

**SERGIO RICARDO MASTER PENEDO**

**INTERPOLAÇÃO DE IMAGENS ATRAVÉS DA  
ANÁLISE DE REGULARIDADE BASEADA EM  
DECOMPOSIÇÃO WAVELET**

**FLORIANÓPOLIS  
2000**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**  
**ELÉTRICA**

**INTERPOLAÇÃO DE IMAGENS**  
**ATRAVÉS DA ANÁLISE DE**  
**REGULARIDADE BASEADA EM**  
**DECOMPOSIÇÃO WAVELET**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

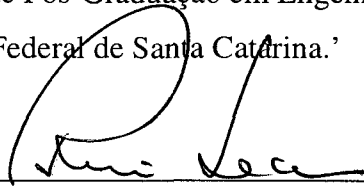
**SERGIO RICARDO MASTER PENEDO**

Florianópolis, Março de 2000

# INTERPOLAÇÃO DE IMAGENS ATRAVÉS DA ANÁLISE DE REGULARIDADE BASEADA EM DECOMPOSIÇÃO WAVELET

Sergio Ricardo Master Penedo

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração *Circuitos e Instrumentação Eletrônica*, e aprovada em sua forma final pelo PROGRAMA de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

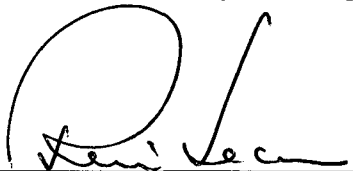


Prof. Rui Seara, Dr.  
Orientador



Prof. Ildemar Cassana Decker, D.Sc.  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

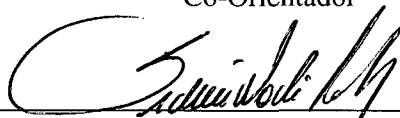
Banca Examinadora:



Prof. Rui Seara, Dr.  
Presidente



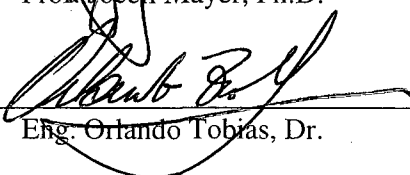
Prof. Carlos Aurélio Faria da Rocha, Dr.  
Co-Orientador



Prof. Sidnei Noceti Filho, D. Sc.



Prof. Joceli Mayer, Ph.D.



Eng. Orlando Tobias, Dr.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

# INTERPOLAÇÃO DE IMAGENS ATRAVÉS DA ANÁLISE DE REGULARIDADE BASEADA EM DECOMPOSIÇÃO WAVELET

**Sergio Ricardo Master Penedo**

Março/2000

Orientador: Prof. Rui Seara

Área de Concentração: Circuitos e Instrumentação Eletrônica.

Palavras-chave: Interpolação de Imagens, Decomposição Wavelet, Regularidade.

Número de Páginas: 67.

**RESUMO:** Este trabalho apresenta uma técnica de interpolação de imagens baseada na transformada *wavelet*. Métodos usuais de interpolação assumem que o sinal a ser interpolado seja uma função contínua, possuindo também uma ou mais derivadas contínuas. Tais considerações não são satisfeitas geralmente para imagens naturais, que apresentam variações bruscas de luminância nos limites entre os objetos. A suposição de continuidade da função de interpolação e suas derivadas produz imagens interpoladas com bordas excessivamente suavizadas. Para superar tal problema, introduz-se um método de interpolação baseado em *wavelets* que não impõe nenhuma limitação de continuidade. O algoritmo proposto estima a regularidade das bordas (medindo a função de decaimento dos coeficientes *wavelet* nas diferentes escalas de decomposição), objetivando preservá-la na extrapolação de uma nova sub-banda a ser utilizada na reconstrução da imagem. O algoritmo produz bordas notadamente mais nítidas do que técnicas clássicas utilizadas, como a bilinear e a cúbica, levando a uma sensível melhora da imagem interpolada tanto na razão sinal-ruído de pico (PSNR) quanto subjetivamente. Exemplos ilustram o desempenho e a eficiência do algoritmo proposto.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

# **IMAGE INTERPOLATION USING REGULARITY ANALYSIS BASED IN WAVELET DECOMPOSITION**

**Sergio Ricardo Master Penedo**

March/2000

Advisor: Prof. Rui Seara.

Area of Concentration: Circuits and Electronic Instrumentation.

Keywords: Image Interpolation, Wavelet Decomposition, Regularity

Number of Pages: 67.

**ABSTRACT:** This work presents a technique of image interpolation based on the wavelet transform. Usual methods of interpolation assume that the signal to be interpolated is a continuous function, possessing one or more continuous derivatives. Those considerations are not generally fulfilled for natural images, which present sharp variations of luminance at the object edges. The supposition of continuity of the interpolation function and its derivatives produces interpolated images with excessively smoothed edges. To overcome such a drawback, an interpolation method based on wavelets has been introduced, which does not impose any continuity restriction. The proposed algorithm estimates the regularity of the image edges (measuring the decay function of the wavelet coefficients in the different decomposition scales), aiming to preserve the regularity at the extrapolation of a new sub-band to be used in the image reconstruction. The algorithm produces sharper edges than conventional ones, like bilinear and cubic, leading to a considerable improvement of the interpolated image in both peak signal-to-noise ratio (PSNR) and subjective terms. Examples show the performance and effectiveness of the proposed algorithm.

"É melhor tentar e falhar, que se preocupar e ver a vida passar.  
É melhor tentar, ainda que em vão,  
que sentar-se fazendo nada até o final.  
Eu prefiro na chuva caminhar,  
que em dias tristes em casa me esconder.  
Prefiro ser feliz,  
embora louco,  
que em conformidade viver."

(Martin Luther King)

À minha mãe, que, mesmo passando por momentos difíceis de saúde, sempre reacendeu em mim o espírito de otimismo.

Ao meu pai, que sempre personificou o exemplo de luta em minha vida.

Ao meu avô Mauricio, onde estiver, que criou em mim o gosto pelo estudo.

Aos meus amigos, professores e colegas do LINSE, sem os quais não teria alcançado como queria meu objetivo.

A Elen Lobato, que com sua paciência e carinho sempre me incentivou a seguir em frente nos momentos em que eu achava que fosse esmorecer.

A Deus.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à orientação do Prof. Rui Seara, que com sua compreensão e caráter tornou prazerosa a realização desse trabalho.

A Elton Luiz Fontão, pela paciência e solidariedade prestadas durante o período.

À minha família, que mesmo distante me deu todo o incentivo para a realização de mais essa etapa em minha vida.

Ao LINSE, em toda a sua estrutura acadêmica/administrativa, que permitiu o êxito desse trabalho.

Aos meus amigos, presentes ou não, pela paciência durante todos esses anos.

A todos que ajudaram, da menor forma possível, durante a realização deste trabalho.



# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. INTERPOLAÇÃO DE SINAIS .....	4
2.1 INTRODUÇÃO.....	4
2.2 AMOSTRAGEM PERIÓDICA DE SINAIS .....	5
2.3 INTERPOLAÇÃO DE SINAIS DISCRETOS .....	10
2.4 AMOSTRAGEM E INTERPOLAÇÃO DE SINAIS BIDIMENSIONAIS .....	13
2.5 CONCLUSÕES .....	16
3. A TRANSFORMADA WAVELET .....	18
3.1 INTRODUÇÃO.....	18
3.2 MOTIVAÇÃO.....	19
3.3 TRANSFORMADA DE FOURIER JANELADA .....	20
3.4 WAVELETS .....	21
3.5 A TRANSFORMADA WAVELET .....	23
3.5.1 ANÁLISE E SÍNTESE .....	23
3.5.2 BANCOS DE FILTROS .....	24
3.6 ANÁLISE MULTI-RESOLUÇÃO.....	27
3.6.1 ESQUEMA PIRAMIDAL DE MULTI-RESOLUÇÃO .....	27
3.6.2 ESQUEMA DE CODIFICAÇÃO EM SUB-BANDA .....	28
3.6.3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA USUAL .....	30
3.7 CONCLUSÕES .....	32
4. A REGULARIDADE DE HÖLDER .....	33
4.1 INTRODUÇÃO .....	33
4.2 REGULARIDADE E WAVELETS .....	33
4.2.1 ESTIMAÇÃO DA REGULARIDADE DE HÖLDER .....	35
4.2.2 CORRELAÇÃO ENTRE ESCALAS .....	36
4.3 CONCLUSÕES .....	37
5. INTERPOLAÇÃO DE IMAGENS VIA PRESERVAÇÃO DE REGULARIDADE .....	38
5.1 INTRODUÇÃO .....	38
5.2 INTERPOLAÇÃO DE IMAGENS .....	39
5.2.1 DETECÇÃO DE BORDAS EM MULTI-ESCALA .....	41
5.2.2 CÁLCULO DA TW NÃO-DIZIMADA DA IMAGEM .....	44
5.2.3 SELEÇÃO DE BORDAS .....	45

5.2.4	EXTRAPOLAÇÃO DAS SUB-BANDAS VIA REGULARIDADE .....	46
5.2.5	EXTRAPOLAÇÃO DAS MAGNITUDE DOS COEFICIENTES .....	48
5.2.6	CRIAÇÃO DA SUB-BANDA .....	49
5.2.7	AJUSTE DA ETAPA DE DETECÇÃO DE BORDAS .....	50
5.3	CONCLUSÕES .....	50
6.	RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	51
7.	CONCLUSÕES .....	64
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	66

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1 - Sistema de amostragem. (a) Diagrama de blocos; (b) trem de impulsos periódicos modulados por $x_c(t)$ ; (c) seqüência discreta obtida na saída do sistema .....	6
Fig. 2.2 - (a) Espectro do sinal contínuo no tempo $x_c(t)$ , com largura de banda $\omega$ ; (b) Espectro do trem de impulsos; (c) Espectro do sinal amostrado $x_a(t)$ , com freqüência de amostragem $f_s \geq 2\omega$ ...	7
Fig. 2.3 - Filtro de reconstituição; (a) No domínio da freqüência; (b) No domínio do tempo .....	9
Fig. 2.4 - Diagrama de blocos de um sistema genérico para aumentara a taxa de amostragem .....	12
Fig. 2.5 - Interpolação no domínio da freqüência. (a) Espectro do sinal contínuo original; (b) Espectro do sinal amostrado com uma taxa $T_s$ ; (c) Espectro de sinal expandido; (d) Espectro do sinal interpolado para taxa $Lf_s = L/T_s$ .....	12
Fig. 2.6 - Trem de impulsos periódicos bidimensional, espaçados de $T_{s1}$ e $T_{s2}$ nas direções $p$ e $q$ , respectivamente .....	14
Fig. 3.1 - Localização tempo-freqüência: (a) máxima resolução no tempo; (b) máxima resolução na freqüência; (c) Boa resolução tempo-freqüência .....	20
Fig. 3.2 - Esquema Piramidal .....	28
Fig. 3.3 - Esquema de codificação em sub-bandas .....	29
Fig. 3.4 - Árvore de banco de filtros: cascadeamento do esquema de codificação em sub-bandas ...	31
Fig. 3.5 - Visualização tempo(espaço)-freqüência. (a) na STFT; (b) na TW .....	32
Fig. 4.1 - Diferentes escalas $s_n$ da transformada <i>wavelet</i> de uma borda em degrau .....	34
Fig. 4.2 - Banco de filtros da transformada <i>wavelet</i> diádica não-dizimada .....	36
Fig. 5.1 - Sistema genérico para redução de taxa de amostragem de um fator 2 .....	40
Fig. 5.2 - Diagrama em blocos do sistema interpolador unidimensional .....	41
Fig. 5.3 - Etapa de detecção de bordas .....	41
Fig. 5.4 - Cálculo da transformada <i>wavelet</i> não-dizimada .....	44
Fig. 5.5 - Etapa de seleção de bordas .....	45
Fig. 5.6 - Extrapolação de características correlacinnadas .....	46
Fig. 5.7 - Transporte de características correlacinnadas e convergentes a uma região de bordas ..	48
Fig. 5.8 - Cálculo da magnitude dos coeficientes .....	48
Fig. 5.9 - Reconstrução <i>wavelet</i> a partir da sub-banda estimada e do sinal de entrada .....	49
Fig. 6.1 - Resposta em freqüência do filtro PB anterior ao processo de interpolação .....	52
Fig. 6.2 - Procedimento para obtenção da imagem de bordas. ....	53
Fig. 6.3 - Imagens bordas: (a) anterior à verificação de convergência; (b) após a verificação de convergência .....	54
Fig. 6.4 - Imagens interpoladas – detalhes. (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto .....	55
Fig. 6.5 - Imagens interpoladas. (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto .....	57

<b>Fig. 6.6 – Imagens interpoladas (degradação – filtro PB <i>wavelet</i>). (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto .....</b>	<b>58</b>
<b>Fig. 6.7 - Imagens interpoladas - ‘Baboom’. (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto .....</b>	<b>60</b>
<b>Fig. 6.8 - Imagens interpoladas - ‘Peppers’. (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto .....</b>	<b>62</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Visão Global - Análise sobre intervalo de tempo maior .....	25
Tabela 3.2 - Visão Global - Análise do sinal $x(t)$ contraído .....	25
Tabela 6.1 - Valores de PSNR para a “Lenna” após a interpolação .....	56
Tabela 6.2 - PSNR para a imagem “Lenna” (degradação - filtro PB <i>wavelet</i> ) .....	59
Tabela 6.3 - Valores de PSNR para a imagem “Baboon” .....	61

## Capítulo 1

---

# INTRODUÇÃO

---

O processamento digital de imagens tem sido usado em diversas áreas comerciais e de pesquisas, tais como sensoriamento remoto via satélite que envolve a análise de imagens, com a finalidade de se fazer mapeamento geográfico, verificar crescimento urbano e demográfico, desmatamento, queimadas, etc.. Outras aplicações usuais se encontram na transmissão e armazenamento de imagens com aplicações comerciais, tais como televisão digital, teleconferência, fac-símile, redes de comunicação de computadores, digitalização de arquivos históricos, bibliotecas, processamento de imagens médicas, radar, sonar, robótica, inspeção industrial automatizada, enfim, uma infinidade de aplicações.

Nos últimos anos, devido principalmente à sua grande aplicabilidade, tem crescido significativamente o aparecimento de novas técnicas e algoritmos nas diversas áreas que envolvem processamento de imagens, tais como representação, modelagem, análise, restauração, codificação, compressão e interpolação. Em particular, a técnica de interpolação tem sido utilizada em diversas áreas científicas, possuindo grande aplicabilidade nas áreas de sistemas de comunicações; sistemas de radar; processamento digital de sinais de fala; processamento digital de imagens, em aplicações biológicas como por exemplo a análise detalhada de uma porção de imagem; e especificamente na adequação de imagens a variados suportes e no tratamento de imagens em computadores e estações gráficas.

Há vários métodos de interpolação usados para imagens, tais como interpolação bilinear, cúbica e *splines*. Contudo, em sua grande maioria tais técnicas operam no domínio espacial, o que torna seu desempenho totalmente dependente da imagem a ser interpolada. Além disso, tais métodos assumem a continuidade matemática do sinal a ser interpolado e de suas derivadas. Tais considerações não são geralmente verdadeiras para imagens naturais (imagens tomadas de cenas reais), que em sua grande maioria apresentam variações bruscas de luminância nos limites entre os objetos. Tais

imposições de continuidade na função de interpolação produzem imagens interpoladas com bordas excessivamente suavizadas, pois a suposição de se interpolar uma função com derivadas de alta-ordem contínuas conduz a bordas e texturas borradas, o que é facilmente notado e provoca certo desconforto visual.

A implementação da transformada discreta de Fourier (DFT) através de algoritmos computacionalmente eficientes, como a transformada rápida de Fourier (FFT), sugere a utilização dessa poderosa ferramenta na aplicação de interpolação. Além disso, é cada vez maior o número de aplicações em que é viável a utilização de processadores digitais de sinais (DSP) dedicados ao cálculo de transformações em frequência. Todavia, tal método apresenta erros nos extremos da seqüência a ser interpolada, justificando o desenvolvimento de otimização nesse sentido [1].

Rabiner e Gold [1] consideraram a utilização da DFT (FFT) na interpolação de sinais. Fraser [2] sugeriu sutis modificações e observa melhorias no desempenho da interpolação através da FFT, em relação à linear e à cúbica, no tocante ao erro de interpolação. Além disso, verifica que o erro de interpolação é crescente do centro para os extremos da seqüência de amostra, propondo o "janelamento" do sinal e a eliminação das amostras dos extremos da seqüência.

Cardoso [3] propôs a utilização de algoritmos genéticos ao problema da otimização de filtros bidimensionais não-lineares, baseados em redes neurais artificiais, para interpolação de imagens. Tal técnica, sobretudo, não apresenta desempenho satisfatório no tratamento de bordas, além de ser dependente da imagem a ser interpolada.

Carey *et al.* [4] propuseram um método de interpolação baseado em *wavelets*. Tal método não impõe nenhuma limitação de continuidade matemática, medindo o decaimento dos coeficientes *wavelet* em múltiplas escalas e preservando a regularidade de tais coeficientes. Esses coeficientes são usados para a determinação dos componentes de alta frequência a serem aproveitados na interpolação, uma vez que tais componentes são precariamente estimados em estratégias espaciais de interpolação. Todavia, tal técnica depende fortemente da existência de bordas horizontais e verticais bem-definidas, o que nem sempre é verificado, além de caracterizar de forma tímida regiões correspondentes a bordas, o que conduz a um protótipo de pontos de alta frequência relativamente fraco.

Este trabalho apresenta um método de interpolação de imagens também baseado na estimação do decaimento dos coeficientes *wavelet*, que aproveita o potencial dessa transformação em representar um sinal em várias escalas e resoluções, para conceber um algoritmo de interpolação que atinja resultados sensivelmente melhores do que os obtidos usualmente com técnicas espaciais e, sobretudo, que independa da imagem a ser interpolada. Além disso, produz bordas notadamente mais agudas do que outras técnicas baseadas em *wavelets*, pois busca preservar a regularidade de regiões bidimensionais de pontos de borda. A caracterização de prováveis pontos de alta frequência é mais cuidadosa, o que se reflete em melhora, em relação aos demais métodos, na razão sinal-ruído de pico (PSNR) e sobretudo em termos subjetivos.

O Capítulo 2 apresenta a teoria de interpolação de sinais, suas características e problemas de implementação. No Capítulo 3, faz-se uma descrição da transformada *wavelet*, discorrendo sobre suas principais propriedades e relações com a análise multi-resolução de Mallat. O Capítulo 4 apresenta o conceito de regularidade de Hölder e sua relação com a transformada *wavelet*. No Capítulo 5, é apresentado o método de interpolação proposto. No Capítulo 6, são mostrados resultados obtidos com o algoritmo proposto, comparativamente a métodos clássicos de interpolação. Finalmente, são apresentadas no Capítulo 7 as conclusões deste trabalho e sugestões para o desenvolvimento de novas pesquisas na área de interpolação de imagens.



## Capítulo 2

---

# INTERPOLAÇÃO DE SINAIS

---

### 2.1 - Introdução

A amostragem de sinais contínuos é um procedimento essencial em processamento digital de sinais, constituindo-se em representar e recuperar um sinal através de suas amostras discretas, seguindo determinados critérios. Dentre os vários tipos de amostragem discutidos na literatura, a forma mais usual é a amostragem uniforme (periódica) [5], na qual as amostras são uniformemente espaçadas de um período  $T_s$ , denominado *período de amostragem*; seu inverso,  $f_s = 1/T_s$ , é por definição a *freqüência de amostragem*. Contudo, para que uma função contínua seja completamente recuperada do seu sinal amostrado, a freqüência de amostragem  $f_s$  deve satisfazer ao critério de Nyquist, ou seja, ser maior ou igual ao dobro da largura de banda do sinal contínuo.

Em alguns casos, um sinal pode ser amostrado segundo um período de amostragem definido  $T_s$  e a seguir reamostrado com um período  $\hat{T}_s$ , de modo que o sinal resultante corresponda ainda ao mesmo sinal analógico. Em outros casos, pode ser mais eficiente ou conveniente trabalhar com diferentes freqüências de amostragem para um dado algoritmo de processamento de sinais, de modo que a taxa de amostragem do sinal seja convertida para diferentes valores durante o processamento.

O processo de conversão de uma freqüência de amostragem  $f_s$  para uma freqüência de amostragem maior  $\hat{f}_s$  é denominado *interpolação*, que corresponde à criação de novas amostras a partir de um conjunto inicial de amostras, podendo ser implementado por um procedimento de filtragem linear. As seções seguintes descrevem detalhadamente, nos domínios do tempo (espaço) e da freqüência, a operação de

interpolação, estabelecendo uma correspondência com os procedimentos de amostragem e reconstrução e apresentando limitações práticas de sua implementação.

## 2.2 - Amostragem Periódica de Sinais

Há vários tipos de amostragem de sinais. A amostragem periódica é a mais simples e a mais usada para representação de um sinal contínuo através de suas amostras, na qual uma seqüência de amostras  $\{x[n]\}$  é obtida de um sinal contínuo  $x_c(t)$  de acordo com a relação:

$$x[n] = x_c(nT_s), -\infty < n < \infty \quad (2.1)$$

onde  $T_s$  é o período de amostragem.

Um sistema que realiza a operação de amostragem é chamado de conversor contínuo/discreto (C/D). Na prática, no entanto, a operação de amostragem é feita por um conversor contínuo/discreto não-ideal. Na implementação de um conversor C/D, deve ser levado em conta o tipo de quantização das amostras de saída, linearidade, limitações da taxa de amostragem, etc.. É conveniente representar matematicamente o processo de amostragem em dois estágios: o primeiro consiste em modular um trem de impulsos, e o segundo em converter o trem de impulsos em uma seqüência discreta. A Fig.2.1(a) mostra o diagrama de blocos de um sistema de amostragem com dois estágios, onde  $g(t)$  representa um trem de impulsos,  $x_c(t)$  é o sinal contínuo a ser amostrado,  $x_a(t)$  representa o trem de impulsos modulado e  $x[n]$  a seqüência discreta obtida. A Fig. 2.1(b) ilustra um trem de pulsos periódico com período  $T_s$ , modulado por um sinal contínuo  $x_c(t)$ , e a Fig. 2.1(c) mostra a seqüência discreta  $x[n]$ , obtida pela conversão C/D a partir do trem de impulsos modulado.



Para se obter a representação em frequência do sinal  $x_a(t)$ , calcula-se a transformada de Fourier do trem de impulsos  $g(t)$ , dada por:

$$G(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right). \quad (2.5)$$

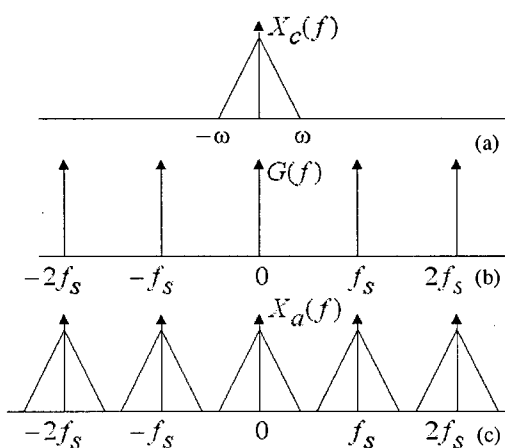
Aplicando-se a propriedade da transformada de Fourier na Eq. (2.3), que estabelece que um produto no tempo corresponde a uma convolução na frequência, obtém-se:

$$X_a(f) = X_c(f) * G(f) \quad (2.6)$$

onde "\*" é o operador de convolução. Substituindo-se (2.5) em (2.6), obtém-se [5]:

$$X_a(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(f - \frac{k}{T_s}\right). \quad (2.7)$$

A Eq. (2.7) mostra que a transformada de Fourier do sinal amostrado  $x_a(t)$  é igual à transformada de Fourier de  $x_c(t)$  periódica com período  $T_s$ . A Fig. 2.2 ilustra os passos para a obtenção do espectro do sinal amostrado.



**Fig. 2.2 - (a) Espectro do sinal contínuo no tempo  $x_c(t)$ , com largura de banda  $\omega$ ; (b) Espectro do trem de impulsos; (c) Espectro do sinal amostrado  $x_a(t)$ , com frequência de amostragem  $f_s \geq 2\omega$ .**

O teorema de Nyquist estabelece que, para se reconstruir um sinal de banda limitada a partir de suas amostras, é necessário que a frequência de amostragem  $f_s$  seja maior ou igual a duas vezes a largura de banda do sinal original, ou seja, se  $x_c(t)$  é um sinal de banda limitada com

$$X_c(f) = 0, |f| \geq \omega, \quad (2.8)$$

logo o sinal contínuo  $x_c(t)$  é unicamente determinado a partir de suas amostras  $x[n] = x_c(nT_s)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , se

$$f_s \geq 2\omega. \quad (2.9)$$

Para se reconstruir o sinal original de banda limitada a partir de suas amostras, é necessário filtrar o sinal amostrado com um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte entre  $\omega$  (a largura de banda do sinal  $x_c(t)$ ) e  $f_s - \omega$ . Se  $h_r(t)$  é a resposta ao impulso do filtro de reconstrução, o sinal reconstruído  $x_r(t)$  é dado por:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT_s). \quad (2.10)$$

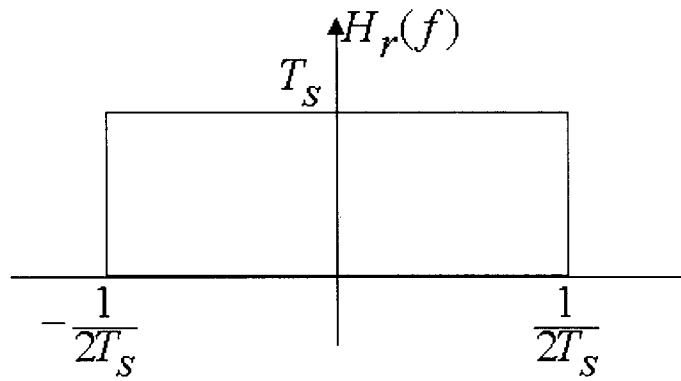
Escolhendo a largura do filtro de reconstrução como igual a  $B = f_s/2$ , tem-se, no domínio da frequência (assumindo-se que a conversão discreto/contínuo foi feita por um *sample-and-hold* de ordem zero):

$$H_r(f) = \begin{cases} T_s, & |f| \leq \frac{1}{2T_s} \\ 0, & |f| > \frac{1}{2T_s} \end{cases} \quad (2.11)$$

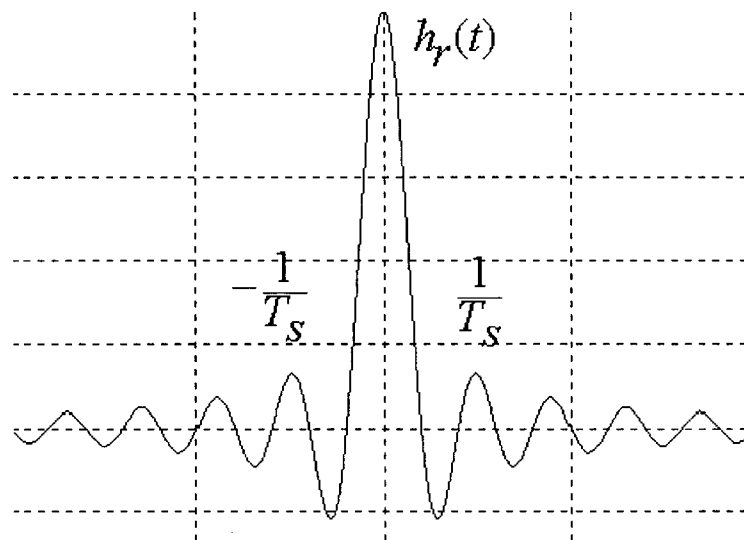
ou no domínio do tempo [5]:

$$h_r(t) = \text{sinc}(t/T_s) = \frac{\text{sen}(2\pi t/T_s)}{2\pi t/T_s}. \quad (2.12)$$

As Figs. 2.3(a) e 2.3(b) ilustram  $H_r(f)$  e  $h_r(t)$ , a resposta em frequência e a resposta ao impulso do filtro de reconstrução, respectivamente.



(a)



(b)

Fig. 2.3 - Filtro de reconstrução: (a) no domínio da frequência; (b) no domínio do tempo.

Substituindo (2.12) em (2.10), obtém-se:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\text{sen}[2\pi(t - nT_s)/T_s]}{2\pi(t - nT_s)/T_s}. \quad (2.13)$$

Assim, se  $x[n] = x_c(nT_s)$ , então:

$$x_r(mT_s) = x_c(mT_s) \Rightarrow x_r(t) = x_c(t). \quad (2.14)$$

### 2.3 - Interpolação de Sinais Discretos

Como visto na seção anterior, um sinal contínuo  $x_c(t)$  pode ser representado por um sinal discreto consistindo de uma seqüência de amostras:

$$x[n] = x_c(nT_s). \quad (2.15)$$

Algumas vezes é necessário alterar-se a taxa de amostragem de um sinal discreto, isto é, obter uma nova representação do sinal da forma:

$$\tilde{x}[n] = x_c(n\tilde{T}_s) \quad (2.16)$$

onde  $\tilde{T}_s < T_s$ . Obter  $\tilde{x}[n]$  de  $x[n]$  significa reconstruir  $x_c(t)$  a partir de  $x[n]$ , usando a Eq.(2.13), e amostrar-se novamente  $x_c(t)$  com o novo período de amostragem  $\tilde{T}_s$ , obtendo-se por fim o novo sinal discreto  $\tilde{x}[n]$ . Todavia, tal procedimento não é adequado, devido à não-realizabilidade do filtro de reconstrução equacionado na seção anterior. O processo cujo objetivo é aumentar a taxa de amostragem de um sinal é chamado de *interpolação*, uma vez que são criadas novas amostras do sinal a partir de um conjunto reduzido de amostras. Algoritmos de interpolação usuais são implementados usando-se

transformadas como a FFT, DCT (*Discrete Cosine Transform*), DST (*Discrete Sine Transform*), além do uso de filtros digitais FIR (*Finite Impulse Response*) e IIR (*Infinite Impulse Response*) [5].

A interpolação consiste em se obter um novo sinal com uma taxa de amostragem superior à taxa do sinal originalmente amostrado, isto é, o sinal interpolado  $x_i[n]$  é tal que:

$$x_i[n] = x_c[n\tilde{T}_s] = x_c[nT_s / L]. \quad (2.17)$$

A Fig. 2.4 mostra o diagrama de blocos de um interpolador genérico usado para a obtenção de uma seqüência discreta interpolada  $x_i[n]$  a partir de  $x[n]$ . O primeiro bloco da Fig. 2.4 é chamado de expansor da taxa de amostragem. O segundo bloco é um filtro passa-baixas com frequência de corte normalizada  $1/(2L)$  e ganho  $L$ . Assim, o sistema gera um trem de impulsos discreto  $x_e[n]$  que é passado através de um filtro passa-baixas para reconstruir a seqüência. A saída do expansor  $x_e[n]$  é dada por:

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L] & , n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & , \text{para outros valores} \end{cases} \quad (2.18)$$

ou igualmente:

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL]. \quad (2.19)$$

Tomando-se a transformada de Fourier de (2.19), obtém-se:

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-j2\pi fn} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi Lfk} = X(Lf). \quad (2.20)$$



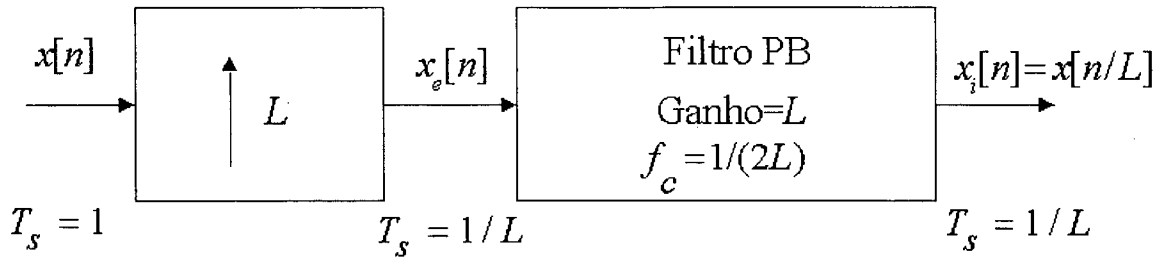


Fig. 2.4 - Diagrama de blocos de um sistema genérico para aumentar a taxa de amostragem.

A Fig. 2.5 mostra a obtenção de um sinal interpolado no domínio da frequência. Na Fig. 2.5(a), é mostrado o espectro de magnitude de um sinal contínuo  $x_c(t)$ , e na Fig. 2.5(b) é mostrado o espectro de magnitude do mesmo sinal, amostrado a uma taxa  $f_s = 1/T_s$ . A Fig. 2.5(c) mostra o espectro de magnitude do sinal expandido de acordo com a Eq. (2.20). Finalmente, a Fig. 2.5(d) mostra o espectro de magnitude do sinal interpolado, para uma nova taxa  $Lf_s = L/T_s$ , obtido pela filtragem do sinal expandido por um filtro passa-baixas ideal, com largura de banda  $B = \omega/L$ .

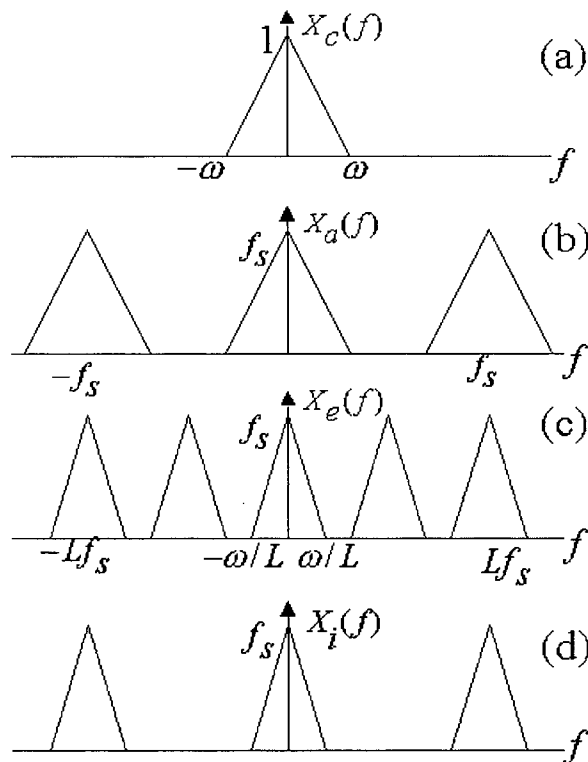


Fig. 2.5 - Interpolação no domínio da frequência. (a) Espectro do sinal contínuo original; (b) espectro do sinal amostrado a uma taxa  $T_s$ ; (c) espectro do sinal expandido; (d) espectro do sinal interpolado a uma taxa  $Lf_s = L/T_s$ .

## 2.4 - Amostragem e Interpolação de Sinais Bidimensionais

Quando uma imagem contínua  $x_c(x_1, x_2)$  é amostrada, as coordenadas  $(x_1, x_2)$  representam a posição no espaço e as amplitudes amostradas representam os níveis de cinza do sinal bidimensional. Para ilustrar a amostragem de sinais bidimensionais, considere-se uma imagem bidimensional de banda limitada, isto é, sua transformada de Fourier  $X(f_1, f_2)$  é tal que:

$$X(f_1, f_2) = 0, f_1 > \omega_1 \quad e \quad f_2 > \omega_2 \quad (2.23)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as larguras de banda da imagem bidimensional nas frequências  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente. Considere-se agora um trem de impulsos em duas dimensões,  $\delta_s(p, q)$ , sobre uma grade retangular espaçada de  $T_{s1}$  e  $T_{s2}$ , como mostra a Fig. 2.6, ou seja,

$$\delta_s(p, q) = \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} \delta(p - n_1 T_{s1}, q - n_2 T_{s2}). \quad (2.24)$$

Uma imagem amostrada  $x_s(p, q)$  é definida como:

$$x_s(p, q) = x_c(p, q) \cdot \delta_s(p, q) \quad (2.25)$$

$$x_s(p, q) = \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} x_c(n_1 T_{s1}, n_2 T_{s2}) \cdot \delta(p - n_1 T_{s1}, q - n_2 T_{s2}). \quad (2.26)$$

Calculando-se a transformada de Fourier de  $x_s(p, q)$ , obtém-se :

$$X_s(f_1, f_2) = f_{s1} f_{s2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} X_c(f_1 - n_1 f_{s1}, f_2 - n_2 f_{s2}) \quad (2.27)$$

ou, em função dos períodos de amostragem  $T_{s1}$  e  $T_{s2}$ ,

$$X_s(f_1, f_2) = \frac{1}{T_{s1}T_{s2}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} X_c\left(f_1 - \frac{n_1}{T_{s1}}, f_2 - \frac{n_2}{T_{s2}}\right) \quad (2.28)$$

onde  $f_{s1} = 1/T_{s1}$  e  $f_{s2} = 1/T_{s2}$ , e  $T_{s1}$  e  $T_{s2}$  são os períodos de amostragem nos eixos coordenados.

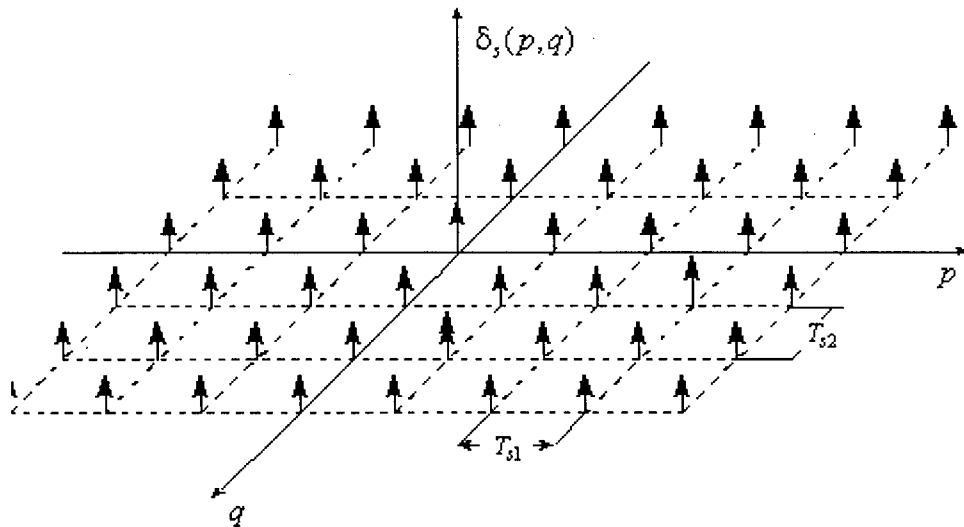


Fig. 2.6. Trem de impulsos periódico bidimensional, espaçados de  $T_{s1}$  e  $T_{s2}$  nas direções  $p$  e  $q$ , respectivamente.

O teorema da amostragem para sinais bidimensionais estabelece que, para se reconstruir uma imagem a partir de suas amostras é necessário, inicialmente, que a imagem não tenha nenhum componente diferente de zero acima de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  (limites de banda da imagem), conforme a Eq. (2.23). Em segundo lugar, as taxas de amostragem  $f_{s1}$  e  $f_{s2}$  devem obedecer aos seguintes critérios:

$$f_{s1} \geq 2\omega_1 \quad \text{e} \quad f_{s2} \geq 2\omega_2. \quad (2.29)$$

A reconstrução é feita usando-se um filtro passa-baixas ideal, com resposta em frequência  $H_r(f_1, f_2)$  e com frequências de corte  $\omega_1, \omega_2$ , ou seja,

$$H_r(f_1, f_2) = \begin{cases} T_{s1}T_{s2} & , |f_1| \leq \omega_1, |f_2| \leq \omega_2 \\ 0 & , \text{para outros valores} \end{cases} \quad (2.30)$$

Assim, a imagem reconstruída com espectro de frequências  $X_r(f_1, f_2)$  é obtida, passando-se a imagem amostrada por um filtro com resposta em frequência  $H_r(f_1, f_2)$ . A imagem reconstruída é representada no domínio da frequência pela equação:

$$X_r(f_1, f_2) = X_s(f_1, f_2) \cdot H_r(f_1, f_2). \quad (2.31)$$

No domínio espacial, tem-se [5]:

$$x_r(p, q) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \frac{\text{sen} \frac{\pi}{T_{s1}}(p - n_1 T_{s1}) \text{sen} \frac{\pi}{T_{s2}}(q - n_2 T_{s2})}{\frac{\pi}{T_{s1}}(p - n_1 T_{s1}) \frac{\pi}{T_{s2}}(q - n_2 T_{s2})}. \quad (2.32)$$

A imagem recuperada  $x_r(p, q)$  deve ser idêntica à imagem original  $x_c(p, q)$ , se a taxa de amostragem obedecer ao critério de Nyquist para sinais bidimensionais. Caso contrário,  $x_r(p, q)$  será uma versão de  $x_c(p, q)$  com superposição de espectro.

Consideremos agora uma seqüência bidimensional  $x[n_1, n_2]$  obtida por amostragem de uma seqüência analógica  $x_c(p, q)$ , isto é:

$$x[n_1, n_2] = x_c(p, q) \Big|_{p=n_1 T_{s1}, q=n_2 T_{s2}}. \quad (2.33)$$

Se  $x_c[p, q]$  é de banda limitada e as frequências de amostragem  $1/T_{s1}$  e  $1/T_{s2}$  são maiores ou iguais à frequência de Nyquist, o sinal bidimensional pode ser reconstruído filtrando-se o sinal amostrado  $x[n_1, n_2]$  com um filtro de reconstrução passa-baixas ideal de resposta ao impulso  $h_r(p, q)$ , ou seja:

$$x_r(p, q) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) h_r(p - n_1 T_{s1}, q - n_2 T_{s2}) \quad (2.34)$$

onde:

$$h_r(p, q) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{T_{s1}} p\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{T_{s2}} q\right)}{\left(\frac{\pi}{T_{s1}} p\right) \left(\frac{\pi}{T_{s2}} q\right)}. \quad (2.35)$$

O uso da Eq. (2.34) não é adequado para interpolação de imagens em termos práticos, já que o filtro de reconstrução não é estritamente de banda limitada. Assim, certamente ocorrerá superposição de espectro quando  $x_c(p, q)$  for amostrado. Além disso, o filtro de reconstrução  $h_r(p, q)$  é uma função de comprimento teoricamente infinita.

## 2.5 - Conclusões

Como forma de contornar as imposições da interpolação ótima, outros métodos de interpolação têm sido propostos na literatura. Alguns são implementados no domínio espacial, usando as técnicas bilinear e cúbica, ao passo que outros são implementados no domínio transformado. Transformadas clássicas, como a transformada discreta de Fourier (DFT), ou a sua implementação através de algoritmos eficientes, como a transformada rápida de Fourier (FFT), vêm sendo utilizadas há bastante tempo na interpolação de valores intermediários em seqüências finitas [5]. No entanto só recentemente a técnica de interpolação no domínio transformado vem sendo aperfeiçoada e investigada com mais

detalhes, as quais incluem interpolação usando FFT com o "janelamento" da seqüência e eliminação de amostras. Este trabalho desenvolve uma técnica de interpolação baseada na preservação de regularidade através das escalas em sucessivas etapas de transformações por *wavelets*, adaptando ainda técnicas de pré-processamento para obtenção de melhores resultados. Objetivando facilitar a compreensão do algoritmo de interpolação proposto, o capítulo seguinte apresenta as *wavelets*, discorrendo sobre suas principais propriedades e conexões com outra importante teoria, a análise multi-resolução.

## Capítulo 3

---

# A TRANSFORMADA WAVELET E A ANÁLISE MULTI-RESOLUÇÃO DE MALLAT

---

### 3.1 - Introdução

O processamento de sinais é hoje uma necessidade em qualquer área do conhecimento humano. Nas áreas exatas, tal constatação é óbvia, e o processamento de sinais já era uma realidade desde o início da utilização de sistemas analógicos. Nas áreas biológicas, a necessidade de se extrair informações valiosas sobre processos fisiológicos, através de seus sinais vitais, conduz à tentativa de se empregar técnicas sofisticadas para processá-los e compreendê-los. Nas áreas humanas, a abordagem de imagens, sons, poesias, comportamentos e percepções vistos como processos organizados, coerentes, representáveis portanto sob a ótica de sinais, traz consigo a necessidade de se lançar mão do processamento de sinais para auxiliar no processo de reorganizar a informação e também no processo de criação. Visto assim, o processamento de sinais é uma ferramenta vital no nosso mundo moderno, cuja demanda é crescente.

O processamento digital de sinais traz várias vantagens em relação ao analógico. Isto porque a manipulação de um sinal discreto é realizada através de algoritmos computacionais, ou seja, por *software*, dispensando a necessidade de uma infinidade de módulos físicos (*hardware*), bancos de filtros, etc.. Além disso, a precisão alcançada no processamento é superior à analógica, e a tarefa de processamento é relativamente mais simples de se modelar e compreender.

Neste sentido, a transformada *wavelet* faz parte de uma teoria relativamente nova, e tem se revelado uma ferramenta poderosa e vantajosa no processamento e

análise de sinais para inúmeras aplicações [4,5,6]. E, por ser relativamente nova, há ainda um vasto campo para exploração e experimentação, até que se firme como uma ferramenta clássica.

Esse capítulo busca ser um texto introdutório à teoria *wavelet*. Inicialmente comentam-se as motivações existentes em se explorar este campo, buscando a seguir conceituar *wavelets*, através de definições e exemplos.

Define-se então a transformada *wavelet* (TW), introduzindo-se o tema através da técnica de análise e síntese e através da teoria de bancos de filtros. Faz-se uma análise comparativa entre a transformada de Fourier (TF) e a transformada *wavelet*, destacando-se as vantagens no uso da TW.

Ao final, demonstram-se as vantagens de se usar a TW em substituição à *Short Time Fourier Transform* (STFT), e enumeram-se diversas outras aplicações. Dentre elas, uma é analisada mais cuidadosamente: a análise multi-resolução.

### 3.2 - Motivação

Através das características de um sinal, podem-se extrair informações relevantes sobre o processo a que ele está associado. Tais informações podem ser extraídas tanto no domínio do tempo (espaço) como no domínio da frequência.

Uma ferramenta clássica na análise de sinais é a transformada de Fourier (TF) que permite a “visualização” do sinal (transformado) sob uma outra ótica, uma dimensão alternativa. Assim a TF permite mapear um sinal (por exemplo)  $s(t)$ , descrito no domínio do tempo (ou  $s(x)$ , sendo  $x$  uma dimensão métrica) em um sinal  $S(f)$ , descrito no domínio da frequência. Todavia, uma boa resolução temporal (espacial) implica uma má resolução na frequência, e vice-versa, de modo que é desejável o uso de transformadas que estabeleçam um compromisso entre localização temporal (espacial) e frequencial. Nessa classe de transformadas situa-se a transformada *wavelet*, que possibilita representar um sinal em diversas escalas, introduzindo assim uma análise de sinais em tempo(espaço)-escala. Essa propriedade intrínseca à transformada *wavelet* a torna particularmente atraente para aplicações em análise multi-resolução.



À medida em que forem sendo apresentadas certas propriedades da TW, ficarão mais evidentes as vantagens de se utilizá-la, em especial nos casos em que a TF não apresenta bons resultados.

### 3.3 - Transformada de Fourier "Janelada"

A transformada de Fourier convencional é especialmente útil para sinais *estacionários*, ou seja, para sinais que mantêm suas características estatísticas constantes no tempo (espaço) de observação. Para sinais tais como imagens com bordas agudas, entretanto, um problema com a transformada de Fourier advém do fato de que, de forma a acomodar uma descontinuidade, surgem termos de alta frequência que não são precisamente localizados.

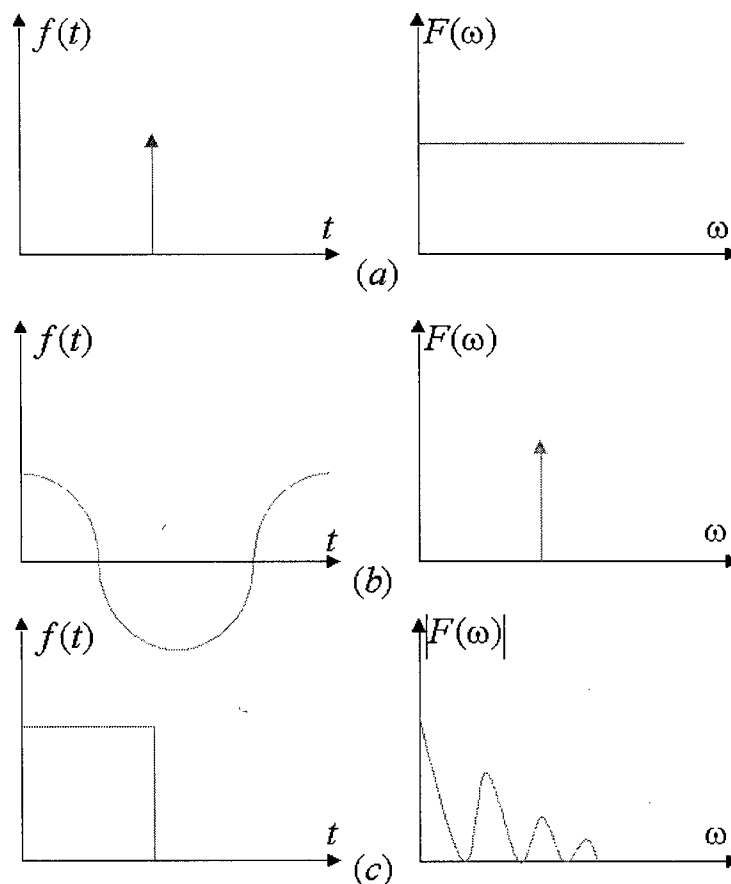


Fig. 3.1 – Localização tempo-freqüência: (a) máxima resolução no tempo; (b) máxima resolução na freqüência; (c) boa resolução tempo-freqüência.

Uma forma de se localizar as altas frequências, enquanto se preserva a linearidade do operador, é utilizar uma *Transformada de Fourier "Janelada"* (*Windowed Fourier Transform-WFT*), também conhecida como *Transformada de Fourier no Tempo Finito* (STFT) [6]. A STFT é a abordagem usual para análise de sinais não-estacionários. Para se conseguir melhor precisão no tempo, é necessária uma representação  $S(x, f)$  do sinal  $s(x)$ , objetivando analisar seu espectro em regiões localizadas no domínio do tempo. Em outras palavras, a STFT é a transformada de Fourier do sinal com a aplicação de uma janela no domínio do tempo. Dessa forma, já se podem localizar as frequências, mas surge um novo problema: não é possível obter-se alta precisão na posição (no tempo) e na frequência de uma descontinuidade presente. Outro aspecto desse problema é que uma vez que a janela é escolhida, o limite de resolução é o mesmo sobre todos os tempos e frequências. Isto significa que não há *adaptabilidade* da análise, e quando se quer boa resolução temporal de variações abruptas, deve-se sacrificar a boa descrição em frequência das porções mais suaves do sinal [6,7].

Uma alternativa à STFT na descrição tempo(espaco)-frequência de sinais é a utilização da transformada *wavelet*, descrita a seguir.

### 3.4 - Wavelets

*Wavelets* são um conjunto de funções de base obtidas de uma função protótipo (dita *wavelet* "mãe") por meio de dilatações e translações. A forma geral de uma "família" de *wavelets* é dada por:

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (3.1)$$

onde  $\psi(x)$  é a *wavelet* "mãe",  $a$  é definido como fator de escalamento, e  $b$  definido como fator de deslocamento.

Existem vários tipos de *wavelets* citados na literatura [8,9]. O uso de uma ou outra está associado à aplicação. Regras de construção de *wavelets* estão sendo

propostas por vários pesquisadores, segundo as restrições e necessidades que cada aplicação específica impõe. Isto permite concluir que é possível gerar uma infinidade de *wavelets* diferentes, e particularmente construir um conjunto de *wavelets* adequado ao processamento de um tipo de sinal ou aplicação específica, levando à obtenção de resultados cada vez melhores.

Para uma função ser considerada uma *wavelet*, ela deve ser *admissível*. Uma função  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  é admissível se:

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3.2)$$

onde  $F_{\psi}(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $\psi(x)$  e  $L^2(\mathbb{R})$  é o conjunto de todos os sinais integráveis quadraticamente (ou seja, de energia finita).  $C_g$  é a constante de admissibilidade. A imposição que  $C_g$  seja finita é condição para que a integral da transformação inversa convirja, ou seja, a operação anti-transformada só será possível se  $C_g < \infty$ .

Para uma dada função  $g(t)$ , contínua na vizinhança da origem, a condição  $C_g < \infty$  implica que  $F_{\psi}(0) = 0$ , ou, similarmente, que  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ , isto é,  $\psi(x)$  não possui componente contínua.

Fazendo em (3.1)  $a = 2^{-j}$  e  $b = 2^{-j}k$  (o que define a família  $\psi_{a,b}(x)$  como *diádica* [6]), pode-se escrever:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Tais funções são seccionalmente contínuas, constituindo uma base para  $L^2(\mathbb{R})$ . Além disso, vale para o produto interno a condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x) \psi(2x - k) dx = 0 \quad (3.4)$$

ou seja, as dilatações e translações de  $\psi$  são mutuamente ortogonais para todos  $j, k$ .

É importante recordar que as funções de base na transformada de Fourier  $e^{j\omega t}$  também formam uma base ortogonal em  $L^2(\mathbb{R})$ . A Seção 3.5 apresenta a operação matemática denominada transformada *wavelet*, na qual as funções *wavelets* exercem papel de funções de base, analogamente às exponenciais complexas na transformada de Fourier.

### 3.5 - A Transformada Wavelet (TW)

Há variadas formas de se visualizar a transformada *wavelet*, a saber:

#### 3.5.1 - Análise e Síntese

Uma forma de introduzir a TW se faz através da noção de análise e síntese utilizando funções básicas. Na análise, um sinal  $f(x)$  é decomposto sobre uma base ortogonal de funções elementares (funções de base). Na transformada *wavelet* estas funções de base são as *wavelets*  $\psi_{j,k}(x)$ ,  $j, k \in \mathbb{R}$ ,  $j \neq 0$ , versões dilatadas e transladadas da *wavelet* "mãe"  $\psi(x)$ .

A operação transformada pode então ser definida por:

$$\Psi_f(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,k}(-x) dx. \quad (3.5)$$

Esta é a forma da transformada *wavelet* contínua (TWC). A operação em (3.5) pode ser interpretada como o produto interno do sinal  $f(x)$ , que se quer analisar, com a família de *wavelets*  $\psi_{a,b}(x)$  [4]:

$$\Psi_f(j, k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(-x) \rangle. \quad (3.6)$$

O produto interno fornece uma medida de similaridade entre os sinais operados, sendo frequentemente utilizado em problemas de estimação e detecção - como por exemplo na estimativa de localização e velocidade de alvos em radar e sonar.

Como todas as *wavelets* derivam de um mesmo protótipo  $\psi(x)$ , nenhuma escala específica é privilegiada na análise. A transformada  $\Psi_f(a,b)$  pode ser representada graficamente em um plano 2D, onde  $a$  seria o representativo da escala/frequência e  $b$  a dimensão temporal.

A expressão em (3.5), calculada sobre os valores inteiros  $j$  e  $k$ , define o conjunto de coeficientes *wavelet* discretos  $C_f(j,k)$ .

### 3.5.2 - Banco de Filtros

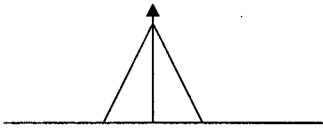
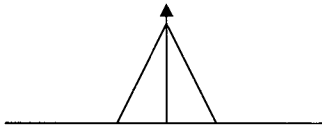
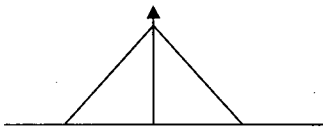
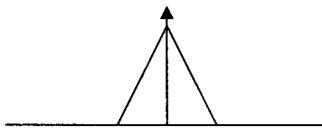
Uma outra visão alternativa da TW é baseada na interpretação de bancos de filtros [10]. A transformada em (3.5) pode ser reescrita como

$$\Psi_f(j,k) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-j}x) \psi(2^j x - k) dx. \quad (3.7)$$

Em (3.5), quando o fator de escala cresce, a resposta ao impulso do filtro associado a  $\psi(2^j x - k)$  se alarga no tempo, e portanto perfaz uma análise sobre um intervalo de tempo maior. Equivalentemente, em (3.7), quando o fator de escala cresce, o sinal  $f(2^{-j}x)$  é visto através de um filtro de comprimento constante. As Tabelas 3.1 e 3.2 mostram o escalamento dos sinais na interpretação da TW como banco de filtros.

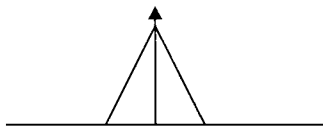
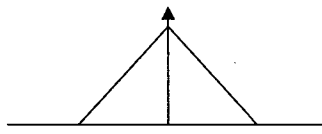
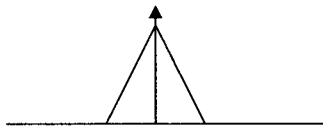
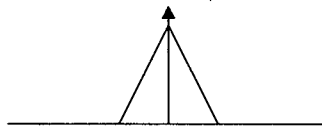
Para a equação (3.5), pode-se construir a seguinte tabela:

**Tabela 3.1 - Visão Global - Análise sobre intervalo de tempo(espço) maior**

Escala $2^j$	$\psi(2^j x - k)$	$f(x)$
$2^j = 1$		
$2^j < 1$		

Para a equação (3.7):

**Tabela 3.2 - Visão Global - Análise do sinal  $f(x)$  contraído**

Escala $2^j$	$\psi(2^j x - k)$	$f(2^{-j} x)$
$2^j = 1$		
$2^j < 1$		

O processo de análise resulta, portanto, em um conjunto de coeficientes *wavelet* que exprimem a “proximidade” ou similaridade do sinal original em relação àquelas funções de base. Se é possível representar qualquer sinal genérico como uma decomposição em *wavelets*, então é natural que se queira recuperar a forma de onda original somando blocos construtivos elementares.

A síntese de  $f(x)$  a partir dos coeficientes *wavelet*, isto é, sua reconstrução, consiste na soma de todas as projeções (ortogonais) do sinal decomposto. Isto pode ser equacionado como segue [6]:

$$f(x) = \frac{1}{C_g} \iint \Psi_f(a, b) \Psi_{a, b}(x) \frac{dad b}{b^2}. \quad (3.8)$$

A transformada *wavelet* é uma operação linear. Porém, quando confrontada com a transformada de Fourier, a análise em frequência possui uma cobertura logarítmica. O banco de filtros de análise é composto de filtros passa-banda com largura de banda relativa constante, isto é,

$$\Delta f / f = \text{constante}. \quad (3.9)$$

Em outras palavras, ao invés da resposta em frequência do filtro ser regularmente espaçada no eixo das frequências, ela é espalhada numa escala logarítmica. Em suma, um amplo potencial de aplicações da transformada *wavelet* decorre do fato de que supera a STFT em termos de resolução: enquanto a STFT possui resolução fixa para qualquer posição, ou seja, sinais de frequência diferentes são analisados com uma mesma resolução temporal e vice-versa, a TW apresenta o conceito de multi-resolução (que será detalhado mais adiante). Quando tal conceito é visto como em banco de filtros, a resolução no tempo cresce com a frequência (central) do filtro, de forma que  $\Delta t$  e  $\Delta f$  variam com a frequência central do filtro (passa-banda). A resolução temporal  $\Delta t$  torna-se melhor nas frequências altas, enquanto a resolução em frequência  $\Delta f$  torna-se melhor nas baixas frequências [6].

Fazendo a conexão destes conceitos de resolução variável com o conceito de escala na transformada *wavelet*, observa-se que, com base nas Tabelas 3.1 e 3.2, em escalas maiores ( $a$  maior) o sinal  $f(x)$  é analisado globalmente, isto é, sem detalhes, logo com menor resolução temporal. Se o que se deseja é magnificar  $f(x)$ , reduz-se a escala ( $a$  menor) e obtém-se melhor resolução temporal. Na visão global ( $a$  maior) a resolução em frequência é melhor, enquanto que em escalas menores perde-se o poder de resolução em frequência. Quanto maior o fator de escala  $a$ , para uma frequência alta a resolução em frequência é também alta (e baixa no tempo).

### 3.6 - Análise Multi-resolução

Para introduzir o conceito de multi-resolução em conexão com a teoria *wavelet* seguem-se 3 etapas, descritas a seguir.

#### 3.6.1 - Esquema Piramidal de Multi-resolução

Dada uma seqüência original  $x[n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , pode-se gerar um sinal com uma resolução mais baixa através da redução da taxa de amostragem de  $x[n]$  de um fator de 2 seguida de uma etapa de filtragem passa-baixas. Essas operações resultam no sinal

$$y[n] = \sum_k h[k]x[2n - k] \quad (3.10)$$

onde  $h[k]$  corresponde à resposta ao impulso de um filtro passa-baixas. Esta filtragem elimina os detalhes de mais altas frequências. Baseado em  $y[n]$ , deseja-se achar uma aproximação  $a[n]$  do sinal original. É evidente que  $a[n]$  deve ser da mesma escala que  $x[n]$ ; logo, procede-se a um aumento de taxa de amostragem de  $y[n]$  por um fator 2 (o que incluirá zeros entre cada amostra).

Após a mudança de taxa de amostragem, uma filtragem por um filtro passa-baixas  $\tilde{h}[k]$  irá preencher os valores nulos criados por meio de uma interpolação. Obtém-se assim  $a[n]$ :

$$a[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}[k]\tilde{y}[n - k] \quad (3.11)$$

onde  $\tilde{y}[n] = y[n/2]$  e  $\tilde{y}[n+1] = 0$ .

Se  $h[k]$  e  $\tilde{h}[k]$  fossem filtros meia-banda ideais (com ganho igual a 1 entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ ),  $a[n]$  seria uma aproximação meia-banda passa-baixas perfeita de  $x[n]$ . Em geral



isso não ocorre, e  $d[n] = x[n] - a[n]$  é a diferença necessária para  $a[n]$  se igualar a  $x[n]$ . A Fig. 3.2 resume as operações descritas acima.

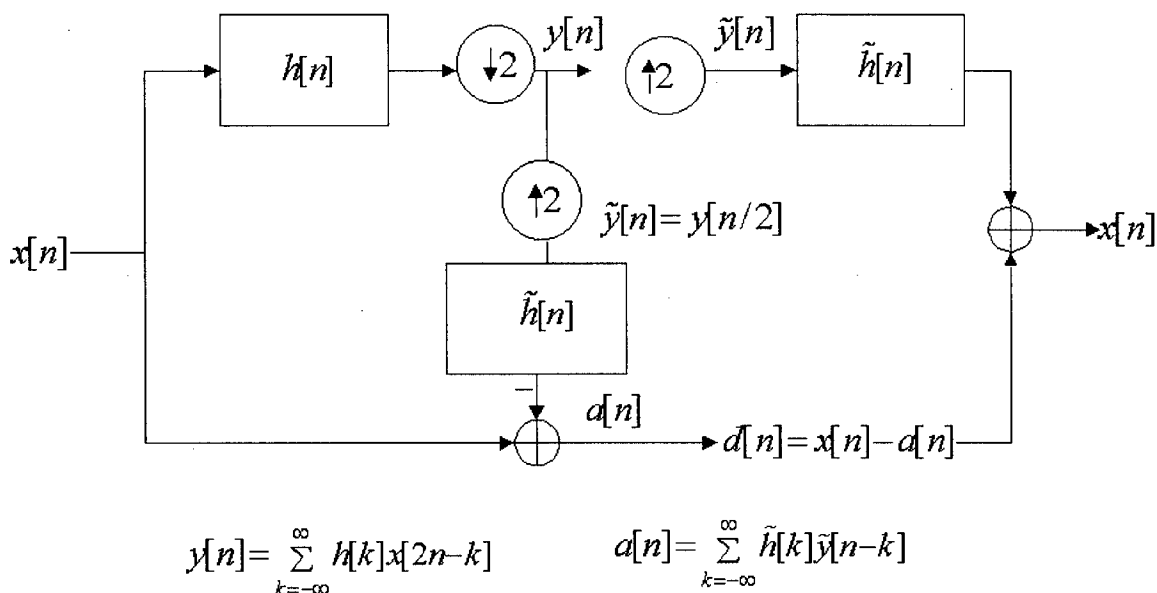


Fig. 3.2 - Esquema piramidal

É intuitivo verificar que  $d[n]$  contém exatamente os valores de frequência normalizada de  $x[n]$  que estão acima de  $\pi/2$ , correspondendo portanto ao “detalhe” necessário para a recuperação de  $x[n]$ , como ilustra a figura anterior. Esta separação de um sinal  $x[n]$  em uma aproximação com baixa resolução  $a[n]$  mais um detalhe adicional  $d[n]$  introduz conceitualmente a *análise multi-resolução de sinais*.

O esquema pode ser iterado em  $y[n]$  gerando uma cadeia de sinais de resolução menor em escalas maiores. Para imagens isto significa uma hierarquia de imagens cada vez menores. Esse esquema iterado é chamado de *piramidal* [6]. A Fig. 3.2 ilustra esta geração em cascata de sinais com resolução cada vez menores, sugerindo a noção de “pirâmide”.

### 3.6.2 - Esquema de Codificação em Sub-bandas

O esquema de decomposição piramidal anterior apresenta a desvantagem de gerar, a cada etapa, um sinal com  $N$  amostras  $a[n]$  (mesma taxa de amostragem do sinal original) mais um sinal de  $N/2$  amostras  $y[n]$ , aumentando em 50% o número de

amostras em cada estágio (esta superamostragem pode ser evitada com a escolha adequada de  $h[k]$  e  $\tilde{h}[k]$ ).

O esquema de codificação em sub-bandas evita esta redundância. Nesse esquema, um sinal  $x[n]$  é decomposto em um sinal  $y_0[n]$  de menor resolução (filtragem passa-baixas) subamostrado (em escala maior) - exatamente como no esquema piramidal - mais um outro sinal  $y_1[n]$  subamostrado (em escala maior), filtragem passa-altas de  $x[n]$  (usando um filtro  $h[n]$ ), como ilustrado na Fig. 3.3.

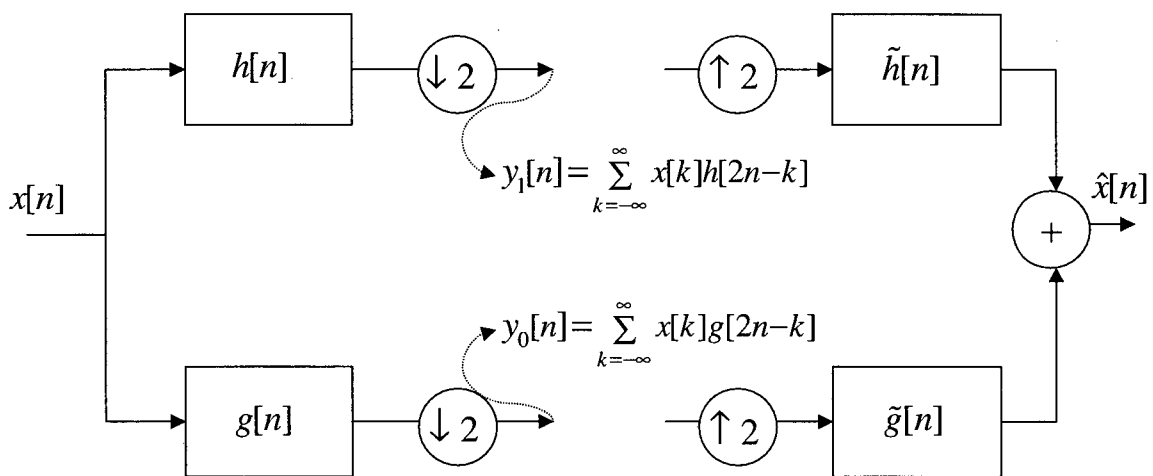


Fig. 3.3 - Esquema de codificação em sub-bandas

É intuitivo que o “detalhe” necessário para que a aproximação passa-baixas reconstrua o sinal original corresponde ao sinal passa-altas  $y_1[n]$ , isto é, sendo  $g[k]$  e  $h[k]$  filtros passa-baixas meia-banda e passa-altas meia-banda ideais,  $y_1[n]$  e  $y_0[n]$  constituem uma perfeita representação de  $x[n]$  em 2 versões subamostradas.

O sinal reconstruído  $\hat{x}[n]$  (Fig. 3.3) será igual ao sinal  $x[n]$  original se os filtros  $g[k]$  e  $h[k]$  obedecerem a certas restrições, ou seja, não é necessário que sejam ideais (o que os tornaria impraticáveis). Para a reconstrução perfeita, uma das condições necessárias impõe que os filtros  $g[k]$  e  $h[k]$  sejam relacionados por

$$h[L-1-k] = (-1)^k g[k] \tag{3.12}$$

onde  $L$  é o comprimento (par) do filtro. Fazendo agora uma conexão com a noção de decomposição em bases ortogonais:

$$y_0[k] = \sum_n x[n]g[-n+2k] \quad (3.13)$$

$$y_1[k] = \sum_n x[n]h[-n+2k] \quad (3.14)$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_k \{y_0[k]\tilde{g}[-n+2k] + y_1[k]\tilde{h}[-n+2k]\}. \quad (3.15)$$

A expressão em (3.15) corresponde à expansão padrão de um sinal em uma base ortonormal (os filtros), para a qual a reconstrução é igual à soma das projeções ortogonais ( $y_1[n]$  e  $y_0[n]$ ). Para reconstrução perfeita, a condição dos filtros de síntese (supondo biortogonalidade) é [4]:

$$\tilde{h}[n] = (-1)^{n+1} g[n] \quad (3.16)$$

$$\tilde{g}[n] = (-1)^n h[n]. \quad (3.17)$$

Nesse ponto, a formulação matemática é bastante sugestiva de como a teoria *wavelet* encaixa-se neste esquema.

### 3.6.3 - Formulação Matemática Usual

A análise multi-resolução, concebida por Mallat [11], estabelece uma seqüência de sub-espacos aninhados  $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , com as seguintes propriedades:

1.  $\dots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$
2.  $f(x) \in V_j \Rightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
3.  $f(x) \in V_j \Rightarrow f(x-2^{-j}k) \in V_j$

Define-se ainda o sub-espaço  $W_j$  como o complemento ortogonal de  $V_j$  em  $V_{j+1}$ :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \tag{3.18}$$

onde  $\oplus$  representa a união de sub-espaços ortogonais. Logo, os sub-espaços  $W_j$  contêm os detalhes necessários para se ir de  $V_j$  a  $V_{j+1}$ , o que por recursão conduz a

$$V_{j+1} = W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-3} \oplus W_{j-4} \dots \tag{3.19}$$

A analogia entre a análise multi-resolução e o esquema de separação em sub-bandas é ilustrada pela Fig. 3.4. A cada estágio de decomposição, a porção passa-altas (equivalente a  $W_j$ ) corresponde à diferença entre a porção passa-baixas corrente ( $V_j$ ) e a porção passa-baixas anterior ( $V_{j+1}$ ).

O esquema ilustrado na Fig. 3.4 representa uma “estrutura de banco de filtros em árvore”, equivalente a uma transformação *wavelet* discreta implementada utilizando uma estrutura de filtros digitais com um fator de sub-amostragem 2 [11,12]. As seqüências  $h[n]$  e  $g[n]$  representam, respectivamente, os coeficientes das respostas ao impulso dos filtros passa-baixas e passa-altas. Assim, a cada etapa de filtragem, reduz-se à metade a largura de banda do sinal.

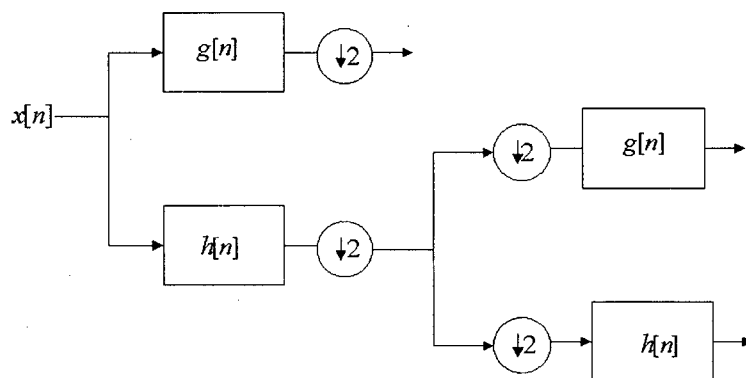


Fig. 3.4 - Árvore de banco de filtros: cascadeamento do esquema de codificação em sub-bandas

3.7 - Conclusões

Como observado, a decomposição *wavelet* de sinais permite a análise de componentes de freqüência de forma temporalmente (espacialmente) localizada. A Fig. 3.5 ilustra, comparativamente à STFT, a noção de visualização tempo(espaco)-freqüência intrínseca à TW.

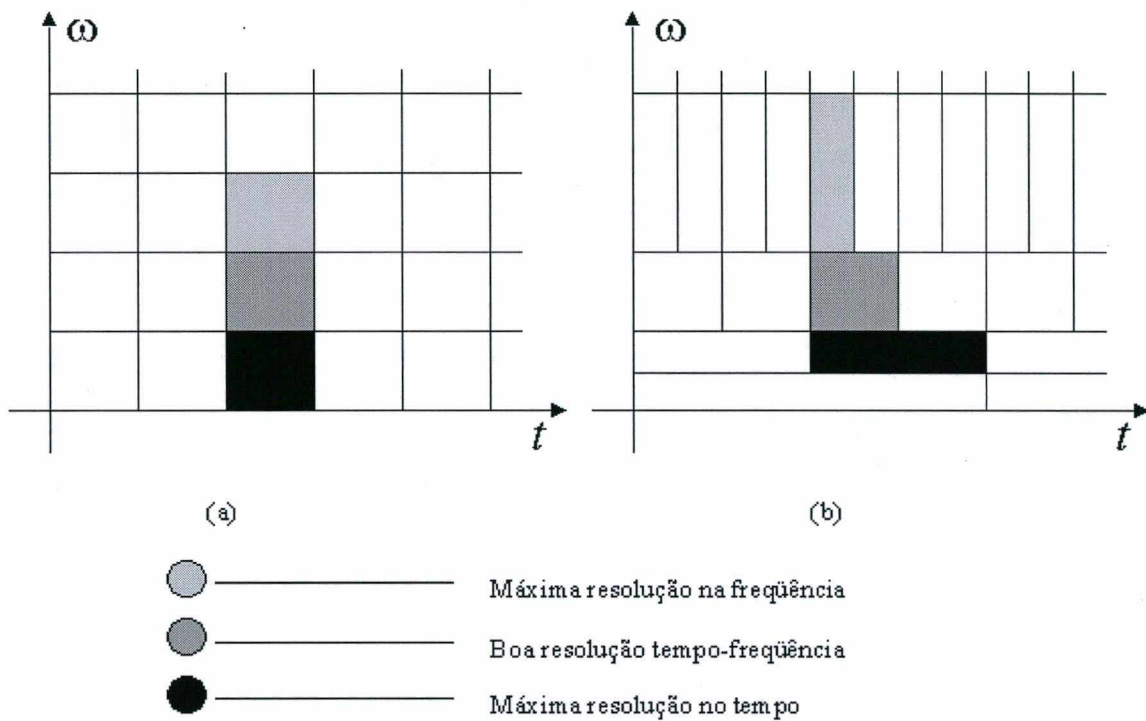


Fig. 3.5 - Visualização tempo(espaco)-freqüência (a) na STFT; (b) na TW

A visualização de sinais em múltiplas escalas e resoluções é útil na descrição de componentes desconhecidas de freqüência, o que ocorre, por exemplo, na interpolação de sinais. Nesse caso, a observação de propriedades dos sinais que sejam preservadas em diversas escalas possibilitaria uma boa estimação das amostras a serem criadas. Uma dessas propriedades, a regularidade de Hölder, é apresentada no capítulo seguinte. Tal propriedade, generalização do conceito de continuidade matemática de Lipschitz [4], é a característica que permitirá a utilização da teoria *wavelet* na estimação de amostras dentro do método de interpolação proposto.

## Capítulo 4

---

# REGULARIDADE DE HÖLDER

---

### 4.1 - Introdução

A transformada *wavelet* fornece um meio pelo qual a suavidade local de um sinal pode ser quantificada. Do ponto de vista matemático, a suavidade é representada pela taxa de decaimento dos coeficientes *wavelet* em sucessivas escalas de decomposição do sinal, que pode ser analisada pela observação da regularidade (caso geral da propriedade de continuidade de Lipschitz [4]).

As seções seguintes apresentam o conceito de regularidade de Hölder e sua relação com a transformada *wavelet*, para a qual é dada ênfase à característica de correlação entre as sub-bandas como motivação ao algoritmo, que busca preservar a regularidade durante a interpolação.

### 4.2 - Regularidade e Wavelets

A regularidade local de uma função  $f(x)$  em um ponto  $a$  pode ser analisada segundo a noção de continuidade de Lipschitz [4]: uma função  $f(x)$  é dita  $r$ -Lipschitz em  $a$ ,  $0 < r < 1$ , se

$$|f(x) - f(a)| \leq K |x - a|^r \quad (4.1)$$

onde  $K$  é uma constante arbitrária. Uma descontinuidade em degrau, por exemplo, possui expoente de Lipschitz  $r = 0$ . A consideração  $r > 1$  é possível se a Eq. (4.1) for satisfeita para derivadas de ordem mais alta.

As seguintes condições valem para o comportamento local de coeficientes *wavelet* próximos a um ponto *r*-Lipschitz [4]:

- Se  $f(x)$  é *r*-Lipschitz em  $x=a$ ,  $r < N$  e  $\psi(x)$  possui pelo menos *N* momentos desvanescentes, então

$$\max_{(j,k) \in A} |\Psi_{j,k}| \leq K \cdot 2^{-j(r+\frac{1}{2})} \tag{4.2}$$

onde *A* contém os pares  $(j, k)$  para os quais *a* pertença ao suporte de  $\psi_{jk}(x)$ .

A Fig. 4.1 ilustra tal comportamento próximo a uma descontinuidade em degrau, onde  $r = 0$ .

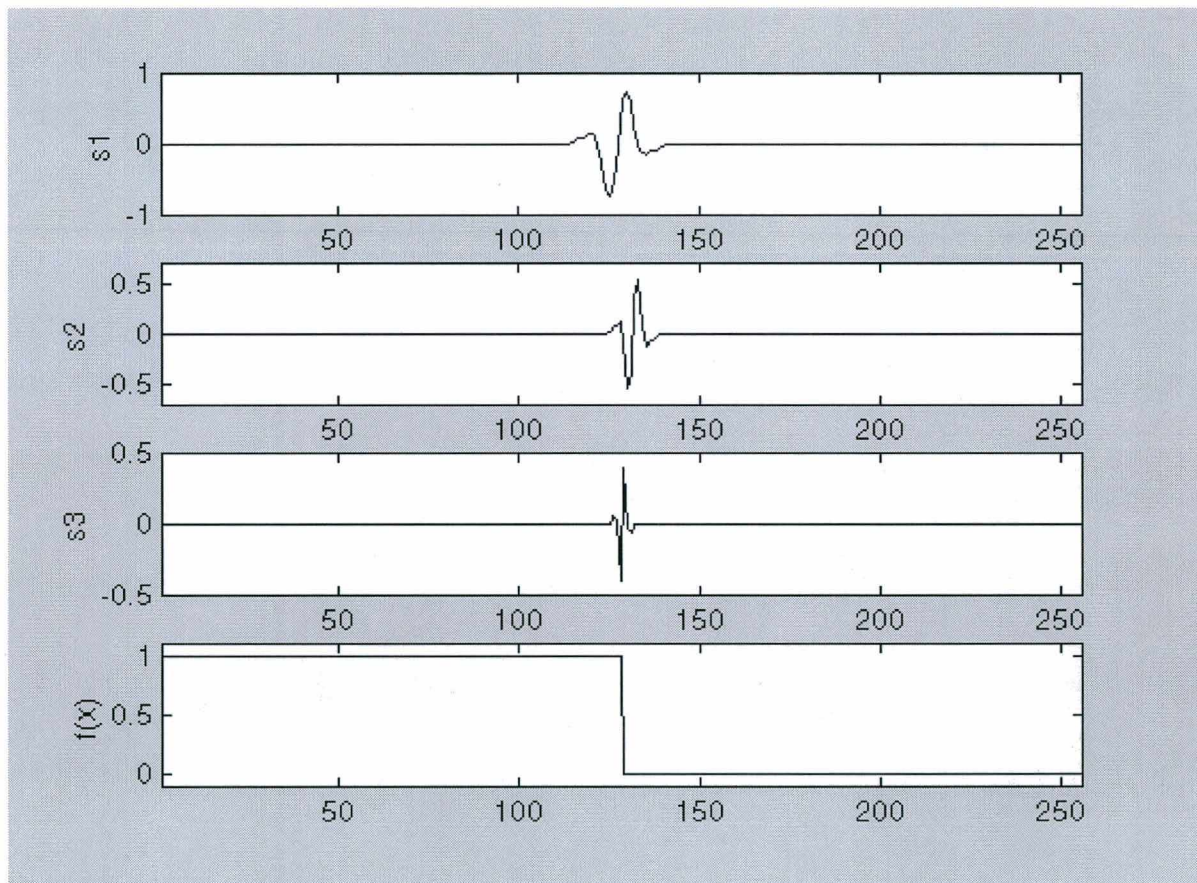


Fig. 4.1 – Diferentes escalas  $s_n$  da transformada *wavelet* de uma borda em degrau.

Uma extensão do conceito de continuidade de Lipschitz ( $r > 1$ ) é feita requerendo que a Eq.(4.1) seja satisfeita para  $f(x)$  e suas derivadas de  $n$ -ésima ordem. Define-se então o conceito de regularidade de Hölder:

“Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possui regularidade de Hölder (ou expoente Hölder)  $\alpha = n + r$  com  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq r < 1$  se existe uma constante  $K < \infty$  tal que

$$|f^{<n>}(y) - f^{<n>}(x)| \leq K |y - x|^r \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

onde  $f^{<n>}$  indica a derivada de  $n$ -ésima ordem de  $f$ , e  $r$  corresponde ao expoente de Lipschitz” [14].

O expoente de Hölder indica o número de derivadas contínuas de uma função. Funções com valores grandes de expoente de Hölder são matemática e visualmente suaves, enquanto que funções com valores pequenos de expoente de Hölder são associadas a funções mais irregulares.

#### 4.2.1 - Estimação da Regularidade de Hölder

A transformada *wavelet* oferece um eficiente meio para medir a suavidade de uma função. A versão discreta da transformação *wavelet* contínua, denominada transformada *wavelet* diádica não-dizimada [8], é computada pelo banco de filtros mostrado na Fig. 4.2. Esse esquema, em que os coeficientes dos filtros diferem dos bancos de filtros *wavelet* convencionais pela inserção de zeros entre as amostras das respostas ao impulso daqueles, permite sintetizar um sinal  $f(x)$  através de operações de translações e dilatações de uma função *wavelet* “mãe”  $\psi(x)$ . Assim, seja a *wavelet*

$$\Psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k), \quad (4.4)$$

um sinal apresenta expoente de Hölder  $\alpha$  se existe uma constante  $K$  tal que os coeficientes da transformada *wavelet*  $\Psi_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle$  satisfazem



$$|\Psi_{j,k}| \leq K \cdot 2^{-k\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \tag{4.5}$$

para todos  $j \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \in \mathbb{R}$  [7]. Esse teorema caracteriza a regularidade de uma função pelo decaimento da magnitude dos coeficientes de sua transformada *wavelet* através das sucessivas escalas de decomposição, podendo ser utilizado para explicar as similaridades entre escalas que aparecem no processamento de imagens via multi-resolução.

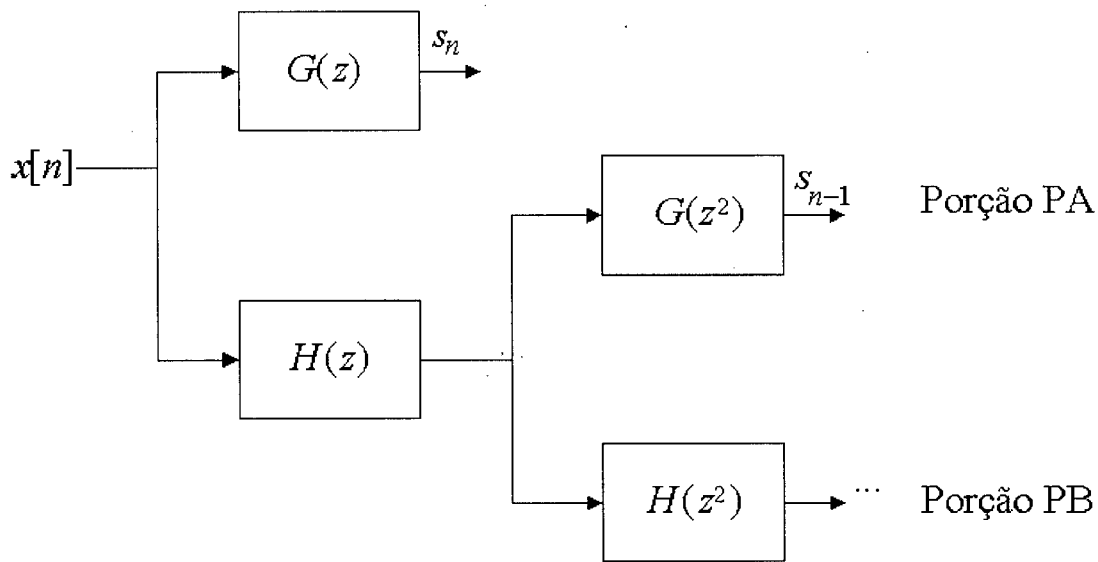


Fig. 4.2 - Banco de filtros da transformada *wavelet* diádica não-dizimada.

### 4.2.2. Correlação entre Escalas

Pesquisas em processamento de imagens via multi-resolução têm indicado a presença de características similares em forma, porém distintas em suporte espacial para escalas diversas [15]. Funções mais suaves exibem maior similaridade entre escalas, que pode ser matematicamente quantificada pelo teorema do decaimento da Eq. (4.5). Pode-se mostrar que a correlação entre sub-bandas *wavelet*  $s_m$  e  $s_n$  para as escalas  $2^m$  e  $2^n$  é limitada por

$$|corr(s_m, s_n)| \leq K \cdot 2^{-(m+n)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \tag{4.6}$$

onde  $K$  é uma constante e  $\alpha$  é o expoente de Hölder. Tal inequação indica que a similaridade entre as escalas decresce exponencialmente à medida que a regularidade da função analisada cresce. Esta observação é corroborada por dados experimentais e por outros trabalhos [16]. A similaridade de características em diferentes escalas pode ser usada para sintetizar uma nova e mais detalhada sub-banda a ser utilizada na interpolação.

### 4.3 - Conclusões

A regularidade de Hölder mostra-se, portanto, uma poderosa ferramenta matemática de análise de sinais correlacionados, o que sugere seu uso na estimação de pontos ausentes em imagens interpoladas.

Com base nessa observação, um algoritmo que analise o comportamento de diferentes escalas da decomposição *wavelet* de um sinal torna-se útil na estimação de novos coeficientes em escalas desconhecidas. O capítulo seguinte apresenta o algoritmo de interpolação de imagens, que faz uso de tal idéia.

## Capítulo 5

---

# INTERPOLAÇÃO DE IMAGENS VIA PRESERVAÇÃO DE REGULARIDADE

### 5.1 - Introdução

O efeito integrador/diferenciador do olho humano é um fato que deve ser considerado na interpolação de uma imagem. O resultado considerado ótimo é aquele que, para uma imagem de entrada situada a uma distância  $d$  do observador, corresponda à aproximação de uma imagem, situada a  $2d$ , para a posição  $d$ . Tal suposição falha porque supõe que a aproximação/afastamento da imagem são percebidos de forma linear, quando o modelo visual humano é logarítmico [17]. Por se tratar de um problema de escala, é sugestiva a utilização de análise multi-resolução para a interpolação.

A idéia mais trivial de interpolação de imagens no domínio das *wavelets* é considerar a imagem a ser interpolada como um sinal correspondente a baixas frequências da imagem interpolada, ou seja, considerar os filtros de um estágio de reconstrução *wavelet* como filtros interpoladores. Todavia, essa não é uma consideração correta, já que o conteúdo de frequências da imagem de entrada não pode ser visto como um subconjunto de frequências da imagem interpolada.

Assim, a imagem de entrada é assumida como referente a baixas frequências, da qual não se poderá estimar com absoluta precisão componentes de altas frequências, de tal forma que o sistema interpolador não produz uma imagem final subjetivamente perfeita.

Métodos tradicionais de interpolação de imagens levam em consideração fatores acerca da natureza das imagens que usualmente não são verdadeiros na prática. A interpolação bilinear impõe continuidade, a interpolação cúbica assume continuidade tanto da imagem quanto de sua primeira derivada, e assim por diante. Uma vez que

imagens de cenas naturais consistem de seções suaves unidas por descontinuidades abruptas nos limites dos objetos (bordas), tais algoritmos de interpolação não são realísticos. Na prática, a consideração de que a imagem a ser interpolada é uma função matematicamente contínua em derivadas de alta-ordem conduz a bordas e texturas suavizadas e borradas. Essa variação na suavidade visual é imediatamente notada e provoca desconforto ao observador.

## 5.2 - Interpolação de Imagens

Métodos clássicos de interpolação espacial primeiramente entrelaçam amostras conhecidas com zeros e, a seguir, filtram (com um filtro passa-baixas) o novo sinal para estimar as amostras ausentes. Entre os métodos de interpolação espacial, destacam-se os métodos de interpolação *bilinear* e *cúbica*.

O método de interpolação bilinear consiste basicamente de inserir amostras com valores iguais às médias aritméticas de suas amostras adjacentes, sendo representado pela filtragem linear da imagem com um filtro passa-baixas cuja resposta ao impulso (em uma dimensão) é dada por [5]:

$$h[n] = 0.5\delta[n] + \delta[n-1] + 0.5\delta[n-2]. \quad (5.1)$$

Tal método de interpolação provoca um borramento na imagem, o que é mais perceptível se esta contiver muitos componentes de altas frequências.

O método de interpolação cúbica, por sua vez, consiste no ajuste das amostras existentes para a determinação de um polinômio de 3<sup>o</sup> grau (o mínimo valor que assegura a existência de extremos e pontos de inflexão), que tem então seu valor numérico calculado entre as amostras existentes. Embora a interpolação cúbica atinja melhores resultados do que a técnica bilinear, pontos de variação brusca ainda não são precisamente estimados.

No domínio transformado, a técnica de interpolação usualmente utilizada baseia-se na FFT [1,2]. Tal método consiste em se representar a FFT de uma seqüência com a metade do número de amostras, o que corresponde à interpolação da seqüência no

domínio temporal (espacial). Todavia, carrega consigo o efeito de Gibbs [5], que dá origem a descontinuidades bruscas na imagem interpolada.

Como forma de contornar os problemas decorrentes da FFT e estimar com mais acuracidade componentes de altas frequências, propõe-se aqui um método de interpolação fundamentado na preservação da regularidade, que sintetiza uma nova sub-banda *wavelet* baseada no decaimento da magnitude dos coeficientes conhecidos da transformada *wavelet* da imagem.

A suposição mais geral é considerar a imagem original como uma imagem filtrada por um filtro passa-baixas qualquer, seguida por uma operação de dizimação por um fator 2, simulando um processo de reamostragem com metade da taxa, como mostrado na Fig. 5.1.

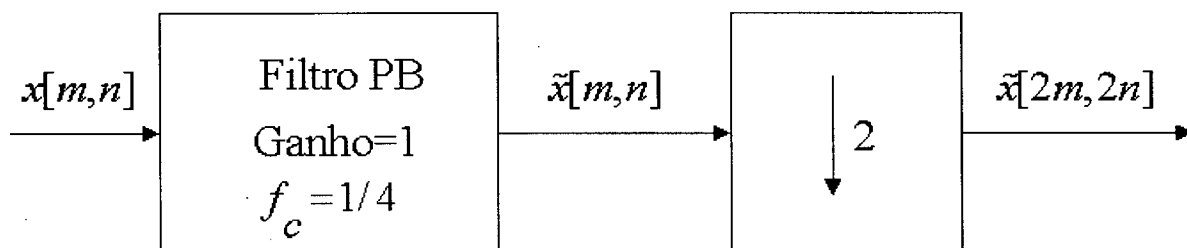


Fig. 5.1 - Sistema genérico para redução de taxa de amostragem de um fator 2

A imagem original é considerada, então, como entrada de um estágio de reconstrução *wavelet*, juntamente com as sub-bandas de altas frequência (que serão estimadas), para assim recompor a imagem interpolada por um fator 2. A estimativa dessas sub-bandas é então a chave para a estratégia de interpolação.

O sistema completo é ilustrado na Fig. 5.2, e seus passos são detalhados nas seções seguintes. Por uma questão de simetria no esquema, o filtro passa-baixas de reconstrução é definido como  $\tilde{g}[n]$ , e o passa-altas como  $\tilde{h}[n]$  (inversamente à convenção apresentada no Capítulo 3). Observe-se que se trata de um sistema unidimensional, operando inicialmente sobre linhas, e a seguir sobre colunas.

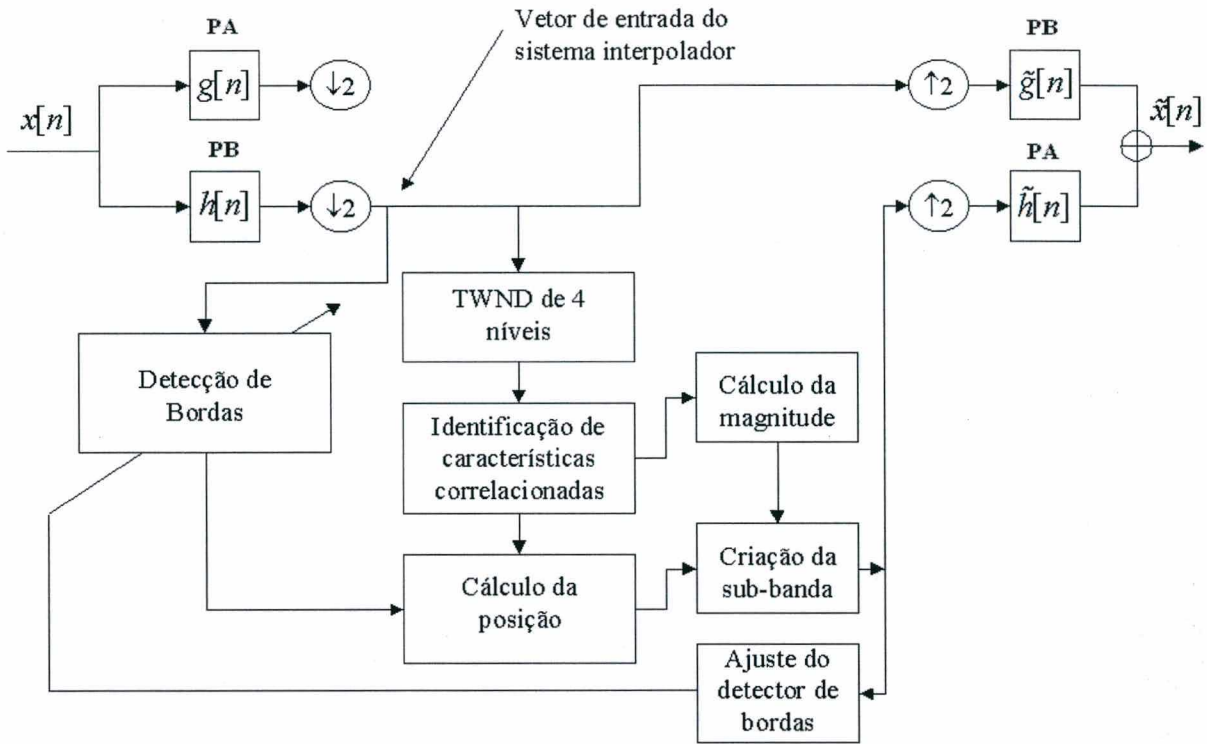


Fig. 5.2 - Diagrama em blocos do sistema interpolador unidimensional.

5.2.1 - Detecção de bordas em multi-escala

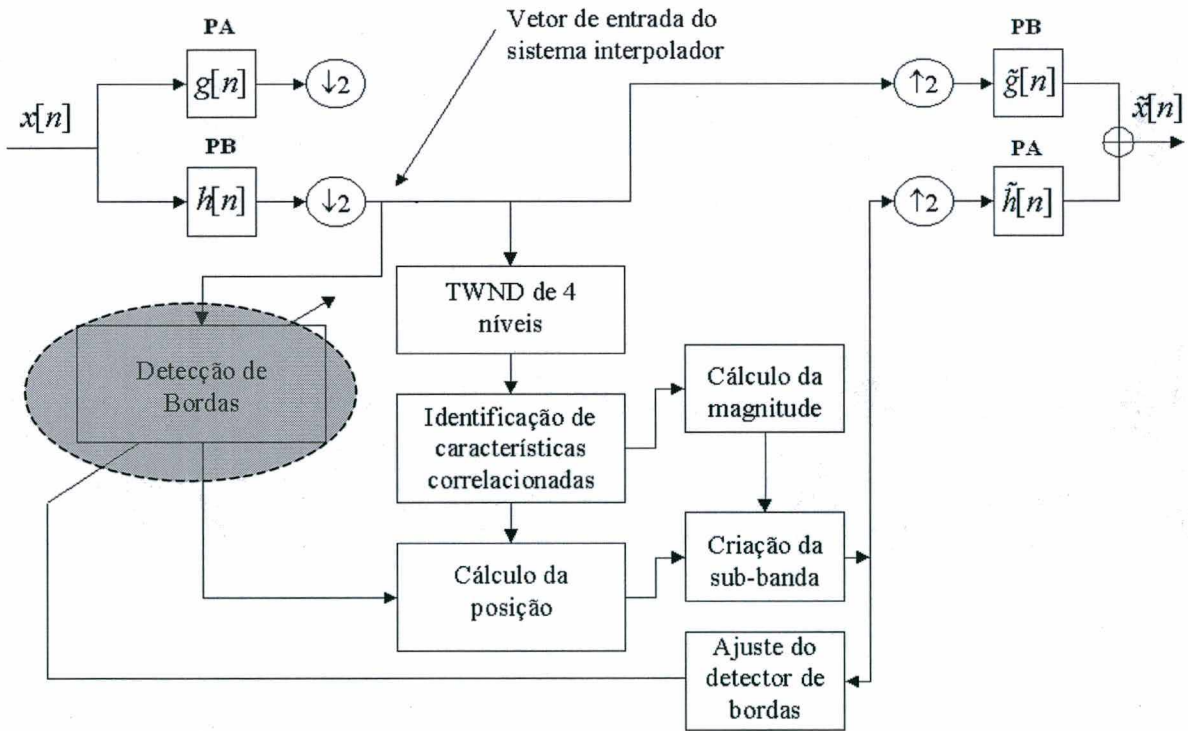


Fig. 5.3 - Etapa de detecção de bordas

Há uma conexão clara entre *wavelets* e detecção de bordas, já que as transformadas *wavelet* são bem adaptadas a “reagir” localmente a variações rápidas de um sinal [16].

Consideremos uma função de alisamento  $\theta(x)$ , diferente de  $\phi(x)$ , tal que  $\int_{x=-\infty}^{\infty} \theta(x) dx = 1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0$ , se suas primeira e segunda derivadas existem, logo são *wavelets* [4,16]:

$$\Psi^1(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad \text{e} \quad \Psi^2(x) = \frac{d^2\theta(x)}{dx^2}. \quad (5.2)$$

Se tais *wavelets* forem usadas para computar a transformada *wavelet* de alguma função  $f(x)$ , observando que  $\Psi_a(x) = a^{-1}\Psi(x/a)$ , pode-se escrever:

$$\Psi_{fa}^1(x) = f * \Psi_a^1(x) = f * \left( a \frac{d\theta_a(x)}{dx} \right) = a \frac{d(f * \theta_a(x))}{dx} \quad (5.3)$$

$$\Psi_{fa}^2(x) = f * \Psi_a^2(x) = f * \left( a^2 \frac{d^2\theta_a(x)}{dx^2} \right) = a^2 \frac{d^2(f * \theta_a(x))}{dx^2}. \quad (5.4)$$

Assim, as transformadas *wavelet* equivalem à primeira e segunda derivadas do sinal suavizado em uma escala  $a$ . Os máximos locais de  $\Psi_{fa}^1(x)$  são cruzamentos por zero de  $\Psi_{fa}^2(x)$  e pontos de inflexão de  $f * \theta_a(x)$ . Se  $\theta(x)$  é uma função gaussiana, a detecção de cruzamentos por zero equivale ao método de detecção de bordas de Marr-Hildreth [18], e a detecção de extremos equivalente à detecção de bordas de Canny [19]. Assim, a detecção de bordas consiste em se realizar uma binarização na transformada *wavelet* calculada sobre a imagem, cuja função de base *wavelet* utilizada é escolhida como igual à primeira derivada (gradiente) de  $\theta(x)$ .

O processo de detecção de bordas, como proposto por Canny [19], consiste em três passos:

a) Obtenção do gradiente da gaussiana da imagem

A imagem  $I$  é inicialmente suavizada por meio de uma convolução com uma gaussiana  $G$ , e a seguir é calculado o gradiente  $\nabla_{xy}$  da imagem suavizada, em função de seus componentes horizontais e verticais:

$$\nabla_g(x, y) = \{\nabla_x^2[I(x, y) * G(x, y)] + \nabla_y^2[I(x, y) * G(x, y)]\}^{1/2}. \quad (5.5)$$

b) Binarização do gradiente da gaussiana

A imagem obtida no passo anterior é binarizada segundo o limiar

$$\lambda = A_{min} + \tilde{\alpha}(A_{max} - A_{min}) \quad (5.6)$$

onde  $A_{max}$  e  $A_{min}$  são os valores máximo e mínimo do gradiente da gaussiana  $\nabla_g(x, y)$  e  $\tilde{\alpha}$  é uma constante arbitrária. Para valores baixos de  $\tilde{\alpha}$ ,  $\lambda$  é menor, havendo portanto mais *pixels* marcados como relativos a bordas.

c) Afinamento das bordas

A imagem binarizada obtida no passo anterior tem, então, seus segmentos de linha reduzidos à espessura de 1 pixel.

A detecção de bordas pode, assim, ser ajustada pela manipulação dos parâmetros característicos de suavização (suporte espacial e desvio padrão da máscara gaussiana utilizada) e de binarização (limiar de decisão  $\lambda$ ), permitindo a inserção de mais ou menos pontos de borda.



5.2.2 - Cálculo da TW não-dizimada da imagem

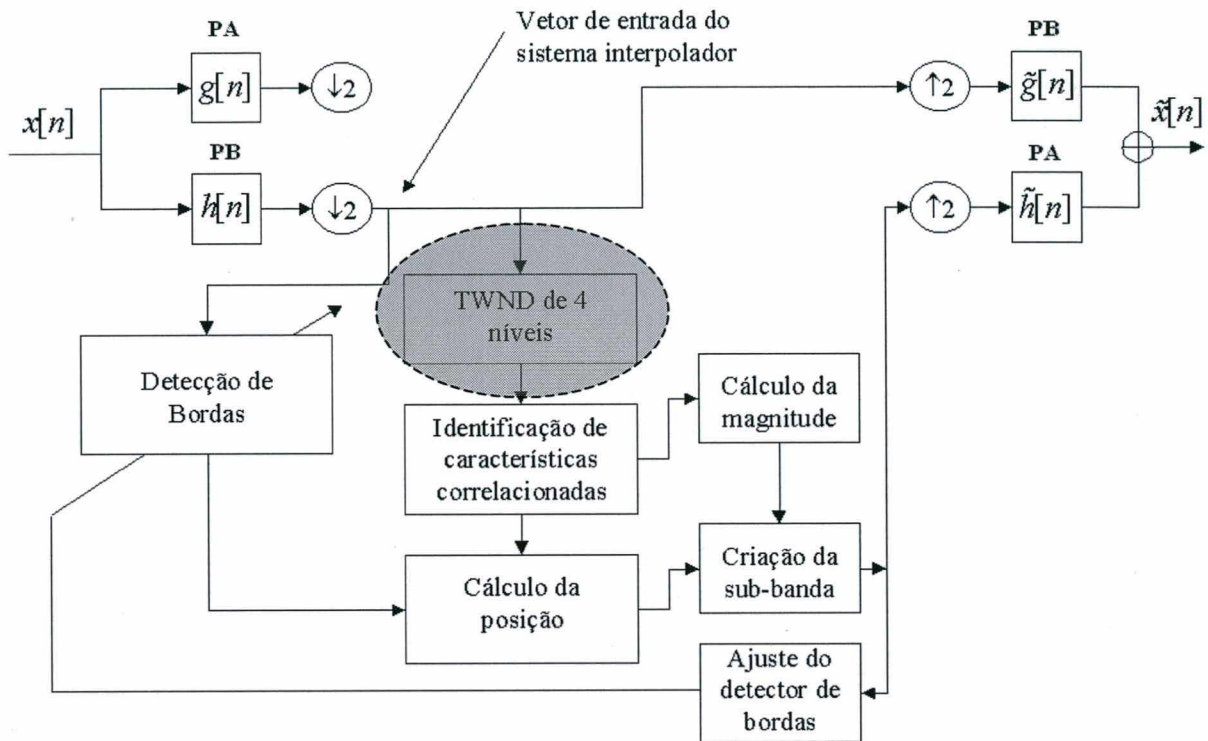


Fig. 5.4 - Cálculo da transformada *wavelet* não-dizimada

A imagem de bordas encontrada no passo anterior é definida como um protótipo de pontos de alta frequência, e é armazenada para processamento posterior. O próximo passo é determinar os coeficientes *wavelet* da imagem sobre os quais será verificada a convergência de características. A transformada *wavelet* utilizada é da forma não-dizimada, na qual os coeficientes da resposta ao impulso dos filtros são intercalados por zeros, de forma que o sinal na saída de cada filtro possua o mesmo número de amostras que o sinal de entrada [4,8]. Com adequada amostragem, é possível chegar ao resultado da TW convencional a partir da TW não-dizimada [8].

5.2.3 - Seleção de bordas

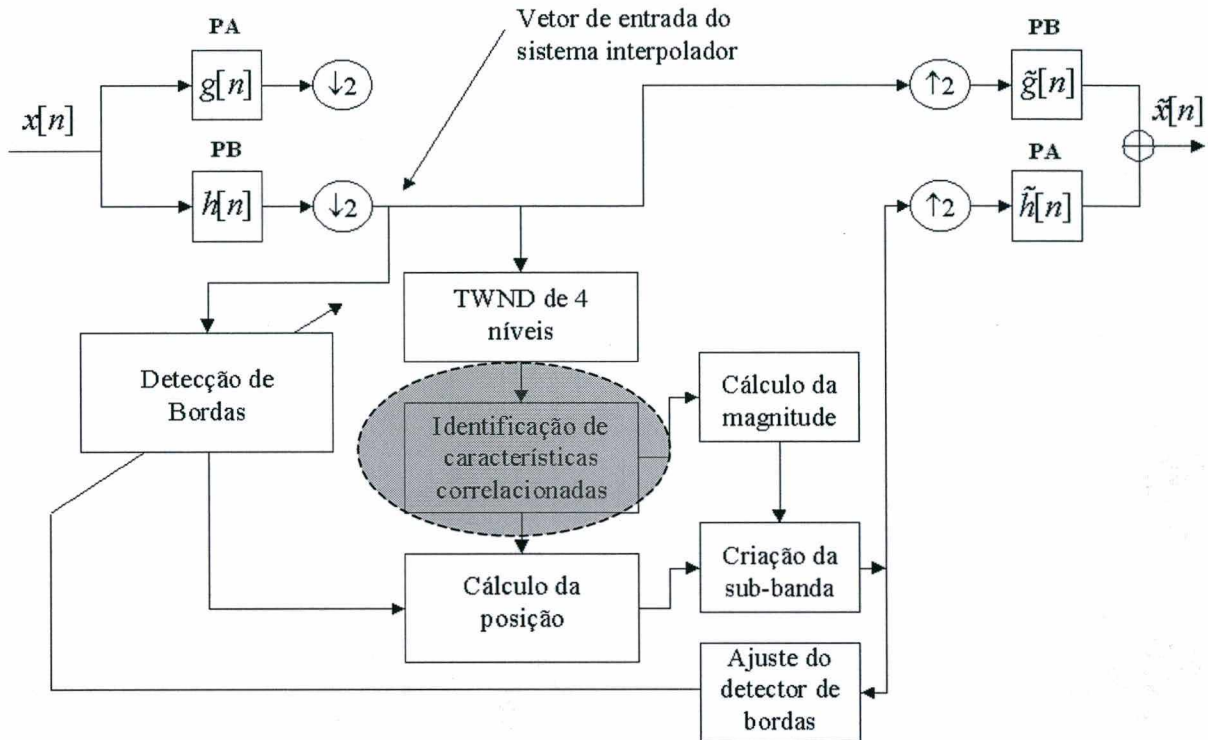


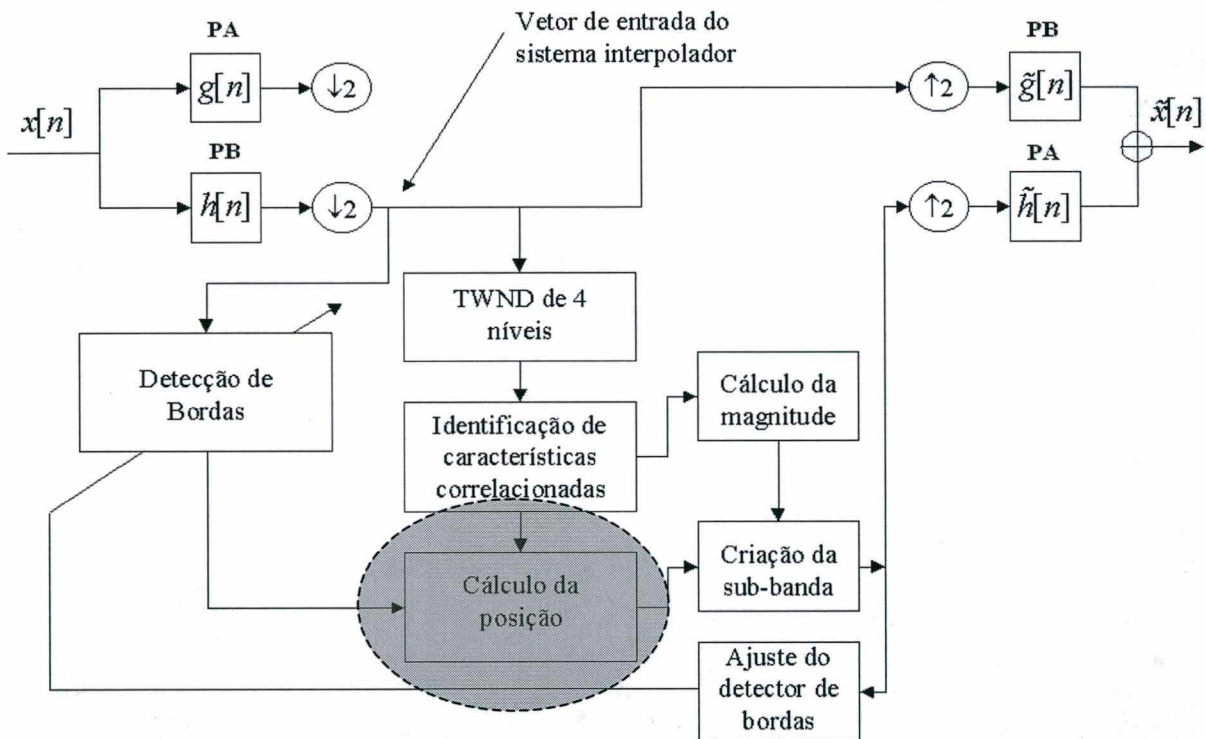
Fig. 5.5 - Etapa de seleção de bordas

Considere-se que a decomposição *wavelet* não-dizimada de cada linha (ou coluna) da imagem a ser interpolada produza sub-bandas *wavelet*  $s_1, s_2, \dots, s_L$ , da escala mais grosseira para a mais fina. Para se criar a nova sub-banda  $s_{L+1}$ , variações abruptas de luminância são primeiramente identificadas pelo algoritmo de detecção de bordas discutido anteriormente. Tais bordas são então seletivamente eliminadas pela observação da regra de decaimento dos coeficientes *wavelet* através das escalas. Avaliações experimentais têm indicado que bordas horizontais e verticais atingem a quase-igualdade nas Eqs. (4.5) e (4.6), o que não ocorre para bordas referentes a áreas de textura [20].

Técnicas de interpolação por preservação de regularidade conhecidas [20] analisam a convergência de máximos locais de sucessivas escalas para pontos de bordas individuais. Esse procedimento não conduz a uma estimação completa de características de altas frequências, já que podem ser desprezados pontos na vizinhança das bordas que também correspondam a alguma característica importante de altas frequências. O

mecanismo de seleção de bordas aqui proposto identifica características bem definidas (regiões abrangendo máximos locais situadas entre cruzamentos por zero), verificando se os pontos de borda e seus adjacentes convergem para características correlacionadas, ou seja, a convergência é verificada não somente para máximos locais em múltiplas escalas, como também para seus adjacentes. Assim, os pontos de borda e seus adjacentes, para os quais um conjunto de características correlacionadas através das escalas convirjam espacialmente, da escala  $s_1$  para a escala  $s_L$ , com decaimento das magnitudes dos coeficientes similar ao estabelecido pela Eq. (4.5), são preservados para a etapa seguinte do algoritmo.

**5.2.4 - Extrapolação de sub-bandas via regularidade**



**Fig. 5.6 - Extrapolação de características correlacionadas**

Para os pontos de bordas mantidos, as características (porção entre dois cruzamentos por zero) da sub-banda  $s_{L-1}$  são utilizadas como protótipo na estimação de características da nova sub-banda  $s_{L+1}$ . Tal como em [20], a sub-banda  $s_{L-1}$  é escolhida

porque as características da sub-banda de altas frequências referente à escala mais fina são bastante degradadas por ruído, já que esta corresponde à saída do filtro de mais altas frequências no banco de filtros de análise. A sub-banda  $s_{L-1}$  é também preferível às de escalas mais grosseiras por possuir características bem localizadas, pois correspondem a uma única borda. Características nas demais sub-bandas possuem amplo suporte espacial, correspondendo a várias bordas. Aqui são obtidos 4 níveis de transformação ( $L = 4$ ), tomando-se a sub-banda  $s_3$  como modelo. Todavia, ao contrário de [20], a convergência de características não se restringe apenas a apontar um único ponto de bordas, mas o que se denomina aqui de uma *região de bordas* (ponto de bordas e seus adjacentes). Em outras palavras, se existe uma série de características, em diversas escalas, que convergem para uma região de bordas (e não obrigatoriamente para um único ponto de bordas), será criada uma característica na sub-banda  $s_{L+1}$  como descrito a seguir.

Ao invés de se copiar e escalar apropriadamente (em seu suporte espacial) uma sub-banda já existente (trabalhos recentes que fazem uso de extrapolação de características [20] criam a sub-banda  $s_{L-1}$  de forma heurística, apenas escalando o suporte espacial de  $s_{L-1}$  por um fator  $1/4$  e posicionando as abscissas dos máximos locais de  $s_{L-1}$  na sub-banda sintetizada  $s_{L+1}$  por interpolação *spline*), a idéia para a criação da nova sub-banda reside em se extrapolar de forma geométrica características de sub-bandas mais grosseiras que convirjam para uma região de bordas. Ainda que a detecção de bordas em multi-escala de Mallat [16] seja eficiente, é falso afirmar que uma borda se caracteriza completamente por um único ponto, o que sugere a utilização de uma região de pontos adjacentes a ela. A Fig. 5.7 ilustra o transporte de uma característica correlacionada em múltiplas escalas.

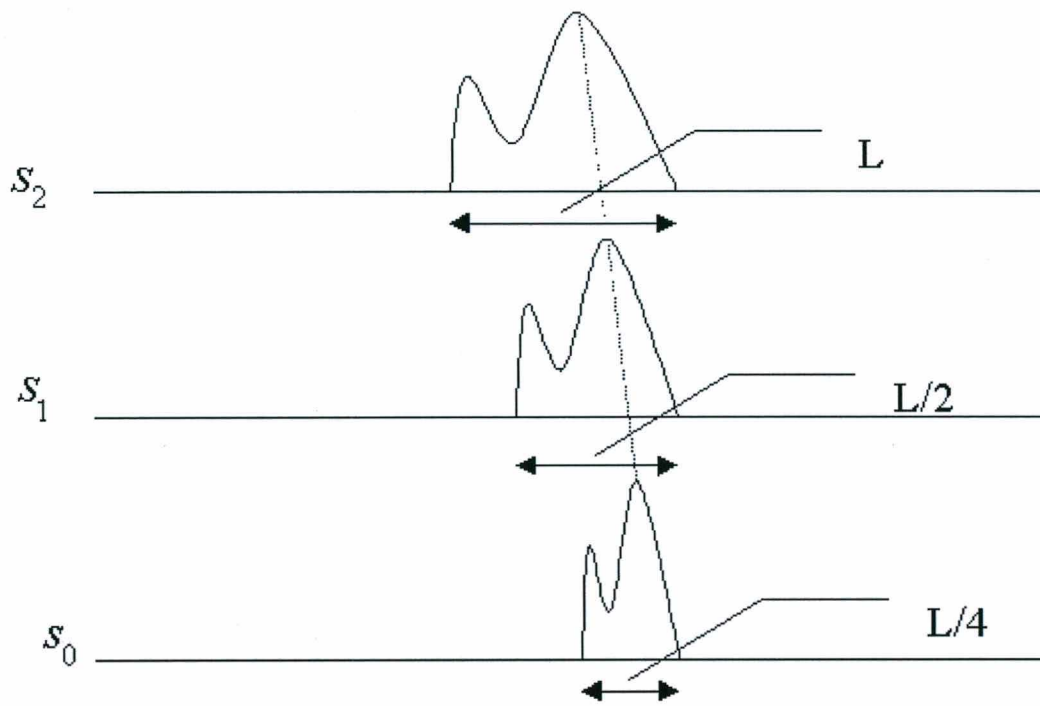


Fig. 5.7 - Transporte de características correlacionadas e convergentes a uma região de bordas

5.2.5 - Extrapolação da magnitude dos coeficientes

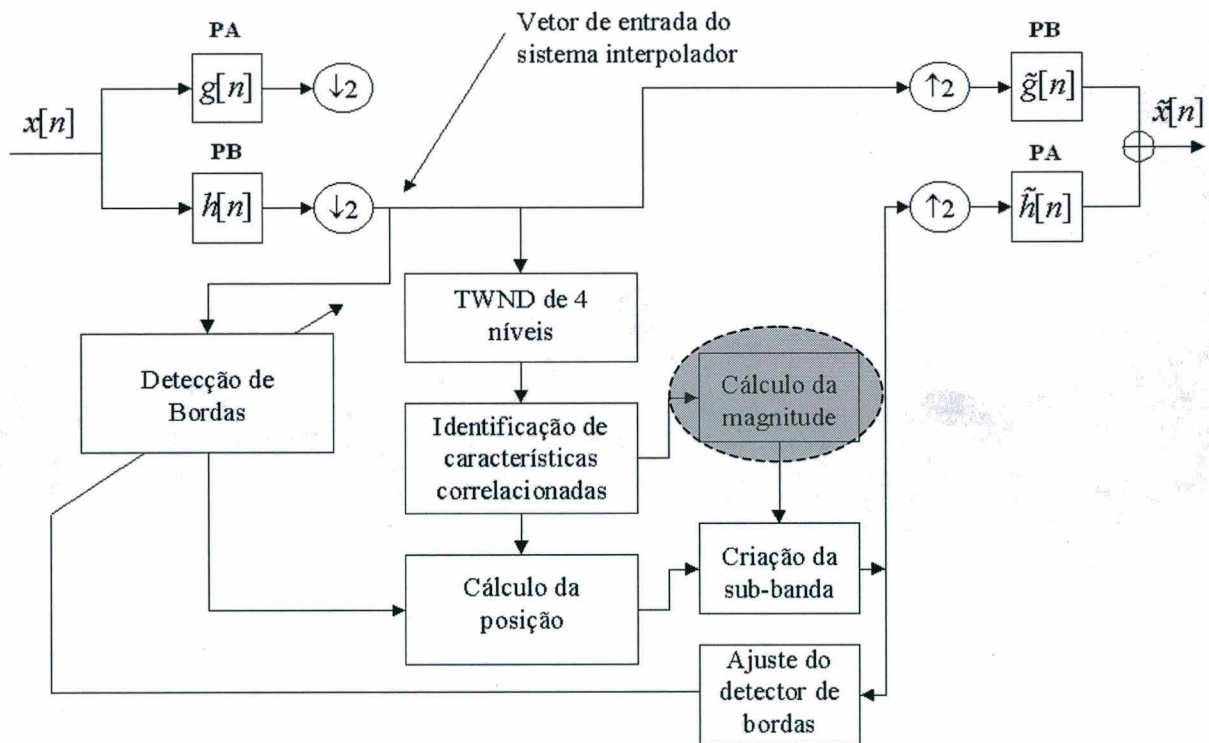


Fig. 5.8 - Cálculo da magnitude dos coeficientes

Para cada característica extrapolada para o nível de resolução  $L+1$ , deve haver um ajuste de magnitude. A magnitude da nova característica é escolhida de modo a satisfazer o limite na Eq. (4.5). Alguns trabalhos [20] propõem a estimação da taxa de decaimento da magnitude, através de um ajuste via mínimos quadrados dos logaritmos das magnitudes dos coeficientes. Todavia, desde que o limite na Eq. (4.5) não seja violado, o valor de magnitude pode ser qualquer um, de forma que aqui se escolhe o valor que mais se aproxime do valor correspondente na característica extrapolada na etapa anterior.

### 5.2.6 - Criação da sub-banda

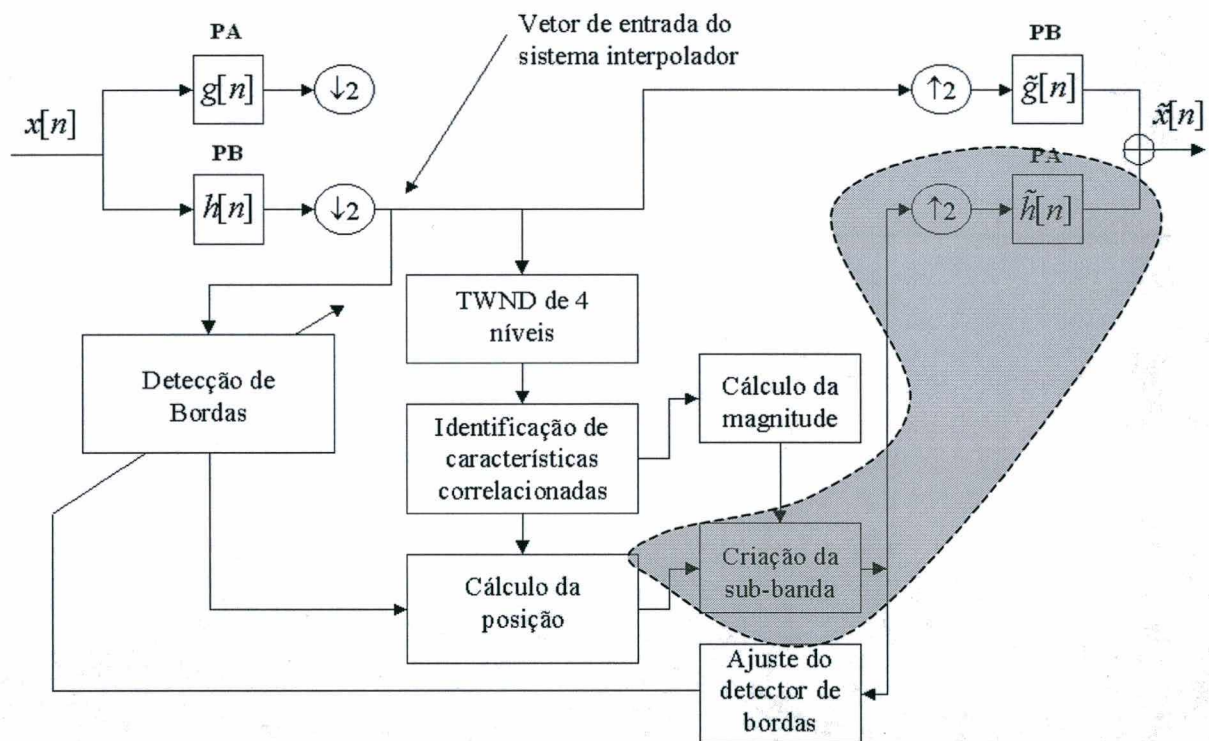


Fig. 5.9 - Reconstrução wavelet a partir da sub-banda estimada e do sinal de entrada

A nova sub-banda estimada corresponde, assim, à entrada de um estágio de síntese juntamente com cada linha do sinal original analisado na entrada, o que conduz a um sinal interpolado com o dobro da dimensão do sinal de entrada. Uma nova imagem de bordas é determinada e o processo se repete, tomando-se agora como elementos de

entrada as colunas da imagem. Ao final, tem-se uma imagem final com dimensão 2 vezes maior do que a imagem inicial.

### 5.2.7 - Ajuste da etapa de detecção de bordas

A etapa de ajuste de detecção consiste em uma etapa não-obrigatória, na qual podem ser feitos ajustes nos parâmetros de detecção de borda, de forma a privilegiar mais pontos de borda, se desejado, de forma a garantir um maior número de características correlacionadas convergentes. Há de se ter o cuidado apenas em não se registrar características em excesso (evidenciando pontos de alta frequência correspondentes a componentes ruidosos, o que pode comprometer o resultado na interpolação).

## 5.3 - Conclusões

O método de interpolação aqui proposto explora matematicamente a preservação de uma característica pouco evidente da transformada *wavelet*, a regularidade. Através dela, é possível estimar o comportamento de componentes de altas frequências, o que foi utilizado como motivação para o desenvolvimento do algoritmo de interpolação.

Como descrito, o algoritmo apresenta correções substanciais em comparação a outros métodos que também fazem uso da preservação de regularidade [20], representando com mais propriedade características de altas frequências necessárias à síntese *wavelet*, visando a obtenção de melhores resultados.

O próximo capítulo ilustra os resultados obtidos para o método de interpolação proposto, comparativamente a métodos clássicos de interpolação de imagens e a métodos baseados em *wavelets*, ratificando o bom desempenho buscado pelo algoritmo.

## Capítulo 6

# RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Na implementação do algoritmo de interpolação, foi utilizado o software MATLAB v. 5.2, em plataforma Windows 98. A escolha, embora não propicie um melhor desempenho em termos de velocidade, permite a obtenção de forma mais transparente de resultados intermediários, que são importantes na descrição do algoritmo. A família de *wavelets* utilizada foi a denominada 'biortogonal 9-7' [21].

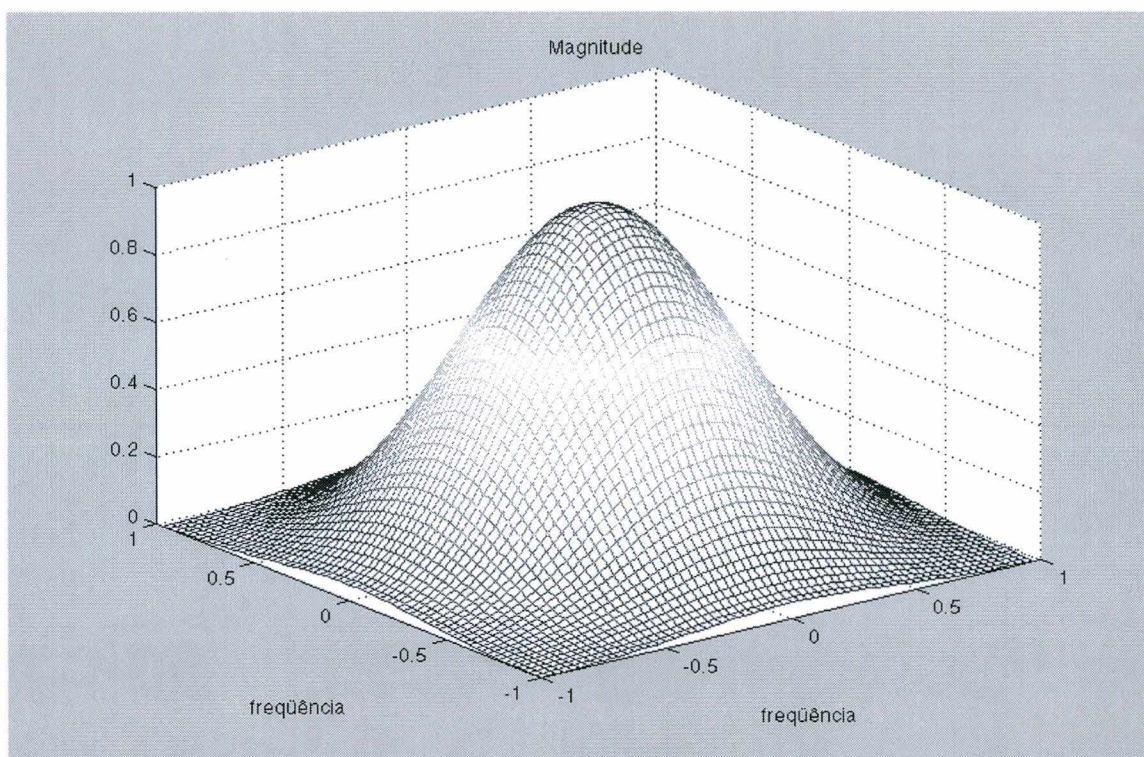
Como forma de verificar a validade e eficiência do algoritmo de interpolação proposto, o mesmo é aplicado a imagens clássicas e os resultados obtidos são comparados quantitativa e subjetivamente a outros métodos clássicos de interpolação (transformada de Fourier discreta (via FFT), bilinear e cúbica) e a métodos baseados em *wavelets*. Assumem-se aqui imagens representadas originalmente em 8 *bits* (para imagens coloridas, são considerados 24 *bits*, 8 *bits* para cada componente de cor), com todas as operações realizadas em ponto flutuante. Um número menor de *bits* na representação das imagens produz resultados inferiores para todas as técnicas de interpolação, não sendo portanto objeto de estudo nas simulações.

O parâmetro utilizado para efeito de comparação é a razão sinal-ruído de pico (PSNR). O cálculo da PSNR é feito entre a imagem interpolada  $x_i[m, n]$  e a imagem  $x_s[m, n]$ , que é a imagem original  $x[m, n]$ , reamostrada por um fator 2. A razão sinal-ruído de pico (PSNR) é calculada entre o sinal reamostrado  $x_s[m, n]$  e o sinal interpolado  $x_i[m, n]$ , normalizados em relação à amplitude máxima, utilizando-se a expressão:

$$PSNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{\frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (x_s[m, n] - x_i[m, n])^2} \right). \quad (6.1)$$



A primeira imagem testada foi a imagem “Lenna”, com dimensões  $256 \times 256$  pixels. Nessa imagem é efetuada uma filtragem passa-baixas (PB) com frequência (normalizada) de corte igual a  $0,25$  ( $0,5\pi$ ); ganho na banda passante igual a 1 e ganho na banda de rejeição igual a zero, com banda de transição conformada por uma função gaussiana de desvio padrão igual a 1 (Fig. 6.1). Após a filtragem, a imagem é dizimada por um fator 2 e processada pelo sistema de interpolação.



**Fig. 6.1 - Resposta em frequência do filtro PB anterior ao processo de interpolação.**

Na etapa seguinte, correspondente à detecção de bordas em multi-escala, há outros parâmetros a serem ajustados. O método de detecção usado é baseado no gradiente, correspondendo à detecção de bordas de Canny [19]. A função gaussiana usada na detecção de bordas foi ajustada de início com desvio padrão igual a 1 e suporte espacial de dimensão  $10 \times 10$  pixels. A constante  $\tilde{\alpha}$  foi arbitrada em 0,1, valor que conduz a uma representação mais fiel dos pontos de bordas [19]. A Fig. 6.2 mostra as imagens original, filtrada/dizimada e de bordas.

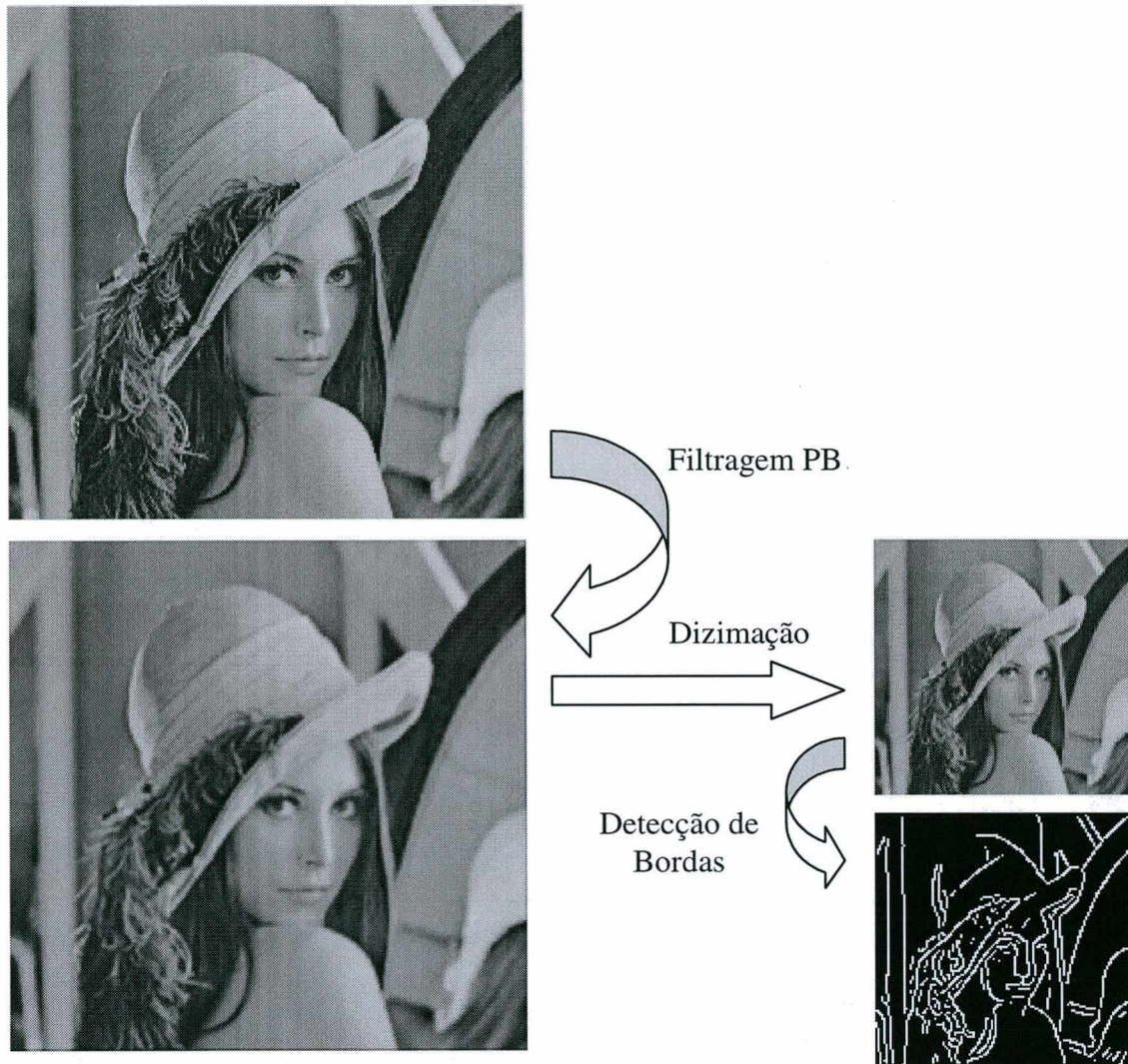


Fig. 6.2 - Procedimento para obtenção da imagem de bordas.

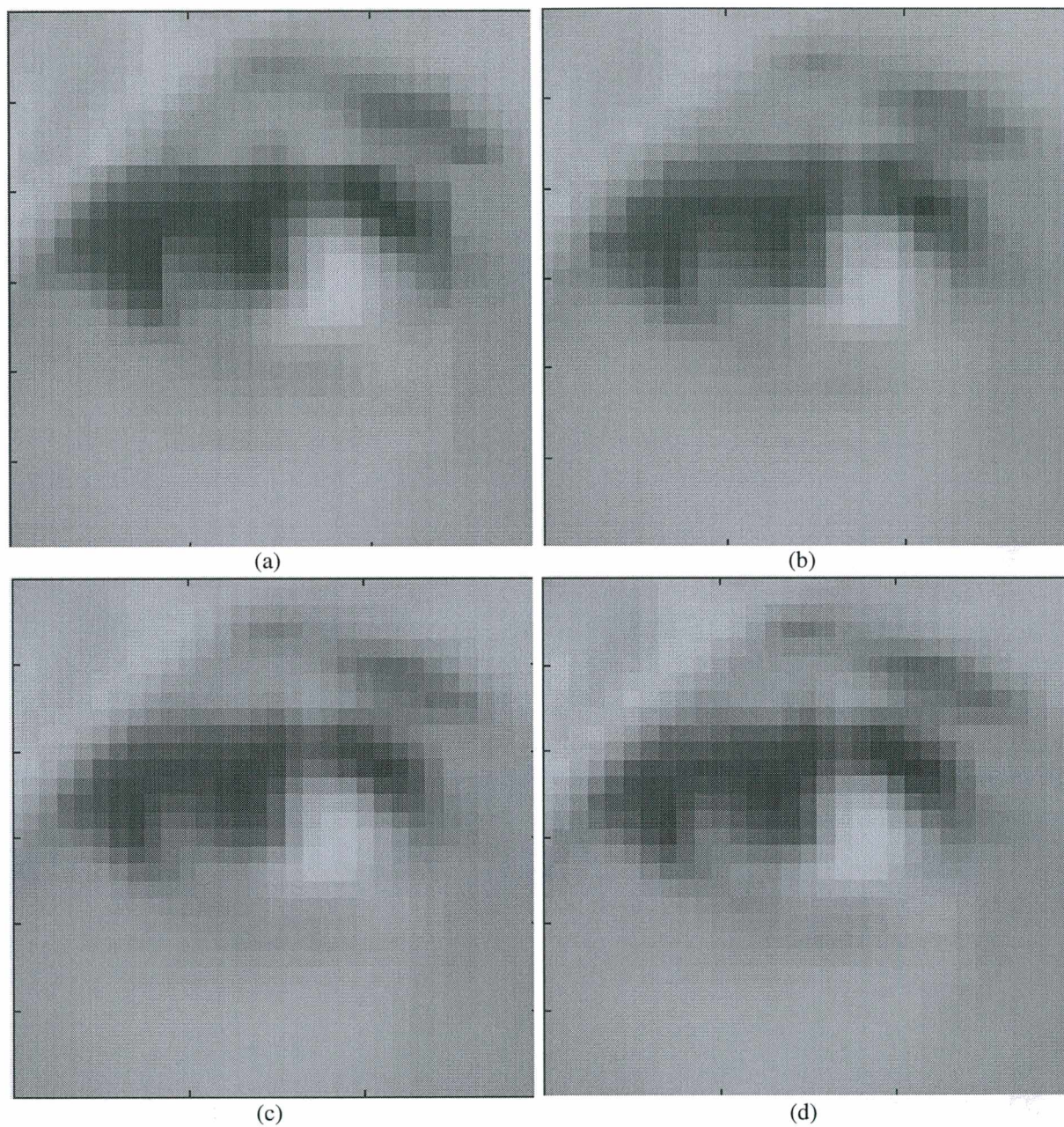
A etapa seguinte consiste na verificação de características das sub-bandas de alta frequências (em linhas e colunas) que converjam para pontos de bordas. A Fig. 6.3 ilustra a imagem de bordas após a verificação de convergência. Tal imagem é meramente ilustrativa, já que o sistema interpolador proposto é unidimensional, produzindo bordas horizontais e verticais isoladamente.



**Fig. 6.3 - Imagens de bordas: (a) anterior à verificação de convergência; (b) após a verificação de convergência**

Definidos os pontos de bordas importantes em linhas, faz-se a extrapolação dos coeficientes em posição e magnitude para a obtenção de estimativas de altas frequências ao longo das linhas, quando então é feita a síntese *wavelet* linha por linha, produzindo como saída uma imagem com o dobro do número de colunas. O procedimento é então repetido para as colunas, em que outra imagem de bordas é calculada, e os procedimentos de extrapolação e síntese são novamente executados, tendo-se ao final uma imagem com o dobro da dimensão da imagem de entrada.

A Fig. 6.4 mostra um detalhe da imagem “Lenna” (olho direito) obtido por interpolação, usando três métodos clássicos (FFT, bilinear e cúbica) e o método proposto. A Tabela 6.1 mostra os valores de PSNR obtidos, em relação à imagem original. É apresentado também o valor de PSNR para o método proposto em [20].



**Fig. 6.4 - Imagens interpoladas - detalhes. (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto.**

**Tabela 6.1 - Valores de PSNR para a “Lenna” após a interpolação**

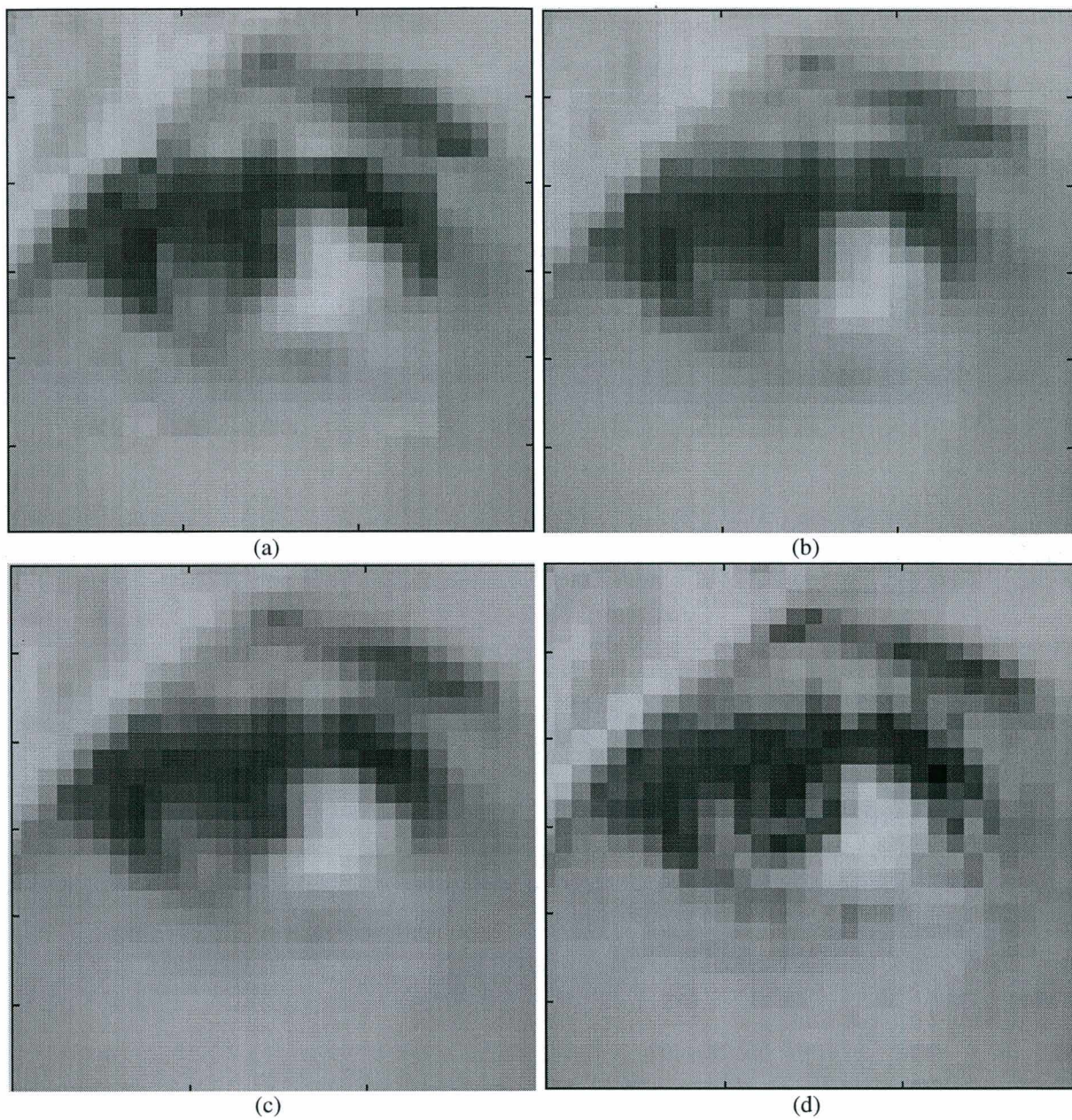
Método	PSNR (dB)
FFT	28,0866
Bilinear	27,4465
Cúbica	27,8819
<i>Wavelet</i> com correção de bordas	28,2206

A Fig. 6.5 ilustra os resultados em dimensões reais.



**Fig. 6.5 - Imagens interpoladas. (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto.**

A substituição do filtro PB geral pelo filtro PB *wavelet* de análise, embora recaia em uma situação particular de filtragem, produz também sensível melhora no resultado dos métodos avaliados, pois a banda de passagem do filtro PB *wavelet* é maior do que a do filtro PB geral. Os resultados são ilustrados na Fig. 6.6, onde se mostram detalhes das imagens. A Tabela 6.2 apresenta os valores de PSNR para o método proposto, comparativamente aos métodos espaciais clássicos e aos métodos de interpolação por FFT e *wavelet* sem correção de bordas [20].



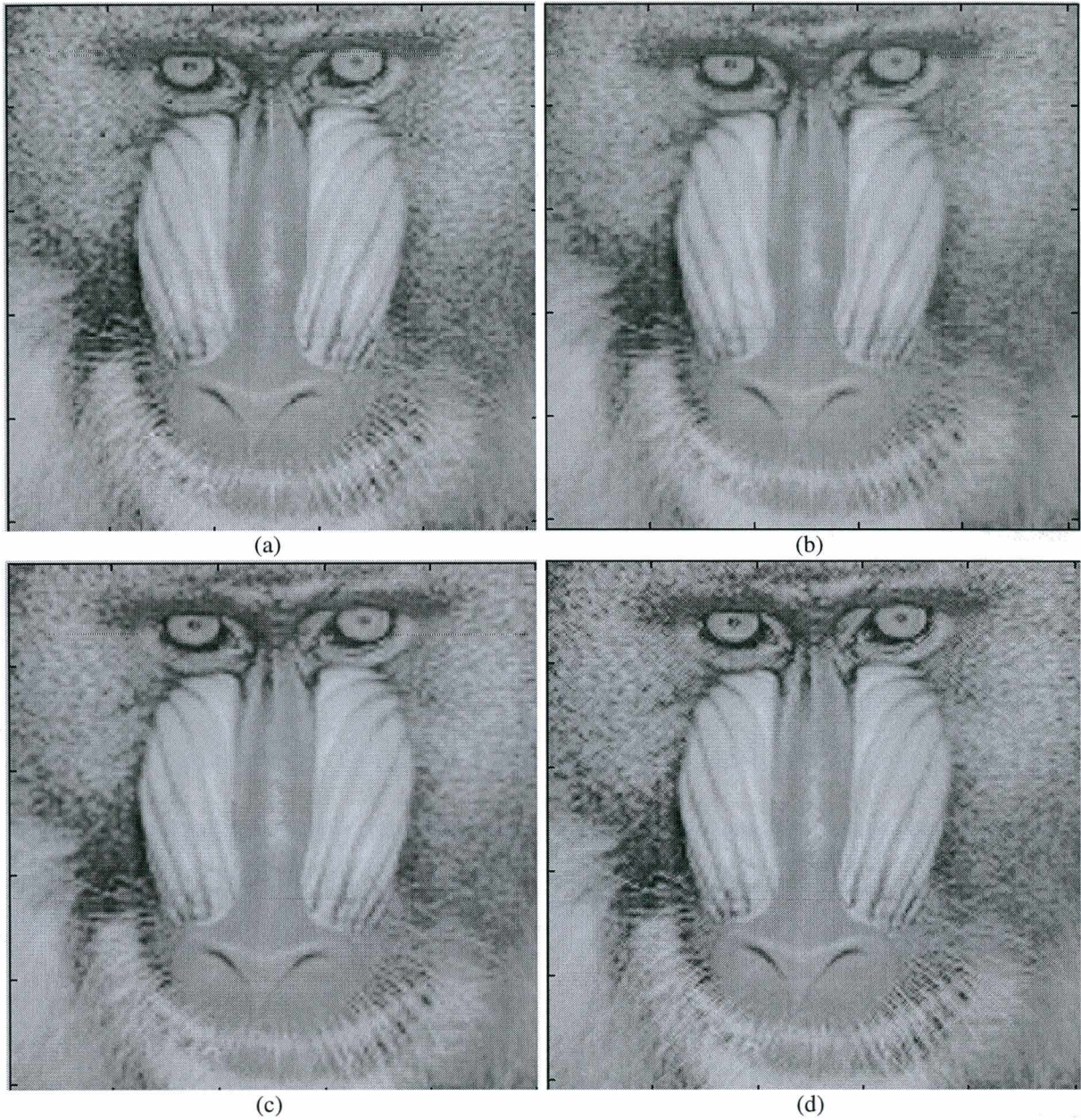
**Fig. 6.6 - Imagens interpoladas (degradação - filtro PB *wavelet*). (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto.**

Tabela 6.2 - PSNR para a “Lenna” (degradação - filtro PB *wavelet*)

Método	PSNR (dB)
FFT	28,7163
Bilinear	28,8046
Cúbica	29,4288
Wavelet sem correção de bordas	31,7
Método proposto	36,758

Como visto, o método de interpolação proposto preserva as bordas reais da imagem original, bem como alguns pontos de textura, de forma mais eficiente do que outros métodos avaliados. De forma geral, há uma melhora significativa tanto na PSNR em relação aos outros métodos como subjetivamente, já que na imagem “Lenna” há mais bordas de objetos do que de textura. O mesmo algoritmo é aplicado à imagem “Baboon”, mais rica em bordas de áreas texturizadas. Os resultados são mostrados na Fig. 6.7. A Tabela 6.3 mostra os valores de PSNR obtidos para os quatro casos e para o método baseado em *wavelets* sem correção de bordas [20]. A melhora subjetiva não é evidente, já que bordas decorrentes de pontos de textura não são privilegiadas pelo método proposto.





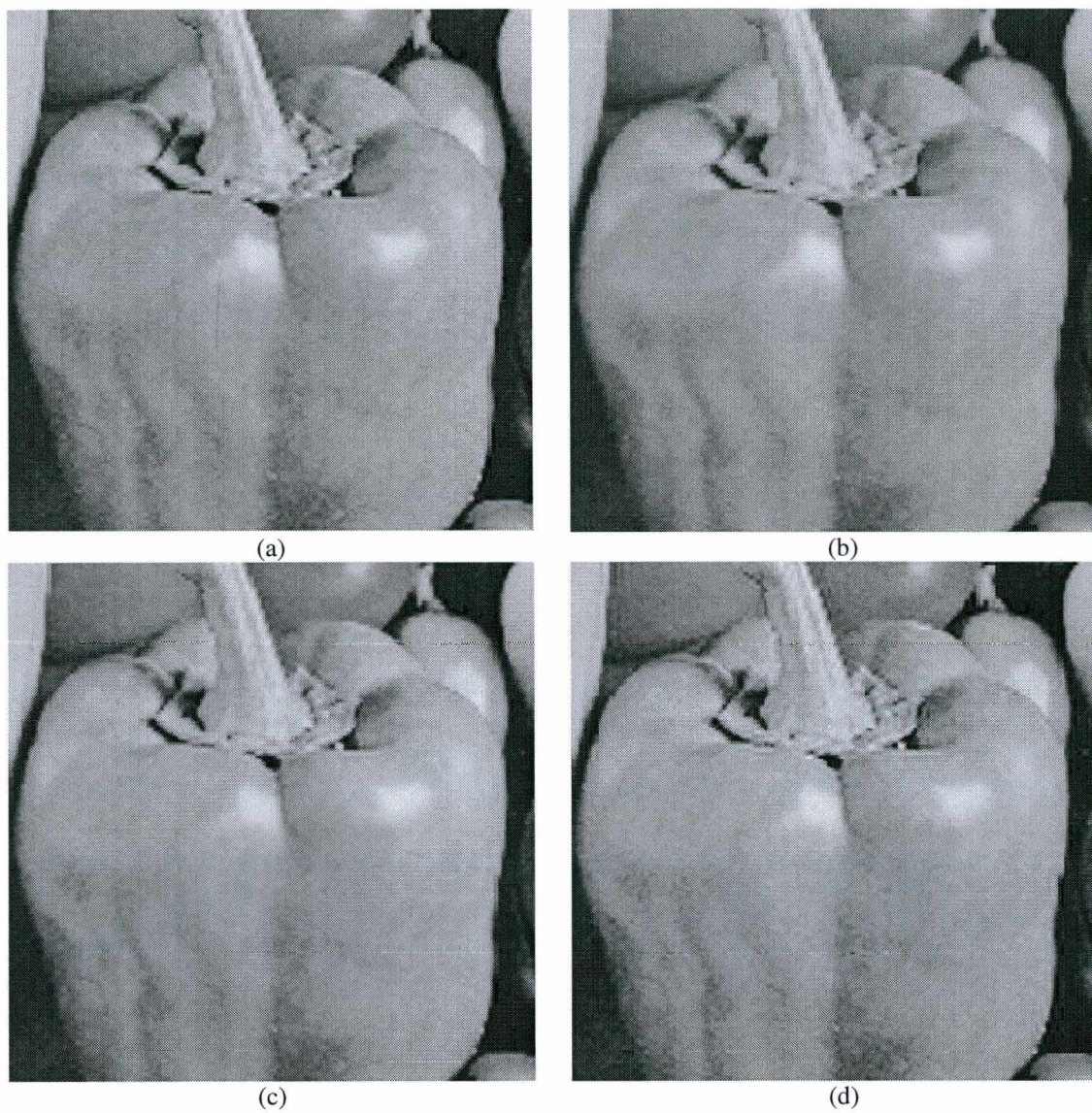
**Fig. 6.7 - Imagens interpoladas - 'Baboom'. (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto.**

**Tabela 6.3 - Valores de PSNR para a imagem "Baboon"**

Método	PSNR (dB)
FFT	24,4827
Bilinear	24,7551
Cúbica	24,9575
Wavelet sem correção de bordas	25,1
Método proposto	26,0815

Como observado, imagens que apresentam riqueza em pontos de textura são pouco privilegiadas pelo método de interpolação proposto. Embora a melhora na PSNR seja evidente em relação aos demais métodos de interpolação, a melhora subjetiva é pouco perceptível. Todavia, dada a flexibilidade do método, é possível, pelo ajuste adequado do detector de bordas, privilegiar mais ou menos pontos relativos a altas frequências, de forma a ser bastante investigativo o processo de se estimar pontos de bordas texturizadas.

Como último teste, este de caráter subjetivo, insere-se uma imagem da qual não se conhece a origem, realizando-se diretamente a interpolação sem executar as etapas de filtragem passa-baixas e dizimação. Os resultados obtidos para cada método, tomando-se a imagem "Peppers", é ilustrado na Fig. 6.8.



**Fig. 6.8 - Imagens interpoladas - 'Peppers' (detalhe). (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) pelo método proposto.**

Como observado nos três exemplos de imagens tomadas, o método proposto atinge melhora na PSNR em relação a outros métodos (quando é possível seu cálculo), embora em termos subjetivos tal melhora seja percebida sobretudo quando se manipulam imagens ricas em bordas bem-definidas, e quando o efeito integrador do olho humano é mais representativo (já que as características de altas frequências inseridas são mais agradáveis a distâncias maiores).

O capítulo seguinte expõe as conclusões finais do método de interpolação aqui proposto, oferecendo também sugestões para trabalhos futuros nessa área.

## Capítulo 7

---

# CONCLUSÕES

---

O método de interpolação baseado em *wavelets* aqui descrito evita problemas provocados por métodos tradicionais de interpolação (bilinear e cúbica). Ao invés de fazer considerações sobre a continuidade do sinal e de suas derivadas, o método proposto computa uma medida de regularidade local, preservando tal regularidade na imagem interpolada. Isto resulta em um método de interpolação que produz uma melhoria quantitativa e também subjetiva. O algoritmo é superior aos métodos tradicionais comparados principalmente para bordas fortes e bem definidas que limitam regiões suaves de alta regularidade.

A técnica de interpolação por preservação de regularidade apresenta a vantagem de ser flexível no que se refere à facilidade de ajuste de seus parâmetros. Um exemplo disso está na manipulação dos parâmetros da etapa de detecção de bordas. É possível privilegiar na interpolação de uma imagem arbitrária *pixels* desta referentes a regiões texturizadas, de forma a apresentar ao menos quantitativamente resultados superiores aos de métodos que operam no domínio espacial. Em outras palavras, o método possibilita o ajuste dinâmico das bordas conforme o grau de contribuição de altas frequências que se deseja no resultado, quando métodos tradicionais, se permitirem tal intervenção, o fazem de forma dependente da imagem (por exemplo, técnicas que envolvem RNA).

No que se refere à utilização específica da transformada *wavelet* como alternativa à utilização de outras transformadas conhecidas para a interpolação, sua utilização traz grandes vantagens. Primeiramente, o efeito de bloco, usual em transformadas como a DFT, são totalmente removidos. Além disso, a conexão das *wavelets* com a análise multi-resolução de sinais permite explorar com mais flexibilidade regiões de altas frequências na imagem, sem desconsiderar a informação espacial.

Como observado nos resultados expostos no Capítulo 6, a utilização da transformada *wavelet* na interpolação traz como vantagens um reforço de bordas na imagem interpolada. Além disso, pelo fato do método proposto lidar diretamente com técnicas de detecção de borda, é possível, por meio do aprimoramento de tais técnicas, realçar ainda mais pontos pertencentes a bordas, o que incentiva o desenvolvimento de novas pesquisas dentro desse tema.

Uma sugestão para trabalhos futuros reside na análise de pontos de textura na etapa de detecção de bordas, que são pouco privilegiados quando a abordagem é feita de forma unidimensional (já que o método proposto, mesmo privilegiando bordas de forma não-separável, utiliza a transformada *wavelet* em duas direções). Uma formulação matemática mais consistente do comportamento da transformada *wavelet* para tal caso pode, efetivamente, conduzir a resultados mais eficientes do que os aqui apresentados, sobretudo em termos subjetivos. Outra sugestão de trabalho envolve a utilização de transformadas direcionais, permitindo a preservação da regularidade em direções arbitrárias, e assim estimando de forma mais eficaz bordas diagonais e/ou de textura. Além disso, um estudo mais detalhado sobre o projeto do filtro passa-baixas de entrada pode vir a otimizar o resultado do sistema interpolador, bem como um estudo dos parâmetros da etapa de detecção de bordas e a correspondência desses à técnica de preservação de regularidade através das escalas. Como sugestão final, um projeto de bancos de filtros *wavelet* específicos para interpolação de imagens pode conduzir a resultados ainda melhores.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] RABINER, L. R.; GOLD, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, 1975.
- [2] FRASER, D. Comparison at High Spatial Frequencies of Two-Pass and One-Pass Geometric Transformation Algorithms, *CVGIP*, Vol. 46, No.3, pp.267-283, 1989.
- [3] CARDOSO, F. *Algoritmos Genéticos para Interpolação Não-Linear de Imagem e Decodificação de Códigos Lineares*. Campinas, 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas.
- [4] COHEN, M. F.; DeROSE, T. D.; FOURNIER, A. *et al.* Wavelets and their Applications in Computer Graphics, *Siggraph '95 Notes*, 1995.
- [5] OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-time Signal Processing*, Prentice-Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, 1989
- [6] FARIA, R. R. A. *Wavelets: Teoria e Aplicações*. LSI- Escola Politécnica da USP, 1994.
- [7] MEYER, Y. *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [8] DAUBECHIES, I. Ten Lectures on Wavelets. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics (SIAM)*, Vol. 61, Philadelphia, 1992.
- [9] STRANG, G. *Creating and Comparing Wavelets*. Department of Mathematics, MIT, Cambridge, Massachusetts, 1994.
- [10] STRANG, G. Wavelets and Dilation Equations: a Brief Introduction. *SIAM Rev*, Vol. 31, pp.614-627, 1989.
- [11] MALLAT, S. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, pp.674-693, Jul. 1989.
- [12] VAIDYANATHAN, P. P. *Multirate Systems and Filter Banks*. 1st Edition, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1993.
- [13] VETTERLI, M.; HERLEY, C. *Wavelets and Filter Banks: Theory and Design*.

- IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing*, Vol. 9, pp. 2207, 1992.
- [14] HWANG, W.; MALLAT, S. (1992). Singularity Detection and Processing with Wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 38, No. 2, pp. 617-643, Mar. 1992.
- [15] WITKIN, A. Scale Space Filtering. *Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 1019-1021, 1983.
- [16] MALLAT, S.; ZHONG, S. Characterization of Signals from Multiscale Edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 14, No. 7, pp. 710-732, 1992.
- [17] KUNT, M. *Traitement Numérique des Signaux*, Ed. Dunod, 1980.
- [18] HILDRETH, E. C.; MARR, D. Theory of Edge Detection, *Proc. R. Soc. London Ser.B*, Vol. 207, pp. 187-217, 1980.
- [19] CANNY, J. F. A Computational Approach to Edge Detection, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 8, pp. 679-698, 1986.
- [20] CAREY, W. K.; CHUANG, D. B.; HEMAMI, S. S. Regularity-Preserving Image Interpolation. *International Conference on Image Processing*, 1997.
- [21] ANTONINI, M.; BARLAUD, M.; DAUBECHIES, I. *et al.* Image Coding Using Wavelet Transform, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 1, pp. 205-220, Apr. 1992.