizes $\bar{\mathbf{N}}_{\theta}$, \mathbf{N}_{θ} , $\bar{\mathbf{N}}_w$ e \mathbf{N}_w têm a seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{N}}_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & S_{\theta x} \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_{\theta y} \varphi_4 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0} \quad (4.39)$$

Dado que a placa do exemplo é simplesmente apoiada, não são prescritas rotações e, portanto, $S_{\theta x} = S_{\theta y} = 0$. O deslocamento transversal é prescrito. Portanto, $S_w = 1$:

$$\bar{\mathbf{N}}_w = [S_w \varphi_4 \quad 0 \quad 0] = [\varphi_4 \quad 0 \quad 0] \quad (4.39)$$

$$\mathbf{N}_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{N}_w = [\varphi_4 \quad 0 \quad 0] \quad (4.41)$$

O vetor \mathbf{H} é um vetor nulo, o que se deve ao fato de que $\bar{w} = 0$

Para acoplar estas matrizes é preciso definir uma nova matriz de identificação, que indica os índices dos parâmetros de Lagrange associados a cada função de aproximação, por sua vez relacionadas ao grau de liberdade prescrito. Esta matriz é denominada **IDL**, ou matriz de identificação de parâmetros de Lagrange. Os índices nesta matriz são numerados seguindo a sequência do último índice da matriz **ID**.

Para determinar as conectividades dos pontos de integração sobre as fronteiras será usada a matriz **LML**, construída de forma semelhante à matriz **LM**, que indica os índices

de parâmetros de Lagrange associados a um ponto de integração específico. A seguir, define-se a matriz **IDL** para o exemplo como

$$\mathbf{IDL} = \begin{array}{c|ccc} \text{Nuv} \backslash \text{GL} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 16 & 0 & 0 \\ 2 & 17 & 0 & 0 \\ 3 & 18 & 0 & 0 \\ 4 & 19 & 0 & 0 \end{array} \quad (4.42)$$

As linhas da matriz acima correspondem as nuvens 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Observando-se 4.42 verifica-se que a matriz **IDL** é numerada a partir do último valor da matriz **ID**, como comentado anteriormente, e apresenta valores diferentes de zero unicamente nas posições correspondentes a condições de contorno prescritas. A matriz **LML** para *ipb* tem a seguinte forma:

$$\mathbf{LML}_{ipb} = [19 \ 0 \ 0] \quad (4.43)$$

Partindo da matriz **LML** para o ponto de integração *ipb*, pode-se determinar a contribuição da matriz \mathbf{G}_{ipb} na parcela da matriz de rigidez global **K**, correspondente ao contorno de Dirichlet.

$$\mathbf{G}_{ipb} = \begin{array}{c|ccc} \text{C/L} & 19 & 0 & 0 \\ \hline 19 & G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ 0 & G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ 0 & G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{array} \quad (4.44)$$

A única contribuição para a matriz de rigidez global é o elemento G_{11} , o qual vai para a posição (19, 19) na matriz de rigidez global **K**. As outras posições da matriz **LML** são nulas devido ao deslocamento transversal ser o único grau de liberdade prescrito. O sistema linear global resultante fica definido por:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{G}^T \\ \hline \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{array}{c} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Lambda} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{array} \quad (4.45)$$

em que

$$\mathbf{U}^T = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_{13}, u_{14}, u_{15}] \quad (4.46)$$

$$\mathbf{\Lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] \quad (4.47)$$

No exemplo correspondente a Figura 4.1, foi feita a montagem detalhada das matrizes de rigidez e vetores de cargas equivalentes, para pontos de integração no domínio e na fronteira de Dirichlet. Foi montado o sistema 4.45 como resultado das equações integrais do princípio variacional clássico, usando multiplicadores de Lagrange para forçar condições de contorno na fronteira de Dirichlet. Como comentado anteriormente, este procedimento apresenta boa precisão numérica, embora as condições de contorno essenciais sejam impostas de forma fraca. Porém apresenta o inconveniente de ter uma matriz de rigidez que não é positiva definida e, frequentemente, mal condicionada (geralmente para espaços de aproximação obtidos com $p \geq 2$). Uma das formas de contornar este problema é utilizar o princípio variacional modificado, apresentado por T. Belytschko, Y.Y. Lu e L.Gu [4], adaptado para o problema de placas de Mindlin. Com isto se obtém uma matriz de rigidez similar à obtida em FEM, sem grandes problemas de condicionamento e com redução do número de graus de liberdade do problema. A seguir são apresentadas as equações integrais com variáveis discretizadas para princípio variacional modificado, juntamente com aplicação destes nos exemplos da figura 4.1.

Partindo das Eqs 2.73 e 2.74, as variáveis \mathbf{Mn} e \mathbf{Qn} têm as seguintes formas discretizadas:

$$\mathbf{Mn} \cong \mathbf{n}_b (\mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \mathbf{U}) \quad (4.48)$$

$$\mathbf{Qn} \cong \mathbf{n}_s (\mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \mathbf{U}) \quad (4.49)$$

cujas matrizes \mathbf{n}_b e \mathbf{n}_s são apresentadas nas Eqs. 2.78 e 2.79.

Discretizando as variáveis da Eq. 2.77, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} [\mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}_b \mathbf{U}^* + \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}_s \mathbf{U}^*] d\Sigma \quad (4.50) \\
& - \int_{\Sigma} q \mathbf{N}_w \mathbf{U}^* d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \mathbf{N}_{\theta} \mathbf{U}^* d\Sigma - \int_{\partial\Sigma N} \bar{q} \mathbf{N}_w \mathbf{U}^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma N} \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{N}_{\theta} \mathbf{U}^* d\partial\Sigma \\
& + \int_{\partial\Sigma D} \mathbf{n}_b \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{N}}_{\theta} \mathbf{U}^* d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma D} \mathbf{n}_s \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{N}}_w \mathbf{U}^* d\partial\Sigma \\
& + \int_{\partial\Sigma D} \mathbf{n}_b \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \mathbf{U}^* \cdot (\bar{\mathbf{N}}_{\theta} \mathbf{U} - \bar{\mathbf{N}}_{\theta} \bar{\mathbf{U}}) d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma D} \mathbf{n}_s \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \mathbf{U}^* \cdot (\bar{\mathbf{N}}_w \mathbf{U} - \bar{\mathbf{N}}_w \bar{\mathbf{U}}) = 0
\end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{U}^* \in \mathbf{R}^{3N}$$

Colocando em evidência \mathbf{U}^* , chega-se à equação:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{U}^* \left\{ \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) \mathbf{U} d\Sigma \quad (4.51) \right. \\
& + \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{n}_b^T \bar{\mathbf{N}}_{\theta} + \bar{\mathbf{N}}_{\theta}^T \mathbf{n}_b \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b) \mathbf{U} d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma D} (\mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{n}_s^T \bar{\mathbf{N}}_w + \bar{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{n}_s \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) \mathbf{U} d\partial\Sigma \\
& - \int_{\Sigma} \mathbf{N}_w^T q d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{m} d\Sigma - \int_{\partial\Sigma N} \mathbf{N}_w^T \bar{q} d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma N} \mathbf{N}_{\theta}^T \bar{\mathbf{m}} d\partial\Sigma \\
& \left. + \int_{\partial\Sigma D} (-\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{n}_b^T \bar{\mathbf{N}}_{\theta} + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{n}_s^T \bar{\mathbf{N}}_w) \bar{\mathbf{U}} d\partial\Sigma \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{U}^* \in \mathbf{R}^{3N}$$

Denominando

$$\mathbf{K} = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) d\Sigma \quad (4.52)$$

$$+ \int_{\partial\Sigma D} \left(\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{n}_b^T \bar{\mathbf{N}}_\theta + \bar{\mathbf{N}}_\theta^T \mathbf{n}_b \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \right) d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma D} \left(\mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{n}_s^T \bar{\mathbf{N}}_w + \bar{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{n}_s \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \right) d\partial\Sigma,$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Sigma} \mathbf{N}_w^T q d\Sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{N}_\theta^T m d\Sigma + \int_{\partial\Sigma N} \mathbf{N}_w^T \bar{q} d\partial\Sigma \quad (4.53)$$

$$+ \int_{\partial\Sigma N} \mathbf{N}_\theta^T \bar{m} d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma D} \left(-\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{n}_b^T \bar{\mathbf{N}}_\theta + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{n}_s^T \bar{\mathbf{N}}_w \right) \bar{\mathbf{U}} d\partial\Sigma,$$

a equação 4.51 pode ser escrita como:

$$\mathbf{U}^* \{ \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F} \} = 0 \quad (4.54a)$$

Devido a \mathbf{U}^* ser um valor arbitrário, o equilíbrio do sistema implica satisfazer o sistema de equações.

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.54b)$$

O procedimento de cálculo de \mathbf{K} e \mathbf{F} é feito de forma análoga à já vista. São calculados matrizes e vetores de carga para cada ponto de integração e, posteriormente, inseridos nos termos globais.

Assim a matriz \mathbf{K} é composta pela parcela \mathbf{K}_Σ do domínio e $\mathbf{K}_{\partial\Sigma D}$ da fronteira, sendo

$$\mathbf{K}_\Sigma = \int_{\Sigma} \left(\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \right) d\Sigma \quad (4.55)$$

$$\mathbf{K}_{\partial\Sigma D} = \int_{\partial\Sigma D} \left(\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{n}_b^T \bar{\mathbf{N}}_\theta + \bar{\mathbf{N}}_\theta^T \mathbf{n}_b \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \right) d\partial\Sigma \quad (4.56)$$

$$- \int_{\partial\Sigma D} \left(\mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{n}_s^T \bar{\mathbf{N}}_w + \bar{\mathbf{N}}_w^T \mathbf{n}_s \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \right) d\partial\Sigma.$$

Exemplo 2:

No segundo exemplo apresentado a seguir, é usado um espaço de aproximação obtido pelo enriquecimento da partição da unidade $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ por conjuntos completos de polinômios

de Legendre $\Pi_{k=0}$ e $\Pi_{p=1}$, apresentados no capítulo 3. Isto equivale a ter três funções aproximando cada grau de liberdade do modelo, indicadas a seguir:

1. $\psi_0^\alpha(x, y) = \varphi_\alpha(x, y)$
2. $\psi_1^\alpha(x, y) = L_1(\xi) \circ F_i^{-1}(x) \varphi_\alpha(x, y)$
3. $\psi_2^\alpha(x, y) = L_1(\eta) \circ F_i^{-1}(y) \varphi_\alpha(x, y)$

Nas funções $\psi(x, y)$ definidas acima, o supra-índice α indica a nuvem envolvida, e os sub-índice, a função envolvida.

Como o enriquecimento é feito com polinômios de Legendre, tem-se que ξ e $\eta \in [-1, 1]$ e as funções $F_i^{-1}(x)$ e $F_i^{-1}(y)$ são funções de mapeamento de domínio, como definidas no capítulo três.

Considerando, no presente exemplo, um ponto de integração no domínio *ipd* (o da Figura 4.1), as matrizes de deformação discretas \mathbf{B}_b [3X18] e \mathbf{B}_s [2X18] são:

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_{0,x}^2 & 0 & \cdots & 0 & -\psi_{2,x}^2 & 0 & \cdots & 0 & -\psi_{2,x}^5 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi_{0,y}^2 & \cdots & 0 & 0 & -\psi_{2,y}^2 & \cdots & 0 & 0 & -\psi_{2,y}^5 \\ 0 & -\psi_{0,y}^2 & -\psi_{0,x}^2 & \cdots & 0 & -\psi_{2,y}^2 & -\psi_{2,x}^2 & \cdots & 0 & -\psi_{2,y}^5 & -\psi_{2,x}^5 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \psi_{0,x}^2 & -\psi_0^2 & 0 & \cdots & \psi_{2,x}^2 & -\psi_2^2 & 0 & \cdots & \psi_{2,x}^5 & -\psi_2^5 & 0 \\ \psi_{0,y}^2 & 0 & -\psi_0^2 & \cdots & \psi_{2,y}^2 & 0 & -\psi_2^2 & \cdots & \psi_{2,y}^5 & 0 & -\psi_2^5 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Por outro lado, as matrizes **ID** da cobertura e **LM** do ponto de integração *ipd* têm as seguintes formas:

Nuv \ GL	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	19	20	21	22	23	24	25	26	27
4	28	29	30	31	32	33	34	35	36
5	37	38	38	39	40	41	42	43	44

(4.59)

A matriz **LM** para o ponto de integração é dada pelas equações associadas às nuvens Ω_2 e Ω_5 , respectivamente:

$$LM_{ipd} = [10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 37 \ 38 \ 39 \ 40 \ 41 \ 42 \ 43 \ 44 \ 45]$$

A partir da matriz LM_{ipd} pode-se efetuar o acoplamento da matriz K_{ipd} , que é calculada, como em 4.27, na matriz de rigidez global.

A parcela da matriz de rigidez correspondente a pontos sobre a fronteira de Dirichlet leva em consideração o efeito do significado físico dos multiplicadores de Lagrange, isto é, o valor das reações de vínculo (momentos e cortantes) necessários para garantir as condições de contorno prescritas.

No cálculo da K_{ipb} são levadas em consideração as funções de aproximação diferentes de zero no ponto ipb . A seguir são apresentadas a expressão para a matriz de rigidez para o ponto ipb e as formas das matrizes componentes B_b , B_s , \bar{N}_θ e \bar{N}_w :

$$K_{ipb} = \left[\left(B_b^T C_b n_b^T \bar{N}_\theta + \bar{N}_\theta^T n_b C_b B_b \right) \right. \quad (4.60)$$

$$\left. - \left(B_s^T C_s n_s^T \bar{N}_w + \bar{N}_w^T n_s C_s B_s \right) \right] W_{ipb} \frac{LDA}{2}$$

$$B_b = \begin{bmatrix} 0 & \psi_{0,x}^4 & 0 & 0 & \psi_{1,x}^4 & 0 & 0 & \psi_{2,x}^4 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{0,y}^4 & 0 & 0 & \psi_{1,y}^4 & 0 & 0 & \psi_{2,y}^4 \\ 0 & \psi_{0,y}^4 & \psi_{0,x}^4 & 0 & \psi_{1,y}^4 & \psi_{1,x}^4 & 0 & \psi_{2,y}^4 & \psi_{2,x}^4 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} \psi_{0,x}^4 & -\psi_0^4 & 0 & \psi_{1,x}^4 & -\psi_1^4 & 0 & \psi_{2,x}^4 & -\psi_2^4 & 0 \\ \psi_{0,y}^4 & 0 & -\psi_0^4 & \psi_{1,y}^4 & 0 & -\psi_1^4 & \psi_{2,y}^4 & 0 & -\psi_2^4 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$\bar{N}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & S_{\theta x} \psi_0^4 & 0 & 0 & S_{\theta x} \psi_1^4 & 0 & 0 & S_{\theta x} \psi_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & S_{\theta y} \psi_0^4 & 0 & 0 & S_{\theta y} \psi_1^4 & 0 & 0 & S_{\theta y} \psi_2^4 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\bar{N}_w = [S_w \psi_0^4 \ 0 \ 0 \ S_w \psi_1^4 \ 0 \ 0 \ S_w \psi_2^4 \ 0 \ 0] \quad (4.64)$$

A dimensão da matriz K_{ipb} será, portanto, de (9X9).

As parcelas correspondentes ao vetor de cargas equivalentes é obtida por

$$\mathbf{F}_{ipb} = \left(-\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{n}_b^T \bar{\mathbf{N}}_\theta + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{n}_s^T \bar{\mathbf{N}}_w \right) \bar{\mathbf{U}} W_{ipb} \frac{L_{DA}}{2} \quad (4.65)$$

Como $\bar{\mathbf{U}} \equiv 0$ para o presente exemplo, resulta que $\mathbf{F}_{ipb} \equiv 0$ também. Isto permite verificar que sempre que o vetor $\bar{\mathbf{U}} \equiv 0$, for nulo sejam quais forem as condições de contorno prescritas (deslocamento trasversal ou rotações), o vetor $\mathbf{F}_{\partial D}$, que é a parcela do vetor de cargas referente as condições de contorno na fronteira de Dirichlet, será nulo.

4.2 Resultados de Pós Processamento:

Resolvendo o sistema linear 4.54b determina-se o vetor de parâmetros de deslocamento \mathbf{U} . A partir deste vetor e da matriz de conectividades \mathbf{LM} correspondente a um ponto qualquer do domínio ou da fronteira, pode-se determinar as coordenadas generalizadas, isto é, o deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y no ponto. Da mesma forma, podem ser calculados o tensor de deformações, assim como as reações de apoio, quando for o caso. Optando por uma abordagem prática para esta matéria, já que as equações foram estabelecidas, são usados os pontos ipd e ipb do exemplo anterior na determinação destes resultados.

- Determinação do campo de deslocamentos

No exemplo adotado, o vetor deslocamento para o ponto ipd da figura 4.1 é

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\}_{ipd} = \mathbf{N}_{ipd} \mathbf{U}_{ipd} \quad (4.68)$$

em que

$$\mathbf{N}_{ipd} [3 \times 18] = \begin{bmatrix} \psi_0^2 & 0 & 0 & \dots & \psi_2^2 & 0 & 0 & \dots & \psi_2^5 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_0^2 & 0 & \dots & 0 & \psi_2^2 & 0 & \dots & 0 & \psi_2^5 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_0^2 & \dots & 0 & 0 & \psi_2^2 & \dots & 0 & 0 & \psi_2^5 \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

$$\mathbf{U}_{ipd}^T = \{u_{10}, \dots, u_{45}\}. \quad (4.69)$$

O vetor U_{ipd} é recuperado do vetor U global com auxílio da matriz LM_{ipd}

Determinado o vetor de parâmetros de deslocamento para o ponto, o campo de deslocamento fica definido em função deste vetor de parâmetros, como segue:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_{ipd} = \begin{Bmatrix} -z\theta_x \\ -z\theta_y \\ w \end{Bmatrix}_{ipd} \quad (4.70)$$

A expressão 4.70 corresponde à equação do modelo cinemático de primeira ordem 2.1, através do qual se define o campo de deslocamento em qualquer ponto da placa.

- **Tensor de Momentos e Cortantes num Ponto**

Na determinação do vetor de momentos e do vetor de cortantes para o ponto ipd , parte-se das matrizes 4.57 e 4.58 e do vetor de parâmetros de deslocamentos U_{ipd} , obtido em função da matriz LM_{ipd} para o ponto. Portanto, aplicando-se as definições 4.10 e 4.11 chega-se a:

$$M_{ipd}(\mathbf{u}) = C^b B_{ipd}^b U_{ipd} \quad (4.71)$$

$$Q_{ipd}(\mathbf{u}) = C^s B_{ipd}^s U_{ipd} \quad (4.72)$$

- **Reações de Apoio:**

As reações de apoio na fronteira de Dirichlet correspondem às forças necessárias para forçar as condições de contorno nesta fronteira, que nada mais são que os multiplicadores de Lagrange. Para determinar as reações no ponto ipb da figura 4.1, partimos das matrizes 4.61, 4.62, e da matriz LM_{ipb} , definida abaixo:

$$LM_{ipb} = [28 \ 29 \ 30 \ 31 \ 32 \ 33 \ 34 \ 35 \ 36] \quad (4.73)$$

através da qual obtem-se o vetor de parâmetros de deslocamento para o ponto U_{ipb} definido por

$$U_{ipb} = \{ u_{28} \quad \cdots \quad u_{36} \} \quad (4.74)$$

As matrizes \mathbf{n}^b e \mathbf{n}^s na fronteira do ponto ipb tem a forma:

$$\mathbf{n}^b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\mathbf{n}^s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Substituindo-se as Eqs.4.71, 4.72 e 4.73 nas Eqs. 4.48 e 4.49 obtém-se:

$$\mathbf{Mn}_{ipb} = \mathbf{n}^b (\mathbf{C}^b \mathbf{B}_{ipb}^b U_{ipb}) \quad (4.76)$$

$$\mathbf{Qn}_{ipb} = \mathbf{n}^s (\mathbf{C}^s \mathbf{B}_{ipb}^s U_{ipb}) \quad (4.77)$$

Estabelecidas as equações de Galerkin, o passo seguinte é a sua implementação computacional através do código CLOUDS++, cuja estrutura é abordada a seguir.

4.3 Aspectos Computacionais

Antes de comentar o código CLOUDS++ é necessário, como ferramenta indispensável a sua compreensão do mesmo, rever, os conceitos básicos da filosofia da Programação Orientada a Objetos, que são apresentados a seguir.

A característica fundamental da linguagem orientada a objeto consiste na forma de ordenar e modularizar os seus códigos, agrupando dados e procedimentos (funções) numa mesma estrutura, chamada classe. O emprego deste tipo de estrutura computacional torna esta linguagem muito vantajosa em relação as linguagens estruturadas.

Na Programação Orientada a Objeto, as classes são definições do tipo variáveis, com dados e procedimentos próprios. Juntamente com a classe, surge o conceito de objeto, que está intrinsecamente ligado a esta e corresponde a uma instância ou variável da classe definida. Esta filosofia de programação permite a atualização e incorporação de novos procedimentos, usando as classes já existentes, o que constitui uma das grandes vantagens

em relação à programação estruturada convencional e à programação procedural. Existem três propriedades fundamentais que caracterizam uma linguagem orientada a objetos, a saber:

- **Encapsulamento**

É a propriedade de se implementar dados e procedimentos correlacionados em uma mesma entidade (classe), tornando esta independente de sua implementação interna, mas não de sua interface. Portanto, a organização de dados, sua estrutura, posição física na memória e detalhes de implementação são alheios ao código que utiliza o objeto. Por outro lado, a não interferência do código externo nos dados da classe confere proteção a estes.

- **Herança**

A herança constitui o mecanismo pelo qual se pode compartilhar automaticamente métodos e dados entre diferentes classes, subclasses e objetos. Esta é fruto de um mecanismo de hierarquia entre classes, em que uma classe mais especializada (classe filha) herda as propriedades da classe mais geral (classe pai), a qual ela está imediatamente subordinada na hierarquia. A herança permite ao programador criar uma nova classe programando somente as diferenças para a classe pai.

- **Polimorfismo**

É usado para indicar a propriedade de se usar o mesmo nome para métodos diferentes, implementados em distintos níveis de uma hierarquia de classes. Neste caso, para cada classe tem-se um comportamento específico para o método. Portanto, pode-se definir polimorfismo como a propriedade de um programa orientado a objetos de discernir, entre os métodos homônimos, aquele que deve ser executado. A chave para esse discernimento é o objeto receptor da mensagem. O polimorfismo é o responsável pela facilidade de execução de um Programa Orientado a Objetos. Para se modificar um programa que usa

polimorfismo, basta desviar novas subclasses de uma classe herdada. Se os métodos da superclasse são suficientes para a subclasse, não se fará necessária uma nova implementação de código. Caso contrário, o caráter polimórfico do programa permite a implementação das exceções no próprio nível da nova classe. A fim de diminuir o volume de extensões de um programa, uma das estratégias usadas na Programação Orientada a Objetos é a de implementação dos métodos o mais alto possível na hierarquia de classes. Com o polimorfismo, os objetos estarão prontos a responder a métodos que estão implementados em seu próprio nível ou mais acima na hierarquia das classes. Outra vantagem do polimorfismo é a relativa facilidade de manutenção, já que uma vez eliminados os erros nos métodos já implementados, o surgimento de novos erros podem estar associados aos métodos de novas subclasses adicionais.

4.3.1 Código CLOUDS++

O código desenvolvido na linguagem orientada a objetos C++ (CLOUDS++) contém todos os procedimentos para a resolução do problema de flexão de placas de Reissner-Mindlin, utilizando método das nuvens nas versões h , p e hp homogêneos. Durante o processo interativo, a estrutura computacional faz o gerenciamento de:

- a) Incremento de graus de liberdade do problema, através do aumento do número de parâmetros de deslocamento associado a cada grau de liberdade do modelo;
- b) Incremento da matriz de rigidez e do vetor de cargas para um ponto de integração e consequente aumento da matriz de rigidez e do vetor de cargas globais;
- c) Construção automática do espaço das funções de aproximação;
- d) Imposição automática das condições de contorno para pontos de integração sobre a fronteira de Dirichlet através do significado físico dos multiplicadores de Lagrange, incorporados na matriz de rigidez e vetor de cargas destes pontos;
- e) Determinação de resultados de pós-processamento (deslocamentos, esforços e reações de apoio).

Os itens citados acima definem de forma resumida as potencialidades do código, sem

deixar de citar que, devido às características modulares da Programação Orientada a Objetos, ele pode ser usado para a análise de outro tipo de problemas. Devido à propriedade de modularidade acima citada, o código CLOUDS++ foi construído por áreas de gerenciamento como:

Malha Suporte de Integração

Classe:

- acCoord2D

Procedimentos: leitura de coordenadas e funções auxiliares

Domínio

Classe:

- acDomain

Procedimentos: gerenciamento de dados do domínio de integração e montagem da matriz de rigidez e do vetor de cargas globais correspondentes às parcelas do domínio.

Definição da Geometria.

Classes:

- acKeyPoint
- acBoundaryGrp
- acBoundary

Procedimentos: leitura e gerenciamento de definição geométrica das fronteiras, bem como montagem das parcelas correspondentes à fronteira da matriz de rigidez e do vetor de cargas globais. A classe acBoundary é uma classe virtual, ou seja, possui unicamente os protocolos das classes filhas, nas quais será implementado o corpo da função. Nesta classe pode-se evidenciar de forma clara o emprego do conceito de isomorfismo, no qual as funções têm a mesma forma para as classes acLine, acArch e acBSpline, as que são acessadas pelos objetos do vetor de fronteira.

- **Cobertura Aberta do Domínio**

Classe:

- acClouds

Procedimentos: construção e gerenciamento da cobertura e do espaço de aproximação.

Esta classe possui as funções responsáveis por:

- leitura e geração de nuvens de forma a garantir que o ponto do domínio ou da fronteira seja coberto pelo menos por duas nuvens;
- montagem de estrutura *Quad-Tree*, utilizada para diminuir o tempo de procura das nuvens que cobrem um determinado ponto de integração.
- cálculo da partição da unidade, gradiente e enriquecimento.

Propriedades Materiais e Geométricas

Classes:

- acMaterial
- acGeomProperties

Procedimentos: gerenciamento de dados de material e constantes geométricas.

Definição de Graus de Liberdade e Condições de Contorno.

Classes:

- acDefDOFNode
- acBoundCondGrp

Procedimentos: leitura e gerenciamento dos tipos de graus de liberdade do problema e condições de contorno nas fronteiras.

Definição de Graus de Liberdade do problema.

Classe:

- acID

Procedimentos: gerenciamento dos graus de liberdade (equações) do problema necessários nas etapas de montagem e solução de pós- processamento.

Ponto de Integração

Classes:

- acIP
- acIPPlate

Procedimentos: leitura e gerenciamento de informações, bem como construção da matriz de rigidez e vetor de cargas para o ponto de integração. A classe acIP é, igualmente a acBoundary, uma classe virtual. Portanto, temos unicamente, os protocolos das funções filhas (acIPPlates, acIPPlStrs, acIPPlstrn, ect), sendo o corpo destas definidas dentro de cada classe, respectivamente, como já foi citado. Novamente, as funções das classes são acionadas pelos objetos correspondentes.

Finalmente fecha-se este capítulo, que mostrou de forma clara e detalhada a montagem das equações de Galerkin para o problema analisada, bem como um resumo da estrutura básica do código computacional utilizado. Encerra-se aqui a etapa correspondente aos fundamentos teóricos do trabalho, ficando desta forma o caminho delineado para a etapa conclusiva da pesquisa que trata dos resultados numéricos, abordados no próximo capítulo.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo são analisados de forma objetiva os resultados numéricos para deslocamentos e esforços na resolução do problema de flexão de placas de Mindlin, provenientes da metodologia abordada neste trabalho. Os objetivos principais desta análise recaem sobre o comportamento do espaço de aproximação quanto ao fenômeno de travamento (locking), e quanto à convergência de deslocamentos e tensões com relação às soluções analíticas para as placas semi-espessas do Capítulo 2.

Como se trata de um novo campo de aproximação, onde as funções apresentam domínios que não estão amarrados a uma malha, aparecendo agora o conceito de matriz de rigidez e vetor de cargas equivalentes do **ponto de integração**, surge a necessidade de verificar a influência da cobertura sobre estes pontos, através do número de condicionamento da matriz de rigidez global. Por se tratar de um método sem malha, no qual esta é usada apenas como conjunto de células de integração e pelo fato de as funções de aproximação serem altamente regulares, é feita uma análise de verificação de convergência de deslocamentos transversais com relação ao número de pontos de integração no domínio e na fronteira.

Inicia-se este capítulo com o comentário do processo de integração numérica utilizado, por ser considerado conhecimento indispensável nas análises que seguem.

Os primeiros resultados numéricos são referentes a placas quadradas simplesmente apoiadas e placas quadradas e circulares engastadas no contorno, estando todas elas sujeitas a uma carga uniformemente distribuída, já que estes modelos apresentam solução

analítica que leva em consideração as deformações cisalhantes. Encerra-se o capítulo fazendo uma verificação de proximidade dos resultados obtidos utilizando o método das nuvens e MEF. Nesta última análise são acrescentados os casos de placa triangular, placa anelar e placa rômbrica.

Os resultados numéricos referentes às análises acima são, para uma melhor apreciação, apresentados por meio de gráficos, tabelas e diagramas de isocamadas de deslocamentos e esforços para os seguintes exemplos:

- fenômeno de travamento (locking) para placas quadradas simplesmente apoiadas e placas quadradas e circulares engastadas no contorno;
- verificação para placa quadrada simplesmente apoiada a influência da cobertura e da ordem polinomial do campo de aproximação no número de condicionamento da matriz $NC(\mathbf{K})$;
- verificação para placa quadrada simplesmente apoiada a influência da cobertura na convergência da norma L^2 do erro relativo do deslocamento transversal;
- Verificação para a placa quadrada simplesmente apoiada a influência do número de pontos de integração por célula e por fronteira de Dirichlet nas convergências globais e locais do deslocamento transversal;
- convergência da norma L^2 do erro relativo do deslocamento transversal e esforços (Momentos e Cortantes);
- convergência em relação a valores máximos normalizados com relação às soluções analíticas de placas semi-espessas, para os campos de deslocamento transversal e esforços (Momentos e Cortantes);
- análise comparativa de proximidade de resultados entre o deslocamento transversal normalizado obtidos com o uso do MEF e do método das Nuvens para a placa

quadrada simplesmente apoiada, placa circular engastada no contorno, placa triangular, placa anelar e placa rômbrica, sendo estas três últimas simplesmente apoiadas, e todas as cinco sujeitas a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

5.1 Integração Numérica

Neste trabalho, para efetuar a integração numérica é utilizada, no domínio, uma malha suporte de integração constituída de elementos triangulares (esta malha é chamada aqui de conjunto de células de integração) ajustada à geometria da estrutura em análise. Nas fronteiras de Dirichlet, já que não temos conectividade entre os suportes das nuvens, a integração numérica se faz separadamente do domínio. Para tal, são utilizados elementos lineares (aqui chamados de células lineares), com regras de Gauss fixa de 3 pontos de integração por elemento, na qual o aumento das taxas de convergência é atingido aumentando o número de elementos na fronteira.

Esta malha não precisa ser construída com os cuidados necessários em MEF, já que nossas funções não estão associadas ao suporte da malha, e as regras de quadratura são associadas a cada célula dependente da regularidade das funções de aproximação, de forma a garantir taxas de convergência satisfatórias. Na Figura 5a é mostrado um exemplo de malha suporte e cobertura associada à esta cobertura.

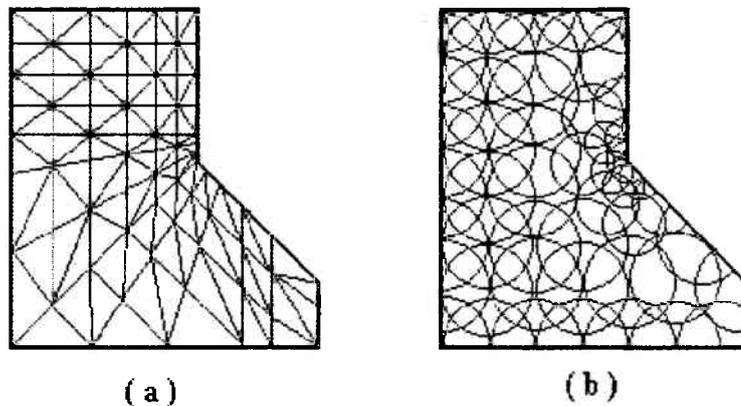


Figura 5a. (a) Malha suporte de integração, (b) cobertura.

Verificação de Travamento (Locking)

O fenômeno de travamento (Locking) ocorre devido à incapacidade do espaço de aproximação de cumprir a restrição de deformação cisalhante nula quando a espessura da placa tende a zero. Ele se manifesta através de um aumento de rigidez da placa à medida que sua espessura é diminuída. Esta limitação do espaço de aproximação tem sido contornada em MEF usando processos de sub-integração da parcela da matriz de rigidez do elemento correspondente ao cisalhamento. Esta técnica foi apresentada primeiramente por Mlakus and Huges (1978) e, posteriormente, num contexto mais geral, por Zienkiewicz e Nakazawa (1984) (ambos referenciados em L. Della Croce e T. Scapolla [22]). Entretanto este procedimento tem a dificuldade de apresentar modos espúrios de deformação (modos de energia de deformação nula e matriz de rigidez elementar singular), podendo ocorrer oscilação nos resultados e, em certos casos, até mesmo matriz de rigidez global singular. Outros procedimentos têm dado bons resultados em MEF, como o apresentado por L. Della Croce e T. Scapolla [22], em que elementos de ordem superior são capazes de absorver o locking para as espessuras de interesse prático. Utilizando um procedimento similar, Novotny e Fancello [21] contornam este problema usando refino p homogêneo de quarta ordem. O objetivo desta análise é verificar o comportamento do espaço de aproximação obtido pelo método das nuvens quanto ao locking. Para tal, são utilizados três exemplos, nos quais pretende-se também verificar a influência da geometria e das condições de contorno.

5.1.1 Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno

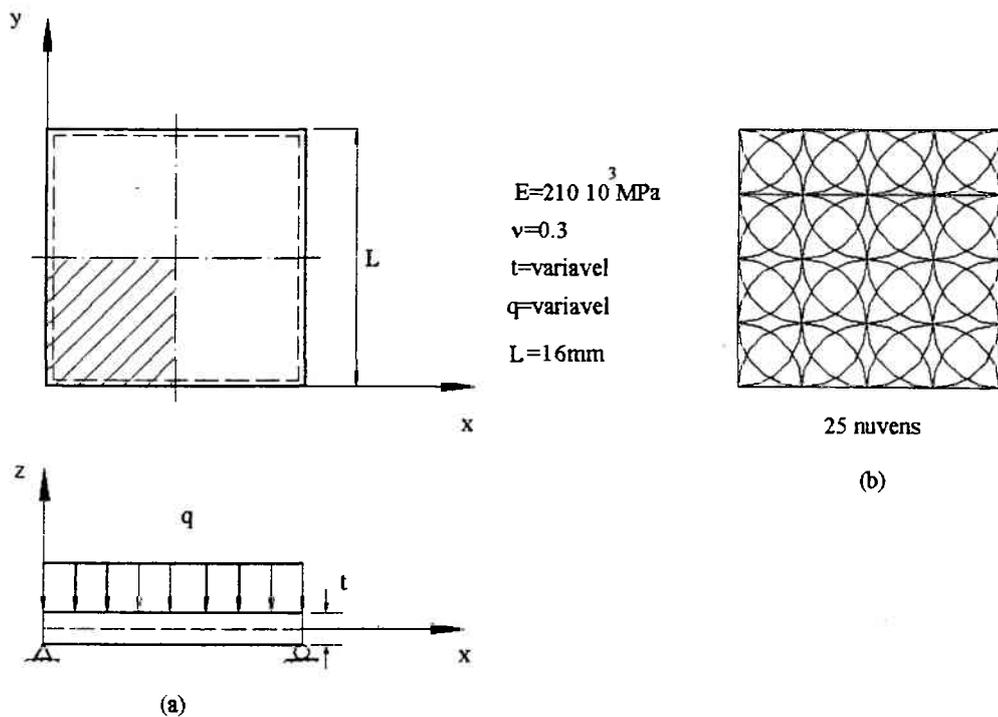


Figura 5.1: Placa quadrada simplesmente apoiada: (a) modelo e (b) cobertura.

A primeira análise é feita para uma placa quadrada simplesmente apoiada no contorno cujas dimensões, propriedades elásticas, carregamento e cobertura são indicadas nas Figuras 5.1(a) e 5.1(b). A verificação de travamento (locking) será realizada através do deslocamento central normalizado em relação à solução de Kirchhoff, dada pela expressão:

$$w_{central} = 0.004062 \frac{qL^4}{D} \quad (5.1)$$

em que D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa correspondente à expressão 2.22. A análise é feita para uma variação de $\frac{L}{t}$ definidas pelo intervalo $10 \leq \frac{L}{t} \leq 10^5$, sendo os resultados apresentados no gráfico da Figura 5.2

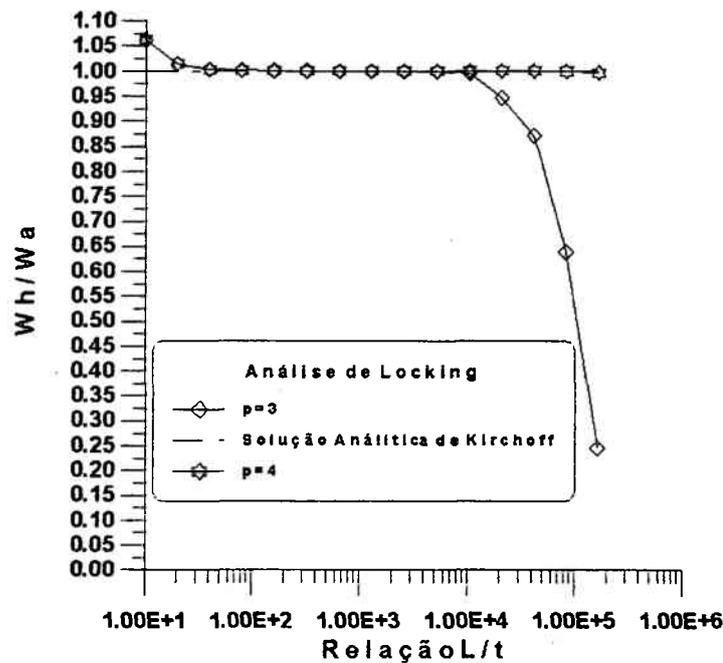


Figura 5.2. Verificação de Locking: Deslocamento transversal central normalizado para a placa quadrada sob condições de apoio rígido (hard).

Através da análise do gráfico da Figura 5.2, constata-se que a partir da relação $\frac{L}{t} \geq 10^2$ se tem um comportamento assintótico das soluções numéricas para $p = 3$ e $p = 4$ em relação aos valores da solução analítica de Kirchhoff. Para $p = 3$ ocorre travamento (locking) a partir de $\frac{L}{t} \geq 10^4$, e para $p = 4$, como era esperado, não se constata travamento (locking), embora ocorra um pequeno decréscimo da solução, decorrente de problemas de condicionamento da matriz de rigidez. Um resultado semelhante é verificado em MEF quando se emprega um enriquecimento p , como constatado por Novotny e Fancello[21]. Nos exemplos acima se tem para $p = 3$ $NGL = 750$ e, para $p = 4$, $NGL = 1125$, respectivamente.

5.1.2 Placa quadrada engastada no contorno

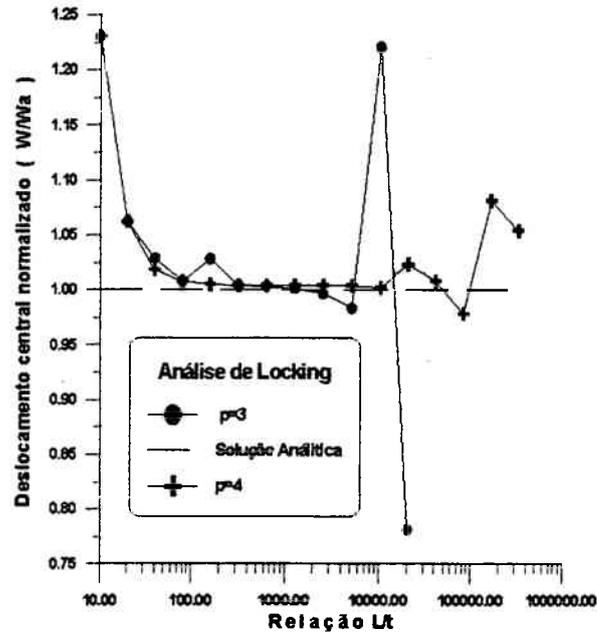


Figura 5.3. Verificação de Locking: Deslocamento transversal normalizado para o ponto central da placa quadrada engastada no contorno.

A placa quadrada engastada no contorno, com as mesmas características elásticas, de carregamento e geométricas que a apresentada na Figura 5.1, é usada para mostrar a influência das condições de contorno quanto ao locking. Neste exemplo pode ser constatado que a placa engastada constitui um caso crítico no estudo de locking, como será evidenciado através do gráfico da Figura 5.3. Novamente aqui os resultados numéricos para o deslocamento transversal central da placa são normalizados com relação à solução analítica de Kirchhoff dada pela Eq. 5.3, para um intervalo da relação $\frac{L}{t}$ apresentado anteriormente. Nesta análise, igualmente à anterior, são verificados os comportamentos das bases de aproximação obtidas por enriquecimento da função de Shepard por meio de produto de polinômios completos $\Pi_{p=3}$ e $\Pi_{p=4}$, sendo o NGL envolvido para cada caso idêntico à análise anterior.

$$w_{central} = 0.00126 \frac{qL^4}{D} \quad (5.3)$$

Constata-se através da análise do gráfico da Figura 5.3 que, ao contrário do que ocorria com a placa simplesmente apoiada, não se tem mais um comportamento assintótico para $p = 3$, no qual a curva da solução numérica apresenta oscilações em torno da solução analítica. Novamente o espaço de aproximação para satisfazer a restrição de deformação cisalhante nula não é adequado, evidenciando-se, como pode ser visto, o travamento (locking) para $\frac{L}{t} > 10^3$. Para o espaço de aproximação obtido com $p = 4$ obtém-se uma convergência assintótica para a solução analítica até valores de $\frac{L}{t} \leq 10^4$, a partir dos quais começam a ocorrer oscilações devido a problemas de mal condicionamento da matriz de rigidez.

5.1.3 Placa circular engastada no contorno

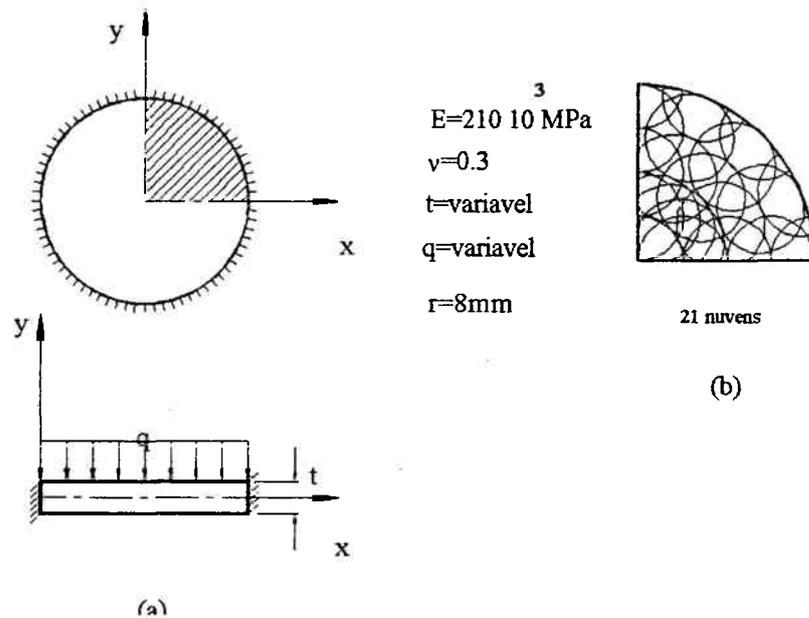


Figura 5.4. Placa circular engastada, (a) modelo e (b) cobertura.

Os exemplos apresentados anteriormente mostraram a influência das condições de contorno com relação ao fenômeno de travamento (locking). Pretende-se

agora verificar a influência da geometria. Para tal, é empregada uma placa circular com características elásticas, geométricas, de carregamento e cobertura mostradas na Figura 5.4.

No gráfico da Figura 5.5 são mostrados os valores normalizados de deslocamento transversal no centro da placa com relação à solução analítica dada na Eq. 1.106 do Apêndice. A análise será feita para um intervalo da relação $\frac{2R}{t}$ utilizado na placa quadrada.

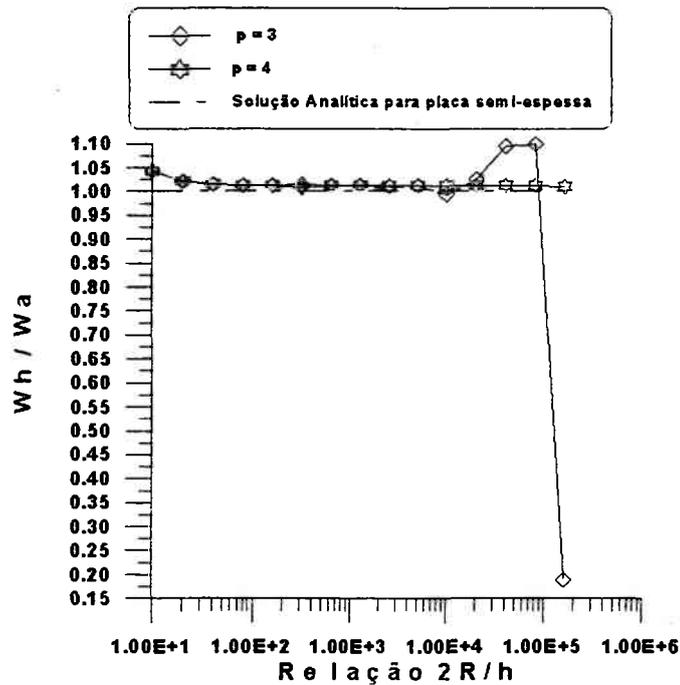


Figura 5.5. Verificação de Locking: Deslocamento transversal central normalizado para a placa circular engastada no contorno.

Observa-se aqui um comportamento assintótico das soluções numéricas até $\frac{2R}{t} < 10^4$, a partir do qual começam a surgir oscilações na solução para $p = 3$ e, finalmente, o surgimento de travamento (locking) para uma relação $\frac{2R}{t} > 10^5$. Para os espaços de aproximação construídos por enriquecimento da partição da unidade com base polinomial de quarta ordem não ocorre travamento, além de apresentar um comportamento assintótico até $\frac{2R}{t} \approx 10^6$, correspondente ao fim

da análise. O número de graus de liberdade usados para estes resultados foram $NGL = 630$, para $p = 3$, e $NGL = 945$, para $p = 4$. Pode-se concluir, em princípio, que para espaços obtidos por enriquecimento da partição da unidade por bases polinomiais de quarta ordem, não temos surgimento de travamento (locking), o que converge para as conclusões obtidas em MEF para refinamentos p homogêneos, como mostrado no trabalho de Novotny e Fancello[21].

5.2 Análise de Convergência

A análise de convergência será levada a cabo para dois casos dos quais se conhecem as soluções analíticas para o modelo de Mindlin. Estes modelos correspondem à placa retangular simplesmente apoiada no contorno, sujeita a um carregamento de pressão uniformemente distribuído no domínio, e a placa circular engastada no contorno, sujeita ao mesmo tipo de carregamento. Esta análise tem como objetivo verificar os seguintes itens:

1. influência da cobertura e da ordem polinomial do espaço de aproximação no Número de Condicionamento da matriz $NC(K)$;
2. influência da cobertura na convergência da Norma L^2 do erro relativo do Deslocamento Transversal;
3. convergência do Deslocamento Transversal central normalizado com relação ao número de pontos de integração por célula do domínio e por fronteira de Dirichlet;
4. convergência da Norma L^2 do Erro Relativo para o Deslocamento Transversal;
5. convergência local do Deslocamento Transversal no centro da placa para valores normalizados com relação à solução analítica de placas semi-espessas;
6. convergência da Norma L^2 do Erro Relativo em Momentos;
7. convergência local de Momentos para valores normalizados em relação à solução analítica de placas semi-espessas;
8. convergência da Norma L^2 do Erro Relativo para Esforços Cortantes;
9. convergência para valores normalizados do Esforço Cortante nos pontos médios dos apoios.

5.2.1 Resultados numéricos para a placa quadrada

Os itens acima relacionados serão analisados para uma placa quadrada com as características geométricas e elásticas apresentadas na figura 5.1. Neste exemplo é adotada uma espessura de $0.1mm$, sujeita a um carregamento de pressão, uniformemente distribuído no domínio, de $0.1 MPa$.

Influência da cobertura e da ordem polinomial do espaço de aproximação no Número de Condicionamento da Matriz $NC(K)$

No método de nuvens, como a malha de quadratura não necessariamente coincide com o domínio de definição das funções de aproximação, pode ocorrer, dependendo das dimensões do suporte de cada nuvem, uma cobertura excessiva num ponto de integração. Isto produz uma matriz de rigidez muito povoada e geralmente, mal condicionada.

Um problema similar ocorre quando se incrementa a ordem polinomial da base de aproximação, o que significa, em última análise, aumentar o número de coordenadas generalizadas do problema, causando um efeito idêntico ao anterior.

Para esta análise são utilizadas coberturas de 5 e 25 nuvens e uma ordem polinomial da base de aproximação $p = 2$. Como suporte de integração é utilizado, no domínio, um conjunto de 4 e 32 células triangulares, com regras de Gauss de 79 pontos. Nas fronteiras de Dirichlet são utilizados conjuntos de 20 e 60 células lineares por fronteira, com regra de Gauss de 3 pontos de integração.

O número de condição utilizado é calculado pela expressão definida por Cook et al, (1984), referenciado em Pablo Andrés Muñoz Rojas [24], que corresponde aquela encontrada usualmente na bibliografia de MEF e que tem a forma:

$$NC(K) = \log \left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right| \quad (5.4)$$

em que λ_{\max} e λ_{\min} correspondem ao maior e ao menor autovalor em valores absolutos da matriz K .

Na análise da influência da cobertura no condicionamento da matriz, surge o conceito

de fator de rádio (**RF**), o qual é dado pela expressão

$$\mathbf{RF} = \frac{r_n}{r_c} \quad (5.5)$$

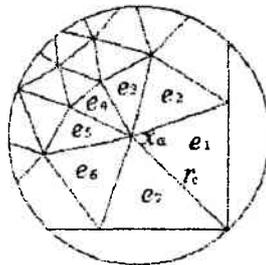


Figura 5b. Raio da nuvem r_c determinado pelo software CLOUDS++ para malha de elementos triangulares

Observando a Figura 5b, é tomado o ponto x_α como centro de uma nuvem. O valor de r_n corresponde ao raio do suporte da nuvem, enquanto r_c é determinado pela maior dimensão dos lados dos elementos triangulares que têm conectividade com o ponto x_α .

Os resultados destas análises são mostrados nos gráficos das Figuras 5.7 e 5.8

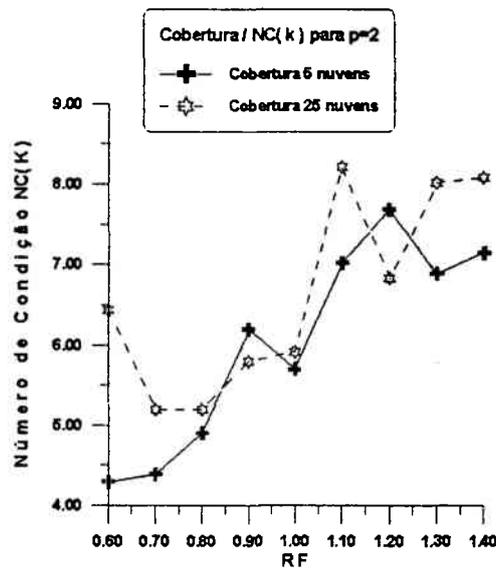


Figura 5.6. Número de Condicionamento $NC(K)$ em função de RF .

Através da análise do gráfico da Figura 5.6, confirma-se um aumento com algumas oscilações de $NC(K)$, com o incremento do fator de rádio (**RF**). Estes resultados indicam

um crescimento da largura de banda da matriz \mathbf{K} à medida que se aumenta a cobertura, de forma que se incrementar excessivamente \mathbf{RF} , a matriz pode ficar mal condicionada a ponto de se tornar quase singular.

Um efeito similar ao excesso de cobertura pode ser obtido quando se incrementa a ordem polinomial da base de aproximação para as mesmas coberturas e as mesmas regras de integração da análise anterior.

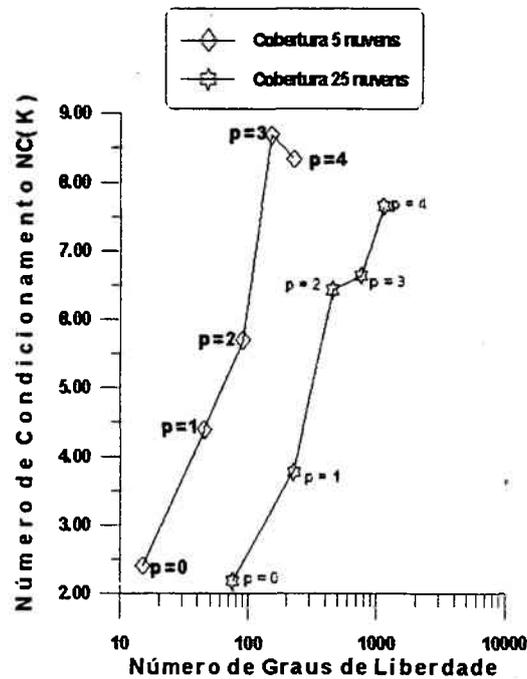


Figura 5.7. Número de Condicionamento $NC(\mathbf{K})$ em função de NGL

Através dos resultados do gráfico da Figura 5.7. constata-se um aumento acentuado do $NC(\mathbf{K})$ com o incremento de p para o intervalo $0 \leq p \leq 4$. Pode-se também observar que há uma melhora em termos de condicionamento da matriz de rigidez para a cobertura de 25 nuvens em relação à cobertura de 5 nuvens.

Influência da cobertura na convergência da Norma L^2 do Erro Relativo de Deslocamentos Transversais.

Esta análise tem por objetivo verificar a convergência de Deslocamento Transversal com as variações de fator de rádio (\mathbf{RF}), e é feita para um campo de aproximação correspondente à $p = 4$, fator de rádio definido no intervalo $0.6 \leq \mathbf{RF} \leq 1.3$, suporte de integração

constituído por 32 células triangulares, com regras de Gauss de 79 pontos no domínio, e 60 células lineares, com regra de Gauss de 3 pontos nas fronteiras de Dirichlet. O resultado é mostrado no gráfico da Figura 5.8.

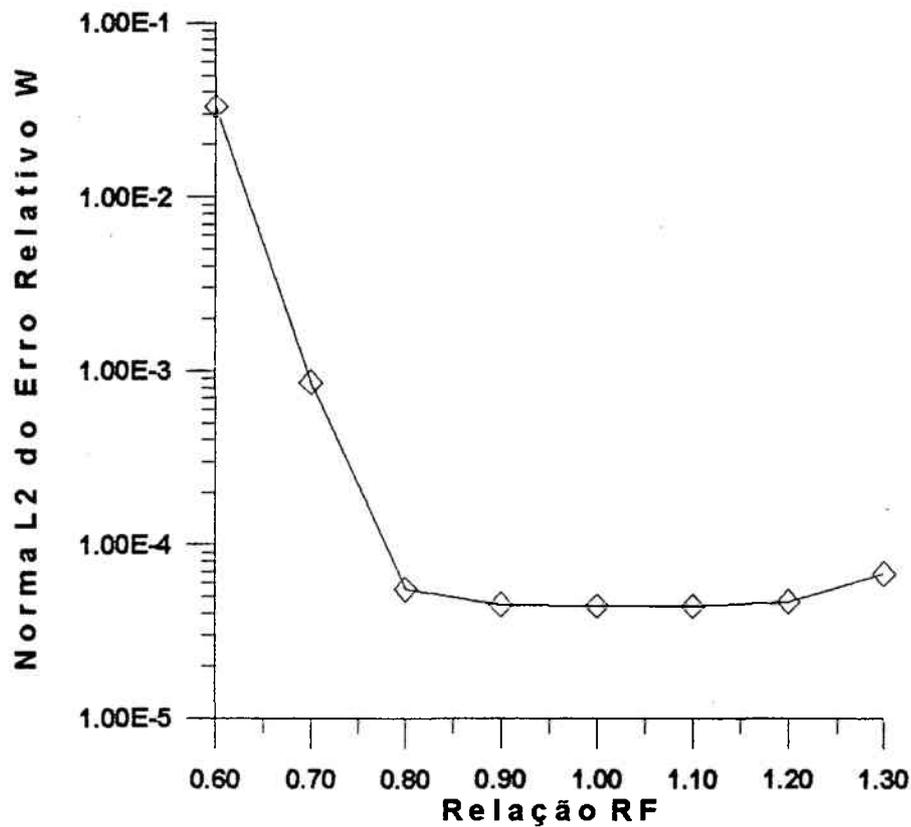


Figura 5.8. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Convergência da norma L^2 do erro relativo em w

Através da análise do gráfico da Figura 5.6 constata-se que, para coberturas com $\mathbf{RF} < 0.8$, ocorre um aumento brusco na norma L^2 do erro relativo $\|er_w\|_{L^2}$. Este fato não se verifica para $\mathbf{RF} > 0.9$, no qual não se observam variações sensíveis de $\|er_w\|_{L^2}$.

Para este exemplo pode-se concluir que o aumento de \mathbf{RF} de 0.9 até 1.30 apresenta resultados menos desfavoráveis em termos de $\|er_w\|_{L^2}$ do que a sua diminuição do mesmo para valores menores do que 0.9.

Convergência do deslocamento transversal com relação ao número de pontos de integração por célula no domínio e por fronteira de Dirichlet.

A procura de um número ótimo de pontos de integração, tanto no domínio como na fronteira, torna-se indispensável nos métodos sem malha, nos quais as próprias funções partição da unidade são altamente regulares. Isto leva a procurar uma regra de integração que não torne o processo computacional muito demorado e que ao mesmo tempo, possa atingir a precisão de resultados desejada. A seguir mostram-se nos gráficos das Figuras 5.9(a) e 5.9(b), os resultados de convergência para valores máximos normalizados e Norma L^2 do Erro Relativo, ambas para deslocamento transversal. Para esta análise são usadas regras de Gauss de 12, 16, 25 e 79 pontos de integração por célula, bases de aproximação de ordem polinomial $p = 3$ e $p = 4$ e 60 células lineares com regras de Gauss de 3 pontos de integração por célula em cada fronteira de Dirichlet.

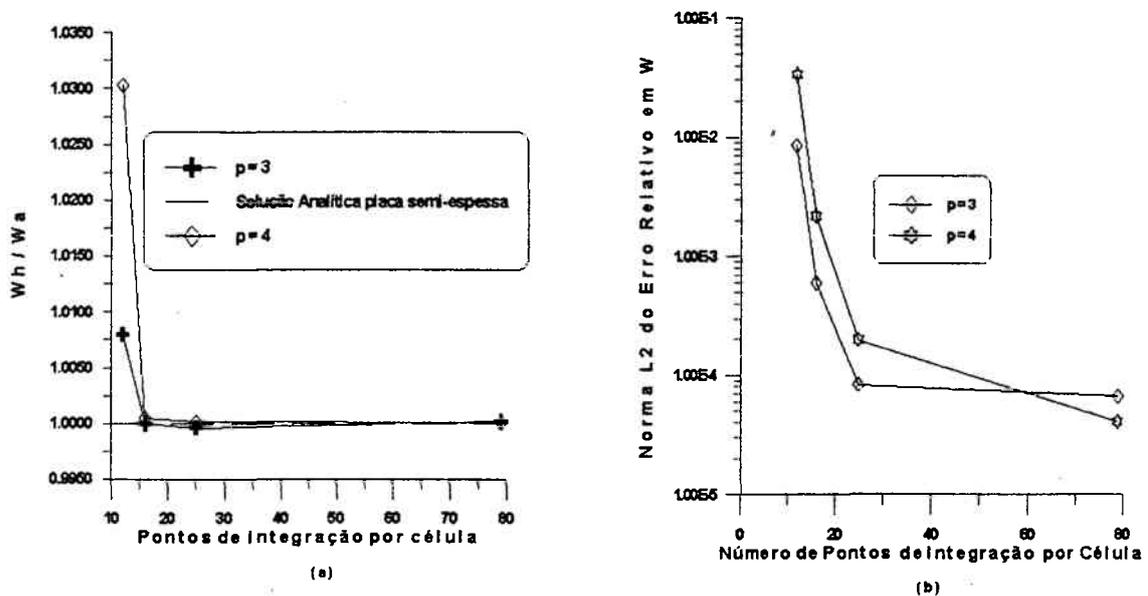


Figura 5.9. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Convergência em função do número de pontos de integração por célula no domínio, (a) valores normalizados do deslocamento transversal para o ponto central da placa, (b) convergência da norma L^2 do erro relativo de W

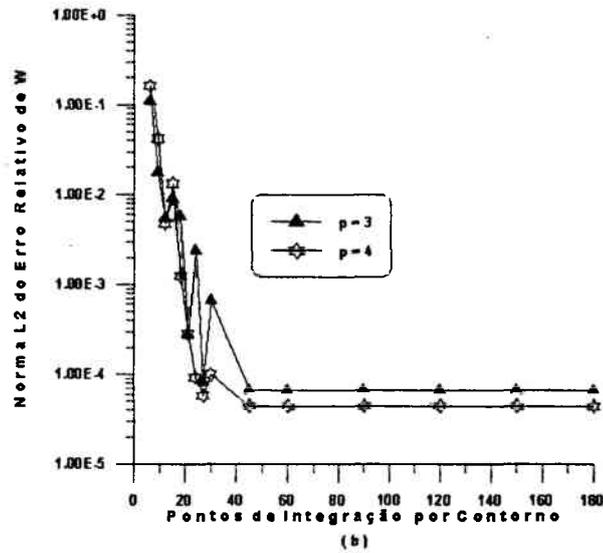
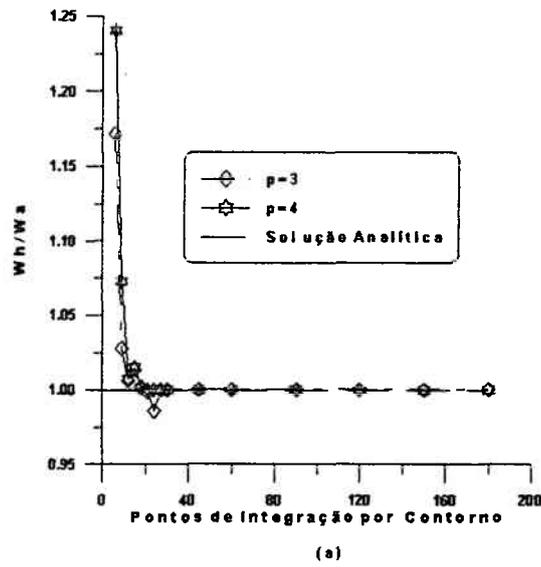


Figura 5.10. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Convergência em função de número de pontos de integração na fronteira de Dirichlet, (a) convergência da norma L_2 do erro relativo de W , (b) valores normalizados do deslocamento transversal no ponto central da placa.

Já que o domínio e a fronteira são integrados separadamente, pois as funções não estão associadas à malha e por isso, não se pode garantir que cada ponto de integração da fronteira será coberto pelo mesmo número de

nuvens, é feita uma análise análoga à anterior, com os resultados mostrados nos gráficos das Figuras 5.10(a) e 5.10(b).

Convergência da norma L^2 do erro relativo para o deslocamento trasversal

Devido à simetria da geometria e do carregamento, é analisado o quadrante inferior da placa sujeita a condições de contorno "rígidas" (hard).

Pelo método de nuvens ser "p" adaptativo, é feita uma análise de refino p homogêneo para as seguintes situações:

- cobertura do quadrante inferior com 5 núvens para $0 \leq p \leq 4$;
- cobertura do quadrante inferior com 25 núvens para $0 \leq p \leq 4$;
- cobertura do quadrante inferior com 87 núvens para $0 \leq p \leq 2$;

Para as coberturas definidas anteriormente são estabelecidos os seguintes suportes de integração para o domínio e fronteira de Dirichlet:

- conjunto de 4 células triangulares, com regras de Gauss de 79 pontos de integração por célula no domínio e 20 células lineares, com regra de Gauss de 3 pontos em cada fronteira de Dirichlet;
- conjunto de 32 células triangulares, com regras de Gauss de 79 pontos de integração por célula no domínio e 20 células lineares, com regra de Gauss de 3 pontos em cada fronteira de Dirichlet;

A verificação da convergência global é feita através da Norma L^2 do erro relativo em cada ponto de integração, dada pela expressão:

$$\|er_w\|_{L^2} = \frac{\|w_h - w\|_{L^2}}{\|w\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{ip}} (w_{hi} - w_i)^2 W_i}{\sum_{i=1}^{N_{ip}} w_i^2 W_i}} \quad (5.9)$$

Na Expressão 5.9, w_h é o valor do deslocamento transversal aproximado, w corresponde à Eq. 1.71 do Apêndice e W_i ao fator peso de integração numérica.

Na Eq. 5.9 todos os fatores citados acima são determinados em cada ponto de integração.

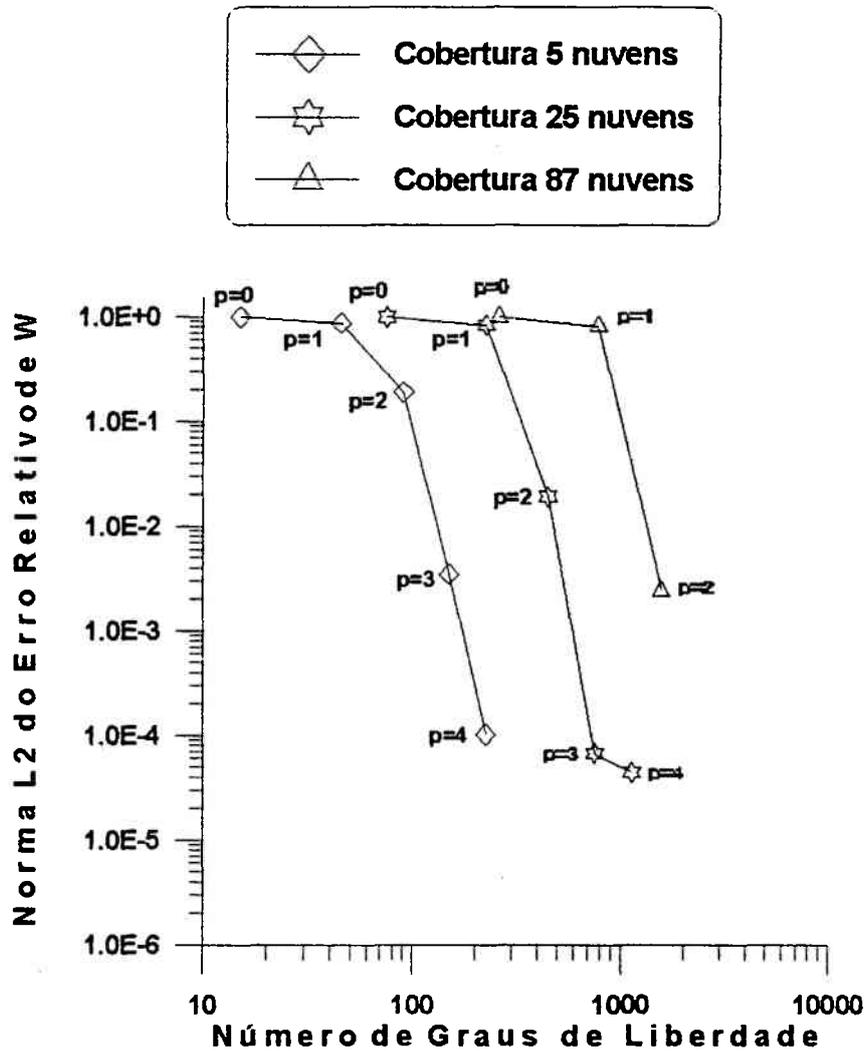


Figura 5.11. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Resultados de convergência da norma L^2 do erro relativo do deslocamento transversal w .

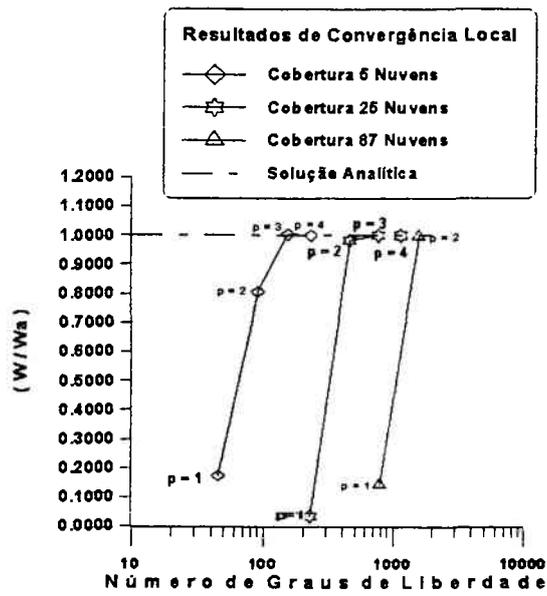
O gráfico da Figura 5.11 mostra os resultados numéricos vistos do ponto de vista qualitativo, podendo-se constatar algumas características do espaço de aproximação, tais como:

- baixa precisão das funções de Shepard, nas quais não se tem nenhuma melhora aparente de resultados quando se aumenta o número de nuvens da cobertura, ou seja, um refino h ;
- taxas de convergência elevadas para refinamentos p homogêneos, que aumentam bruscamente com a variação de $p = 2$ para $p = 3$, como pode ser constatado no gráfico.
- alta precisão com número reduzido de graus de liberdade, como pode ser constatado na Tabela 5.1.

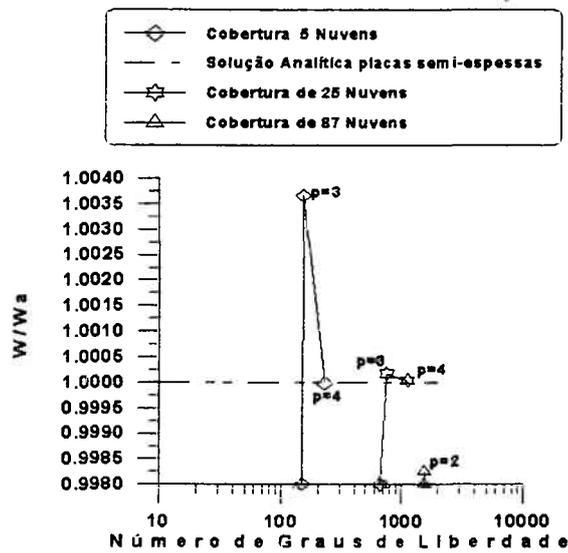
Norma L^2 do Erro Relativo no Deslocamento Transversal W			
NGL\C	5 nuvens	25 nuvens	87 nuvens
15	1.001886 ($p = 0$)	-	-
45	0.871606 ($p = 1$)	-	-
75	-	0.999622 ($p = 0$)	-
90	0.190977 ($p = 2$)	-	-
150	0.003474 ($p = 3$)	-	-
225	0.000101 ($p = 4$)	0.835231 ($p = 1$)	-
261	-	-	0.999388 ($p = 0$)
450	-	0.01975 ($p = 2$)	-
750	-	0.000067 ($p = 3$)	-
783	-	-	0.811751 ($p = 1$)
1125	-	0.000044 ($p = 4$)	-
1566	-	-	0.002395 ($p = 2$)

Tabela 5.1: Resultados da Norma L_2 do Erro Relativo em w em função do número de graus de liberdade para as coberturas de 5, 25 e 87 nuvens.

Um comportamento local da convergência do deslocamento transversal é mostrado através dos valores do deslocamento central normalizado em relação à solução analítica da Eq. 1.70 do Apêndice. Para os mesmos casos de coberturas e refino " p " da análise anterior se obtiveram-se os seguintes resultados, representados graficamente nas Figuras 5.12(a) e 5.12(b).



(a)



(b)

Figura 5.12. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Resultados do deslocamento transversal no centro da placa, (a) resultado na escala de [0, 1.2], (b) ampliação do resultado anterior para a escala [0.998, 1.004]

Novamente aqui são observadas as altas taxas de convergência e elevada precisão de resultados, como indicado no gráfico da Figura 5.12(b). Pode-se constatar, entretanto, pequenas oscilações à solução próximo da convergência, decorrentes do processo de penalizações usando multiplicadores de Lagrange.

Convergência de Momentos e Esforços Cortantes

A análise de convergência de momentos será feita de forma global através da Norma L^2 do Erro Relativo e local em função do momento M_{xx} normalizado em relação à Expressão 1.74 do Apêndice para o centro da placa nas seguintes situações:

- cobertura do quadrante inferior com 5 núvens para $1 \leq p \leq 4$;
- cobertura do quadrante inferior com 25 núvens para $1 \leq p \leq 4$;

Para as coberturas definidas anteriormente são estabelecidos os seguintes suportes de integração:

- para o domínio é utilizado um conjunto de 4 células triangulares, com regra de Gauss de 79 pontos de integração por célula, e para a fronteira de Dirichlet é usado um conjunto de 20 elementos lineares, com 3 pontos de integração por célula;
- no domínio é utilizado um conjunto de 32 células triangulares, com regra de Gauss de 79 pontos de integração por célula, e para a fronteira de Dirichlet é usado um conjunto de 60 células lineares, com 3 pontos de integração por célula.

A Norma L^2 do Erro Relativo é determinada em relação as Eqs. 1.74, 1.75 e 1.76 do Apêndice, e é definida pela expressão:

$$\|e_{\text{err}}\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{ip}} \left[(M_{xx}^h - M_{xx})^2 + (M_{xy}^h - M_{xy})^2 + (M_{yy}^h - M_{yy})^2 \right]_i W_i}{\sum_{i=1}^N [M_{xx}^2 + M_{xy}^2 + M_{yy}^2]_i W_i}} \quad (5.10)$$

$$i = 1, \dots, N_{ip}$$

em que N_{ip} é o número de pontos de integração.

Na Expressão 5.10, M_{xx}^h , M_{xy}^h e M_{yy}^h representam valores da solução numérica, e M_{xx} , M_{xy} e M_{yy} os correspondentes valores das soluções analíticas para cada ponto de integração.

A seguir são apresentados os resultados numéricos através dos gráficos das Figuras 5.13(a) e 5.13(b) de análises de convergências global e local, respectivamente. Os valores da Norma L^2 do Erro Relativo são dados na Tabela 5.2

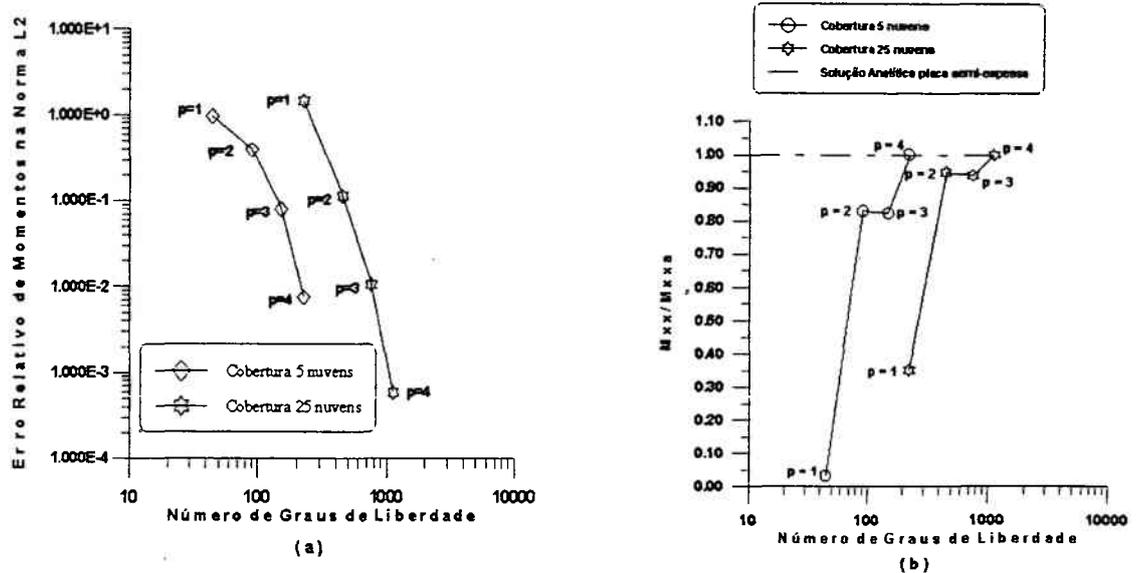


Figura 5.13. Placa quadrada sob apoio rígrado (hard): Resultados de momentos, (a) norma L^2 do erro relativo em momentos, (b) valores normalizados de M_x para o ponto central da placa.

Analisando os resultados do gráfico da Figura 5.13(a) constata-se altas taxas de convergência já esperadas, dados os resultados obtidos nos deslocamentos transversais e rotações e pelo fato do campo de aproximação ter alta regularidade para o exemplo analisado. Além disto, pode-se ver a elevada precisão de resultados mesmo para um pequeno número de graus de liberdade,

como pode ser constatado na Tabela 5.2. As curvas da Figura 5.13(b) evidenciam também elevadas taxas de convergência e uma pequena perda de precisão para $p = 3$. Isto ocorre porque a solução é uma função par, sendo que para valores ímpares de p não é acrescentada nenhuma melhora na convergência para um refino p homogêneo.

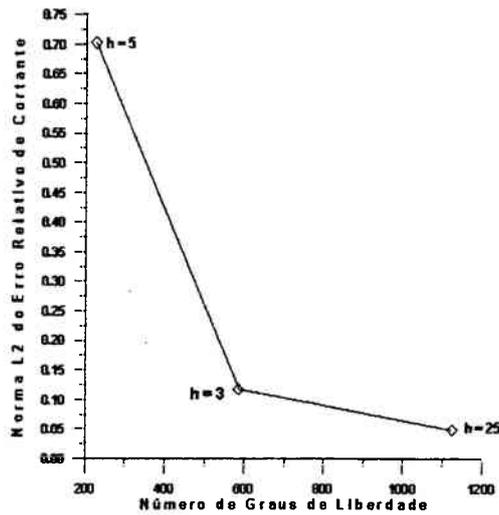
Norma L^2 do Erro Relativo em Momentos		
NG\C	5 nuvens	25 nuvens
45	0.90607	-
90	0.395166	-
150	0.07965	-
225	0.007567	1.46334
450	-	0.115055
750	-	0.010541
1125	-	0.000588

Tabela 5.2. Resultados da norma L^2 do erro relativo de momentos em função do número de graus de liberdade para as coberturas de 5 e 25 nuvens.

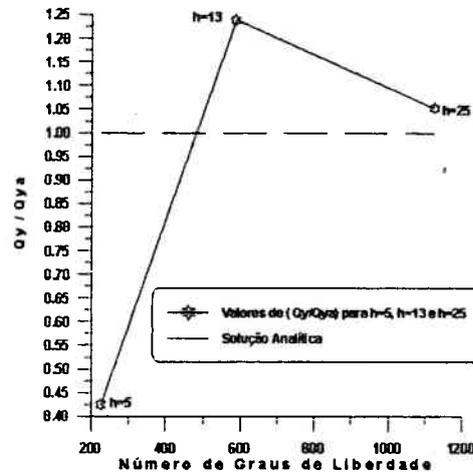
Os valores de Esforço Cortante encontrados são pouco precisos comparados com os de Momento. Isto se deve ao fato de penalizar a fronteira onde os valores de cortante são máximos, além das limitações apresentadas pelo modelo cinemático de Mindlin. O gráfico da Figura 5.14(a) mostra a variação da Norma L^2 do Erro Relativo do Esforço Cortante, mantendo-se $p = 4$ e variando as coberturas de 5, 13 e 25 nuvens. No gráfico da Figura 5.14(b) é analisada a convergência do valor normalizado em relação às Eqs. 1.77 e 1.78 do Apêndice para um ponto no meio do apoio. A Norma L^2 do erro relativo para esforços cortantes será determinada de forma similar à de momentos, cuja expressão é dada a seguir:

$$\|e_{rQ}\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [(Q_x^h - Q_x)^2 + (Q_y^h - Q_y)^2]_i W_i}{\sum_{i=1}^N [Q_x^2 + Q_y^2]_i W_i}} \quad (5.11)$$

Na Expressão 5.11, Q_x^h e Q_y^h correspondem aos valores determinados numericamente e Q_x e Q_y , através das Eqs. 1.77 e 1.78 do Apêndice.



(a)



(b)

Figura 5.14. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Resultados de esforço cortante, (a) norma L^2 do erro relativo em cortantes, (b) valores normalizados de Q_x para o ponto médio do lado.

5.2.2 Resultados numéricos para a placa circular

A análise de convergência neste caso será levada a cabo para uma placa circular com os dados apresentadas na Figura 5.4. Para este caso específico, adota-se uma espessura

$t = 0.1mm$ e uma carga de pressão $q = 0.1MPa$. Os resultados numéricos para deslocamento transversal e momentos são determinados para o quadrante superior adotando uma cobertura de 23 nuvens dispostas obedecendo à simetria radial da estrutura, onde, desta vez, os centros das nuvens não coincidem com os nós da malha. Os resultados apresentados são obtidos para um refino p homogêneo, dado pela variação $1 \leq p \leq 4$.

O suporte de integração utilizado é constituído de 101 células triangulares no domínio, com regra de Gauss de 79 pontos de integração por célula e, na fronteira, 100 células lineares, com regra de Gauss de 3 pontos de integração por célula no contorno circular e 60 células lineares, também com regra de Gauss de 3 pontos de integração por célula nos contornos retos.

Convergência do deslocamento transversal

A primeira análise tem como finalidade uma avaliação global do erro e será feita através da norma L^2 do erro relativo do deslocamento transversal definido na Expressão 5.6. Este erro é determinado em relação à solução analítica da Eq. 1.104 do Apêndice. Os resultados obtidos são mostrados no gráfico da Figura 5.15 e na Tabela 5.3.

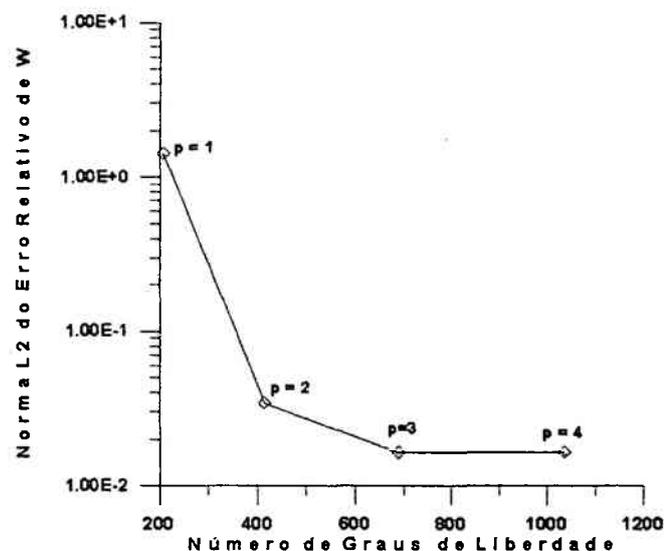


Figura 5.15. Placa circular engastada: Norma L^2 do erro relativo do deslocamento transversal.

Norma L^2 do Erro em W	
NGL\C	23 nuvens
207	1.4266
414	0.03425
690	0.0164107
1035	0.016428

Tabela 5.3. Resultados da Norma L^2 do Erro Relativo em w para uma cobertura de 23 nuvens.

Constata-se novamente aqui altas taxas de convergência de $p = 1$ para $p = 2$, porém convergindo para um erro de 0.016428, como indicado na Tabela 5.3. Isto deve-se, provavelmente, às limitações apresentadas na integração do contorno, que é feito separadamente do domínio. Foram usadas células triangulares lineares para integração no domínio, e isto provoca um erro devido ao mal mapeamento geométrico. Além disto, deve ser considerado o erro proveniente do processo de penalização das condições de contorno.

A análise de convergência local é feita para o Deslocamento Central Normalizado com relação à Eq. 1.106 do Apêndice, com resultados apresentados no gráfico da Figura 5.16.

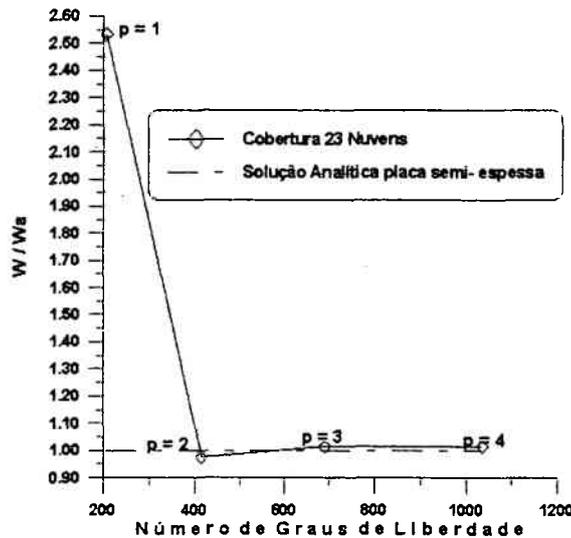


Figura 5.16. Placa circular engastada: Deslocamento transversal normalizado para o ponto central da placa.

Observa-se novamente aqui a baixa precisão para $p = 1$ e a alta convergência atingida quando $p = 2$, a qual se deve evidentemente ao fato de estar aproximando uma solução par a uma base também par.

Também nesta análise se constata a convergência para valores de 1.0157 devido aos fatos anteriormente citados.

Convergência de Momentos

A análise de convergência de momentos é feita para uma placa com as mesmas características usadas na análise anterior, e a norma L^2 do erro relativo dos momentos radiais será dada pela expressão

$$\|e_{rm}\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (M_r - M_{ra})_i^2 W_i}{\sum_{i=1}^N (M_{ra})_i^2 W_i}} \quad (5.8)$$

Na Eq. 5.8, M_{ra} e M_r correspondem aos componentes radiais no ponto de integração do momento, dado pela expressão 2.171, e do Tensor de Momentos M , definido pela seguinte expressão:

$$M_r = \mathbf{n}^T M \mathbf{n} \quad (5.9)$$

Escrevendo 5.9 por extenso se obtém:

$$M_r = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

em que, \mathbf{n} é o vetor normal à curva de circunferência com o mesmo centro da placa e que passa pelo ponto de integração.

Os resultados desta análise são apresentados no gráfico da Figura 5.17.

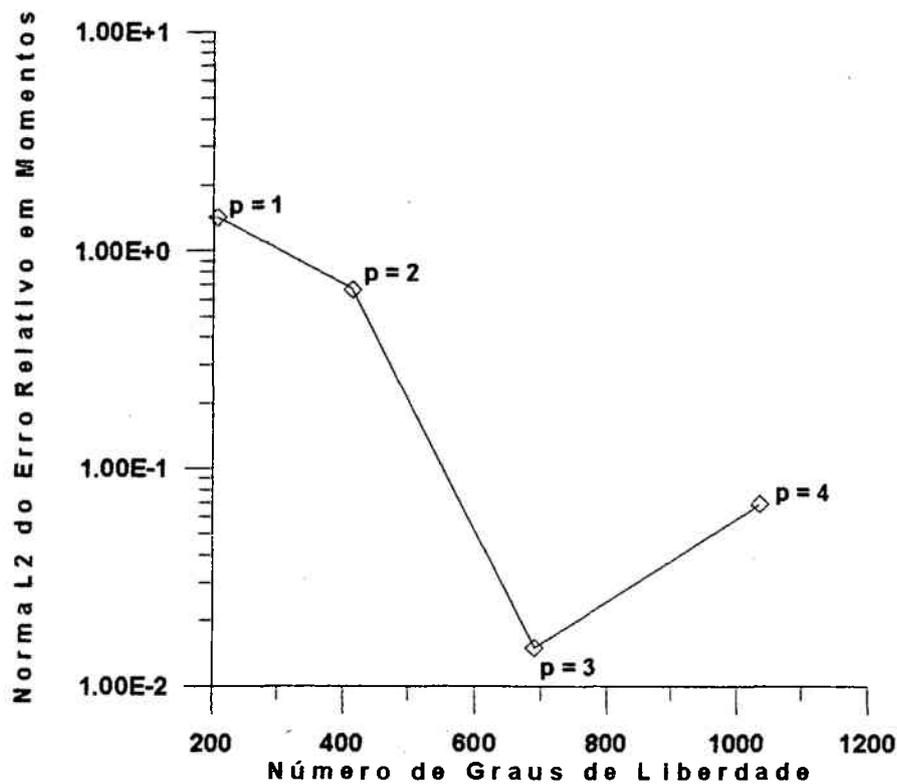


Figura 5.17. Placa circular engastada: Norma L^2 do Erro Relativo em momentos.

Observa-se novamente as altas taxas de convergência da Norma L^2 do erro relativo em momentos, fato já visto nas análises anteriores. Constata-se também um aumento do erro para $p = 4$. Esta perda de precisão é resultante, provavelmente, de uma falta de cobertura na fronteira, onde o erro é incorporado pela forma fraca de impor condições de contorno, associado àquele decorrente do mapeamento geométrico. Isto fica evidenciado na análise de convergência local que prossegue.

Na convergência local observam-se os melhores resultados correspondentes à base de aproximação com $p = 4$, como mostrado no gráfico da Figura 5.18.

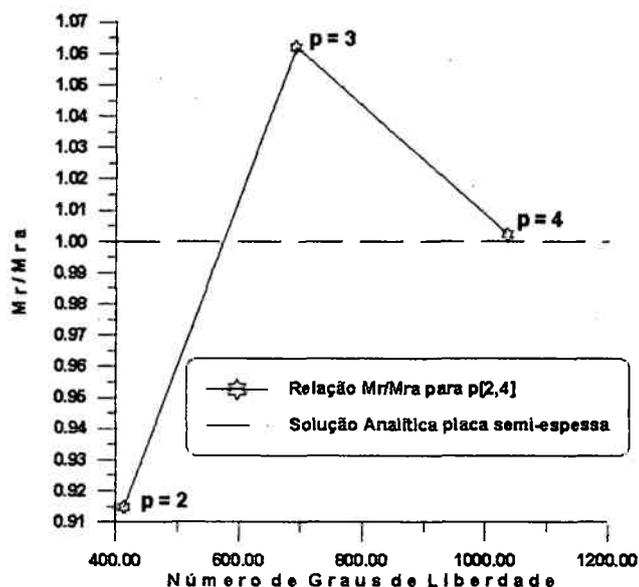


Figura 5.18. Placa circular engastada: Momento M_r normalizado no ponto central da placa.

5.3 Comparação de Resultados com MEF.

Para finalizar o capítulo, será verificada a proximidade de resultados com relação ao MEF e as soluções analíticas de placas finas, juntamente com resultados de visualização para campos de deslocamento momentos e cortantes para os seguintes exemplos.

As soluções analíticas para placa fina têm apenas a função de comparação de resultados e não de critério de convergência, já que se constituem de modelos diferentes.

- a) Placa quadrada simplesmente apoiada da Figura 5.1.
- b) Placa circular engastada no contorno da Figura 5.4.
- c) Placa triangular (triângulo equilátero) simplesmente apoiada (condições de contorno de simples apoio) no contorno e sujeita a uma carga uniformemente distribuída no domínio.

d) Placa em anel simplesmente apoiada (condições de contorno de simples apoio) no contorno e com carga uniformemente distribuída no domínio.

e) Placa rômbrica simplesmente apoiada (condições de contorno de simples apoio) no contorno, com carga uniformemente distribuída no domínio.

Esta análise é feita conforme os critérios que seguem:

- são comparados unicamente resultados locais máximos de deslocamento transversal normalizado em relação à solução analítica de placa semi-espessa para os casos *a* e *b*, placa fina para *c* e *d* e valores absolutos de deslocamento *w* em *e*;
- as soluções analíticas de placa fina para a placa triangular e a placa anelar foram obtidas do trabalho de Raymond J. Roark e Warren C. Young [32];
- Os resultados correspondentes a MEF são obtidos através do software Ansys 5.3 para o elemento Shell 93 (Elemento quadrático de Serendipity com 8 nós), sendo a convergência atingida po meio de refino *h*.

5.3.1 Placa Quadrada

Na análise de placa quadrada, são observados resultados próximos aos encontrados em MEF. No entanto, neste exemplo em que a geometria da peça é bem reproduzida devido a sua simplicidade, é obtida, para o caso de valores normalizados de Deslocamento Transversal máximo, precisão muito alta com um número reduzido de graus de liberdade, como é mostrado no gráfico da Figura 5.19. Estes resultados são obtidos para uma placa simplesmente apoiada com características geométricas e propriedades elásticas dadas na Figura 5.1, sendo que neste exemplo é utilizado um carregamento uniformemente distribuído no domínio de $q = 0.1MPa$ e uma espessura de $0.1mm$.

O suporte de integração para esta análise é constituído de 32 células triangulares, com regra de Gauss de 79 pontos de integração por célula no domínio e 60 células lineares, com regra de Gauss de 3 pontos por célula em cada fronteira de Dirichlet.

Os resultados de deslocamento transversal central provenientes do método de nuvens e de MEF são normalizados com relação à solução analítica da placa semi-espessa dada pela Eq. 1.71 do Apêndice.

Os resultados referentes a MEF tem a finalidade apenas de constatar a sua proximidade com relação aos obtidos pela metodologia usada neste trabalho, não devendo se fazer nenhum tipo de comparação quanto as taxas de convergência, já que no caso de nuvens temos refino "p" homogêneo onde estas taxas são reconhecidamente mais altas do que no refino "h" utilizado em MEF.

Para finalizar as análises feitas para a placa quadrada é mostrado a seguir através dos diagramas de isocamadas correspondentes às Figuras 5.20, 5.21 e 5.22, os resultados de distribuição para os campos de deslocamento transversal w , e componentes M_{xx} de momentos e Q_x de esforço cortante:

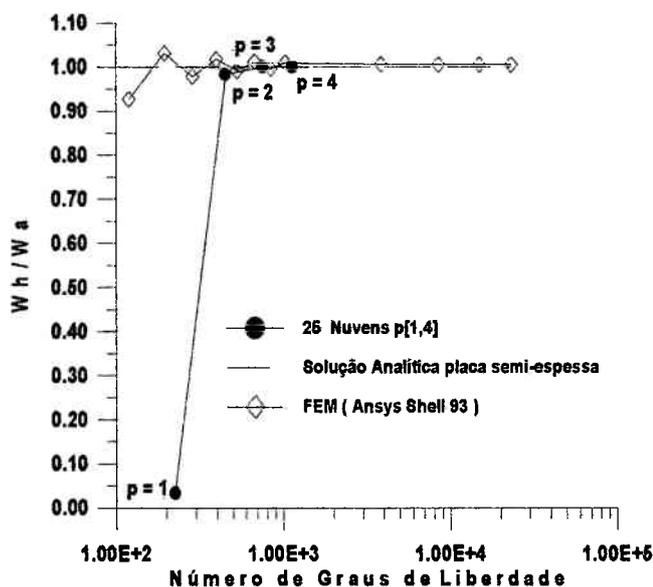


Figura 5.19. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Deslocamento transversal normalizado para o ponto central da placa, obtidos pelo método de nuvens h_p e por MEF para o elemento shell 93

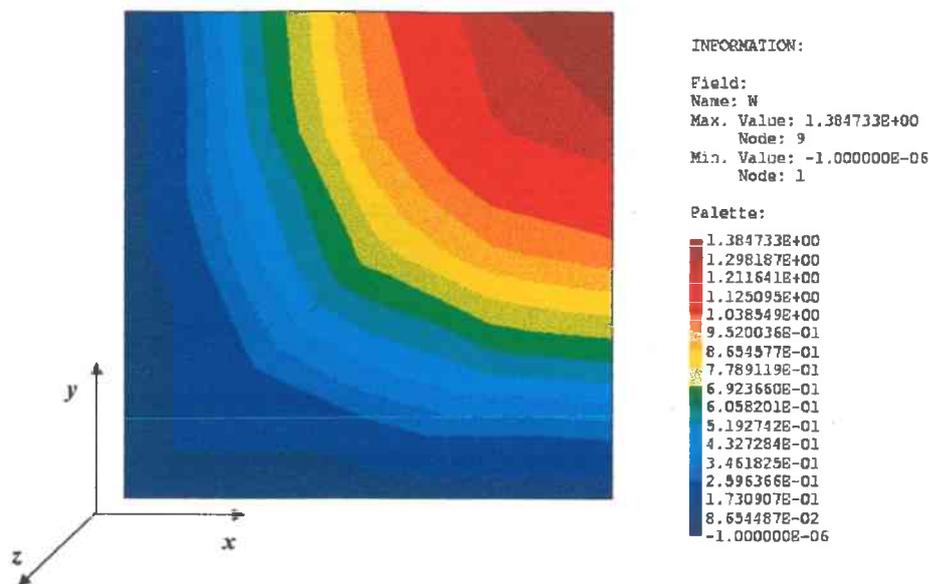


Figura 5.20. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Diagrama de isocamadas do terceiro quadrante da placa para o campo de deslocamento transversal .

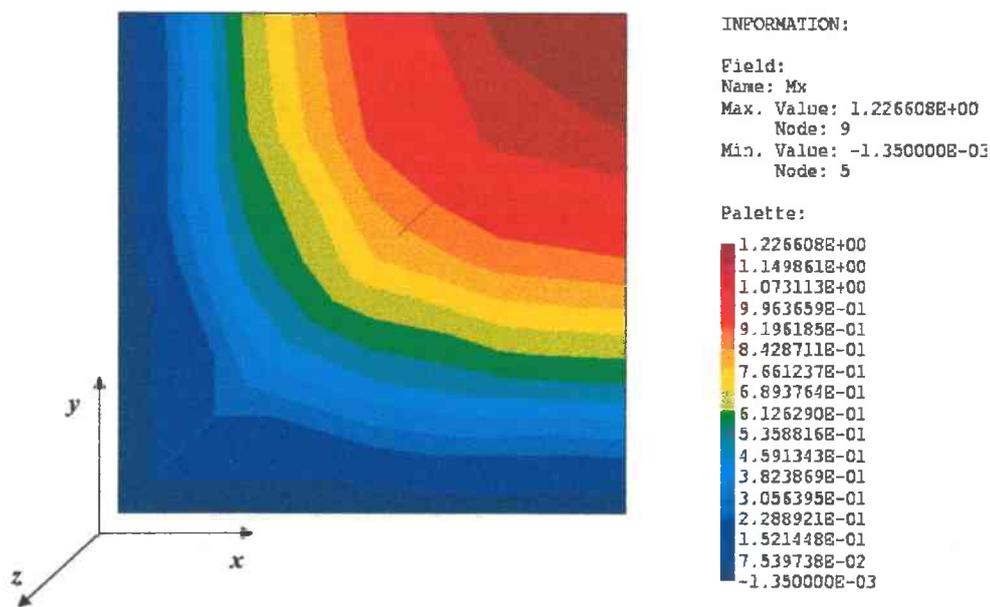


Figura 5.21. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Diagrama de isocamadas do terceiro quadrante da placa para a componente M_{xx} do campo de momentos.

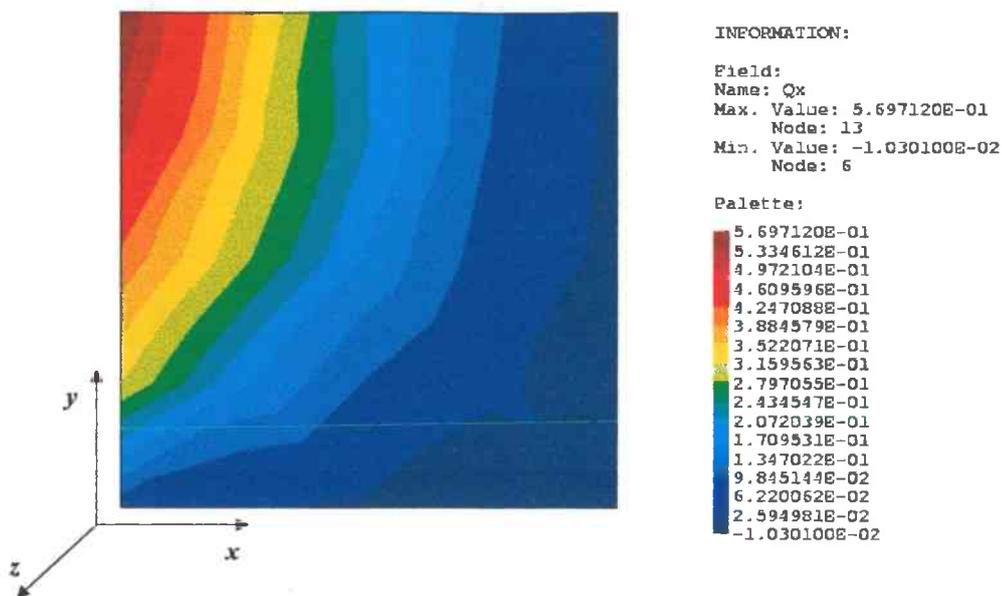


Figura 5.22. Placa quadrada sob apoio rígido (hard): Diagrama de isocamadas do terceiro quadrante da placa para a componente Q_x do campo de esforços cortantes.

5.3.2 Placa Circular

Estes resultados são obtidos para a placa circular engastada no contorno, com características geométricas e elásticas indicadas na Figura 5.4, sujeita a uma carga uniformemente distribuída no domínio de 0.1MPa e uma espessura de 0.1mm .

O suporte de integração utilizado aqui é o mesmo utilizado na análise da placa circular feita anteriormente.

Nesta análise é observada uma diminuição da precisão de resultados quando comparados com a placa quadrada, onde o contorno é reproduzido com mais precisão. Os resultados encontrados para valores normalizados de Deslocamento Transversal no centro da placa são próximos aos obtidos por MEF. Porém estes são computacionalmente mais caros, já que são usadas regras de integração numérica de alta ordem, aumentando consideravelmente o tempo de processamento, mesmo com um número menor de graus de liberdade, como mostrado no gráfico da Figura 5.23.

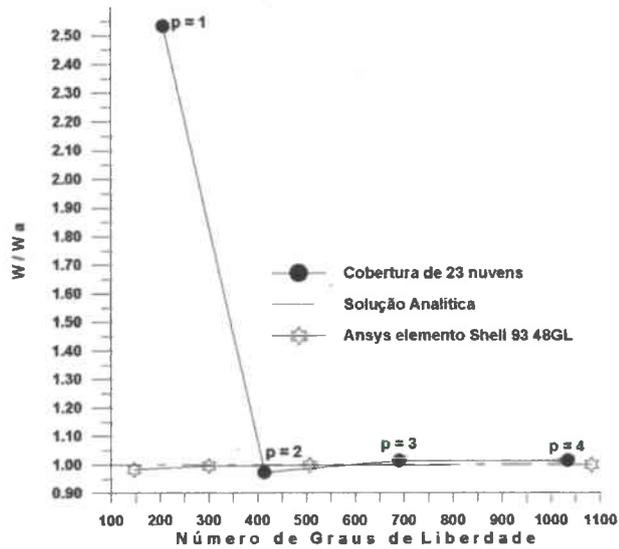


Figura 5.23. Placa circular engastada: Deslocamento transversal normalizado para o ponto central da placa obtidos pelo método de nuvens hp e MEF para o elemento shell 93.

São mostrados a seguir os resultados em diagramas de visualização em isocamadas para os campos de deslocamento transversal w e componente de momentos M_{xx} nas Figuras 5.24 e 5.25.

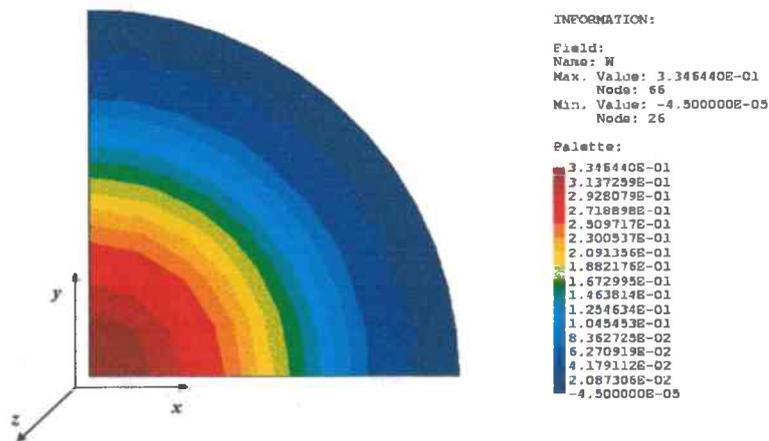


Figura 5.24. Placa circular engastada: Diagrama de isocamadas do primeiro quadrante da placa para o campo de deslocamento transversal.

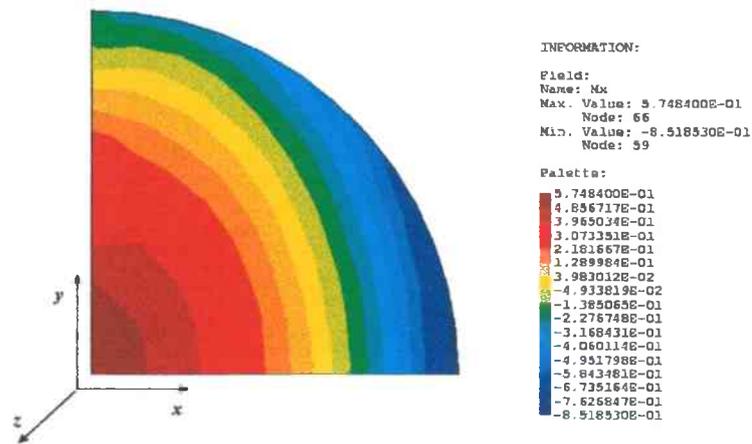


Figura 5.25. Placa circular engastada: Diagrama de isocamadas do primeiro quadrante para a componente M_{xx} do campo de momentos.

5.3.3 Placa Triangular

A placa triangular simplesmente apoiada, objeto desta análise, é constituída por um triângulo equilátero com dimensões, carregamento, propriedades elásticas e cobertura dadas pela Figura 5.26:

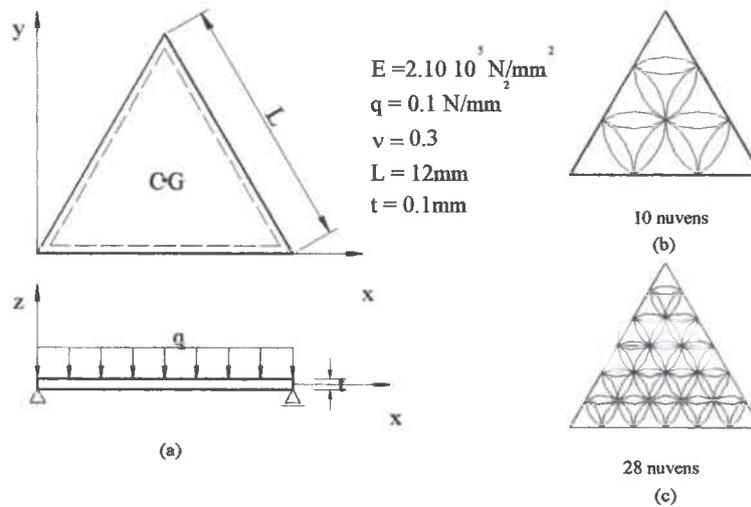


Figura 5.26. Placa triangular simplesmente apoiada, (a) Modelo, (b) cobertura de 10 nuvens, (c) cobertura de 28 nuvens

Os resultados de deslocamento transversal normalizado no centróide do triângulo obtido para as coberturas (b) e (c) indicadas na Figura 5.26 e para $p[2, 4]$, são comparados ao valor também normalizado com relação à placa fina obtido em MEF, já que não se dispõe de solução analítica para o modelo de placa semi-espessa para esta geometria.

Como suporte de integração são utilizados para cada cobertura os seguintes conjuntos:

- para a cobertura de 10 nuvens é utilizado, no domínio, um conjunto de 9 células triangulares com regra de Gauss de 79 pontos de integração e 20 células lineares, com regra de Gauss de 3 pontos de integração por fronteira de Dirichlet;
- para a cobertura de 28 nuvens é utilizado, no domínio, um conjunto de 36 células triangulares de integração, com regras de Gauss de 79 pontos de integração por célula e 60 células lineares, com regras de Gauss de 3 pontos de integração por fronteira de Dirichlet;

Estes resultados, juntamente com a análise de convergência de momentos para valores normalizados em relação à solução analítica de placa fina, são mostrados nos gráficos das Figuras 5.27 e 5.28.

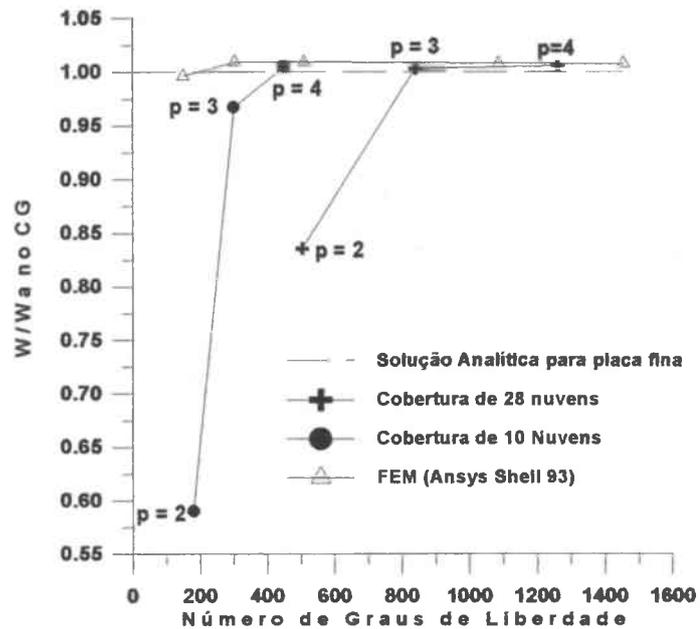


Figura 5.27. Placa triangular simplesmente apoiada: Deslocamento Transversal Normalizado para o ponto CG (centróide da placa triangular) obtidos pelo método de nuvens hp para as coberturas de 10 e 28 nuvens e por MEF para o elemento shell 93.

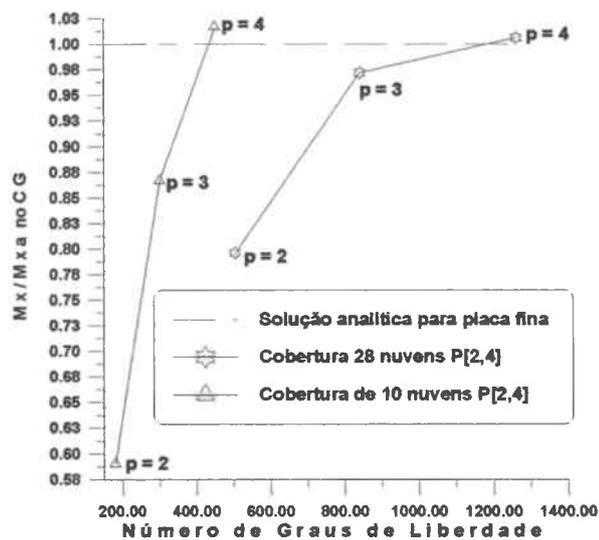


Figura 5.28. Placa triangular simplesmente apoiada: Momento M_{yy} normalizado no ponto CG (centróide da placa triangular) obtido para as coberturas de 10 e 28 nuvens respectivamente.

A seguir são mostrados os resultados de visualização em isocamadas para os campos de Deslocamento w e de componente de momentos M_{yy} , nas Figuras 5.29 e 5.30, respectivamente.

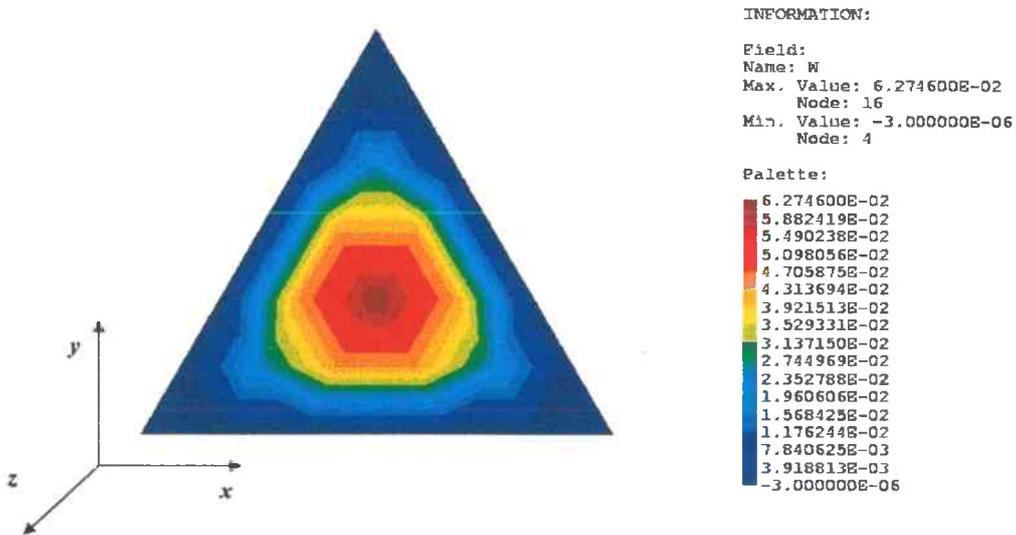


Figura 5.29. Placa triangular simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas para o campo de deslocamento transversal.

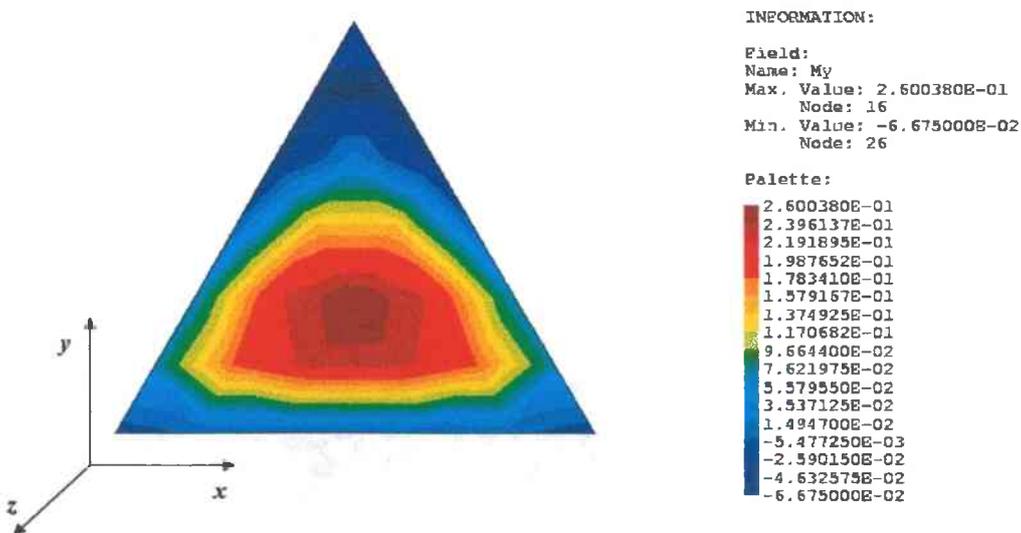


Figura 5.30. Placa triangular simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas para a componente M_{yy} do campo de momentos.

Na análise da Figura 5.30 nota-se que os momentos, embora muito pequenos, não se tornaram nulos no contorno. Isto se deve, evidentemente, ao processo de imposição de condições de contorno de forma fraca, na qual para obter melhores resultados, deve-se aumentar o número de nuvens nestas fronteiras.

5.3.4 Placa em Anel

A placa anelar simplesmente apoiada, constitui o primeiro resultado do método em problemas nos quais ocorre concentração de tensões. Os valores obtidos correspondem à placa anelar, com dimensões, propriedades elásticas, carregamento e cobertura indicadas na figura 5.31.

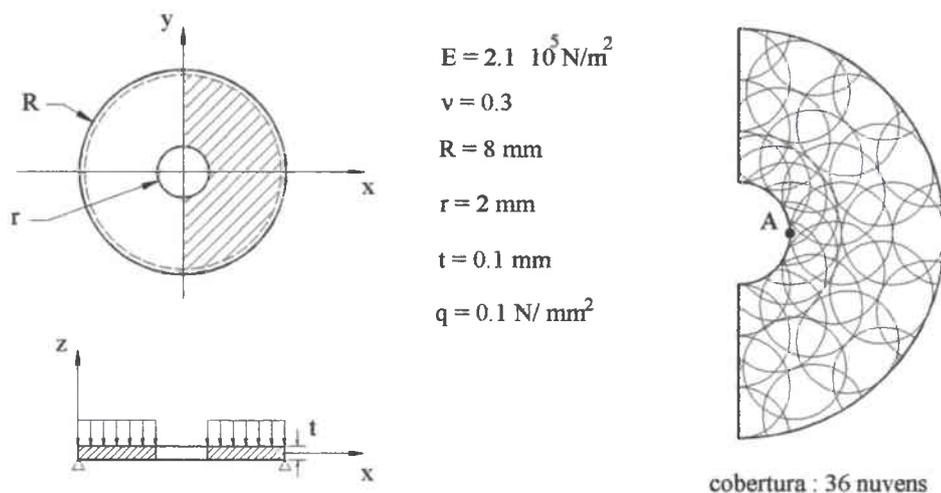


Figura 5.31: Placa anelar simplesmente apoiada, sob uma cobertura de 36 nuvens para o setor de $\pi \text{ rad}$.

Será inicialmente feita uma análise do Deslocamento Transversal Normalizado em relação à solução analítica de placa fina para o ponto A, e os re-

sultados, comparados com aqueles obtidos por MEF correspondentes ao software Ansys para o elemento Shell 93. Numa segunda análise, procura-se verificar os valores de momentos M_{yy} no ponto A e compara-los com aqueles determinados pela solução analítica de placa fina.

O suporte de integração é formado por 211 células triangulares no domínio com regra de Gauss de 79 pontos de integração por célula, 100 células lineares na fronteira correspondente à curva de circunferência e 60 células lineares nos contornos retilíneos, todos com regras de Gauss de 3 pontos de integração por célula.

Os resultados destas análises serão mostrados através dos gráficos das Figuras 5.32 e 5.33 e das visualizações em isocamadas do campo de Deslocamento w e da componente M_{yy} do campo de Momentos dada nas Figuras 5.34 e 5.35.

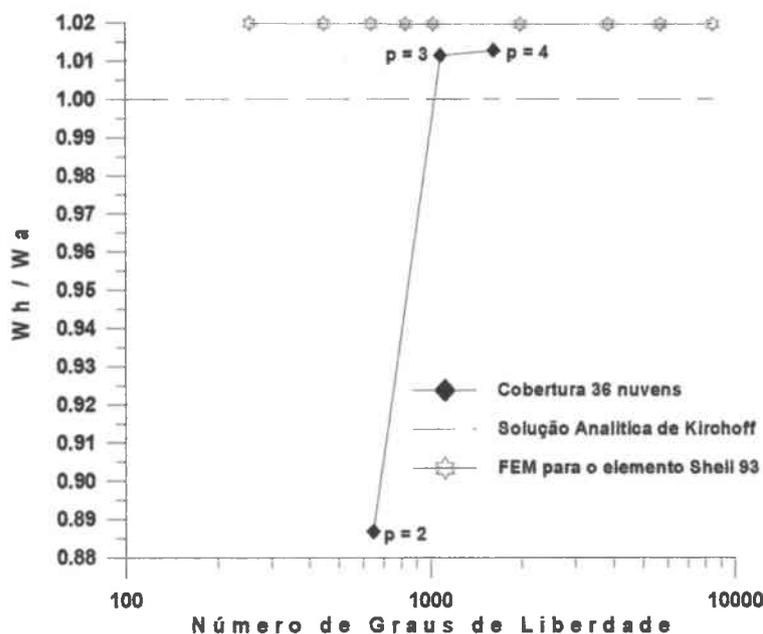


Figura 5.32. Placa anelar simplesmente apoiada: Deslocamento transversal normalizado para o ponto A obtidos pelo método de nuvens para uma cobertura de 36 nuvens do setor de πrad e por MEF para o elemento shell93 .

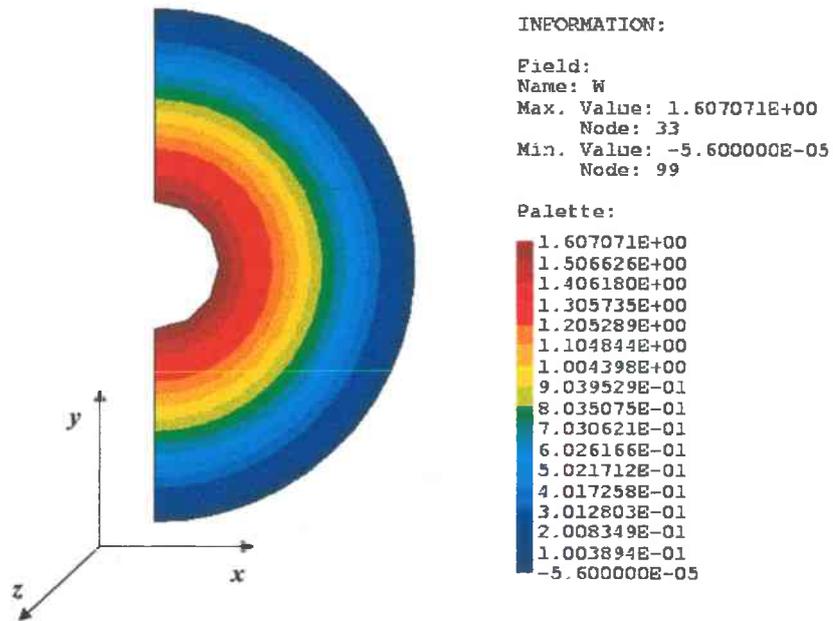


Figura 5.33. Placa anelar simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas do setor πrad para o campo de deslocamento transversal.

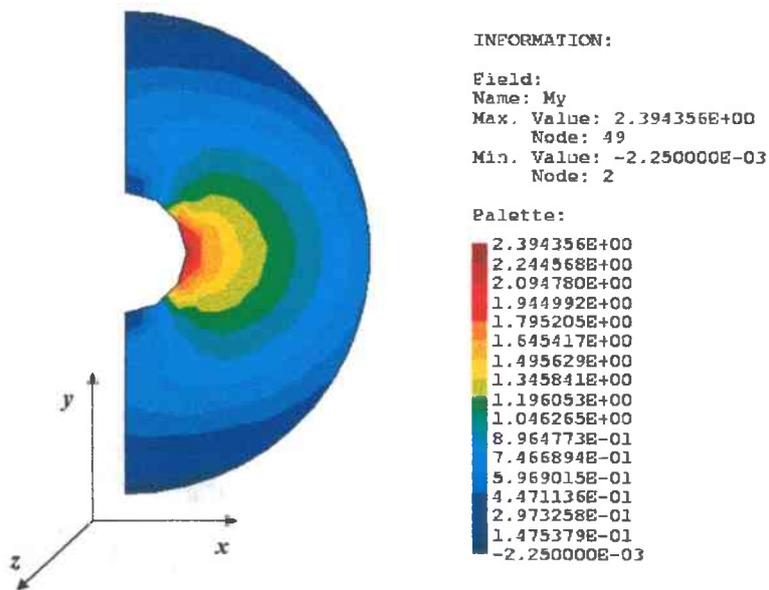


Figura 5.34. Placa anelar simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas do setor πrad para a componente M_{yy} do campo de momentos.

5.3.5 Placa Rômbica

Este exemplo consta de uma placa rômbica com dados indicados na Figura 5.35.

O resultado do deslocamento transversal máximo é comparado com aquele obtido por MEF e mostrado no gráfico da Figura 5.36.

O suporte de integração para esta análise é constituído de 32 células triangulares no domínio, com regra de Gauss de 79 pontos de integração por célula e 60 células lineares, com regra de Gauss de 3 pontos de integração por fronteira de Dirichlet.

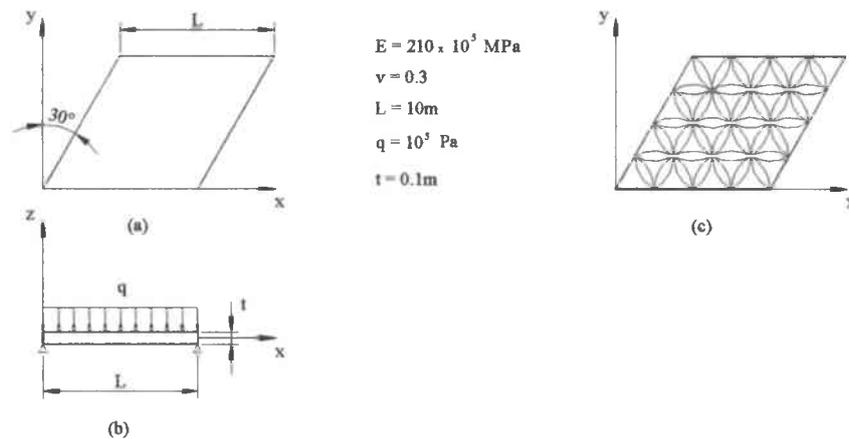


Figura 5.35. Placa rômbica simplesmente apoiada, (a) geometria, (b) carga, (c) cobertura de 25 nuvens.

Nesta análise fica evidenciada a elevada convergência para valores locais afastados dos contornos, como é o caso do exemplo analisado. Porém ocorre uma perda acentuada da precisão para valores próximos do contorno, já que, sobre os apoios, o deslocamento transversal deveria ser praticamente zero, o que não é constatado nesta análise de acordo com o diagrama de visualização de isocamadas para o deslocamento transversal da Figura 5.37.

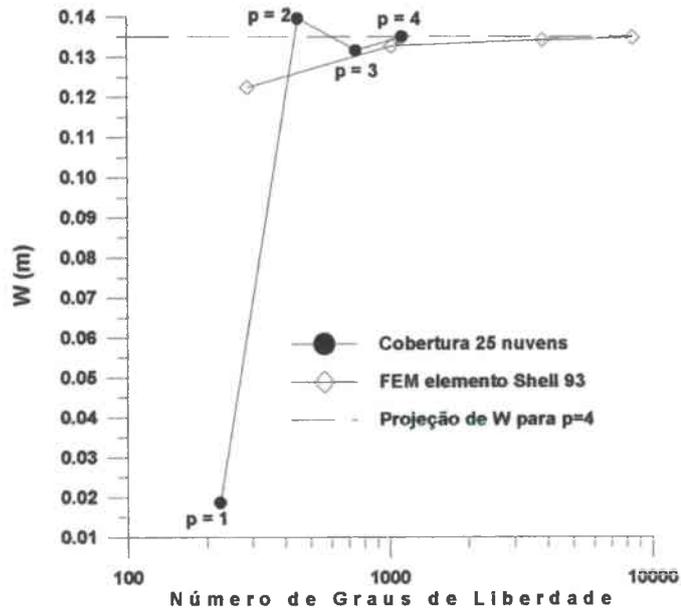


Figura 5.37. Placa rômica simplesmente apoiada: Deslocamento transversal para o ponto central da placa, obtidos pelo método de nuvens e por MEF para o elemento shell

93.

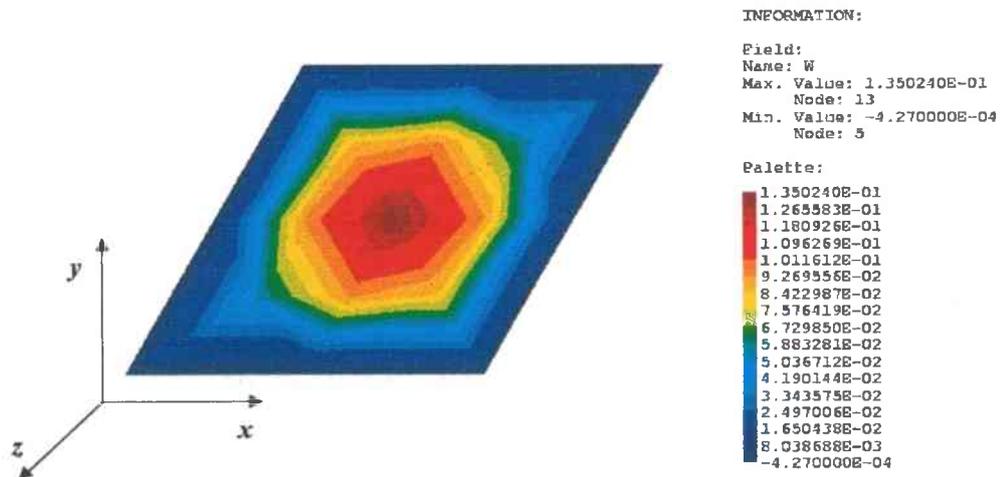


Figura 5.38. Placa rômica simplesmente apoiada: Diagrama de isocamadas para o campo de deslocamento transversal.

Encerra-se este capítulo de resultados numéricos acreditando que se tenha mostrado, através destes exemplos, as potencialidades e limitações do método, sem ter a pretensão, no momento, de ressaltar qualquer tipo de vantagem sobre os métodos tradicionais com malha, por se tratar de exemplos com geometrias regulares, nas quais a malha é construída com custo computacional baixo.

Capítulo 6

Conclusões & Sugestões

Os resultados apresentados neste trabalho evidenciam as características do método de nuvens hp inerentes da sua própria estrutura, tais como as altas taxas de convergência, elevada precisão de resultados da norma L^2 do erro relativo e da convergência local para valores normalizados em relação à solução analítica. Finalmente, pode-se citar a facilidade de construção da base de aproximação obtida por enriquecimento da função partição da unidade (função de Shepard), com funções que apresentam boas propriedades de aproximação. No caso específico deste trabalho, foram usados polinômios definidos no domínio real da nuvem e polinômios de Legendre.

Embora as características citadas acima constituam pontos positivos desta metodologia, não foram constatadas vantagens na resolução de problemas regulares de placas em relação ao MEF. Dentre as dificuldades encontradas pode-se citar:

- imposição de condições de contorno de forma fraca por meio do processo de penalização, já que as funções de aproximação associadas a cada nuvem não possuem a propriedade seletiva delta de Kronecker.

Como na realidade não se consegue atingir precisamente a condição de contorno, o erro remanescente ocasiona perda de precisão dos campos sobre estas fronteiras, principalmente aqueles que tem seus valores máximos sobre ela, como é o caso dos esforços cortantes.

- O emprego de funções de alta regularidade, como é o caso das funções usadas neste trabalho, requer regras elevadas de quadratura numérica, aumentando considerav-

emente o tempo de processamento, mesmo para problemas envolvendo um número reduzido de graus de liberdade.

Outros fatores que merecem atenção e devem ser levados em consideração, com pena de perda acentuada de precisão de resultados, referem-se ao aumento do $NC(K)$ (Número de Condição da Matriz de Rigidez). Para uma cobertura excessiva, ou um aumento exagerado de p , normalmente para $p > 4$, obtem-se uma matriz de rigidez K mal condicionada, postulando regras de integração numéricas muito altas, o que eleva o tempo de processamento e diminui a precisão.

Levando em consideração os pontos positivos e negativos encontrados, conclui-se que, para o problema de placas, o método não oferece vantagens na resolução de problemas regulares, sendo sua aplicação aconselhada nas situações em que se torne muito complexo e demorado o processo de geração de malha.

Em face às dificuldades encontradas, surgem algumas sugestões que podem fazer parte de linhas futuras de pesquisa. Estas estão relacionadas às tentativas de solucionar dois problemas básicos, o que pode tornar o método mais versátil para a abordagem de qualquer tipo de problema, como:

1. Melhorar a forma de impor condições de contorno, usando a projeção da seminorma $L^2(\partial D)$ e $H^1(\partial D)$, conforme apresentado no item 8.22 da Dissertação de C. A. Duarte[11]. Neste caso são empregadas funções peso tais que as partições de unidade construídas com elas possuem a propriedade delta de Kronecker.
2. Reduzir o tempo de integração usando o processo de integração numérica nodal proposto por Stephen Beissel, Ted Belytschko[3], no qual o inconveniente de uma subintegração é contornado somando à equação do princípio variacional o quadrado do resíduo da equação da energia.

Dentre outras propostas de grande relevância pode-se ainda citar:

- implementação de Estratégias hp adaptativas usando a técnica desenvolvida

por Novotny e Fancello[22], que otimiza o número de interações, na determinação dos valores finais para h e p ;

- emprego do método misto, conforme D. Hegen [7], em que seria usado o MEF convencional nas regiões de contorno regular e de geometrias adequadas e o método sem malha neste caso, método de nuvens nas regiões consideradas críticas ou pouco adequadas para uma abordagem com malha (caso típico de problemas de concentração de tensões e fraturas);
- resolução de problemas de otimização para placas e cascas, nas quais esta tecnologia pode se tornar atrativa devido à economia computacional decorrente da não necessidade de geração de uma malha;
- utilizar como partição da unidade as funções tradicionais de MEF, enriquecendo-as segundo a filosofia proposta no método hp-Clouds.

Pode-se citar ainda outras linhas de pesquisa devido à potencialidade do método. Entretanto foram citadas apenas aquelas que serão objeto de estudos futuros.

Encerra-se finalmente este trabalho atingindo os objetivos pré-estabelecidos e mostrando de forma transparente as potencialidades e dificuldades encontradas na aplicação desta tecnologia na resolução do problema de placas de Mindlin e, principalmente, expandindo-se o conhecimento numa nova área de métodos numéricos.

Referências Bibliográficas

- [1] Belytschko. T., Krongauz Y., Organ, D., Fleming, M., Krysl, P., *Meshless methods: An overview and recent developments*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139(1996) 3-47
- [2] Belytschko. T., Lu Y.Y., Gu L., *Element-Free Galerkin Methods*, Inter. J. Num. Meth. Eng. e Comp. Appl. Eng. Vol. 37, 229-256(1994)
- [3] Beissel Stephen, Belytschko, T., *Nodal integration of element-free Galerkin method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 115(1996) 227-286
- [4] Lu Y.Y., Belytschko, T., Gu L., *A new implementation of Element-free Galerkin*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139(1996)
- [5] Lu Y.Y., Belytschko T., Tabbara, M., *Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 126(1995) 131-153
- [6] Cordes L.W., Moran, B., *Treatment of material discontinuity in the Element-free Galerkin methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139(1996) 75-89
- [7] Hegen D., *Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 135(1996) 143-166
- [8] Duarte, C.A. & Oden, J.T., *Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems*, TICAM Report 95-05, University of Texas, Austin, Maio, 1995

- [9] Liszka T. J., Duarte C. A. Tworzydło M., W. W., *hp-Meshless cloud method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139(1996) 263-288
- [10] Duarte, C.A. & Oden, J.T. *An h-p Adaptive Method Using Clouds*, Comput Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 237-262.
- [11] Duarte, C.A., *Tesis de Doutorado*, University of Texas, Austin, Dezembro, 1996
- [12] Babuska, I & Melenk, J.M. *The Partition of Unity Finite Element Method Basic theory and applications*, Comput Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 289-314.
- [13] Taylor, R. L., Zienkiewicz, O. C., Oñate, E. & Idelsohn, S. *Moving Least Square Approximations for Solution of Differential Equations*, CIMNE N.74, Dezembro, 1995.
- [14] Duarte, C. & Barcellos, C., *Solução de problemas axissimétricos utilizando a versão p do Método de Elementos Finitos*. VII SIBRAT, ABCM, 1992.
- [15] Marguerre, Karl & Woernie, H.-T., *Elastic plates*. Blaisdell Publishing Co., Waltham, 1969
- [16] Washizu K., *Variational Method in Elasticity and Plasticity* second edition 1974.
- [17] Feijóo R.A., Taroco E., *Curso de mecânica teórica e aplicada*, Módulo II, 1983.
- [18] Zienkiewicz, O.C and Taylor, R.L., *The Finite Element Method* fourth edition
- [19] Hughes T. J.R., *The Finite Element Method, Linear Static and Dinamic Finite Element Aanalysis*
- [20] Novotny A.A., Fancello E.A., Luersen & Selke C.A.C., COBEM-CIDIM/95., *A p-Adaptive refinement for thick plates finite element analysis*
- [21] Novotny A.A., Fancello, E.A., Trabalho de Iniciação Científica., GRANTE Florianópolis, junho de 1996., *Estudo das Versões Adaptativas h,p e hp do Método de Elementos finitos na análise de flexão de placas de Reissner-Mindlin*.

- [22] Novotny A.A., Dissertação de Mestrado., Florianópolis, junho de 1998., *Projeto Ótimo de Malhas hp Adaptativas*.
- [23] Della Croce L., Scapolla T., *Hierarchical finite elements with selective and uniform integration for Reissner-Mindlin plates*, Computational Mechanics (1992) 10, 121-131.
- [24] Muñoz Rojas Pablo Andres., Dissertação de Mestrado., Florianópolis, Julho de 1994., *Desenvolvimentos na Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado a Problemas de Placa de Mindlin*
- [25] Bathe K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis.*, New Jersey 1982
- [26] Lankaster, P. and Salkauskas, K., *Surfaces generated by moving least square method.* Mathematic of Computations, 37(155): 141-158, 1981.
- [27] Monaghan, J. J., *An introduction to SPH.* Computer Physics Communicatios,48:89-96, 1988.
- [28] Barcellos, Clovis S., R. de Mendonça Paulo T. & Duarte C. A., *Investigation on Timoshenko beam problems using the hp-Clouds Meshless FEM*, XVII CILAMCE congresso ibero latino-americano de métodos computacionais em engenharia, Brasilia, DF, 29-31/10/97, pp-167-168.
- [29] Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P., *Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements.* Computational Mechanics, 10:307-318, 1992.
- [30] Liu, W., K., Chen, Y., Jun, S., Belytscho, T., Pan, C., Uras, R. A. and Chang C. T., *Overview and applications of the kernel particle methods.* Archives of Computational Methods in Engineering
- [31] Lunberger, D. G., *Otimization by vector space methods.*

- [32] Roark, Raymond J. and Young Warren C., *Formulas for Stress and Strain*, fifth edition.
- [33] Oden, J. Tinsley, *Applied Functional Analysis*, Prentice-hall, Inc., Englenwood Cliffs., New Jersey 07632, 1979

Apêndice

Solução Analítica

de

Placas Semi-Espessas

Sumário

1	Solução Analíticas de Placas Semi-Espessas	2
1.1	Equações de Equilíbrio	2
1.2	Solução Analítica para Placas Retangulares	7
1.3	Solução Analítica para Placas Circulares.	15

Capítulo 1

Solução Analíticas de Placas Semi-Espessas

A determinação da solução analítica proporciona um valioso método de comparação de resultados, e é obtida através de expansão em série para placas retangulares, ou através de uma solução fechada, como no caso de placas circulares. Uma proposta para determinar a solução analítica do problema de placas com deformação cisalhante é transformar um problema de oito incógnitas $\{w, \theta_x, \theta_y, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y\}$ num problema de três incógnitas, formulado em função do deslocamento transversal da placa e dos invariantes das rotações, conforme Karl Marguerre & Hans-Theo Woernie[15]. Em outras palavras, determinar as equações de equilíbrio da placa em termos de deslocamentos, como é mostrado a seguir.

1.1 Equações de Equilíbrio

Partindo das Eqs. 2.20 e 2.23 obtem-se, para um ponto da placa, as seguintes expressões para as componentes do tensor de momentos e do vetor de esforços cortantes:

$$M_{xx} = D (\theta_{x,x} + \nu\theta_{y,y}) \quad (1.1)$$

$$M_{yy} = D (\theta_{y,y} + \nu\theta_{x,x}) \quad (1.2)$$

$$M_{xy} = \frac{D}{2} (1 - \nu) (\theta_{y,x} + \theta_{x,y}) \quad (1.3)$$

$$M_{yx} = \frac{D}{2} (1 - \nu) (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \quad (1.4)$$

$$Q_x = Gts (\theta_x + w_{,x}) \quad (1.5)$$

$$Q_y = Gts (\theta_y + w_{,y}) \quad (1.6)$$

Nas Eqs 1.1 a 1.6, D , G , e ts correspondem respectivamente ao coeficiente de rigidez à flexão da placa dado na Eq.2.22, módulo de elasticidade transversal $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ e espessura corrigida pelo fator de deformação cisalhante de Reissner (1945), $ts = \frac{5}{6}t$.

Considerando, como carregamento externo somente cargas distribuídas no domínio, têm-se as Equações de Equilíbrio:

$$divM - Q = 0 \quad (1.7)$$

$$divQ + q = 0 \quad (1.8)$$

Substituindo 1.7 em 1.8, obtem-se:

$$div(divM) = -q \quad (1.9)$$

Com a finalidade de reduzir o número de variáveis do problema de oito para três, como citado anteriormente, são definidos os invariantes das rotações Φ e Ψ correspondentes a $div\theta$ e $curl\theta$, como indicado nas expressões abaixo:

$$div\theta = \Phi = \frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\theta_y}{\partial y} \quad (1.10)$$

$$\text{curl } \theta = \Psi = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (1.11)$$

Partindo das Equações Constitutivas 1.1 a 1.4 e substituindo estes resultados na Eq. 1.9, escreve-se a equação de equilíbrio em função do invariante Φ , cuja demonstração é realizada a seguir.

Escrevendo a Eq. 1.9 por extenso, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q \quad (1.12)$$

Na Eq. 1.12, se tem as seguintes expressões para as componentes da equação, escrita em função de derivadas parciais das rotações:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = D \left(\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = D \left(\frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (1.17)$$

Substituindo as Eqs. de 1.14 a 1.17 em 1.12 chega-se a:

$$\begin{aligned} & D \left[\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} \right) \right] = -q \end{aligned} \quad (1.18)$$

Agrupando os termos da Eq. 1.18 obtém-se:

$$D \left(\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} \right) = -q \quad (1.19)$$

Ou ainda:

$$D \left(\frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) = -q \quad (1.20)$$

Como em 1.20 o primeiro termo entre parênteses corresponde ao operador Laplaciano de um escalar definido por $\Delta \equiv \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial y^2}$ e o segundo, ao invariante Φ chega-se finalmente à seguinte equação de equilíbrio:

$$D \Delta \Phi = -q \quad (1.21)$$

Por outro lado, substituindo as Eqs. 1.1 a 1.6 na equação de equilíbrio 1.7 e colocando-a em função dos invariantes Φ e Ψ , pode-se obter ∇_w .

Para isto, parte-se das equações de equilíbrio 1.7, que em coordenadas cartesianas correspondem ao sistema:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_y \quad (1.23)$$

Substituindo os momentos na Eq. 1.22 pelas Eqs. 1.1 e 1.3 e o cortante por 1.5 chega-se a:

$$D \left[\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right) \right] = Gt_s \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.24)$$

Isolando o termo $\frac{\partial w}{\partial x}$ se obtém:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{D}{Gt_s} \left[\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} \right) \right] \quad (1.25)$$

$$+\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right) \Bigg]$$

Somando e subtraindo o termo $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial_x \partial_y}$ em 1.25 chega-se a:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{D}{Gt_s} \left[\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} \right) \right] \quad (1.26)$$

$$+\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial_x \partial_y} - \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial_x \partial_y} \right) - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right) \Bigg]$$

Em que, agrupando os termos de 1.26, obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{D}{Gt_s} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} \right) \quad (1.27)$$

$$+\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \Bigg)$$

Ou ainda, finalmente:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{D}{Gt_s} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \right] \quad (1.28)$$

Analizando a Eq. 1.28 pode-se verificar que o primeiro parênteses corresponde a Φ e o segundo, a Ψ . Portanto, a expressão acima pode ser escrita como:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{D}{Gt_s} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \left(\frac{1 - \nu}{2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] \quad (1.29)$$

De forma análoga ao que foi feito para obter 1.29, obtém-se a segunda parcela do gradiente $\frac{\partial w}{\partial y}$ como:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{D}{Gt_s} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(\frac{1 - \nu}{2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \quad (1.30)$$

Derivando a Eq. 1.29 em relação a x e a Eq.1.30 em relação a y e somando as mesmas, obtém-se o Laplaciano de w em função do invariante Φ . Isto é:

$$\Delta w = -\Phi + \frac{D}{Gt_s} \Delta \Phi. \quad (1.31)$$

Derivando a Eq. 1.29 em relação a y e a Eq.1.30 em relação a x , trocando de sinal a primeira e somando com a segunda, obtém-se a última equação de equilíbrio, agora em função do invariante Ψ , ou seja,

$$0 = \Psi + \frac{D}{Gt_s} \frac{1-\nu}{2} \Delta \Psi \quad (1.32)$$

As Eqs. 1.21, 1.31 e 1.32 constituem as equações diferenciais da placa em função do campo de deslocamentos. As mesmas podem ser agrupadas e reescritas como segue:

$$\left. \begin{array}{l} a) \Delta \Phi = -\frac{q}{D} \\ b) \Delta w = -\Phi - \frac{q}{Gt_s} \end{array} \right\} = \Delta \Delta w = \frac{q}{D} - \frac{\Delta q}{Gt_s} \quad (1.33)$$

$$\Delta \Psi - \frac{2}{(1-\nu)h^2} \Psi = 0 \quad (1.34)$$

$$h^2 = \frac{D}{Gt_s} \quad (1.35)$$

1.2 Solução Analítica para Placas Retangulares

Na determinação da solução analítica será usada uma placa de dimensão a ao longo do eixo x e b ao longo do eixo y , como indicado na Figura 2.2(a), sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio. Inicialmente serão analisadas as condições de contorno que devem ser impostas ao longo dos eixos $y = 0$ e $y = b$, de forma que se possa usar uma expansão trigonométrica para o campo de deslocamento. Sendo assim, as condições de contorno para a placa com apoio do tipo rígido (hard) são satisfeitas pela expansão em senos para w e Φ e pela expansão em cossenos para Ψ , como indicado a seguir:

$$w = 0 \quad e \quad M_{yy} = 0$$

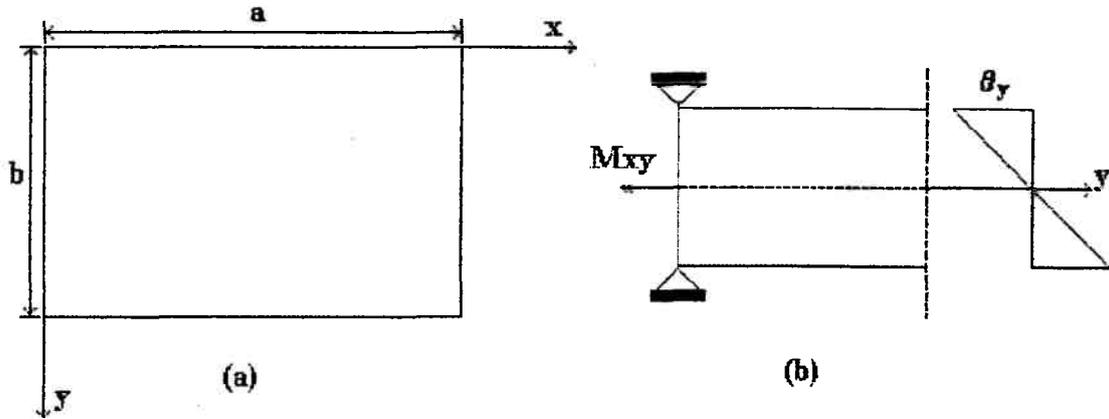


Figura 1.1. Placa retangular apoiada sob condições de contorno rígidas (Hard)

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.36)$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Phi}(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.37)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Psi}(x) \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (1.38)$$

A terceira condição de contorno compatível com esta expansão é, obviamente, $\theta_x = 0$.

Impor as condições de contorno anteriores implica que a placa está travada no sentido da espessura, como indicado na figura 2.2(b), permitindo rotações θ_y mas impedindo as rotações θ_x devido ao momento torçor M_{xy} .

Definida a forma geral da solução dada pelas Eqs. 1.36 a 1.38, é estabelecida a parcela da solução em y . Parte-se agora, em função das condições de contorno definidas anteriormente, para a determinação das parcelas da solução geral com variável independente em x .

Pela teoria das equações diferenciais lineares, a solução geral em x é constituída por uma parcela correspondente à solução da homogênea, e outra que tem a mesma ordem do termo independente, que constitui a solução particular. Portanto, pode-se escrever $\bar{w}(x)$, $\bar{\Phi}(x)$ e $\bar{\Psi}(x)$ como:

$$\bar{w}(x) = \bar{w}(x)_p + \bar{w}(x)_h \quad (1.39)$$

$$\bar{\Phi}(x) = \bar{\Phi}(x)_p + \bar{\Phi}(x)_h \quad (1.40)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}(x)_p + \bar{\Psi}(x)_h \quad (1.41)$$

Partindo da Eq. 1.33(a), da definição 1.37 e do fato que a equação não é homogênea, o carregamento também precisa ser expandido em. Para o carregamento uniformemente distribuído no domínio, tem-se:

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.42)$$

em que

$$q_n = q_0 \frac{2}{b} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{4q_0}{n\pi}. \quad (1.43)$$

Incorporando este carregamento na Eq. 1.33(a) se obtém:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{\Phi}(x)'' - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \bar{\Phi}(x) + \frac{qn}{D} \right] \sin \left(\frac{n\pi}{b} \right) y = 0 \quad (1.44)$$

A Eq. 1.44 é verdadeira se o termo entre chaves se anula para qualquer valor de x , ficando desta forma definida a equação diferencial em função de $\bar{\Phi}(x)$, como segue:

$$\bar{\Phi}(x)'' - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \bar{\Phi}(x) + \frac{qn}{D} = 0 \quad (1.45)$$

Para determinar a solução particular é utilizado o método dos coeficientes a determinar, atuando na equação um operador que a torna homogênea, ficando a mesma como,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \bar{\Phi}(x) = 0 \quad (1.46)$$

onde a solução da Eq. 1.46 tem a forma:

$$C_1 + C_2 e^{n\pi x/b} + C_3 e^{-n\pi x/b} \quad (1.47)$$

Como pode-se verificar, a única parcela da solução 1.47 que não se anula quando substituída em 1.45 é C_1 . Portanto, C_1 corresponde à solução particular que satisfaz 1.45 e tem a forma:

$$\bar{\Phi}(x)_p = \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \frac{qn}{D} \quad (1.48)$$

Na determinação da solução particular de $\bar{w}(x)$, substitue-se 1.48 na equação diferencial 1.33(b) obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{w}(x)'' - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \bar{w}(x) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{b} \right) y = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{\Phi}(x)_p + \frac{qn}{Gts} \right] \sin \left(\frac{n\pi}{b} \right) y \quad (1.49)$$

sendo que para satisfazer a Eq.1.49 deve-se cumprir,

$$\bar{w}(x)'' - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \bar{w}(x) = - \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \frac{qn}{D} - \frac{qn}{Gts} \quad (1.50)$$

que corresponde à equação diferencial para a variável $\bar{w}(x)$. Aplicando novamente o método dos coeficientes a determinar, se obtém:

$$\bar{w}(x)_p = \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \frac{qn}{D} + \frac{qn}{Gts} \right]$$

Ou ainda,

$$\bar{w}(x)_p = \frac{qn}{D} \left(\frac{b}{n\pi} \right)^4 (1 + \hat{h}^2) \quad (1.51)$$

em que

$$\hat{h} = \left(\frac{n\pi}{b}\right) h. \quad (1.52)$$

Determinadas as soluções particulares $\bar{w}(x)_p$ e $\bar{\Phi}(x)_p$, precisa-se adiciona-las às soluções homogêneas $\bar{\Phi}(x)_h$ e $\bar{w}(x)_h$ e ainda determinar $\bar{\Psi}(x)_h$, para a qual somente existe a parcela homogênea já que 1.34 é homogênea. Não será comentado aqui o processo de resolução de equações diferenciais lineares homogêneas, por ser considerado um procedimento trivial abordado em cursos de equações diferenciais lineares, apresentando unicamente os resultados a seguir:

$$\bar{\Phi}(x)_h = -2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 [A_2 \text{Si } nh\hat{x} + B_2 \text{Cosh}\hat{x}]. \quad (1.53)$$

Substituindo 1.53 em 1.33(b) se obtém,

$$\bar{w}(x)_h = A_1 \text{Cosh}\hat{x} + B_1 \text{Si } nh\hat{x} + A_2 \hat{x} \text{Cosh}\hat{x} + B_2 \hat{x} \text{Si } nh\hat{x}. \quad (1.54)$$

Para 1.34 tem-se:

$$\bar{\Psi}(\hat{x})'' - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \bar{\Psi}(\hat{x}) - \frac{2}{(1-\nu)h^2} \bar{\Psi}(\hat{x}) = 0 \quad (1.55)$$

A Eq. 1.55 tem a solução homogênea:

$$\bar{\Psi}(\hat{x}) = A_3 \text{Cosh}(\gamma_n \hat{x}) + B_3 \text{Si } nh(\gamma_n \hat{x}) \quad (1.56)$$

Nas soluções 1.53, 1.54 e 1.56 tem-se as seguintes expressões para \hat{x} e γ_n respectivamente:

$$\hat{x} = \frac{n\pi}{b} x \quad (1.57)$$

$$\gamma_n^2 = 1 + \frac{2}{(1-\nu)} \left(\frac{b}{n\pi h}\right)^2 = 1 + \frac{2}{(1-\nu)\hat{h}^2} \quad (1.58)$$

Uma vez determinadas as formas gerais das soluções para $\bar{w}(x)$, $\bar{\Phi}(x)$, e $\bar{\Psi}(x)$, aplicam-se as condições de contorno para a determinação da solução específica do PVC (problema

de valores no contorno). Já que o sistema de equações tem seis constantes a ser determinadas, é necessário prescrever três condições de contorno em cada um dos eixos $x = 0$ e $x = a$. Juntamente com as condições de contorno $w = 0$ e $M_{xx} = 0$, deve-se prescrever uma terceira condição de contorno relativa ao apoio tipo rígido (hard), que é

$$\theta_y = 0 \quad (1.59)$$

Na aplicação das condições de contorno, primeiramente, considera-se a placa pivotada nos eixos $x = 0$ e $x = a$, de forma tal que os giros $\theta_y = 0$.

A partir da condição de contorno definida em 1.59 tem-se que $\theta_{y,y} = 0$. Portanto, partindo da Eq. 1.1 de que $\theta_{y,y} = 0$ e $M_{xx} = 0$ conclui-se que $\theta_{x,x} = 0$. Assim, se obtém:

$$\Phi = \theta_{x,x} + \theta_{y,y} = 0 \quad em \quad x = 0 \quad e \quad x = a \quad (1.60)$$

Introduzindo agora as condições de contorno $\theta_y = 0$ e $\Phi = 0$ na expressão

$$\theta_y = -w_{,y} + h^2 \left[\Phi_{,y} + \frac{1}{2} (1 - \nu) \Psi_{,x} \right]$$

que nada mais é do que a Eq. 1.30, e colocando agora a rotação θ_y em termos dos invariantes Φ , Ψ e da derivada do deslocamento w em relação a y , conclui-se que:

$$\Psi_{,x} = 0 \quad em \quad x = 0 \quad e \quad x = a \quad (1.61)$$

Já que a Eq. 1.55 é homogênea e tem condições de contorno homogêneas, a única solução possível é a solução trivial:

$$\Psi \equiv 0 \quad (1.62)$$

Utilizando a condição de contorno 1.60 se obtém, finalmente:

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{q_n}{D} \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \left[-2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 (A_2 \text{Si } nh\hat{x} + B_2 \text{Cosh}\hat{x}) + 1 \right] = 0 \quad (1.63)$$

para $x = 0$,

$$B_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{n\pi h} \right)^4 \quad (1.64)$$

e para $x = a$, e $\hat{a} = \frac{n\pi}{b}a$, obtem-se:

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{n\pi h} \right)^4 \left[\frac{1 - \text{Cosh}\hat{a}}{\sinh \hat{a}} \right] \quad (1.65)$$

Assim a solução analítica para $\Phi(x, y)$ tem a forma:

$$\Phi(x, y) = \frac{4q_0 b^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[\left(\frac{\text{Cosh}\hat{a} - 1}{\text{Si}nh\hat{a}} \right) \text{Si}nh\hat{x} - \frac{1}{2} \text{Cosh}\hat{x} + 1 \right] \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (1.66)$$

Substituindo os valores de A_2 e B_2 em 1.54 e aplicando as condições de contorno $w = 0$ em $x = 0$ e $x = a$, conclui-se que

$$\begin{aligned} \bar{w}(x) = \frac{q_n}{D} \left(\frac{b}{n\pi} \right)^4 \left[A_1 \text{Cosh}\hat{x} + B_1 \text{Si}nh\hat{x} + \frac{1}{2} \hat{x} \frac{(1 - \text{Cosh}\hat{a})}{\text{Si}nh\hat{a}} \text{Cosh}\hat{x} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \hat{x} \text{Si}nh\hat{x} + (1 + \hat{h}^2) \right] \end{aligned} \quad (1.67)$$

para $x = 0$:

$$A_1 = - (1 + \hat{h}^2) \quad (1.68)$$

e para $x = a$:

$$B_1 = \frac{(1 + \hat{h}^2) \text{Si}nh\hat{a} - \frac{\hat{a}}{2}}{(\text{Cosh}\hat{a} + 1)} \quad (1.69)$$

introduzindo 1.68 e 1.69 em 1.67 e fazendo algumas simplificações algébricas se obtém:

$$\bar{w}(x) = \frac{q_n}{D} \left(\frac{b}{n\pi} \right)^4 \left\{ (1 + \hat{h}^2) - \frac{1}{\text{Cosh}\hat{a} + 1} \left[(1 + \hat{h}^2) (\text{Cosh}(\hat{a} - \hat{x}) + \text{Cosh}\hat{x}) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\hat{a}}{2} (\text{Si}nh(\hat{a} - \hat{x}) + \text{Si}nh\hat{x}) \right] \right\} \quad (1.70)$$

$$\frac{1}{2} (\hat{x} \operatorname{Si} nh (\hat{a} - \hat{x}) + (\hat{a} - \hat{x}) \operatorname{Si} nh \hat{x}) \left. \right\}$$

Finalmente, se tem a seguinte forma para a solução analítica de $w(x, y)$:

$$w(x, y) = \frac{4q_0 b^4}{\pi^4 D} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ (1 + \hat{h}^2) - \right. \quad (1.71)$$

$$\left. \frac{1}{\operatorname{Cosh} \hat{a} + 1} \left[(1 + \hat{h}^2) (\operatorname{Cosh} (\hat{a} - \hat{x}) + \operatorname{Cosh} \hat{x}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{1}{2} (\hat{x} \operatorname{Si} nh (\hat{a} - \hat{x}) + (\hat{a} - \hat{x}) \operatorname{Si} nh \hat{x}) \right] \right\} \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

As soluções 1.62, 1.66 e 1.71 constituem a solução analítica em termos de deslocamento transversal e invariantes de rotações para placas retangulares simplesmente apoiadas, sujeitas a cargas uniformemente distribuídas no domínio.

Uma vez determinadas as soluções correspondentes aos invariantes de rotações, e ao deslocamento transversal para a placa, pode-se, em função de $w(x, y)$, $\Phi(x, y)$, e $\Psi(x, y)$ e das Eqs. 1.29, 1.30 e 1.1 a 1.6 recuperar as rotações o tensor de momentos e de esforços cortantes, como indicado a seguir:

$$\theta_x = -w_{,x} + h^2 \left[\Phi_{,x} - \frac{1}{2} (1 - \nu) \Psi_{,y} \right] \quad (1.72)$$

$$\theta_y = -w_{,y} + h^2 \left[\Phi_{,y} + \frac{1}{2} (1 - \nu) \Psi_{,x} \right] \quad (1.73)$$

$$M_{xx} = -D \left\{ w_{,xx} + \nu w_{,yy} - h^2 \left[\Phi_{,xx} + \nu \Phi_{,yy} - \frac{1}{2} (1 - \nu)^2 \Psi_{,xy} \right] \right\} \quad (1.74)$$

$$M_{yy} = -D \left\{ w_{,yy} + \nu w_{,xx} - h^2 \left[\Phi_{,yy} + \nu \Phi_{,xx} - \frac{1}{2} (1 - \nu)^2 \Psi_{,xy} \right] \right\} \quad (1.75)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left\{ w_{,xy} - h^2 \left[\Phi_{,xy} + \frac{1}{4}(1 - \nu)(\Psi_{,xx} - \Psi_{,yy}) \right] \right\} \quad (1.76)$$

$$Q_x = D \left[\Phi_{,x} - \frac{1}{2}(1 - \nu)\Psi_{,y} \right] \quad (1.77)$$

$$Q_y = D \left[\Phi_{,y} - \frac{1}{2}(1 - \nu)\Psi_{,x} \right] \quad (1.78)$$

$$M_{xx} + M_{yy} = D(1 + \nu)\Phi \quad (1.79)$$

1.3 Solução Analítica para Placas Circulares.

Por motivos de simplicidade de formulação são utilizadas coordenadas polares na determinação da solução analítica. A solução da placa circular engastada no contorno e sujeita a uma carga uniformemente distribuída no domínio, conforme Figura 2.3, representa um excelente meio para comparar resultados numéricos por ter solução fechada, a qual será demonstrada a seguir.

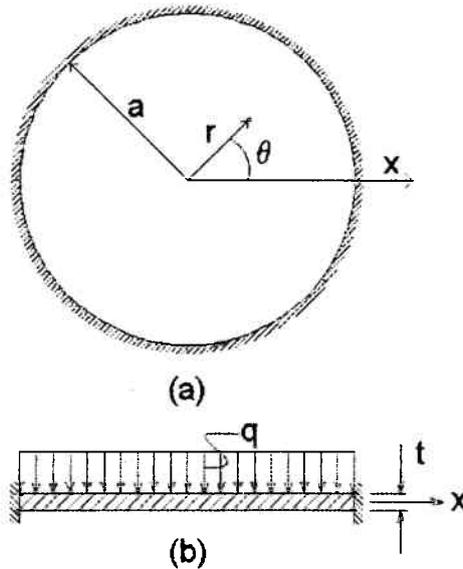


Figura 1.2. Placa circular engastada no contorno, (a) geometria, (b) carregamento

Em coordenadas polares tem-se as seguintes expressões para os invariantes Φ e Ψ

$$\Phi = \text{div } \theta = \frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \theta_r \quad (1.80)$$

$$\Psi = \text{curl } \theta = \frac{\partial \theta_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \theta_\theta \quad (1.81)$$

As rotações, momentos e forças cortantes são determinados em função de $w(r, \theta)$, $\Phi(r, \theta)$, $\Psi(r, \theta)$ como segue:

$$\theta_r = -w_{,r} + \widehat{h}^2 \left[\Phi_{,r} - \frac{1}{2} (1 - \nu) \Psi_{,\theta} \right] \quad (1.82)$$

$$\theta_\theta = -w_{,\theta} + \widehat{h}^2 \left[\Phi_{,\theta} - \frac{1}{2} (1 - \nu) \Psi_{,r} \right] \quad (1.83)$$

$$M_{rr} = D \left[\theta_{r,r} + \nu \left(\theta_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} \theta_r \right) \right] \quad (1.84)$$

$$M_{\theta\theta} = D \left(\theta_{\theta,\theta} + \nu \theta_{r,r} + \frac{1}{r} \theta_r \right) \quad (1.85)$$

$$M_{r\theta} = \frac{1}{2} D (1 - \nu) \left(\theta_{\theta,r} + \theta_{r,\theta} - \frac{1}{r} \theta_\theta \right) \quad (1.86)$$

$$M_{rr} + M_{\theta\theta} = D (1 + \nu) \Phi \quad (1.87)$$

$$Q_r = D \left[\Phi_{,r} - \frac{1}{2} (1 - \nu) \Psi_{,\theta} \right] \quad (1.88)$$

$$Q_\theta = D \left[\Phi_{,\theta} - \frac{1}{2} (1 - \nu) \Psi_{,r} \right] \quad (1.89)$$

Restringindo o nosso problema para o caso de carregamento e condições de contorno com simetria rotacional, tem-se que todas as derivadas com respeito a θ são nulas. Desta forma, por razões de simetria, θ_θ , $M_{r\theta}$ e Q_θ devem ser nulos. Sendo assim, tem-se que:

$$\Psi \equiv 0 \quad (1.90)$$

O conjunto de equações diferenciais parciais pode ser transformado num sistema de equações diferenciais ordinárias em r , como segue:

$$\Phi_{,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{,r} = -\frac{q}{D} \quad (1.91)$$

$$w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} = -\Phi - \frac{q}{Gts} \quad (1.92)$$

Aplicando o operador $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$ em ambos os lados da Eq. 1.92, e substituindo 1.91 na expressão resultante, obtém-se:

$$L[w] = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \left(w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r}\right) = \frac{q}{D} + \frac{q_{,rr} + q_{,r}/r}{Gts} \quad (1.93)$$

A solução da equação de Euler de quarta ordem homogênea correspondente a 1.93 é:

$$w_h(r) = A + \bar{A} \ln r + Br^2 + \bar{B}r^2 \ln r \quad (1.94)$$

Substituindo 1.94 na equação homogênea de 1.92 obtém-se:

$$\Phi_h(r) = -\left(w_{h,rr} + \frac{1}{r}w_{h,r}\right) = -4(B + \bar{B}) - 4\bar{B} \ln r \quad (1.95)$$

Considerando uma carga uniformemente distribuída q_0 , a solução particular da Eq.1.91 é dada por:

$$\Phi_p(r) = -\frac{q_0 r^2}{4D} \quad (1.96)$$

Para obter a solução particular 1.92 foi usado novamente o método dos coeficientes a determinar.

Substituindo 1.96 na Eq. 1.92 obtém-se:

$$w_p = \frac{q_0 r^4}{64D} - \frac{q_0 r^2}{4Gts} = \frac{q_0 r^4}{64D} \left(1 - 16 \frac{h^2}{r^2} \right) \quad (1.97)$$

Levando em consideração condições de regularidade, isto é, assumindo-se valores finitos para o deslocamento transversal, conclui-se que $\bar{A} = \bar{B} = 0$ na parcela correspondente à equação homogênea. Portanto, a solução geral adota a forma:

$$\Phi(r) = -4B - \frac{q_0 r^2}{4D} \quad (1.98)$$

$$w(r) = A + Br + \frac{q_0 r^4}{64D} \left(1 - 16 \frac{h^2}{r^2} \right) \quad (1.99)$$

Considerando uma placa de raio a , as condições de contorno são escritas como:

$$w(a) = 0 \quad \theta_r(a) = -w_{,r}(a) + h^2 \Phi_{,r}(a) = 0 \quad (1.100)$$

Aplicando as condições de contorno 1.100 em 1.98 e 1.99, chega-se a:

$$A = \frac{q_0 a^2}{64D} \left(1 + \frac{h^2}{a^2} \right) \quad (1.101)$$

$$B = -\frac{q_0 a^2}{32D} \quad (1.102)$$

Substituindo as Eqs.1.101 e 1.102 em 1.98 e 1.99, obtem-se:

$$\Phi(r) = \frac{q_0 a^2}{8D} \left(1 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (1.103)$$

$$w(r) = \frac{q_0 a^2}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + 16 \frac{h^2}{a^2} \right) \quad (1.104)$$

Substituindo as Eqs. 1.103, 1.104 e 1.90 na Eq. 1.82, se obtem a seguinte expressão para θ_r :

$$\theta_r = \frac{q_0 a^2}{16D} r \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (1.105)$$

Pode-se verificar na Eq. 1.105 que θ_r independe das deformações cisalhantes, já que $\Psi(r, \theta) \equiv 0$, para problemas com simetria rotacional.

A deformação no centro da placa é dada por:

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 + 16 \frac{h^2}{a^2} \right) \quad (1.106)$$

As Eqs. 1.103, 1.104, 1.105 e 1.106 correspondem à solução analítica da placa circular engastada no contorno e sujeita a uma carga uniformemente distribuída no domínio.