

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

CÁLCULO DE FLUXO MAGNÉTICO NA COROA DE
MÁQUINAS ELÉTRICAS ATRAVÉS DO MÉTODO DE
“CAMINHOS FINITOS”

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

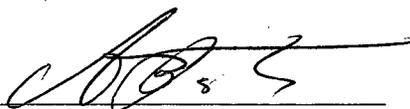
MARIO CÉLIO CONTIN

Florianópolis, Julho de 2000.

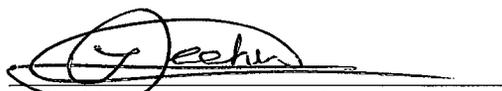
CÁLCULO DE FLUXO MAGNÉTICO NA COROA DE MÁQUINAS ELÉTRICAS ATRAVÉS DO MÉTODO DE “CAMINHOS FINITOS”

MARIO CÉLIO CONTIN

‘Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de concentração em *Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

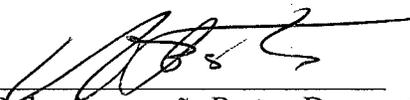


João Pedro Assumpção Bastos, Dr.
Orientador



Idemar Cassana Decker, D. Sc.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

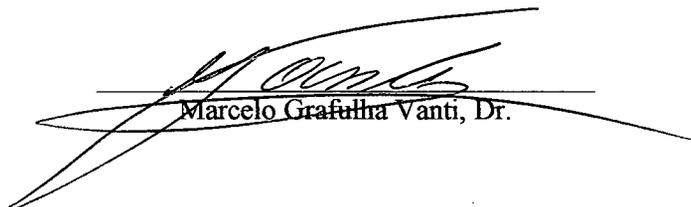
Banca Examinadora:



João Pedro Assumpção Bastos, Dr.
Presidente



Nelson Sadowski, Dr.



Marcelo Grafalha Vanti, Dr.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado especialmente à minha mãe Amábile (in memoriam) que sempre muito me incentivou na busca de um crescimento como ser humano, bem como no aperfeiçoamento intelectual, técnico e profissional.

Também à minha família,

esposa Dorli

e filhos Carolina e Marcelo,

pela compreensão e paciência nos muitos momentos que tive que dedicar à elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor João Pedro Assumpção Bastos, pela orientação e críticas construtivas.

Aos colegas na “Weg Indústrias”, Solon Brum Silveira, Eduardo Duarte e Fernanda Inês Maestri, que valiosa e voluntariamente me auxiliaram na construção deste trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e ao GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos) por terem me proporcionado o curso.

À WEG pela oportunidade e apoio.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

CÁLCULO DE FLUXO MAGNÉTICO NA COROA DE MÁQUINAS ELÉTRICAS ATRAVÉS DO MÉTODO DE “CAMINHOS FINITOS”

Mario Célio Contin

Julho/2000.

Orientador: João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d'Etat.

Área de Concentração: Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos.

Palavras-chave: Campos e Induções Magnéticas, Difusão magnética nas coroas, Método numérico iterativo.

Número de páginas: 80

Este trabalho apresenta um estudo teórico e para implementação das Linhas Equipotenciais de Fmm, que consistem de Linhas Geométricas sobre as quais incide um mesmo Potencial Escalar Magnético, para as Coroas Estatóricas de Máquinas Elétricas Girantes. Sobre estas linhas são estabelecidos os Fluxos Magnéticos Impostos de acordo com a lei de Faraday e com base na distribuição dos Campos Magnéticos em Máquinas Elétricas Girantes trifásicas. Com estas Linhas Equipotenciais de Fmm e com a imposição dos Fluxos Magnéticos é proposto um novo Método Numérico Iterativo, chamado de “Caminhos Finitos”, que considera a curva $B \times H$ (não linear) do meio material, para o cálculo da difusão dos Campos e Induções Magnéticas no domínio de estudo das Coroas de Máquinas elétricas Girantes. Para uma comprovação experimental, são apresentadas, em forma de gráficos comparativos, as soluções obtidas pelo Método de Caminhos Finitos proposto e pelo Método de Elementos Finitos (EFCAD). Ainda estão apresentadas as vantagens, conclusões e considerações finais a respeito do trabalho.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

MAGNETIC FLUX CALCULATION ON THE CORE OF ELECTRICAL MACHINES THROUGH “FINITE PATHS” METHOD

Mario Célio Contin

July/2000

Advisor: João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d'Etat.

Area of Concentration: Conception and Analysis of Electromagnetic Devices.

Keywords: Magnetic Field and Induction, Magnetic Difusion in the Stator Core, Iterative Numerical Method.

Number of pages: 80

This work presents a theoretical study and implementation of procedure to establish equipotencial lines of MMF. On each line we have the same value of scalar magnetic potencial. It is applied to the cores of three phase rotating electrical machines. Faraday's law is used to obtain the distribution of magnetic fields. According this methodology, with the MMF equipotencial lines and the imposed values of magnetic fluxes, we establish an iterative procedure, called “finite paths” that allows obtaining the field distribution and corresponding magnetic induction values on the machines and it takes into account the non linear behavior (curve $B(H)$) of the stator iron. As comparison, it is presented graphical results obtained from the proposed method and from EFCAD package, which uses classical F.E. method. Finally it is presented the advantages of the method, conclusion and final consideration about this work.

SUMÁRIO

RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vi
CAPÍTULO 1 – A DIFUSÃO DOS CAMPOS E INDUÇÕES	
MAGNÉTICAS	1
1.1 INTRODUÇÃO	1
1.2 O ESTADO DA ARTE E O SEU DESENVOLVIMENTO	3
CAPÍTULO 2 – LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM	5
2.1 INTRODUÇÃO	5
2.2 DOMÍNIO DE ESTUDO	5
2.3 LINHAS DE FRONTEIRA	6
2.4 DIVERGÊNCIA DAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM	
RELATIVAMENTE À FONTE J	7
2.5 LINHAS EQUIPOT.PARA UM CONDUTOR FILIFORME	12
2.5.1 Exemplo de cálculo das Linhas Equipotenciais de Fmm	18
2.6 DETERMINAÇÃO DAS LINHAS EQUIPOT.DE FMM PARA A	
COROA ESTATÓRICA DE MÁQUINA ELÉTRICA GIRANTE	21
2.6.1 Região Tangencial das Linhas de Fronteira	22
2.6.2 Região Radial das Linhas de Fronteira	23
CAPÍTULO 3 – DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO DE CAMINHOS	
FINITOS	28
3.1 – FLUXOS IMPOSTOS NAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE	
FMM	28
3.1.1 Condições Singulares (Fluxos Tangenciais e fluxos Radiais)	28
3.1.2 Fluxo Imposto na Linha Central da Coroa ($\theta_e=0$ graus elétricos)	29
3.1.3 Fluxo Imposto na Linha Central Tangencial dos	
Ampere-Condutores (\vec{J})	30

3.1.4 Fluxos Impostos sobre Linhas Equipotenciais intermediárias entre $\theta_e = 0$ e $\theta_e = 90$ graus elétricos	31
3.1.5 Fluxo Radial entre as duas Linhas Equipotenciais de Fmm que formam o Subdomínio de ordem k	32
3.2 DIFUSÃO DOS CAMPOS E INDUÇÕES MAGNÉTICAS PELO MÉTODO DOS CAMINHOS FINITOS	33
3.2.1 Introdução	33
3.2.2 Fmm da coroa do estator (armadura) de máquina elétrica girante ...	34
3.2.3 Solução Básica para a difusão do Campo H, Indução Magnética B e Fmm através do Método de Caminhos Finitos	36
3.2.4 Fluxo Magnético no Subdomínio k	37
3.2.5 Rotina Iterativa Básica para a determinação da difusão do Campo H, Indução magnética B e Fmm do Subdomínio de ordem k pelo método De Caminhos Finitos	38
3.2.6 Solução da difusão do Campo H, Indução B e Fmm para todo o Domínio de Estudo	40
3.2.7 Exemplo de Cálculo	40
3.3 VANTAGENS DO USO DAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM E MÉTODO DE CAMINHOS FINITOS	44
3.4 PROGRAMA PARA DETERMINAÇÃO DAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM	46
3.4.1 Introdução	46
3.4.2 Descrição do programa	46
3.5 PROGRAMA PARA O CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO, INDUÇÃO MAGNÉTICA E FMM NO DOMÍNIO DE ESTUDO DA COROA ESTATÓRICA DE MÁQUINA ELÉTRICA GIRANTE, ATRAVÉS DO MÉTODO DE CAMINHOS FINITOS	48
3.5.1 Introdução	48
3.5.2 Descrição do programa	48

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E CONCLUSÕES	50
4.1 ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS DE CAMINHOS FINITOS E ELEMENTOS FINITOS	50
4.1.1 Introdução	50
4.1.2 Resultados com o Motor de Indução de 2 Polos	51
4.1.3 Resultados com o Motor de Indução de 4 Polos	55
4.2 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
ANEXO 1 - CAMPO MAGNÉTICO NA REGIÃO DA COROA	61
1 - Introdução	62
2 - Fmm de um enrolamento de passo pleno	63
3 - Fmm de um enrolamento de passo fracionário	65
4 - Enrolamentos Distribuídos	67
5 - Campo Girante trifásico	72
6 - Campo Girante perfeitamente Senoidal	75
ANEXO 2 – Fluxograma do programa LEMEG.BAS	77
ANEXO 3 – Fluxograma do programa CFMEG.BAS	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

SIMBOLOGIA

- $ArcMáx(k)$ - Comprimento do arco correspondente à Linha de Fronteira Máxima até a Linha equipotencial de ordem k , [m].
- $ArcMín(k)$ - Comprimento do arco correspondente à Linha de Fronteira Mínima até a Linha equipotencial de ordem k , [m].
- $Arc(i,k)$ - Comprimento do arco correspondente às coordenadas " $r(i,k)$ " e " $\theta(i,k)$ " até a Linha equipotencial de ordem k , [m].
- $a1$ - Número de caminhos paralelos de corrente elétrica no enrolamento.
- B - Indução magnética, [T].
- \vec{B} - Vetor indução magnética, [T].
- $B(i,k)$ - Indução magnética do caminho discretizado " i " dentro do subdomínio " k ", [T].
- $\vec{B}(i,k)$ - Vetor indução magnético do caminho discretizado " i " dentro do subdomínio " k ", [T].
- B_δ - Indução magnética no entreferro, [T].
- \vec{D} - Vetor indução elétrica, [C/m²].
- $d\vec{l}$ - Vetor comprimento infinitesimal, [m].
- $d\vec{l}_{mag}$ - Vetor comprimento do caminho magnético infinitesimal, [m].
- dS - Comprimento do passo da bobina, [m²].
- $d\vec{S}$ - Vetor área infinitesimal, [m²].
- $d\vec{S}_p$ - Vetor superfície periférica infinitesimal, [m²].
- dv - volume infinitesimal, [m³].
- \vec{D}_s - Vetor indução de Fmm, [Ae/m²].
- \vec{E} - Vetor campo elétrico, [V/m].
- f - Frequência da onda de tensão elétrica, [Hz].
- f_{wn} - Fator de bobinagem para a harmônica de ordem " n ".
- f_{w1} - Fator de bobinagem para a harmônica fundamental.
- H - Campo magnético, [A/m].
- $H(i,k)$ - Campo magnético do caminho discretizado " i " dentro do subdomínio " k ", [A/m].

\vec{H}	- Vetor campo magnético, [A/m].
$hN1$	- Altura máxima das ranhuras estatóricas, [m].
I	- Corrente elétrica, [A].
i	- Número indexador que indica a posição espacial do caminho discretizado dentro de um subdomínio de ordem k .
ia	- Corrente elétrica na fase “a”, [A].
ib	- Corrente elétrica na fase “b”, [A].
ic	- Corrente elétrica na fase “c”, [A].
$I_{máx}$	- Valor máximo temporal da corrente elétrica senoidal, [A].
i_v	- Densidade volumétrica da fonte de Fmm (corrente), [Ae/m ³].
\vec{J}	- Densidade de corrente elétrica, [A/m ²].
k	- Número indexador que indica a ordem (posição) de uma Linha Equipotencial de Fmm e/ou do subdomínio dentro do domínio de estudo.
K_{dn}	- Fator de distribuição para a harmônica de ordem “n”.
K_{fe}	- Fator (grau) de empilhamento do pacote de chapas ferromagnéticas.
K_{pn}	- Fator de passo para a harmônica de ordem “n”.
$lc(i,k)$	- Comprimento do caminho magnético discretizado na posição “i” dentro do subdomínio k , [m].
$LE\mathfrak{J}$	- Linha equipotencial de Fmm, [Ae].
$\vec{LE\mathfrak{J}}$	- Vetor linha equipotencial de Fmm, [Ae].
l_{mag}	- Comprimento do caminho magnético, [m].
$l(k)$	- Posição do caminho magnético na Linha Equipotencial de Fmm de ordem k , [m].
$l(k-1)$	- Posição do caminho magnético na Linha Equipotencial de Fmm de ordem $(k-1)$, [m].
$L(S)$	- Comprimento magnético que envolve a área S da fonte, [m].
$L(Sf)$	- Comprimento magnético que envolve a área Sf da fonte, [m].
N	- Número de espiras.
n	- Número total de caminhos elementares discretizados dentro do subdomínio “k”.
n	- Número de ordem da Harmônica.
nb	- Número máximo de caminhos elementares em cada subdomínio de ordem k

n_i	- Número máximo de posições (pontos) sobre as Linhas Equipot. de Fmm.
n_L	- Número total de Linhas Equipotenciais de Fmm do domínio de estudo.
N_{ph}	- Número total de espiras em série por fase.
N_t	- Número total de espiras em série por fase.
Pac	- Pacote de chapas ferromagnéticas (profundidade), [m].
$P1(i,k)$	- Ponto espacial da extremidade inicial do caminho magnético discretizado dentro do subdomínio de ordem k .
$P2(i,k)$	- Ponto espacial da extremidade final do caminho magnético discretizado dentro do subdomínio de ordem k .
q	- Número de bobinas por polo e por fase.
r	- Coordenada espacial na direção radial, [m].
$R_{máx}$	- Coordenada radial (raio) correspondente à Linha de Fronteira Máxima, [m]
$rMáx(k)$	- Coordenada radial máxima sobre a Linha Equipotencial de Fmm de ordem k (na região onde a Linha de Fronteira Máxima é radial), [m].
$R_{mín}$	- Coordenada radial (raio) correspondente à Linha de Fronteira Mínima, [m]
$r(i,k)$	- Coordenada espacial na direção radial correspondente à posição “ i ” da Linha Equipotencial de ordem k , [m].
S_f	- Área transversal da fonte \vec{J} , [m ²].
S_{mag}	- Área magnética transversal, [m ²].
$S_{mag}(k)$	- Área magnética transversal de cada um dos caminhos discretizados dentro do subdomínio “ k ”, [m ²].
$S_{mag}(i,k)$	- Área magnética transversal do caminho discretizado “ i ” dentro do subdomínio “ k ”, [m ²].
S_p	- Superfície periférica que envolve toda a superfície externa do volume “ Vol ”, [m ²].
$S(k)$	- Área magnética transversal total do subdomínio de ordem k , [m ²].
$S(i,k)$	- Área magnética transversal correspondente ao caminho discretizado “ i ” dentro do subdomínio “ k ”, [m ²].
t	- Tempo, [s].
U	- Tensão elétrica, [V].
U	- Valor eficaz da tensão elétrica, [V].
U_{ef}	- Valor eficaz da onda de tensão elétrica senoidal, [V].
$U_{máx}$	- Valor máximo da tensão elétrica, [V].

V_m	- Potencial magnético escalar, [Ae].
x	- Coordenada espacial na direção do eixo x , [m].
y	- Coordenada espacial na direção do eixo y , [m].
z	- Coordenada espacial na direção do eixo z , [m].
\mathfrak{F}	- Força magneto-motriz (Fmm) , [Ae].
\mathfrak{F}_a	- Onda de Fmm da fase “ a ” , [Ae].
\mathfrak{F}_b	- Onda de Fmm da fase “ b ” , [Ae].
\mathfrak{F}_c	- Onda de Fmm da fase “ c ” , [Ae].
\mathfrak{F}_{clT}	- Fmm da coroa estatórica de máquina elétrica girante correspondente a todo o domínio de estudo, [Ae].
$\mathfrak{F}_{cl}(k)$	- Fmm da coroa estatórica de máquina elétrica girante correspondente ao subdomínio de ordem k , [Ae].
\mathfrak{F}_g	- Onda girante de Fmm resultante trifásica, [Ae].
$\mathfrak{F}_{m\acute{a}x}$	- Valor máximo da onda girante de Fmm resultante trifásica, [Ae].
\mathfrak{F}_p	- Fmm de um polo magnético, [Ae].
\mathfrak{F}_{pn}	- Fmm por polo para a harmônica de ordem “ n ” , [Ae].
$\mathfrak{R}(i,k)$	- Relutância do caminho magnético “ i ” discretizado dentro do subdomínio de ordem k , [Ae/Wb].
$\mathfrak{R}_{eq}(k)$	- Relutância magnética equivalente para o subdomínio de ordem k , [Ae/Wb].
γ	- Ângulo de encurtamento de passo da bobina, [rad].
δ	- Entreferro, [m].
$\Delta ArcM\acute{a}x(k)$	- Comprimento do arco correspondente à Linha de Fronteira Máxima dentro do subdomínio de ordem k , [m].
$\Delta ArcM\acute{i}n(k)$	- Comprimento do arco correspondente à Linha de Fronteira Mínima dentro do subdomínio de ordem k , [m].
$\Delta Arc(i,k)$	- Comprimento do arco correspondente ao caminho magnético “ i ” dentro do subdomínio de ordem k , [m].
$\Delta h(k)$	- Largura dos caminhos magnéticos discretizado dentro do subdomínio “ k ”, [m].
$\Delta lmag$	- Comprimento do caminho magnético discretizado, [m].

- $\Delta l_{mag}(i,k)$ - Comprimento do caminho magnético “ i ” discretizado dentro do subdomínio “ k ”, [m].
- $\Delta r_{Máx}(k)$ - Deslocamento radial máximo sobre a Linha Equipotencial de ordem k (na região onde a Linha de Fronteira Máxima é radial), [m].
- $\Delta r_{Mín}(k)$ - Deslocamento radial mínimo sobre a Linha Equipotencial de ordem k (na região onde a Linha de Fronteira Mínima é radial), [m].
- $\Delta r(i,k)$ - Deslocamento radial correspondente à posição “ i ” sobre a Linha Equipotencial de ordem k , [m].
- ΔV_m - Diferença de potencial magnético, [Ae].
- ΔVol - Volume de um elemento de caminho discretizado, [m³].
- ΔW - Energia magnética correspondente a um volume “ ΔVol ”, [J].
- $\Delta W(i,k)$ - Energia magnética correspondente ao caminho discretizado “ i ” dentro do subdomínio “ k ”, [J].
- $\Delta \mathfrak{F}$ - Diferença de Força magneto-motriz (Fmm), [Ae].
- $\Delta \mathfrak{F}(k)$ - Diferença de Força magneto-motriz (Fmm) no subdomínio de ordem k , [Ae].
- $\Delta \theta$ - Deslocamento angular espacial, [rad].
- $\Delta \theta_e$ - Deslocamento angular elétrico entre duas linhas equipotenciais imediatamente próximas, [rad].
- $\Delta \theta(i,k)$ - Deslocamento angular espacial do caminho discretizado “ i ” dentro do subdomínio “ k ”, [rad].
- $\Delta \Phi$ - Fluxo magnético do caminho discretizado, [Wb].
- θ - Coordenada angular espacial, [rad].
- θ_e - Ângulo elétrico, [rad].
- $\theta_e(k)$ - Ângulo elétrico correspondente à Linha equipotencial de Fmm de ordem k , [rad].
- θ_M - Ângulo geométrico onde ocorre a mudança de direção da Linha de Fronteira Máxima de tangencial para radial, [rad].
- $\theta_{máx}(k)$ - Ângulo espacial sobre a Linha de Fronteira Máxima ($R_{máx}$) até a Linha Equipotencial de Fmm de ordem k , [rad].
- $\theta_{mín}(k)$ - Ângulo espacial sobre a Linha de Fronteira Mínima ($R_{mín}$) até a Linha Equipotencial de Fmm de ordem k , [rad].

$\theta(i, k)$	- Ângulo (coordenada angular espacial) correspondente ao raio “ $r(i, k)$ ” até a Linha Equipotencial de ordem k , [rad].
μ	- Permeabilidade magnética do meio material, [H/m].
$\mu(i, k)$	- Permeabilidade magnética do meio material do caminho discretizado “ i ” dentro do subdomínio “ k ”, [H/m].
μ_0	- Permeabilidade magnética do ar (vácuo), [H/m].
ρ	- Densidade volumétrica de carga elétrica, [C/m ³].
τ_p	- Passo polar, [m].
Φ	- Fluxo magnético, [Wb].
Φ_a	- Fluxo magnético da fase “ a ”, [Wb].
Φ_b	- Fluxo magnético da fase “ b ”, [Wb].
Φ_c	- Fluxo magnético da fase “ c ”, [Wb].
$\Phi_{c1}(k)$	- Fluxo magnético da coroa estatórica de máquina elétrica girante correspondente ao subdomínio de ordem k , [Wb].
$\Phi_{c1}(k)_{calc}$	- Fluxo magnético da coroa estatórica de máquina elétrica girante calculado no subdomínio de ordem k em função dos valores obtidos para os $B(i, k)$, [Wb].
φ_g	- Perfil da curva do fluxo magnético girante, [Wb].
$\Phi_g(\theta_e)$	- Fluxo girante (radial) resultante sobre a linha central tangencial dos Ampere-condutores (\vec{J}), [Wb].
Φ_{imp}	- Fluxo magnético imposto, [Wb].
$\Phi_{máx}$	- Fluxo magnético totalmente tangencial que é imposto sobre a Linha Equipotencial de Fmm localizada sobre a linha central da coroa ($\theta_e = 0\text{rad}$), [Wb].
$\Phi_{máx}$	- Valor máximo da onda temporal de fluxo magnético por fase, [Wb].
Φ_R	- Fluxo radial entre as duas Linhas Equipotenciais de Fmm que formam o subdomínio de ordem k , [Wb].
$\Phi(\theta_e)$	- Fluxo magnético imposto nas Linhas Equipotenciais de Fmm intermediárias (entre $\theta_e = 0^\circ$ e $\theta_e = 90^\circ$ elétricos), [Wb].
ω	- Velocidade angular da onda temporal, [rad/s].
$2P$	- Número de polos da máquina elétrica girante.

CAPÍTULO 1 – A DIFUSÃO DOS CAMPOS E INDUÇÕES MAGNÉTICAS

1.1 INTRODUÇÃO

Este trabalho nasceu com o intuito de poder ser mais um pequeno tijolo a se somar na construção do conhecimento deste importante ramo do eletromagnetismo, qual seja, a difusão dos campos e induções magnéticas nos dispositivos eletromagnéticos. Surgiu da necessidade de melhorar os programas convencionais para o cálculo de máquinas elétricas, no tocante ao circuito magnético e às grandezas a ele dependentes, tais como o fator de potência e a corrente em vazio (magnetizante). Nos programas convencionais, o cálculo das induções magnéticas supõe a existência de somente um caminho magnético médio. Com isto, os resultados obtidos para o circuito magnético ficam bastante limitados, tendo em vista que não podem levar em conta os efeitos não lineares da distribuição do fluxo sobre toda a região do domínio de estudo. Como resultado prático, por exemplo, no cálculo de motores elétricos, é uma menor precisão nos valores obtidos para os fatores de potência e para as correntes magnetizantes. Utilizando a técnica dos Caminhos Finitos, conforme será posteriormente demonstrado, nos programas de cálculo, para calcular a difusão dos campos e induções magnéticas nas coroas das máquinas elétricas girantes, foram obtidos resultados melhores, os quais encorajaram a elaboração deste trabalho.

A partir de uma idéia, que no início foi apenas intuitiva, mas que ganhou força nas necessidades práticas vivenciadas no dia a dia, surgiu o resultado apresentado nesta dissertação que finalmente buscou amparo nos alicerces das equações de Maxwell.

O trabalho consiste num estudo sobre as Linhas Equipotenciais de Fmm, ou seja, nas linhas geométricas que correspondem ao lugar geométrico que tenha o mesmo potencial magnético. Para estas Linhas foi buscada uma interpretação formal de acordo com as equações de Maxwell e uma forma prática de cálculo para definir espacialmente as suas coordenadas, no capítulo 2.

A idéia das Linhas Equipotenciais de Fmm nasceu da análise das condições singulares que originam as “condições de Neumann” e de “Dirichlet”, nos domínios de estudo. Também de uma interpretação da “lei de Faraday”, onde o fluxo magnético total que cruza transversalmente estas Linhas Equipotenciais de Fmm, pode ser estabelecido previamente, conforme mostrado no anexo 1 e seção 3.1 do capítulo 3.

Ao longo deste texto, serão utilizadas as expressões “Condição de Dirichlet” e “Condição de Neumann” para expressar a condição de campo paralelo a uma linha e perpendicular respectivamente, tendo em vista que, no método de Elementos Finitos, para o potencial vetor 2D, esta denominação é muito utilizada e portanto já de fácil compreensão.

Para solucionar a difusão dos campos e induções magnéticas, bem como da própria Fmm, foi desenvolvido um método novo de cálculo numérico, o qual chamou-se de “Método de Caminhos Finitos”, apresentado no capítulo 3 (seção 3.2).

Na seção 3.3 do capítulo 3 são apresentadas algumas vantagens que podem justificar o uso das Linhas Equipotenciais de Fmm e do Método de Caminhos Finitos. É importante salientar que as Linhas Equipotenciais de Fmm, as quais criam Subdomínios que permitem reduzir o Domínio de Estudo ao nível destes Subdomínios, além da solução pelo Método de Caminhos Finitos proposto, permitem que a solução para a difusão do Campo \vec{H} e Indução Magnética \vec{B} , dentro deste Subdomínio, seja obtida também pelo Método de Elementos Finitos.

Nas seções 3.4 e 3.5 (capítulo 3) são apresentados os fluxogramas dos programas numéricos, respectivamente para a “Determinação das Linhas Equipotenciais de Fmm” e para o “Cálculo da Distribuição dos Campos, Induções Magnéticas e Fmm’s”, no espaço do Domínio de Estudo, o qual, para os efeitos deste trabalho, ficou restrito à região da Coroa Estatórica (Armadura) de Máquinas Elétricas Girantes.

Para efeitos de uma comprovação experimental, na seção 4.1 do capítulo 4, é apresentado um estudo comparativo entre as soluções obtidas com o Método de Caminhos Finitos e com o Método de Elementos Finitos. Para o Método de Elementos Finitos foi usado o programa “EFCAD”, desenvolvido no GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos, EEL / UFSC).

Finalmente, na seção 4.2 do capítulo 4, são tiradas as conclusões e considerações finais sobre a validade e praticidade do trabalho e das idéias apresentadas.

1.2 O ESTADO DA ARTE E O SEU DESENVOLVIMENTO

A solução para a difusão dos campos e induções magnéticas, nos dispositivos eletromagnéticos, começou a ser encontrada desde que o matemático francês Pierre Simon de Laplace (1749-1827) e o físico e também matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), deram suas importantes contribuições criando respectivamente as equações conhecidas como de “Laplace” e “Poisson”.

Os fenômenos físicos envolvidos nesta área de estudo, ao longo da história, foram sendo desvendados por importantes nomes, tais como, Biot e Savart, com a “lei de Biot-Savart”, e Ampère com a famosa “lei de Ampère”, por volta de 1820. A indução de uma força eletromotriz, através da variação do fluxo magnético, foi observado, pela primeira vez, por Michael Faraday e Joseph Henry, em meados de 1831. Surgiu, então, a importante lei conhecida como “lei de Faraday”.

O físico escocês James Clark Maxwell (1831-1879), baseando-se nos trabalhos e experiências realizadas por Ampère, Gauss e Faraday, elaborou uma teoria para unificar sob quatro equações os diferentes estudos de seus predecessores. Maxwell, além de racionalizar toda a teoria eletromagnética, generalizou a “lei de Ampère”, introduzindo a noção de “corrente de deslocamento”.

Com isto, o formalismo do eletromagnetismo, baseando-se nas quatro equações de Maxwell, tornou-se mais simples. Embora o formalismo do eletromagnetismo tenha sido simplificado, os fenômenos físicos associados às equações de Maxwell podem ser de grande complexidade e muitos deles continuam ainda sem solução, sendo por isto objetos de pesquisas e investigações.

Para o projeto e análise dos dispositivos eletromagnéticos é necessário solucionar as equações de Maxwell. Em função da importância, que foi se tornando cada vez maior, e da complexidade envolvidas, este assunto vem recebendo, desde então, muita atenção por parte dos pesquisadores engenheiros, físicos e matemáticos. Ao longo de toda a história decorrida, muita contribuição já tem sido dada, para a composição do estado da arte atual.

Em seu tratado sobre “Eletricidade e Magnetismo”, escrito em 1873, Maxwell já apresentava uma série de métodos para a solução de suas equações. As soluções propostas inicialmente e as que se seguiram nos anos seguintes, utilizavam conceitos matemáticos sofisticados, resultando em processos de cálculo demorados e difíceis, aplicáveis somente

a algumas geometrias específicas, não podendo tratar, de forma geral, os problemas não lineares.

Com o advento dos computadores, os métodos numéricos tiveram uma grande evolução, generalizando as técnicas de cálculo e permitindo resolver problemas mais complexos, tornando possível a otimização dos projetos dos dispositivos eletromagnéticos. As técnicas de cálculo numérico, inicialmente evoluíram utilizando o “Método de Diferenças Finitas” para, nos anos 60, migrarem para o “Método de Elementos Finitos” (Winslow, 1967; Silvester, 1969; Silvester & Chari, 1970). Desde então, o Método de Elementos Finitos vem sendo empregado, auxiliando no projeto e otimização de dispositivos eletromagnéticos.

As máquinas elétricas girantes, notadamente os motores de indução, em função de sua alta demanda e conseqüente alto valor mercadológico, merecem uma atenção especial, a fim de tornar mais fácil e rápida a aplicação dos recursos de cálculos mais avançados para os seus projetos, análises e otimizações.

Diante desta evolução, a qual foi se desenvolvendo passo a passo, somando cada contribuição ao estado da arte global, pode-se concluir que o objetivo básico foi e continua sendo, o de atingir métodos de cálculos mais avançados que permitam calcular de maneira mais completa e realista, os dispositivos eletromagnéticos. Com o elevado grau de competitividade que as indústrias convivem atualmente, os dispositivos eletromagnéticos produzidos devem apresentar desempenhos cada vez melhores, tanto do ponto de vista técnico como econômico. Com isto, as ferramentas de cálculo, aplicáveis às necessidades práticas, além de mais sofisticadas e capazes de realizar cálculos mais avançados, devem ser rápidas e fáceis de serem manipuladas, permitindo produzir uma grande quantidade de resultados num tempo relativamente curto. Diante disto, os estudos devem convergir também sob este foco, a fim de tornar cada vez mais aplicáveis as soluções propostas.

Diante do exposto, a fim de poder dar alguma contribuição a este tema tão importante, foi proposto o trabalho aqui apresentado, o qual consiste basicamente no estudo e implementação das “Linhas Equipotenciais de Fmm” (Capítulo 2), dos “Fluxos Impostos” nestas linhas equipotenciais e da proposta de solução da “Difusão dos Campos, Induções Magnéticas e Fmm’s” através de um método novo chamado de “Caminhos Finitos” (Capítulo 3). Este trabalho, a fim de produzir resultados práticos para efeitos de validação, limitou-se ao estudo de um domínio que corresponde à região da coroa estática das máquinas elétricas girantes.

CAPÍTULO 2 - LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM

2.1 INTRODUÇÃO

Uma dada linha geométrica, dentro do domínio de estudo, é dita **Equipotencial de Fmm**, quando todos os pontos que definem esta linha, encontram-se submetidos a um mesmo potencial magnético. A partir das Linhas Equipotenciais de Fmm o domínio de estudo é dividido em subdomínios, sobre os quais uma discretização pode ser feita, criando-se então uma quantidade definida de elementos discretizados que por sua vez, neste trabalho, recebem o nome de “Caminhos Finitos”. A partir destes caminhos finitos uma solução para a difusão dos campos e induções magnéticas nas coroas estatóricas de máquinas elétricas girantes, será proposta. Será demonstrado em capítulo posterior que sobre cada linha equipotencial de fmm será imposto um fluxo magnético definido conforme a lei de Faraday e conforme a resultante da interação entre os campos magnéticos que compõe o sistema polifásico (trifásico) da máquina.

No decorrer deste capítulo serão estabelecidas as hipóteses aproximativas e condições que serão consideradas.

2.2 DOMÍNIO DE ESTUDO

O domínio de estudo que será considerado neste trabalho é a região da coroa estatórica de uma máquina elétrica girante. Esta coroa corresponde a uma máquina formada por enrolamento distribuído, ou seja, onde os condutores estão alojados em ranhuras regularmente distanciadas ao longo de todo o perímetro circunferencial do estator. O enrolamento considerado é trifásico e simétrico.

Um sistema de coordenadas polares (ângulo= θ e raio= r) será considerado, sendo que o início para a coordenada θ ($\theta=0^\circ$) será sobre o centro da coroa, o qual coincide com a linha de simetria radial onde o fluxo magnético é totalmente tangencial. Esta linha onde $\theta=0^\circ$ é uma Linha Equipotencial de Fmm que podemos classificar como uma condição singular visto que corresponde à condição de Neumann (todo o fluxo que atravessa esta linha é tangencial, ou seja, perpendicular à ela). Já a coordenada radial r tem início ($r=0$) no centro geométrico da máquina, ou seja, no centro do eixo para a transmissão do torque.

2.4 DIVERGÊNCIA DAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM RELATIVAMENTE À FONTE \vec{J}

As Linhas Equipotenciais de Fmm representam os pontos que definem um lugar geométrico (linha) que possui um mesmo potencial escalar magnético, conforme já comentado na seção anterior. Tal como todas as demais grandezas eletromagnéticas que seguem as leis físicas ditadas pelas leis de Maxwell, também esta, aqui representada pelo símbolo “ $LE\mathfrak{S}$ ”, deve poder ser encontrada a partir destas leis e com isto evidenciar a sua relação com as demais grandezas. Com base neste propósito, esta seção será dedicada a encontrar, a partir das leis de Maxwell, as relações que as Linhas Equipotenciais de Fmm ($LE\mathfrak{S}$) têm com as demais grandezas fundamentais, bem como a equação sob forma local que pode representá-las.

Da equação de Maxwell (lei de Ampere) tem-se

$$\text{Rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (2.1)$$

de onde, na forma integral, obtém-se a Fmm \mathfrak{S}

$$\mathfrak{S} = \oint_{L(S_f)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_f} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (2.2)$$

Considerando agora uma superfície “ S ” que não contém condutores (\vec{J}) dentro de seu contorno, resulta para a região desta superfície

$$\text{Rot}\vec{H} = 0 \quad (2.3)$$

$$\oint_{L(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.4)$$

Nestas condições, um potencial magnético escalar “ V_m ” pode ser definido e o campo magnético dado por

$$\vec{H} = -\nabla V_m \quad (2.5)$$

visto que

$$\text{Rot}(-\nabla V_m) = 0 \quad (2.6)$$

O potencial magnético “ V_m ” pode ser obtido através do uso de Linhas Equipotenciais de Fmm do eletromagneto, originárias da fonte de corrente \vec{J} . Neste caso a fonte que origina o campo magnético, sem corrente (\vec{J}), são as diferenças de potencial magnético ($\Delta\mathfrak{S}$)

impostas como condições de contorno, conforme mostrado na equação (2.7) a seguir e ilustrado na figura 2.2.

$$\Delta V_m = \Delta \mathcal{F} = \int_{l^{(k-1)}}^{l^{(k)}} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (2.7)$$

onde:

$l^{(k)}$ = Posição do caminho magnético na Linha Equipotencial de Fmm de ordem k .

$l^{(k-1)}$ = Posição do caminho magnético da Linha Equipotencial de Fmm de ordem $(k-1)$.

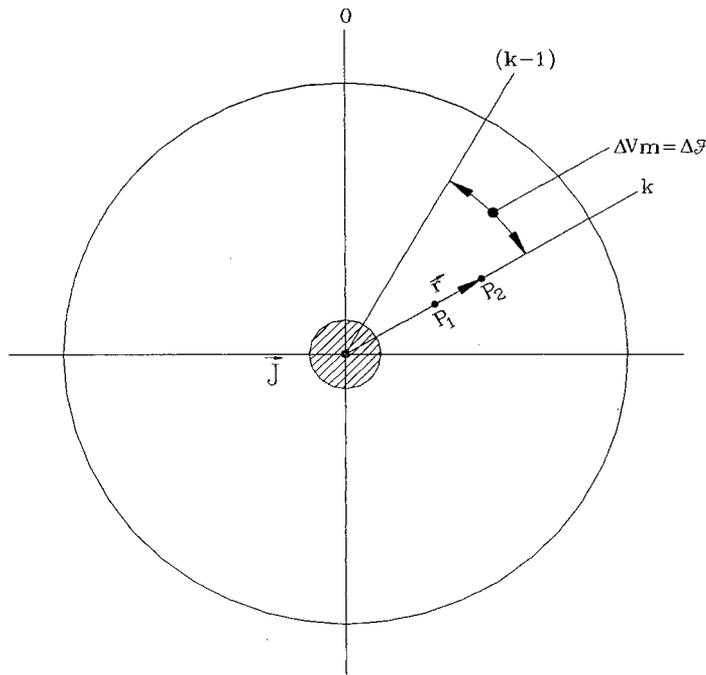


Figura 2.2 – Domínio de estudo com as Linhas Equipotenciais que definem a diferença de potencial ΔV_m .

Para a análise da equação (2.5), de acordo com as definições que envolvem o estudo do gradiente de uma função, seja considerado:

A função $V_m(x,y,z)$ possui derivadas $\frac{\partial V_m}{\partial x}$, $\frac{\partial V_m}{\partial y}$, $\frac{\partial V_m}{\partial z}$ e depende de um ponto $M(x,y,z)$.

A variação “ dV_m ” do potencial magnético “ V_m ” quando passa do ponto $M(x,y,z)$ para outro ponto infinitamente próximo $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ é

$$dV_m = \frac{\partial V_m}{\partial x} dx + \frac{\partial V_m}{\partial y} dy + \frac{\partial V_m}{\partial z} dz \quad (2.8)$$

Definindo o vetor $d\vec{M} = M' - M = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, resulta

$$dVm = \nabla Vm \bullet d\vec{M} = \left(\frac{\partial Vm}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Vm}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial Vm}{\partial z} \vec{k} \right) \bullet (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) \quad (2.9)$$

Pode-se dizer que “ ∇Vm ” é um vetor perpendicular a uma superfície onde “ Vm ” é constante (equipotencial) e que ele aponta para a direção dos potenciais magnéticos “ Vm ” crescentes. Ainda o vetor “ ∇Vm ” aponta para a direção de máxima variação de “ Vm ”, pois

$$dVm = \nabla Vm \bullet d\vec{M} \quad (2.10)$$

é máximo quando “ $d\vec{M}$ ” tiver a mesma direção de “ ∇Vm ”.

Com isto, sendo $\vec{H} = -\nabla Vm$, pode-se concluir que o campo \vec{H} é perpendicular à superfície onde o potencial “ Vm ” é constante (equipotencial), ou seja, o perfil de vetores \vec{H} é sempre perpendicular à Linha Equipotencial de Fmm, cujo potencial magnético é constante e igual a “ Vm ”.

Fisicamente, isto pode ser analisado da seguinte maneira:

Para o campo magnético \vec{H} existir é necessário que haja variação dos potenciais magnéticos (Vm) pois

$$\vec{H} = -\nabla Vm$$

Sendo assim, como \vec{H} é rotacional relativamente à fonte \vec{J} , pode-se dizer que a variação dos potenciais “ Vm ” (∇Vm) também é rotacional em relação à fonte \vec{J} . Conclui-se então que sendo ∇Vm rotacional em relação à \vec{J} e sendo ainda ∇Vm perpendicular a Vm , então as regiões de equipotencialidade (constância) destes potenciais (Vm) devem ser divergentes relativamente à fonte \vec{J} . Estas regiões podem ser chamadas de “Linhas Equipotenciais de Fmm” e representam os lugares geométricos (linhas) onde os potenciais magnéticos são constantes (equipotenciais) e têm direções divergentes relativamente à fonte de corrente \vec{J} .

Chamando estas “Linhas Equipotenciais de Fmm” de “LES” e lembrando que são formadas por uma sucessão de pontos com igual potencial magnético “ Vm ”, resulta para caracterizar a direção destas linhas, o seguinte vetor unitário (\vec{u}):

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.11)$$

onde:

$$\vec{r} = P_2 - P_1 \quad (2.12)$$

onde: P_2 e P_1 são pontos infinitamente próximos sobre uma Linha Equipotencial de Fmm “LES” de ordem k .

Para dar às Linhas Equipotenciais de Fmm “ $LE\mathfrak{S}$ ” um caráter vetorial, a direção pode ser obtida através do vetor \vec{u} e o módulo pode ser dado pelo potencial magnético “ Vm ”.

O potencial magnético ΔVm , em termos de Fmm, será

$$\DeltaVm = \Delta\mathfrak{S} = \int_{l(k-1)}^{l(k)} \vec{H} \cdot d\vec{l}_{mag} = H \cdot (l(k) - l(k-1)) \quad (2.13)$$

onde:

$l(k)$ = Posição do caminho magnético até a Linha Equipotencial de Fmm de ordem k .

$l(k-1)$ = Posição do caminho magnético até a Linha Equipotencial de Fmm de ordem $(k-1)$.

l_{mag} = Comprimento do caminho magnético, [m].

Resulta então

$$LE\vec{\mathfrak{S}} = \left(\frac{\vec{u}}{u} \right) \cdot \DeltaVm = \left(\frac{\vec{u}}{u} \right) \cdot \Delta\mathfrak{S} \quad (2.14)$$

Sendo as Linhas Equipotenciais de Fmm “ $LE\mathfrak{S}$ ” divergentes relativamente à fonte de corrente \vec{J} , a seguinte equação pode ser estabelecida

$$\nabla \cdot \vec{D}_3 = i_v \quad (2.15)$$

onde:

\vec{D}_3 = Indução de Fmm, [Ae/m²].

i_v = Densidade volumétrica da fonte de Fmm (corrente), [Ae/m³].

Pode-se dizer que a equação (2.15) é dual da conhecida equação de Maxwell para a eletrostática

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.16)$$

onde:

\vec{D} = Indução Elétrica, [C/m²].

ρ = Densidade Volumétrica de Carga Elétrica, [C/m³].

A equação (2.15) na forma integral será

$$\iiint_{Vol} (\nabla \cdot \vec{D}_3) \cdot dv = \iiint_{Vol} i_v \cdot dv \quad (2.17)$$

Aplicando o teorema da divergência resulta

$$\oiint_{Sp(Vol)} \vec{D}_3 \cdot d\vec{S}_p = N \cdot I \quad (2.18)$$

Com base neste resultado, pode-se dizer que o fluxo do vetor \vec{D}_3 (Indução de Fmm), através da superfície periférica $Sp(Vol)$, é igual à carga magnética contida no volume dada

por $(N.I)$. A superfície periférica Sp é a área que envolve toda a superfície externa do volume Vol , conforme definido pelas equações (2.17) e (2.18). Na figura 2.3 pode ser visto esta superfície periférica Sp e os vetores $d\vec{S}_p$ e \vec{D}_3 para uma fonte de corrente \vec{J} filiforme.

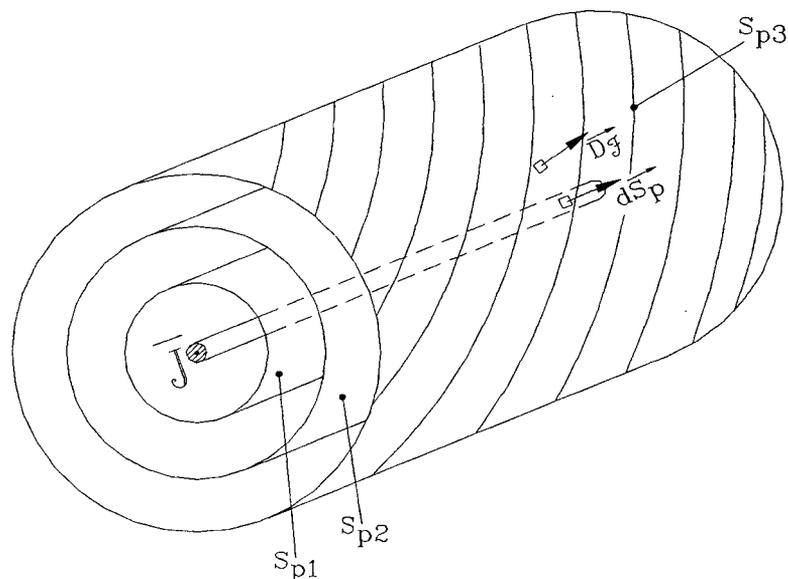


Figura 2.3 – Fonte filiforme de corrente (\vec{J}) com as respectivas superfícies periféricas $Sp1, Sp2, Sp3, \dots$

Na equação (2.18), sendo o vetor \vec{D}_3 colinear com o vetor $d\vec{S}_p$ e sendo o módulo $|\vec{D}_3|$ idêntico em qualquer ponto de $Sp(Vol)$, resulta

$$\mathfrak{S} = D_3 \cdot Sp = N \cdot I \quad (2.19)$$

Da mesma forma pode ser concluído que

$$\mathfrak{S} = D_3 \cdot Sp = H \cdot lmag \quad (2.20)$$

Na figura 2.3 pode ser visto que as superfícies periféricas $Sp1, Sp2, Sp3, \dots$ se consideradas num sistema 2D se assemelham com as linhas de fronteira externa definidas na seção 2.1.

2.5 LINHAS EQUIPOT. PARA UM CONDUTOR FILIFORME

Seja considerado para efeito de demonstração e análise um condutor filiforme com densidade de corrente \vec{J} , conforme mostrado na figura 2.4.

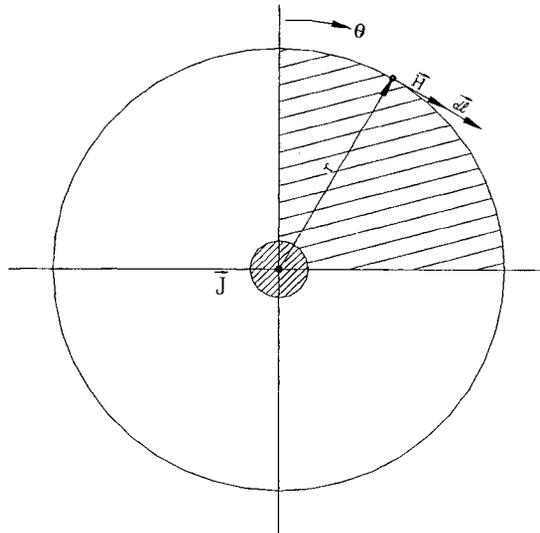


Figura 2.4 – Linhas Equipotenciais para um condutor filiforme.

Seja considerado que o fluxo magnético produzido pela fonte de corrente \vec{J} fica condicionado (delimitado) à região entre as linhas de fronteira Máxima e Mínima estabelecidas. Para a linha de fronteira Máxima, sobre os pontos que a compõe, é válido dizer que nenhum campo ou fluxo magnético atravessa esta linha (Condição de Dirichlet). Já para a linha de fronteira Mínima pode-se considerar como sendo o perímetro externo do condutor (fonte \vec{J}). Mas como o condutor é filiforme conclui-se que a linha Mínima será puntiforme. Para a determinação das coordenadas polares que definem os pontos que compõem as respectivas Linhas Equipotenciais de Fmm, seja considerada a demonstração que segue.

Da equação de Maxwell

$$\text{Rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (2.21)$$

na forma integral resulta,

$$\iint_S (\text{Rot}\vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.22)$$

Aplicando o teorema de Stokes tem-se

$$\oint_{L(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \quad (2.23)$$

onde, sendo \vec{H} colinear com $d\vec{l}$ e o módulo $|\vec{H}|$ constante em todo o comprimento $L(S)$, resulta

$$\mathfrak{I} = H \cdot l_{mag} = I \quad (2.24)$$

Seja considerado um setor com “ $\Delta\theta$ rad” como sendo o domínio de estudo, conforme mostrado na figura 2.4, onde pode ser visto também que as linhas radiais que delimitam este setor são Linhas Equipotenciais de Fmm. Para efeito de demonstração seja considerada a dedução que segue.

Sendo “ l_{mag} ” o comprimento do caminho magnético sobre o qual a intensidade de campo magnético é \vec{H} , resulta

$$\mathfrak{I} = H \cdot l_{mag} \quad (2.25)$$

ou seja, a Fmm \mathfrak{I} é diretamente proporcional ao comprimento magnético que define o caminho deste campo \vec{H} . Assim sendo, são válidas as equações

$$\frac{\mathfrak{I}}{k} = H \cdot \frac{l_{mag}}{k} \quad (2.26)$$

$$\Delta\mathfrak{I} = H \cdot \Delta l_{mag} \quad (2.27)$$

onde “ k ” é uma constante que divide o comprimento magnético em partes iguais.

Para o caso de um condutor filiforme onde o campo magnético rotaciona simetricamente ao longo de todo o perímetro circunferencial em torno deste condutor (fonte \vec{J}) conclui-se que o caminho l_{mag} está na direção da coordenada θ , ou seja, o campo \vec{H} tem a direção tangencial a este caminho circunferencial. Portanto o caminho magnético de um setor $\Delta\theta$ será dado por

$$\Delta l_{mag} = \Delta\theta \cdot r \quad (2.28)$$

Resulta então,

$$\Delta\mathfrak{I} = H \cdot \Delta\theta \cdot r \quad (2.29)$$

Seja considerada a equação para a energia magnética ΔW , correspondente aos caminhos discretizados na região compreendida entre as duas Linhas Equipotenciais de Fmm que delimitam a região do setor angular escolhida como domínio de estudo,

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \cdot \Delta Vol \quad (2.30)$$

onde “ ΔVol ” é o volume de um elemento de caminho discretizado.

Sendo,

$$\Delta Vol = S_{mag} \cdot \Delta l_{mag} \quad (2.31)$$

$$\Delta \mathfrak{S} = H \cdot \Delta l_{mag} \quad (2.32)$$

$$\Delta \Phi = B \cdot S_{mag} \quad (2.33)$$

resulta

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \Delta \Phi \cdot \Delta \mathfrak{S} \quad (2.34)$$

Fazendo

$$B = \mu \cdot H \quad (2.35)$$

$$\Delta \Phi = \mu \cdot H \cdot S_{mag} = \mu \cdot \frac{\Delta \mathfrak{S}}{\Delta l_{mag}} \cdot S_{mag} \quad (2.36)$$

resulta finalmente

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (\Delta \mathfrak{S})^2 \cdot \frac{S_{mag}}{\Delta l_{mag}} \quad (2.37)$$

Portanto, pode-se fazer

$$\Delta \mathfrak{S} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta W \cdot \Delta l_{mag}}{\mu \cdot S_{mag}}} \quad (2.38)$$

Seja considerado um sistema de indexação “(i,k)” para identificar um dado elemento discretizado dentro do domínio de estudo, conforme mostrado na figura 2.5,

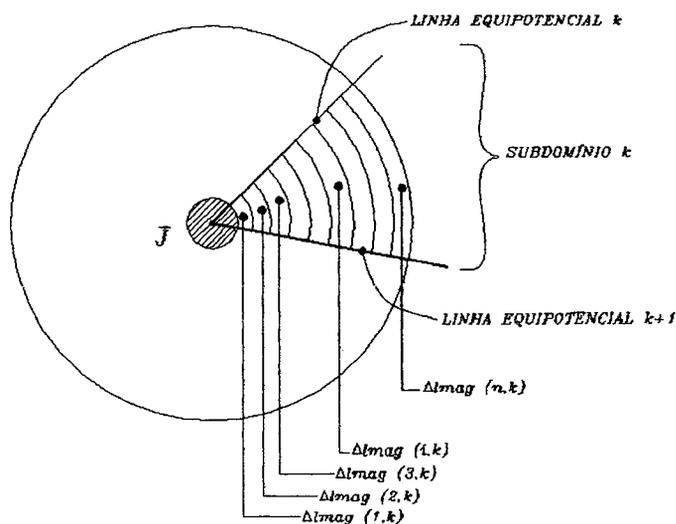


Figura 2.5 – Elementos discretizados no Subdomínio de ordem \$k\$ (\$i= 1, 2, 3, \dots n\$).

onde

i = indica a posição do Caminho Discretizado dentro de um Subdomínio de ordem k ;

k = indica a ordem do Subdomínio dentro do Domínio de Estudo.

Da equação (2.29), considerando o sistema de indexação “ (i,k) ”, resulta para a diferença de potencial magnético $\Delta\mathfrak{S}$, o qual é constante dentro do subdomínio de ordem k ,

$$\Delta\mathfrak{S}(k) = H(i,k) \cdot \Delta\theta(i,k) \cdot r(i,k) \quad (2.39)$$

Observando ainda a figura 2.4, que representa o Domínio de Estudo, pode ser concluído que os comprimentos dos caminhos magnéticos discretizados dentro de um subdomínio, representados genericamente por “ $\Delta l_{mag}(i,k)$ ”, são proporcionais às coordenadas radiais (raios) “ $r(i,k)$ ”, pois quanto maiores estes raios, ou seja, quanto mais distantes da fonte de corrente \vec{J} , maiores serão os comprimentos magnéticos “ $\Delta l_{mag}(i,k)$ ”. Resulta então,

$$\Delta l_{mag}(i,k) = K2(k) \cdot r(i,k) \quad (2.40)$$

onde “ $K2(k)$ ” é uma constante de proporcionalidade, válida dentro de cada subdomínio de ordem k .

Entrando com as equações (2.39) e (2.40) em (2.38), resulta

$$H(i,k) \cdot \Delta\theta(i,k) \cdot r(i,k) = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta W(i,k) \cdot K2(k) \cdot r(i,k)}{\mu(i,k) \cdot S_{mag}(i,k)}} = K1 \quad (2.41)$$

Esta equação (2.41) é igual a uma constante $K1$ que vale para todo o subdomínio de ordem k , pois trata-se da diferença de potencial magnético entre as duas Linhas Equipotenciais de F_{mm} que formam o subdomínio. Na equação (2.41), após efetuar uma racionalização nas grandezas constantes, resulta

$$\frac{H(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta\theta(i,k) \cdot r(i,k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{S_{mag}(i,k)}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta W(i,k) \cdot r(i,k)}{\mu(i,k)}} = K3 \quad (2.42)$$

Para efeito de simplificação, considerar-se-á que todas as áreas magnéticas dos caminhos elementares sejam iguais, ou seja,

$$S_{mag}(1,k) = S_{mag}(2,k) = \dots = S_{mag}(n,k) = S_{mag}(k)$$

onde

n = Número total de caminhos elementares discretizados dentro do Subdomínio k .

Ter-se-á, então,

$$\frac{H(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta\theta(i,k) \cdot r(i,k) = K4(k) \cdot \sqrt{\frac{\Delta W(i,k) \cdot r(i,k)}{\mu(i,k)}} = K5 \quad (2.43)$$

onde, $K1$, $K3$ e $K5$ representam valores constantes. A constante $K4(k)$ é dada por

$$K4(k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Smag(k)}}$$

Da equação (2.43) pode ser tirado que

$$\frac{\Delta W(1,k) \cdot r(1,k)}{\mu(1,k)} = \frac{\Delta W(2,k) \cdot r(2,k)}{\mu(2,k)} = \dots = \frac{\Delta W(n,k) \cdot r(n,k)}{\mu(n,k)} \quad (2.44)$$

Conforme pode ser visto, a energia $\Delta W(i,k)$, de cada elemento de caminho discretizado, dentro do subdomínio k , varia inversamente proporcional ao raio $r(i,k)$ e diretamente proporcional à permeabilidade $\mu(i,k)$. Ter-se-á, então, relações do tipo

$$\frac{\Delta W(1,k)}{\Delta W(i,k)} = \frac{r(i,k)}{r(1,k)} \cdot \frac{\mu(1,k)}{\mu(i,k)} \quad (2.45)$$

Portanto, considerando que as posições espaciais (coordenadas), situadas entre as duas Linhas de fronteira, serão obtidas através de interpolação e através das relações mostradas pelas equações (2.44) e (2.45) pode-se considerar que a energia elementar $\Delta W(i,k)$ ficará devidamente distribuída em toda a região do subdomínio, em função do termo “ $\mu(i,k)/r(i,k)$ ”.

Com as considerações feitas, através de interpolação entre as Linhas de fronteira Máxima e Mínima, obtém-se o seguinte:

$$\frac{H(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta\theta(i,k) \cdot r(i,k) = f\left(\sqrt{\frac{r(i,k)}{\mu(i,k)}}\right) \quad (2.46)$$

Para a Linha de fronteira Máxima,

$$\frac{H(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta ArcMáx(k) = \frac{H(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta\theta(i,k) \cdot Rmáx = f\left(\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n,k)}}\right) \quad (2.47)$$

e para a Linha de fronteira Mínima,

$$\frac{H(1,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta ArcMín(k) = \frac{H(1,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta\theta(i,k) \cdot Rmín = f\left(\sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1,k)}}\right) \quad (2.48)$$

onde, “ $H(n,k)$ ” é o campo magnético que corresponde à posição de “ $\Delta ArcMáx(k)$ ” e “ $H(1,k)$ ” corresponde à posição de “ $\Delta ArcMín(k)$ ”.

As equações para a interpolação serão:

$$\left[\frac{H(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta ArcMáx(k) - \frac{H(1,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta ArcMín(k) \right] \rightarrow \left(\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1,k)}} \right) \quad (2.49)$$

$$\left[\frac{H(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta ArcMáx(k) - \frac{H(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot \Delta Arc(i,k) \right] \rightarrow \left(\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{r(i,k)}{\mu(i,k)}} \right) \quad (2.50)$$

Os respectivos arcos originários dos deslocamentos angulares θ , serão:

$$\Delta ArcMáx(k) = ArcMáx(k) - ArcMín(k) \quad (2.51)$$

$$\Delta ArcMín(k) = ArcMín(k) - ArcMín(k) = 0 \quad (2.52)$$

$$\Delta Arc(i,k) = Arc(i,k) - ArcMín(k) \quad (2.53)$$

Resulta, então, para a equação da interpolação

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{H(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot (ArcMáx(k) - ArcMín(k))}{\frac{H(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot (ArcMáx(k) - ArcMín(k)) - \frac{H(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot (Arc(i,k) - ArcMín(k))} = \\ & = \frac{\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1,k)}}}{\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{r(i,k)}{\mu(i,k)}}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Fazendo algumas simplificações matemáticas, ter-se-á

$$\frac{H(i,k)}{H(n,k)} \cdot \frac{(Arc(i,k) - ArcMín(k))}{(ArcMáx(k) - ArcMín(k))} = \frac{\sqrt{\frac{r(i,k)}{\mu(i,k)}} - \sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1,k)}}}{\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1,k)}}} \quad (2.55)$$

Tendo em vista que para o caso de uma fonte \vec{J} filiforme, o raio $Rmín$ é puntiforme, conclui-se que, para este caso, pode-se considerar $Rmín=0$. Deste modo a equação de interpolação, para o cálculo das coordenadas dos pontos que formam a Linha Equipotencial de ordem k , será

$$Arc(i,k) = ArcMáx(k) \cdot \frac{H(n,k)}{H(i,k)} \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{r(i,k)}{\mu(i,k)}}}{\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n,k)}}} \right) \quad (2.56)$$

onde:

$$ArcMáx(k) = \theta(i,k) \cdot Rmáx \quad (2.57)$$

$$\text{ArcMín}(k) = \theta(i,k) \cdot R\text{mín} \quad (2.58)$$

$$\text{Arc}(i,k) = \theta(i,k) \cdot r(i,k) \quad (2.59)$$

Observando a equação (2.56) e considerando que para o caso de um condutor filiforme as Linhas Equipotenciais de Fmm devem resultar em linhas perfeitamente radiais, pode-se concluir que

$$\frac{H(n,k)}{H(i,k)} = \frac{\sqrt{r(i,k)}}{\sqrt{R\text{máx}}} \quad (2.60)$$

Com isto, obtém-se finalmente para a equação de interpolação, para o cálculo das coordenadas dos pontos que formam a Linha Equipotencial de ordem k ,

$$\text{Arc}(i,k) = \text{ArcMáx}(k) \cdot \frac{\sqrt{r(i,k)}}{\sqrt{R\text{máx}}} \cdot \left[\begin{array}{c} \sqrt{\mu(i,k)} \\ \sqrt{R\text{máx}} \\ \sqrt{\mu(n,k)} \end{array} \right] \quad (2.61)$$

2.5.1 Exemplo de cálculo das Linhas Equipotenciais de Fmm

Para facilitar o entendimento das equações obtidas, seja considerado o exemplo de domínio de estudo, conforme mostrado na figura 2.6, onde as Linhas Equipotenciais de Fmm são formadas em torno de um condutor filiforme. O material que circunda o condutor é o ar, tendo permeabilidade constante e igual a μ_0 .

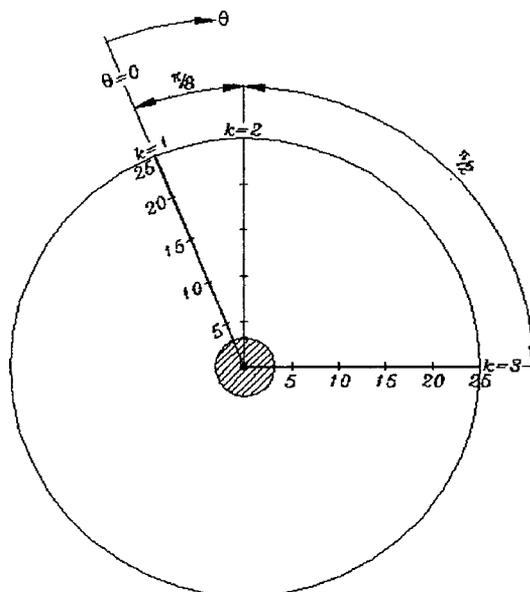


Figura 2.6 – Linhas Equipotenciais de Fmm em torno de um Condutor filiforme.

A solução para as coordenadas $r(i,k)$ e $Arc(i,k)$ das Linhas Equipotenciais de Fmm, em função do número de ordem “ k ” da Linha Equipotencial e da posição espacial “ i ” sobre a Linha k , conforme calculadas pela equação (2.61), será:

1) Para a Linha Equipotencial de Fmm $k=1$:

$$\theta(i,k) = 0 \text{ rad} \quad ; \quad R_{\text{máx}} = 25 \text{ mm} \quad ; \quad ArcMáx(k) = \theta(i,k) \cdot R_{\text{máx}} = 0 \cdot 25 = 0 \text{ mm}$$

$$Arc(i,k) = ArcMáx(k) \cdot \frac{\sqrt{r(i,k)}}{\sqrt{R_{\text{máx}}}} \cdot \left[\frac{\sqrt{\frac{r(i,k)}{\mu(i,k)}}}{\sqrt{\frac{R_{\text{máx}}}{\mu(n,k)}}} \right] = 0 \cdot \frac{\sqrt{r(i,k)}}{\sqrt{25}} \cdot \frac{\sqrt{r(i,k)}}{\sqrt{25}} = 0 \cdot \frac{r(i,k)}{25} = 0 \text{ mm}$$

Foi considerado $\mu(i,k) = \mu(n,k) = \mu_0$

i	$r(i,k)$ [mm]	$Arc(i,k)$ [mm]
1	5	0
2	10	0
3	15	0
4	20	0
5	25	0

2) Para a Linha Equipotencial de Fmm $k=2$:

$$\theta(i,k) = \frac{\pi}{8} \text{ rad} \quad ; \quad R_{\text{máx}} = 25 \text{ mm} \quad , \quad ArcMáx(k) = \theta(i,k) \cdot R_{\text{máx}} = \left(\frac{\pi}{8} \cdot 25\right) \text{ mm}$$

$$Arc(i,k) = ArcMáx(k) \cdot \frac{\sqrt{r(i,k)}}{\sqrt{R_{\text{máx}}}} \cdot \left[\frac{\sqrt{\frac{r(i,k)}{\mu(i,k)}}}{\sqrt{\frac{R_{\text{máx}}}{\mu(n,k)}}} \right] = \frac{\pi}{8} \cdot 25 \cdot \frac{r(i,k)}{25} = \frac{\pi}{8} \cdot r(i,k)$$

Foi considerado $\mu(i,k) = \mu(n,k) = \mu_0$

i	$r(i,k)$ [mm]	$Arc(i,k)$ [mm]
1	5	1.963495
2	10	3.926991
3	15	5.890486
4	20	7.853982
5	25	9.817477

3) Para a Linha Equipotencial de Fmm $k=3$:

$$\theta(i,k) = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{8} \text{ rad} \quad ; \quad R_{\text{máx}} = 25 \text{ mm}$$

$$ArcMáx(k) = \theta(i,k) \cdot R_{\text{máx}} = \left(\frac{5\pi}{8} \cdot 25\right) \text{ mm}$$

$$Arc(i,k) = ArcMáx(k) \cdot \frac{\sqrt{r(i,k)}}{\sqrt{R_{\text{máx}}}} \cdot \left[\frac{\sqrt{\mu(i,k)}}{\sqrt{\mu(n,k)}} \right] = \frac{5\pi}{8} \cdot 25 \cdot \frac{r(i,k)}{25} = \frac{5\pi}{8} \cdot r(i,k)$$

Foi considerado $\mu(i,k) = \mu(n,k) = \mu_0$

i	$r(i,k)$ [mm]	$Arc(i,k)$ [mm]
1	5	9.817477
2	10	19.634954
3	15	29.452431
4	20	39.269908
5	25	49.087385

2.6 DETERMINAÇÃO DAS LINHAS EQUIPOT. DE FMM PARA A COROA ESTATÓRICA DE MÁQUINA ELÉTRICA GIRANTE

A Coroa Estatórica das Máquinas Elétricas Girantes tem os polos que originam a Fmm e conseqüentemente o Fluxo Magnético, formados pelo “Rotacional” em torno dos condutores polares. Com isto as linhas de fronteira serão formadas por uma parte tangencial e outra parte radial. Sobre a linha de simetria radial da coroa, a qual se situa sobre o pico da onda dos Ampere-Condutores (\vec{J}), o fluxo magnético é totalmente tangencial. À medida que o fluxo vai contornando os condutores polares, vai mudando a sua trajetória de tangencial para radial, até que ao atingir a região dos dentes, torna-se totalmente radial. A figura (2.7) mostra o aspecto deste Domínio de estudo, o qual é formado por uma extensão de 90° elétricos ($\pi/2$ rad elétricos) desde a linha de simetria radial, no centro da coroa (pico da onda dos Ampere-Condutores), até a linha de simetria tangencial na região dos dentes. Este Domínio de Estudo está restrito a uma extensão de apenas 90° elétricos ($\pi/2$ rad elétricos), visto ser suficiente para definir toda a região da coroa estatórica, pois cada polo magnético é periódico em relação aos polos vizinhos e para a região abrangida por um dado polo existem duas metades perfeitamente simétricas e, portanto, anti-periódicas, ou seja, que são iguais mas “espelhadas”. Sendo assim, o trecho polar escolhido como Domínio de Estudo é suficiente para realizar o estudo sobre toda a região da Coroa Estatórica da Máquina.

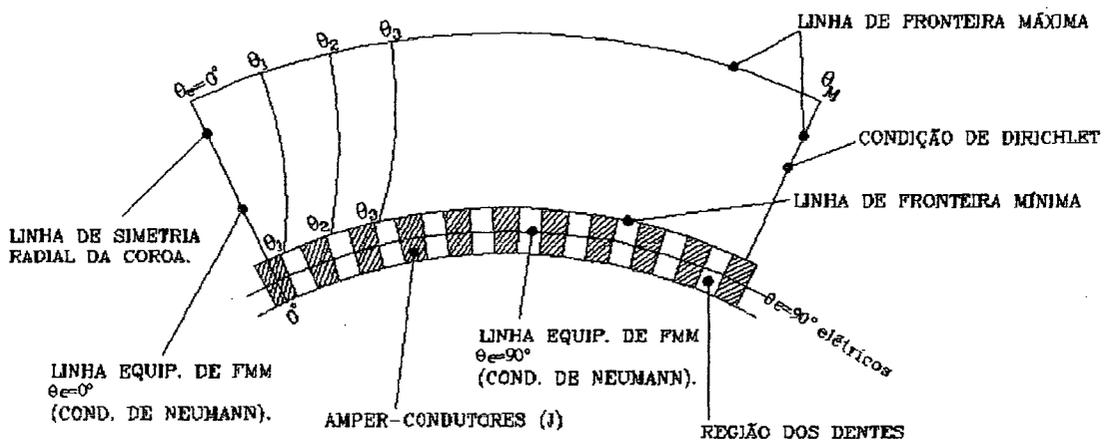


Figura 2.7 – Domínio de Estudo para a região da Coroa Estatórica de Máquina Elétrica Girante.

2.6.1 Região Tangencial das Linhas de Fronteira

De maneira semelhante ao que foi mostrado para o Domínio de Estudo formado pelo Condutor filiforme na seção 2.5, para a parte Tangencial do Domínio de Estudo da Coroa estatórica de Máquinas Elétricas Girantes, pode-se considerar o seguinte:

Da equação (2.27), considerando as indexações (i, k) , para cada caminho elementar do subdomínio de ordem k , ter-se-á

$$\Delta\mathfrak{F}(k) = H(i, k) \cdot \Delta l_{mag}(i, k)$$

Como neste caso os caminhos magnéticos $\Delta l_{mag}(i, k)$ não são perfeitamente tangenciais, será admitido o seguinte:

$$\Delta\mathfrak{F}(k) = H(i, k) \cdot \Delta l_{mag}(i, k) = K1(i, k) \cdot \Delta\theta(i, k) \cdot r(i, k)$$

ou seja, admite-se que para cada caminho elementar existe uma constante “ $K1(i, k)$ ” que faz com que o arco “ $\Delta\theta(i, k) \cdot r(i, k)$ ” seja proporcional à Fmm “ $\Delta\mathfrak{F}(k)$ ”.

Da mesma forma, também a exemplo do que foi feito para o condutor filiforme, será admitido uma constante “ $K2(k)$ ”, conforme foi definido na equação (2.40). Resulta, então, a seguinte equação que relaciona a energia “ $\Delta W(i, k)$ ” com as coordenadas polares, semelhantemente ao que foi obtido na equação (2.41),

$$K1(i, k) \cdot \Delta\theta(i, k) \cdot r(i, k) = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta W(i, k) \cdot K2(k) \cdot r(i, k)}{\mu(i, k) \cdot S_{mag}(i, k)}} = K3 \quad (2.62)$$

onde $K3$ representa um valor constante.

Fazendo todas as considerações, conforme foi mostrado na seção (2.5) para chegar à equação (2.54), resulta, então, neste caso, para a equação de interpolação:

$$\begin{aligned} & \frac{K1(n, k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot (ArcMáx(k) - ArcMín(k)) \\ & \frac{K1(n, k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot ((ArcMáx(k) - ArcMín(k))) - \frac{K1(i, k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot (Arc(i, k) - ArcMín(k)) = \\ & = \frac{\sqrt{\frac{R_{máx}}{\mu(n, k)}} - \sqrt{\frac{R_{mín}}{\mu(1, k)}}}{\sqrt{\frac{R_{máx}}{\mu(n, k)}} - \sqrt{\frac{r(i, k)}{\mu(i, k)}}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Após feitas todas as simplificações matemáticas a equação (2.63) será dada por

$$Arc(i, k) = \frac{Kl(n, k)}{Kl(i, k)} \cdot (ArcMáx(k) - ArcMín(k)) \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{r(i, k)}{\mu(i, k)}} - \sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1, k)}}}{\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n, k)}} - \sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1, k)}}} \right) + ArcMín(k)$$

Considerando para este caso um resultado semelhante ao que foi obtido para a relação mostrada pela equação (2.60) tem-se

$$\frac{Kl(n, k)}{Kl(i, k)} = \frac{\sqrt{r(i, k)}}{\sqrt{Rmáx}}$$

Resulta então, finalmente, para a equação de interpolação, para o cálculo das coordenadas dos pontos que formam a Linha Equipotencial de Fmm de ordem k

$$Arc(i, k) = \frac{\sqrt{r(i, k)}}{\sqrt{Rmáx}} \cdot (ArcMáx(k) - ArcMín(k)) \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{r(i, k)}{\mu(i, k)}} - \sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1, k)}}}{\sqrt{\frac{Rmáx}{\mu(n, k)}} - \sqrt{\frac{Rmín}{\mu(1, k)}}} \right) + ArcMín(k) \quad (2.64)$$

onde:

$$ArcMáx(k) = \theta máx(k) \cdot Rmáx \quad (2.65)$$

$$ArcMín(k) = \theta mín(k) \cdot Rmín \quad (2.66)$$

$$Arc(i, k) = \theta(i, k) \cdot r(i, k) \quad (2.67)$$

$\theta máx(k)$ = Ângulo espacial da Linha Equipotencial sobre a linha de fronteira Máxima.

$\theta mín(k)$ = Ângulo espacial da Linha Equipotencial sobre a linha de fronteira Mínima.

2.6.2 Região Radial das Linhas de Fronteira

Na região Radial a Linha de Fronteira Máxima torna-se uma Linha Radial (paralela à coordenada radial r), em função de o fluxo magnético ser Rotacional em relação aos Condutores Polares e existir pares de Polos que periodicamente preenchem todo o perímetro circunferencial da máquina. Com isto, haverá uma linha de simetria que coincide com o pico da onda de Fmm e que divide o fluxo radial em duas metades simétricas, marcando a fronteira entre os Rotacionais de dois polos de Condutores vizinhos (anti-periódicos). Esta Linha que delimita a Fronteira Radial entre os dois Rotacionais vizinhos,

é uma Condição de Dirichlet e por isto, uma condição singular, sendo portanto, a parte Radial da Linha de fronteira Máxima do Domínio de Estudo.

A Linha de Fronteira Mínima também tem uma parte Radial, visto que sobre esta Linha o fluxo magnético torna-se radial, ou seja, ao cruzar esta Linha o fluxo torna-se totalmente radial. Conforme será demonstrado em capítulo posterior, o Fluxo Radial que atravessa a Linha de Fronteira Mínima, em função do Ângulo Elétrico θ_e , é dado por

$$\Phi_g(\theta_e) = \int_0^{\theta_e} 1.5 \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen } \theta_e \cdot d\theta_e \quad (2.68)$$

onde o fator 1.5 corresponde a um sistema eletromagnético trifásico.

Na figura (2.7) podem ser vistas as partes Radiais das respectivas Linhas de Fronteira do Domínio de Estudo.

Para determinar a equação que relaciona a energia $\Delta W(i,k)$ com as coordenadas polares $(\theta(i,k), r(i,k))$, uma dedução semelhante a que já foi feita para a região Tangencial seria necessária. Para obter mais rapidamente esta solução, em função do resultado já obtido com a equação (2.41), considerando que os eixos das coordenadas são sempre ortogonais, basta permutar as variáveis, ou seja, trocar

$$(\Delta\theta(i,k) \cdot r(i,k)) \rightarrow \text{por } \Delta r(i,k)$$

$$\text{e } (\theta(i,k) \cdot r(i,k)) \rightarrow \text{por } r(i,k)$$

e vice-versa. De acordo com a equação (2.62) resulta, então

$$K1(i,k) \cdot \Delta r(i,k) = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta W(i,k) \cdot K2(k) \cdot \theta(i,k) \cdot r(i,k)}{\mu(i,k) \cdot Smag(i,k)}} = K3 \quad (2.69)$$

onde existe uma constante “ $K1(i,k)$ ” para cada caminho elementar que faz com que o raio “ $\Delta r(i,k)$ ” seja proporcional à Fmm “ $\Delta \mathfrak{F}(k)$ ”. Neste caso a constante “ $K2(k)$ ”, a exemplo do que foi feito na equação (2.40), representa a proporcionalidade entre os comprimentos dos caminhos magnéticos e os arcos “ $\theta(i,k) \cdot r(i,k)$ ”. Aqui também “ $K3$ ” representa um valor constante.

Na equação (2.69), rearranjando os termos, resulta

$$\Delta r(i,k) \cdot \frac{K1(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Smag(i,k)}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta W(i,k) \cdot \theta(i,k) \cdot r(i,k)}{\mu(i,k)}} = K5 \quad (2.70)$$

Para efeito de simplificação, considerar-se-á que todas as áreas magnéticas dos caminhos elementares sejam iguais, ou seja,

$$Smag(1,k) = Smag(2,k) = \dots = Smag(n,k) = Smag(k)$$

Onde $K3$ e $K5$ representam valores constantes. A constante $K4(k)$ é dada por

$$K4(k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Smag(k)}}$$

Resulta, então

$$\Delta r(i,k) \cdot \frac{K1(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} = K4(k) \cdot \sqrt{\frac{\Delta W(i,k) \cdot \theta(i,k) \cdot r(i,k)}{\mu(i,k)}} = K5 \quad (2.71)$$

Da equação (2.71) pode ser tirado que

$$\frac{\Delta W(1,k) \cdot \theta(1,k) \cdot r(1,k)}{\mu(1,k)} = \frac{\Delta W(2,k) \cdot \theta(2,k) \cdot r(2,k)}{\mu(2,k)} = \dots = \frac{\Delta W(n,k) \cdot \theta(n,k) \cdot r(n,k)}{\mu(n,k)} \quad (2.72)$$

Conforme pode ser visto, a energia $\Delta W(i,k)$, de cada elemento de caminho discretizado, dentro do subdomínio k , varia inversamente proporcional ao arco $(\theta(i,k) \cdot r(i,k))$ e diretamente proporcional à permeabilidade $\mu(i,k)$. Ter-se-á, então, relações do tipo

$$\frac{\Delta W(1,k)}{\Delta W(i,k)} = \frac{\theta(i,k) \cdot r(i,k)}{\theta(1,k) \cdot r(1,k)} \cdot \frac{\mu(1,k)}{\mu(i,k)} \quad (2.73)$$

Portanto, considerando que as posições espaciais intermediárias, situadas entre as duas Linhas de fronteira, serão obtidas através de interpolação e através das relações mostradas pelas equações (2.72) e (2.73) pode-se considerar que a energia elementar $\Delta W(i,k)$ ficará devidamente distribuída em toda a região do subdomínio, em função do termo “ $\mu(i,k)/(\theta(i,k) \cdot r(i,k))$ ”.

Com as considerações feitas, através de interpolação entre as Linhas de fronteira Máxima e Mínima, obtém-se o seguinte:

$$\Delta r(i,k) \cdot \frac{K1(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} = f \left(\sqrt{\frac{\theta(i,k) \cdot r(i,k)}{\mu(i,k)}} \right) \quad (2.74)$$

Para a Linha de fronteira Máxima,

$$\Delta rMáx(k) \cdot \frac{K1(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} = f \left(\sqrt{\frac{\theta_M \cdot rMáx(k)}{\mu(n,k)}} \right) \quad (2.75)$$

e para a Linha de fronteira Mínima,

$$\Delta rMín(k) \cdot \frac{K1(1,k)}{\sqrt{K2(k)}} = f \left(\sqrt{\frac{\theta_{mín}(k) \cdot Rmín}{\mu(1,k)}} \right) \quad (2.76)$$

onde:

$$\theta_M = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{2P} \quad (2.77)$$

θ_M = Ângulo geométrico onde ocorre a mudança de direção da Linha de Fronteira Máxima de Tangencial para Radial.

$$\theta_{\min}(k) = \frac{\theta_e(k) \cdot 2}{2P} \quad (2.78)$$

$\theta_{\min}(k)$ = Ângulo geométrico sobre a Linha de fronteira Mínima, correspondente à Linha Equipotencial de ordem k .

$\theta_e(k)$ = Ângulo Elétrico correspondente à Linha Equipotencial de Fmm de ordem k .

$2P$ = Número de Polos da Máquina Elétrica Girante.

n = Número total de elementos (caminhos finitos) discretizados dentro do subdomínio de ordem k .

As equações para a interpolação serão:

$$\left[\Delta r_{Máx}(k) \cdot \frac{K1(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} - \Delta r_{Mín}(k) \cdot \frac{K1(1,k)}{\sqrt{K2(k)}} \right] \rightarrow \left(\sqrt{\frac{\theta_M \cdot r_{Máx}(k)}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{\theta_{\min}(k) \cdot R_{\min}}{\mu(1,k)}} \right) \quad (2.79)$$

$$\left[\Delta r_{Máx}(k) \cdot \frac{K1(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} - \Delta r(i,k) \cdot \frac{K1(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} \right] \rightarrow \left(\sqrt{\frac{\theta_M \cdot r_{Máx}(k)}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{\theta(i,k) \cdot r(i,k)}{\mu(i,k)}} \right) \quad (2.80)$$

Fazendo,

$$ArcMáx(k) = \theta_M \cdot r_{Máx}(k) \quad (2.81)$$

$$ArcMín(k) = \theta_{\min}(k) \cdot R_{\min} \quad (2.82)$$

$$Arc(i,k) = \theta(i,k) \cdot r(i,k) \quad (2.83)$$

e sendo

$$\Delta r_{Máx}(k) = r_{Máx}(k) - R_{\min} \quad (2.84)$$

$$\Delta r_{Mín}(k) = R_{\min} - R_{\min} = 0 \quad (2.85)$$

$$\Delta r(i,k) = r(i,k) - R_{\min} \quad (2.86)$$

resulta, então, para a equação de interpolação

$$\frac{\frac{K1(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot (rMáx(k) - Rmín)}{\frac{K1(n,k)}{\sqrt{K2(k)}} \cdot (rMáx(k) - Rmín) - \frac{K1(i,k)}{\sqrt{K2(k)}} (r(i,k) - Rmín)} = \frac{\sqrt{\frac{ArcMáx(k)}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{ArcMín(k)}{\mu(1,k)}}}{\sqrt{\frac{ArcMáx(k)}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{Arc(i,k)}{\mu(i,k)}}} \quad (2.87)$$

Por comparação com o caso do condutor puntiforme e com o caso da região tangencial das linhas de fronteira e, ainda, considerando a permutação das variáveis coordenadas, tendo em vista a ortogonalidade dos eixos destas coordenadas, pode-se concluir que

$$r(i,k) = \frac{K1(n,k)}{K1(i,k)} \cdot (rMáx(k) - Rmín) \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{Arc(i,k)}{\mu(i,k)}} - \sqrt{\frac{ArcMín(k)}{\mu(1,k)}}}{\sqrt{\frac{ArcMáx(k)}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{ArcMín(k)}{\mu(1,k)}}} \right) + Rmín$$

Por semelhança com a relação obtida na equação (2.60), pode-se fazer

$$\frac{K1(n,k)}{K1(i,k)} = \frac{\sqrt{Arc(i,k)}}{\sqrt{ArcMáx(k)}}$$

Com isto a equação para o cálculo das coordenadas dos pontos que compõem as Linhas Equipotenciais de Fmm na região Radial, será:

$$r(i,k) = \frac{\sqrt{Arc(i,k)}}{\sqrt{ArcMáx(k)}} \cdot (rMáx(k) - Rmín) \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{Arc(i,k)}{\mu(i,k)}} - \sqrt{\frac{ArcMín(k)}{\mu(1,k)}}}{\sqrt{\frac{ArcMáx(k)}{\mu(n,k)}} - \sqrt{\frac{ArcMín(k)}{\mu(1,k)}}} \right) + Rmín$$

(2.88)

CAPÍTULO 3 – DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO DE CAMINHOS FINITOS

3.1 FLUXOS IMPOSTOS NAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM

3.1.1 Condições Singulares (Fluxos Tangenciais e fluxos Radiais)

A partir da equação (A1.47), da seção 6 do Anexo 1, a qual considera que a onda trifásica resultante de Fmm seja perfeitamente senoidal, resulta,

$$\mathfrak{F}_g = \mathfrak{F}_a + \mathfrak{F}_b + \mathfrak{F}_c = \frac{3}{2} \cdot \mathfrak{F}_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\theta_e - \omega t) \quad (3.1)$$

Sobre a linha central da coroa (linha de simetria radial), a qual coincide com o eixo de máxima amplitude dos Ampere-condutores (\vec{J}), conforme pode ser visto na figura A1.1 do Anexo 1, considerando que esta posição corresponde a $\theta_e = 0$ graus elétricos, se $\omega t = 0$ graus, ter-se-á então

$$\mathfrak{F}_g = \frac{3}{2} \cdot \mathfrak{F}_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(0 - 0) = 0 \quad (3.2)$$

Isto implica que sobre esta linha não existe fluxo radial, ou seja, todo o fluxo que está cruzando a mesma é **Fluxo tangencial**. A importância deste fato está em que, então, sobre esta linha tem-se uma **Condição Singular**, visto que, constitui-se numa Linha Equipotencial que divide exatamente a região entre dois polos magnéticos, ou seja, divide duas regiões **periódicas**.

Já para $\theta_e = 90$ graus elétricos, mantendo-se $\omega t = 0$ graus, resulta

$$\mathfrak{F}_g = \frac{3}{2} \cdot \mathfrak{F}_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(90 - 0) = \frac{3}{2} \cdot \mathfrak{F}_{m\acute{a}x} \quad (3.3)$$

que nos mostra que sobre a linha radial central dos dentes, a qual coincide com o eixo central da onda de Fmm, conforme pode ser visto na figura A1.1 (Anexo 1), a onda de Fmm está no seu valor máximo. A importância desta linha está em que o **fluxo magnético** sobre a mesma é **totalmente radial**, ou seja, não cruza esta linha, originando outra **Condição Singular**. Esta linha separa um dado polo magnético em duas metades simétricas, ou seja, divide duas regiões **Anti-periódicas**. Pode-se também dizer que esta linha que separa um dado polo magnético em duas metades simétricas, divide dois

“Rotacionais” vizinhos, os quais são formados pelo par de polos da onda dos “Ampere-Condutores” (\vec{J}) que juntos formam o polo magnético.

3.1.2 Fluxo Imposto na Linha Central da Coroa ($\theta_e = 0$ graus elétricos)

Conforme já mostrado, sobre esta Linha Equipotencial o fluxo radial (fluxo girante) é nulo. O fluxo que existe, totalmente tangencial, considerando as equações das correntes (A1.26), (A1.27) e (A1.28), do Anexo 1, para $\omega t = 0$ rad, é definido pela onda dos Ampere-Condutores (\vec{J}) resultante, a qual tem o eixo máximo, para o instante considerado, coincidindo com o eixo da fase “a”. Resulta, então

$$\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (3.4)$$

donde, passando para a forma integral e aplicando o teorema de Stokes, tem-se

$$U = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.5)$$

Considerando que a onda da tensão de alimentação por fase é dada por

$$U = U_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t - 0) \quad (3.6)$$

resulta,

$$d\Phi = -\frac{1}{N} \cdot \int U_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t - 0) \cdot dt \quad (3.7)$$

$$\Phi = \frac{1}{N} \cdot \frac{U_{m\acute{a}x}}{\omega} \cdot \text{cos}(\omega t - 0) \quad (3.8)$$

O fluxo Φ_a é formado por duas partes simétricas, pois é formado por dois rotacionais vizinhos, os quais dão origem a uma fronteira de separação que corresponde à linha de simetria no centro do polo magnético (condição de Dirichlet). Sendo assim o fluxo magnético que atravessa a linha radial central da coroa, a qual corresponde à posição do pico máximo da onda dos Ampere-Condutores, pertence a somente um dos rotacionais simétricos, e portanto corresponde à metade de Φ_a . Resulta, então

$$\frac{\Phi_a}{2} = \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \text{cos}(\omega t - 0) \quad (3.9)$$

onde

$$\Phi_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{U_{m\acute{a}x}}{\omega} \quad (3.10)$$

Sendo,

$$U_{ef} = \frac{U_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}}$$

e

$$\omega = 2\pi f$$

resulta,

$$\Phi_{m\acute{a}x} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{ef}}{4\pi f \cdot Nt \cdot fw1} \quad (3.11)$$

onde, “ Nt ” é o número total de espiras em série por fase, “ f ” é a frequência elétrica e “ $fw1$ ” é o fator de bobinagem para a harmônica fundamental. O produto “ $(Nt \cdot fw1)$ ” representa o número efetivo de espiras em série por fase, considerando somente a harmônica fundamental.

Para $\omega t = 0$ graus na equação (3.9), resulta

$$\frac{\Phi_a}{2} = \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \cos(0 - 0) = \Phi_{m\acute{a}x} \quad (3.12)$$

Portanto, a equação (3.11) representa o fluxo totalmente tangencial que é imposto na Linha Equipotencial de Fmm sobre a linha central da coroa, onde tem-se a condição de Neumann. Esta imposição de fluxo está de acordo com a lei de Faraday.

3.1.3 Fluxo Imposto na Linha Central Tangencial dos Ampere-Condutores (\vec{J})

O fluxo girante (radial), resultante da interação das três fases, será obtido de forma semelhante a que já foi demonstrada para as respectivas curvas de Fmm, em função dos ângulos espaciais “ θ ” (ou θ_e) e ângulos temporais “ ωt ”. Admitindo que os efeitos da não linearidade da curva BxH do material do núcleo ferro-magnético (saturação) não interfira na forma de onda das induções e conseqüentemente dos respectivos fluxos, com base na equação (3.1), resulta para a equação do perfil da curva do fluxo magnético girante, imposto sobre a linha central tangencial dos Ampere-Condutores (\vec{J}),

$$\varphi_g = \frac{3}{2} \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\theta_e - \omega t) \quad (3.13)$$

Para $\omega t = 0$ graus, resulta

$$\varphi_g = \frac{3}{2} \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen} \theta_e \quad (3.14)$$

A equação (3.14) fornece o valor da curva de distribuição do fluxo radial sobre toda a linha central tangencial dos dentes (linha central dos Ampere-Condutores) da máquina. Sobre esta linha, visto que o fluxo é totalmente radial e portanto ortogonal à linha, tem-se também uma condição singular.

O fluxo magnético total que atravessa esta linha tangencial central, sobre os Ampere-Condutores (\bar{J}), desde $\theta_e = 0$ graus elétricos até um valor genérico " θ_e ", será

$$\Phi_g(\theta_e) = \frac{3}{2} \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \int_0^{\theta_e} \text{sen } \theta_e \cdot d\theta_e = \frac{3}{2} \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot (1 - \cos \theta_e) \quad (3.15)$$

3.1.4 Fluxos Impostos sobre Linhas Equipotenciais intermediárias entre $\theta_e = 0$ e $\theta_e = 90$ graus elétricos

Até aqui ficaram definidas duas condições para os fluxos impostos:

A primeira sobre o centro radial da coroa, onde ocorre a linha equipotencial para $\theta_e = 0$ graus elétricos. Esta condição está representada pela equação (3.12) da seção 3.1.2. A segunda condição trata da distribuição do fluxo sobre a linha central tangencial dos Ampere-Condutores (\bar{J}), sendo representada pela equação (3.15) da seção 3.1.3. A partir das duas condições anteriores, é possível definir os fluxos magnéticos em posições espaciais genéricas, desde $\theta_e = 0$ graus até $\theta_e = 90$ graus elétricos. Considerando então, que todos os fluxos definidos ($\Phi_{m\acute{a}x}$ e Φ_g) sejam perfeitamente senoidais, resulta para uma dada Linha Equipotencial de Fmm situada em uma posição genérica " θ_e ":

$$\Phi(\theta_e) = \Phi_{m\acute{a}x} + \left(\Phi_g(\theta_e) - \int_0^{\theta_e} \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen } \theta_e \cdot d\theta_e \right) - \int_0^{\theta_e} \varphi_g(\theta_e) \cdot d\theta_e \quad (3.16)$$

onde o último termo da direita da equação, se refere ao fluxo radial que já migrou para os dentes antes de atingir a posição espacial θ_e . Resulta, então

$$\Phi(\theta_e) = \Phi_{m\acute{a}x} + \left[\frac{3}{2} \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot (1 - \cos \theta_e) - \Phi_{m\acute{a}x} \cdot (1 - \cos \theta_e) \right] - \frac{3}{2} \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot (1 - \cos \theta_e) \quad (3.17)$$

$$\Phi(\theta_e) = \Phi_{m\acute{a}x} - \Phi_{m\acute{a}x} \cdot (1 - \cos \theta_e) \quad (3.18)$$

e finalmente,

$$\Phi(\theta_e) = \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \cos \theta_e \quad (3.19)$$

Este fluxo que inicia sua trajetória, dentro do domínio de estudo de metade de um passo polar, desde o centro radial da coroa ($\theta_e=0$ graus elétricos), onde é monofásico, máximo temporal e totalmente tangencial, vai gradativamente passando para trifásico girante (radial). Quando atinge a linha central tangencial dos Ampere-Condutores, à $\theta_e=90$ graus elétricos, torna-se totalmente radial e corresponde ao fluxo que atravessa os dentes em direção ao entreferro da máquina.

3.1.5 Fluxo Radial entre as duas Linhas Equipotenciais de Fmm que formam o Subdomínio de ordem k

O fluxo que atravessa as Linhas Equipotenciais de Fmm na região da coroa é fluxo tangencial, mas que gradativamente, desde $\theta_e=0$ graus até $\theta_e=90$ graus elétricos, vai se tornando radial. Por isto, entre as duas Linhas Equipotenciais de Fmm de ordem " k " e " $(k+1)$ ", que formam o subdomínio de ordem " k ", existirá sempre um valor de fluxo radial que estará migrando para os dentes da máquina elétrica girante. Desta forma, com base na equação (3.14), a qual fornece a forma da curva do fluxo magnético radial em função do ângulo elétrico θ_e , resulta para o fluxo radial que migra para os dentes a partir do subdomínio de ordem " k ",

$$\Phi_R = \int_{\theta_e(k)}^{\theta_e(k+1)} \varphi_g(\theta_e) \cdot d\theta_e \quad (3.20)$$

$$\Phi_R = \int_{\theta_e(k)}^{\theta_e(k+1)} \frac{3}{2} \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen } \theta_e \cdot d\theta_e \quad (3.21)$$

onde:

$$\theta_e(k) = \Delta\theta_e \cdot (k - 1) \quad (3.22)$$

$$\Delta\theta_e = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{nL} \quad (3.23)$$

nL = Número total de Linhas Equipotenciais de Fmm do domínio de estudo.

Portanto, da equação (3.21), resulta

$$\Phi_R = \frac{3}{2} \cdot \Phi_{m\acute{a}x} \cdot [\cos(\theta_e(k)) - \cos(\theta_e(k + 1))] \quad (3.24)$$

3.2 DIFUSÃO DOS CAMPOS E INDUÇÕES MAGNÉTICAS PELO MÉTODO DOS CAMINHOS FINITOS

3.2.1 Introdução

Para projetar com mais precisão um dispositivo eletromagnético é necessário calcular a distribuição (difusão) dos Campos e Induções Magnéticas. Para este fim muito já tem sido feito, principalmente utilizando a técnica de Elementos Finitos. O método de Caminhos Finitos, proposto neste trabalho, tem por finalidade permitir melhorar a precisão dos programas convencionais para o cálculo de máquinas elétricas, através do cálculo da difusão dos campos e induções magnéticas, do circuito magnético das máquinas. Com o cálculo da difusão dos campos e induções magnéticas, sobre todo o domínio de estudo, ao invés do uso de valores médios, conforme é feito nos programas convencionais, ter-se-á uma melhoria significativa na precisão dos resultados obtidos, sobretudo para as grandezas diretamente relacionadas com o circuito magnético da máquina, tais como o fator de potência e a corrente magnetizante. Constitui-se então, num método alternativo para o cálculo da difusão dos campos e induções magnéticas que apresenta algumas vantagens, entre as quais o grau de simplicidade e necessidade de relativamente pouca quantidade de memória de computador. As principais vantagens serão destacadas na seção 3.3.

Um dispositivo eletromagnético para ser calculado dentro desta técnica, precisa ser modelado, a fim de que sejam criados os caminhos por onde irão existir os campos e induções magnéticas. O modelo utilizado consiste em dividir o Domínio de Estudo em Subdomínios, os quais por sua vez serão subdivididos em camadas uniformes que dão origem aos Caminhos Magnéticos Finitos. Cada Subdomínio é formado por duas Linhas Equipotenciais seqüenciais, ou seja, cada par de Linhas Equipotenciais imediatamente próximas formam um Subdomínio. Desta forma todo o Domínio de Estudo será varrido, criando-se uma malha formada por Subdomínios e Caminhos Finitos. Os Subdomínios são identificados pela variável “ k ” e os Caminhos Finitos pela variável “ i ”, ou seja, “ k ” indica a ordem do Subdomínio dentro do Domínio de Estudo e “ i ” indica a posição do Caminho Finito discretizado dentro do Subdomínio de ordem k .

Um Subdomínio, portanto, é uma subregião do Domínio de Estudo que tem como fronteiras as duas Linhas Equipotenciais de Fmm imediatamente próximas e as Linhas de

Fronteira Máxima e Mínima. Estas Linhas de Fronteira estão definidas na seção 2.3 (cap.2). Assim sendo, o fluxo magnético imposto cruza perpendicularmente as Linhas Equipotenciais de Fmm e tangencia as Linhas de Fronteira.

O dispositivo eletromagnético, objeto de estudo neste trabalho, é a região da coroa estatórica de máquina elétrica girante, conforme definido na seção 2.2 (cap.2).

3.2.2 Fmm da coroa do estator (armadura) de máquina elétrica girante

Nas coroas das máquinas elétricas girantes a difusão dos campos e induções magnéticas não pode ser considerada uniforme, em virtude das diferenças nos comprimentos dos caminhos magnéticos possíveis, imaginando a coroa dividida em diversos caminhos superpostos, tal como os caminhos finitos discretizados dentro de um subdomínio, e da natureza da difusão das permeabilidades magnéticas pelo fato de os materiais ferromagnéticos originarem curvas não lineares de $B \times H$.

Portanto, é necessário considerar estes caminhos discretos possíveis e as permeabilidades magnéticas correspondentes a cada um, a fim de determinar mais precisamente a Fmm necessária na coroa, para fazer existir ali o fluxo magnético. Desta forma, a cada caminho discretizado dentro de um subdomínio, conforme ilustrado na figura 3.1, deverá haver um valor de Campo \vec{H} e Indução \vec{B} correspondentes. A relação entre \vec{B} e \vec{H} é dada pela equação de passagem, a qual corresponde à curva $B \times H$ do material ferromagnético,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.25)$$

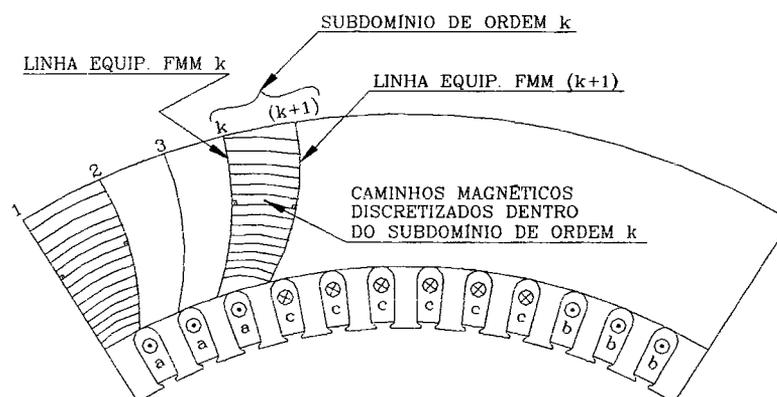


Figura 3.1 – Coroa dividida em Subdomínios, os quais, por sua vez, são subdivididos em Caminhos Finitos.

Considerar-se-á que os materiais ferromagnéticos sejam isotrópicos, tratando a permeabilidade como grandeza escalar. Desta forma cada \vec{B} estará em fase com seu correspondente \vec{H} .

Seja considerada a coroa dividida em “ nL ” Subdomínios, os quais por sua vez, subdivididos em “ n ” caminhos magnéticos discretos, conforme a figura 3.1, sendo que, para efeito de simplificação, cada caminho, dentro do Subdomínio de ordem k , tendo a mesma largura “ $\Delta h(k)$ ” e a fonte de Fmm para o trecho deste subdomínio dada por “ $\mathfrak{F}_{cl}(k)$ ”. Os caminhos magnéticos no subdomínio k são dados por “ $lc(i,k)$ ” e o pacote de chapas ferromagnéticas (profundidade) dado por “ Pac ”, sendo considerado ainda o fator “ Kfe ” para o grau de empilhamento deste pacote. Resulta, então, para as relutâncias magnéticas dos caminhos, discretizados dentro do subdomínio de ordem k ,

$$\mathfrak{R}(i,k) = \frac{lc(i,k)}{\mu(i,k) \cdot \Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe} \quad (3.26)$$

onde:

$$k = 1, 2, 3, \dots, nL$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

A Fmm “ $\mathfrak{F}_{cl}(k)$ ”, em função do fluxo “ $\Phi_{cl}(k)$ ” que deve existir no Subdomínio “ k ” da coroa e das relutâncias dos caminhos magnéticos discretos, será:

$$\mathfrak{F}_{cl}(k) = \mathfrak{R}_{eq}(k) \cdot \Phi_{cl}(k) \quad (3.27)$$

onde:

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{eq}(k)} = \frac{1}{\mathfrak{R}(1,k)} + \frac{1}{\mathfrak{R}(2,k)} + \frac{1}{\mathfrak{R}(3,k)} \dots + \frac{1}{\mathfrak{R}(n,k)} \quad (3.28)$$

Resulta, finalmente

$$\mathfrak{F}_{cl}(k) = \frac{\Phi_{cl}(k)}{\Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe \cdot \left[\frac{\mu(1,k)}{lc(1,k)} + \frac{\mu(2,k)}{lc(2,k)} + \frac{\mu(3,k)}{lc(3,k)} + \dots + \frac{\mu(n,k)}{lc(n,k)} \right]} \quad (3.29)$$

O circuito magnético para o subdomínio de ordem k , dentro do domínio de estudo, é conforme mostrado na figura 3.2. A solução completa para a Fmm de todo o domínio de estudo será dada pela soma dos valores parciais das Fmm’s de todos os subdomínios que compõem o sistema.

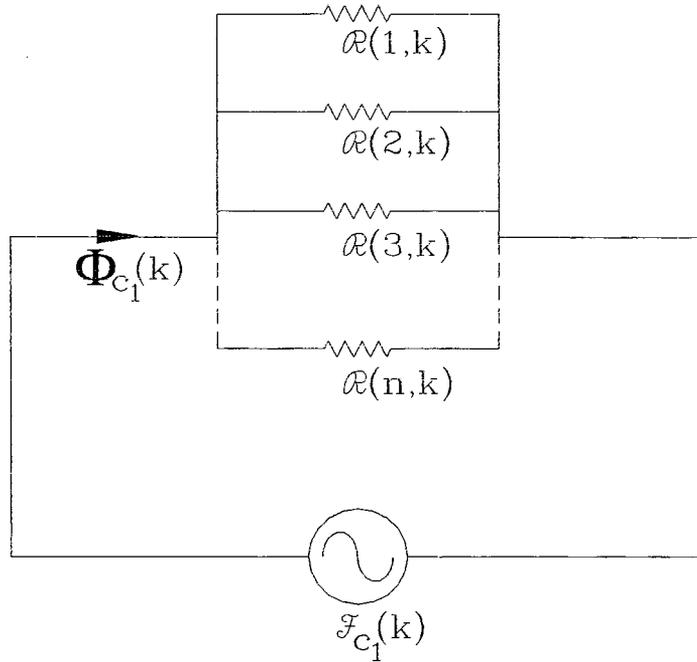


Figura 3.2 – Circuito Magnético equivalente para o Subdomínio de ordem k , da Coroa.

3.2.3 Solução Básica para a Difusão do Campo H , Indução Magnética B e Fmm através do Método de Caminhos Finitos

Seja considerada a equação de Maxwell (Lei de Ampère) na forma local,

$$\text{Rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (3.30)$$

que passando para a forma integral,

$$\iint_{Sf} \text{Rot}\vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_{Sf} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.31)$$

e aplicando o teorema de Stokes, resulta

$$\oint_{L(Sf)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{Sf} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.32)$$

Sendo \vec{H} colinear com $d\vec{l}$ e o módulo $|\vec{H}|$ constante em todo o comprimento $L(Sf)$, resulta,

$$H \cdot \oint_{L(Sf)} dl = I_{\text{TOTAL NA ÁREA } Sf} \quad (3.33)$$

Para o trecho da coroa estatórica, sendo os comprimentos magnéticos dados por “ $lc(i,k)$ ” e os respectivos campos magnéticos “ $H(i,k)$ ”, com a Fmm deste trecho dada por $\mathfrak{F}_{ei}(k)$, resulta

$$H(i,k) \cdot \int_{lc(i,k)} dl = \mathfrak{F}_{ei}(k) \quad (3.34)$$

donde, para a Fmm no subdomínio k , ter-se-á,

$$\mathfrak{F}_{ei}(k) = H(i,k) \cdot lc(i,k) \quad (3.35)$$

onde:

$$k = 1, 2, 3, \dots, nL$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Portanto, a equação (3.35) dá a distribuição do Campo \vec{H} em função dos caminhos discretizados dentro do subdomínio k e em função da Fmm deste subdomínio.

A distribuição da indução \vec{B} em função do campo \vec{H} é dada pela equação de passagem (3.25), ou seja, é dada pela curva $B \times H$ do material do meio. A difusão da Indução \vec{B} , portanto, corresponde à imagem da curva $B \times H$ refletida para dentro da região correspondente à coroa do motor. Isto é explicado porque a sucessão de valores de \vec{B} , dentro de um perfil de distribuição, segue a lei física imposta pela curva $B \times H$, ou seja, se a indução \vec{B} deve variar com a mudança de posição no espaço, em função do campo magnético \vec{H} , esta variação será de acordo com o perfil da curva $B \times H$ do material que compõe o meio. Desta forma, estar-se-á respeitando a lei de difusão de \vec{B} em função de \vec{H} .

3.2.4 Fluxo Magnético no Subdomínio k

Considerando o perfil de induções dado por $\vec{B}(1,k)$, $\vec{B}(2,k)$, $\vec{B}(3,k)$, ... $\vec{B}(n,k)$, correspondentes respectivamente aos caminhos magnéticos elementares $lc(1,k)$, $lc(2,k)$, $lc(3,k)$, ... $lc(n,k)$, tendo cada elemento discretizado uma seção magnética de “ $\Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe$ ”, resulta para o fluxo magnético total no subdomínio k :

$$\Phi_{ei}(k) = \int_{S(k)=n \cdot (\Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \int_{S(i,k)=(\Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe)} \vec{B}(i,k) \cdot d\vec{S} \quad (3.36)$$

Considerando ainda que em cada tubo de fluxo a indução elementar $\vec{B}(i,k)$ é colinear com $d\vec{S}$ e que o módulo $|\vec{B}(i,k)|$ é sempre constante em toda a extensão da área “ $\Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe$ ” do tubo, resulta

$$\Phi_{el}(k) = \sum_{i=1}^n B(i,k) \cdot \int_{S(i,k)=\Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe} dS = \sum_{i=1}^n B(i,k) \cdot \Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe \quad (3.37)$$

Portanto, cada caminho discretizado dentro do subdomínio k origina um tubo de fluxo magnético, conforme mostrado nas equações (3.36) e (3.37). O somatório dos fluxos de cada um destes tubos origina o fluxo magnético total correspondente ao subdomínio.

3.2.5 Rotina Iterativa Básica para determinação da Difusão do Campo H , Indução magnética B e Fmm do Subdomínio de ordem k pelo Método de Caminhos Finitos

Considerando tudo o que já foi mencionado, sendo a distribuição do campo \vec{H} , uma função linear e sendo a distribuição da correspondente indução \vec{B} uma função não linear dada pela equação de passagem do respectivo meio material,

$$\vec{B} = \mu(H)\vec{H} \quad (3.38)$$

e considerando ainda como condição imposta os fluxos magnéticos conforme determinados na seção 3.1, resulta para o cálculo da difusão dos Campos \vec{H} ’s, Induções \vec{B} ’s e Fmm do Subdomínio de ordem k , a seguinte rotina:

1º) Admitir um valor inicial para o Campo Magnético Mínimo “ $\vec{H}(n,k)$ ” correspondente ao caminho magnético elementar máximo “ $lc(n,k)$ ”. Após resolver iterativamente as equações da rotina, o método faz convergir para a solução.

$$\vec{H}(n,k) \rightarrow lc(n,k)$$

2º) Calcular toda a distribuição dos \vec{H} ’s a partir do valor do $\vec{H}(n,k)$ admitido:

Da equação (3.35), resulta

$$\mathfrak{F}_{el}(k) = H(1,k) \cdot lc(1,k) = H(2,k) \cdot lc(2,k) = H(3,k) \cdot lc(3,k) = \dots = H(n,k) \cdot lc(n,k)$$

(3.39)

donde,

$$H(i, k) = \frac{H(n, k) \cdot lc(n, k)}{lc(i, k)} \quad (3.40)$$

onde:

$$k = 1, 2, 3, \dots, nL$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

3º) Determinar a difusão das Induções \vec{B} 's em função dos respectivos \vec{H} 's, através da equação de passagem do correspondente meio material:

$$B(i, k) = f[H(i, k)] \rightarrow \text{Da curva BxH do meio material.}$$

onde:

$$k = 1, 2, 3, \dots, nL$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

4º) Análise do Fluxo magnético " $\Phi_{cl}(k)$ " imposto no Subdomínio k :

Da equação (3.37), resulta

$$\Phi_{cl}(k)_{calc} = \sum_{i=1}^n B(i, k) \cdot \Delta h(k) \cdot Pac \cdot Kfe \quad (3.41)$$

onde:

$$k = 1, 2, 3, \dots, nL$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Delta\Phi(k) = \left| \frac{\Phi_{cl}(k) - \Phi_{cl}(k)_{calc}}{\Phi_{cl}(k)} \right| \quad (3.42)$$

onde:

$\Phi_{cl}(k)$ = Fluxo Magnético Imposto no Subdomínio de ordem k , conforme determinado na seção 3.1.

$\Phi_{cl}(k)_{calc}$ = Fluxo Magnético Calculado no Subdomínio de ordem k em função dos valores obtidos para os $\vec{B}(i, k)$, conforme dado pela equação (3.41).

5º) Análise do valor de " $\Delta\Phi(k)$ " calculado na equação (3.42):

- Se $\Delta\Phi(k) \leq \text{Erro Admissível}$, então a solução está obtida, ou seja, a difusão de " \vec{B} " e " \vec{H} " está calculada, com o Fluxo Magnético Imposto " $\Phi_{cl}(k)$ " respeitado.

- Se $\Delta\Phi(k) > \text{Erro Admissível}$, então alterar o valor de “ $\vec{H}(n,k)$ ” e voltar para o item 2°).

3.2.6 Solução da difusão do Campo H , Indução B e Fmm para todo o Domínio de Estudo

A solução completa para todo o Domínio de Estudo é obtida com o conjunto de soluções parciais calculadas para os Subdomínios individualmente. Assim sendo, ter-se-á as difusões dos Campos \vec{H} 's e Induções \vec{B} 's calculadas para todo o Domínio de Estudo. A Fmm total “ \mathfrak{J}_{clT} ”, para todo o Domínio de Estudo, será obtida através da soma de todos os valores parciais “ $\mathfrak{J}_{cl}(k)$ ” de cada Subdomínio. Resulta, então

$$\mathfrak{J}_{clT} = \sum_{k=1}^{nL} \mathfrak{J}_{cl}(k) \quad (3.43)$$

3.2.7 Exemplo de cálculo

Para facilitar a compreensão do método de cálculo de caminhos finitos, exposto anteriormente, seja considerado o exemplo do capítulo 2, seção 2.5.1, que considera um domínio formado por um condutor filiforme envolto por ar. Neste exemplo, o qual está ilustrado na figura 2.6, haviam sido calculadas as coordenadas das Linhas Equipotenciais de Fmm, respectivamente de ordem $k=1$, $k=2$ e $k=3$. Para a demonstração do método de Caminhos Finitos será considerado o Subdomínio de ordem $k=1$, formado pelas Linhas Equipotenciais de Fmm de ordens $k=1$ e $k=2$. Resulta então:

1) Coordenadas das Linhas Equipotenciais ($r(i,k)$, $Arc(i,k)$) e Comprimentos magnéticos ($lc(i,k)$):

i	$k=1$		$k=2$		$lc(i,k)$ [mm]
	$r(i,k)$ [mm]	$Arc(i,k)$ [mm]	$r(i,k)$ [mm]	$Arc(i,k)$ [mm]	
1	5	0	5	1.963495	1.963495
2	10	0	10	3.926991	3.926991
3	15	0	15	5.890486	5.890486
4	20	0	20	7.853982	7.853982
5	25	0	25	9.817477	9.817477

Onde:

$$lc(i, k) = \sqrt{[Arc(i, k+1) - Arc(i, k)]^2 + [r(i, k+1) - r(i, k)]^2}$$

2) Fluxo Imposto:

Admitindo, para este exemplo, um condutor filiforme com 1 metro de comprimento, alimentado por uma tensão senoidal de 0,1V – 60Hz. Será considerado também, conforme definido no exemplo da seção 2.5.1, que o fluxo magnético ocorre dentro da região delimitada pelo raio $R_{m\acute{a}x}=25\text{mm}$. O fluxo imposto será dado por

$$\Phi_{imp} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{2\pi f \cdot N} = \frac{\sqrt{2} \cdot 0.1}{2\pi \cdot 60 \cdot 1} = 0.0003751\text{Wb}$$

3) Seguindo a rotina de cálculo da seção 3.2.5 resulta:

Sendo:

$$k=1$$

$n=5$ caminhos discretizados;

$$\Delta h(1)=5\text{mm}$$

$$Pac=1000\text{mm (1 metro)}$$

$$K_{fe}=1$$

$$\text{Erro Admissível}=0.0000001$$

1ª Iteração:

1º) Valor inicial do campo magnético mínimo $H(n, k)$:

$$H(5,1)=1000\text{ A/m (Valor atribuído como valor inicial).}$$

Corresponde ao comprimento magnético máximo $lc(n, k)$:

$$lc(5,1)=9.817477\text{mm}$$

2º) Distribuição dos Campos Magnéticos:

$$H(i,1) = \frac{H(5,1) \cdot lc(5,1)}{lc(i,1)} = \frac{1000 \cdot 9.817477}{lc(i,1)}$$

Resulta, então

$$H(1,1)=5000\text{ A/m}$$

$$H(2,1)=2500\text{ A/m}$$

$$H(3,1) = 1667 \text{ A/m}$$

$$H(4,1) = 1250 \text{ A/m}$$

$$H(5,1) = 1000 \text{ A/m}$$

3º) Distribuição das Induções Magnéticas:

$$B(i,1) = f[H(i,1)]$$

A função acima é obtida da curva $B \times H$ do meio material. Sendo o meio material formado por ar, resulta

$$B(i,1) = \mu_0 \cdot H(i,1) = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot H(i,1)$$

Resulta, então

$$B(1,1) = 0.006283 \text{ T}$$

$$B(2,1) = 0.003142 \text{ T}$$

$$B(3,1) = 0.002095 \text{ T}$$

$$B(4,1) = 0.001571 \text{ T}$$

$$B(5,1) = 0.001257 \text{ T}$$

4º) Fluxo Magnético imposto no subdomínio:

$$\Phi_{cl}(k)_{calc} = \sum_{i=1}^5 B(i,1) \cdot \Delta h(i) \cdot Pac \cdot Kfe = \sum_{i=1}^5 B(i,1) \cdot (5 \cdot 1000 \cdot 1) \cdot 10^{-6}$$

Efetuando o cálculo resulta

$$\Phi_{cl}(1)_{calc} = 0.00007174 \text{ Wb}$$

$$\Delta\Phi(1) = \left| \frac{\Phi_{imp} - \Phi_{cl}(1)_{calc}}{\Phi_{imp}} \right| = \left| \frac{0.0003751 - 0.00007174}{0.0003751} \right| = 0.809$$

5º) Análise do valor de $\Delta\Phi(1)$:

Sendo $\Delta\Phi(1) = 0.809 > 0.01$ (Erro Admissível), alterar o valor de $H(5,1)$. Fazer

$$H(5,1) = H(5,1) \cdot (1 + \Delta\Phi(1)) = 1000 \cdot (1 + 0.809) = 1809 \text{ A/m}$$

e voltar para o item 2º).

Para efeito de simplificação, as demais iterações serão somente anotadas na tabela a seguir.

Iteração Número	$H(5,1)$ [A/m]	$\Phi_{e1}(1)_{calc}$ [Wb]	$\Delta\Phi(1)$ [p.u.]
1	1000	0.00007174	0.809
2	1809	0.0001298	0.654
3	2992	0.0002146	0.428
4	4273	0.0003065	0.1828
5	5054	0.0003625	0.0335
6	5223	0.0003747	0.00117
7	5229.0	0.00037509	0.00002066
8	5229.11	0.0003750998	0.0000005332
9	5229.113	0.00037510016	0.0000004306
10	5229.1107	0.000375099994	0.0000000160

Como na 10^a iteração tem-se a condição $\Delta\Phi(1) = 0.0000000160 < 0.0000001$ (Erro Admissível), a solução para a distribuição dos Campos e Induções Magnéticas foi obtida. Os resultados, em função das posições espaciais no Subdomínio $k=1$, são:

i	$H(i,1)$ [A/m]	$B(i,1)$ [Wb]
1	26145.5588	0.032855478
2	13072.7761	0.016427735
3	8715.1848	0.010951824
4	6536.3880	0.0082138675
5	5229.1107	0.0065710943

3.3 VANTAGENS DO USO DAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM E MÉTODO DE CAMINHOS FINITOS

A principal vantagem que encorajou a realização deste trabalho, de forma a contribuir com o contexto do estado da arte, é que sua rotina de cálculo pode ser preparada facilmente para funcionar dentro das rotinas convencionais de cálculo de máquinas elétricas girantes ou outros dispositivos eletromagnéticos, para calcular a distribuição dos Campos e Induções magnéticas, as Fmm's em cada região, as Correntes, as Perdas no Ferro de forma distribuída (discretizada), Ainda outras vantagens que podem ser destacadas, observadas ou concluídas de maneira preditiva, a respeito do uso das Linhas Equipotenciais de Fmm e do Método de Caminhos Finitos, são:

- Permite calcular cada Subdomínio de forma independente;
- É possível calcular somente uma região desejada (Subdomínio), independente do resto do sistema (Domínio). Basta para isto somente definir as Linhas Equipotenciais de Fmm que delimitam esta região.
- É possível calcular a Fmm necessária em cada trecho desejado, bem como a energia magnética e as perdas correspondentes;
- Mais simples e mais fácil de ser aplicado;
- Necessita pouca memória para a solução;
- Com este método as rotinas iterativas são facilmente convergentes;
- Permite trabalhar com curvas $B \times H$ (de materiais) bastante completas, ou seja, com todos os contornos e inflexões, já que não tem problemas de convergência iterativa, tal como pode ocorrer com o processo iterativo Newton-Raphson;

- Este método permite um novo enfoque para os fenômenos envolvidos, sobretudo do ponto de vista da Força Magnetomotriz (Fmm). Permite fazer uma associação direta dos esquemas de bobinagem das máquinas elétricas e suas correspondentes curvas (diagramas) de Ampère-Condutores (\vec{J}) e Força Magnetomotriz, com o correspondente Domínio de Estudo. Faz a solução diretamente a partir da equação

$$\text{Rot}\vec{H} = \vec{J}$$

associando com a equação

$$\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

em função da imposição de fluxo, para os casos de corrente alternada.

Para os casos estáticos, a solução é obtida através da imposição da Força Magnetomotriz Total, tendo em vista que, neste caso, a Corrente é conhecida e portanto define a fonte \vec{J} .

- As Linhas Equipotenciais de Fmm criando os Subdomínios, permitem reduzir o Domínio de Estudo ao nível destes Subdomínios, os quais podem ser solucionados, para a difusão do Campo \vec{H} , Indução \vec{B} e Fmm, de forma independente das demais regiões (Subdomínios) do Domínio. Esta solução de \vec{H} , \vec{B} e Fmm, utilizando as Linhas Equipotenciais de Fmm, pode ser obtida através do Método de Caminhos Finitos, tratado neste trabalho, ou até mesmo através do Método de Elementos Finitos.

- Para calcular de forma tridimensional (3D) basta definir as Linhas Equipotenciais de Fmm (LE \mathfrak{F}), correspondentes a cada profundidade (camada) desejada, de acordo com a geometria e fonte \vec{J} encontradas em cada profundidade. Após, todos os valores obtidos em cada plano de profundidade podem ser associados através de interpolação, compondo toda a região volumétrica envolvida. Pode-se dizer que na hipótese tridimensional ter-se-á “Planos Equipotenciais de Fmm” definindo as regiões com igual potencial magnético, ao invés de somente Linhas Equipotenciais. Assim sendo este método pode ser transformado em 3D.

3.4 PROGRAMA PARA DETERMINAÇÃO DAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE FMM

3.4.1 Introdução

No Anexo 2 está apresentado, em forma de fluxograma, o programa LEMEG.BAS (Linhas Equipotenciais de Máquinas Elétricas Girantes). Este programa, feito em linguagem BASIC (Quick Basic), cria as Linhas Equipotenciais de Fmm, o conjunto dos Subdomínios que compõem o Domínio de Estudo e os correspondentes comprimentos dos caminhos magnéticos de cada subdomínio. Os resultados deste programa, os quais serão armazenados em um arquivo, serão os dados de entrada para o programa Solver que soluciona a distribuição dos campos e induções magnéticas nas regiões compreendidas entre as Linhas Equipotenciais de Fmm.

3.4.2 Descrição do programa

O programa, conforme mostrado no fluxograma do Anexo 2, faz o cálculo das Linhas Equipotenciais de Fmm de acordo com as equações (2.64) e (2.88) demonstradas no capítulo 2, seção 2.6. Este programa calcula as Linhas Equipotenciais de Fmm de ordem “ k ”, forma os Subdomínios entre as Linhas Equipotenciais imediatamente próximas e determina os comprimentos dos caminhos magnéticos elementares “ $lc(j,k)$ ” dentro de cada subdomínio.

O cálculo das Linhas Equipotenciais de Fmm de ordem “ k ” compreende determinar as coordenadas polares ($Arc(i,k)$, $r(i,k)$) de uma sucessão de pontos espaciais pertencentes a esta Linha Equipotencial.

O conjunto dos Subdomínios forma o Domínio de Estudo, o qual, para este programa, corresponde à Coroa do Estator de Máquina Elétrica Girante. Os Caminhos Magnéticos elementares são calculados dentro de cada Subdomínio, ou seja, entre as duas Linhas Equipotenciais de Fmm que formam o Subdomínio. Estes Caminhos Magnéticos elementares são obtidos através de uma discretização da região espacial correspondente ao Subdomínio, formando os Caminhos Finitos dentro deste Subdomínio. Estes Caminhos

Finitos são calculados em Módulo e Direção, através das coordenadas das extremidades de cada caminho. Estas coordenadas formam os pontos espaciais $P1(i,k)$ e $P2(i,k)$, ou seja,

$$P1(i,k) = (Arc1(i,k) , r1(i,k))$$

e

$$P2(i,k) = (Arc2(i,k) , r2(i,k)).$$

Os comprimentos dos Caminhos Magnéticos Finitos, calculados em Módulo e direção, permitem que, posteriormente, a partir do programa solver (**Anexo 3**), sejam calculadas vetorialmente as distribuições dos campos e Induções Magnéticas.

Portanto, no **Anexo 2** está apresentado o fluxograma do programa LEMEG.BAS (Linhas Equipotenciais de Fmm de Máquinas Elétricas Girantes), o qual corresponde à descrição apresentada.

3.5 PROGRAMA PARA O CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO, INDUÇÃO MAGNÉTICA E FMM NO DOMÍNIO DE ESTUDO DA COROA ESTATÓRICA DE MÁQUINA ELÉTRICA GIRANTE, ATRAVÉS DO MÉTODO DE CAMINHOS FINITOS

3.5.1 Introdução

No Anexo 3 está apresentado, em forma de fluxograma, o programa CFMEG.BAS (Método de Caminhos Finitos para Máquinas Elétricas Girantes). Este programa, feito em linguagem BASIC (Quick Basic), soluciona a difusão do Campo \vec{H} , Indução Magnética \vec{B} e Fmm, no espaço do domínio de estudo formado pela coroa estatórica de máquina elétrica girante. Os dados de entrada para este programa são obtidos através do arquivo formado com os dados de saída do programa do Anexo 2.

3.5.2 Descrição do programa

O programa, conforme mostrado no fluxograma do Anexo 3, calcula a difusão dos Campos, Induções Magnéticas e Fmm's através do Método de Caminhos Finitos, conforme demonstrado nas seções 3.1, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.6.

Os dados de entrada são obtidos a partir das Linhas Equipotenciais de Fmm, dos correspondentes Subdomínios formados e do conjunto de Caminhos Magnéticos Finitos de cada Subdomínio, fornecidos pelo programa LEMEG.BAS, do Anexo 2.

Os cálculos são efetuados sobre cada Subdomínio individualmente e independentemente. A soma do conjunto de soluções de todos os Subdomínios corresponde à solução completa de todo o Domínio de Estudo, que neste caso, corresponde à Coroa Estatórica de Máquina Elétrica Girante.

Sobre cada Subdomínio é imposto um Fluxo Magnético, conforme demonstrado na seção 3.1, cuja difusão no espaço deste Subdomínio é solucionada pelo método de caminhos finitos. Os respectivos fluxos magnéticos impostos são calculados com base na

lei de Faraday e com base na distribuição dos campos magnéticos em máquinas elétricas girantes trifásicas.

O programa considera os comprimentos dos caminhos finitos de cada elemento, dentro de cada Subdomínio, como sendo os comprimentos magnéticos de cada trecho elementar. Cada caminho Finito elementar é composto de maneira que seja, na posição em que se encontra, a menor distância entre as duas Linhas Equipotenciais imediatamente próximas que definem os seus extremos. Sendo assim, considerando uma quantidade suficientemente grande de Linhas Equipotenciais de Fmm, conferindo ao sistema uma proximidade relativamente pequena entre cada par de Linhas Equipotenciais imediatamente próximas, pode-se dizer que os caminhos finitos elementares serão muito proximamente perpendiculares às correspondentes Linhas Equipotenciais. Isto está de acordo com o fato de que o campo \vec{H} é sempre perpendicular à superfície onde o potencial magnético “ V_m ” é constante, ou seja, o perfil de vetores \vec{H} é sempre perpendicular às Linhas Equipotenciais de Fmm, cujo potencial magnético é constante e igual a “ V_m ”, conforme demonstrado na seção 2.4 (cap.2).

Cada caminho finito elementar é definido por dois pontos espaciais e cada ponto definido por um par de coordenadas espaciais ($Arc(i,k)$, $r(i,k)$). Adicionalmente, ainda, cada caminho finito elementar está indexado por uma variável “ k ” que corresponde ao subdomínio ao qual pertence e uma variável “ j ” que corresponde à posição espacial ocupada dentro do subdomínio. Sendo assim os campos magnéticos têm as direções dadas pelos caminhos finitos elementares. Se for considerado que o material ferromagnético que compõe o Domínio de Estudo, seja isotrópico, as induções magnéticas estarão sempre em fase com os respectivos campos. Desta forma, o cálculo dos Campos e Induções Magnéticas, corresponde à distribuição vetorial destas grandezas.

Portanto, no **Anexo 3** está apresentado o fluxograma do programa CFMEG.BAS (Método de Caminhos Finitos para Máquinas Elétricas Girantes), o qual corresponde à descrição apresentada.

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E CONCLUSÕES

4.1 ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS DE CAMINHOS FINITOS E ELEMENTOS FINITOS

4.1.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados, em forma de gráficos, os resultados comparativos entre as soluções obtidas com os métodos de Caminhos Finitos e Elementos Finitos. Para a solução com o método de Caminhos Finitos foi utilizado o programa composto das rotinas “LEMEG.BAS” e “CFMEG.BAS”, mostradas respectivamente nos Anexos 2 e 3. Já para a solução por Elementos Finitos foi utilizado o programa “EFCAD” desenvolvido no GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos, EEL / UFSC).

A finalidade básica deste estudo comparativo é avaliar o método de Caminhos Finitos, proposto neste trabalho, usando o programa “EFCAD”, de Elementos Finitos, como referência. Para realizar a comparação foram utilizados os resultados dos cálculos da difusão das Induções Magnéticas, nas coroas estatóricas, de dois motores de indução de 2 e 4 Polos. Os resultados destes cálculos, conforme foram obtidos pelos métodos de Caminhos Finitos e Elementos Finitos, foram plotados nos gráficos conforme mostrados nas seções 4.1.2 e 4.1.3, respectivamente dos motores de 2 e 4 Polos.

Nos gráficos comparativos apresentados, a solução através do método de Caminhos Finitos é referenciada pelo termo “CFMEG” e para a solução pelo método de Elementos Finitos, pelo termo “EFCAD”. As soluções apresentadas através dos gráficos, correspondem às Induções Magnéticas obtidas sobre linhas tangenciais na coroa estatórica, com raios que correspondem às posições de 1/4, 1/2 e 3/4 da altura total da coroa.

Para a solução do Domínio de estudo foram considerados um total de 20 Linhas Equipotenciais de Fmm, com 60 pontos geométricos formando cada linha. Com as Linhas Equipotenciais de Fmm foram formados 19 Subdomínios, onde cada Subdomínio discretizado com 30 Caminhos Finitos elementares. Com isto foram usados um total de 570 tubos de fluxo elementares, sendo 30 tubos em cada Subdomínio. O computador usado nas soluções foi um PC Laptop TOSHIBA T3600CT - Processador 80486 – 12MB RAM.

4.1.2 Resultados com o Motor de Indução de 2 Polos

Conforme pode ser visto nos gráficos comparativos, os dois métodos (CFMEG e EFCAD) apresentam resultados semelhantes. Estes resultados seguem a distribuição da curva $B \times H$ com a sua não linearidade, ou seja, o nível de saturação em cada ponto espacial do domínio de estudo depende da relação de passagem ($B = \mu H$) do meio material.

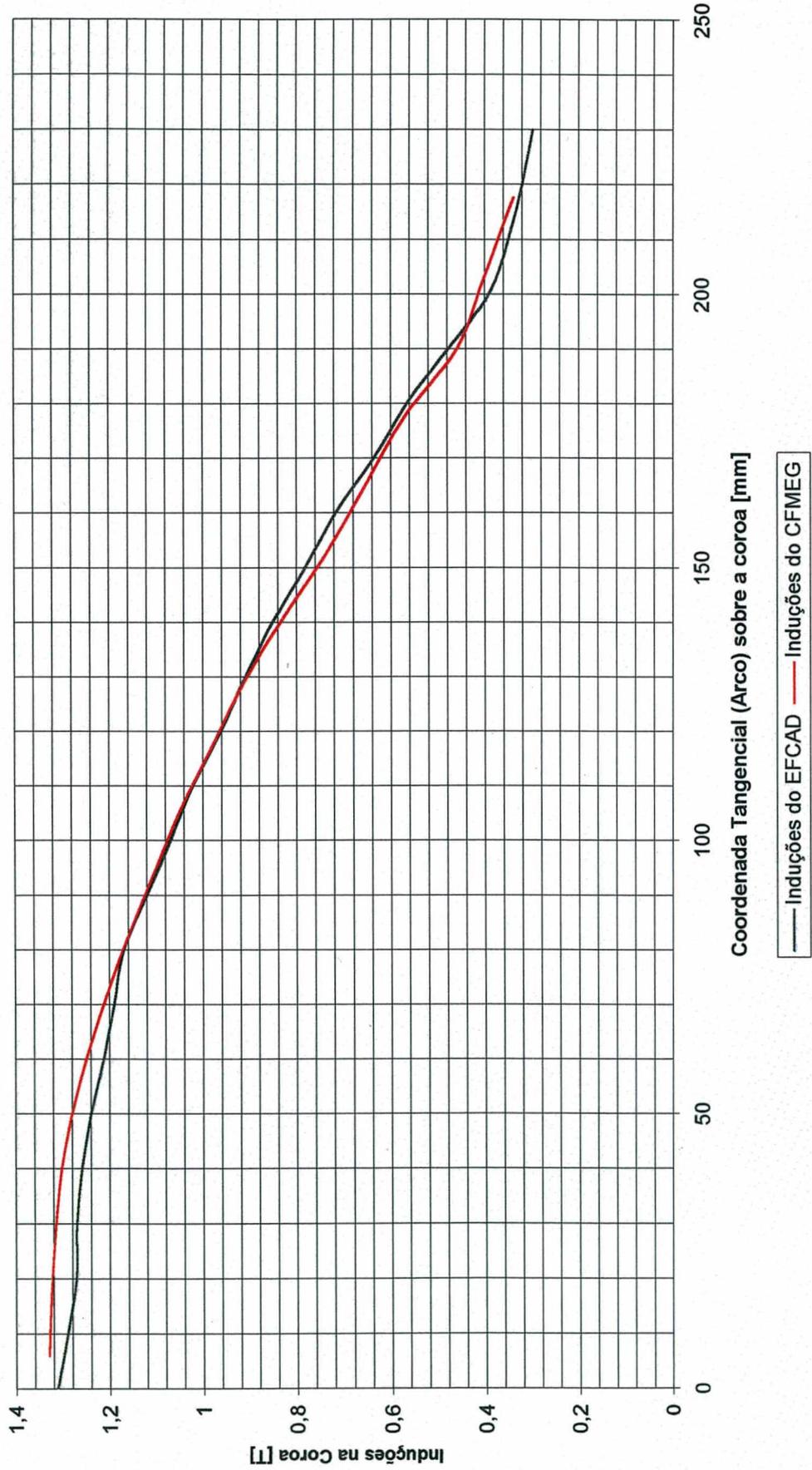
O programa em linguagem Basic desenvolvido para calcular, através do método de Caminhos finitos é relativamente simples, requerendo um total de 85kB de memória RAM para ser alocado (43kB para a rotina LEMEG e 42kB para a rotina CFMEG). O arquivo temporário "LEMEG.TMP", usado para alocar os resultados da rotina "LEMEG", necessitou de 7kB de memória.

O tempo total de processamento, com o programa de Caminhos Finitos, usado para este Motor de 2 Polos, foi de 11 segundos (PC Laptop 80486 12MB RAM). É importante comentar que este programa foi feito em linguagem Basic e que o processamento com esta linguagem é bastante lento se comparado com outras linguagens tais como Fortran ou C++. Por exemplo, em linguagem Fortran a velocidade de processamento chega a ser da ordem de 20 vezes mais rápida.

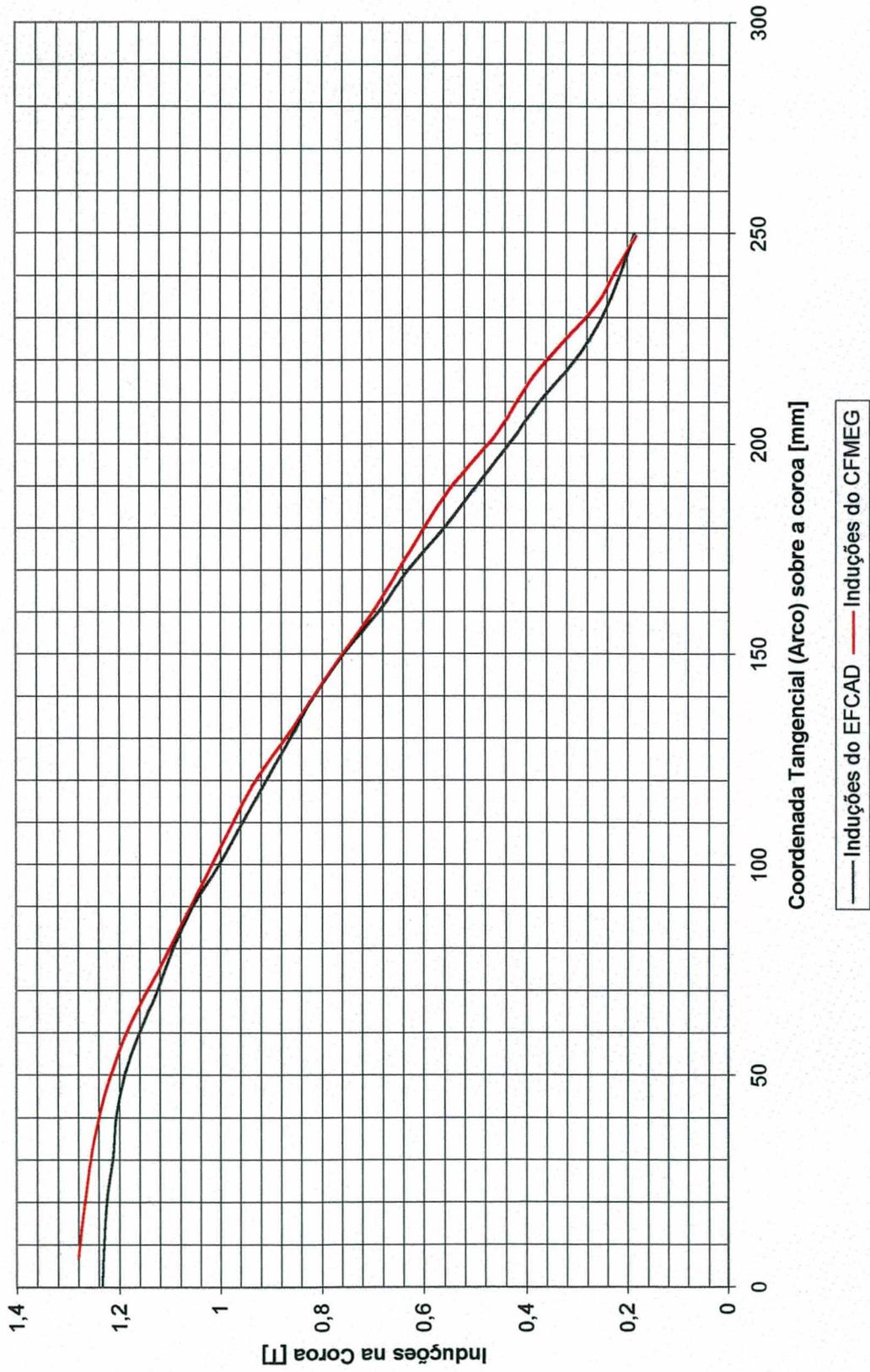
A diferença média do cálculo por Caminhos Finitos (CFMEG) relativamente ao método de Elementos Finitos (EFCAD), para este caso, foi de aproximadamente +4.5%. Um erro cometido no método de Caminhos Finitos, conforme foi usado, se deve a que os fluxos impostos sobre as Linhas Equipotenciais de Fmm deveriam ter descontada a parcela correspondente à dispersão nas cabeças de bobinas do motor. Com este erro obtém-se induções maiores do que as que seriam corretas, pois os fluxos impostos são maiores. Também alguma diferença entre os métodos, pode ser devido a que as curvas $B \times H$ do material ferromagnético (arquivos), dos dois métodos, não são exatamente iguais.

Os dados básicos deste motor de 2 polos são: 100 cv (73.6 kW), Carcaça 250 (IEC), 60Hz, 440V, Enrolamento Concêntrico camada dupla, Ligação Triângulo (Série), IP54, Classe B. A seguir podem ser vistos os gráficos comparativos correspondentes ao Motor de 2 Polos, onde o primeiro gráfico corresponde às Induções Magnéticas sobre uma linha tangencial, na região da coroa estatórica, com raio 148.2175mm, o segundo gráfico às Induções Magnéticas sobre uma linha tangencial com raio 162.145mm e o terceiro às Induções Magnéticas sobre uma linha tangencial com raio 176.0725mm.

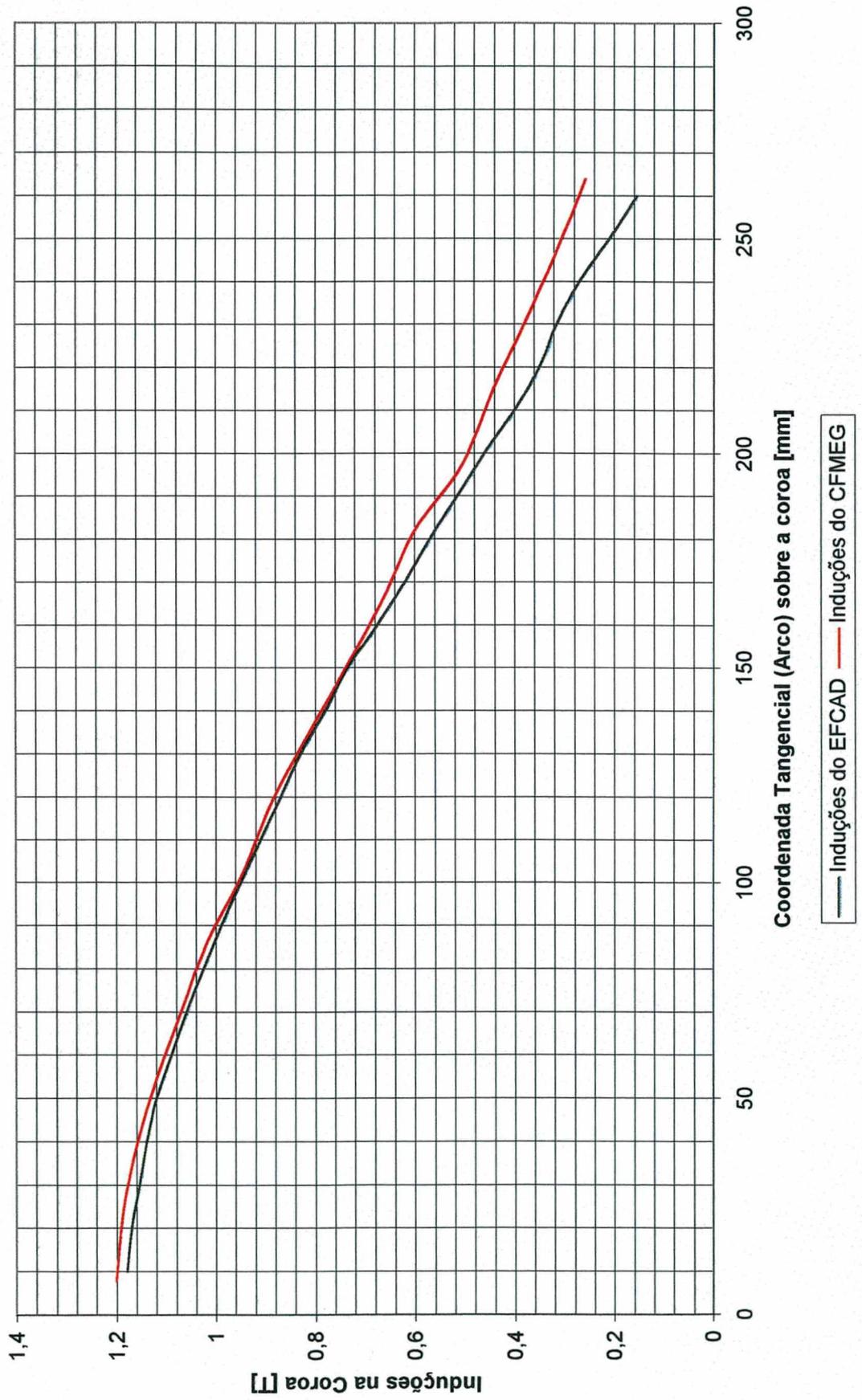
Comparativo entre as Induções do CFMEG e do EFCAD sobre a linha tangencial de raio 148.2175 mm



Comparativo entre as Induções do CFMEG e do EFCAD sobre a linha tangencial de raio 162.145 mm



Comparativo entre as Induções do CFMEG e do EFCAD sobre a linha tangencial de raio 176.0725 mm



4.1.3 Resultados com o Motor de Indução de 4 Polos

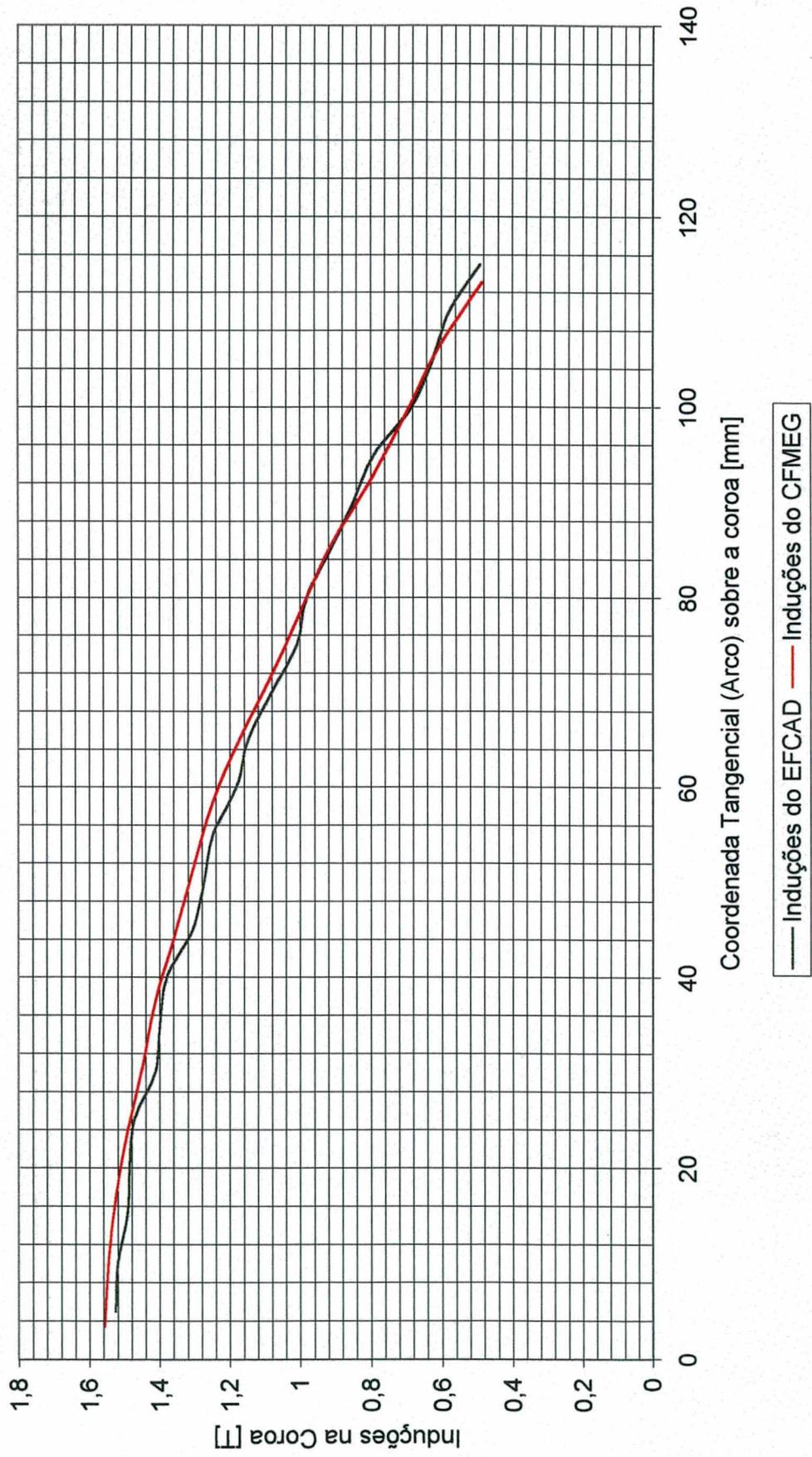
Para o Motor de 4 Polos o tempo de processamento, para o cálculo do método de Caminhos Finitos (CFMEG), foi de aproximadamente 53 segundos (PC Laptop 80486 12MB RAM). Neste caso, se comparado ao caso anterior com o Motor de 2 Polos, o nível de saturação foi maior, porque as induções calculadas foram maiores. Como consequência disto, o tempo de processamento ficou relativamente maior. Vale comentar novamente que os tempos de processamento seriam significativamente reduzidos se o programa de cálculo fosse em linguagem Fortran ou C++.

A diferença média do cálculo por Caminhos Finitos (CFMEG) relativamente ao de Elementos Finitos (EFCAD), neste caso, foi de aproximadamente 5.8%. Pode ser observado, nos gráficos comparativos, que os dois métodos apresentam curvas com mesma tendência, ou seja, curvas bastante semelhantes.

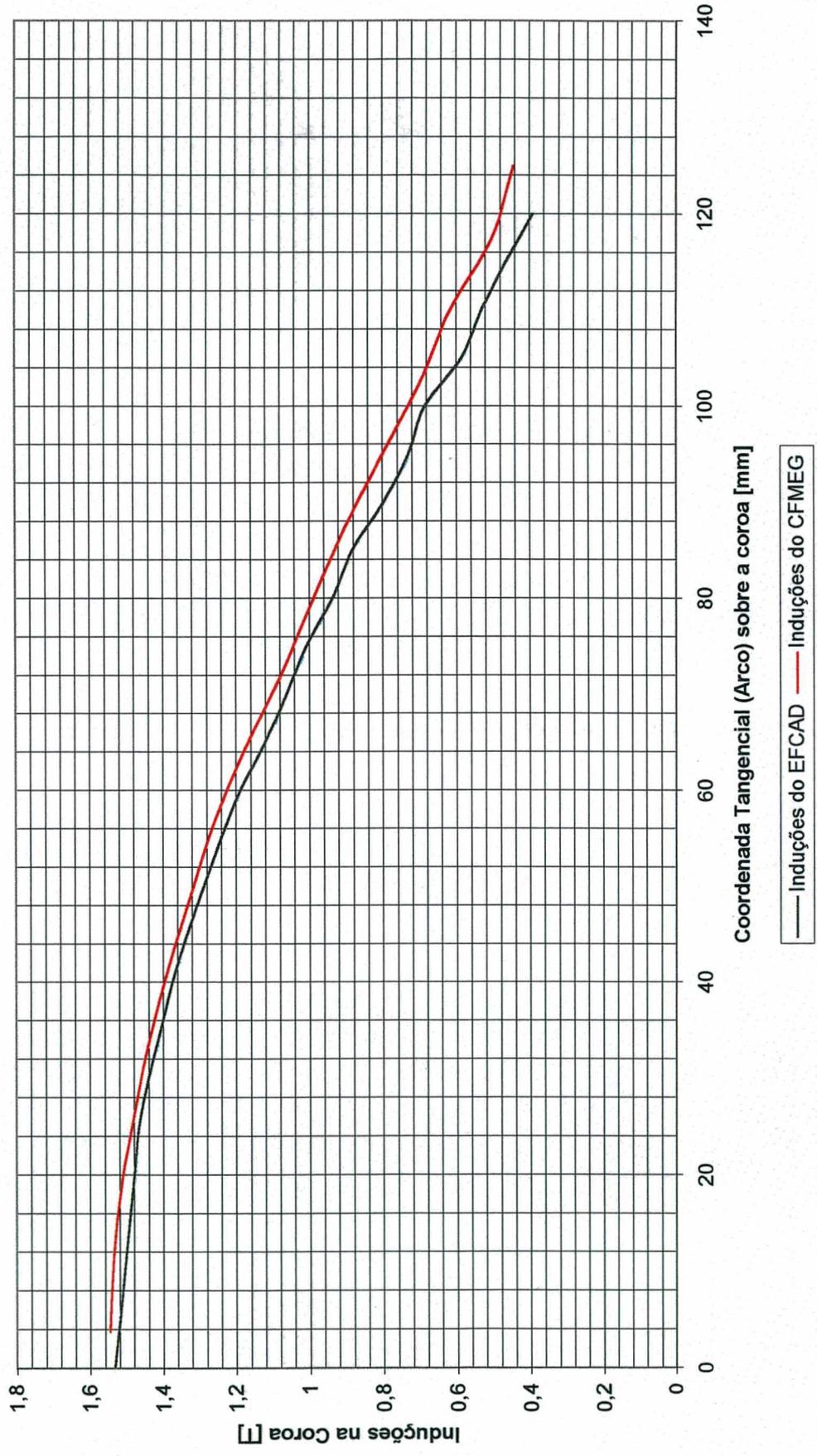
Os resultados plotados em forma de gráficos, foram obtidos através do cálculo numérico iterativo, provenientes do processamento dos programas CFMEG (Caminhos Finitos) e EFCAD (Elementos Finitos). Também aqui valem todos os demais comentários já feitos para o caso com o Motor de 2 Polos.

Os dados básicos deste motor de 4 polos são: 100 cv (73.6 kW), Carcaça 250 (IEC), 60Hz, 440V, Enrolamento Concêntrico camada única, Ligação Triângulo (Paralela), IP54, Classe B. A seguir podem ser vistos os gráficos comparativos correspondentes ao Motor de 4 Polos, onde o primeiro gráfico corresponde às Induções Magnéticas sobre uma linha tangencial, na região da coroa estatórica, com raio 164.125mm, o segundo gráfico às Induções Magnéticas sobre uma linha tangencial com raio 172.75mm e o terceiro às Induções Magnéticas sobre uma linha tangencial com raio 181.375mm.

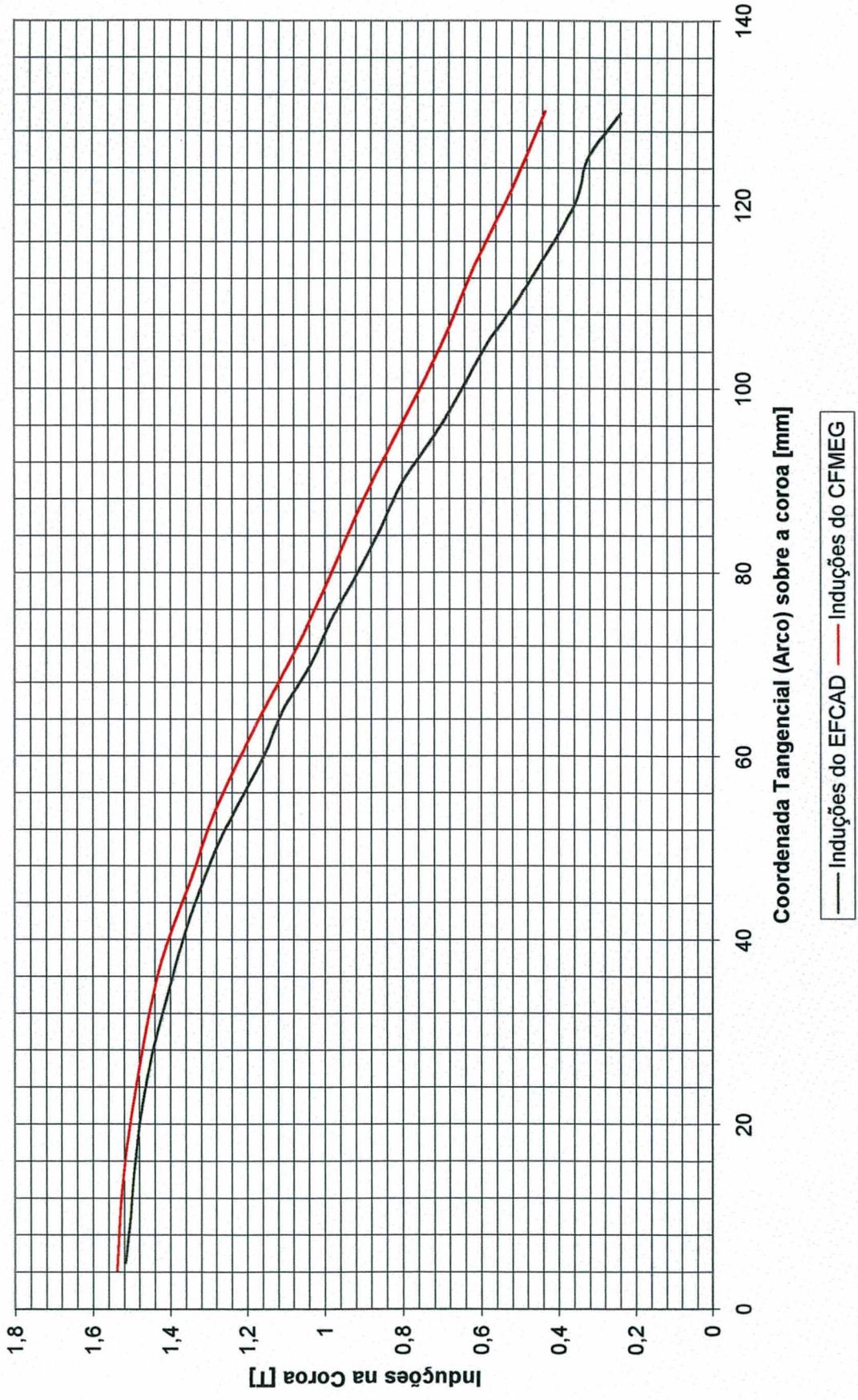
Comparativo entre as Induções do CFMEG e do EFCAD sobre a linha tangencial de raio 164.125 mm



Comparativo entre as induções do CFMEG e do EFCAD sobre a linha tangencial de raio 172.75 mm



Comparativo entre as Induções do CFMEG e do EFCAD sobre a linha tangencial de raio 181.375 mm



4.2 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme foi definido na seção 2.1 (cap.2), uma Linha Equipotencial de Fmm é formada por uma sucessão de pontos geométricos espaciais, pertencentes ao domínio de estudo, que se encontram submetidos a um mesmo potencial escalar magnético “ V_m ”. Ficou demonstrado na seção 2.4 (cap.2) que as Linhas Equipotenciais de Fmm são divergentes em relação à fonte de corrente \vec{J} . Uma equação, dual da lei de Gauss, pode ser estabelecida para representar esta divergência.

Para implementar uma dada Linha Equipotencial de Fmm, através do cálculo das coordenadas espaciais de uma sucessão de pontos geométricos que tenham um mesmo potencial escalar magnético, pode ser usada uma equação desenvolvida com base na energia magnética distribuída no domínio de estudo, conforme está demonstrado nas seções 2.5 e 2.6 do capítulo 2. Tal solução parte de uma interpolação entre pontos (coordenadas) conhecidos, situados nas extremidades superior e inferior de cada Linha Equipotencial. Estes pontos extremos conhecidos encontram-se sempre, previamente, submetidos ao potencial magnético comum da Linha Equipotencial.

Sobre cada Linha Equipotencial de Fmm, conforme demonstrado na seção 3.1 (cap.3), é possível impor um fluxo magnético, o qual é formado por um perfil de vetores \vec{B} perpendicular à direção desta Linha. Este fluxo magnético imposto está de acordo com a lei de Faraday e com base na distribuição dos campos magnéticos em máquinas elétricas girantes trifásicas.

Conforme está demonstrado na seção 3.2 do capítulo 3, utilizando as Linhas Equipotenciais de Fmm e os Fluxos Magnéticos que podem ser impostos sobre estas Linhas, é possível calcular a distribuição dos Campos e Induções Magnéticas nas Coroas Estatóricas de Máquinas Elétricas Girantes, através do método chamado de “Caminhos finitos”. A validade prática deste método está verificada através do estudo comparativo efetuado na seção 4.1 (cap.4), onde o método de Elementos Finitos (EFCAD) foi usado como referência. Os resultados do estudo comparativo realizado, mostram a boa proximidade entre os dois métodos.

Para melhorar a precisão do método de Caminhos Finitos, os fluxos impostos, tais como foram calculados, devem ter, ainda, subtraídos os valores dos fluxos de dispersão nas cabeças de bobinas.

O método de “Caminhos Finitos” proposto neste trabalho, para calcular a distribuição dos Campos e Induções Magnéticas na coroa estatórica de máquina elétrica girante, pode ser desenvolvido também para as outras partes que compõem a máquina elétrica girante (dentes do estator, coroa rotórica, dentes do rotor,...), bem como para outros dispositivos eletromagnéticos.

ANEXO 1 – CAMPO MAGNÉTICO NA REGIÃO DA COROA

- 1. Introdução.**
- 2. Fmm de um enrolamento de passo pleno.**
- 3. Fmm de um enrolamento de passo fracionário.**
- 4. Enrolamentos distribuídos.**
- 5. Campo Girante Trifásico.**
- 6. Campo Girante perfeitamente Senoidal.**

CAMPO MAGNÉTICO NA REGIÃO DA COROA

1. Introdução

O Campo Magnético (\vec{H}) e a Força Magnetomotriz (Fmm) correspondente do Enrolamento de uma Máquina Elétrica Girante depende da disposição dos Condutores no Enrolamento, das Correntes que os percorrem (forma de onda temporal, Amplitudes e deslocamentos angulares no tempo), da Geometria do Circuito Magnético da Máquina e das Propriedades Magnéticas dos Caminhos Magnéticos condutores de fluxo.

O cálculo do Campo Magnético (\vec{H}) tem por finalidade principal a determinação da distribuição das Induções Magnéticas ao longo de toda a região do Circuito Magnético. A distribuição do Campo Magnético, na região do Circuito Magnético, é determinada pela distribuição da Força Magnetomotriz (Fmm), a qual, por sua vez, depende da morfologia do Enrolamento e da distribuição das Correntes que os percorrem.

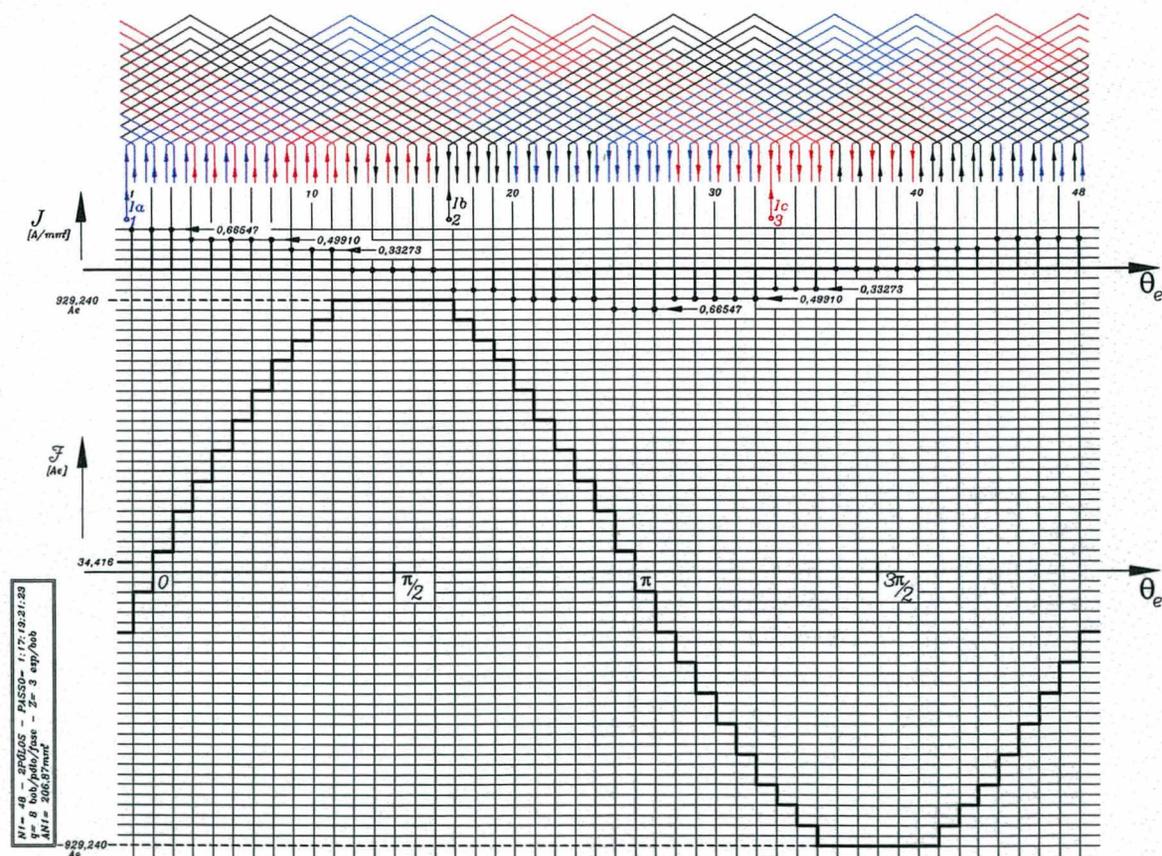


Figura A1.1 – Ondas espaciais dos Ampere-Condutores e de Fmm.

A distribuição dos campos (\vec{H}) e correspondentes Induções Magnéticas (\vec{B}) dependem, portanto, das ondas das Correntes no domínio do tempo e da distribuição Espacial dos Condutores formadores da onda Espacial de Fmm. Assim sendo, em função da posição espacial (θ) e da posição angular no tempo (θe), o fluxo magnético poderá ser tangencial, relativamente à direção do eixo angular espacial θ , em certa região do Domínio e poderá ser simultaneamente Radial em outra parte deste mesmo Domínio, conforme demonstrado no capítulo 6, seção 6.1. Na figura A1.1 estão mostradas as ondas espaciais dos Ampere-Condutores (\vec{J}) e da correspondente Fmm. Conforme está demonstrado pelas equações (5.1) e (5.4) do capítulo 5, a onda de Fmm é o resultado da integral da onda dos Ampere-Condutores (\vec{J}).

2. Fmm de um enrolamento de passo pleno

Seja considerado um enrolamento monofásico de passo pleno com uma ranhura por polo e com “ Nt ” espiras por par de polos, conforme mostrado na figura A1.2. Conforme as equações (5.1) e (5.4) do capítulo 5, a integral de linha do campo magnético \vec{H} ao longo de um caminho fechado “*Imag*” é igual à fmm “ $(Nt.I)$ ” concatenando este caminho. Normalmente esta integral tem que ser dividida em uma soma correspondente ao núcleo do estator, núcleo do rotor, dentes do estator, dentes do rotor e entreferro. Contudo, somente para efeitos de demonstração, será assumido que nenhuma saturação ocorre no ferro e que então a intensidade do campo neste ferro é muito pequena e pode ser desprezada. O caminho magnético, neste caso, fica restrito a somente o entreferro “ δ ”. Tendo em vista que as linhas do campo magnético consistem de duas metades simétricas com direções opostas, a Fmm pode ser dividida em duas partes correspondentes a somente uma passagem através do entreferro, ou seja, correspondentes à metade do comprimento total do caminho do circuito magnético. Pode-se dizer que uma destas metades simétricas corresponde à Fmm de um polo magnético, ao invés de por par de polos, como seria se fosse considerado o comprimento global do caminho magnético. Resulta, então

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = Nt \cdot I \quad (\text{A1.1})$$

$$\mathfrak{F}_p = H \cdot \delta = \frac{Nt \cdot I}{2} \quad (\text{A1.2})$$

$$B_{\delta} = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{F}_p}{\delta} \quad (\text{A1.3})$$

Portanto, \mathfrak{F}_p corresponde à Fmm de metade do circuito magnético, isto é, a Fmm de um polo de um circuito magnético completo de um par de polos. A equação (A1.3) indica que a forma da curva da densidade do fluxo magnético é proporcional à Fmm em cada ponto no entreferro.

Se a origem para a medição da distancia angular ao longo da periferia do entreferro é tomada ao invés do ponto onde o enrolamento está localizado ($\theta = \pi/2$ na figura A1.2), a onda quadrada pode ser expandida em série de Fourier, nas quais, todos os termos em cosseno são zero. O resultado é

$$\mathfrak{F}_p = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{Nt \cdot I}{2} \right) \cdot \text{sen}(n \cdot \theta) \cdot d\theta \cdot [\text{sen} \theta + \text{sen} 3\theta + \text{sen} 5\theta + \dots] \quad (\text{A1.4})$$

$$\mathfrak{F}_p = \left(\frac{4}{\pi} \right) \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2} \right) \cdot \left[\text{sen} \theta + \frac{1}{3} \cdot \text{sen} 3\theta + \frac{1}{5} \cdot \text{sen} 5\theta + \dots \right] \quad (\text{A1.5})$$

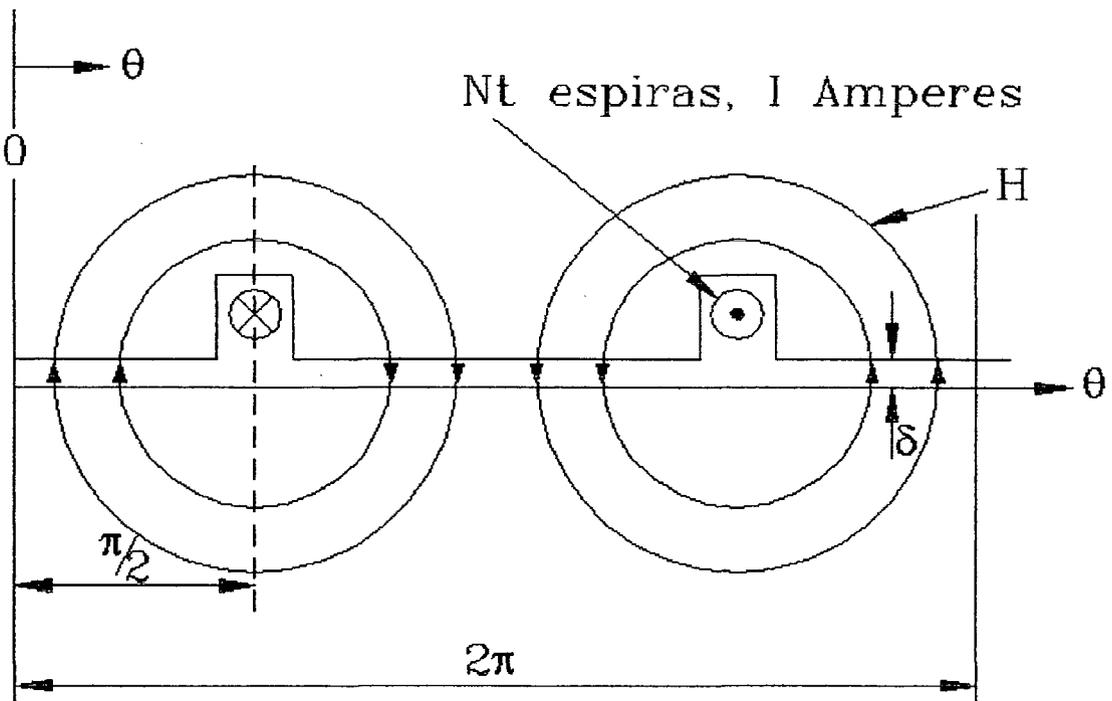


Figura A1.2 – Fmm e Campo Magnético de uma bobina com passo pleno em função da posição ao longo do entreferro.

3. Fmm de um enrolamento com passo fracionário

Quando a extensão dos lados de bobina de uma bobina individual é menor do que o passo pleno, o enrolamento é dito ser de passo fracionário. Tais enrolamentos são normalmente usados pela razão de que a forma de onda da Fmm é mais próxima da senoidal do que com enrolamentos com passo pleno, e porque são mais econômicos em cobre e mais rígidos devido às menores cabeças de bobina.

O uso de passo fracionário torna possível usar um número de ranhuras que não seja um múltiplo exato do número de polos, então tendendo a suprimir ou atenuar as pulsações do fluxo com o movimento dos dentes em relação às faces polares e então tendendo a eliminar o “ripple” da onda de tensão.

Para efeito de exemplificação, seja considerada a distribuição da Fmm do enrolamento com passo fracionário mostrado na figura A1.3, onde o número de espiras por par de polos “ Nt ” da figura A1.2 foi dividido em duas bobinas e ambas foram movidas para trás e para frente por um ângulo γ . A amplitude da distribuição da Fmm para a $n^{\text{ésima}}$ harmônica pode ser calculada como

$$\mathfrak{F}_{pn} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\gamma/2} 0 \cdot \text{sen } n\theta \cdot d\theta + \int_{\gamma/2}^{(\pi-\gamma/2)} \frac{Nt \cdot I}{2} \cdot \text{sen } n\theta \cdot d\theta + \int_{(\pi-\gamma/2)}^{\pi} 0 \cdot \text{sen } n\theta \cdot d\theta \right] \quad (\text{A1.6})$$

$$\mathfrak{F}_{pn} = \left(\frac{4}{\pi} \right) \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2} \right) \cdot \frac{\cos\left(n \cdot \frac{\gamma}{2}\right)}{n} \quad (n \text{ ímpar}) \quad (\text{A1.7})$$

A distribuição retangular da Fmm, com passo fracionário, da figura A1.3, pode ser representada por série, resultando

$$\mathfrak{F}_p = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \mathfrak{F}_{pn} \cdot \text{sen } n\theta \quad (\text{A1.8})$$

$$\mathfrak{F}_p = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{Nt \cdot I}{2} \cdot \left[\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \text{sen } \theta + \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{3\gamma}{2} \cdot \text{sen } 3\theta + \frac{1}{5} \cdot \cos \frac{5\gamma}{2} \cdot \text{sen } 5\theta + \dots \right] \quad (\text{A1.9})$$

Comparando a equação (A1.9) com a (A1.5), o fator adicional introduzido pelo encurtamento do passo do enrolamento, para a $n^{\text{ésima}}$ harmônica, é dado por

$$K_{pn} = \cos \frac{n\gamma}{2} \quad (n \text{ ímpar}) \quad (\text{A1.10})$$

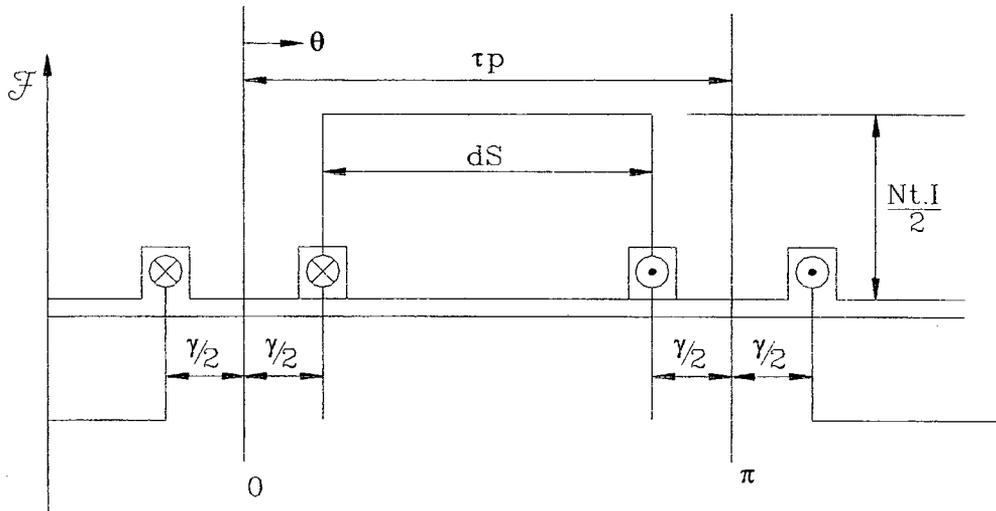


Figura A1.3 – Distribuição da Fmm para uma bobina com passo fracionário

Em termos práticos é normal exprimir a equação (A1.10) de uma forma diferente. Seja então considerado que “ τ_p ” representa o comprimento do passo pleno do enrolamento e que “ dS ” representa o comprimento do passo da bobina. Resulta, então

$$\gamma = \frac{\tau_p - dS}{\tau_p} \cdot \pi = \pi \cdot \left(1 - \frac{dS}{\tau_p}\right) \quad (\text{A1.11})$$

$$\cos \frac{n\gamma}{2} = \cos \left[n \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{dS}{\tau_p} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] = \text{sen} \frac{n\pi}{2} \cdot \text{sen} n \left(\frac{dS}{\tau_p} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A1.12})$$

Disto resulta, finalmente,

$$\mathfrak{F}_{pn} = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2n} \right) \cdot \text{sen} \frac{n\pi}{2} \cdot \text{sen} \left(n \cdot \frac{dS}{\tau_p} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A1.13})$$

$$K_{pn} = \text{sen} \left(\frac{n \cdot dS}{\tau_p} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (n \text{ ímpar}) \quad (\text{A1.14})$$

onde “ K_{pn} ” é chamado de “Fator de Passo” para a $n^{\text{ésima}}$ harmônica da Fmm. O termo ± 1 dado por $\text{sen}(n\pi/2)$ normalmente não é incluído na definição.

4. Enrolamentos Distribuídos

Adicionalmente ao encurtamento do passo, a fim de remover ou atenuar as harmônicas indesejáveis, os enrolamentos são geralmente distribuídos em diversas ranhuras, a fim de melhor utilizar o espaço em torno da periferia da máquina. Na figura A1.4 pode ser visto um caso onde as “ Nt ” espiras por par de polos foram distribuídas em 4 bobinas por polo, sendo cada uma de passo pleno. Deve ser notado que o layout do enrolamento não é único. Para efeitos de demonstração, as bobinas da figura A1.4 podem ser religadas conforme mostrado na figura A1.5. Pode ser observado que a distribuição da Fmm permaneceu inalterada.

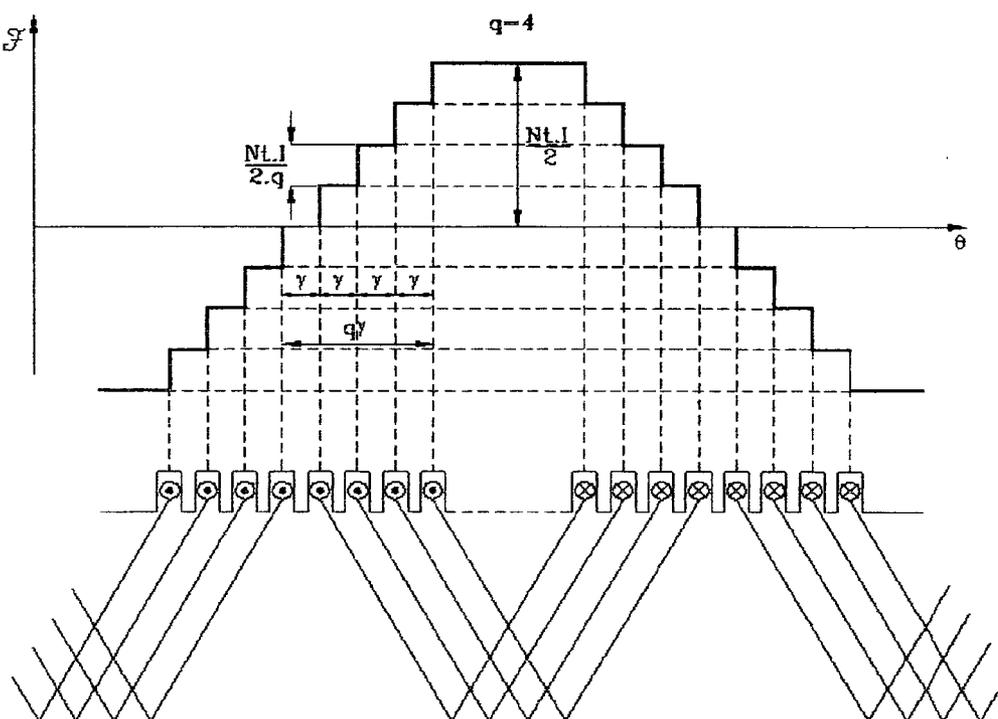


Figura A1.4 – Enrolamento Distribuído com 4 bobinas no Cinturão de Fase, Imbricado.

Deve ser visto que agora cada par de bobinas conectadas conforme mostrado na figura A1.4, contribuem com uma distribuição retangular, do tipo mostrado na seção 3 deste Anexo 1 (ver figura A1.3). A Fmm máxima de cada componente individual é um degrau retangular dado por “ $(Nt.I/2q)$ ”, onde “ q ” é o número de bobinas por polo (4 no exemplo). O número de bobinas “ q ” é conhecido como o “Cinturão de Fase” (phase belt). Conforme foi demonstrado na seção 3 deste Anexo, as amplitudes das Fmm’s das

sucessivas bobinas, começando pela mais externa (a maior na fig.A1.5), serão respectivamente,

Bobina	Amplitude da $n^{\text{ésima}}$ harmônica
1 (mais externa)	$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2q} \right) \frac{\cos\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{n}$
	$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2q} \right) \frac{\cos\left(\frac{3n\gamma}{2}\right)}{n}$
	$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2q} \right) \frac{\cos\left(\frac{5n\gamma}{2}\right)}{n}$
• • •	
q (mais interna)	$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2q} \right) \cdot \frac{\cos n[\gamma/2 + (q-1)\gamma]}{n}$

(A1.15)

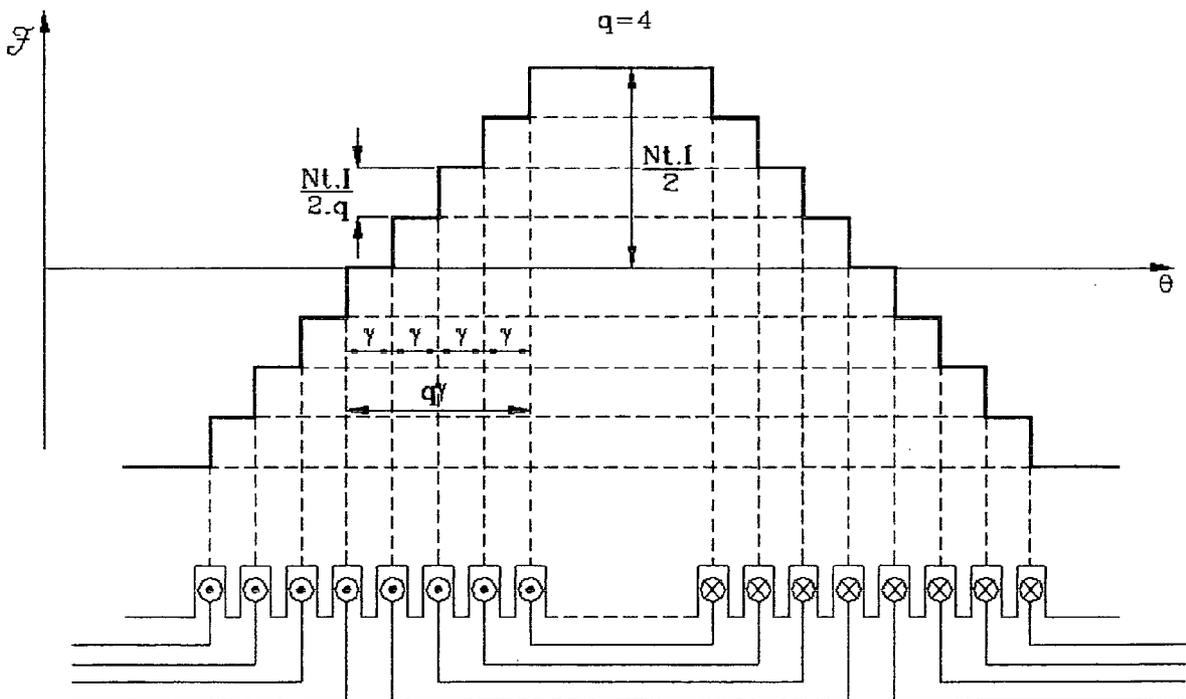


Figura A1.5 – Enrolamento Distribuído Concêntrico.

As “ q ” amplitudes das Fmm’s calculadas nas equações (A1.15) podem ser escritas na forma

Bobina	Amplitude da $n^{\text{ésima}}$ harmônica
1 (mais externa)	$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2q} \right) \frac{\cos n(\gamma/2)}{n}$
	$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2q} \right) \frac{\cos n(\gamma/2 + \gamma)}{n}$
	$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2q} \right) \frac{\cos n(\gamma/2 + 2\gamma)}{n}$
	•
	•
	•
q (mais interna)	$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2q} \right) \cdot \frac{\cos n[\gamma/2 + (q-1)\gamma]}{n}$

(A1.16)

A amplitude resultante da $n^{\text{ésima}}$ harmônica é obtida através da soma dos “ q ” termos. Após aplicar a identidade trigonométrica $\cos(A+B)=\cos A \cos B - \text{sen} A \text{sen} B$, esta soma será

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{pn} = & \left(\frac{4}{\pi} \right) \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2qn} \right) \cdot \left(\cos \frac{n\gamma}{2} \cdot [1 + \cos n\gamma + \cos 2n\gamma + \dots + \cos (q-1)n\gamma] \right. \\ & \left. - \text{sen} \frac{n\gamma}{2} \cdot [\text{sen} n\gamma + \text{sen} 2n\gamma + \dots + \text{sen} (q-1)n\gamma] \right) \end{aligned} \quad (\text{A1.17})$$

Pode ser demonstrado que soma da série de cossenos é dada por

$$[1 + \cos n\gamma + \cos 2n\gamma + \dots + \cos (q-1)n\gamma] = \text{sen} \left(\frac{qn\gamma}{2} \right) \cdot \frac{\cos \left[\frac{(q-1)n\gamma}{2} \right]}{\text{sen} \frac{n\gamma}{2}} \quad (\text{A1.18})$$

e a soma da série de senos por

$$[\text{sen} n\gamma + \text{sen} 2n\gamma + \dots + \text{sen} (q-1)n\gamma] = \text{sen} \left(\frac{qn\gamma}{2} \right) \cdot \frac{\text{sen} \left[\frac{(q-1)n\gamma}{2} \right]}{\text{sen} \frac{n\gamma}{2}} \quad (\text{A1.19})$$

Substituindo as equações (A1.18) e (A1.19) em (A1.17), resulta a equação

$$\mathfrak{F}_{pn} = \left(\frac{4}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{qn}\right) \cdot \frac{\text{sen} \frac{nq\gamma}{2}}{\text{sen} \frac{n\gamma}{2}} \cdot \left\{ \cos \frac{n\gamma}{2} \cdot \cos \left[(q-1) \frac{n\gamma}{2} \right] - \text{sen} \frac{n\gamma}{2} \cdot \text{sen} \left[\frac{(q-1)n\gamma}{2} \right] \right\} \quad (\text{A1.20})$$

a qual se reduz para

$$\mathfrak{F}_{pn} = \left(\frac{4}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{Nt \cdot I}{2n}\right) \cdot \frac{\text{sen} \frac{nq\gamma}{2}}{q \cdot \text{sen} \frac{n\gamma}{2}} \cdot \cos \frac{nq\gamma}{2} \quad (n \text{ ímpar}) \quad (\text{A1.21})$$

Da equação (A1.21) a quantidade

$$K_{dn} = \frac{\text{sen} \frac{nq\gamma}{2}}{q \cdot \text{sen} \frac{n\gamma}{2}} \quad (n \text{ ímpar}) \quad (\text{A1.22})$$

é definida como o “Fator de distribuição” da harmônica de ordem “ n ”.

Seja considerado agora, o termo em cosseno da equação (A1.21). Nas figuras A1.4 e A1.5, pode ser observado que o ângulo $(q\gamma/2)$ representa o encurtamento equivalente do passo das bobinas, as quais estão agora distribuídas sobre “ q ” ranhuras. Resulta, então

$$\frac{q\gamma}{2} = \left(1 - \frac{dS}{\tau_p}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{A1.23})$$

onde “ dS ” representa o comprimento equivalente do passo do enrolamento distribuído. O termo em cosseno torna-se então,

$$\cos \frac{nq\gamma}{2} = \text{sen} \left(\frac{n \cdot dS}{\tau_p} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A1.24})$$

o qual é reconhecido como sendo o “Fator de Passo” para a harmônica de ordem “ n ”, conforme já foi definido na equação (A1.14).

Da equação (A1.21), a expressão final para a harmônica de Fmm de ordem “ n ”, para um enrolamento distribuído e com passo encurtado, será

$$\mathfrak{F}_{pn} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{Nt \cdot I}{2n} \cdot K_{pn} \cdot K_{dn} \quad (\text{A1.25})$$

onde os fatores de Encurtamento de Passo K_{pn} e de Distribuição K_{dn} são dados, respectivamente, pelas equações (A1.14) e (A1.22).

Os Cinturões de Fase (Phase Belts), a menos que sejam usados para propósitos especiais, tais como para motores de dupla velocidade, são considerados impraticáveis se

maiores do que o passo polar. As considerações práticas para acomodar grupos de fases simétricas resultam em Cinturões de Fase de 60° (para enrolamentos com número de polos igual ao número de grupos de bobinas, chamado de enrolamento por polos) e 120° (para enrolamentos onde o número de polos é o dobro do número de grupos de bobinas, conhecido como enrolamento por polos consecuentes) para sistemas trifásicos. Para sistemas bifásicos os Cinturões de Fase são 90° (para enrolamentos com número de polos igual ao número de grupos de bobinas, chamado de enrolamento por polos) e 180° (para enrolamentos onde o número de polos é o dobro do número de grupos de bobinas, conhecido como enrolamento por polos consecuentes).

5. Campo Girante trifásico

Quando um enrolamento trifásico simétrico é conectado a uma fonte trifásica simétrica de alimentação, correntes fluirão em cada fase do enrolamento. Estas correntes estarão defasadas uma da outra de 120° elétricos ($2\pi/3$ rad elétricos). Seja considerado que cada fase é excitada por uma corrente alternada que varia senoidalmente com o tempo. Para uma fonte balanceada com seqüência de fases “abc” e tomando a corrente “ia” como referência, as correntes instantâneas serão

$$i_a = I_{máx} \cdot \cos(\omega t - 0) \quad (\text{A1.26})$$

$$i_b = I_{máx} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{A1.27})$$

$$i_c = I_{máx} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{A1.28})$$

Os correspondentes componentes de Fmm, portanto, variam senoidalmente com o tempo, visto que são proporcionais às correntes. Cada componente por ele mesmo é estacionário, porém pulsa senoidalmente, tendo a crista da onda (pico máximo) localizado sobre o eixo magnético de cada fase. Em outras palavras, cada componente representa um vetor oscilante ao longo do eixo magnético de sua fase. O seu comprimento é proporcional ao valor da corrente instantânea e sua direção determinada pela respectiva polaridade desta corrente. A Fmm resultante é simplesmente a soma vetorial dos três componentes de Fmm. Portanto, a contribuição de cada fase em um ponto qualquer ao longo da periferia do entreferro é

$$\mathfrak{F}_a = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot i_a}{a1.2P} \right) \cdot \sum_{n=\text{ímpar}} fwn \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{2P}{2} \cdot n \cdot \theta\right)}{n} \quad (\text{A1.29})$$

$$\mathfrak{F}_b = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot i_b}{a1.2P} \right) \cdot \sum_{n=\text{ímpar}} fwn \cdot \frac{\text{sen}\left[n \cdot \frac{2P}{2} \cdot \left(\theta - \frac{4\pi}{3 \cdot 2P}\right)\right]}{n} \quad (\text{A1.30})$$

$$\mathfrak{F}_c = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot i_c}{a1.2P} \right) \cdot \sum_{n=\text{ímpar}} fwn \cdot \frac{\text{sen}\left[n \cdot \frac{2P}{2} \cdot \left(\theta + \frac{4\pi}{3 \cdot 2P}\right)\right]}{n} \quad (\text{A1.31})$$

onde

$$fwn = K_{pn} \cdot K_{dn} \quad (\text{A1.32})$$

é o Fator de Bobinagem para a harmônica de ordem “ n ”. Neste fator foi omitida a componente correspondente à inclinação. O fator “ $a1$ ” representa o número de caminhos paralelos de corrente no enrolamento, o qual faz resultar um número equivalente de espiras em série por fase de “ $(Nt/a1)$ ”, já que agora “ Nt ” é o número total de espiras por fase. O termo “ $2P$ ” representa o número de polos da máquina e faz resultar um número equivalente de espiras por polo de “ $(Nt/a1)/2P$ ”.

Com o auxílio das identidades trigonométricas as equações (A1.29), (A1.30) e (A1.31) podem ser escritas como

$$\mathfrak{F}_a = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot ia}{a1 \cdot 2P} \right) \cdot \sum_{n=ímpar} fwn \cdot \frac{\text{sen} \left[\left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} \right) \right]}{n} \quad (\text{A1.33})$$

$$\mathfrak{F}_b = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot ib}{a1 \cdot 2P} \right) \cdot \sum_{n=ímpar} fwn \cdot \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} \right)}{n} \cdot \cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) - \frac{\cos \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} \right)}{n} \cdot \text{sen} \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right] \quad (\text{A1.34})$$

$$\mathfrak{F}_c = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot ic}{a1 \cdot 2P} \right) \cdot \sum_{n=ímpar} fwn \cdot \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} \right)}{n} \cdot \cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) + \frac{\cos \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} \right)}{n} \cdot \text{sen} \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right] \quad (\text{A1.35})$$

As três Fmm's podem ser somadas para formar a resultante trifásica, ou seja, o Campo Girante Trifásico. Resulta, então

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_a + \mathfrak{F}_b + \mathfrak{F}_c = & \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt}{a1 \cdot 2P} \right) \cdot \sum_{n=ímpar} \frac{fwn}{n} \cdot \left\{ ia + ib \cdot \cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) + ic \cdot \cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right\} \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} \right) \\ & + \left\{ ic \cdot \text{sen} \left(\frac{2n\pi}{3} \right) - ib \cdot \text{sen} \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right\} \cdot \cos \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A1.36})$$

Considerando agora que,

$$\cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \quad \text{para } n = 1, 5, 7, 11, \dots$$

$$\cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) = 1 \quad \text{para } n = 3, 9, 15, \dots$$

$$\text{sen} \left(\frac{2n\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{para } n = 1, 7, 13, \dots$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} && \text{para } n=5,11, \dots \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right) &= 0 && \text{para } n=3,9,15, \dots\end{aligned}$$

e que a corrente de retorno pelo neutro seja nula, ou seja,

$$ia + ib + ic = 0 \quad (\text{A1.37})$$

a equação (A1.36) se reduz a

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_a + \mathfrak{I}_b + \mathfrak{I}_c &= \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt}{a1 \cdot 2P}\right) \cdot \sum_{n=1,5,7,11,\dots} \frac{fwn}{n} \left\{ \left(\frac{3 \cdot ia}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\pm 1) \cdot (ic - ib) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2}\right) \right\}\end{aligned} \quad (\text{A1.38})$$

onde

$$(\pm 1) = 1 \quad \text{para } n=1,7,13, \dots$$

e

$$(\pm 1) = -1 \quad \text{para } n=5,11,17, \dots$$

Pode ser notado que a terceira harmônica bem como todas as harmônicas múltiplas de 3 (9^a, 15^a, ...) foram eliminadas pelo fato de a máquina não ter corrente de retorno pelo neutro.

Considerando agora, o caso da máquina ser alimentada por correntes balanceadas e senoidais, conforme dado pelas equações (A1.26), (A1.27) e (A1.28), o termo “ $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (ic - ib)$ ” que aparece na equação (A1.38), será igual a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (ic - ib) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left[I_{\text{máx}} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) - I_{\text{máx}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (\text{A1.39})$$

resultando,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (ic - ib) = -\frac{3}{2} \cdot I_{\text{máx}} \cdot \operatorname{sen} \omega t \quad (\text{A1.40})$$

A equação (A1.38) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_a + \mathfrak{I}_b + \mathfrak{I}_c &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I_{\text{máx}}}{a1 \cdot 2P}\right) \cdot \sum_{n=1,5,7,11,\dots} \frac{fwn}{n} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2}\right) \cdot \cos \omega t \right. \\ &\quad \left. - (\pm 1) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \omega t \right\}\end{aligned} \quad (\text{A1.41})$$

que resulta finalmente em

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_a + \mathfrak{I}_b + \mathfrak{I}_c = & \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I_{\text{máx}}}{a1 \cdot 2P} \right) \cdot \left\{ \sum_{n=1,7,13,\dots} \frac{fwn}{n} \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} - \omega t \right) \right. \\ & \left. + \sum_{n=5,11,17,\dots} \frac{fwn}{n} \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} + \omega t \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A1.42})$$

Portanto, uma máquina alimentada por uma fonte de tensões trifásicas balanceadas e senoidais, que possui um enrolamento distribuído conforme usado na prática, contendo harmônicas ímpares, resulta em uma Fmm girante que produz componentes harmônicas de Fmm positivas e negativas, nesta máquina. Cada uma destas harmônicas tem amplitude constante e gira na direção positiva para $n= 1, 7, 13, 19, \dots$ e direção negativa para $n= 5, 11, 17, \dots$. As componentes harmônicas correspondentes a $n= 3, 9, 15, \dots$ não aparecem presentes se a máquina não tem corrente de retorno pelo neutro, ou seja, não tem componente de seqüência zero. Conforme pode ser visto na equação (A1.42), a amplitude de cada componente harmônica de Fmm resultante trifásica é 3/2 vezes a amplitude da Fmm de uma fase individual. As Fmm's para “ n ” maior do que a unidade são chamadas de “Harmônicas Espaciais” do enrolamento da máquina. A velocidade de rotação destas harmônicas pode ser encontrada derivando o argumento da função senoidal. Conseqüentemente a velocidade da harmônica de Fmm de ordem “ n ” será

$$\frac{d \left(\frac{n \cdot 2P \cdot \theta}{2} - \omega t \right)}{dt} = \left(\frac{n \cdot 2P}{2} \frac{d\theta}{dt} - \omega \right) \quad (\text{A1.43})$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2 \cdot \omega}{n \cdot 2P} \quad (\text{A1.44})$$

a qual mostra que a velocidade mecânica síncrona para cada harmônica é uma fração inteira da velocidade de rotação da componente fundamental de Fmm.

6. Campo Girante perfeitamente Senoidal

Para ter uma máquina com campo girante perfeitamente senoidal, além de uma alimentação com tensões elétricas balanceadas e senoidais, é necessário que a distribuição do enrolamento no espaço também seja senoidal. Isto é necessário porque além da onda temporal das tensões (correntes), também a onda espacial dos ampere-Condutores (\vec{J}) deve, neste caso, ser perfeitamente senoidal. Este é um caso que pode-se dizer ideal, apesar

de poder ser obtido na prática condições muito próximas desta. Tendo-se esta condição, da equação (A1.42) resulta,

$$\mathfrak{I}_a + \mathfrak{I}_b + \mathfrak{I}_c = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I_{\text{máx}}}{a1 \cdot 2P} \right) \cdot f_w1 \cdot \text{sen} \left(\frac{2P \cdot \theta}{2} - \omega t \right) \quad (\text{A1.45})$$

a qual corresponde a somente a harmônica fundamental. Nesta equação foi mantido o Fator de bobinagem “ f_w1 ”, o qual, para a condição ideal considerada, é igual à unidade. A equação (A1.45) pode ser usada também para os casos onde se queira considerar somente a primeira harmônica, para os enrolamentos com distribuição normal. Na equação (A1.45), fazendo

$$\mathfrak{I}_{\text{máx}} = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{Nt \cdot I_{\text{máx}}}{a1 \cdot 2P} \right) \cdot f_w1 \quad (\text{A1.46})$$

resulta

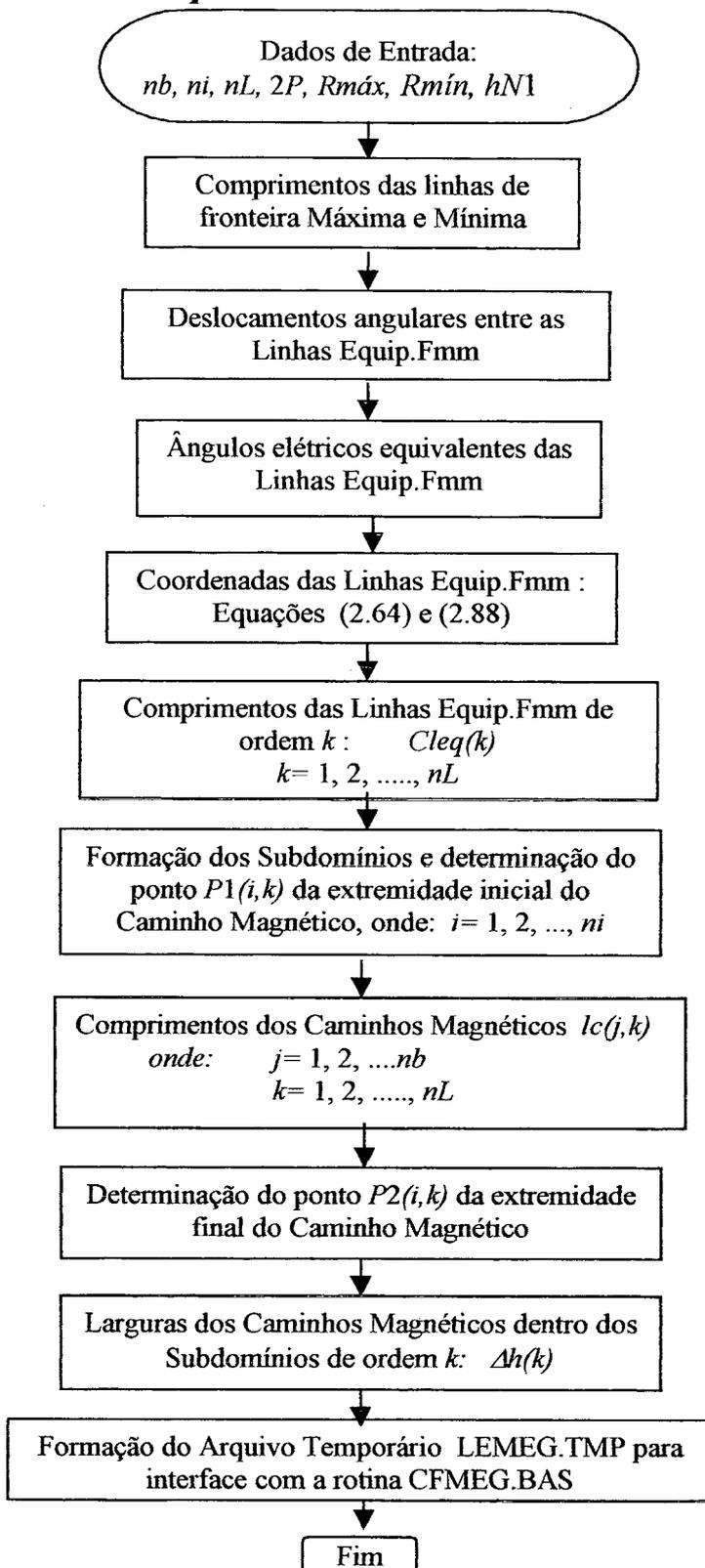
$$\mathfrak{I}_a + \mathfrak{I}_b + \mathfrak{I}_c = \frac{3}{2} \cdot \mathfrak{I}_{\text{máx}} \cdot \text{sen} \left(\frac{2P \cdot \theta}{2} - \omega t \right) \quad (\text{A1.47})$$

Conforme pode ser visto nas equações, o ângulo elétrico espacial “ θ_e ”, em função do ângulo geométrico espacial “ θ ”, é

$$\theta_e = \frac{2P \cdot \theta}{2} \quad (\text{A1.48})$$

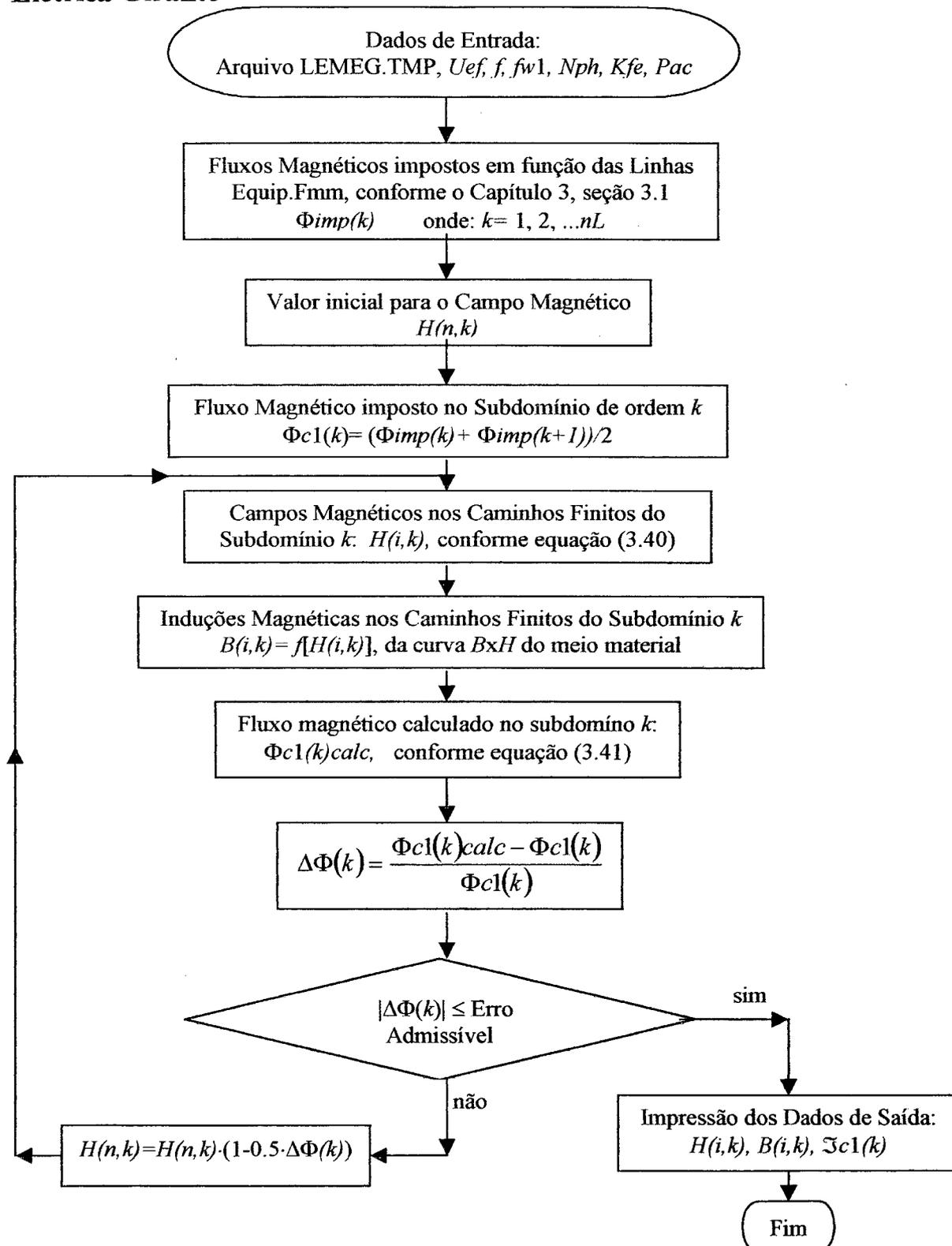
ANEXO 2

Fluxograma da rotina LEMEG.BAS para o Cálculo das Linhas Equipotenciais de Fmm e Caminhos Magnéticos (Módulo e Direção) para a Coroa Estatórica de Máquina Elétrica Girante



ANEXO 3

Fluxograma da rotina CFMEG.BAS para o Cálculo da Difusão dos Campos, Induções Magnéticas e Fmm's na Coroa Estatórica de Máquina Elétrica Girante



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ida, Nathan; Bastos, João P.A. *Electromagnetics and Calculation Fields*. Second Edition. New York, NY (USA): Springer-Verlag, 1997.
- [2] Bastos, João P.A. *Eletromagnetismo e Cálculo de Campos*. Segunda Edição. Florianópolis: Editora da UFSC, 1992
- [3] Reitz, John R.; Milford, Frederick J.; Christy, Robert W. *Fundamentos da teoria Eletromagnética*. Quinta Reimpressão. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.
- [4] Silvester, P.P.; Ferrari, R.L. *Finite elements for electrical engineers*. Reprinted. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [5] Hayt, Willian H.Jr. *Engineering Electromagnetics*. Third Edition. Tokyo Japan: McGraw-Hill, 1974.
- [6] Martins, Nelson. *Introdução à teoria da eletricidade e do magnetismo*. Segunda Edição. São Paulo SP: Editora Edgard Blücher Ltda., 1975.
- [7] Skilling, Hugh Hildreth. *Fundamentals of Electric Waves*. Second Edition. Tokyo Japan: Toppan Printing Company Ltd, 1948.
- [8] Lipo, T.A. *Introduction to AC Machine Design*. Vol.1. Second Printing. Wisconsin Power Electronics Research Center (USA): University of Wisconsin, 1996.
- [9] Contin, Mario Célio. *Distribuição dos Campos e Induções Magnéticas e Cálculo das Fmm's em Máquinas Elétricas Girantes de Indução*. Jaraguá do sul – SC, 1996. Trabalho apresentado no Curso de Pós-Graduação em Máquinas Elétricas Girantes Nível de Especialização – GRUCAD, UFSC.
- [10] Kostenko, M.; Piotrovski, L. *Máquinas Eléctricas*. Vol.2. Porto – Portugal: Livraria Lopes da Silva-Editora, 1979.
- [11] Martin, Juan Corrales. *Cálculo Industrial de Máquinas Eléctricas*. Tomo 1. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores, 1982.
- [12] Langsdorf, Alexander S. *Teoria de las Máquinas de Corriente Alterna*. Segunda Edicion. México: McGraw-Hill, 1979.
- [13] Cochran, Paul L. *Polyphase Induction Motors – Analysis, Design and Applications*. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1989.
- [14] Fitzgerald, A.E., Kingsley Jr, Charles, Kusko, Alexander. *Máquinas elétricas*. Conversão eletromecânica de energia, Processos, Dispositivos e Sistemas. Tradução de Josafá Neves. São Paulo - SP: McGraw-Hill do Brasil. 1977.
- [15] Jordão, Rubens Guedes. *Máquinas Síncronas*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos editora S.A. / São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo. 1980.

- [16] Mesquita, Renato Cardoso. *Cálculos de Campos Eletromagnéticos Tridimensionais utilizando Elementos Finitos: Magnetostática, Quase-Estática e Aquecimento Indutivo*. Florianópolis, 1990. Tese para obtenção do grau de Doutor Em Ciências (Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.