

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS - GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**UMA METODOLOGIA DE MODELAGEM E ANÁLISE DAS  
VIBRAÇÕES DE ORIGEM MAGNÉTICA NAS MÁQUINAS  
ELÉTRICAS ROTATIVAS POR ELEMENTOS FINITOS E  
PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS**

‘Tese submetida como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica’

**CARLOS GUILHERME DA COSTA NEVES**

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1999.

**UMA METODOLOGIA DE MODELAGEM E ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES DE ORIGEM  
MAGNÉTICA NAS MÁQUINAS ELÉTRICAS ROTATIVAS POR ELEMENTOS FINITOS  
E PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS**

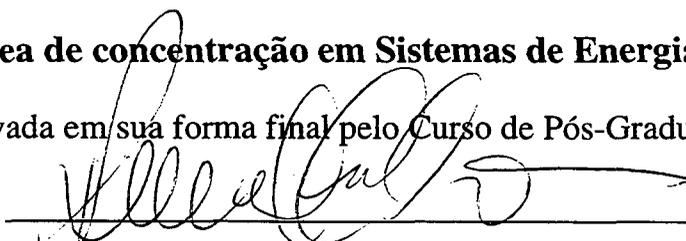
**Carlos Guilherme da Costa Neves**

'Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do Título de

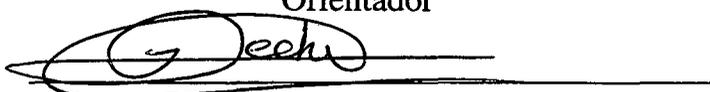
**Doutor em Engenharia Elétrica**

**Área de concentração em Sistemas de Energia,**

e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação'

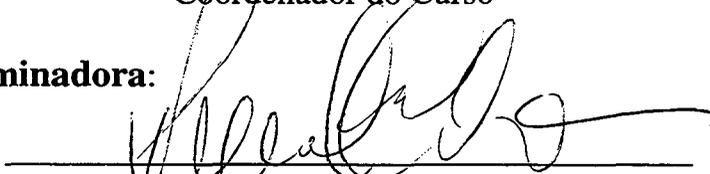


Prof. Renato Carlson, Dr. Ing.  
Orientador

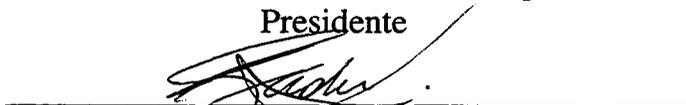


Prof. Ildemar Cassana Decker, Dr. Sc.  
Coordenador do Curso

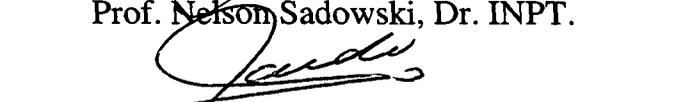
**Banca Examinadora:**



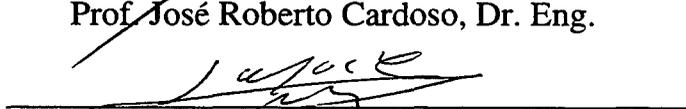
Prof. Renato Carlson, Dr. Ing.  
Presidente



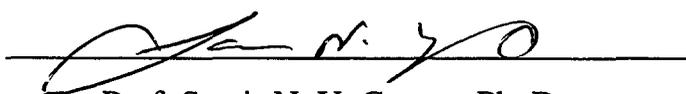
Prof. Nelson Sadowski, Dr. INPT.



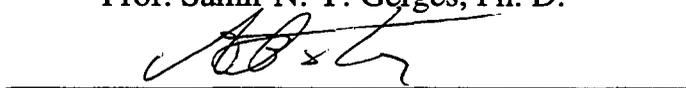
Prof. José Roberto Cardoso, Dr. Eng.



Prof. Michel Lajoie-Mazenc, Dr. D'Etat.



Prof. Samir N. Y. Gerges, Ph. D.



Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. D'Etat.

À FABIANA  
AOS MEUS PAIS: GILCA E MANOEL  
AOS MEUS SOBRINHOS: DUDU, JENIFER, GABI, GUGU E MATEUS

*“ESTIVE APOIADO NOS OMBROS DE GIGANTES”*

SIR ISAAC NEWTON

## AGRADEÇO:

À DEUS, QUE ME DEU A VOCAÇÃO E AS OPORTUNIDADES;

À MINHA ESPOSA POR SEU CARINHO E ESTÍMULO;

À MINHA FAMÍLIA PELO GRANDE INCENTIVO;

AO PROF. RENATO CARLSON QUE ESCOLHEU ESTE RELEVANTE TEMA DE TESE E CONFIOU-ME A RESPONSABILIDADE DE DESENVOLVE-LO SOB SUA ORIENTAÇÃO SEGURA E INSPIRADA.

AO PROF. E GRANDE AMIGO NEWTON SOEIRO QUE ABRIU-NOS AS PORTAS DE UM NOVO CONHECIMENTO.

AO PROF. NELSON SADOWSKI POR SUAS SUGESTÕES INTELIGENTES E GRANDE AJUDA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

AO PROF. JOÃO PEDRO ASSUMPTÃO BASTOS POR SUAS SUGESTÕES NO TEXTO DOS ARTIGOS E AJUDA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

AO PROF. SAMIR GERGES QUE, COM SUA GENEROSIDADE, ABRIU-NOS AS PORTAS DO GRUPO DE VIBRAÇÕES E ACÚSTICA E DO QUAL NOS SENTIMOS PARTE.

AO ENG. SEBASTIÃO LAURO NAU E AO PESSOAL DA SEÇÃO DE TECNOLOGIA DA WEG MOTORES PELO FORNECIMENTO DOS MOTORES, ENSAIOS E TRANFERÊNCIA DE CONHECIMENTOS INDISPENSÁVEIS AO SUCESSO DESTE TRABALHO.

AOS PESQUISADORES DO LEEI DE TOULOUSE MICHEL LAJOIE-MAZENC E YVAN LEFÈVRE POR SUA HOSPITALIDADE E SUGESTÕES DECISIVAS AO ANDAMENTO DESTE TRABALHO.

AO ROBERTO ROSTIROLLA POR SEU APOIO NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS INFORMÁTICOS.

AOS DEMAIS PROFESSORES E COLEGAS DO GRUCAD QUE COM SUA AMIZADE FAZEM DESTE GRUPO MINHA SEGUNDA CASA.

AO WILSON COSTA E AO MARCOS PELA CONVIVÊNCIA EM ALTO NÍVEL.

AO CNPQ PELA CONCESSÃO DA BOLSA.

## SUMÁRIO

SIMBOLOGIA	v
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix

### CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO GERAL

### CAPÍTULO II - DEFINIÇÃO DA METODOLOGIA DE MODELAGEM E EXPERIMENTAÇÃO

II.1 Geração de Ruído de Origem Magnética nas Máquinas Elétricas	6
II.2 Caracterização das Forças Eletromagnéticas	7
II.2.1 Forças de Laplace	7
II.2.2 Forças Magnetostritivas	7
II.2.3 Forças Magnéticas	8
II.3. Modelos de Acoplamento Magnetomecânicos	8
II.3.1 Acoplamento Unidirecional	9
II.3.2 Acoplamento Bidirecional	9
II.3.3 Acoplamento Interativo	10
II.4 Metodologia	10
II.4.1 Hipóteses	10
II.4.2 Método	11
II.5 Tipos de Ensaio Práticos	12
II.5.1 Medição das Formas de Onda das Forças Magnéticas	13
II.5.2 Medição de Vibrações	14
II.5.2.1 Equipamentos para Medição de Vibrações	14
II.5.2.2 Determinação Experimental das Acelerações através de Experimentos Rotacionais	16
II.6. Conclusão	17

## CAPÍTULO III - MODELAGEM ELETROMAGNÉTICA

III.1	Introdução	18
III.2	Acoplamento Forte das Equações do Campo Eletromagnético com as Equações do Circuito Exterior.	19
III.2.1	<i>Caso de uma Máquina Elétrica Genérica</i>	19
III.2.2	<i>Caso Específico do MIG</i>	20
III.2.3	<i>Caso Específico do MRC</i>	22
III.3	Acoplamento Fraco das Equações do Campo Eletromagnético com as Equações do Circuito Exterior	23
III.4	Cálculo das Forças Magnéticas	25
III.5	Transferência das Forças Magnética para o Modelo Estrutural.	26
III.6	Conclusão	26

## CAPÍTULO IV - MODELAGEM MECÂNICA

IV.1.	Introdução	27
IV.2.	Equações da elasticidade	27
IV.2.1.	<i>Relação deslocamento-deformação</i>	27
IV.2.2.	<i>Relações constitutivas do material - Lei de Hooke</i>	28
IV.2.3	<i>Equações de Equilíbrio</i>	29
IV.2.4	<i>Condições de contorno do tipo equilíbrio</i>	30
IV.2.5	<i>Condições de contorno cinemáticas</i>	31
IV.2.6	<i>Equações da elasticidade em função do deslocamento somente</i>	31
IV.3	Equação da dinâmica dos meios contínuos	31
IV.3.1	<i>Equação de equilíbrio</i>	31
IV.3.2	<i>Equação de Lagrange</i>	33
IV.3.3	<i>Aproximação pelo método de elementos finitos</i>	34
IV.4.	Resolução das equações da dinâmica	36
IV.5.	Conclusão	38

## CAPÍTULO V - ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

V.1. Introdução	39	
V.2 Funções Resposta em Frequência	40	
V.3 Modelo Modal	43	
V.4 Técnica de Estimação de parâmetros	44	
<i>Exemplo de Aplicação V.1 - Excitação por impacto</i>		53
<i>Exemplo de Aplicação V.2 - Excitação por shaker</i>		55
V.5. Conclusão	59	

## CAPÍTULO VI - ANÁLISE DOS MODELOS ESTRUTURAIS DOS MOTORES

VI.1. Introdução	60	
VI.2 Análise da viabilidade de um modelo numérico bidimensional para o MRC		61
VI.3 Análise do modelo bidimensional do MIG	66	
VI.4 Análise considerando Condição de Contorno de Deslocamento nulo.		68
VI.5. Conclusão	69	

## CAPÍTULO VII - MODELAGEM E ANÁLISE DOS ESFORÇOS ELETROMAGNÉTICOS

VII.1 Introdução	71	
VII.2 Modelagem do Motor de Relutância Chaveado	71	
<i>VII.2.1 Cálculo das Correntes Elétricas</i>		72
<i>VII.2.2 Cálculo das Forças Magnéticas</i>		73
VII.3 Modelagem do Motor de Indução de Gaiola	78	
<i>VII.3.1 Cálculo das Correntes Estatóricas e Rotóricas</i>		78
<i>VII.3.2 Cálculo das Forças Magnéticas</i>		80
<i>VII.3.3 Ensaio para Medição da Força Magnética Radial</i>		81
<i>VII.3.4 Análise da Força Magnética Radial obtida por Cálculo de Campos</i>		83
VII.4 Conclusão	88	

## CAPÍTULO VIII - CÁLCULO DA RESPOSTA FORÇADA E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

VIII.1 Introdução	89
VIII.2 Método de Superposição Modal	89
<i>Exemplo de Aplicação 1 (Motor de indução de gaiola à vazio)</i>	92
<i>Exemplo de Aplicação 2 (Motor de indução de gaiola à plena carga)</i>	96
<i>Exemplo de Aplicação 3 (Motor de Relutância Chaveado)</i>	100
<i>Exemplo de Aplicação 4 (Alterações na estrutura do MRC)</i>	103
VIII. 3 Conclusão	106

## CAPÍTULO IX - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

ANEXO A - TRANSFORMAÇÕES MODAIS	110
ANEXO B - DADOS DOS MOTORES	118
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	120

## SIMBOLOGIA

$\bar{F}_C$ :	Densidade volumétrica de força.
$\bar{J}$ :	Densidade superficial de corrente.
$\bar{B}$ :	Indução magnética.
$\bar{F}_{mat}$ :	Densidade volumétrica de força magnetostriativa.
$\bar{H}$ :	Campo indutor.
$\mu$ :	Permeabilidade magnética.
$\rho$ :	Densidade volumétrica do material.
$\bar{F}_{mag}$ :	Densidade volumétrica de força magnética.
$A$ :	Área da secção transversal do dente estator.
$\mu_0$ :	Permeabilidade magnética do ar.
$F_i(t)$ :	Força magnética em função do tempo, agindo em um dente $i$ .
$F_i(\omega)$ :	Espectro de Fourier de $F_i(t)$ .
$V_i(t)$ :	Tensão de saída da bobina de detecção de fluxo $i$
$J$ :	Densidade de corrente elétrica.
$\sigma$ :	Condutividade elétrica.
$v(t)$ :	Vetor da tensão.
$R$ :	Matriz das resistências CC dos enrolamentos.
$L$ :	Matriz que contém as indutâncias de cabeças de bobinas.
$N\phi(t)$ :	Matriz de enlace de fluxo.
$i(t)$ :	Vetor corrente no enrolamento.
$\phi(t)$ :	Fluxo magnético.
$A(t)$ :	Potencial vetor magnético.
$M$ :	Matriz permeabilidade magnética.
$N$ :	Matriz condutividade elétrica.
$P$ e $Q$ :	Matrizes que relacionam as equações do campo e as equações do circuito elétrico.

$\mathbf{0}$ :	Vetor matriz nula.
$\mathbf{D e v}$ :	Termos fonte (devido aos imãs permanentes e tensões aplicadas).
$\Delta(t)$ :	Passo de cálculo.
$\lambda$ :	Fator que depende da configuração dos enrolamentos (série ou paralelo).
$\sigma_c$ :	Condutividade corrigida nas barras da gaiola
$J_i$ :	Corrente induzidas na gaiola.
$\mathbf{V}_{extL}$ :	Matriz tensões de linha.
$\mathbf{V}_{ext}$ :	Matriz tensões de fase.
$\bar{\mathbf{T}}$ :	Vetor equivalente a uma densidade de força avaliada sobre uma superfície arbitrária.
$\bar{\mathbf{n}}$ :	Vetor unitário normal a superfície.
$\bar{\mathbf{F}}_d$ :	Força global exercida sobre um corpo magnético.
$[e]$ :	Vetor coluna referente à deformação local sofrida por um material em um ponto.
$[D]_{elas}$ :	Operador diferencial.
$[\sigma]$ :	Vetor tensão mecânica.
$E$ :	Módulo de Young.
$\nu$ :	Coefficiente de Poisson.
$T$ :	Energia cinética.
$V$ :	Energia potencial total.
$\ell$ :	Lagrangeano.
$[\mathbf{q}]$ :	Vetor deslocamento dos nós.
$[\dot{\mathbf{q}}]$ :	Vetor velocidade dos nós.
$[\ddot{\mathbf{q}}]$ :	Vetor aceleração dos nós.
$\omega$ :	Frequência natural.
$K$ :	Matriz de rigidez do sistema.
$M$ :	Matriz das massas globais do sistema.
$C$ :	Matriz de amortecimentos do sistema.

$\bar{F}_k$ :	Vetor das amplitudes complexas das $k$ harmônicas das forças equivalentes aplicadas a cada nó.
$\psi_i^r$ :	Coordenada modal na posição de excitação $i$ .
$\psi_k^r$ :	Coordenada modal na posição de medição $k$ .
$\omega_r$ :	Frequência natural para cada modo $r$ .
$A_{ik}^r$ :	Resíduo complexo do $r$ -ésimo modo.
$S_r$ :	Autovalor do $r$ -ésimo modo.
$h(t)$ :	Função resposta em frequência medida.
$N$ :	Número de modos de modos no intervalo de amostragem.
$\{F\}$ :	Vetor força.
$\{r\}$ :	Vetor de deslocamentos modais
$[P]$ :	Matriz modal.
$m_i$ :	Massa do modo $i$ .
$k_i$ :	Rigidez do modo $i$ .
$c_i$ :	Amortecimento do modo $i$ .
$n$ :	Número de graus de liberdade $i$ .
$G_{sk}(\omega_h)$ :	Matriz de transferência da estrutura mecânica.
$N$ :	Número de modos.
$u_i^s$ :	Coordenada modal na posição de resposta $s$ .
$u_i^k$ :	Coordenada modal na posição de excitação $k$ .
$\omega_i$ :	Frequência natural do modo $i$ .

## RESUMO

Neste trabalho, uma metodologia baseada no modelo de acoplamento magnetomecânico unidirecional é empregada na modelagem das vibrações mecânicas de origem magnética nas máquinas elétricas rotativas. O método de elementos finitos, aplicado às equações de Maxwell e às equações da elastodinâmica, bem como, o método de análise modal experimental são usados para modelar e analisar o comportamento magneto-elástico dos Motores de Relutância Chaveados e dos Motores de Indução de Gaiola.

O modelo eletromagnético dos motores permite o cálculo das correntes elétricas e das forças de origem magnética. Um sistema composto de bobinas de detecção de fluxo é utilizado a fim de avaliar estas forças experimentalmente.

Do ponto de vista das estruturas mecânicas, optou-se por modelos que além da visão qualitativa dos fenômenos propiciassem a determinação de parâmetros estruturais dos motores. Dentro desse contexto são efetuados estudos de comparação entre modelos bidimensionais e tridimensionais, bem como a validação destes modelos através de técnicas de análise modal experimental. A técnica de análise modal experimental além de útil na validação dos modelos estruturais, é capaz de determinar os amortecimentos da estrutura, que são parâmetros de difícil obtenção via cálculo.

As vibrações de origem magnética, em pontos específicos da estrutura dos motores, são calculadas através da técnica de superposição modal, que possibilita a utilização de amortecimentos modais como variáveis de entrada no cálculo da resposta forçada.

Nossos objetivos principais são investigar as vibrações de origem magnética e validar a metodologia de modelagem a análise através de procedimentos experimentais.

## ABSTRACT

In this work, a methodology based in the unidirectional magneto-mechanic coupling model is applied to simulate the mechanic vibrations of magnetic origin in rotative electric machines.

The finite elements method, applied to Maxwell and elastodynamic equations as well as the experimental modal analysis are used for modeling and analyzing the magneto-elastic behavior of the Switched Reluctance Motors and Squirrel-Cage Induction Motors.

The electromagnetic models are used to calculate the electric currents and magnetic forces. A system composed of flux detection coils is used in order to evaluate these forces by measurements.

The mechanical models allow the determination of motors structural parameters besides the qualitative vision of the vibration phenomenon. In this context comparison studies among two-dimensional and three-dimensional models as well as the validation of these models through techniques of experimental modal analysis are made. This technique is useful for determination of structures damping coefficients, since calculate these parameters is a very difficult task.

The vibrations of magnetic origin, in specific points of the electric motor structure, are calculated through the modal superposition method; this method allows to use the measured modal damping coefficients as input variables in the forced response calculation.

Our objective are focused specially in vibrations of magnetic origin and validation of modeling methodology through experimental procedures.

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO GERAL

Vários fenômenos físicos ocorrem simultaneamente numa máquina elétrica rotativa, além da conversão eletromecânica de energia. Uma parte da energia elétrica é convertida em perdas e dissipada termicamente no espaço circundante enquanto que outra parte muito inferior, mas igualmente importante, é irradiada como ruído para o ambiente.

O objetivo deste trabalho é estudar os fenômenos acoplados magneto-elásticos, no que se refere às vibrações mecânicas de origem magnética nas máquinas elétricas rotativas, bem como, validar a metodologia de modelagem adotada através de procedimentos experimentais. A preocupação com este tipo de fenômeno reflete uma tendência crescente dos projetistas de máquinas elétricas em reduzir o ruído acústico. Esta preocupação tem como origem de uma parte, as exigências dos usuários que consideram atualmente o ruído um fator poluente do ambiente, e de outra parte, a característica nefasta das vibrações sobre as estruturas vizinhas.

No presente trabalho estudou-se dois tipos de máquinas elétricas: O Motor de Relutância Chaveado (MRC) e o Motor de Indução de Gaiola (MIG).

No caso do motor de indução de gaiola a variação da carga altera o módulo e a fase das correntes rotóricas. Devido a isso, o módulo e a frequência das forças magnéticas e os níveis das vibrações também variam. Outro aspecto relevante é o uso de inversores para controlar a velocidade, que produzem níveis de ruído magnético mais elevados do que aqueles da alimentação senoidal. Este aumento se deve às harmônicas de forças magnéticas adicionais, geradas pela distorção harmônica da tensão da fonte.

As vibrações no MRC se devem essencialmente às forças de atração radiais entre estator e rotor, já que o MRC apresenta pólos salientes tanto no rotor como no estator. O fato da indutância dos enrolamentos variar no tempo conforme o rotor gira, faz com que as forças magnéticas e em conseqüência as vibrações variem muito. Além disso as formas de onda das correntes nas fases se modificam de acordo com a região da característica torque-velocidade em que o MRC está operando.

O motor de relutância chaveado é construtivamente simples, de baixo custo e, o fato do seu conversor ser tolerante à faltas, faz do MRC um forte competidor em muitas aplicações industriais e domésticas. Entretanto, apesar destas vantagens o MRC apresenta até então níveis de vibrações maiores que seus competidores. Embora patenteados em 1972 [1], o MRC não se tornou importante em pesquisa até a publicação do artigo de Lawrenson [2] em 1980, e só recentemente tentativas de analisar e reduzir as vibrações a um nível aceitável foram empreendidas. Durante a década de 80 um pequeno número de MRC(s) comerciais e um número maior de protótipos disseminou a idéia que o MRC é inerentemente ruidoso. Mas não há nada que prove que o MRC não possa ser projetado de forma a possuir um baixo nível de vibrações, e já que a pesquisa no tocante ao MRC está longe de se exaurir, é prematuro afirmar que o MRC possua altos níveis de vibrações.

O primeiro artigo sobre vibrações no MRC foi publicado por Cameron et al [3]. Neste a deformação elástica da coroa do estator como um anel, e a oscilação lateral dos pólos do estator são apontadas como as principais fontes de ruído. Wu et al mostraram em [4], através de dados experimentais, que a vibração provocada pelo desligamento de uma fase é maior que a provocada quando da sua ligação e que, quanto mais próximo da posição alinhada a fase for desligada, maior será a vibração. Uma avaliação teórica das forças radiais foi publicada por Miller [5]. Sadowski et al [6] calcularam a distribuição de forças magnéticas locais e a resposta dinâmica da estrutura do MRC à estas forças por meio de elementos finitos. Besbes et al [7] calcularam as forças magnéticas pelo princípio dos trabalhos virtuais e vibrações do estator de um motor de relutância variável (MRV) por meio de elementos finitos, verificando os resultados por meio de experimentos. Colby et al [8] utilizaram o método de elementos finitos na determinação dos modos de vibração e argumentos heurísticos foram desenvolvidos para indicar quais condições de operação excitam os diferentes modos.

Analisando estes artigos nota-se a falta de uma ferramenta de análise versátil, que torne rápido e fácil para o projetista de máquinas o estudo das vibrações no MRC. Com este intuito será utilizada a técnica de acoplamento fraco que além de possuir um tempo de cálculo reduzido em relação a técnica de resolução simultânea [6], apresenta outra vantagem: se os ângulos de chaveamento tiverem de ser variados a fim de buscar uma

condição em que as vibrações sejam menos intensas, não será necessário repetir o cálculo do fluxo magnético. Portanto com esta técnica pode-se adequar as condições de operação às características físicas do motor, de uma maneira rápida.

No caso da máquina de indução de gaiola de esquilo o número de artigos publicados com relação a vibrações é muito amplo, porém algumas dúvidas persistem ao longo dos anos bem como as técnicas ultrapassadas de modelagem não permitem a obtenção de resultados satisfatórios.

Nos artigos de Verma et al [11] e Timár et al [13] são determinadas as forças radiais, bem como a resposta dinâmica da estrutura analiticamente. Mas a abordagem analítica adotada possui alguns inconvenientes, tais como:

- não pode determinar todos os componentes harmônicos do ruído, já que não inclui todos os efeitos que determinam o fluxo no entreferro [14].
- não é capaz de determinar com exatidão o efeito da corrente induzida nas barras do rotor.
- não calcula com exatidão as frequências naturais de vibração da estrutura [12].

Portanto para analisar o ruído de origem magnética na máquina de indução é necessário uma ferramenta mais eficaz que a analítica, tal como o método de elementos finitos.

Neste trabalho utilizaremos o método de elementos finitos tanto na modelagem eletromagnética como na modelagem mecânica do motor de relutância chaveado e do motor de indução de gaiola. Será utilizado um modelo matemático completo capaz de calcular as correntes em diversas condições de operação, calcular as forças de origem magnética e seu espectro de frequências, bem como a resposta dinâmica da estrutura do estator.

No capítulo II, o fenômeno de geração de ruído de origem magnética é explicado, as forças eletromagnéticas, bem como, os modelos de acoplamento magnetomecânicos são caracterizados. Baseado nas hipóteses estabelecidas a metodologia de abordagem do fenômeno de vibrações de origem magnética é definido. Os procedimentos de medição das forças de origem magnética e de medição das vibrações são descritos.

No capítulo III são apresentados os métodos de modelagem empregados na simulação dos Motores de Indução de Gaiola e de Relutância Chaveado, bem como o método de cálculo das forças magnéticas.

O capítulo IV é dedicado a modelagem do problema de elasticidade utilizando o Método de Elementos Finitos.

No capítulo V, os procedimentos de análise modal experimental são descritos e usados para extrair as frequências naturais, modos de vibração e amortecimentos da estruturas dos motores em estudo. Os valores das frequências naturais e os modos de vibração serão utilizados na validação dos modelos estruturais do motores e os amortecimentos serão utilizados no cálculo da resposta forçada.

No capítulo VI, através do programa de análise por elementos finitos ANSYS, os modelos estruturais dos motores em estudo são discretizados. Com bases nestes modelos estruturais as frequências naturais e modos de vibração são calculadas. Estudos de validação do modelo estrutural bidimensional do MRC são efetuados, através da comparação com os resultados obtidos através de um modelo tridimensional do mesmo. No caso do MIG, o estudo de validação é feito com base nos resultados obtidos no capítulo V.

No capítulo VII são apresentados resultados relativos a modelagem e análise eletromagnética dos motores. São determinadas: a distribuição do fluxo magnético na estrutura magnética, as correntes elétricas nos enrolamentos estáticos e rotóricos, a distribuição das forças de origem magnética nos dentes da estrutura do estator. Estas forças magnéticas serão transferidas à malha mecânica para o cálculo das vibrações.

No capítulo VIII, a teoria que dá embasamento ao Método de Superposição Modal é introduzida e esta técnica é utilizada para calcular a resposta forçada dos motores em estudo, as fontes de excitação serão as forças magnéticas obtidas no capítulo VII, sendo que os amortecimentos obtidos experimentalmente no capítulo V serão introduzidos no cálculo, a fim de possibilitar um estudo quantitativo das vibrações de origem magnética nestes motores. Através da comparação entre as harmônicas das forças magnéticas, modos de vibração e espectros das vibrações calculadas o comportamento vibratório das estruturas é analisado. A seguir, as vibrações calculadas são comparadas às vibrações

medidas para fins de validação. Finalmente neste capítulo, são feitos estudos visando a redução das vibrações de origem magnética emitidas pelo MRC.

## CAPÍTULO II

### DEFINIÇÃO DA METODOLOGIA DE MODELAGEM E EXPERIMENTAÇÃO

#### II.1 Geração de Ruído de Origem Magnética nas Máquinas Elétricas

As forças radiais devido ao campo magnético do entreferro são as maiores fontes de vibração de origem magnética e de ruído em máquinas elétricas [34]. Se o fluxo fosse distribuído senoidalmente, e se não houvessem pulsações de fluxo, a onda de força magnética em torno da periferia seria uma curva do tipo  $\sin^2 P_x$ , ou seja, para cada pólo magnético haveriam dois pólos de força. Na realidade, porém a distribuição espacial de força magnetomotriz e de densidade de fluxo contém harmônicas de enrolamento, e de ranhura, determinadas pelo tipo de enrolamento, número e geometria das ranhuras, bem como de saturação no ferro [14], dando origem a pulsações de alta frequência nas forças magnéticas radiais [34]. Estas pulsações podem ser vistas como uma série de ondas de força senoidais ou harmônicas espaciais (“modos”), girando a diferentes velocidades, cada uma com o dobro de pólos que o campo magnético que lhe deu origem. Idealmente, as  $m$  harmônicas espaciais de força magnética podem ser representados como na figura 2.1, juntamente com o tipo de deformação que provocam.

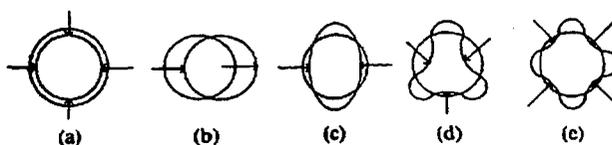


Fig. 2.1 - Harmônicas espaciais de força magnética: (a)  $m=0$ ; (b)  $m=1$ ; (c)  $m=2$ ; (d)  $m=3$ ; (e)  $m=4$ .

Sob o efeito destas forças radiais, o núcleo do estator e a carcaça vibram, da mesma maneira que um arco de aço, ou um sino cilíndrico, respondem a um golpe. Se o campo magnético que produz a força possui dois pólos haverão dois pontos de tração

máxima e opostas, e dois pontos intermediários de força nula (Fig. 2.1(c)). O estator, portanto, será deformado elipticamente. Se o modo e frequência de uma determinada onda de força magnética coincidir com o modo e frequência natural do estator (condição de ressonância) mesmo uma pequena força de excitação pode produzir vibrações muito elevadas [16].

## II.2 Caracterização das Forças Eletromagnéticas

As forças eletromagnéticas que produzem deformações periódicas em certas partes das máquinas, se dividem em três tipos [17]:

### II.2.1 Forças de Laplace

As forças de Laplace agem sobre um condutor percorrido por corrente elétrica e imerso num campo magnético. Como as correntes nas fases variam no tempo, as forças nos enrolamentos também variam, resultando em vibrações nos enrolamentos. O ruído acústico é produzido pela transmissão das vibrações das bobinas para as partes ferromagnéticas. A expressão geral para determinar as forças de Laplace é:

$$\vec{F}_C = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

onde:

$\vec{F}_C$  - Densidade volumétrica de força.

$\vec{J}$  - Densidade superficial de corrente.

$\vec{B}$  - Indução magnética.

### II.2.2 Forças Magnetostritivas

As forças magnetostritivas estão presentes em todos os materiais magnéticos compressíveis, sobre a influência de um campo magnético. Estas forças surgem devido a tendência do circuito magnético de adotar uma configuração de mínima energia. Especificamente, estas forças agem para comprimir o material e assim aumentar sua permeabilidade [3].

Nas máquinas clássicas, as chapas de ferro-silício utilizadas são consideradas fracamente magnetostritivas. Estas forças são descritas matematicamente por:

$$\vec{F}_{\text{mat}} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{H} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \right) \quad (2.2)$$

onde:

$\vec{F}_{\text{mat}}$  - Densidade volumétrica de força magnetostriativa.

$\vec{H}$  - Campo indutor.

$\mu$  - Permeabilidade magnética.

$\rho$  - Densidade volumétrica do material.

### II.2.3 Forças Magnéticas

As forças magnéticas agem sobre as partes ferromagnéticas imersas num campo magnético. São produzidas devido a um gradiente de permeabilidade. As vibrações induzidas estão ligadas à uma variação periódica ou impulsiva, provocada pela excitação elétrica e as características geométricas da máquina. São descritas matematicamente por:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = -\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{H} \vec{\nabla} \mu \quad (2.3)$$

onde:

$\vec{F}_{\text{mag}}$  - Densidade volumétrica de força magnética.

$\vec{H}$  - Campo indutor

$\mu$  - Permeabilidade magnética.

### II.3 Modelos de Acoplamento Magnetomecânicos

A escolha do modelo de acoplamento dentro do estudo dos fenômenos acoplados (eletromagnéticos, magnetomecânicos, mecânico-acústicos, etc...), é função do nível de interação entre as propriedades físicas dos fenômenos em questão, e da relação entre as constantes de tempo.

De uma maneira geral pode-se classificar os modelos de acoplamento em três tipos [7]:

- acoplamento unidirecional, também chamado de modelo não acoplado.
- acoplamento bidirecional.

- acoplamento interativo.

Todos estes modelos podem ser aplicados dentro do estudo dos fenômenos magnetomecânicos. Os fenômenos de acoplamento magnetomecânicos se manifestam por [7]:

- ação de forças magnéticas sobre a estrutura do material em questão (deformações elásticas ou plásticas).
- influência das deformações mecânicas sobre as características magnéticas.
- variação do módulo de Young<sup>1</sup> em função do campo magnético aplicado.

### II.3.1 Acoplamento Unidirecional

O acoplamento unidirecional é válido quando as propriedades magnéticas e elásticas são fracamente acopladas, sendo suficiente calcular separadamente, e apenas uma vez, a distribuição do campo magnético, das forças magnéticas e as deformações induzidas. No presente caso, as deformações são muito fracas, de forma que o campo magnético não é afetado. Este modelo se adapta bem ao estudo das vibrações de origem magnética nas estruturas ferromagnéticas como motores e transformadores. A figura 2.2 mostra o diagrama deste modelo.

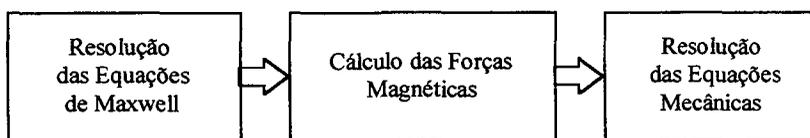


Fig. 2.2 - Diagrama do modelo de acoplamento unidirecional. Método de resolução diferenciada.

### II.3.2 Acoplamento Bidirecional

Neste caso, os problemas magnéticos e mecânicos são resolvidos separadamente (como no acoplamento unidirecional) mas após várias iterações, com o objetivo de levar em conta a variação do campo magnético em função do deslocamento e vice-versa. O processo iterativo é suspenso quando uma das grandezas (campo magnético ou deslocamento) não varia mais. Este tipo de acoplamento é aceitável no caso de cálculo dos deslocamentos sólidos (deformações da armadura móvel de um eletroímã, por

<sup>1</sup> O módulo de Young ( $E$ ), ou módulo de elasticidade, de um material é definido pela inclinação da curva de tensão ( $\sigma$ ) versus deformação ( $\epsilon$ ) na sua região linear. Esta relação é também conhecida como lei de Hooke,  $\sigma = E\epsilon$ .

exemplo). Ele se aplica bem aos problemas estáticos e dinâmicos. A figura 2.3 mostra o diagrama deste modelo.

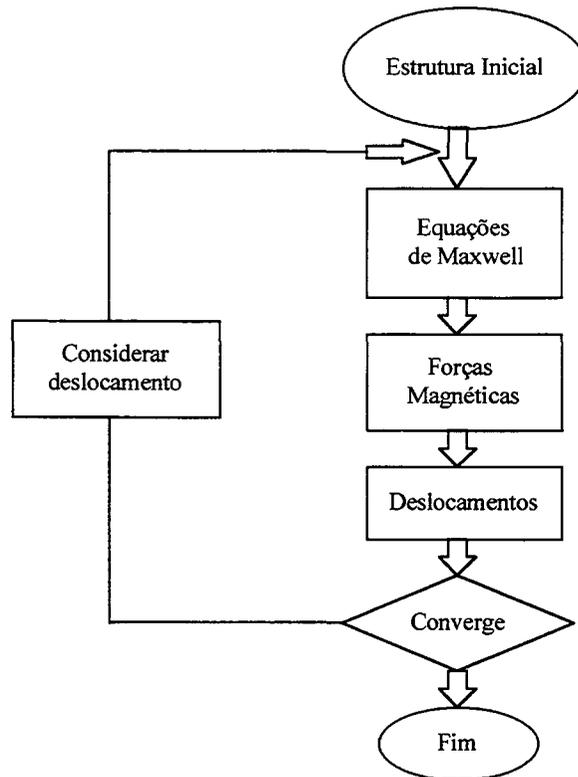


Fig. 2.3 - Diagrama do modelo de acoplamento bidirecional. Método de resolução sucessiva.

### II.3.3 Acoplamento Interativo (método de resolução simultânea)

O modelo de acoplamento interativo consiste em determinar, simultaneamente, a distribuição do campo magnético e do campo de deslocamento. Este modelo se justifica quando há uma interação importante entre os fenômenos magnéticos e mecânicos. Este é o caso nas aplicações onde os campos magnéticos são muito elevados, nos materiais fortemente magnetostritivos, ou para os problemas de grandes deformações.

## II.4 Metodologia

### II.4.1 Hipóteses

As principais hipóteses adotadas dentro do nosso estudo sobre as vibrações de origem magnética nos motores de indução de gaiola e de relutância chaveado, são:

1. As forças de Laplace e as forças magnetostritivas são desprezadas.

2. Os meios ferromagnéticos são supostos conservativos, isto significa que as perdas no ferro ( correntes de Foucault e a histerese) são desprezadas. Considera-se portanto, que a energia eletromagnética é totalmente transformada em energia mecânica.
3. As chapas ferromagnéticas de ambos os motores são consideradas fracamente magnetostritivas, assim o acoplamento unidirecional pode ser utilizado.
4. As deformações das estruturas são consideradas elásticas.
5. Considera-se apenas as vibrações forçadas em regime permanente.
6. As forças variam senoidalmente (harmonicamente) no tempo.
7. É assumido que as vibrações do rotor são desprezíveis, já que as primeiras freqüências naturais de vibração do rotor são elevadas. Assim as medições são feitas na superfície externa do estator.
8. O modelo modal adotado é do tipo viscoso.
9. Todos os modelos relativos ao problema eletromagnético são bidimensionais.

#### *II.4.2 Método*

Baseado nas hipóteses citadas no item anterior, a análise do comportamento dinâmico da estrutura mecânica será feita em regime harmônico. Neste tipo de análise a resposta dinâmica em regime permanente de uma estrutura linear é obtida a partir de forças que variam senoidalmente (harmonicamente) no tempo. A fim de realizar esta análise de vibrações nos motores de relutância chaveado e nos motores de indução de gaiola seguiremos as seguintes etapas:

a) Resolução do problema da estrutura eletromagnética variável no tempo, para obtenção das correntes elétricas nas partes condutoras e a distribuição das forças magnéticas por meio do método do tensor de Maxwell:

1) No caso do MIG serão obtidas as correntes nas fases e as correntes induzidas na gaiola utilizando a técnica de resolução simultânea de campo e equações de circuito [6]. A seguir, serão obtidas as forças magnéticas ao longo do tempo a partir das correntes obtidas anteriormente, portanto as barras que compõe a gaiola não serão mais

vistas como condutores e sim como fontes de corrente. Esta metodologia inédita foi desenvolvida especialmente para o MIG.

2) No caso do MRC as correntes nas fases serão obtidas utilizando a técnica de acoplamento fraco, que consiste na obtenção do fluxo concatenado nos enrolamentos em função da posição, das correntes estimadas e da saturação, por meio de uma sucessão de cálculos de campo estáticos, utilizando o método de elementos finitos. Com estes parâmetros, as equações diferenciais de tensão associadas com os enrolamentos da máquina e o circuito do inversor são resolvidos por meio de integração numérica.

b) Análise de Fourier para obter as componentes harmônicas das forças magnéticas. Estas componentes, em termos de módulo e fase, serão transferidas ao modelo mecânico na etapa d.

c) Resolução do problema mecânico, no domínio da frequência, para obter a resposta vibratória da máquina em regime livre, ou seja, as frequências e modos naturais de vibração da estrutura são obtidos.

d) Resolução do problema mecânico, no domínio da frequência, para obter a resposta vibratória da máquina em regime forçado, ou seja, com o espectro das forças magnéticas, calculam-se as vibrações e deformações forçadas da estrutura da máquina. O espectro das forças magnéticas é comparado ao espectro das acelerações mecânicas (vibrações). Através da análise destes espectros é possível determinar quais componentes harmônicas das forças magnéticas excita um determinado modo de vibração. Nesta resolução será utilizado o *Método de Superposição Modal*, que resolve a equação dinâmica da estrutura mecânica considerando a matriz de amortecimento. Os amortecimentos são medidos através da *Técnica de Análise Modal Experimental* e inseridos no modelo mecânico.

## II.5 Tipos de Ensaio Práticos

A fim de validar os resultados do cálculos serão realizados ensaios práticos, utilizando diferentes técnicas de medição dependendo da grandeza a ser medida, tais como:

### II.5.1 Medição das Formas de Onda das Forças Magnéticas [16]

Para medição das formas de onda das forças magnéticas será utilizado um método que prevê a colocação de bobinas de detecção de fluxo ao longo de todo o estator da máquina, uma bobina para cada dente do estator. Na figura 2.4 apresentamos um diagrama representativo da técnica.

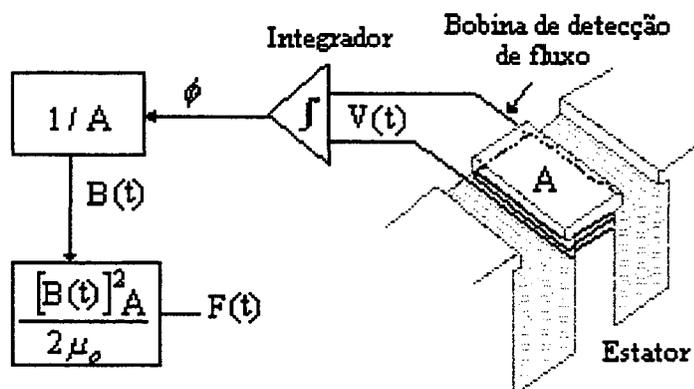


Fig. 2.4 - Diagrama da técnica de medição das ondas de força magnética.

A tensão de saída da bobina de detecção de fluxo  $i$  é

$$V_i(t) = \frac{d\phi_i}{dt} \quad (2.4)$$

A densidade de fluxo magnético do dente de número  $i$  é dada por

$$B_i(t) = \frac{\phi_i}{A} = \frac{\int V_i(t) dt}{A} \quad (2.5)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal do dente.

A força magnética agindo sobre o dente  $i$  pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$F_i(t) = \frac{[B_i(t)]^2 A}{2\mu_0} \quad (2.6)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade do ar.

O espectro de Fourier notado como  $F_i(\omega)$ , que corresponde a componente da força magnética para cada frequência, pode ser obtido pela transformada de Fourier de  $F_i(t)$ .

Após a obtenção de todos os  $F_i(\omega)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n_d$ ), as ondas de força magnética podem ser analisadas de acordo com seus modos e frequências por meio de FFT.

### *II.5.2 Medição de Vibrações*

A medição de vibrações é um processo de busca trabalhoso, boas medições só podem ser atingidas, se forem preenchidos alguns requerimentos ligados ao sistema de fixação da estrutura, o sistema de excitação e o sistema de medição.

#### II.5.2.1 Equipamentos para Medição de Vibrações [28]

O sistema de aquisição de dados e de processamento de sinais mudou consideravelmente ao longo da última década e continua a mudar rapidamente como resultado dos avanços dos circuitos integrados e da tecnologia dos computadores. Assim as propriedades específicas de um determinado equipamento variam muito rápido, deste modo um equipamento genérico será considerado aqui. A medição de vibrações geralmente requer vários equipamentos. Os equipamentos básicos consistem de uma fonte de excitação, chamado de *excitador*, para permitir o conhecimento ou controle da força aplicada sobre a estrutura, um *transdutor* para converter o movimento mecânico da estrutura em uma sinal elétrico, um amplificador condicionador de sinal para casar as características do transdutor com as do sistema digital de aquisição de dados, e um sistema de análise (ou analisador) onde os programas de processamento de sinal e de análise modal estão residentes. Um esquema ilustrativo é mostrado na figura 2.5.

Os excitadores mais usados são o *shaker* (eletromagnético ou eletrohidráulico) e o *martelo de impulso*. O aparelho preferido freqüentemente é o excitador eletromagnético, o qual tem a habilidade, quando propriamente dimensionado, de fornecer sinais de entrada largos que resultam em respostas fáceis de medir. Também, a saída é controlada eletronicamente, algumas vezes usando realimentação da força aplicada. O sinal de excitação, o qual pode ser adaptado à estrutura em teste, pode ser senoidal, randômico, ou outro sinal apropriado. A varredura senoidal consiste na aplicação de uma força harmônica  $f_i$  de amplitude constante com uma variedade de diferentes frequências, partindo de valores pequenos e chegando a valores grandes, cobrindo a faixa de frequências de interesse. A cada incremento no valor da frequência de excitação, espera-se que estrutura chegue ao regime permanente antes de medir a amplitude e a fase da

resposta. O shaker do tipo eletromagnético consiste basicamente de um motor elétrico linear composto basicamente de enrolamentos em torno de um eixo, a aplicação de corrente alternada às suas bobinas causa uma força que movimenta o eixo axialmente, o qual transmite a força para a estrutura.

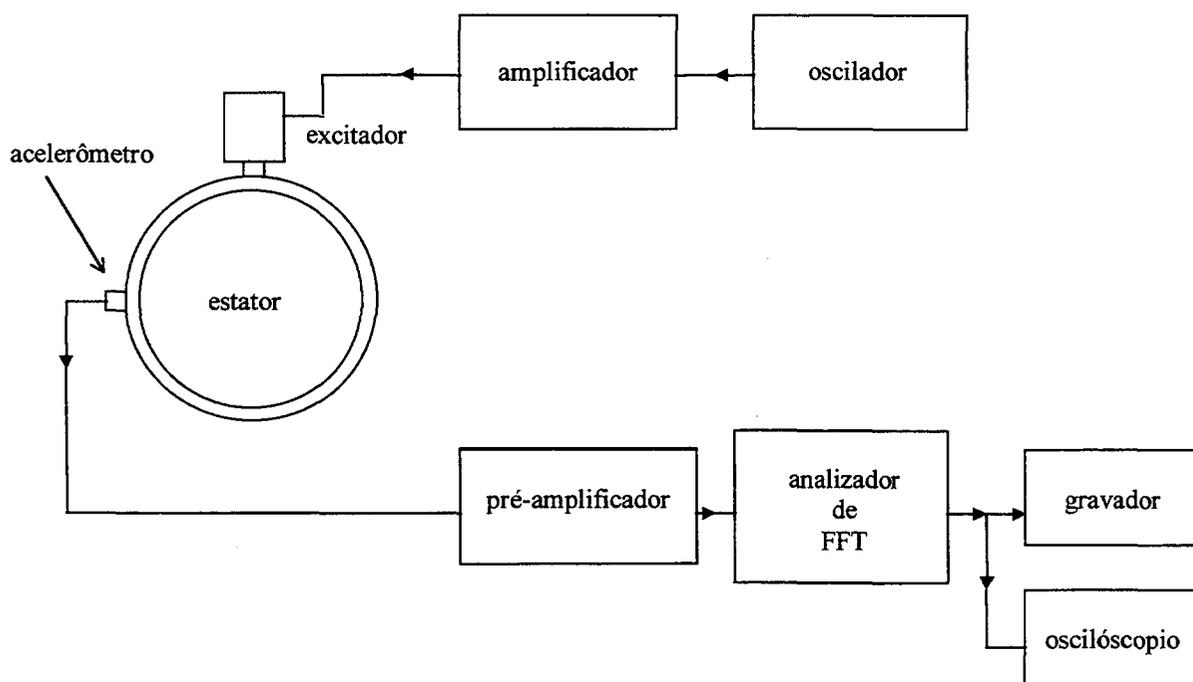


Fig. 2.5 - Esquema de medição de vibrações.

Já que os shakers são fixados à estrutura de teste e como estes têm massa significativa, deve se tomar cuidado na escolha das dimensões do shaker e no método de fixação de forma a minimizar o efeito do shaker. O shaker e sua fixação pode adicionar massa à estrutura sob teste. Este problema pode ser minimizado através da fixação do shaker à estrutura por meio de um *stinger*. O *stinger* consiste de uma barra (de aço ou nylon) fina e curta que serve para isolar o shaker da estrutura, reduzindo a massa adicionada ao sistema, e fazendo com que a força seja transmitida axialmente, controlando a direção da força aplicada mais precisamente.

Os transdutores utilizados para medir a resposta da estrutura são conhecidos como *acelerômetros*, e consistem de duas massas, separadas por meio de um material piezoelétrico, sendo que uma é fixada à estrutura. O material piezoelétrico atua como

uma mola rígida. Isto faz com que o acelerômetro tenha uma frequência de ressonância. A máxima frequência de ressonância mensurável é usualmente uma fração da frequência de ressonância do acelerômetro.

A impedância de saída de muitos transdutores não é adaptada à entrada dos equipamentos de análise de sinal. Assim os condicionadores de sinal, os quais podem ser amplificadores de corrente ou de tensão, casam e freqüentemente amplificam os sinais antes de serem analisados. É importante também que os sinais sejam propriamente calibrados em termos de amplitude e fase ao longo da faixa de freqüências de interesse.

Uma vez condicionados, os sinais são levados ao analisador que executa o processamento do sinal. Há muitos analisadores em uso. O tipo que tornou-se standard é chamado de analisador de FFT (Fast Fourier Transform). Basicamente, o analisador de FFT recebe sinais analógicos de tensão que representam aceleração (força, velocidade, deslocamento ou deformação) de um amplificador. Este sinal é filtrado e digitalizado para computação. O espectro de freqüências discreto dos sinais e a correlação entre a entrada e várias saídas são calculados. O sinais analisados podem então ser manipulados das mais variadas formas para obtenção das freqüências naturais, razões de amortecimento e modos.

#### II.5.2.2 Determinação Experimental das Acelerações através de Experimentos Rotacionais

A medição das acelerações é feita em diferentes pontos da carcaça do motor. O motor é posto a operar em carga, geralmente uma máquina CC. A velocidade do motor é variada de um valor mínimo a um valor máximo. O espectro de acelerações para cada velocidade é obtido e comparado com os das forças magnéticas para análise. Na figura 2.6 apresentamos um esquema representativo da técnica.

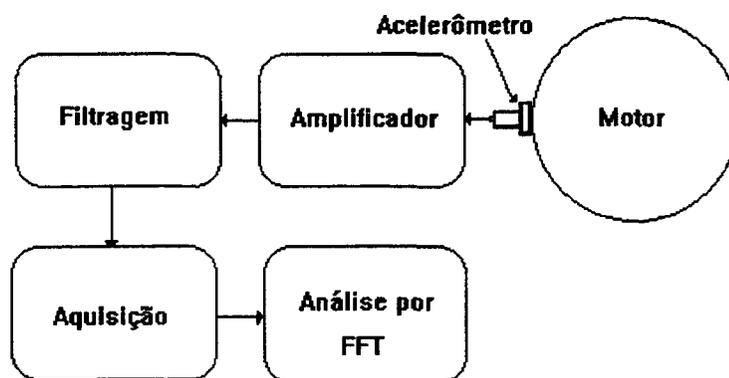


Fig. 2.6 - Esquema representativo da técnica de medição de vibrações.

## II.6 Conclusão

Neste capítulo foi definida a metodologia a ser aplicada no decorrer do trabalho, para modelagem e ensaio das vibrações de origem magnética nas máquinas elétricas rotativas.

## CAPÍTULO III

### MODELAGEM ELETROMAGNÉTICA

#### III.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os modelos empregados na simulação dos Motores de Indução de Gaiola e de Relutância Chaveado, bem como o método de cálculo das forças magnéticas.

Normalmente a estrutura eletromagnética está ligada a um circuito exterior. A escolha do método de acoplamento entre a estrutura eletromagnética e o circuito exterior será função do tipo de motor e dos fenômenos presentes no seu funcionamento, bem como de um compromisso entre a exatidão dos resultados e o tempo gasto para obtê-los.

Neste trabalho são utilizadas duas técnicas de modelagem de máquinas elétricas. Uma das técnicas utiliza elementos finitos para resolução simultânea das equações de campo com o circuito conversor (acoplamento forte) e a outra utiliza um modelo baseado em circuitos elétricos que descreve o conversor, no qual os parâmetros magnéticos da máquina são obtidos por elementos finitos (acoplamento fraco).

No caso do MRC a técnica de acoplamento forte, dá bons resultados, mas o tempo de cálculo é longo. Já a técnica de acoplamento fraco apresenta tempo de cálculo menor e a comparação entre os resultados obtidos mostra uma boa concordância. A técnica de acoplamento fraco apresenta outra vantagem: se os ângulos de chaveamento tiverem de ser variados a fim de obter melhor desempenho do motor não há necessidade de recalcular as equações de campo para obter as formas de onda de corrente, isto é extremamente vantajoso quando se deseja estudar as vibrações de origem magnética.

Para o MIG somente a técnica de acoplamento forte pode ser utilizada, em função da existência de circuito elétrico no rotor e dos fenômenos de indução eletromagnética decorrentes.

### III.2 Acoplamento Forte das Equações do Campo Eletromagnético com as Equações do Circuito Exterior.

Nesta técnica a interação entre os circuitos elétrico magnético e elétrico é levada em conta pela adição das equações do circuito externo a matriz de elementos finitos [27].

#### III.2.1 Caso de uma Máquina Elétrica Genérica

Usando o potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ , o campo magnético na máquina pode ser escrito como:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \frac{1}{\mu_m} \mathbf{B}_m \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética,  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente,  $\sigma$  é a condutividade elétrica. A densidade de corrente  $\mathbf{J}$  nos enrolamentos da máquina é geralmente desconhecida, mas pode ser relacionada à tensão nos enrolamentos  $\mathbf{v}(\mathbf{t})$  por meio das equações do circuito elétrico:

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}\mathbf{i}(\mathbf{t}) + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}(\mathbf{t})}{dt} + \mathbf{N}\phi(\mathbf{t}) \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{v}(\mathbf{t})$  é o vetor da tensão,  $\mathbf{R}$  é a matriz das resistências CC dos enrolamentos,  $\mathbf{L}$  é a matriz que contém as indutâncias de cabeças de bobinas,  $\mathbf{N}\phi(\mathbf{t})$  é a matriz de enlace de fluxo e  $\mathbf{i}(\mathbf{t})$  é o vetor corrente no enrolamento. O fluxo magnético  $\phi(\mathbf{t})$  é relacionado ao potencial vetor magnético  $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ .

A equação (3.1) é discretizada por meio do método de elementos finitos bidimensional, e as derivadas no tempo das equações (3.1) e (3.2) são discretizadas com o algoritmo  $\beta$  [26]. Um grande sistema matricial de equações é então obtido:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc|c} \beta \mathbf{M}(\mathbf{t}) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N} & -\beta \mathbf{P} & \mathbf{A}(\mathbf{t}) \\ \hline \frac{1}{\Delta t} \lambda \mathbf{Q} & \beta \mathbf{R} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L} & \mathbf{i}(\mathbf{t}) \end{array} \right| = \\ = \left| \begin{array}{cc|c} (\beta - 1) \mathbf{M}(\mathbf{t} - \Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N} & (1 - \beta) \mathbf{P} & \mathbf{A}(\mathbf{t} - \Delta t) \\ \hline \frac{1}{\Delta t} \lambda \mathbf{Q} & (\beta - 1) \mathbf{R} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L} & \mathbf{i}(\mathbf{t} - \Delta t) \end{array} \right| + \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \hline -\beta \mathbf{Cv}(t) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline (\beta-1)\mathbf{Cv}(t-\Delta t) \end{array} \right| \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  são as respectivas matrizes, permeabilidade magnética e condutividade elétrica.  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são as matrizes que relacionam as equações do campo e as equações do circuito elétrico.  $\mathbf{0}$  é o vetor matriz nula,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{v}$  são os termos fonte ( devido aos ímãs permanentes e tensões aplicadas).  $\Delta(t)$  é o passo de cálculo,  $\lambda$  é um fator que depende da configuração dos enrolamentos (série ou paralelo). O sistema inteiro é resolvido passo a passo com respeito ao tempo, e as incógnitas  $\mathbf{A}(t)$  e  $\mathbf{i}(t)$  podem ser calculadas.

O movimento do rotor é levado em conta por meio da técnica de Banda de Movimento com elementos quadrilaterais especiais no entreferro [25].

### III.2.2 Caso Específico do MIG

Para o MIG não há ímãs permanentes. O sistema de equações 3.3 se reduz então a:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{c} \beta \mathbf{M}(t) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N} \\ \hline \frac{1}{\Delta t} \lambda \mathbf{Q} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} -\beta \mathbf{P} \\ \hline \beta \mathbf{R} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}(t) \\ \hline \mathbf{I}_r(t) \end{array} \right| = \\ & \left| \begin{array}{c} (\beta-1)\mathbf{M}(t-\Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N} \\ \hline \frac{1}{\Delta t} \lambda \mathbf{Q} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (1-\beta)\mathbf{P} \\ \hline (\beta-1)\mathbf{R} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}(t-\Delta t) \\ \hline \mathbf{I}_r(t-\Delta t) \end{array} \right| + \\ & \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline -\beta \mathbf{CV}_{\text{ext}}(t) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline (\beta-1)\mathbf{CV}_{\text{ext}}(t-\Delta t) \end{array} \right| \quad (3.4) \end{aligned}$$

As densidades de corrente induzidas na gaiola, serão calculadas passo a passo no tempo, pela expressão abaixo:

$$\mathbf{J}_i = \sigma_c \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\sigma_c [\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t - \Delta t)]}{\Delta t} \quad (3.5)$$

onde  $\sigma_c$  é a condutividade corrigida das barras para levar em conta a resistência dos anéis da gaiola. As barras da gaiola são consideradas perfeitamente curto-circuitadas pelos anéis.

Nas motores de indução os enrolamentos são geralmente ligados em três tipos principais de conexão:

a) Conexão em estrela com fio neutro

Neste caso as tensões  $V_{ext}$  são as tensões fase-neutro a equação (3.4) permite a obtenção direta das correntes nas fases.

b) Conexão em polígono

Para esta conexão, as tensões entre fases  $V_{extL}$ , são aplicadas sobre os enrolamentos. A equação (3.4) permite o cálculo direto das correntes  $I_f$  de cada fase escrevendo  $V_{extL} = V_{ext}$ . As correntes  $I_j$  podem ser obtidas apartir de:

$$I_j = I_{f_{j-1}} - I_{f_j} \quad (3.6)$$

c) Ligação em estrela sem fio neutro

Uma vez que os n enrolamentos são ligados em estrela sem fio neutro, somente n-1 correntes são linearmente independentes. E as tensões de alimentação são as tensões de linha  $V_{extL}$ . Denominando  $i^*$  o vetor das (n-1) correntes independentes. A relação entre  $i^*$  e  $I_f$  para um enrolamento trifásico (n=3) pode ser posta sob a forma:

$$I_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} i^* = K i^* \quad (3.7)$$

E a relação entre as tensões de linha  $V_{extL}$  e as tensões de fase  $V_{ext}$  é:

$$V_{ext} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} V_{extL} = C V_{extL} \quad (3.8)$$

A substituição das expressões em 3.7 e 3.8 em 3.4 resulta no sistema de equações específico para esta conexão em estrela, mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{c|c} \beta \mathbf{M}(t) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N} & -\beta \mathbf{PK} \\ \hline \mathbf{K}^T \frac{1}{\Delta t} \lambda \mathbf{Q} & \mathbf{K}^T [\beta \mathbf{R} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L}] \mathbf{K} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{i}^*(t) \end{array} \right| = \\
& \left| \begin{array}{c|c} (\beta - 1) \mathbf{M}(t - \Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N} & (1 - \beta) \mathbf{PK} \\ \hline \mathbf{K}^T \frac{1}{\Delta t} \lambda \mathbf{Q} & \mathbf{K}^T [(\beta - 1) \mathbf{R} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L}] \mathbf{K} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}(t - \Delta t) \\ \mathbf{i}^*(t - \Delta t) \end{array} \right| + \\
& \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline -\beta \mathbf{CV}_{\text{ext}}(t) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline (\beta - 1) \mathbf{CV}_{\text{ext}}(t - \Delta t) \end{array} \right| \quad (3.9)
\end{aligned}$$

As correntes  $i_n$  podem ser calculadas pela expressão abaixo:

$$i_n = (-1) \sum_{k=1}^{n-1} i_k^* \quad (3.10)$$

### III.2.3 Caso Específico do MRC

Para o MRC não há imãs permanentes. O sistema de equações 3.3 se reduz então a:

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{c|c} \beta \mathbf{M}(t) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N} & -\beta \mathbf{P} \\ \hline \frac{1}{\Delta t} \lambda \mathbf{Q} & \beta \mathbf{R} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{array} \right| = \\
& \left| \begin{array}{c|c} (\beta - 1) \mathbf{M}(t - \Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N} & (1 - \beta) \mathbf{P} \\ \hline \frac{1}{\Delta t} \lambda \mathbf{Q} & (\beta - 1) \mathbf{R} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{L} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}(t - \Delta t) \\ \mathbf{i}(t - \Delta t) \end{array} \right| + \\
& \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline -\beta \mathbf{CV}_{\text{ext}}(t) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline (\beta - 1) \mathbf{CV}_{\text{ext}}(t - \Delta t) \end{array} \right| \quad (3.11)
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{C}$  é uma matriz identidade, pois no MRC não há conexão entre as fases.  $\mathbf{V}_{\text{ext}}$  é o vetor das tensões aplicadas a cada fase. As tensões aplicadas a cada fase assumirão os valores mostrados na tabela verdade abaixo, em função do estado das chaves de potência do conversor, cujo o esquema elétrico é representado na figura 3.1.

Estado	Q1	Q2	D1	D2	V <sub>ext</sub>
A	1	1	0	0	V
B	1	0	0	1	0
C	0	1	1	0	0
D	0	0	1	1	-V

Tab. 3.1 - Tabela verdade dos estado das chaves do conversor

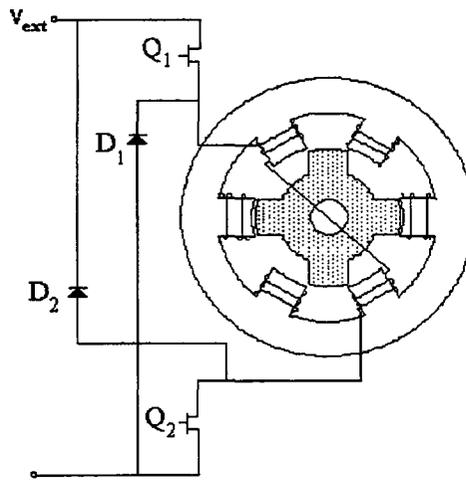


Fig. 3.1 - Motor de Relutância Chaveado de 6/4 pólos ligado a uma das pernas do seu conversor de potência.

### III.3 Acoplamento Fraco das Equações do Campo Eletromagnético com as Equações do Circuito Exterior

Esta técnica utiliza um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem para representar o conjunto conversor-motor [22].

A equação diferencial que descreve o circuito conversor é:

$$V_{ext} = Ri + \frac{d\phi(\theta, i)}{dt} \tag{3.12}$$

onde V<sub>ext</sub> assumirá os valores da tabela 3.1, em função do estado das chaves de potência do conversor.

As equações mecânicas são:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \{T(\theta, i) - T_L\} \quad (3.13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (3.14)$$

Sendo que os valores de  $\varphi(\theta, i)$ , que descrevem o comportamento magnético do motor, são obtidos por meio do método de elementos finitos bidimensional, originando as curvas da figura 3.2.

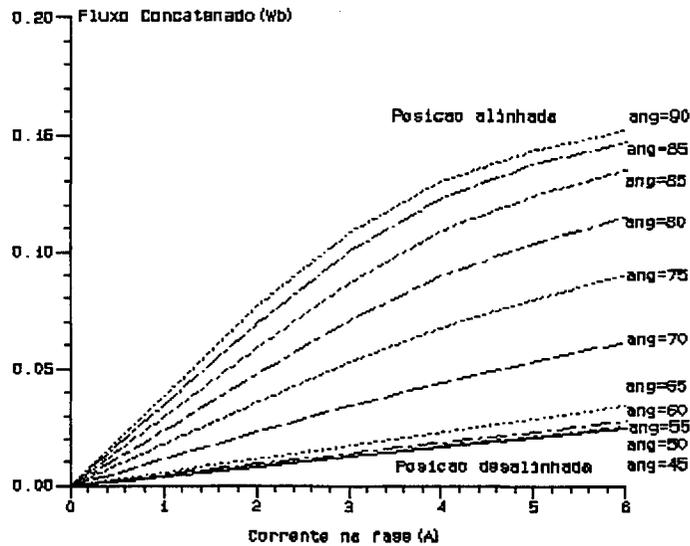


Fig. 3.2 - Curvas de Magnetização

O sistema de equações é então resolvido por meio de integração numérica. No final de cada passo de integração,  $\theta$  e  $\varphi$  são ambos conhecidos e a corrente  $i$  pode ser determinada via interpolação (utilizando a segunda fórmula de Interpolação de Newton [23] ) a partir da curva de magnetização para cada ângulo do rotor. A ordem de dependência é: tensão  $\rightarrow$  fluxo concatenado  $\rightarrow$  corrente.

### III.4 Cálculo das Forças Magnéticas

A força global exercida sobre um corpo magnético pode ser calculada pelo método do tensor de Maxwell [19]:

$$\vec{F}_d = \int_S \vec{T} dS = \frac{1}{\mu_0} \int_S [(\vec{n} \cdot \vec{B})\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{n}(\vec{B}^2)] dS \quad (3.15)$$

onde  $\vec{T}$  é um vetor equivalente a uma densidade de força avaliada sobre uma superfície arbitrária S que passa pelo ar envolvendo o corpo considerado e  $\vec{n}$  é um vetor unitário normal a superfície.

As componentes radiais e tangenciais da densidade de força para um ponto qualquer da superfície podem ser determinada pelas relações:

$$\begin{cases} dF_R = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} B_R^2 - \mu H_T^2 \right) dS \\ dF_T = H_T B_R dS \end{cases} \quad (3.16)$$

A integração destas densidades de força sobre uma superfície envolvendo parcialmente um dente da máquina elétrica permite o cálculo da força sobre este com boa precisão [20]. Outro fato a ressaltar é que no cálculo das vibrações se suporá que a força sobre um dente se concentra em um ponto da extremidade inferior do dente, como mostra a figura 3.3.

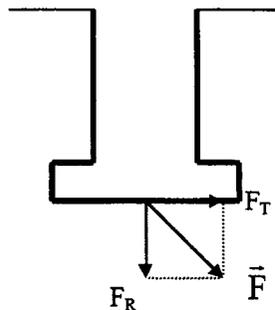


Fig. 3.3 - Ponto de aplicação da força.

### III.5 Transferência das Forças Magnéticas para o Modelo Estrutural.

Após o cálculo das componentes radiais e tangenciais das forças magnéticas no domínio de tempo, o passo seguinte é passagem destas componentes para o domínio da frequência, através da Análise de Fourier obtendo-se para cada componente de força,  $n$  harmônicas, que possuem obviamente módulo e fase. A seguir, localiza-se na malha de elementos finitos do modelo mecânico os nós centrais da extremidade inferior de cada dente e informa-se os carregamentos, ou seja, módulo e a fase das componentes radiais e tangenciais de força. A figura 3.4 mostra a malha de elementos finitos estrutural e os carregamentos em termos de componentes cartesianas referentes a uma determinada harmônica de força aplicados no centro da face inferior de cada dente.

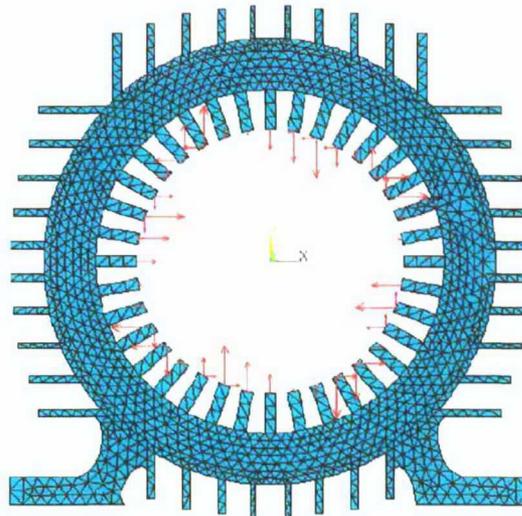


Fig. 3.4 - Malha de elementos finitos estrutural com os carregamentos.

### III.6 Conclusão

Este capítulo tratou da modelagem do acoplamento das equações do campo eletromagnético com as equações de circuito, do método de cálculo das forças magnéticas locais e da transferência dessas forças à malha de elementos finitos do modelo estrutural.

A resolução dos modelos eletromagnéticos é baseada sobre a aplicação do método de elementos finitos dentro da hipótese bidimensional.

## CAPÍTULO IV

### MODELAGEM MECÂNICA

#### IV.1. Introdução

Este capítulo é dedicado a modelagem mecânica, que acopla as forças magnéticas obtidas através do cálculo de campos eletromagnéticos às vibrações.

Para isto, serão deduzidas as equações da elasticidade e da dinâmica. As equações da elasticidade permitem calcular os deslocamentos a partir das forças exercidas sobre a estrutura. As equações da dinâmica por sua vez são usadas para calcular as acelerações na estrutura mecânica quando esta é submetida à forças magnéticas variáveis em relação ao tempo.

Os programas utilizados nesta trabalho, para a resolução numérica das equações da dinâmica, ANSYS e EFMFP (desenvolvido no LEEI de Toulouse, sobre a plataforma do EFCAD) são baseados nestas equações.

#### IV.2. Equações da elasticidade [20]

##### IV.2.1. Relação deslocamento-deformação

Seja  $\bar{d}$  o vetor deslocamento em um ponto do material. A deformação local sofrida pelo material neste ponto é definida por um vetor coluna  $[e]$ , tal que:

$$[e]^T = [e_{xx} \quad e_{yy} \quad e_{zz} \quad 2e_{xy} \quad 2e_{yz} \quad 2e_{zx}] \quad (4.1)$$

onde os componentes deste vetor estão ligados aos deslocamentos por uma lei geométrica que traduz a taxa de deslocamento e que é expressa da seguinte forma:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2)$$

Nesta expressão  $x_i, x_j$  representam as coordenadas espaciais  $x, y$  e  $z$  e  $d_i, d_j$  as componentes do vetor deslocamento. Esta relação pode ser escrita na forma matricial como:

$$[e] = [D]_{\text{elas}} \bar{d} \quad (4.3)$$

onde  $[D]_{\text{elas}}$  é o operador diferencial:

$$[D]_{\text{elas}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

#### IV.2.2. Relações constitutivas do material - Lei de Hooke

Para definir a tensão local do material, é introduzido o vetor tensão  $[\sigma]$ , do qual a transposta é:

$$[\sigma]^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}] \quad (4.5)$$

Este vetor é ligado ao vetor deformação pela lei de Hooke:

$$[\sigma] = [C][e] \quad (4.6)$$

onde a matriz  $C$  é expressa sob a forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Os termos  $\lambda$  e  $\mu$  são os coeficientes de Lamé que são dados por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.8)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.9)$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

#### IV.2.3 Equações de Equilíbrio

As diferenças de Tensão entre dois pontos vizinhos gera forças internas. Para obter estas equações de equilíbrio, escrevemos que a resultante das forças volumétricas internas devido as tensões e das forças volumétricas de origem exterior  $\bar{f}_v$  (gravidade, forças magnéticas) é nula:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_{v_x} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_{v_y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_{v_z} = 0 \quad (4.10)$$

Escrevendo na forma condensada, a equação (4.10) temos:

$$[D]_{elas}^T [\sigma] = -\bar{f}_v \quad (4.11)$$

onde  $[D]_{elas}^T$  é a transposta do operador diferencial definido pela relação (4.4).

#### IV.2.4 Condições de contorno do tipo equilíbrio

Quando sobre uma parte ( $S_\sigma$ ) de uma superfície exterior ( $S$ ) do material são exercidas forças superficiais  $\vec{f}_s$  (fig. 4.1), os pontos sobre ( $S_\sigma$ ) estão em equilíbrio, então:

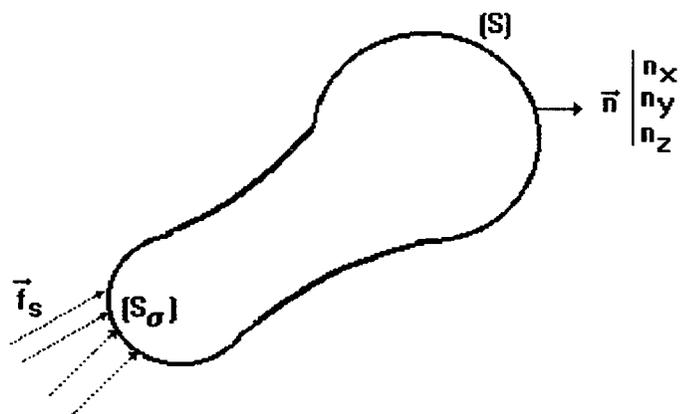


Fig. 4.1 - Condições de contorno do tipo equilíbrio

$$n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{xz} + f_{sx} = 0$$

$$n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz} + f_{sy} = 0$$

$$n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{zy} + n_z \sigma_{zz} + f_{sz} = 0 \tag{4.12}$$

onde  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  representam as componentes normais a superfície ( $S$ ). Esta relação pode ser posta sobre a forma:

$$[N]^T [\sigma] = -\vec{f}_s \tag{4.13}$$

$[N]^T$  é a transposta da matriz:

$$[N]^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \\ n_y & n_x & 0 \\ 0 & n_z & n_x \\ n_z & 0 & n_y \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### IV.2.5 Condições de contorno cinemáticas

Se é imposto um vetor deslocamento  $\bar{d}$  sobre uma parte ( $S_\mu$ ) de uma superfície exterior (S), temos:

$$\bar{d} = \bar{d}_0 \quad \text{sobre } (S_\mu) \quad (4.15)$$

#### IV.2.6 Equações da elasticidade em função do deslocamento somente

As equações acima podem ser escritas somente em função do vetor deslocamento. Substituindo a equação 4.4 na equação 4.6 obtemos:

$$[D]_{\text{elas}}^T [\sigma] = -\bar{f}v \quad (4.16)$$

Substituindo a equação 4.16 em 4.11 e 4.13, temos:

$$[D]_{\text{elas}}^T [C][D]_{\text{elas}} \bar{d} + \bar{f}v = 0 \quad (4.17)$$

$$[N]_{\text{elas}}^T [C][D]_{\text{elas}} \bar{d} + \bar{f}s = 0 \quad \text{sobre } (S_\sigma) \quad (4.18)$$

$$\bar{d} = \bar{d}_0 \quad \text{sobre } (S_\mu)$$

### IV.3 Equação da dinâmica dos meios contínuos

#### IV.3.1 Equação de equilíbrio

Em dinâmica, deve se levar em conta as forças de inércia:

$$\bar{f}_{in} = \rho \frac{\partial^2 \bar{d}}{\partial t^2} \quad (4.19)$$

onde  $\rho$  é a massa volumétrica e  $\frac{\partial^2 \bar{d}}{\partial t^2}$  é a aceleração no ponto considerado.

A equação de equilíbrio se escreve então:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{d}}{\partial t^2} = [D]_{elas}^T [\sigma] + \bar{f}_v \quad (4.20)$$

na qual se juntam as condições de contorno do tipo cinemático:

$$\bar{d}(t) = \bar{d}_0(t) \quad \text{sobre } (S_\mu) \quad (4.21)$$

e do tipo equilíbrio:

$$[N]^T [\sigma] + \bar{f}_s = 0 \quad (4.22)$$

assim como as condições iniciais:

$$\bar{d}(t_0) = \bar{d}_1 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{d}(t_0) = \bar{d}_1 \quad (4.24)$$

Em dinâmica, existe uma formulação energética para resolver estas equações. O fundamento dessa aproximação é o princípio de Hamilton: *o movimento de um sistema elástico conservativo entre dois instantes ( $t_1$  e  $t_2$ ) é efetuado de tal maneira que o funcional  $\int_{t_1}^{t_2} (T - V)$  seja estacionário.* Isto significa que para toda variação do vetor deslocamento:

$$\delta \left( \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \right) = 0 \quad (4.25)$$

onde  $T$  é a energia cinética, dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{\vec{d}} \cdot \dot{\vec{d}}) dv \quad (4.26)$$

e  $V$  é a energia potencial total é igual a:

$$V = \frac{1}{2} \int_V [\sigma][e] dv - \int_{S_\sigma} (\vec{f}_s \cdot \vec{d}) ds - \int_V (\vec{f}_v \cdot \vec{d}) dv \quad (4.27)$$

### IV.3.2 Equação de Lagrange

Na prática procura-se uma solução aproximada da equação (4.20). O método consiste em reduzir o problema contínuo a um problema discreto, para o qual definimos uma aproximação de deslocamentos da maneira seguinte:

$$\vec{d} \left| \begin{array}{l} \mu = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y, z) \cdot a_i(t) \\ \nu = \sum_{j=1}^n \phi_j(x, y, z) \cdot a_j(t) \\ w = \sum_{k=1}^n \phi_k(x, y, z) \cdot a_k(t) \end{array} \right. \quad (4.28)$$

o mesmo para os vetores velocidade:

$$\dot{\vec{d}} \left| \begin{array}{l} \dot{\mu} = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y, z) \cdot \dot{a}_i(t) \\ \dot{\nu} = \sum_{j=1}^n \phi_j(x, y, z) \cdot \dot{a}_j(t) \\ \dot{w} = \sum_{k=1}^n \phi_k(x, y, z) \cdot \dot{a}_k(t) \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Chama-se então Lagrangeano a quantidade:

$$\ell = T - V \quad (4.30)$$

que pode ser expressa em função dos  $a_i$ , dos  $\dot{a}_i$  e do tempo. O princípio de Hamilton se enuncia então assim. Para toda variação de  $\delta a_i$ , temos:

$$\delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \ell(a_i, \dot{a}_i, t) dt \right) = 0 \quad (4.31)$$

Prova-se que isto corresponde a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial \ell}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.32)$$

Seja levando em conta a definição de Lagrangeano:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.33)$$

Estas equações constituem as  $n$  equações de Lagrange do sistema discreto constituído por  $n$  coordenadas genéricas  $a_i$  que são as incógnitas do sistema de equações (4.27).

### IV.3.3 Aproximação pelo método de elementos finitos

Dentro de uma aproximação por elementos finitos, o volume  $V$  é dividido em pequenos domínios  $V_c$  chamados elementos finitos, ilustrado na figura 4.2.

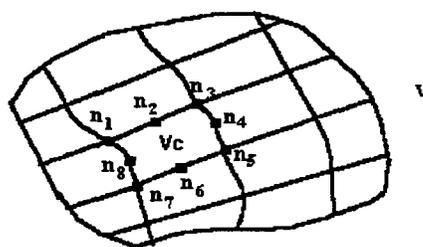


Fig. 4.2 - Discretização em elementos finitos  $V_c$  de um volume  $V$ .

Sobre cada domínio  $V_c$ , define-se uma aproximação do deslocamento que se exprime para cada componente por uma relação de forma:

$$\mu = \sum_{i=1}^n P_i(x, y, z) a_i(t) \quad (4.34)$$

Para dar um senso físico a aproximação, um dos métodos consiste em tomar, como coordenadas genéricas  $a_i(t)$ , os valores exatos de cada componente do vetor deslocamento sobre os  $n$  pontos de Vc chamados de nós (fig. 4.2).

Se o conjunto do domínio  $V$  é constituído de  $N$  nós, há um total de  $3 \times N$  coordenadas genéricas ou incógnitas a determinar, o número de graus de liberdade em cada nó é então igual a 3.

Seja  $[q]$  o vetor coluna contendo estas  $N_T$  incógnitas. É mostrado em [35] que a energia cinética é expressa como uma forma quadrática do vetor velocidade dos nós  $[\dot{q}]$ .

Seja:

$$T = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [M] [\dot{q}] \quad (4.35)$$

onde  $[M]$  é uma matriz simétrica de dimensões  $N_T \times N_T$  chamada matriz global de massas.

Similarmente a energia potencial total pode ser expressa como a soma de uma forma quadrática e uma forma linear dos deslocamentos dos nós:

$$V = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q] - [F] [q] \quad (4.36)$$

onde  $[K]$  é uma matriz simétrica de dimensões  $N_T \times N_T$  chamada de matriz global de rigidez e  $[F]$  é um vetor coluna com  $N_T$  componentes, chamado de vetor de forças equivalentes dos nós.

As equações de Lagrange se escrevem então simplesmente como:

$$[M] [\ddot{q}] + [K] [q] = [F] \quad (4.37)$$

onde  $[\ddot{q}]$  é a derivada segunda de  $[q]$  ou vetor de acelerações dos nós. As forças de atrito serão levadas em conta por equações do tipo:

$$\bar{f}_c = -c \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \quad (4.38)$$

Para levar em conta estas forças no sistema discreto, é suficiente acrescentar ao vetor das forças nos nós, uma força de forma:

$$[F_c] = -[C][\dot{q}] \quad (4.39)$$

A equação dinâmica do sistema discreto será então:

$$[M][\ddot{q}] + [C][\dot{q}] + [K][q] = [F] \quad (4.40)$$

#### IV.4. Resolução das equações da dinâmica

##### IV.4.1 Cálculo da Resposta Natural

O cálculo da resposta natural é usado para extrair as frequências naturais e modos de vibração de uma estrutura. Esta análise é importante como precursora de qualquer análise dinâmica, porque o conhecimento dos modos fundamentais e frequências de uma estrutura ajudam a caracterizar sua resposta dinâmica [45].

Assumindo que não há forças atuando na estrutura, a equação (4.40) é reduzida então a:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (4.41)$$

Nas estruturas de aço os laços de histerese do material, durante um ciclo de deformações, são muito estreitos, em geral. O que significa que o amortecimento interno do material é muito pequeno, e a energia dissipada pode ser negligenciada, em comparação com as energias cinéticas e potencial. O termo relativo ao amortecimento, é então ignorado e a equação 4.41 reduz-se a:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (4.42)$$

Com base no comportamento real da estrutura, ou seja, de que as respostas do sistema são harmônicas, ou seja:

$$\{q\} = \{u\}e^{-i\omega t} \quad (4.43)$$

obtêm-se:

$$\{\ddot{\mathbf{q}}\} = \omega^2 \{\mathbf{u}\} e^{-i\omega t} \quad (4.44)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural a ser determinada. Substituindo os vetores de deslocamento,  $\mathbf{q}$ , e aceleração,  $\ddot{\mathbf{q}}$ , na equação 4.42, obtêm-se:

$$[[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]]\{\mathbf{u}\} = 0 \quad (4.45)$$

onde os autovetores  $\{\mathbf{u}\}$  são as amplitudes das vibrações, que correspondem a cada configuração deformada da estrutura ou modo próprio de vibração.

#### IV.4.2 Cálculo da Resposta Forçada (Método Clássico)

Através do cálculo da resposta forçada da estrutura teremos condições de analisar as vibrações provocadas pelas forças magnéticas. A escolha do método de resolução da equação de equilíbrio (4.40) depende da natureza da excitação e eventualmente do tipo de problema. Neste trabalho estamos interessados no estudo dos regimes permanentes e das excitações periódicas, ou seja nas vibrações das máquinas elétricas em funcionamento normal.

Como as forças magnéticas aplicadas sobre a estrutura das máquinas elétricas são periódicas, elas podem ser expressas da maneira seguinte:

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{F}_k(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \bar{\mathbf{F}}_k e^{j(k\omega t)} \quad (4.46)$$

onde  $\bar{\mathbf{F}}_k$  é o vetor das amplitudes complexas correspondente as  $k$  harmônicas das forças equivalentes aplicadas a cada nó.

Substituindo a equação (4.46) na equação (4.40), e desprezando o amortecimento, obtemos:

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{q}}] + [\mathbf{K}][\mathbf{q}] = \left[ \sum_{k=2}^{\infty} \bar{\mathbf{F}}_k e^{i(k\omega t)} \right] \quad (4.47)$$

Uma vez que as forças magnéticas são decompostas em harmônicas, para as harmônicas das quais se deseja conhecer a resposta mecânica, as soluções são dadas na forma complexa.

A resposta em frequência de uma estrutura mecânica é calculada através da resolução da equação dinâmica :

$$[[K] - (k\omega)^2[M]]\{\bar{x}_k\} = \{\bar{F}_k\} \quad (4.48)$$

Onde:

$K$  é a matriz de rigidez do sistema;

$M$  é a matriz das massas globais do sistema;

$\bar{F}_k$  é o vetor das amplitudes complexas das  $k$  harmônicas das forças equivalentes aplicadas a cada nó;

$\{\bar{x}_k\}$  é o vetor dos deslocamentos dos nós;

$\omega$  é a frequência angular fundamental das forças de excitação representadas pelo vetor  $\{\bar{F}_k\}$ .

A partir da equação 4.48, para cada harmônica  $k$  de  $\bar{F}_k$ , acha-se o vetor dos deslocamentos  $\bar{x}_k$ . As acelerações nos nós são dadas pela relação:

$$[\ddot{\bar{x}}_k] = -\omega^2[\bar{x}_k] \quad (4.49)$$

#### IV.5 Conclusão

Neste capítulo é feita uma revisão das equações da elasticidade e dos métodos de resolução das equações da dinâmica, discretizadas por elementos finitos.

## CAPÍTULO V

### ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

#### V.1 Introdução

A complexidade de um sistema estrutural muitas vezes impossibilita a predição teórica de todos os parâmetros que caracterizam seu modelo matemático, principalmente, no tocante ao conhecimento do nível e da natureza do amortecimento presente nesta estrutura, devido ao fato que uma formulação matemática acurada dos efeitos do amortecimento é muito complexa, já que as forças de amortecimento de uma estrutura não podem ser determinadas com a mesma precisão que as forças elásticas e inerciais [45]. Porém, é possível obter boas estimativas dos valores das forças de amortecimento e de sua natureza por meio da análise modal experimental. Portanto, a técnica de análise modal experimental torna-se uma ferramenta poderosa para a solução desse problema.

Outra razão importante para realizar um ensaio de análise modal experimental é validar o modelo matemático, através da comparação entre os valores das frequências naturais e modos de vibração obtidos através do modelo matemático e aqueles obtidos experimentalmente [28].

A análise modal experimental é a técnica de medição e análise de dados de vibração estrutural que visa a obtenção do modelo modal da estrutura sob análise. Esse modelo fica perfeitamente caracterizado pela obtenção dos seguintes parâmetros: frequências naturais, amortecimentos e formas modais. Nessa técnica, discretiza-se a estrutura em uma certa quantidade de pontos e mede-se um conjunto de Funções Resposta em Frequência (FRF), que são a base para a determinação do modelo modal. Determinam-se os parâmetros modais pela técnica sDOF (single Degree Of Freedom), no caso de modos bem espaçados e levemente amortecidos, ou através da técnica mDOF (multiple Degree Of Freedom), quando os modos adjacentes interferem um nos outros, o que é o caso de uma grande parte dos sistemas reais [35], onde se incluem também as estruturas das máquinas elétricas.

Neste trabalho foi utilizado o programa LMS-CADA, da LMS International, que permite análises tanto no domínio do tempo quanto da frequência, usando modelo de amortecimento viscoso. Estão disponibilizadas várias técnicas para extração dos parâmetros modais, para um único ou múltiplos graus de liberdade, como “circle – fit”, “peak picking”, mínimos quadrados além de outras técnicas. Produzido para o ambiente Windows, é um programa de fácil manuseio que permite geração de malha, animação de modos, validação dos resultados de maneira bastante própria, utilizando gerenciadores de projetos, blocos e modos.

A primeira etapa da análise modal experimental é a medição de um conjunto de funções resposta em frequência (FRFs), posteriormente define-se um modelo modal viscoso ou histerético para descrever estes dados e então, usa-se técnicas de estimação de parâmetros (ajuste de curvas) para ajustar este modelo com os dados medidos, e assim chegar aos valores dos parâmetros modais. Uma vez que os valores dos parâmetros tenham sido estimados, podem ser verificados através de visualização gráfica da janela de animação ou através do uso de uma série de técnicas de validação do modelo modal. A figura 5.1 mostra as etapas que compõem o procedimento de análise modal experimental.

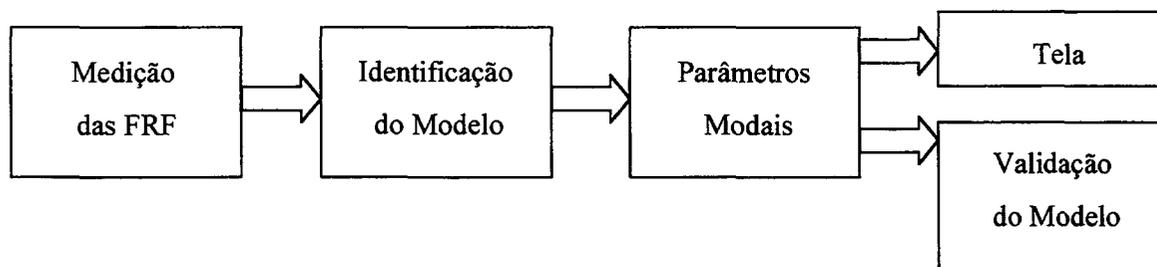


Fig. 5.1- Etapas que compõem o procedimento de análise modal experimental.

## V.2 Funções Resposta em Frequência

Tipicamente, as características da *dinâmica estrutural* são definidas pela função resposta em frequência [36]. Esta relação causa/efeito descreve o comportamento como uma função da frequência entre dois pontos sobre a estrutura. Em consequência, se pudermos medir as características de transferência da estrutura, então a dinâmica estrutural é conhecida, ou seja, as propriedades que definem um *modo de vibração* podem ser obtidas.

O uso de funções resposta em frequência para medir as propriedades de uma estrutura vem da engenharia elétrica. Em circuitos elétricos a função gerador é usada para aplicar um sinal senoidal na entrada do circuito e a saída é medida para uma faixa de frequências de entrada. A razão da transformada de Laplace dos dois sinais, resulta na função resposta em frequência do circuito. Um experimento similar pode ser realizado em estruturas mecânicas, tais como os estatores das máquinas elétricas. Um gerador de sinal é usado para acionar um transdutor de força (chamado de *shaker*), que excita a estrutura através de uma faixa de frequências, com amplitude e fase conhecidas. Tanto a resposta (aceleração, velocidade e deslocamento) como a força de excitação são medidos usando vários transdutores. As transformadas dos sinais de entrada e de saída são calculadas e a função resposta em frequência do sistema é determinada. Os parâmetros físicos são então obtidos a partir da amplitude e da fase da função resposta em frequência.

As funções resposta em frequência diferem dependendo da grandeza medida, deslocamento, velocidade ou aceleração. As várias funções resposta em frequência são ilustradas na tabela 5.1. A tabela indica, por exemplo, que a *função resposta em frequência inertância* corresponde a função resposta em frequência obtida dividindo a transformada do sinal de aceleração pela transformada do sinal de força.

Tab. 5.1 - Funções resposta em frequência usadas na medição de vibrações.

Resposta Medida	Função Resposta em Frequência	Função Transformada Inversa
Aceleração	Inertância	Massa aparente
Velocidade	Mobilidade	Impedância
Deslocamento	Receptância	Rigidez dinâmica

As funções resposta em frequência da estrutura podem ser medidas de duas formas:

1. Excitação por shaker: Segue-se o seguinte procedimento:

- (a) O estator é isolado da base por meio de molas ou suspenso por meio de cabos de pequena seção transversal, de forma que as frequências naturais da base não interfiram com as do estator.
- (b) O acelerômetro é fixado num ponto da periferia do estator.
- (c) Uma força de excitação externa é aplicada ao estator. Esse procedimento se faz com auxílio do shaker que é alimentado com um sinal elétrico de banda larga de frequência (normalmente ruído branco), de modo que todos os modos de vibração dentro da faixa de frequência de interesse sejam excitados.
- (d) Com auxílio de um analisador FFT os sinais de força e aceleração são processados e a função resposta em frequência do tipo inertância é determinada.
- (e) O acelerômetro é mudado de posição várias vezes, de modo a varrer superfície do estator, e a etapa d é repetida obtendo-se, assim, tantas funções resposta em frequência quantos pontos forem selecionados para representar a geometria do estator (malha experimental).

A figura 5.2 mostra um esquema que resume o procedimento de excitação por meio de shaker.

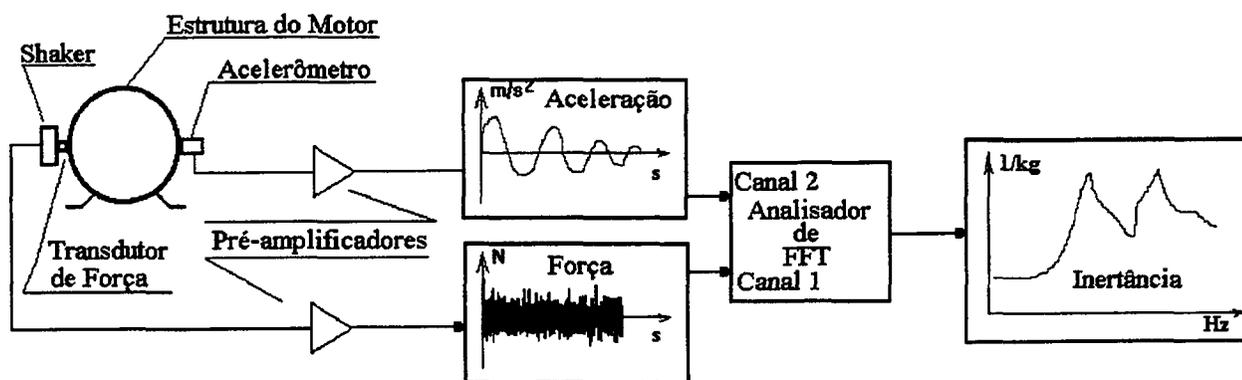


Fig. 5. 2 - Excitação por meio de shaker.

2. Excitação por impacto: Na excitação por impacto o shaker é substituído por um martelo equipado com um captor de força que mede o choque provocado pelo golpe do martelo sobre a superfície da estrutura. Para determinar as frequências naturais a partir da função transferência, o experimentador deverá

excitar a estrutura em vários pontos mantendo o acelerômetro numa posição fixa. As precauções tomadas para isolar a estrutura da base também são tomadas. A figura 5.3 mostra um esquema que resume o procedimento de excitação por impacto.

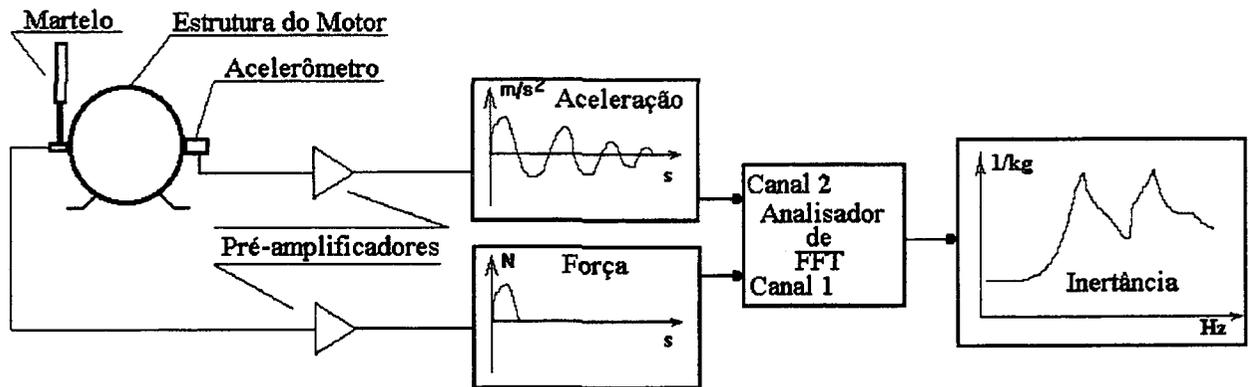


Fig. 5.3- Excitação por impacto.

### V.3 Modelo Modal

A função resposta em frequência do tipo inertância pode ser definida como:

$$H_{ik}(j\omega) = \frac{\ddot{x}_i(j\omega)}{F_k(j\omega)} \quad (5.1)$$

onde  $i$  é a posição onde se aplica a excitação,  $k$  é a posição onde se mede a resposta,  $\ddot{x}_i$  é a resposta no ponto  $i$  e  $F_k$  é a entrada no ponto  $k$ . Pode-se também exprimir  $H_{ik}$  usando-se a frequência natural ( $\omega_r$ ), massa ( $m_r$ ) e razão de amortecimento modal ( $\zeta_r$ ), como [Anexo A]:

$$H_{ik}(j\omega) = -\omega^2 \sum_1^r \frac{\psi_i^r \psi_k^r}{m_r [-\omega^2 + j2\zeta_r \omega \omega_r + \omega_r^2]} \quad (5.2)$$

onde  $\psi_i^r$  é a coordenada modal na posição  $i$ ,  $\psi_k^r$  é a coordenada modal na posição  $k$ ,  $\omega_r$  é a frequência natural para cada modo  $r$ .

A forma de frações parciais é frequentemente preferida, resultando em:

$$H_{ik}(j\omega) = -\omega^2 \sum_1^{n/2} \left\{ \frac{A_{ik}^r}{S - S_r} + \frac{A_{ik}^{r*}}{S - S_r^*} \right\} \quad (5.3)$$

onde  $A_{ik}^r$  é o resíduo complexo do  $r$ -ésimo modo,  $S_r$  é o autovalor do  $r$ -ésimo modo, que é igual a:

$$S_r = -\zeta_r \omega_r \pm j\omega_r \left[ 1 - \zeta_r^2 \right]^{1/2} \quad (5.4)$$

Os resultados apresentados neste trabalho, referem-se a parâmetros modais extraídos no domínio do tempo, assim, utiliza-se a função resposta impulsiva que é obtida a partir da aplicação da transformada inversa de Fourier à equação 5.3, resultando [38]:

$$h(t) = \mathfrak{F}^{-1}[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^{n/2} A_r \exp(S_r t + \phi) \quad (5.5)$$

A identificação dos parâmetros  $A_r$ ,  $S_r$  e  $\phi$  é feita ajustando-se uma função a cada  $h(t)$  medida, resultando assim uma função resposta impulsiva analítica no domínio do tempo  $h_{an}(t)$ . A qualidade do ajustamento é analisada pela comparação entre a FRF analítica  $h_{an}(j\omega) = \mathfrak{F}[h_{an}(t)]$  e a FRF medida, via inspeção visual.

#### V.4 Técnica de Estimação de parâmetros

O LMS-CADA utiliza a versão Mínimos Quadrados do algoritmo de Exponenciais Complexas, conhecida como LSCE (Least Squares Complex Exponential), que é uma técnica "mDOF" no regime do tempo, para estimação de parâmetros modais.

*Algoritmo de Exponenciais Complexas* - Este algoritmo calcula  $A_r$  e  $S_r$  para ajustar a função resposta impulsiva  $h(t)$  a forma da equação 5.5. Como a equação é não-linear em relação a  $S_r$ , os valores de  $S_r$ , são determinados iterativamente. Como as equações são lineares em relação a  $A_r$ , então estes coeficientes são determinados resolvendo um sistema clássico de equações simultâneas.

Quando a função resposta impulsiva é amostrada em instantes de tempo igualmente espaçados, a equação 5.5 pode ser reescrita como:

$$h(t_k) = \sum_{r=1}^N A_r e^{S_r K T + \phi} \quad (5.6)$$

ou

$$h(t_k) = \sum_{r=1}^N A_r \chi_r^k \quad (5.7)$$

onde  $N$  é igual ao número de modos na faixa de frequência  $(0, 1/2T)$ ,  $T$  é o intervalo de amostragem e

$$\chi_r = e^{S_r T + \phi} \quad (5.8)$$

Agora,  $h$  é um função real, isto é:

$$h(t_k) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r=1}^N A_r \chi_r^k \right\} \quad (5.9)$$

Um sistema de equações é obtido a partir da equação 5.7 para diferentes valores de  $t_k$  usando uma solução de colocação baseado no método de Prony [38]. Um novo sistema de incógnitas reais  $a_i$  ( $i = 0, \dots, 2N$ ) são introduzidas, que são os coeficientes do termos da equação polinomial

$$\prod_{r=1}^N (\chi - \chi_r)(\chi - \chi_r^*) = \sum_{k=0}^{2N} a_k \chi^k = 0 \quad (5.10)$$

As  $2N$  raízes da equação 5.10, que são as exponenciais complexas  $e^{S_r T}$  e os coeficientes  $a_k$ , são chamadas de coeficientes de auto-regressão do modelo assumido na equação 5.6.

Multiplicando a equação 5.9 pelos coeficientes  $a_k$  e somando as equações, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 a_0 h(t_{m+0}) &= 2a_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum A_r \chi_r^{m+0} \right\} \\
 a_1 h(t_{m+1}) &= 2a_1 \operatorname{Re} \left\{ \sum A_r \chi_r^{m+1} \right\} \\
 a_2 h(t_{m+2}) &= 2a_2 \operatorname{Re} \left\{ \sum A_r \chi_r^{m+2} \right\} \\
 &\vdots \\
 a_k h(t_{m+k}) &= 2a_k \operatorname{Re} \left\{ \sum A_r \chi_r^{m+k} \right\} \\
 &\vdots \\
 a_{2N} h(t_{m+2N}) &= 2a_{2N} \operatorname{Re} \left\{ \sum A_r \chi_r^{m+2N} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{2N} a_k h(t_{m+k}) = 2 \sum_{k=0}^{2N} a_k \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r=1}^N A_r \chi_r^{m+k} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r=1}^N A_r \chi_r^m \left( 2 \sum_{k=0}^{2N} a_k \chi_r^k \right) \right\}$$

De acordo com a equação 5.9 este último deve ser nulo, assim:

$$\sum_{k=0}^{2N} a_k h(t_{m+k}) = 0 \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Esta equação indica que há somente  $2N$  amplitudes linearmente independentes na função resposta impulsiva amostrada. Se o coeficientes de auto-regressão são normalizados, fazendo  $a_{2N} = 1$ , então

$$\sum_{k=0}^{2N-1} a_k h(t_{m+k}) = -h(t_{m+2N}) \quad (5.12)$$

Portanto há  $2N$  equações linearmente independentes que podem ser escritas na forma de variáveis  $a_k$ , e estas são processadas diretamente a partir da função resposta impulsiva medida. Na prática, os valores de  $m$  são escolhidos tipicamente entre  $0 > m > 2N$ , mas qualquer faixa de  $2N$  pode ser usada. Tendo-se resolvido para  $a_k$ , as raízes da equação 5.10 podem ser obtidas através de iteração polinomial, e os autovalores podem ser determinados a partir da equação 5.8.

Uma vez que os autovalores são determinados, os coeficientes modais resultantes (resíduos) podem ser calculados a partir da seguinte relação:

$$\sum_{r=0}^N [A_r \chi_r^k] = h(t_k) \quad (5.13)$$

Estas equações são lineares para valores de  $A_r$ . Expandindo a equação 5.12 na forma matricial, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} h(t_{2N-1}) & h(t_{2N}) & h(t_{2N+1}) & \cdots & h(t_{4N-2}) \\ h(t_{2N-2}) & h(t_{2N-1}) & h(t_{2N}) & \cdots & h(t_{4N-3}) \\ h(t_{2N-3}) & h(t_{2N-2}) & h(t_{2N-1}) & \cdots & h(t_{4N-4}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h(t_0) & h(t_1) & h(t_2) & \cdots & h(t_{2N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t_{4N-1}) \\ h(t_{4N-2}) \\ h(t_{4N-3}) \\ \vdots \\ h(t_{2N}) \end{bmatrix}$$

A equação matricial de Van der Monde é obtida a partir da equação 5.13. Sua forma expandida, é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & \cdots & \chi_N \\ \chi_1^2 & \chi_2^2 & \chi_3^2 & \cdots & \chi_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_1^{N-1} & \chi_2^{N-1} & \chi_3^{N-1} & \cdots & \chi_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t_0) \\ h(t_1) \\ h(t_2) \\ \vdots \\ h(t_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Esta equação pode ser resolvida em muito menos tempo, e ocupando menos memória do computador, do que o método clássico. O algoritmo de exponenciais complexas tem as seguintes vantagens [38]:

- a obtenção dos autovalores para sistemas não lineares é simples.
- uma vez que os autovalores são estimados, os coeficientes modais podem ser determinados diretamente.
- não requer valores iniciais, portanto é muito fácil de usar
- para obter a solução é somente necessário suprir o algoritmo com a função resposta impulsiva e o suposto número de modos existente nos dados.

Entre as desvantagens podemos citar:

- para sistemas acoplados com alta densidade modal é difícil identificar o número de modos visualmente.
- o algoritmo necessita graus de liberdade extras (modos "computacionais") para compensar o ruído e a distorção nos dados. Uma boa regra, baseada na experiência, é fornecer o número de modos entre um e meio vezes o número de modos esperados.

*Exponenciais Complexas por Mínimos Quadrados* - Da equação 5.12, o erro de ajuste para  $m$  - ésima equação é:

$$E_m^2 = \left[ \sum_{k=0}^{2N-1} a_k h(t_{m+k}) + h(t_{m+2N}) \right]^2 \quad (5.14)$$

e assim o erro total é:

$$E = \sum_{m=1}^M E_m^2 \quad (5.15)$$

onde  $M$  é igual ao número de equações que serão usadas no ajuste. As derivadas são:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 = \sum_{m=1}^M h(t_{m+i}) \left[ \sum_{k=0}^{2N-1} a_k h(t_{m+k}) + h(t_{m+2N}) \right] \quad (5.16)$$

ou

$$\sum_{k=0}^{2N-1} a_k \left[ \sum_{m=1}^M h(t_{m+i}) + h(t_{m+k}) \right] + \sum_{m=1}^M h(t_{m+i}) + h(t_{m+2N}) = 0 \quad (5.17)$$

Fazendo a substituição, têm-se

$$R_{i,k} = \sum_{m=1}^M h(t_{m+i}) + h(t_{m+2N}) \quad (5.18)$$

as equações resultantes são:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} R_{i,k} a_k = -R_{i,2N} \quad (5.19)$$

na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_{0,0} & R_{0,1} & R_{0,2} & \cdots & R_{0,2N-1} \\ R_{1,0} & R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,2N-1} \\ R_{2,0} & R_{2,1} & R_{2,2} & \cdots & R_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{2N-1,0} & R_{2N-1,1} & R_{2N-1,2} & \cdots & R_{2N-1,2N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{0,2N} \\ R_{1,2N} \\ R_{2,2N} \\ \vdots \\ R_{2N-1,2N} \end{bmatrix}$$

Quando  $M$  torna-se muito grande, os valores de  $R_{i,k}$  são aproximadamente iguais aos valores da função de auto-correlação  $R_{hh}(i-k)$ . Como a função de auto-correlação é impar, isto é,

$$R_{hh}(i-k) = R_{hh}(k-i) \quad (5.20)$$

as equações podem ser expressas em termos de funções de auto - correlação como:

$$\begin{bmatrix} R_{h,h}(0) & R_{h,h}(1) & R_{h,h}(2) & \cdots & R_{h,h}(2N-1) \\ R_{h,h}(1) & R_{h,h}(0) & R_{h,h}(1) & \cdots & R_{h,h}(2N-2) \\ R_{h,h}(2) & R_{h,h}(1) & R_{h,h}(0) & \cdots & R_{h,h}(2N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{h,h}(2N-1) & R_{h,h}(2N-2) & R_{h,h}(2N-3) & \cdots & R_{h,h}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2N-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{h,h}(2N) \\ R_{h,h}(2N-1) \\ R_{h,h}(2N-2) \\ \vdots \\ R_{h,h}(1) \end{bmatrix}$$

Os resíduos dos mínimos quadrados (coeficientes modais) podem ser calculados a partir da função impulso unitário, da seguinte forma. Da equação 5.13, a função impulso unitário pode ser escrita em termos de funções seno e coseno. Assumindo que o valor médio de  $h$  é zero,

$$h(t_k) = 2 \sum_{r=1}^N e^{\zeta_r t_k} [U_r \cos(\omega_{dr} t_k) + V_r \sin(\omega_{dr} t_k)] \quad (5.21)$$

O erro de ajuste para o  $k$  - ésimo ponto da função impulso é escolhido como a discrepância entre este modelo e o dados,  $g_k$ , para  $k=0, 1, 2, \dots, M$ :

$$E_k = g_k - h(t_k) \quad (5.22)$$

e o erro total do funcional associado com o ajuste das  $M$  amostras é:

$$E = \sum_{k=1}^M \left[ g_k - \sum_{r=1}^N (\mathbf{c}_{rk} U_r - \mathbf{s}_{rk} V_r) \right]^2 \quad (5.22)$$

onde a notação

$$\mathbf{c}_{ik} = e^{\zeta_i t_k} \cos(\omega_{di} t_k) \quad \mathbf{s}_{ik} = e^{\zeta_i t_k} \sin(\omega_{di} t_k)$$

foi usada.

$$\frac{\partial E}{\partial U_i} = \sum_{k=1}^M \mathbf{c}_{ik} \left[ g_k - \sum_{r=1}^N (\mathbf{c}_{rk} U_r - \mathbf{s}_{rk} V_r) \right] \quad (5.23a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial V_i} = \sum_{k=1}^M \mathbf{s}_{ik} \left[ g_k - \sum_{r=1}^N (\mathbf{c}_{rk} U_r - \mathbf{s}_{rk} V_r) \right] \quad (5.23b)$$

Fazendo

$$\mathbf{A}_{ir} = \sum_{k=1}^M \mathbf{c}_{ik} \mathbf{c}_{rk} \quad \mathbf{B}_{ir} = \sum_{k=1}^M \mathbf{s}_{ik} \mathbf{s}_{rk}$$

$$\mathbf{D}_{ir} = - \sum_{k=1}^M \mathbf{c}_{ik} \mathbf{s}_{rk} \quad \mathbf{X}_i = \sum_{k=1}^M \mathbf{c}_{ik} g_k$$

Então a forma matricial das equações do resíduo é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , e  $\mathbf{D}$  são  $N \times N$  sub - matrizes;  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{X}$ , e  $\mathbf{Y}$  são  $N \times 1$  vetores coluna, e  $\mathbf{D}^T$  é a transposta de  $\mathbf{D}$ . A solução formal das componentes reais e imaginárias dos coeficientes modais é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Há uma solução aproximada, dada por

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{X}_r / \mathbf{A}_r \quad (5.26a)$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{Y}_r / \mathbf{B}_r \quad (5.26b)$$

que é válida quando os termos diagonais das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são grandes, comparados aos termos não - diagonais, e os elementos de  $\mathbf{D}$  são pequenos.

As Fig. 5.4 (a), (b) e (c) mostram o processo numérico de ajuste de curvas feito pelo método de "Exponenciais Complexas por Mínimos Quadrados" para uma FRF medida, onde a curva em linha vermelha é a FRF medida e a curva em linha verde é a função ajustada.

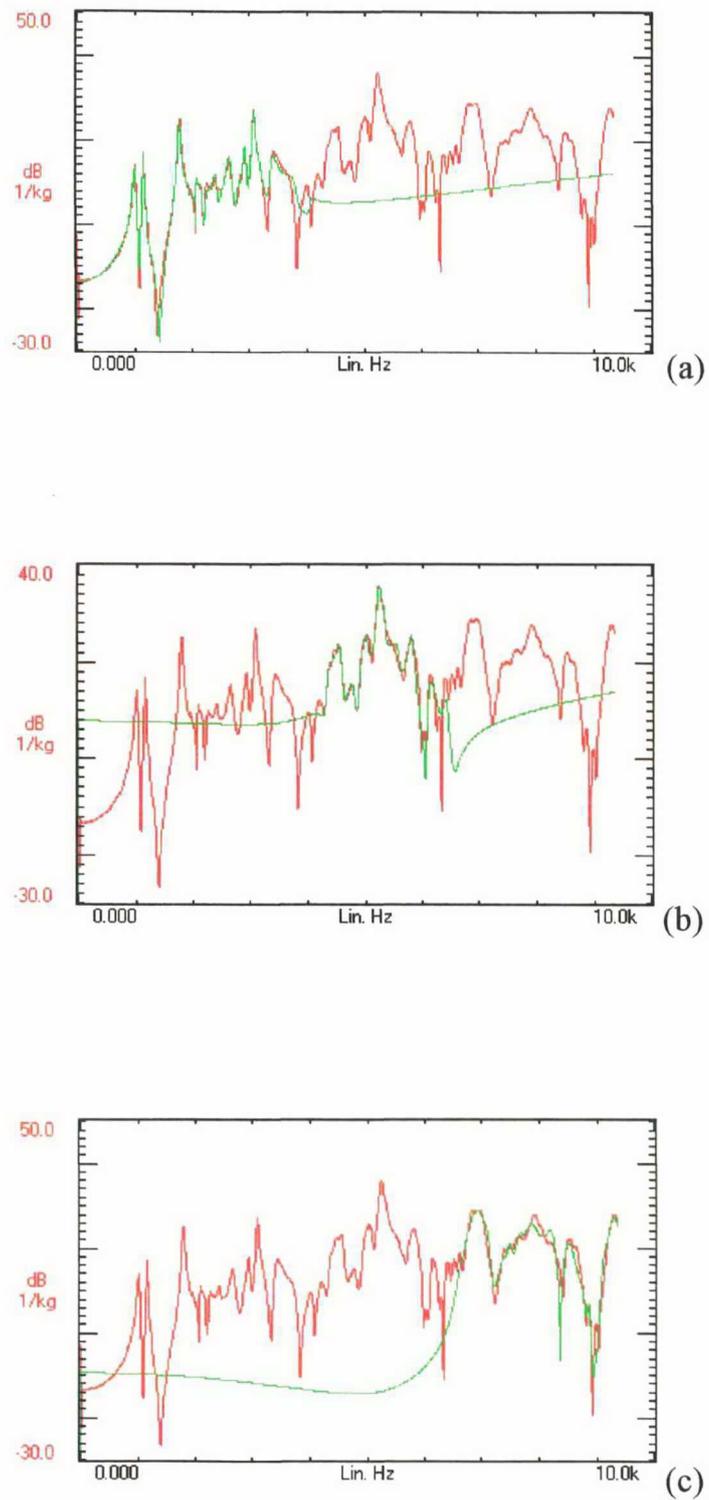


Fig. 5. 4 – Processo de ajuste de curvas em três trechos consecutivos de uma FRF medida (linha vermelha). (a) 0 - 2.5KHz. (b) 2.5KHz - 5KHz (c) 5KHz – 10 KHz.

A seguir, o procedimento de análise modal experimental é exemplificado.

#### *EXEMPLO DE APLICAÇÃO V.1 - EXCITAÇÃO POR IMPACTO*

Neste exemplo foram selecionados 42 pontos distribuídos ao longo da carcaça do MRC, mostrada na figura 5.5, dando origem a malha modal experimental mostrada na figura 5.6. Um sensor piezelétrico do tipo BK - 4375 foi fixado em um ponto para medir o sinal de aceleração. Enquanto que a força impulsiva, aplicada em cada um desses 42 pontos, foi medida por uma célula de carga piezelétrica do tipo PCB - 086803. Ambos os sinais foram amplificados por componentes do tipo PCB - 480B02. Os sinais de força e aceleração foram amostrados simultaneamente por meio de um analisador FFT de quatro canais, marca TEKTRONIX 2630, com filtro "anti-aliasing" incorporado. Cada uma das funções resposta em frequência do tipo inércia foi obtida a partir da média de um total de 15 blocos de dados, os quais forneceram valores da função de coerência superiores a 0,90.

A figura 5.7 mostra, para o MRC sob análise, a soma das funções resposta em frequência medidas. A tabela 5.2 mostra as frequências naturais e os respectivos amortecimentos modais obtidos.

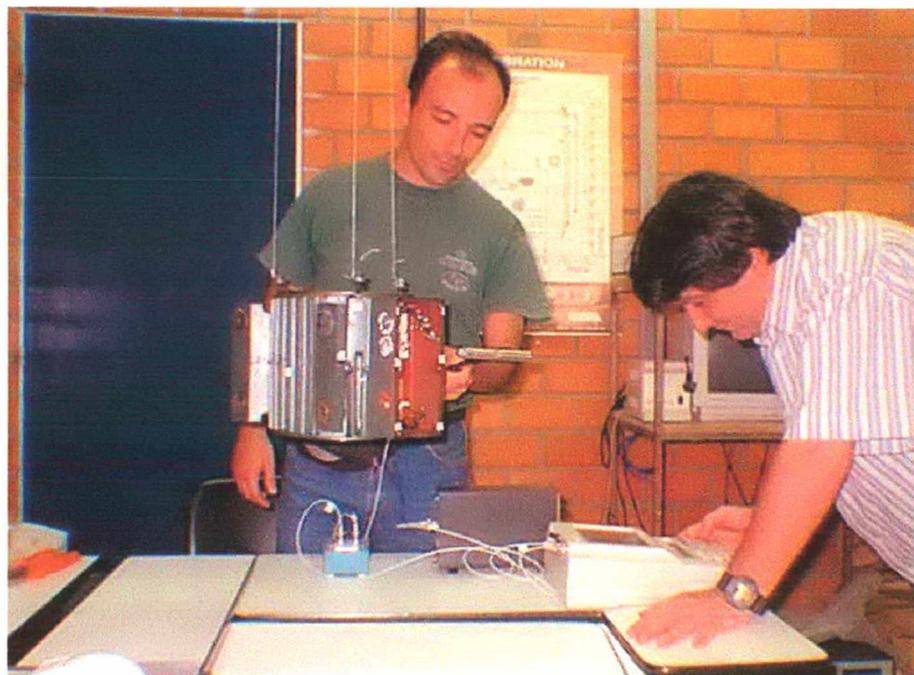


Fig. 5.5 - Carcaça do MRC e equipamentos usados no experimento.

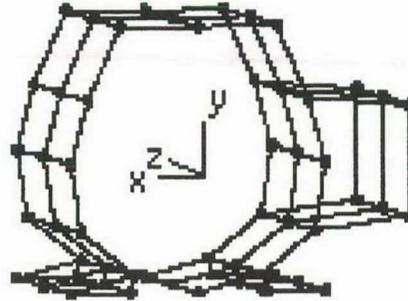


Fig. 5.6 - Malha modal composta de 42 nós.

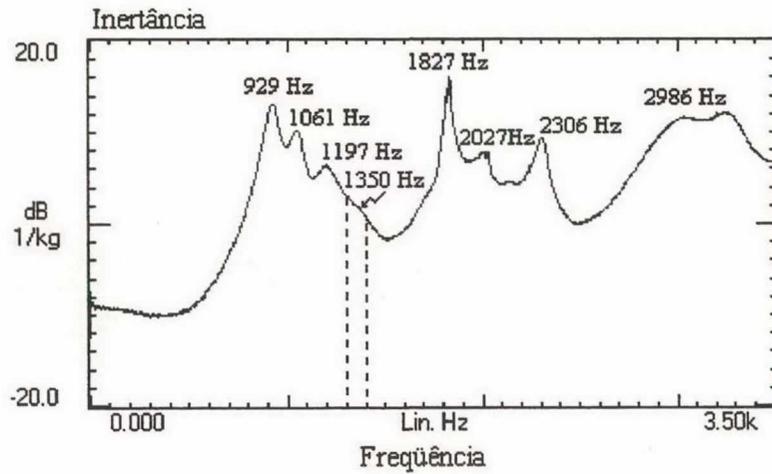


Fig. 5.7 - Soma das funções resposta em freqüência (100 Hz por divisão).

Tab. 5.2 - Freqüências naturais e amortecimentos modais viscosos obtidos.

Modo	Freqüência natural medida (Hz)	Amortecimento viscoso (%)
1°	929	3,60
2°	1061	3,74
3°	1197	4,59
4°	1827	0,88
5°	2027	4,94
6°	2306	1,91
7°	3302	7,12
		Média=3,82

Uma vez que o estator ensaiado estava com as bobinas, a sua dissipação de energia foi bastante significativa fazendo com que os picos que caracterizam os modos de vibração nas funções resposta em frequência não fossem significativos, exceção feita ao pico correspondente a 1827 Hz. Assim, as formas modais não puderam ser obtidas de forma precisa, entretanto, foi possível perceber que o modo de vibração referente a frequência de 1827 Hz apresentava características de modo radial, ou seja, deformações apenas no plano xy. Portanto, com base nessa observação, optou-se por refazer o experimento excitando a estrutura em 36 pontos distribuídos em torno da seção média da estrutura. Utilizando este expediente foi extraído com sucesso o modo relativo a frequência de 1827 Hz, que possui amortecimento baixo comparado aos demais, mostrado na figura 5.8.

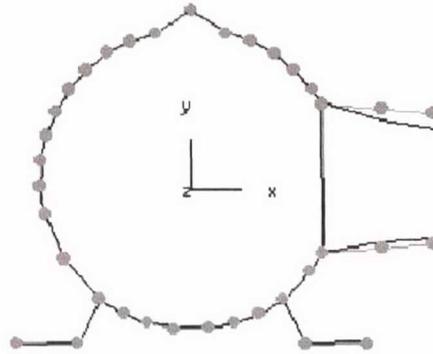


Fig. 5.8 - Modo de vibração relativo a frequência natural de 1827 Hz e malha modal experimental.

#### *EXEMPLO DE APLICAÇÃO V.2 - EXCITAÇÃO POR SHAKER*

Devido aos problemas relativos a extração dos modos de vibração no exemplo anterior, neste ensaio foi utilizado o estator de um motor de indução sem enrolamentos, a fim de obter funções resposta em frequência menos amortecidas. Foram selecionados 85 pontos distribuídos ao longo da carcaça, mostrada na figura 5.9, a fim de medir as funções resposta em frequência, dando origem a malha modal experimental mostrada na figura 5.10. Um shaker fixo em um destes pontos excitou a estrutura com uma força de frequência variável (ruído branco), medida por uma célula de carga piezoelétrica do tipo PCB - 086803. As acelerações foram medidas por um acelerômetro piezoelétrico do tipo BK - 4375. Os sinais de força e aceleração foram amostrados simultaneamente por meio de um analisador

Os sinais de força e aceleração foram amostrados simultaneamente por meio de um analisador FFT de quatro canais, marca TEKTRONIX 2630, com filtro "anti-aliasing" incorporado, e amplificados por componentes do tipo PCB - 480B02. Cada uma das funções resposta em frequência foi obtida a partir da média de um total de 30 blocos de dados, os quais forneceram valores da função de coerência superiores a 0,90.

A figura 5.11 mostra, para o MIG sob análise, a soma das funções resposta em frequência medidas. As figuras 5.12(a) e 5.12(b) mostram o primeiro e o segundo modos de vibração, respectivamente, obtidos experimentalmente, juntamente com a frequência natural e amortecimento modal correspondentes. Estes modos apesar de apresentarem deslocamentos nos eixos x e y, possuem predominantemente deslocamentos no eixo z (eixo longitudinal). As figuras 5.13 e 5.14 mostram o terceiro e quarto modos de vibração, respectivamente, em dois instantes de tempo diferentes, desta forma é possível visualizar como a estrutura do estator pulsa. As figuras 5.15(a) e 5.15(b) mostram o quinto e o sexto modo, respectivamente. Nota-se que os deslocamentos são inferiores aos dos modos anteriores, isto provavelmente se deve a redução da energia potencial nas frequências mais altas. Por uma questão de melhor visualização o primeiro, o segundo, o quinto e o sexto modos foram representados com o eixo z perpendicular ao plano do papel. A tabela 5.3 apresenta os resultados obtidos.

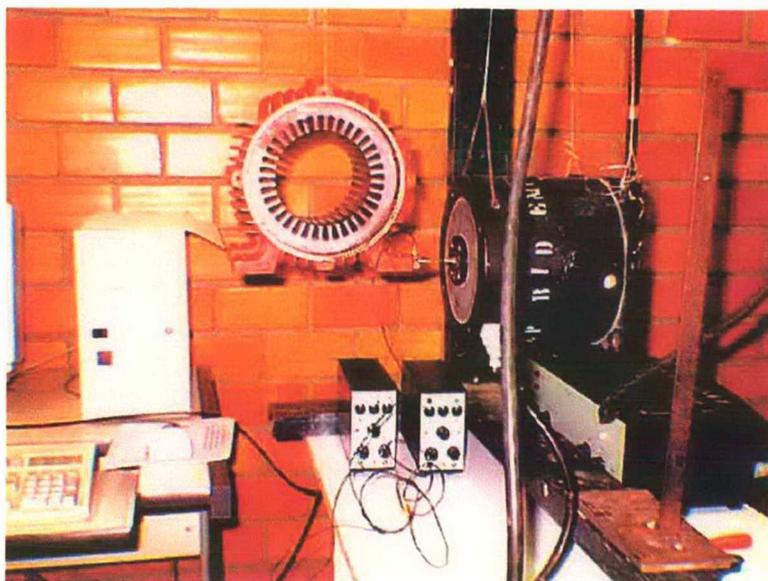


Fig. 5.9 - Carcaça do MIG e equipamentos usados no experimento.

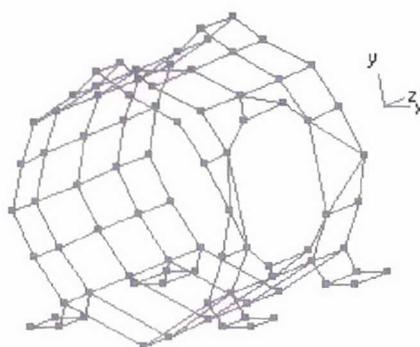


Fig. 5.10 - Malha modal experimental composta de 85 nós.

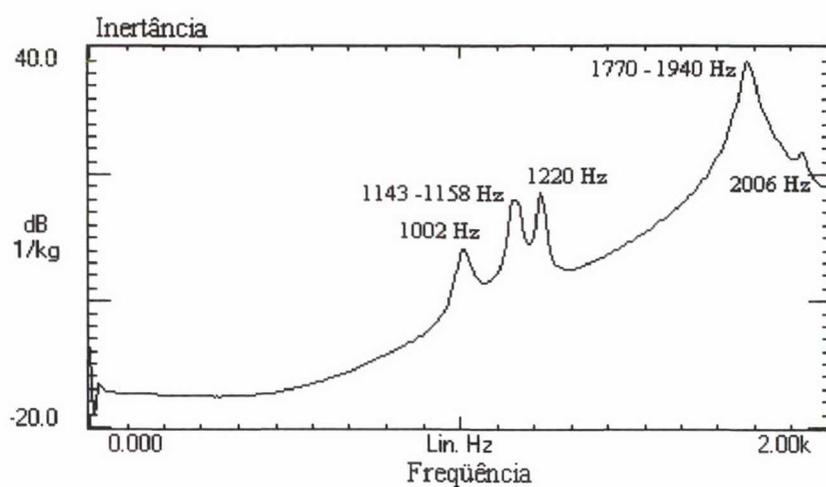


Fig. 5.11 - Soma das funções resposta em frequência (100 Hz por divisão).

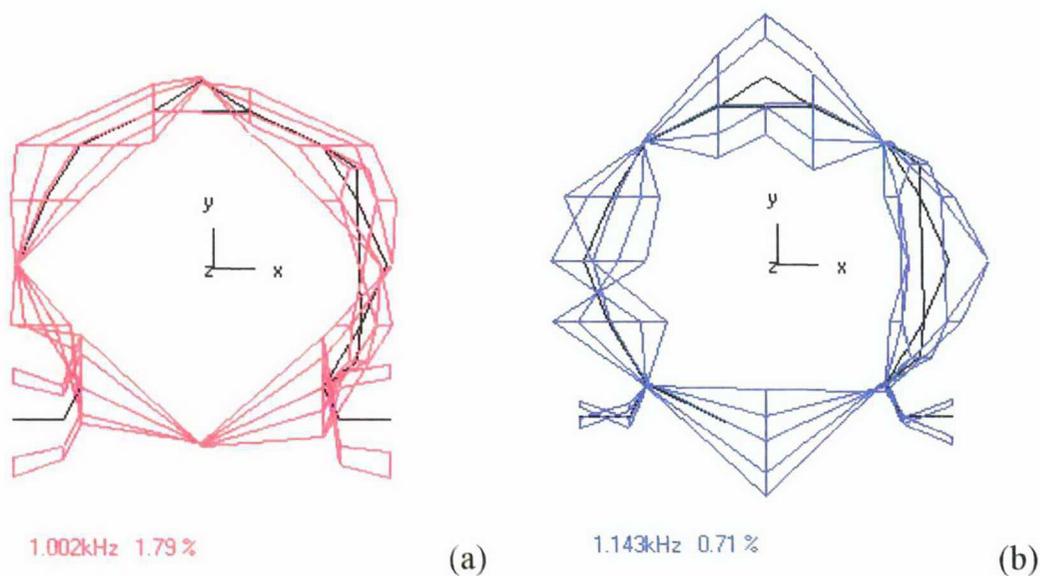


Fig. 5.12 - Modos de vibração. (a) Primeiro modo. (b) Segundo modo.

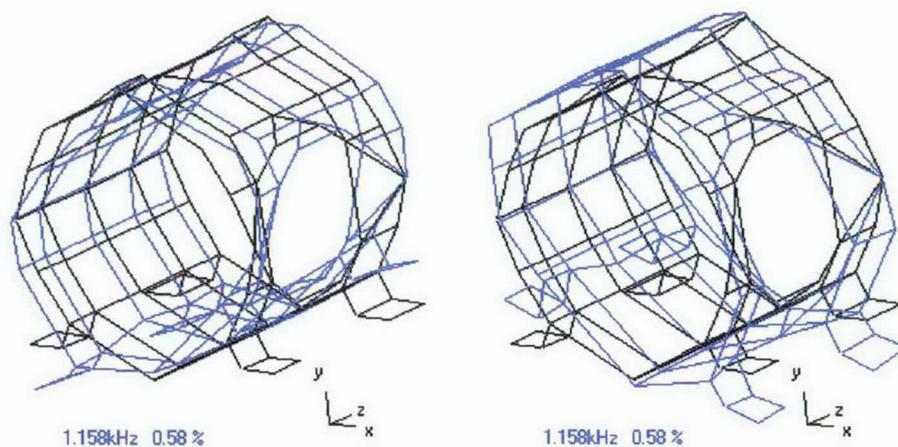


Fig. 5.13 - Terceiro modo visualizado na janela de animação do LMS-CADA.

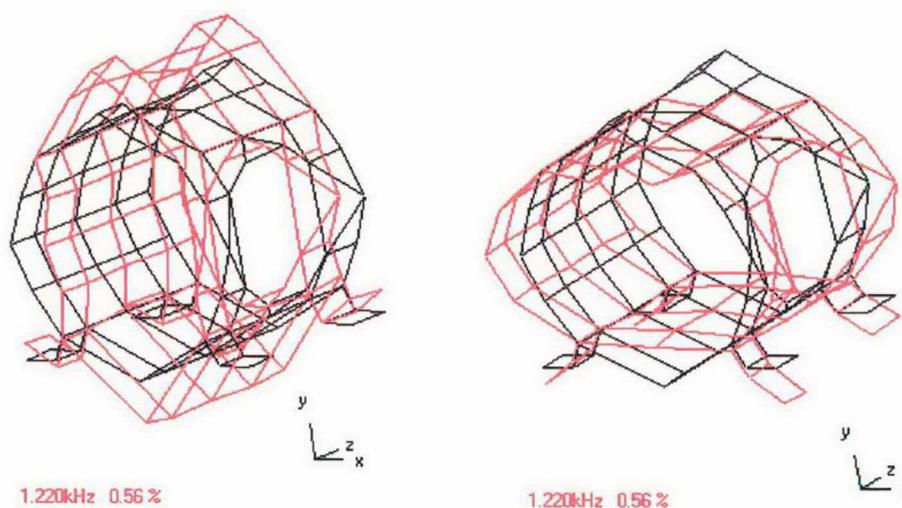


Fig. 5. 14 - Quarto modo de vibração visualizado na janela de animação do LMS-CADA.

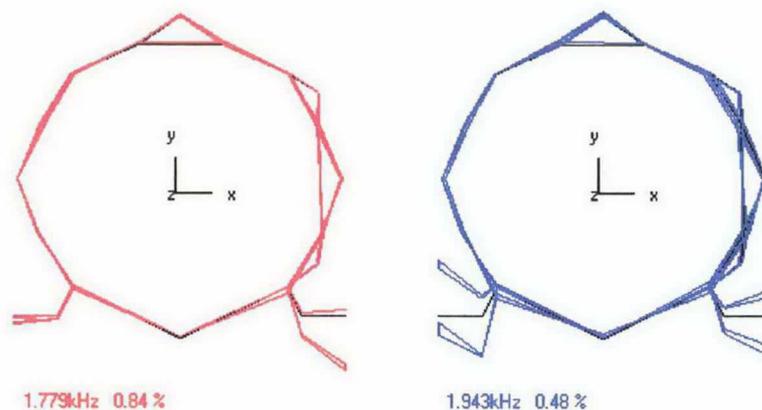


Fig. 5. 15 - Modos de Vibração. (a) Quinto. (b) Sexto.

Tab. 5.3 - Freqüências naturais e amortecimentos modais viscosos obtidos.

Modo	Freqüência natural medida (Hz)	Amortecimento viscoso (%)
1°	1002	1,79
2°	1143	0,71
*3°	1158	0,58
*4°	1220	0,56
5°	1770	0,84
6°	1940	0,84
7°	2006	0,46
		Média=0,82

\* Modos radiais

## V.5 Conclusão

Neste capítulo a técnica de Análise Modal Experimental foi apresentada. A etapas necessárias a aplicação dessa técnica foram explicadas e aplicadas aos estatores dos motores em estudo, dos quais foram extraídos os parâmetros modais, através do programa LMS-CADA. No caso do MIG, o estator foi ensaiado sem enrolamentos e todos os parâmetros modais foram extraídos com sucesso. Porém, no caso do MRC não foi possível extrair com sucesso os modos de vibração da estrutura, com exceção de um, que apresentava apenas deslocamentos radiais. Isto provavelmente ocorreu devido a dissipação de energia provocado pelas bobinas do estator.

Com base nestes parâmetros modais será possível validar os modelos estruturais por elementos finitos dos estatores e utilizar os amortecimentos modais no cálculo da resposta forçada.

## CAPÍTULO VI

### ANÁLISE DOS MODELOS ESTRUTURAIS DOS MOTORES

#### VI.1 Introdução

Para reduzir o ruído acústico irradiado de origem eletromagnética gerado por máquinas elétricas rotativas é importante entender o comportamento vibratório dos estatores. As vibrações e portanto o ruído acústico, pode ser reduzido em grande escala se as coincidências entre as frequências das forças de excitação e as frequências naturais do estator da máquina elétrica forem evitadas. Se as frequências das forças de excitação coincidirem com as frequências naturais as amplitudes das vibrações aumentarão até que a energia dissipada seja igual a energia suprida pelas forças de excitação. A excessiva amplitude das vibrações pode causar a falência dos componentes por fadiga dos metais, irradiação de ruído e assim desconforto do usuário [51].

Como se nota, as frequências naturais do estator uma máquina elétrica são extremamente importantes para prever e entender o comportamento vibratório dos estatores. Se as frequências naturais e modos de vibração preditos pelo modelo numérico concordarem com os medidos, este é validado e o projetista pode prever as vibrações resultantes e assim otimizar a máquina elétrica do ponto de vista de ruído e vibrações.

Neste capítulo é apresentado, inicialmente, um estudo sobre o modelo estrutural do MRC. Este estudo foi feito com base nos valores das frequências naturais e nos modos de vibração obtidos através do programa ANSYS.

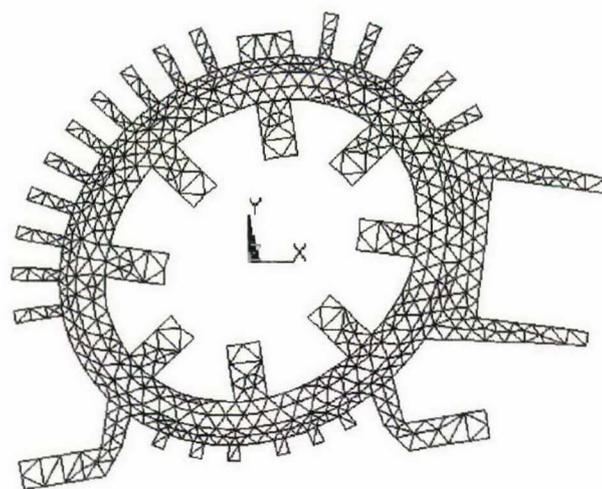
A seguir, é apresentado um estudo sobre o modelo estrutural do MIG. Este estudo foi feito com base nos valores das frequências naturais e dos modos de vibração obtidos através do programa ANSYS e da técnica de Análise Modal Experimental.

Finalmente, é apresentado um estudo sobre a influência das condições de contorno sobre as frequências naturais e modos de vibração do modelo estrutural do MIG.

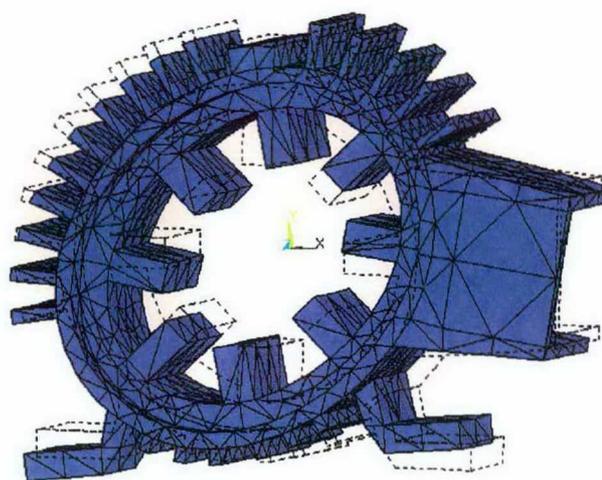
## VI. 2 Análise do modelo estrutural do MRC

Quando se trata de análise de máquinas elétricas pelo método de elementos finitos normalmente a representação em duas dimensões das estruturas dá resultados bastante precisos em termos de fenômenos eletromagnéticos, tais como correntes, fluxos e forças. Entretanto, quando o comportamento vibratório também é analisado não é claro se o modelo bidimensional é suficientemente preciso na representação do fenômeno ou se seria mais aconselhável a modelagem em três dimensões. Assim para fins de comparação nesta análise do modelo estrutural do MRC serão analisados as duas hipóteses.

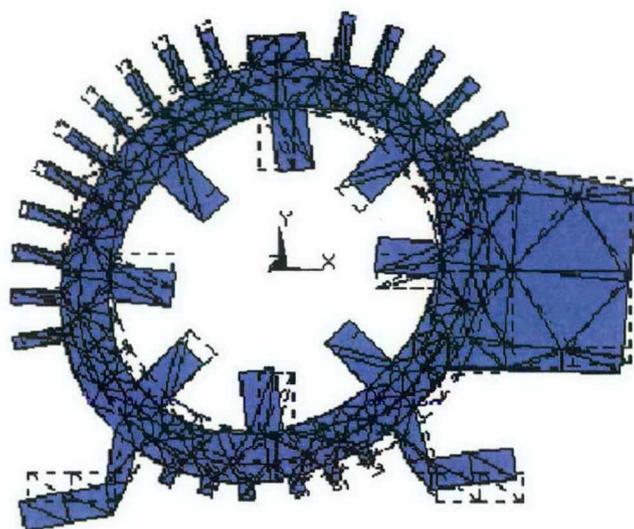
A figura 6.1(a) mostra o primeiro modo próprio do estator do MRC obtido com o modelo estrutural bidimensional, a figura 6.1(b) mostra o equivalente em três dimensões e a figura 6.1(c) mostra uma vista em corte, feita na seção transversal média, do primeiro modo, obtido através do modelo estrutural 3D. As linhas tracejadas representam a configuração não deformada da estrutura. Na hipótese bidimensional a frequência natural obtida foi igual a 1115 Hz, enquanto que na hipótese tridimensional a frequência natural obtida foi 1311 Hz. Esta diferença de 15 %, pode ser explicada pela baixa discretização da malha de elementos finitos usada no cálculo 3D, devido as limitações da versão disponível do programa ANSYS. As Figures 6.2(a),(b),(c) mostram os valores estimados dos deslocamentos nodais nas direções x, y, z, respectivamente, para o modo 3D e suas vistas em corte. Os deslocamentos foram normalizados pela matriz de massa do sistema, ou seja, ortonormalizados (vide anexo A). Observa-se que os deslocamentos na direção z (paralela ao eixo da máquina) são muito inferiores àqueles obtidos nas direções x e y, ou seja as principais deformações ocorrem no plano radial. Sendo que o mesmo foi observado para os outros 19 modos obtidos. Assim, pode concluir-se que o modelo 2D é uma hipótese válida, pelo menos para as frequências naturais mais baixas.



(a)



(b)



(c)

Fig. 6.1 - Primeiro modo próprio do estator do MRC. (a) Bidimensional (1115 Hz). (b) Tridimensional (1311 Hz). (c) Vista da seção transversal média.

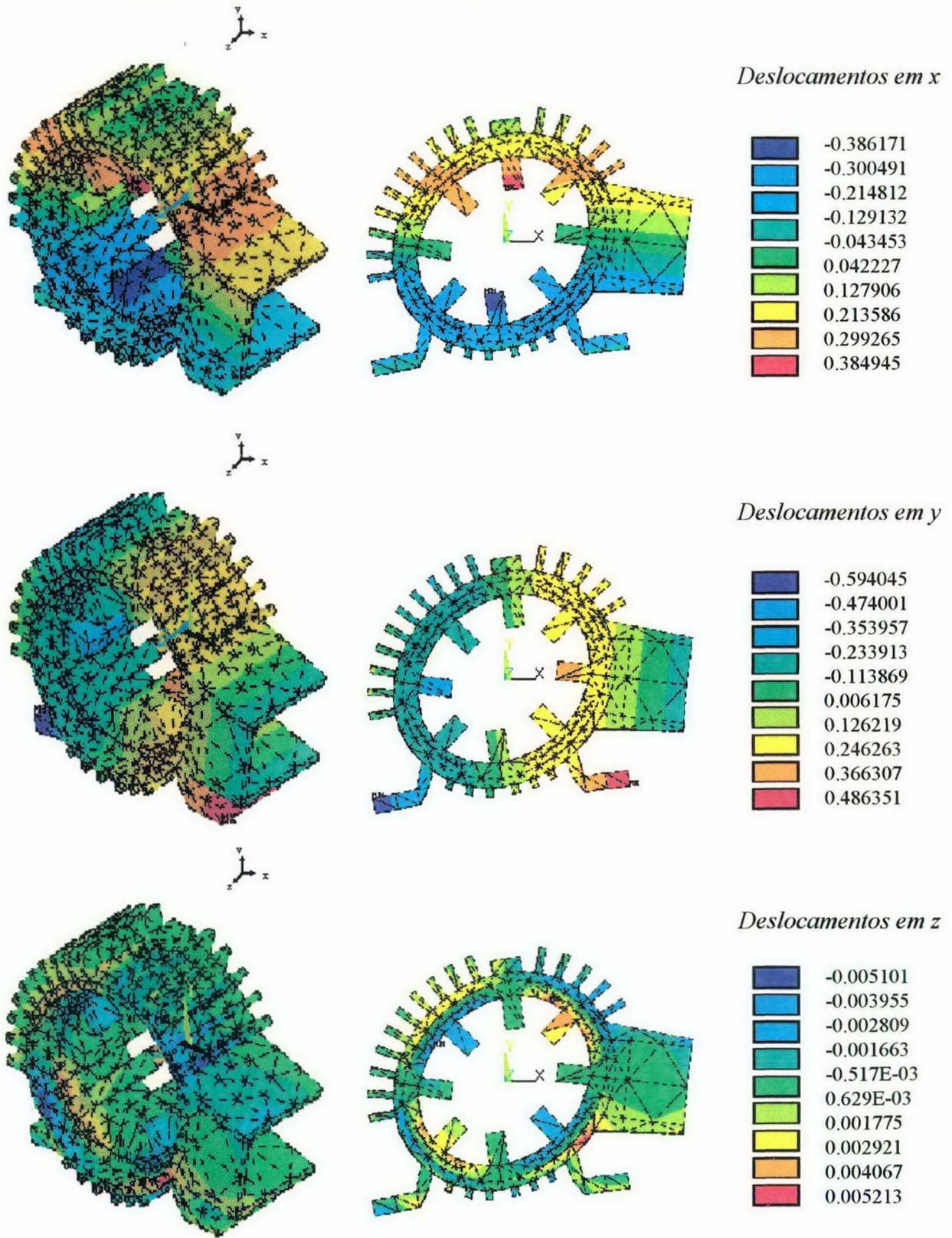


Fig.6.2 - Deslocamentos obtidos para o primeiro modo próprio do estator em três dimensões e suas vistas em corte. (a) em x. (b) em y. (c) em z.

A figura 6.3 mostra os demais modos próprios e frequências naturais calculadas com base no modelo estrutural bidimensional. A tabela 6.1 apresenta as propriedades dos materiais usados no cálculo e a tabela 6.2 as características dos elementos finitos utilizados para discretizar os modelos 2D e 3D.

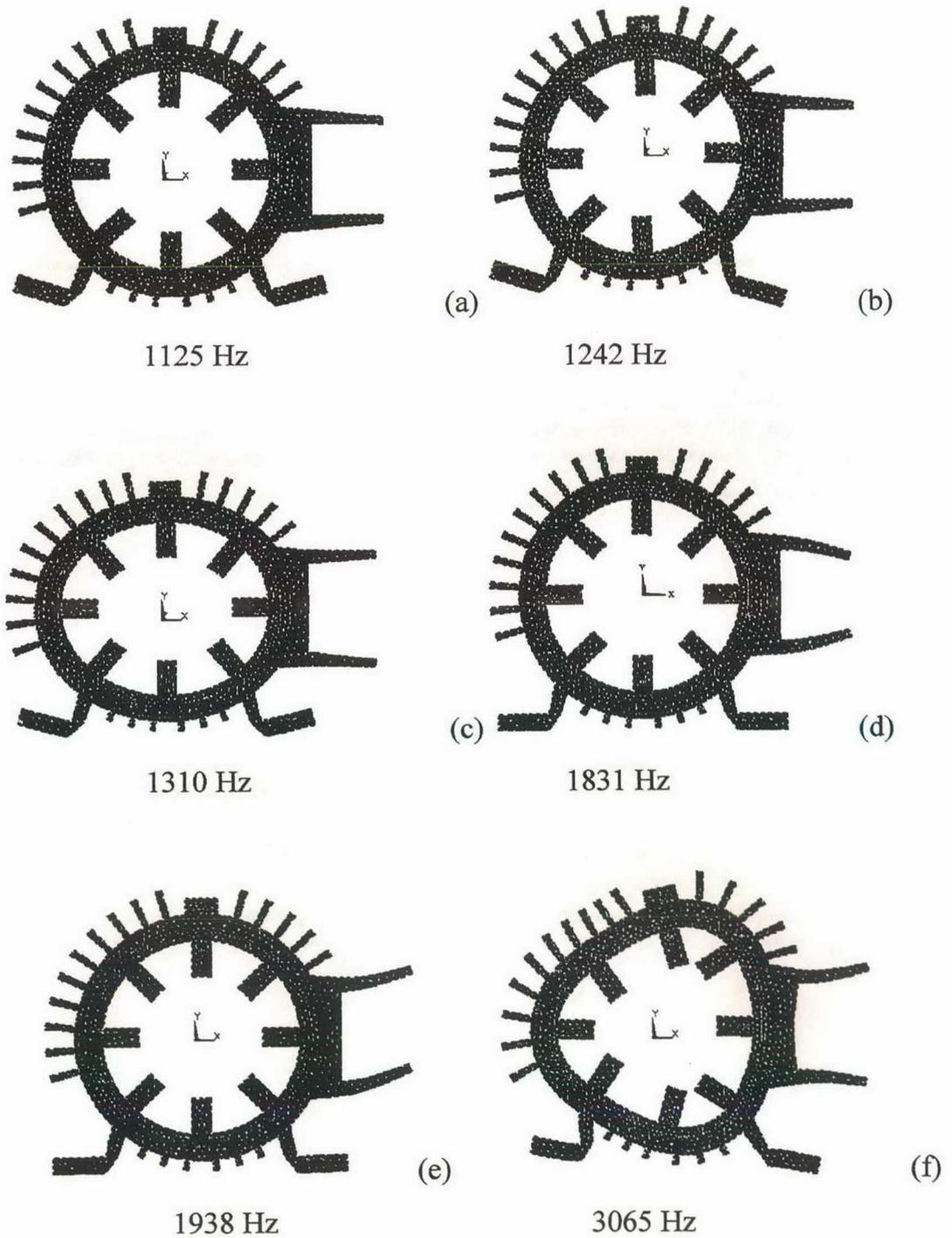


Fig. 6.3 - Demais modos próprios e frequências naturais do estator do MRC em 2D. (a) 2º modo. (b) 3º modo. (c) 4º modo. (d) 5º modo. (e) 6º modo. (f) 7º modo.

Table 6.1: Parâmetros dos materiais usados no cálculo.

	Massa específica (kg/m <sup>3</sup> )	Módulo de Young (N/m <sup>2</sup> )	Módulo de cisalhamento (N/m <sup>2</sup> )
Estator e dentes	7834	2,07 10 <sup>11</sup>	8,27 10 <sup>10</sup>
Carcaça e aletas	7640	8,96 10 <sup>10</sup>	4,13 10 <sup>10</sup>

Tabela 6.2 Características dos Modelos

Modelo	Tipo de Elemento	Nº de Elementos	Nº de Nós
2D	Triangular de 6 nós, para deformação plana e formas irregulares.	1091	2541
3D	Tetraédrico de 4 nós, problemas elásticos.	4450	1542

Observa-se que o cálculo por elementos finitos forneceu frequências naturais próximas daquelas obtidas através da análise modal experimental. Comparando-se a forma modal obtida para a frequência de 1831 Hz (Fig. 6.4(a)), obtida através do método de elementos finitos, com a forma modal obtida para a frequência de 1827 Hz (Fig. 6.4(b)), obtida através de Análise Modal Experimental, nota-se que elas são bem semelhantes, portanto as frequências de 1831 Hz e de 1827 Hz correspondem ao mesmo modo de vibração. Este exercício, no entanto, não pode ser feito para as demais frequências, pois o ensaio de análise modal experimental não determinou com clareza as demais formas modais.

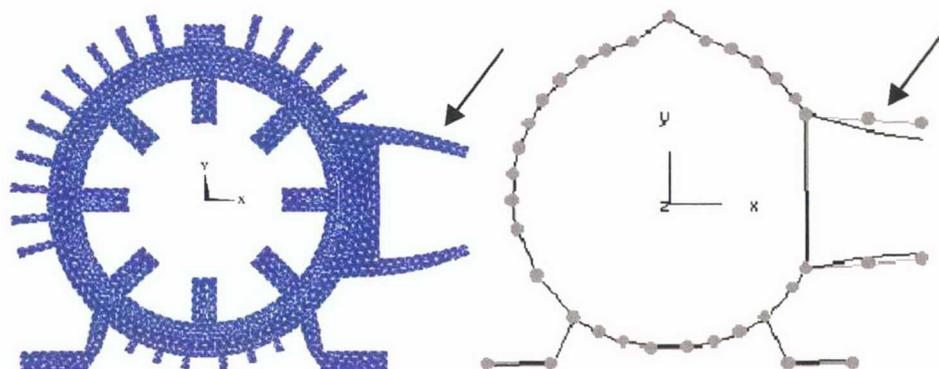


Fig. 6.4 - Modo de vibração. (a) Obtido por elementos finitos (1831 Hz). (b) Obtido experimentalmente (1827 Hz).

### VI. 3 Análise do modelo estrutural do MIG

A fim de reduzir o tempo despendido na elaboração de um modelo estrutural tridimensional para o MIG, optou-se por um modelo bidimensional. Sendo que a validação deste modelo bidimensional será feita de forma indireta, através do modelo modal experimental da figura 5.10. Portanto, este estudo será feito com base na curva de resposta em frequência obtida experimentalmente (Fig. 5.11). Serão identificados dentre as frequências e modos dos picos de vibração medidos, quais podem ser determinados através de um modelo de elementos finitos bidimensional do estator do motor de indução de gaiola. Será comparada a vista em corte (perpendicular ao eixo z) dos modos experimentais obtidos em três dimensões, com os modos de vibração radiais obtidos através de um modelo estrutural bidimensional do estator do MIG.

A figura 6.5(a) mostra a vista em corte do terceiro modo de vibração, obtido experimentalmente, mostrado anteriormente na figura 5.13 e a figura 6.5(b) mostra o modo radial mais próximo obtido numericamente. A figura 6.6(a) mostra a vista em corte do quarto modo de vibração, obtido experimentalmente, mostrado anteriormente na figura 5.14 e a figura 6.6(b) mostra o modo radial mais próximo obtido numericamente. O primeiro modo e o segundo modo de vibração, obtidos através da análise modal experimental, mostrados na figura 5.12, não tem equivalente no modelo numérico 2D, pois estes modos apresentam deslocamentos predominantemente no eixo z ( eixo longitudinal). A tabela 6.3 compara as frequências naturais calculadas, através do MEF, com as medidas e mostra os amortecimentos. A diferença no terceiro modo é de 11,5 por cento e no quarto modo é de 11,2, mas aumentam para os modos mais elevados. Analisando estes resultados chega-se as seguintes conclusões:

1. Os modos longitudinais (modos das figuras 6.7(a) e 6.7(b)) só podem ser obtidos através de um modelo tridimensional do estator.
2. Os modos radiais mostram uma boa concordância, em termos de forma modal, entre o resultado numérico e o experimental. Em termos de frequência natural temos uma diferença de 11,3 %.

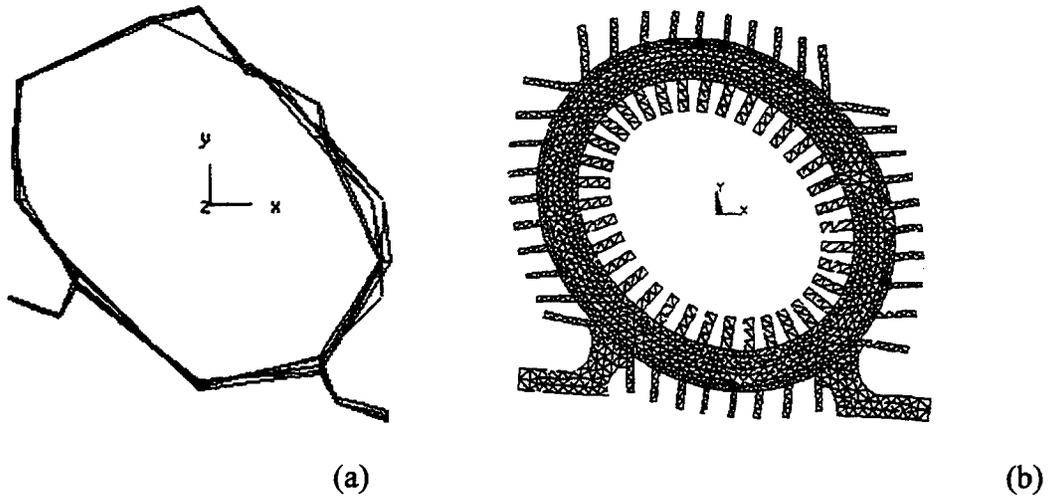


Fig. 6.5 - Representação das Formas Modais. (a) Plano XY do modelo experimental em 3d ( 1,158 KHz). (b) Modo Radial (1,309 KHz).

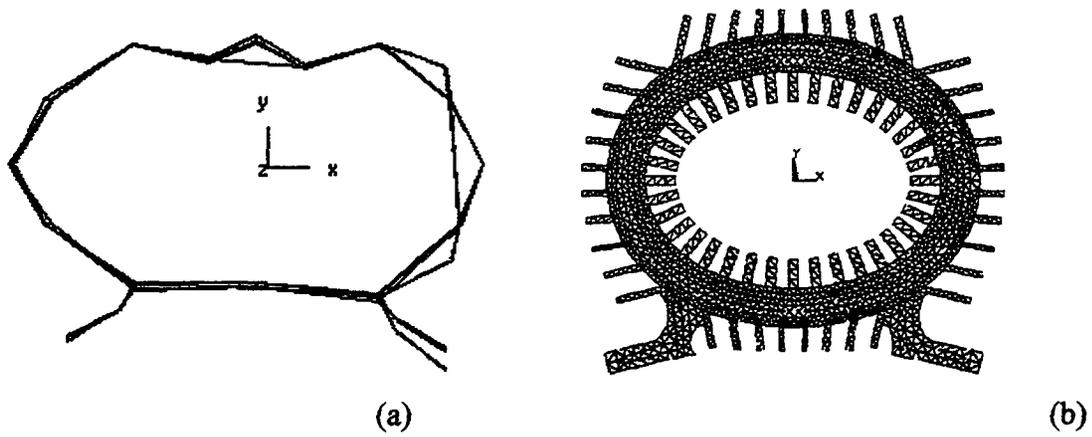


Fig. 6.6 - Representação das Formas Modais. (a) Plano XY do modelo experimental em 3d ( 1,220 KHz). (b) Modo Radial (1,374 KHz).

Tab. 6.3 - Comparação entre as frequências naturais obtidas usando o MEF e aquelas obtidas através da Análise Modal (Hz)

Modo	MEF (frequência)	Análise Modal (frequência e amortecimento)	Diferença (%)
1°	-	1002 (1,79%)	-
2°	-	1143 (0,71%)	-
3°	1309*	1158 (0,58%)	11,5
4°	1374*	1220 (0,56%)	11,2
5°	2306	1770 (0,84%)	23,2
6°	2313	1940 (0,84%)	16,1
7°	2528	2006 (0,46%)	20,6
			Média =16,5

\*Modos radiais

O modelo estrutural do MIG foi discretizado com elementos finitos triangulares de 6 nós indicados para deformações planas e formas irregulares num total de 1230 elementos e 2590 nós. As características dos materiais são as mesmas do modelo do MRC.

#### VI.4 Análise considerando Condição de Contorno de Deslocamento nulo.

Neste item vamos analisar a influência das condições de contorno sobre os parâmetros modais, ou seja, vamos modelar o motor considerando os pés fixos, que corresponde a situação normal de funcionamento do dispositivo. As figuras 6.7(a) e 6.7(b) mostram as duas formas modais mais significativas e a figura 6.7(c) mostra o modo a 2270 Hz que é um exemplo de ressonância localizada, nos quais as aletas se comportam como vigas engastadas. Comparando as figuras 6.5(b) e 6.7(a) nota-se que as restrições ao movimento modificam as frequências naturais e também criam defasagem angular entre os modos. O mesmo é observado comparando as figuras 6.6 (b) e 6.7(b). Isto ocorre porque a rigidez e a massa da estrutura são modificadas pela fixação do motor à base.

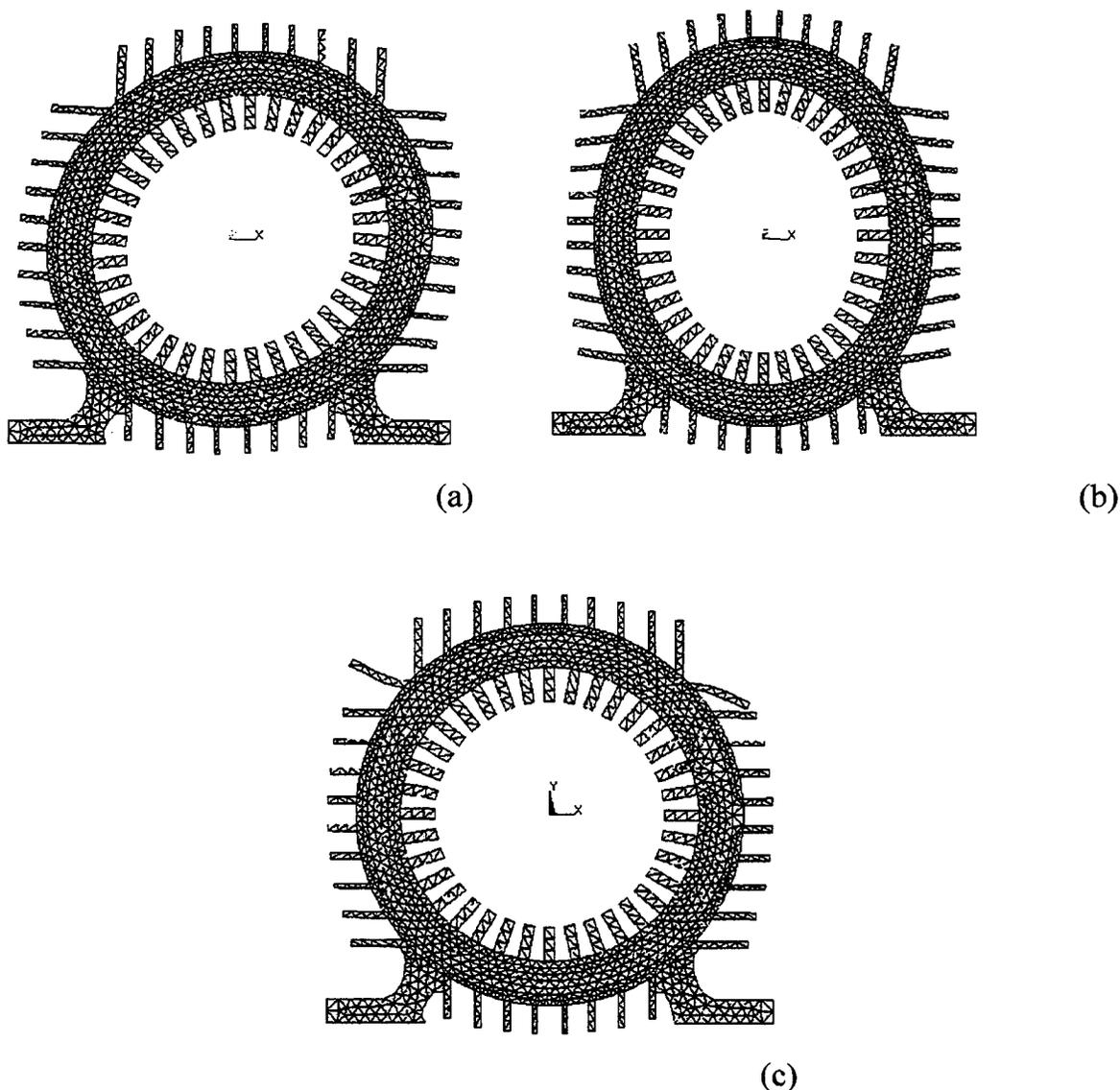


Fig. 6.7 – Formas Modais considerando condições de contorno ( $dx=0$  e  $dy=0$ ) nos pés. (a) 1283 Hz. (b) 1348 Hz. (c) 2270 Hz.

### VI.5 Conclusão

Utilizando o programa ANSYS foram criados modelos estruturais, utilizando o método de elementos finitos, dos motores em estudo. No caso do MRC, foram criados dois modelos: um bidimensional e outro tridimensional e, no caso do MIG um modelo bidimensional. Estes modelos foram utilizados no cálculo da resposta natural das estruturas.

A análise do modelo estrutural do MRC mostrou que a modelagem em duas dimensões é uma hipótese válida, já que as principais deformações ocorrem no plano

radial, pelo menos para as frequências naturais mais baixas, que são as mais importantes em termos de vibrações.

As frequências e modos naturais de vibração obtidos a partir modelo estrutural bidimensional do MIG foram comparados aos obtidos através da Análise Modal Experimental, a qual fez uso de um modelo modal tridimensional. Embora os modelos tenham número de dimensões diferentes, o modelo bidimensional mostrou-se válido, pois a diferença média entre as frequências naturais foi de 16,5 %. Sendo que para os modos radiais a diferença foi de 11,3%. No tocante as formas modais, obviamente não foi possível determinar os modos longitudinais através do modelo estrutural bidimensional, porém os modos radiais apresentaram excelente concordância.

O estator do MIG também foi modelado como estivesse fixado à base, ou seja, foram impostas condições de contorno de deslocamento nulo, e foram calculadas as frequências naturais e modos de vibração. Através de comparação com os resultados obtidos quando a estrutura estava livre, foi observado que os valores das frequências naturais são modificadas, bem como, os modos de vibração sofrem defasagem angular. Concluiu-se que isto ocorre porque a rigidez e a massa da estrutura são modificadas devido a colocação do engaste.

## **CAPÍTULO VII**

### **MODELAGEM E ANÁLISE DOS ESFORÇOS ELETROMAGNÉTICOS**

#### **VII.1 Introdução**

Para calcular as vibrações de origem magnética na estrutura mecânica do estator, é preciso determinar a distribuição a cada instante dos esforços eletromagnéticos no interior da máquina elétrica. Somente assim é possível ter uma boa representação das forças locais sobre os dentes da máquina [20], [37], [50]. As forças magnéticas são calculadas através do Método do Tensor de Maxwell que é aplicado após a obtenção da indução magnética à cada instante.

No caso do MRC basta calcular as correntes nos enrolamentos estatóricos, para em seguida determinar as induções magnéticas. Já no caso do MIG, devido a existência da gaiola, é necessário também calcular as correntes induzidas nas barras da mesma, já que as induções são função das correntes nas fases do estator e das correntes induzidas nas barras da gaiola.

Um procedimento semelhante pode ser aplicado para obtenção das forças magnéticas experimentalmente, ou seja, através da medição do fluxo concatenado à uma espira de detecção, fixada em um dente do estator, é possível obter a indução aproximada no dente, medida a indução aplica-se o Tensor de Maxwell.

Neste capítulo, portanto, são calculadas e medidas as correntes elétricas e induções magnéticas, para a obtenção das forças magnéticas.

#### **VII.2 Modelagem do Motor de Relutância Chaveado**

Para este estudo utilizou-se um MRC tipo PLD 112S/2, mostrado na figura 7.1, cujos dados se encontram no anexo B.

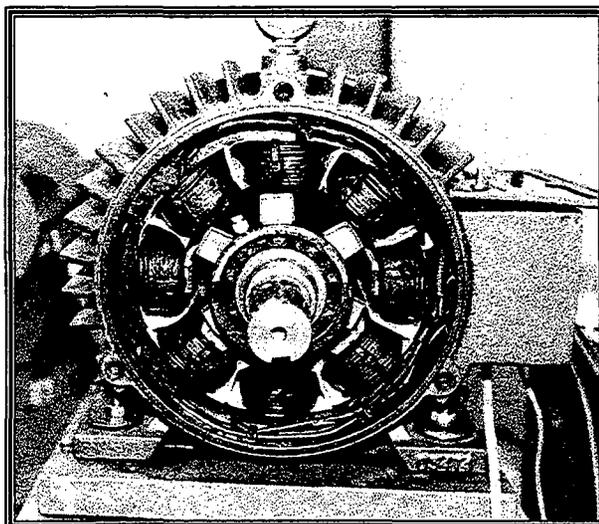


Fig. 7.1 - Motor de Relutância Chaveado.

VII.2.1 Cálculo das Correntes Elétricas

As correntes nas fases do motor, mostradas na figura 7.2, foram obtidas utilizando a técnica exposta na seção II.2.3, considerando um ângulo de disparo ( $\theta_{on}$ ) igual a  $40^\circ$  e de comutação ( $\theta_{off}$ ) igual a  $47^\circ$ .

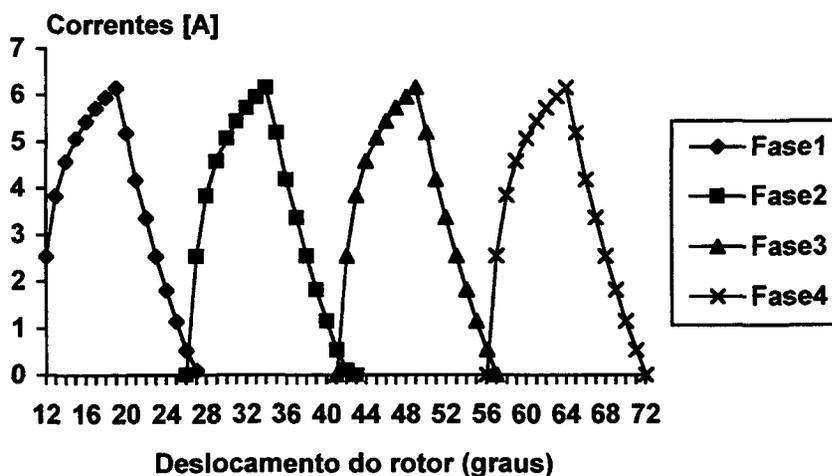


Fig. 7.2 - Correntes x posição do rotor.

O motor foi simulado considerando uma velocidade de 2500 rpm. A frequência da componente fundamental da corrente é igual a 250 Hz, já que no MRC a frequência da corrente em uma fase é dada por [7], [22]:

$$f_{ph} = N_r \omega / 60 \tag{7.1}$$

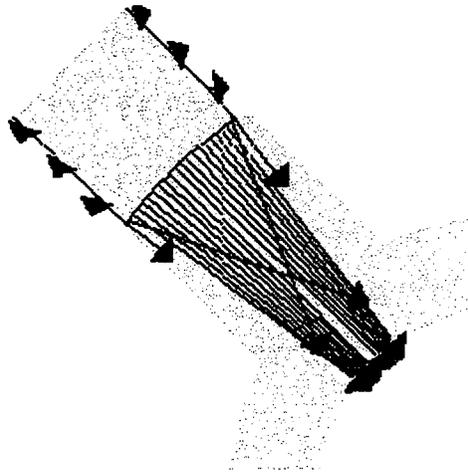
onde  $f_{ph}$  é a frequência da corrente de uma fase,  $N_r$  é o número de pólos do rotor e  $\omega$  é a velocidade em rpm.

### *VII.2.2 Cálculo das Forças Magnéticas*

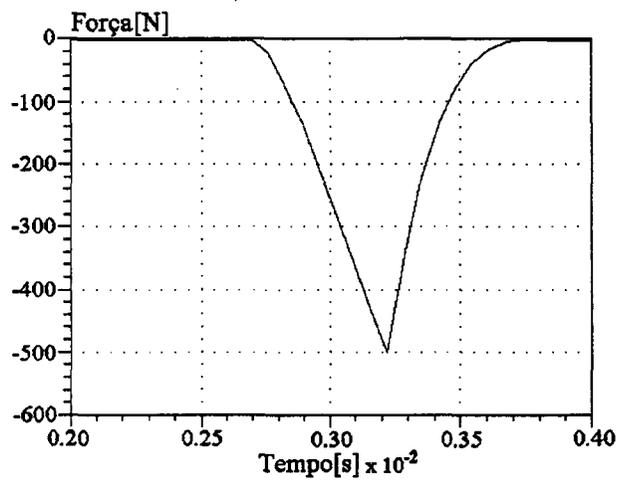
A distribuição de forças magnéticas, mostrada na figura 7.3(a), foi obtida para uma posição em que um dente do rotor esta alinhado com um dente do estator, utilizando o Método do Tensor de Maxwell. Já a figura 7.3(b) mostra a evolução da componente radial da força magnética ao longo do tempo, para um observador posicionado na extremidade do dente. Devido ao caráter periódico da densidade de fluxo no entreferro, as forças radiais são funções periódicas da coordenada periférica do rotor. Assim, podem ser representadas na forma de harmônicas de Fourier. Aplicando-se a transformação de Fourier à força calculada ao longo do tempo, chega-se ao espectro harmônico, mostrado na figura 7.3(c). Um aspecto interessante, relativo as forças, é que devido as correntes nas fases do MRC serem uni-direcionais, a frequência fundamental das forças magnéticas sobre um pólo estatórico são iguais aos das correntes. Isto pode ser constatado comparando o espectro da força magnética calculada, mostrado na figura 7.3(c) com o espectro medido da corrente elétrica, mostrado na figura 7.4(b). A forma de onda de corrente, mostrada na figura 7.4(a), foi medida nas mesmas condições da corrente calculada.

Através da comparação entre o espectro de frequências das forças magnéticas e as frequências naturais é possível determinar em que frequências ocorrerão os maiores picos de vibração e através da comparação entre os modos de força (representados nas figuras 7.5 e 7.6 em linha azul escuro) e dos modos de vibração quando animados é possível determinar que tipo de deformação forçada a estrutura sofrerá quando excitada por determinada harmônica de força. Por exemplo, a figura 7.3(c) mostra que as forças magnéticas podem excitar vários modos naturais de vibração, mas em particular o terceiro modo de vibração, mostrado na figura 6.3(b), cuja a frequência natural de vibração (1242 Hz) esta muito próxima da frequência da 5ª harmônica da força magnética. Além disso, o modo de força referente a 5ª harmônica (Fig. 7.5(e)) possui forma trapezoidal que tende a movimentar a estrutura em diagonal, este também é o movimento livre que o modo de vibração a 1242 Hz (Fig. 6.3(b)) executa quando

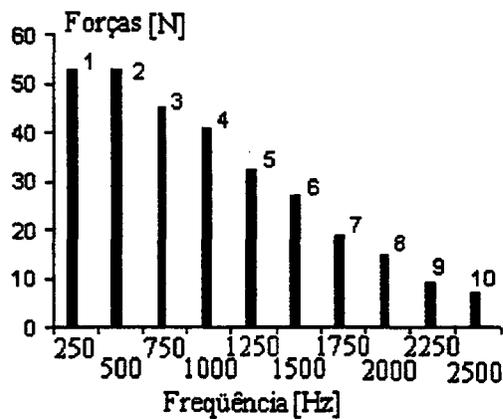
animado, assim chega-se a conclusão que haverá um grande pico de vibração na frequência de 1250 Hz e que a deformação produzida será semelhante a forma modal do modo a 1242 Hz.



(a)

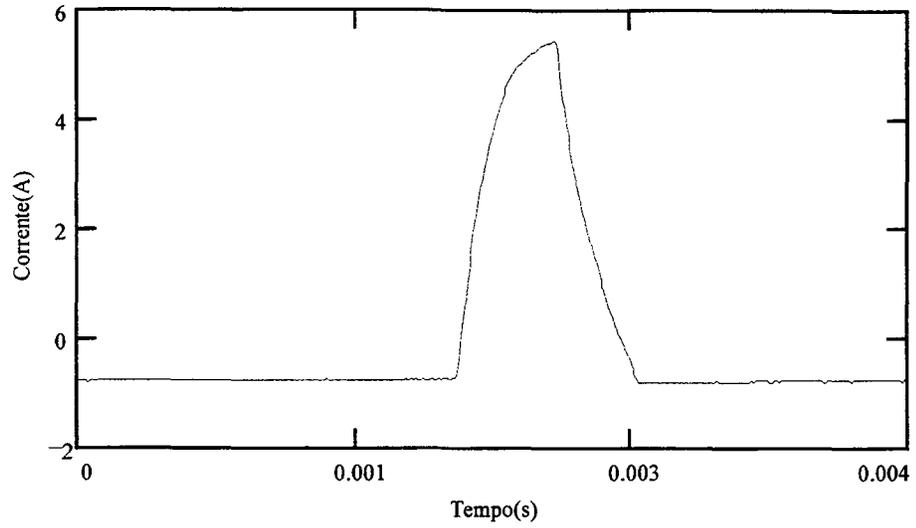


(b)

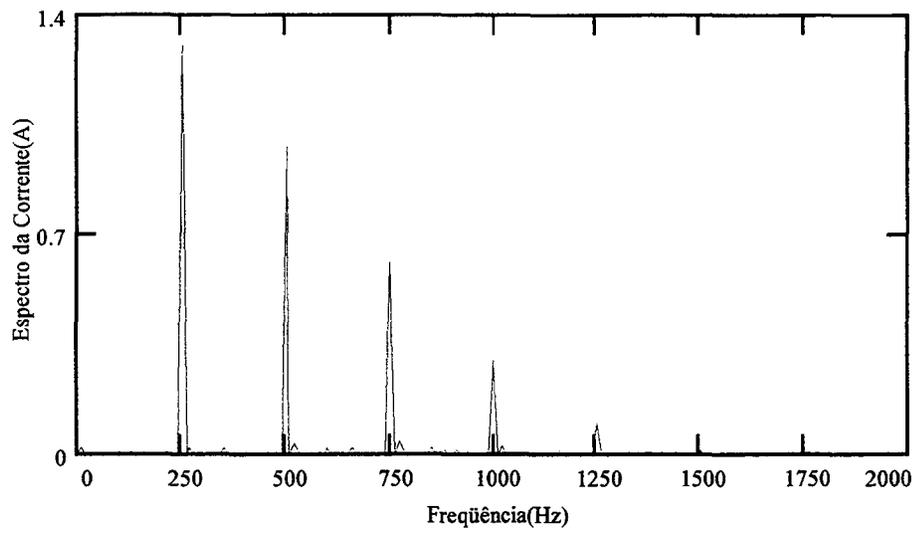


(c)

Fig. 7. 3 - Força magnética em um dente. (a) Distribuição local. (b) Evolução da componente radial ao longo do tempo. (c) Espectro harmônico da componente radial.



(a)



(b)

Fig. 7.4 - Corrente medida. (a) Forma de onda no tempo. (b) Espectro harmônico.

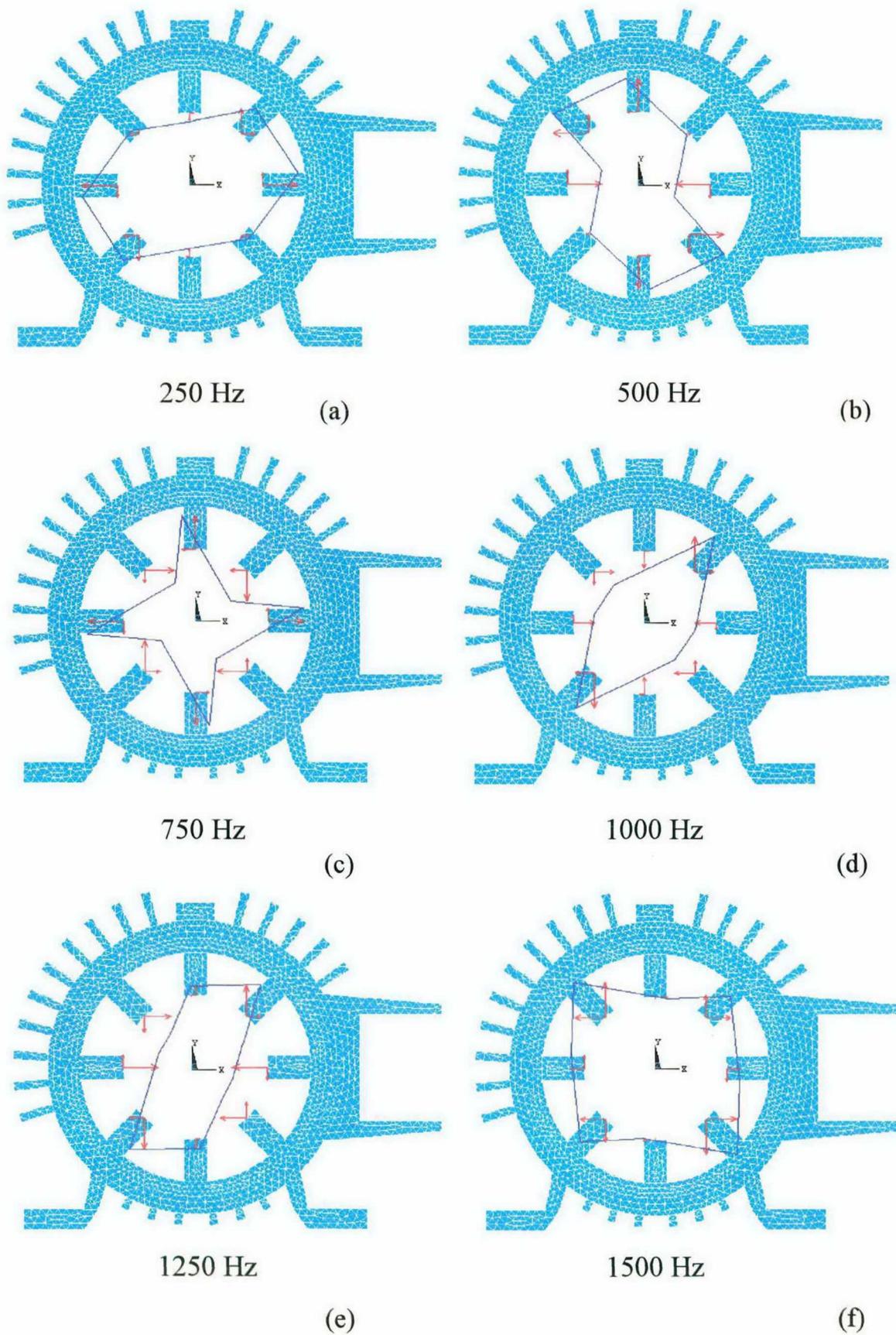


Fig. 7.5 - Distribuição espacial das harmônicas ou modos de força (250 Hz a 1500 Hz).

(a) 1º modo. (b) 2º modo. (c) 3º modo. (d) 4º modo. (e) 5º modo. (f) 6º modo.

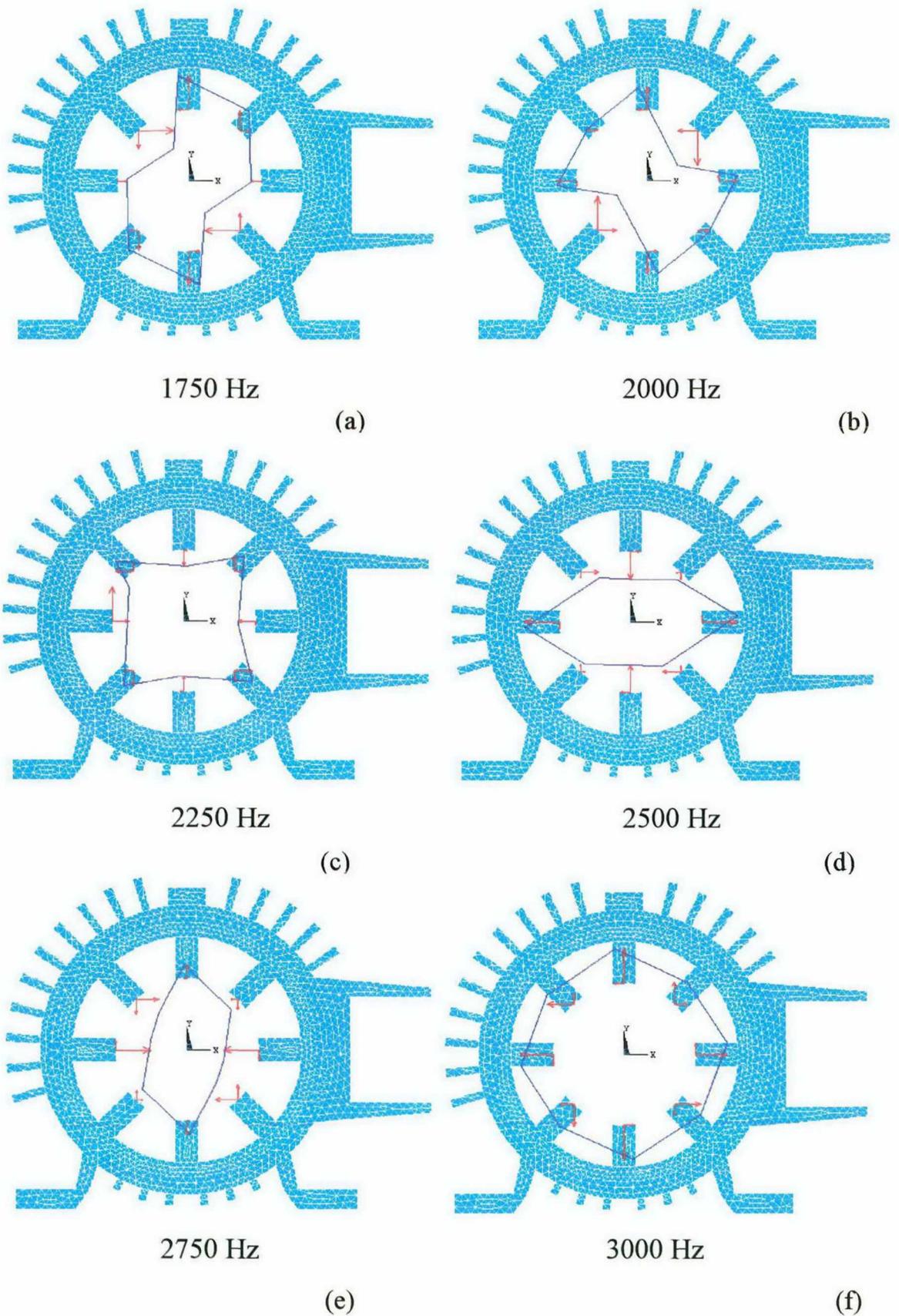


Fig. 7.6 - Distribuição espacial das harmônicas ou modos de força (1750 Hz a 3000 Hz).

(a) 7º modo. (b) 8º modo. (c) 9º modo. (d) 10º modo. (e) 11º modo. (f) 12º modo.

### VII.3 Modelagem do Motor de Indução de Gaiola

Para este estudo utilizou-se um MIG, fabricado pela WEG MOTORES, cujos dados se encontram no anexo B.

#### VII.3.1 Cálculo das Correntes Estatóricas e Rotóricas

A distribuição do fluxo magnético e das correntes induzidas nas barras da gaiola, mostrada na figura 7.7, foi obtida para uma velocidade de 1751 rpm, escorregamento de 2,744 % e tensão eficaz de 440v. As correntes nas fases a, b e c e as correntes induzidas em três barras vizinhas são mostradas nas figuras 7.8(a) e 7.8(b), respectivamente, considerando as mesmas condições. Nota-se que a frequência das correntes induzidas é igual a 1,65 Hz, ou seja, 2,744 % da frequência fundamental das corrente nas fases (60Hz).

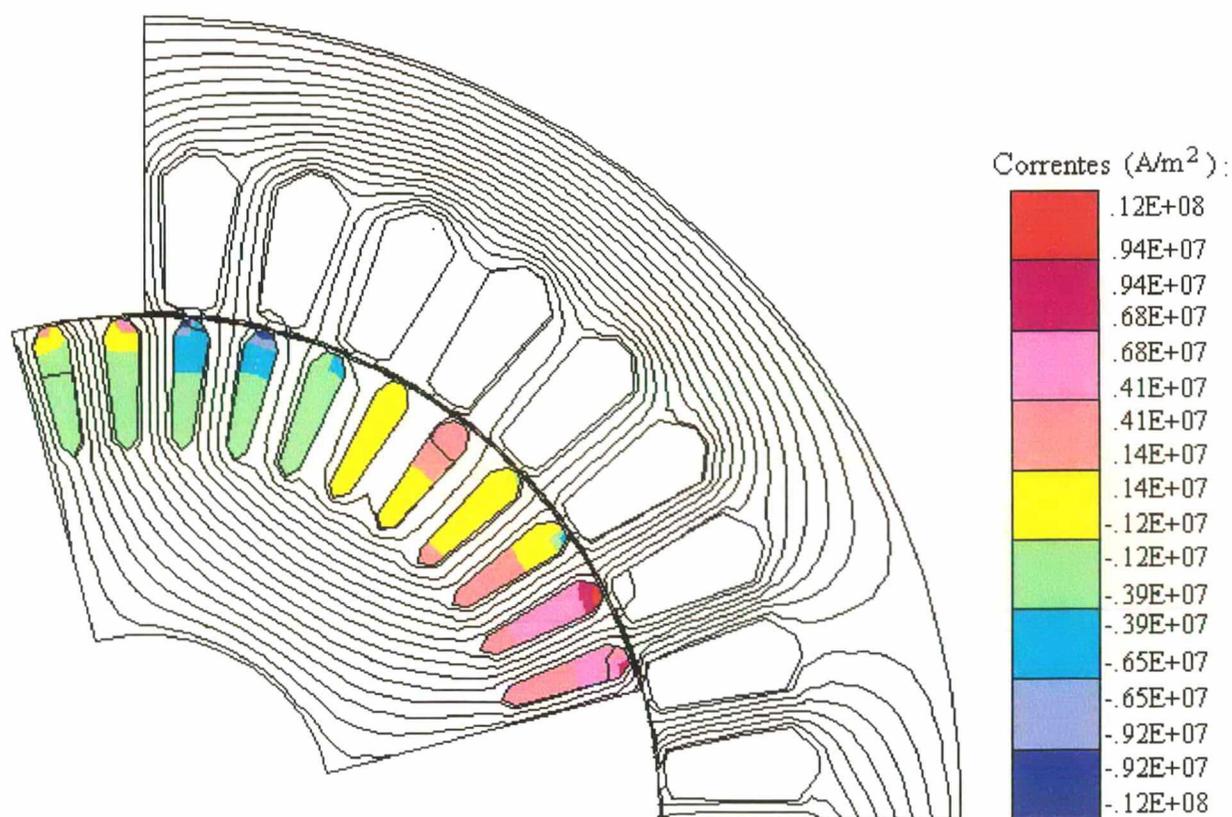
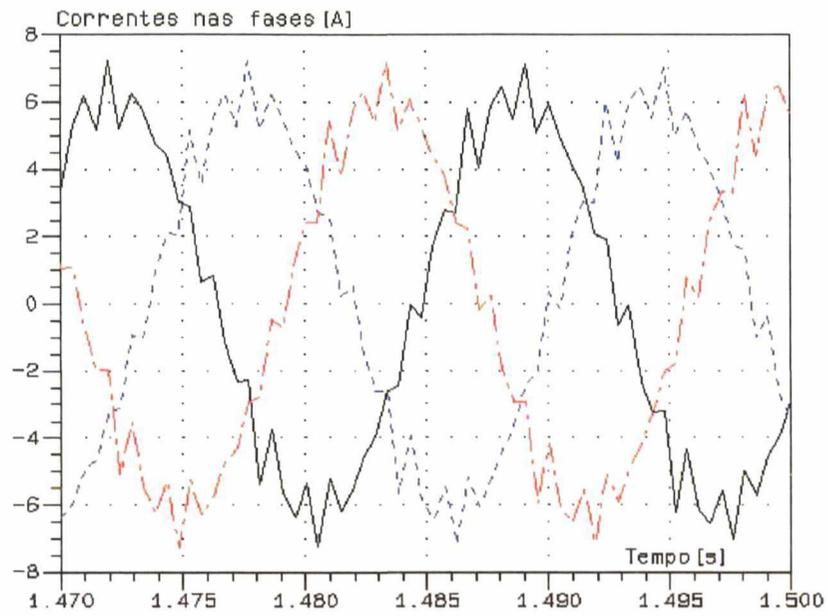
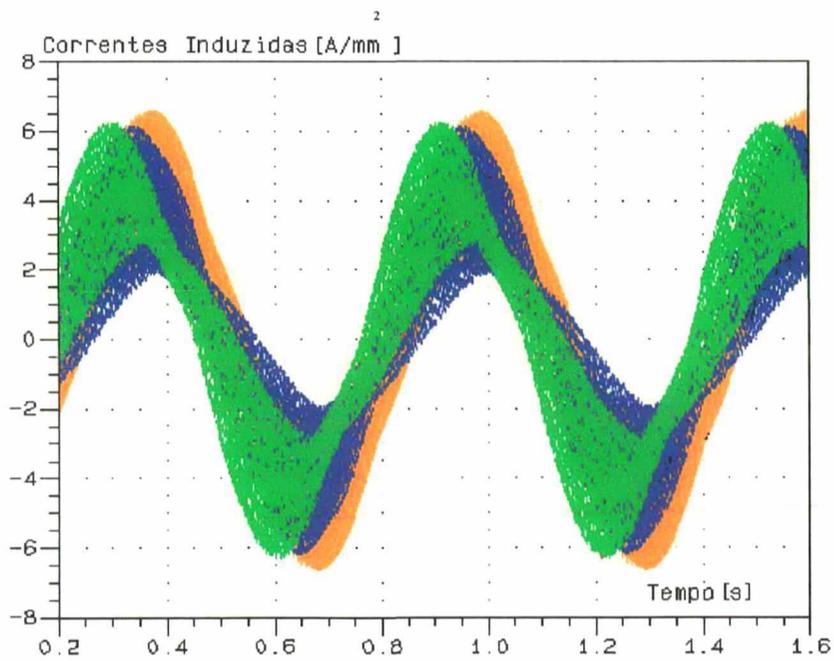


Fig. 7.7 – Distribuição do fluxo magnético e das correntes induzidas nas barras em  $A/m^2$ .



(a)



(b)

Fig. 7.8 - Correntes calculadas. (a) nas fases a, b e c. (b) induzidas em três barras vizinhas.

### VII.3.2 Cálculo das Forças Magnéticas

A distribuição local das forças magnéticas foi obtida a partir da distribuição do campo magnético criada pelas correntes estatóricas e rotóricas, utilizando o método exposto na seção III.4. As figuras 7.9(a) e 7.9(b) mostram as forças magnéticas locais, atuando em um dente do estator, para duas posições diferentes do rotor.

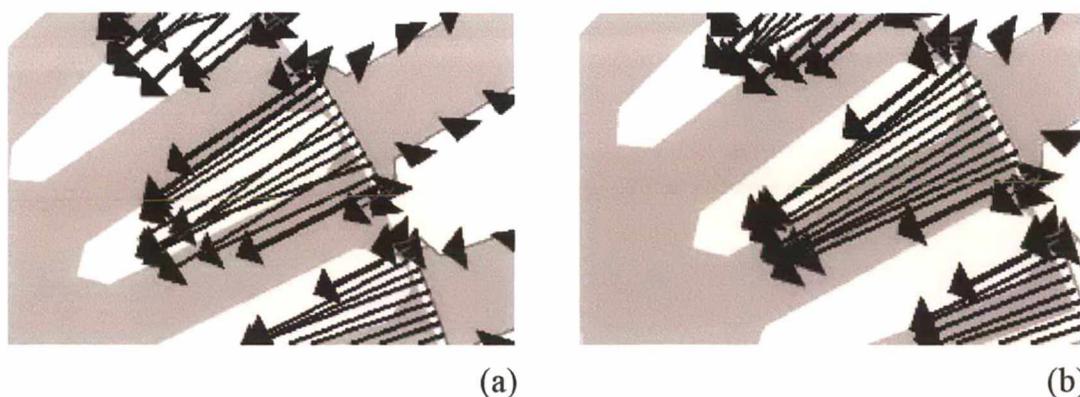


Fig. 7.9 - Distribuição local das forças magnéticas em um dente do estator. (a) barra do rotor em frente ao dente. (b) barra deslocada de 10 graus.

A evolução no tempo das componentes radiais e tangenciais da força magnética em um dente e em três dentes sucessivos, são mostradas nas figuras 7.10 e 7.11, respectivamente.

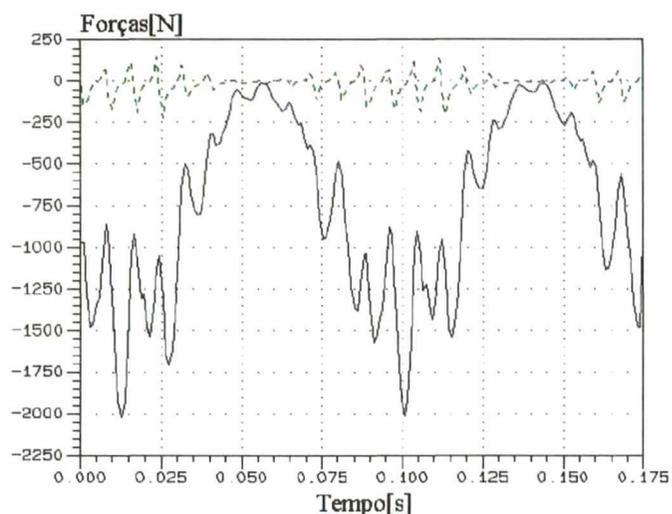


Fig. 7.10 - Evolução no tempo das forças magnéticas em um dente do estator (Linha cheia: componente radial. Linha tracejada: componente tangencial).

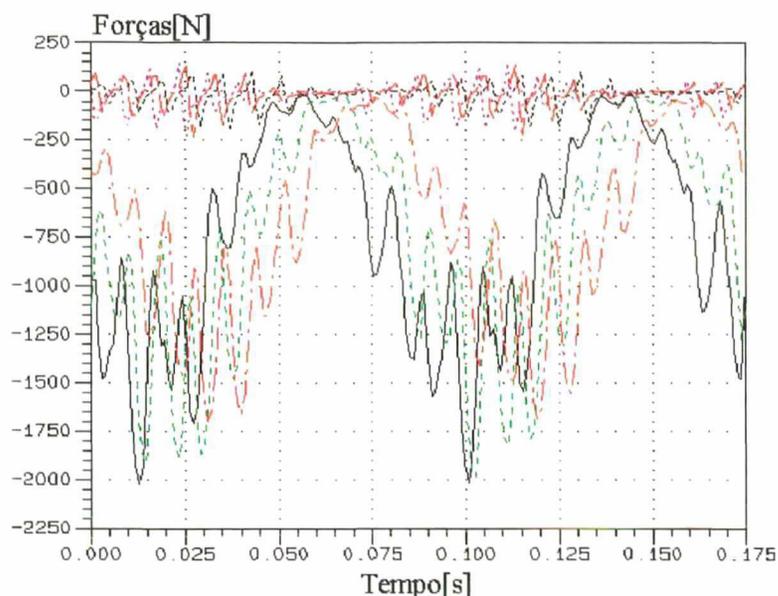


Fig. 7.11 - Evolução no tempo das forças magnéticas em três dentes sucessivos.

Observa-se na figura 7.10, que o módulo da componente radial é bem superior ao da componente tangencial, e também o efeito de modulação provocado pelas ranhuras do estator em ambas as formas de onda.

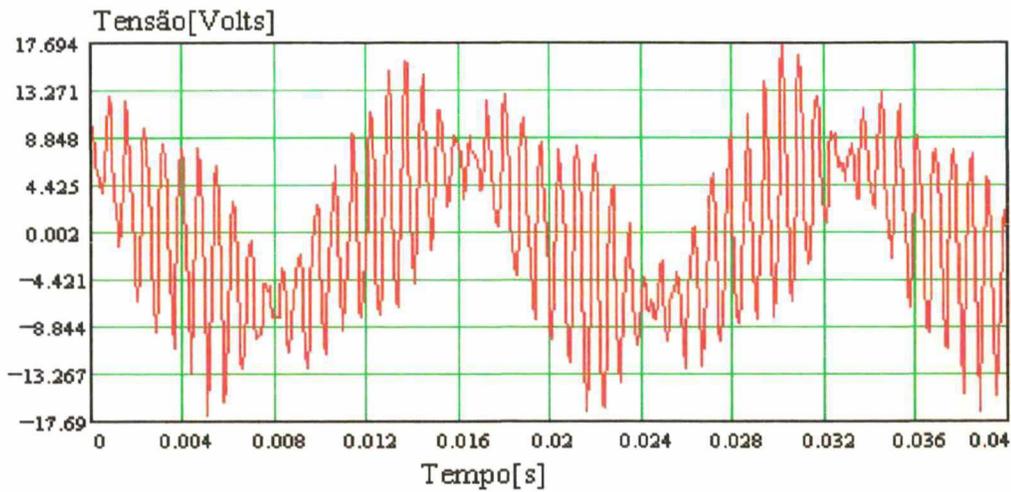
A diferença entre os valores das componente radiais das forças magnéticas, na figura 7.11, pode ser atribuída à malha de elementos finitos nos três dentes sucessivos não ser exatamente igual.

### VII.3.3 Ensaio para Medição da Força Magnética Radial

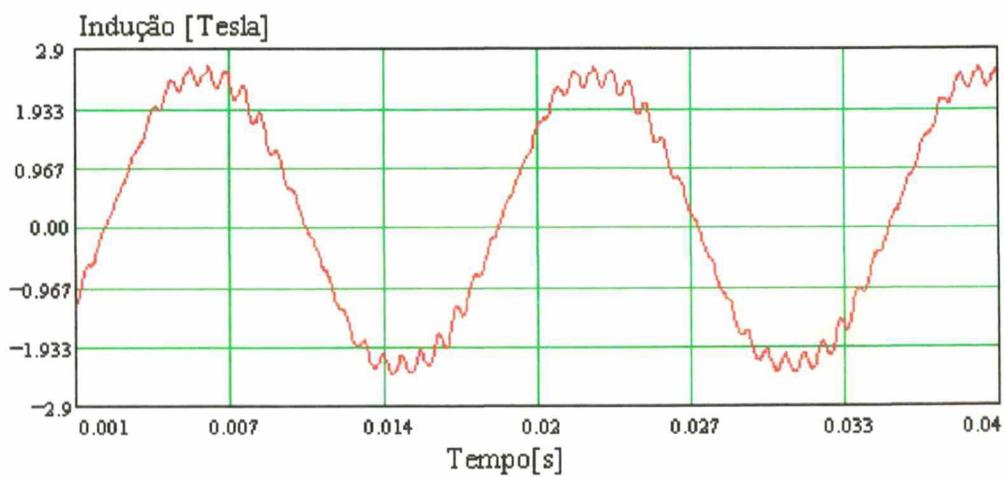
Para medição das formas de onda das forças magnéticas foi feito um ensaio a plena carga, seguindo o procedimento exposto no capítulo II, no qual foi utilizado um motor de indução de gaiola sem inclinação nas barras, especialmente construído para este experimento. A utilização de um motor sem inclinação tem por objetivo aproximar os resultados medidos dos experimentais, já que o modelo por elementos finitos utilizado no cálculo eletromagnético é bidimensional, e não é capaz de reproduzir o efeito de inclinação das barras.

A tensão induzida na bobina de detecção de fluxo, foi medida para uma condição de plena carga. O fluxo magnético foi obtido integrando a tensão induzida. A indução magnética foi calculada dividindo o fluxo magnético pela seção transversal do dente, elevando ao quadrado a indução magnética chegou-se, finalmente, a força magnética

atuando no dente do estator na direção radial. As figuras 7.12(a) e 7.12(b) mostram, respectivamente, a tensão induzida e a indução magnética. As figuras 7.13(a) e 7.13(b) mostram a força magnética e seu espectro de frequências.



(a)



(b)

Fig. 7.12 - (a) Tensão induzida na bobina de detecção de fluxo à plena carga. (b) Indução magnética no dente.

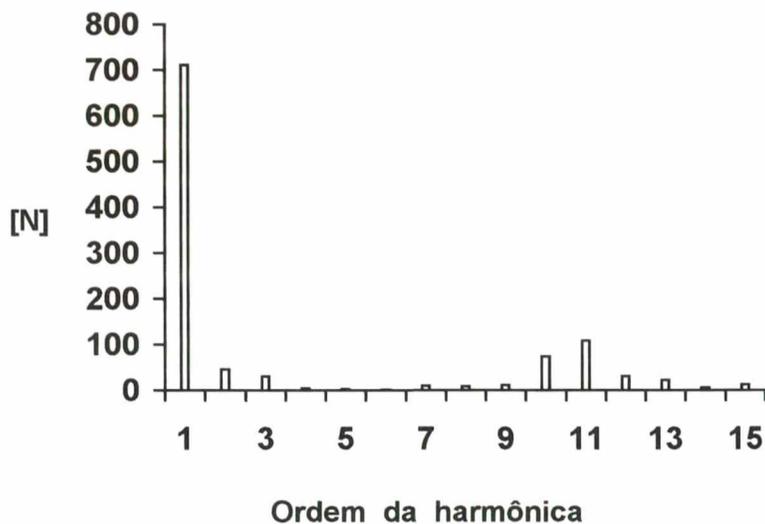
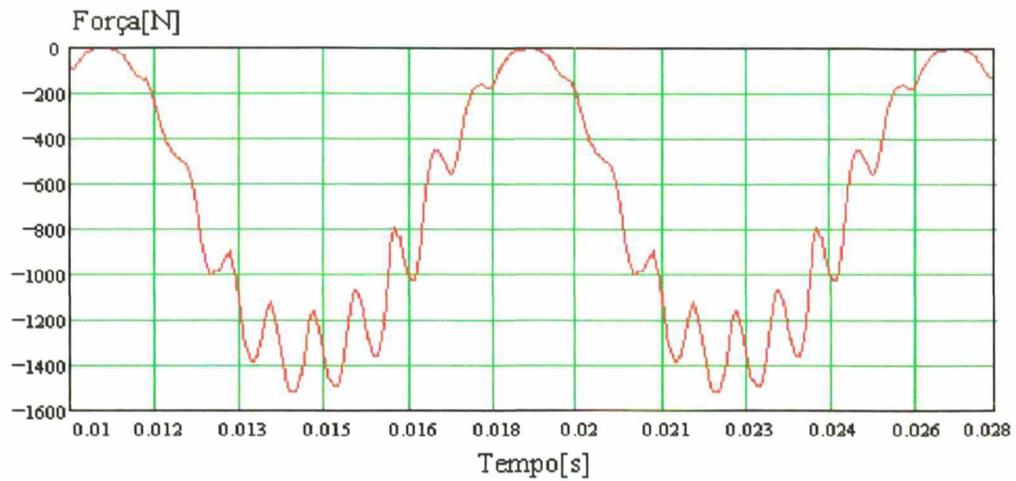
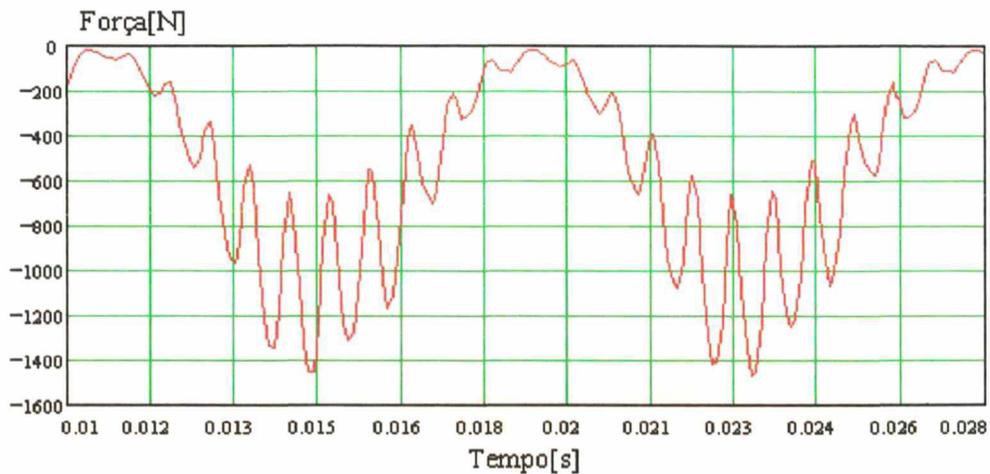


Fig. 7.13 - Força magnética medida no dente. (a) ao longo do tempo. (b) espectro harmônico.

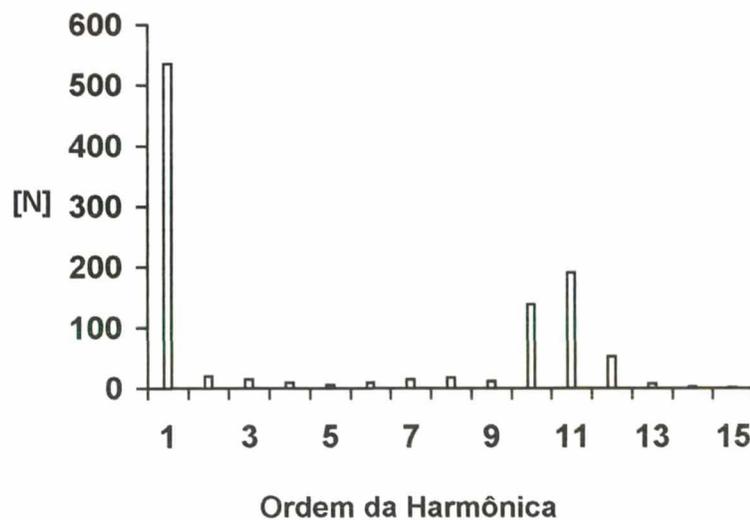
#### VII.3.4 Análise da Força Magnética Radial obtida por Cálculo de Campos

A força magnética obtida numericamente na direção radial, na condição em que o motor opera à plena carga, é mostrada na figura 7.14(a). Observando a respectiva distribuição harmônica, mostrada na figura 7.14(b), na qual a frequência da componente fundamental é igual a 120 Hz, ou seja duas vezes a frequência elétrica, conclui-se que as harmônicas de ranhura, principalmente a 11<sup>a</sup> e suas bandas laterais, são as que possuem

maior amplitude. Observa-se também que há uma razoável concordância entre o espectro das forças magnéticas obtido numericamente e o obtido através de medição. As diferenças provavelmente se devem a erros de medição e a erros numéricos devido a malha de elementos finitos. De qualquer forma, ambas as distribuições mostram que as harmônicas de ranhura citadas são as mais importantes.



(a)



(b)

Fig. 7. 14 - Força magnética obtida numericamente. (a) ao longo do tempo. (b) espectro harmônico.

As figuras 7.15(a), 7.15(b) e 7.15(c) mostram as componentes cartesianas das forças magnéticas e os modos de força, para as principais harmônicas de ranhura 10<sup>a</sup>, 11<sup>a</sup> e 12<sup>a</sup>, respectivamente.

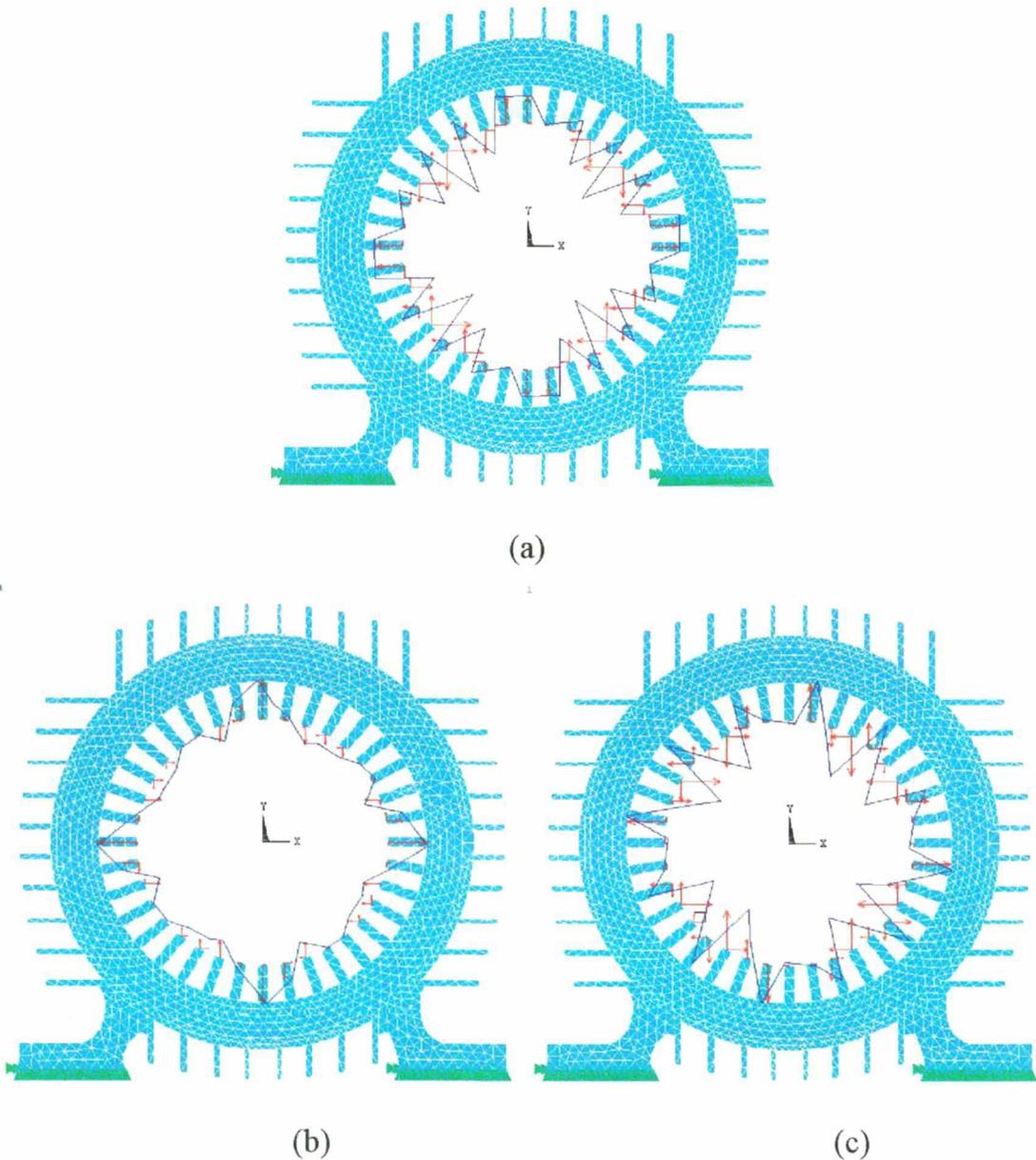
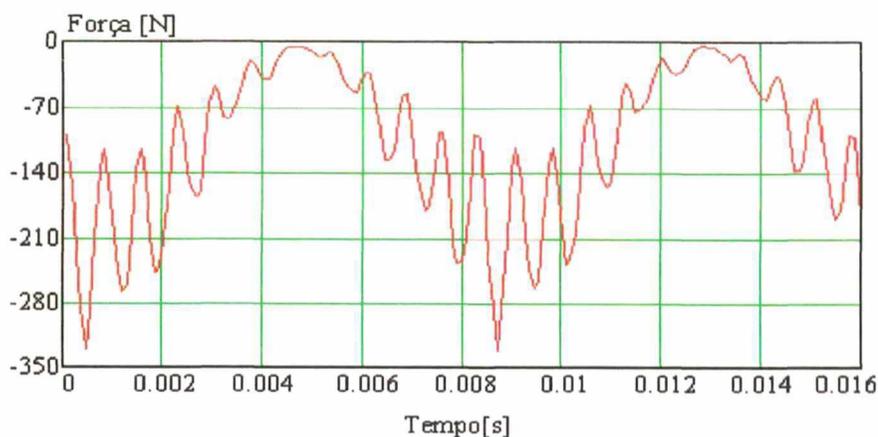


Fig. 7.15 - Distribuição espacial das harmônicas de força. (a) 10<sup>a</sup> ordem, modo 16; (b) 11<sup>a</sup> ordem, modo 8 (c) 12<sup>a</sup> ordem, modo 12.

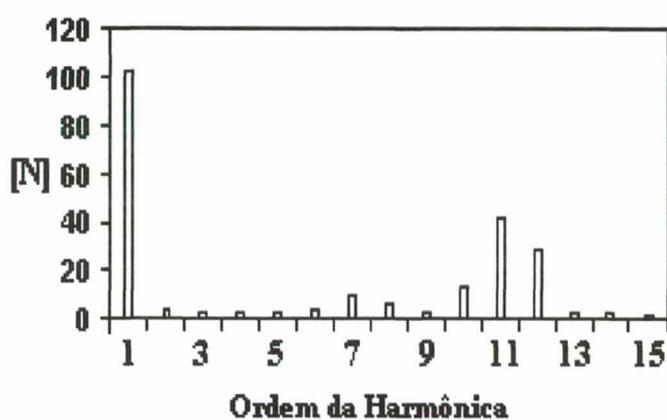
Através dos resultados da resposta forçada, que serão apresentados no capítulo 8, ter-se-á condições de validar o método de cálculo de forças de maneira indireta, ou seja, comparando as amplitudes dos picos de vibração calculados com os medidos. Porém, antes disso, é possível determinar de maneira simples onde ocorrerão os maiores picos de vibração, comparando o espectro de frequências das forças magnéticas com as frequências naturais, bem como, os modos de força com os modos de vibração. Assim, concluiu-se que a 11<sup>a</sup> harmônica da componente radial da força magnética, cuja

freqüência é igual a 1320 Hz, excitará provavelmente o modo de vibração a 1348 Hz, mostrado na figura 6.7(b). Além disso, o modo de força correspondente a 1320 Hz (modo 8, Fig. 7.15(b)), assemelha-se a deformação natural deste modo de vibração.

Para fins de comparação com os resultados obtidos à plena carga, a figura 7.16(a) mostra a componente radial da força, calculada na condição em que o motor opera à vazio e a figura 7.16(b) mostra o espectro harmônico correspondente.



(a)



(b)

Fig. 7. 16 - Força magnética radial calculada a vazio. (a) ao longo do tempo. (b) espectro harmônico.

Como no caso anterior, a frequência da componente fundamental é igual a 120 Hz e as principais harmônicas são a décima primeira e suas bandas laterais, porém o módulo das componentes harmônicas na condição a vazio é bem inferior do que na condição à plena carga. Através da tabela 7.1 os modos de força obtidos à plena carga (Fig. 7.15), são comparados com os obtidos a vazio (Fig. 7.17). Conclui-se, portanto, que os modos de força variam com a carga.

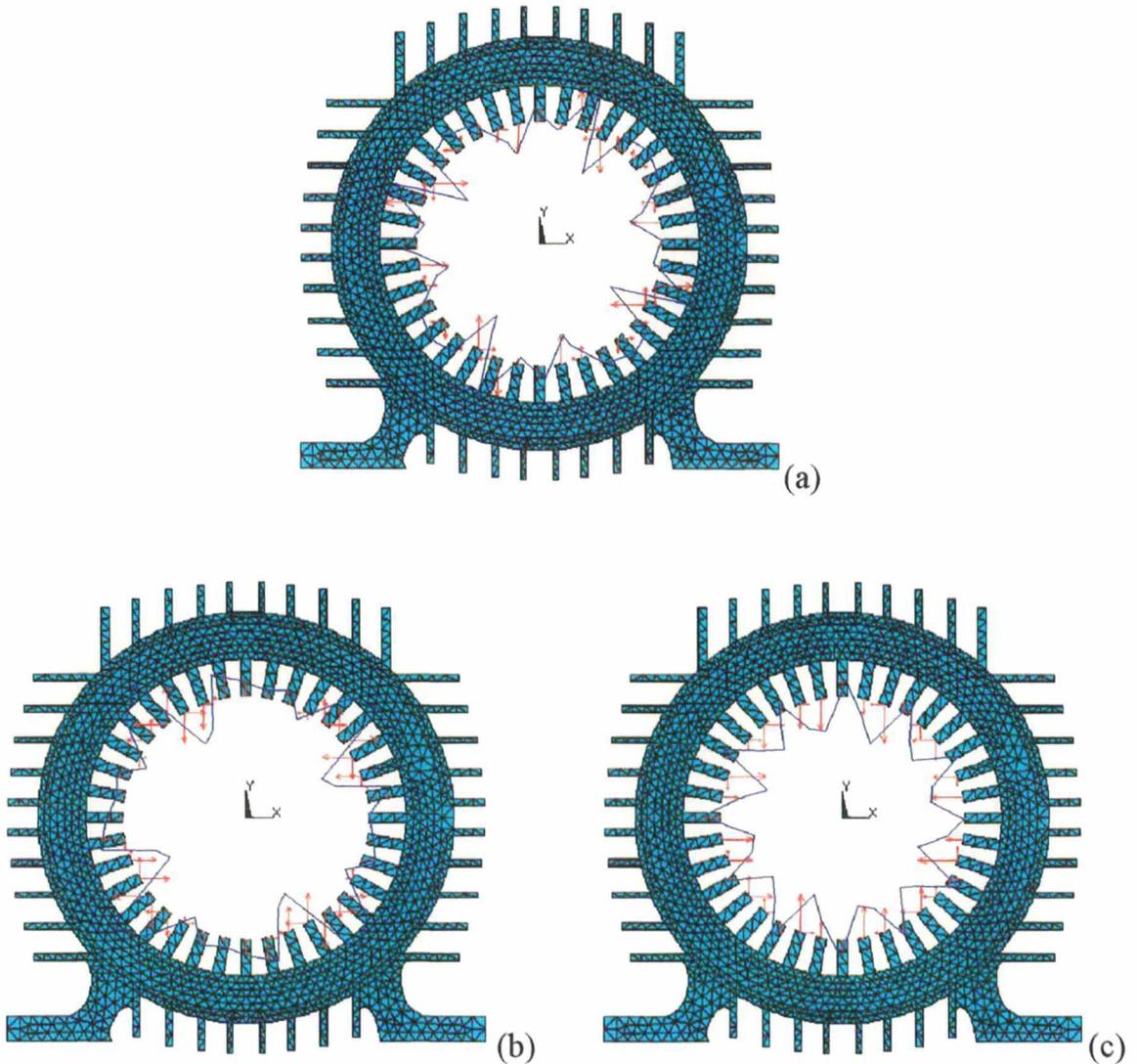


Fig. 7. 17 - Distribuição espacial das harmônicas de força. (a) 10<sup>a</sup> ordem , modo 8; (b) 11<sup>a</sup> ordem, modo 4 (c) 12<sup>a</sup> ordem, modo 12.

Tabela 7.1 - Comparação entre os modos obtidos à plena carga e os obtidos a vazio.

<i>Condição de carga</i>	<i>Ordem da harmônica</i>	<i>Modo de força</i>
Plena carga	10	16
	11	8
	12	12
Vazio	10	8
	11	4
	12	12

#### VII.4 Conclusão

A distribuição do fluxo magnético e das correntes induzidas nas barras do rotor do MIG foram determinadas através das equações do campo eletromagnético e do circuito elétrico externo.

A distribuição das forças magnéticas ao longo dos dentes do estator foram calculadas, aplicando o Tensor de Maxwell à indução magnética obtida por meio de cálculo de campos.

Calculou-se o espectro das forças magnéticas radiais dos motores em estudo. No caso do MRC, comprovou-se que a frequência fundamental das força magnética sobre um pólo estático é igual a frequência fundamental da corrente, e que as harmônicas de maior amplitude ocorrem nas baixas frequências. No caso do MIG, comprovou-se que a frequência fundamental das forças magnéticas sobre um pólo estático é igual ao dobro da frequência fundamental da corrente e que as harmônicas de maior amplitude são a décima primeira harmônica e suas bandas laterais.

A componente radial da força magnética calculada por meio de cálculo de campos em um dente do MIG, foi comparada com a medida através de ensaio, obtendo-se boa concordância.

Observou-se que o módulo das forças magnéticas e suas distribuições espaciais variam com a carga, porém o espectro de frequências é pouco alterado.

Em alguns casos é possível determinar em que frequências ocorrerão os maiores picos de vibração pelas simples comparação entre o espectro das forças magnéticas e os modos de vibração.

## CAPÍTULO VIII

### CÁLCULO DA RESPOSTA FORÇADA E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

#### VIII.1 Introdução

Neste capítulo a teoria que dá embasamento ao Método de Superposição Modal é introduzida e este método é utilizado para calcular a resposta forçada dos motores em estudo, possibilitando desta forma, determinar quantitativamente as vibrações de origem magnética.

#### VIII.2 Método de Superposição Modal

As estruturas práticas, tais como máquinas elétricas, são geralmente modeladas por sistemas de equações contendo múltiplos graus de liberdade. As propriedades de uma estrutura contínua podem ser simuladas com a precisão desejada por um sistema de equações contendo um número finito de graus de liberdade. Cada grau de liberdade corresponde a uma frequência natural e a um modo natural, que podem ser examinados individualmente [15], [36], [45].

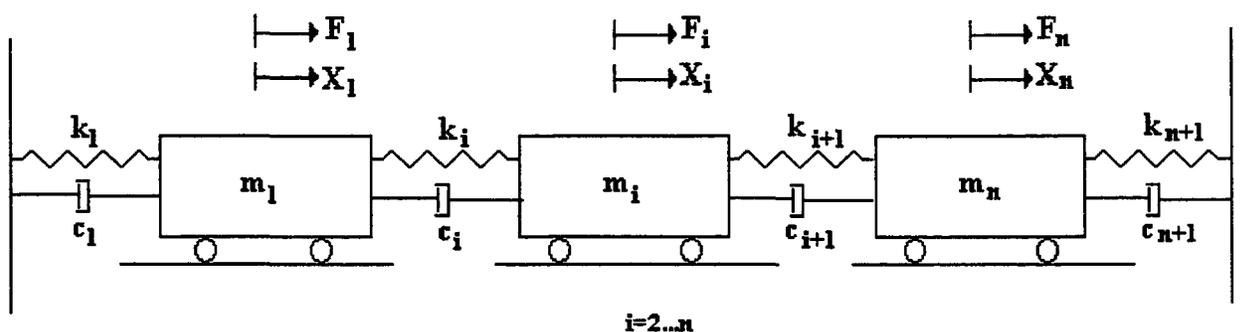


Fig. 8.1 - Sistema com  $n$  graus de liberdade.

Considerando um sistema com  $n$  de graus de liberdade mostrado na Fig. 8.1, a equação dinâmica do sistema é:

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = \{F\} \quad (8.1)$$

Onde a matriz de massa  $[M]$  é diagonal, e as matrizes  $[C]$  e  $[K]$  são as matrizes de amortecimento e rigidez, respectivamente (matrizes não-diagonais),  $x$  é o vetor deslocamento e  $\{F\}$  é o vetor força.

Resolvendo o sistema de equações acima obtêm-se a resposta de  $\{x\}$  para um particular conjunto de forças de excitação. O maior obstáculo encontrado é o acoplamento entre equações, porque embora a matriz de rigidez seja simétrica, não é diagonal resultando em um acoplamento elástico.

Se o sistema de equações puder ser desacoplado obter-se-á assim matrizes diagonais para a massa, para o amortecimento e para a rigidez, então cada equação será similar a um sistema de um grau de liberdade, podendo ser resolvida independentemente uma da outra. O processo de transformação de um sistema de equações do movimento em um conjunto de equações independente chama-se análise modal. Para que o sistema possa ser desacoplado assume-se que o amortecimento é proporcional, ou seja, considera-se que a matriz de amortecimento  $[C]$  é proporcional a matriz de rigidez  $[K]$  ou a matriz de massa  $[M]$ , ou ainda a alguma combinação linear das duas (vide anexo A, item A.III). Devido a esta hipótese, a transformação de coordenadas que diagonaliza as matrizes de massa e de rigidez também diagonalizará a matriz de amortecimento. Esta hipótese não foge muito da realidade, pois trabalhos anteriores realizados em estatores de máquinas elétricas indicaram a presença modos de vibração bem definidos em todas as frequências de ressonância, o que indica a presença de amortecimento proporcional [45].

A transformação de coordenadas requerida é aquela que desacopla o sistema em relação à inércia e à elasticidade, e portanto resulta em matrizes de massa e rigidez diagonais. As propriedades de ortogonalidade dos autovetores são usados para este propósito.

Considerando a equação geral do movimento de uma estrutura mecânica discretizada, deduzida no capítulo IV:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (8.2)$$

As  $\{q\}$  coordenadas são transformadas em  $\{r\}$  coordenadas usando a seguinte relação:

$$\{q\} = [P]\{r\} \quad (8.3)$$

onde  $[P] = [\{v_1\} \quad \{v_2\} \quad \{v_3\} \quad \dots \quad \{v_n\}]$  é a matriz modal (vide anexo A) e  $\{r\}$  é o vetor de deslocamentos modais. Portanto,

$$[M][P]\{\ddot{r}\} + [C][P]\{\dot{r}\} + [K][P]\{r\} = \{F\} \quad (8.4)$$

Pré - multiplicando ambos os lados de (8.4) pela transposta da matriz modal  $[P]^T$  e usando as propriedades de ortogonalidade da matriz modal, as quais são dadas pelas seguintes relações, obtêm-se:

$$\begin{aligned} [P]^T [M][P] &= m_i \\ [P]^T [C][P] &= c_i \\ [P]^T [K][P] &= k_i \end{aligned} \quad (8.5)$$

Desde que  $m_i$ ,  $c_i$  e  $k_i$  são matrizes diagonais, obtemos um conjunto de equações independentes da forma:

$$m_i \ddot{r}_i + c_i \dot{r}_i + k_i r_i = \{P\}^T \{F\} = f_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.6)$$

onde cada equação representa um sistema de um grau de liberdade,  $m_i$ ,  $c_i$  e  $k_i$  são a  $i^{\text{ésima}}$  massa modal, o  $i^{\text{ésimo}}$  amortecimento modal e a  $i^{\text{ésima}}$  rigidez modal, respectivamente.

A equação (8.6) forma a base para o uso de sistemas de força distribuídos na excitação de estruturas. Assim, se um sistema de forças em particular possuir uma distribuição de forças semelhante a um determinado modo de vibração, a resposta do sistema será similar a de um sistema com um grau de liberdade, ou seja, cada frequência de ressonância será individualmente excitada.

A resposta vibratória de uma estrutura contínua (i.e. sistema com múltiplos graus de liberdade) à qualquer força pode ser representada pela *superposição* das várias respostas dos seus modos individuais, considerando cada modo como a resposta de um sistema de um grau de liberdade. A resposta vibratória forçada de um sistema contínuo

portanto, ser obtida em termos de seus parâmetros modais se a massa, o amortecimento e a matriz de rigidez forem determinados com precisão. A massa e a rigidez são necessárias na determinação das freqüências de ressonância da estrutura, já o amortecimento é importante na determinação dos valores das acelerações.

Considerando que a estrutura é excitada por um sistema de forças de mesma freqüência  $\omega_h$ , mas com muitas magnitudes e fases, a equação (8.6) tem a seguinte solução na forma complexa:

$$r_s = G_{sk}(\omega_h)F_k \quad (8.7)$$

onde  $G_{sk}(\omega_h)$  é a matriz de transferência da estrutura mecânica, que pode ser expressa como:

$$G_{sk}(\omega_h) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{m_i \omega_i^2 \left( 1 - \frac{\omega_h^2}{\omega_i^2} \right) + j c_i \omega_h} u_i^s u_i^k \right\} \quad (8.8)$$

onde  $N$  é o número de modos;  $u_i^s$  é a coordenada modal na posição de resposta  $s$ ;  $u_i^k$  é a coordenada modal na posição de excitação  $k$ ;  $m_i$ ,  $\omega_i$  e  $c_i$  são respectivamente a massa, a freqüência natural e o coeficiente de amortecimento de modo  $i$ .

Da equação (8.8) a resposta em freqüência para cada harmônica pode ser calculada levando em conta o amortecimento viscoso de cada modo. Nos dois exemplos seguintes a hipótese de amortecimento constante foi adotada, ou seja: a média dos valores de amortecimento dos modos radiais (vide tabela 5.3) foi adotada para os demais modos.

#### *EXEMPLO DE APLICAÇÃO 1 (MOTOR DE INDUÇÃO DE GAIOLA À VAZIO)*

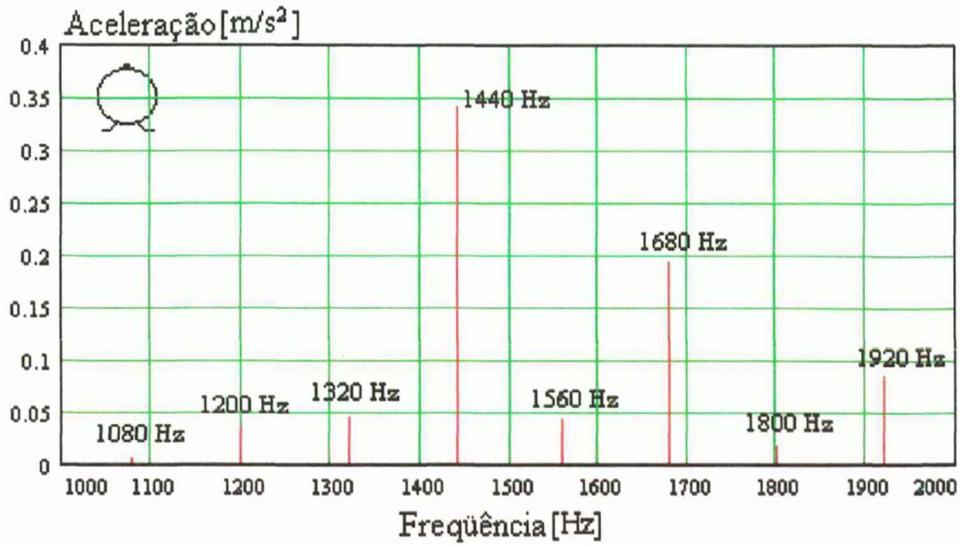
Neste exemplo as vibrações forçadas foram calculadas para as 15 primeiras harmônicas das forças magnéticas, obtidas a vazio. A figura 7.17, mostrada anteriormente, ilustra a disposição das forças magnéticas na malha de elementos finitos estrutural, para a realização deste cálculo. As figuras 8.2(a) e 8.2(b) mostram, respectivamente, as acelerações calculadas e medidas em função da freqüência. Observa-

se que existe uma boa concordância entre os valores medidos e calculados de aceleração, porém alguns picos de aceleração calculados apresentam valores bastante diferentes dos medidos, principalmente para aquelas frequências próximas de modos de vibração com contribuição longitudinal significativa, as quais não são previstas pelo modelo estrutural bidimensional. Isto ocorre porque o modelo bidimensional apenas calcula os modos de vibração radiais, portanto a resposta forçada apenas reflete a contribuição destes modos de vibração. Esse fato pode ser comprovado matematicamente através da equação 8.7, ou seja, a ausência no modelo mecânico de alguns importantes modos de vibração leva a um valor menor de  $G(\omega_h)$  e, em consequência, a um menor pico de aceleração em uma frequência determinada. Um exemplo disto é o pico a 1560 Hz, que tem provavelmente uma contribuição muito significativa de modos longitudinais.

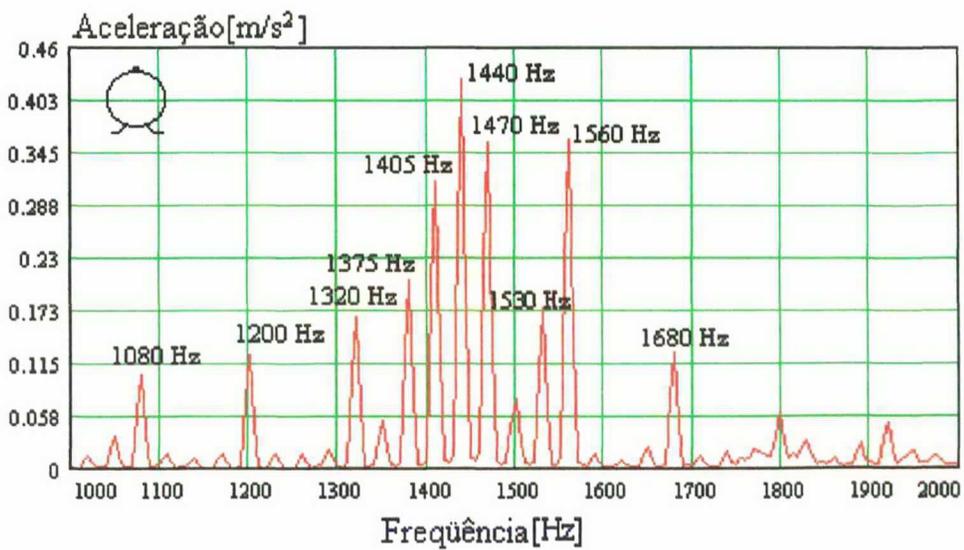
As bandas laterais de 1410 Hz e de 1470 Hz que aparecem na frequência de 1440 Hz podem ser explicadas por efeitos de excitação de origem mecânica como desbalanceamento do rotor, uma vez que a diferença de 30 Hz corresponde a frequência de rotação do motor: 1800 rpm.

O grande pico a 1440 Hz, pode ser explicado pela proximidade entre 12<sup>a</sup> harmônica da força de excitação (1440 Hz), mostrada na figura 7.16(b), e o valor da frequência natural mais próxima (1374 Hz), e também pela semelhança entre o modo da força de excitação (Fig. 7.17(c)), e o modo de vibração correspondente a frequência natural de 1374 Hz (Fig. 6.6(b)).

Os deslocamentos em metros nas direções X e Y causados pela 11<sup>a</sup> harmônica (1320 Hz) e pela 12<sup>a</sup> harmônica (1440 Hz) das forças magnéticas são mostradas nas figuras 8.3 e 8.4, respectivamente.

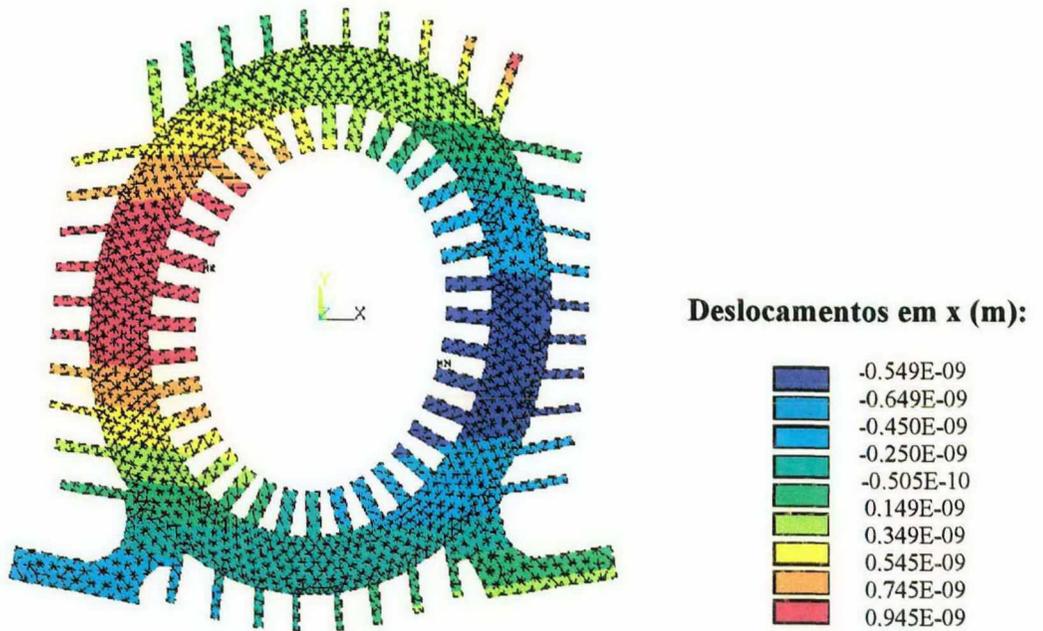


(a)

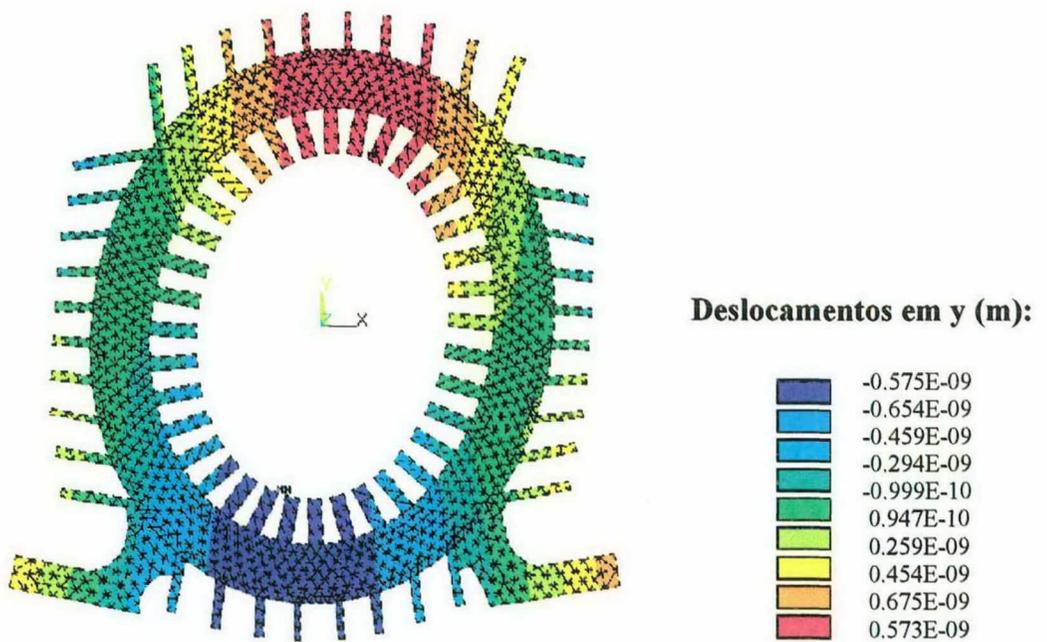


(b)

Fig. 8.2 - Aceleração em função da frequência no ponto indicado pelo ícone. (a) calculada (b) medida.

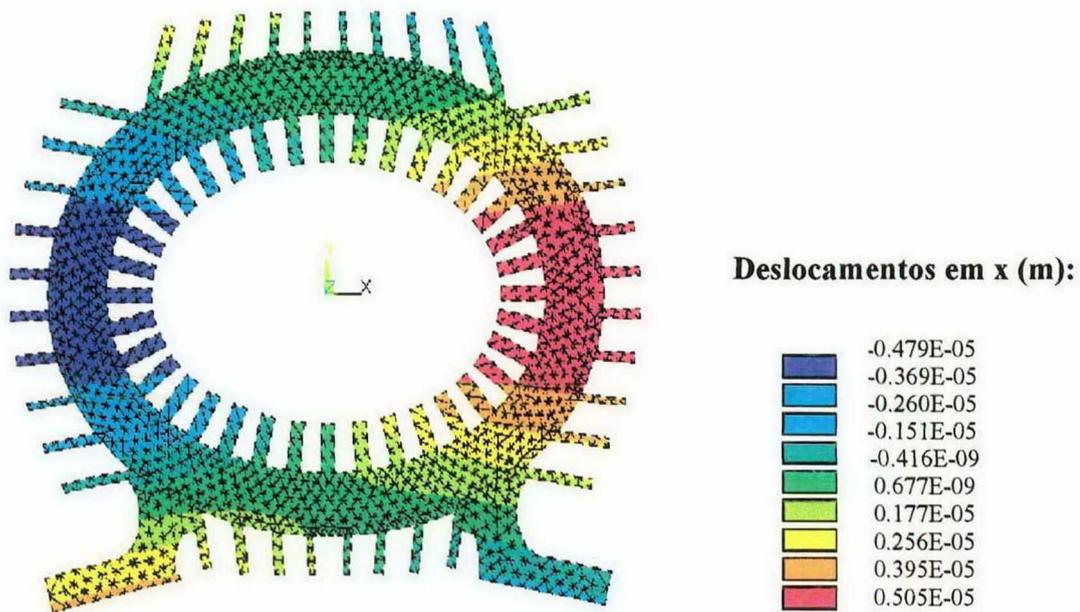


(a)

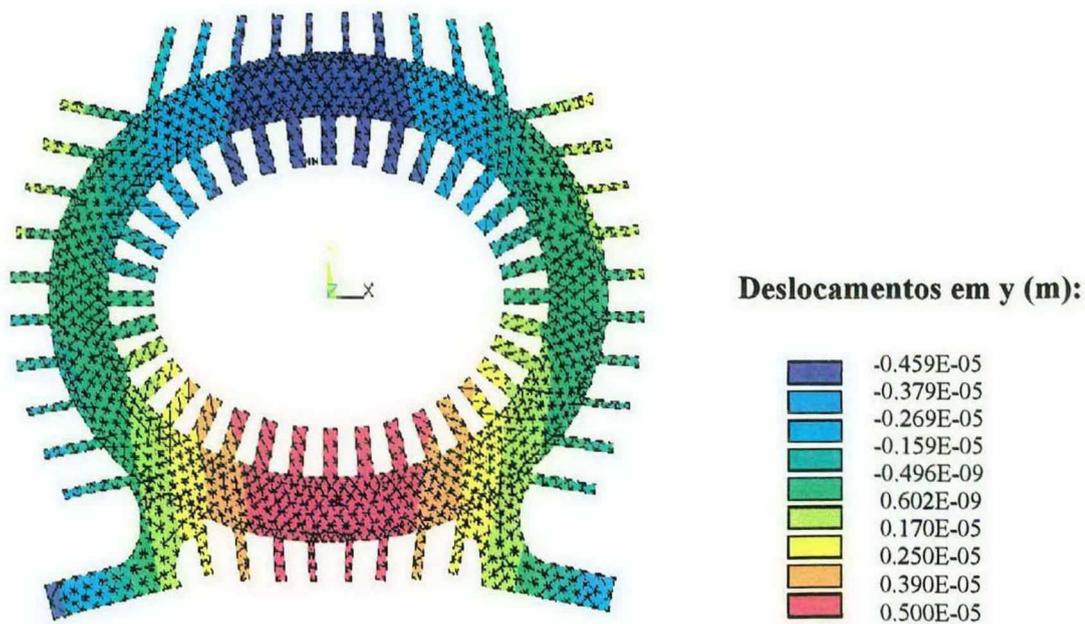


(b)

Fig. 8.3 - Deslocamentos causados pela 11ª harmônica (1320 Hz) das forças magnéticas.  
 (a) eixo X. (b) eixo Y.



(a)



(b)

Fig. 8.4 - Deslocamentos causados pela 12<sup>a</sup> harmônica (1440 Hz) das forças magnéticas. (a) eixo X. (b) eixo Y.

*EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2 (MOTOR DE INDUÇÃO DE GAIOLA À PLENA CARGA)*

Neste exemplo as vibrações forçadas foram calculadas para as 15 primeiras harmônicas das forças magnéticas, obtidas à plena carga. A figura 7.15, mostrada anteriormente, ilustra a disposição das forças magnéticas na malha de elementos finitos estrutural, para a realização do cálculo. Além disto, foram consideradas condições de contorno de deslocamento nulo nos pés do motor. As figuras 8.5 mostra as acelerações calculadas em função da frequência.

O grande pico a 1320 Hz, pode ser explicado pela grande proximidade entre a 12<sup>a</sup> harmônica (1320 Hz) da força de excitação, mostrada na figura 7.14(a), e a frequência natural a 1348 Hz, e secundariamente pela semelhança entre o modo 8 da força de excitação (Fig. 7.15(b)) e o modo natural de vibração correspondente a 1348 Hz (Fig. 6.7(b)).

Os deslocamentos em metros nas direções X e Y causados pela 11<sup>a</sup> harmônica (1320 Hz) das forças magnéticas são mostradas nas figuras 8.6(a) e 8.6(b), respectivamente.

Os deslocamentos em metros nas direções X e Y causados pela 12<sup>a</sup> harmônica (1440 Hz) das forças magnéticas são mostradas nas figuras 8.7(a) e 8.7(b), respectivamente.

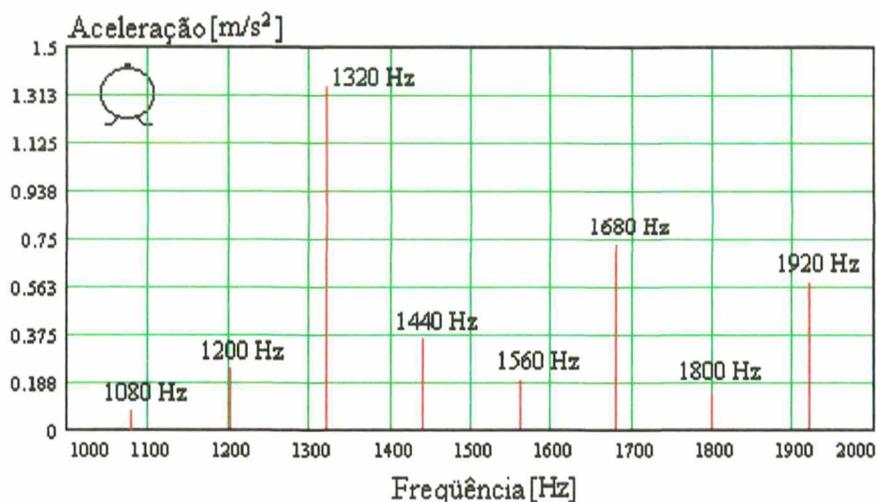
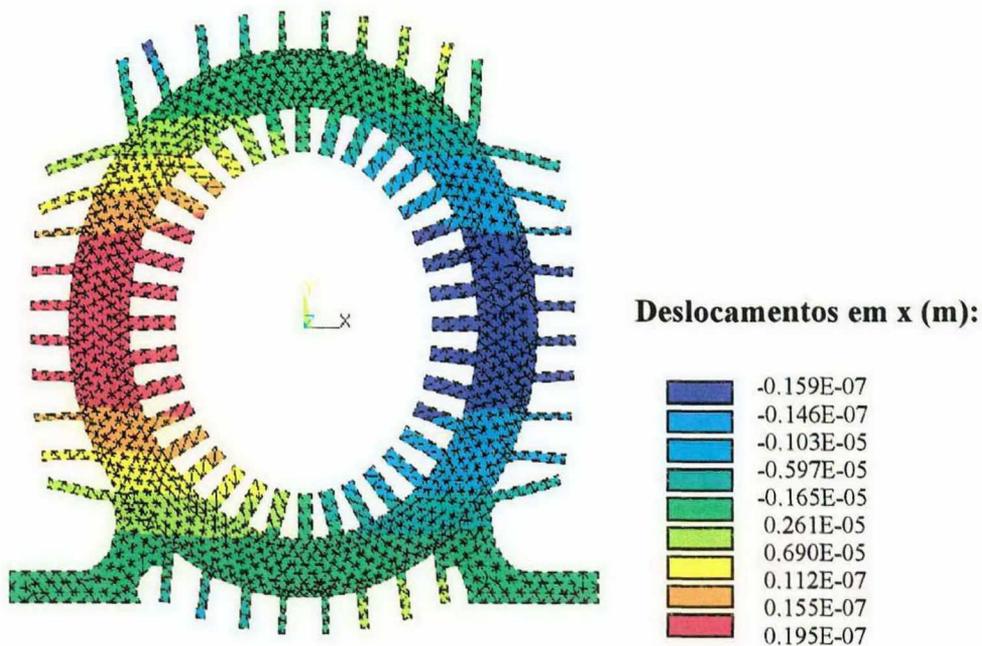
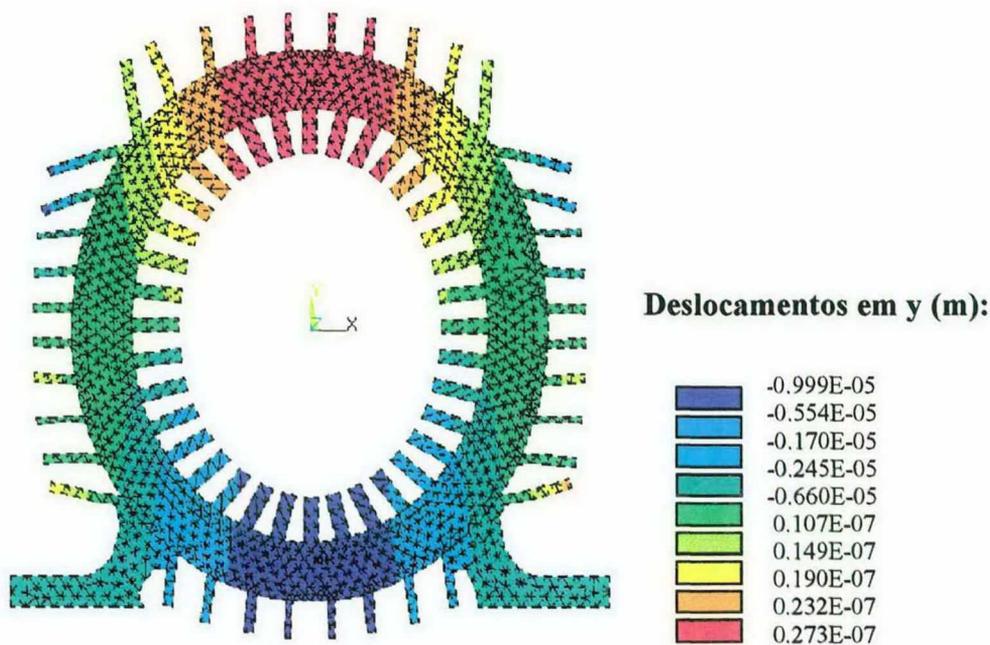


Fig. 8.5 - Aceleração calculada em função da frequência. O ícone mostra o ponto de cálculo.

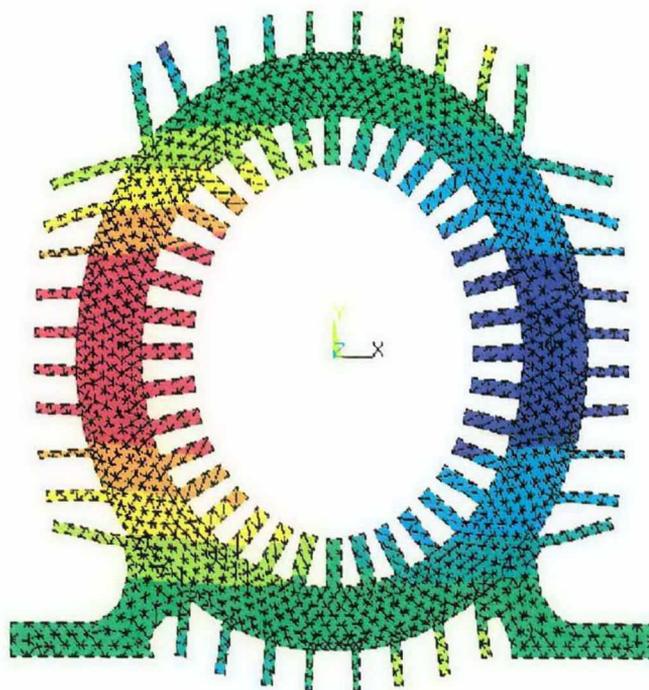


(a)



(b)

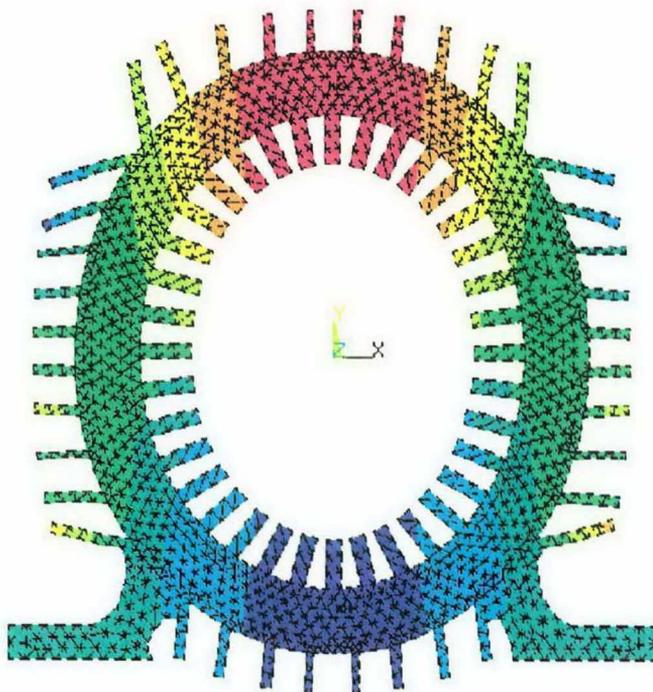
Fig. 8.6 - Deslocamentos causados pela 11ª harmônica (1320 Hz) das forças magnéticas à plena carga. (a) eixo X. (b) eixo Y.



**Deslocamentos em x (m):**

Dark Blue	-0.190E-08
Blue	-0.149E-08
Light Blue	-0.108E-08
Cyan	-0.670E-09
Teal	-0.259E-09
Green	0.153E-09
Light Green	0.564E-09
Yellow	0.975E-09
Orange	0.139E-08
Red	0.180E-08

(a)



**Deslocamentos em y (m):**

Dark Blue	-0.139E-08
Blue	-0.976E-09
Light Blue	-0.562E-09
Cyan	-0.148E-09
Teal	0.265E-09
Green	0.679E-09
Light Green	0.109E-08
Yellow	0.151E-08
Orange	0.192E-08
Red	0.233E-08

(b)

Fig. 8.7 - Deslocamentos causados pela 12<sup>a</sup> harmônica (1440 Hz) das forças magnéticas à plena carga. (a) eixo X. (b) eixo Y.

Comparando-se os espectros das acelerações obtidos na condição de operação a vazio com os espectros de acelerações obtidos com carga, chega-se a conclusões interessantes, por exemplo:

- A redução da frequência natural de 1374 Hz para 1348 Hz, em função da condição de contorno de deslocamento nulo na base do motor, fez com que o pico a 1320 Hz, antes pequeno, na condição de operação a vazio, fosse maximizado na condição à plena carga.

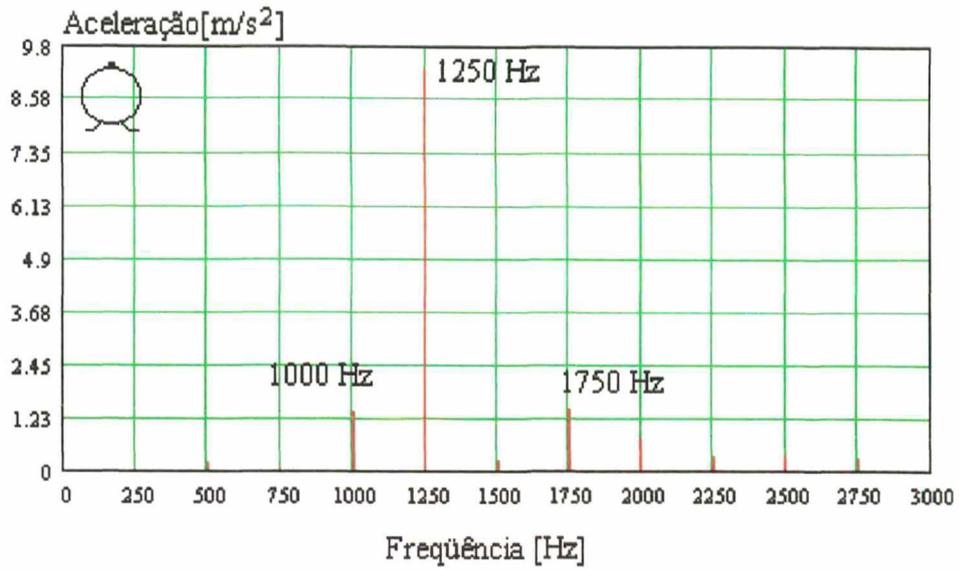
- O pico a 1440 Hz pouco se alterou, sua existência neste caso, pode ser explicada pela grande semelhança entre modo 12 da força de excitação (Fig. 7.15(c)) e o modo natural de vibração (Fig. 6.7(b)), já que não existe uma grande proximidade entre 12ª harmônica da força de excitação (1440 Hz) e a frequência natural de 1348 Hz.

### *EXEMPLO DE APLICAÇÃO 3 (MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO)*

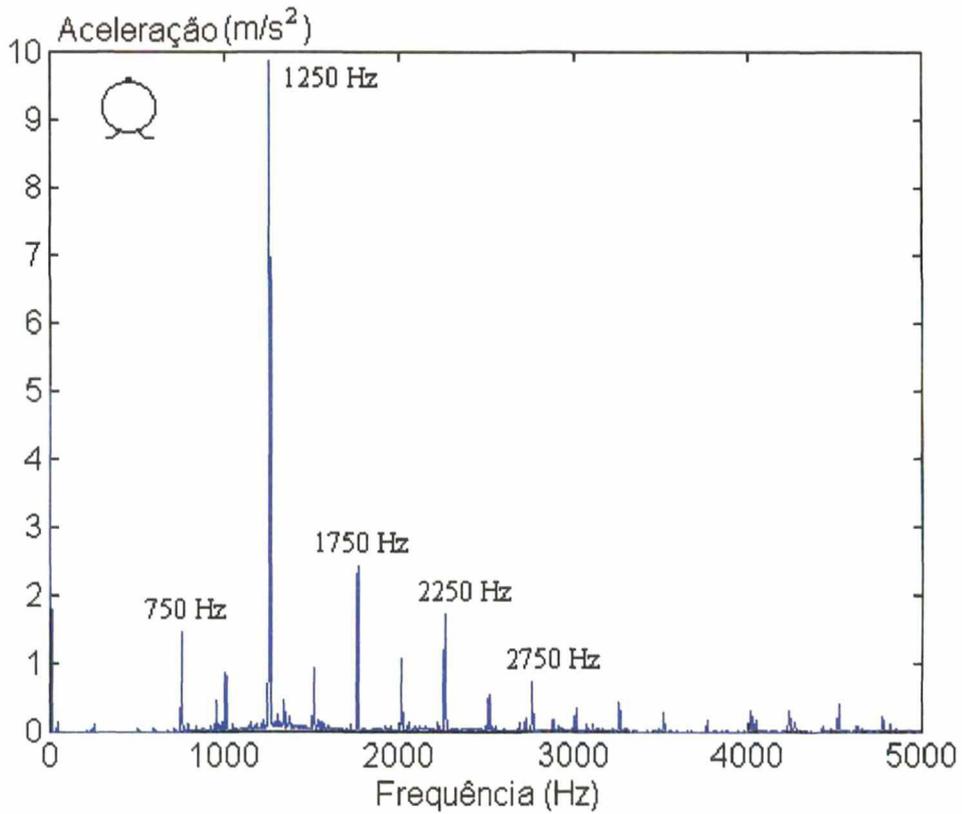
Neste exemplo as acelerações foram calculadas para as primeiras 12 harmônicas das forças magnéticas. As figuras 7.5 e 7.6, mostradas anteriormente, ilustram a disposição das forças magnéticas na malha de elementos finitos para o cálculo da resposta forçada. A hipótese de amortecimento constante foi adotada, ou seja, o amortecimento médio calculado com base nos amortecimentos modais dos sete primeiros modos de vibração foi utilizado para determinar as acelerações. Esta hipótese foi adotada devido a dificuldade de relacionar o modelo numérico ao experimental, conforme exposto no item VI.2, ou seja, como determinar a qual modo de vibração calculado atribuir um determinado amortecimento modal medido, se não foi possível fazer uma analogia consistente entre os modelos numérico e experimental.

As figuras 8.8(a) e 8.8(b) mostram as acelerações calculadas e medidas em função da frequência, respectivamente

O maior pico (1250 Hz), pode ser explicado pela grande coincidência entre o valor da 5ª harmônica (1250 Hz) da força de excitação (Fig. 7.3(c)) e o valor da frequência natural mais próxima (1242 Hz), e também pela grande semelhança entre o modo da força de excitação (Fig. 7.5(e)) e o terceiro modo natural de vibração (Fig. 6.3.(b)), o que gera o tipo de deformação mostrado na figura 8.9.

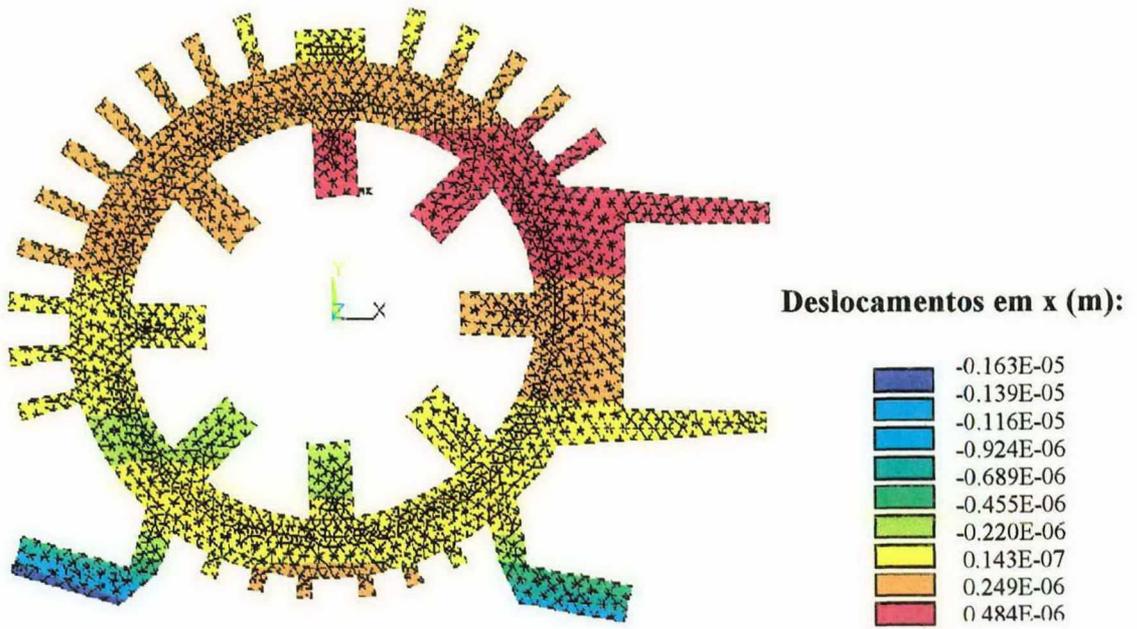


(a)

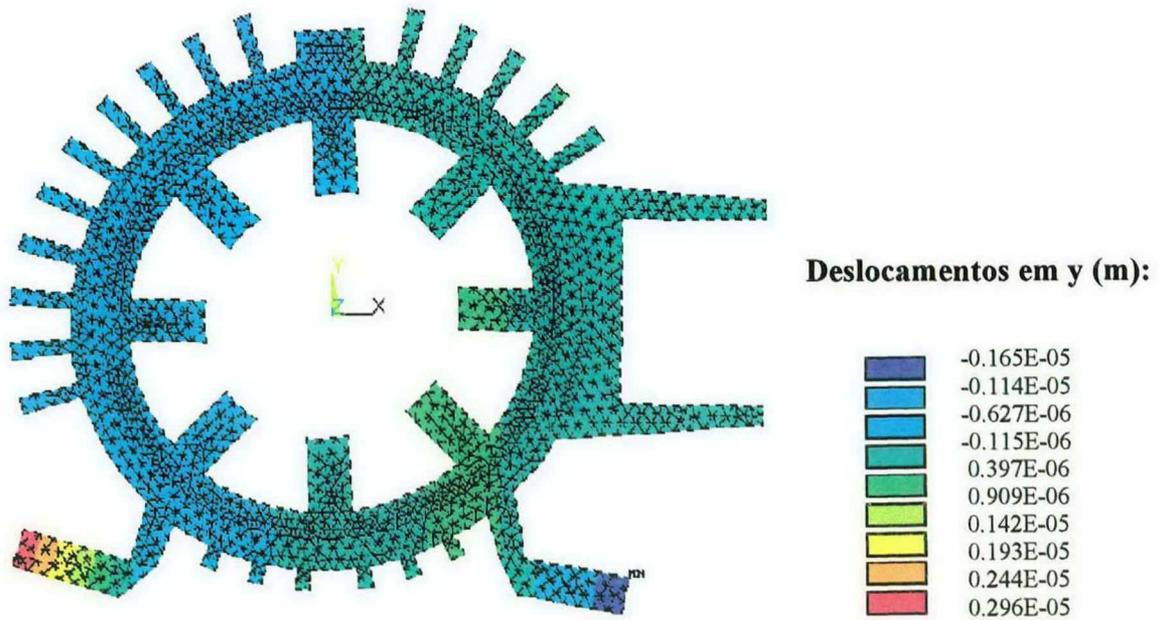


(b)

Fig. 8.8- Aceleração em função da frequência no ponto indicado pelo ícone (a) calculada. (b) medida.



(a)



(b)

Fig. 8.9 - Deslocamentos causados pela 5ª harmônica (1250 Hz) das forças magnéticas.  
 (a) eixo X. (b) eixo Y.

*EXEMPLO DE APLICAÇÃO 4 (ALTERAÇÕES NA ESTRUTURA DO MRC)*

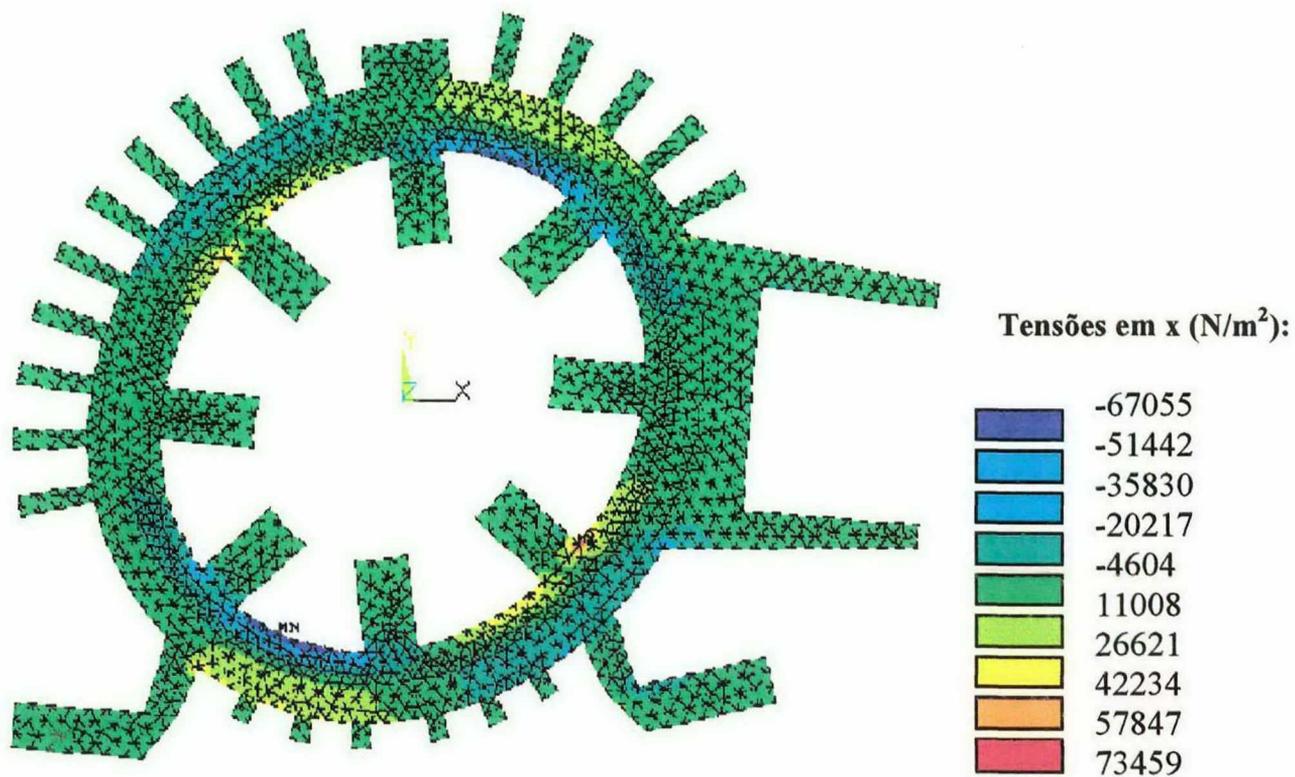
O objetivo deste exemplo é demonstrar como a resposta forçada em conjunto com a resposta natural da estrutura podem ser utilizadas para modificar a estrutura do motor, de forma a reduzir as vibrações por ele emitidas. Ou seja, através da resposta forçada as regiões da estrutura mais sujeitas a tensões mecânicas são determinadas; tornando-as mais rígidas estas ficam menos sujeitas a deformações. A seguir, através do cálculo da resposta natural as frequências naturais são determinadas, e verifica-se se estas aumentam e saem da faixa de excitação das forças magnéticas.

No que diz respeito a vibrações forçadas, foram calculadas as tensões mecânicas provocadas pela 4ª harmônica (1000 Hz) das forças magnéticas, utilizando o programa ANSYS, as quais são mostradas na figura 8.10. Analisando a escala de cores, concluiu-se que os maiores esforços estruturais ocorrem entre os dentes do estator e na vizinhança da junção dente-núcleo do estator.

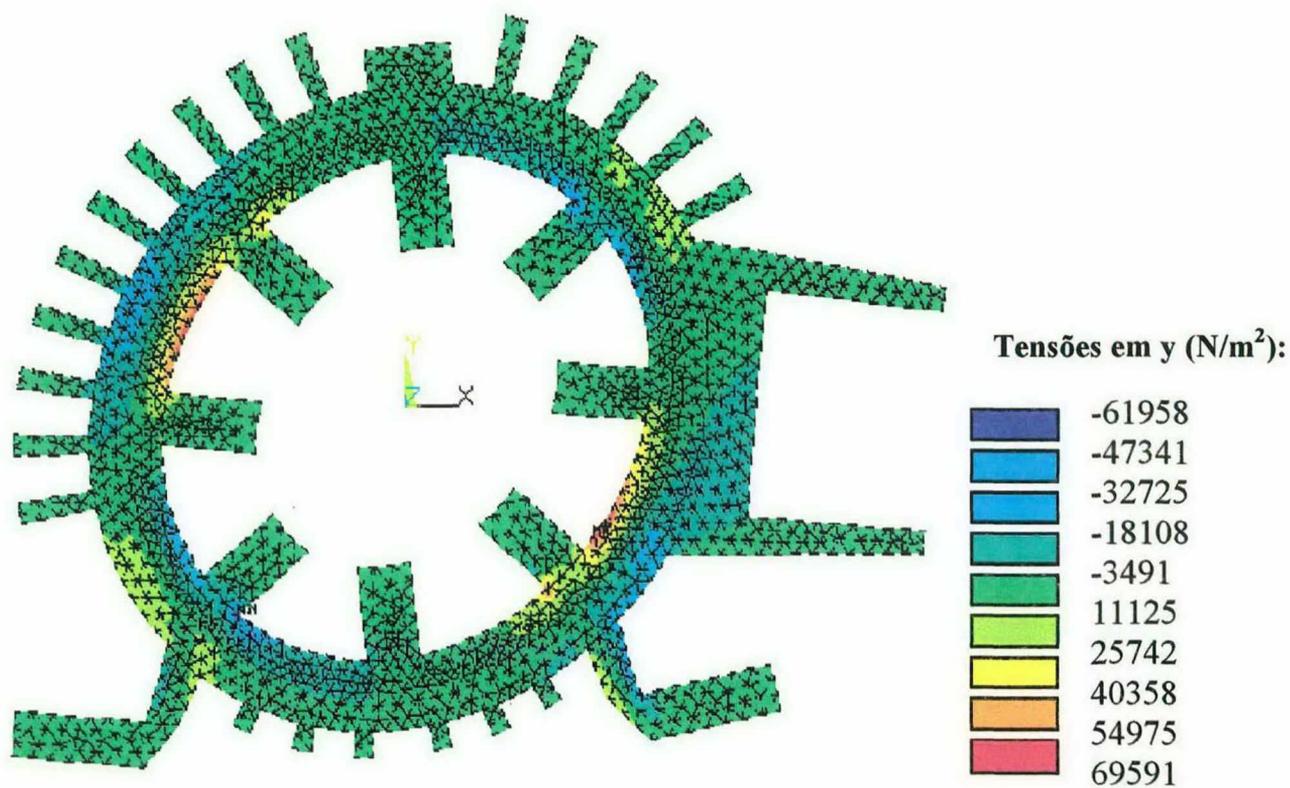
Baseado nisto aumentou-se a espessura da coroa do estator ( $E_c$ ), o ângulo  $\alpha$  e o raio da junção dente - coroa do estator ( $R_j$ ), parâmetros estes ilustrados na figura 8.11.

Assim, foram propostas cinco novas estruturas, mostradas na figura 8.12, que possuem valores diferentes de  $E_c$ ,  $\alpha$  e  $R_j$ . Através do cálculo da resposta natural as frequências naturais das cinco novas estruturas foram calculadas e comparadas com as frequências naturais da estrutura original. A tabela 8.1 mostra as frequências naturais obtidas, através do programa EFMP, para os seis casos analisados. Analisando estes resultados, concluiu-se que os valores das frequências naturais são sensivelmente alterados em relação aos valores das frequências naturais da estrutura original.

Através de um estudo futuro, mais detalhado, que leve em conta o desempenho eletromagnético destas novas estruturas, tais como: variação das forças magnéticas, perdas no cobre e torque médio, será possível escolher, através de uma análise de compromisso, qual destas estruturas possuirá um baixo nível de vibrações, sem afetar seu desempenho eletromagnético de maneira excessiva.



(a)



(b)

Fig. 8.10 - Tensões relativas a carcaça da estrutura. (a) eixo x. (b) eixo y.

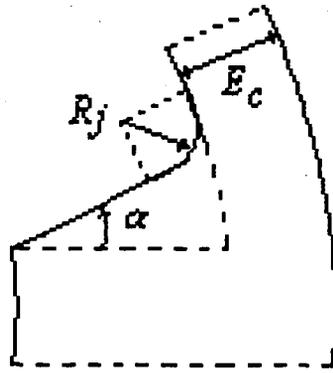


Fig. 8.11 - Parâmetros geométricos do estator.

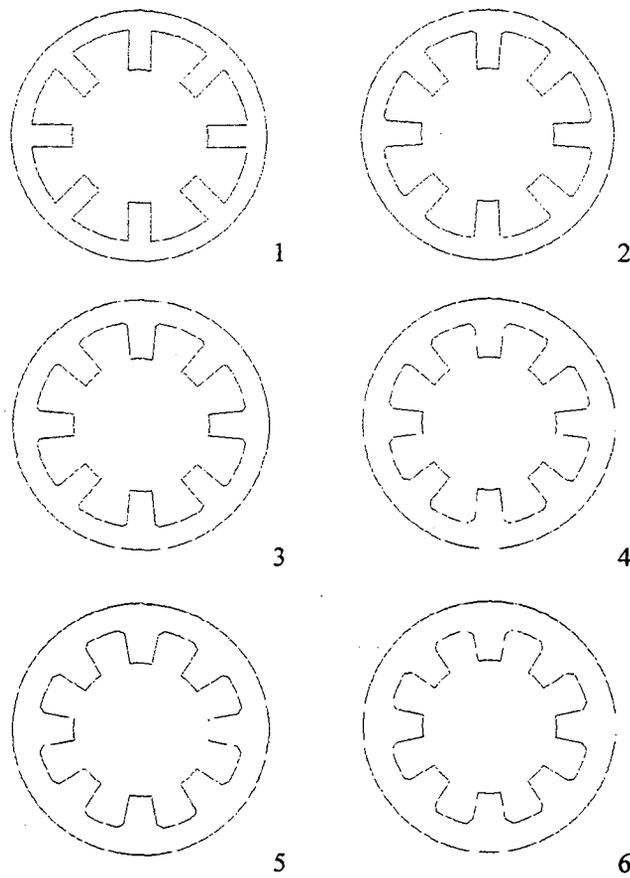


Fig. 8.12 - Estruturas com valores diferentes de  $E_c$ ,  $\alpha$  e  $R_j$ .

Tab. 8.1 - Variação das frequências naturais de vibração com os parâmetros geométricos.

<i>Estruturas</i>	<i>Parâmetros geométricos</i>			<i>Frequências naturais</i>		
	Ec (mm)	$\alpha$ (graus)	R <sub>j</sub> (mm)	Modo2	Modo 3	Modo 4
Original (1)	14	0	-	1015	2628	4028
2	15	2,5	3,07	1149	2992	4559
3	16	5	3,31	1256	3256	4979
4	17	7,5	3,78	1398	3623	5523
5	18	10	4,25	1552	3980	6018
6	19	12,5	4,45	1667	4297	6528

### VIII. 3 Conclusão

A ocorrência de ressonâncias não é somente condicionada pela presença de frequências de força próximas de frequências naturais mas, também por modos de força semelhantes aos modos naturais da estrutura. Assim, serão produzidas deformações forçadas no estator do motor, semelhantes aos modos de força.

Os picos de vibração são função de um somatório de modos, ou seja, das contribuições dos N modos de vibração da estrutura mecânica. Portanto um bom modelo estrutural, deve possuir o maior número possível de modos com participação modal significativa.

As acelerações aumentam com a carga, já que as forças magnéticas também são mais elevadas.

As partes mais sujeitas a vibrações de uma máquina elétrica podem ser diagnosticadas através das tensões mecânicas, obtidas através do cálculo da resposta forçada. Baseadas nesta análise, modificações no estator da máquina elétrica foram propostas. Através do cálculo da resposta natural verificou-se que os valores das frequências naturais destas novas estruturas aumentaram e saíram da faixa de excitação das forças magnéticas.

## **CAPÍTULO IX**

### **CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS**

A metodologia de modelagem e análise das vibrações de origem magnética nas máquinas elétricas rotativas por elementos finitos e procedimentos experimentais, baseada no modelo de acoplamento magnetomecânico unidirecional, constitui-se na principal contribuição deste trabalho.

Esta metodologia mostrou-se válida em termos quantitativos e qualitativos, apesar das características construtivas e de funcionamento distintas dos Motores de Relutância Chaveado e de Indução de Gaiola.

A metodologia de modelagem e análise das vibrações de origem magnética nas máquinas elétricas rotativas por elementos finitos e procedimentos experimentais apresenta as seguintes vantagens:

- Bons resultados apesar de utilizar modelos estruturais bidimensionais.
- É válida para a maioria das máquinas elétricas, e adaptável às máquinas elétricas especiais
- A Técnica de Superposição Modal adotada nesta metodologia para o cálculo das vibrações forçadas aceita como entrada razões de amortecimento como função da frequência (amortecimento modal) o que permite a obtenção de resultados precisos.
- A Técnica de Análise Modal Experimental adotada nesta metodologia para determinação das frequências naturais, modos de vibração e amortecimentos modais é de grande valia na etapa de validação dos modelo estruturais dos motores, já que permite a criação de uma malha modal experimental, que é usada na comparação entre os deslocamentos nodais obtidos via elementos finitos e os obtidos via experimentação.

Podemos citar como uma contribuição também importante deste trabalho a modelagem das vibrações de origem magnética no Motor de Indução de Gaiola. Esta afirmação se baseia no fato que tanto a modelagem eletromagnética como a elástica foram efetuadas através do método elementos finitos, ao contrário de trabalhos anteriores nos quais eram utilizados métodos analíticos em ambas as modelagens. A utilização de métodos analíticos, do ponto de vista eletromagnético, tem sérias restrições, já que não inclui todos os efeitos que determinam o fluxo no entreferro, principalmente as correntes induzidas nas barras do rotor. Devido a isto não é capaz de calcular com exatidão as forças magnéticas. Do ponto de vista mecânico, devido a dificuldade de descrever as características geométricas da estrutura, os métodos analíticos não calculam com exatidão as frequências naturais de vibração da estrutura. Outro aspecto original no que se refere ao Motor de Indução de Gaiola, foi a determinação dos modos de força, através do Método do Tensor de Maxwell, o que propiciou uma visão física mais acurada do fenômeno da ressonância.

No que diz respeito às análises efetuadas nos motores em estudo, chegou-se as seguintes conclusões:

- As vibrações são função de um somatório de modos, ou seja, das contribuições dos  $N$  modos de vibração da estrutura mecânica do estator. Portanto, um bom modelo estrutural do estator, deve possuir o maior número possível de modos com participação modal significativa.
- A ocorrência de ressonâncias não é somente condicionada pela presença de frequências de força próximas de frequências naturais, mas também por modos de força semelhantes aos modos naturais da estrutura. Assim, serão produzidas deformações forçadas no estator do motor, semelhantes aos modos de força.
- Os modelos bidimensionais, tanto os eletromagnéticos como os mecânicos, mostraram-se válidos apesar das hipóteses simplificativas.

## Sugestões para futuros trabalhos

Partindo do pressuposto que temos uma metodologia de modelagem e análise capaz de descrever com eficácia o comportamento vibratório das máquinas elétricas rotativas, tanto no aspecto qualitativo como quantitativo, pode-se visualizar como próxima etapa, utilizar esta metodologia para reduzir o ruído de origem magnética emitido por estas máquinas.

Baseado nesta premissa, alguns estudos são possíveis, tais como:

- \_Reduzir as vibrações de origem magnética emitidas por motores alimentados por inversores PWM, ou seja, poderia variar-se os parâmetros de controle destes inversores a fim de reduzir o ruído emitido em um determinado ponto de operação.
- Como foi aventado no capítulo 8, através do cálculo da respostas natural e forçada, é possível modificar as características estruturais dos estatores dos motores elétricos de forma a diminuir a possibilidade de ressonâncias.
- A alteração da forma do dentes pode modificar o espectro das forças magnéticas e reduzir a probabilidade de ressonâncias.
- Analisar o efeito das combinações de número de ranhuras de estator e rotor, buscando uma combinação ótima, já que as combinações atuais são baseadas em estudos empíricos.

A possibilidade de um modelo magneto-elástico tridimensional ou apenas um modelo eletromagnético "pseudo-tridimensional" abriria possibilidades ainda mais interessantes, tais como:

- Estudar o efeito da inclinação das barras do rotor na redução das vibrações de origem magnética. O tipo de inclinação linear que é feita nos rotores dos motores de indução atualmente produz efeitos positivos em termos de ruído, mas afeta o rendimento da máquina. Um estudo no qual se busque uma "inclinação otimizada" das barras do rotor seria bem recebido pela indústria.
- Estudar o efeito das forças de cabeça de bobina sobre as vibrações de origem magnética.

## ANEXO A

### TRANSFORMAÇÕES MODAIS

#### A.I Matriz Modal

Para resolver um sistema de um grau de liberdade é comum dividir a equação do movimento pela massa. Já para resolver um sistema de  $n$  graus de liberdade, descrito na forma matricial pela equação abaixo

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Aplica-se uma transformação de coordenadas que equivale a dividir as equações do movimento pela massa do sistema. Para este fim, considere a matriz raiz quadrada  $M^{1/2}$ , de forma que,  $M^{1/2}M^{1/2} = M$ . Para o exemplo acima a matriz massa é diagonal e a matriz raiz quadrada é simplesmente

$$M^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{m_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Quando a matriz de massa não é diagonal, o sistema é dito dinamicamente acoplado, e o cálculo da raiz quadrada da matriz de massa é mais complicado.

A inversa da matriz  $M^{1/2}$ , dada por

$$M^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{m_n}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

permite que a resolução da equação A.1 seja transformada em um problema de autovalores simétricos.

Para efetuar esta transformação, o vetor  $\{x\}$  na equação A.1 é substituído por

$$\{x\} = [M]^{-1/2} \{q\} \quad (A.4)$$

e a expressão A.1 é pré-multiplicada por  $[M]^{-1/2}$ . O que resulta em

$$[M]^{-1/2} [M][M]^{-1/2} \{\ddot{q}\} + [M]^{-1/2} K[M]^{-1/2} \{q\} = 0 \quad (A.5)$$

ou

$$[I]\{\ddot{q}\} + [\tilde{K}]\{q\} = 0 \quad (A.6)$$

onde  $[M]^{-1/2} [M][M]^{-1/2} = [I]$ , é a matriz identidade e  $[\tilde{K}] = [M]^{-1/2} K[M]^{-1/2}$ , uma matriz simétrica.

A equação A.6 é resolvida, assumindo uma solução da forma  $\{q\} = \{v\}e^{j\omega t}$ , onde  $\{v\}$  é um vetor de constantes. Substituindo na equação A.6, temos

$$[\tilde{K}]\{v\} = \omega^2 \{v\} \quad (A.7)$$

após a divisão pelo escalar  $e^{j\omega t}$ . É importante salientar que o vetor  $\{v\}$  não pode ser nulo para que haja movimento. Fazendo  $\lambda = \omega^2$  na equação A.7, obtêm-se

$$[\tilde{K}]\{v\} = \lambda \{v\} \quad (A.8)$$

onde  $\{v\} \neq 0$ . O escalar  $\lambda$  que satisfaz a equação A.8 é chamado de *autovalor* e  $\{v\}$  o correspondente *autovetor*. Assim, a equação A.8 representa um problema de autovalores simétricos.

O problema de autovalores simétricos possui várias vantagens. Por exemplo, pode ser facilmente provado que a solução da equação A.8 são números reais. Além do mais, os autovetores que satisfazem A.8 são ortogonais, ou seja,  $\{v_1^T\}\{v_2\} = 0$ . E também tem módulo arbitrário, portanto podem ser normalizados de forma a terem módulo igual a 1, ou seja,  $\|v\| = \sqrt{v^T v} = 1$ . Um conjunto de vetores que satisfaz estas duas condições é dito

ortonormal. Este fato pode ser usado para desacoplar as equações do movimento de um sistema não-amortecido, criando uma nova matriz  $P$  fora do espaço normalizado dos autovetores e que seja ortogonal, ou seja,  $[P]^T [P] = [I]$ . Esta matriz  $P$ , composta dos autovetores ortonormais da matriz  $\tilde{K}$ , é chamada de matriz modal e dada por:

$$P = [\{v_1\} \quad \{v_2\} \quad \{v_3\} \quad \dots \quad \{v_n\}] \quad (A.9)$$

onde  $n$  é o número de graus de liberdade.

Uma característica importante da matriz  $P$  é a obtenção da matriz diagonal, denominada de *matriz espectral* de  $\tilde{K}$ , dada por:

$$\Lambda = \text{diag}(\Lambda_i) = [P]^T [\tilde{K}] [P] \quad (A.10)$$

onde os elementos da diagonal, representam os autovalores de  $\tilde{K}$ .

## A.II Aplicação da Transformação Modal

A matriz de autovetores  $P$ , definida acima, desacopla a equação A.1 em  $n$  equações separadas de um grau de liberdade representadas pela equação A.6, que podem ser resolvidas e analisadas de maneira simples.

Considerando a equação matricial A.1 sujeita as condições

$$\{x(0)\} = \{x_0\} \quad \{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}$$

onde  $\{x(0)\} = [x_1(0) \quad \dots \quad x_n(0)]^T$  é o vetor dos deslocamentos iniciais, e  $\{\dot{x}(0)\} = [\dot{x}_1(0) \quad \dots \quad \dot{x}_n(0)]^T$  é o vetor das velocidades iniciais.

As condições iniciais relativas a equação A.6 são obtidas usando:

$$\{x(t)\} = [M]^{-1/2} \{q(t)\} \quad (A.11)$$

para o novo vetor  $\{q\}$  e fazendo  $t = 0$ . Para por em evidência  $\{q(t)\}$ , a equação é pré-multiplicada por  $M^{1/2}$ , obtendo-se

$$\{q(t)\} = [M]^{1/2} \{x(t)\} \quad (A.12)$$

Diferenciando em relação ao tempo, resulta  $\{\dot{q}\} = [M]^{1/2} \{\dot{x}\}$ , já que  $[M]^{1/2}$  é constante. Assim as condições iniciais no sistema de coordenadas tornam-se

$$\{q(0)\} = [M]^{1/2} \{x(0)\} \quad \text{e} \quad \{\dot{q}(0)\} = [M]^{1/2} \{\dot{x}(0)\} \quad (A.13)$$

A seguir define-se uma segunda transformação

$$\{q(t)\} = [P]r(t) \quad (A.14)$$

onde  $\{r(t)\} = [r_1(t) \quad r_2(t) \quad \dots \quad r_n(t)]$ , e  $P$  é a matriz composta de autovetores ortonormais de  $\tilde{K}$ . Substituindo o vetor  $\{q(t)\} = [P]r(t)$  na equação A.6 e pré-multiplicando pela matriz  $P^T$ , resulta

$$[P]^T [P] \{\ddot{r}(t)\} + [P]^T [\tilde{K}] [P] \{r(t)\} = 0 \quad (A.15)$$

usando  $[P]^T [P] = [I]$  e a equação A.10, a expressão reduz-se a

$$[I] \{\ddot{r}(t)\} + \Lambda \{r(t)\} = \{0\} \quad (A.16)$$

Seguindo os argumentos das equações A.14, as condições iniciais transformadas tornam-se:

$$\{r(0)\} = [P]^T \{q(0)\} \quad \text{e} \quad \{\dot{r}(0)\} = [M]^{1/2} \{\dot{q}(0)\} \quad (A.17)$$

A equação A.17 representa um conjunto de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem, não-acopladas representadas por

$$\ddot{r}_j(t) + \omega_j^2 r_j(t) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (A.18)$$

Cuja solução é:

$$r_j(t) = \frac{\sqrt{\omega_j^2 r_{j0}^2 + \dot{r}_{j0}^2}}{\omega_j} \sin\left(\omega_j t + \tan^{-1} \frac{\omega_j r_{j0}}{\dot{r}_{j0}}\right) \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.19})$$

Uma vez que as soluções modais representadas pela equação A.19 são conhecidas, as transformações  $M^{1/2}$  e  $P$  podem ser usadas para retornar as coordenadas físicas  $x_j(t)$ . Para obter o vetor  $x$  a partir do vetor  $r$ , substitui-se as equações A14 em A11, obtendo-se:

$$\{x\} = [M]^{-1/2} \{q\} = [M]^{-1/2} [P] \{r(t)\} \quad (\text{A.20})$$

O produto matricial  $[M]^{-1/2} P$  é novamente uma matriz, denominada  $S$ :

$$S = [M]^{-1/2} [P] \quad (\text{A.21})$$

### A.III Sistemas com amortecimento viscoso

O modo mais simples de representar o amortecimento viscoso é o uso do *amortecimento modal*. O amortecimento modal adiciona um termo relativo a dissipação de energia dado por

$$2\zeta_i \omega_i \dot{r}_i(t) \quad (\text{A.22})$$

nas equações A19. São atribuídos empiricamente valores entre 0 e 1 aos amortecimentos modais,  $\zeta_i$ , ou são feitas medições para determiná-los.

Uma vez estabelecidos os amortecimentos, a equação A.27 torna-se

$$\ddot{r}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.23})$$

os quais para ( $0 < \zeta_i < 1$ ) tem soluções da forma

$$r_i(t) = A_i e^{-\zeta_i \omega_i t} \sin(\omega_{di} t + \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.24})$$

onde  $A_i = \left[ \frac{(\dot{r}_{i0} + \zeta_i \omega_i r_{i0})^2 + (r_{i0} \omega_{di})^2}{\omega_{di}^2} \right]^{1/2}$ ,  $\phi_i = \tan^{-1} \frac{r_{i0} \omega_{di}}{\dot{r}_{i0} + \zeta_i \omega_i r_{i0}}$  e  $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ .

A solução em coordenadas físicas é obtida usando:

$$\{x(t)\} = [S]\{N(t)\} \quad (\text{A.25})$$

Esta abordagem parte do pressuposto que, o sistema de  $n$  graus de liberdade representado pela seguinte equação matricial:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + C\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (\text{A.26})$$

permite que a matriz de amortecimento  $C$  possa ser escrita como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, isto é:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (\text{A.27})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Esta forma de amortecimento é chamada de *amortecimento proporcional*. Substituindo a equação A27 em A26, tem-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + (\alpha M + \beta K)\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (\text{A.28})$$

Substituindo  $\{x\} = M^{-1/2}\{q\}$  e pré-multiplicando por  $M^{-1/2}$ , obtêm-se:

$$\{\ddot{q}(t)\} + (\alpha I + \beta \tilde{K})\{\dot{q}(t)\} + [\tilde{K}]\{q(t)\} = \{0\} \quad (\text{A.29})$$

Substituindo  $\{q(t)\} = P\{r(t)\}$  e pré - multiplicando por  $P^T$ .

$$\{\ddot{r}(t)\} + (\alpha I + \beta \Lambda)\{\dot{r}(t)\} + \Lambda\{r(t)\} = \{0\} \quad (\text{A.30})$$

O que corresponde a  $n$  equações modais desacopladas, da forma

$$\ddot{r}_i(t) + 2\zeta_i \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = 0 \quad (\text{A.31})$$

onde  $2\zeta_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2$ , ou

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.32})$$

As constantes  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser escolhidas de forma a reproduzir valores medidos (ou desejados, no caso de um projeto) de  $\zeta_i$ . Por outro lado, se  $\alpha$  e  $\beta$  são conhecidos a equação A.32 determina o valor de  $\zeta_i$ .

#### A.IV Análise Modal da Resposta Forçada

A resposta forçada de um sistema de múltiplos graus de liberdade também pode ser calculada usando Análise Modal. Considere um sistema no qual é aplicado uma força  $\{F(t)\} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad F_1(t)]^T$ , representado matematicamente por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + C\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (\text{A.33})$$

Considerando que a matriz  $C$  é proporcional, da forma dada pela equação A.26. Fazendo  $\{x(t)\} = M^{-1/2} \{q(t)\}$  e multiplicando por  $[M]^{-1/2}$ , obtêm-se

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\tilde{C}]\{\dot{q}(t)\} + [\tilde{K}]\{q(t)\} = [M]^{-1/2} \{F(t)\} \quad (\text{A.34})$$

onde  $[\tilde{C}] = [M]^{-1/2} [C] [M]^{-1/2}$ . Em seguida calcula-se  $[\tilde{K}]$ . Faz-se  $\{q(t)\} = [P]\{r(t)\}$ , onde  $[P]$  é a matriz dos autovetores de  $[\tilde{K}]$ , e multiplica-se por  $[P]^T$ , obtendo-se

$$\{\ddot{r}(t)\} + \text{diag}[2\zeta_i \omega_i] \{\dot{r}(t)\} + \Lambda \{r(t)\} = [P]^T [M]^{-1/2} \{F(t)\} \quad (\text{A.35})$$

onde a matriz  $\text{diag}[2\zeta_i \omega_i]$  esta sujeita as considerações feitas para a equação A.30. O vetor  $[P]^T [M]^{-1/2} F(t)$  possui elementos  $f_i(t)$  os quais são combinações lineares de forças  $F_i$  aplicadas a cada massa. Assim as equações modais desacopladas tomam a forma:

$$\ddot{r}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = f_i(t) \quad (\text{A.36})$$

Que possui solução:

$$r_{ip} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_{di}^2 - \omega_h^2)^2 + (2\zeta_i \omega_{di} \omega_h)}} \cos\left(\omega_h t - \tan^{-1} \frac{2\zeta_i \omega_{di} \omega_h}{\omega_{di}^2 - \omega_h^2}\right) \quad (\text{A.37})$$

onde  $d_i$  e  $\phi_i$  devem ser determinados pelas condições modais iniciais e  $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ . Se houverem mais forças atuando,  $f_i$  representará uma soma de forças. Se a força é aplicada em uma única massa do sistema, devido a transformação  $S$ , ela passa a ser aplicada a cada uma das equações modais.

## ANEXO B

### DADOS DOS MOTORES

#### B.1 Motor de Relutância Chaveado

O MRC tipo PLD 112S/2, fabricado pela OULTON, apresenta as características mostradas na tabela B.1.

Tab. B.1 - Dados do MRC.

<i>Potência nominal</i>	<i>4K<sub>w</sub> (5.5HP)</i>
Velocidade Nominal	3000 rpm
Corrente Nominal	9A
Enclausuramento	IP 55
Classe	F
Número de pólos do rotor	6
Número de pólos do estator	8
Número de espiras	68
Entreferro	0.4 mm
Comprimento do pacote	151,7 mm
Diâmetro ext. do estator	179,5 mm
Ângulo do dente do estator	19°
Ângulo do dente do rotor	21°
Fator de empilhamento	0.97
Resistência à frio	0.296 Ω
Resistência à quente	0.364 Ω

## B.2 Motor de Indução de Gaiola

O MIG, fabricado pela WEG MOTORES, apresenta as características mostradas na tabela B.2.

Tab. B.2 - Dados do MIG.

<i>Potência nominal</i>	<i>5.52 Kw (7.5 CV)</i>
Caixa	112
Pólos	4
Ligação	Triângulo
Velocidade Nominal	1731 rpm
Corrente Nominal	10.02 A
Tensão	440 v
Frequência	60 Hz
Núm. de ranhuras do estator	36
Número de barras do rotor	44
Número de espiras	44
Entreferro	0.45 mm
Comprimento do pacote	140 mm
Diâmetro ext. do estator	182 mm
Diâmetro int. do estator	115 mm
Resistência do enrol. à (20°C)	2.6325 $\Omega$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BEDFORD, B.D.: *USA Patents Nos. 3678352 and 3679953*, 1972.
- [2] LAWRENSON, P.J. et al, *Variable speed switched reluctance motors*, IEEE Proceeding, Vol. 127, part B, pp. 253-266, 1980.
- [3] CAMERON, D.E., LANG, J., HUMANS, S.D. *The origin and reduction of acoustic noise in doubly salient variable reluctance motor*, IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 26, No. 6, pp. 1250-1255, 1992.
- [4] WU, C.Y., POLLOCK, C. *Time domain analyses of vibration and acoustic noise in the switched reluctance drive*, IEE 1993 International Conference on Electric Machines and Drives, pp. 558-563.
- [5] MILLER T.J.E. *Faults and unbalanced forces in the switched reluctance machine*, Conference Record of the 1993 IEEE Industry Applications Conference, 28th IAS Annual Meeting, 93CH3366-2, pp.87-96.
- [6] SADOWSKI, N.; LEFÈVRE, Y.; NEVES, C.G.C.; CARLSON, R. *Finite elements coupled to electrical circuit equations in the simulation of the switched reluctance drives: attention to mechanical behavior*, Compumag 95, pp 656-657, Julho 1995.
- [7] BESBES, M. *Contribution to the numerical modelling of coupled magneto-elastic phenomena - Application to the study of vibration of magnetic origin in VRM*, These de Doutorado da Universidade de Paris VI, 1995.
- [8] COLBY, R., MOTTIER, F., MILLER, T. J. E., *Vibration modes and acoustic noise in a 4-phase switched reluctance motor*, IAS Annual Meeting, pp 441-447, 1995.
- [9] FINLEY, W. R. *Noise in Induction Motors-Causes and Treatments*, IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 27, N. 6, November/December 1991.
- [10] Kron, G. *Induction motor slot combinations*, presented at the Winter Convention of the AIEE, New York, Jan. 26-30, 1931.
- [11] VERMA, S. P.; BALAN, A. *Determination of radial-forces in relation to noise and vibration problems of squirrel-cage induction motors*, IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 9, N. 2, June 1994.
- [12] BELMANS, R., VERDYCK, D., FINDLAY, D. *Eletro-mechanical analyses of the audible noise of an inverter - fed squirrel-cage induction motor*. IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 27, N. 3, May-June 1991.
- [13] TIMÁR, P. L. *The influence of loading on the sound power level radiated by induction motors*. Noise Control Engineering Journal, pp 125-133, 1988.
- [14] OSTOVIC, V.G.; BOMAN. *Radial air gap forces as a source of audible noise in a sinusoidally fed induction machine*, 30 th IAS Annual Meeting Conference Record, Vol.1, October 1995, pp. 591-598.
- [15] JAVADI, H. *Développement d'outils informatiques pour aider à la conception des machines à forte discrétion vibratoire*, Thèse de doctorat, INP, Toulouse, 1994.
- [16] KAKO, F.; TSURUTA, T.; NAGAISHI, K.; KOHMO, H. *Experimental study on magnetic noise of large induction motors*. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, N. 8, August 1983.
- [17] WOODSON, H. H.; MELCHER, J. R. *Eletromechanical dynamics, Part II: Fields, Forces and Motion* (John Wiley and Sons, 1968).

- [18] REYNE, G. J.; IMHOFF, F.; SABONNADIÈRE, J. C. *Electro - magnetic vibrations in electrical machines*, IEEE Transactions on magnetics, Vol. MAG-24, N° 1, Janeiro. 1988, pp. 140-255.
- [19] SADOWSKI, N.; LEFÈVRE, Y.; LAJOIE-MAZENC, M.; BASTOS, J. P. A. *Sur le calcul des forces magnétiques*, Journal de physique III, France, pp. 859-870, 1992.
- [20] LEFÈVRE, Y. *Etude de la répartition des efforts électromagnétiques dans les machines synchrones à aimants permanents et commutation électrique. Détermination des vibrations d'origine magnétiques*, Tese de Doutorado do INP de Toulouse, 1988.
- [21] STEPHENSON, J.M., CORDA, J. *Computation of torque and current in doubly salient reluctance motors from nonlinear magnetization data*, Proc. IEEE Electric Power Applications, Vol.26, N.5, 1979.
- [22] NEVES, C.G.C. *Simulação e análise do motor de relutância chaveado*, Dissertação de Mestrado da Universidade Federal de Santa Catarina, 1995.
- [23] DEMIDOVICH, B. P., MARON, I. A. *Éléments de calcul numérique*, Éditions Mir, Moscou, 1973.
- [24] STEPHENSON, J. M., CORDA, J. *Computation of torque and current in doubly salient reluctance motors from nonlinear magnetisation data*, Proc. IEEE Electric Power Applications, Vol. 26, N. 5, 1979.
- [25] SADOWSKI, N., LAJOIE-MAZENC M., CROS J. *Finite element torque calculation while considering the movement*; IEEE Trans. on Magn., Vol. 28, N.2, March 1992, pp.1410-1413.
- [26] BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, New-Jersey, 1982.
- [27] SADOWSKI, N., CARLY, B., LEFÈVRE, Y., LAJOIE-MAZENC, M., ASTIER, S. *Finite element simulation of electrical motors fed by current inverters*, IEEE Trans. on Mag., Vol. 29, N.2, pp 1683-1688, 1983.
- [28] INMAN, D. J., *Engineering vibration*, Prentice Hall, New-Jersey, 1994.
- [29] VERMA, S. P., Girgis, R. S. *Experimental verification of resonant frequencies and vibration behavior of stators of electrical machines (Part 1 - Models, experimental procedure and apparatus*, IEEE Proc., Vol. 128, Pt. B, No. 1, January 1981.
- [30] IMBERT, J. F. *Analyse des structures par éléments finis*, 2ème Edition, CEDADUES, 1984.
- [31] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine Editeur, Presses de l'Université de Laval, 1981.
- [32] KOSTENKO M., PIOTROVSKY L., *Electrical machines*, Foreign Languages Publishing House, 1969, Moscow.
- [33] FAGUNDES, J. C., *Etude de moteurs à aimants et commutation électronique à champ et courants non sinusoïdaux*, Thèse de doctorat, INP, Toulouse, 1990.
- [34] ALGER, P. L. , *The nature of induction machines*. Gordon and Breach, Science Publishers, 1965, New York.
- [35] EWINS, D. J., *Modal testing theory and practice*, Research Studies Press Ltda, England, 1984.
- [36] ALMEIDA, M. T., *Vibrações mecânicas para engenheiros*, Editora Edgard Blücher Ltda, 1987.

- [37] JAVADI H., LEFÈVRE Y., CLENET S., LAJOIE-MAZENC M., Electro-magneto-mechanical characterization of the vibration of magnetic origin of electrical machines, *IEEE Trans. On Magn.*, Vol. 31, N. 3, pp. 1892-1895, May 1995.
- [38] BROWN D. L., ALLEMANG R. J., ZIMMERMAN R., MERGEAY M., Parameter estimation techniques for modal analysis.
- [39] LEFÈVRE Y., DAVAT B., LAJOIE-MAZENC M., *Determination of synchronous motor vibration due to electromagnetic force harmonics*, *IEEE Trans. on Magn.*, Vol. 25, N.4, July 1989.
- [40] CLENET, S., *Influence de l'alimentation électronique sur le couple et le comportement vibratoire des machines synchrones à aimants permanents*, Thèse de doctorat, INP, Toulouse, 1993.
- [41] VERMA S. P., BALAN A., *Experimental investigation on the stators of electrical machines in relation to vibration and noise problems*, Proceedings of EMDC'97, Conference publication N. 444, pp. 75-80., September 1997.
- [42] VERMA S. P., BALAN A., *Considerations for the reduction of vibrations and noise in the design of induction motors for variable frequency operation*, Proceedings of ICEM'98, pp. 490-495, October 1998.
- [43] ROMARY R., BRUDNY J. F., *A skew shape to optimize magnetic noise reduction of induction machine*, Proceedings of ICEM'98, pp. 1756-1761, October 1998.
- [44] COUTURIER C., CASSORET B., WITCZAC P., BRUDNY J. F., *A contribution to the study of induction machine stator resonance frequencies*, Proceedings of ICEM'98, pp. 485-489, October 1998.
- [45] VERMA S. P., BALAN A., *Vibration model for stators of electrical machines incorporating the damping effects*, Proceedings of Electrimacs'96, pp. 755-764, September, 1996.
- [46] PICOD C., BESBES M., CAMUS F., GABSI M., *Influence of stator geometry upon vibratory and electromagnetic performances of switched reluctance motors*, Proceedings of EMDC'97, Conference publication N. 444, pp. 69-73., September 1997.
- [47] NAU S. L., *The influence of the skewed rotor slots on the magnetic noise of three-phase induction motors*, Proceedings of EMDC'97, Conference publication N. 444, pp. 396-399., September 1997.
- [48] XINZHAO C., DENGXIAO L, JIAN C., ZHENGSHI L., *A study on identifying the sources of dominant frequency components of electric motor noise*, Noise control engineering journal, July-August, 1989.
- [49] MALITI K. C., SADARANGANI C., *The contribution of eccentricity to acoustic noise in induction motors. Proceedings of International Seminar on Vibrations and acoustic noise of electric machinery*, pp. 39-43, May, 1998, Béthune, France.
- [50] RAMESOHL I., BAUER T., HENNEBERGERG., *Calculation procedure of the sound field caused by magnetic excitations of the claw-pole alternator The contribution of eccentricity to acoustic noise in induction motors*, Proceedings of International Seminar on Vibrations and acoustic noise of electric machinery, pp. 75-79, May, 1998, Béthune, France.
- [51] GERGES S. N. Y., *Ruído: Fundamentos e Controle*, 1ª edição, Editora da UFSC, 1992.

- [52] BASTOS J. P.A., *Eletromagnetismo e Cálculo de Campos*, 2ª edição, Editora da UFSC, 1992.
- [53] NAU S. L., *Determinação do ruído magnético em motores elétricos de indução*, Seção de Tecnologia - WEG S. A.