

PAULO IRINEU KOLTERMANN

**CÁLCULO DE CAMPOS MAGNÉTICOS
CONSIDERANDO HISTERESE**

**Florianópolis
2001**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**CÁLCULO DE CAMPOS MAGNÉTICOS CONSIDERANDO
HISTERESE**

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

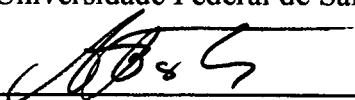
PAULO IRINEU KOLTERMANN

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 2001.


CÁLCULO DE CAMPOS MAGNÉTICOS CONSIDERANDO HISTERESE

Paulo Irineu Koltermann

‘Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

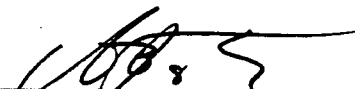


Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr.
Orientador



Prof. Márcio Schérem Schneider, D.Sc.
Coordenador em exercício do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica


Banca Examinadora:



Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr.
Presidente



Prof. Nelson Sadowski, Dr.
Co-orientador




Prof. João Antonio de Vasconcelos, Dr.



Prof. Arnulf Kost, Dr./Ing.



Prof. Aly Flores Filho, Dr.



Prof. Walter Pereira Carpes Júnior, Dr.

“É divina a Graça de fazer o Bem. É Graça também persistir, mas a maior Graça é jamais desistir.” (D. Hélder Câmara)

À minha esposa Odete e meu filho João Paulo, pelo amor e compreensão dispensados em todos os momentos, exigidos ao longo de todo período de atividades, e pela renúncia e dedicação de parte de suas vidas para que eu realizasse um sonho.

Que o esforço e sacrifício de vocês tenham valido a pena e que a experiência tenha nos ajudado a crescer.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Prof. João Pedro Assumpção Bastos e Prof. Nelson Sadowski, pela orientação e apoio concedidos a todas as etapas do trabalho, pelos conhecimentos e ensinamentos transmitidos, e pela amizade dentro e fora do ambiente de trabalho.

À Brandenburgische Technische Universität Cottbus – BTU - Germany, na pessoa do Prof. Dr.-Ing. Arnulf Kost e demais colegas, pela acolhida, pela co-orientação e pelas valiosas sugestões apresentadas, que muito contribuíram para a realização deste Trabalho.

A meu Pai (In memorian) e minha Mãe, a minha esposa e meu filho, a todos meus irmãos e cunhados, pela educação e lições de vida transmitidas, e pelo apoio nas incontáveis horas de ausência.

Aos professores do Grucad, que sem estarem diretamente ligados a este trabalho, contribuíram com sua presença e apoio no período de realização deste trabalho.

Aos colegas e professores, pelo incessante apoio dispensado diuturnamente no Laboratório, que ajudaram a manter o otimismo, trazendo idéias, alegrias e descontração, levando a um ótimo ambiente de trabalho e companheirismo.

Àos sempre amigos Celly, secretária do GRUCAD, Wilson e Marcos, secretários da Pós-Graduação, pela amizade, incentivo, paciência e eficiência nos serviços prestados.

Aos membros da Banca Examinadora, pelo tempo dispensado na leitura desta Tese e pelas valiosas sugestões apresentadas.

À todos que direta e indiretamente me incentivaram e me apoiaram, antes e durante o trabalho, contribuindo para que este Trabalho chegasse a bom termo.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC, que através do Programa de Pós-Graduação e Laboratórios, possibilitou a realização deste Trabalho.

Ao povo brasileiro que através da CAPES, concedeu Bolsa de Doutorado Sanduíche, e pelo financiamento através do PICDT, viabilizaram a realização deste Trabalho.

E especialmente à Deus, pelas Graças e Bençãos, pela proteção e saúde concedidas a mim e toda minha família.

Muito Obrigado.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

CÁLCULO DE CAMPOS MAGNÉTICOS CONSIDERANDO HISTERESE

Paulo Irineu Koltermann

Fevereiro/2001

Orientador: João Pedro Assumpção Bastos.

Área de Concentração: Conceção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos.

Palavras-chave: Histerese, Não linearidade, Vetor Magnetização, Elementos Finitos.

Número de Páginas: 117.

O objetivo deste trabalho é descrever uma metodologia para o cálculo de campo magnético não linear, aplicada no método de elementos finitos em 2D, incluindo na mesma um modelo de histerese vetorial, considerando o campo rotativo e alternado. A formulação faz uso dos vetores de campo globais \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} , a qual pode ser combinada com o método de elementos finitos para resolução das equações de Maxwell. A magnetização \mathbf{M} é diretamente introduzida na equação que governa o sistema. A equação resultante após aplicação do procedimento de Galerkin é combinada com a equação do circuito e resolvida pelo método de Newton-Raphson. Verifica-se que existe boa concordância entre os resultados simulados e os experimentais considerando os casos: a) eletroímã - barra de ferro; b) quadro de Epstein de 25 cm c) estrutura de ferro (rotor). O processo iterativo apresentou desempenho satisfatório e conclui-se que esta metodologia pode ser uma ferramenta importante para cálculo de campo magnético passo a passo no tempo levando em consideração a histerese.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering

MAGNETIC FIELD CALCULATION TAKING INTO ACCOUNT HYSTERESIS

Paulo Irineu Koltermann

Fevereiro /2001

Advisor: João Pedro Assumpção Bastos

Area of Concentration: Conception and Analysis of Electromagnetic Devices.

Keywords: Magnetic Hysteresis, Magnetization Vector, Finite Elements,

Number of Pages: 117.

The aim of this work is to describe a methodology for non-linear magnetic field calculation applied on 2D finite element method, taking into account vector hysteresis model, considering the alternating and rotational magnetic field. The formulation makes use of the global vector fields \mathbf{B} , \mathbf{H} and \mathbf{M} , which can be easily combined with a finite element resolution of Maxwell's equations. The magnetization vector \mathbf{M} is directly introduced into the main equation. The equation obtained after Galerkin's procedure, and the circuit equation are combined together and solved by Newton-Raphson method, where the term related to the magnetization \mathbf{M} is given by a magnetization derivative matrix. The simulation results agree to experimental cases : a) electromagnet - iron bar, b) Epstein frame c) rotor iron structure. The numerical calculation by Newton-Raphson method shows a good convergence and one can conclude that this methodology offers an important tool in field magnetic calculation taking into account the hysteresis characteristics.

SUMÁRIO

Resumo	vi
Abstract.....	vii
Sumário	viii
Lista de tabelas	xi
Lista de figuras	xii
Lista de siglas, abreviaturas e símbolos	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Relevância do trabalho / motivação	1
1.2 Revisão da literatura.....	2
1.3 Definição e delimitação do objeto de estudo.....	9
1.4 Objetivos	10
1.5 Organização do trabalho	11
2 CONCEITOS E PRINCÍPIOS BÁSICOS	12
2.1 Introdução	12
2.2 Momento magnético - magnetização.....	12
2.3 Os vetores magnéticos “ B , H e M ”	14
2.4 Processo de magnetização	16
2.5 Energia da magnetização	19
2.6 Magnetização sem histerese – Equação de Langevin.....	20
2.7 Conceitos fundamentais das perdas por histerese rotativa e alternada.....	22
2.8 Conclusão	23
3 MODELAGEM DA HISTERESE RELACIONANDO B , H E M	24
3.1 Introdução	24
3.2 Magnetização sem histerese - função de Langevin.....	24
3.2.1 Cálculo da função de Langevin	25
3.2.2 Parâmetros da função de Langevin	28
3.3 Exemplos de curvas de magnetização sem histerese.....	31
3.3.1 Variação dos parâmetros.....	31
3.4 Magnetização com histerese – Processos reversível e irreversível.....	32

3.4.1	Modelagem da histerese magnética	33
3.4.2	Deslocamento irreversível	34
3.4.3	Deslocamento reversível	35
3.5	A equação diferencial da histerese.....	36
3.6	Comportamento do modelo de histerese em função da variação dos parâmetros.....	38
3.7	Conclusão.....	41
4	MODELAGEM DA HISTERESE EM DUAS DIMENSÕES.....	42
4.1	Introdução.....	42
4.2	Porque existe ângulo entre H e B.....	42
4.2.1	Análise fasorial.....	43
4.2.2	Caso fasorial bidirecional com defasagem espacial.....	44
4.3	Separação das perdas usando os vetores de indução magnética.....	49
4.3.1	Traçado de um círculo circunscrito com os vetores de B_0 , B e dB.....	49
4.3.2	Hipótese básica de separação de perdas.....	51
4.3.3	Criação do novo sistema de coordenadas para o campo magnético.....	53
4.3.4	Cálculo do campo magnético H_H – histerese unidirecional.....	56
4.4	Locus de H e B com excitação tipo espiral.....	58
4.5	Algoritmo de cálculo.....	60
4.6	Conclusão.....	60
5	CÁLCULO DE CAMPO COM OS VETORES B E M.....	62
5.1	Introdução.....	62
5.1.1	Magnetização remanente e campo coercitivo.....	63
5.1.2	Comparação entre as curvas envolvendo M-B e M-H.....	64
5.2	Análise da orientação dos três vetores do magnetismo B , H e M	65
5.2.1	Caso unidimensional (em “x”).....	66
5.2.2	Caso bidimensional sem histerese.....	66
5.2.3	Caso bidimensional com histerese.....	67
5.3	Cálculo das derivadas da magnetização.....	68
5.3.1	Derivada da magnetização em relação aos potenciais.....	68
5.3.2	Caso bidimensional sem histerese.....	68
5.4	Matriz de derivadas da magnetização [M'].....	69
5.5	Equações de Maxwell.....	71
5.6	Equação diferencial usando o potencial vetor magnético.....	72

5.7 Equação diferencial em duas dimensões.....	73
5.7.1 Primeiro termo de (5.35), com $v_0\mathbf{B}$	73
5.7.2 Segundo termo de (5.35), com \mathbf{M}	74
5.7.3 Equação diferencial total para 2D.....	75
5.8 Elementos finitos triangulares de primeira ordem.....	76
5.9 Discretização por elementos finitos – Método de Galerkin.....	77
5.9.1 Primeiro termo, com potencial vetor	78
5.9.2 Segundo termo, com fontes de corrente.....	79
5.10 Montagem do Sistema de Equações não-lineares.....	80
5.10.1 Equação do circuito de excitação.....	80
5.11 Aplicação do método de Newton-Raphson.....	81
5.11.1 Sistema matricial de Newton-Raphson.....	83
5.12 Algoritmo.....	83
5.13 Conclusão.....	85
6 RESULTADOS.....	86
6.1 Barra de ferro reta magnetizada – Dados analítico-experimentais.....	86
6.1.1 Simulações.....	87
6.2 Quadro de Epstein.....	89
6.2.1 Solução analítica do sistema de equações.....	90
6.2.2 Dados experimentais	91
6.2.3 Simulações do quadrado de Epstein.....	94
6.3 Estrutura com duas bobinas defasadas - rotor.....	99
6.3.1 Dados experimentais.....	99
6.3.2 Simulações da estrutura – rotor com duas bobinas defasadas.....	104
6.3.3 Resumo comparativo e análise dos resultados.....	107
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	109
7.1 Principais contribuições e conclusões	109
7.2 Sugestões para futuros trabalhos.....	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Processo iterativo para cálculo de M/Ms com a função de Langevin.....	31
Tabela 5.1 – Funções de forma dos elementos triangulares de primeira ordem.....	76
Tabela 6.1 – Dados experimentais referentes ao ensaio de Epstein.....	92
Tabela 6.2 – Dados de três casos experimentais.....	102
Tabela 6.3 – Ângulos de defasagem.....	103
Tabela 6.4 – Análise dos ângulos de defasagem.....	107
Tabela 6.5 – Perdas medidas e calculadas (em W).....	108

Lista de Figuras

Fig. 2.1 – Momento magnético de laço de corrente elementar	13
Fig. 2.2 – Núcleo magnético e curva de histerese.....	17
Fig. 2.3 – Estágios de magnetização de um material mole.....	17
Fig. 2.4 – Mecanismos de magnetização do ferro mole.....	18
Fig. 2.5 – Deslocamento das paredes dos domínios sob um campo magnético rotativo.....	22
Fig. 3.1 – Algoritmo de Cálculo de H_{AN}	27
Fig. 3.2 – Curva M-H.....	28
Fig. 3.3 – Curva de magnetização para diferentes valores de alfa (α).....	32
Fig. 3.4 – Curva de magnetização para diferentes valores de “a”.....	32
Fig. 3.5 – Algoritmo para cálculo numérico do campo magnético em cada passo de tempo.....	39
Fig. 3.6 – Curva $B \times H_H$ para dois valores diferentes de “a”	40
Fig. 3.7 – Curva $B \times H_H$ para dois valores diferentes de H_{Hs}	40
Fig. 3.8 – Curva $B \times H_H$ para dois valores diferentes de “ γ_H ”.....	40
Fig. 3.9 – Curva $B \times H_H$ mostrando suas componentes (laço $B \times H_{AN}$ e $B \times H_H$).....	41
Fig. 4.1 – Diagrama fasorial de tensão e corrente.....	44
Fig. 4.2 – Diagrama fasorial de H e B	45
Fig. 4.3 – Diagrama de H e B em coordenadas polares e retangulares	46
Fig. 4.4 – Vetores de H e B defasados de 90°	48
Fig. 4.5 – Traçado do círculo circunscrito	50
Fig. 4.6 – Vetores de indução B_0 e B ortogonais.....	52
Fig. 4.7 – Caso com perda alternada: vetores B_0 e dB em paralelo	54
Fig. 4.8 – Caso com perda rotativa: vetores B_0 e dB defasados de 90°	54
Fig. 4.9 – Caso geral: vetores B_0 e dB com ângulo qualquer	55
Fig. 4.10 – Rotação do sistema de coordenadas	56
Fig. 4.11 – Mudança de coordenadas para o campo magnético.....	56
Fig. 4.12 – Laço de histerese – $B_y, H_y - B_x, H_x$	58
Fig. 4.13 – Laço de histerese $B_x - H_x$	59
Fig. 4.14 – Laço de histerese $B_y - H_y$	59
Fig. 4.15 – Algoritmo para histerese bidirecional.....	61
Fig. 5.1 – Laço $B \times H$ e curva $v \times B$	62
Fig. 5.2 – Histerese ferromagnética (a) Característica B-H; (b) Característica M-H.....	63

Fig. 5.3 – Características das curvas M-H e M-B.....	64
Fig. 5.4 – Derivadas dM/dH e dM/dB para meio ciclo da figura 5.3.....	65
Fig. 5.5 – H, M e vOB , em paralelo – caso sem histerese unidimensional.....	66
Fig. 5.6 – H, M e vOB , em paralelo – caso sem histerese bidimensional.....	66
Fig. 5.7 – Vetores B e M em dois instantes de tempo (a) unidirecional – caso sem histerese; (b) bidirecional–caso com histerese.....	67
Fig. 5.8 – Algoritmo geral de cálculo de campo com elementos finitos.....	84
Fig. 6.1 – Vetores B, H e M típicos da estrutura.....	86
Fig. 6.2 – Estrutura simulada com a sua respectiva malha.....	87
Fig. 6.3 – Vetores de campo.....	87
Fig. 6.4 – Vetores de indução.....	88
Fig. 6.5 – Vetores de magnetização.....	88
Fig. 6.6 – Quadro de Epstein 25 cm.....	89
Fig. 6.7 – Tensão e corrente (cálculo analítico).....	91
Fig. 6.8 – Ligação do quadro de Epstein.....	92
Fig. 6.9 – Gráfico da tensão e corrente versus tempo experimentais.....	93
Fig. 6.10 – Gráfico do fluxo versus corrente experimentais.....	93
Fig. 6.11 – Malha e o domínio de estudo, 1/4 do quadro de Epstein.....	94
Fig. 6.12 – Curva B-H com e sem histerese simuladas.....	94
Fig. 6.13 – Correntes simuladas com e sem histerese.....	95
Fig. 6.14 – Vetores de indução B.....	96
Fig. 6.15 – Vetores de magnetização M.....	96
Fig. 6.16 – Locus de B e H do elemento “ x_1 ” situado no canto.....	97
Fig. 6.17 – Locus de B e H do elemento “ x_2 ” situado na coluna.....	98
Fig. 6.18 – Estrutura de ferro cilíndrica com duas bobinas defasadas de 90°	99
Fig. 6.19 – Diagrama esquemático da estrutura de teste.....	100
Fig. 6.20 – Ligação das fontes de tensão com resistência série para limitação de corrente.....	100
Fig. 6.21 – Curva de tensão x tempo: $V_1 \times t$ (bobina 1) e $V_2 \times t$ (bobina 2) – Caso 2.....	101
Fig. 6.22 – Curva de corrente x tempo: $I_1 \times t$ (bobina 1) e $I_2 \times t$ (bobina 2) – Caso 2.....	101
Fig. 6.23 – Valores experimentais de ϕ_x , ϕ_y e I_x , I_y para quatro instantes de tempo.....	103
Fig. 6.24 – Malha e o domínio.....	104
Fig. 6.25 – Linhas de fluxo – eixo polar.....	104
Fig. 6.26 – Vetores de campo simulados no instante 1 – ângulo do eixo polar.....	105
Fig. 6.27 – Vetores de indução simulados no instante 1 – ângulo do eixo polar.....	106

Fig. 6.28 – Vetores de campo simulados no instante 2 – ângulo do eixo polar.....	106
Fig. 6.29 – Vetores de indução simulados no instante 2 – ângulo do eixo polar.....	107
Fig. 6.30 – Curva de corrente x tempo: $I_1 \times t$ (bobina 1) e $I_2 \times t$ (bobina 2) – Caso 2.....	108

Lista de Siglas, Abreviaturas e Símbolos

- A** – vetor potencial magnético (Wb/m)
B - indução magnética (Wb/m²) ou (T)
B – indução magnética unidirecional
B_m – indução magnética de pico
H - campo magnético (A/m)
E – campo elétrico (V/m)
H – campo magnético unidirecional
J - densidade de corrente elétrica (A/m²)
m – momento magnético
M - magnetização (A/m)
x, y, z – sistema de coordenadas cartesianas
p₁, p₂, p₃, q₁, q₂, q₃, r₁, r₂, r₃ - fatores de forma de um triângulo (m)
χ - suscetibilidade
χ' – suscetibilidade diferencial
φ - fluxo magnético instantâneo (Wb)
φ - fluxo magnético concatenado(Wb. espiras)
v₀ - relutividade magnética no vácuo (m/H)
μ₀ - permeabilidade absoluta no vácuo (4.π.10⁻⁷ H/m)
∂∂ - matriz de derivadas da magnetização
d – espessura das lâminas (m)
ρ - resistividade elétrica (Ω.m)
V - tensão elétrica (V)
I - corrente elétrica (A)
N - número de espiras ou condutores
R - resistência elétrica (Ω)
L - indutância elétrica (H)
ℓ_m - comprimento do circuito magnético

S_m - seção do circuito magnético
 $L(\lambda)$ - função de Langevin da variável λ .
 $L(\lambda_H)$ - função de Langevin da variável λ_H da histerese.
 M_S - magnetização de saturação
 a, α_L - parâmetros da função de Langevin.
 K_B - constante de Boltzmann
 w_m - energia do momento magnético
 H_{HS} e γ_H - parâmetros da histerese.
 ω - velocidade angular (rad/s).
 f - frequência (Hz).
 T - período de tempo (s).
 t_{pas} ou Δt - passo de cálculo (s)
 $\theta, \phi, \delta, \alpha$ - ângulos
 W - energia (J)
 P - potência (W)
 η, ξ - componentes da matriz de derivadas da magnetização.

Subscritos:

AN - curva de magnetização sem histerese, do inglês 'anhysteresis'.
HH - campo de histerese estática.
HW - parcela irreversível do campo da histerese.
HR - parcela reversível do campo da histerese.
rot - campo rotativo da histerese.
alt - campo alternado da histerese.
aro - correspondente ao círculo circunscrito
TG - tangente ao círculo circunscrito

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 – Relevância do Trabalho / Motivação

O mundo vem se beneficiando do acelerado desenvolvimento tecnológico das últimas décadas, com vários setores da engenharia progredindo acentuadamente, como telecomunicações, computadores, controle e robótica, etc. O crescimento da competitividade industrial na área de Engenharia Elétrica, aliado à conjuntura econômica atual, implicaram na necessidade de busca de métodos e técnicas visando a melhoria e capacitação dos setores produtivos, e assim, as pesquisas realizadas nesta área foram fortemente intensificadas na última década. A expansão dos setores produtivos tem levado a uma utilização cada vez maior de dispositivos eletromagnéticos e para os fabricantes de equipamentos é imprescindível a contínua busca de melhor avaliação das grandezas eletromagnéticas e eletromecânicas, e conseqüentemente, da eficiência. A redução de custos e aumento da qualidade do produto são componentes indispensáveis para o sucesso de uma empresa, nesta época de globalização do mercado.

A operação de dispositivos eletromagnéticos depende da distribuição de campos magnéticos, cujo comportamento está baseado nas equações de Maxwell. Vários métodos de resolução destas equações já foram desenvolvidos, com conceitos matemáticos complexos, resultando por vezes, em processos de cálculo demorados e difíceis.

Neste contexto, denota-se a necessidade de utilização de ferramentas de análise modernas para apreciação da distribuição do campo magnético no interior de um determinado volume. Considerando a complexidade das estruturas, não são possíveis resoluções analíticas, tendo então sido adotadas técnicas numéricas, em especial o método de elementos finitos, permitindo análises em duas e três dimensões. Essa técnica gera grandes sistemas matriciais, necessitando, para sua solução, métodos iterativos de resolução de sistemas de equações não-lineares.

Nos últimos anos, o estudo e análise de máquinas elétricas e dispositivos eletromagnéticos têm sido alvo de muito interesse e investigação pela comunidade científica e industrial. No estágio atual dos trabalhos, estão inclusos o desenvolvimento de sistemas computacionais usando técnicas de acoplamento entre o dispositivo eletromagnético e o seu

circuito de alimentação e, em várias aplicações, torna-se imprescindível uma adequada modelagem da curva de magnetização do material incluindo o comportamento da histerese, juntamente com metodologia que permite uma maior eficiência no cálculo numérico e menor tempo computacional. A modelagem de materiais magnéticos tem sido objeto de muitos estudos, mas a implementação da histerese em cálculos de campos por elementos finitos é ainda objeto de pesquisas. A inclusão do comportamento real da magnetização dos materiais magnéticos em formulação de cálculo de campo, pelo método de elementos finitos, garante uma maior precisão nos resultados obtidos, e com isto, uma maior adequabilidade às análises de dispositivos eletromagnéticos.

Finalmente, a grande motivação para esta tese é a necessidade de implementação de ferramenta computacional para avaliar a performance de um dispositivo eletromagnético, incluindo o comportamento das perdas por histerese rotativa e alternada, de forma a melhor caracterizar a presença dos materiais no funcionamento e operação dos mesmos, permitindo assim a otimização e conseqüente redução dos custos de um produto manufaturado.

1.2 – Revisão da Literatura

As propriedades dos materiais são normalmente modeladas através da curva de magnetização sem histerese. Entretanto, para retratar de modo mais real o comportamento dos materiais magnéticos, precisa-se utilizar um modelo de histerese. Por isto, a modelagem de materiais magnéticos, incluindo não-linearidade e histerese, constitui uma área de pesquisa que tem atraído a atenção de pesquisadores desde o início do século.

Existe uma vasta literatura sobre aproximações para a curva de magnetização com e sem histerese, constituindo modelos escalares e/ou vetoriais. Na última década, vários pesquisadores têm dedicado suas pesquisas a este tema, utilizando-se de técnicas analíticas ou numéricas.

A magnetização de um material pode ser descrita por uma função simples do campo magnético, se o material tiver laço de histerese bastante estreito (pequena perda). Para modelagem da magnetização sem histerese existe uma série de métodos. Um método de aproximação polinomial foi adotado por PRUSTY (1980) e LIN (1989) e através de polinômios de 5^a ordem, cujas constantes incógnitas são obtidas por dois pontos da curva rms de magnetização. Um método bastante comum envolve o uso de polinômios racionais. Uma aplicação desse método foi feita por RIVAS (1981), cuja expressão em série de

potências não reproduzem a saturação para altos campos. Um método mais recente envolveu o uso da função de Langevin, baseado na teoria matemática do paramagnetismo (JILES, 1983, 1984). Entretanto, em outras aplicações, em que a presença das perdas é mais acentuada, o comportamento da histerese do material é importante pois a perda de histerese pode ser uma componente significativa da perda total.

Vários caminhos têm sido adotados para levar em consideração a presença da histerese na resolução das equações de Maxwell por elementos finitos.

Dois vertentes principais constituem a base do paradigma da modelagem física da histerese magnética.

a - A primeira vertente está relacionada com a modelagem micromagnética, usados na descrição de finas partículas magnéticas. Neste estudo, a energia de um sistema é obtida pela soma dos diferentes tipos de energias envolvidas, aplicando os princípios de minimização da termodinâmica. O estado de equilíbrio é encontrado pela minimização da energia total. O primeiro modelo baseado na teoria micromagnética foi apresentado por Stoner-Wohlfahrt. O modelo descreve o processo de magnetização como o conjunto da rotação dos momentos magnéticos em partículas de simples domínios com anisotropia uniaxial. Este modelo é válido se a forma da partícula é uma elipse.

b - A segunda está relacionada com o enfoque fenomenológico sendo geralmente matemático em sua natureza e tem parâmetros físicos que são ajustados para reproduzir os valores medidos a partir de ensaios do sistema físico. Ele está associado ao uso de equações diferenciais não-lineares, o qual apresenta um desempenho computacional mais rápido, sendo assim mais largamente utilizado. Um exemplo típico é o modelo de Jiles-Atherton.

Não seria possível aqui citar a totalidade dos trabalhos científicos publicados nestas duas vertentes, sendo dado maior ênfase aos modelos fenomenológicos, onde pode-se mencionar, numa seqüência adequada, aqueles considerados mais importantes por ocasião da realização da pesquisa bibliográfica. Nesse enfoque, várias abordagens para modelagem da magnetização têm sido propostas e estudadas, destacando-se os modelos baseados no método clássico de Preisach-Néel e Jiles-Atherton.

Os primeiros estudos de perdas em materiais magnéticos foram realizados a aproximadamente 60 anos atrás, quando o físico alemão F. Preisach propôs um modelo escalar de histerese magnética. Este modelo foi o primeiro a ser conhecido na área de

magnetismo, sendo ele foco de consideráveis pesquisas, por muitos anos. Como resultado, o modelo de Preisach foi aperfeiçoado e valiosos conhecimentos nesta área foram acumulados. No método de Preisach é assumido que o material ferromagnético consiste de superposição de simples operadores de histerese, representados por laços retangulares elementares.

O conceito fundamental ou suposição de grande importância que define o modelo de Preisach, é que cada domínio pode ser caracterizado por campos de chaveamentos movidos para cima e para baixo, correspondendo à direção dos mesmos. O modelo clássico de Preisach é escalar e descreve somente a componente irreversível da magnetização. O ponto delicado da teoria é que para implementação do cálculo é necessário conhecer a “função de distribuição”, a qual descreve a densidade dos diferentes tipos de domínios com diferentes laços de magnetização, sendo a mesma determinada experimentalmente.

M. A. Krasnoselskii e A. V. Pokrovskii, na década de 1950, desenvolveram uma nova interpretação sobre os estudos de Preisach e Everett, representando-os de uma forma puramente matemática, baseada em aproximação estatística das propriedades dos materiais. A partir deste modelo, ocorreu um incremento nos estudos do modelo de Preisach (ATHERTON, 1987, MAYERGOYZ, 1988), resultando em um tratamento fenomenológico, conforme publicado nos famosos livros e artigos científicos por DELLA TORRE (1990), MAYERGOYZ (1991), IVÁNY (1997), BERTOTTI (1992), LEONARD (1995). A partir da generalidade matemática do modelo de histerese escalar de Preisach, numerosas aplicações para representação de histerese para a engenharia foram desenvolvidas (modelos escalares e vetoriais). Não foram aqui utilizados estes modelos por três motivos:

- a - dificuldade experimental para determinação da função de distribuição;
- b – os mesmos adotam o campo magnético H como variável independente; e
- c – o modelo vetorial é muito complexo para implementação computacional.

O modelo de Langevin para materiais paramagnéticos baseados na estatística de Boltzmann teve seu desenvolvimento através da teoria de Weiss e resultou no modelo de histerese de JILES-ATHERTON (1983), considerando o princípio do movimento das paredes dos domínios.

No método de Jiles-Atherton, duas equações diferenciais representam o mecanismo da histerese. A equação da histerese pode ser derivada da equação do balanço de energia, na

qual a energia magnética suprida, por exemplo, para um material inicialmente desmagnetizado, pode aparecer ou como uma variação na magnetização total (energia magnetostática), ou dissipada devido à variação irreversível da magnetização (perda por histerese). Se não existir dissipação, então a magnetização assume o comportamento da curva sem histerese.

A década de 90 foi pródiga, principalmente pela apresentação de um grande número de metodologias de modelagem de curvas de magnetização com e sem histerese, em especial o método de Jiles-Atherton. O modelo descrito por Jiles-Atherton trata de uma teoria matemática da histerese magnética, baseada na idéia do movimento dos planos de separação e rotação dos domínios (JILES, 1991, 1992).

Algumas variantes do modelo clássico de Preisach e de Jiles já têm sido largamente utilizados para representação das propriedades magnéticas do material em cálculo numérico de campos (MAYERGOYZ, 1988, DELLA TORRE, 1990, CARPENTER, 1991, CHIAMPI, 1995, LEDERER, 1996, PHILIPS, 1995, BRACHTENDORF, 1997), sendo que na maioria deles, o campo magnético é utilizado como variável independente. Entretanto algumas dificuldades de convergência e dificuldades de implementação têm sido apontadas, demonstrando que tais formulações não são totalmente adequadas para uso geral.

A análise numérica de campos eletromagnéticos tem sido usada para solucionar problemas de engenharia por muitos anos. Um grande número de problemas práticos tem sido resolvidos quase que totalmente durante este período. Ao mesmo tempo, algumas dificuldades ainda permanecem para estudos de casos envolvendo materiais magnéticos considerando a presença de histerese.

Na análise não linear do campo magnético, usando a curva inicial B-H, o potencial vetor magnético e a relutividade são usualmente tratadas como variáveis desconhecidas. De outro modo, quando as características da histerese são levadas em consideração, a magnetização é adotada em vez da relutividade, devido à descontinuidade da mesma no ponto onde a indução passa pelo zero.

NAKATA (1985), apresentou uma aplicação desta metodologia, representando a histerese pela magnetização. Para uso do método de Newton-Raphson foi considerada a curva M-B, evitando a presença de descontinuidade, encontrada no caso da curva B-H.

No trabalho de PARK (1993), foi apresentado um modelo enfocando a implementação do cálculo de campo utilizando as características M-B da histerese, denotando as vantagens relativas à sua derivada (dM/dB), quando comparada com as características M-H (dM/dH). Nesse trabalho foi adotado o método de Preisach.

OSSART (1991) também implementou cálculo de campo por elementos finitos, utilizando a histerese magnética, baseado no modelo de Preisach. Ele modelou o material magnético a partir das variáveis B, H e M. Resolveu o sistema não linear pelo processo iterativo de Gauss-Seidel, onde foi acusada dificuldades nos aspectos relativos à convergência, sugerindo o uso de sub-relaxação.

DELINCÉ (1994) adotou estratégia para assegurar que a relutividade permanecesse sempre positiva, acrescentando um segundo termo na equação do campo (campo coercitivo), cujo termo representava a componente irreversível introduzida pela histerese, baseada no modelo de Preisach.

Em trabalho publicado por NAN (1995), envolvendo análise de campo por elementos finitos, foi também adotado os princípios da magnetização, (vetores globais **H**, **B** e **M**), sendo levado em consideração a histerese magnética vetorial. O modelo vetorial foi baseado no método de Preisach mas por problemas de implementação experimental, os resultados não foram satisfatórios.

MURAMATSU (1997) publicou trabalho de cálculo de campo em elementos finitos 3D, levando em consideração as características da histerese magnética. Para análise não linear foi adotado o método de Newton-Raphson, enfatizando o termo relativo à derivada da magnetização em relação ao potencial vetor magnético.

LEE (1998) fez análise de um motor de relutância síncrono, por elementos finitos, considerando a presença das perdas por histerese (método de Preisach). Nas equações de Maxwell também foi introduzido o termo relativo à magnetização, alterando a relação constitutiva.

BERNARD (2000) associou o modelo de Preisach com um método e ponto fixo, para solução do sistema não linear. Para utilização do potencial vetor magnético, foi necessário utilizar uma estratégia para cálculo direto da função de distribuição considerando a indução como variável independente. No caso, os vetores da magnetização e da indução foram considerados colineares, tendo sido obtido bom desempenho quanto à convergência.

Como é bem conhecida, a indução magnética de um material magnético é geralmente mostrada com a equação constitutiva dada pela soma de dois vetores (campo magnético e magnetização). Se o material é puramente isotrópico, o campo magnético \mathbf{H} é paralelo à magnetização \mathbf{M} e à indução magnética \mathbf{B} . Nos modelos escalares, o campo magnético varia ao longo de uma direção fixa (histerese alternada) e a magnetização acompanha a mesma direção. Nos casos dos materiais usados para máquinas elétricas e dispositivos eletromagnéticos, o campo magnético \mathbf{H} não necessariamente permanece paralelo a \mathbf{M} e a \mathbf{B} conforme ENOKIZONO (1993, 1994). Existe uma defasagem espacial entre o vetor indução e o vetor campo por causa do comportamento da magnetização. Quando um modelo vetorial é levado em consideração, as direções dos vetores \mathbf{H} , \mathbf{B} e \mathbf{M} podem ser determinadas.

Em geral as propriedades dos materiais magnéticos são medidas em termos da relação entre a indução e o campo magnético sob certas condições de excitação. Convencionalmente as mesmas são medidas assumindo que \mathbf{B} e \mathbf{H} sejam paralelos. Os materiais magnéticos são excitados e medidos em uma simples direção, portanto, os resultados das medidas representam as propriedades somente na direção medida, não refletindo as propriedades reais ou o comportamento do material. A inadequacidade de tais métodos de medidas é admitida quando os materiais são incorporados em equipamentos elétricos reais, ou núcleos, por exemplo, ligações T de transformadores, ou como o núcleo de máquinas rotativas, onde eles estarão sujeitos a fluxos magnéticos rotativos.

Quando um material magnético é colocado em um campo magnético rotativo, a indução magnética é usualmente não paralela com o campo magnético. Como resultado existe um torque agindo no material. Consequentemente \mathbf{B} e \mathbf{H} podem ser determinadas por medidas de fluxo com uma bobina transversal (B_x - B_y e H_x - H_y) colocadas em torno de uma amostra de ferro, e estes valores de campo magnético rotativo podem ser medidos convencionalmente com um fluxímetro (STOUT, 1960).

O primeiro modelo vetorial de Preisach de grande aplicação foi introduzido por MAYERGOYZ (1988). Desde então, muitos modelos vetoriais tem sido desenvolvidos e modificados para explicar o fenômeno da histerese vetorial. Entretanto a grande maioria de suas tentativas falham em descrever as propriedades da histerese vetorial dos materiais magnéticos claramente. O trabalho de WIESEN & CHARAP, (1990), também foi pioneiro para considerar a histerese rotativa.

Para modelagem das perdas por histerese rotativa, STONER-WOHLFAHRT (1991) introduziu um modelo básico para uma simples partícula, mas este modelo não era facilmente adaptado para aplicações em engenharia em função dos grandes erros entre os valores de perdas medidas e calculadas. Como sua vantagem estava a fácil representação da anisotropia, mas o inconveniente era de não considerar a interação entre os momentos magnéticos. Nos últimos anos combinações do modelo clássico de Preisach e de Stoner-Wohlfarth têm sido usados para desenvolvimento de modelos vetoriais de histerese magnética.

BERTOTTI (1991) calculou as perdas no ferro de um motor de indução, usando os três termos do modelo desenvolvido por FIORILLO & RIETTO (1993). As perdas de histerese foram calculadas com uma indução de forma elíptica, usando uma interpolação linear entre as perdas rotativas e alternada no ferro.

ATALLAH, & HOWE (1992) calcularam as perdas no ferro de dois motores CC Brushless, com ímã permanente usando diferentes tipos de lâminas sob diferentes modos de operação com os três termos do modelo proposto por BERTOTTI (1991) e FIORILLO (1993), sendo que os efeitos das perdas rotativas não foram incluídos. É bem conhecido, que as perdas de histerese rotativas se reduzem a zero para campos de alta magnitude (saturação), devido o fato que o ângulo entre a magnetização e o campo se aproxima de zero (não existe mais paredes de domínios). ATALLAH & HOWE (1993) apresentou uma equação geral para cálculo das perdas rotativas em lâminas de ferro, utilizando o vetor de Poynting. Foram identificadas as equações para as perdas rotativa e alternada, sob condições de fluxo não puramente rotativo, denotando a influência do ângulo entre o campo e a indução.

O modelo vetorial generalizado do modelo de Jiles-Atherton proposto por BERGQVIST (1996) consistiu da modificação da equação diferencial para um modelo vetorial, preservando a simplicidade do modelo escalar, e resultou em boa aproximação para induções de 0,5 a 1,5 T, apresentando porém, uma menor precisão para baixos e altos campos. Em particular, para altos campos (saturação) o modelo não atende o comportamento decrescente observado para as perdas rotativas. O modelo pode tratar tanto casos isotrópicos como anisotrópicos e é equivalente ao escalar para campos unidirecionais.

Finalmente, o estado da arte da “modelagem de materiais magnéticos” considerando a histerese escalar e vetorial e sua inclusão em software de cálculo de campos, avança na

direção de metodologias que conjuguem praticidade (poucos parâmetros) e tempo de computação (formulação para o método de elementos finitos), de modo a representar de maneira mais fiel os efeitos eletromagnéticos, tanto em geometrias mais simples ou mais complexas. Entretanto, não existe ainda uma metodologia plenamente consolidada para cálculo numérico de campos considerando a presença da histerese rotativa e alternada.

1.3 - Definição e delimitação do objeto de estudo.

Normalmente, na utilização do cálculo de campo em termos de potencial vetor magnético, conhece-se a indução magnética, tornando-se vantajosa e prática a sua utilização para obtenção do cálculo do campo magnético e da magnetização. Neste sentido, no modelo proposto para cálculo da histerese, adotar-se-á a indução magnética como variável independente. Concernente à modelização do comportamento do material magnético, será considerado inicialmente um modelo de curva de magnetização sem histerese (função de Langevin) e posteriormente um modelo de histerese estática.

Apresentar-se-á também neste trabalho, um modelo vetorial de histerese para caracterização das perdas em presença de campos alternado e rotativo, sendo esta última normalmente encontrada nas ligações em "T" de transformadores trifásicos e máquinas rotativas. Uma análise do comportamento do laço de histerese considerando estes campos é introduzida, utilizando-se do locus B-H. Neste estudo serão efetuadas análises qualitativas e quantitativas, enfatizando mais o aspecto qualitativo, em função da complexidade de equipamentos de ensaio/protótipo (implementação experimental), necessários para comparação de resultados teóricos e experimentais.

Como contribuição matemática, objetiva-se na realização desta tese, a resolução das equações de Maxwell, fazendo uso dos vetores de campo globais, **B**, **H** e **M**, observando-se que:

- as propriedades magnéticas do material são representadas pela curva de magnetização com histerese $M=f(B)$, a qual contém a mesma informação que a tradicional curva $H=f(B)$ da histerese magnética. A indução magnética consiste de duas contribuições: uma do campo magnético (gerado por fontes externas ao volume) e outra da magnetização (intrínseco ao material);
- efetua-se alteração na equação constitutiva de cálculo de campo, que pode ser facilmente combinada com o método de elementos finitos em duas dimensões;

- faz-se uso de defasamento angular entre as derivadas da magnetização e da indução, expresso na matriz de derivadas da magnetização, a ser usada no cálculo do sistema não linear através do método de Newton-Raphson;
- Incorpora-se o modelo de perdas por histerese rotativa e alternada no cálculo de campo magnético.

Como contribuição de desempenho, objetiva-se um menor tempo de computação e melhor grau de convergência, considerando que:

- existe independência matemática do cálculo da histerese e do método de elementos finitos;
- são utilizadas as derivadas dM/dB , as quais possuem menor inclinação do que dM/dH , mostrando-se mais apropriadas ao método de Newton-Raphson.

A equação que governa o sistema é derivada das equações de Maxwell, levando em consideração o vetor magnetização M , e uma equação adicional do circuito é obtida pela lei de Kirchoff. Pelo uso do procedimento de Galerkin, a equação do sistema e a equação do circuito são combinadas e resolvidas pelo método de Newton-Raphson para obtenção da distribuição do campo magnético.

Através dessa metodologia, pretende-se proporcionar uma melhor compreensão dos fenômenos e das variáveis envolvidas nos aspectos relativos à magnetização, fornecendo assim, uma ferramenta de auxílio para o projeto de máquinas e transformadores.

Os programas/subrotinas implementados serão incorporados aos módulos de processamento do Software EFCAD, com alimentação em tensão, desenvolvido no Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos – GRUCAD, da UFSC.

1.4 – Objetivos

O principal objetivo desta Tese de Doutorado é desenvolver uma metodologia que permita o cálculo e análise de campos magnéticos, considerando não linearidade e histerese, utilizando o método de elementos finitos em duas dimensões, e sua inclusão em pacote computacional EFCAD, para fins de estudo e avaliação do comportamento de máquinas e dispositivos eletromagnéticos.

Como objetivos secundários constam o desenvolvimento dos modelos de magnetização com e sem histerese utilizando a indução magnética como variável

independente. Isto facilita a integração dos mesmos com programas de cálculo de campo que utilizam método de elementos finitos na formulação potencial vetor magnético e viabiliza um modelo vetorial de histerese para caracterização das perdas em presença de campos alternado e rotativo.

1.5 – Organização do trabalho.

Esta tese contempla além da introdução, os seguintes capítulos, discriminados como segue:

Numa primeira etapa, o Capítulo II apresenta alguns conceitos de magnetismo, como forma de embasamento teórico para melhor compreensão dos próximos capítulos. Um dos aspectos mais importantes é a conceituação do processo de magnetização e de perdas alternada e rotativa.

Apresenta-se no Capítulo III, a proposta de um modelo para a curva de magnetização com e sem histerese, em uma dimensão.

O Capítulo IV desenvolve a passagem do modelo de histerese de uma para duas dimensões, e também aborda a existência de um ângulo de defasagem espacial entre os vetores **B**, **H** e **M**. Também, desenvolve-se uma formulação para cálculo das perdas rotativas e alternada da histerese magnética para cálculo de campo a partir do método de elementos finitos.

No Capítulo V é desenvolvido o cálculo das derivadas da magnetização em relação à indução sob forma matricial, a ser utilizada pelo Método de Newton-Raphson. Na seqüência é apresentada a formulação de cálculo de campo em elementos finitos incluindo o efeito da histerese rotativa e alternada.

No Capítulo VI são apresentados os principais resultados obtidos a partir de aplicações de casos como: barra imantada, quadro de Epstein e estrutura com duas bobinas (rotor), utilizados para análise das modelagens realizadas nos capítulos anteriores.

No capítulo VII são apresentadas as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO II

CONCEITOS E PRINCÍPIOS BÁSICOS

2.1 – Introdução

Materiais ferromagnéticos são usados em todas as máquinas elétricas, transformadores e dispositivos eletromagnéticos. As razões para uso tão amplo estão relacionados ao fato do grande fluxo que pode ser estabelecido e controlado pela aplicação de uma pequena força magnetomotriz. Para análise do comportamento dos materiais ferromagnéticos, são necessárias as bases físicas da relação entre os vetores magnéticos **B**, **H** e **M**, respectivamente, a indução magnética, a intensidade de campo magnético e magnetização, além das propriedades de saturação e histerese.

A maioria dos primeiros estudiosos em ferromagnetismo considerava que as propriedades histeréticas destes materiais eram devidas a uma espécie de resistência de fricção (atrito viscoso). Mais tarde surgiu a interpretação da variação na magnetização em termos dos movimentos dos planos de separação dos domínios. Esses movimentos são impedidos pela existência de defeitos nos sólidos, os quais causam resistência ao alinhamento, até suficiente energia ser provida para estabelecer a passagem do campo de forma mais fácil.

2.2 – Momento Magnético - Magnetização

Diversos autores atribuem a origem do magnetismo ao movimento dos elétrons em diferentes níveis de energia nas estruturas atômica dos materiais (CHIKAZUMI, 1964, CULLITY, 1972, MAYERGOYZ, 1991, IVÁNYI, 1997). Pela lei de Ampère, a partir de um circuito simples conduzindo corrente, pode-se gerar um campo magnético. Na análise macroscópica dos modelos de estrutura de um átomo, os movimentos dos elétrons podem ser simulados com um laço de corrente elementar, sendo os dipolos magnéticos associados referidos aos momentos dos laços de correntes. Tal laço de corrente pode ser considerado a unidade elementar do magnetismo, conforme ilustra-se na figura 2.1.

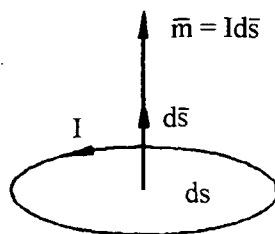


Figura 2.1 – Momento magnético de laço de corrente elementar

O laço de corrente é conhecido como o dipolo magnético por razões históricas, desde que o campo produzido por tal laço é idêntico na forma, para o campo produzido pelo cálculo de dois pólos magnéticos hipotéticos de intensidade p separados por uma distância l , sendo o momento do dipolo de tal arranjo expresso por [JILES, 1991]:

$$m = pl \quad (2.1)$$

ou ainda

$$m = \frac{\phi l}{\mu_0} \quad (2.2)$$

onde ϕ é o fluxo em webers passando através do dipolo e l é o comprimento do dipolo.

O campo magnético produzido pelo laço elementar de corrente I_i , envolvendo a superfície $|ds_i|$ pode ser representado pelo momento magnético \mathbf{m}_i :

$$\mathbf{m}_i = I_i ds_i \quad (2.3)$$

O momento magnético total destes átomos é igual à soma vetorial de todos momentos magnéticos individuais originados pelos movimentos dos elétrons dos átomos.

O volume ΔV contém n números de átomos magnéticos, cada um deles representado pelo momento magnético \mathbf{m}_i , $i=1,2,\dots,n$. O vetor soma destes momentos resulta no momento magnético \mathbf{m}

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \quad (2.4)$$

Este efeito de ímãs atômicos (ou dipolos magnéticos) pode ser convenientemente descrito por uma grandeza chamada de vetor magnetização “ \mathbf{M} ”, o qual é definido pela densidade volumétrica de momentos magnéticos.

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \right) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \mathbf{m} \quad (2.5)$$

A equação (2.2) fornece a relação entre o momento magnético \mathbf{m} e o fluxo magnético ϕ ; pode-se relacionar agora, o vetor magnetização \mathbf{M} com o vetor indução magnética \mathbf{B} .

Considera-se um dipolo magnético com fluxo ϕ no centro, comprimento do dipolo l e com seção transversal S . A magnetização \mathbf{M} é portanto dada por

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V} = \frac{\mathbf{m}}{Sl} \quad (2.6)$$

considerando $\mathbf{m} = \phi l / \mu_0$, daí

$$\mathbf{M} = \frac{\phi}{\mu_0 S} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (2.7)$$

Neste caso não existe nenhuma fonte convencional de corrente elétrica externa para gerar o campo magnético e então $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$. Pode-se notar portanto, que a magnetização \mathbf{M} e o campo magnético \mathbf{H} contribuem para a indução magnética de um modo similar. Se ambos, a magnetização e o campo magnético estão presentes, então suas contribuições podem ser somadas.

2.3 - Os vetores magnéticos “ \mathbf{B} , \mathbf{H} , e \mathbf{M} ”.

Considerando-se um toróide com núcleo de ar de área “ S ” e comprimento médio $\ell = 2\pi R$ (raio “ R ”) com “ N_0 ” espiras, tem-se (KRAUS & CARVER, 1978, JILES, 1991),:

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \frac{N_0 I}{2\pi R} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.8)$$

Colocando-se no mesmo, um anel de ferro, com a mesma área e o mesmo raio, e mesmo número de espiras, o valor de “ \mathbf{B} ” aumenta:

$$\mathbf{B}_{\text{ferro}} = \mu \frac{N_0 I}{2\pi R} = \mu_0 \mathbf{M} \quad (2.9)$$

Resulta que “ \mathbf{B} ” total será dado por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{ferro}} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.10)$$

onde \mathbf{B} = indução (T)

\mathbf{H} = campo magnético (A m^{-1})

\mathbf{M} = magnetização (A m^{-1})

μ_0 = permeabilidade do vácuo = $4\pi \cdot 10^{-7}$ (H m^{-1})

Resumindo: a indução magnética \mathbf{B} consiste de duas contribuições: uma do campo magnético e outra da magnetização. O campo magnético \mathbf{H} é gerado por uma fonte elétrica externa (solenóide) e a magnetização \mathbf{M} é gerada pelo momento angular orbital dos elétrons dentro do material.

A partir de (2.10) o campo magnético \mathbf{H} pode ser calculado por:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (2.11)$$

Nos meios anisotrópicos, \mathbf{M} e \mathbf{H} em geral não estão na mesma direção e por essa razão, $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ é uma relação geral. Um único cristal de ferro é anisotrópico, mas a maioria dos espécimes de ferro consiste em um conjunto de numerosos cristais orientados aleatoriamente, de maneira que macroscopicamente tais espécimes podem ser tratados como se fossem isotrópicos.

As propriedades magnéticas de um material são caracterizadas não somente pela magnitude e sinal de \mathbf{M} mas também pelo modo no qual \mathbf{M} varia com \mathbf{H} . A razão entre estas duas grandezas é chamada de susceptibilidade magnética “ χ ”.

$$\chi = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{H}|} \quad (2.12)$$

onde a susceptibilidade magnética não é necessariamente constante pois \mathbf{M} pode não ser função linear de \mathbf{H} (depende do tipo de material e do meio).

A susceptibilidade magnética diferencial é definida por:

$$\chi' = \frac{|d\mathbf{M}|}{|d\mathbf{H}|} \quad (2.13)$$

2.4 – Processo de Magnetização

Os materiais magnéticos são representados por um número de dipolos magnéticos e assim por muitos momentos magnéticos. Os materiais ferromagnéticos, de acordo com a forte interação entre os momentos magnéticos, consistem de muitos pequenos volumes denominados domínios, mesmo considerando a ausência de um campo aplicado. Nos domínios o grande número de momentos atômicos são alinhados paralelos de modo que a magnetização dentro domínio atinge a saturação. Este fenômeno é a magnetização espontânea.

A histerese pode ser definida como o fenômeno que causa o atraso de “**B**” em relação a “**H**” ou “**M**”, de modo que a curva de magnetização dos campos que aumentam ou diminuem, não seja a mesma. O ciclo traçado pela curva de magnetização é chamado de “Ciclo de Histerese” (PLONUS, 1978), (BASTOS, 1996).

Para visualização do fenômeno, considera-se o núcleo toroidal ferromagnético fechado como o da Fig. 2.2(a). Se uma intensidade de campo magnético **H** é aplicado ao mesmo, seu efeito é o de mover os planos de separação dos domínios, de modo que os domínios cujas direções de orientação estejam similares às do vetor **H** cresçam às expensas daquelas as quais estão opostamente dirigidas.

A característica “ ϕ - *i*” é obtida pelo redimensionamento de uma trajetória B-H do material, usando-se as equações “ $i = H\ell / N$ e $\phi = NSB$ ”, as quais combinadas resultam:

$$\frac{\phi}{i} = \left(\frac{N^2 S}{\ell} \right) \left(\frac{B}{H} \right) \quad \text{Wb/A} \quad (2.14)$$

Isto mostra que a relação corrente-linhas de fluxo para a bobina tem a mesma forma que a característica B-H do material. Se a ordenada da característica B-H for multiplicada por NS e a abcissa por ℓ / N , a característica da curva ϕ - *i* pode ser obtida. As linhas de fluxo “ ϕ ” da bobina são mostradas como função da corrente “*i*” da bobina, na fig. 2.2(b).

Se a intensidade de campo magnético for posteriormente aumentada, o torque sobre os momentos magnéticos não alinhados com a intensidade de campo magnético **H**, tenderá a imprimir uma rotação a estes momentos. Para valores muitos altos de **H**, os momentos aproximam-se de um alinhamento com **H**, como é mostrado na fig. 2.3(d).

O ramo inclinado ascendente da curva de magnetização é predominantemente causado pelo movimento do plano separador dos domínios. Nesta etapa o movimento das paredes se dá através de um salto irreversível, pelo efeito Barkhausen, quando o campo atinge determinado valor crítico. Para correntes elevadas, o processo dominante é o de rotação dos domínios.

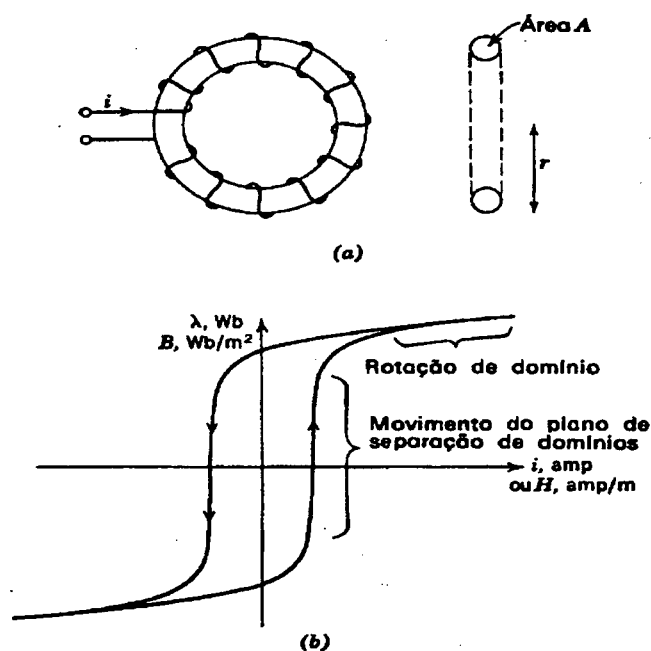


Figura 2.2 – (a) Núcleo magnético (b) Curva de histerese

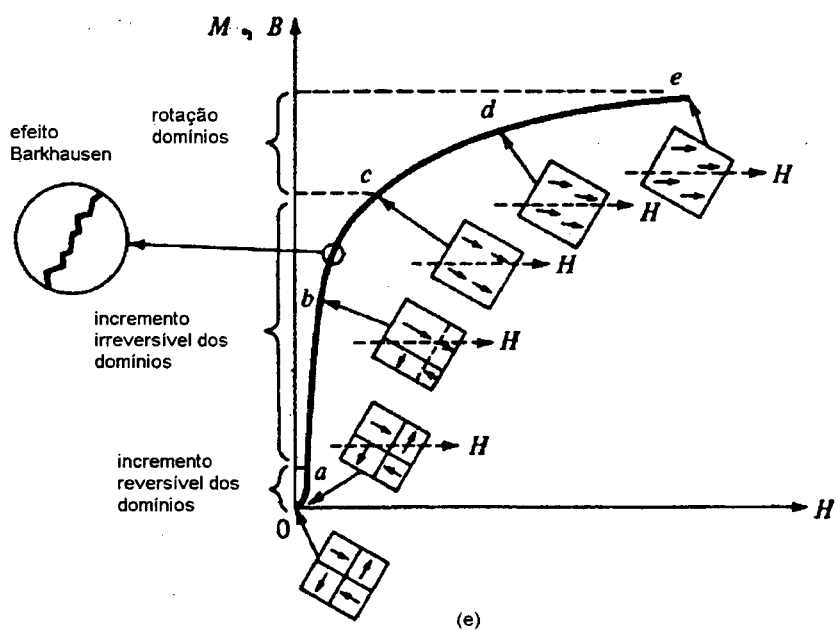


Figura 2.3 - Estágios de magnetização de um material mole

Das análises efetuadas, conclui-se que o laço de histerese completo para um material mole, tal como um ferro-silício, possui duas partes características. Como mostrado na fig. 2.4(a), uma área retangular é primeiramente atribuída para o movimento irreversível do plano separador, o qual atinge 2/3 da curva de saturação, e uma área triangular representando a rotação do domínio, sob a parte saturada da curva. As características acima são melhor distinguidas a partir da fig. 2.4(b), de um outro material magnético mole, onde a direção do campo aplicado não é paralelo com o eixo de fácil magnetização no ferro. Nesta figura, a área finita da parte retangular representa a perda devido à irreversibilidade do movimento do plano separador. A parte da curva na região de saturação, a qual forma uma linha (não representa perda - sem área), representa, portanto, o processo reversível do movimento de rotação dos domínios (REITZ, 1992, PLONUS, 1978, CHIKAZUMI, 1964).

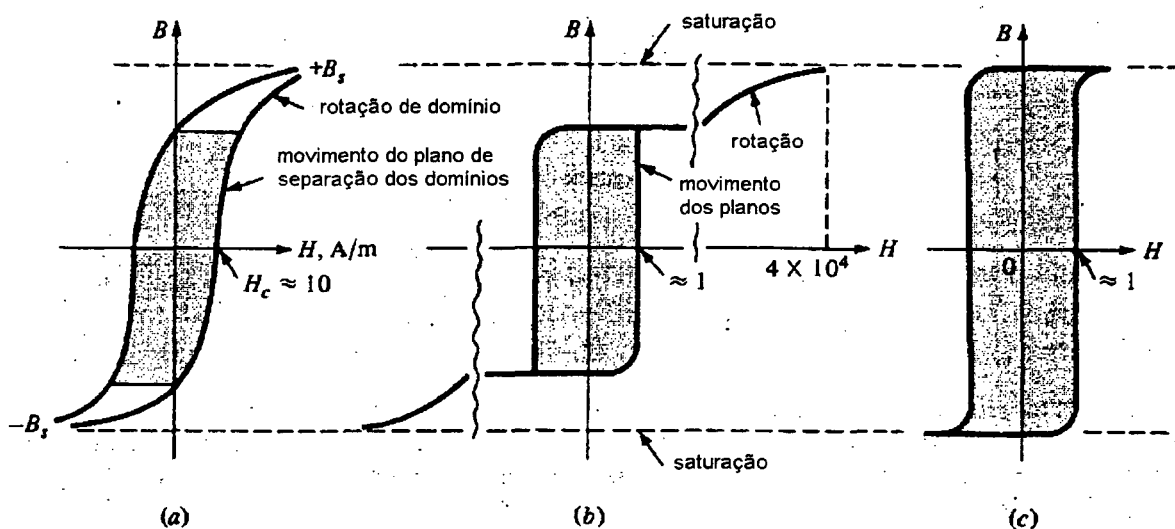


Figura 2.4 (a),(b),(c) - Mecanismo de magnetização do ferro mole

Para comparação, a curva de magnetização para um material magnético (Permalloy - 70% Ni, 30% Fe) é mostrada na fig. 2.4(c). Isso pode ser obtido pelo uso de técnicas especiais de laminação, onde as lâminas de material magnético, tem seus cristais orientados ao longo da direção de magnetização desejada. Nestes materiais com grãos orientados, a rotação dos domínios é essencialmente eliminada.

O fato de a densidade residual do fluxo B_r ser maior do que 95% da densidade de saturação B_s , indica que a orientação do cristal foi completa.

2.5 – Energia da Magnetização

Pode-se demonstrar o comportamento da energia, considerando a relação geral $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, tomando-se como exemplo o toróide da figura 2.2, envolvido com N espiras e supondo-se a resistência da bobina desprezível. A bobina é alimentada por um gerador de tensão alternada. Os vetores \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} são considerados colineares e tangentes ao movimento espiral do núcleo. Faz-se um balanço de energia considerando a modificação do estado do sistema.

A cada instante, o gerador deve fornecer a corrente I tal que:

$$I = H \frac{\ell}{N} \quad (2.15)$$

onde ℓ é o comprimento médio do núcleo.

E a F.E.M. em módulo deve ser:

$$V = \frac{d\phi}{dt} = NS \frac{dB}{dt} \quad (2.16)$$

A energia fornecida no curso da transformação elementar será dada por:

$$VIdt = H \frac{\ell}{N} NSdB \quad (2.17)$$

Onde “ ℓS ” é o volume do núcleo e $dB = \mu_0(dH + dM)$. A energia elementar fornecida por unidade de volume é [REITZ, 1982]:

$$dW = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \equiv \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (2.18)$$

sendo que,

$$\mu_0 \int_{\text{ciclo}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} = \mu_0 \int_{\text{ciclo}} d\left(\frac{H^2}{2}\right) = 0 \quad (2.19)$$

O primeiro termo de (2.18) representa a energia que é fornecida à bobina na ausência de núcleo, para aumentar a excitação de \mathbf{H} para $d\mathbf{H}$. O segundo termo caracteriza a presença do núcleo magnético e $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ representa a densidade volumétrica de energia que foi fornecida para variar a magnetização de $d\mathbf{M}$.

2.6 – Magnetização sem histerese - Equação de Langevin

A expressão para a energia de um momento do dipolo \mathbf{m} na presença de uma indução magnética \mathbf{B} é dada por [IVÁNYI, 1997]:

$$w_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (2.20)$$

e no espaço livre

$$w_m = -\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 m H \cos \theta \quad (2.21)$$

onde θ é o ângulo entre a direção do campo magnético \mathbf{H} e o momento magnético \mathbf{m} .

A ausência de um alinhamento completo dos momentos magnéticos se deve à energia térmica dos átomos, que tende a produzir orientações magnéticas aleatórias. No estado de equilíbrio térmico em temperatura T , a probabilidade de algum dado elétron ocupar um estado de energia particular w_m , a uma temperatura T , é dada pela equação

$$p(w_m) = \exp(-w_m / k_B T) \quad (2.22)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura absoluta; e w_m é a energia do momento magnético de um átomo.

O número de momentos entre θ e $\theta+d\theta$ será agora proporcional a $2\pi \sin \theta d\theta$, multiplicado pela constante de Boltzmann.

$$dn = 2\pi n_0 e^{(\mu_0 m H \cos \theta) / k_B T} \sin \theta d\theta \quad (2.23)$$

onde n_0 é um fator de proporcionalidade determinado pelo fato que densidade de volume total das partículas magnéticas na unidade de volume é N .

Para abreviação, toma-se $\lambda = \mu_0 m H / K_B T$

$$N = 2\pi n_0 \int_0^\pi e^{\lambda \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (2.24)$$

O momento magnético total na direção do campo por unidade de volume (magnetização \mathbf{M}), é dada pela multiplicação do número de átomos dn pela contribuição $m \cos \theta$ de cada átomo e integrando sobre o número total:

$$\mathbf{M} = \int_0^N m \cos \theta dn \quad (2.25)$$

Após o desenvolvimento desta integral (CULLITY,1972), obtém-se:

$$\mathbf{M} = \frac{Nm \int_0^{-1} x e^{\lambda x} dx}{\int_0^{-1} e^{\lambda x} dx} = Nm \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \right) = Nm \left(\coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.26)$$

Considera-se Nm o momento máximo possível que o material pode ter, correspondendo ao perfeito alinhamento de todos os momento atômicos paralelos ao campo, a qual é um estado de completa saturação. Chamando esta grandeza de M_s , obtém-se

$$\mathbf{M} = M_s \left(\coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.27)$$

onde $L(\lambda) = \coth \lambda - 1/\lambda$, é a conhecida equação de Langevin.

De acordo com a teoria de Weiss, as interações entre algum momento magnético individual e outros momentos dentro de um localizado volume podem ser expressos como uma interação entre o dado momento e a magnetização total \mathbf{M} .

Isto é representado como um campo de interação H_{int} , a qual pode ser escrita como:

$$\mathbf{H}_{int} = \alpha \mathbf{M} \quad (2.28)$$

onde α é uma constante característica do material.

O campo magnético total resultante por um momento magnético então torna-se:

$$\mathbf{H}_{tot} = \mathbf{H} + \alpha \mathbf{M} \quad (2.29)$$

Neste caso, a energia de um momento magnético elementar é modificada para

$$w_m = -\mu_0 \mathbf{m} \cdot (\mathbf{H} + \alpha \mathbf{M}) \quad (2.30)$$

e substituindo \mathbf{H} por $(\mathbf{H} + \alpha \mathbf{M})$, na equação de Langevin, resulta no caso unidirecional com os vetores \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} alinhados, podendo-se expressá-los apenas com seus módulos:

$$M = M_s \left[\coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right] \quad (2.31)$$

onde

$$\lambda = \frac{H + \alpha M}{a} \quad (2.32)$$

$$a = \frac{k_B T}{\mu_0 m} \quad (2.33)$$

Em uma substância com domínios magnéticos, a ação do campo (H) é quase insignificante, quando comparada com a do campo da magnetização (M).

2.7 - Conceitos fundamentais das perdas por histerese rotativa e alternada

No funcionamento em regime permanente o núcleo magnético dos dispositivos eletromagnéticos é submetido a um ciclo periódico de inversão do campo. Esta inversão do campo pode assumir duas formas: inversão do campo dito alternado e rotativo.

A inversão do campo dito alternado tem lugar dentro da coluna do núcleo dos transformadores onde a indução é praticamente uniforme seguindo a seção da mesma e varia senoidalmente com o tempo.

A inversão do campo dita rotativa ocorre nas máquinas girantes, onde a condição de magnetização é mais complexa, significando que o núcleo do material magnético está sujeito a campos que podem ser alternado e/ou rotativo, isto é, que varia sua direção no espaço, e no tempo (dentes no interior das máquinas de corrente contínua e alternada e nos cantos dos núcleos de transformadores).

Mostra-se na figura 2.5 (CULLITY, 1972), o deslocamento das paredes dos domínios considerando a presença de um campo magnético rotativo girando de 0° a 360° .

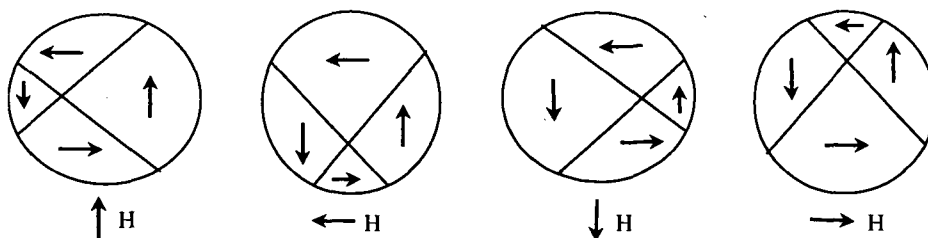


Figura 2.5 – Deslocamento das paredes dos domínios sob um campo magnético rotativo.

Embora as perdas alternada e rotativa sejam conceitualmente distintas e medidas separadamente, ambas têm a mesma origem: deslocamento irreversível das paredes e rotações irreversíveis dos domínios.

2.8 – Conclusão

Quando o campo magnético é aplicado em um material ferromagnético, a variação na estrutura dos domínios pode ser explicada pela:

- a) rotação reversível e irreversível dos momentos magnéticos dentro dos domínios
- b) movimento reversível e irreversível das paredes dos domínios corresponderão às características da magnetização.

Portanto, durante a magnetização, ambos os processos reversível e irreversível ocorrem juntos, havendo predominância do deslocamento das paredes em materiais isotrópicos.

Sintetizando, pode-se classificar as perdas quanto à teoria dos domínios:

- a) rotação dos domínios - processo reversível (curva sem histerese— função de Langevin considerada no capítulo III)
- b) deslocamento irreversível das paredes dos domínios (curva de histerese também considerada no capítulo III);

Pode-se classificar também as perdas quanto à orientação espacial do campo magnético:

- a) perda alternada (variação do campo em uma direção)
- b) perda rotativa (amplitude do campo constante, girando no espaço)

Essas perdas alternada e rotativa serão modeladas no Capítulo IV.

Este capítulo apresentou os conceitos e equações básicas referentes aos materiais magnéticos, representando através da teoria dos domínios, o comportamento do fenômeno da magnetização sem histerese, bem como apresentou os conceitos básicos dos modelos de histerese.

CAPÍTULO III

MODELAGEM DA HISTERESE RELACIONANDO \mathbf{B} , \mathbf{H} , E \mathbf{M}

3.1 – Introdução

Os modelos propostos para a curva de magnetização com e sem histerese visam utilizar a indução magnética \mathbf{B} como variável independente, a qual geralmente está disponível através do método de elementos finitos na formulação potencial vetor magnético.

Normalmente, na utilização do cálculo de campos magnéticos em termos de potencial vetor magnético \mathbf{A} , conhece-se a indução magnética \mathbf{B} e deseja-se obter $\mathbf{H}=f(\mathbf{B})$. Então há necessidade de utilizar-se uma metodologia para cálculo do campo com e sem histerese, e assim calcular $\mathbf{M}=\mathbf{B}/\mu_0 -\mathbf{H}$.

A maioria dos materiais ferromagnéticos apresenta comportamento não linear incluindo o fenômeno da histerese. Para inclusão do efeito da magnetização no cálculo de campo por elementos finitos, torna-se mais vantajoso sobre o ponto de vista numérico (menor complexidade), separar o cálculo da mesma do método de elementos finitos, em função da independência matemática.

O estudo dos modelos de curvas de magnetização e suas interações com os programas numéricos de cálculo de campos são considerados atualmente de suma importância, tornando-se uma área de pesquisa muito promissora.

Neste capítulo tratar-se-á estas grandezas apenas em uma direção, isto é, adota-se apenas grandezas escalares, que caracterizam um modelo de histerese escalar.

3.2 – Magnetização sem histerese - função de Langevin.

Os materiais magnéticos são usualmente descritos em termos da curva simples de magnetização (sem laço de histerese). Para muitas aplicações, nos casos em que o material magnético apresenta um laço de histerese estreito, esta simples curva pode caracterizar adequadamente o material magnético.

Esta função se adapta mais facilmente para os casos de sólidos quase perfeitos, nos quais existe pouca impedância (atrito) para a variação da magnetização.

Neste trabalho o problema é assumido como não linear, e para o caso de materiais isotrópicos, o modelo da curva de magnetização sem histerese, pode ser obtido a partir da função de Langevin, representada por,

$$M_{AN}(H_e) = M_s \left[\coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right] \quad (3.1)$$

$$\text{onde} \quad \lambda = \frac{H + \alpha M}{a} \quad \text{e} \quad M = \frac{B}{\mu_0} - H \quad (3.2)$$

sendo “ $M_{AN}(H_e)$ ” a magnetização sem histerese (A/m), M_s a magnetização de saturação (A/m), B a indução magnética (T), “ $H_e = H + \alpha M$ ” o campo efetivo obtido pela interação entre momentos magnéticos vizinhos, “ α ” um coeficiente de acoplamento, “ $a = K_b T / \mu_0 m$ ”, onde K_b é a constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$), T a temperatura em Kelvin [K], μ_0 a permeabilidade do vácuo ($4\pi \times 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$) e m o tamanho efetivo dos domínios.

3.2.1 – Cálculo da Função de Langevin

A função de Langevin precisa ser resolvida para o cálculo do campo magnético H , tendo-se a indução magnética B como variável independente.

Utilizou-se do método de Newton para determinação do campo magnético (H) a partir da indução magnética (B). Inicialmente calcula-se o valor de λ usando-se a equação expressa por:

$$\lambda = \frac{H + \alpha \left(\frac{B}{\mu_0} - H \right)}{a} = \frac{H(1 - \alpha) + B \left(\frac{\alpha}{\mu_0} \right)}{a} \quad (3.3)$$

Denomina-se “ H_{AN} ” o campo magnético sem histerese, que é obtido da função de Langevin:

$$H_{AN} = \frac{B}{\mu_0} - M_{AN} = \frac{B}{\mu_0} - M_s \left[\coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right] \quad (3.4)$$

O cálculo de “ H_{AN} ” em (3.4) pode ser obtido a partir de procedimento iterativo, sendo neste trabalho adotado o método de Newton.

Define-se uma função homogênea Y_0 :

$$Y_0 = H - H_{AN} \quad (3.5)$$

e sua derivada

$$\frac{dY_0}{dH} = 1 - \frac{dH_{AN}}{dH} \quad (3.6)$$

onde

$$\frac{dH_{AN}}{dH} = \frac{dH_{AN}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dH} \quad (3.7)$$

sendo

$$\frac{dH_{AN}}{d\lambda} = M_s L'(\lambda) \quad \text{e} \quad \frac{d\lambda}{dH} = \frac{(1-\alpha)}{a} \quad (3.8)$$

e $L'(\lambda)$ é definida por,

$$L'(\lambda_H) = \frac{dL(\lambda_H)}{d\lambda_H} \quad (3.9)$$

denominada como a derivada da função de Langevin em termos de λ .

Para evitar problemas numéricos e garantir a convergência da função de Langevin, e a impossibilidade de divisão por um número muito pequeno, calculou-se a função $(L(\lambda))$ entre colchetes de (3.4) a partir de quatro regiões, adotando-se funções de aproximações diversas (função cotangente, série de potências e equação de reta) e suas respectivas derivadas $(L'(\lambda))$.

a) Região com B e H com sinais contrários

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \lambda/3 \\ L'(\lambda) &= 1/3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

b) Região de saturação

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= ID - \frac{1}{\lambda} \\ L'(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

c) Região com λ próximo de zero

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^3}{45} + \frac{2\lambda^5}{945} \\ L'(\lambda) &= \frac{1}{3} - \frac{3\lambda^2}{45} + \frac{10\lambda^4}{945} \end{aligned} \quad (3.12)$$

d) Região intermediária (antes joelho da curva)

$$\begin{aligned} L(\lambda_H) &= \left(\frac{e^{\lambda_H} + e^{-\lambda_H}}{e^{\lambda_H} - e^{-\lambda_H}} - \frac{1}{\lambda_H} \right) \\ L'(\lambda_H) &= - \left(\left(\frac{e^{\lambda_H} + e^{-\lambda_H}}{e^{\lambda_H} - e^{-\lambda_H}} \right)^2 - 1 \right) + \frac{1}{\lambda_H^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

A partir da função homogênea encontrada (3.5) e sua derivada (3.6), obtêm-se a solução de H_{AN} :

$$H_{AN} = H_{AN} - \frac{Y_0}{dY_0/dH_{AN}} \quad (3.14)$$

A Figura 3.1 mostra o algoritmo para implementação computacional.

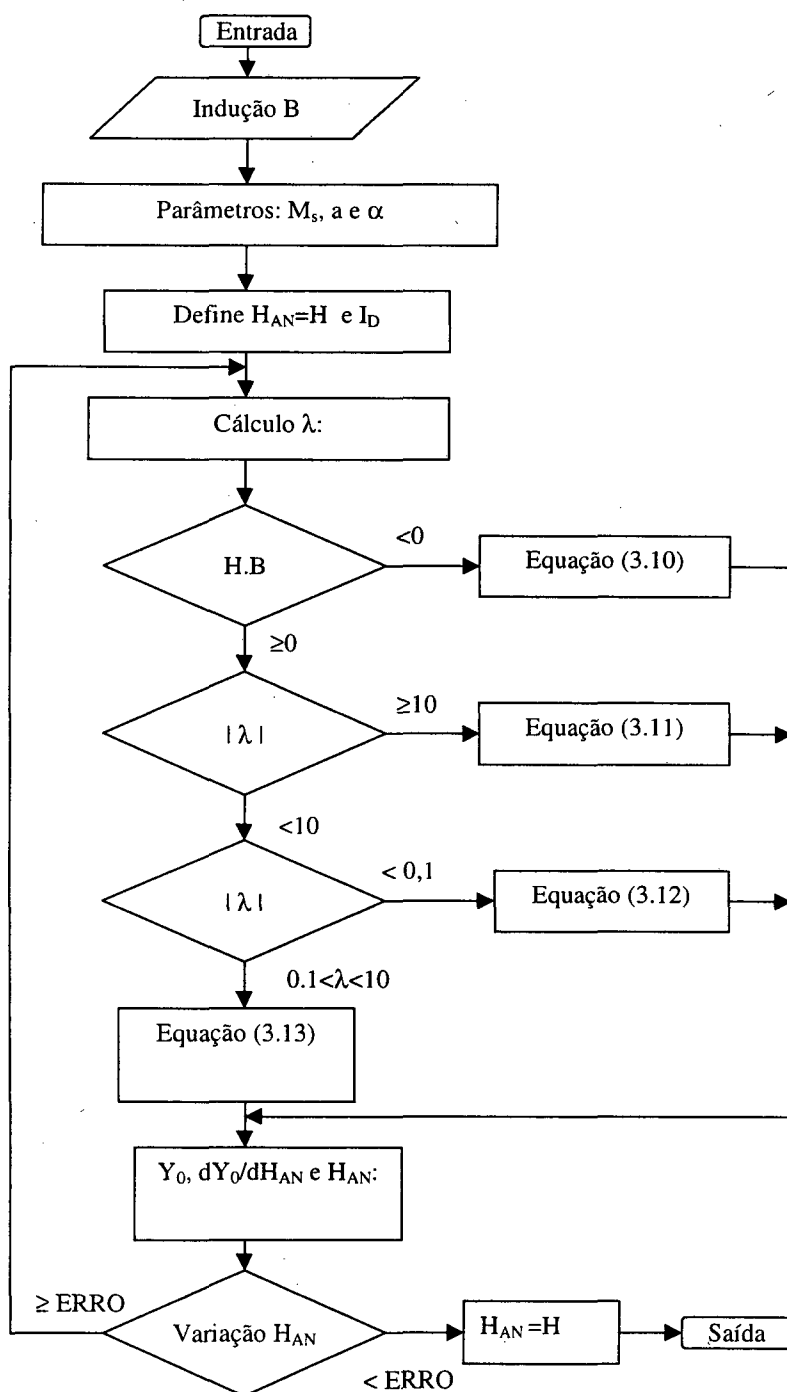


Figura 3.1 – Algoritmo de cálculo do campo magnético sem histerese H_{AN} .

3.2.2 – Parâmetros da função de Langevin.

A função de Langevin possui três parâmetros: M_s , a e α , os quais são avaliados da curva experimental M-H sem histerese. A Fig. 3.2 ilustra o significado dos referidos parâmetros a partir da curva característica M-H: O parâmetro χ_0 é a susceptibilidade máxima, que ocorre na origem; e o parâmetro “a” pode ser dado como a diferença representada no gráfico.

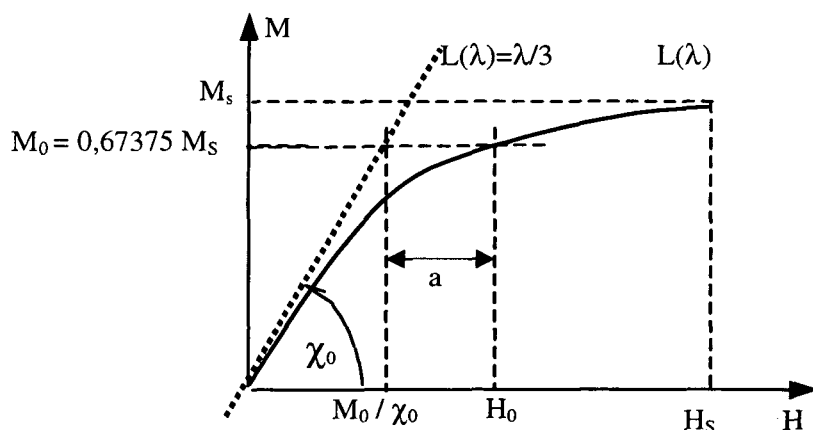


Figura 3.2 - Curva M-H.

A susceptibilidade diferencial é grande na origem e decresce monotonicamente com o incremento do campo. A curva é completamente reversível. A magnetização de um material ferromagnético satura à medida que o campo H aumenta e a magnetização M tende a M_s .

Analisando a equação de Langevin em função de λ , pode-se concluir:

- 1) Para grandes valores de λ ocorre a saturação;
- 2) Para pequenos valores de λ , a magnetização varia linearmente com H .

A estimativa inicial dos parâmetros M_s , a e α a partir da curva experimental $M = f(H)$ pode ser feita através da seqüência explicada a seguir:

A) Magnetização de saturação M_s .

Quando todos os momentos magnéticos dos dipolos magnéticos atômicos estão alinhados, denomina-se magnetização de saturação e denota o limite máximo a ser atingido pela magnetização.

Partindo-se de (3.2) que relaciona os vetores \mathbf{H} , \mathbf{B} e \mathbf{M} , e tomando a indução magnética \mathbf{B} como variável independente, pode-se avaliar \mathbf{M} na saturação, como:

$$M_s = \frac{B_s}{\mu_0} - H_s \quad (3.15)$$

Este parâmetro é de suma importância devido à sua enorme influência no comportamento da curva (pequenas variações da magnetização de saturação pode significar grandes variações para o campo magnético+).

Um valor inicial para M_s é obtido tomando-se uma média dos maiores valores de M .

B) O parâmetro α .

A susceptibilidade magnética inicial pode ser obtida pela derivada da equação de Langevin com relação ao campo magnético H :

$$\chi_0 = \frac{dM_{an}}{dH} = M_s \cdot \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dH} \quad (3.16)$$

$$\text{para } B \cong 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} \cong \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{H + \alpha M}{a}$$

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_s}{3} \cdot \frac{d\lambda}{dH} = \frac{M_s}{3} \left(\frac{1 + \alpha dM/dH}{a} \right) \quad (3.17)$$

Colocando-se em evidência o termo dM/dH de (3.17)

$$\frac{dM}{dH} \left(\frac{3a}{M_s} \right) = 1 + \alpha \frac{dM}{dH} \quad (3.18)$$

$$\frac{dM}{dH} \left(\frac{3a}{M_s} - \alpha \right) = 1 \quad (3.19)$$

$$\frac{dM}{dH} = \chi_0 = \frac{M_s}{3a - \alpha M_s} \quad (3.20)$$

cuja equação corresponde à susceptibilidade da função de Langevin na origem. Isolando-se o parâmetro α resulta:

$$\alpha = \frac{3a}{M_s} - \frac{1}{\chi_0} \quad (3.21)$$

A função de Langevin $L(\lambda)$ conduz a duas conclusões principais:

- Em grandes valores λ ocorrerá saturação e a função tende ao valor unitário;
- Em pequenos valores de λ a função terá uma inclinação de $1/3$ ($L(\lambda)=\lambda/3$) e ela poderá ser expressa por uma linha reta.

C) O parâmetro a .

De acordo com a expressão dada por (3.20), pode-se obter a equação para a susceptibilidade magnética inicial χ_0 .

$$\chi_0 = \frac{1}{\frac{3a}{M_s} - \alpha} \quad (3.22)$$

$$\text{e ainda,} \quad \alpha = \frac{3a}{M_s} - \frac{1}{\chi_0} \quad (3.23)$$

Com o valor de α , pode-se substituir na equação para λ ,

$$\lambda = \frac{H + \alpha M}{a} = \frac{H + \left(\frac{3a}{M_s} - \frac{1}{\chi_0} \right) M}{a} = \frac{H - M/\chi_0}{a} + \frac{3M}{M_s} \quad (3.24)$$

Considerando-se os valores iniciais $H_0 - M_0/\chi_0 = a$ (ver Fig. 3.2) obtém-se:

$$\lambda = 1 + \frac{3M}{M_s} \quad (3.25)$$

juntamente com a equação de Langevin, forma-se um sistema que pode ser resolvido iterativamente:

$$\begin{cases} \lambda = 1 + \frac{3M}{M_s} \\ L(\lambda) = \frac{M}{M_s} \end{cases} \quad (3.26)$$

Resolve-se o sistema (3.26) usando aproximações sucessivas para as variáveis “ M/M_s ” e “ λ ” conforme ilustra-se na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Processo iterativo para cálculo de M/M_s com a função de Langevin

M/M_s	λ	$L(\lambda)=\coth\lambda-1/\lambda$
1,0	4,0	0,7506
0,8	3,4	0,7081
0,7	3,1	0,6810
0,6	2,8	0,6502
0,65	2,95	0,6666
0,666	2,99	0,673

Chegando após processo iterativo aos valores: $\lambda=2,99$ e $L(\lambda)=0,673 \cong M/M_s$

Portanto, a partir da susceptibilidade inicial χ_0 , obtida da curva M-H experimental, toma-se um ponto (M_0, H_0) da curva, por exemplo, $M_0 = 0,67375 M_s$, podendo-se daí calcular o parâmetro “a” pela equação:

$$a = H_0 - \frac{M_0}{\chi_0} \quad (3.27)$$

3.3 – Exemplos de curvas de magnetização sem histerese

A curva de magnetização sem histerese pode ser obtida a partir de uma magnetização remanente no material depois de sua magnetização com um campo constante H e uma componente contínua superposta, variando monotonicamente entre $\pm H_\Delta$ e sendo grande suficiente para alcançar a saturação e então reduzindo a amplitude de H_Δ lentamente até zero.

3.3.1 – Variação dos parâmetros

Consideram-se diversas situações envolvendo os parâmetros M_s , a e α . Considerando $M_s=1,7 \times 10^6$ A/m (mantido constante), $a=1000$ A/m (fixo), observa-se o comportamento da curva com a variação do parâmetro α , conforme mostrado na figura 3.3;

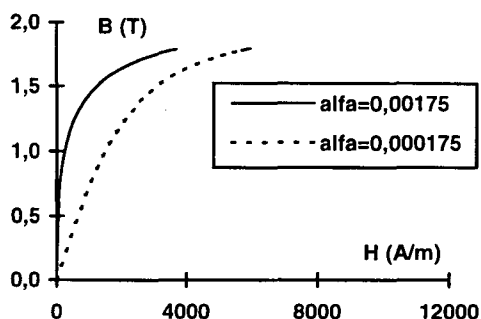


Figura 3.3 – Curva de magnetização para diferentes valores de “alfa (α)”

De outro modo, $\alpha=0,000175$ é fixado, e observado o comportamento da curva com a variação do parâmetro a, como apresentado na Fig. 3.4.

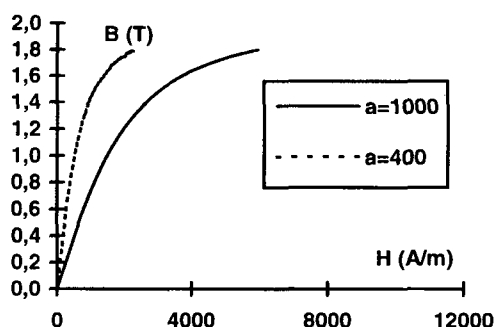


Figura 3.4 – Curva de magnetização para diferentes valores de “a”

3.4 – Magnetização com Histerese – processos reversível e irreversível

A compreensão do processo de magnetização envolvendo a curva de histerese é ainda alvo de muitas pesquisas sob o ponto de vista fundamental e tem despertado forte interesse também para aplicações práticas na área industrial.

Nos materiais ferromagnéticos, a relação entre o processo físico e as curvas de magnetização pode ser reproduzida pela existência de domínios magnéticos. Com a variação do campo externo, as paredes dos domínios se movimentam em uma seqüência de deslocamentos reversíveis e saltos irreversíveis (efeito Barkhausen) promovendo a dissipação de energia (histerese). Do ponto de vista físico, a dissipação de energia (histerese) é estritamente relacionada com as irregularidades no movimento das paredes dos domínios (presença de imperfeições e impurezas no material).

Neste trabalho é adotado um método similar ao de Jiles-Atherton (utilização de equações diferenciais), apresentando a indução magnética como variável independente.

Deste modo, este método pode ser inserido diretamente em programa de cálculo de campo por elementos finitos na formulação potencial vetor magnético [KOLTERMANN,2000].

3.4.1 – Modelagem da histerese magnética

A curva de histerese dos materiais magnéticos normalmente assume forma bastante variável, sendo difícil a sua representação por expressões algébricas. Entretanto, neste trabalho desenvolve-se um modelo, considerando o caso de material magnético policristalino:

Representação da curva de histerese:

a) Para baixos campos, chamada de Região de Rayleigh, a variação da magnetização é tratada como devida exclusivamente ao movimento das paredes dos domínios. Neste caso, o laço de histerese é composto de duas parábolas: ascendente e descendente. Ambas possuem inflexão para o interior.

b) Para altos campos, o material magnético é conduzido ao seu estado de saturação, onde a magnetização é quase paralela ao campo aplicado. Nesta região, a rotação dos domínios é o efeito predominante, não existindo maior complexidade no processo. O comportamento da magnetização para a saturação, neste caso, pode ser adequadamente representada pela curva de magnetização sem histerese, expressa pela função de Langevin.

Na metodologia proposta, o campo magnético é definido como a soma de dois componentes: o campo sem histerese \mathbf{H}_{AN} e o campo de histerese \mathbf{H}_H .

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{AN} + \mathbf{H}_H \quad (3.28)$$

O campo sem histerese é calculado pela função de Langevin, conforme expresso,

$$\mathbf{H}_{AN} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - M_s \left[\coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right] \quad (3.29)$$

$$\text{onde } \lambda = \frac{H_{AN}(1 - \alpha) + B \left(\frac{\alpha}{\mu_0} \right)}{a}, \quad (3.30)$$

M_s é a magnetização de saturação, α e a são os coeficientes da função de Langevin e B é o módulo da indução magnética.

De outro modo o campo H_H pode ser calculado considerando somente o efeito do movimento das paredes dos domínios (Lei de Rayleigh).

O movimento das paredes dos domínios incorpora dois efeitos distintos: i) a curvatura das paredes dos domínios provocada por uma espécie de pressão causada pelo campo magnético ii) o deslocamento irreversível das paredes após ser atingido o valor do campo crítico.

Para o primeiro caso, pode-se considerar as paredes dos domínios como uma membrana elástica que se expande sob a ação de um campo magnético. Quando o campo é removido as paredes do domínio retornam para sua posição original. O processo é reversível até que o raio de curvatura alcance o valor crítico. Após o ponto crítico ser alcançado, ocorre uma deformação exagerada, cuja expansão continua a crescer com o aumento do campo aplicado (processo irreversível).

Deste modo, pode-se demonstrar o cálculo da histerese magnética como a diferença entre os seguintes componentes de campos:

- a) H_{HW} –irreversível: ocorre mudança de estado da magnetização (estados inicial e final dos domínios são diferentes para o mesmo valor de H), a partir de uma energia histerética limite (máxima);
- b) H_{HR} - reversível: ocorre um crescimento dos domínios, e após a aplicação e retirada do campo magnético, o material retorna para o seu estado original (energia retorna para a fonte).

3.4.2 – Deslocamento irreversível

Se o campo magnético exceder um valor limite, o processo nas paredes do domínio torna-se instável e os momentos magnéticos giram subitamente e passam a ocupar outro lugar com um estado também de mínima energia. Esta variação na direção da magnetização representa um processo de magnetização irreversível e na ausência do campo, os momentos magnéticos (magnetização) não retornarão para a orientação original.

Utiliza-se a função de Langevin para representar o campo H_{HW} , de forma a representar a Lei de Rayleigh, que resulta na máxima energia que seria necessária para o deslocamento das paredes. Sua equação final tem a forma [KOLTERMANN,2000]

$$H_{HW} = H_{HS} L(\lambda_H) \quad (3.31)$$

onde H_{HS} é o valor do campo saturação, semelhante ao valor de M_s já definido.

A variável independente λ_H , é definida por

$$\lambda_H = \frac{H_H + I_D H_{HS}}{a} \quad (3.32)$$

onde a e H_{HS} são parâmetros característicos do material magnético. O parâmetro H_{HS} é equivalente ao parâmetro da magnetização de saturação da curva sem histerese e I_D é um indicador de direção que vale

$$I_D = \begin{cases} +1, & \text{se } \Delta B > 0 \\ -1, & \text{se } \Delta B < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Quando a indução ou o campo estão aumentando, a energia necessária para ir de um ponto a outro é

$$W_{HW} = \int_{\Delta B} H_{HS} L(\lambda_H) dB \quad (3.34)$$

3.4.3 - O deslocamento reversível.

Para haver deslocamento reversível das paredes dos domínios, é necessário que existam irregularidades que causem variação da energia para o deslocamento da parede. Assim, a uma variação qualquer de H_H corresponde uma variação proporcional na energia total dissipada. Se não acontecer variação de H_H então não ocorrerá deslocamento das paredes, e a energia potencial se manterá constante. Assim, a resultante da troca de energia reversível W_{HR} é proporcional à variação do campo magnético, podendo ser expressa pela equação,

$$dW_{HR} = \gamma_H dH_H \quad (3.35)$$

onde γ_H é uma constante que depende das características físicas do material e expressa a inclinação da parábola ascendente ou descendente da histerese.

A energia reversível ΔW_{HR} durante uma variação da indução magnética ΔB é:

$$\Delta W_{HR} = I_D \gamma_H \int_{\Delta B} \frac{dH_H}{dB} dB \quad (3.36)$$

3.5 - A equação diferencial da histerese

Se o campo aplicado tem direção arbitrária com relação ao eixo fácil de magnetização, a magnetização é parcialmente reversível e irreversível. Portanto, durante o processo de magnetização, a variação reversível e irreversível podem ocorrer simultaneamente, sendo uma delas predominante.

Uma maneira simples para calcular a distribuição destes fenômenos é considerar o balanço energético referente à histerese H_H . A energia do campo eletromagnético é dada pela diferença das parcelas irreversível e reversível;

$$dW_H = dW_{HW} - dW_{HR} \quad (3.37)$$

ou ainda,

$$\int H_H dB = \int H_{HS} L(\lambda_H) dB - \int I_D \gamma_H dH_H \quad (3.38)$$

Multiplicando-se e dividindo-se (3.38) por dB , obtém-se,

$$\int H_H dB = \int H_{HS} L(\lambda_H) dB - \int I_D \gamma_H \frac{dH_H}{dB} dB \quad (3.39)$$

Agora, pode-se retirar as integrais, e igualar os integrandos.

$$H_H = H_{HS} L(\lambda_H) - I_D \gamma_H \frac{dH_H}{dB} \quad (3.40)$$

Rescrevendo (3.40) e isolando dH_H/dB , têm-se:

$$\frac{dH_H}{dB} = \frac{H_{HS} L(\lambda_H) - H_H}{I_D \gamma_H} \quad (3.41)$$

A expressão (3.41) representa a equação diferencial que define a histerese. Resolvendo-se esta equação diferencial, e utilizando como variável independente a indução magnética com valores B e B_0 , além do campo H_{H0} , o valor do campo magnético H_H pode ser calculado. A equação diferencial da histerese associa a cada valor de H_H duas direções para os casos de B : ascendente e descendente. O campo H_H referente à histerese pode ser obtida através da resolução numérica da integral de (3.41):

$$H_H = H_{H,0} + \int_{B_0}^B \frac{H_{HS} L(\lambda_H) - H_H}{I_D \gamma_H} dB \quad (3.42)$$

Assumindo que

$$\begin{aligned} dH_H &= \Delta H_H = H_H - H_{H0} \\ dB &= \Delta B = B - B_0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

e substituindo em (3.41) define-se a função homogênea Y_0 como:

$$Y_0 = I_D \gamma_H (H_H - H_{H0}) - (B - B_0) (H_{HS} L(\lambda_H) - H_H) \quad (3.44)$$

e sua derivada

$$\frac{dY_0}{dH_H} = I_D \gamma_H - (B - B_0) [H_{HS} L'(\lambda_H) - 1] \quad (3.45)$$

O cálculo de H_H de (3.44) pode ser obtido a partir de procedimento iterativo sendo neste trabalho utilizado o método de Newton.

Pode-se definir também,

$$L'(\lambda_H) = \frac{dL(\lambda_H)}{d\lambda_H} \quad (3.46)$$

como a derivada da função de Langevin em termos de λ_H .

Para evitar problemas numéricos e garantir a convergência da função de Langevin, calculou-se a mesma em função λ_H , a partir de quatro diferentes definições de $L(\lambda_H)$ e $L'(\lambda_H)$.

a) Região de B e H com sinais contrários

$$\begin{aligned} L(\lambda_H) &= \lambda_H / 3 \\ L'(\lambda_H) &= 1/3 \end{aligned} \quad (3.47)$$

b) Região de saturação

$$\begin{aligned} L(\lambda_H) &= ID - \frac{1}{\lambda_H} \\ L'(\lambda_H) &= \frac{1}{\lambda_H^2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

c) Região com λ próximo de zero

$$L(\lambda_H) = \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^3}{45} + \frac{2\lambda^5}{945} \quad (3.49)$$

$$L'(\lambda_H) = \frac{1}{3} - \frac{3\lambda^2}{45} + \frac{10\lambda^4}{945}$$

d) Região intermediária (antes joelho da curva)

$$L(\lambda_H) = \left(\frac{e^{\lambda_H} + e^{-\lambda_H}}{e^{\lambda_H} - e^{-\lambda_H}} - \frac{1}{\lambda_H} \right) \quad (3.50)$$

$$L'(\lambda_H) = - \left(\left(\frac{e^{\lambda_H} + e^{-\lambda_H}}{e^{\lambda_H} - e^{-\lambda_H}} \right)^2 - 1 \right) + \frac{1}{\lambda_H^2}$$

A partir da função homogênea encontrada (3.44), utilizou-se o método de Newton para determinação da solução de H_H :

$$H_H = H_H - \frac{Y_0}{dY_0/dH_H} \quad (3.51)$$

A Figura 3.5 mostra o algoritmo para implementação computacional.

3.6 – Comportamento do modelo de histerese em função da variação dos parâmetros

Mostra-se nas Figuras 3.6, 3.7 e 3.8, o comportamento da curva $B \times H_H$ influenciada pela variação dos parâmetros a , H_{HS} e γ_H . Os parâmetros fixados foram: $a=1000$ A/m, $H_{HS}=1800$ A/m, $\gamma_H=0,3$ T. A linha cheia equivale ao comportamento do laço de histerese com os parâmetros fixados anteriormente. A linha pontilhada das curvas são equivalentes ao comportamento obtidos pela variação dos parâmetros “ a ” na Fig. 3.6, “ H_{HS} ” na Fig. 3.7 e “ γ_H ” na Fig. 3.8.

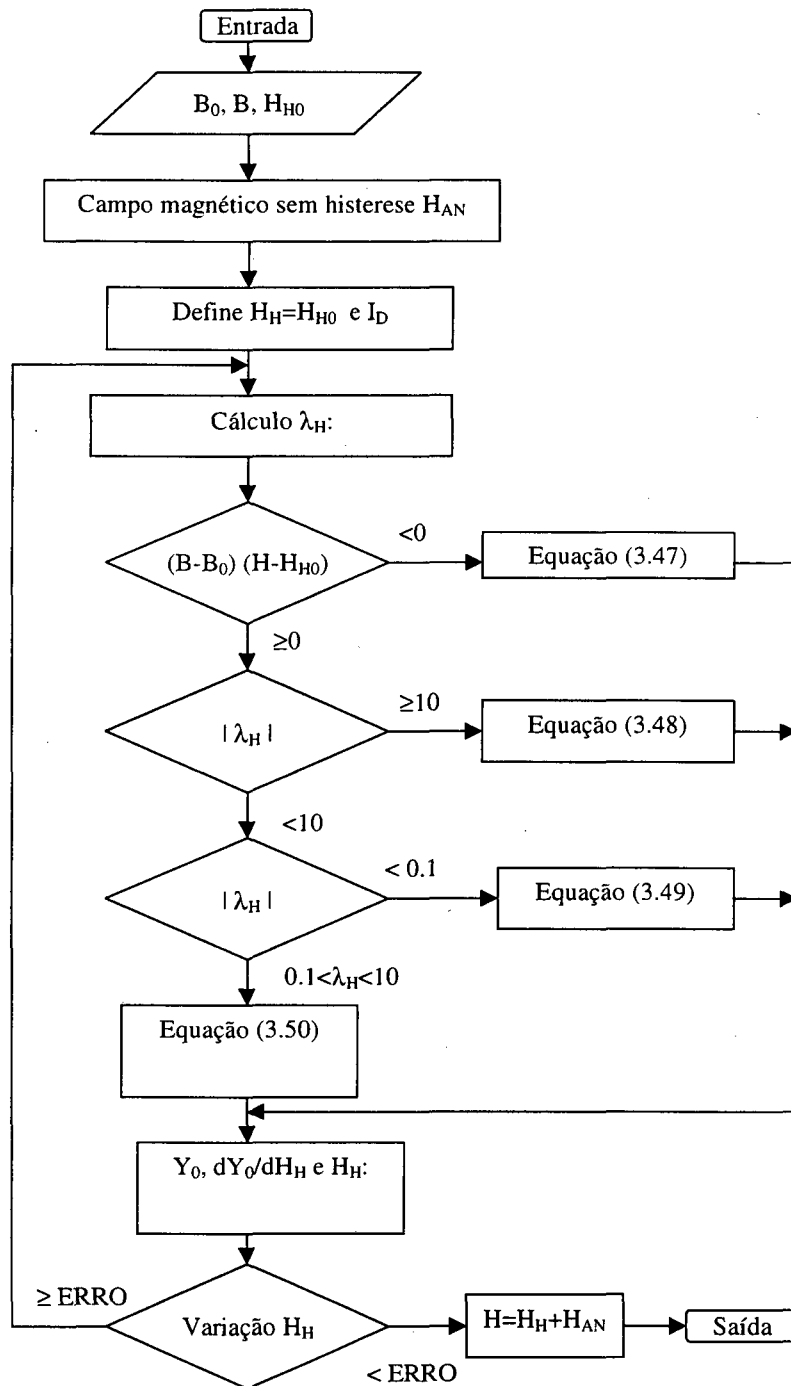


Figura 3.5 – Algoritmo para cálculo numérico do campo magnético com histerese H em cada passo de tempo

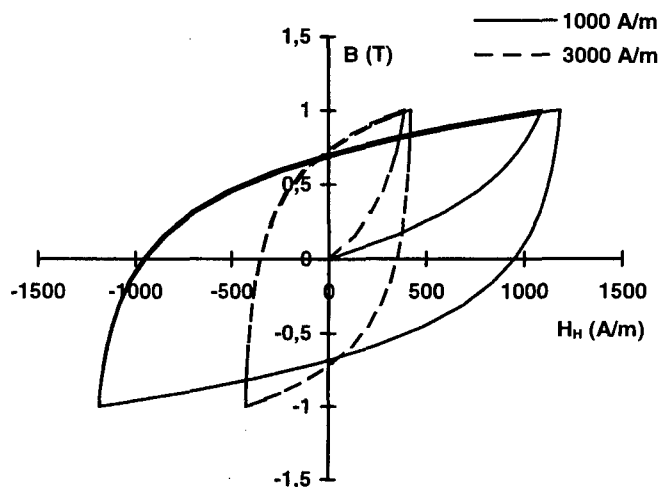


Figura 3.6 – Curva $B \times H_H$ para dois valores diferentes de “a”

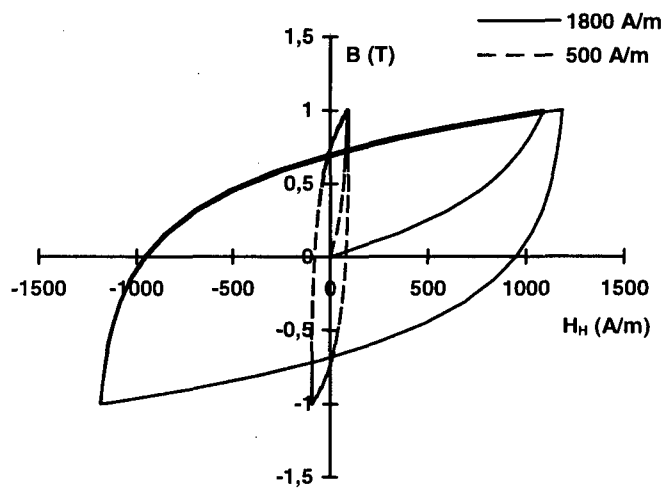


Figura 3.7 – Curva $B \times H_H$ para dois valores diferentes de H_{HS}

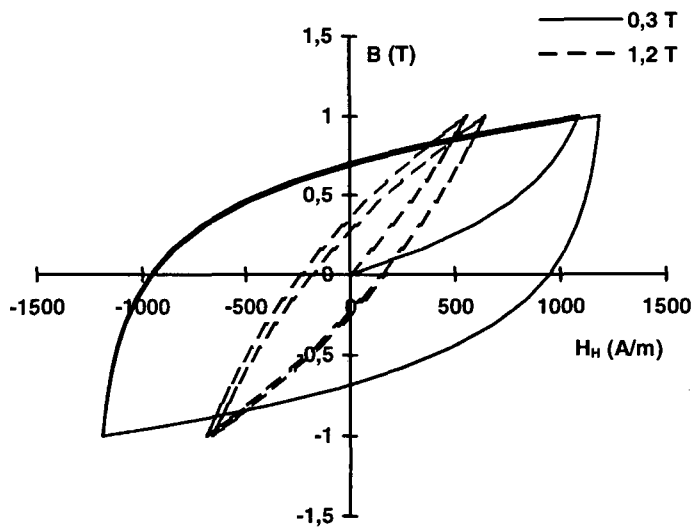


Figura 3.8 – Curva $B \times H_H$ para dois valores diferentes de “ γ_H ”

A Figura 3.9 mostra graficamente, como a curva $B \times H$ é obtida conforme indicado em (3.28), i.e., quando o campo magnético é obtido pela soma de H_{AN} e H_H .

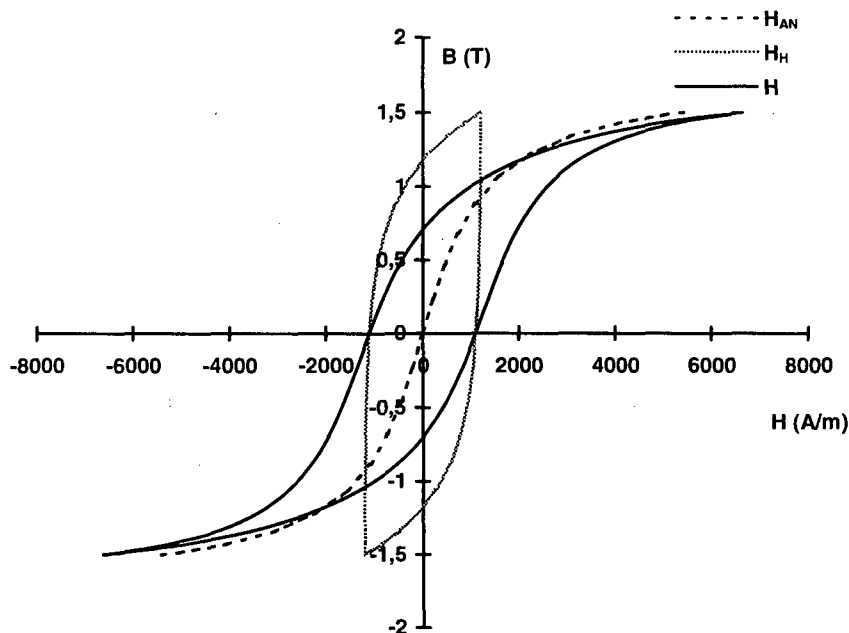


Figura 3.9 – Curva $B \times H$ mostrando suas componentes (laço $B \times H_{AN}$ e $B \times H_H$)

3.7 – Conclusão

Entre as várias funções para representação da curva de magnetização sem histerese, optou-se neste trabalho, pela função de Langevin, a qual tem demonstrado um bom desempenho. A função de Langevin tem sido adotada, devido trabalhar satisfatoriamente em um grande número de casos. No entanto, é aplicada somente para materiais isotrópicos, apresentando bons resultados para materiais moles.

O modelo de histerese é dado por uma única equação diferencial de H_H em função de B . Observou-se que esta equação permite representar toda a gama de variação de laços de histerese para os materiais magnéticos moles, variando-se os parâmetros.

No capítulo seguinte, esta equação será utilizada dentro do modelo bidirecional da histerese.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM DA HISTERESE EM DUAS DIMENSÕES

4.1 - Introdução

O objetivo deste capítulo é adaptar o modelo de histerese unidirecional, visto no capítulo anterior, para um modelo em duas dimensões, e incluir no cálculo de campo com Newton-Raphson. Inicialmente, precisa-se comprovar que existe um ângulo entre o vetor indução magnética e o campo magnético devido ao comportamento da magnetização. No caso de materiais magnéticos usados normalmente em dispositivos eletromagnéticos, o campo magnético não necessariamente permanece em paralelo com a magnetização e a indução. Este ângulo espacial está associado com as perdas magnéticas.

É bem conhecido que a perda rotativa é gerada nas conexões em T das lâminas dos transformadores e nas máquinas rotativas. Elas promovem uma influência na distribuição do fluxo sobre o núcleo. Conseqüentemente, é necessário estimar corretamente as propriedades magnéticas do material para otimização da estrutura e redução das suas perdas.

4.2 – Por que existe ângulo entre \mathbf{B} e \mathbf{H} ?

No capítulo anterior foram abordadas as relações entre os vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} considerando o caso unidimensional. Neste item serão feitas discussões mais aprofundadas a respeito da existência do ângulo de defasagem entre estes vetores, levando em conta os conceitos do eletromagnetismo e aspectos referentes às equações da energia (histerese em duas dimensões).

Portanto, necessita-se justificar matematicamente a existência do ângulo entre os vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} para um material real (vetores não paralelos), denotando a presença de perdas. Para tanto pode-se desenvolver algumas abordagens a partir da equação da energia.

4.2.1 – Análise fasorial.

Deduz-se inicialmente as equações das perdas no ferro considerando as variáveis eletromagnéticas tendo variação senoidal no tempo. Isto é feito por notação complexa e fasores [KRAUS&CARVER, 1978], [REITZ, 1982].

Partindo-se da equação da densidade de energia (J/m^3):

$$\Delta W = \int_{\Delta t} \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt \quad (4.1)$$

e integrando-se a equação da densidade de energia tem-se a perda num período ou ciclo,

$$W = \int_0^T \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt \quad (4.2)$$

onde o período T é o tempo do ciclo, em que os vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} retornam ao mesmo valor.

Para uma estrutura eletromagnética simples, pode-se tratar \mathbf{H} e \mathbf{B} como fasores, em uma direção, usando o conceito de circulação de campo e conservação de fluxo.

Fazendo uso da identidade de Euler,

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \text{sen } \omega t, \quad (4.3)$$

obtêm-se os fasores de tensão \bar{V} , de corrente \bar{I} , de campo \bar{H} e de indução \bar{B} .

As equações para os fasores de campo e indução magnética são:

$$\bar{H} \Rightarrow \frac{N}{\ell_m} \bar{I} \quad (4.4)$$

$$\bar{B} \Rightarrow \frac{N}{S_m} \int \bar{V} dt \quad (4.5)$$

Observa-se na Fig. 4.1 que o fasor da tensão \bar{V} está adiantado de 90° elétricos do fluxo magnético. Também pode-se observar que o campo \bar{H} está adiantado de um ângulo de fase “ α ” da indução \bar{B} e este, por sua vez atrasado “ ϕ ” de \bar{V} .

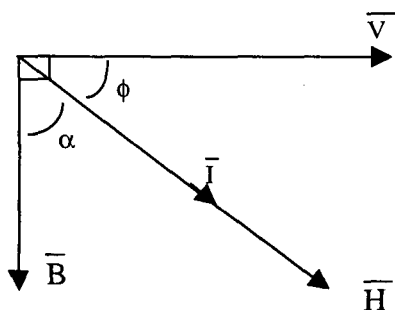


Figura 4.1 - Diagrama fasorial de tensão e corrente

Considerando a indução senoidal (sentido anti-horário positivo):

$$B(t) = B_m \text{ sen } \omega t \quad (4.6)$$

pode-se considerar a presença de uma defasagem no tempo (α) para o campo magnético.

$$H(t) = H_m \text{ sen}(\omega t + \alpha) \quad (4.7)$$

A derivada de (4.6) é:

$$\frac{dB}{dt} = \omega B_m \cos \omega t = \omega B_m \text{ sen}(\omega t + 90^\circ) \quad (4.8)$$

substituindo (4.7) e (4.8) em (4.2), e integrando de 0 a T segundos, têm-se a densidade de potência média ou energia no período:

$$W = \frac{B_m H_m}{2} \omega \cos(90 - \alpha) = \frac{B_m H_m}{2} \omega \text{ sen } \alpha \quad (4.9)$$

Portanto, se " α " for igual a zero a energia é nula ($W=zero$), indicando que não existe perda quando a defasagem entre a indução e o campo for nula, o que fisicamente não acontece pois todo material magnético apresenta perdas.

A partir desta análise clássica de circuitos elétricos pode-se analisar o caso fasorial bidirecional com defasagem espacial.

4.2.2 – Caso fasorial bidirecional com defasagem espacial

O objetivo deste item é demonstrar que a perda por histerese está associada com um ângulo de defasagem espacial entre o campo e a indução magnética. Para isto pode-se supor

novamente que estes vetores tenham componentes senoidais ao longo dos eixos coordenados x e y . Na Fig. 4.2 observa-se a simbologia adotada neste item. Considerando que \mathbf{B} e \mathbf{H} sejam senoidais no tempo e defasados no espaço de um ângulo α , tem-se na forma fasorial:

$$\mathbf{H}(t) = H_m e^{j(\omega t + \alpha)} \quad (4.10)$$

$$H_x(t) = H_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.11)$$

$$H_y(t) = H_m \sin(\omega t + \alpha) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{B}(t) = B_m e^{j\omega t} \quad (4.13)$$

$$B_x(t) = B_m \cos \omega t \quad (4.14)$$

$$B_y(t) = B_m \sin \omega t \quad (4.15)$$

onde α é o ângulo espacial entre \mathbf{H} e \mathbf{B} .

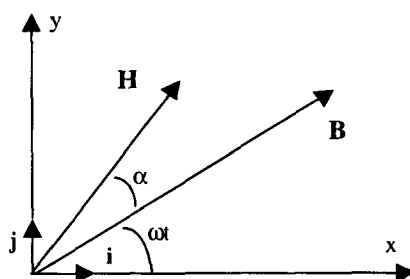


Figura 4.2 - Diagrama fasorial de \mathbf{H} e \mathbf{B}

Considerando a equação de densidade de potência:

$$p(t) = \mathbf{H}(t) \cdot \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} \quad (4.16)$$

Pode-se a partir da equação anterior (4.16) desenvolver o produto escalar, escrevendo a densidade de potência instantânea como:

$$p(t) = H_x \frac{dB_x}{dt} + H_y \frac{dB_y}{dt} \quad (4.17)$$

Substituindo-se as grandezas de campo e indução em (4.17) têm-se:

$$p(t) = -H_m \cos(\omega t + \alpha) B_m \omega \sin \omega t + H_m \sin(\omega t + \alpha) B_m \omega \cos \omega t \quad (4.18)$$

$$p(t) = \omega B_m H_m [\sin(\omega t + \alpha) \cos \omega t - \cos(\omega t + \alpha) \sin \omega t] \quad (4.19)$$

fazendo-se as transformações trigonométricas encontra-se

$$p(t) = \omega B_m H_m \sin(\alpha + \omega t - \omega t) \quad (4.20)$$

ou ainda

$$p(t) = \omega B_m H_m \sin \alpha \quad (4.21)$$

Conclusões e observações:

- Se $\alpha = 0$ então a potência instantânea seria sempre nula!
- Quando $\sin \alpha > 0$ têm-se perdas magnéticas – por histerese, por correntes de Foucault e excedentes (energia positiva ou absorção de potência do campo magnético pelo material).

Assim justificou-se a existência do ângulo de defasagem entre os vetores magnéticos **B** e **H**. Lembra-se que, neste item considerou-se as grandezas magnéticas com forma de onda senoidais. Entretanto, sabe-se que a relação entre as mesmas não é linear, pois os materiais apresentam saturação e histerese, que resultarão formas de onda não senoidais.

Conforme ATALLAH, (1993), pode-se descrever os vetores **H** e **B**, considerando a presença de defasamento entre os mesmos, como ilustrado na Figura 4.3:

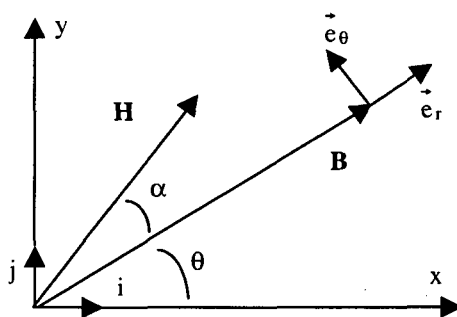


Figura 4.3 - Diagrama de **H** e **B** em coordenadas polares e retangulares.

Em coordenada polares $d\mathbf{B}/dt$ é dado por:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = |\mathbf{B}| \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + \frac{d|\mathbf{B}|}{dt} \mathbf{e}_r \quad (4.22)$$

onde \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_r são os vetores unitários nas direções da circunferência e radial, respectivamente e $d\theta/dt$ é a velocidade angular instantânea do vetor de indução magnética, dada pela equação:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\left(\arctg\left(\frac{B_y}{B_x}\right)\right)}{dt} = \frac{B_x^2}{|B|^2} \left(B_x \frac{dB_y}{dt} - B_y \frac{dB_x}{dt} \right) \quad (4.23)$$

Em coordenadas polares, pode-se expressar \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_r como:

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad (4.24b)$$

onde \mathbf{i} e \mathbf{j} são os vetores unitários nas direções x e y respectivamente, como mostrado na Figura 4.3. Além disso, \mathbf{H} pode ser expresso por:

$$\mathbf{H} = |\mathbf{H}| \cos(\alpha + \theta) \mathbf{i} + |\mathbf{H}| \sin(\alpha + \theta) \mathbf{j} \quad (4.25)$$

onde α é o ângulo de defasamento entre \mathbf{H} e \mathbf{B} . De (4.24) a (4.25), a densidade de potência $\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$ é rescrita por:

$$\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} (\mathbf{H} \times \mathbf{B})_Z + |\mathbf{H}| \frac{d|\mathbf{B}|}{dt} \cos \alpha \quad (4.26)$$

onde o produto vetorial é

$$(\mathbf{H} \times \mathbf{B})_Z = |\mathbf{H}| |\mathbf{B}| \sin \alpha \quad (4.27)$$

substituindo em (4.26),

$$\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} |\mathbf{H}| |\mathbf{B}| \sin \alpha + |\mathbf{H}| \frac{d|\mathbf{B}|}{dt} \cos \alpha = \text{perda rotativa} + \text{perda alternada} \quad (4.28)$$

Observa-se que além de qualquer um dos vetores \mathbf{H} ou \mathbf{B} nulos, outros fatores poderão zerar cada parcela de (4.28):

a) $\alpha = 0 \Rightarrow$ zera a perda rotativa. Tanto os vetores \mathbf{H} e \mathbf{B} , como $d\mathbf{H}$ e $d\mathbf{B}$, estão alinhados espacialmente;

b) $\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ zera a perda alternada. Pode-se ver na Fig. 4.4 que os vetores \mathbf{H} e \mathbf{B} são ortogonais no plano xy . Também observa-se nesta figura que quando os módulos de \mathbf{H} e \mathbf{B}

ficam constantes, os incrementos de campo $d\mathbf{H}$ e de indução $d\mathbf{B}$ têm ângulo igual ao ângulo α entre \mathbf{H} e \mathbf{B} .

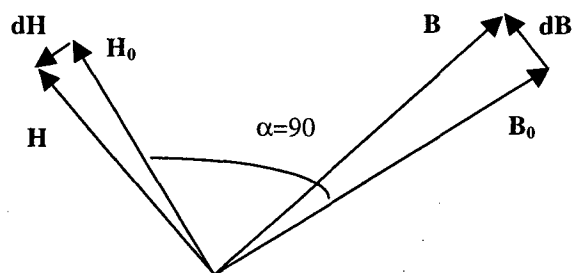


Figura 4.4 - Vetores \mathbf{H} e \mathbf{B} defasados de 90°

c) quando $\frac{d\theta}{dt} = 0$ significa que não há variação de direção em \mathbf{B} . Existe somente perda alternada, pois anula a primeira parcela de (4.28). Neste caso $d\mathbf{B}$, \mathbf{B}_0 e \mathbf{B} têm a mesma direção ou seja a direção de \mathbf{B} é constante;

d) para $\frac{d|\mathbf{B}|}{dt} = 0$ o módulo de \mathbf{B} é constante, têm-se somente perda rotativa.

Assim pode-se concluir:

- o caso $\alpha = 0$, em (a) é um caso particular de c). Isto significa que a curvatura de \mathbf{B} (ou $\frac{d\theta}{dt}$) é o fator determinante para a existência de perda rotativa;

- o caso b) é um caso particular de d), pois $\frac{d|\mathbf{B}|}{dt} = 0$ já anula a perda alternada. A variação do módulo da indução $\frac{d|\mathbf{B}|}{dt}$ é o fator determinante para esta parcela.

- conclui-se que para se quantificar a existência de perdas rotativa e alternada, somente se precisa analisar ou conhecer a indução (ou sua variação em módulo e ângulo). Ao mesmo tempo que se considera somente o \mathbf{B} , pode-se ignorar o \mathbf{H} .

Permanece no entanto a questão do cálculo do ângulo de defasagem entre os vetores \mathbf{H} e \mathbf{B} , isto é, como utilizar um modelo de histerese unidimensional visto no capítulo anterior, em duas dimensões!

No item seguinte desenvolve-se uma metodologia para quantificar a proporção de perdas rotativa e alternada, utilizando-se de um círculo circunscrito construído somente a partir da indução magnética \mathbf{B} .

4.3 – Separação das perdas usando os vetores de indução magnética

Esta seção apresenta um algoritmo para cálculo do vetor de campo magnético considerando as componentes de perdas rotativa e alternada, a partir de um círculo circunscrito com os vetores de \mathbf{B}_0 , \mathbf{B} e $d\mathbf{B}$, referentes a um passo de cálculo, considerando-se as análises no espaço.

Para entendimento desta metodologia, efetua-se a seguinte consideração: são dados os vetores das induções $\mathbf{B}_0(t-\Delta t)$ e $\mathbf{B}(t)$ nos instantes de tempo $(t-\Delta t)$ e (t) respectivamente, e o vetor de campo magnético inicial $\mathbf{H}_{H0}(t-\Delta t)$.

4.3.1 – Traçado de um círculo circunscrito com os vetores de \mathbf{B}_0 , \mathbf{B} , e $d\mathbf{B}$ – Ângulos associados.

Com os vetores $\mathbf{B}_0(t-\Delta t)$ e $\mathbf{B}(t)$ nos instantes $(t-\Delta t)$ e (t) respectivamente, calcula-se o vetor $d\mathbf{B}$ ($d\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$), os quais permitem a construção de um círculo circunscrito (ver Fig. 4.5). Denominou-se R_B ao raio deste círculo.

O traçado do círculo circunscrito pode ser desenvolvido de duas maneiras:

a) Graficamente:

- Divide-se os segmentos de \mathbf{B}_0 e $d\mathbf{B}$ em 2 partes iguais
- traça-se duas retas ortogonais aos segmentos
- ponto de intersecção das retas é o centro do círculo circunscrito
- o raio do círculo é denominado R_B

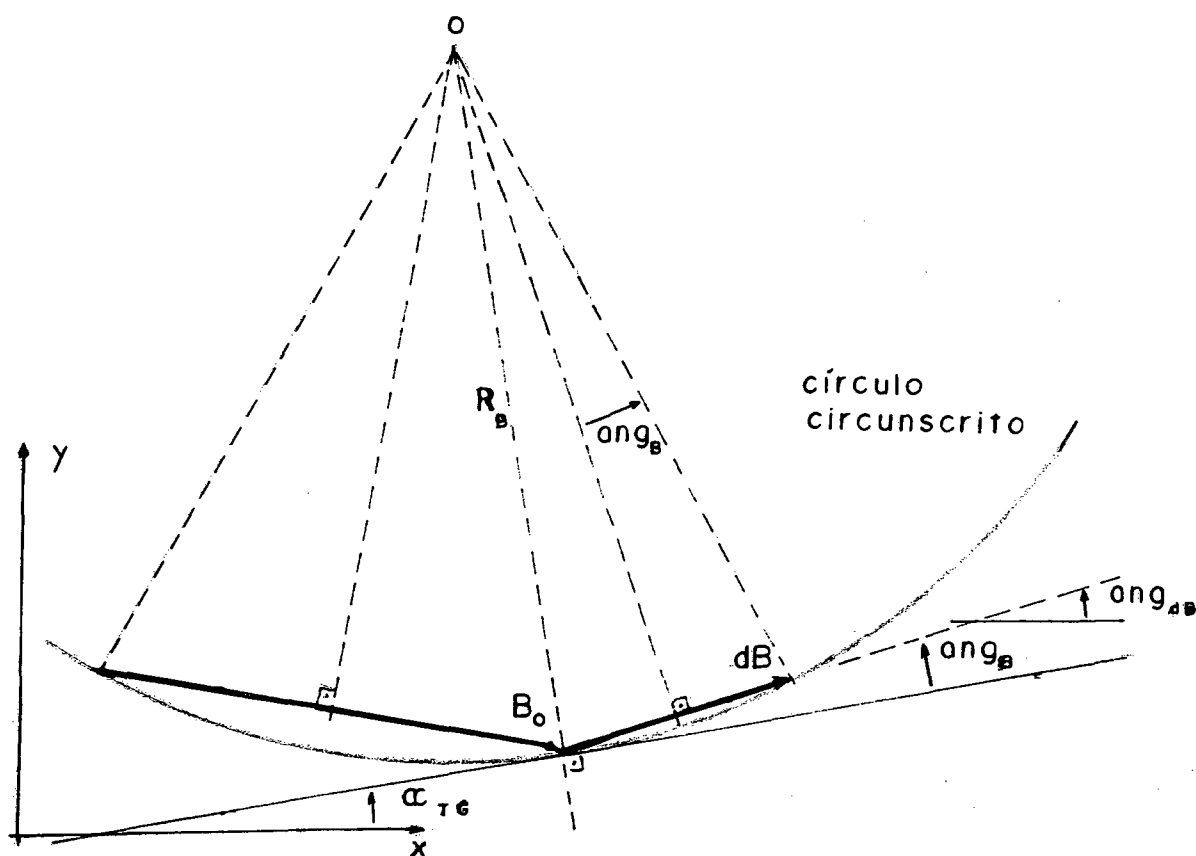


Figura 4.5 – Traçado do círculo circunscrito

b) Analiticamente:

O raio de um círculo circunscrito a um triângulo de lados a, b e c [SPIEGEL,1992] é dado por:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad (4.29)$$

onde

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \text{semiperímetro} \quad (4.30)$$

Até o momento criou-se um círculo circunscrito a partir das induções e determinou-se R_B no sistema de coordenadas cartesianas.

Primeiramente, para cálculo dos ângulos, denomina-se “angB” ao ângulo visto na Fig 4.5.

A equação para angB é:

$$\text{angB} = \arcsen(0.5 \times dB / R_B) \quad (4.31)$$

Em segundo lugar, no instante de tempo $(t-\Delta t)$ calcula-se o ângulo da tangente ao círculo circunscrito, orientada a partir da extremidade de \mathbf{B}_0 . No vértice de $d\mathbf{B}$ traça-se uma ortogonal com R_B (tangente ao círculo circunscrito). Denominou-se α_{TG} ao ângulo tangente em relação ao eixo x.

Conforme visualiza-se na Fig. 4.5, a equação para este ângulo é:

$$\alpha_{TG} = \text{ângulo de } d\mathbf{B} - \text{angB} = \text{ang}d\mathbf{B} - \text{angB} \quad (4.32)$$

4.3.2 – Hipótese básica de separação de perdas.

Até o momento foram procedidas as etapas somente para traçado do círculo circunscrito. Não se aplicou nenhuma conceituação ou hipótese eletromagnética.

Considerando as definições já consagradas na literatura [ATALLAH, 1993, IVÁNYI, 1997], têm-se que as perdas por:

- a) histerese rotativa ocorre quando a direção da indução muda com amplitude constante;
- b) histerese alternada ocorre quando a amplitude da indução varia no tempo com ângulo constante.

A relação entre estas duas perdas pode ser obtida diretamente a partir do círculo circunscrito, através de interpretação matemática e física:

- a) considerando-se que \mathbf{B}_0 , \mathbf{B} e $d\mathbf{B}$ estejam alinhados, o raio de \mathbf{B} (R_B) tende ao infinito, e sua direção é ortogonal a \mathbf{B}_0 , \mathbf{B} e $d\mathbf{B}$, caracterizando somente perda alternada, ou seja perda rotativa nula;

$$R_B \rightarrow \infty \quad (4.33)$$

- b) considere-se que \mathbf{B}_0 e \mathbf{B} têm a mesma amplitude, sendo $d\mathbf{B}$ (infinitesimal) ortogonal aos mesmos, conforme visto na Fig. 4.9.

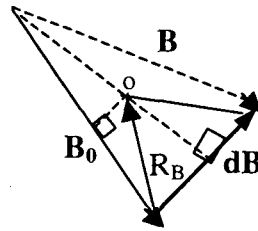


Figura 4.6 – Vetores de indução \mathbf{B}_0 e $d\mathbf{B}$ ortogonais

Como pode-se observar visualmente na Fig. 4.6, quando o módulo de $d\mathbf{B}$ tende a zero o raio do círculo circunscrito R_B tende a metade de \mathbf{B}_0 :

$$R_B = 0,5|\mathbf{B}_0| \quad (4.34)$$

Neste caso (b) têm-se somente perda rotativa, enquanto a perda alternada é nula.

Assim, introduz-se uma escala de 0 a 1 para quantificar a distribuição das perdas. Denomina-se R_{ARO} a esta escala.



Pode-se considerar que, quando:

a) $R_{ARO} = 0 \Rightarrow$ perda alternada, e

b) $R_{ARO} = 1 \Rightarrow$ perda rotativa

Considerando análises de (4.33) e (4.34) pode-se dizer que:

$$R_{ARO} = 0,5 \frac{|\mathbf{B}_0|}{R_B} \quad (4.35)$$

Pode-se atribuir uma função simplificada que descreve a relação entre as perdas rotativa e alternada dentro do intervalo $[0,1]$. Observa-se que outras funções mais elaboradas poderão ser utilizadas para separar as duas perdas. No entanto, a metodologia aqui apresentada é pioneira no sentido de separar as duas perdas partindo-se da perda total obtida.

$$\frac{\text{perda rotativa}}{\text{perda alternada}} = \frac{R_{ARO}}{1 - R_{ARO}} \quad (4.36)$$

como

$$\text{Perda Total} = \text{perda rotativa} + \text{perda alternada} = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (4.37)$$

daí,

$$\begin{aligned} \text{perda rotativa} &= \text{Perda total} \times R_{\text{ARO}} \\ \text{perda alternada} &= \text{Perda total} \times (1 - R_{\text{ARO}}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como a função “seno” é definida no intervalo $[-1,1]$, e R_{ARO} está no intervalo $[0,1]$, pode-se transferir esta grandeza para um ângulo correspondente usando a função “arcseno”.

$$\alpha_{\text{ARO}} = \arcsen(R_{\text{ARO}}) \quad (4.39)$$

Este ângulo será utilizado no item seguinte para cálculo do campo magnético no novo sistema de coordenadas, onde será explicado o seu significado físico.

4.3.3 – Criação do novo sistema de coordenadas para o campo magnético.

Até agora tratou-se de somente da grandeza da indução. Precisa-se calcular a variação do campo magnético (módulo e ângulo) considerando o seu valor inicial.

A metodologia usada neste trabalho consiste em encontrar a direção da variação do campo magnético $d\mathbf{H}_H$ dada por δ_{ARO} , pois têm-se um $\mathbf{H}_{H0}(t-\Delta t)$ e não sabemos a sua nova posição segundo o eixo x' (novo sistema de coordenadas) no instante “t”.

Quando \mathbf{B}_0 e $d\mathbf{B}$ tiverem a mesma direção (vetores em paralelo) o módulo de \mathbf{R}_B tende ao infinito (sua direção é ortogonal a \mathbf{B}_0 , $d\mathbf{B}$ e \mathbf{B}), e conseqüentemente $d\mathbf{H}_{Hx'}$ e $d\mathbf{B}$ têm a mesma direção e sentido. O diagrama da Fig. 4.10 ilustra o caso com somente perda alternada.

Também observa-se graficamente na Fig. 4.7 que:

$$\delta_{\text{ARO}} = \alpha_{\text{TG}} + 0 \quad (4.40)$$

Observando-se as Figuras 4.7 e 4.8, juntamente com (4.40) e (4.41) pode-se constatar:

a) Em (4.40) $\alpha_{ARO} = 0$;

De (4.40) verifica-se que na condição da Fig. 4.7: $\alpha_{ARO}=0$.

b) Em (4.41) $\alpha_{ARO} = 90^\circ$;

De (4.41) nas condições da Fig. 4.8 verifica-se que $\alpha_{ARO}=90^\circ$.

Portanto, o ângulo δ_{ARO} pode ser dado por:

$$\delta_{ARO} = \alpha_{TG} + \alpha_{ARO} \quad (4.42)$$

sendo α_{ARO} então definido pelo ângulo entre δ_{ARO} e a tangente ao círculo circunscrito. O ângulo entre $d\mathbf{H}_{Hx'}$ e a tangente será o próprio α_{ARO} .

Apresenta-se na Fig. 4.9 um caso geral com perdas rotativa e alternada. Foram considerados arbitrariamente os seguintes ângulos: $\alpha_{ARO}=20^\circ$, $\alpha_{TG}=60^\circ$, $\delta_{ARO}=80^\circ$.

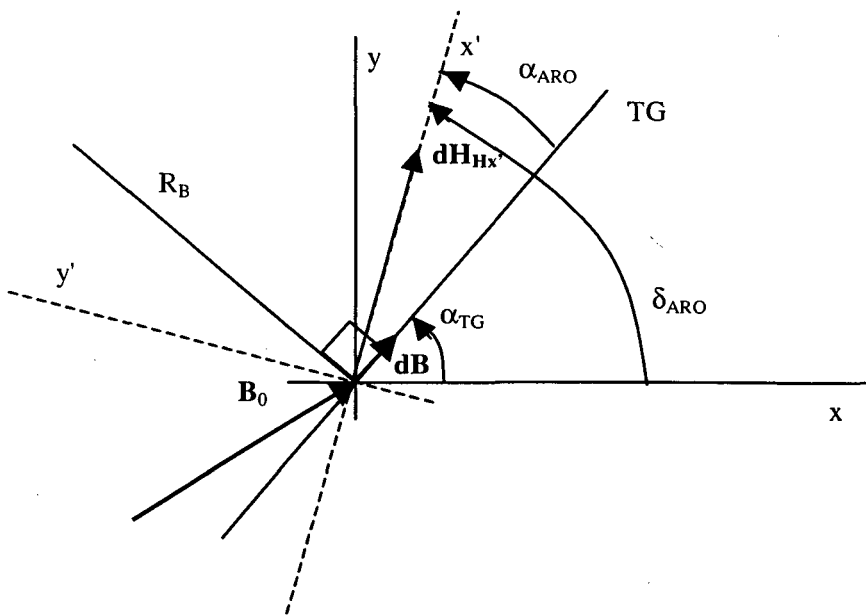


Figura 4.9 - Caso geral: vetores \mathbf{B}_0 e $d\mathbf{B}$ com ângulo qualquer.

A equação (4.42) é a principal conclusão obtida, pois ela define a orientação de $d\mathbf{H}_H$.

No item seguinte, determinar-se-á o seu módulo usando o modelo de histerese unidimensional visto no Cap. anterior.

4.3.4 – Cálculo do campo magnético H_H - histerese unidirecional.

Introduziu-se um novo sistema de coordenadas $x'-y'$, onde o ângulo de rotação entre os dois sistemas é definido como δ_{ARO} , conforme Fig. 4.10.

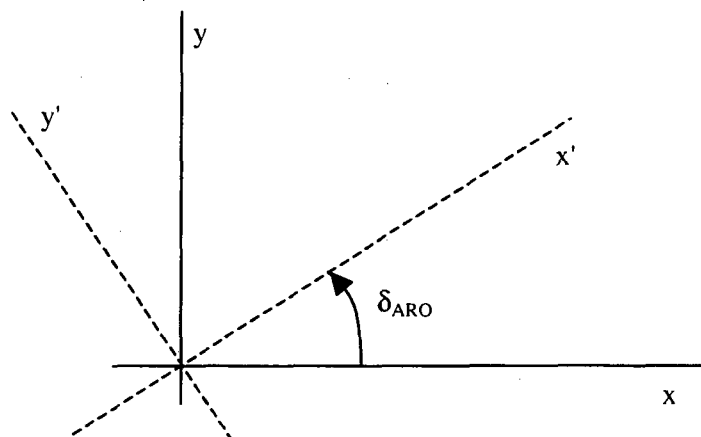


Figura 4.10 – Rotação do sistema de coordenadas.

Neste item, faz-se uso do vetor de campo magnético inicial H_{H0} (tendo componentes H_{H0x} e H_{H0y}) decompondo-os segundo o novo sistema de coordenadas $x'y'$, para determinar a variação de $dH_{Hx'}$ na direção do eixo x' .

As equações para esta transformação de coordenadas são dadas por (4.43) [SPIEGEL, 1992], e ilustrado no diagrama da Fig. 4.11:

$$\begin{aligned} H_{H0x'} &= H_{H0x} \cos \delta_{ARO} + H_{H0y} \sin \delta_{ARO} \\ H_{H0y'} &= H_{H0y} \cos \delta_{ARO} - H_{H0x} \sin \delta_{ARO} \end{aligned} \quad (4.43)$$

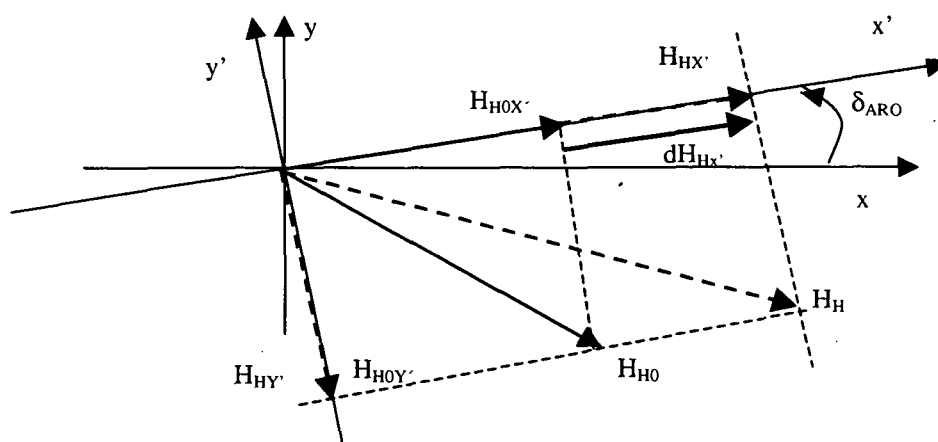


Figura 4.11 – Mudança de coordenadas para o campo magnético

Como se aproxima $\Delta \mathbf{B}$ por $d\mathbf{B}$ (série de Taylor), pode-se dizer que $d\mathbf{B}$ estará orientado segundo à tangente ao círculo circunscrito, pois o incremento é infinitesimal. Por isto, não se precisa transformar as coordenadas da indução, mas usar diretamente o $\Delta \mathbf{B}$ no plano xy .

Chama-se o modelo de B-H unidimensional visto no capítulo III para calcular a variação do campo magnético na direção x' , denominado $d\mathbf{H}_{Hx'}$, resolvendo-se a equação diferencial:

$$\frac{dH_{Hx'}}{dB} = \frac{H_{HS} L(\lambda_{Hx'}) - H_{H0x'}}{I_D \gamma_H} \quad (4.44)$$

Na direção y' o incremento $d\mathbf{H}_H$ é nulo, isto é, o campo permanece constante. Isto é decorrente da definição de círculo circunscrito, com variação de \mathbf{B} somente na direção tangencial. Isto estabelece somente uma chamada simples da subrotina de histerese unidimensional.

Finalmente, conforme diagrama de vetores da Fig. 4.11, calcula-se as componentes do campo \mathbf{H}_H segundo os eixos coordenados originais [SPIEGEL, 1992]:

$$\begin{aligned} H_{Hx} &= H_{Hx'} \cos \delta_{ARO} - H_{H0y'} \sin \delta_{ARO} \\ H_{Hy} &= H_{Hx'} \sin \delta_{ARO} + H_{H0y'} \cos \delta_{ARO} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Esta equação define o vetor de campo \mathbf{H}_H , que é a saída do algoritmo apresentado no final deste capítulo.

Lembra-se que o procedimento apresentado neste capítulo refere-se a apenas um passo de cálculo (ver Fig. 4.15), ou seja, com um \mathbf{B} e \mathbf{H} iniciais, considerando uma variação de \mathbf{B} , acha-se um novo \mathbf{H}_H .

$$\mathbf{H}_H = \mathbf{H}_0 + d\mathbf{H} \quad (4.46)$$

4.4 – Locus de \mathbf{H} e \mathbf{B} com excitação tipo espiral.

Neste item apresenta-se simulações da histerese vetorial, evidenciando o ângulo de \mathbf{B} e \mathbf{H} no seu locus em duas dimensões, com suas grandezas normalizadas. Observa-se na Fig. 4.12 que a indução \mathbf{B} sai de zero e cresce de forma espiral. O modelo calcula o campo magnético que também parte da origem. Constata-se a existência de ângulo de defasagem entre \mathbf{H} e \mathbf{B} pelo ângulo de cada passo de cálculo. Por exemplo no instante atual \mathbf{B} possui um ângulo aproximado de 190° e \mathbf{H} um ângulo de 277° . O campo \mathbf{H} está adiantado de 87° .

Na Figura 4.13 apresenta-se a curva de histerese formada na direção x . Observa-se que a forma do laço de histerese em 2D está bem próximo dos obtidos pelo modelo de histerese unidirecional, tanto analítico como experimental.

Na Figura 4.14 apresenta-se a curva de histerese formada na direção y . Observa-se que a forma do laço de histerese não acompanha a forma clássica, mas entretanto, está bem claro a existência de perda nesta direção.

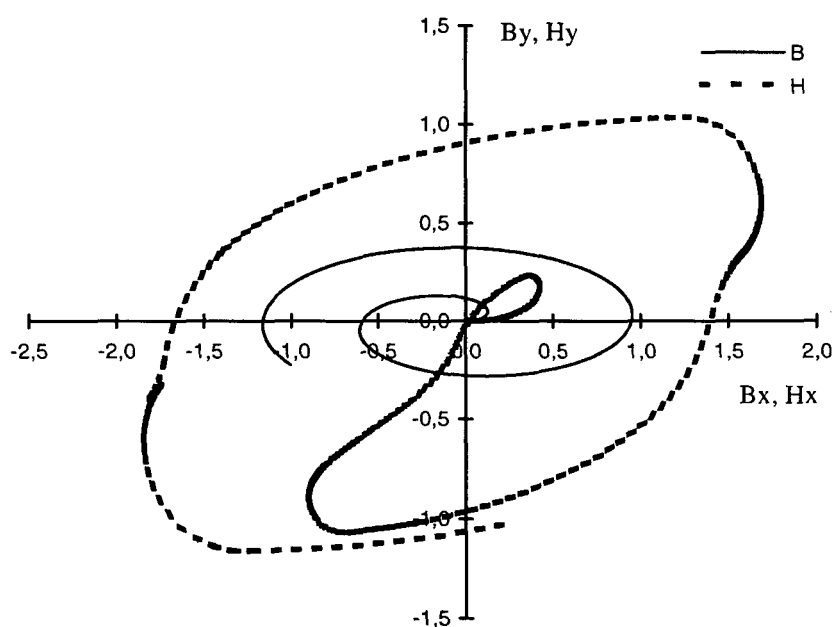


Figura 4.12 – Laço de Histerese – B_y, H_y – B_x, H_x

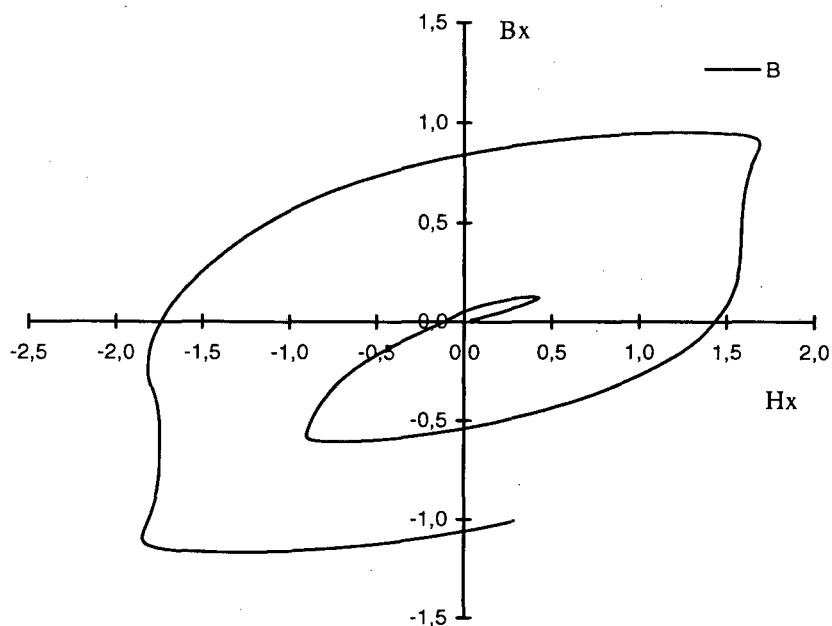


Figura 4.13 – Laço de histerese Bx – Hx

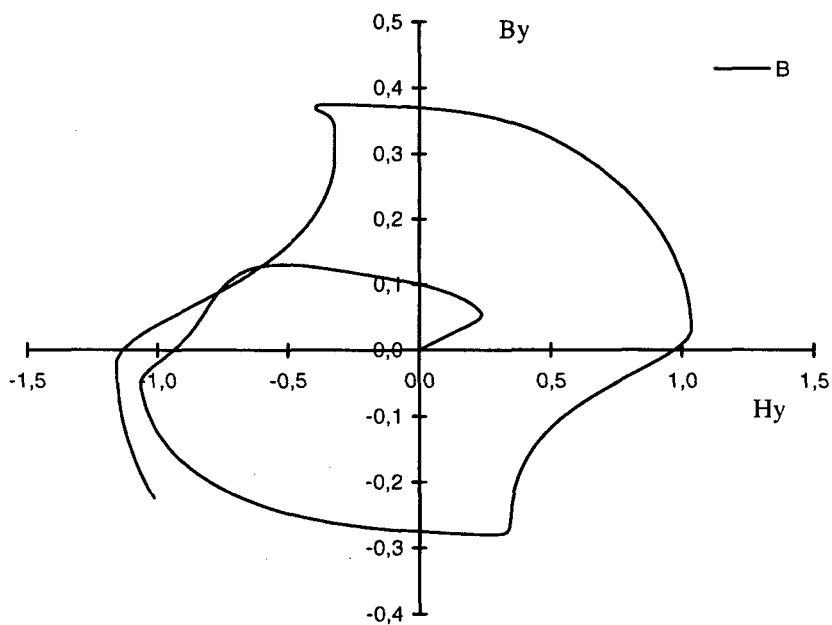


Figura 4.14 – Laço de histerese By-Hy

No Capítulo de Resultados apresenta-se um caso prático, onde efetua-se análise de Locus B e H para o Quadro de Epstein, referente a dois elementos da malha da estrutura.

4.5 - Algoritmo de cálculo

Apresenta-se na Fig. 4.15 o algoritmo para cálculo do campo bidirecional, que resume a metodologia apresentada neste capítulo.

A maioria dos softwares de elementos finitos que consideram a histerese precisam fazer várias operações, que prejudicam a convergência e o tempo de processamento. Um dos aspectos mais importantes do algoritmo é a chamada da subrotina da histerese uma única vez para cada elemento e iteração. Isto torna o cálculo de campo mais rápido, pois tem contribuído para a boa convergência do método de Newton-Raphson, a ser detalhado no capítulo V.

4.6 - Conclusão

Neste capítulo apresentou-se alguns conceitos e definições sobre as perdas rotativa e alternada, justificando a existência das mesmas para os casos uni e bidirecionais. Para a implementação do cálculo do campo alternado e rotativo, foi desenvolvida metodologia utilizando um círculo circunscrito, formado a partir dos vetores da indução \mathbf{B}_0 e $d\mathbf{B}$.

Definiu-se daí, os ângulos que foram usados para o cálculo do novo sistema de coordenadas e posterior cálculo do campo magnético total.

Além do cálculo, a grande vantagem desta metodologia é a sua convergência aliada à precisão. Esta questão será fundamental para a otimização do tempo de simulação e da convergência do processo iterativo a ser apresentado no Capítulo V.

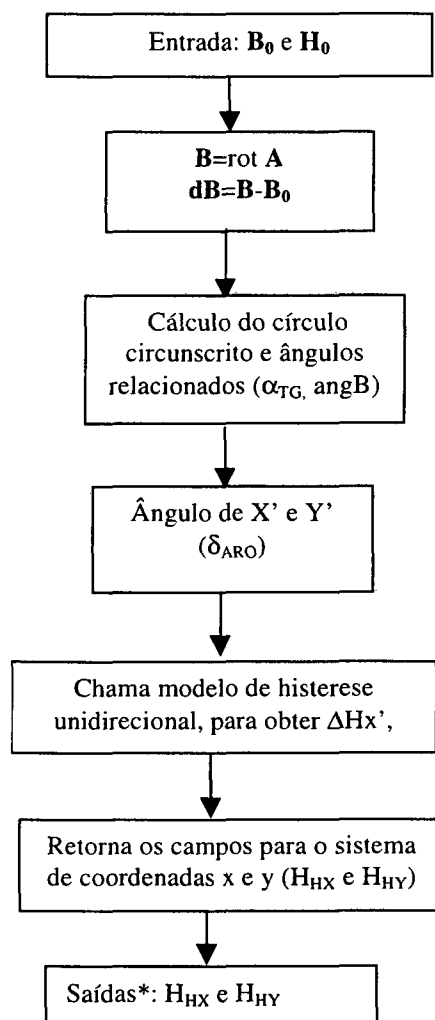


Figura 4.15 – Algoritmo para histerese bidirecional para um passo.

CAPÍTULO V

CÁLCULO DE CAMPO COM OS VETORES B E M

5.1 – Introdução

O método de elementos finitos tem sido uma ferramenta muito útil para computação de campos em dispositivos eletromagnéticos. Ele permite solucionar as equações de Maxwell para geometrias complexas levando em consideração o comportamento linear ou não linear do material magnético. A indução é facilmente obtida através da formulação potencial vetor magnético. A simulação de sistemas eletromagnéticos em geral, considerando a histerese, é ainda um problema difícil de ser abordado.

É, portanto, necessário combinar modelo de histerese com o método de elementos finitos, de modo que as perdas possam ser levadas em consideração no cálculo de campos. Usualmente na análise não linear de campos magnéticos, o potencial vetor magnético A e a relutividade v são tratados como variáveis desconhecidas, e quando a mesma é adotada na metodologia, a análise torna-se difícil porque a relutividade correspondente no laço de histerese não é contínua quando a indução magnética é igual a zero. A relutividade pode ser representada pelo laço de histerese da Figura 5.1 (a), sendo a mesma infinita nos pontos α_1 e α_2 como mostrado na Figura 5.1 (b).

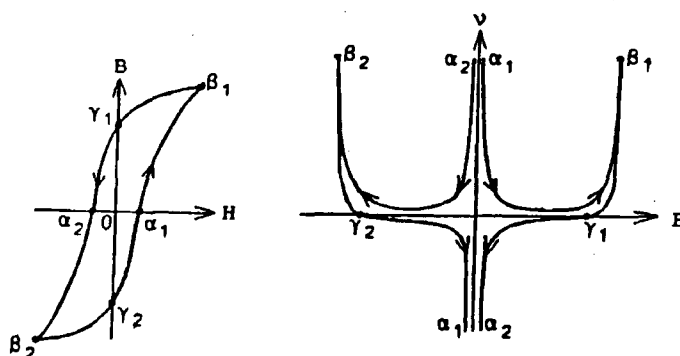


Figura 5.1- (a) – Laço B x H

(b) – Curva v x B

As propriedades de um material ferromagnético normalmente são representados pela curva de magnetização $B=f(H)$. Outrossim, a curva de magnetização $M=f(H)$ ou $M=f(B)$

podem ser usadas, uma vez que as mesmas possuem a mesma informação que a anterior, face a relação $\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$.

Tendo em vista simular o fenômeno da histerese do material magnético no cálculo de campos, a magnetização \mathbf{M} é diretamente introduzida na equação que rege o circuito magnético. A equação que rege o comportamento magnético pode ser derivada das equações de Maxwell. Além disso, uma equação adicional do circuito é obtida pela lei de Kirchoff. Pelo uso do procedimento de Galerkin, essas duas equações são combinadas e resolvidas para obtenção da distribuição do campo magnético.

O método de Newton-Raphson é um método bem conhecido e bastante utilizado para resolver problemas não lineares com elementos finitos (BASTOS, 1996). Este método, originalmente, requer a avaliação da derivada da magnetização em relação ao módulo da indução. Por isto, deve-se adequar o modelo de histerese para a convergência do processo iterativo.

Desse modo, quando as características da histerese são levadas em consideração, a utilização da magnetização \mathbf{M} deve ser recomendada em vez da relutividade.

5.1.1 – Magnetização remanente e campo coercitivo

No laço de histerese de um material ferromagnético, se o campo for reduzido, a magnetização decresce, mas ela não retorna para o valor original, como pode ser visto na Fig. 5.2.

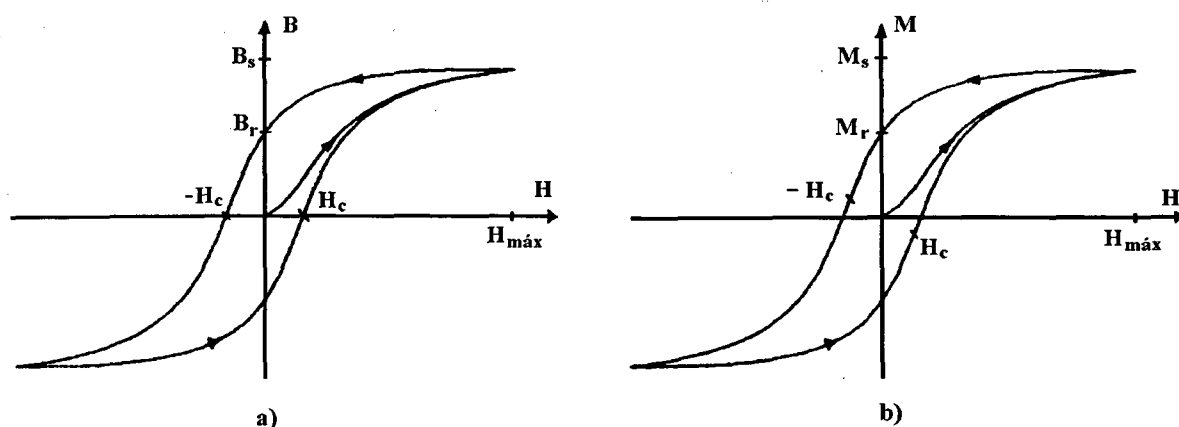


Figura 5.2 - a) Característica B-H

b) Característica M-H

Observa-se que, reduzindo o campo aplicado a zero, a característica atinge o ponto de remanência, ou melhor, a magnetização remanente M_r , e a indução remanente $B_r = \mu_0 M_r$, respectivamente. O campo magnético ainda precisa ser reduzido, até atingir o campo coercitivo $-H_c$ para obter indução nula no material magnético $B=0$. Uma distinção pode ser feita entre a característica B-H e a M-H no ponto do campo coercitivo H_c alcançado em $B=0$. Neste ponto, embora a indução magnética tenha valor zero, a magnetização é finita ($\mu_0(H_c + M_c) = 0$).

Em materiais considerados “macios”, facilmente magnetizáveis, ($H_c < 1000$ A/m), o ciclo de histerese é estreito (pequena área), enquanto que para os materiais duros, de difícil magnetização, ($H_c > 10000$ A/m), a área do ciclo de histerese é bem mais significativa.

5.1.2 – Comparação entre as curvas envolvendo M-B e M-H

BLOMBERG (1985,1987) e IVÀNYI (1997) concluíram que o processo iterativo de problemas não lineares com histerese, com método usando as variáveis M e B é mais eficiente do que outro usando as variáveis M e H.

Na Figura 5.3, compara-se sucintamente as curvas normalizadas M-H e M-B, obtidas considerando o laço típico de histerese.

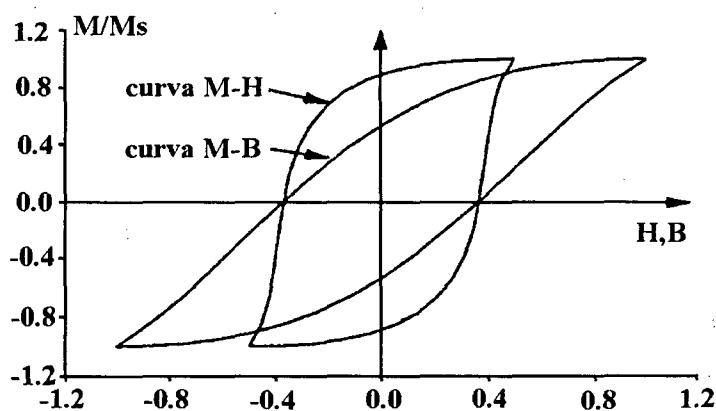


Figura 5.3 – Características das curvas M-H e M-B

Da figura 5.3, observa-se uma menor inclinação da curva M-B, apresentando uma característica mais favorável para computação numérica, quanto à convergência, em relação à curva M-H. As derivadas de M com respeito a H e B são mostradas na figura 5.4. Observa-se neste caso, que a curva dM/dH é mais abrupta e tem maiores valores do que a curva dM/dB .

Pode-se comparar igualmente, as características dos métodos considerando a curva de magnetização com variáveis M e B e com as variáveis M e H, tomando a derivada de M com relação a H, a qual pode ser escrita como:

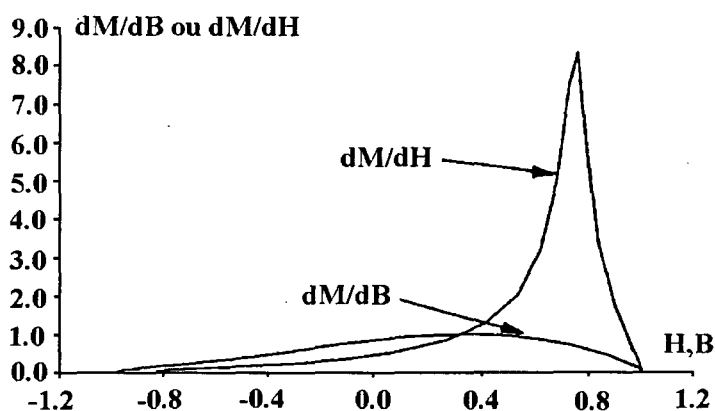


Figura 5.4 – Derivadas dM/dH e dM/dB para meio ciclo da figura 5.3

$$\frac{dM}{dH} = \frac{dM}{dB} \frac{dB}{dH} = \frac{dM}{dB} \left(1 + \frac{dM}{dH} \right) \quad (5.1)$$

a qual conduz a

$$\frac{dM}{dB} = \frac{\frac{dM}{dH}}{1 + \frac{dM}{dH}} \quad (5.2)$$

De acordo com (5.2), mesmo se dM/dH tenda para o infinito, dM/dB tende para a unidade, ou seja, o sistema considerando a derivada dM/dB é menos sensível, e portanto, apresenta mais estabilidade.

5.2 – Análise da orientação dos três vetores do magnetismo B, H e M

A seguir apresenta-se o comportamento dos três vetores do magnetismo, em três situações características.

5.2.1 - Caso unidimensional (em “x”)

Considera-se inicialmente o caso unidirecional (com ou sem histerese) onde os vetores da magnetização e indução estão sempre alinhados. A Figura 5.5 ilustra a composição de vetores considerando a relação $v_0 \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$, sendo a mesma representada segundo o eixo dos x.

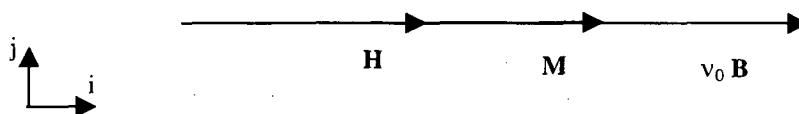


Figura 5.5 - \mathbf{H} , \mathbf{M} e $v_0 \mathbf{B}$ estão em paralelo – Caso unidimensional

5.2.2 - Caso bidimensional sem histerese

Neste caso, nos materiais puramente isotrópicos, a indução \mathbf{B} e magnetização \mathbf{M} sem histerese estão sempre em paralelo. Assim, pode-se modelar a curva de magnetização a partir da função de Langevin com os seus módulos, tendo os vetores de campo, magnetização e indução a mesma direção em todos os intervalos de tempo [KOLTERMANN,2000].

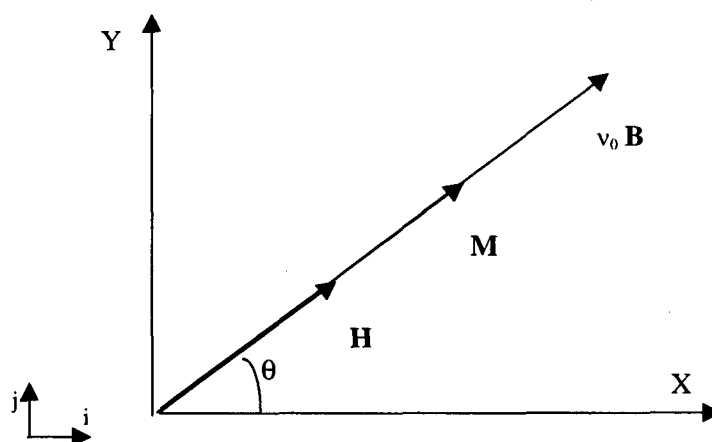


Figura 5.6 - \mathbf{H} , \mathbf{M} e $v_0 \mathbf{B}$, em paralelo – Caso bidimensional sem histerese.

Na Figura 5.6, assume-se que M_x e M_y são funções das componentes de B_x e B_y , em relação aos módulos da indução \mathbf{B} e a magnetização \mathbf{M} respectivamente, supondo .

$$M_x = |\mathbf{M}| \cos \theta = |\mathbf{M}| \frac{B_x}{|\mathbf{B}|} \quad (5.3)$$

$$M_y = M \sin \theta = |\mathbf{M}| \frac{B_y}{|\mathbf{B}|} \quad (5.4)$$

onde θ é o ângulo entre o vetor \mathbf{M} e o eixo x . B_x e B_y são obtidos diretamente do cálculo através do método de elementos finitos.

5.2.3 - Caso bidimensional com histerese

Neste caso, considerando um material isotrópico, os três vetores do magnetismo podem não estarem alinhados, mas mudarem de orientação de um instante de tempo para outro, como mostra-se na Fig. 5.7.

A Figura 5.7 ilustra o ângulo de defasagem entre vetores magnetização \mathbf{M} e de indução \mathbf{B} entre dois passos de cálculo. Esta situação ocorre normalmente em todas as estruturas não uniformes, com dobras ou cantos, conforme já explicado no capítulo IV.

Considerando que os módulos de \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_1 sejam diferentes, devido à não linearidade decorrente da saturação e perdas, os módulos de \mathbf{M}_0 e \mathbf{M}_1 não são proporcionais, de forma que, se estes vetores mudam de direção, surge um ângulo de defasagem entre o incremento do campo $\Delta \mathbf{M}$ e o incremento da indução $\Delta \mathbf{B}$. Denominou-se θ , a este ângulo.

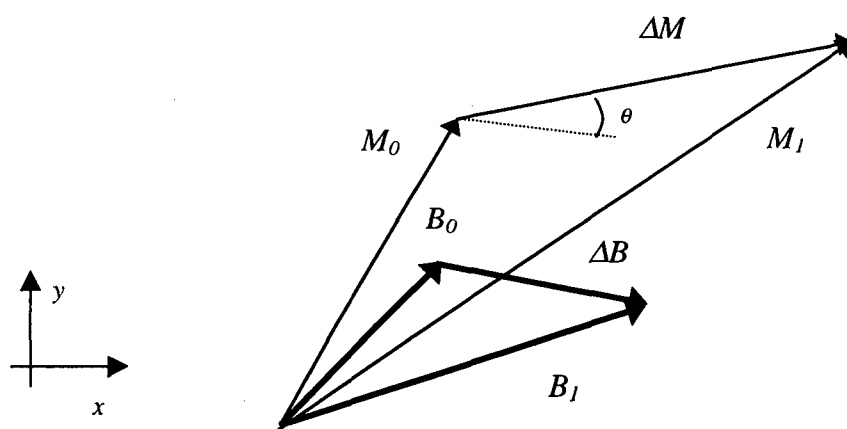


Figura 5.7 – Vetores \mathbf{B} e \mathbf{M} no caso bidirecional com histerese.

5.3 – Cálculo das derivadas da magnetização

Neste item resume-se como calcular as derivadas da magnetização com e sem histerese (em relação à indução), a serem usadas na formulação por elementos finitos considerando o uso do método de Newton-Raphson, para a solução do sistema não-linear.

Considerando o exposto no item anterior, precisa-se determinar o valor da magnetização \mathbf{M} e de suas derivadas em termos da indução (matriz de derivadas $[\mathbf{M}']$).

5.3.1 – Derivada da magnetização em relação aos potenciais.

As derivadas de \mathbf{M} em relação aos potenciais podem ser expressas por:

$$\frac{\partial M_x}{\partial A_j} = \frac{\partial M_x}{\partial B_x} \frac{\partial B_x}{\partial A_j} + \frac{\partial M_x}{\partial B_y} \frac{\partial B_y}{\partial A_j} \quad (5.5)$$

e

$$\frac{\partial M_y}{\partial A_j} = \frac{\partial M_y}{\partial B_x} \frac{\partial B_x}{\partial A_j} + \frac{\partial M_y}{\partial B_y} \frac{\partial B_y}{\partial A_j}, \quad (5.6)$$

onde $\partial M_x/\partial B_x$, $\partial M_x/\partial B_y$, $\partial M_y/\partial B_x$ e $\partial M_y/\partial B_y$ são os componentes da matriz $[\mathbf{M}']$ que serão deduzidos na seção seguinte.

5.3.2 – Derivadas da magnetização em relação à indução.

Considerando o cálculo dos componentes da derivada do vetor magnetização \mathbf{M} em relação aos potenciais, pode-se calcular as derivadas da magnetização em relação à indução.

A indução magnética é usada como variável independente, calculando $H=f(B)$, a partir do modelo de magnetização, e então, obtendo dH/dB .

A equação $dM_{AN}/dB=1/\mu_0 - dH_{AN}/dB$ a ser utilizada para o cálculo não linear do campo magnético utilizando o método de Newton-Raphson, é encontrada a partir da equação da derivada do campo sem histerese em relação à indução dH_{AN}/dB , sendo que o campo magnético sem histerese (H_{AN}) é expresso pela seguinte expressão:

$$H_{AN} = \frac{B}{\mu_0} - M_s L(\lambda) \quad (5.7)$$

sendo $L(\lambda)$ a função de Langevin e λ dada por:

$$\lambda = \frac{H_{AN}(1-\alpha) + B \left(\frac{\alpha}{\mu_0} \right)}{a} \quad (5.8)$$

Daí, obtém-se,

$$\frac{dH_{AN}}{dB} = \frac{1}{\mu_0} - M_s L'(\lambda) \frac{d\lambda}{dB} \quad (5.9)$$

onde $L'(\lambda)$ é a derivada da função de Langevin em relação a B .

Derivando λ em relação a B ;

$$\frac{d\lambda}{dB} = \frac{dH_{AN}}{dB} \frac{(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha/\mu_0}{a} \quad (5.10)$$

substituindo $d\lambda/dB$ na equação de dH_{AN}/dB resulta:

$$\frac{dH_{AN}}{dB} = \frac{1}{\mu_0} - M_s L'(\lambda) \left[\frac{dH_{AN}}{dB} \left(\frac{1-\alpha}{a} \right) + \frac{\alpha}{a\mu_0} \right] \quad (5.11)$$

$$\frac{dH_{AN}}{dB} \left[1 + M_s L'(\lambda) \left(\frac{1-\alpha}{a} \right) \right] = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1-\alpha}{a} M_s L'(\lambda) \right] \quad (5.12)$$

$$\frac{dH_{AN}}{dB} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\left[\left(\frac{1-\alpha}{a} \right) M_s L'(\lambda) \right]}{\left[1 + \left(\frac{1-\alpha}{a} \right) M_s L'(\lambda) \right]} \quad (5.13)$$

Para o caso com histerese a derivada dH_H/dB é dada por $(H_{H2}-H_{H1})/(B_2-B_1)$. Para valores próximos de zero a derivada é representada pela própria equação diferencial dH_H/dB .

A derivada dM/dB é encontrada a partir da relação $dM/dB=1/\mu_0 - dH_H/dB$. Na seção seguinte apresenta-se uma metodologia para passar esta derivada para a forma matricial.

5.4 – Matriz de derivadas da magnetização [M'].

Considerando o caso de materiais isotrópicos com histerese, e em função da presença da defasagem entre as derivadas da magnetização em relação à indução, conforme ilustrado na Fig. 5.7, precisar-se-á da utilização de uma matriz de derivadas em relação a x e y , que se denominará M' .

$$[\mathbf{M}'] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial B_x} & \frac{\partial M_x}{\partial B_y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial B_x} & \frac{\partial M_y}{\partial B_y} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Considera-se que a relação entre $d\mathbf{M}$ e $d\mathbf{B}$ possa ser expressa por $d\mathbf{M} = [\mathbf{M}']d\mathbf{B}$, onde:

$$[\mathbf{M}'] = \begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{12} & M'_{22} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Considerando o caso sem histerese pode-se definir [KOLTERMANN, 2000]:

$$M' = \frac{\partial M_x}{\partial B_x} = \frac{\partial M_y}{\partial B_y} = \frac{d|\mathbf{M}_{an}|}{d|\mathbf{B}|} \quad (5.16)$$

Sabe-se que a derivada de um vetor qualquer em relação a outro vetor é dado por uma matriz de derivadas parciais. Considerando a relação entre \mathbf{M} e \mathbf{B} em 2D, pode-se escrever :

$$\begin{bmatrix} dM_x \\ dM_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_x \\ dB_y \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Da álgebra linear, sabe-se que a relação entre dois vetores é dada por:

- relação entre os módulos, ou ganho linear;
- matriz de rotação, escrita em termos de senos e cossenos do ângulo de giro.

Assim, a equação matricial de transformação entre $\Delta\mathbf{B}$ e $\Delta\mathbf{M}$ é [RIGHI,2000]

$$\begin{bmatrix} dM_x \\ dM_y \end{bmatrix} = \frac{|\Delta\mathbf{M}|}{|\Delta\mathbf{B}|} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_x \\ dB_y \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Para que esta equação possa ser utilizada no método de elementos finitos, é preciso calcular a razão entre os módulos e a matriz de rotação em função do ângulo de defasagem.

Sabe-se que

$$\Delta\mathbf{M} \cdot \Delta\mathbf{B} = |\Delta\mathbf{M}| |\Delta\mathbf{B}| \cos \theta \quad (5.19)$$

$$|\Delta\mathbf{M} \times \Delta\mathbf{B}| = |\Delta\mathbf{M}| |\Delta\mathbf{B}| \text{sen } \theta \quad (5.20)$$

então o valor do campo magnético no passo de tempo atual resulta

$$\begin{bmatrix} dM_x \\ dM_y \end{bmatrix} = \frac{1}{|\Delta \mathbf{B}|^2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{B} & -|\Delta \mathbf{B}_x \Delta \mathbf{M}| \\ |\Delta \mathbf{M}_x \Delta \mathbf{B}| & \Delta \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_x \\ dB_y \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Agora, pode-se obter os termos η e ξ fazendo os produtos escalar e vetorial, respectivamente. Desenvolvendo-os em duas dimensões, tem-se

$$\eta = \frac{\Delta M_x \Delta B_x + \Delta M_y \Delta B_y}{\Delta B_x^2 + \Delta B_y^2} \quad (5.22)$$

$$\xi = \frac{\Delta M_x \Delta B_y - \Delta M_y \Delta B_x}{\Delta B_x^2 + \Delta B_y^2} \quad (5.23)$$

e, quando as variações de B_x e/ou B_y forem próximas de zero os termos “ η ” e “ ξ ” tornam-se:

$$\eta = \left(\frac{\partial M_x}{\partial B_x} \right) \frac{\Delta B_x^2}{\Delta B_x^2 + \Delta B_y^2} + \left(\frac{\partial M_y}{\partial B_y} \right) \frac{\Delta B_y^2}{\Delta B_x^2 + \Delta B_y^2} \quad (5.24)$$

$$\xi = \left(\frac{\partial M_x}{\partial B_x} \right) \frac{\Delta B_x \Delta B_y}{\Delta B_x^2 + \Delta B_y^2} - \left(\frac{\partial M_y}{\partial B_y} \right) \frac{\Delta B_x \Delta B_y}{\Delta B_x^2 + \Delta B_y^2} \quad (5.25)$$

Então, chega-se na matriz de derivadas desejada.

$$M' = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial B_x} & \frac{\partial M_x}{\partial B_y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial B_x} & \frac{\partial M_y}{\partial B_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & -\xi \\ \xi & \eta \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

5.5 – Equações de Maxwell

Das equações de Maxwell e das relações básicas (baixa frequência) entre \mathbf{H} , \mathbf{E} e \mathbf{B} , têm-se:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.27)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (5.28)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (5.29)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.30)$$

onde:

t - tempo (s),

\mathbf{J} – densidade de corrente (A/m^2),

\mathbf{B} – indução magnética (T),

\mathbf{A} – potencial vetor magnético (Tm),

\mathbf{H} – campo magnético (A/m),

\mathbf{E} – campo elétrico (V/m)

5.6 – Equação diferencial usando o potencial vetor magnético.

Para cálculo de campos pelo método de elementos finitos em duas dimensões (2D), é conveniente escolher a formulação do potencial vetor magnético \mathbf{A} . A metodologia faz uso somente dos campos globais \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} , e dá um modelo para o comportamento do vetor magnetização \mathbf{M} a qual pode ser facilmente combinada com a resolução das equações de Maxwell pelo método de elementos finitos:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (5.31)$$

onde:

μ_0 = permeabilidade do espaço livre;

\mathbf{M} - magnetização (A/m) a qual está associada ao modelo de representação de curva com e sem histerese $\mathbf{M}(\mathbf{B})$.

Na seqüência, \mathbf{B} e \mathbf{M} serão tomados como variáveis principais, sendo \mathbf{B} relacionado com \mathbf{H} através de (5.31).

Usando a Lei de Ampère aplicada à (5.31), e considerando

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\mu_0} \quad (5.32)$$

obté-m-se:

$$\text{rot}(\mathbf{v}_0 \mathbf{B} - \mathbf{M}) = \mathbf{J} \quad (5.33)$$

Pela equação de Maxwell $\text{div } \mathbf{B} = 0$ e como o divergente do rotacional de qualquer vetor é sempre nulo, pode-se dizer que

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (5.34)$$

e a equação (5.33) torna-se:

$$\nu_0 \text{rotrot} \mathbf{A} - \text{rot} \mathbf{M} - \mathbf{J} = 0 \quad (5.35)$$

esta é a equação diferencial geral (forma forte), que pode ser particularizada para duas dimensões.

5.7 – Equação diferencial em duas dimensões.

Considere um sistema bidimensional de região R no plano x;y circundada por uma curva C. Se o vetor densidade de corrente tem somente uma componente na direção z de magnitude \mathbf{J} , então o potencial vetor magnético $\mathbf{A}(x,y)=A_z(x,y)$ satisfaz a equação não linear de Poisson (IDA&BASTOS, 1997):

Em análise bidimensional, é considerado que a indução magnética está situada no plano 0xy e portanto, \mathbf{A} e \mathbf{J} tem somente um componente:

$$\mathbf{A} = A\mathbf{k} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{J} = J\mathbf{k} \quad (5.37)$$

Considere-se, agora o conceito de rotacional,

$$\text{rot } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (5.38)$$

5.7.1 – Primeiro termo de (5.35), com $\nu_0 \mathbf{B}$

Como a indução \mathbf{B} é o rotacional do potencial vetor magnético \mathbf{A} .

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{j} \quad (5.39)$$

O primeiro termo de (5.35), na direção do eixo z, pode ser definido como:

$$\nu_0 (\text{rotrot} \mathbf{A})_z = -\frac{\partial(\nu_0 \frac{\partial A}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(\nu_0 \frac{\partial A}{\partial y})}{\partial y} = -\text{div}(\nu_0 \text{grad} A) \quad (5.40)$$

5.7.2 – Segundo termo de (5.35), com \mathbf{M} .

Para a magnetização em duas dimensões tem-se:

$$\text{rot } \mathbf{M} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (5.41)$$

Na seção 5.2, verificou-se que os componentes do vetor de magnetização podem ser perfeitamente definidos como uma função dos componentes da indução. Assim,

$$\begin{aligned} M_x &= f(B_x, B_y) \\ M_y &= f(B_x, B_y) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Estas equações não lineares podem ser escritas na forma de frações parciais

$$\begin{bmatrix} dM_x \\ dM_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial B_x} & \frac{\partial M_x}{\partial B_y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial B_x} & \frac{\partial M_y}{\partial B_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_x \\ dB_y \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

E substituindo na equação do rot \mathbf{M} , na direção z, tem-se

$$(\text{rot } \mathbf{M})_z = \left(\frac{\partial M_y}{\partial B_x} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial B_y} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial B_x} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial B_y} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \quad (5.44)$$

e considerando que,

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.45)$$

substituindo B_x e B_y em (5.44) resulta:

$$\text{rot } \mathbf{M} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) - \frac{\partial M_y}{\partial B_y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial M_x}{\partial B_x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial M_x}{\partial B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \right) \mathbf{k} \quad (5.46)$$

Em (5.26) definiu-se os termos da matriz de derivadas de \mathbf{M} em relação a \mathbf{B} .

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial B_x} & \frac{\partial M_x}{\partial B_y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial B_x} & \frac{\partial M_y}{\partial B_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & -\xi \\ \xi & \eta \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Substituindo esta matriz em (5.46) o termo com a magnetização fica:

$$\text{rot } \mathbf{M} = \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) - \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) - \xi \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \right) \mathbf{k} \quad (5.48)$$

5.7.3 – Equação diferencial total para 2D.

Substituindo (5.40) e (5.48) em (5.35), e considerando \mathbf{J} somente na direção do eixo z tem-se,

$$-\frac{\partial(v_0 \frac{\partial A}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(v_0 \frac{\partial A}{\partial y})}{\partial y} - \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) - \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) - \xi \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \right) - J = 0 \quad (5.49)$$

e colocando em evidência os termos de mesma derivada, resulta:

$$-\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) + (v_0 + \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + (v_0 + \eta) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) + \xi \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) - J = 0 \quad (5.50)$$

Partindo dos conceitos de divergente e gradiente (BASTOS,1996), pode-se obter de (5.50):

$$-\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) + (v_0 + \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + (v_0 + \eta) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) + \xi \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) = -\text{div} \|\vartheta\| \text{grad} A \quad (5.51)$$

onde

$$\|\vartheta\| = \begin{bmatrix} (v_0 + \eta) & \xi \\ \xi & (v_0 + \eta) \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

que permite rescrever a equação diferencial (5.50) como:

$$\text{div} \|\vartheta\| \text{grad} A + J = 0 \quad (5.53)$$

Esta é a equação geral que será resolvida com Elementos Finitos triangulares de primeira ordem e o método de Galerkin. Tratar-se-á inicialmente do método de elementos finitos.

5.8 –Elementos Finitos triangulares de primeira ordem.

Considere-se um elemento finito triangular da malha com nós $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$, sendo o valor de A no ponto dentro de cada elemento representado pela aproximação de interpolação como (SADOWSKI, 1993):

$$A(x, y) = \{N_e\}^T \{A_e\} \quad (5.54)$$

onde N_e é o vetor de interpolação de um elemento “e”. A_i é o potencial vetor de um nó “i”. Assim, sob a forma matricial tem-se:

$$\{N_e\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] \quad (5.55)$$

$$\{A_e\} = [A_1 \quad A_2 \quad A_3]^T \quad (5.56)$$

Com elementos finitos de primeira ordem, pode-se considerar:

$$A(x, y) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i + r_i) A_i(x_i, y_i) \quad (5.57)$$

onde o índice i é varia sobre os vértices do triângulo p_1, p_2, p_3 .e:

TABELA 5.1 – Funções de forma dos elementos triangulares de primeira ordem.

	1	2	3
p_i	$x_2 y_3 - y_2 x_3$	$x_3 y_1 - y_3 x_1$	$x_1 y_2 - y_1 x_2$
q_i	$y_2 - y_3$	$y_3 - y_1$	$y_1 - y_2$
r_i	$x_3 - x_2$	$x_1 - x_3$	$x_2 - x_1$

A variável D representa o dobro da área do triângulo do elemento que é calculado pelo determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (5.58)$$

Pela definição $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, a derivada parcial do potencial vetor fornece a expressão correspondente para a indução \mathbf{B} ;

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{D} (r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3) \\ B_y &= -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{D} (q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3) \end{aligned} \quad (5.59)$$

Assim, a indução é independente da posição e dentro de um elemento é assumida como constante. Neste momento, pode-se definir uma matriz H_e por:

$$[H_e] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

As derivadas diferenciais parciais de A podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \end{bmatrix} A_e \quad (5.61)$$

Pode-se criar uma nova função F , onde o seu gradiente é a derivada de N_e :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} F &= \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{\partial N_e}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial N_e}{\partial y} \mathbf{j} \\ \mathbf{grad} F &= [\mathbf{D}_x \quad \mathbf{D}_y] \end{aligned} \quad (5.62)$$

5.9 – Discretização por Elementos Finitos – Método de Galerkin

A fim de obter a solução numérica para a equação diferencial parcial, o problema é formulado pelo procedimento de Galerkin, sendo o resíduo \mathfrak{R} , definido por (5.53) (IDA&BASTOS, 1997, KOST, 1994):

$$\mathfrak{R} = \text{div} \|\mathfrak{D}\| \text{grad} A + J \quad (5.63)$$

Como a solução exata é aproximada, o resíduo tende a zero. Geralmente, no método de resíduos ponderados, o resíduo \mathfrak{R} precisa satisfazer certas condições forçando-o tender a zero. Esta condição pode ser expressa por:

$$\langle F, \mathfrak{R} \rangle = \iint_{\Omega_i} F \mathfrak{R} d\Omega = 0 \quad (5.64)$$

onde “F” é a função ponderação. Método de Galerkin é uma forma particular para o método de resíduos ponderados e é caracterizado pelo fato da função ponderação e a função de interpolação serem as mesmas.

5.9.1 – Primeiro termo, com potencial vetor

Pode-se desenvolver cada termo da equação anterior, até obter-se a equação final. Isolando-se o termo com o divergente e o gradiente, denominado T_1 , define-se a equação:

$$T_1 = \iint_{\Omega} F \operatorname{div} \|\vartheta\| \operatorname{grad} A \, d\Omega \quad (5.65)$$

e, aplicando a identidade vetorial:

$$\operatorname{div}(UV) = V \cdot \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} V \quad (5.66)$$

A equação (5.65) resulta

$$T_1 = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(F \|\vartheta\| \operatorname{grad} A) \, d\Omega - \iint_{\Omega} \operatorname{grad} F \cdot \|\vartheta\| \operatorname{grad} A \, d\Omega \quad (5.67)$$

Pelo teorema da divergência, desenvolve-se a primeira parcela substituindo F pela função de forma N_e , dos triângulos. Também pode-se desenvolver o gradiente dos potenciais de (5.67) usando:

$$\|\vartheta\| \operatorname{grad} A = \begin{bmatrix} (v_0 + \eta) & -\xi \\ \xi & (v_0 + \eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \end{bmatrix} = \quad (5.68)$$

$$\|\vartheta\| \operatorname{grad} A = \begin{bmatrix} (v_0 + \eta) \frac{\partial A}{\partial x} - \xi \frac{\partial A}{\partial y} \\ \xi \frac{\partial A}{\partial x} + (v_0 + \eta) \frac{\partial A}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ou então, escrevendo em termos de D_x e D_y :

$$\|\vartheta\| \operatorname{grad} A = \left[((v_0 + \eta) \mathbf{D}'_x - \xi \mathbf{D}'_y) + (\xi \mathbf{D}'_x + (v_0 + \eta) \mathbf{D}'_y) \right] [A] \quad (5.69)$$

E, substituindo (5.69) no primeiro termo de (5.67), e fazendo o produto escalar, resulta:

$$T_1 = \iint_{\Omega} ((v_0 + \eta) \mathbf{D}_x \mathbf{D}'_x - \xi \mathbf{D}_x \mathbf{D}'_y + \xi \mathbf{D}_y \mathbf{D}'_x + (v_0 + \eta) \mathbf{D}_y \mathbf{D}'_y) \, d\Omega \, \Delta A \quad (5.70)$$

e, como o produto matricial:

$$\mathbf{D}_X \mathbf{D}_Y^t = \mathbf{D}_Y \mathbf{D}_X^t \quad (5.71)$$

é um escalar, resulta na eliminação do termo “ ξ ”, que fica fora da diagonal da matriz de derivadas de M em relação a B. Assim, (5.70) torna-se:

$$T_1 = (v_0 + \eta) \iint_{\Omega} (\mathbf{D}_X \mathbf{D}_X^t + \mathbf{D}_Y \mathbf{D}_Y^t) d\Omega \mathbf{A} \quad (5.72)$$

onde a integração desta equação resulta na matriz de contribuição elementar ss_e :

$$ss_e = \frac{(v_0 + \eta)}{2D} \begin{bmatrix} q_1 q_1 & q_2 q_1 & q_3 q_1 \\ q_1 q_2 & q_2 q_2 & q_3 q_2 \\ q_1 q_3 & q_2 q_3 & q_3 q_3 \end{bmatrix} + \frac{(v_0 + \eta)}{2D} \begin{bmatrix} r_1 r_1 & r_2 r_1 & r_3 r_1 \\ r_1 r_2 & r_2 r_2 & r_3 r_2 \\ r_1 r_3 & r_2 r_3 & r_3 r_3 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Esta matriz é montada no sistema geral.

5.9.2 – Segundo termo, com fontes de corrente.

Pode-se desenvolver o segundo termo de (5.63), denominado T_2 , (SADOWSKI, 1993, KUO-PENG, 1997)

$$T_2 = \iint_{\Omega} FJ \, d\Omega \quad (5.74)$$

e, considerando que

$$J = \frac{N_{\text{cond}}}{S_{\text{cond}}} I \quad (5.75)$$

então, como $F = N_e^t$

$$p_e = \iint_{\Omega_e} N_e^t \frac{N_{\text{cond}}}{S_{\text{cond}}} dx dy \quad (5.76)$$

que resulta no vetor “ p_e ” - para cada elemento de condutor:

$$p_e = \frac{N_{\text{cond}}}{S_{\text{cond}}} D \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Este vetor é montado no sistema geral como o vetor $[P]$.

5.10 – Montagem do sistema de equações não lineares.

A matriz de contribuição do termo de corrente já é bem conhecido (BASTOS, 1996). Após a montagem do sistema global de equações obtém-se:

$$[\mathbf{SS}][\mathbf{A}] - [\mathbf{P}][\mathbf{I}] = 0 \quad (5.78)$$

onde:

$[\mathbf{SS}]$ - matriz global de contribuições, usando a componente $v_0 + \eta$ da matriz de derivadas. A componente “ ξ ” simplifica-se pois os sinais são opostos.

$[\mathbf{A}]$ - vetor incógnita dos potenciais dos nós

$[\mathbf{I}]$ - vetor de correntes nos enrolamentos.

$[\mathbf{P}]$ - vetor relativo às fontes de correntes nos nós.

Para (5.78) ser utilizada no método de Newton-Raphson, cada linha desta equação pode ser chamada G_i onde i corresponde a cada nó da malha.

$$G_i = \sum_{e=1}^{NE} \left\{ \iint_{\Omega} \sum_{k=1}^3 (v_0 + \eta) (H_e^t H_e) A_k d\Omega - \iint_{\Omega} N_e J d\Omega \right\} = 0 \quad (5.79)$$

Observa-se que o sistema de equações possui somente o termo “ η ” e os potenciais “ A_k ” como suas incógnitas. Pode-se observar ainda que a equação (5.79) pode ser relacionada com a equação abaixo:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \text{rot} v_0 \mathbf{B} - \text{rot} \mathbf{M} \quad (5.80)$$

pois:

a) o termo $\iint_{\Omega} \sum_{k=1}^3 (v_0) (H_e^t H_e) A_k d\Omega$ corresponde ao termo $\text{rot} v_0 \mathbf{B}$

b) o termo $\iint_{\Omega} \sum_{k=1}^3 (\eta) (H_e^t H_e) A_k d\Omega$ corresponde ao termo $\text{rot} \mathbf{M}$

5.10.1 – Equação do circuito de excitação.

Se o dispositivo for alimentado em tensão, inclui-se uma segunda equação (lei de Kirchoff) para o circuito de excitação. A equação do circuito é dada por (SADOWSKI, 1993, KUO-PENG, 1997):

$$\{V\} = [R][I] + [L_0] \frac{d}{dt} [I] + \{E\}, \quad (5.81)$$

onde

$\{E\}$ é a força eletromotriz induzida no enrolamento;

$\{V\}$ é a tensão aplicada;

$[I]$ vetor corrente,

$[R]$ é a matriz diagonal das resistências do enrolamento

$[L_0]$ é a indutância de dispersão.

O sistema geral obtido é:

$$\begin{aligned} [SS][A] &= [P][I] \\ [Q] \frac{d}{dt} [A] + [R][I] + [L_0] \frac{d[I]}{dt} &= [V] \end{aligned} \quad (5.82)$$

onde $[Q]$ é a matriz relativa aos fluxos concatenados nos enrolamentos.

5.11 - Aplicação do método de Newton-Raphson.

O método de Newton-Raphson é baseado na expansão da série de Taylor, tomando-se somente os termos da derivada de primeira ordem, aplicada na característica não linear na solução iterativa da equação de resíduo (HORNBECK, 1975, BASTOS, 1996).

Portanto, o método de Newton-Raphson caracteriza-se pela solução iterativa do sistema matricial, isto é, encontra-se as raízes \mathbf{u} de \mathbf{F}_{NR} :

$$\mathbf{F}_{NR}(\mathbf{u}) = 0 \quad (5.83)$$

onde:

\mathbf{F}_{NR} – função vetorial não linear qualquer;

\mathbf{u} - vetor de raízes da função vetorial \mathbf{F}_{NR} .

Expandindo \mathbf{F}_{NR} por série de Taylor, e tomando somente o termo da derivada de primeira ordem:

$$[J]\delta\mathbf{u} = -\mathbf{F}_{NR} \quad (5.84)$$

onde

$[J]$ – matriz Jacobiana, com as derivadas parciais das linhas de \mathbf{F}_{NR} em relação às raízes de \mathbf{u} .

$\delta\mathbf{u}$ – desvio do vetor \mathbf{u} , entre iterações. Observa-se que este incremento é distinto de Δ , que é o desvio entre passos de cálculo.

Por causa da não-linearidade do sistema, e se o Método de Newton-Raphson for utilizado, os termos da matriz Jacobiana precisam ser avaliados, os quais envolvem a derivada com respeito ao potencial vetor denotada por $\partial G/\partial A$. Expandindo $[G]$ em uma série multidimensional de Taylor, através de incrementos δA_j , a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial A_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial A_k} \\ \dots & \frac{\partial G_i}{\partial A_j} & \dots \\ \frac{\partial G_k}{\partial A_1} & \dots & \frac{\partial G_k}{\partial A_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_1 \\ \delta A_j \\ \delta A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 \\ -G_i \\ -G_k \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

onde "k" é o número de nós do qual os potenciais vetores são conhecidos:

Considera-se que a função vetorial de Newton \mathbf{F}_{NR} seja definida por (5.82), obtendo-se:

$$\begin{aligned} F_1 &= [\mathbf{SS}][\mathbf{A}] - [\mathbf{P}][\mathbf{I}] \\ F_2 &= -[\mathbf{Q}]\frac{d}{dt}[\mathbf{A}] - [\mathbf{R}][\mathbf{I}] - [\mathbf{L}_0]\frac{d[\mathbf{I}]}{dt} + [\mathbf{V}] \end{aligned} \quad (5.86)$$

Então, para formar a matriz Jacobiana, deriva-se (5.86) em relação a cada potencial vetor magnético e corrente

$$\frac{\partial F_1}{\partial A_k} = \mathbf{SS} \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial I_j} = -\mathbf{P} \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial A_k} = -\frac{\mathbf{Q}}{\Delta t} \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial I_j} = -\mathbf{R} - \frac{\mathbf{L}_0}{\Delta t} \quad (5.90)$$

onde

i, j = número do enrolamento; e k = número do nó.

5.11.1 – Sistema matricial de Newton – Raphson.

Inclui-se a não linearidade da saturação, e das perdas por histerese resolvendo esta equação iterativamente, usando o método de Newton-Raphson, que se apresenta a seguir.

Rescrevendo-se (5.82) na forma de um sistema não linear, a ser resolvido para os potenciais e para as correntes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{SS} & -\mathbf{P} \\ \frac{\mathbf{Q}}{\Delta t} & \mathbf{R} + \frac{\mathbf{L}}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{SSA} + \mathbf{PI} \\ -\frac{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} - \mathbf{RI} - \frac{\mathbf{L}_0\Delta\mathbf{I}}{\Delta t} + \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

Resolve-se este sistema para os gradientes, e ao final de cada iteração atualiza-se \mathbf{A} e \mathbf{I} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \\ \mathbf{I} &= \mathbf{I} + \delta\mathbf{I} \end{aligned} \quad (5.92)$$

Assim, realiza-se o cálculo de campo considerando as perdas por histerese rotativa e alternada.

5.12 – Algoritmo.

Apresenta-se na Fig. 5.8 o algoritmo geral de cálculo de campos magnéticos, indicando os laços de passos de cálculo e das iterações. Observa-se que o bloco mais complexo é a formação do sistema matricial.

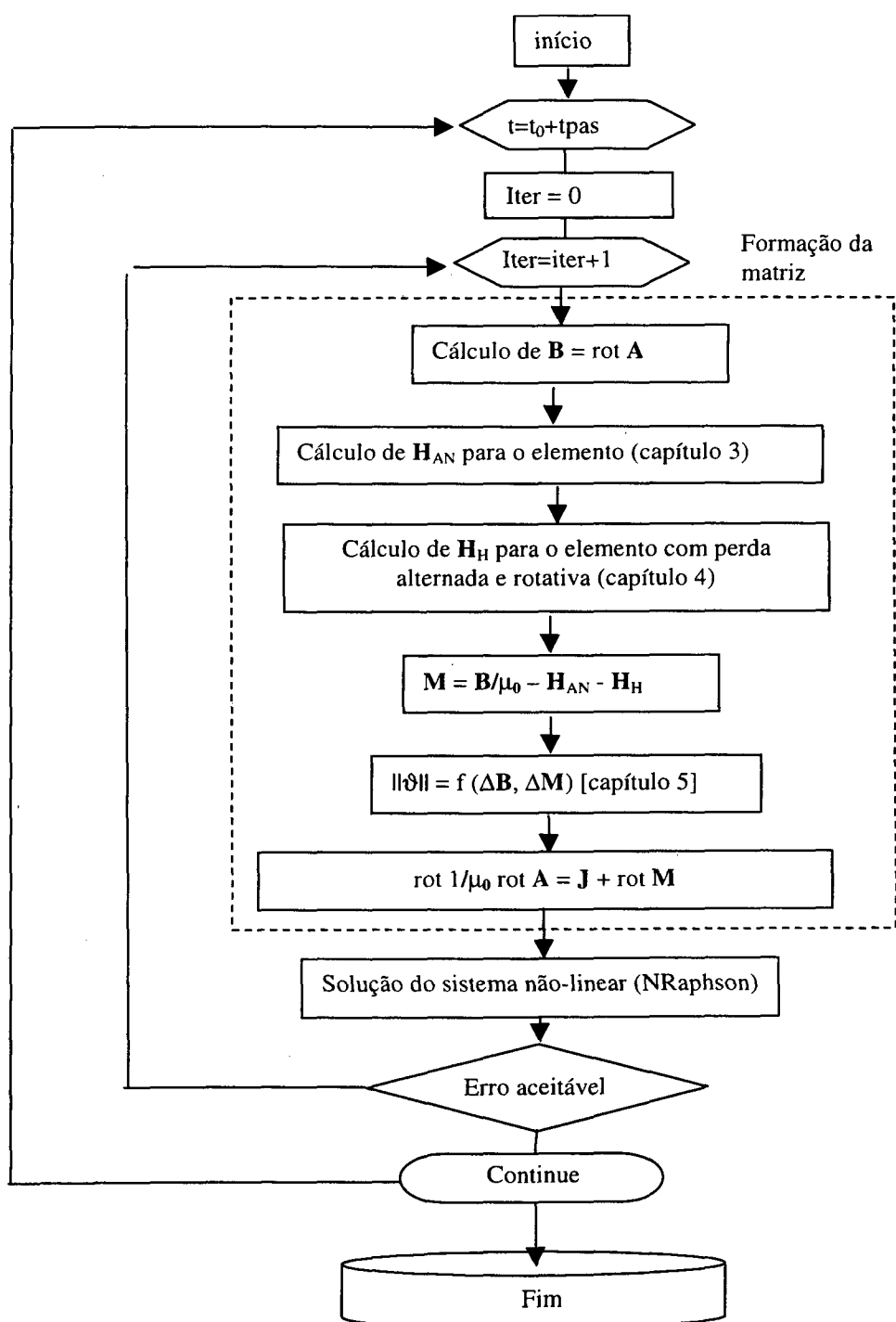


Figura 5.8 – Algoritmo geral de cálculo de campo com Elementos Finitos.

5.13 – Conclusão.

Neste capítulo, foi apresentado um novo procedimento para cálculo de campo combinando o método de elementos finitos com modelo de histerese estática. Introduziu-se um modelo de cálculo numérico de campo magnético, a partir do método de elementos finitos através da formulação potencial vetor magnético usando o vetor de Magnetização \mathbf{M} .

Observou-se que esta metodologia poderá ser uma ferramenta muito importante para análise de máquinas e dispositivos eletromagnéticos, pois simplifica a montagem do sistema matricial, e permite modelar o material magnético sem usar permeabilidade relativa, mas a equação que relaciona os três vetores do magnetismo (\mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M}).

A formulação por elementos finitos é derivada dessa relação constitutiva, e o método de Newton-Raphson foi implementado para solução do sistema não linear. Um fator de relaxação foi introduzido no programa computacional (EFCAD) para melhorar as características de convergência do método de Newton-Raphson, obtendo daí, redução no número de iterações e satisfatória convergência.

Apresentar-se-ão no capítulo VI os resultados referentes a esta metodologia.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS

Para uma melhor interpretação da metodologia, optou-se por simular três problemas: uma barra de ferro reta alimentada em tensão; o quadro de Epstein; e uma estrutura de ferro cilíndrica com duas bobinas defasadas de 90° .

6.1 – Barra de ferro reta magnetizada – Resultados típicos e simulados.

Este problema consiste de uma barra de ferro envolvida por uma bobina, caracterizando um eletroímã. Neste caso, busca-se apresentar o comportamento da magnetização quando da retirada da corrente, caracterizando a presença da histerese. Outros modelos que não consideram a histerese, resultam em campo nulo, não refletindo o verdadeiro comportamento do eletroímã.

Este problema também é importante para validação do modelo de histerese 2D, em função da defasagem entre \mathbf{H} , \mathbf{B} e \mathbf{M} nos diversos elementos da estrutura.

Adotou-se como resultados típicos, as linhas de campo já consagradas na literatura, tendo como referência CULLITY (1972), que são apresentadas na Fig. 6.1.

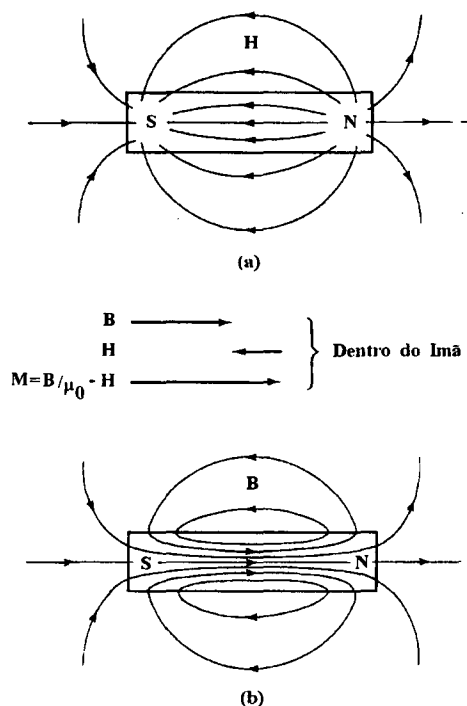


Fig. 6.1 – Vetores de \mathbf{B} , \mathbf{H} , e \mathbf{M} típicos da estrutura.

6.1.1 - Simulações

Realizou-se simulações com a estrutura apresentada na Fig. 6.2, visando-se a comparação qualitativa dos resultados simulados e típicos, sendo a bobina alimentada em tensão.

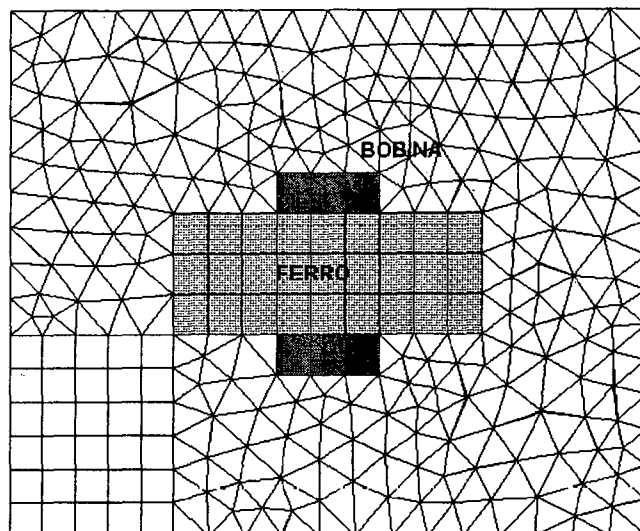


Fig. 6.2 – Estrutura simulada com a sua respectiva Malha.

Para visualização vetorial das grandezas eletromagnéticas foi utilizado o Software Matlab, considerando os elementos da malha. Os vetores \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} foram obtidos no instante de passagem da corrente por zero (magnetismo residual).

A figura 6.3 apresenta um mapa dos vetores de campo magnético, podendo-se perceber a existência de divergência não nula.

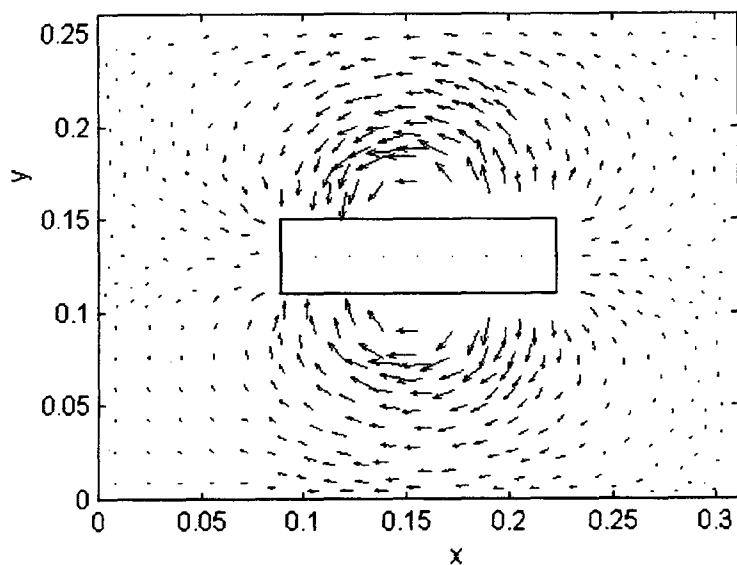


Fig. 6.3 - Vetores de campo \mathbf{H}

A figura 6.4 apresenta o mapa das linhas da indução magnética operando na estrutura da barra de ferro, observando-se a maior concentração da indução no centro da mesma.

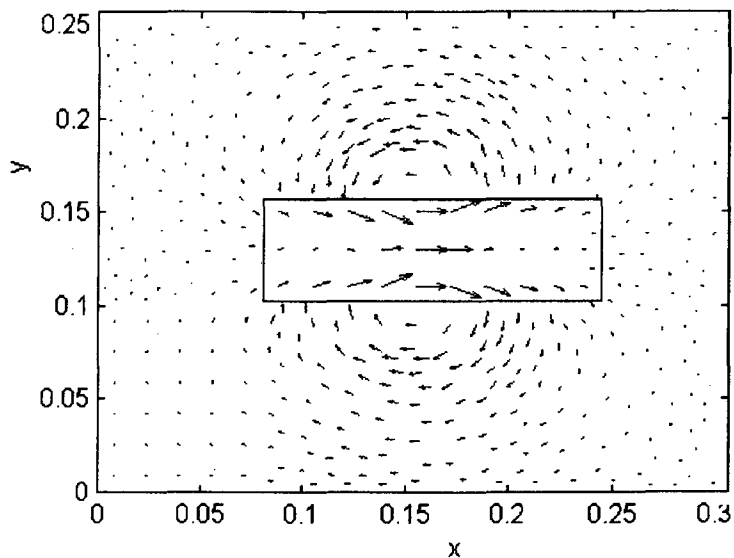


Figura.6.4 - Vetores de Indução B

Por fim, apresenta-se na Figura 6.5 o comportamento da magnetização no interior da peça,

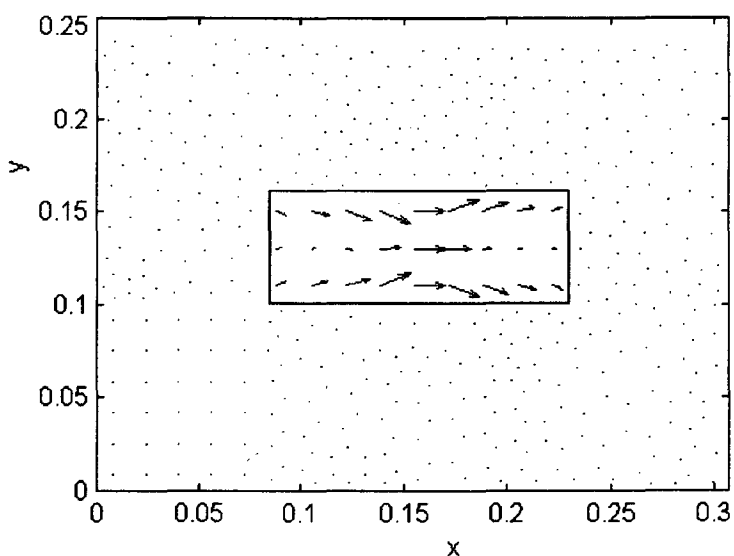


Figura 6.5 - Vetores de magnetização M .

Pode-se constatar uma semelhança nas linhas simuladas e típicas (ver Fig. 6.1), relativo ao comportamento do eletroímã.

Os vetores de magnetização \mathbf{M} giram pela influência do campo externo. A distribuição do vetor indução expressa por $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ é similar ao da magnetização, desde que o vetor magnetização \mathbf{M} é muito maior do que o vetor campo magnético \mathbf{H} .

6.2 – Quadro de EPSTEIN

O quadro de Epstein é normalmente usado para medir as propriedades magnéticas em corrente alternada utilizando amostras, de acordo com determinados procedimentos estipulados em norma. A indução magnética, função imagem da tensão induzida no secundário do quadro de Epstein, depende da quantidade de lâminas utilizadas, pois elas determinam a seção efetiva por onde o fluxo no ferro se distribui. O enrolamento interno constitui a bobina de captação que mede o fluxo do núcleo. Na Fig. 6.6 pode-se ver o esquema do quadro de Epstein.

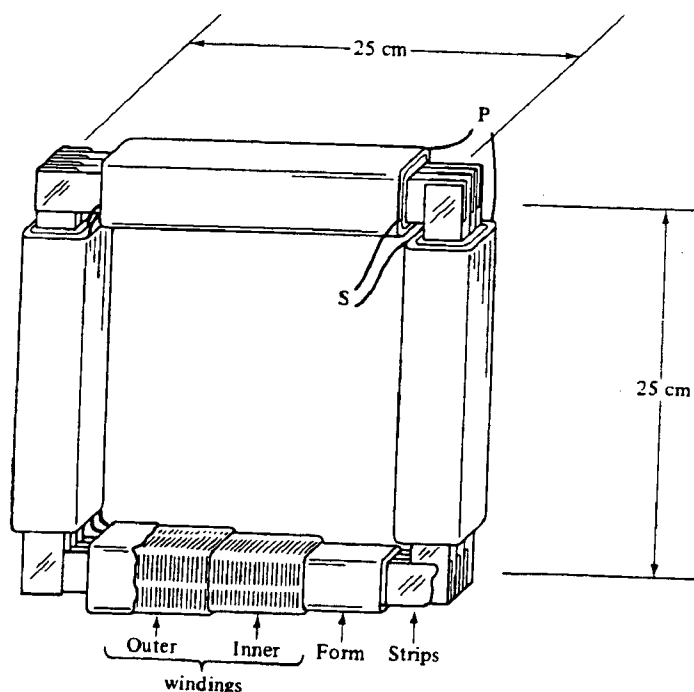


Figura 6.6 – Quadro de Epstein 25 cm

Nota-se que a geometria do quadro de Epstein assemelha-se ao de um transformador, de modo que as respostas das medidas obtidas são também similares ao comportamento do núcleo ferromagnético dos transformadores.

O quadro de Epstein utilizado é um transformador padrão tipo B-EP-25cm (MB 450, ABNT NBR5161/1977), da marca YOKOGAWA ELECTRIC WORKS LTDA

(1968), com o número de 700 espiras do enrolamento primário N_1 , o qual é igual ao do secundário N_2 . O caminho magnético médio ℓ_m é de 0,94 m e a resistência do enrolamento primário R é de 0,6914 Ω .

Os dados do pacote de lâminas utilizados nesta tese são (já considerando o fator de empilhamento):

- a) Espessura: 0,6 mm;
- b) Número de lâminas: 60
- c) Massa da amostra: 2243 g
- d) Seção magnética: $0,03 \times 0,01 = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- e) Profundidade: 0,01 m

6.2.1 – Solução analítica do sistema de equações.

Para o quadro de Epstein 25 cm, considera-se

$$\ell_m = 0,94 \text{ m}$$

$$S_m = 0,03 \times 0,01 \text{ m}^2$$

Com a equação de Ampère, escreve-se:

$$H(t) = H_H + H_{AN} = N \frac{i(t)}{\ell_m}$$

e usando a relação

$$B(t) = \mu_0 (H(t) + M(t))$$

acrescentando-se a equação de Faraday-Lenz, em termos de componentes discretos, obtém-se o seguinte sistema de equações, para $B(t)$ e $i(t)$:

$$\frac{B(t)}{\mu_0} - N \frac{i(t)}{\ell_m} = M(t)$$

onde,

$$NS_m \frac{dB(t)}{dt} + R i(t) = v(t)$$

$M(t)$ – magnetização no tempo, obtida a partir do modelo de magnetização do material, em função de $B(t)$, em A/m.

$B(t)$ – indução instantânea, em T.

$v(t)$ – tensão instantânea nos terminais do enrolamento (106 V).

$i(t)$ – corrente instantânea, em A.

F=frequência (60 Hertz)

N – número de espiras (700)

R – resistência elétrica do enrolamento, em Ω .

Este sistema pode ser resolvido para $B(t)$ e $i(t)$, iterativamente usando aproximações sucessivas ou Newton-Raphson, e seus resultados podem ser confrontados com os do cálculo de campo usando o método de Elementos Finitos. A Fig. 6.7 apresenta os resultados da solução analítica do sistema de equações (método de aproximações sucessivas).

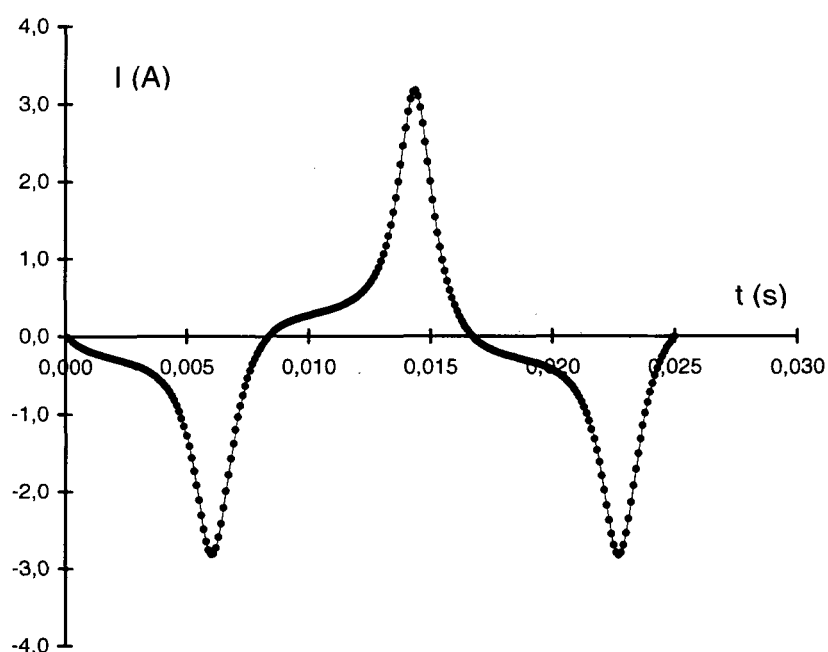


Figura 6.7 – Corrente (cálculo analítico)

6.2.2 – Dados experimentais

O ensaio segue o procedimento padronizado por norma, consistindo da obtenção de dados de tensão e corrente nos enrolamentos de um transformador, cujo núcleo é montado com lâminas de ferro-silício. A Figura 6.8 apresenta o esquema básico desta experiência.

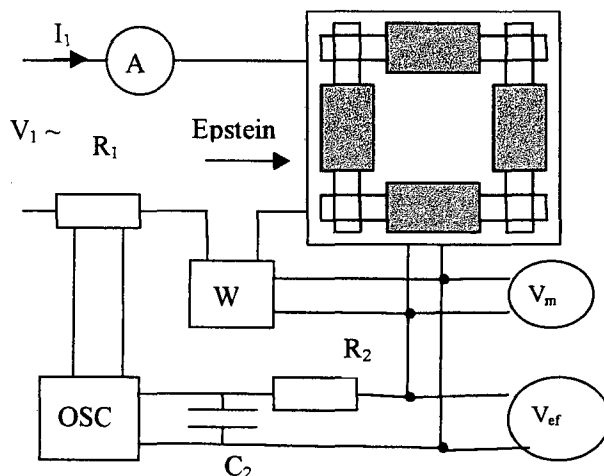


Figura 6.8 – Ligação do Quadro de Epstein.

A resistência R_1 ($20 \text{ m}\Omega$) é um derivador (shunt) para medição da corrente instantânea. A resistência R_2 ($82 \text{ k}\Omega$) e a capacitância C_2 ($10\mu\text{F}$) formam um integrador para obter o fluxo a partir da tensão induzida. Pela norma deve-se utilizar um voltímetro de valor médio (bobina móvel) e um voltímetro de valor eficaz (ferro móvel ou eletrodinâmico).

Os objetivos para este ensaio são:

- medir a corrente, tensão e potência em corrente alternada
- obter o laço de histerese utilizando integrador tipo RC
- fazer aquisição de tensão e corrente para análise das formas de onda

Mediu-se a corrente e a tensão em 60 Hz. A Tabela 6.1 apresenta um resumo dos resultados.

Tabela 6.1 – Dados experimentais referentes ao ensaio de Epstein.

V_1 prim. (V)	I_1 prim. (A)	W prim. (W)	V méd. (V)	V efic. (V)	W^* sec (W)
50	0,2	1	51	50	-
65	0,52	2	65	64	2,0
75	1,36	3	74,5	74,5	2,5
85	4,4	3,5	82	84	5,5
90	6,6	9,0	85	88	4,0
94	9,0	13,5	88	92	4,5

Na Fig. 6.9, apresenta-se as curvas de tensão e corrente referentes a um ponto da Tabela. A tensão eficaz é de 75 V, e a corrente eficaz é 1.36 A. A potência do secundário (W^* sec.) é a potência medida com a corrente do primário e a tensão do secundário, representando as perdas somente do ferro.

Pode-se ver na Fig. 6.9, que o valor da corrente de pico é bem maior do que $\sqrt{2}$ vezes o valor eficaz porque sua forma de onda não é senoidal, mas possui componentes de terceira e quinta harmônicas bem acentuadas.

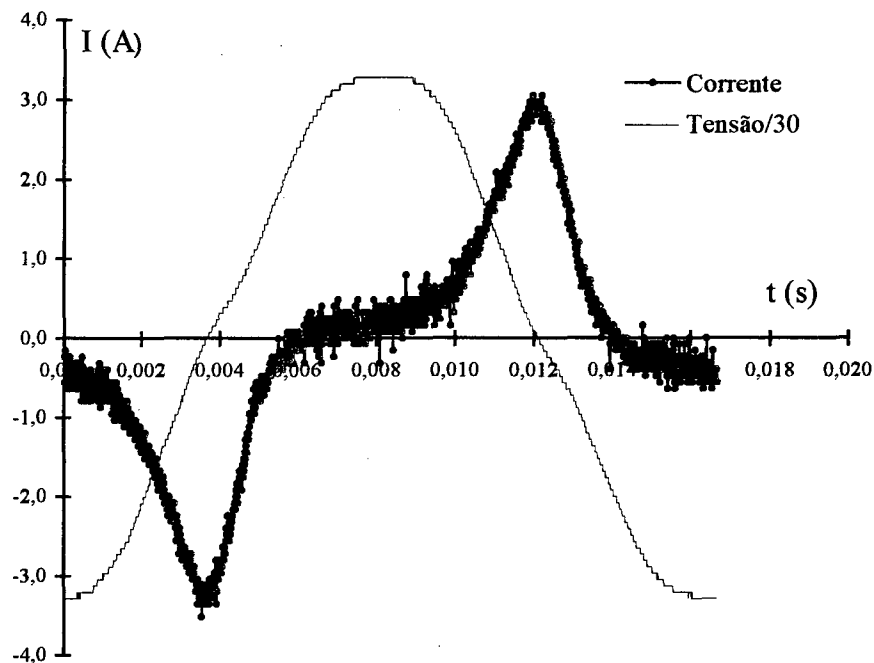


Figura 6.9 – Gráfico da tensão e corrente versus tempo experimentais

A figura 6.10, apresenta o gráfico do fluxo versus corrente referente aos dados de tensão e corrente obtidas experimentalmente

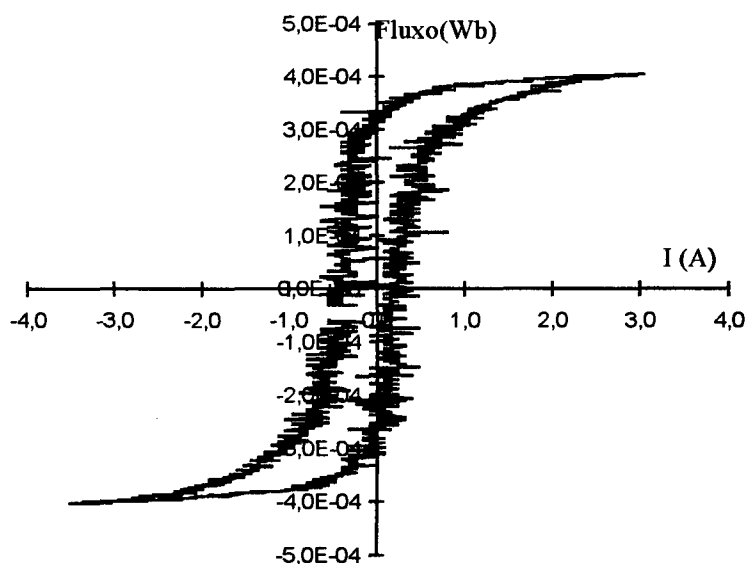


Figura 6.10 – Gráfico do fluxo versus corrente experimentais

6.2.3 – Simulações do Quadro de EPSTEIN

Apresenta-se na Fig. 6.11 a malha e o domínio de estudo de 1/4 do quadro de Epstein, indicando os elementos utilizados para análise, situados no canto e na coluna da estrutura (elementos 240 e 655 respectivamente).

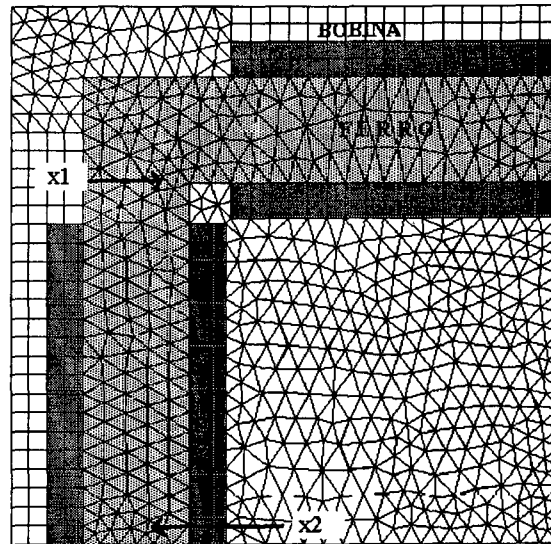


Fig. 6.11 - A malha e o domínio de estudo, 1/4 do quadro de Epstein.

Na figura 6.12 apresenta-se as curvas com e sem histerese que representam a modelagem do material utilizado para simulação. Os parâmetros utilizados para obtenção das mesmas foram: $M_s = 1120000 \text{ A/m}$; $a = 110,16 \text{ A/m}$; $\alpha = 0,0001433$, $H_{HS} = 270 \text{ A/m}$, $\gamma_H = 0,1525 \text{ T}$;

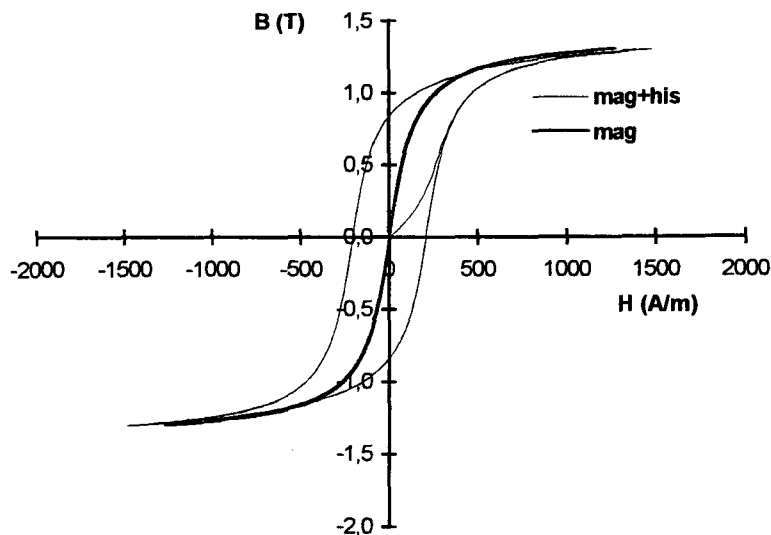


Figura 6.12 – Curva B-H com e sem histerese simuladas

Na Fig. 6.13 apresenta-se a curva de corrente simulada, com e sem histerese.

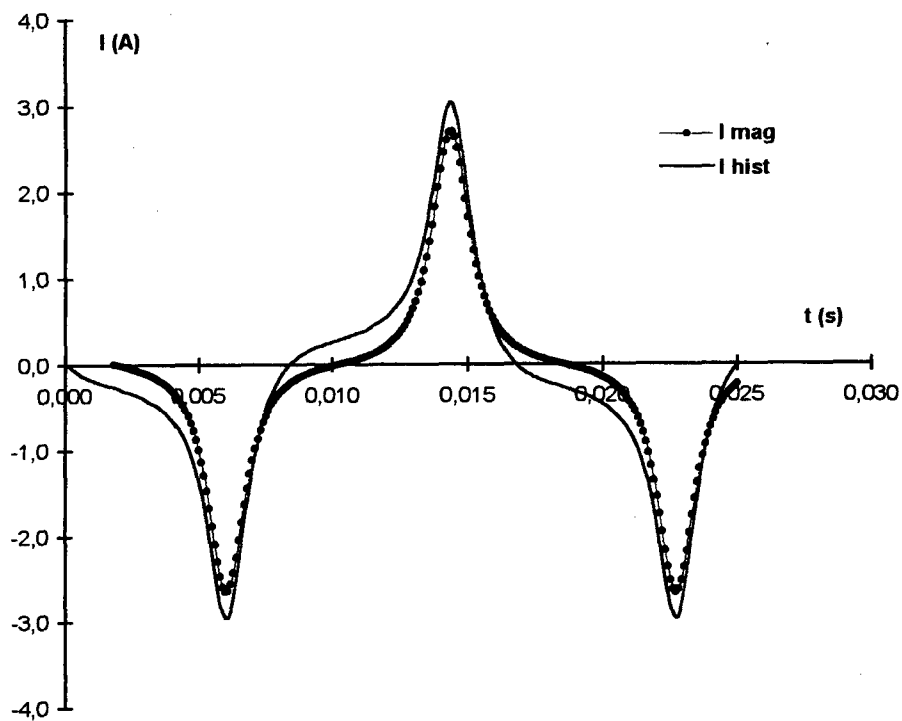
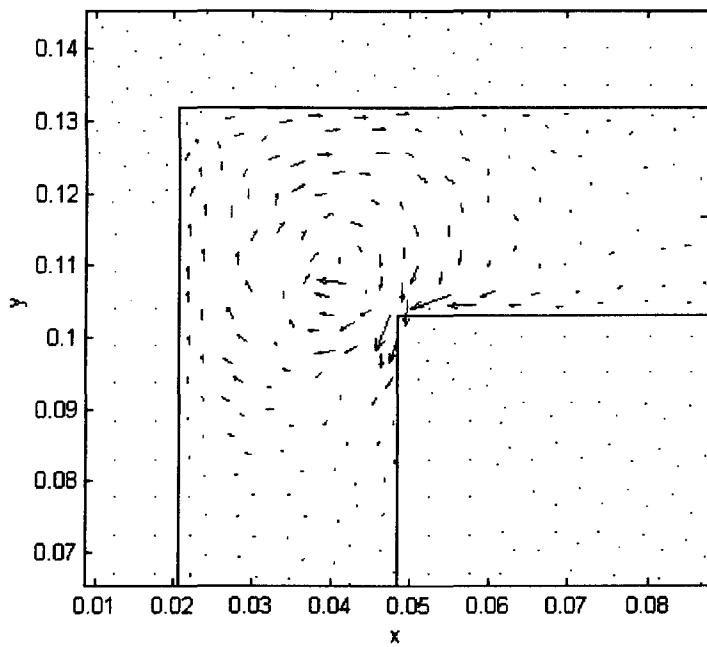
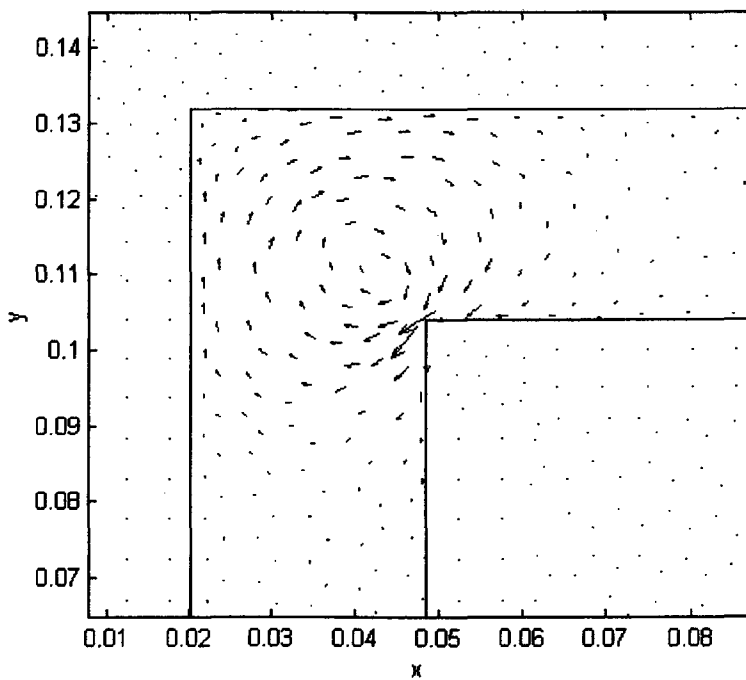


Fig. 6.13 – Correntes simuladas com e sem histerese

Considerando a estrutura do quadro de Epstein, também pode-se observar o comportamento dos vetores de campo, indução e magnetização, quando da passagem da corrente por zero. As Figs. 6.14 a 6.15 apresentam o comportamento dos vetores no canto.

Fig. 6.14 .- Vetores de Indução B Fig. 6.15 - Vetores de Magnetização M

Nas duas figuras apresentadas, percebe-se claramente que os vetores \mathbf{B} e \mathbf{M} , na região do canto, giram em torno de um ponto, onde os módulos dos vetores são maiores devido ao maior fluxo concentrado.

Dos resultados obtidos, conclui-se que:

- As equações de Maxwell são satisfeitas. O divergente de \mathbf{B} é igual a zero. O rotacional de \mathbf{H} é nulo porque o campo magnético nas colunas é nulo.
- A equação $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ também é satisfeita. Observa-se que estes vetores têm a mesma direção e sentido, mostrando que \mathbf{B}/μ_0 é a soma de $(\mathbf{H} + \mathbf{M})$.

Observa-se que a abordagem usual com uma curva B-H simples dada por uma série de pontos, sem considerar a histerese, não pode ser comparada com este resultado, pois somente a histerese caracteriza a presença do magnetismo residual.

Toma-se dois elementos finitos “ x_1 ” e “ x_2 ” situados no canto e na coluna da estrutura, conforme apresentado na Fig. 6.11, observando-os durante um período em que se efetua a simulação com corrente, obtendo-se os vetores de \mathbf{B} e \mathbf{H} do mesmo. Plotou-se o locus de \mathbf{B} e \mathbf{H} destes elemento nas Figs. 6.16 e 6.17.

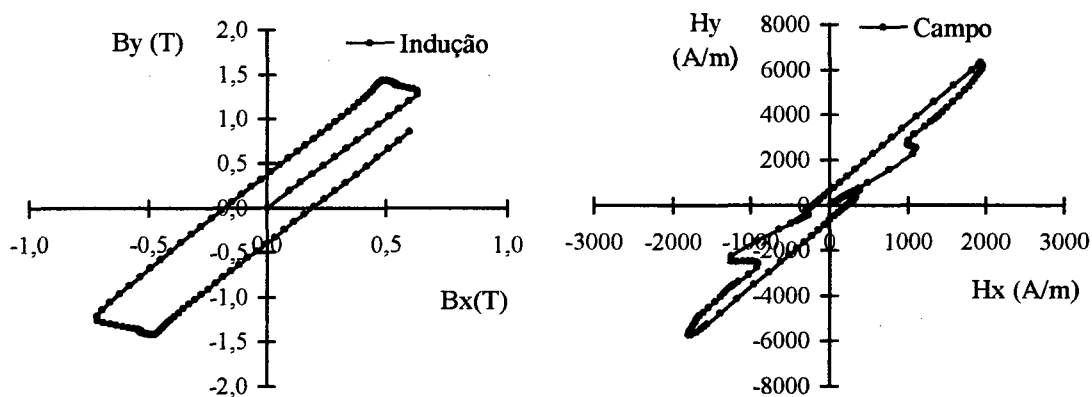


Figura 6.16 – Locus de \mathbf{B} e \mathbf{H} do elemento “ x_1 ” (0,0467;0,105) situado no canto

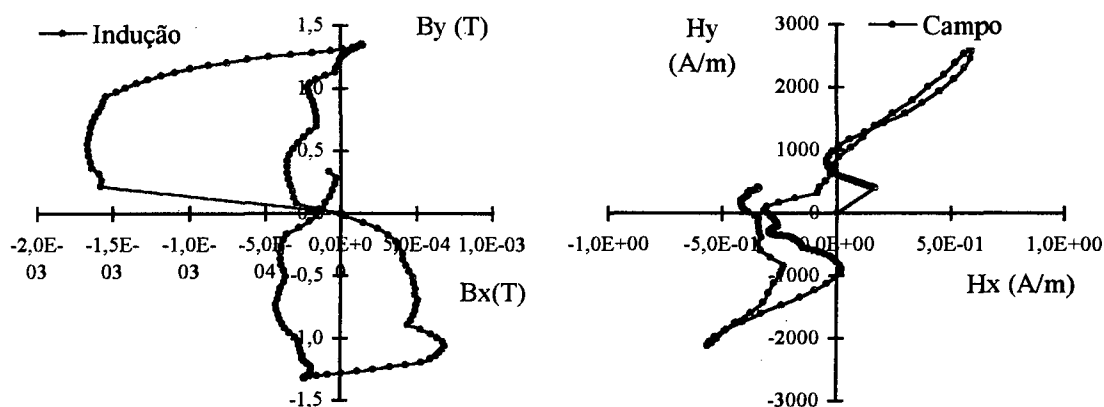


Figura 6.17 – Locus de B e H do elemento “x₂” (0,035;0,01) situado na base da coluna

Pode-se observar na Figuras 6.16 a presença mais acentuada da componente na direção “x” comparada à Fig. 6.17, onde a mesma é praticamente nula. Percebe-se no Locus de B e H, para o elemento próximo ao canto (“x₁”), um efeito de rotação das linhas de H e B. No elemento da coluna (“x₂”) o Locus de B e H resulta aproximadamente em uma reta (direção y). Isto significa que no primeiro caso a perda rotativa é mais acentuada, enquanto que no segundo a perda rotativa é inexistente (somente perda alternada).

As curvas menores observadas no Locus H_x , H_y do elemento do canto, não afetam a continuidade do campo, mas indicam que o mesmo sofre mudanças rápidas de direção e amplitude. Uma possível causa pode ser a saturação do material, pois no canto há maior concentração de linhas, ou ainda um erro numérico.

6.3 – Estrutura com duas bobinas defasadas - ROTOR

O objetivo do ensaio é auxiliar na modelagem do fenômeno de perdas por histerese rotativa e alternada, visando melhorar a compreensão da origem das perdas das máquinas elétricas rotativas e dos transformadores (regiões dos cantos).

Implementou-se um corpo de prova, a partir de uma estrutura de um rotor típico. Sobre as ranhuras do mesmo foram inseridos dois enrolamentos defasados espacialmente de 90° . Os enrolamentos foram alimentados com duas fontes defasadas de 90 graus elétricos, de modo a simular um campo girante de acordo com a topologia de um motor bifásico, analisando-se daí o comportamento da perda rotativa.

6.3.1 – Dados experimentais

Apresenta-se na Fig. 6.18 duas vistas do corpo de prova e na Fig. 6.19 um desenho esquemático do mesmo.

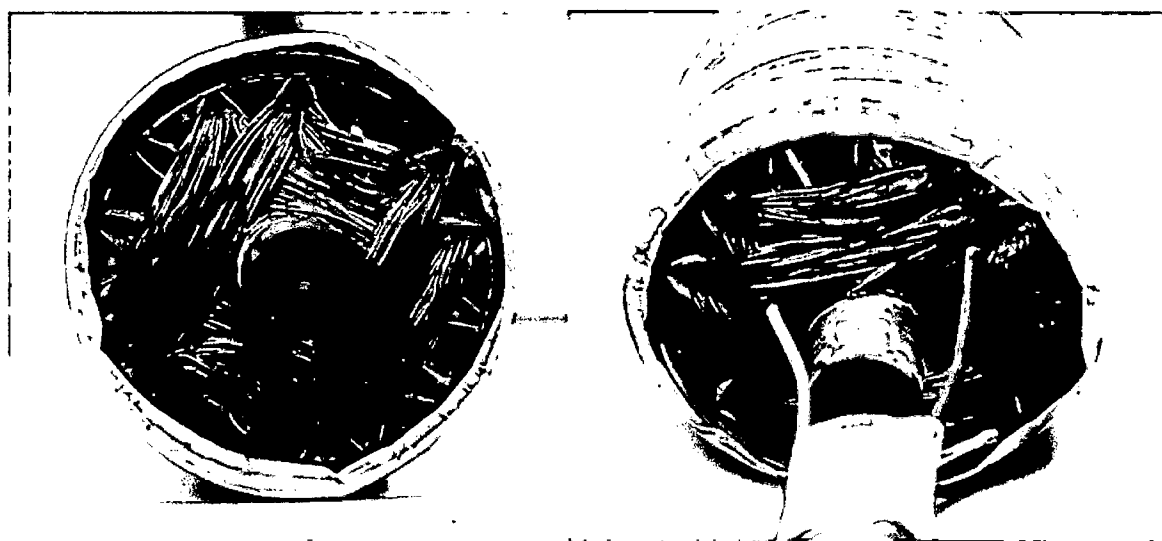


Fig. 6.18 - Estrutura de ferro cilíndrica com duas bobinas defasadas de 90° .

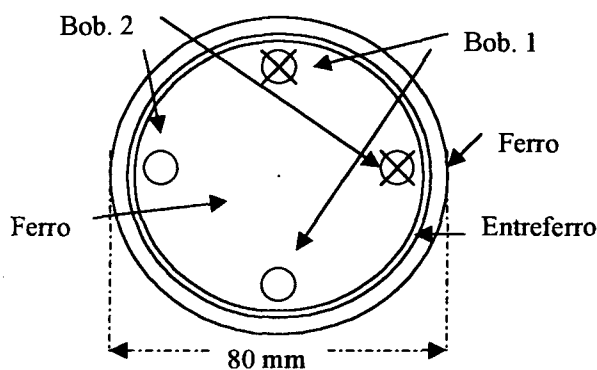


Fig. 6.19 - Diagrama esquemático da estrutura de teste

Procedimento experimental do rotor:

a) Alimentação senoidal com duas fontes de tensão em 110 V e 60 Hz defasadas de 90° elétricos. Obteve-se a mesma com um transformador trifásico ligado conforme a Fig. 6.20. Colocou-se dois resistores em série R_{S1} e R_{S2} para limitar a corrente de cada fonte respectivamente.

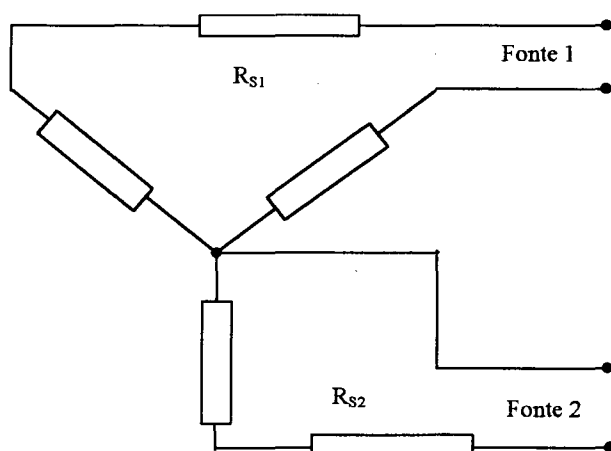


Fig. 6.20 – Ligação das fontes de tensão com resistência série para limitação de corrente.

b) Alimentou-se os dois enrolamentos da estrutura com estas fontes tendo-se as curvas de tensão e corrente mostradas nas Fig. 6.21 e 6.22, que foram capturadas com um osciloscópio digital TEKTRONIX da série TDS. Estes pontos também foram capturados usando-se uma interface serial RS 232, e salvas em arquivo no microcomputador, com software WAVE STAR da TEKTRONIX. Admitiu-se estas formas de onda porque não há necessidade de onda senoidal, e estas atendem aos objetivos da experiência.

A Fig. 6.21 apresenta a forma das tensões de excitação para as bobinas 1 e 2 respectivamente. A linha cheia corresponde aos valores referentes à bobina 1 (264 condutores). A linha tracejada é a tensão da bobina 2 (128 condutores).

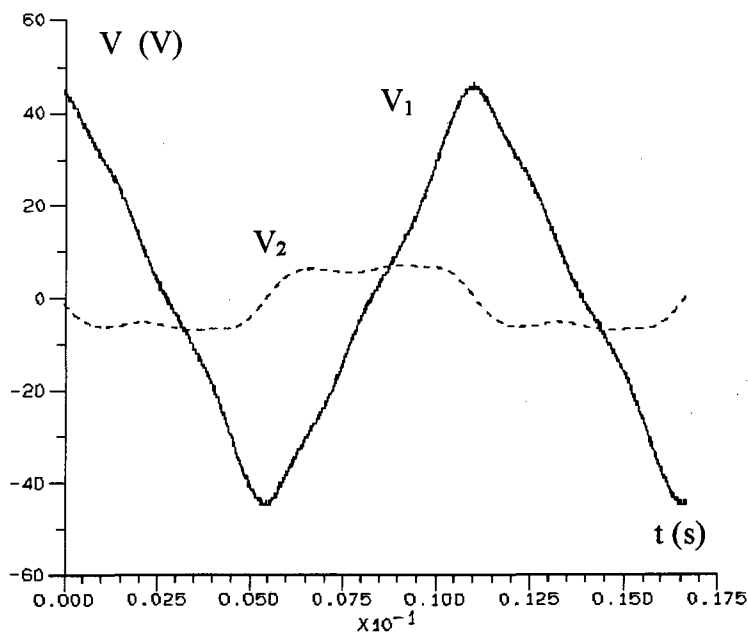


Figura 6.21 - a) Curva de Tensão x tempo: $V_1 \times t$ (Bobina 1) e $V_2 \times t$ (bobina 2) – Caso 2

Na Fig. 6.22, apresenta-se os resultados obtidos para as correntes referentes às bobinas 1 e 2 respectivamente.

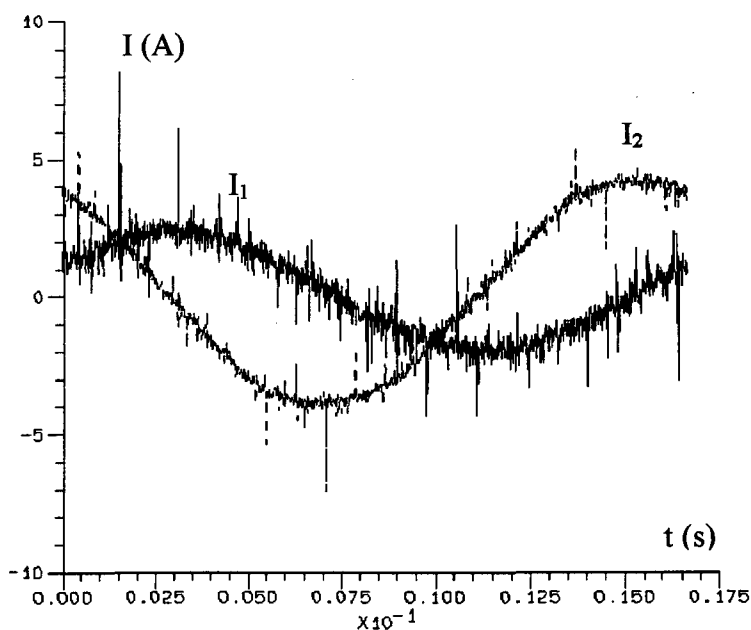


Fig. 6.22 - Curva de corrente x tempo: $I_1 \times t$ (bobina 1) e $I_2 \times t$ (Bobina 2) – Caso 2

c) Variando-se as resistências $RS1$ e $RS2$, foram efetuadas três medidas de tensões e correntes discriminados nos três casos descritos na Tabela 6.2.

Processou-se os dados de tensão e corrente, discretos no tempo, para obter os valores eficazes de tensão e corrente referente aos enrolamentos defasados 1 e 2 da estrutura cilíndrica, cujos resultados experimentais podem ser vistos na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Dados de três casos experimentais (valores eficazes).

Casos	1	2	3
Tensão 1 (V)	20,9 V	25,1 V	27,4 V
Corrente 1 (A)	2,3 A	2,45	3,35
Tensão 2 (V)	4,1 V	5,6 V	7,3 V
Corrente 2 (A)	1,7	2,50	3,5

d) Integrou-se as curvas de tensão num período de tempo, e calculou-se as respectivas curvas de fluxo x tempo, para cada enrolamento. A Fig. 6.23 (d) apresenta o locus de fluxo e corrente da estrutura. Para observar a defasagem entre o fluxo e a corrente, segmentou-se este período em quatro partes de 90 graus elétricos cada. Ver Figs. 6.23 (a), (b) e (c). Como o fluxo é equivalente à indução e a corrente é equivalente ao campo, pode-se dizer que a defasagem entre **B** e **H** é igual à defasagem de fluxo e corrente. Os vetores de **B** e **H** giram no sentido horário, e a corrente encontra-se sempre adiantada do fluxo. Pode-se observar visualmente na Fig. 6.23 a defasagem entre o campo e a indução magnética conforme indicado na Tabela 6.3.

Apresenta-se ϕ_x e ϕ_y , I_x e I_y (análogo a B_x e B_y ; H_x e H_y) para 4 situações progressivas de instantes de tempo, com vetores girando no sentido horário: (a) $T=\pi/2$ (b) $T=\pi$, (c) $T=3\pi/2$, (d) $T=2\pi$, indicando o ângulo de defasamento entre os mesmos.

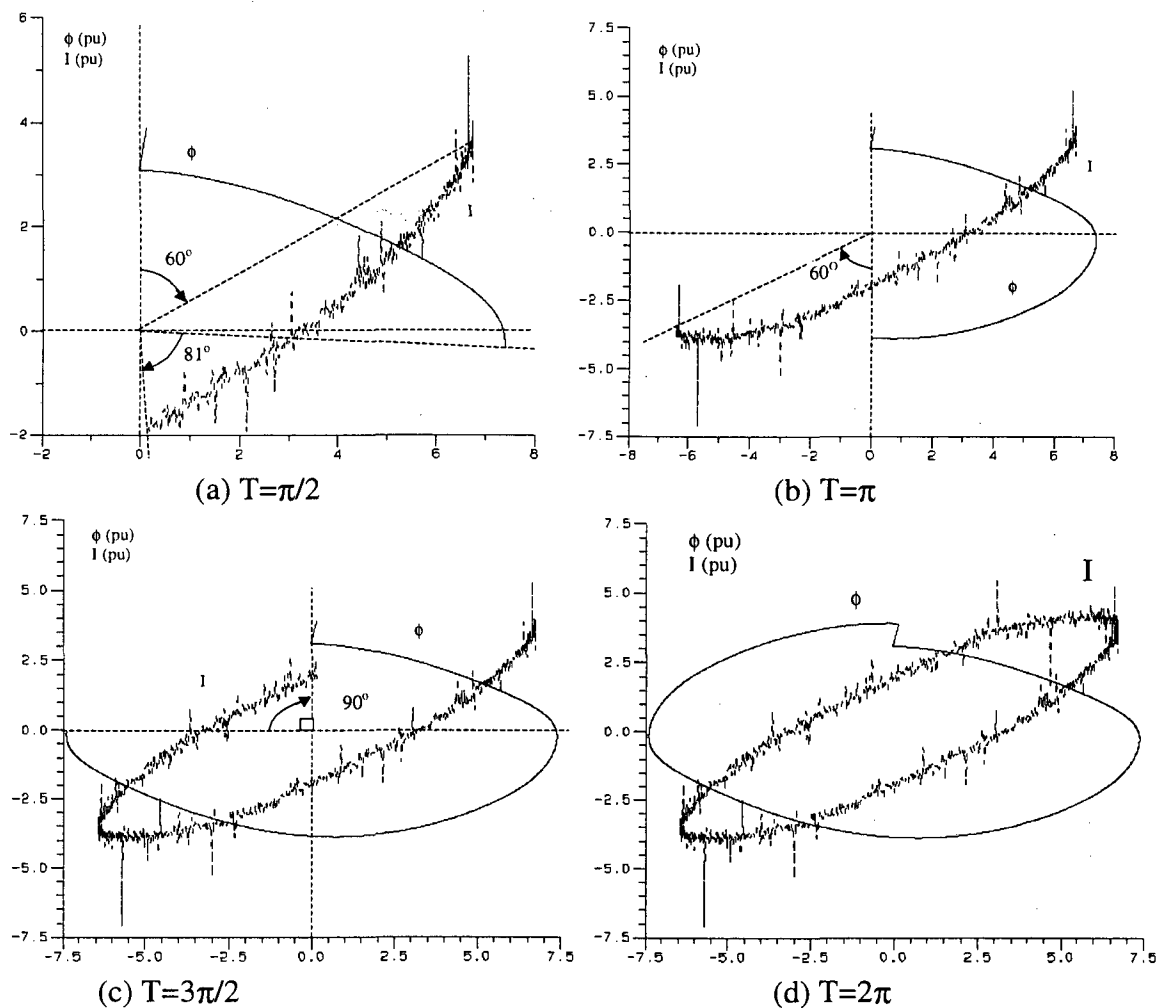


Figura.6.23- Valores experimentais de ϕ_x e ϕ_y , I_x e I_y para quatro instantes de tempo.

Tabela 6.3 - Ângulos de defasagem observados na Fig. 6.23

Ângulo do Fluxo	Defasagem Fluxo x corrente
90°	81
180°	60
270°	90
360°	60

e) Multiplicando a tensão pela corrente instantânea de cada enrolamento tem-se a potência instantânea. Integrando-se a potência num período tem-se a energia absorvida pela estrutura por intermédio de cada enrolamento. Como a soma das energias absorvidas pelos dois enrolamentos é a perda total, pode-se calcular a perda experimental apresentada na Tabela 6.5 para os três casos estudados. Com estes resultados experimentais não se pode discriminar ou separar as perdas rotativa e alternada, mas apenas indicar a total. Esta separação somente poderá ser feita via simulação.

6.3.2 – Simulações da Estrutura – Rotor com duas bobinas defasadas

Nas Figs. 6.24 e 6.25 apresentam-se a malha e o domínio da estrutura de teste e carta de campo obtido pelo Software EFCAD, alimentada em tensão.

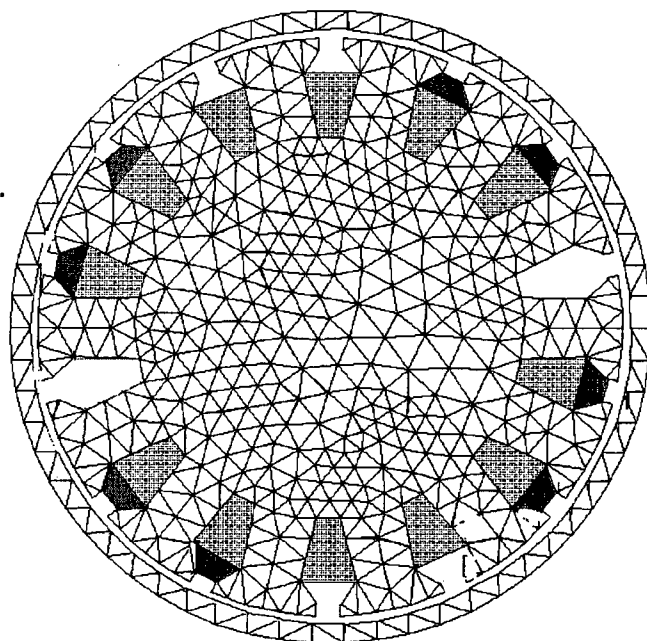


Fig. 6.24 - A malha e o domínio

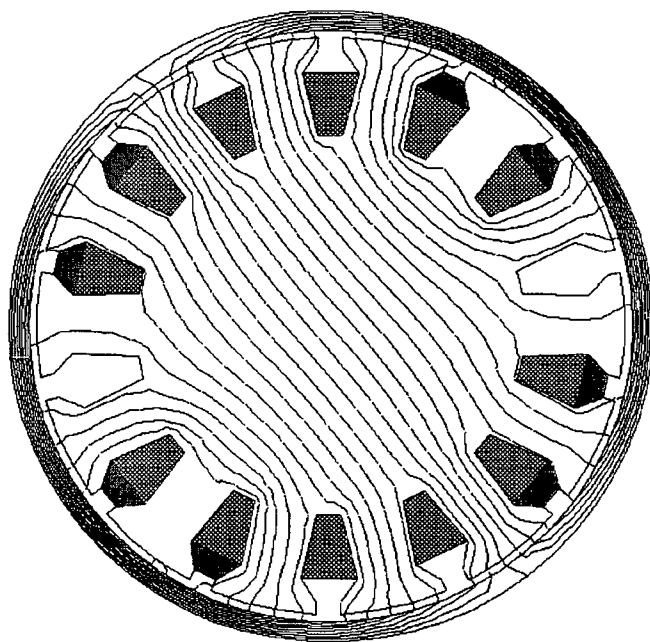
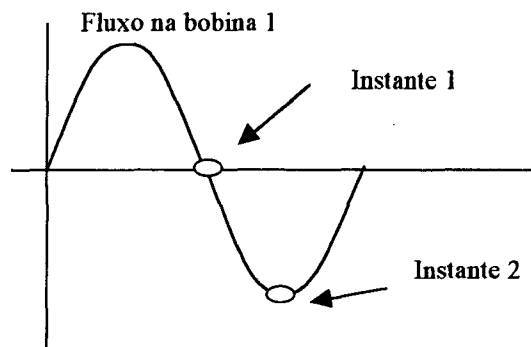


Fig. 6.25 – Linhas de fluxo – eixo polar

Nas figuras 6.26, 6.27, 6.28 e 6.29, são apresentados os resultados simulados em dois instantes (Fig. 6.26a), para as variáveis do campo, indução e magnetização, obtidos a partir do Software MATLAB.



(a) Detalhe instante de tempo

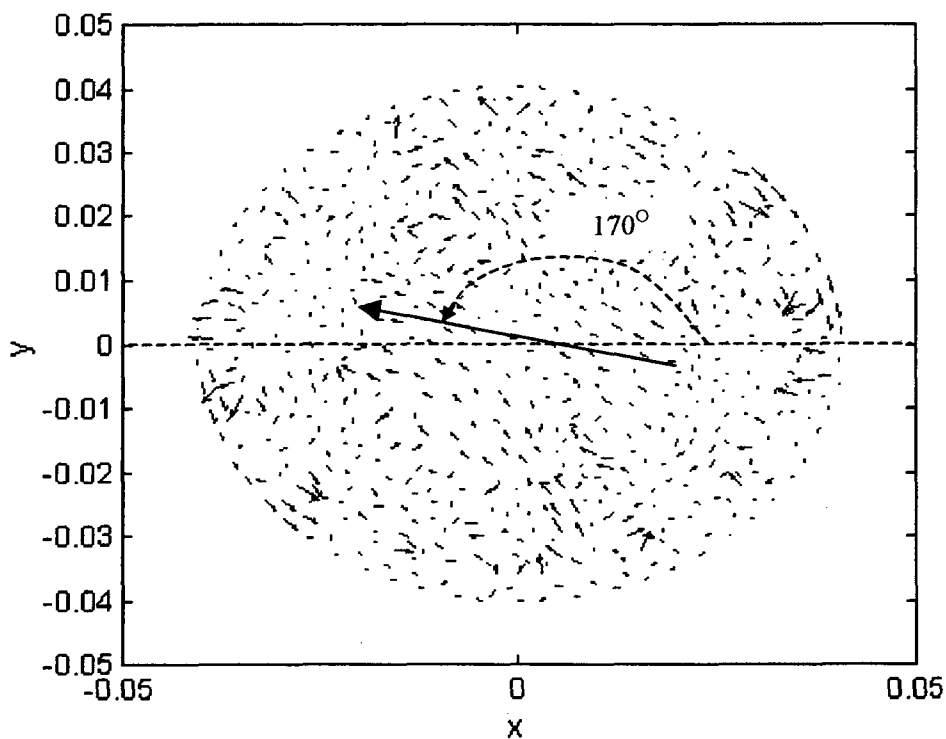


Fig. 6.26 (b) - Vetores de Campo simulados no instante 1 – ângulo do eixo polar

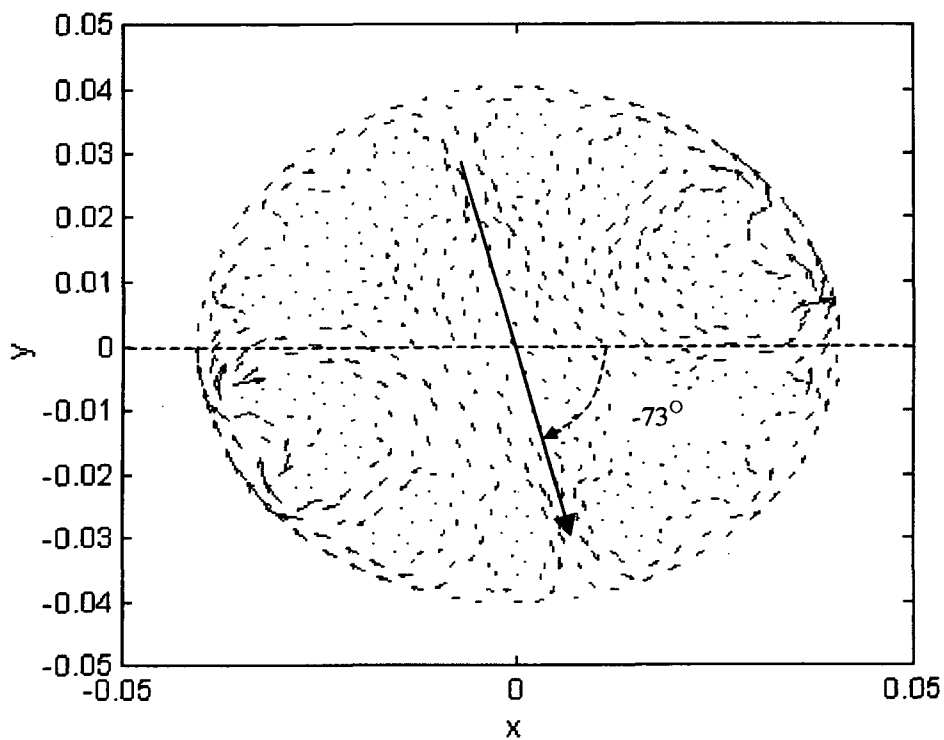


Fig. 6.27 - Vetores de Indução simulados no instante 1 – ângulo do eixo polar

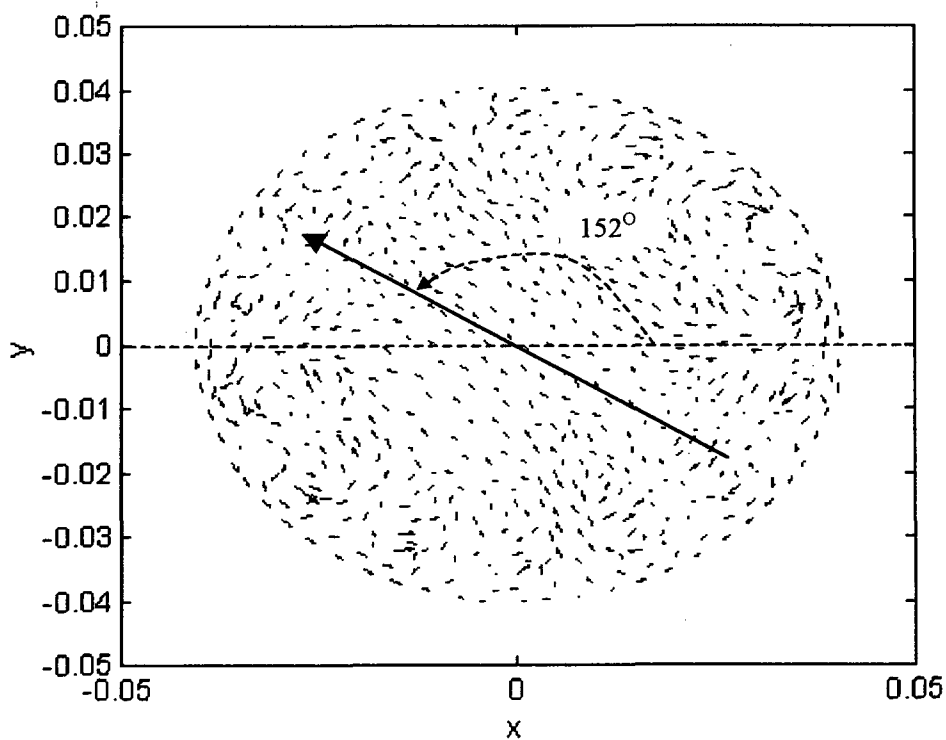


Figura 6.28 - Vetores de campo simulados no instante 2 – ângulo do eixo polar

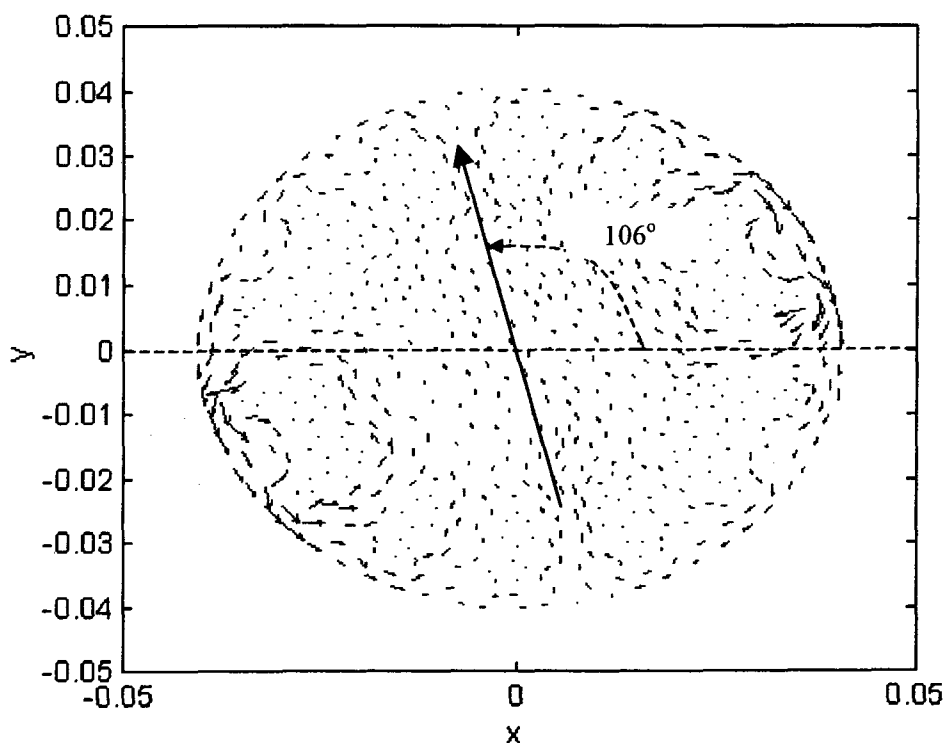


Figura 6.29 - Vetores de Indução simulados no instante 2 – ângulo do eixo polar

6.3.3 – Resumo comparativo e análise dos Resultados

Apresenta-se na Tabela 6.4 os ângulos de defasagem entre os vetores **H** e **B**. Os ângulos simulados são os ângulos obtidos pelas figuras 6.26 a 6.29. Analisando-se a Tab. 6.4 pode-se observar uma diferença média entre os valores simulados e experimentais na ordem de 20 %. Estima-se que esta discrepância, seja decorrente da medida (obtidos visualmente com um transferidor) e pela dificuldade de observação do eixo de formação dos pólos.

Tabela 6.4 - Análise dos ângulos de defasagem.

	Ângulo de H	Ângulo de B	Difer. Simul.	Exper.	Difer.	%
90°	170	73	97	81	-16	-19,75
180°	152	106	46	60	14	23,33
270°	170	73	97	90	-7	-7,77
360°	152	106	46	60	14	23,33
					Média	18,5

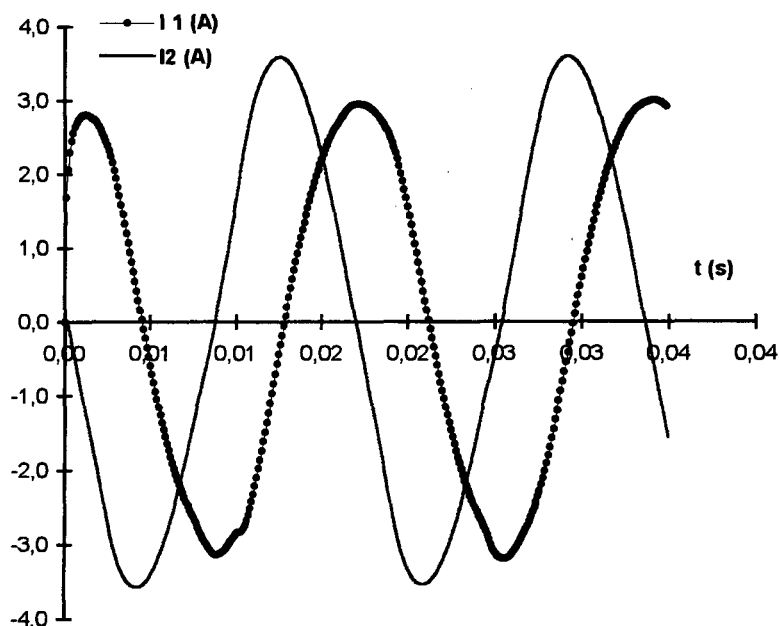
Apresenta-se na Tabela 6.5 um resumo das perdas nos três casos discriminados na Tabela 6.2. Observa-se relativa concordância entre os valores de perdas simulados e medidos, denotando um satisfatório desempenho do modelo desenvolvido para modelagem da histerese rotativa e alternada.

Tabela 6.5 - Perdas medidas e calculadas (em W).

Casos	1	2	3
Simulado			
Alternada	48,92	53,84	64,11
Rotacional	10,87	13,33	14,86
Total simulada	59,79	67,17	78,97
Experimental			
Medida Bobina 1	54,88	63,39	71,38
Medida Bobina 2	3,75	7,64	8,00
Total experimental	58,63	71,03	79,38
Diferença	1,16	3,86	0,41
%	-1,97	5,43	0,51

Para compreensão dos resultados da tabela acima, pode-se separar a estrutura em duas partes: núcleo e coroa. A indução nos elementos da coroa é muito maior do que a do núcleo. Como era desejado a visualização da estrutura total, e por particularidades do malhador (EFCAD), não foi possível aumentar a espessura da coroa. Em consequência disso, as perdas na coroa são bem maiores do que no núcleo, e são de natureza alternada (vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} variam na mesma direção). Apesar deste resultado quantitativo, pode-se observar claramente a presença das perdas rotativas, tanto na tabela anterior como pela análise gráfica feita anteriormente.

Na Fig. 6.30, apresenta-se as curvas de correntes das bobinas 1 e 2 obtidas para o caso 2. Comparativamente à Fig. 6.22, pode-se concluir que as curvas apresentam boa concordância.

Figura 6.30 - Curva de corrente x tempo: $I_1 \times t$ (bobina 1) e $I_2 \times t$ (Bobina 2) – Caso 2

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

7.1 – Principais contribuições e conclusões

Inicialmente, conceituou-se a histerese quanto à teoria dos domínios:

- a) rotação dos domínios - processo reversível (curva sem histerese– função de Langevin apresentada no capítulo III).
- b) deslocamento irreversível das paredes dos domínios (curva com histerese também considerada no capítulo III);

Entre as várias funções para representação da curva de magnetização sem histerese, optou-se neste trabalho pela função de Langevin. A função de Langevin tem sido adotada, devido a mesma trabalhar satisfatoriamente em um grande número de casos, sendo no entanto aplicada somente para materiais isotrópicos, apresentando bons resultados para materiais moles.

O modelo de histerese é dado por uma única equação diferencial de H_H em função de B . O campo magnético total é dado pela soma do campo de histerese e do campo sem histerese. Observou-se que o modelo permite, variando os seus parâmetros, representar a variação de laços de histerese para os materiais magnéticos macios estudados.

Apresentou-se alguns conceitos e definições sobre as perdas rotativa e alternada, justificando a existência das mesmas para os casos uni e bidirecionais.

Classificou-se também as perdas quanto à orientação espacial do campo magnético:

- a) perda alternada (amplitude do campo variável, alternando em uma direção)
- b) perda rotativa (amplitude do campo constante, com direção variável no espaço)

Para a implementação da separação das perdas alternada e rotativa, foi desenvolvida metodologia utilizando um círculo circunscrito (Capítulo IV), formado a partir dos vetores da indução obtidos pela formulação potencial vetor magnético. Definiu-se então, os ângulos que foram usados para o cálculo do novo sistema de coordenadas e posterior cálculo do campo magnético total. Além do cálculo, a grande vantagem desta metodologia é a chamada única do modelo unidirecional de cálculo de campo em cada passo de tempo (variação de H_H somente no eixo x') para cada elemento. Esta questão é fundamental para a otimização do tempo de simulação e da convergência do processo iterativo (método de Newton-Raphson).

Apresentou-se, no Capítulo V, um novo procedimento para cálculo de campo combinando o método de elementos finitos com um modelo de histerese. Introduziu-se um modelo de cálculo numérico de campo magnético, a partir do método de elementos finitos através da formulação potencial vetor magnético usando a magnetização \mathbf{M} no vetor do lado direito do sistema. Observou-se que esta metodologia poderá ser uma opção muito importante para análise de máquinas e dispositivos eletromagnéticos, pois simplifica a montagem do sistema matricial, e permite modelar o material magnético sem usar a convencional permeabilidade, mas usando a equação que relaciona os três vetores do magnetismo (\mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M}). A formulação por elementos finitos é derivada dessa relação constitutiva, e o método de Newton-Raphson foi implementado para solução do sistema não linear. Um fator de relaxação foi introduzido para melhorar as características de convergência do método de Newton-Raphson, obtendo daí, redução no número de iterações e satisfatória convergência.

Apresentou-se no capítulo VI os resultados experimentais e simulados, para três estruturas: barra de ferro imantada, quadro de Epstein, e duas bobinas defasadas espacialmente de 90° . As principais conclusões são:

- a) A metodologia permite realizar o cálculo de campos por Elementos Finitos levando em consideração a histerese em duas dimensões (perdas rotativa e alternada);
- b) Os resultados obtidos para a barra de ferro imantada mostram que o modelo contempla a presença do divergente no campo magnético, que denota a presença de pólos magnéticos;
- c) Os principais resultados quantitativos de correntes e perdas foram analisados para o quadro de Epstein. Observou-se que as correntes e as perdas apresentaram boa concordância nos resultados obtidos. Nesta estrutura também observou-se o comportamento não convencional nas linhas de \mathbf{H} , \mathbf{B} e \mathbf{M} , nos cantos da estrutura, quando da passagem da corrente pelo zero;
- d) A estrutura com duas bobinas defasadas de 90° permitiu visualizar qualitativa e quantitativamente a defasagem entre os vetores \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} . Os resultados analítico e experimentais mostraram o mesmo comportamento, embora as diferenças nos ângulos de defasagem tenham sido da ordem de 20 % (em média).

Enfim, desenvolveu-se uma metodologia que permitiu calcular os campos magnéticos, considerando não linearidade e histerese, utilizando o método de elementos finitos em duas dimensões, incluídos no software EFCAD. Outros resultados práticos foram os modelos de magnetização com e sem histerese utilizando a indução magnética

como variável independente, que facilita a integração dos mesmos com programas de cálculo de campo em geral na formulação potencial vetor magnético.

7.2 – Sugestões para futuros trabalhos

As principais sugestões são:

- a) Implementar esta formulação em três dimensões;
- b) Considerar a anisotropia magnética;
- c) Acrescentar a perda clássica por correntes de Foucault e anômalas ou excedentes;
- d) Associar o modelo com conversores estáticos (circuitos acoplados);
- e) Usar a formulação para análise de dispositivos com partes móveis; e
- f) Aprimorar métodos experimentais para medida e avaliação dos resultados (uso de placa de aquisição de dados e ensaios a frequências suficientemente baixas).
- g) Utilização de outro corpo de prova para melhor análise quantitativa das perdas rotativas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT, Associação Brasileira de Normas Técnicas, **MB-450 (NBR 5161) Produtos Laminados planos para fins elétricos**. Brasil. 1977.
- ATALLAH, K, HOWE, D., “An improved method for predicting iron losses in brushless permanent magnet dc drives”, **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 28, No. 5, pp. 2997-2999, September 1992.
- ATALLAH, K., HOWE, D., “Calculation of the Rotational Power Loss in Electrical Steel Laminations from measured **H** and **B**”, **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 29, No. 6, pp. 3547-3549, November 1993.
- ATHERTON, D. L., SZPUNAR, B., SZPUNAR, J.A., “A new approach to Preisach Diagrams”, **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 23, No. 3, pp. 1856-1865, May 1987.
- BASTOS, J.P.A. **Eletromagnetismo e Cálculo de Campos**. Florianópolis, Editora da UFSC, 1996, 3ª Edição.
- BERGQVIST, A. J. “A simple Vector generalization of the Jiles-Atherton Model of Hysteresis”, **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 32, No. 5, pp. 4213-4215, September 1996.
- BERNARD, Y., MENDES, E., SANTANDREA, L., et al, “Détermination et intégration d'un modèle de Preisach inverse dans un calcul par éléments finis en potentiel vecteur”, 3^{ème} Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme – NUMELEC'2000, pp. 4-5, France, 2000.
- BERTOTTI, G. et al, “An improved estimation of iron losses in rotating electrical machines”, **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 27, No. 6, pp. 5007-5009, November 1991.
- BERTOTTI, G., “Dynamic generalization of the scalar Preisach model of hysteresis”, **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 28, pp. 2599-2601, 1992.

- BLOMBERG, D. S. and CASTELLI, V., "Reformulation of nonlinear integral magnetostatic equations for rapidly iterative convergence", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 21, No. 2, pp. 1174-1180, March 1985.
- BLOMBERG, D. S., "Implementation of MB algorithm for nonlinear magnetostatics", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 23, No. 6, pp. 3927-3928, November 1987.
- BRACHTENDORF, H. G., LAUR, R., "A Hysteresis Model for Hard Magnetic Core Materials", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 33, pp. 723-727, January 1997.
- CARPENTER, K. H., "A Differential Equation Approach to Minor Loops in the Jiles-Atherton Hysteresis Model", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 27, No. 6, pp. 4404-4406, November 1991.
- CHIAMPI, M., CHIARABAGLIO, D., REPETTO, M., "A Jiles-Atherton and Fixed-Point Combined Technique for Time Periodic Magnetic Field Problems with Hysteresis", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 31, No. 6, pp. 4306-4311, November 1995.
- CHIKAZUMI, S., CHARAP, S.H., **Physics of magnetism**, J. Wiley, 1964.
- CULLITY, B. D., **Introduction to magnetic materials**, Addison-Wessly, 1972.
- DAVIDSON, R.J. & CHARAP, S.H., " Combined vector hysteresis models and applications", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 32, no. 5, pp. 4198-4203, 1996.
- DELINCÉ, F., NICOLET, A., HENROTTE, F., et al, "Influence of Hysteresis on the Behaviour of coupled Finite Element – Electric Circuit Models", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 30, No. 5, pp. 3383-3386, September 1994.
- DELLA TORRE, E., OTI, J., KADAR, G., "Preisach modeling and reversible magnetization", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 26, No. 6, pp. 3052-3058, november 1990.
- DELLA TORRE, E., "A simplified Preisach modeling and reversible magnetization", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 26, No. 6, pp. 3052-3058, november 1990.

- ENOKIZONO, M., TODAKA, T., KANAO, S., "Two-dimensional Magnetic Properties of Silicon Steel Sheet Subjected to a Rotating Field", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 29, No. 6, pp. 3550-3552, November 1993.
- ENOKIZONO, M., YUKI, K., KANAO, S., "Magnetic field analysis by finite element method taking rotational hysteresis into account", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 30, pp. 3375-3378, 1994.
- FIORILLO, F. and RIETTO, A. M., "Rotational and Alternating energy loss vs. Magnetizing frequency in SiFe laminations", **Journal of Magnetism and Magnetic Materials** (1993), pp. 402-404.
- HORNBECK, R.W. **Numerical Methods**. Quantum Publishers, 1975.
- IDA, N., BASTOS, J.P.A., **Eletromagnetics and calculation of fields**, 2nd Edition, New York, Springer-Verlag, 1997, USA.
- IVÁNY, A. **Hysteresis Models in Electromagnetic Computation**, Akadémiai Kiadó, 1997, Budapest, Hungary.
- JILES, D. C., & ATHERTON, D. L., "Ferromagnetic Hysteresis", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 19, no. 5, pp. 2183-2185, september 1983.
- JILES, D. C., **Introduction to Magnetism and Magnetic Materials**, Chapman&Hall, 1991, New York, USA.
- JILES, D. C., THOELKE, J.B., DEVINE, M.K. "Numerical Determination of Hysteresis Parameters for the modeling of Magnetic Properties Using the Theory of Ferromagnetic Hysteresis", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 28, pp. 27-35, January 1992.
- KOLTERMANN, P.I., RIGHI, L.A., BASTOS, J.P.A., et al, Representação da Histerese através do Método de Jiles-Atherton modificado, **III Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo – Cbmag1998**, São Paulo, Brasil, Outubro 1998.

- KOLTERMANN, P.I., RIGHI, L.A., BASTOS, J.P.A., et al, A modified Jiles method for hysteresis computation including minor loops, **Physica B Condensed Matter**, Elsevier Science, vol. 275, n. 1-3, January 2000, pp. 233-237.
- KOLTERMANN, P.I., BASTOS, J.P.A., SADOWSKI, N., et al, An improved Non-linear FE Solution using Langevin function, **9TH BIENNIAL IEEE CONFERENCE ON ELECTROMAGNETIC FIELD COMPUTATION – CEFC-2000**, Milwaukee, Wisconsin, USA, June 2000.
- KOLTERMANN, P.I., BASTOS, J.P.A., SADOWSKI, N., et al, A non-linear FE Solution considering anhysteretic magnetization, **IV Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo – Cbmag2000**, Natal, Brasil, Novembro 2000.
- KOST, A., **Numerische Methoden in der Berechnung Elektromagnetischer Felder**, Springer Verlag, 1994, Berlin, Deutschland.
- KRAUS, J. D. & CARVER, K. P., **Eletromagnetismo**, Editora Guanabara Dois, 2nd Edição, 1978.
- KUO-PENG, P., SADOWSKI, N., BASTOS, J.P.A., et al, A general method for coupling static converters with electromagnetic structures. **IEEE Transactions on Magnetics.**, Vol. 33. N. 2, pp. 2004-2009, March 1997.
- LEE, J.H., KIM, J.C., HYUN, D.S., “Dynamic Characteristics Analysis of Synchronous Reluctance Motor considering saturation and Iron Loss by FEM”, **IEEE Transactions on Magnetics.** Vol. 34, No. 5, pp. 2629-2632, September 1998.
- LEDERER, D., IGARASHI, H., KOST, A., et al, “On the Parameter Identification na Application of the Jiles-Atherton Hysteresis Model for Numerical Modelling of Measured Characteristics”, **IEEE – CEFC**, Okayama, Japão, 1996.
- LEONARD, P. J., RODGER, D., KARAGULAR, T., et al, “Finite Element Modelling of Magnetic Hysteresis”, **IEEE Transactions on Magnetics.** Vol. 31, No. 3, pp. 1801-1804, May 1995.
- LIN, C.E., WEI, J.B., HUANG, C.L., et al, “A new Method for Representation of Hysteresis Loops”, **IEEE Trans. On Power Delivery**, Vol. 4, No. 1, pp. 413-419, January 1989.

- MAYERGOYZ, I. D. , FRIEDMAN, G., "Generalized Preisach Model of Hysteresis", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 24, No. 1, pp. 212-217, January 1988.
- MAYERGOYZ, I. D., **Mathematical Models of Hysteresis**, Springer-Verlag, 1991 – New York, USA.
- MURAMATSU, K., TAKAHASHI, N., NAKATA, T., et al, "3-D Time Periodic Finite Element Analysis of Magnetic Field in Non-Oriented Materials taking into account Hysteresis Characteristics", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 33, No. 2, pp. 1584-1587, March 1997.
- NAKATA, T., TAKAHASHI, N., KAWASE, Y., "Finite Element Analysis of Magnetic Fields taking into account Hysteresis characteristics", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 21, No. 5, pp. 1856-1858, September, 1985.
- NAN, X. and KEXUN, J., "Magnetic Field Analysis by Finite Element Method taking vector Hysteresis into account", Proceedings of the Second Chinese International Conference on Electrical Machines, **CICEM'95**, Hangzhou, China, pp. 658-661, September 1995.
- OSSART, F. and MEUNIER, G., "Results on modeling magnetic hysteresis using the finite-element method", **J. Appl. Phys.** 69(8), pp. 4835-4837, April 1991.
- PARK, G-S., HAHN, S-Y., LEE, K-S., et al, "Implementation of Hysteresis Characteristics using the Preisach Model with M-B Variables", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 29, No. 2, pp. 1542-1545, March 1993.
- PHILIPS, D. A., DUPRÉ, L.R., MELKEBEEK, J.A., "Comparison of Jiles and Preisach Hysteresis Models in Magnetodynamics", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 31, No. 6, pp. 3551-3553, November 1995.
- PLONUS, M. A. , **Applied Electromagnetics**, McGraw Hill, Tóquio, 1978, Japan.
- PRUSTY, S., RAO, M.V.S., "New Method for Predetermination of true saturation characteristics of transformers and Non-linear Reactors", **IEE Proc.** Vol. 127, No. 2, pp. 106-110, March 1980.

- REITZ, J.R., MILFORD, F.J., CHRISTY, R.W., **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. Tradução de Foundation of electromagnetic theory, 1960, por R.B.Sander. Editora Campus, 1982.
- RIGHI, L.A., KOLTERMANN, P.I., SADOWSKI, N., et al, "Non-Linear Magnetic Field Analysis by FEM using Langevin function", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 36, No. 4, pp. 1263-1266, Jul. 2000.
- RIVAS, J., ZAMARRÓ, J.M., MARTÍN, E., et al, "Simple approximation for Magnetization Curves and Hysteresis Loops", **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 17, No. 4, pp. 1498-1502, Jul. 1981.
- SADOWSKI, N. **Modélisation des Machines Électriques à Partir de la Résolution des Équations du Champ en Tenant Compte du Mouvement et du Circuit d’Alimentation (Logiciel EFCAD)**. Thèse de Doctorat de l’Institut National Polytechnique de Toulouse - 1993.
- SPIEGEL, R. MURRAY, **Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas Matemática**, Makron Books, 1992
- STONER, E. C. WOHLFARTH, E. P., "A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys", Reprinted in **IEEE Transactions on Magnetics**. Vol. 27, pp. 3475-3518, 1991.
- STOUT, M.B. **Basic Electrical Measurements**. Prentice-Hall, 1960.
- WIESEN, K. C., CHARAP, S.H., "A rotational vector Preisach model for unoriented media", **J. Appl. Phys.**, Vol. 67, No. 8, pp. 5367-5369, May 1990.