Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Estabilização Uniforme de Soluções de Equações Diferenciais Parciais de Evolução

Claiton Petris Massarolo

Florianópolis
Março de 2000

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Estabilização Uniforme de Soluções de Equações Diferenciais Parciais de Evolução

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Claiton Petris Massarolo
Florianópolis
Março de 2000

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC-Orientador)

Gustavo Perla Menzala

Prof. Dr. Gustavo Perla Menzala (UFRJ/LNCC)

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC)

Jardel Morais Pereira

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira (UFSC)

Florianópolis, 31 de março de 2000.

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Professor Ruy Coimbra Charão, pelo trabalho, apoio e dedicação na condução desta dissertação e principalmente pela sua qualidade mais notável, de ser um grande amigo;
- À CAPES pelo suporte financeiro durante estes dois anos de mestrado e durante a graduação, através do PET-Programa Especial de Treinamento, sem o qual teria sido impossível a realização deste e de muitos outros trabalhos;
- Ao Professor Félix P. Quispe Gómez e ao colega Rafael Casali, pelos auxílios e assistências na diagramação desta dissertação através de dicas preciosas no manuseio do LaTeX;
- Ao Professor Joel Santos Souza pelas sugestões e conselhos concernentes a este trabalho;
- Ao Professor Gustavo Perla Menzala pelas importantes sugestões prestadas a esta dissertação e em especial pelas indicações de algumas referências bibliográficas;
- A todos os colegas da pós-graduação pelos momentos de convívio, de labuta e de alegrias durante todos esses anos;
- Ao meu amigo Gentil Lopes da Silva, pelas discussões filosóficas sobre a arte da matemática e também ao amigo Marcos Vinícios Travaglia, pela sua inestimável amizade e ajuda a mim dispensadas, desde os remotos tempos de graduação.

Resumo

Nesta dissertação estudamos e aplicamos algumas técnicas de estabilização de soluções para equações diferenciais parciais de evolução. São desenvolvidos essencialmente três métodos para o estudo do comportamento assintótico das soluções, conhecidos como Método de Multiplicadores, Método de Nakao e Método de Liapunov. São apresentados e resolvidos, no sentido da estabilização, exemplos de aplicações usando esses métodos.

Abstract

In this dissertation, we study and apply some techniques of stabilization of solutions for evolution partial differential equations. Three methods are essentially developed to the study of asymptotic behavior, known as Multipliers Method, Nakao's Method and Liapunov's Method. By using these methods, we present and solve, in the sense of stabilization, examples of applications.

Conteúdo

Introdução

O principal objetivo do nosso trabalho é estudar alguns métodos e técnicas de estabilização de soluções para equações diferenciais parciais de evolução, isto é, equações diferenciais parciais que também envolvem o tempo como variável independente.

Cada modelo tem associado um funcional de energia $E(t)$. Entendemos como estabilização o decaimento para zero ou o comportamento assintótico, no tempo, dessa energia que poderia ser em alguma taxa (por exemplo, algébrica ou exponencial) ou, ainda, o decaimento da norma uniforme da solução, isto é, queremos estudar problemas em que

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = 0 \quad \text{ou em algumas situações} \quad \lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |u(x,t)| = 0$$

Para que sejam válidas este tipo de análise, é necessário garantir primeiro a existência de solução global do problema. Em geral isto não é possível, por exemplo, considere o problema de Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} u'' - u^3 = 0 & u = u(t)\ ,\ t > 0 \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b \qquad a, b \in \mathbb{R} \quad , & b^2 - \frac{a^4}{2} > 0 \quad \text{e} \quad b > 0 \end{cases}$$

A energia total do sistema (1) é obtida multiplicando-se (1) por u_t. Isto é

$$u_{tt}u_t - u^3 u_t = 0$$

Equivalentemente

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u_t^2}{2} - \frac{u^4}{4}\right] = 0$$

Agora, definindo-se $E = E(t)$ por $E(t) = u_t^2 - \frac{u^4}{2}$, é fácil ver que $E(t)$ é constante para todo t onde $u = u(t)$ esteja definida. De fato

$$\frac{dE}{dt} = 2\frac{d}{dt}\left[\frac{u_t^2}{2} - \frac{u^4}{4}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad E(t) = \text{constante}$$

Além disso

$$E(0) = u_t^2(0) - \frac{u^4(0)}{2} = b^2 - \frac{a^4}{2} > 0$$

Assim $u_t^2 = E(0) + \frac{u^4}{2}$ $(E(0) > 0)$ ou seja $u_t = \sqrt{E(0) + \frac{u^4}{2}} > 0$. Portanto como $b > 0$ temos uma equação diferencial ordinária na forma separável $\frac{du}{dt} = \sqrt{E(0) + \frac{u^4}{2}}$.

Integrando obtemos que

$$t = \int_0^t ds = \int_{u(0)}^{u(t)} \left[E(0) + \frac{s^4}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} ds = \int_a^{u(t)} \frac{ds}{\sqrt{E(0) + \frac{s^4}{2}}}$$

Agora quando $t \to T = \int_a^\infty \frac{ds}{\sqrt{E(0)+\frac{s^4}{2}}}$* então $u(t) \to \infty$ e portanto o problema (1) não possuí solução global.

Este exemplo ilustra o fato que nem todas as equações possuem solução global.

Um exemplo relativamente simples em que uma equação diferencial parcial não possuí solução global pode ser visto em [21], capítulo 1, seção 2. Trata-se de uma equação da onda não linear do tipo

$$u_{tt} - \Delta u = u^p, \qquad p \geqslant 2,\ p \in \mathbb{N}$$

O estudo da estabilização de soluções exige a existência de soluções globais. Deste modo, consideraremos neste trabalho apenas problemas que possuem solução global. Naturalmente, nosso objetivo principal não é o estudo ou a demonstracão de existência de soluções globais para os problemas que abordaremos nesta dissertação. A esse respeito, durante o trabalho, apenas daremos rápidas indicações e/ou referências bibliográficas de como a existência global é obtida.

*Note que T é finito. De fato
$\int_a^\infty \frac{ds}{\sqrt{E(0)+\frac{s^4}{2}}} < \int_a^\infty \frac{ds}{\sqrt{\frac{s^4}{2}}} = \sqrt{2}\int_a^\infty \frac{ds}{s^2} = \frac{\sqrt{2}}{a} < \infty$

Neste trabalho estudamos essencialmente três métodos, que são aplicados para o estudo de estabilização de equações diferenciais de evolução. Os métodos que estudamos são os de *Multiplicadores, Nakao* e *Liapunov.* Existem vários outros métodos para estudar o mesmo tipo de problema que não serão considerados aqui. Por exemplo, ver trabalho de A. Haraux [4]. Além dessa referência e das referências citadas nas introduções de cada capítulo deste trabalho, também mencionamos os trabalhos de T. Cazenave - A. Haraux [2], K. Liu [11] e B. Y. Zhang [27] que se referem ao estudo de propriedades assintóticas das soluções de modelos de evolução.

Este trabalho está organizado através de três capítulos e um apêndice.

O primeiro capítulo aborda o Método de Multiplicadores para estudar estabilização da energia local para a equação da onda com potencial tempo-dependente. Um adequado multiplicador é utilizado. Aplicando um outro multiplicador se obtem também a limitação da energia.

O segundo capítulo descreve o Método de Nakao. Estudamos em detalhes o Lema de Nakao aplicando-o para obter dois Teoremas Abstratos de estabilização da energia para duas equações de evolução não lineares abstratas de primeira e segunda ordem, com certas hipóteses nos operadores que as definem. Apresentamos duas aplicações do Teorema Abstrato, para uma EDO e outra para uma EDP não linear.

O terceiro e último capítulo descreve o Método de Liapunov que consiste em perturbar adequadamente o funcional de energia do sistema para obter um outro funcional, chamado de Funcional de Liapunov através do qual se obtem a estabilização da energia. A idéia original provém de EDO's e um exemplo sobre isso é mostrado no capítulo. Também apresentamos um exemplo para uma EDP.

Outros exemplos, aplicações e generalizações dos métodos são mencionados nas introduções dos capítulos um e dois e nas observações finais do capítulo três.

No apêndice, no final desta dissertação, apresentamos resultados básicos tais como as desigualdades de Hölder e Poincaré e algumas imersões em Espaços de Sobolev.

Capítulo 1

Método de Multiplicadores

1.1 Introdução

Neste capítulo, baseado em [14], usaremos o método de multiplicadores para mostrar estabilização em uma equação de ondas definida em um domínio não limitado. O modelo que consideramos pode ser dissipativo ou não. No caso não dissipativo a energia é conservada em todo tempo. Naturalmente que nesse caso a energia não decai, permanece constante. Então o que se faz nesse tipo de problema é estudar a estabilização da energia local, isto é, a energia concentrada em uma parte do domínio. Mesmo quando a energia não é conservada (podem acontecer situações em que a energia cresça) existem casos em que somente se consegue provar estabilização da energia local.

A idéia básica do método de multiplicadores é usar uma função M, denominada de *multiplicador*, que atua nas soluções da equação diferencial, de tal modo que ao multiplicar a equação diferencial por essa função M se obtenha uma identidade adequada. O uso de multiplicadores para mostrar comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais de evolução iniciou-se essencialmente nos trabalhos de H. Poincaré, A. Noether, J. Hadamard e mais recentemente com W. Strauss, C.Morawetz, J. Ralston entre outros (Ver por exemplo [9], [16], [17] e [25]).

Os multiplicadores são aqueles associados com alguma transformação sob a qual a equação é invariante. Por exemplo, o grupo das translações $\{T(\epsilon)\}_{\epsilon \geqslant 0}$

$$\begin{array}{c} T(\epsilon) \\ u(\mathbf{x},t) \longmapsto u(\mathbf{x},t+\epsilon) \end{array}$$

produz o multiplicador $\frac{\partial u}{\partial t}$, que é o gerador infinitesimal de $\{T(\epsilon)\}_{\epsilon \geqslant 0}$.

O multiplicador dado pelo gerador infinitesimal das dilatações

$$\mathbf{x} \longmapsto \lambda \mathbf{x}$$

isto é, tranformações do tipo

$$\begin{array}{c} T(\lambda) \\ u(\mathbf{x},t) \longmapsto \lambda^{\frac{n-1}{2}} u(\lambda \mathbf{x}, \lambda t) \end{array}$$

onde $\lambda = 1 + \epsilon,\ \epsilon > 0$, é dado por

$$M(u) = tu_t + \mathbf{x} \cdot \nabla u = tu_t + r\frac{\partial u}{\partial r}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \nabla u$ é a derivada radial de u e $r = \|\mathbf{x}\|$.

Nesta seção usaremos o multiplicador

$$M(u) = (r^2 + t^2)u_t + 2rtu_r + (n-1)tu$$

para mostrar estabilização da energia local para a equação da onda com potencial tempo-dependente.

Também é muito usado para a equação da onda o multiplicador (Ver [16] e [17])

$$tu_t + ru_r + (n-1)u$$

Esse multiplicador também se aplica para estudar estabilização do sistema de ondas elásticas (Ver [3] e [5]).

Mais recentemente multiplicadores localizados tem sido utilizados para estudar comportamento da energia, em especial para equação da onda, quando a dissipação é localizada em apenas uma parte do domínio. Por exemplo, o multiplicador

$$M(u) = u_t + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + g(\mathbf{x})u$$

onde $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ é um campo de classe C^1 e $g(\mathbf{x})$ uma função escalar que são efetivas apenas em certa parte do domínio com por exemplo uma vizinhança de parte da fronteira do domínio (Ver [12], [19], [26] e suas referências).

Para um estudo mais detalhado do Método de Multiplicadores podem ser vistos os trabalhos de W. Strauss ([25]) e V. Komornik ([7] e [8]).

Consideremos então a seguinte equação da onda

$$\Box u + q(\mathbf{x}, t)u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \tag{1.1}$$

$(n \geqslant 3)$ com dados iniciais $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em t=0.

Vamos assumir que a função

$$q = q(\mathbf{x}, t), \quad q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

é suficientemente regular de tal modo que a solução $u = u(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, esteja na classe $C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Nota: A existência de uma única solução global de (1.1) com dados iniciais $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$, $u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x})$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ para $n \geqslant 3$ pode ser provado pelo método standard de ponto fixo. Ver [20].

Proposição 1.1. *(Velocidade Finita de Propagação) Seja $u(\mathbf{x}, t)$ a solução de* (1.1) *com dados iniciais u_0 e u_1 em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad se \quad \|\mathbf{x}\| \geqslant |t| + R$$

onde R é o raio de uma bola centrada na origem e que contém os suportes de u_0 e u_1.

Essa propriedade é bem conhecida e a demonstração é standard e pode ser vista em

[20].

Vamos agora obter o funcional de energia associada à equação (1.1). Multiplicando a equação (1.1) por u_t temos:

$$(1.2) \qquad (\Box u + q(\mathbf{x},t)u)\, u_t = (u_{tt} - \Delta u + qu)\, u_t = u_{tt}u_t - \Delta u u_t + quu_t = 0$$

Utilizando as relações abaixo facilmente verificáveis

a) $u_t u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{u_t^2}{2}\right]$

b) $-u_t \Delta u = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\|\nabla u\|^2}{2}\right] - \operatorname{div}(u_t \nabla u)$

c) $quu_t = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{qu^2}{2}\right] - \frac{q_t u^2}{2}$

em (1.2) obtemos

$$(1.3) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(u_t^2 + \|\nabla u\|^2 + qu^2\right)\right] - \operatorname{div}(u_t \nabla u) = \frac{q_t u^2}{2}$$

Integrando a expressão (1.3) na variável $\mathbf{x}$ em todo o $\mathbb{R}^n$ obtemos

$$(1.4) \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\left(u_t^2 + \|\nabla u\|^2 + qu^2\right)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_t \nabla u)\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} q_t u^2\, dx$$

Agora, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_t \nabla u)\, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_t \nabla u)\, dx = \int_{\partial\Omega} (u_t \nabla u) \cdot \eta\, ds = 0$$

onde $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x}\| \leqslant |t| + R\}$, devido a propriedade de velocidade finita de propagação, onde $R > 0$ é o raio da bola que contém o suporte dos dados iniciais de u, isto é $\operatorname{supp} u_t(\cdot, 0)$, $\operatorname{supp} u(\cdot, 0) \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x}\| \leqslant R\}$ e do teorema da divergência. Assim

$$(1.5) \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\left(u_t^2 + \|\nabla u\|^2 + qu^2\right)\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} q_t u^2\, dx$$

Chamando $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(u_t^2 + \|\nabla u\|^2 + qu^2\right)\,dx$ e integrando a expressão (1.5) de 0 a t obtemos

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \frac{d}{d\xi}E(\xi)\,d\xi = \int_0^t \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2}\left(u_t^2 + \|\nabla u\|^2 + qu^2\right)\,dx\,d\xi$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} q_t(\mathbf{x},\xi)u^2(\mathbf{x},\xi)\,dx\,d\xi$$

Portanto

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} q_t(\mathbf{x},\xi)u^2(\mathbf{x},\xi)\,dx\,d\xi + E(0) \tag{1.6}$$

Observações

- $E(t)$ é denominada a *energia total*, ou simplesmente a energia do sistema.
- Se $q = q(\mathbf{x})$ é independente de t, então é imediato da expressão (1.6) que $E(t) = E(0) = \text{cte}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Se $q = q(\mathbf{x}, t)$ e $q_t(\mathbf{x}, t) \leqslant 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então de (1.5) podemos concluir que $E(t)$ é não crescente.
- Definimos a **energia local** do sistema como

$$E_R(t) = \frac{1}{2}\int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant R}\left(u_t^2 + \|\nabla u\|^2 + qu^2\right)\,dx \quad \text{para } R > 0$$

1.2 Identidades Fundamentais

A seguir, usando multiplicadores, mostraremos algumas identidades que serão utéis para o estudo do comportamento assintótico da energia local $E_R(t)$ para t assumindo valores grandes. Observar que os dados iniciais no tempo $t = 0$ pertencentem a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 3$, isto é, os dados iniciais são de suporte compacto.

Lema 1.1. *Seja* $M(u) = \left(r^2+t^2\right)u_t + 2rtu_r + (n-1)tu$, *então*

$$M(u)\left[\Box u + qu\right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{F} + g \tag{1.7}$$

Onde

$$\begin{aligned}
r &= \|\mathbf{x}\| && (\textit{Norma de } \mathbf{x})\\
u_r &= \frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\nabla u && (\textit{Derivada radial de } u)\\
\Box u &= u_{tt} - \Delta u && (\textit{Dalembertiano de } u)\\
e(u) &= \frac{1}{2}\left(u_t^2 + \|\nabla u\|^2 + qu^2\right)\\
f(\mathbf{x},t) &= \left(r^2+t^2\right)e(u) + 2rtu_ru_t + (n-1)tuu_t - \frac{(n-1)}{2}u^2\\
\mathbf{F}(\mathbf{x},t) &= 2t\left(e(u) - u_t^2\right)\mathbf{x} - M(u)\nabla u\\
g(\mathbf{x},t) &= -u^2\left[2tq + rtq_r + \frac{r^2+t^2}{2}q_t\right]
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$M(u)\left(\Box u + qu\right) = \left(\left(r^2+t^2\right)u_t + 2rtu_r + (n-1)tu\right)\left(u_{tt} - \Delta u + qu\right) =$$

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{\left(r^2+t^2\right)u_tu_{tt}}_{1} & \underbrace{-\left(r^2+t^2\right)u_t\Delta u}_{2} & \underbrace{+\left(r^2+t^2\right)quu_t}_{3}\\
\underbrace{+2rtu_ru_{tt}}_{4} & \underbrace{-2rtu_r\Delta u}_{5} & \underbrace{+2rtquu_r}_{6}\\
\underbrace{+(n-1)tuu_{tt}}_{7} & \underbrace{-(n-1)tu\Delta u}_{8} & \underbrace{+(n-1)tqu^2}_{9}
\end{array}$$

Usando as identidades

(1) $\left(r^2+t^2\right)u_tu_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\left(r^2+t^2\right)u_t^2}{2}\right] - tu_t^2$

(2) $-\left(r^2+t^2\right)u_t\Delta u = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\left(r^2+t^2\right)\|\nabla u\|^2}{2}\right] + \operatorname{div}\left[-\left(r^2+t^2\right)u_t\nabla u\right] + 2ru_ru_t - t\|\nabla u\|^2$

(3) $\left(r^2+t^2\right)quu_t = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(r^2+t^2\right)q\frac{u^2}{2}\right] - tqu^2 - \frac{\left(r^2+t^2\right)q_tu^2}{2}$

(4) $2rtu_ru_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[2rtu_ru_t\right] + \operatorname{div}\left[-tu_t^2\mathbf{x}\right] - 2ru_ru_t + ntu_t^2$

(5) $-2rtu_r\Delta u = \operatorname{div}\left[t\|\nabla u\|^2\mathbf{x} - 2rtu_r\Delta u\right] - (n-2)t\|\nabla u\|^2$

(6) $2rtquu_r = \text{div}\left[tqu^2\mathbf{x}\right] - ntqu^2 - rtq_ru^2$

(7) $(n-1)tuu_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[(n-1)tuu_t - \frac{(n-1)u^2}{2}\right] - (n-1)tu_t^2$

(8) $-(n-1)tu\Delta u = \text{div}\left[-(n-1)tu\nabla u\right] + (n-1)t\|\nabla u\|^2$

(9) $(n-1)tqu^2 = (n-1)tqu^2$

Agora, somando as relações de 1 a 9 acimas e agrupando os termos, obtemos o resultado desejado.

Nota: Para calcular as relações de 1 a 9 usamos

- $\nabla(u^2) = \nabla(u\,u) = u\,\nabla u + \nabla u\,u = 2u\,\nabla u$
- $\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = \nabla\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right) = \frac{-2}{\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{-2}{r^4}\mathbf{x}$
- $\nabla\left(r^2+t^2\right) = \nabla\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+t^2\right) = 2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 2\mathbf{x}$
- $\nabla\left(\mathbf{x}\cdot\nabla u\right)\cdot\nabla u = \|\nabla u\|^2 + \frac{r}{2}\left(\|\nabla u\|^2\right)_r$

□

Lema 1.2. *Podemos reescrever a identidade* (1.7) *como*

$$M(u)\left[\Box u + qu\right] = \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}\,\mathbf{G} + g \tag{1.8}$$

Onde

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x},t) &= f(\mathbf{x},t) + \frac{(n-1)u^2}{2} + \frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)}{4r^2}\left[(n-2)u^2 + 2ruu_r\right] \\ \mathbf{G}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x},t) - \frac{(n-1)}{4r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(r^2+t^2\right)u^2\right]\mathbf{x} \end{aligned}$$

Demonstração.

Note que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\left[\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right] &= \\
&= \frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)u^2}{4r^2}\operatorname{div}\mathbf{x}+\nabla\left[\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)u^2}{4r^2}\right]\cdot\mathbf{x} \\
&= \frac{n(n-1)}{4r^2}\left(r^2+t^2\right)u^2+\frac{(n-1)}{4}\left\{\nabla\left[\left(r^2+t^2\right)\left(\frac{u^2}{r^2}\right)\right]\cdot\mathbf{x}\right\} \\
&= \frac{n(n-1)}{4r^2}\left(r^2+t^2\right)u^2+\frac{(n-1)}{4}\left\{\left[\left(r^2+t^2\right)\nabla\left(\frac{u^2}{r^2}\right)+\frac{u^2}{r^2}\nabla\left(r^2+t^2\right)\right]\cdot\mathbf{x}\right\} \\
&= \frac{n(n-1)}{4r^2}\left(r^2+t^2\right)u^2+ \\
&\quad +\frac{(n-1)}{4}\left\{\left(r^2+t^2\right)\left[\frac{1}{r^2}\nabla\left(u^2\right)+u^2\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]\cdot\mathbf{x}+\frac{u^2}{r^2}\nabla\left(r^2+t^2\right)\cdot\mathbf{x}\right\} \\
&= \frac{(n-1)}{4}\left\{\frac{n\left(r^2+t^2\right)u^2}{r^2}+\frac{\left(r^2+t^2\right)}{r^2}2u\,\nabla u\cdot\mathbf{x}-\frac{2\left(r^2+t^2\right)u^2}{r^4}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\frac{2u^2}{r^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\right\} \\
&= \frac{(n-1)}{4}\left\{\frac{n\left(r^2+t^2\right)u^2}{r^2}+\frac{2\left(r^2+t^2\right)u}{r}\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\nabla u\right)\right\}+ \\
&\quad +\frac{(n-1)}{4}\left\{-\frac{2\left(r^2+t^2\right)u^2}{r^2}\left(\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{r^2}\right)+2u^2\left(\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{r^2}\right)\right\} \\
&= \frac{(n-1)}{4}\left\{\frac{n\left(r^2+t^2\right)u^2}{r^2}+\frac{2\left(r^2+t^2\right)uu_r}{r}-\frac{2\left(r^2+t^2\right)u^2}{r^2}+2u^2\right\} \\
&= \frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)}{4r^2}\left[nu^2+2ruu_r-2u^2\right]+\frac{(n-1)u^2}{2} \\
&= \frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)}{4r^2}\left[(n-2)u^2+2ruu_r\right]+\frac{(n-1)u^2}{2}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
-\frac{(n-1)u^2}{2}=\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)}{4r^2}\left[(n-2)u^2+2ruu_r\right]-\operatorname{div}\left[\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right]
$$

Utilizando a identidade anterior obtemos

$$\begin{aligned}
M(u)\left[\Box u+qu\right] &= \frac{\partial f}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{F}+g\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[f+\frac{(n-1)u^2}{2}-\frac{(n-1)u^2}{2}\right]+\operatorname{div}\mathbf{F}+g\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{f+\frac{(n-1)u^2}{2}+\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)}{4r^2}\left[(n-2)u^2+2ruu_r\right]+\right.\\
&\quad\left.+\operatorname{div}\left[-\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right]\right\}+\operatorname{div}\mathbf{F}+g\\
&= \frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{div}\left[\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right]\right\}+\operatorname{div}\mathbf{F}+g\\
&= \frac{\partial h}{\partial t}-\operatorname{div}\left[\frac{(n-1)}{4r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(r^2+t^2\right)u^2\right]\mathbf{x}\right]+\operatorname{div}\mathbf{F}+g\\
&= \frac{\partial h}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{G}+g
\end{aligned}$$

□

1.3 Estimativas de Energia

Usando as identidades da seção anterior, mostraremos agora algumas estimativas de energia.

Lema 1.3. *Seja* $h(\mathbf{x},t)$ *como no lema* (1.2) *e suponhamos que* $q \geqslant 0$. *Então*

a) $h(\mathbf{x},t)\geqslant 0$, *para todo* $\mathbf{x}$ *e para todo* t.

b) $h(\mathbf{x},t)\geqslant \frac{t^2}{4}e(u)+\frac{(n-1)t^2}{8}\left[\operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2r^2}\mathbf{x}\right)+\frac{3(n-3)u^2}{4r^2}\right]$ *para todo* $r\leqslant \frac{t}{2}$ *e* $n\geqslant 3$.

Demonstração.

Prova da parte a)

Observar que

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{x},t) &= \frac{\left(r^2+t^2\right)}{2}\left(u_t^2+\|\nabla u\|^2+qu^2\right)+2rtu_ru_t+ \\
&+(n-1)tuu_t+\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)}{4r^2}\left[(n-2)u^2+2ruu_r\right] \\
&= \frac{\left(r^2+t^2\right)}{2}\left(u_t^2+\|\nabla u\|^2+qu^2\right)+2rtu_ru_t+(n-1)tuu_t+ \\
&+\frac{\left(n^2-3n+2\right)\left(r^2+t^2\right)u^2}{4r^2}+\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)uu_r}{2r} \\
&= \frac{\left(r^2+t^2\right)}{2}\left(u_t^2+\|\nabla u\|^2+qu^2\right)+2rtu_ru_t+(n-1)tuu_t+ \\
&+\frac{(n-1)^2\left(r^2+t^2\right)u^2}{8r^2}+\frac{(n-1)(n-3)\left(r^2+t^2\right)u^2}{8r^2}+\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)uu_r}{2r}
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\frac{(r^2+t^2)u_r^2}{2}$ e rearranjando os termos, resulta que

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{x},t) &= \left[\frac{\left(r^2+t^2\right)u_r^2}{2}+\frac{(n-1)\left(r^2+t^2\right)uu_r}{2r}+\frac{(n-1)^2\left(r^2+t^2\right)u^2}{8r^2}+\frac{\left(r^2+t^2\right)u_t^2}{2}\right]+ \\
&+2rtu_ru_t+(n-1)tuu_t+\frac{\left(r^2+t^2\right)}{2}\|\nabla u\|^2+ \\
&+\frac{\left(r^2+t^2\right)}{2}qu^2-\frac{\left(r^2+t^2\right)u_r^2}{2}+\frac{(n-1)(n-3)\left(r^2+t^2\right)u^2}{8r^2} \\
&= \frac{\left(r^2+t^2\right)}{2r^{n-1}}\left[r^{n-1}u_r^2+(n-1)r^{n-2}uu_r+\frac{(n+1)^2r^{n-3}u^2}{4}+r^{n-1}u_t^2\right]+ \\
&+\frac{2}{r^{n-1}}\left[r^{\frac{n-1}{2}}u_r+\frac{(n-1)}{2}r^{\frac{n-3}{2}}u\right]r^{\frac{n-1}{2}}rtu_t+ \\
&+\frac{\left(r^2+t^2\right)}{2}\left[\|\nabla u\|^2+qu^2-u_r^2\right]+\frac{(n-1)(n-3)\left(r^2+t^2\right)u^2}{8r^2}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4r^{n-1}}\left\{2\left(r^2+t^2\right)\left[\left(r^{\frac{n-1}{2}}u_r+\frac{(n-1)}{2}r^{\frac{n-3}{2}}u\right)^2+\left(r^{\frac{n-1}{2}}u_t\right)^2\right]+\right. \\
&\left.+8\left[r^{\frac{n-1}{2}}u_r+\frac{(n-1)}{2}r^{\frac{n-3}{2}}u\right]r^{\frac{n-1}{2}}rtu_t\right\}+ \\
&+\frac{\left(r^2+t^2\right)}{2}\left[\|\nabla u\|^2+qu^2-u_r^2\right]+\frac{(n-1)(n-3)\left(r^2+t^2\right)u^2}{8r^2}
\end{aligned}$$

Fazendo

$$
\begin{aligned}
a &= \left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_r = \frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\nabla\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right) = \frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\left[r^{\frac{n-1}{2}}\,\nabla u + u\,\nabla\left(r^{\frac{n-1}{2}}\right)\right]\\
&= r^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\nabla u\right) + \frac{(n-1)}{2}r^{\frac{n-5}{2}}\frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\mathbf{x} = r^{\frac{n-1}{2}}u_r + \frac{(n-1)}{2}r^{\frac{n-3}{2}}\\
b &= \left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_t = r^{\frac{n-1}{2}}u_t
\end{aligned}
$$

e do fato que $(r+t)^2(a+b)^2+(r-t)^2(a-b)^2 = 2\left(a^2+b^2\right)\left(r^2+t^2\right)+8abrt$ obtemos da expressão anterior para $h(\mathbf{x},t)$ que

$$
\begin{aligned}
(1.9)\quad h(\mathbf{x},t) = {}& \frac{(r+t)^2}{4r^{n-1}}\left[\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_r+\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_t\right]^2+\frac{(r-t)^2}{4r^{n-1}}\left[\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_r-\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_t\right]^2+\\
&+\frac{\left(r^2+t^2\right)}{2}\left[\|\nabla u\|^2+qu^2-u_r^2\right]+\frac{(n-1)(n-3)\left(r^2+t^2\right)u^2}{8r^2}.
\end{aligned}
$$

Como $u_r = \frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\nabla u$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta que

$$
|u_r| = \left|\frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\nabla u\right| \leqslant \|\frac{\mathbf{x}}{r}\|\cdot\|\nabla u\| = \|\nabla u\|
$$

Isso diz que $u_r^2 = |u_r|^2 \leqslant \|\nabla u\|^2$. Com isso e do fato que cada parcela quadrática é positiva, concluímos de (1.9) que $h(\mathbf{x},t)\geqslant 0$ uma vez que $n\geqslant 3$.

Prova da parte b)

Se $0\leqslant\|x\| = r\leqslant\frac{t}{2}$, segue da equação (1.9) que

$$
\begin{aligned}
& h(\mathbf{x},t) \geqslant \\
\geqslant\ & \frac{1}{4r^{n-1}}\left\{t^2\left[\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_r+\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_t\right]^2+\frac{t^2}{4}\left[\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_r-\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_t\right]^2\right\}+ \\
& +\frac{t^2}{2}\left[\|\nabla u\|^2+qu^2-u_r^2\right]+\frac{(n-1)(n-3)t^2u^2}{8r^2} \\
\geqslant\ & \frac{t^2}{16r^{n-1}}\left\{\left[\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_r^2+\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_t^2\right]^2+\left[\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_r-\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_t\right]^2\right\}+ \\
& +\frac{t^2}{2}\left[\|\nabla u\|^2+qu^2-u_r^2\right]+\frac{(n-1)(n-3)t^2u^2}{8r^2} \\
=\ & \frac{t^2}{16r^{n-1}}2\left[\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_r^2+\left(r^{\frac{n-1}{2}}u\right)_t^2\right]+\frac{t^2}{2}\left[\|\nabla u\|^2+qu^2-u_r^2\right]+\frac{(n-1)(n-3)t^2u^2}{8r^2} \\
=\ & \frac{t^2}{8r^{n-1}}\left\{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2r^{n-3}u^2+r^{n-1}u_r^2+(n-1)r^{n-2}uu_r+r^{n-1}u_t^2\right\}+ \\
& +\frac{t^2}{2}\left[\|\nabla u\|^2+qu^2-u_r^2\right]+\frac{(n-1)(n-3)t^2u^2}{8r^2} \\
=\ & \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\frac{t^2u^2}{8r^2}+\frac{t^2u_r^2}{8}+\frac{(n-1)t^2uu_r}{8r}+\frac{t^2u_t^2}{8}+\frac{t^2\|\nabla u\|^2}{2}+ \\
& +\frac{t^2qu^2}{2}-\frac{t^2u_r^2}{2}+\frac{(n-1)(n-3)t^2u^2}{8r^2} \\
\geqslant\ & \frac{t^2\|\nabla u\|^2}{8}+\frac{t^2qu^2}{8}+\frac{t^2u_t^2}{8}+\frac{(n-1)t^2}{8}\left[\frac{uu_r}{r}+\frac{(n-1)u^2}{4r^2}+\frac{(n-3)u^2}{r^2}\right] \\
=\ & \frac{t^2}{4}e(u)+\frac{(n-1)t^2}{8}\left[\frac{uu_r}{r}+\frac{(5n-13)u^2}{4r^2}\right]
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
h(\mathbf{x},t) \geqslant \frac{t^2}{4}e(u)+\frac{(n-1)t^2}{8}\left[\frac{uu_r}{r}+\frac{(5n-13)u^2}{4r^2}\right] \tag{1.10}
$$

Temos ainda que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2r^2}\mathbf{x}\right) &= \frac{u^2}{2r^2}\operatorname{div}\mathbf{x}+\nabla\left(\frac{u^2}{2r^2}\right)\cdot\mathbf{x}=\frac{nu^2}{2r^2}+\frac{1}{2r^2}\nabla(u^2)\cdot\mathbf{x}+u^2\nabla\left(\frac{1}{2r^2}\right)\cdot\mathbf{x} \\
&= \frac{nu^2}{2r^2}+\frac{1}{2r^2}(2u\nabla u)\cdot\mathbf{x}+u^2\left(\frac{-\mathbf{x}}{r^4}\right)\cdot\mathbf{x}=\frac{nu^2}{2r^2}+\frac{u}{r}\left(\nabla u\cdot\frac{\mathbf{x}}{r}\right)-u^2\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{r^4} \\
&= \frac{nu^2}{2r^2}+\frac{uu_r}{r}-\frac{u^2}{r^2}=\frac{(n-2)u^2}{2r^2}+\frac{uu_r}{r}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\frac{uu_r}{r} = \operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2r^2}\mathbf{x}\right) - \frac{(n-2)u^2}{2r^2} \tag{1.11}$$

Agora, substituindo-se a equação (1.11) na equação (1.10), chegamos que

$$h(\mathbf{x},t) \geqslant \frac{t^2}{4}e(u) + \frac{(n-1)t^2}{8}\left[\operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2r^2}\mathbf{x}\right) + \frac{3(n-3)u^2}{4r^2}\right] \tag{1.12}$$

para todo $\|x\| = r \leqslant \frac{t}{2}$ e $n \geqslant 3$. □

1.4 Estabilização

O principal objetivo deste capítulo é o seguinte resultado de estabilização para a equação (1.1).

Teorema 1.1. *Seja u uma solução da equação (1.1) com dados iniciais $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $t = 0$. Suponhamos que para $r > 0$ e $t \geqslant 0$ $\quad q = q(\mathbf{x},t)$ satisfaz*

a) $q \geqslant 0$

b) $|q_t| \leqslant \frac{2rt}{r^2+t^2}q$

c) $(2+r)q + rq_r \leqslant 0$ *para todo* $r > 0,\ t \geqslant 0$

Então, para qualquer $T > 0$ temos:

$$E_{\frac{T}{2}}(T) \leqslant \frac{C}{T^2} \quad e \quad \lim_{T\to\infty}\int_{\|\mathbf{x}\|=\frac{T}{2}} u^2(\mathbf{x},T)\,dS = 0$$

onde C é uma constante que depende da dimensão n e dos dados iniciais em $t = 0$.

Demonstração.

Integrando a equação (1.8) em $\mathbb{R}^n$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(u)\,[\Box u + qu]\;dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{G} + g\right)\,dx = 0 \quad (u \text{ é solução de } (1.1))$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},t)\,dx &= -\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\mathbf{G}(\mathbf{x},t)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x},t)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u^2\left[2tq + rtq_r + \frac{(r^2+t^2)}{2}q_t\right]\,dx\end{aligned}$$

pelo fato que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\mathbf{G}(\mathbf{x},t)\,dx =\\ &= \int_{\|x\|\leqslant t+R} \operatorname{div}\left\{\left(-u_t^2 + \|\nabla\mathbf{x}\|^2 + qu^2\right)t\mathbf{x} - M(u)\nabla u - \frac{(n-1)}{4r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(r^2+t^2)u^2\right]\mathbf{x}\right\}\,dx\\ &= \int_{\|x\|=t+R} \mathbf{G}(\mathbf{x},t)\cdot\eta\,dS = 0\end{aligned}$$

devido ao Teorema da Divergência e Velocidade Finita de Propagação, onde $R > 0$ é o raio do suporte dos dados iniciais e η é o vetor normal da superfície.

Usando agora as hipótese b) e c) do teorema temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},t)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u^2\left[2tq + rtq_r + \frac{(r^2+t^2)}{2}q_t\right]\,dx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} u^2\left[2tq + rtq_r + \frac{(r^2+t^2)}{2}\left(\frac{2rtq}{r^2+t^2}\right)\right]\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} tu^2\left[(2+r)q + rq_r\right]\,dx \leqslant 0\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},t)\,dx \leqslant 0$$

Integrando essa desigualdade de $t = 0$ a $t = T$ temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^T \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},\xi)\,dx\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},T)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},0)\,dx \leqslant 0$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},T)\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},0)\,dx = \text{cte} \tag{1.13}$$

O lado direito da equação (1.13) é uma constante que depende somente dos dados iniciais e da dimensão n.

Pelo lema (1.3) ítem (a), sabemos que $h(\mathbf{x},t) \geqslant 0$ para todo $\mathbf{x}$ e t, com isso segue da equação (1.13) que

$$\int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant \frac{T}{2}} h(\mathbf{x},T)\; dx \leqslant \text{cte}$$

Segue da parte (b) do lema (1.3) e da estimativa acima que

$$\begin{aligned}
\text{cte} \geqslant\; & \int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant \frac{T}{2}} h(\mathbf{x},T)\; dx \\
\geqslant\; & \frac{T^2}{4}\int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant \frac{T}{2}} e(u(\mathbf{x},T))\; dx + \frac{(n-1)T^2}{8}\int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant \frac{T}{2}} \left[\operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2r^2}\mathbf{x}\right) + \frac{3(n-3)u^2}{4r^2}\right] dx \\
\geqslant\; & \frac{T^2}{4}E_{\frac{T}{2}} + \frac{(n-1)T^2}{8}\int_{\|\mathbf{x}\|=\frac{T}{2}} \frac{u^2}{2r^2}\mathbf{x}\cdot\frac{2\mathbf{x}}{T}\; dS \geqslant \frac{T^2}{4}E_{\frac{T}{2}}
\end{aligned}$$

pelo Teorema da Divergência e do fato que a normal sobre a bola $\|\mathbf{x}\| = \frac{T}{2}$ vale $\frac{2\mathbf{x}}{T}$. Portanto

$$E_{\frac{T}{2}} \leqslant \frac{C}{T^2}$$

onde C é uma constante que depende apenas dos dados iniciais e da dimensão do problema.

Ainda, pelo teorema do divergente temos

$$\begin{aligned}
\text{cte} \;\geqslant\; & \int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant \frac{T}{2}} h(\mathbf{x},T)\; dx \geqslant \underbrace{\frac{T^2}{4}\int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant \frac{T}{2}} e(u(\mathbf{x},T))\; dx}_{\geqslant 0} + \\
& + \frac{(n-1)T^2}{8}\int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant \frac{T}{2}} \operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2r^2}\mathbf{x}\right) dx + \underbrace{\frac{3(n-1)(n-3)T^2}{32r^2}\int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant \frac{T}{2}} u^2\; dx}_{\geqslant 0} \\
\geqslant\; & \frac{(n-1)T^2}{8}\int_{\|\mathbf{x}\|=\frac{T}{2}} \frac{u^2}{2\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}\cdot\frac{2\mathbf{x}}{T}\; dS
\end{aligned}$$

Logo

$$\text{cte} \geqslant \frac{(n-1)T^2}{8}\int_{\|\mathbf{x}\|=\frac{T}{2}} \frac{u^2}{2\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}\cdot\left(\frac{2\mathbf{x}}{T}\right) dS = \frac{(n-1)T}{8}\int_{\|\mathbf{x}\|=\frac{T}{2}} u^2(\mathbf{x},T)\; dS \geqslant 0$$

Segue portanto que

$$0 \leqslant \lim_{T\to\infty} \int_{\|\mathbf{x}\|=\frac{T}{2}} u^2(\mathbf{x},T)\, dS \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{8\text{cte}}{(n-1)T} = 0$$

Isto é

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\|\mathbf{x}\|=\frac{T}{2}} u^2(\mathbf{x},T)\, dS = 0$$

Isso conclui a prova do Teorema (1.1). □

1.5 Limitação da Energia

Nesta seção veremos que os multiplicadores podem ser também utilizados para mostrar a limitação da energia total $E_\infty(t)$ no caso em que ela não é conservada, podendo até ser crescente.

Para isso tomaremos certas hipóteses sobre $q(\mathbf{x},t)$. Usaremos o multiplicador

$$M_\rho(u) = u_t + \rho u_r + \frac{(n-1)}{2r}\rho u$$

onde $\rho = \rho(\|\mathbf{x}\|)$ é uma adequada função C^∞ que depende apenas do raio $r = \|\mathbf{x}\|$.

Temos o seguinte

Lema 1.4. *Seja $n \geqslant 3$ e $M_\rho(u) = u_t + \rho u_r + \frac{(n-1)}{2r}\rho u$, então*

$$M_\rho(u)\,[\Box u + qu] = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{F} + g$$

Onde

$$\begin{aligned}
r &= \|\mathbf{x}\| \\
u_r &= \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \nabla u \\
e(u) &= \frac{1}{2}\left(u_t^2 + \|\nabla u\|^2 + qu^2\right) \\
f(\mathbf{x}, t) &= e(u) + \rho u_t \left(u_r + \frac{(n-1)}{2r} u\right) \\
\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\rho}{2r}\left(\|\nabla u\|^2 - u_t^2\right)\mathbf{x} - M_\rho(u)\nabla u + \frac{(n-1)}{4r^2}\left(\rho' - \frac{\rho}{r}\right) u^2 \mathbf{x} + \frac{\rho q u^2}{2r}\mathbf{x} \\
g(\mathbf{x}, t) &= \rho' e(u) + \left(\frac{\rho}{r} - \rho'\right)\left(\|\nabla u\|^2 - u_r^2\right) + \\
&\quad + \left[\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\left(\frac{\rho}{r} - \rho'\right) - \frac{(n-1)\rho''}{4r} - \frac{q_t}{2} - \rho' q - \frac{\rho q_r}{2}\right] u^2
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$M_\rho(u)\left[\Box u + qu\right] = M_\rho(u) u_{tt} - M_\rho(u)\Delta u + M_\rho(u) qu =$$

$$\left(u_t + \rho u_r + \frac{(n-1)}{2r}\rho u\right) u_{tt} - M_\rho(u)\Delta u + \left(u_t + \rho u_r + \frac{(n-1)}{2r}\rho u\right) qu =$$

$$\underbrace{u_t u_{tt}}_{1} + \underbrace{\rho u_r u_{tt}}_{2} + \underbrace{\frac{(n-1)\rho u u_{tt}}{2r}}_{3} \underbrace{- M_\rho(u)\Delta u}_{4} + \underbrace{q u u_t}_{5} + \underbrace{\rho q u u_r}_{6} + \underbrace{\frac{(n-1)\rho q u^2}{2r}}_{7}$$

Somando as identidades seguintes

(1) $u_t u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{u_t^2}{2}\right]$

(2) $\rho u_r u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho u_r u_t\right] + \operatorname{div}\left[\frac{\rho}{2r}\left(\|\nabla u\|^2 - u_t^2\right)\mathbf{x}\right] + \frac{n\rho}{2r}\left(u_t^2 - \|\nabla u\|^2\right)$

$\qquad - \frac{\rho}{2}\left(\|\nabla u\|^2\right)_r + \left(\frac{\rho}{r} - \rho'\right)\frac{\|\nabla u\|^2}{2} + \left(\rho' - \frac{\rho}{r}\right)\frac{u_t^2}{2}$

(3) $\frac{(n-1)\rho u u_{tt}}{2r} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(n-1)\rho u u_t}{2r}\right] - \frac{(n-1)\rho u_t^2}{2r}$

(4) $-M_\rho(u)\Delta u = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\|\nabla u\|^2}{2}\right] + \operatorname{div}\left[\frac{(n-1)}{4r^2}\left(\rho' - \frac{\rho}{r}\right)u^2\mathbf{x} - M_\rho(u)\nabla u\right] + \frac{\rho}{2}\left(\|\nabla u\|^2\right)_r$

$\qquad + \left(\rho' - \frac{\rho}{r}\right)u_r^2 + \frac{(n+1)\rho\|\nabla u\|^2}{2r} + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\left(\frac{\rho}{r} - \rho'\right)u^2 - \frac{(n-1)\rho'' u^2}{4r}$

(5) $quu_t = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{qu^2}{2}\right] - \frac{q_t u^2}{2}$

(6) $\rho q u u_r = \operatorname{div}\left[\frac{\rho q u^2}{2r}\mathbf{x}\right] + \left(\frac{\rho}{r} - \rho'\right)\frac{qu^2}{2} - \frac{n\rho q u^2}{2r} - \frac{\rho q_r u^2}{2}$

com a expressão 7 e agrupando os termos, obtemos o resultado desejado. $\square$

Teorema 1.2. *(Limitação da energia). Seja* $q : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ *satisfazendo as hipóteses*

1) $q \geqslant 0$

2) $q_t + \epsilon q_r \leqslant \frac{\epsilon c_n}{r^3}$ *para algum* $0 < \epsilon < 1$, *onde* $c_n = \frac{(n-1)(n-3)}{2}$

Seja u *uma solução de* $\Box u + q(\mathbf{x}, t)u = 0$ *em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *com dados iniciais* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *em* $t = 0$. *Então a energia total* $E_\infty(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e(u)\, dx$ *é limitada para todo tempo* $t \geqslant 0$.

Demonstração. Usando a relação

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left[\frac{-(n-1)\rho u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right] &= -\frac{(n-1)(n-2)\rho u^2}{4r^2} - \frac{(n-1)\rho u u_r}{2r} - \frac{(n-1)u^2 \nabla\rho \cdot \mathbf{x}}{4r^2} \\
&= -\left[\frac{(n-1)(n-3)}{8} + \frac{(n-1)^2}{8}\right]\frac{\rho u^2}{r^2} - \frac{(n-1)\rho u u_r}{2r} - \frac{(n-1)u^2 \nabla\rho \cdot \mathbf{x}}{4r^2} \\
&= -\frac{c_n \rho u^2}{r^2} - \frac{(n-1)^2 \rho u^2}{8r^2} - \frac{(n-1)\rho u u_r}{2r} - \frac{(n-1)u^2 \nabla\rho \cdot \mathbf{x}}{4r^2}
\end{aligned}$$

e fazendo ρ constante e igual a ϵ, isto é, $\rho = \epsilon$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, podemos reescrever f no lema (1.4) como

$$\begin{aligned}
(1.14) \qquad f(\mathbf{x}, t) &= (1-\epsilon)e(u) + \frac{\epsilon c_n u^2}{r^2} + \operatorname{div}\left[\frac{-(n-1)\epsilon u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right] + \\
&\quad + \epsilon\left[e(u) + \frac{(n-1)u u_r}{2r} + \frac{(n-1)^2 u^2}{8r^2} + \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t\right]
\end{aligned}$$

Agora, observe que o último termo entre colchetes da equação (1.14) é não negativo. De fato

$$0 \leqslant \left[\left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right) \pm u_t\right]^2 = \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)^2 \pm 2\left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t + u_t^2$$

e portanto

(1.15)

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \frac{1}{2}\left(u_r^2 + \frac{(n-1)uu_r}{r} + \frac{(n-1)^2u^2}{4r^2}\right) \pm \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t + \frac{u_t^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{\mathbf{x}}{r}\cdot\nabla u\right|^2 + \frac{(n-1)uu_r}{2r} + \frac{(n-1)^2u^2}{8r^2} \pm \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t + \frac{u_t^2}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\frac{\mathbf{x}}{r}\|^2\cdot\|\nabla u\|^2 + \frac{u_t^2}{2} + \frac{(n-1)uu_r}{2r} + \frac{(n-1)^2u^2}{8r^2} \pm \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t \\
&\leqslant \frac{u_t^2}{2} + \frac{\|\nabla u\|^2}{2} + \frac{qu^2}{2} + \frac{(n-1)uu_r}{2r} + \frac{(n-1)^2u^2}{8r^2} \pm \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t \\
&= e(u) + \frac{(n-1)uu_r}{2r} + \frac{(n-1)^2u^2}{8r^2} \pm \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t
\end{aligned}
$$

pois pela hipótese 1 do teorema $q \geqslant 0$.

Integrando (1.14) em todo o $\mathbb{R}^n$ (para $n > 3$ e $T > 0$) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},T)\,dx =$$

$$
\begin{aligned}
(1-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} e(u(\mathbf{x},T))\,dx + \epsilon c_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u^2(\mathbf{x},T)}{r^2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\operatorname{div}\left[\frac{-(n-1)\epsilon u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right]dx+ \\
+\int_{\mathbb{R}^n}\epsilon\left[e(u) + \frac{(n-1)uu_r}{2r} + \frac{(n-1)^2u^2}{8r^2} + \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t\right]dx
\end{aligned}
$$

Agora

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\operatorname{div}\left[\frac{-(n-1)\epsilon u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right]dx = \\
&\qquad -\frac{(n-1)\epsilon}{4}\int_{\Omega}\operatorname{div}\left(\frac{u^2}{r^2}\mathbf{x}\right)dx = -\frac{(n-1)\epsilon}{4}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{u^2}{r^2}\mathbf{x}\right)\cdot\eta\,dS = 0
\end{aligned}
$$

onde $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x}\| \leqslant |T| + R\}$, devido a propriedade finita de propagação, onde $R > 0$ é o raio da bola que contém o suporte dos dados iniciais de u. Portanto

$$
\begin{aligned}
(1.16)\quad \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},T)\,dx &= (1-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} e(u(\mathbf{x},T))\,dx + \epsilon c_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u^2(\mathbf{x},T)}{r^2}\,dx+ \\
&+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\left[e(u) + \frac{(n-1)uu_r}{2r} + \frac{(n-1)^2u^2}{8r^2} + \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t\right]_{t=T}dx
\end{aligned}
$$

Cada termo na expressão (1.16) é não negativo, assim concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},T)\,dx \geqslant (1-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} e(u(\mathbf{x},T))\,dx = (1-\epsilon)E_\infty(T) \tag{1.17}$$

Observamos que também podemos escrever $f(\mathbf{x},T)$ no lema (1.4) como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},t) = (1+\epsilon)e(u) - \frac{\epsilon c_n u^2}{r^2} + \operatorname{div}\left[\frac{(n-1)\epsilon u^2}{4r^2}\mathbf{x}\right] - \\ -\epsilon\left[e(u) + \frac{(n-1)uu_r}{2r} + \frac{(n-1)^2u^2}{8r^2} - \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t\right] \end{aligned} \tag{1.18}$$

De forma análoga como foi feito em (1.15), o último termo na expressão (1.18) é menor ou igual a zero. Assim, integrando-se em todo o $\mathbb{R}^n$ a expressão (1.18) no tempo $t=0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},0)\,dx = (1+\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} e(u(\mathbf{x},0))\,dx - \epsilon c_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u^2(\mathbf{x},0)}{r^2}\,dx \\ -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\left[e(u) + \frac{(n-1)uu_r}{2r} + \frac{(n-1)^2u^2}{8r^2} - \left(u_r + \frac{(n-1)u}{2r}\right)u_t\right]_{t=0} dx \leqslant (1+\epsilon)E_\infty(0) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Agora usando o lema (1.4), integrando em $\mathbb{R}^n$ e usando o Teorema da Divergência e Velocidade Finita de Propagação, temos para $n>3$ que

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},t)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x},t)\,dx \geqslant \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},t)\,dx \tag{1.20}$$

pois $g(\mathbf{x},t)\geqslant 0$ devido a nossa hipótese 2 em q e do fato que $\rho\equiv\epsilon$.

No caso $n=3$ observar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x},t)\,dx = 2\epsilon\pi u^2(0,t)$$

devido ao fato que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\left[-\frac{\epsilon}{2}\frac{u^2(\mathbf{x},t)}{r^2}\frac{\mathbf{x}}{r}\right]\,dx = 2\epsilon\pi u^2(0,t)$$

Nesse caso $(n = 3)$ se obtem que

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},t)\,dx + \underbrace{2\epsilon\pi u^2(0,t)}_{\geqslant 0} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x},t)\,dx \geqslant \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},t)\,dx \tag{1.21}$$

Integrando as expressões (1.20) e (1.21) de $t = 0$ a $t = T$ e usando a expressão (1.17) junto com a expressão (1.19) obtemos para $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},t)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},T)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},0)\,dx \\ &\geqslant (1-\epsilon)E_\infty(T) - (1+\epsilon)E_\infty(0) \end{aligned}$$

Portanto

$$E_\infty(T) \leqslant \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)}E_\infty(0)$$

para qualquer $T > 0$, donde fica provado a limitação da Energia Total. $\square$

Capítulo 2

Método de Nakao

2.1 Introdução

Nesta seção, seguindo [18], provaremos um importante lema devido a Mitsuhiro Nakao e que é muito usado para mostrar a estabilização para zero da energia de problemas associados com equações diferenciais parciais de evolução. Trata-se de mostrar que se uma função $\phi(t)$, $t \in [0, \infty)$, não negativa, atende certa desigualdade de diferenças então o comportamento assintótico dessa função quando $t \to \infty$ pode ser descrito com taxas de decaimento uniforme.

Como uma aplicação do resultado de Nakao mostraremos alguns teoremas abstratos sobre estabilização para zero da energia de certos sistemas de evolução não lineares abstratos definidos por certos operadores com hipóteses adequadas.

Aplicaremos esses resultados abstratos para certas equações diferenciais concretas.

Em muitas situações quando se estuda a estabilização da energia $E(t)$ associada a EDP's se usa o Lema de Nakao mostrando que $E(t)$ satisfaz uma desigualdade de diferenças. Por exemplo, se mostrar que $E(t)$ é decrescente e existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\sup_{[t,t+1]} E(t) \leqslant C(E(t+1) - E(t)) \quad \text{para todo } t \geqslant 0$$

então aplicando o Lema de Nakao se obtem que

$$E(t) \leqslant Ce^{-\omega t}E(0) \text{ quando } t \to \infty$$

onde C e ω são constantes positivas e independentes de t.

Mais recentemente alguns autores (Ver [7], [12] e [26]) tem usado outros tipos de Lemas para estabilização de energia para zero associada a EDP's. Por exemplo se a energia $E(t)$ satisfaz

$$\int_s^\infty E^{\alpha+1}(t)\,dt \leqslant \text{cte}E(s)$$

para todo $0 \leqslant s < \infty$, então

$$\begin{aligned} E(t) &\leqslant \text{cte}\, e^{-\beta t}, \quad \text{se } \alpha = 0,\ t > 0 \\ E(t) &\leqslant \text{cte}\, t^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{se } \alpha > 0,\ t > 0 \end{aligned}$$

sendo β uma constante positiva.

2.2 Lema de Nakao

O seguinte teorema é conhecido como o *Lema de Nakao.*

Teorema 2.1. *Seja $\phi(t)$ uma função não negativa em $[0,\infty)$,ie, $\phi : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ satisfazendo*

$$\sup_{s\in[t,t+1]} \phi(s)^{1+\alpha} \leqslant C_0(1+t)^r\left(\phi(t) - \phi(t+1)\right) + g(t) \tag{2.1}$$

onde C_0 é uma constante positiva e $g(t)$ é uma função não negativa e limitada. Então

i. *Se $\alpha > 0$, $r = 1$ e $\lim_{t\to\infty} (\log(1+t))^{1+\frac{1}{\alpha}} g(t) = 0$ então*

$$\phi(t) \leqslant C_1 (\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad t > 0$$

ii. *Se* $\alpha > 0$, $0 \leqslant r < 1$ *e* $\lim\limits_{t\to\infty} t^{(1-r)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} g(t) = 0$ *então*

$$\phi(t) \leqslant C_2 t^{-\frac{(1-r)}{\alpha}}, \quad t > 0$$

iii. *Se* $\alpha = 0$, $r = 1$ *e* $g(t) \leqslant \text{cte}\, t^{-\theta-1}$ *para algum* $\theta > 0$, *então*

$$\phi(t) \leqslant C_3(1+t)^{-\theta'} \quad \textit{com} \quad \theta' = \min\left\{\frac{1}{C_0}, \theta\right\}, \quad t > 0$$

iv. *Se* $\alpha = 0$, $0 \leqslant r < 1$ *e* $g(t) \leqslant \text{cte}\, t^{-\theta} e^{\left[-\frac{1}{(C_0+1)(1-r)}(t+1)^{1-r}\right]}$ *com* $\theta > 1$ *então*

$$\phi(t) \leqslant C_4 e^{\left[-\frac{1}{(C_0+1)(1-r)}t^{1-r}\right]}, \quad t > 0$$

As constantes C_1, C_2, C_3 *e* C_4 *dependem de* $\phi(0)$ *e de outras constantes conhecidas.*

Demonstração.

Prova de i.

Seja

$$\psi(t) = \phi(t) + \nu\,(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}}$$

onde ν é uma constante positiva que será determinada posteriormente.

Agora, se $a > 0$, $b > 0$ e $\beta > 0$ então é claro que $(a+b)^\beta \leqslant 2^\beta(a^\beta + b^\beta)$. Assim, tomando $a = \phi(t)$, $b = \nu\,(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}}$ e $\beta = 1+\alpha$ temos

$$\begin{aligned} \psi(t)^{1+\alpha} &\leqslant \left(\phi(t) + \nu\,(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{1+\alpha} \\ &\leqslant 2^{1+\alpha}\left(\phi(t)^{1+\alpha} + \nu^{1+\alpha}\,(\log(1+t))^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

Da expressão (2.1) temos

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} &\leqslant \\
&\leqslant 2^{1+\alpha}\left[\sup_{s\in[t,t+1]} \phi(s)^{1+\alpha} + \sup_{s\in[t,t+1]} \nu^{1+\alpha}(\log(1+s))^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\right] \\
&\leqslant 2^{1+\alpha}\left[C_0(1+t)\left(\phi(t)-\phi(t+1)\right) + g(t) + \nu^{1+\alpha}(\log(1+t))^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\right] \\
&= 2^{1+\alpha}\Big\{C_0(1+t)\Big([\phi(t)-\phi(t+1)] + \left[\nu(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}} - \nu(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}}\right] + \\
&\quad + \left[\nu(\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}} - \nu(\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}}\right]\Big) + g(t) + \nu^{1+\alpha}(\log(1+t))^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\Big\} \\
&= 2^{1+\alpha}\Big\{C_0(1+t)\Big[\phi(t) + \nu(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}} - \phi(t+1) - \nu(\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}} - \\
&\quad -\nu(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}} + \nu(\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}}\Big] + g(t) + \nu^{1+\alpha}(\log(1+t))^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\Big\} \\
&= 2^{1+\alpha}\Big\{C_0(1+t)[\psi(t)-\psi(t+1)] + C_0(1+t)\left[\nu(\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}} - \nu(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}}\right] + \\
&\quad + g(t) + \nu^{1+\alpha}(\log(1+t))^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\Big\} \\
&\leqslant \mathrm{cte}\Big\{(1+t)[\psi(t)-\psi(t+1)] + (1+t)\left[\nu(\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}} - \nu(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}}\right] + \\
&\quad + g(t) + \nu^{1+\alpha}(\log(1+t))^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\Big\}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} \leqslant \mathrm{cte}\left\{(1+t)[\psi(t)-\psi(t+1)] + I_1(t)\right\} \tag{2.2}
$$

onde

$$
I_1(t) = (1+t)\left[\nu(\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}} - \nu(\log(1+t))^{-\frac{1}{\alpha}}\right] + g(t) + \nu^{1+\alpha}(\log(1+t))^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}
$$

Mostraremos agora que $I_1(t) \leqslant 0$ se t é suficientemente grande.

Inicialmente reescrevemos $I_1(t)$ como

$$
\begin{aligned}
I_1(t) = \nu(\log(1+t))^{-1-\frac{1}{\alpha}}\Bigg\{(1+t)\log(1+t)\left[\left(\frac{\log(t+2)}{\log(t+1)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right] + \\
+\frac{1}{\nu}(\log(1+t))^{1+\frac{1}{\alpha}} g(t) + \nu^{\alpha}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

Agora, observamos que

$$\left(\frac{\log(t+2)}{\log(t+1)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 = \left(\frac{\log(t+2)-\log(t+1)}{\log(t+1)} + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \leqslant -\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\log(t+2)-\log(t+1)}{\log(t+1)}\right)$$

para t grande. De fato, chamando

$$x(t) = \frac{\log(t+2) - \log(t+1)}{\log(t+1)}$$

(é claro que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$), vamos analisar a função

$$f(x) = (x+1)^{-\frac{1}{\alpha}} + \frac{x}{2\alpha} - 1$$

Esta função apresenta um único ponto crítico que é um mínimo global em $x = 2^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - 1$. Além disso $0 = f(0) > f(2^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - 1)$. Então, desde que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ temos que $f(x) \leqslant 0$ para x pertencente a uma vizinhança à direita de 0. Logo, para x próximo de zero temos que $f(x) \leqslant 0$, ie , quando t é muito grande temos

$$\left(\frac{\log(t+2)}{\log(t+1)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 = \left(\frac{\log(t+2)-\log(t+1)}{\log(t+1)} + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \leqslant -\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\log(t+2)-\log(t+1)}{\log(t+1)}\right)$$

Segue que

$$(2.3) \quad I_1(t) \leqslant \nu\left(\log(t+1)\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}\left[-\frac{(1+t)}{2\alpha}\log\left(\frac{t+2}{t+1}\right) + \frac{1}{\nu}\left(\log(t+1)\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} g(t) + \nu^{\alpha}\right]$$

para t grande.

Aplicando a regra de L'Hopital temos

$$\lim_{t\to\infty}\left[(1+t)\log\left(\frac{t+2}{t+1}\right)\right] = \lim_{t\to\infty}\frac{\log\left(\frac{t+2}{t+1}\right)}{\frac{1}{t+1}} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+2}{t+1}\right) = 1$$

Chamando

$$\eta(t) = -\frac{1+t}{2\alpha}\log\left(\frac{t+2}{t+1}\right) + \frac{1}{\nu}\left(\log(t+1)\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} g(t) + \nu^{\alpha}$$

temos então pela hipótese (i) do Teorema (2.1) sobre $g(t)$ que

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1+t}{2\alpha}\log\left(\frac{t+2}{t+1}\right)+\frac{1}{\nu}\left(\log(t+1)\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}g(t)+\nu^{\alpha}\right]=-\frac{1}{2\alpha}+\nu^{\alpha}$$

Escolhendo $\nu<(2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$ de modo que

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t)=-\frac{1}{2\alpha}+\nu^{\alpha}<0$$

temos pela definição de limite que existe $T_1>0$ tal que $\eta(t)<0$ para todo $t>T_1$.

Voltando a expressão (2.3) temos que se $t>T_1$ e $\nu<(2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leqslant \nu\left(\log(t+1)\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}\left[-\frac{(1+t)}{2\alpha}\log\left(\frac{t+2}{t+1}\right)+\frac{1}{\nu}\left(\log(t+1)\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}g(t)+\nu^{\alpha}\right] \\ &= \nu\left(\log(t+1)\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}\eta(t)<0 \end{aligned}$$

Voltando agora à expressão (2.2), se $t>T_1$ e $\nu<(2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$ então concluimos que

$$\sup_{s\in[t,t+1]}\psi(s)^{1+\alpha}\leqslant \mathrm{cte}(1+t)\left[\psi(t)-\psi(t+1)\right] \tag{2.4}$$

Fazendo a mudança de variável $\psi(s)^{-\alpha}=\omega(s)$ e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned} \omega(t)-\omega(t+1) &= \left[\theta\psi(t)+(1-\theta)\psi(t+1)\right]^{-\alpha}\Big|_{\theta=0}^{\theta=1}=\int_0^1\frac{d}{d\theta}\left[\theta\psi(t)+(1-\theta)\psi(t+1)\right]^{-\alpha}d\theta \\ &= \int_0^1-\alpha\left[\theta\psi(t)+(1-\theta)\psi(t+1)\right]^{-\alpha-1}\left(\psi(t)-\psi(t+1)\right)d\theta \\ &= -\alpha(\psi(t)-\psi(t+1))\int_0^1\left[\theta\psi(t)+(1-\theta)\psi(t+1)\right]^{-\alpha-1}d\theta \end{aligned}$$

Daí e da estimativa (2.4) temos para $t > T_1$ que

$$\begin{aligned}
\omega(t) - \omega(t+1) &\leqslant -\alpha(\psi(t) - \psi(t+1)) \int_0^1 \Big[\theta \mathrm{cte}^{\frac{1}{\alpha+1}}(1+t)^{\frac{1}{\alpha+1}}(\psi(t) - \psi(t+1))^{\frac{1}{\alpha+1}} + \\
&\quad +(1-\theta)\mathrm{cte}^{\frac{1}{\alpha+1}}(1+t)^{\frac{1}{\alpha+1}}(\psi(t) - \psi(t+1))^{\frac{1}{\alpha+1}}\Big]^{-\alpha-1} d\theta \\
&= -\alpha \mathrm{cte}^{-1}(1+t)^{-1}\int_0^1 d\theta \\
&= -\alpha \mathrm{cte}^{-1}(1+t)^{-1}
\end{aligned}$$

Agora observamos que

$$\begin{array}{ccccc}
1+T_1 < t < 2+T_1 & \Rightarrow & \omega(t-1) - \omega(t) & \leqslant & -\alpha \mathrm{cte}^{-1} t^{-1} \\
2+T_1 < t < 3+T_1 & \Rightarrow & \omega(t-2) - \omega(t-1) & \leqslant & -\alpha \mathrm{cte}^{-1}(t-1)^{-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n+T_1 < t < n+1+T_1 & \Rightarrow & \omega(t-n) - \omega(t-n+1) & \leqslant & -\alpha \mathrm{cte}^{-1}(t-n+1)^{-1}
\end{array}$$

Somando tudo, obtemos para t tal que $n + T_1 < t < n + 1 + T_1$, com n natural que

$$\omega(t-n) - \omega(t) \leqslant -\frac{\alpha}{\mathrm{cte}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{t-i} \leqslant -\frac{\alpha}{\mathrm{cte}}\int_0^{n-1}\frac{dx}{t-x} = \frac{\alpha}{\mathrm{cte}}[\log(t-n+1) - \log t]$$

Logo

$$\text{(2.5)} \quad \omega(t) \geqslant \omega(t-n) + \frac{\alpha}{\mathrm{cte}}[\log t - \log(t-n+1)] \quad \text{para todo } n + T_1 < t < n+1+T_1$$

Portanto, de (2.5) temos

$$\omega(t) \geqslant \inf_{s\in[T_1, T_1+1]} \omega(s) + \frac{\alpha}{\mathrm{cte}}\log t - \frac{\alpha}{\mathrm{cte}}\log(T_1+2) \qquad (t > T_1)$$

que produz imediatamente (usando a definição de ψ)

$$\text{(2.6)} \qquad \phi(t) \leqslant \psi(t) = (\omega(t))^{-\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left\{\inf_{s\in[T_1,T_1+1]}\omega(s) + \frac{\alpha}{\mathrm{cte}}\log t - \frac{\alpha}{\mathrm{cte}}\log(T_1+2)\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}$$

para todo $t > T_1$.

Agora, para $t \leqslant T_1 + 2$ segue de (2.1) que

$$\phi(t) \leqslant \max\{g(t), C\} \quad \text{para } C = [C_0(3+T_1)+1]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.7}$$

De fato, para $t \in [0, T_1 + 2]$ temos dois casos

- Se $\phi(t) \leqslant g(t)$ então $\phi(t) \leqslant g(t) \leqslant \max\{g(t), C\}$
- Se $\phi(t) \geqslant g(t)$ então de (2.1) temos $(r = 1)$

$$\phi(t)^{1+\alpha} \leqslant \sup_{s\in[t,t+1]} \phi(s)^{1+\alpha} \leqslant C_0(1+t)\left[\phi(t) - \phi(t+1)\right] + g(t) \leqslant C_0(1+t)\phi(t) + \phi(t)$$

Assim $\phi(t)^\alpha \leqslant C_0(1+t) + 1 \leqslant C_0(3+T_1) + 1$ e portanto $(t \leqslant T_1)$

$$\phi(t) \leqslant [C_0(3+T_1)+1]^{\frac{1}{\alpha}} = C \leqslant \max\{g(t), C\}$$

Agora, as estimativas (2.6) e (2.7) implicam prontamente em (i), pois de (2.6) temos que para $t > T_1 + 2 > T_1$

$$\phi(t) \leqslant \frac{1}{\left(\inf\limits_{s\in[T_1,T_1+1]} \omega(s) + \dfrac{\alpha}{\text{cte}}\log t - \dfrac{\alpha}{\text{cte}}\log(T_1+2)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant \frac{1}{[\text{cte}\log(1+t)]^{\frac{1}{\alpha}}}$$

e de (2.7) temos para $t \leqslant T_1 + 2$ que $\phi(t) \leqslant \max\{g(t), C\} = K$(constante), desde que $g(t)$ é limitada. Donde, tomando $C_1 = K\left(\log(1+T_1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ temos

$$\phi(t) \leqslant \max\{g(t), C\} = K = \frac{C_1}{\left(\log(1+T_1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant C_2\left(\log(1+t)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \qquad (t < T_1 + 2)$$

Segue que

$$\phi(t) \leqslant \text{cte}\left(\log(1+t)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \text{ para todo } t \geqslant 0$$

Prova de ii.

Fazendo

$$\psi(t) = \phi(t) + \nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}}$$

então, como em (2.2) temos

$$\psi(t)^{1+\alpha} = \left[\phi(t) + \nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}}\right]^{1+\alpha} \leqslant 2^{1+\alpha}\left[\phi(t)^{1+\alpha} + \nu^{1+\alpha} t^{-(1-r)(1+\frac{1}{\alpha})}\right]$$

Daí, usando (2.1)

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} &\leqslant 2^{1+\alpha}\left[\sup_{s\in[t,t+1]} \phi(s)^{1+\alpha} + \sup_{s\in[t,t+1]} \nu^{1+\alpha} s^{-(1-r)(1+\frac{1}{\alpha})}\right] \\
&\leqslant 2^{1+\alpha}\left\{C_0(1+t)^r\left[\phi(t) - \phi(t+1)\right] + g(t) + \nu^{1+\alpha} t^{-(1-r)(1+\frac{1}{\alpha})}\right\}
\end{aligned}$$

Agora, somando $\pm\nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}}$ e $\pm\nu(t+1)^{-\frac{1-r}{\alpha}}$ temos

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} &\leqslant 2^{1+\alpha}\Big\{C_0(1+t)^r\Big[\Big(\phi(t) + \nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}}\Big) - \nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}} - (\phi(t+1) + \\
&\quad + \nu(t+1)^{-\frac{1-r}{\alpha}}\Big) + \nu(t+1)^{-\frac{1-r}{\alpha}}\Big] + g(t) + \nu^{1+\alpha} t^{-(1-r)(1+\frac{1}{\alpha})}\Big\} \\
&= 2^{1+\alpha}\Big\{C_0(1+t)^r\left[\psi(t) - \psi(t+1)\right] + C_0(1+t)^r\Big[-\nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}} + \\
&\quad + \nu(t+1)^{-\frac{1-r}{\alpha}}\Big] + g(t) + \nu^{1+\alpha} t^{-(1-r)(1+\frac{1}{\alpha})}\Big\} \\
&= 2^{1+\alpha}\left\{C_0(1+t)^r\left[\psi(t) - \psi(t+1)\right] + I_2(t)\right\}
\end{aligned}$$

onde

$$I_2(t) = \nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}}\left\{C_0(1+t)^r\left[\left(\frac{t+1}{t}\right)^{-\frac{1-r}{\alpha}} - 1\right] + \nu^{-1} t^{\frac{1-r}{\alpha}} g(t) + \nu^{\alpha} t^{-(1-r)}\right\}$$

Agora,

$$\left(\frac{t+1}{t}\right)^{-\frac{1-r}{\alpha}} - 1 \leqslant -\frac{(1-r)}{2\alpha} t^{-1}$$

para t grande. De fato, definindo

$$f(t) = \left(\frac{t+1}{t}\right)^{-\frac{1-r}{\alpha}} + \frac{(1-r)}{2\alpha} t^{-1} - 1$$

temos que $f(t)$ apresenta um único ponto crítico, o qual é um mínimo global em $t = \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\alpha+1-r}}-1}$ e desde que

$$f\left(\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\alpha+1-r}}-1}\right) < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

então $f(t) < 0$ para todo $t > \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\alpha+1-r}}-1}$.

Usando a hipótese em $g(t)$, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} t^{(1-r)(1+\frac{1}{\alpha})} g(t) = 0$$

e a desigualdade

$$\left(\frac{t+1}{t}\right)^{-\frac{1-r}{\alpha}} - 1 \leqslant -\frac{(1-r)}{2\alpha} t^{-1}$$

válida para t grande, então

$$\begin{aligned} I_2(t) &\leqslant \nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}} \frac{t^{r-1}}{t^{r-1}} \left\{ C_0 \left(\left(\frac{1}{t}+1\right) t\right)^r \left(-\frac{(1-r)}{2\alpha} t^{-1}\right) + \nu^{-1} t^{-\frac{1-r}{\alpha}} g(t) + \nu^{\alpha} t^{-(1-r)} \right\} \\ &= \nu t^{-\frac{1-r}{\alpha}+r-1} \left\{ -C_0 (1+t^{-1})^r \frac{1-r}{2\alpha} + \nu^{-1} t^{(1-r)(1+\frac{1}{\alpha})} g(t) + \nu^{\alpha} \right\} < 0 \end{aligned}$$

para t grande, bastando escolher ν suficientemente pequeno.

Assim existe $T_2 > 0$ tal que se $t > T_2$

$$\sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} \leqslant 2^{1+\alpha} C_0 (1+t)^r \left[\psi(t) - \psi(t+1)\right]$$

Como na prova de (i), fazendo a mudança de variável $\psi(s)^{-\alpha} = \omega(s)$ temos

$$\begin{aligned} \omega(t-n) - \omega(t) &\leqslant -\frac{\alpha}{\text{cte}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(t-i)^r} \\ &\leqslant -\frac{\alpha}{\text{cte}} \int_0^{n-1} \frac{dx}{(t-x)^r} \\ &= -\frac{\alpha}{\text{cte}} (1-r)^{-1} \left[(t-n+1)^{1-r} - t^{1-r}\right] \end{aligned}$$

para qualquer n positivo, o que prova (ii) analogamente como na prova de (i).

Provas de (iii) e (iv)

As provas de (iii) e (iv) são semelhantes e portanto faremos apenas a prova de (iv). Da hipótese (2.1) sobre ϕ pode ser mostrado que

$$\phi(t+1) \leqslant \frac{C_0(1+t)^r}{C_0(1+t)^r+1}\phi(t) + g(t)$$

e consequentemente, usando indução sobre n podemos ver que

$$\phi(t+1) \leqslant \underbrace{\prod_{i=0}^{n} \frac{C_0(t+1-i)^r}{C_0(t+1-i)^r+1}\phi(t-n)}_{I_1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=0}^{j} \frac{C_0(t+1-i)^r}{C_0(t+1-i)^r+1}g(t-j)}_{I_2}$$

Agora, fixamos um inteiro n tal que $n \leqslant t < n+1$. Podemos assumir que $\sup\limits_{s\in[0,1]} \phi(s) > 0$. Então pode ser verificado que

$$\begin{aligned}
\log(I_1) &\leqslant -\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{C_0(t+1-i)^r+1} + \sup_{s\in[0,1]} \log\phi(s) \\
&\leqslant -\int_0^n \frac{1}{C_0(t+1-x)^r+1}\,dx + \sup_{s\in[0,1]} \log\phi(s) \\
&\leqslant -\frac{(1+t)^{1-r}}{(C_0+1)(1-r)} + \frac{(t+1-n)^{1-r}}{(C_0+1)(1-r)} + \log\{C_0\phi(0)+g(0)\}^{\frac{1}{1+\alpha}}
\end{aligned}$$

Assim

$$I_1 \leqslant C_5 e^{\left[-\frac{1}{(C_0+1)(1-r)}(1+t)^{1-r}\right]}$$

De modo análogo também pode ser verificado que

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\int_0^j \frac{1}{C_0(t+1-x)^r+1}\,dx} g(t-j) \\
&\leqslant C_6 e^{\left[-\frac{1}{(C_0+1)(1-r)}(1+t)^{1-r}\right]}
\end{aligned}$$

A prova agora está completa. □

2.3 Equações de Evolução Não Lineares Abstratas

Seja H um espaço de Hilbert e V, W espaços de Banach com $V \subset W \subset H$. Assumimos que V é denso em W e H e as imersões naturais de V em W e de W em H são contínuas.

Identificando H com o seu dual (denotado por H^*) temos que

$$V \subset W \subset H = H^* \subset W^* \subset V^*$$

Vamos considerar as equações de evolução não lineares para $u : [0, \infty) \mapsto V$

$$\begin{array}{lrcl} (a) & u''(t) + B(t)u'(t) + A(t)u(t) & = & f(t) \\ (b) & B(t)u'(t) + A(t)u(t) & = & f(t) \end{array}$$

onde $A(t)$ é a derivada de Fréchet de um funcional $F_{A(t)} : V \mapsto \mathbb{R}$, isto é,

$$A(t) \in \mathcal{L}\left(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R})\right) = \mathcal{L}(V, V^*)$$

e B é um operador limitado de W em W^*. Esquematicamente temos:

$$\begin{array}{rcccl} u & : & \mathbb{R}^+ & \mapsto & V \subset V^* \\ F_{A(t)} & : & V & \mapsto & \mathbb{R} \\ A(t) & : & V & \mapsto & V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) \\ B(t) & : & W & \mapsto & W^* \subset V^* \end{array}$$

onde $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Assim, na equação (a) temos

$$\begin{array}{lclcl} u \in V & \Rightarrow & u' \in V & \Rightarrow & u'' \in V \subset V^* \\ u \in V & \Rightarrow & u' \in V \subset W & \Rightarrow & Bu' \in W^* \subset V^* \\ u \in V & \Rightarrow & Au \in V^* & & \end{array}$$

Portanto $u''(t) + B(t)u'(t) + A(t)u(t) = f(t)$ faz sentido se $f(t) \in V^*$.

As conclusões são análogas para a equação (b).

A dualidade de V^* e V é denotada por $<\bullet, \bullet>$ e significa que se $f \in V^*$ e $u \in V$ então $f(u) = <f, u>_{V^* V}$. Do mesmo modo, se $u \in V$ então $A(t)u \in V^*$, portanto denotamos $A(t)u(t)$ aplicado em $u(t)$ como $<A(t)u(t), u(t)>_{V^* V}$. Note que ambas as expressões $<f, u>$ e $<A(t)u(t), u(t)>$ são elementos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Faremos agora as seguintes hipóteses

$\mathbf{A}_1$. $A(t)$ e $F_{A(t)}$ satisfazem as condições

$$k_0(1+t)^{-\alpha}\|u\|_V^p \leqslant k_1 F_{A(t)}(u) \leqslant \langle\!\langle A(t)u, u \rangle\!\rangle \quad \text{para } u \in V$$

onde k_0, k_1, α, p são constantes tais que $k_0, k_1 > 0$, $\alpha \geqslant 0$ e $p > 1$.

$\mathbf{A}_2$. Para cada $u \in V$, $F_{A(t)}$ é diferenciável em t e

$$0 \leqslant -\frac{d}{dt}F_{A(t)}(u) \leqslant \rho(t)F_{A(t)}(u)$$

para alguma função $\rho(t)$ decrescente satisfazendo $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t) = 0$. Por simplicidade escreveremos $F_{A'(t)}(u)$ para $\frac{d}{dt}F_{A(t)}(u)$.

$\mathbf{A}_3$. $B(t)$ satisfaz

$$k_2(1+t)^{-\theta_0}\|u\|_W^{r+2} \leqslant \langle\!\langle B(t)u, u \rangle\!\rangle$$

e

$$\|B(t)u\|_{W^*} \leqslant k_3\left[(1+t)^{-\theta_1}\|u\|_W^{r+1} + (1+t)^{-\theta_2}\|u\|_W\right]$$

onde $k_2, k_3 > 0$; $r, \theta_0 \geqslant 0$; θ_1, θ_2 são constantes.

$\mathbf{A}_4$. $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{\frac{r+2}{r+1}}[\mathbb{R}^+; W^*]$ onde r é a constante na hipótese A_3.

Definição de solução de (a): Uma função $u : \mathbb{R}^+ \mapsto V$ é dita ser uma solução da equação (a) se

$$\begin{aligned} u &\in C(\mathbb{R}^+; V) \\ u' &\in C(\mathbb{R}^+; H) \bigcap \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{r+2}(\mathbb{R}^+; W) \\ u'' &\in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^+; V^*) \end{aligned}$$

e a equação (a) é válida em V^* quase sempre em $t \in [0, \infty)$.

Definição de solução de (b): Uma função $u : \mathbb{R}^+ \mapsto V$ é dita ser uma solução da equação (b) se

$$u \in C\left(\mathbb{R}^+; V\right) \quad \text{e} \quad u' \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{r+2}\left(\mathbb{R}^+; W\right)$$

e a equação (b) é válida em V^* quase sempre em $t \in [0, \infty)$.

Seja $u(t)$ uma solução de (a). "Multiplicando"* a equação (a) por $u'(t)$ temos

$$(2.8) \qquad \lessdot u''(t), u'(t) \gtrdot + \lessdot B(t)u'(t), u'(t) \gtrdot + \lessdot A(t)u(t), u'(t) \gtrdot = \lessdot f(t), u'(t) \gtrdot$$

Agora, $u' \in V \subset H$ que é um espaço de Hilbert e portanto possuí produto interno. Assim $\|u'\|_H^2 = (u', u')_H$ e

$$\frac{d}{dt}\|u'\|_H^2 = \frac{d}{dt}(u', u')_H = 2 \lessdot u'', u' \gtrdot$$

Logo

$$(2.9) \qquad \lessdot u'', u' \gtrdot = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|_H^2$$

Agora, se F é um funcional

$$\begin{aligned} F: \ \mathbb{R} \times V &\mapsto \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) \end{aligned}$$

e sua derivada de Fréchet no ponto $x_0 \in V$ é

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0) : V &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0)x \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial x} : V &\mapsto \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) \\ x_0 &\mapsto \tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0) \end{aligned}$$

então se $x_0 = x_0(t)$ pela regra da cadeia temos

$$\frac{d}{dt}\left[F(t, x_0)\right] = \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x_0}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x_0)x_0'(t)$$

Tomando $x_0 = u(t)$, $F(t, x_0) = F_{A(t)}(u(t))$, $\frac{\partial F}{\partial x} = A(t)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x_0) = A(t)u(t)$ e

*No sentido da dualidade

$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x_0) = F_{A'(t)}(u(t))$ temos

$$\frac{d}{dt}\left[F_{A(t)}(u(t))\right] = F_{A'(t)}(u(t)) + \langle A(t)u(t), u'(t)\rangle$$

Isto é

$$\langle A(t)u(t), u'(t)\rangle = \frac{d}{dt}\left[F_{A(t)}(u(t))\right] - F_{A'(t)}(u(t)) \tag{2.10}$$

Equações de Energia Para Equação (a)

Substituindo (2.9) e (2.10) na expressão (2.8) e integrando de t_1 a t_2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u'(t_2)\|_H^2 + \int_{t_1}^{t_2} \langle B(t)u'(t), u'(t)\rangle \, dt + F_{A(t_2)}(u(t_2)) - \int_{t_1}^{t_2} F_{A'(t)}(u(t))\, dt \\ = \frac{1}{2}\|u'(t_1)\|_H^2 + F_{A(t_1)}(u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), u'(t)\rangle \, dt \end{aligned} \tag{2.11}$$

Agora, "multiplicando"† a equação (a) por $u(t)$ ($u(t) \in V \subset H$) temos

$$\langle u''(t), u(t)\rangle + \langle B(t)u'(t), u(t)\rangle + \langle A(t)u(t), u(t)\rangle = \langle f(t), u(t)\rangle \tag{2.12}$$

Mas

$$\frac{d}{dt}(u'(t), u(t))_H = \langle u''(t), u(t)\rangle + (u'(t), u'(t))_H$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle u''(t), u(t)\rangle &= \frac{d}{dt}(u'(t), u(t))_H - (u'(t), u'(t))_H \\ &= \frac{d}{dt}(u'(t), u(t))_H - \|u'(t)\|_H^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

†Novamente no sentido da dualidade

Substituindo (2.13) na expressão (2.12) e integrando de t_1 a t_2 ficamos com

$$(2.14) \quad \int_{t_1}^{t_2} \lessdot A(t)u(t), u(t) \gtrdot\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\lessdot f(t), u(t) \gtrdot - \lessdot B(t)u'(t), u(t)\gtrdot\right) dt$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \|u'(t)\|_H^2\, dt + (u'(t_1), u(t_1))_H - (u'(t_2), u(t_2))_H$$

Equações de Energia Para Equação (b)

Analogamente, se $u(t)$ é uma solução de (b), seguindo os mesmos passos anteriores encontramos

$$(2.15) \quad F_{A(t_2)}(u(t_2)) - \int_{t_1}^{t_2} F_{A'(t)}(u(t))\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \lessdot B(t)u'(t), u'(t) \gtrdot\, dt$$
$$= F_{A(t_1)}(u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \lessdot f(t), u'(t) \gtrdot\, dt$$

e

$$(2.16) \quad \int_{t_1}^{t_2} \lessdot A(t)u(t), u(t) \gtrdot\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\lessdot f(t), u(t) \gtrdot - \lessdot B(t)u'(t), u(t)\gtrdot\right) dt$$

2.4 Teoremas de Estabilização Abstratos

Para mostrar resultados de estabilização para as equações (a) e (b) precisamos de diversas estimativas sobre as soluções.

Seja $u(t)$ uma solução da equação (a) satisfazendo ambas as expressões (2.11) e (2.14). Integrando A_3, de t a $t+1$, com $u'(t)$ no lugar de u, temos

$$k_2 \int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2}\, ds \leqslant \int_t^{t+1} \lessdot B(s)u'(s), u'(s) \gtrdot\, ds$$

Aplicando nessa estimativa a identidade (2.11) e a hipótese A_2, isto é,

$$0 \leqslant -F_{A'(t)}(u(t))$$

temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} k_2 \int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2}\, ds &\leqslant \\ \leqslant\ & \frac{1}{2}\|u'(t)\|_H^2 + F_{A(t)}(u(t)) - \frac{1}{2}\|u'(t+1)\|_H^2 - F_{A(t+1)}(u(t+1)) + \\ &+ \int_t^{t+1} \langle f(s), u'(s) \rangle\, ds + \int_t^{t+1} F_{A'(s)}(u(s))\, ds \\ \leqslant\ & E(u(t)) - E(u(t+1)) + \int_t^{t+1} \langle f(s), u'(s) \rangle\, ds \end{aligned}$$

onde

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\|u'(t)\|_H^2 + F_{A(t)}(u(t))$$

é a energia para o sistema (a).

Agora como

$$| \langle f(s), u'(s) \rangle | \leqslant \|f(s)\|_{W^*} \|u'(s)\|_W$$

onde

$$\|f(s)\|_{W^*} = \sup_{\|u\|_W \leqslant 1} | \langle f(s), u \rangle |$$

temos

$$(2.17)\quad k_2 \int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2} ds \leqslant E(u(t)) - E(u(t+1)) + \int_t^{t+1} \|f(s)\|_{W^*} \|u'(s)\|_W\, ds$$

Ainda, aplicando a desigualdade de Hölder

$$\int_t^{t+1} \|f(s)\|_{W^*}\|u'(s)\|_W\,ds =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_t^{t+1} (1+s)^{-\frac{\theta_0}{r+2}}(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+2}}\|f(s)\|_{W^*}\|u'(s)\|_W\,ds \\
&= \int_t^{t+1} \left[(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+2}}\|f(s)\|_{W^*}\right]\left[(1+s)^{-\frac{\theta_0}{r+2}}\|u'(s)\|_W\right] ds \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\int_t^{t+1}\left[(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+2}}\|f(s)\|_{W^*}\right]^{\frac{r+2}{r+1}} ds\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_t^{t+1}\left[(1+s)^{-\frac{\theta_0}{r+2}}\|u'(s)\|_W\right]^{r+2} ds\right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&= \left(\int_t^{t+1}(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+1}}\|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}} ds\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_t^{t+1}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2} ds\right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&= \left[\underbrace{\left(\frac{k_2(r+2)}{2}\right)^{-\frac{1}{r+2}}\left(\int_t^{t+1}(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+1}}\|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}} ds\right)^{\frac{r+1}{r+2}}}_{a}\right] \times \\
&\quad \left[\underbrace{\left(\frac{k_2(r+2)}{2}\right)^{\frac{1}{r+2}}\left(\int_t^{t+1}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2} ds\right)^{\frac{1}{r+2}}}_{b}\right]
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Young $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ válida se $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$, para os termos a e b acima, obtemos para $p=\frac{r+2}{r+1}$ e $q=r+2$

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+1}\|f(s)\|_{W^*}\|u'(s)\|_W\,ds \leqslant{}& \left(\frac{r+1}{r+2}\right)\left(\frac{2}{r+2}\right)^{\frac{1}{r+1}} k_2^{-\frac{1}{r+1}} \int_t^{t+1}(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+1}}\|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}} ds \\
&+ \frac{1}{2}k_2\int_t^{t+1}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2} ds
\end{aligned}
$$

Portanto, a expressão (2.17) fica

$$
\begin{aligned}
&k_2\int_t^{t+1}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2} ds \leqslant E(u(t)) - E(u(t+1)) + \\
&\left(\frac{r+1}{r+2}\right)\left(\frac{2}{r+2}\right)^{\frac{1}{r+1}} k_2^{-\frac{1}{r+1}}\int_t^{t+1}(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+1}}\|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}} ds + \frac{k_2}{2}\int_t^{t+1}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2} ds
\end{aligned}
$$

Donde concluímos que

(2.18)
$$\frac{k_2}{2}\int_t^{t+1}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2} ds \leqslant E(u(t)) - E(u(t+1)) + \mathrm{C}\int_t^{t+1}(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+1}}\|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}} ds$$

onde C é uma constante que depende de r e k_2. Segue que

$$k_2 \int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2}\, ds \leqslant k_2 D(t)^{r+2} \tag{2.19}$$

onde

$$D(t) = \left[\frac{2}{k_2}\left(E(u(t)) - E(u(t+1)) + \text{cte} \int_t^{t+1} (1+s)^{\frac{\theta_0}{r+1}} \|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}}\, ds\right)\right]^{\frac{1}{r+2}}$$

Consequentemente, aplicando o Teorema do Valor Médio para integrais, segue da expressão (2.19), que existe um $t_1 \in \left[t, t+\frac{1}{4}\right]$ tal que

$$\int_t^{t+\frac{1}{4}} (1+s)^{-\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2}\, ds = (1+t_1)^{-\theta_0} \|u'(t_1)\|_W^{r+2} \frac{1}{4} \leqslant D(t)^{r+2}$$

Logo

$$\|u'(t_1)\|_W \leqslant \left(4(1+t_1)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{r+2}} D(t) = 4^{\frac{1}{r+2}} (1+t_1)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \tag{2.20}$$

Desde que $t \leqslant t_1 \leqslant t + \frac{1}{4}$, segue que $1 + t_1 \leqslant \frac{5}{4} + t \leqslant 4 + 4t = 4(1+t)$.

Logo, a expressão (2.20) fica

$$\|u'(t_1)\|_W \leqslant 4^{\frac{1}{r+2}} (1+t_1)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \leqslant 4^{\frac{1+\theta_0}{r+2}} (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \tag{2.21}$$

Analogamente, existe um $t_2 \in \left[t+\frac{3}{4}, t+1\right]$ tal que

$$\|u'(t_2)\|_W \leqslant 4^{\frac{1}{r+2}} (1+t_2)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \leqslant 4^{\frac{1+\theta_0}{r+2}} (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \tag{2.22}$$

Segue da expressão (2.14) com t_1 e t_2 das expressões (2.21) e (2.22), respectivamente, que

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \lessdot A(s)u(s), u(s) \gtrdot \, ds \leqslant \\
&\leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} \lessdot A(s)u(s), u(s) \gtrdot \, ds \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} \left(\lessdot f(s), u(s) \gtrdot - \lessdot B(s)u'(s), u(s) \gtrdot \right) ds \right| + \\
&\quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_H^2 \, ds + (u'(t_1), u(t_1))_H - (u'(t_2), u(t_2))_H \right| \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} |\lessdot B(s)u'(s), u(s) \gtrdot| \, ds + \int_{t_1}^{t_2} |\lessdot f(s), u(s) \gtrdot| \, ds + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_H^2 \, ds + \sum_{i=1}^{i=2} |(u'(t_i), u(t_i))_H| \\
&\leqslant \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \|B(s)u'(s)\|_{W^*} \|u(s)\|_W \, ds + \int_{t_1}^{t_2} \|f(s)\|_{W^*} \|u(s)\|_W \, ds +}_{I} \\
&\quad + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_H^2 \, ds}_{II} + \underbrace{\sum_{i=1}^{i=2} |(u'(t_i), u(t_i))_H|}_{III}
\end{aligned}$$

Pela hipótese A_3 temos

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_1}^{t_2} \|B(s)u'(s)\|_{W^*} \|u(s)\|_W \, ds + \int_{t_1}^{t_2} \|f(s)\|_{W^*} \|u(s)\|_W \, ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \left\{ k_3 \left[(1+s)^{-\theta_1} \|u'(s)\|_W^{r+1} + (1+s)^{-\theta_2} \|u'(s)\|_W \right] \|u(s)\|_W + \|f(s)\|_{W^*} \|u(s)\|_W \right\} ds \\
&\leqslant \text{cte} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ (1+s)^{-\theta_1} \|u'(s)\|_W^{r+1} + (1+s)^{-\theta_2} \|u'(s)\|_W + \|f(s)\|_{W^*} \right\} ds \sup_{s \in [t, t+1]} \|u(s)\|_W
\end{aligned}$$

No que segue usamos o fato da imersão de W em H ser contínua, as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz e a expressão (2.19) para obter que

$$
\begin{aligned}
II &= \int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_H^2\, ds \\
&\leqslant \text{cte} \int_t^{t+1} \|u'(s)\|_W^2\, ds \\
&= \text{cte} \int_t^{t+1} (1+s)^{-\frac{2\theta_0}{r+2}} \|u'(s)\|_W^2 (1+s)^{\frac{2\theta_0}{r+2}}\, ds \\
&\leqslant \text{cte} \left(\int_t^{t+1} (1+s)^{-\frac{2\theta_0}{r+2}\frac{r+2}{2}} \|u'(s)\|_W^{2\left(\frac{r+2}{2}\right)}\, ds \right)^{\frac{2}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} (1+s)^{\frac{2\theta_0}{r+2}\frac{r+2}{r}}\, ds \right)^{\frac{r}{r+2}} \\
&= \text{cte} \left(\int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2}\, ds \right)^{\frac{2}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} (1+s)^{\frac{2\theta_0}{r}}\, ds \right)^{\frac{r}{r+2}} \\
&\leqslant \text{cte} \left[D(t)^{r+2} \right]^{\frac{2}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} (1+t+1)^{\frac{2\theta_0}{r}}\, ds \right)^{\frac{r}{r+2}} \\
&\leqslant \text{cte}\, D(t)^2 (2+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} \\
&\leqslant \text{cte}\, D(t)^2 (1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
III &= \sum_{i=1}^{i=2} |(u'(t_i), u(t_i))_H| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{i=2} \|u'(t_i)\|_H \|u(t_i)\|_H \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{i=2} \|u'(t_i)\|_H \sup_{s\in[t,t+1]} \|u(s)\|_H \\
&\leqslant \text{cte} \left(\|u'(t_1)\|_W + \|u'(t_2)\|_W \right) \sup_{s\in[t,t+1]} \|u(s)\|_H
\end{aligned}
$$

Daí, pelas expressões (2.21) e (2.22) temos que

$$
\begin{aligned}
III &= \sum_{i=1}^{i=2} |(u'(t_i), u(t_i))_H| \\
&\leqslant \text{cte} \left(\|u'(t_1)\|_W + \|u'(t_2)\|_W \right) \sup_{s\in[t,t+1]} \|u(s)\|_H \\
&\leqslant \text{cte} \left(4^{\frac{1+\theta_0}{r+2}} (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) + 4^{\frac{1+\theta_0}{r+2}} (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \right) \sup_{s\in[t,t+1]} \|u(s)\|_H \\
&= \text{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \sup_{s\in[t,t+1]} \|u(s)\|_H
\end{aligned}
$$

Segue das estimativas I, II e III que

$$\int_{t_1}^{t_2} < A(s)u(s), u(s) > ds \leqslant$$

$$\text{cte} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \underbrace{(1+s)^{-\theta_1} \|u'(s)\|_W^{r+1}}_{V} + \underbrace{(1+s)^{-\theta_2} \|u'(s)\|_W}_{VI} + \underbrace{\|f(s)\|_{W^*}}_{VII} \right\} ds \underbrace{\sup_{s \in [t,t+1]} \|u(s)\|_W}_{IV}$$

$$+ \text{cte} D(t)^2 (1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} + \underbrace{\text{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \sup_{s \in [t,t+1]} \|u(s)\|_H}_{VIII}$$

Precisamos estimar cada uma dessas integrais. Para isso observamos que

$$\|u(s)\|_W^p = (1+s)^{\alpha} (1+s)^{-\alpha} \|u(s)\|_W^p$$

Pela hipótese A_1 temos que $(1+t)^{-\alpha} \|u\|_V^p \leqslant \frac{k_1}{k_2} F_{A(t)}(u)$ e pela imersão contínua de $V \subset W$ temos $\|u(s)\|_W \leqslant \text{cte} \|u(s)\|_V$. Resulta

$$\|u(s)\|_W^p \leqslant \text{cte}(1+s)^{\alpha}(1+s)^{-\alpha}\|u(s)\|_V^p \leqslant \text{cte}(1+s)^{\alpha} F_{A(s)}(u(s)) \leqslant \text{cte}(1+s)^{\alpha} E(u(s))$$

onde as constantes acima não são necessariamente as mesmas.

Segue que

$$IV = \sup_{s \in [t,t+1]} \|u(s)\|_W \leqslant \text{cte}(1+t)^{\frac{\alpha}{p}} \sup_{s \in [t,t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}} \tag{2.23}$$

Precisamos estimar

$$\begin{aligned}
V &= \int_{t_1}^{t_2} (1+s)^{-\theta_1} \|u'(s)\|_W^{r+1} ds \\
&\leqslant (1+t)^{-\theta_1} \int_t^{t+1} \|u'(s)\|_W^{r+1} ds \\
&= (1+t)^{-\theta_1} \int_t^{t+1} (1+s)^{\theta_0 \frac{(r+1)}{r+2}} (1+s)^{-\theta_0 \frac{(r+1)}{r+2}} \|u'(s)\|_W^{r+1} ds \\
&\leqslant (1+t)^{-\theta_1} \left(\int_t^{t+1} (1+s)^{\theta_0 (r+1)} ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2} ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&\leqslant (1+t)^{-\theta_1} \text{cte} (1+t)^{\theta_0 \frac{(r+1)}{r+2}} D(t)^{r+1}
\end{aligned}$$

Portanto

$$V = \int_{t_1}^{t_2} (1+s)^{-\theta_1} \|u'(s)\|_W^{r+1}\, ds \leqslant \text{cte}(1+t)^{-\theta_1+\theta_0\frac{(r+1)}{r+2}} D(t)^{r+1} \tag{2.24}$$

Agora também estimamos

$$\begin{aligned}
VI &= \int_{t_1}^{t_2} (1+s)^{-\theta_2} \|u'(s)\|_W\, ds \\
&\leqslant \int_{t}^{t+1} (1+s)^{-\theta_2} \|u'(s)\|_W\, ds \\
&\leqslant (1+t)^{-\theta_2} \int_{t}^{t+1} (1+s)^{\frac{\theta_0}{r+2}} (1+s)^{-\frac{\theta_0}{r+2}} \|u'(s)\|_W\, ds \\
&\leqslant (1+t)^{-\theta_2} \left(\int_{t}^{t+1} (1+s)^{\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2}\, ds\right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_{t}^{t+1} (1+s)^{\frac{\theta_0}{r+1}}\, ds\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&\leqslant (1+t)^{-\theta_2} \left[D(t)^{r+2}\right]^{\frac{1}{r+2}} \left[\text{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+1}}\right]^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&= \text{cte}(1+t)^{-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}} D(t)
\end{aligned}$$

Isto é

$$VI = \int_{t_1}^{t_2} (1+s)^{-\theta_2} \|u'(s)\|_W\, ds \leqslant \text{cte}(1+t)^{-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \tag{2.25}$$

Ainda

$$\begin{aligned}
VII &= \int_{t_1}^{t_2} \|f(s)\|_{W^*}\, ds \\
&\leqslant \int_{t}^{t+1} \|f(s)\|_{W^*}.1\, ds \\
&\leqslant \left(\int_{t}^{t+1} \|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+1}{r+2}}\, ds\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_{t}^{t+1} 1^{r+2}\, ds\right)^{\frac{1}{r+2}}
\end{aligned}$$

Portanto obtemos que

$$VII = \int_{t}^{t+1} \|f(s)\|_{W^*}\, ds \leqslant \delta(t) \text{ onde } \delta(t) = \left(\int_{t}^{t+1} \|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+1}{r+2}}\, ds\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \tag{2.26}$$

Usando a imersão contínua de W em H e a expressão (2.23) temos que

$$\begin{aligned} VIII &= \text{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \sup_{s\in[t,t+1]} \|u(s)\|_H \\ &\leqslant \text{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \sup_{s\in[t,t+1]} \|u(s)\|_W \\ &\leqslant \text{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t)(1+t)^{\frac{\alpha}{p}} \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Isto é

$$VIII = \text{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \sup_{s\in[t,t+1]} \|u(s)\|_H \leqslant \text{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}+\frac{\alpha}{p}} D(t) \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}} \tag{2.27}$$

Finalmente, usando as expressões (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27) concluimos que

(2.28)
$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} &< A(s)u(s), u(s) > ds \leqslant \text{cte} \Bigg\{ \Bigg[(1+t)^{-\theta_1+\theta_0\frac{(r+1)}{r+2}} D(t)^{r+1} + (1+t)^{-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \\ &+\delta(t) + (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \Bigg] (1+t)^{\frac{\alpha}{p}} \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}} + (1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} D(t)^2 \Bigg\} \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do valor médio para integrais, existe $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} E(u(s))\, ds = E(u(t^*)) \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\geqslant \frac{1}{2}} \geqslant \frac{E(u(t^*))}{2}$$

onde t_1 e t_2 aparecem em (2.21) e (2.22).

Logo

$$E(u(t^*)) \leqslant 2\int_{t_1}^{t_2} E(u(s))\, ds = 2\int_{t_1}^{t_2} \frac{\|u'(s)\|_H^2}{2}\, ds + 2\int_{t_1}^{t_2} F_{A(s)}(u(s))\, ds \tag{2.29}$$

Agora, pela imersão contínua de W em H, isto é $\|u\|_H \leqslant \text{cte}\|u\|_W$, para $u \in W$, e pela hipótese A_1, isto é $F_{A(t)}(u) \leqslant \frac{1}{k_1} < A(t)u, u>$, a expressão (2.29) fica

$$E(u(t^*)) \leqslant \text{cte} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_W^2\, ds}_{IX} + \underbrace{\frac{2}{k_1}\int_{t_1}^{t_2} < A(s)u(s), u(s) > ds}_{X} \tag{2.30}$$

Usando a expressão (2.19) e a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
IX &= \int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_W^2 \, ds \\
&\leqslant \int_t^{t+1} (1+s)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} (1+s)^{-\frac{2\theta_0}{r+2}} (\|u'(s)\|_W^2 \, ds \\
&\leqslant \left(\int_t^{t+1} \left[(1+s)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} \right]^{\frac{r+2}{r}} ds \right)^{\frac{r}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} \left[(1+s)^{\frac{-2\theta_0}{r+2}} \|u'(s)\|_W^2 \right]^{\frac{r+2}{2}} ds \right)^{\frac{2}{r+2}} \\
&= \left(\int_t^{t+1} (1+s)^{\frac{2\theta_0}{r}} \, ds \right)^{\frac{r}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_0} \|u'(s)\|_W^{r+2} \, ds \right)^{\frac{2}{r+2}} \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} D(t)^2
\end{aligned}$$

Usando a expressão (2.28) temos

$$\begin{aligned}
X &= \frac{2}{k_1} \int_{t_1}^{t_2} <A(s)u(s), u(s)> \, ds \\
&\leqslant \mathrm{cte} \left\{ \left[(1+t)^{-\theta_1 + \theta_0 \frac{(r+1)}{r+2}} D(t)^{r+1} + (1+t)^{-\theta_2 + \frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta(t) + (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \right] (1+t)^{\frac{\alpha}{p}} \sup_{s \in [t, t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}} + (1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} D(t)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Somando IX e X obtemos a seguinte estimativa de (2.30)

(2.31)
$$\begin{aligned}
E(u(t^*)) \leqslant \mathrm{cte} &\left\{ (1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} D(t)^2 + \left[(1+t)^{-\theta_1 + \theta_0 \frac{(r+1)}{r+2}} D(t)^{r+1} + (1+t)^{-\theta_2 + \frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \right. \right. \\
&\left. \left. + \delta(t) + (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \right] (1+t)^{\frac{\alpha}{p}} \sup_{s \in [t, t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}} \right\}
\end{aligned}$$

Sejam agora t_1 e t_2 números arbitrários tais que $t \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t+1$. Por (2.11) temos

(2.32)
$$E(u(t_2)) = E(u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} [- < B(s)u'(s), u'(s) > + F_{A'(s)}(u(s)) + <f(s), u'(s)>] \, ds$$

Fazendo $t_1 = t^*$ em (2.32) temos

$$
\begin{aligned}
E(u(t_2)) &\leqslant E(u(t^*)) + \int_{t^*}^{t_2} \left[<B(s)u'(s), u'(s)> + |F_{A'(s)}(u(s))| + |<f(s), u'(s)>| \right] ds \\
&\leqslant E(u(t^*)) + \int_{t}^{t+1} \left[<B(s)u'(s), u'(s)> + |F_{A'(s)}(u(s))| + |<f(s), u'(s)>| \right] ds
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
(2.33) \qquad \sup_{s \in [t^*, t+1]} E(u(s)) \leqslant E(u(t^*)) + \\
\int_{t}^{t+1} \left[<B(s)u'(s), u'(s)> + |F_{A'(s)}(u(s))| + |<f(s), u'(s)>| \right] ds
\end{aligned}
$$

Analogamente, fazendo $t_2 = t^*$ em (2.32) temos

$$
\begin{aligned}
E(u(t_1)) &= E(u(t^*)) - \int_{t_1}^{t^*} \left[-<B(s)u'(s), u'(s)> + F_{A'(s)}(u(s)) + <f(s), u'(s)> \right] ds \\
&\leqslant E(u(t^*)) + \int_{t_1}^{t^*} \left[<B(s)u'(s), u'(s)> + |F_{A'(s)}(u(s))| + |<f(s), u'(s)>| \right] ds \\
&\leqslant E(u(t^*)) + \int_{t}^{t+1} \left[<B(s)u'(s), u'(s)> + |F_{A'(s)}(u(s))| + |<f(s), u'(s)>| \right] ds
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
(2.34) \qquad \sup_{s \in [t, t^*]} E(u(s)) \leqslant E(u(t^*)) + \\
\int_{t}^{t+1} \left[<B(s)u'(s), u'(s)> + |F_{A'(s)}(u(s))| + |<f(s), u'(s)>| \right] ds
\end{aligned}
$$

Segue de (2.33) e (2.34) que

$$
\begin{aligned}
(2.35) \qquad \sup_{s \in [t, t+1]} E(u(s)) &\leqslant E(u(t^*)) + \underbrace{\int_{t}^{t+1} <B(s)u'(s), u'(s)> ds}_{XI} \\
&+ \underbrace{\int_{t}^{t+1} |F_{A'(s)}(u(s))| \, ds}_{XII} + \underbrace{\int_{t}^{t+1} |<f(s), u'(s)>| \, ds}_{XIII}
\end{aligned}
$$

Vamos agora estimar XI, XII e $XIII$.

Usando a hipótese A_3 temos

$$
\begin{aligned}
XI &= \int_t^{t+1} \ll B(s)u'(s), u'(s) \gg ds \\
&\leqslant \int_t^{t+1} \|B(s)u'(s)\|_{W^*} \|u'(s)\|_W \, ds \\
&\leqslant \int_t^{t+1} \left[k_3(1+s)^{-\theta_1}\|u'(s)\|_W^{r+1} + k_3(1+s)^{-\theta_2}\|u'(s)\|_W\right] \|u'(s)\|_W \, ds \\
&= k_3 \int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_1}\|u'(s)\|_W^{r+2} \, ds + k_3 \int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_2}\|u'(s)\|_W^2 \, ds \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{-\theta_1} \int_t^{t+1} \|u'(s)\|_W^{r+2} \, ds + \mathrm{cte}(1+t)^{-\theta_2} \int_t^{t+1} \|u'(s)\|_W^2 \, ds \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{-\theta_1} \int_t^{t+1} (1+s)^{\theta_0}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2} \, ds \\
&\quad + \mathrm{cte}(1+t)^{-\theta_2} \int_t^{t+1} (1+s)^{\frac{2\theta_0}{r+2}}(1+s)^{-\frac{2\theta_0}{r+2}}\|u'(s)\|_W^2 \, ds \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{-\theta_1+\theta_2} \int_t^{t+1} (1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2} \, ds \\
&\quad + \mathrm{cte}(1+t)^{-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}} \int_t^{t+1} (1+s)^{-\frac{2\theta_0}{r+2}}\|u'(s)\|_W^2 \, ds \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{-\theta_1+\theta_2} D(t)^{r+2} + \mathrm{cte}(1+t)^{-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}} D(t)^2
\end{aligned}
$$

Usando a hipótese A_2 temos (lembrando que ρ é positiva e decrescente)

$$
\begin{aligned}
XII &= \int_t^{t+1} |F_{A'(s)}(u(s))| \, ds \\
&\leqslant \int_t^{t+1} \rho(s)F_{A(s)}(u(s))| \, ds \\
&\leqslant \rho(t) \int_t^{t+1} F_{A(s)}(u(s)) \, ds \\
&\leqslant \rho(t) \sup_{s\in[t,t+1]} F_{A(s)}(u(s)) \\
&\leqslant \rho(t) \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s))
\end{aligned}
$$

Novamente, fazendo uso da desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
XIII &= \int_t^{t+1} | < f(s), u'(s) > | \, ds \\
&\leqslant \int_t^{t+1} \|f(s)\|_{W^*} \|u'(s)\|_W \, ds \\
&= \int_t^{t+1} (1+s)^{\frac{\theta_0}{r+2}} (1+s)^{-\frac{\theta_0}{r+2}} \|u'(s)\|_W \|f(s)\|_{W^*} \, ds \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} \int_t^{t+1} (1+s)^{-\frac{\theta_0}{r+2}} \|u'(s)\|_W \|f(s)\|_{W^*} \, ds \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} \left[(1+s)^{-\frac{\theta_0}{r+2}} \|u'(s)\|_W^{\frac{r+2}{W}} \right]^{r+2} ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} \|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+1}{r+2}} \, ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} \left[(1+s)^{-\frac{\theta_0}{r+2}} \|u'(s)\|_W^{\frac{r+2}{W}} \right]^{r+2} ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \delta(t) \\
&\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} \delta(t) D(t)
\end{aligned}
$$

Portanto usando as estimativas acima, (2.35) fica

$$
\begin{aligned}
(2.36) \quad \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant E(u(t^*)) + \mathrm{cte} \Big\{ (1+t)^{-\theta_1+\theta_0} D(t)^{r+2} + \\
(1+t)^{-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}} D(t)^2 + \delta(t)(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \Big\} + \rho(t) \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s))
\end{aligned}
$$

Usando (2.31) em (2.36) temos

$$
\begin{aligned}
(1-\rho(t)) \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant \mathrm{cte} \Big\{ (1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}} D(t)^2 + \Big[(1+t)^{-\theta_1+\theta_0\frac{(r+1)}{r+2}} D(t)^{r+1} \\
+ (1+t)^{-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) + \delta(t) + (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \Big] (1+t)^{\frac{\alpha}{p}} \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}} \\
+ (1+t)^{-\theta_1+\theta_0} D(t)^{r+2} + (1+t)^{-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}} D(t)^2 + \delta(t)(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}} D(t) \Big\}
\end{aligned}
$$

Pela hipótese que $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 0$, então existe $T > 0$ tal

$$
\sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant \mathrm{cte} \left\{ Q(t) + R(t) \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}} \right\}
$$

para todo $t \geqslant T$, onde

$$\begin{aligned} Q(t) &= (1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}}D(t)^2 + (1+t)^{-\theta_1+\theta_0}D(t)^{r+2} + (1+t)^{-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}}D(t)^2 + \delta(t)(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}}D(t) \\ R(t) &= \left[(1+t)^{-\theta_1+\theta_0\frac{(r+1)}{r+2}}D(t)^{r+1} + (1+t)^{-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}}D(t) + \delta(t) + (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}}D(t)\right](1+t)^{\frac{\alpha}{p}} \end{aligned}$$

Desde que $p > 1$, aplicando a desigualdade de Young temos

$$\sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant \text{cte}\left\{ Q(t) + \frac{R(t)^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} + \frac{\left[\sup\limits_{s\in[t,t+1]} E(u(s))^{\frac{1}{p}}\right]^p}{p} \right\}$$

Portanto

$$\sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant \text{cte}\left[Q(t) + R(t)^{\frac{p}{p-1}}\right]$$

para $t \geqslant T$.

Ou seja

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant\ & \text{cte}\Big\{(1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}}D(t)^2 + (1+t)^{-\theta_1+\theta_0}D(t)^{r+2} \\ & +(1+t)^{-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}}D(t)^2 + \delta(t)(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}}D(t) \\ & +(1+t)^{\frac{\alpha}{p-1}}\Big[(1+t)^{-\theta_1+\theta_0\frac{(r+1)}{r+2}}D(t)^{r+1} \\ & +(1+t)^{-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}}D(t) + \delta(t) + (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}}D(t)\Big]^{\frac{p}{p-1}}\Big\} \end{aligned} \tag{2.37}$$

para $t \geqslant t$.

Assumiremos que a função $f(t)$ tem um comportamento tal que

$$\delta(t) \leqslant \text{cte}(1+t)^{-\lambda_0} \tag{2.38}$$

onde λ_0 é alguma constante satisfazendo a seguinte condição

$$\lambda_0 \geqslant \max\left\{-\frac{(r+1)}{r+2}\theta_1 + \theta_0, -\frac{(r+1)}{2}\theta_2 + \theta_0, \frac{\alpha}{p} - \theta_1 + \theta_0, \frac{\alpha(r+1)}{p} + \theta_0\right\} \tag{2.39}$$

É fácil verificar que $E(u(t))$ é limitada em $(0,\infty)$. De fato, se $E(u(t)) \geqslant E(u(t+1))$

para $t \geqslant T$, então $E(u(t))$ é limitada. Agora, se $E(u(t)) \leqslant E(u(t+1))$ para algum $t \geqslant T$ então para esse t temos

$$\begin{aligned} k_2 D(t)^{r+2} &= 2\left[\underbrace{E(u(t)) - E(u(t+1))}_{\leqslant 0}\right] + \mathrm{cte}\int_t^{t+1} (1+s)^{\frac{\theta_0}{r+1}} \|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}}\, ds \\ &\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+1}} \int_t^{t+1} \|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}}\, ds \\ &\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+1}} \delta(t)^{\frac{r+2}{r+1}} \end{aligned}$$

Segue que para o referido valor de t vale

$$D(t) \leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{\frac{\theta_0}{(r+1)(r+2)}} \delta(t)^{\frac{1}{r+1}} \tag{2.40}$$

As constantes que aparecem nas estimativas acima não são necessariarmente as mesmas.

Substituindo (2.40) em (2.37) temos

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) &\leqslant \mathrm{cte}\Big\{(1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}\left(1+\frac{1}{r+1}\right)}\delta(t)^{\frac{2}{r+1}} + (1+t)^{-\theta_1+\theta_0\left(1+\frac{1}{r+1}\right)}\delta(t)^{\frac{r+2}{r+1}} \\ &\quad +(1+t)^{-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}\left(1+\frac{1}{r+1}\right)}\delta(t)^{\frac{2}{r+1}} + (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}\left(1+\frac{1}{r+1}\right)}\delta(t)^{\left(1+\frac{1}{r+1}\right)} \\ &\quad +(1+t)^{\frac{\alpha}{p-1}}\Big[(1+t)^{-\theta_1+\theta_0}\delta(t) + (1+t)^{-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}\left(1+\frac{1}{r+1}\right)}\delta(t)^{\frac{1}{r+1}} \\ &\quad +\delta(t) + (1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}\left(1+\frac{1}{r+1}\right)}\delta(t)^{\frac{1}{r+1}}\Big]^{\frac{p}{p-1}}\Big\} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Substituindo agora (2.38) em (2.41) temos

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) &\leqslant \mathrm{cte}\Big\{(1+t)^{\frac{2(\theta_0-\lambda_0)}{r+2}} + (1+t)^{\left(-\lambda_0-\theta_1\frac{(r+1)}{r+2}+\theta_0\right)\frac{r+2}{r+1}} \\ &\quad +(1+t)^{\left(-\lambda_0-\frac{(r+1)\theta_2}{2}+\theta_0\right)\frac{2}{r+1}} + (1+t)^{\left(-\lambda_0+\frac{\theta_0}{r+2}\right)\frac{r+2}{r+1}} \\ &\quad +(1+t)^{\left(-\lambda_0+\frac{\alpha}{p}-\theta_1+\theta_0\right)\frac{p}{p-1}} + (1+t)^{\left(-\lambda_0+\frac{\alpha(r+1)}{p}-(r+2)\theta_2+\theta_0\right)\frac{p}{(p-1)(r+1)}} \\ &\quad +(1+t)^{\left(-\lambda_0+\frac{\alpha}{p}\right)\frac{p}{p-1}} + (1+t)^{\left(-\lambda_0+\frac{\alpha(r+1)}{p}+\theta_0\right)\frac{p}{(p-1)(r+1)}}\Big\} \\ &\leqslant M = \mathrm{cte} < \infty \end{aligned}$$

por causa da escolha de λ_0 em (2.39). Logo, se $t > T$ temos $E(u(t)) \leqslant M$, com M

independente de t.

Agora integrando a hipótese em A_3 de 0 a t e usando a fórmula da energia e a hipótese A_2, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{k_2}{2}\int_0^{t+1}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2}\,ds &\leqslant \int_0^{t+1} \lessdot Bu'(s),u'(s)\gtrdot\,ds \\
&\leqslant E(u(0)) - E(u(t)) + \text{cte}\int_0^{t+1}\lessdot f(s),u'(s)\gtrdot\,ds \\
&\leqslant E(u(0)) - E(u(t)) + \frac{k_2}{2}\int_0^{t}(1+s)^{-\theta_0}\|u'(s)\|_W^{r+2}\,ds \\
&\quad + \text{cte}\int_0^{t+1}(1+s)^{\frac{-\theta_0}{r+1}}\|f(s)\|_{W^*}^{\frac{r+2}{r+1}}\,ds
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder.

Daí resulta que

$$E(u(t)) \leqslant E(u(0)) + \text{cte}\int_0^{t}(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+2}}\|f(s)\|_{W^*}\,ds$$

para qualquer $t > 0$.

Assim

$$E(u(t)) \leqslant E(u(0)) + \text{cte}\int_0^{T+1}(1+s)^{\frac{\theta_0}{r+2}}\|f(s)\|_{W^*}\,ds$$

para $t \leqslant T+1$.

Concluimos portanto que a energia é limitada, isto é

$$E(u(t)) \leqslant C_6 < \infty \tag{2.42}$$

para qualquer $t > 0$, onde C_6 é uma constante dependendo de $E(u(0))$, M, f e T. No que segue C_i $(i = 7, 8, \ldots)$ denota constantes dependendo de $E(u(0))$ e outras constantes conhecidas.

De (2.37), obtemos para $t \geqslant T$

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant \text{cte}\Big\{&(1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}}D(t)^2 + (1+t)^{-\theta_1+\theta_0}D(t)^{r+2} + (1+t)^{-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}}D(t)^2\\ &+(1+t)^{\frac{\alpha}{p-1}}\Big[(1+t)^{\left(-\theta_1+\theta_0\frac{(r+1)}{r+2}\right)\frac{p}{p-1}}D(t)^{(r+1)\frac{p}{p-1}} + (1+t)^{\left(-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}\right)\frac{p}{p-1}}D(t)^{\frac{p}{p-1}}\\ &+(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}\frac{p}{p-1}}D(t)^{\frac{p}{p-1}}\Big] + \delta(t)(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}}D(t) + \delta(t)^{\frac{p}{p-1}}(1+t)^{\frac{\alpha}{p-1}}\end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned}\tau_1 = \max\Big\{&\frac{2\theta_0}{r+2}, -\theta_1+\theta_0, -\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2}, \frac{\alpha}{p-1}+\frac{p}{p-1}\left(-\theta_1+\frac{\theta_0(r+1)}{r+2}\right),\\ &\frac{\alpha}{p-1}+\frac{p}{p-1}\left(-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}\right), \frac{\alpha}{p-1}+\frac{p\theta_0}{(p-1)(r+2)}\Big\}\end{aligned}$$

Resulta que

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant \text{cte}\Big\{&(1+t)^{\tau_1}\left[D(t)^2 + D(t)^{r+2} + D(t)^{\frac{(r+1)p}{p-1}} + D(t)^{\frac{p}{p-1}}\right]\\ &+ \delta(t)(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}}D(t) + (1+t)^{\frac{\alpha}{p-1}}\delta(t)^{\frac{p}{p-1}}\Big\}\end{aligned} \tag{2.43}$$

Seja

$$\tau_2 = \min\left\{2, \frac{p}{p-1}\right\}$$

Segue que

$$\tau_2 \leqslant 2;\ r+2;\ \frac{(r+1)p}{p-1} \quad \text{e} \quad \frac{p}{p-1}$$

Como $D(t)$ é limitado (pois $E(u(t))$ é limitado conforme (2.42) e pela hipótese (2.38)) sobre $\delta(t)$ resulta que (2.43) torna-se

$$\sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) \leqslant \text{cte}\left\{(1+t)^{\tau_1}D(t)^{\tau_2} + \delta(t)(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+2}}D(t) + (1+t)^{\frac{\alpha}{p-1}}\delta(t)^{\frac{p}{p-1}}\right\}$$

Agora, usando o fato que $ab \leqslant a^2 + \frac{b^2}{4}$, chegamos à expressão (Novamente usando que

$D(t)$ é limitado e que $\tau_2 \geqslant \frac{2\theta_0}{r+2}$)

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s)) &\leqslant \text{cte}\left\{(1+t)^{\tau_1}D(t)^{\tau_2}+\delta(t)^2+\frac{(1+t)^{\frac{2\theta_0}{r+2}}D(t)^2}{4}+(1+t)^{\frac{\alpha}{p-1}}\delta(t)^{\frac{p}{p-1}}\right\}\\ (2.44) \qquad &\leqslant C_7\left\{(1+t)^{\tau_1}D(t)^{\tau_2}+\delta(t)^2+(1+t)^{\frac{\alpha}{p-1}}\delta(t)^{\frac{p}{p-1}}\right\}\end{aligned}$$

Da definição de $D(t)$ dada em (2.18) e de (2.44), finalmente obtemos

$$(2.45) \qquad \sup_{s\in[t,t+1]} E(u(s))^{\frac{r+2}{\tau_2}} \leqslant C_8\left\{(1+t)^{\frac{\tau_1(r+2)}{\tau_2}}\left[E(u(t))-E(u(t+1))\right]+g_0(t)\right\}$$

onde

$$(2.46) \qquad g_0(t)=(1+t)^{\frac{\theta_0}{r+1}+\frac{\tau_1(r+2)}{\tau_2}}\delta(t)^{\frac{r+2}{r+1}}+\delta(t)^{2\frac{(r+2)}{\tau_2}}+(1+t)^{\frac{\alpha(r+2)}{(p-1)\tau_2}}\delta(t)^{\frac{p(r+2)}{(p-1)\tau_2}}$$

Assim a desigualdade da diferença concernente a energia da solução $u(t)$ da equação (a) tem sido derivada. De um modo similar, também se pode obter para uma solução $u(t)$ da equação (b) que

(2.47)

$$\sup_{s\in[t,t+1]} F_{A(s)}(u(s))^{\frac{r+2}{\tau_2}} \leqslant C_9\left\{(1+t)^{\frac{\tau_1'(r+2)}{\tau_2}}\left[F_{A(t)}(u(t))-F_{A(t+1)}(u(t+1))\right]+g_0(t)\right\}$$

onde

$$\begin{aligned}\tau_1'=\max\left\{\frac{2\theta_0}{r+2},-\theta_1+\theta_0,-\theta_2+\frac{2\theta_0}{r+2},\frac{\alpha}{p-1}+\frac{p}{p-1}\left(-\theta_1+\frac{\theta_0(r+1)}{r+2}\right),\right.\\ \left.\frac{\alpha}{p-1}+\frac{p}{p-1}\left(-\theta_2+\frac{\theta_0}{r+2}\right)\right\}\end{aligned}$$

Aplicando os resultados na seção 3.1 para as desigualdades acima obtemos os seguintes teoremas sobre a estabilização da energia para as equações (a) e (b).

Teorema 2.2. *Suponhamos que as hipóteses A_1-A_4 são satisfeitas. Seja $u(t)$ uma solução de (a) satisfazendo* (2.11) *e* (2.14). *Temos que*

i. *Se* $\frac{r+2}{\tau_2} - 1 > 0$, $\frac{\tau_1(r+2)}{\tau_2} = 1$ *e* $\lim_{t\to\infty} (\log t)^{1+\frac{\tau_2}{r+2-\tau_2}} g_0(t) = 0$ *então*

$$E(u(t)) \leqslant C_{10} \left(\log(1+t)\right)^{-\frac{\tau_2}{r+2-\tau_2}}$$

ii. *Se* $\frac{r+2}{\tau_2} - 1 > 0$, $0 \leqslant \frac{\tau_1(r+2)}{\tau_2} < 1$ *e* $\lim_{t\to\infty} t^{\left(1-\frac{\tau_1(r+2)}{\tau_2}\right)\left(1+\frac{\tau_2}{r+2-\tau_2}\right)} g_0(t) = 0$ *então*

$$E(u(t)) \leqslant C_{11}(1+t)^{-\frac{\tau_2-\tau_1(r+2)}{r+2-\tau_2}}$$

iii. *Se* $\frac{r+2}{\tau_2} - 1 = 0$, $\frac{\tau_1(r+2)}{\tau_2} = 1$ *(i.e* $\tau_1 = 1$*) e* $g_0(t) \leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{-\eta-1}$ $(\eta > 0)$ *então*

$$E(u(t)) \leqslant C_{12}(1+t)^{-\eta'} \quad \eta' = \min\left\{\frac{1}{C_8}, \eta\right\}$$

iv. *Se* $\frac{r+2}{\tau_2} - 1 = 0$, $0 \leqslant \tau_1 < 1$ *e* $g_0(t) \leqslant \mathrm{cte}\, e^{-(t+1)^{1-r'}}$ *para algum* $r' < \tau_1$, *então*

$$E(u(t)) \leqslant C_{13} e^{-\frac{t^{1-\tau_1}}{(C_8+1)(1-\tau_1)}}$$

Teorema 2.3. *Suponhamos que as hipóteses* A_1-A_4 *são satisfeitas. Seja* $u(t)$ *uma solução de (b) satisfazendo* (2.15) *e* (2.16)*. Então resultados análogos ao do Teorema* (2.2) *valem com* τ_1 *e* $E(u(t))$ *trocados por* τ_1' *e* $F_{A(t)}(u(t))$, *respectivamente.*

OBSERVAÇÃO: A condição (2.38) é automaticamente satisfeita se $\lim_{t\to\infty} g_0(t) = 0$.

Corolário 2.1. *Suponhamos que* A_1-A_4 *são válidas com* $p = 2$, $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2$ *e* $\alpha = 0$. *Seja* $u(t)$ *uma solução de (a) satisfazendo* (2.11) *e* (2.14)*. Então* $\tau_1 = \frac{2\theta_0}{r+2}$, $\tau_2 = 2$ *e*

i. *Se* $r > 0$, $\theta_0 = 1$ *e* $\lim_{t\to\infty} (\log t)^{1+\frac{2}{r}} g_1(t) = 0$ *onde* $g_1(t) = (1+t)^{\theta_0(r+1)} \delta(t)^{\frac{r+2}{r+1}}$ *então*

$$E(u(t)) \leqslant C_{10}'(\log(1+t))^{-\frac{2}{r}}$$

ii. *Se* $r > 0$, $0 \leqslant \theta_0 < 1$ *e* $\lim_{t\to\infty} t^{(1-\theta_0)\left(1+\frac{2}{r}\right)} g_1(t) = 0$ *então*

$$E(u(t)) \leqslant C_{11}'(1+t)^{-2\frac{(1-\theta_0)}{r}}$$

iii. *Se* $r = 0$, $\theta_0 = 1$ *e* $g_1(t) \leqslant \text{cte}(1+t)^{-\eta-1}$ $(\eta > 0)$ *então*

$$E(u(t)) \leqslant C'_{12}(1+t)^{-\eta'} \quad \textit{para algum } \eta' > 0$$

iv. *Se* $r = 0$, $0 \leqslant \theta_0 < 1$ *e* $g_1(t) \leqslant \text{cte}\, e^{-(1+t)^{1-\theta}}$ $(\theta < \theta_0)$, *então*

$$E(u(t)) \leqslant C'_{13} e^{-C_{14} t^{1-\theta_0}}$$

2.5 Alguns Exemplos e Aplicações

Nesta seção apresentamos dois exemplos de aplicações do método de Nakao. O primeiro será sobre uma equação diferencial ordinária. O segundo exemplo, mais complexo, será sobre uma equação diferencial parcial não linear conhecida como a equação generalizada de Euler-Poisson-Darboux.

2.5.1 Exemplo 1

Consideramos a equação diferencial ordinária

$$x''(t) + (t+1)^{-\theta}\varrho(x'(t)) + \beta(x(t)) = f(t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{2.48}$$

Suponhamos que ϱ e β são contínuas em $\mathbb{R}$ e satisfazendo as seguintes condições

i-1 $k_0|s|^p \leqslant k_1 \int_0^s \beta(\xi)\, d\xi \leqslant \beta(s)s$ (para algum $p \geqslant 2$)

ii-1 $k_2|s|^{r+2} \leqslant \varrho(s)s \leqslant k_3(1+|s|^r)|s|^2$ e

iii-1 $f(t)$ é contínua em $[0,\infty]$ e $\lim\limits_{t\to\infty} |f(t)| = 0$

OBSERVAÇÃO: Sabemos da teoria de equações diferenciais ordinárias que as condições impostas sobre as funções que aparecem na equação (2.48) implicam que o problema de valor inical associado é globalmente bem posto.

Para aplicar os resultados de Nakao neste exemplo se deve tomar os espaços V, W e H como

$$V = W = H = H^* = W^* = V^* = \mathbb{R}$$

Os operadores A e B devem ser

$$A(\cdot) = \beta(\cdot) \quad \text{e} \quad B(\cdot) = (t+1)^{-\theta}\varrho(\cdot)$$

O funcional $F_{A(t)}$ deve ser tomado como

$$F_{A(t)}(x) = \int_0^x \beta(s)\, ds$$

As dualidades são dadas por

$$\begin{aligned}
\lessdot A(t)x(t), x(t)\gtrdot_{V^*V} &= \beta(x(t))x(t) \\
\lessdot A(t)x(t), x'(t)\gtrdot_{V^*V} &= \beta(x(t))x'(t) \\
\lessdot B(t)x(t), x(t)\gtrdot_{W^*W} &= (t+1)^{-\theta}\varrho(x(t))x(t) \\
\lessdot B(t)x(t), x'(t)\gtrdot_{W^*W} &= (t+1)^{-\theta}\varrho(x(t))x'(t) \\
\lessdot f(t), x(t)\gtrdot_{V^*V} &= f(t)x(t)
\end{aligned}$$

Então, todas as hipóteses A_1-A_4 são satisfeitas com $\alpha = 0$, $\rho(t) \equiv 0$, $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \theta$. De fato:

<u>**Verificação de A_1**</u>

Da hipótese i-1 temos para $x \in \mathbb{R}$ que

$$k_0|x|^p \leqslant k_1 \int_0^x \beta(\xi)\, d\xi \leqslant \beta(x)x \qquad \text{isto é}$$

$$k_0|x|^p \leqslant k_1 F_{A(t)}(x) \leqslant \lessdot A(t)x(t), x(t)\gtrdot$$

<u>**Verificação de A_2**</u>

Desde que o operador A não depende de t, temos que $\frac{d}{dt}F_{A(t)}(x) = 0$ e portanto A_2 é imediato (com $\rho(t) \equiv 0$), isto é

$$0 \leqslant -\frac{d}{dt}F_{A(t)}(x) \leqslant \rho(t)F_{A(t)}(x) = 0 \qquad (\rho \equiv 0)$$

Verificação de A_3

$1^{\underline{a}}$ parte: Por ii-1 temos para $x \in \mathbb{R}$

$$k_2|x|^{r+2}(1+t)^{-\theta} \leqslant \varrho(x)x(1+t)^{-\theta} = \langle B(t)x, x \rangle$$

Portanto (tomando $\theta_0 = \theta$) para $x \in \mathbb{R} = W$

$$k_2(1+t)^{-\theta_0}\|x\|_W^{r+2} \leqslant \langle B(t)x, x \rangle$$

$2^{\underline{a}}$ parte: Também por ii-1 temos para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, que

$$\begin{aligned} \|B(t)x\| &= |(1+t)^{-\theta}\varrho(x)| = (1+t)^{-\theta}|\varrho(x)| = (1+t)^{-\theta}\frac{|\varrho(x)x|}{|x|} \\ &\leqslant (1+t)^{-\theta}\frac{k_3(1+|x|^r)|x|^2}{|x|} = k_3(1+t)^{-\theta}(1+|x|^r)|x| \end{aligned}$$

Portanto para $x \in \mathbb{R} = W$ temos (com $\theta_1 = \theta_2 = \theta$) que

$$\|B(t)x\|_{W^*} \leqslant k_3\left[(1+t)^{-\theta_1}\|x\|_W^{r+1} + (1+t)^{-\theta_2}\|x\|_W\right]$$

Verificação de A_4

Por iii-1, desde que f é contínua em $[0,\infty]$, é imediato que

$$f(t) \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{\frac{r+2}{r+1}}([0,\infty);\mathbb{R}) = \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{\frac{r+2}{r+1}}\left(R^+; W^*\right)$$

As equações (2.11) e (2.14) são naturalmente satisfeitas com as soluções usuais de (2.48).

Neste exemplo τ_1, τ_2 e $g_0(t)$ que aparecem no teorema (2.2) são dados por (usando que $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ e $\alpha = 0$)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \max\left\{\frac{2\theta}{r+2},\ -\theta+\theta,\ -\theta+\frac{2\theta}{r+2}\right\} = \frac{2\theta}{r+2} \\ \tau_2 &= \min\left\{2,\ \frac{p}{p-1}\right\} = \frac{p}{p-1} \quad \text{(pois } p \geqslant 2\text{)} \\ g_0(t) &= (1+t)^{\frac{\theta}{r+1}+\frac{2\theta(p-1)}{p}}\delta(t)^{\frac{r+2}{r+1}} + \delta(t)^{\frac{2(r+2)(p-1)}{p}} + \delta(t)^{r+2} \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, se $(p-1)(r+2) > p$, $2(p-1)\theta < p$ e

$$\lim_{t\to\infty} t^{\left(1-\frac{2(p-1)\theta}{p}\right)\left(1+\frac{p}{(p-1)(r+2)-p}\right)} g_0(t) = 0$$

então podemos aplicar o ítem (ii) do teorema (2.2) para concluir que a solução $x(t)$ de (2.48) satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|x'(t)|^2 + k_0|x(t)|^p &\leqslant \frac{1}{2}|x'(t)|^2 + k_1\int_0^x \beta(\xi)\,d\xi = E(x(t))\\ &\leqslant \mathrm{cte}(1+t)^{-\left[\frac{p-2(p-1)\theta}{(p-1)(r+2)-p}\right]}\end{aligned}$$

2.5.2 Exemplo 2

Consideramos a equação diferencial parcial generalizada de Euler-Poisson-Darboux

$$(2.49)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + (1+t)^{-\theta}\rho\left(x, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \beta(x,u) = f(x,t) \text{ em } \Omega\times[0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado aberto em $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $\partial\Omega$ é sua fronteira. As funções $\rho(x,s)$ e $\beta(x,s)$ são mensuráveis em $\Omega\times(-\infty,\infty)$ e contínuas em s para cada x, satisfazendo as seguintes condições

i-2 $\rho(x,0) = 0$

ii-2 $k_0|s_1 - s_2|^{r+2} \leqslant [\rho(x,s_1) - \rho(x,s_2)](s_1 - s_2) \leqslant k_1(1+|s_1|+|s_2|)^r|s_1 - s_2|^2$

com k_0 e k_1 constantes positivas.

iii-2 $k_2|s|^{\eta+2} \leqslant \beta(x,s)s \leqslant k_3|s|^{\eta+2}$

onde k_2 e k_3 são constantes positivas e α, r também são constantes satisfazendo

$$\begin{cases} 0 \leqslant \eta,\ r < \infty & \text{se } n = 1,2 \\ 0 \leqslant \eta,\ r < \frac{4}{n-2} & \text{se } n \geqslant 3 \end{cases}$$

iv-2 $f(t) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty);\mathrm{L}^2(\Omega)\right)$ e $(u_0,u_1) \in H^1_0(\Omega)\times\mathrm{L}^2(\Omega)$

Hipótese: Suponhamos que f é tal que $E(u(t))$ é limitada. Por exemplo, $f \equiv 0$.

OBSERVAÇÃO: (Existência e unicidade da solução) O problema (2.49) admite uma única solução tal que (Veja [10] e [24]).

$$\begin{aligned} &u(t) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)\right) \\ &u'(t) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+; \mathrm{L}^2(\Omega)\right) \bigcap \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{r+2}\left(\mathbb{R}^+; \mathrm{L}^{r+2}(\Omega)\right) \end{aligned}$$

Para obter a estabilização da energia para o problema (2.49) aplicando o método de Nakao, definimos os espaços

$$\begin{array}{llll} V = & H_0^1(\Omega) & V^* = & H^{-1}(\Omega) \\ W = & \mathrm{L}^{r+2}(\Omega) & W^* = & \mathrm{L}^{\frac{r+2}{r+1}}(\Omega) \\ H = & \mathrm{L}^2(\Omega) & H^* = & \mathrm{L}^2(\Omega) \end{array}$$

Os operadores A e B que aparecem na equação abstrata (a) da seção anterior devem ser tomados como

$$A(\cdot) = -\triangle(\cdot) + \beta(x,\cdot) \text{ e } B(\cdot) = (1+t)^{-\theta}\rho(x,\cdot)$$

O funcional $F_{A(t)}$ deve ser

$$F_{A(t)}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx + \int_\Omega \int_0^u \beta(x,s)\, dsdx$$

As dualidades são dadas por

$$\begin{aligned} <A(t)u, u>_{V^*V} &= < -\Delta u + \beta(x,u), u>_{V^*V} = \int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx + \int_\Omega \beta(x,u)u\, dx \\ <A(t)u, u'>_{V^*V} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u'\, dx + \int_\Omega \beta(x,u)u'\, dx \\ <B(t)u, u>_{W^*W} &= \int_\Omega (t+1)^{-\theta}\rho(x,u)u\, dx \\ <B(t)u, u'>_{W^*W} &= \int_\Omega (t+1)^{-\theta}\rho(x,u)u'\, dx \\ <f(t), u(t)>_{V^*V} &= \int_\Omega fu\, dx \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: Aqui $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Vamos verificar agora que a equação (2.49) atende as hipóteses A_1-A_4 da seção anterior com $\alpha = 0$, $\rho(t) \equiv 0$ e $p = 2$. Para fazer isso, vamos usar as imersões de Sobolev mencionados no capítulo 1, seção 1.4.

- Se $n = 1$, então pelo Teorema 1 da seção 1.4 (Espaços de Sobolev), temos que se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ então existe uma constante c tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{para todo } p \geqslant 1$$

Queremos aplica-la para a equação (2.49) com $p = 2$ e $u \in H_0^1(\Omega)$.

Assim

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \text{cte}\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{cte}\left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad u \in H_0^1(\Omega)$$

pela desigualdade de Poincaré.

Segue que

$$\int_\Omega |u(x)|^{\eta+2}\, dx \leqslant \text{cte}\|u\|^{\eta+2}_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \text{cte}\left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx\right)^{\frac{\eta+2}{2}}, \qquad u \in H_0^1(\Omega)$$

- Se $n = 2$, então pelo Teorema 2 da seção 1.4, temos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [2, \infty)$, isto é

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \text{cte}\|u\|_{H^1(\Omega)}, \qquad u \in H^1(\Omega)$$

Aplicando isso para $u \in H_0^1(\Omega)$ resulta pela desigualdade de Poincaré que (tomando $q = \eta + 2$)

$$\int_\Omega |u(x)|^{\eta+2}\, dx \leqslant \text{cte}\left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx\right)^{\frac{\eta+2}{2}}$$

- Se $n \geqslant 3$, também pelo Teorema 2 da seção 1.4, temos $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right]$. Logo

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \text{cte}\|u\|_{H^1(\Omega)}, \qquad u \in H^1(\Omega)$$

Daí pela hipótese sobre η $\left(0 \leqslant \eta \leqslant \frac{4}{n-2}\right)$ resulta que

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^{\eta+2}\, dx\right)^{\frac{1}{\eta+2}} \leqslant \text{cte} \left(\int_\Omega (\|\nabla u\|^2 + |u|^2)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Novamente, para $u \in H_0^1(\Omega)$, aplicando a desigualdade de Poincaré obtemos que

$$\int_\Omega |u(x)|^{\eta+2}\, dx \leqslant \text{cte} \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx\right)^{\frac{\eta+2}{2}}$$

Assim, concluimos que para todo $n \geqslant 1$ temos

$$\|u\|^{\eta+2}_{L^{\eta+2}(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^{\eta+2}\, dx \leqslant \text{cte} \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx\right)^{\frac{\eta+2}{2}} \tag{2.50}$$

Agora estamos prontos para a verificação de A$_1$-A$_4$.

Verificação de A$_1$

1ª **parte:** De iii-2 conclui-se que $\int_0^{u(x)} \beta(x,s)\, ds \geqslant 0$. Assim, para $u \in H_0^1(\Omega)$ vale que

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leqslant \text{cte}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \text{cte} \int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx \\ &\leqslant 2\text{cte} \left[\frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx + \int_\Omega \int_0^u \beta(x,s)\, dsdx\right] = \text{cte}F_{A(t)}(u) \end{aligned}$$

Portanto existe $k_0 > 0$ tal que

$$k_0\|u\|_V^p \leqslant F_{A(t)}(u) \quad \text{para toda } u \in V$$

com $p = 2$.

$2^{\underline{a}}$ **parte:** Também usando iii-2

$$\begin{aligned} F_{A(t)}(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx + \int_\Omega \int_0^{u(x)} \beta(x,s)\,dsdx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx + \int_\Omega \left| \int_0^{u(x)} |\beta(x,s)|\,ds \right| dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx + \int_\Omega \left| \int_0^{u(x)} k_3|s|^{\eta+1}\,ds \right| dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx + \frac{k_3}{\eta+2}\int_\Omega |u(x)|^{\eta+2}\,dx \end{aligned}$$

Agora, para $u \in H_0^1(\Omega)$ temos, pela estimativa (2.50), que

$$\begin{aligned} F_{A(t)}(u) &\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{k_3}{\eta+2}\text{cte}\|\nabla u\|^{\eta+2}_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \text{cte}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx\right)^{\frac{\eta}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \text{cte}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}(2E(u(t)))^{\frac{\eta}{2}} \quad (E(u(t)) \text{ limitada }) \\ &\leqslant \text{cte}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \text{cte}\left[\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \beta(x,u)u\,dx\right] = \text{cte} \ll Au, u \gg \end{aligned}$$

pois $\beta(x,s)s \geqslant 0$.

Portanto existe $k_1 > 0$ tal que

$$k_1 F_{A(t)}(u) \leqslant \ll A(t)u, u \gg \quad \text{para } u \in V$$

<u>**Verificação de A_2**</u>

Idem verificação A_1 no exemplo 1.

<u>**Verificação de A_3**</u>

$1^{\underline{a}}$ **parte:** Para $u \in V = H_0^1(\Omega)$ temos, pela imersão de Sobolev, que $u \in L^{r+2}(\Omega)$, desde que $0 \leqslant r \leqslant \frac{4}{n-2}$.

Agora da hipótese sobre ρ (fazendo $s_2 = 0$ e $s_1 = s$ em ii-2 e usando também i-2) tem-se

$$k_0|s|^{r+2} \leqslant \rho(x,s)s \leqslant k_1(1+|s|)^r|s|^2 \quad \text{para todo } s$$

Daí, tomando-se $\theta_0 = \theta$ temos

$$\begin{aligned}
(1+t)^{-\theta_0}\|u\|^{r+2}_{L^{r+2}(\Omega)} &= (1+t)^{-\theta}\int_\Omega |u|^{r+2}\,dx \\
&\leqslant (1+t)^{-\theta}\int_\Omega \frac{1}{k_0}\rho(x,u)u\,dx \\
&= \left(\frac{(1+t)^{-\theta}}{k_0}\rho(x,u),u\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{k_0} < B(t)u,u>
\end{aligned}$$

Assim a 1ª parte de A_3 é satisfeita com $k_2 = k_0$.

2ª **parte:** Note que para $u, v \in W = L^{r+2}(\Omega)$ temos pela definição de B que

$$\begin{aligned}
| < Bu, v >_{W^*W} | &= \left|\int_\Omega Bu\cdot v\,dx\right| = \left|\int_\Omega (1+t)^{-\theta}\rho(x,u)\cdot v\,dx\right| \\
&\leqslant (1+t)^{-\theta}\int_\Omega |\rho(x,u)||v|\,dx \leqslant (1+t)^{-\theta}\int_\Omega k_1(1+|u|^r)|u||v|\,dx \\
&= \text{cte}(1+t)^{-\theta}\underbrace{\int_\Omega |u||v|\,dx}_{XIV} + \text{cte}(1+t)^{-\theta}\underbrace{\int_\Omega |u|^{r+1}|v|\,dx}_{XV}
\end{aligned}$$

pois por ii-2, $|\rho(x,s)s| \leqslant \text{cte}(|s|+1)^r|s|$.

Aplicando duas vezes a desigualdade de Hölder em XIV, resulta

$$\begin{aligned}
XIV = \int_\Omega |u||v|\,dx &\leqslant \left(\int_\Omega |u|^{\frac{r+2}{r+1}}\,dx\right)^{\frac{r+1}{r+2}}\left(\int_\Omega |v|^{r+2}\,dx\right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&\leqslant \left[\text{cte}\left(\int_\Omega |u|^{r+2}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}}\right]^{\frac{r+1}{r+2}}\|v\|_{L^{r+2}(\Omega)} \\
&\leqslant \text{cte}\|u\|_{L^{r+2}(\Omega)}\|v\|_{L^{r+2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

pois Ω é limitado.

Também aplicando a desigualdade de Hölder em XV temos

$$\begin{aligned}
XV = \int_\Omega |u|^{r+1}|v|\,dx &\leqslant \left(\int_\Omega |u|^{r+2}\,dx\right)^{\frac{r+1}{r+2}}\left(\int_\Omega |v|^{r+2}\,dx\right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&\leqslant \text{cte}\|u\|^{r+1}_{L^{r+2}(\Omega)}\|v\|_{L^{r+2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Portanto

$$| < Bu, v >_{W^*W} | \leqslant \text{cte}(1+t)^{-\theta} \left[\|u\|_{L^{r+2}(\Omega)} + \|u\|^{r+1}_{L^{r+2}(\Omega)} \right] \|v\|_{L^{r+2}(\Omega)}$$

para todo $u, v \in L^{r+2}(\Omega)$.

Isto é

$$\|Bu\|_{W^*} \leqslant \text{cte}(1+t)^{-\theta} \left[\|u\|_{L^{r+2}(\Omega)} + \|u\|^{r+1}_{L^{r+2}(\Omega)} \right], \quad \text{para todo } u \in W = L^{r+2}(\Omega)$$

Isso completa a verificação de A_3, com $\theta_1 = \theta_2 = \theta$.

Verificação de A_4

Como $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ então aplicando Hölder temos

$$\int_K \int_\Omega |f(x,t)|^{\frac{r+2}{r+1}} \, dxdt \leqslant \text{cte}(\Omega, K) \left(\int_K \int_\Omega |f(x,t)|^2 \, dxdt \right)^{\frac{r+2}{2(r+1)}} < \infty$$

para todo K compacto de $\mathbb{R}^+$.

Assim $f \in L^{\frac{r+2}{r+1}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, W^*)$ e isso verifica A_4.

As equações (2.11) e (2.14) são naturalmente satisfeitas com as soluções usuais de (2.49).

Neste caso τ_1, τ_2 e $g_0(t)$ no teorema (2.2) tornam-se

$$\tau_1 = \frac{2\theta}{r+2}, \; p = \tau_2 = 2 \text{ e } g_0(t) = (1+t)^{\frac{\theta}{r+1}} \delta(t)^{\frac{r+2}{r+1}} + \delta(t)^{r+2}$$

Assim, a conclusão do Corolário (2.1) aplica-se a esta equação e se obtem a estabilização da energia com hipótese sobre f.

OBSERVAÇÃO: Por exemplo, se $f \equiv 0$ na equação (2.49) então $g_0(t) \equiv 0$. Nesse caso, se $r = 0$ e $0 \leqslant \theta < 1$ resulta do Teorema (2.2) (iv) que a energia decai para zero exponencialmente.

Capítulo 3

Método via Funcionais de Liapunov

A idéia deste método é oriunda das equações diferenciais ordinárias. Consiste na construção de um Funcional adequado, chamado de Funcional de Liapunov.

Para ilustrar isso, vamos considerar dois exemplos.

3.1 Exemplo 1

Consideramos o seguinte problema de valor de contorno de EDO's

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) + f(u(t)) + u'(t) = 0 & t > 0 \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b & a,\, b \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1}$$

com as seguintes hipóteses

i. $f \in C^1(\mathbb{R})$

ii. $sf(s) - 2F(s) \geqslant 0$, para todo $s \geqslant 0$ onde $F(s) = \int_0^s f(\xi)\,d\xi \geqslant 0$

Multiplicando-se a equação em (3.1) por u_t obtemos

$$u_{tt}u_t + uu_t + u_tf(u) + u_t^2 = 0$$

ou, equivalentemente

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u_t^2}{2}\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{u^2}{2}\right] + \frac{d}{dt}\left[F(u)\right] = -u_t^2$$

Definindo-se a energia por $E(t) = u_t^2 + u^2 + 2F(u)$ temos então

$$\frac{dE}{dt} = -2u_t^2 \leqslant 0 \tag{3.2}$$

concluimos portanto de (3.2) que $E(t)$ é uma função decrescente.

Seja

$$H(t) = uu_t \tag{3.3}$$

Para $0 < \epsilon < 1$ definimos o seguinte funcional de Liapunov

$$G_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon H(t) \tag{3.4}$$

Usando (3.3) e (3.4), bem como a hipótese (ii) sobre f, obtem-se do fato que $0 < \epsilon < 1$ que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_\epsilon(t) &= \frac{dE}{dt} + \epsilon\frac{dH}{dt} \\
&= -2u_t^2 + \epsilon u_t^2 + \epsilon u u_{tt} \\
&= \underbrace{(\epsilon - 2)}_{<-\epsilon} u_t^2 + \epsilon u(\underbrace{-u - u_t - f(u)}_{u_{tt}}) \\
&\leqslant -\epsilon u_t^2 - \epsilon u^2 - \epsilon u u_t - \epsilon u f(u) \\
&\leqslant -\epsilon u_t^2 - \epsilon u^2 - \epsilon u u_t - 2\epsilon F(u) \\
&= -\epsilon(\underbrace{u_t^2 + u^2 + 2F(u)}_{E(t)} + \underbrace{uu_t}_{H(t)}) \\
&\leqslant -\epsilon G_\epsilon(t)
\end{aligned}$$

Logo, resolvendo-se a inequação diferencial

$$\frac{d}{dt}G_\epsilon(t) \leqslant -\epsilon G_\epsilon(t) \tag{3.5}$$

obtemos de (3.5)

$$G_\epsilon(t) \leqslant G_\epsilon(0)e^{-\epsilon t} \tag{3.6}$$

A idéia aqui é mostrar que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 E(t) \leqslant G_\epsilon(t) \leqslant C_2 E(t) \text{ para todo } t \geqslant 0 \tag{3.7}$$

Veremos que podemos tomar $C_1 = \frac{1}{2}$ e $C_2 = 2$.

De fato, da definição de $E(t)$ e sendo $0 < \epsilon < 1$ temos

$$\begin{aligned} G_\epsilon(t) &= E(t) + \epsilon u u_t \geqslant E(t) - \epsilon\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u_t^2}{2}\right) = E(t) - \frac{\epsilon}{2}(u^2 + u_t^2) \\ &= \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)(u^2 + u_t^2) + 2F(u) \geqslant \left(1 - \frac{1}{2}\right)(u^2 + u_t^2) + 2F(u) \geqslant \frac{1}{2}E(t) \end{aligned}$$

pois $F(s) \geqslant 0$ pela hipótese (ii).

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} G_\epsilon(t) &= E(t) + \epsilon H(t) = E(t) + \epsilon u u_t \leqslant E(t) + \epsilon\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u_t^2}{2}\right) \\ &\leqslant E(t) + \epsilon\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u_t^2}{2} + \frac{2F(u)}{2}\right) = E(t) + \frac{\epsilon}{2}E(t) \leqslant 2E(t) \end{aligned}$$

já que $0 < \epsilon < 1$.

Portanto (3.7) de fato é verdadeiro.

Combinando as expressões (3.6) e (3.7) chegamos à

$$\frac{1}{2}E(t) \leqslant G_\epsilon(t) \leqslant G_\epsilon(0)e^{-\epsilon t} \leqslant 2E(0)e^{-\epsilon t} \text{ para todo } t \geqslant 0 \tag{3.8}$$

Concluimos de (3.8) que

$$E(t) \leqslant 4E(0)e^{-\epsilon t} \text{ para todo } t \geqslant 0$$

Agora

$$u^2 \leqslant u_t^2 + u^2 + 2F(u) = E(t) \leqslant 4E(0)e^{-\epsilon t} \tag{3.9}$$

e

$$u_t^2 \leqslant u_t^2 + u^2 + 2F(u) = E(t) \leqslant 4E(0)e^{-\epsilon t}$$

Segue de (3.9) que

$$|u(t)| \leqslant 2\sqrt{E(0)}\sqrt{e^{-\epsilon t}} \quad \text{e} \quad |u_t(t)| \leqslant 2\sqrt{E(0)}\sqrt{e^{-\epsilon t}} \tag{3.10}$$

Portanto, de (3.10) temos a estabilização da solução do problema (3.1).

Essa idéia tem sido imitada para equações diferenciais parciais e dependendo de uma boa escolha do Funcional de Liapunov $G_\epsilon(t)$ associado, funciona bem quando o sistema tiver efeitos dissipativos.

Para ilustrar isso vamos analisar o segundo exemplo.

3.2 Exemplo 2

Consideramos a seguinte equação da onda não linear com um termo dissipativo

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + m^2 u + au_t + u^3 = 0 & u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x); \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{3.11}$$

onde φ e ψ são funções que podem ser tomadas, por exemplo, na classe C_0^∞, sendo "a" uma constante tal que $0 < a < 2m$.

A dissipação é representada pelo termo au_t.

Multiplicando (3.11) por u_t e integrando em $\mathbb{R}$ na variável x, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(u_{tt}u_t \underbrace{-u_{xx}u_t}_{\mathrm{I}} + m^2 uu_t + au_t^2 + u^3 u_t \right) dx = 0 \tag{3.12}$$

Integrando por partes o termo I e lembrando a propriedade finita de propagação, isto é,

$u \equiv 0$ para $|x|$ grande e t fixo, obtemos

$$(3.13) \quad -\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}u_t\,dx = -\lim_{x\to\infty} u_t(x,t)u_x(x,t) + \lim_{x\to-\infty} u_t(x,t)u_x(x,t)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty} u_{tx}u_x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[\frac{u_x^2}{2}\right] dx$$

Substituindo-se (3.13) em (3.12) obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{u_t^2}{2}\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{u_x^2}{2}\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{m^2u^2}{2}\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{u^4}{4}\right]\right) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} au_t^2\,dx$$

Definindo-se a energia por

$$(3.14) \qquad E(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2 + u_x^2 + m^2u^2 + \frac{u^4}{2}\right) dx$$

concluimos que

$$(3.15) \qquad \frac{dE}{dt} = -2a\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2\,dx \leqslant 0$$

ou seja, a energia $E(t)$ é uma função decrescente do tempo.

Seja $F = F(t)$ o Funcional de Liapunov definido por

$$(3.16) \qquad F(t) = E(t) + a\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx$$

No caso de equações diferenciais ordinárias, o Funcional de Liapunov tomado foi $G_\epsilon(t) = E(t)+\epsilon uu_t$. Aqui como a solução também depende da variável espacial e queremos o Funcional $F(t)$ dependendo somente de t, então toma-se $\int_{\mathbb{R}} uu_t$ em vez de uu_t.

Agora, usando (3.11) e (3.15) temos

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{dE}{dt} + a\int_{-\infty}^{\infty}(uu_{tt} + u_t^2)\,dx \\ &= -2a\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2\,dx + a\int_{-\infty}^{\infty} u(u_{xx} - m^2u - au_t - u^3)\,dx + a\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2\,dx \\ &= -a\int_{-\infty}^{\infty}(u_t^2 + m^2u^2 + auu_t + u^4)\,dx + a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} uu_{xx}\,dx}_{\mathrm{II}} \end{aligned}$$

Integrando por partes a expressão II e lembrando que $u \equiv 0$ quando $|x|$ é grande, obtemos

(3.18)
$$\int_{-\infty}^{\infty} uu_{xx}\,dx = \lim_{x\to\infty} u(x,t)u_x(x,t) - \lim_{x\to-\infty} u(x,t)u_x(x,t) - \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2\,dx$$

Substituindo agora (3.18) em (3.17), resulta

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= -a\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_x^2+u_t^2+m^2u^2+\frac{u^4}{2}\right)dx - \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^4\,dx - a^2\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx\\ &= -a\left[E(t)+a\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx\right] - \underbrace{\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^4\,dx}_{\geqslant 0} \leqslant -aF(t)\end{aligned}$$

Resolvendo a inequação diferencial

$$\frac{dF}{dt} \leqslant -aF(t), \qquad t>0 \tag{3.19}$$

concluimos que

$$F(t) \leqslant F(0)e^{-at} \tag{3.20}$$

Agora vamos calcular a razão

$$\frac{F(t)}{E(t)} = \frac{E(t)+a\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx}{E(t)} = 1 + \frac{a\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx}{E(t)}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$a\left|\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx\right| = \frac{a}{m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} muu_t\,dx\right| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} m^2u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Usando a desigualdade elementar $\sqrt{A}\sqrt{B} \leqslant \frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ para $A,B>0$, temos

$$a\left|\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx\right| \leqslant \frac{a}{2m}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(m^2u^2+u_t^2)\,dx\right] \leqslant \frac{aE(t)}{2m}$$

Portanto

$$-\frac{a}{2m} \leqslant \frac{a\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx}{E(t)} \leqslant \frac{a}{2m}$$

Logo

$$\frac{F(t)}{E(t)} = 1 + \frac{a\int_{-\infty}^{\infty} uu_t\,dx}{E(t)} \geqslant 1 - \frac{a}{2m}$$

Isto é, (usando a hipótese que $2m - a > 0$)

$$E(t) \leqslant \frac{2m}{2m-a}F(t), \qquad \text{para todo } t > 0$$

Usando (3.20) obtemos finalmente

$$E(t) \leqslant Ce^{-at}$$

onde a constante C é dada por $C = \frac{2mF(0)}{2m-a} > 0$. Desse modo está provado o decaimento exponencial da energia para zero, isto é

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$$

em uma taxa exponencial.

3.3 Observações Finais

O mesmo resultado é obtido se o problema (3.11) é considerado em dimensão espacial mais alta.

Neste caso, a equação em (3.11) seria

$$u_{tt} - \triangle_n u + m^2 u + au_t + u^3 = 0$$

com $\triangle_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ sendo o operador de Laplace. Nesse caso o funcional de energia $E(t)$ seria

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t^2 + |\nabla u|^2 + mu^2 + \frac{u^4}{2}\right] dx$$

e o Funcional de Liapunov $F(t)$ pode ser tomado como

$$F(t) = E(t) + a\int_{\mathbb{R}^n} uu_t\,dx$$

Naturalmente o mesmo tipo de técnica pode ser usada para um problema de valor inicial e de fronteira sobre uma região limitada do $\mathbb{R}^n$, em vez do próprio $\mathbb{R}^n$, sofrendo um efeito dissipativo.

Em [15] os autores usando o Funcional de Liapunov

$$G_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon \int_\Omega \left(u_t\theta - \frac{\theta^2}{2} + u_t(-\triangle)^{-1}\theta \right) dx + \frac{\epsilon}{2} \int_\Omega (uu_t + \nabla u \cdot \nabla u_t) \; dx$$

mostram decaimento exponencial da energia $E(t)$ para o sistema de Von Kármán sob efeitos térmicos

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} + \triangle^2 u - \triangle u_{tt} + \triangle\theta = [u,v] \\ \triangle^2 v = -[u,u] \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \theta_t - \triangle\theta - \triangle u_t = 0 \end{array} \right.$$

com condições de Dirichet homogêneas sobre a fronteira de Ω (aberto limitado regular de $\mathbb{R}^2$) e dados iniciais (u_0, u_1, θ_0) em $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Nosso objetivo não é esgotar os tipos de problemas que podem ter estabilização provada mediante um adequado Funcional de Liapunov, mas queremos dizer que até problemas com dissipação na fronteira e problemas acoplados por exemplo em termoelasticidade (ver [22] e [23]) também podem ser atacados via esse método.

Apêndice A

Resultados Básicos

Neste apêndice apresentamos conceitos e resultados que foram utilizados ao longo dos capítulos anteriores. Omitimos as demonstrações por se tratarem de resultados conhecidos.

A.1 Análise Real

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f contínua em $[a, b]$. Então

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(s)\, ds\right] = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Seja g uma primitiva de f, isto é, $f(x) = g'(x)$ para $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(s)\, ds = g(b) - g(a)$$

Teorema do Valor Médio para Integrais

Dada uma função contínua $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(s)\, ds = f(\xi)(b - a)$$

A.2 Cálculo Vetorial

Vetor Euclidiano n-dimensional e Norma

Seja $\mathbb{R}^n$ o *Espaço Euclidiano* n dimensional.

Para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a *norma* de $\mathbf{x}$, denotada por $\|\mathbf{x}\|$, é definida como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Produto interno e Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Dados dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, denotamos o *produto interno* de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$ como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Naturalmente que se pode escrever a norma de $\mathbf{x}$ como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

A *desigualdade de Cauchy-Schwarz* afirma que para quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ temos $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ com a igualdade valendo se e somente se $\mathbf{x}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{y}$, ou um deles é o vetor nulo.

Função Escalar e Campo Vetorial

Uma função f cujo domínio é um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e com imagem contida em $\mathbb{R}$, isto é, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, é dita uma *função escalar*. Por outro lado a aplicação $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ que associa a cada ponto $\mathbf{x}$ no seu domínio Ω um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, é denominada um *campo vetorial*.

Derivada Radial, Gradiente, Divergente e Laplaciano

Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é diferenciável, então o *gradiente* de f, denotado por ∇f é definido como o vetor de $\mathbb{R}^n$ dado por $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

A *derivada radial* de f, denotada por f_r, é dada por $f_r = \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \nabla f$, onde $r = \|\mathbf{x}\|$.

Se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$ é um campo vetorial C^1, definimos o *divergente* de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, denotado por $\operatorname{div}\mathbf{F}$ como $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

O *Laplaciano* é definido como $\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla\cdot\nabla f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ e é denotado por $\triangle f$.

Identidades úteis

Se f, g são funções escalares de classe C^1, c uma constante real e $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais também de classe C^1, então as seguintes relações podem ser facilmente provadas.

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

2. $\nabla(cf) = c\nabla f$

3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

4. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

5. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$

A.3 Análise Funcional e Espaços L^P

A Derivada de Fréchet

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados e A aberto de E.

A aplicação $f : A \subset (E, \|\cdot\|_E) \mapsto (F, \|\cdot\|_F)$ é dita diferenciável em um ponto $a \in A$ se e somente se existe uma aplicação linear e contínua $T_a : E \mapsto F$ que satisfaz a seguinte condição:

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f(a+h) - f(a) - T_a h\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

O operador T_a quando existe é único e é chamado a derivada de Fréchet de f no ponto a. Também denota-se T_a por $f'(a)$.

A aplicação f é dita ser diferenciável em A se é diferenciável em cada ponto de A. Neste caso a derivada de Fréchet de f é o operador $f' : A \subset E \mapsto \mathcal{L}(E,F)$ onde

$$\mathcal{L}(E,F) = \{L : E \mapsto F \;/ L \text{ é linear e contínuo}\}$$

Imersão Contínua

Dizemos que o espaço normado X está imerso continuamente no espaço normado Y quando

(i) X é um subespaço vetorial de Y e

(ii) O operador identidade $I : X \mapsto Y$ definido por $I(x) = x$ é contínuo.

Desde que I é linear, (ii) é equivalente a existência de uma constante M tal que $\|I(x)\|_Y = \|x\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad x \in X.$

Espaço $L^P(\Omega)$

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

Para $1 \leqslant p < \infty$ define-se

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{K} \;/\; f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

Para $p = \infty$ define-se

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \mapsto \mathbb{K} \;/\; f \text{ é mensurável e existe constante } C \text{ com } |f(x)| \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega \}$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Norma e propriedades no espaço $L^P(\Omega)$

As normas em $L^p(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ são, respectivamente

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C \;/\; |f(x)| \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega \}$$

Propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$

- Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ são espaços de Banach.
- Se $C_0^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K} \ / \ f$ é de classe C^∞, $\mathrm{spp}(f)$ compacto de $\Omega\}$ então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Desigualdade de Hölder e Desigualdade de Young

Desigualdade de Hölder

Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = 1$ se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$). Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Desigualdade de Young

Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $f : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ e $g : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ duas funções de quadrado integrável, então

$$|(f,g)_{L^2}| = \left| \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx \right| \leqslant \left[\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |g(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

Alguns espaços de funções mais comumente utilizados

Para V e W espaços vetoriais normados, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ e $1 \leqslant p < \infty$ tem-se

a) $C(\mathbb{R}^+; V) = \{f : [0, \infty) \mapsto V \ / f$ é contínua$\}$

b) $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, W) = \left\{ f : [0, \infty) \mapsto W / \left(\int_K \|f(t)\|^p_W dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{para cada compacto } K \subset \mathbb{R}^+ \right\}$

c) $L^1([0,T], L^p(\Omega)) = \left\{ f : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{K} / \int_0^T \left(\int_\Omega |f(t,\mathrm{x})|^p \, d\mathrm{x} \right)^{\frac{1}{p}} dt < \infty \right\}$

d) $L^2([0,T], L^p(\Omega)) = \left\{ f : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{K} / \int_0^T \left(\int_\Omega |f(t,\mathrm{x})|^p \, d\mathrm{x} \right)^{\frac{2}{p}} dt < \infty \right\}$

A.4 Espaços de Sobolev

Derivada Fraca ou Generalizada

Dada $f \in L^p(\Omega)$, Ω aberto do $\mathbb{R}^n$, diz-se que $g_i \in L^p(\Omega)$ é a derivada fraca (ou generalizada) de f em relação a componente x_i da variável independente x, se

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega g_i(x)\varphi(x)\, dx$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Notação: $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Podemos então ter derivadas fracas de ordens mais altas.

Em geral para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$.

OBSERVAÇÃO: Podemos então calcular Divergente e Gradiente no sentido fraco.

O Espaço $W^{m,p}(\Omega)$

Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a $\mathrm{L}^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido fraco ou generalizado. Resumidamente

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \quad |\alpha| \leqslant m\}$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

OBSERVAÇÕES

- $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach, o qual é chamado de Espaço de Sobolev.
- Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \qquad u, v \in W^{m,2}(\Omega)$$

- Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

OBSERVAÇÕES

- Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ então a medida de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ é zero.
- Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Suponha $1 \leqslant p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Desigualdade de Poincaré

Suponhamos que Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C(dependendo de Ω e de p) tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \text{ para toda } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } 1 \leqslant p < \infty$$

OBSERVAÇÕES

- A demonstração é bem conhecida e pode ser vista em [1].

- Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

- Em $H_0^1(\Omega)$ a expressão $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ é um produto escalar que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Note que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Para um estudo introdutório à teoria de espaços de Sobolev e aplicações consultar, por exemplo, [1], [6] e [13].

Teorema da Divergência e Fórmula de Green

Valem as seguintes fórmulas

i.

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \eta(\mathbf{x})\, dx, \quad \mathbf{F} \in \left[H^1(\Omega)\right]^n$$

ii.

$$\int_\Omega v \Delta u \, dx = - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^2(\Omega)$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^1 e $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária.

Imersões de Sobolev

Teorema 1

Seja Ω um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, então existe uma constante C(dependendo de $|\Omega| \leqslant \infty$) tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

isto é $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ com imersão contínua, para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Teorema 2

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com Ω aberto de classe C^1 limitado. Para $1 \leqslant p \leqslant n$ temos

- Se $1 \leqslant p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$
- Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, +\infty)$.

onde " $\hookrightarrow$ " significa imerso continuamente.

Corolário A.1. *Usando interpolação de espaços L^p tem-se que se $1 \leqslant p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*

Bibliografia

[1] BRÉZIS, Haim. *Análisis funcional Teoria y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[2] CAZENAVE, T.; HARAUX, A. Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, *Mathématiques & Applications, Soc. Math. Appli. et Ind*, Ellipses, France, 1990.

[3] CHARÃO, Ruy Coimbra. On the principle of limiting amplitude for perturbed elastic waves in 3D. *Bollettino U. M. I.*, (7)10-B(1996), 781-797.

[4] HARAUX, A. Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations, *J. Diff. Eq.*, (59), 2, 1985, 145-154.

[5] KAPITONOV, Boris. Decrease of a solution of an exterior boundary-value problem for a system elasticity theory. *Differential Equations*, 22(1986), 332-337.

[6] KESAVAN, S. *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[7] KOMORNIK, Vilmos. *Exact controllability and stabilization. The multiplier method.* Wiley, Chicester and Masson, Paris, 1994.

[8] KOMORNIK, Vilmos. Rapid boundary stabilization of the wave equations. *Siam J. Control and Optimization*, 29(1)(1991), 197-208.

[9] LAX, P. D.; MORAWETZ, C. S.; PHILLIPS, R. S. Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle. *Comm. Pure Appl. Math*, 16(1963), 447-486.

[10] LIONS, J. L.; STRAUSS, W. A. Some non-linear evolution equations. *Bull. Soc. Math. France*, 93(1965), 43-96.

[11] LIU, K. Locally distributed control and damping for the conservative systems, *SIAM J. Control. Optim.* 35(5)(1997).

[12] MARTINEZ, Patrick. Decay of solutions of the wave equation with a local highly degenerate dissipation. *Asymptotic analysis*, 19(1999), 1-17.

[13] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H. *Iniciação aos espaços de Sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[14] MENZALA, Gustavo P. On perturbed wave equations with time-dependent coefficients. *Annali Scuola Normale Superiore*, Pisa, 11(4)(1984), 541-550.

[15] MENZALA, G. P.; ZUAZUA, E. Decay rates for the Von Kármán system of thermoelastic plates, Integral and Diff. Equations, (11)1998, 755-770 *Comptus Rendus Acad. Sci. (Paris), (324), 1997, 49-54.*

[16] MORAWETZ, Cathleen S. The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14(1961), 561-568.

[17] MORAWETZ, C. S.; RALSTON, J. V.; STRAUSS, W. A. Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 30(1977), 447-508.

[18] NAKAO, Mitsuhiro. A difference inequality and application to nonlinear evolution equations. *Journal Mathematical Society Japan*, 30(4)(1978), 747-762.

[19] NAKAO, Mitsuhiro. Stabilization of local energy in an exterior domain for the wave equation with a localized dissipation. *Journal of Differential Equations*, 148(1998), 388-406.

[20] PETKOV, Vesselin. *Scattering theory for hyperbolic operators.* Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1989.

[21] REED, Michael. *Astract non-linear wave equations.* Series: Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[22] RIVERA, J. E. M. Energy decay rates in linear thermoelasticity. *Funkcialaj Ekvacioj (Japan)*, 35(1992), 19-30.

[23] RIVERA, J. E. M. *Tópicos em Termo e Visco Elasticidade.* Monografias do LNCC.

[24] STRAUSS, W. A. On continuity of functions with values in various Banach spaces. *Pacific J. Math*, 19(1966), 543-551.

[25] STRAUSS, W. A. Nonlinear wave equations.*CBMS Lectures Notes 73*, American Mathematical Society, 1989.

[26] TÉBOU, Louis Roder Tcheugoué. Well-posedness and energy decay estimates for the damped wave equations with L^r localizing coefficient. *Commun. in Partial Differential Equations*, 23(1998), 1839-1855.

[27] ZHANG, B. Y. Exact boundary controllability of the Korteweg de Vries equation. *SIAM J. Control. Optim.* 27(2),543-565(1999).

[28] ZUAZUA, Enrique. Exponential decay for the semi-linear wave equation with locally distributed damping. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(1990), 205-235.