

**MODELAGEM DE LAJES DE CONCRETO ARMADO
POR ANALOGIA DE GRELHA**

JANO D'ARAUJO COELHO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de Concentração : Estruturas

Orientador : Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio

Florianópolis – SC

2000.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a dissertação intitulada:

**MODELAGEM DE LAJES DE CONCRETO ARMADO POR ANALOGIA DE
GRELHA**

Por:

ENG.º. CIVIL JANO D'ARAUJO COELHO

Como requisito para a obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL

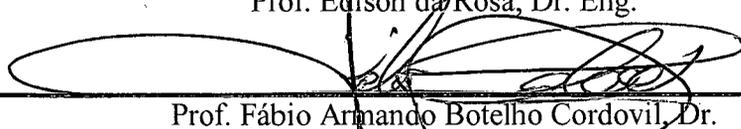


Daniel Domingues Loriggio – Orientador

Comissão Examinadora:



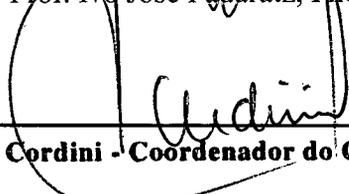
Prof. Edison da Rosa, Dr. Eng.



Prof. Fábio Armando Botelho Cordovil, Dr.



Prof. Ivo José Padaratz, Phd.



Jucilei Cordini - Coordenador do CPGEC

AGRADECIMENTOS

A Deus, sempre em primeiro lugar.

Aos meus pais, por terem feito tudo ao seu alcance para que eu pudesse atingir os meus objetivos.

Ao Prof. Daniel Domingues Loriggio, pela tranquilidade, dedicação e incentivo durante todo o curso de pós-graduação e em todas as etapas de desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores do curso de graduação e pós-graduação do Departamento de Engenharia Civil e do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC, pelo apoio e incentivo.

Ao Prof. Tuing Ching Chang , por ter sido sempre um mestre e conselheiro.

À Secretaria de Pós-Graduação de Engenharia Civil da UFSC, pelo constante auxílio.

Aos amigos e parentes que apoiaram e incentivaram em todos os momentos.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS.....	VI
LISTA DE TABELAS	XI
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XI
RESUMO	23
ABSTRACT	24
CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO.....	18
1.1 - Introdução	18
1.2 - Histórico.....	19
1.3 - Motivação	22
1.4 - Utilização	23
CAPÍTULO 2- TEORIA DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO.....	25
2.1- Introdução	25
2.2- Equação Diferencial das Placas em Coordenadas Cartesianas Retangulares	25
2.3- Solução Rigorosa da Equação Diferencial das Placas	33
2.4- Solução por Séries Simples de Fourier	37
2.5- Comentário sobre Tabelas	47
CAPÍTULO 3-INTRODUÇÃO À ANÁLISE MATRICIAL	50
3.1- Método da Rigidez	50
3.2- Grelhas Planas.....	52
CAPÍTULO 4- MODELAGEM DE LAJES DE CONCRETO ARMADO	62
4.1- Introdução	62

4.2- Método dos Elementos Finitos	63
4.3- Métodos Aproximados	70
4.4- Análises Limites.....	72
4.5- Analogia de Grelha.....	85
CAPÍTULO 5- ANALOGIA DE GRELHA.....	87
5.1- Introdução	87
5.2- Influência da Rigidez à Torção.....	88
5.3- Análise Numérica.....	93
5.4- Influência da Altura da Laje.....	140
5.5- Laje Simplesmente Apoiada em Vigas Flexíveis.....	144
5.6- Laje Retangulares Contínuas.....	150
5.7- Painéis de Lajes sem Vigas	174
5.8- Laje Nervuradas	179
CAPÍTULO 6- EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	185
6.1- Exemplo 1- Laje com Bordo Livre.....	185
6.2- Exemplo 2- Laje em Forma de L.....	189
6.4- Exemplo 3- Laje com Carga Linear.....	196
6.5- Exemplo 4 – Laje Retangular com Furo	200
6.6- Exemplo 5 – Pavimento de Edifício em Laje Cogumelo	203
CAPÍTULO 7- CONCLUSÕES.....	207
CAPÍTULO 8- RECOMENDAÇÕES.....	210
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	211
ANEXO 1	214

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Elemento de placa	32
Figura 2.2 - Forças cortantes em um elemento de placa.	33
Figura 2.3 - Momentos fletores e de torção em um elemento de placa.	34
Figura 2.5 - Placa retangular simplesmente apoiada com carga senoidal	40
Figura 3.1 - Grelha Plana	53
Figura 3.2 - Deslocamentos nodais nas extremidades de uma barra de grelha	54
Figura 3.3 - Momentos fletores e reações na barra devidos a um deslocamento vertical em uma das extremidades	55
Figura 3.5 - Momentos fletores e reações na barra devidso a uma rotação em uma das extremidades	56
Figura 3.6 - Matriz de Rigidez da barra de grelha em relação ao sistema de eixo local	57
Figura 3.7 - Rotação de eixos	57
Figura 3.8 - Matriz de rigidez da grelha em relação ao sistema de eixos global	59
Figura 3.9 - Cargas nodais para uma grelha plana	60
Figura 3.10 - Cargas nodais em uma barra de grelha.	60
Figura 3.11 - Esforços nodais nas extremidades de uma barra de grelha	61
Figura 4.1 - Laje discretizada em elementos finitos	65
Figura 4.2 - Exemplo de entrada de dados.	67
Figura 4.3 - Placa deformada	68
Figura 4.4 - Distribuição dos momentos fletores M11	68
Figura 4.5 - Convenção dos momentos fletores e de torção no elemento finito de placa.	69
Figura 4.6 - Distribuição dos momentos fletores M22	69
Figura 4.7 - Distribuição dos momentos de torção M12.	70
Figura 4.8 - Soluções por limite inferior e limite superior.	73
Figura 4.10 - Sistema de faixas	78
Figura 4.11 - Solução do exemplo 2.	79

Figura 4.12 - Laje trapezoidal dimensionada pelo Método das Faixas com $K_x = 1$ na direção dos menores vãos.	80
Figura 4.13 - Padrão de linhas de ruptura de uma laje retangular simplesmente apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída. (desenho baseado em foto de ensaio, PARK&GAMBLE (1980))	81
Figura 4.14 - Traçado de linhas de ruptura	82
Figura 4.15 - Laje quadrada com carga uniformemente distribuída	84
Figura 4.16 - Exemplo de uma laje calculada por Analogia de Grelha, visualização da deformada.	86
Figura 5.1 - Discretização de uma laje em uma grelha plana.	87
Figura 5.3 - Discretização de uma laje em uma malha de 45 cm de largura.	90
Figura 5.4 - Discretização de uma laje em uma malha de 19 cm de largura.	91
Figura 5.5 - Discretização de uma laje em uma malha de 10 cm de largura.	91
Figura 5.6 - Discretização de uma laje em uma malha de 5 cm de largura.	92
Figura 5.15 - Reações de apoio obtidas pelo item 3.3.2.9 da NBR-6118	98
Figura 5.16 - Reações de apoio obtidas por Analogia de Grelha.	99
Figura 5.17 - Distribuição da reações de apoio nas vigas por Analogia de Grelha.	99
Figura 5.18 - Momentos fletores e de torção em função da malha	101
Figura 5.19 - Flechas máximas em função da malha	102
Figura 5.20 - Momentos fletores e de torção em função da malha	103
Figura 5.21 - Flechas máximas em função da malha	103
Figura 5.22 - Variação do momento de inércia a flexão em função da largura das faixas	104
Figura 5.23 - Somatório da rigidez à torção em relação à espessura das faixas	106
Figura 5.23 - Momentos fletores e de torção em função de G/E_c .	108
Figura 5.24 - Flechas máximas em função de G/E_c .	108
Figura 5.25 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=1$ e $G/E_c=0,4$	110
Figura 5.26 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=1$ e $G/E_c=0,2$	111

Figura 5.27 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=2$ e $G/E_c=0,2$	112
Figura 5.28 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=3$ e $G/E_c=0,4$	113
Figura 5.29 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=3$ e $G/E_c=0,2$	114
Figura 5.30 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=4$ e $G/E_c=0,2$	115
Figura 5.31 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=4$ e $G/E_c=0,4$	116
Figura 5.32 - Momentos fletores e de torção pela Analogia de Grelha em função da rigidez à torção.	117
Figura 5.33 - Flechas pela Analogia de Grelha em função da rigidez à torção	117
Figura 5.34 - Distribuição dos momentos fletores calculados por elementos finitos.	119
Figura 5.35 - Distribuição dos momentos de torção calculados por elementos finitos.	120
Figura 5.36 - Momentos fletores e de torção pelo Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) e pela Solução de Navier.	121
Figura 5.37 - Momentos fletores e de torção calculados pela Analogia de Grelha e Teoria da Elasticidade	122
Figura 5.38 - Flechas calculados pela Analogia de Grelha e Teoria da Elasticidade	123
Figura 5.39 - Malha de uma laje retangular com relação entre lados $L_y/L_x = 1,5$	124
Figura 5.40 - Momentos fletores e de torção em função da malha	125
Figura 5.41 - Momentos fletores na menor direção M22.	127
Figura 5.42 - Momentos fletores na maior direção M11	127
Figura 5.43 - Momentos de torção por elementos finitos	128
Figura 5.44 - Momentos fletores e de torção em função de J_p/I_{yy}	129
Figura 5.45 - Flechas máximas em função de J_p/I_{yy}	130

Figura 5.46 - Momentos fletores e de torção em função de J_p/I_{yy}	133
Figura 5.47 - Flecha máxima em função J_p/I_{yy}	133
Figura 5.48 - Momentos fletores em painel contínuo para analisar lajes engastadas.	134
Figura 5.49 - Momentos fletores em painel contínuo para analisar lajes engastadas.	136
Figura 5.50 - Deformada de uma laje quadrada com um engaste.	138
Figura 5.51 - Momentos fletores em na laje quadrada com quatro lados engastados.	139
Figura 5.52 - Momentos de torção na laje quadrada com quatro lados engastados.	140
Figura 5.53 - Laje retangular apoiada em vigas elásticas	145
Figura 5.54 - Momentos Fletores Máximos $M_{x\alpha}$ no meio da viga em função da rigidez do apoio por Analogia de Grelha e Teoria da elasticidade	150
Figura 5.55 - Momentos Fletores Máximos M_x no meio da laje em função da rigidez do apoio por Analogia de Grelha e Teoria da elasticidade	150
Figura 5.56 - Flecha máxima em função da rigidez do apoio por Analogia de Grelha e Teoria da elasticidade	151
Figura 5.57 - Continuidade da malha da grelha sobre os apoios.	152
Figura 5.58 - Painel de lajes contínuas.	153
Figura 5.59 - Laje simplesmente apoiada em 3 lados e um lado engastado.	154
Figura 5.60 - Painel de lajes contínuas, malha em elementos finitos.	155
Figura 5.61 - Saída gráfica da deformada do painel contínuo.	156
Figura 5.62 - Saída gráfica dos momentos fletores na direção X.	156
Figura 5.63 - Saída gráfica dos momentos fletores na direção Y.	157
Figura 5.65 - Painel contínuo por Analogia de Grelha.	159
Figura 5.66 - Painel contínuo, saída dos momentos fletores por Analogia de Grelha.	160
Figura 5.67 - Painel contínuo, deformada por Analogia de Grelha.	161
Figura 5.68 - Continuidade da malha através da rigidez à torção da viga de apoio.	162
Figura 5.69 - Laje contínua (duas de 4x6m) com apoio intermediário rígido em viga de 15x100.	165

Figura 5.70 - Momentos fletores Mx no vão e Mye no apoio com viga de 15x100	165
Figura 5.71 - Momentos fletores Mx no vão e Mye no apoio, viga de 15x40	166
Figura 5.72 - Momentos fletores My no vão e Mye no apoio, viga de 15x40.	167
Figura 5.73 - Momentos fletores Mx no vão e Myvs no apoio, viga 15x20.	167
Figura 5.74 - Momentos fletores My no vão e Mye no apoio, viga de 15x20	168
Figura 5.76 - Momentos fletores em painel contínuo com viga intermediária de 15x100	170
Figura 5.77 - Momentos fletores em painel contínuo com viga intermediária de 15x100	171
Figura 5.78 - Painel contínuo com viga intermediária de 15x60	171
Figura 5.79 - Momentos fletores de Painel contínuo com viga intermediária de 15x60	172
Figura 5.80 - Momentos de torção de Painel contínuo com viga intermediária de 15x20	172
Figura 5.82 - Laje cogumelo com quatro pilares, vão de 5m, espessura de 10 cm e carga de 10 kN/m ²	176
Figura 5.83 - Deformação da laje cogumelo por Analogia de Grelha	176
Figura 5.84 - Momentos fletores da laje cogumelo por elementos finitos	177
Figura 5.85 - Momentos fletores da laje cogumelo por Analogia de Grelha	177
Figura 5.86 - Momentos de torção da laje cogumelo por elementos finitos	178
Figura 5.87 - Deformação da laje cogumelo por Analogia de Grelha	178
Figura 5.88 - Laje nervurada quadrada com 8,5 x 8,5 m	181
Figura 5.89 - Faixas da laje nervurada	185
Figura 6.1 - Laje com bordo livre	186
Figura 6.2 - Laje com bordo livre , deformada	187
Figura 6.3 - Laje com bordo livre, momentos de torção	187
Figura 6.4 - Laje com bordo livre, momentos fletores Mx	188
Figura 6.5 - Laje com bordo livre momentos M22	188
Figura 6.6 - Laje com bordo livre, momentos de torção.	189
Figura 6.7 - Laje em L pelo método das faixas de Hillerborg	191

Figura 6.8 - Laje em L	191
Figura 6.9 - Deformada da laje cogumelo por Analogia de Grelha	192
Figura 6.10 - Momentos fletores da laje cogumelo por Analogia de Grelha	193
Figura 6.11 - Momentos fletores da laje em L por Analogia de Grelha	194
Figura 6.12 - Momentos fletores da laje em L por Analogia de Grelha	195
Figura 6.13 - Momentos de torção da laje em L por elementos finitos.	195
Figura 6.14 - Laje quadrada 4x4 m com carga linear	197
Figura 6.15 - Cargas concentradas aplicadas nos nós da grelha.	198
Figura 6.16 - Momentos fletores M11 laje com carga linear	199
Figura 6.17 - Momentos fletores M11 laje com carga linear	199
Figura 6.18 - Momentos fletores Mx laje com carga linear	200
Figura 6.19 - Laje retangular de 4x6m com furo de 2x2m	201
Figura 6.20 - Deformada da laje com furo	202
Figura 6.21 - Momentos fletores da laje com furo	202
Figura 6.22 - Momentos de torção da laje com furo	203
Figura 6.23 - Esforços cortantes na laje com furo	203
Figura 6.24 - Pavimento de um edifício em laje cogumelo	205
Figura 6.25 - Deformada do pavimento em laje cogumelo.	205
Figura 6.26 - Momentos fletores da laje cogumelo	206
Figura 6.27 - Momentos de torção da laje cogumelo	206

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,4	101
Tabela 5.2 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,2	102
Tabela 5.3 - Resultados dos momentos e flecha máxima, para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	107
Tabela 5.4 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,4 e Jp/Iyy = 1	109
Tabela 5.5 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,2 e Jp/Iyy = 1	110
Tabela 5.5 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,2 e Jp/Iyy = 2	111
Tabela 5.6 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . Relação G/Ec = 0,4 e Jp/Iyy = 3	112
Tabela 5.7 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . Relação G/Ec = 0,2 e Jp/Iyy = 3	113
Tabela 5.8 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . Relação G/Ec = 0,2 e Jp/Iyy = 4	114
Tabela 5.9 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	115

Relação $G/E_c = 0,4$ e $J_p/I_{yy} = 4$	115
Tabela 5.10 - Resultados dos momentos e flecha máxima em função da rigidez a torção J_p/I_{yy} laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2	116
Relação $G/E_c = 0,4$	116
Tabela 5.11 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4 m pela Solução de Navier, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .	118
Tabela 5.12 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m pelo Método dos Elementos Finitos altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 1000 kN/m^2 .	120
Tabela 5.13 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x6 m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .	
Relação $G/E_c = 0,2$ e $J_p/I_{yy} = 2$	124
Tabela 5.14 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 1000 kN/m^2 .	
Relação $G/E_c = 0,4$ e $J_p/I_{yy} = 2$	125
Tabela 5.15 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 , calculada pelas Tabelas de Bares.	126
Tabela 5.16 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 , calculada por elementos finitos.	
Coefficiente de Poisson 0,2	126
Tabela 5.17 - Valores de momentos e flechas em função de J_p/I_{yy} para laje quadrada 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .	
Relação $G/E_c = 0,4$ Malha 36x36	128
Tabela 5.18 - Valores de momentos e flechas em função de J_p/I_{yy} para laje quadrada 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .	129
Relação $G/E_c = 0,2$ Malha 36x36	129

Tabela 5.19 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x8m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² , calculada pelas Tabelas de Bares.	131
Tabela 5.20 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x8m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² , calculada pela Teoria da Elasticidade (Navier) Coeficiente de Poisson 0,2	131
Tabela 5.21 - Valores de momentos e flechas em função de Jp/Iyy para laje quadrada 4x8m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . Relação G/Ec = 0,4 Malha 36x36	132
Tabela 5.22 - Valores de momentos e flechas em função de Jp/Iyy para laje quadrada 4x8m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . Relação G/Ec = 0,2, Malha 36x36 cm	132
Tabela 5.23 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,4 Jp/Ixx=2	135
Tabela 5.24 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,4 Jp/Ixx=2.5	136
Tabela 5.25 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,4 Jp/Ixx=2	137
Tabela 5.26 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² Relação G/Ec = 0,4 Jp/Ixx=2.5	137
Tabela 5.27 -Resultado tabela de Bares . laje Quadrada 4x4 m, h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . Coeficiente de Poisson = 0	138
Tabela 5.28 -Resultado tabela de Bares . laje Quadrada 4x4 m, h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	139

Coefficiente de Poisson = 0.15	139
Tabela 5.32 - Resultado da Análise por Elementos Finitos. Laje Quadrada 4x4 m, h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	140
Coefficiente de Poisson = 0.2	140
Tabela 5.33 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=5 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	141
Relação G/Ec = 0,4 e Jp/Iyy = 3	141
Tabela 5.34 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ²	142
Relação G/Ec = 0,4 e Jp/Iyy = 3	142
Tabela 5.35 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=20 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	142
Relação G/Ec = 0,4 e Jp/Iyy = 3	142
Tabela 5.36 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura h=30 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	143
Relação G/Ec = 0,4 e Jp/Iyy = 3	143
Tabela 5.37 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4 m, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ²	144
Solução Elástica de Navier	144
Tabela 5.38 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ²	144
Resultados da Analogia de Grelha para a malha de 36x36 cm	144
Tabela 5.39 - Coeficientes para flechas e momentos de laje quadrada com quatro lados apoiados em vigas flexíveis, conforme TIMOSHENKO.	
Coefficiente de Poisson = 0,25	146
Tabela 5.40 - Momentos fletores e flechas calculados pela Teoria da Elasticidade.	
Coefficiente de Poisson = 0,25	148
Tabela 5.41 - Momentos fletores e flechas calculados por Analogia de Grelha.	148
G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2,8	148
Tabela 5.42 - Momentos fletores e flechas calculados por Analogia de Grelha.	149

G/Ec = 0,4 Jp/Iyy =2	149
Tabela 5.43 - Resultados pela Tabela de Bares. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	155
Tabela 5.44 - Resultados da análise por elementos finitos. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	158
Tabela 5.45 - Resultados da análise pelas tabelas de Bares . h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	158
Tabela 5.46 - Resultados da análise por Analogia de Grelha . h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	161
Jp = 2,5 Iyy	161
Tabela 5.47 - Resultados da análise por Analogia de Grelha , h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	163
Tabela 5.48 - Resultados da análise por Elementos Finitos. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	168
Tabela 5.49 - Resultados da análise por Analogia de Grelha . h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	173
G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2,5	173
Tabela 5.50 - Resultados da análise por Analogia de Grelha . h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	174
G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 1,0	174
Tabela 5.51 - Resultados da análise por Analogia de Grelha . h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	174
G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2,5	174
Tabela 5.52 - Resultados da Laje Cogumelo por Analogia de Grelha e Elementos Finitos . G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2.5	179
Tabela 5.53 - Resultados da Laje Cogumelo por Analogia de Grelha e Elementos Finitos . G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2.5	179
Tabela 5.54 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje nervurada G/Ec = 0,4	182

Tabela 5.55 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje nervurada, Jp das faixas calculado com a equação 5.6	182
Tabela 5.56 - Resultados pela Teoria da Elasticidade uma laje nervurada, Tabela de Bares Altura total da laje h=24 cm	183
Tabela 5.57 - Resultados pela Teoria da Elasticidade uma laje nervurada, Tabela de Bares Altura equivalente heq =14,7 cm	184
Tabela 6.1 - Resultados da análise por Elementos Finitos de uma laje em L. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	189
Tabela 6.2 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje com bordo livre. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2,5	189
Tabela 6.3 - Resultados da análise pela tabela de Bares de uma laje com bordo livre. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 100 kN/m ² . Momentos My no centro da laje Coeficiente de Poisson = 0	190
Tabela 6.4 - Resultados da análise pela tabela de Bares de uma laje com bordo livre. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . Momentos My no centro da laje de Poisson = 0.15	190
Tabela 6.5 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje em L. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² . G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2,5	196
Tabela 6.6 - Resultados da análise por Elementos Finitos de uma laje em L. h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ² .	196
Tabela 6.7 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje com carga linear de 22,50 kN/m .h=10 cm, G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2,5	200

Tabela 6.8 - Resultados da análise por Elementos Finitos de uma laje com carga linear de 22,50 kN/m .h=10 cm - Coeficiente de Poisson = 0	200
Tabela 6.9 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje com furo com carga distribuída de 10 kN/m ² .h=10 cm,	204
G/Ec = 0,4 Jp/Iyy = 2,5	204

LISTA DE SÍMBOLOS

a, b	lados da placa ou da laje, m
b	espessura da faixa da grelha, cm
b _{vig}	largura da seção da viga, cm
D	rigidez a flexão da placa
E	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young, Mpa
E _c	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young do concreto, Mpa
f	flecha da laje ou da viga, cm
G	módulo de elasticidade transversal, Mpa
h	altura da placa ou da laje, cm
h _{vig}	altura da seção da viga, cm
I	momento de inércia axial da barra, cm ⁴
I _{yy}	momento de inércia axial da seção da faixa em relação ao eixo y – cm ⁴
J _p	momento de inércia polar, cm ⁴
K _t	rigidez a torção da barra da grelha
K _x	coeficiente de carga na direção X
K _y	coeficiente de carga na direção Y
L	comprimento da barra, m
lx	lado menor da placa ou da laje, m
ly	lado maior da placa ou da laje, m
M _x	momento fletor na direção X, kN.m/m
M _y	momento fletor na direção Y, kN.m/m
M _{x_e}	momento fletor no engaste na direção X, kN.m/m
M _{y_e}	momento fletor no engaste na direção Y, kN.m/m
M _{xy}	momento de torção, kN.m/m
m _u	momento último de ruptura da laje, kN.m/m
M _{dx}	momento fletor de cálculo na direção X, M _{dx} = M _x .γ _f , kN.m/m
M _{dy}	momento fletor de cálculo na direção Y, M _{dy} = M _y .γ _f , kN.m/m

Mtd	momento de torção de cálculo , $Mtd = Mt \cdot \gamma_f$, kN.m/m
M11	momento fletor no elemento finito de placa, na direção 1 (SAP90), kN.m/m
M22	momento fletor no elemento finito de placa, na direção 2 (SAP90), kN.m/m
M12	momento de torção no elemento finito de placa, (SAP90), kN.m/m
Pu	carga última de ruptura da laje, kN
qu	carga última de ruptura da laje, carga uniformemente distribuída, kN/m ²
q	carga uniformemente distribuída, kN/m ²
Qx	esforço cortante na direção X, kN/m
Qy	esforço cortante na direção Y, kN/m
RA	força de reação no nó A da barra kN.m
RB	força de reação no nó B da barra kN.m
ex	deformação específica na direção X
ey	deformação específica na direção Y
γ_f	coeficiente de majoração
γ	relação entre a rigidez da viga de apoio e a rigidez da placa
ν	coeficiente de Poisson
ω	deslocamento vertical da placa, flecha, cm
Φ	rotação da barra em relação ao eixo 1, rad
θ	rotação do nó da barra, em relação ao eixo 2 – rad
1/rx	curvatura na direção X
1/ry	curvatura na direção Y
{F}	vetor coluna de cargas externas
{ δ }	vetor deslocamento dos nós
[K]	matriz de rigidez da estrutura
{d}	vetor de deslocamentos correspondente aos nós de extremidade da barra
{Fo}	vetor coluna dos esforços de imobilização dos nós da estrutura
[r]	matriz de rigidez do elemento de barra
[R]	matriz de rotação
{S}	esforços nas extremidades da barra

{So} esforços de mobilização dos nós na extremidade das barras

RESUMO

Simular uma placa através de elementos de barras, formando uma grelha, é um procedimento conhecido desde os primórdios da Análise Matricial de estruturas como Analogia de Grelha.

Com o avanço recente dos equipamentos computacionais e dos programas de análise estrutural, esse procedimento voltou a ser atrativo para projetar lajes de Concreto Armado. Pode-se, hoje em dia, modelar a laje com um número muito grande de barras, fornecendo resultados numéricos muito precisos. Esse tipo de modelamento vem sendo usado em diversos programas de projeto de estruturas de Concreto Armado.

Esse procedimento possui algumas vantagens em relação a outros métodos numéricos, já que tem uma formulação muito mais simples e uma facilidade maior de utilizar os resultados dos esforços nas barras para fazer o dimensionamento das seções de Concreto Armado das lajes.

Nesse trabalho serão apresentados estudos sobre vários parâmetros que influenciam os resultados dessa formulação. Os parâmetros mais importantes são a malha utilizada e o coeficiente de rigidez à torção a ser utilizado nas barras.

Os resultados da Analogia de Grelha foram comparados com soluções analíticas da Teoria das Placas e com o método numérico dos Elementos Finitos, mostrando que é possível obter-se soluções muito próximas da teoria elástica e ainda variar os parâmetros de rigidez para obter outras soluções possíveis de modo semelhante a teoria das faixas de Hillerborg.

Serão apresentados modelos de lajes quadradas, retangulares sobre apoios rígidos ou sobre vigas usuais, além de incluir diversos exemplos mostrando a aplicação em projetos reais.

ABSTRACT

The solution of plate problems replacing the original structure by an assemblage of beams, perpendicular to each other to represent the actual continuum, is probably the most ancient procedure of analysis from the theory of plates. This solution is well known in structural analysis as the Gridwork Analogy.

The development of modern electronic computers has made this method attractive to design reinforced concrete slabs. It is possible, nowadays, to calculate a plate with a great number of grid members, with very accurate results. The accuracy obtainable is sufficient for most practical purposes. This procedure has been used in many commercial computer systems. The analysis of bending plates is reduced to the solution of an equivalent gridwork, which can be accomplished by the matrix displacement method.

The Gridwork Analogy has some advantages in comparison with other numerical methods. It has a very simple formulation, the generation of member stiffness coefficients is extremely simple and it makes easy to obtain the members forces and the reinforcement of the sections of concrete slabs.

Although various geometrical shapes of plates, such as triangular, trapezoidal, and curvilinear, could be studied, the attention will be confined mostly to square and rectangular plates. Several models of square and rectangular concrete slabs, over rigid supports and over flexible beams, and many others examples of real situations of concrete slab designs will be shown.

This work will show the results of several studies carried out over the parameters that influence the results of the analysis. The most important parameters are the size of subdivisions and the torsional stiffness of the members.

The results obtained with the Gridwork Analysis have been compared with analytical solutions from the Theory of Plates and with the numerical method of Finite Element Analysis. It has been shown that it is possible to have results very close to those of the elastic theory and also that it is possible to change the stiffness coefficients to produce other possible solutions in the same manner as the strip method of Hillerborg.

1-INTRODUÇÃO

1-INTRODUÇÃO

As lajes podem ser consideradas como um dos elementos mais comuns utilizados em estruturas de edificações .

Calcular, dimensionar e detalhar painéis de lajes contínuas ou isoladas tem sido um problema relevante, especialmente na área de projetos.

Durante muitos anos, o cálculo de lajes limitou-se à utilização de tabelas de lajes isoladas, geralmente retangulares, e a certos procedimentos simplificados para determinar os esforços em painéis contínuos.

Com o desenvolvimento de programas baseados no Método dos Elementos Finitos ou no Método das Diferenças Finitas, tornou-se possível a análise de painéis contínuos de lajes, pelo menos para a determinação dos esforços e deslocamentos. Para problemas práticos, algumas dificuldades ainda permanecem, porque poucos sistemas fazem o cálculo e detalhamento das armaduras a partir de análises por elementos finitos.

Simular uma placa através de elementos de barras formando uma grelha é um processo conhecido, desde os primórdios da Análise Matricial de Estruturas, como Analogia de Grelha. Com o avanço recente dos equipamentos computacionais e dos programas de análise estrutural, esse processo voltou a ser atrativo para projetar lajes de Concreto Armado.

Pode-se modelar as lajes com um número grande de barras, fornecendo resultados numéricos muito precisos. Esse tipo de modelamento, dentro de certas limitações, vem sendo usado em muitos programas de projeto de estruturas. No entanto, encontra-se pouca informação sobre Analogia de Grelha nas publicações e nas bibliografias existentes. Como a aplicação é interessante do ponto de vista prático e pouca coisa tem sido publicada sobre o assunto, julgou-se importante a realização deste trabalho.

A Analogia de Grelha possui algumas vantagens em relação a outros procedimentos numéricos. Possui uma formulação muito mais simples e uma facilidade maior de utilizar

os resultados dos esforços nas barras, que podem ser discretizadas na direção das barras da armadura, para fazer o dimensionamento das seções de concreto armado das lajes.

1-1 HISTÓRICO

Devido ao fato da análise teórica de placas e lajes ser muito mais complexa do que a de outros elementos estruturais, como vigas e pilares, os pisos de edifícios foram, durante muitos anos, simples imitações dos antigos pisos totalmente construídos em madeira. Mesmo com o surgimento do aço como material de construção, as estruturas continuaram a ser executadas com pisos e vigas secundárias em madeira. Somente as vigas mestras ou principais eram executadas em aço.

O modelo estrutural era muito simples: as pranchas de madeira que formavam o piso eram semelhantes a vigas simplesmente apoiadas e os esforços distribuíam-se em uma só direção. O dimensionamento era resultado do conhecimento empírico baseado na experiência dos construtores ao longo dos anos.

Essa solução vem sendo adotada, até hoje, em muitas estruturas de concreto e aço na forma de lajes pré-moldadas de concreto, lajes pretensadas alveolares e lajes do tipo “steel-deck”. Isso ocorre em parte pelas vantagens construtivas e pela facilidade na análise e dimensionamento, que pode ser feita usando-se a teoria de vigas bi-apoiadas.

Em 1906, foi construído, nos Estados Unidos, por C.A.P. Turner, o primeiro piso de edifício em laje plana sem vigas, conhecida, hoje em dia, como laje cogumelo. Essa solução surgiu da necessidade de criar-se pavimentos com tetos lisos sem vigas, extremamente convenientes em certas edificações. Era uma forma totalmente nova de construção, e na época não havia nenhum método de análise disponível. A estrutura foi totalmente construída de modo empírico e antes de ser utilizada, foram realizados diversos testes de carga para a sua aceitação. O resultado foi um sucesso e muitas estruturas similares foram construídas pelo mesmo processo e testadas com provas de carga. Durante sete anos, foram construídas mais de 1000 edificações nos Estados Unidos, em laje cogumelo, pelo mesmo procedimento empírico. Nesse período, como ainda não havia nenhum método disponível para a análise, não havia um consenso sobre qual a melhor

solução em termos de detalhamento de armaduras. Muitos esquemas eram utilizados, alguns semelhantes aos sistemas de detalhamento modernos com armaduras paralelas às linhas de pilares. Outros eram variações com detalhamentos com armaduras em diagonal, armaduras circulares sobre os pilares, etc.

A solução de painéis de lajes contínuas armadas em duas direções, tão comum nos dias de hoje, só começou a ser utilizada após 1911. Historicamente, a transição da solução de lajes armadas em uma direção para lajes armadas em duas direções foi realizada de modo diferente da laje cogumelo. Este sistema só foi utilizado com sucesso após a realização de estudos cuidadosos. Em 1911, foram realizados alguns testes em St.Louis, nos Estados Unidos, com painéis isolados de lajes armadas em duas direções.

Muitos métodos de projeto foram apresentados por diversos autores para o cálculo e dimensionamento de lajes isoladas e para painéis contínuos de lajes armadas em duas direções. Entre eles, podemos citar a solução da distribuição de momentos, proposta por WESTERGAARD e SLATER (1926), e o processo de Marcus, resultado de um estudo elaborado por MARCUS (1929), com a aplicação da teoria da elasticidade e a teoria das grelhas.

Durante muitos anos, esse sistema de pisos foi calculado com base em hipóteses simplificadas, como por exemplo, a hipótese de que as vigas de apoio não se deformavam. Os cálculos eram feitos com lajes sobre apoios indeslocáveis. Isso sempre acarretou o uso de vigas de grande rigidez, geralmente vigas com grande altura. Devido às dificuldades de análise, as verificações aos estados limites últimos de utilização, em especial ao estado limite de deformações, nem sempre eram realizadas.

Recentemente, os esforços têm se concentrado no desenvolvimento de elementos estruturais pré-moldados para pisos em edificações pré-fabricadas ou concretadas “in situ” e em pisos com lajes cogumelos protendidas. Para pisos os elementos pré-fabricados apresentam-se atualmente em grande variedade, desde lajes com seção em T, duplo T (lajes pi), alveolares, até lajes treliças, armadas em uma e duas direções.

O desenvolvimento da análise estrutural, de um modo geral, teve início com a pesquisa de problemas de Estática. Os primeiros estudos de placas, no entanto, foram feitos basicamente sobre o problema de vibrações livres.

Os primeiros estudos matemáticos foram feitos por Euler, em 1766, apresentando soluções para o problema de membranas elásticas usando uma analogia com dois sistemas de molas perpendiculares entre si. J. Bernoulli, que era um discípulo de Euler, estendeu a analogia para placas, introduzindo a Analogia de Grelha pela primeira vez. Como a resistência devida aos momentos de torção não foi incluída na análise, os resultados obtidos experimentalmente não estavam completamente de acordo com a teoria.

Lagrange, em 1813, corrigindo um trabalho apresentado pela matemática francesa Sophie Germain na Academia Parisiense, foi o primeiro a usar a equação diferencial correta para vibrações livres de placas.

A solução correta das equações diferenciais de placas retangulares com resistência à flexão foi encontrada por NAVIER (1785-1836), considerado o fundador da moderna Teoria da Elasticidade. Para a solução de certos problemas de valor de contorno, ele introduziu um método para transformar as equações diferenciais em equações algébricas. Para o problema de placas retangulares simplesmente apoiadas, ele usou soluções por séries duplas trigonométricas, introduzidas como solução matemática por Fourier na mesma época. Essa solução foi apresentada em um artigo para a Academia Francesa de Ciências em 1820.

O fundador da teoria estendida das placas é KIRCHHOFF (1824-1887), que introduziu o método dos deslocamentos virtuais na solução dos problemas de placas.

Na virada do século, devido à construção de navios em estrutura de aço, em substituição à madeira, aconteceram importantes contribuições no desenvolvimento de teorias de placas, principalmente por cientistas russos, como KRYLOV (1863-1945) e BOOBNOV (1902). Timoshenko foi o responsável por chamar a atenção do Ocidente para as pesquisas desenvolvidas pelos russos, que foram muito prejudicadas pela barreira da língua.

Em 1907, Föppl apresentou soluções para a teoria não-linear de placas. No entanto a forma final das equações diferenciais de placas sujeitas a grandes deformações só foi desenvolvida por von Fármán. NÁDAI (1968) foi um dos primeiros a publicar o primeiro livro exclusivamente sobre a teoria de placas.

Devido ao desenvolvimento da indústria aeronáutica, muito trabalho foi feito no estudo de soluções analíticas rigorosas de placas.

Uma nova abordagem da análise estática de placas foi introduzida por Johansen, em 1943. Conhecida como teoria das linhas de ruptura, é considerada o primeiro importante desvio da teoria clássica da elasticidade na solução do problema de placas.

Em 1941, Hrennikoff desenvolveu um sistema equivalente à Analogia de Grelha, chamado de *Framework Method (Lattice Analogy)*, para a análise estática de problemas complexos de placas. O seu trabalho fundamental de discretização do meio contínuo não pôde ser plenamente utilizado, devido à falta de recursos computacionais na época.

Em 1956, foi introduzido o método dos elementos finitos por Turner, Clough, Martin e Topp, o qual tornou possível a solução numérica de problemas complexos de placas e cascas.

O método das diferenças finitas, também orientado para computadores, foi desenvolvido por Stüssi e Collatz e bastante utilizado para a construção de tabelas.

1-2 - MOTIVAÇÃO

Como muitos programas de computadores utilizam a Analogia de Grelha para o cálculo de pavimentos em lajes de concreto armado, parece que o procedimento é vantajoso. Algumas vantagens podem ser descritas a partir de uma avaliação superficial. A programação é simples utiliza rotinas de análise matricial de grelhas planas. A geração dos dados para o modelo pode ser feita a partir de entradas gráficas e a geração automática de malhas é simplificada. A Analogia de Grelha também facilita a programação dos algoritmos de dimensionamento e detalhamento das armaduras, que seguem as mesmas direções da malha da grelha.

Para a análise de lajes nervuradas e mistas em concreto armado, a Analogia de Grelha apresenta resultados mais corretos do que a análise por Elementos Finitos com elementos planos ou a simplificação da Normas Brasileira NBR-6118, que permite o cálculo como placa no regime elástico, desde que as dimensões e espaçamentos das nervuras obedeçam a certas limitações.

Em alguns casos, como por exemplo na região de apoios sobre pilares, os resultados são melhores do que os da análise por elementos finitos ou diferenças finitas.

Por outro lado, muito pouco tem sido publicado sobre o assunto. Não existem bibliografias específicas é possível encontrar apenas seções em alguns livros.

A motivação para a elaboração deste trabalho fundamenta-se na possibilidade de contribuir para o início de pesquisas mais aprofundadas neste assunto e para determinar o grau de validade, as limitações, as vantagens e as desvantagens da Analogia de Grelha.

1-3 - UTILIZAÇÃO

A utilização da Analogia de Grelha, a princípio, estaria voltada para a elaboração de programas para o projeto de pisos de edifícios em lajes de concreto armado convencional. Este estudo será feito apenas com análises elásticas lineares. Estudos mais avançados poderão tornar o processo viável também para análises não-lineares .

Atualmente, existem diversas áreas da engenharia de projetos estruturais que apresentam uma demanda crescente, em taxas bem elevadas, e que necessitam de sistemas de cálculo mais acessíveis do que os disponíveis. Entre esses, destacam-se o projeto de lajes cogumelo protendidas, as lajes pré-moldadas nervuradas com vigotas treliçadas e os pavimentos de edifícios em estrutura metálica mistas com lajes em concreto, especialmente do tipo “steel-deck.”

A solução do problema de placas pelo caminho clássico é limitada a um número relativamente pequeno de geometria de placas, de carregamentos e condições de contorno. Se estas condições forem mais complexas, a análise torna-se muito difícil e em muitos casos impraticável.

Nas aplicações práticas em engenharia trabalha-se sempre com um certo grau de imprecisão nos dados. As cargas, as propriedades dos materiais, a geometria e as condições de contorno são sempre aproximações da situação real. Portanto, uma solução exata do problema também é uma aproximação da solução real.

Portanto, é aceitável, para fins práticos, a utilização de procedimentos numéricos e analogias, quando as soluções matematicamente rigorosas não forem possíveis.

A Analogia de Grelha ficaria então como uma alternativa de análise, dentro do seu limite de validade, entre todas as disponíveis, para o cálculo de lajes em concreto armado.

2-TEORIA DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO

2.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar os fundamentos da teoria elástica das placas e a solução clássica de alguns casos de lajes, que serão utilizados em estudos comparativos com a Analogia de Grelha. Serão apresentadas as deduções das equações diferenciais que solucionam o problema das placas planas retangulares, simplesmente apoiadas, sujeitas a pequenas deformações e com carregamento perpendicular à sua superfície média.

Como a equação que define o campo de deformações da placa é uma equação diferencial de quarta ordem, a solução exata, analítica, só é possível para poucos casos. Neste capítulo, será apresentada a solução exata fechada apenas para uma laje retangular sujeita a um carregamento senoidal. Para outros casos de carregamento, serão utilizadas soluções por séries trigonométricas, conhecida como solução de Navier.

2.2 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DAS PLACAS EM COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES

Placas são estruturas de superfície plana, sem curvatura, onde uma das dimensões é pequena comparada às outras.

Define-se como altura h da placa, a menor das três dimensões e a superfície média como sendo aquela que passa pelos pontos médios do segmento que determina a altura em cada ponto da placa, conforme a figura 2.1.

A teoria das placas, para pequenas deformações, é baseada nas seguintes hipóteses básicas, conforme TIMOSHENKO, S.P. E WOINOWSKY-KRIEGER, S, (1959) e RUDOLPH SZILARD (1974):

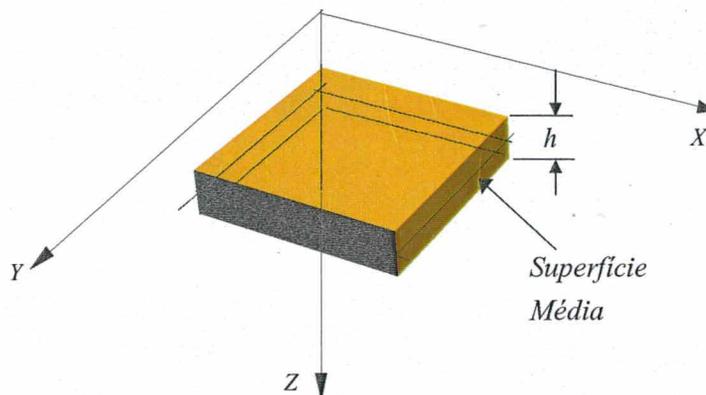


Figura 2.1 - Elemento de placa

- O material da placa é elástico, homogêneo e isotrópico.
- A placa indeformada é plana.
- A espessura (h) da placa é pequena, em relação às outras dimensões, da ordem de $1/10$.
- As deformações angulares da superfície média são pequenas comparadas à unidade.
- Os deslocamentos dos pontos da superfície média são pequenos comparados com a espessura da placa. (Inferiores a $1/10$, para que se possa considerar pequenas deformações).
- As cargas dinâmicas ou estáticas são aplicadas perpendicularmente à superfície da placa.
- A configuração deformada da placa é tal que, linhas retas inicialmente perpendiculares à superfície média permanecem retas e perpendiculares.
- As deformações devidas ao cisalhamento são desprezadas.
- A deformação da placa é produzida por deslocamentos dos pontos da superfície média perpendicular ao plano indeformado.
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às tensões no mesmo plano.

Será utilizado, neste estudo, um sistema de coordenadas cartesiano retangular destrógiro, com os eixos X,Y e Z orientados espacialmente conforme indicado na Figura 2.1.

As componentes do deslocamento linear u,v e w são orientadas segundo os eixos X,Y e Z, respectivamente.

Como foi assumido que a placa é submetida a forças estáticas perpendiculares à superfície média, das seis equações fundamentais de equilíbrio serão necessárias apenas três.

Considerando-se um elemento de placa de dimensões dx e dy , submetido a uma carga distribuída q , o equilíbrio é obtido a partir dos seguintes esforços internos atuantes: momentos fletores M_x e M_y e os momentos de torção M_{xy} e M_{yx} e os esforços cortantes Q_x e Q_y , atuando nas faces do elemento.

Como os momentos fletores e as forças cortantes dependem das coordenadas X e Y, deve-se levar em consideração as pequenas mudanças em seus valores quando as coordenadas variam com os pequenos valores dx e dy , como mostrado nas figuras 2.2 e 2.3.

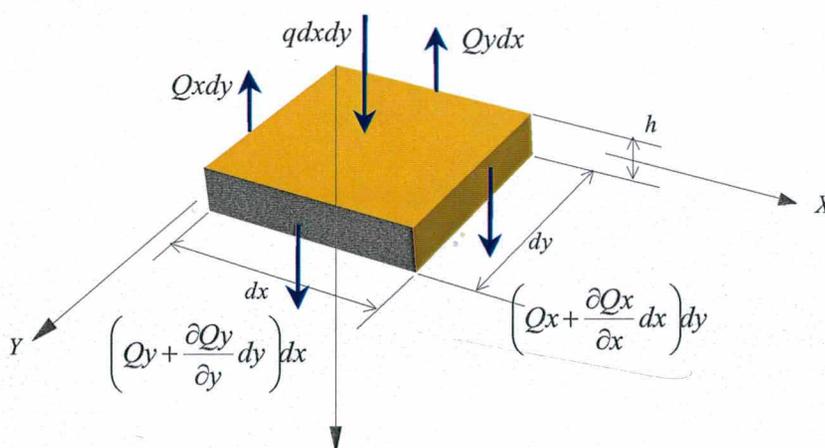


Figura 2.2 - Forças cortantes em um elemento de placa.

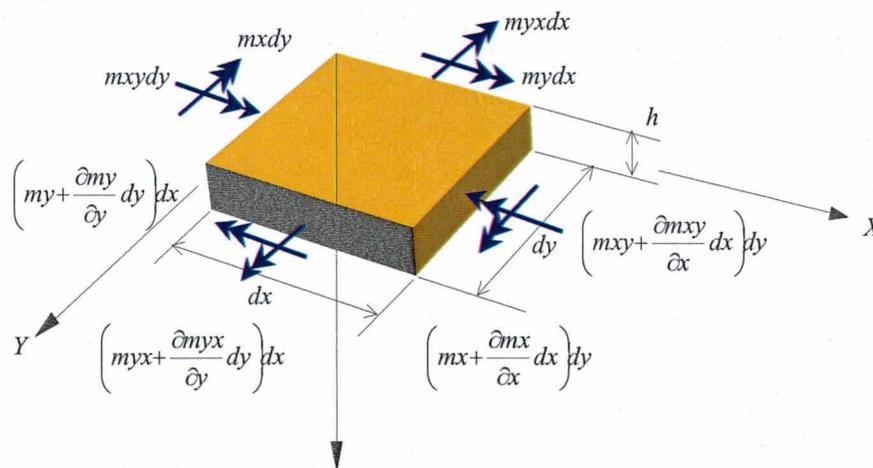


Figura 2.3 - Momentos fletores e de torção em um elemento de placa.

A carga distribuída, denominada q , atua em toda a superfície superior da placa.

Portanto a carga total atuando no elemento é :

$$Q = q \cdot dx \cdot dy \tag{2.1}$$

Fazendo o somatório de momentos segundo Y, tem-se:

$$Myx + \frac{\partial Myx}{\partial y} dy - Myx + Mx + \frac{\partial Mx}{\partial x} dx - Mx - (Qx + \frac{\partial Qx}{\partial x} dx) \frac{dx}{2} - Qx \frac{dx}{2} = 0 \tag{2.2}$$

Desprezando os diferenciais de ordem superior $dx \cdot dx$, obtém-se:

Como Mx, Myx e Qx são esforços concentrados,

$$Myx = myx \cdot dx \tag{2.3}$$

$$Qx = qx \cdot dy \tag{2.4}$$

$$Mx = mx \cdot dy \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dy \cdot dx + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \cdot dx - q_x \cdot dy \cdot dx = 0 \quad (2.6)$$

Dividindo tudo por $dx dy$. Pelo mesmo procedimento obtém-se:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.7)$$

O somatório de forças segundo o eixo z

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dy \cdot dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx \cdot dy + q \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy + q \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (2.10)$$

$$-Q_x + Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx - Q_y + Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy + q \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (2.11)$$

Substituindo as eqs. (2.7) e (2.10) em (2.11)

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = -q \quad (2.12)$$

Como $m_{yx} = m_{xy}$, obtém-se a equação 2.13, que é a equação de equilíbrio da placas. É muito importante notar que esta equação é independente do fato de a placa estar em regime elástico ou plástico, independe do coeficiente de Poisson e do fato de a placa ser isotrópica ou ortotrópica.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q \quad (2.13)$$

Considerando um elemento de placa com espessura constante h , sujeito a um momento fletor m_x que provoca uma curvatura $1/r_x$.

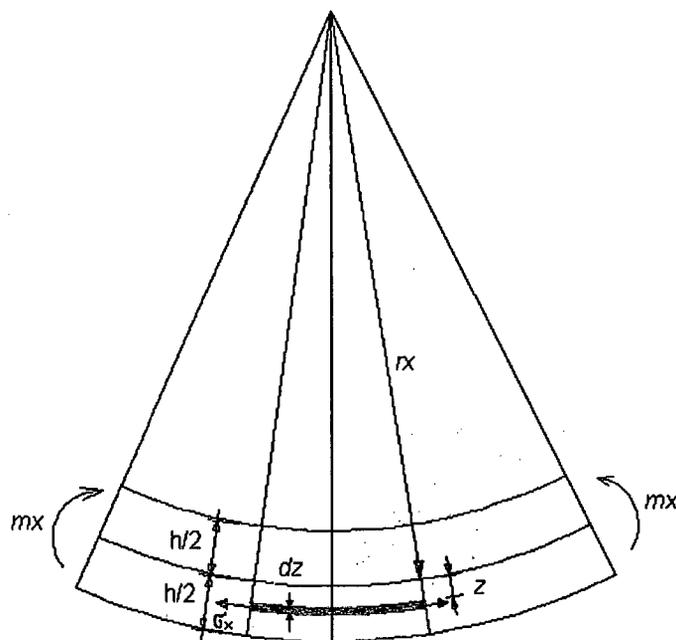


Figura 2.4 – Curvatura de um elemento de placa

Pode-se escrever a curvatura como:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\epsilon_x}{z} \quad (2.14)$$

Onde ϵ_x é a deformação específica de uma fibra localizada a uma distância z na superfície média.

A curvatura também pode ser escrita como:

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad \text{onde } w \text{ é o deslocamento da placa na direção } z \quad (2.15)$$

Combinando as equações (2.14) e (2.15), obtém-se

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.16)$$

De modo análogo, obtém-se:

$$\varepsilon_y = -z \frac{d^2 w}{dy^2} \quad (2.17)$$

A lei de Hooke para material elástico linear, em duas dimensões, é dada por:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.18)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.19)$$

$$\sigma_x = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.20)$$

$$\sigma_y = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

Da figura (2.4), pode-se obter o momento m_x por unidade de largura na direção x como:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} -z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dz \quad (2.21)$$

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad (2.22)$$

Integrando e aplicando os limites de integração obtém-se:

$$m_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.23)$$

E, de modo análogo:

$$m_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (2.24)$$

Fazendo:

$$D = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.25)$$

o qual denomina-se rigidez a flexão da placa.

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.26)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (2.27)$$

O momento de torção, produzido pelas tensões de cisalhamento $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ pode ser calculado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.28)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.29)$$

$$m_{xy} = -(1-\nu)D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.30)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (2.31)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} Gz dz \quad (2.32)$$

Substituindo as equações (2.26) , (2.27), (2.32) na equação de equilíbrio (2.13), obtém-se a equação diferencial das placas ou equação de Lagrange, em coordenadas cartesianas retangulares:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.33)$$

Ou, para qualquer sistema de coordenadas, usando o operador Laplaciano :

$$D \nabla^2 \nabla^2 \omega = q \quad (2.34)$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial de quarta ordem, não-homogênea, do tipo elíptica, com coeficientes constantes e é linear, já que os coeficientes de ω não têm expoentes maiores que um.

Resumo das equações diferenciais das placas:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.36)$$

$$m_{xy} = -m_{yx} = -(1-\nu)D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.37)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (2.38)$$

$$mxy = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.39)$$

2.3 - SOLUÇÃO RIGOROSA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DAS PLACAS

A solução exata fechada de placas é restrita a poucos casos e, portanto, com pouca finalidade prática.

Outras soluções matemáticas exatas disponíveis para o problema de placas são :

- 1. A solução por séries duplas trigonométricas
- 2. Solução por séries simples.

A seguir, apresenta-se um exemplo com a solução matemática exata de um problema de placa, encontrado em TIMOSHENKO, S.P. E WOINOWSKY-KRIEGER, S, (1959). Trata-se de uma placa retangular com carregamento senoidal distribuído, escolhido justamente para que se possa ter uma solução exata da equação de Lagrange.

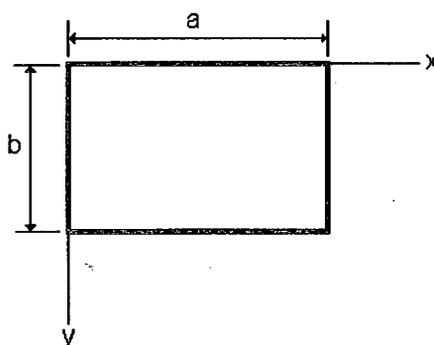


Figura 2.5 - Placa retangular simplesmente apoiada com carga senoidal

Uma placa retangular com as dimensões e orientação dos eixos conforme mostradas na Figura 2.5, está sujeita a um carregamento distribuído sobre toda a superfície de acordo com uma lei senoidal dada pela expressão:

$$q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (2.40)$$

onde q_0 representa o valor máximo da carga no centro da placa.

Substituindo este carregamento na equação de Lagrange, obtém-se:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (2.41)$$

As condições de contorno para a placa simplesmente apoiada são:

$$\text{Para } x = 0 \text{ e } x = a \quad \text{tem-se} \quad M_x = 0 \quad \text{e} \quad w = 0$$

$$\text{Para } y = 0 \text{ e } y = b \quad \text{tem-se} \quad M_y = 0 \quad \text{e} \quad w = 0$$

Usando as expressões para o cálculo dos momentos

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.26)$$

$$m_{xy} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.30)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (2.27)$$

E, como $w = 0$ nos bordos, tem-se

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (2.46)$$

Pode-se mostrar que, para os lados paralelos a x e y , as condições de contorno são:

Para $x = 0$ e $x = a$ tem-se $w = 0$ e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.47)$$

Para $y = 0$ e $y = b$ tem-se $w = 0$ e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.48)$$

A solução para a equação de Lagrange que satisfaz todas as condições de contorno apresentadas, pode ser dada por:

$$w = C \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (2.49)$$

onde C é uma constante que deve satisfazer a equação (2.40), a qual, substituída na equação (2.41), resulta em:

$$\frac{q_0}{D} = \pi^4 C \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (2.50)$$

Obtém-se, então, um campo de deslocamentos para a placa dado por:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (2.51)$$

Com a expressão que define o campo de deslocamento e utilizando as equações (2.26), (2.27) e (2.30) que definem os momentos, obtém-se os campos de momentos fletores e de torção para a placa:

$$m_x = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (2.52)$$

$$m_y = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \sin \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (2.53)$$

$$m_{xy} = \frac{q_0(1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 a \cdot b} \cos \frac{\pi \cdot x}{a} \cos \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (2.54)$$

2.4 – SOLUÇÕES POR SÉRIES SIMPLES DE FOURIER

O Teorema de Fourier estabelece que qualquer função arbitrária $y = f(x)$ pode ser escrita como uma série infinita, de termos em senos e cossenos.

Se $f(x)$ é uma função periódica, o Teorema de Fourier diz que a função original pode ser substituída pela soma de diversas funções de onda senos e cossenos :

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + A_2 \cos \frac{4\pi x}{T} + \dots + A_n \cos \frac{n\pi x}{T} + \dots + B_1 \sin \frac{2\pi x}{T} + B_2 \sin \frac{4\pi x}{T} + B_n \sin \frac{n\pi x}{T} \quad (2.55)$$

Ou, em uma forma mais compacta:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_1^n A_n \cdot \cos n \cdot \omega \cdot x + \sum_1^n B_n \cdot \sin n \cdot \omega \cdot x \quad (2.56)$$

Onde A_0 , A_n e B_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) são coeficientes da expansão de Fourier e

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.57)$$

T é o período da função $f(x+T)=f(x)$

2.4.1 - SÉRIES DUPLAS DE FOURIER

No problema estático de análise de placas, uma dada função $f(x,y)$ pode ser expandida em séries duplas de senos das duas variáveis x e y , com a seguinte expressão :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot y}{b} \quad (2.58)$$

Para se obter o coeficiente F_{mn} , multiplica-se a eq.(2.58) por $\operatorname{sen}\left(\frac{K\pi \cdot y}{b}\right)$ e integra-se entre os limites de 0 a b.

$$\int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{K\pi \cdot y}{b}\right) dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi \cdot x}{a} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot y}{b} \operatorname{sen} \frac{K\pi \cdot y}{b} dy \quad (2.59)$$

Se $n \neq K$

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot y}{b} \operatorname{sen} \frac{K\pi \cdot y}{b} dy = 0 \quad (2.60)$$

Se $n = K$

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot y}{b} dy = \frac{b}{2} \quad (2.61)$$

De modo similar, para a variável x

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot x}{b} dy = \frac{a}{2} \quad (2.62)$$

$$F_{mn} \frac{a}{2} \frac{b}{2} = \int_0^b \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi \cdot y}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot y}{b} dx dy \quad (2.63)$$

de onde :

$$F_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi \cdot y}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi \cdot y}{b} dx dy \quad (2.64)$$

2.4.2 - SOLUÇÃO DE NAVIER POR SÉRIES DUPLAS TRIGONOMÉTRICAS

Em 1820, Navier apresentou uma solução em séries duplas trigonométricas para lajes retangulares simplesmente apoiadas.

A solução da equação diferencial das placas submetidas a cargas normais obtidas por Navier é, em resumo, a seguinte:

1-) A solução é escrita por uma série dupla de senos:

$$\varpi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.65)$$

satisfazendo as condições de contorno para placas simplesmente apoiadas,

$$(\varpi)_{x=0, x=a} = 0 \quad (\varpi)_{y=0, y=b} = 0 \quad (m_x)_{x=0, x=a} = 0 \quad (m_y)_{y=0, y=b} = 0$$

2-) A carga normal pz é também expandida em uma série dupla de senos:

$$pz(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad \text{com } (m, n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.66)$$

3- Substituindo as equações (2.65) e (2.66) na equação diferencial de Lagrange (2.33), uma equação algébrica é obtida para o cálculo de W_{mn} .

4-) A solução é escrita por uma série dupla de senos :

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{D\pi^4 \left[\left(\frac{m^2}{a^2} \right) + \left(\frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \quad (2.67)$$

Somando os termos individuais, uma solução analítica para a deformação das placas pode ser obtida.

$$\varpi(x, y) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\left[\left(\frac{m^2}{a^2} \right) + \left(\frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.68)$$

Substituindo $w(x,y)$ nas expressões dos momentos fletores internos e dos esforços cortantes nas equações (2.23) , (2.24) e (2.30), obtém-se :

$$m_x(x, y) = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m^2}{a^2} \right) + \nu \left(\frac{n^2}{b^2} \right) \right] W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (2.69)$$

$$m_y(x, y) = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n^2}{b^2} \right) + \nu \left(\frac{m^2}{a^2} \right) \right] W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (2.70)$$

$$m_{xy}(x, y) = -\pi^2 D (1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m \cdot n}{a \cdot b} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (2.71)$$

Com a solução de Navier é possível programar, até mesmo em planilhas eletrônicas ou em programas matemáticos, o cálculo de diversos problemas de placas. Com este procedimento serão calculados, através de um programa matemático, diversos casos de lajes retangulares, com diversos tipos de carregamento, cujos resultados serão utilizados para estudos comparativos com a Analogia de Grelha. Com o objetivo de apresentar a maneira como este tipo de solução pode ser utilizada através de programas de computador, será apresentado no Anexo 1, um exemplo de laje retangular simplesmente apoiada, com carga uniforme, com o procedimento programado no sistema Mathcad 8 (Ref.17).

2.6 - COMENTÁRIOS SOBRE TABELAS

Antes do uso efetivo de programas computacionais para o cálculo de lajes em projetos de edifícios, a maioria dos casos eram solucionados através de tabelas, tanto para as soluções elastoplásticas como para as soluções elásticas.

Diversos autores de concreto armado incluíram, em seus livros, tabelas para o cálculo de lajes isoladas com diversas condições de apoio e carregamento. Algumas publicações são especializadas exclusivamente em tabelas de placa, dentre as quais pode-se destacar as tabelas de BARES e RICHARD,(1970) para placas de estruturas em geral e as de WIPPEL, H e STIGLAT, K (1966), muito usadas em projetos de lajes de pontes.

Esses livros contém, em sua maioria, uma coleção de tabelas para o cálculo dos momentos fletores e flechas máximas. Algumas tabelas apresentam os momentos de torção, esforços cortantes, reações de apoio e forças concentradas nos cantos.

Algumas tabelas apresentam apenas momentos fletores, sem indicar o coeficiente de Poisson adotado e, em alguns casos, os momentos fletores referem-se ao centro da placa sem a indicação de que pode existir um momento fletor máximo maior em outro ponto fora do centro.

As tabelas mais completas encontram-se em BARES e RICHARD (1970), para vários coeficientes de Poisson entre 0 e 0,30, com tabelas para lajes retangulares que apresentam além dos momentos fletores no centro da placa, os momentos $M_{y_{max}}$ para $\nu=0$

Para uma laje retangular com a relação entre o lado menor e o maior da ordem de 0,5, a diferença entre o momento máximo $M_{y_{max}}$ e o momento M_y no centro da placa pode chegar a 44%.

As tabelas 47 a 57 de POLILLO (1977) são baseadas na Teoria da Elasticidade e não possuem nenhuma referência com respeito ao coeficiente de Poisson. No entanto, preocupam-se em apresentar os valores de M_y máximo e no meio da placa, apresentando ainda os momentos de torção e as flechas máximas.

As tabelas têm sido usadas, geralmente, para o cálculo de lajes isoladas com condições de apoio simples, engastados ou livres. Para o cálculo de painéis contínuos de lajes apoiadas em vigas, o cálculo através de tabelas restringe-se ao cálculo de lajes isoladas com a utilização de critérios para corrigir os esforços devido à continuidade. No caso do apoio em vigas, a flexibilidade, geralmente, desprezada com o uso de tabelas, o que em alguns casos, pode resultar em grandes diferenças nos valores dos esforços e dos deslocamentos verticais.

Apesar dos programas de computador tornarem possíveis as soluções de painéis de lajes de edifícios de um modo bastante eficiente, as tabelas para o cálculo de soluções elásticas de placas com carregamentos especiais, para o projeto de estruturas hidráulicas, como tanques, reservatórios, estações de tratamento de água e efluentes, continuam ainda a serem usadas com bastante frequência

A seguir apresenta-se uma lista das bibliografias mais conhecidas, que são especializadas em tabelas de placas e outras que contém tabelas em seu contexto.

Livros especializados em tabelas :

- Bares, Richard – “Tablas para el calculo de placas y vigas pared “, Editorial Gustavo Gili, S.A.Barcelona, 1970.
- Bares, Richard – “Tables for the Analysis os Plates, Slabs and Diaphragms Based on Elastic Theory”, Bauverlag, Gmbh, Wiesbaden, 1971 (German-English Edition)
- Wippel, H e Stiglat, K – “Platten”, Ed. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn Berlin/Munchen,1966.
- Hahn, J – “Vigas continuas, pórticos, placas y vigas flotantes sobre lecho elastico”, Editorial Gustavo Gili, S.A Barcelona, 1972
- Livros com tabelas:
- Timoshenko, S.P. e Woinowsky- Krieger, S – “Theory of Plates and Shells”, McGraw-Hill Kogakusha,Ltda, 1959

- Montoya, Jimenez ; Meseguer, A.Garcia e Cabre,F.Moran – “Hormigon Armado”, Editorial Gustavo Gili, S.A Barcelona, 1973
- Rocha, Aderson Moreira – “Novo Curso Prático de Concreto Armado Vol I “, Editora Científica, Rio de Janeiro, 1981
- Szilard, Rudolph – “Theory and Analysis of Plates”, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey,1974
- Polillo, Adolfo – “Dimensionamento de Concreto Armado Vol II”, Editora Científica, Rio de Janeiro, 1977.

3 - INTRODUÇÃO À ANÁLISE PELO MÉTODO DA RIGIDEZ

3.1 - MÉTODO DA RIGIDEZ

O método dos deslocamentos, também conhecido como método da rigidez, é um método de análise de estruturas reticuladas que usa a rigidez dos elementos para formar um sistema de equações, relacionando os deslocamentos com as cargas que atuam na estrutura.

A equação básica do método é:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (3.1)$$

Onde F é uma matriz coluna (um vetor) das cargas externas, K é a matriz de rigidez da estrutura e δ é a matriz coluna dos deslocamentos.

Para um dado conjunto de cargas externas, o sistema de equações é resolvido calculando-se os deslocamentos. Os esforços nas barras da estrutura são obtidos com base nos deslocamentos e nas matrizes de rigidez de cada elemento isolado.

Para analisar uma estrutura de barras pelo método dos deslocamentos, é necessário discretizá-la em um número finito de barras conectadas por nós.

O método da rigidez é um método muito geral que pode ser aplicado à resolução de qualquer tipo de estrutura reticulada.

O método da rigidez difere do método da flexibilidade nos conceitos físicos que estão envolvidos, ainda que os métodos sejam idênticos na sua formulação matemática. Em ambos os métodos, as equações fundamentais são deduzidas utilizando o princípio da superposição. No método da flexibilidade, as quantidades desconhecidas são ações redundantes, mas no método da rigidez as incógnitas são os deslocamentos dos nós da estrutura.

A análise de uma estrutura pelo método da rigidez pode ser descrita pelas seguintes etapas conforme GERE e WEAVER (1980):

- Enunciado do problema. O problema a ser resolvido deve estar claramente definido pela descrição da estrutura e das cargas, variações de temperatura, deformações iniciais

e deslocamentos de apoios a que está submetida. A descrição da estrutura inclui o tipo de estrutura, a localização dos nós, posições das barras, localização e tipos de apoios, propriedades físicas e geométricas.etc.

- Especificação dos tipos de deformação a serem consideradas na análise, tais como deformações por flexão e deformações axiais. Dependendo dos tipos de deformações a serem consideradas, devem ser dado às barras a rigidez apropriada.
- Determinação do número de deslocamentos de nós desconhecidos ou graus de liberdade na estrutura. Há que se proporcionar vínculos artificiais de modo a produzir uma estrutura restringida, nos quais todos os deslocamentos são nulos ou de valor conhecido.
- Análise da estrutura restringida submetida às cargas. Todas as cargas, exceto aquelas correspondentes a um deslocamento de nó desconhecido, são consideradas como aplicadas à estrutura fixa, sendo avaliadas as várias ações na estrutura. As ações mais importantes a serem determinadas são as ações que correspondem aos deslocamentos desconhecidos. Outras ações de interesse são as ações de extremidade para os membros e as reações nos apoios.
- Análise da estrutura restringida para valores unitários dos deslocamentos
- Determinação dos deslocamentos . A equação de equilíbrio obtida por superposição de ações é:

$$\{F\} - \{F_0\} = \{K\} \{\delta\} \quad (3.2)$$

Onde : $\{F\}$ = esforços nos nós

$\{F_0\}$ = esforços de imobilização dos nós, devidos aos carregamentos aplicados nas barras.

Nesta equação, o vetor $\{F_0\}$ inclui os efeitos de cargas, variações de temperatura, deformações iniciais e deslocamentos de apoio.

Quando se resolve a equação (3.2) em função dos deslocamentos, o resultado é

$$\{\delta\} = [K]^{-1} (\{F\} - \{F_0\})$$

- Determinação das ações de extremidade e reações. Os vetores para as ações de extremidade de membro e reações, respectivamente, na estrutura real são obtidos das seguintes equações de superposição:

$$\{S\} - \{S_0\} = [r]\{d\} \quad (3.5)$$

Onde: $[r]$ = matriz de rigidez do elemento de barra

$\{d\}$ = vetor de deslocamentos correspondente aos nós de extremidade da barra

$\{S\}$ = esforços nas extremidades da barra

$\{S_0\}$ = esforços de mobilização dos nós na extremidade das barras

Quando os vetores $\{S\}$, $\{S_0\}$ e $\{d\}$ tiverem sido obtidos, a análise pode ser considerada completada.

3.2 – GRELHAS PLANAS

3.2.1 – INTRODUÇÃO

Uma estrutura de grelha assemelha-se, em vários aspectos, a um pórtico plano. Todas as barras e nós existem no mesmo plano, supondo-se que as barras estão rigidamente ligadas nos nós (no caso de estrutura de nós rígidos).

Os efeitos de flexão tendem a predominar na análise, sendo os efeitos de torção secundários na análise de grelhas, porém importantes.

Para a análise de estruturas de barras, é necessário o uso de um sistema de eixos de referência orientados para a estrutura como um todo. Tais eixos são conhecidos como coordenadas globais da estrutura.

Na análise de uma estrutura de grelha, os eixos coordenados são tomados como mostrado na figura 3.1. A estrutura existe no plano X-Y com todas as forças aplicadas atuando no eixo Z.

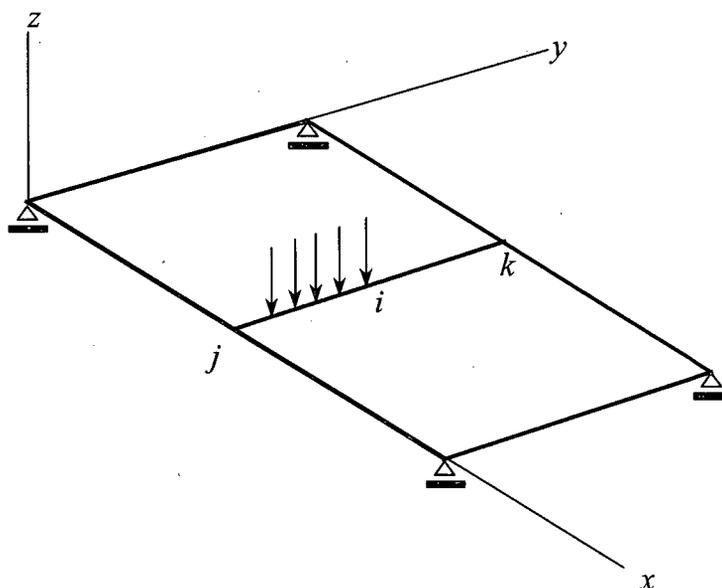


Figura 3.1 - Grelha Plana

Como cada elemento de uma grelha pode estar orientado em qualquer direção no plano xy , é conveniente que cada barra também possua um sistema de eixos cartesianos ortogonais conhecido como eixo de coordenadas locais. Para o sistema local, os eixos denominados de x_M, y_M e z_M estão dispostos da seguinte maneira:

- a direção do eixo x_M coincide com o eixo da barra e com o sentido orientado do nó inicial j para o nó final k .
- o eixo z_M é perpendicular ao plano da grelha, dirigido para cima.
- o eixo y_M é orientado perpendicular ao plano formado pelos eixos x_M e z_M .

Os deslocamentos que podem ocorrer nos nós de uma estrutura são, basicamente, três translações e três rotações. Estes deslocamentos possíveis são chamados de graus de liberdade, ou seja, cada deslocamento possível de um nó é um grau de liberdade.

Os deslocamentos possíveis nas extremidades de uma barra de grelha são mostrados na figura 3.2 e consistem em quatro rotações nas direções x e y e duas translações na direção z .

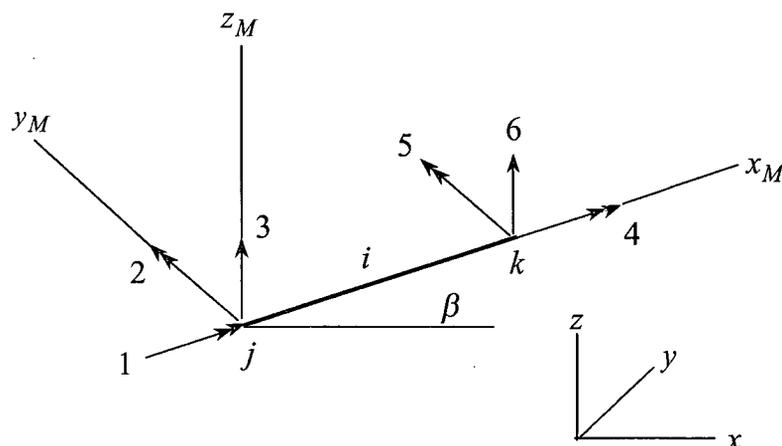


Figura 3.2 - Deslocamentos nodais nas extremidades de uma barra de grelha

3.2.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ DAS BARRAS DE GRELHA

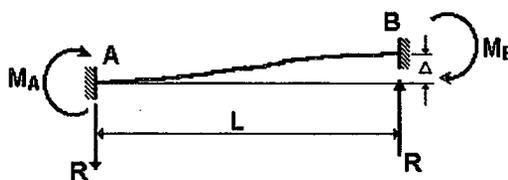
Os deslocamentos unitários nas extremidades da barra podem ser provocados um de cada vez, com o objetivo de formar a matriz de rigidez da barra de grelha, relativa ao eixo local da barra. A matriz $[r_G]$ é a matriz de rigidez da grelha. O significado físico de $[r_G]$ pode ser descrito como:

Cada coluna (j) da matriz $[r_G]$ é um vetor de cargas que deve ser aplicado ao grau de liberdade de modo a manter o estado de deformação associado com um valor unitário do grau de liberdade j enquanto todos os demais graus de liberdade são zero.

A seguir, serão apresentadas as fórmulas para o cálculo das ações nas extremidades das barras de grelha para os diversos deslocamentos impostos.

Uma barra é restringida quando uma das suas extremidades é impedida de se deslocar, seja por translação ou rotação. As ações de extremidade para uma barra restringida são ações de reação, forças ou momentos, que aparecem nas extremidades quando a barra é submetida a esforços, variação de temperatura, deslocamentos impostos ou outros efeitos.

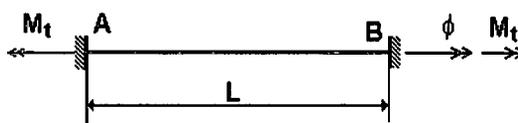
Na figura 3.3, tem-se o caso de uma barra com as duas extremidades engastadas, submetida a um deslocamento vertical Δ em uma das extremidades. Devido a este deslocamento, a barra fica submetida a esforços de reação nas extremidades. Se este deslocamento for unitário, estes esforços correspondem à rigidez da barra em relação a este grau de liberdade.



$$M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad R = \frac{12EI\Delta}{L^3} \quad (3.9) \text{ e } (3.10)$$

Figura 3.3 - Momentos fletores e reações na barra devidos a um deslocamento vertical em uma das extremidades

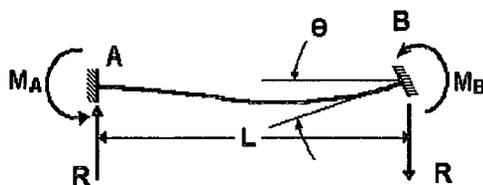
Na figura 3.4, tem-se o caso de uma barra com as duas extremidades engastadas, submetida a uma rotação Φ ao redor do seu próprio eixo, em uma das extremidades. Devido a esta rotação, surgem os momentos de torção M_t nas duas extremidades.



$$M_t = \frac{GJp\phi}{L} \quad (3.11)$$

Figura 3.4 - Momentos de torção na barra devidos a uma rotação em uma das extremidades

Na figura 3.5, tem-se o caso de uma barra com as duas extremidades engastadas, submetida a uma rotação θ em uma das extremidades. Devido a esta rotação, a barra reage com os momentos fletores M_A e M_B nas duas extremidades e com as duas reações R .



$$M_A = \frac{2EI\theta}{L} \quad M_B = \frac{4EI\theta}{L} \quad (3.12) \text{ e } (3.13)$$

$$R = \frac{6EI\theta}{L^2} \quad (3.14)$$

Figura 3.5 - Momentos fletores e reações na barra devido a uma rotação em uma das extremidades

Estas ações de extremidade são suficientes para a construção da matriz de rigidez de uma barra de grelha plana utilizada neste estudo. Outras análises mais sofisticadas poderiam incluir outros termos na matriz de rigidez a partir de efeitos específicos.

A figura 3.6 mostra a matriz de rigidez de um elemento de grelha plana, a qual será usada no programa de grelha plana utilizado neste estudo.

$$[r_G] = \begin{bmatrix} \frac{GJp}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJp}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EIy}{L} & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L} & \frac{6EIy}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & \frac{12EIy}{L^3} \\ -\frac{GJp}{L} & 0 & 0 & \frac{GJp}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EIy}{L} & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & \frac{6EIy}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIy}{L^2} & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & \frac{12EIy}{L^3} \end{bmatrix}$$

Figura 3.6 - Matriz de Rigidez da barra de grelha em relação ao sistema de eixo local

Os termos com GJp são os termos que representam a rigidez à torção das barras de grelha. Os demais termos referem-se à rigidez à flexão da barra.

3.2.3 - TRANSFORMAÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

A rotação de eixos em duas dimensões para vetores no plano pode ser formulada em uma base geométrica através de dois sistemas de eixos coincidentes na origem rotacionados de um ângulo β (Fig. 3.7).

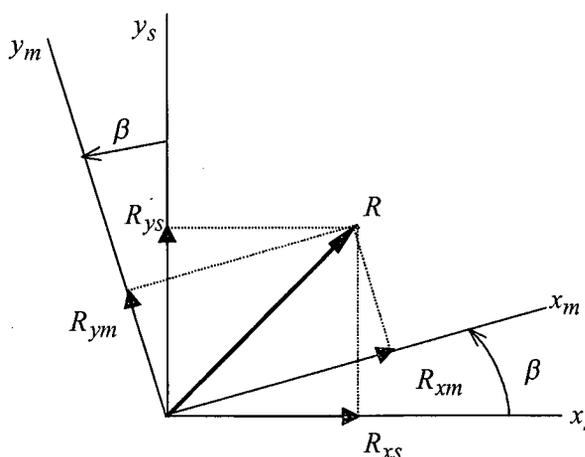


Figura 3.7 - Rotação de eixos

Com base na figura anterior pode-se deduzir que:

$$R_{xm} = \cos \beta \cdot R_{xs} + \sin \beta \cdot R_{ys} \quad (3.15)$$

$$R_{ym} = -\sin \beta \cdot R_{xs} + \cos \beta \cdot R_{ys} \quad (3.16)$$

Colocando na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_{xm} \\ R_{ym} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{xs} \\ R_{ys} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

\mathbf{R} é uma matriz de senos e cossenos que é denominada *matriz de rotação*.

$$C_X = \frac{x_k - x_j}{L} \quad (3.19)$$

$$C_Y = \frac{y_k - y_j}{L} \quad (3.20)$$

onde o comprimento da barra L pode ser calculada a partir das coordenadas dos nós extremos:

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (3.21)$$

A matriz de rigidez de barra de grelha, em relação aos eixos globais é mostrada na figura 3.8.

$$[r_G] = \begin{bmatrix} \frac{GJp}{L} Cx^2 + \frac{4EIy}{L} Cy^2 & \left(\frac{GJp}{L} + \frac{4EIy}{L}\right) CxCy & \frac{6EIy}{L^2} Cy & -\frac{GJp}{L} Cx^2 + \frac{2EIy}{L} Cy^2 & -\left(\frac{GJp}{L} + \frac{2EIy}{L}\right) CxCy & -\frac{6EIy}{L^2} Cy \\ \left(\frac{GJp}{L} - \frac{4EIy}{L}\right) CxCy & \frac{GJp}{L} Cy^2 + \frac{4EIy}{L} Cx^2 & -\frac{6EIy}{L^2} Cx & -\left(\frac{GJp}{L} + \frac{2EIy}{L}\right) CxCy & -\frac{GJp}{L} Cy^2 + \frac{2EIy}{L} Cx^2 & \frac{6EIy}{L^2} Cx \\ \frac{6EIy}{L^2} Cy & -\frac{6EIy}{L^2} Cx & \frac{12EIy}{L^3} & \frac{6EIy}{L^2} Cy & -\frac{6EIy}{L^2} Cx & -\frac{12EIy}{L^3} \\ \frac{GJp}{L} Cx^2 + \frac{2EIy}{L} Cy^2 & -\left(\frac{GJp}{L} + \frac{2EIy}{L}\right) CxCy & \frac{6EIy}{L^2} Cy & \frac{GJp}{L} Cx^2 + \frac{4EIy}{L} Cy^2 & \left(\frac{GJp}{L} - \frac{4EIy}{L}\right) CxCy & -\frac{6EIy}{L^2} Cy \\ -\left(\frac{GJp}{L} + \frac{2EIy}{L}\right) CxCy & -\frac{GJp}{L} Cy^2 + \frac{2EIy}{L} Cx^2 & -\frac{6EIy}{L^2} Cx & \left(\frac{GJp}{L} - \frac{4EIy}{L}\right) CxCy & \frac{GJp}{L} Cy^2 + \frac{4EIy}{L} Cx^2 & \frac{6EIy}{L^2} Cx \\ -\frac{6EIy}{L^2} Cy & \frac{6EIy}{L^2} Cx & -\frac{12EIy}{L^3} & -\frac{6EIy}{L^2} Cy & \frac{6EIy}{L^2} Cx & \frac{12EIy}{L^3} \end{bmatrix}$$

Figura 3.8 - Matriz de rigidez da grelha em relação ao sistema de eixos global

Após gerada a matriz de rigidez $[r_G]$ de cada barra na forma expandida, os elementos desta matriz são transferidos para a matriz de rigidez $[K]$ de toda a estrutura.

$$K_{ij} = \sum_{barras} r_{Gij} \tag{3.22}$$

Este procedimento de somar diretamente as matrizes de rigidez dos elementos para formar a matriz de rigidez da estrutura é freqüentemente chamado de método direto da rigidez (*direct stiffness method*).

O fato de se usar a ferramenta matemática de matrizes é o que leva muitas vezes o método de análise ser designado de Análise Matricial.

3.2.4 - ESFORÇOS NODAIS APLICADOS

Na fase seguinte da análise, formam-se os vetores associados às cargas que atuam sobre a grelha. As ações externas aplicadas nos nós constituem o vetor $\{F\}$. Como cada nó possui 3 graus de liberdade, os esforços em um nó genérico k estão representados na fig 3.9.

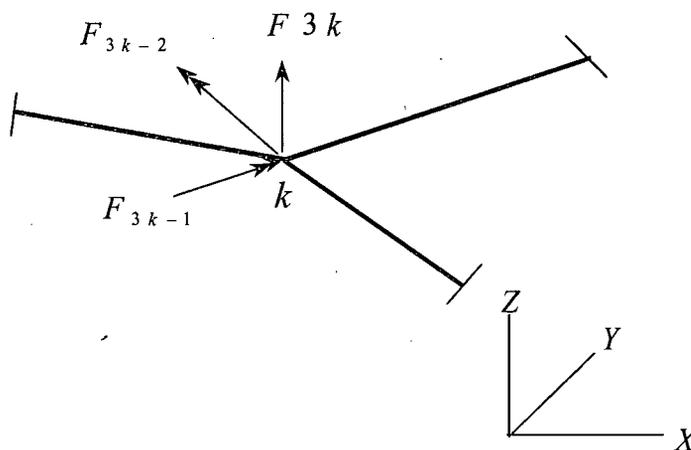


Figura 3.9 - Cargas nodais para uma grelha plana

Com as ações de mobilização dos nós $\{S_0\}$ nas extremidades de uma barra restringida da grelha (devidas às cargas aplicadas nas barras) constrói-se o vetor de mobilização dos nós de toda a estrutura $\{F_0\}$, mostrado na figura 3.10.

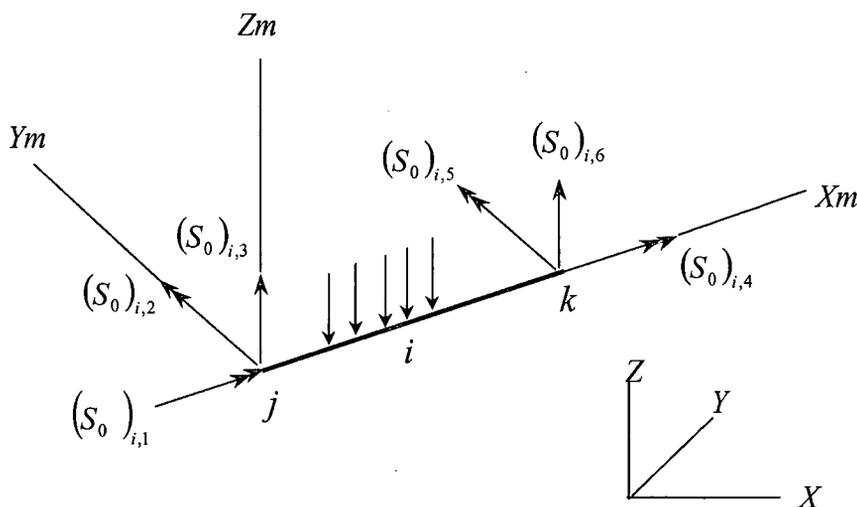


Figura 3.10 - Cargas nodais em uma barra de grelha.

As cargas nodais reais, vetor $\{F\}$, podem se somar às cargas nodais equivalentes do vetor $\{-F_0\}$, para produzir o vetor de cargas total $\{F\}-\{F_0\}$.

3.2.5 - CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS NAS BARRAS

O sistema de equações:

$$\{K\}\{\delta\} = \{F\} - \{F_0\}$$

Podem ser separados e isolada a parte livre da estrutura (índice L) da parte vinculada (índice V).

$$[K_{LL}]\{\delta_L\} + [K_{LV}]\{\delta_V\} = \{F_L\} - \{F_{0L}\} \quad (3.23)$$

$$[K_{VL}]\{\delta_L\} + [K_{VV}]\{\delta_V\} = \{F_V\} - \{F_{0V}\} \quad (3.24)$$

A equação 3.23 é usada para calcular $\{\delta_L\}$ deslocamento dos nós livres e a equação 3.24 para calcular $\{F_V\}$ que são as reações de apoio.

As ações nas extremidades das barras $\{S\}$ podem ser obtidas com a equação:

$$\{S\} = [r_G]\{d\} + \{S_0\} \quad (3.25)$$

Os esforços $\{S\}$, transformados para o sistema local são mostrados na figura 3.11, onde Mt são momentos de torção, My momentos fletores no plano Ym, Zm e Q os esforços cortantes no plano Xm, Zm .

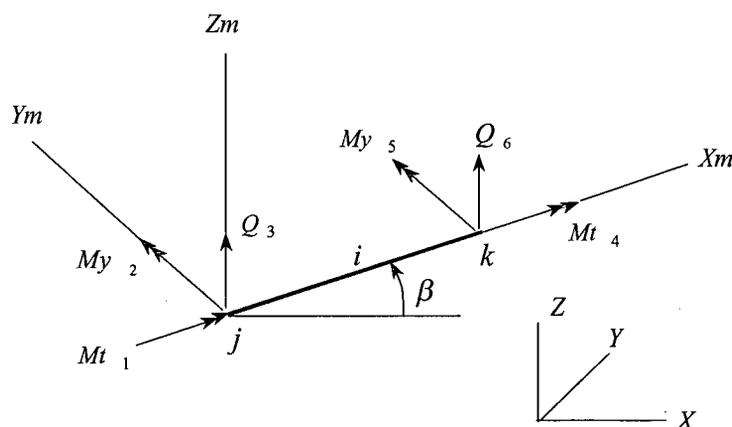


Figura 3.11 - Esforços nodais nas extremidades de uma barra de grelha

4- ANÁLISE E MODELAGEM DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

4.1.-INTRODUÇÃO

Existem diversos procedimentos para a análise e dimensionamento de lajes com comportamento linear ou não-linear. Entre os procedimentos disponíveis estão as teorias elásticas, a teoria da análise limite e as modificações da teoria elástica e da teoria da análise limite.

Esses métodos podem ser usados para analisar os deslocamentos, os esforços internos, os elementos de apoio e a capacidade de carga das lajes. Com a distribuição de esforços, tais como momentos fletores, momentos de torção e esforços cortantes, é possível dimensionar as armaduras e fazer a verificação das tensões nas lajes de concreto armado.

Os métodos mais tradicionais para a determinação da distribuição de momentos em uma laje têm sido através de modelos elásticos.

Lajes mais complexas somente puderam ser resolvidas usando procedimentos numéricos em computadores eletrônicos. O Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos são soluções numéricas.

O Método das Diferenças Finitas substitui a equação de Lagrange por uma série de equações algébricas lineares simultâneas para o cálculo dos deslocamentos em um número finito de pontos da superfície elástica da laje. Após a determinação dos deslocamentos, os momentos fletores e esforços cortantes são obtidos usando relações apropriadas entre deslocamentos de grupos de pontos.

O Método dos Elementos Finitos é um outro procedimento numérico que pode solucionar o problema de placas. Nesse método, a placa é dividida em um número finito de elementos. Cada elemento de placa possui propriedades de deformação à flexão que são conhecidas com boa aproximação. O método geral de análise concentra as cargas nos nós dos elementos, e então restaura a continuidade das rotações e deslocamentos em cada ponto nodal, e, em alguns casos, em pontos intermediários, de modo a satisfazer as equações de equilíbrio e as condições de contorno requeridas.

4.2 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é um procedimento numérico para a análise de meios contínuos. A análise de tensões em estruturas, condução de calor, escoamento de fluidos, campos elétricos e magnéticos são exemplos de problemas que envolvem a análise de meios contínuos.

No caso do problema de placas, o Método dos Elementos Finitos é usado para encontrar uma aproximação do campo de deslocamentos da placa. O campo de deslocamentos contínuo é substituído por um campo discreto com pontos nos nós dos elementos finitos.

Neste trabalho, será utilizado um programa de elementos finitos denominado SAP90, que permite a análise de diversos problemas através de elementos finitos. Este programa será utilizado para os estudos comparativos que serão realizados para estudar a solução de lajes através da Analogia de Grelhas.

A seguir, serão descritos os passos utilizados na preparação dos dados e obtenção dos resultados nesse programa.

Deve-se dividir a estrutura em um conjunto de elementos finitos adequados à solução do problema. No caso do SAP90, para a solução de placas, o programa dispõe de elementos denominados SHELL que são elementos adequados para solucionar problemas de placas, cascas e membranas em duas e em três dimensões

Deve-se salientar que:.

- Os elementos SHELL, utilizados no programa, possuem elementos de 4 nós de formulação isoparamétrica com comportamento de placa.
- O comportamento de placa inclui duas componentes de rigidez rotacional fora do plano e uma componente de rigidez a translação na direção normal ao plano do elemento, não incluindo nenhum efeito de deformação por cisalhamento.
- Para definir a malha são informadas as coordenadas nodais dos nós dos elementos em relação a um sistema global de coordenadas.
- Após a geração da malha nodal, são informados o tipo de elemento a ser utilizado e os parâmetros físicos dos elementos, tais como módulo de elasticidade, coeficiente de

Poisson. Em seguida, a topologia ou incidência nodal de cada elemento para compor a malha. Na geração da malha informa-se também a espessura dos elementos da placa.

- Para definir as condições de contorno, deve-se informar as restrições nodais, ou seja, os graus de liberdade impedidos nos nós da estrutura que são considerados vínculos ou apoios.
- As cargas na placa são aplicadas através de um comando de carga de pressão que permite a entrada de cargas distribuídas em toda a placa ou em pontos selecionados.
- Após a entrada de dados, o programa faz a montagem do modelo com os seus parâmetros e inicia a solução montando a matriz de rigidez da estrutura. Em seguida, resolve o sistema de equações lineares para a obtenção dos deslocamentos nodais.
- No SAP90, os deslocamentos nodais são obtidos na listagem de um arquivo com a extensão .SOL. Esse arquivo apresenta as rotações e translações de todos os nós da estrutura em relação ao sistema global. Neste trabalho, as flechas das lajes estudadas serão obtidas a partir desse arquivo de resultados.
- Para a saída de resultados dos esforços, o SAP90 possui, além das saídas numéricas, diversas saídas gráficas que permitem a visualização dos campos de esforços dos momentos fletores e de torção das placas. Para esta saída gráfica, o programa utiliza uma convenção de sistema de coordenadas locais para cada elemento com eixos 1 e 2 segundo os lados dos elementos finitos quadrangulares, conforme mostrado na figura 4.1 e um sistema global X, Y e Z definido na entrada de dados dos nós do modelo.
- Os momentos fletores são M11 e M22, respectivamente, nas direções 1 e 2 do sistema local e o momento de torção é o valor M12.

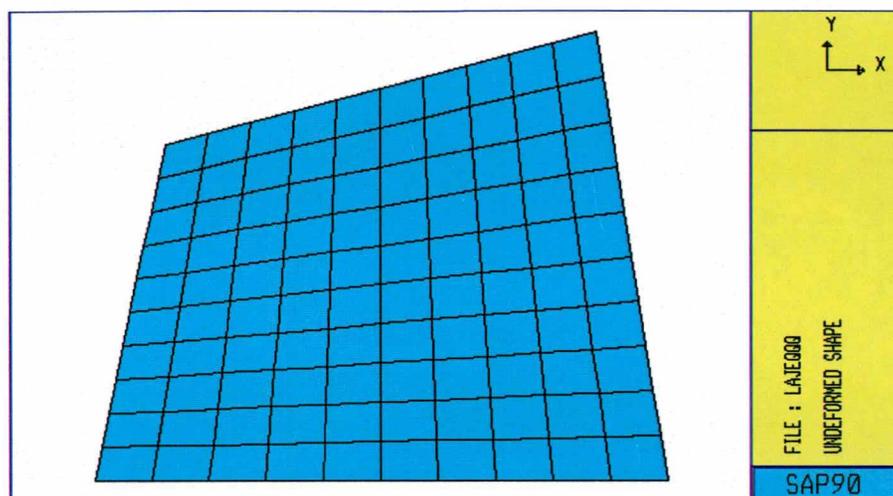


Figura 4.1 - Laje discretizada em elementos finitos

A figura 4.2 apresenta uma listagem típica de entrada de dados deste programa de elementos finitos utilizando um arquivo texto no formato ASCII.

A entrada de dados no arquivo texto compõe-se de blocos de dados (*data blocks*) separados por uma linha em branco. O nome de cada bloco de dados é inserido na coluna, obrigatoriamente. Em cada bloco são informados os dados referentes a ele, conforme um formato específico descrito no manual do programa.

Para um arquivo típico de análise de laje, tem-se os seguintes blocos:

- **Restraints** : A especificação da restrição nodal dos nós de apoio da laje. Cada nó da laje possui seis graus de liberdade no sistema global, sendo três translações nos eixos X, Y e Z e três rotações RX, RY e RZ. A especificação da restrição nodal consiste em um conjunto de seis dígitos, correspondendo a cada grau de liberdade, sendo os três primeiros as translações e os três últimos as rotações. Se o grau de liberdade for restringido o dígito é 1 e se for livre, o dígito é 0.
- **Joints** : Este bloco define os nós do modelo da laje através de suas coordenadas no plano X,Y. Para facilitar a entrada de dados, existem comandos de geração de nós para malhas que formam um quadrilátero.
- **Shell** : Este bloco define os elementos finitos da discretização do modelo. Para lajes de concreto, nesse trabalho, foram usados comandos para elementos do tipo SHELL, *ETYPE*=2. Estes elementos são de placa quadrangulares com 4 nós de formulação

isoparamétrica, com um comportamento que inclui rigidez à rotação nas duas direções fora do plano da placa e uma rigidez a translação na direção normal ao plano da placa. O elemento de placa não considera a contribuição das deformações por cisalhamento. Os elementos permitem a aplicação de cargas de pressão normais ao seu plano para cargas distribuídas e a cargas de gravidade para simular o peso próprio. Existem comandos específicos para gerar malhas quadrangulares.

- **Potential** : Este bloco define o carregamento a ser aplicado nos elementos de placa. O elemento de placa interpreta a pressão aplicada nos nós do elemento como uma carga de superfície aplicada na direção normal ao seu plano e gera um vetor de carga correspondente. A direção positiva é a direção do eixo 3 do sistema de coordenadas locais do elemento.
- A figura 4.2 apresenta uma entrada de dados típica em um arquivo de texto padrão ASCII. Neste , a entrada de dados refere-se a uma laje retangular simplesmente apoiada com 8 x 6 m de lado, com espessura de 5 cm submetida a uma carga distribuída de 10 kN/m^2 .

```

PLATE -
SYSTEM
L=1

RESTRAINTS
1          R=1,1,1,0,0,0
2  11 1    R=0,0,1
12 100 11  R=0,0,1
22 110 11  R=0,0,1
111 121 1  R=0,0,1
|
JOINTS
C
C COORDENADAS NODAIS
1          X=0.00 Y=0.00 Z=0.00
11         X=8.00 Y=0.00
111        X=1.00 Y=6.00
121        X=7.00 Y=8.00          Q=1,11,111,121,1,11

SHELL
NM=1      Z=-1 P=1
1  E=2.1E9 U=0.2 W=0 : CARACTERISTICAS FISICAS
C
C PLACAS
1  JQ=1,2,12,13 G=10,10 M=1 TH=.05,.050 ETYPE=2

POTENTIAL
C  CARGA DISTRIBUIDA Q = 1000 kgf/m2
1  121 P=-1000,-1000

```

Figura 4.2 - Exemplo de entrada de dados.

A figura 4.3 apresenta uma saída gráfica do campo de deslocamentos também denominado deformada da placa. A deformação, geralmente, é ampliada para facilitar a visualização. O resultado portanto, é somente qualitativo, já que os deslocamentos geralmente são muito pequenos. Os resultados numéricos de deformada são obtidos de um arquivo texto denominado .SOL.

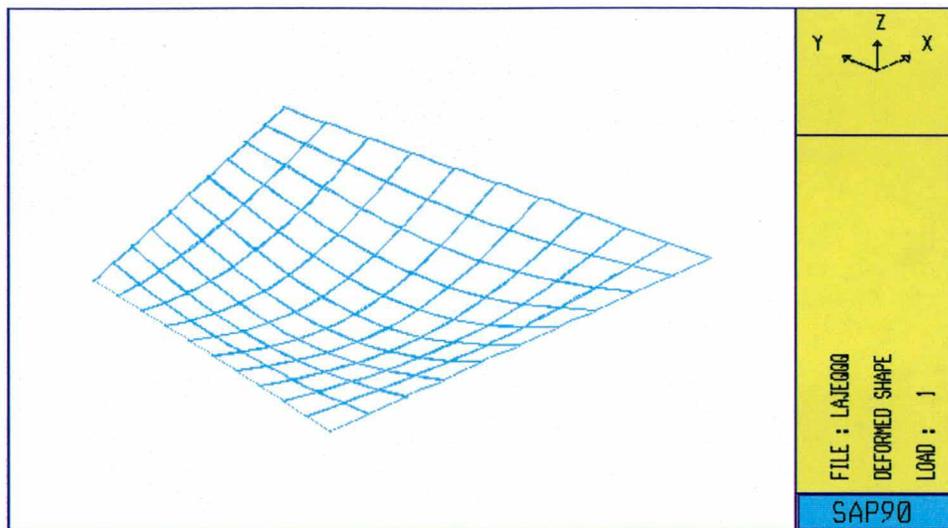


Figura 4.3 - Placa deformada

Na figura 4.4, pode-se observar a saída gráfica dos momentos fletores em uma determinada direção dos elementos finitos, neste caso, a direção M11. A convenção utilizada pelo programa está mostrada na figura 4.5. Normalmente, a saída gráfica é apresentada com regiões de mesmo valor para os esforços, com uma tabela de convenções de valores e os valores máximos destacados para o nó onde eles ocorrem.

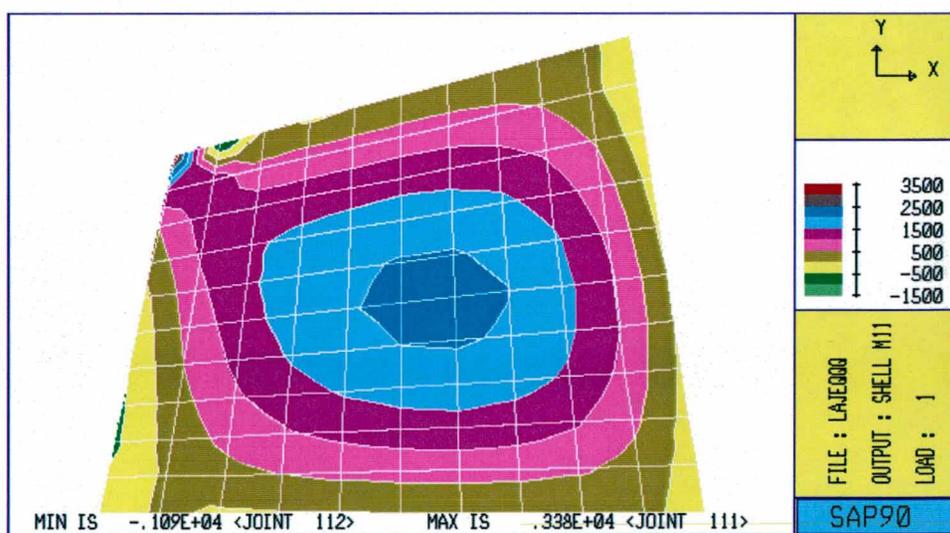


Figura 4.4 - Distribuição dos momentos fletores M11

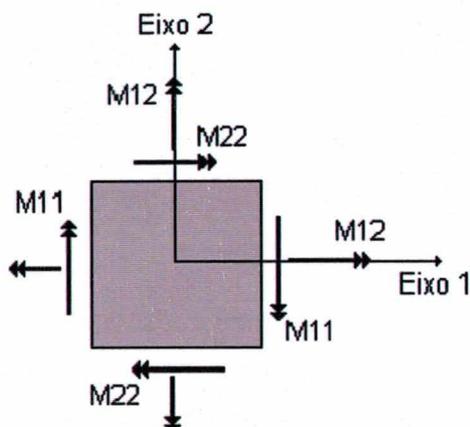


Figura 4.5 - Convenção dos momentos fletores e de torção no elemento finito de placa.

A figura 4.6 apresenta a saída gráfica dos momentos fletores na outra direção, ou seja M22.

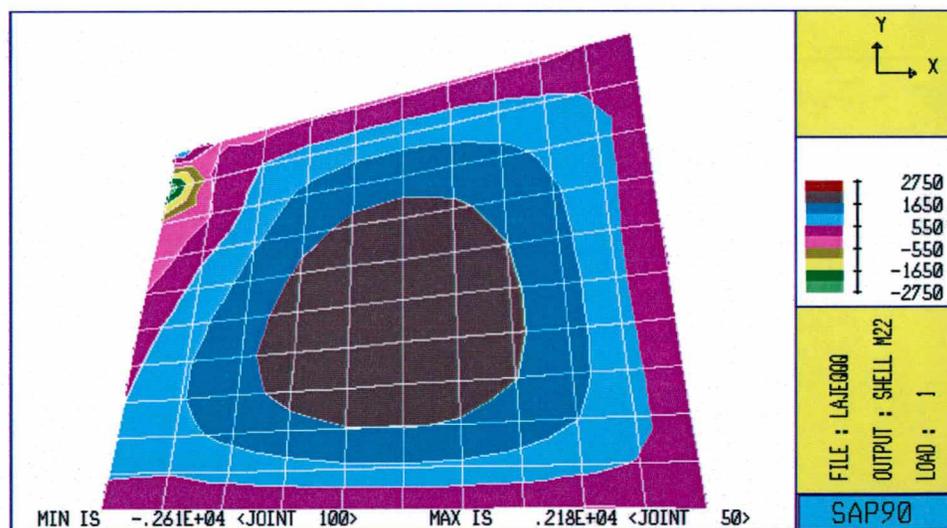


Figura 4.6 - Distribuição dos momentos fletores M22

A figura 4.7 apresenta a saída gráfica dos resultados dos momentos de torção na placa. É interessante observar a distribuição dos valores. Nas regiões onde os momentos fletores são máximos, os de torção possuem os valores mais baixos. Nos cantos, onde os momentos fletores possuem os menores valores, os de torção são máximos.

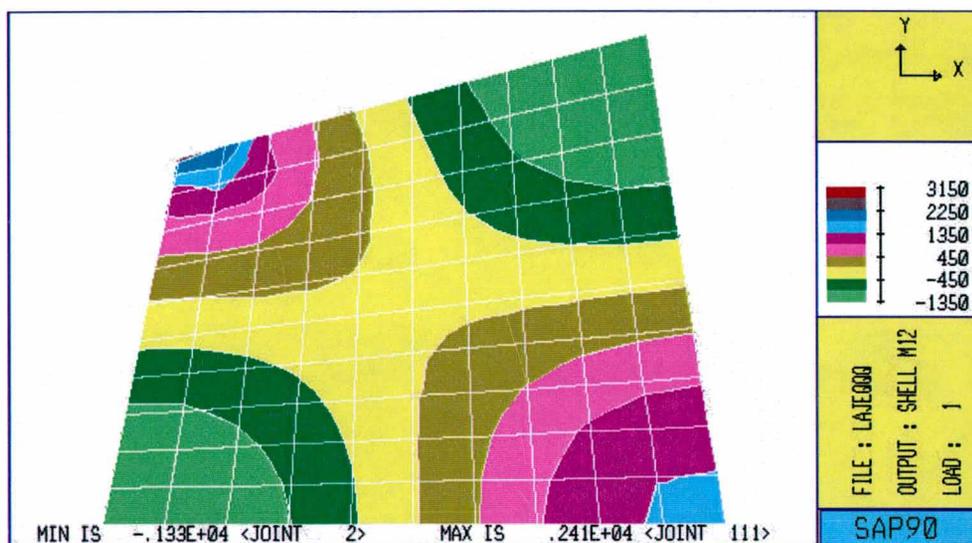


Figura 4.7 - Distribuição dos momentos de torção M12.

4.3 - MÉTODOS APROXIMADOS

4.3.1- INTRODUÇÃO

Diversos métodos aproximados de análise de lajes têm sido propostos, desenvolvidos e usados ao longo dos anos. Muitos desses métodos foram desenvolvidos antes da era dos computadores.

A substituição de uma laje por uma série ortogonal de vigas que se cruzam é, provavelmente, uma das mais antigas propostas de solução. Este procedimento, na verdade, pode ser entendido como uma solução pelo método do limite inferior (*lower bound limit design method*). A distribuição de momentos, calculada desta maneira, necessitará de uma pequena redistribuição de momentos, devido ao comportamento inelástico, para alcançar a carga última.

Um processo com distribuição de momentos para painéis de lajes apoiados em vigas rígidas foi desenvolvido por SIESS e NEWMARK, (1950). O processo pode ser

comparado ao método de Cross para o cálculo de vigas contínuas. A rigidez à torção das vigas de apoio podia também ser considerada. O processo apresenta bons resultados, desde que as vigas de apoio sejam suficientemente rígidas à flexão. O problema é que, em estruturas reais, principalmente as dos edifícios modernos, as vigas apresentam menor altura e são, portanto, mais flexíveis.

O método dos pórticos equivalentes tem sido usado por muitos anos, principalmente nos Estados Unidos onde o código do *ACI Code* permite o uso deste método para o cálculo de lajes planas, sem vigas. Este método considera uma faixa de laje, incluindo os pilares, como sendo um pórtico plano. O pórtico pode ser formado por um único pavimento com os pilares superiores e inferiores, ou por um pórtico em toda a altura do edifício tomado entre os vãos dos pilares para cada lado. A norma brasileira NBR-6118/78 também permite o cálculo de lajes cogumelo por esse método, conforme apresentado no item 3.3.2.11:

“As lajes apoiadas diretamente sobre pilares serão calculadas em regime elástico ou rígido-plástico de acordo com os itens 3.3.2.1 e 3.3.2.

Quando os pilares estiverem dispostos em filas ortogonais e a espessura da laje respeitar o mínimo do item 6.1.1.1, será permitido calcular em regime elástico o conjunto laje-pilares como pórticos múltiplos, admitindo-se a laje dividida em duas séries ortogonais de vigas e considerando-se, no cálculo de cada série, o total das cargas. A distribuição dos momentos, dividindo-se os painéis em lajes, com os cantos correspondentes aos pilares, em quatro faixas iguais. Será do seguinte modo:

- 45% dos momentos positivos para as duas faixas internas
- 27,5% dos momentos positivos para cada uma das faixas externas
- 25% dos momentos negativos para as duas faixas internas
- 37,5% dos momentos para cada uma das faixas externas

Deverão ser estudadas cuidadosamente as ligações das lajes com os pilares, com especial atenção nos casos em que não haja simetria de forma ou de carregamento da laje em relação ao apoio. A punção será verificada de acordo com o item 4.1.5.”

4.4 – ANÁLISES LIMITES

A análise estrutural baseada em teorias elásticas apresenta bons resultados para deformações e tensões para cargas de serviço. No entanto, não representam a capacidade última das estruturas.

A análise pelo método da ruptura apresenta-se como uma alternativa para o cálculo de lajes, fornecendo resultados que as teorias elásticas não são capazes de fornecer.

Em 1914, Kazinczy observou que a capacidade de carga de vigas de aço era consideravelmente maior que a prevista pela teoria da elasticidade. Este aumento na capacidade de carga é devido à ductilidade de alguns materiais, inclusive o concreto armado.

A teoria plástica clássica para placas é fundamentada nos trabalhos de PRAGER e HODGE, 1951.

A análise limite, baseada nesta teoria, indica que a solução exata para placas nem sempre é possível. A carga última de colapso, encontra-se entre dois limites, o limite superior e o inferior, dependendo da solução utilizada, conforme mostrado na figura 4.8.

Para uma solução de limite inferior (*lower bound limit analysis*), a distribuição de momentos para toda a placa é encontrada de tal modo que:

- As condições de equilíbrio são satisfeitas em todos os pontos da placa;
- O critério de plastificação que define a resistência do elemento de placa não é excedido em nenhum lugar da placa;
- As condições de contorno são satisfeitas.

A carga última da placa é calculada a partir das equações de equilíbrio e da distribuição de momentos. A carga última assim encontrada é sempre menor ou igual a carga correta.

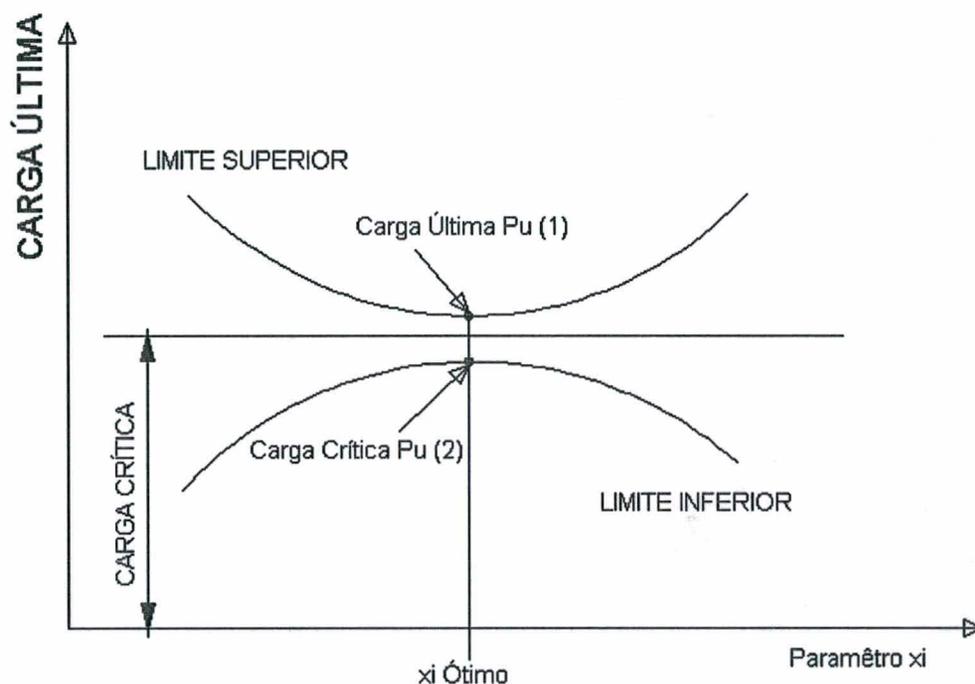


Figura 4.8 - Soluções por limite inferior e limite superior.

O método da análise limite inferior foi chamado de “teoria do equilíbrio” por HILLERBORG(1956), e é sugerido por ele como um método de projeto para lajes de concreto armado.

O método de projeto pode ser resumido no seguinte, conforme Hillerborg:

“Se uma distribuição de momentos pode ser encontrada de tal modo que satisfaça as equações de equilíbrio e as condições de contorno da placa para uma determinada carga externa, e se a placa é capaz de resistir a esses momentos em cada ponto, então a carga externa adotada representa um limite inferior da capacidade de suporte da placa.”

O objetivo de Hillerborg era apresentar um método de projeto que fosse, ao mesmo tempo, simples de ser aplicado e que apresentasse sempre resultados a favor da segurança.

De certo modo, o seu objetivo foi alcançado. O método é simples e resulta em dimensionamentos sempre a favor da segurança. Este método vem sendo usado por engenheiros de projeto há muitos anos e, em muitos casos até de forma intuitiva, desconhecendo o fato de que estão usando um método formulado em bases formais.

Teoricamente, existe um número infinito de soluções pelo método do estado limite inferior para uma determinada placa, cada uma baseada em uma distribuição de momentos que satisfaça os critérios estabelecidos pelo método.

É importante notar que a distribuição de momentos obtida pela teoria elástica para uma placa, é de fato, uma solução possível de estado limite inferior, porque satisfaz as condições de equilíbrio, as condições de contorno e as seções da placa são dimensionadas para resistir com segurança aos momentos em cada ponto.

Os momentos obtidos pela teoria elástica são proporcionais à curvatura das seções da laje e, portanto, somente uma distribuição de momentos elásticos é possível. Na teoria plástica, no entanto, qualquer número de distribuições é possível, porque no regime plástico os momentos não dependem da curvatura.

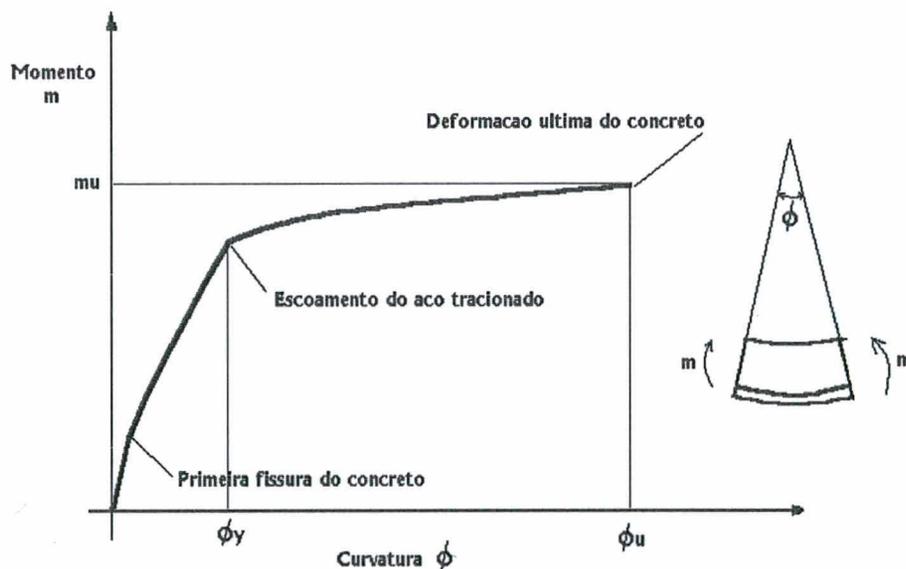


Figura 4.9 - Relação momento-curvatura para uma seção de concreto.

Na figura 4.9, é mostrado o diagrama da relação momento-curvatura para a seção típica de uma laje em concreto armado. A curva tem um aspecto aproximadamente trilinear e divide-se em:

- Um trecho inicial linear até a formação da primeira fissura no concreto;
- Um trecho linear até o ponto de escoamento do aço da armadura;
- Terceiro trecho, onde o momento permanece praticamente constante até o ponto onde a resistência última do concreto é atingida.

É possível demonstrar que a maioria das lajes de concreto armado levemente armadas são extremamente dúcteis.

As análises limites de lajes assumem que as seções das lajes de concreto armado possuem ductilidade suficiente, isto é, possuem um longo trecho horizontal no diagrama trilinear, após o escoamento do aço, para que a distribuição de momentos escolhida possa ser atingida após a redistribuição.

Para todas as soluções possíveis de distribuição de momentos, antes da carga última da placa ser atingida, é necessária uma redistribuição de momentos, mesmo quando o dimensionamento é feito pela teoria elástica. Isso deve-se ao fato de que a distribuição de momentos depende de uma distribuição complexa na rigidez da placa depois da fissuração do concreto. Portanto, as análises limites só podem ser aplicadas em lajes de concreto armado que possuam seções com grande ductilidade.

Como foi demonstrado no capítulo 2, a equação de equilíbrio de um elemento de placa é dada por:

$$\frac{\partial^2 mx}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial myx}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 my}{\partial y^2} = -q \quad (4.1)$$

Esta equação pode ser aplicada tanto aos elementos de laje que estão em regime elástico, quanto aos que estão em regime plástico, já que ela é deduzida apenas a partir de considerações de equilíbrio. Qualquer solução que satisfaça as condições de contorno e o critério de plastificação é uma solução possível para a configuração de momentos.

Portanto, existe um grande número de soluções, entre as quais a teoria elástica é uma das possíveis.

Para obter-se as soluções possíveis, a carga q deve ser equilibrada pela soma dos termos do lado esquerdo da equação (4.1), onde o primeiro e o terceiro termo são os momentos fletores nas direções X e Y e o segundo termo os momentos de torção (ou volventes).

O fato de a carga da laje poder ser equilibrada por qualquer combinação de momentos fletores e de torção nas duas direções, dá uma ideia clara do conceito físico do método das faixas.

4.4.1 – MÉTODO DAS FAIXAS

Como já foi comentado no item anterior, o método das faixas (*strip method*), também conhecido como método de Hillerborg, foi apresentado em 1956 por Hillerborg como um método de dimensionamento de lajes de concreto armado pelo teoria dos estados limites.

Hillerborg simplificou o método geral do limite inferior, eliminando a necessidade de se considerar os momentos de torção no cálculo da distribuição de momentos. Se nenhuma parcela de carga é absorvida pelos momentos de torção, o dimensionamento pode ser feito como se a laje fosse composta de faixas independentes, em geral nas duas direções. Torna-se necessário apenas calcular os momentos das faixas por critérios de estática, garantindo o equilíbrio. Esta simplificação resultou em um método extremamente atrativo para a área de projeto. O método foi chamado de método simples das faixas. Posteriormente, foi apresentado por Hillerborg o método avançado das faixas, para enquadrar casos especiais de cargas concentradas.

De acordo com a teoria geral da análise limite inferior, qualquer combinação de m_x , m_y e m_{xy} que satisfaça a equação (4.1) em qualquer ponto da laje e que satisfaça as condições de contorno, quando a carga última é aplicada, é uma solução válida, desde que sejam dimensionadas e dispostas as armaduras para absorver estes momentos.

Portanto, a carga q pode ser, a princípio, arbitrariamente equilibrada pelos três termos do lado esquerdo da equação (4.1). Hillerborg escolheu a solução onde $m_{xy} = 0$ e equilibrou a carga totalmente com os dois termos de momentos fletores m_x e m_y .

A equação (4.1) pode ser separada em duas equações de equilíbrio para cada faixa nas direções x e y , com uma parcela $K_x \cdot q$ para a direção X e uma parcela $K_y \cdot q$ para a direção Y .

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -K_x \cdot q \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -k_y \cdot q \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -(1 - k_x) \cdot q \quad (4.4)$$

$$\text{onde} \quad k_x + k_y = 1 \quad (4.5)$$

Para ilustrar o uso do método, serão calculados dois exemplos de uma laje quadrada, simplesmente apoiada em todo o contorno, submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

- Exemplo 1 – Laje quadrada com 4 x 4 m, carga distribuída q de 10 kN/m² com uma distribuição de faixas conforme mostrado na figura 4.10. Pode-se encontrar uma distribuição de momentos em equilíbrio fazendo $K_x = 0,5$. Deste modo, metade da carga será distribuída uniformemente para as faixas em cada direção. O resultado dos momentos obtidos para as faixas na direção x é dada pelo cálculo estático de uma viga biapoiada com largura unitária. O valor máximo dos momentos na direção x é:

$$m_x = 0,5 \cdot q \cdot l^2 / 8 \quad \text{ou seja} \quad m_x = 10 \text{ kN.m/m.}$$

As reações nos apoios também podem ser obtidas por estática :

$$R_x = 0,5 \cdot q \cdot l / 2 \quad \text{ou seja} \quad R_x = 10 \text{ kN/m}$$

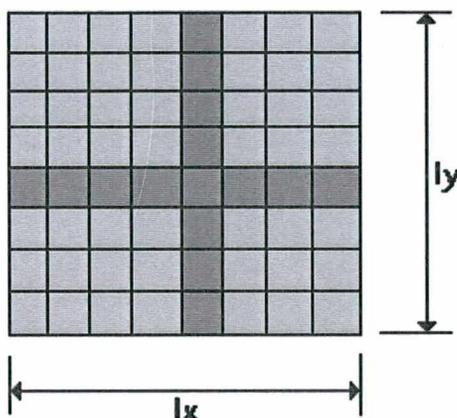


Figura 4.10 - Sistema de faixas

- Exemplo 2 – Laje quadrada com 4 x 4 m, carga distribuída q de 10 kN/m² com uma distribuição de faixas conforme mostrado na figura 4.11 . Pode-se encontrar uma distribuição de momentos em equilíbrio adotando para K_x valores 0 ou 1 dependendo da região da laje em que se encontra a faixa. A carga é dividida em regiões triangulares que transmitem a carga para o apoio mais próximo. Cada faixa carrega toda a carga distribuída q apenas nas extremidades de comprimento. O valor do momento máximo das faixas na direção x é uma função de y , apresenta um valor máximo na faixa central e valores decrescentes em direção ao apoio de maneira não-linear conforme mostrado no gráfico da figura 4.3.2.1.2. O valor máximo da faixa central é igual a $ql^2/8$ ou seja 20 kN.m/m.

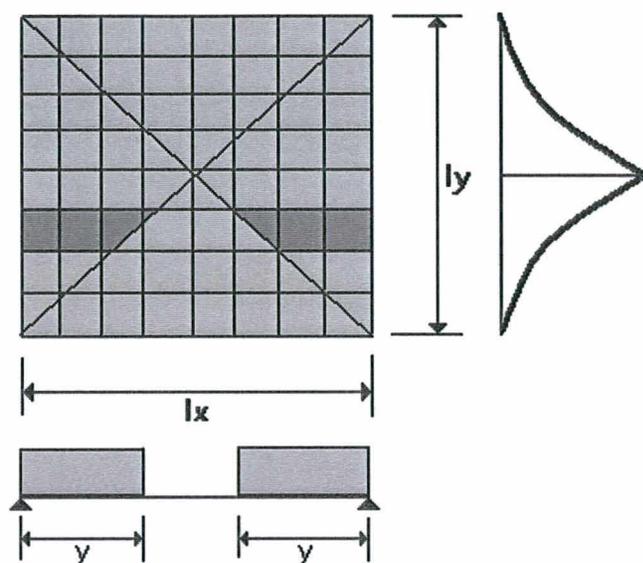


Figura 4.11 - Solução do exemplo 2.

Para a mesma laje, o método de Hillerborg permite inúmeras outras soluções, como, por exemplo, o caso extremo, onde, com o valor $Kx = 1$, toda a carga distribuída seria absorvida apenas na direção lx . A escolha entre todas as soluções possíveis passa a ser um problema de otimização de detalhamento e custo das armaduras, que seriam dispostas de acordo com os diagramas de momentos. Na prática, uma solução como a do exemplo 2 mostra-se impraticável devido ao corte ou ao espaçamento variável de todas as barras da armadura.

Os exemplos demonstram a simplicidade e a facilidade com que os momentos de uma laje podem ser encontrados com a simples aplicação da estática e a diversidade de soluções possíveis para uma mesma laje.

É interessante salientar que muitos projetistas têm utilizado o método das faixas para calcular, de modo aproximado, lajes que apresentam formatos irregulares (ver figura 4.12.), aberturas, bordos livres e diversas outras situações não encontradas nas soluções clássicas e nas tabelas. Isto, sem saberem que estão utilizando um método com um suporte formal no método do estado limite inferior.

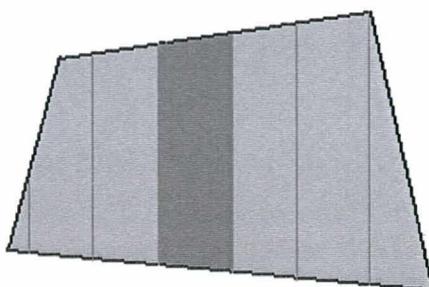


Figura 4.12 - Laje trapezoidal dimensionada pelo Método das Faixas com $K_x = 1$ na direção dos menores vãos.

4.5 – MÉTODO DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

O método das charneiras plásticas ou método das linhas de ruptura, para lajes de concreto armado, inicialmente desenvolvido por INGERSLEV(1923), e com uma extensa contribuição de outros autores como JOHANSEN(1943), LANGENDONCK(1970), é também um método de análise limite, mais precisamente um método de análise limite superior (*upper bound limit method*). A carga última da laje é obtida postulando-se um mecanismo de colapso compatível com as condições de contorno. Os momentos nas linhas de ruptura são os momentos últimos plásticos, resistidos pela seção de concreto armado. Com estas hipóteses básicas, a carga última é determinada usando-se o princípio dos trabalhos virtuais ou as equações de equilíbrio. A carga última assim determinada é uma carga maior ou igual que a correta. Por isso, o método é chamado de limite superior. Se o mecanismo de colapso postulado não for o correto, o resultado será uma carga de colapso superior à correta e o método apresenta, portanto, um resultado contra a segurança. No caso de adotar-se um coeficiente de segurança para a carga última, o resultado de um mecanismo de colapso incorreto teria um coeficiente de segurança menor que o coeficiente de segurança mínimo adotado.

Na teoria das charneiras plásticas, o mecanismo de colapso é composto de painéis ou charneiras, separados pelas linhas de ruptura. As regiões entre as linhas de ruptura não são analisadas para verificar se o momento de plastificação não é atingido em nenhum ponto. No entanto, isso só pode acontecer se um mecanismo de colapso incorreto for adotado.

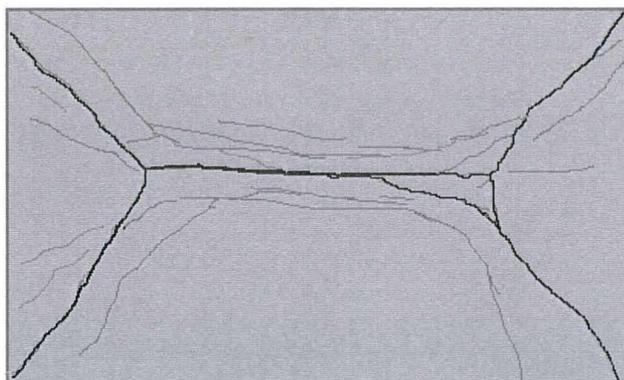


Figura 4.13 - Padrão de linhas de ruptura de uma laje retangular simplesmente apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída. (desenho baseado em foto de ensaio, PARK&GAMBLE (1980))

O fato de não se ter nenhuma garantia de que o mecanismo de colapso adotado é o correto, torna necessária a verificação de todos os mecanismos de colapso possíveis, para garantir que a capacidade de suporte de carga da laje não foi superestimada.

A teoria das charneiras plásticas assume um mecanismo de colapso por flexão, ou seja, a laje possui suficiente resistência ao cisalhamento para que não ocorra ruptura por cisalhamento.

A teoria das charneiras plásticas é aplicada a lajes que tenham armadura uniforme. A área da armadura é considerada constante ao longo da laje, mas pode ser diferente para as duas direções ou para a armadura superior ou inferior. A análise de lajes com armadura não uniforme também é possível de ser analisada pela teoria, porém, devido às dificuldades que aparecem, isto não foi suficientemente estudado até hoje.

A configuração de momentos em uma laje no estado limite último depende da resistência a flexão das seções, bem como do carregamento e das condições de contorno. Uma redistribuição significativa de momentos fletores é necessária para desenvolver um mecanismo de colapso. Isto implica que as seções da laje devem ter ductilidade suficiente para permitir rotações plásticas suficientes nas seções críticas.

4.4.2.1 - DETERMINAÇÃO DA CARGA ÚLTIMA

O primeiro passo em qualquer solução com charneiras plásticas é postular o padrão de linhas de ruptura usando algumas regras:

- 1- Para atuar como rótulas plásticas de um mecanismo de colapso formado por segmentos planos, as linhas de ruptura deverão ser linhas retas, formando eixos de rotação para o movimento destes segmentos, como se fossem charneiras plásticas (charneira; do latim *cardinaria*, *de cordo cardanis*, eixo de uma máquina; dobradiça);
- 2- Os apoios da laje atuarão como eixos de rotação. Se um lado é engastado, uma linha de ruptura pode se formar neste apoio. Um eixo de rotação passará por uma coluna de apoio;
- 3- Por compatibilidade de deformação, uma linha de ruptura deverá passar pela intersecção do eixo de rotação de segmentos adjacentes da laje;

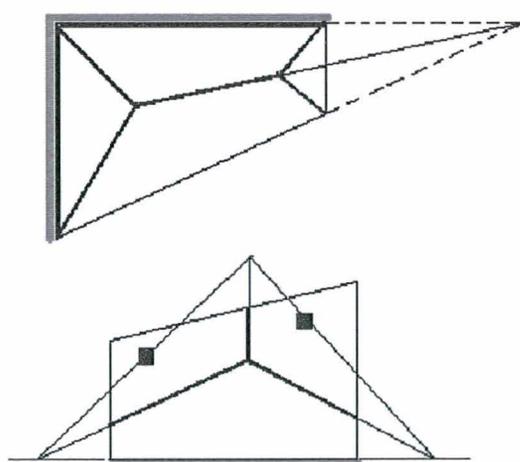


Figura 4.14 - Traçado de linhas de ruptura

- 4- Os padrões geralmente contêm dimensões desconhecidas, as quais localizam as linhas de ruptura, e poderão existir mais de uma família de linhas de ruptura para uma laje em particular;
- 5- O projetista deve assegurar-se de que todos os padrões de linha de ruptura tenham sido considerados, já que o padrão correto é aquele que resultará na menor carga última. Se o padrão crítico não for considerado, a carga última estará contra a segurança;
- 6- A carga última poderá ser obtida a partir de um padrão de linhas de ruptura usando o princípio dos trabalhos virtuais ou as equações de equilíbrio.

4.4.2.2 -SOLUÇÃO PELA EQUAÇÃO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Para analisar uma laje pelo método dos trabalhos virtuais, postula-se um padrão de linhas de ruptura para a laje no estado limite último. Os segmentos ou painéis do padrão serão considerados como corpos rígidos. Os painéis da laje estão em equilíbrio sob ação das cargas externas e sob ação dos momentos fletores, de torção e esforços cortantes ao longo das linhas de ruptura. O campo de deslocamentos, em todos os pontos da laje e a rotação dos painéis ao redor das linhas de ruptura, poderão ser obtidos em função destes deslocamentos e das dimensões dos painéis. As cargas externas e os esforços internos ao longo das linhas de ruptura realizam trabalho devido ao deslocamento virtual.

O exemplo a seguir irá demonstrar a utilização deste método para o cálculo da carga última de colapso de uma laje quadrada de concreto armado, submetida a uma carga uniformemente distribuída (q).

A armadura da laje é isotrópica, com os momentos de plastificação designados por m_u ao longo das linhas de ruptura.

Um padrão de linhas de ruptura é postulado para a laje, como mostrado na figura 4.15. Por simetria, as linhas de ruptura coincidem com a diagonal do quadrado. No centro da laje supõe-se um deslocamento d . Como o comprimento da diagonal é $lx\sqrt{2}$, a rotação ao longo das linhas de ruptura é igual a :

$$\theta = \frac{2\sqrt{2}d}{lx} \quad (4.6)$$

O trabalho total realizado pelos momentos internos, nas linhas de ruptura, vale:

$$\sum m_{un}\theta_n\sqrt{2}lx = 2\left(m_u \cdot \frac{2\sqrt{2}d}{lx} \cdot \sqrt{2}lx\right) = 8m_u d \quad (4.7)$$

O trabalho realizado pelos esforços internos nas linhas de ruptura será dado apenas pelos momentos fletores, porque o trabalho dado pelos momentos de torção e forças cortantes é zero, quando somado para toda a laje.

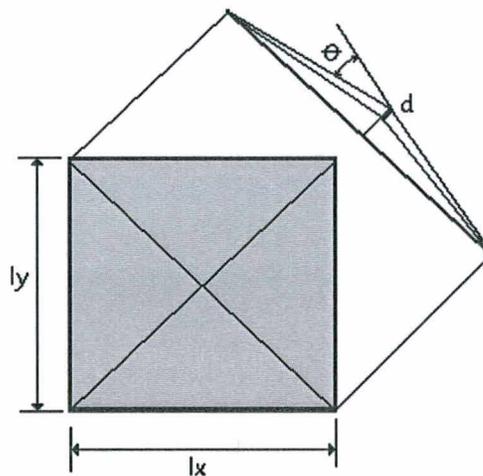


Figura 4.15 - Laje quadrada com carga uniformemente distribuída

O trabalho externo é dado por:

$$\sum W_u \Delta = 4\left(\frac{q_u \cdot lx^2}{4} \cdot \frac{d}{3}\right) = q_u lx^2 \frac{d}{3} \quad (4.8)$$

Isto equivale ao produto da carga distribuída última q_u pelo volume do tetraedro formado pelas charneiras deslocadas.

A equação dos trabalhos virtuais pode ser escrita como:

$$q_u l x^2 \frac{d}{3} = 8 m_u \cdot d \quad (4.9)$$

Os termos dos deslocamentos virtuais cancelam-se nos dois lados da equação e o valor da carga última de colapso, para o padrão de linhas de ruptura postulado é encontrado:

$$q_u = 24 \frac{m_u}{l x^2} \quad (4.10)$$

Para o momento último de dimensionamento da laje, o valor é:

$$m_u = \frac{q_u \cdot l x^2}{24} \quad (4.11)$$

Entretanto essa não é a configuração mais desfavorável para o dimensionamento da laje. Neste caso deveriam ser utilizadas configurações com bifurcações das charneiras junto aos cantos, conforme LORIGGIO (1996).

4.3.3 – ANALOGIA DE GRELHA

A Analogia de Grelha pode ser considerada como um refinamento do método das faixas de Hillerborg com a consideração da rigidez à torção das barras.

Conforme PARK&GAMBLE (1980): “A substituição de uma laje por uma série de vigas ortogonais que se cruzam, é provavelmente, o mais antigo dos procedimentos. Os momentos fletores assim calculados podem diferir consideravelmente da distribuição verdadeira da teoria elástica, devido à omissão dos momentos de torção atuantes em cada elemento da laje, que é comparável à omissão do termo cruzado da equação diferencial de equilíbrio das lajes, eq.(2.13). Este procedimento é, de fato, um método de projeto de limite inferior”.

Esse comentário é importante pelo fato de destacar que a Analogia de Grelha, para o cálculo de lajes, é um método de análise limite e, como tal, possui fundamento formal nos teoremas de equilíbrio da teoria da plasticidade. No entanto, afirmar que a distribuição de momentos difere da distribuição elástica, deixa de ser um problema com a utilização dos

modernos computadores, pois é possível considerar a rigidez à torção das faixas e obter resultados que se aproximam muito da solução elástica.

Como a solução de lajes por Analogia de Grelha é uma solução por análise limite, os resultados possíveis para uma laje são inúmeros, em função da variação dos parâmetros de rigidez das barras da grelha. Por isso, os estudos comparativos com os resultados da teoria elástica não são, necessariamente, as provas da validade do processo, mas servem para demonstrar que, utilizando-se certos parâmetros para a rigidez à torção, pode-se obter resultados muito próximos aos da teoria elástica.

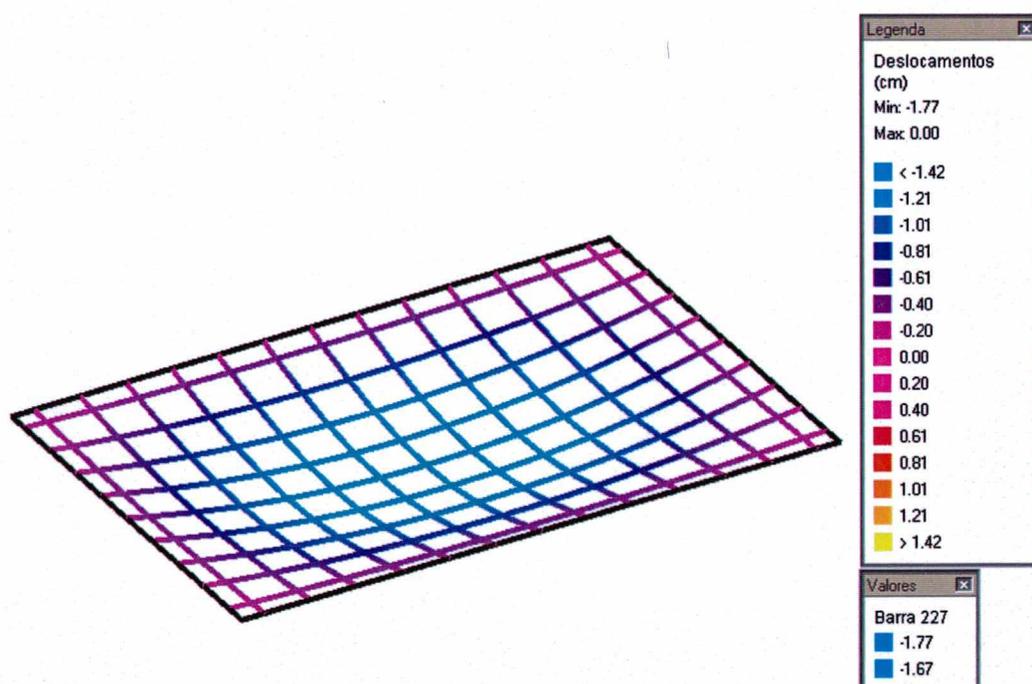


Figura 4.16 - Exemplo de uma laje calculada por Analogia de Grelha, visualização da deformada.

5- ANALOGIA DE GRELHA

5.1- INTRODUÇÃO

Para estes estudos comparativos, foi utilizado um programa de computador capaz de fazer a análise de grelhas planas pelo Método dos Deslocamentos e com grande versatilidade para variar a geometria, o carregamento, as condições de apoio e os diversos parâmetros de rigidez das grelhas. O programa utilizado foi o AltoQiEberick, versão Master, adaptado para permitir a alteração dos parâmetros de rigidez G/Ec e Jp/Iyy .

Para analisar uma laje por Analogia de Grelha, deve-se discretizá-la com uma série de faixas com determinada largura. Considerando que as faixas possam ser substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, obtém-se uma grelha plana.

As grelhas podem ser consideradas como um conjunto de vigas individuais, interconectadas nos seus nós ou pontos nodais.

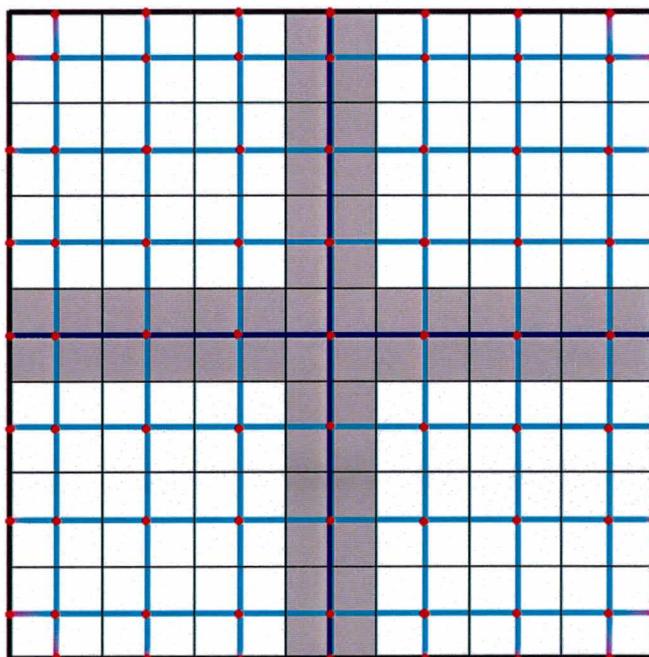


Figura 5.1 - Discretização de uma laje em uma grelha plana.

A figura 5.1 representa a discretização de uma laje quadrada com 4 x 4m em uma malha de faixas. Cada faixa, neste caso, mede 57,14 cm de largura. Foi escolhido um número ímpar de faixas para que exista um nó exatamente do meio da placa, no cruzamento das faixas centrais. Isto é conveniente para a comparação com resultados dos valores máximos dos esforços e deslocamentos calculados por teorias clássicas e por tabelas.

Ao longo do trabalho, as grelhas serão discretizadas com este critério, sempre que for possível.

Como pode ser observado na figura 5.1, as barras não têm, necessariamente, o mesmo tamanho, especialmente junto aos apoios.

5.2 - INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ A TORÇÃO

A aplicação da Analogia de Grelha para o cálculo de lajes, a princípio parece tratar-se da simples aplicação do programa de análise de grelhas planas com o painel discretizado. Os resultados dos esforços e deslocamentos obtidos seriam então, usados para o dimensionamento. No entanto, é necessário analisar a influência dos diversos parâmetros nos resultados, tais como número de faixas, rigidez à flexão e à torção, etc, para observar como o modelo se comporta.

Como foi mostrado no capítulo 3, no modelo de grelhas planas os esforços nas extremidades das barras correspondentes aos graus de liberdade são os seguintes:

Grau de Liberdade	Esforço da Barra
Deslocamento Z	Força Cortante
Rotação em Y	Momento Fletor
Rotação em X	Momento de Torção

Estes esforços são proporcionais às rigidezes correspondentes das barras, que, na matriz das barras, correspondem aos parâmetros de rigidez à torção $G.Jp$ e de rigidez a flexão EI_y .

O parâmetro de rigidez a torção $G.J_p$ é composto pelo módulo de elasticidade transversal (G) do material, que pode ser medido ou calculado em função do módulo de elasticidade transversal (E_c) ou módulo de Young e pelo momento de inércia polar (J_p) da seção transversal da barra.

Para materiais isotrópicos homogêneos, a lei de Hooke generalizada possui apenas três constantes elásticas E , ν e G . A equação de conexão é:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.1)$$

Para aplicações em concreto armado, a NBR 6118, no item 8.2.6, fixa o valor do coeficiente de Poisson em 0,2. Na implementação do programa utilizado neste trabalho, foi adotada a seguinte relação aproximada:

$$G = 0,4E_c \quad (5.2)$$

O outro parâmetro é o momento de inércia polar da seção transversal da barra (J_p).

As barras da grelha possuem seção retangular, com largura igual à largura das faixas e altura igual a espessura da placa. O momento de inércia pode ser calculado conforme GERE e WEAVER (1980), pela fórmula :

$$J_p = \beta h b^3 \quad (5.3)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{b}{h}\right) \left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right) \quad (5.4)$$

Nestas fórmulas, b é sempre a menor dimensão. Portanto, quando as faixas possuírem largura maior que a altura, o valor b é igual à espessura da faixa e h igual à largura da faixa. Quando as faixas passam a ter uma largura menor que a espessura da placa esta situação inverte-se.

Para estudar a influência da rigidez à torção, serão feitas diversas análises, iniciando-se com uma laje quadrada com as seguintes características:

- Dimensões da Laje : $l_x = 4 \text{ m}$ e $l_y = 4 \text{ m}$
- Espessura $h = 10 \text{ cm}$
- Carga uniformemente distribuída $q = 10 \text{ kN/m}^2$
- Módulo de Elasticidade longitudinal $E = 21000 \text{ MPa}$

A laje será discretizada em 8 malhas desde 80x80cm até 5x5cm, conforme as figuras 5.2 a 5.6.

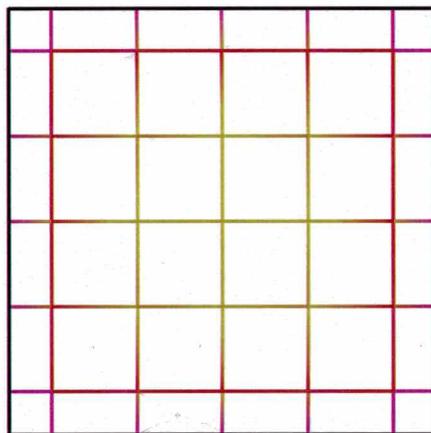


Figura 5.2 - Discretização de uma laje em uma malha de 80 cm de largura.

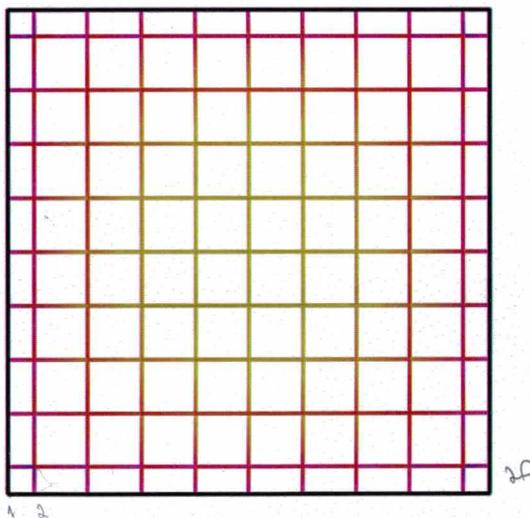


Figura 5.3 - Discretização de uma laje em uma malha de 45 cm de largura.

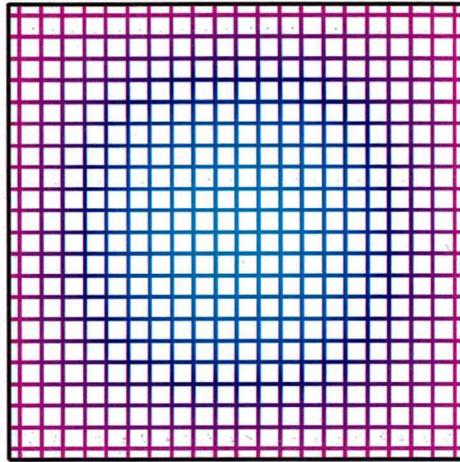


Figura 5.4 - Discretização de uma laje em uma malha de 19 cm de largura.

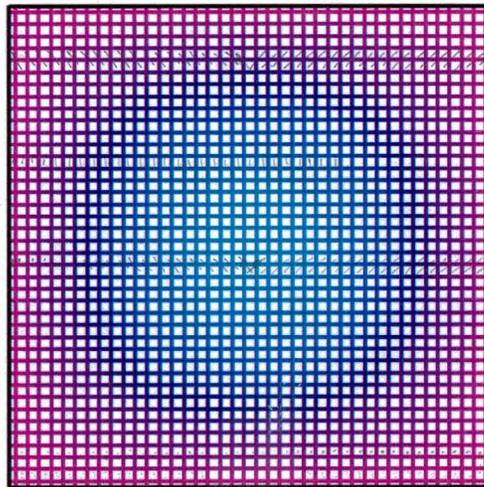


Figura 5.5 - Discretização de uma laje em uma malha de 10 cm de largura.

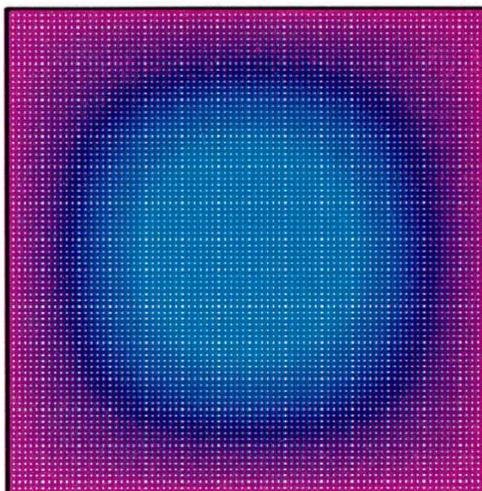


Figura 5.6 - Discretização de uma laje em uma malha de 5 cm de largura.

As primeiras análises foram feitas com uma relação $G = 0,4.Ec$ e com os momentos de inércia à flexão e polar calculados com as equações (5.3) e (5.4).

O carregamento distribuído na laje é transformado em uma carga linear uniformemente distribuída em cada barra, de acordo com a contribuição da área de influência conforme mostrado na figura 5.7 . Com esta carga distribuída nas barras, são calculados os esforços nodais para a construção do vetor de cargas equivalentes.

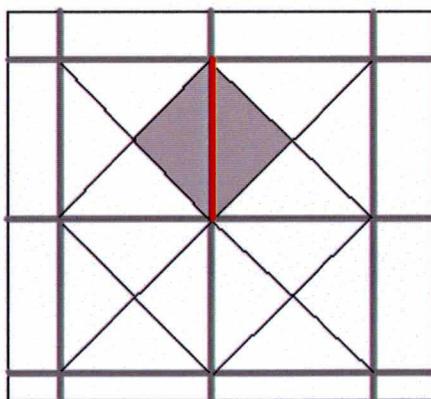


Figura 5.7 - Transformação da carga uniformemente distribuída na placa para uma carga distribuída linear na barra da grelha.

5.3 – ANÁLISE NUMÉRICA

Uma grelha será calculada para mostrar as formas características dos diagramas dos momentos fletores e de torção e o comportamento em função da rigidez à torção das faixas.

A grelha analisada, mostrada na figura 5.8, possui dez vigas com seção de 80x10 cm simplesmente apoiadas nas extremidades. Este apoio está livre para a rotação segundo o eixo perpendicular a viga, porém com a rotação impedida segundo o eixo da viga.

As vigas possuem comprimento de 4 m e estão espaçadas de 80 cm entre si, formando uma grelha em um quadrado com 4 m de lado.

O carregamento distribuído uniformemente nas barras é de 4 kN/m. Para o módulo de elasticidade longitudinal adotou-se $E_c=21000$ MPa e $0,4.E_c$ para o módulo de elasticidade transversal. O momento de inércia polar das faixas foi calculado através das equações 5.3 e 5.4.

Os parâmetros de cálculo da primeira análise são:

- $G = 8400$ MPa
- $J_p = 24567$ cm⁴
- $I_{yy} = 6667$ cm⁴

A relação J_p / I_{yy} é de 3,6.

A análise dessa grelha foi feita pelo programa AltoQiEberick Master, pelo método da rigidez direta. Os resultados da análise foram, em primeiro lugar, os deslocamentos nodais nos nós da grelha. Na figura 5.9, é apresentado um diagrama com a deformada ou a linha elástica da viga central da grelha, a viga V3, na qual acontece o maior deslocamento da grelha, no nó central, 0,49 cm.

Nos diagramas dos momentos fletores, é importante observar duas características peculiares das grelhas: a descontinuidade no gráfico, devido aos momentos de torção, e o fato de o momento fletor máximo nem sempre se encontrar no meio da grelha. Na figura 5.10, é apresentado o diagrama de momentos fletores na viga central V3. Os pontos de descontinuidade correspondem aos nós da grelha e a diferença entre os valores em cada descontinuidade é exatamente igual ao momento de torção concentrado aplicado como

DESLOCAMENTOS VIGA: V3

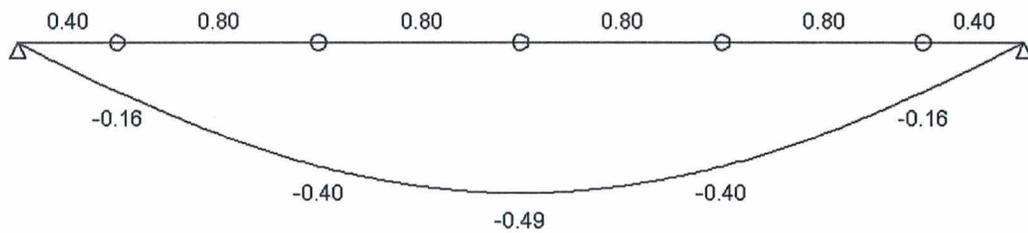


Figura 5.9 -Deformada da V3 .

MOMENTOS FLETORES DE CÁLCULO (Mdx) VIGA: V3

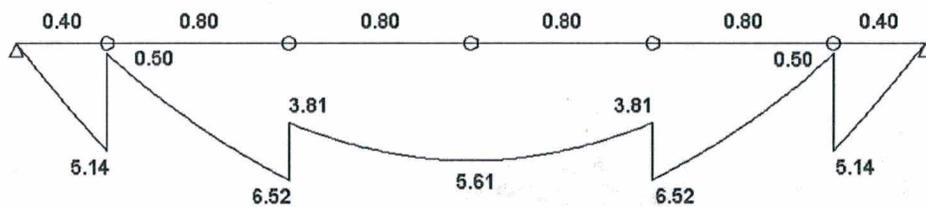


Figura 5.10 - Momentos fletores na viga V3.

MOMENTOS TORSORES DE CÁLCULO (M_{td}) VIGA: V1

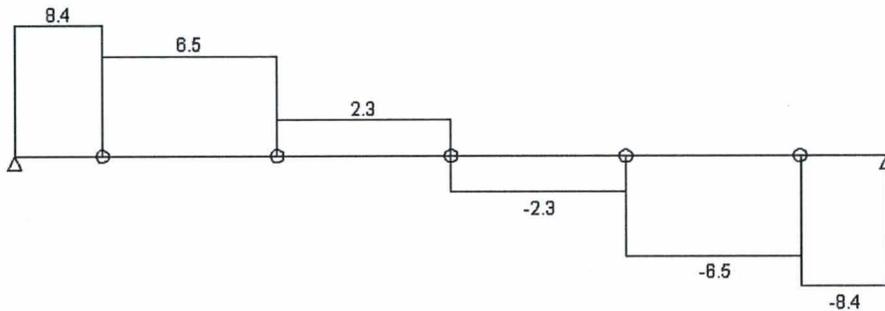


Figura 5.11 - Momentos de torção na viga V1

A mesma grelha também foi analisada com uma redução de 95% nos parâmetros de rigidez, que, em termos práticos, corresponde a uma grelha com as barras praticamente sem rigidez à torção.

MOMENTOS FLETORES DE CÁLCULO (M_{dx}) VIGA: V3

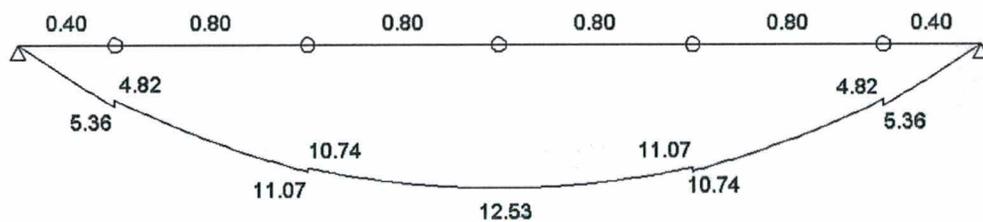


Figura 5.12 - Momentos fletores da viga central, redução torção 95%

Com esta redução na torção, observa-se um aumento significativo nos deslocamentos nodais e nos momentos fletores, com uma redução dos momentos de torção para praticamente zero. Com a redução dos momentos de torção, as descontinuidades no diagrama dos momentos fletores são bastante reduzidas, fazendo com que o valor máximo da grelha, na viga V3, seja encontrado no nó central.

MOMENTOS TORSORES DE CÁLCULO (M_{td}) VIGA: V1

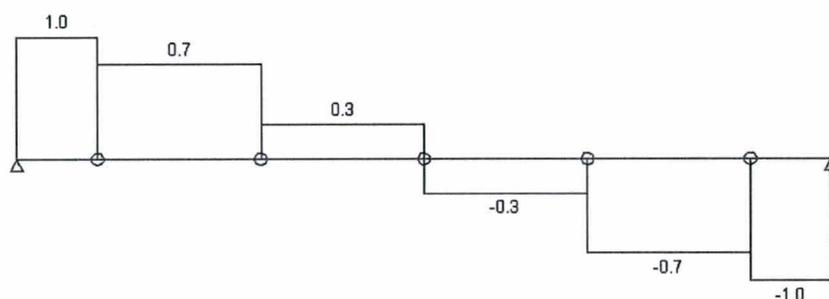


Figura 5.13 - Momentos de torção da viga V1, redução torção 95%

DESLOCAMENTOS VIGA: V3

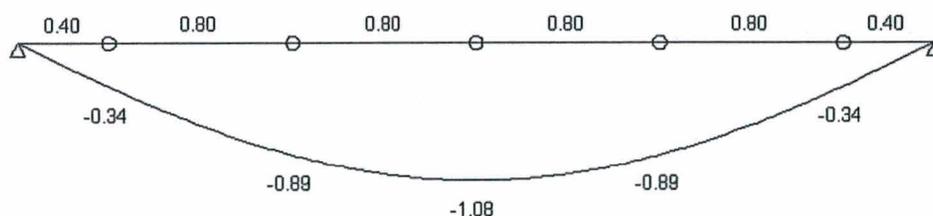


Figura 5.14 - Deformada na viga central, redução torção 95%

5.3.1 - INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ À TORÇÃO NO CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

A primeira verificação feita para apurar o desempenho do procedimento por Analogia de Grelha, no cálculo de uma laje, é a determinação do valor das reações das barras sobre os apoios. Para facilitar a verificação e a comparação com processos simplificados de cálculo de reações de apoio, como, por exemplo o proposto no item 3.3.2.9 da NBR-6118, a reação obtida em cada apoio é calculada como a média das reações concentradas, das barras da grelha, que chegam nesse apoio. Para o caso da laje discretizada em malha de 5x5, cm o resultado é mostrado na fig.5.15. A carga total na laje é $10 \times 4 \times 4 = 160$ kN, equilibrada pelas reações médias de 10 kN/m em cada apoio, ou seja $4 \times (10 \times 4) = 160$ kN.

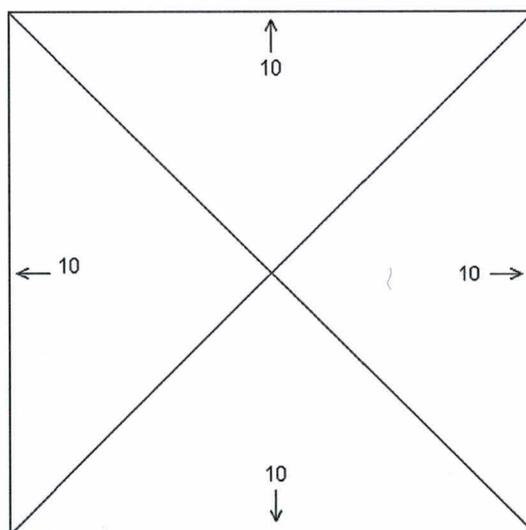


Figura 5.15 - Reações de apoio obtidas pelo item 3.3.2.9 da NBR-6118

Com o modelo de grelha, é possível verificar que a reação de apoio não é uniforme, mas variável e inclusive com trechos de valores negativos junto aos cantos e máximo no meio do vão do apoio. Para analisar estes resultados, os apoios foram separados em trechos de 50 cm.

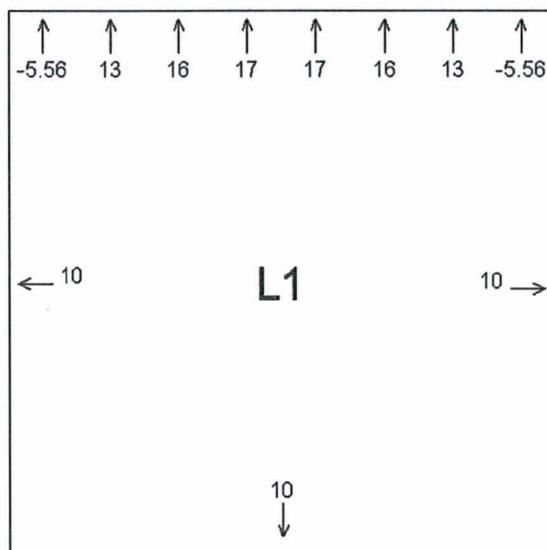


Figura 5.16 - Reações de apoio obtidas por Analogia de Grelha.

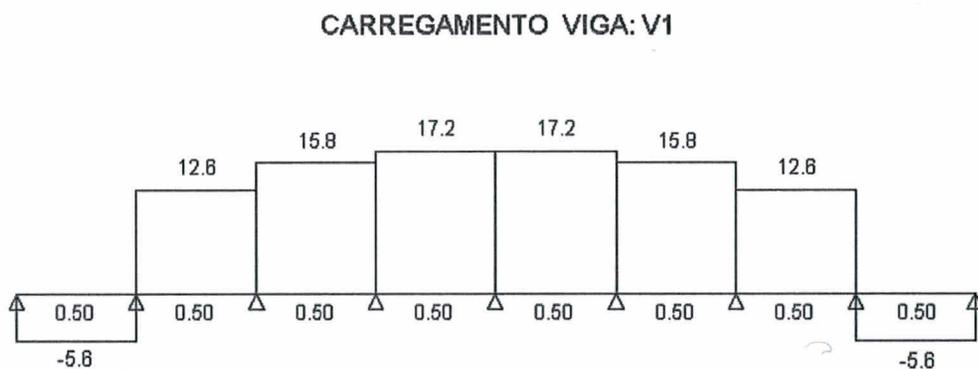


Figura 5.17 - Distribuição da reações de apoio nas vigas por Analogia de Grelha.

TIMOSHENKO (1956) apresenta o resultado da distribuição dos esforços cortantes encontrados por Kromm em uma laje quadrada com a relação lado altura $a/h=20$. O valor

máximo desta distribuição é de $0,42 \cdot q \cdot a = 0,42 \times 10 \times 4 = 16,8$ kN/m, bem próximo do valor encontrado em nosso exemplo, 17,18 kN/m, uma diferença de apenas 2,2 %.

Esta distribuição é proporcional a vários fatores, principalmente à rigidez do apoio. Nestas primeiras análises, a rigidez do apoio considerada foi muito grande, simulada no modelo de grelha através de vigas de apoio de grande altura. No caso em estudo, as vigas foram consideradas com seção de 15x500 cm. A mesma consideração será feita quando analisarmos soluções comparativas em elementos finitos.

A figura 5.17, mostra a distribuição das reações sobre o apoio com a viga discretizada em trechos de 50 cm. A malha da laje, neste caso, foi discretizada a cada 10 cm.

Estes resultados já demonstram que existe uma boa aproximação nos resultados da Analogia de Grelha com as teorias clássicas elásticas, com os parâmetros de rigidez ajustados.

5.3.2 - INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ À TORÇÃO DAS FAIXAS NO CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES, DE TORÇÃO E DESLOCAMENTOS.

Uma laje quadrada, simplesmente apoiada nos quatro lados, com um carregamento distribuído, será analisada com um modelo de Analogia de Grelha, com diversos espaçamentos de malha e com diversos valores para a rigidez à torção das faixas. Nessas primeiras análises os resultados não serão comparados ainda com nenhum outro método de cálculo e sendo estudado apenas o comportamento dos resultados em função da malha e da rigidez à torção das faixas.

5.3.2.1- RESULTADOS EM FUNÇÃO DA MALHA.

Na tabela 5.1, estão apresentados os resultados dos valores máximos dos momentos fletores, de torção e deslocamentos. Para esta tabela, utilizou-se uma rigidez à torção calculada com as equações 5.3 e 5.4, e um módulo de elasticidade transversal $G = 0,4 E_c$. Os resultados dos momentos fletores e de torção em uma grelha plana são valores concentrados nos nós das barras. Para transformá-los em valores por unidade de largura, ou

conforme as unidades utilizadas, estes valores concentrados são divididos pelas larguras das faixas. O mesmo procedimento será utilizado em todo o trabalho.

Tabela 5.1 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2

Relação $G/E_c = 0,4$

Malha (cm)	Mx kN.m/m	My kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
80x80	6,25	6,25	7,67	0,5
57x57	5,65	5,65	8,09	0,5
44x44	5,42	5,42	8,21	0,5
36x36	5,36	5,36	8,21	0,51
26x26	5,44	5,44	8,04	0,53
19x19	5,75	5,75	7,61	0,57
10x10	7,13	7,13	5,90	0,71
5x5	9,54	9,54	3,11	0,94

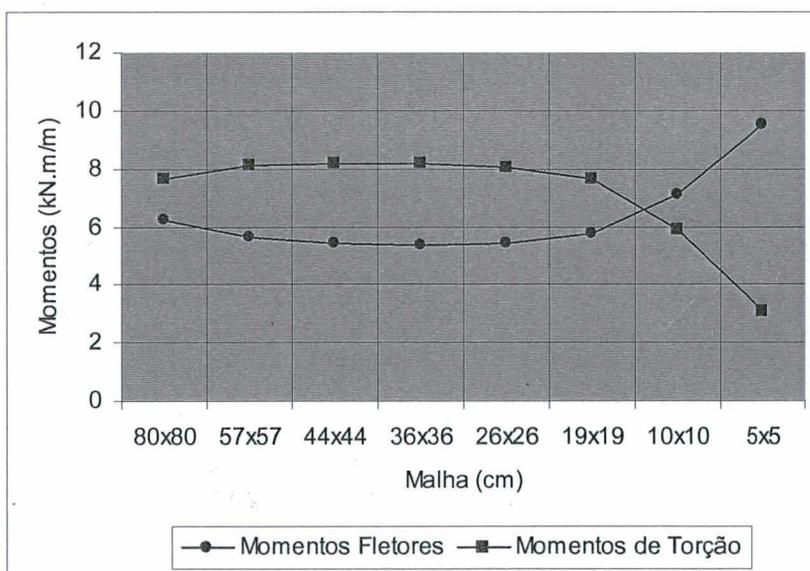


Figura 5.18 - Momentos fletores e de torção em função da malha

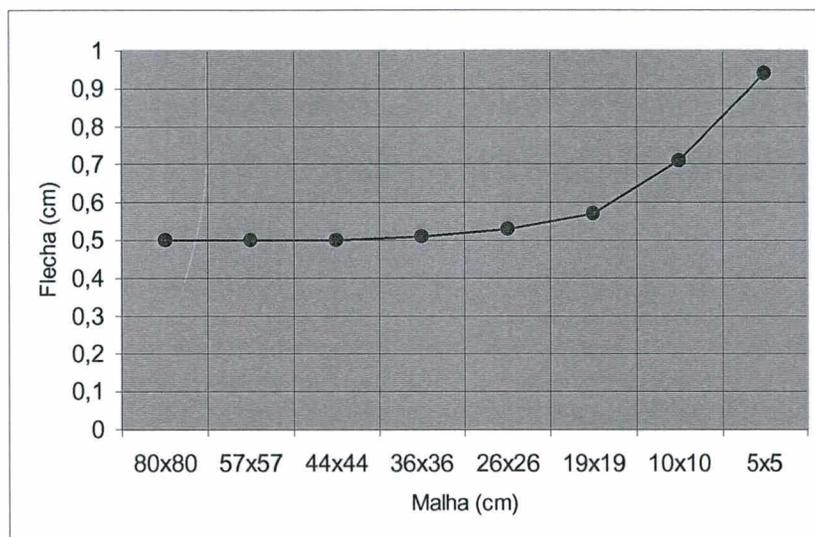


Figura 5.19 - Flechas máximas em função da malha

A mesma análise foi repetida para uma relação $G = 0,2 E_c$. Os resultados estão na tabela 5.6 e na figura 5.10 .

Tabela 5.2 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2
Relação $G/E_c = 0,2$

Malha (cm)	Mx kN.m/m	My kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
80x80	7,59	7,59	5,40	0,69
57x57	7,38	7,38	5,65	0,70
44x44	7,33	7,33	5,68	0,71
36x36	7,36	7,36	5,64	0,72
26x26	7,51	7,51	5,44	0,74
19x19	7,85	7,85	5,05	0,78
10x10	9,06	9,06	3,65	0,89
5x5	10,77	10,77	1,73	1,05

Para uma melhor visualização, os resultados foram traçados em gráficos, figuras 5.20 e 5.21. Nesses gráficos, já é possível observar uma significativa influência da malha.

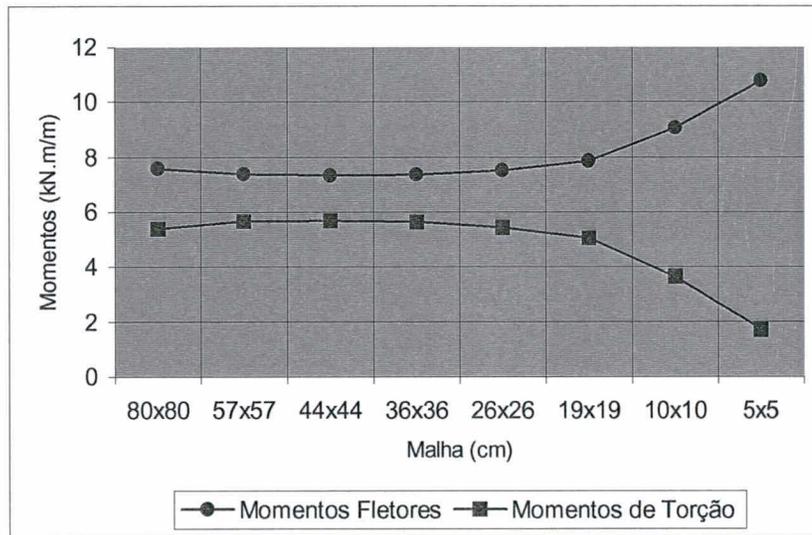


Figura 5.20 - Momentos fletores e de torção em função da malha

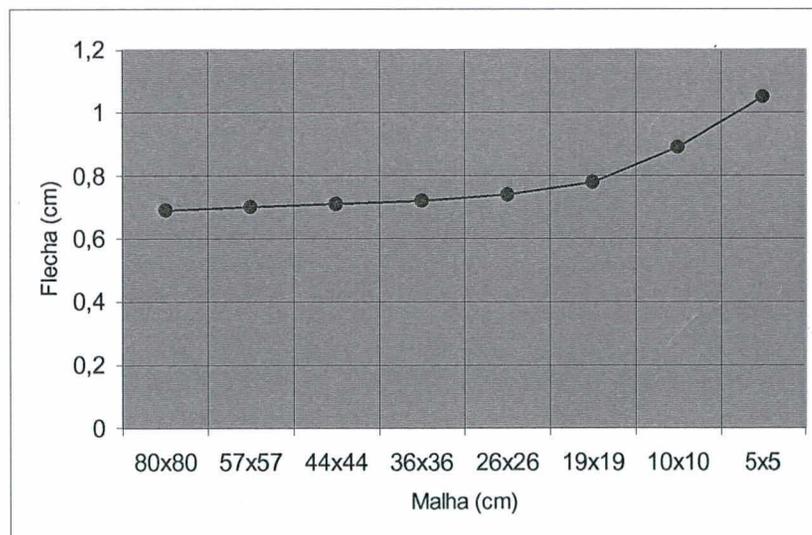


Figura 5.21 - Flechas máximas em função da malha

Estas primeiras análises demonstram que existe uma influência significativa da malha. Porém, não é só isso que se observa. No caso dos deslocamentos os valores mais altos são obtidos com as malhas menos espaçadas. O mesmo comportamento é observado para os momentos fletores e de torção.

Com o objetivo de buscar a razão para este comportamento, foram calculados, com as equações 5.5, 5.6 e 5.7, os valores dos parâmetros de inércia à flexão e da inércia à torção para um grande número de largura de faixas e também para diversas espessuras de placas.

A figura 5.22 representa os valores do somatório dos momentos de inércia à flexão das faixas em uma direção da laje para várias espessuras, desde 5 cm até 25 cm. Os valores são constantes para uma determinada espessura da laje.

Os valores plotados foram obtidos através da seguinte equação:

$$I_{xx}(b) = \sum_{b=5}^{100} \frac{bh^3}{12} \frac{400}{b} \quad (5.5)$$

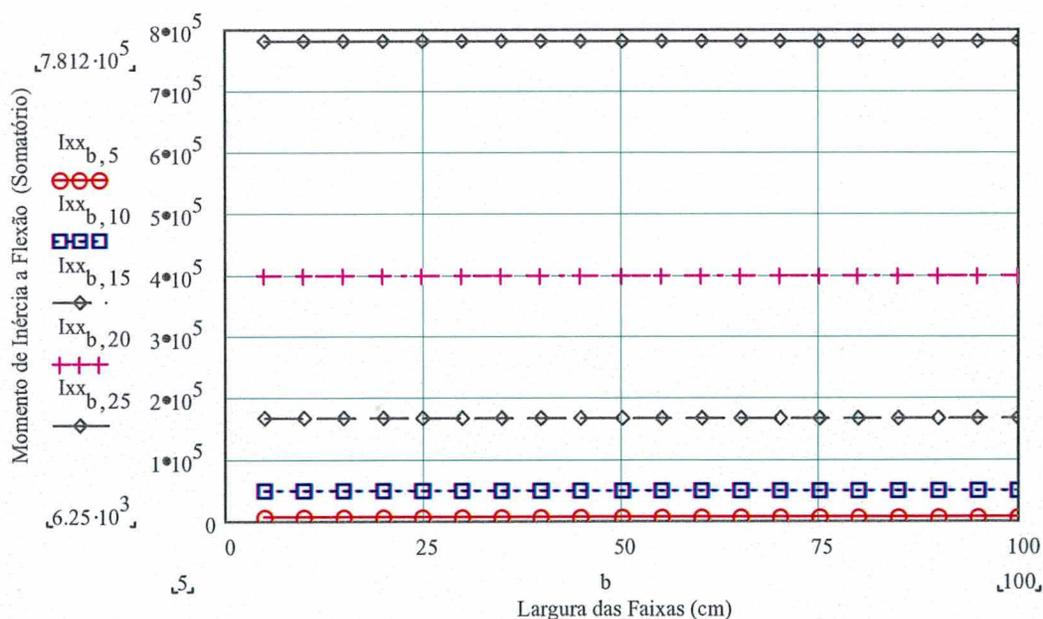


Figura 5.22 - Variação do momento de inércia a flexão em função da largura das faixas

O cálculo do momento de inércia à torção das faixas foi feito com as equações 5.3 e 5.4, conforme GERE e WEAVER (1980), onde $b_{b,h}$ é sempre a menor dimensão da seção transversal das faixas. Multiplicando o valor do momento de inércia à torção de uma faixa pela quantidade de faixas, (nesse caso o valor do lado da laje quadrada pela largura de uma faixa), obtém-se o valor do somatório da inércia à torção total da laje em uma das direções.

$$J_{p_{b,h}} = \beta_{b,h} h_{b,h} (b_{b,h})^3 \frac{400}{b} \quad (5.6)$$

$$\beta_{b,h} = \frac{1}{3} - \left(0.21 \frac{b_{b,h}}{h_{b,h}} \right) \left[1 - \frac{(b_{b,h})^4}{12(h_{b,h})^4} \right] \quad (5.7)$$

Variando a espessura b das faixas e dividindo pelo valor da rigidez à flexão para a mesma largura de faixa, obtém-se o resultado mostrado na figura 5.23.

O gráfico 5.23 mostra que a rigidez total à torção da placa não é linear, diminui significativamente para malhas pouco espaçadas. Essa redução de rigidez em função da malha adotada é um dos fatores que vai influenciar os resultados dos momentos e deslocamentos ao longo da laje. Isso acontece devido ao fato da rigidez à torção ser proporcional ao cubo da dimensão $b_{b,h}$ das faixas. Como a torção atua em relação ao eixo da barra, o valor da dimensão $b_{b,h}$ é sempre o menor dos lados. Para valores da largura da faixa menores que a espessura da placa, a menor dimensão $b_{b,h}$ passa a ser a largura da faixa. O momento de inércia polar total da placa em uma das direções tende a zero quando a espessura das faixas também tender a zero, diferentemente do somatório da rigidez à flexão, que permanece constante.

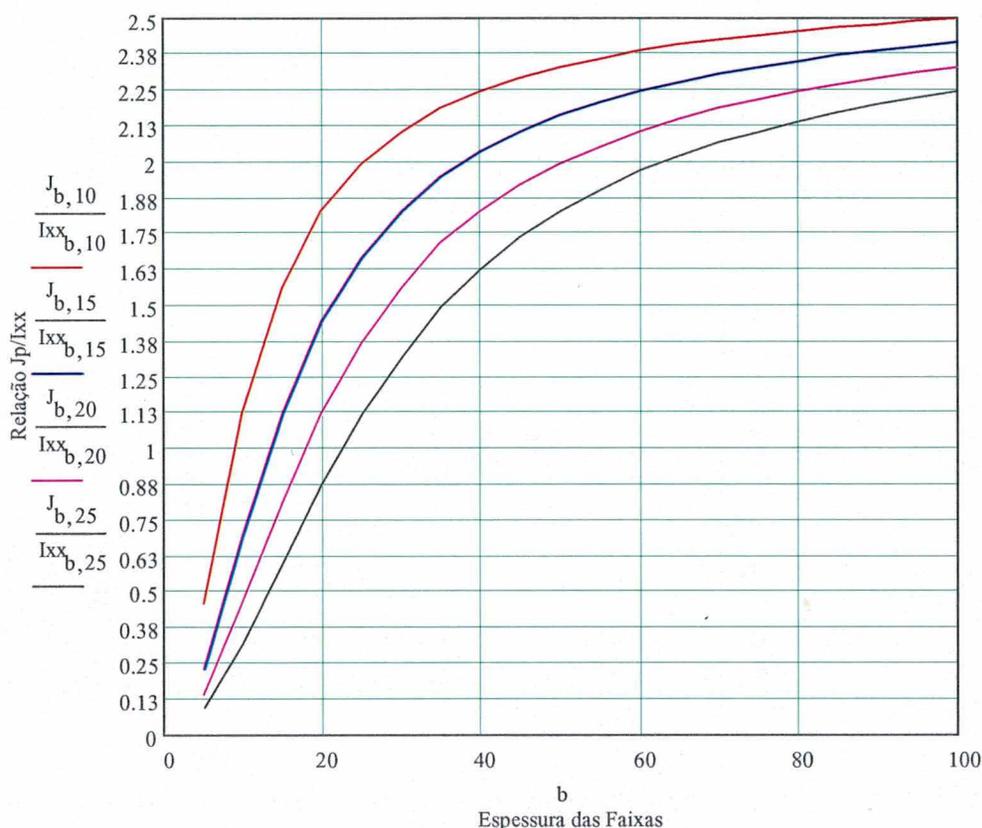


Figura 5.23 - Somatório da rigidez à torção em relação à espessura das faixas

Isso demonstra que não é possível utilizar a rigidez à torção calculada com o momento de inércia polar J_p da equação 5.7, que é muito dependente da espessura das faixas.

Uma das alternativas possíveis para contornar esse problema é adotar um momento de inércia polar diretamente proporcional ao momento de inércia à flexão.

É importante salientar que essa sugestão foi apresentada por MONTROYA (1973), o qual sugeriu que: “Para modelar a placa como uma grelha pode-se substituí-la por uma malha de vigas nas duas direções. A cada viga se atribui a inércia à flexão da faixa correspondente, e uma inércia à torção equivalente ao dobro de sua inércia à flexão.”

5.3.2.2- RESULTADOS EM FUNÇÃO DA RELAÇÃO G/Ec PARA UM ESPAÇAMENTO DE MALHA CONSTANTE.

Com uma malha fixa de espaçamento 10x10cm, serão calculados os esforços e deslocamentos para vários valores de rigidez G/Ec .

A relação entre os módulo de elasticidade transversal G e o módulo de elasticidade longitudinal Ec será denominada de:

$$G/Ec \quad \text{Eq. (5.5)}$$

Da matriz de rigidez da grelha, o valor da rigidez a torção das barras é:

$$Kt = \frac{GJp}{L} \quad (5.6)$$

O valor da rigidez Kt pode ser controlado pela relação G/Ec . Para um valor de G/Ec nulo, os momentos fletores e deslocamentos apresentam valores máximos e o momento de torção é nulo. Como as barras da grelha possuem rigidez à torção nula, toda a carga é equilibrada pelos momentos fletores. Para valores crescentes de G/Ec , os momentos de torção crescem com o aumento de rigidez à torção das faixas e os momentos fletores e deslocamentos diminuem.

Tabela 5.3 - Resultados dos momentos e flecha máxima, para laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

G/Ec	M_x kN.m/m	M_y kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	Flecha cm
0	12,35	12,35	0	1,20
0,1	9,35	9,35	3,32	0,91
0,2	7,51	7,51	5,44	0,74
0,3	6,31	6,31	6,93	0,62
0,4	5,44	5,44	8,03	0,53

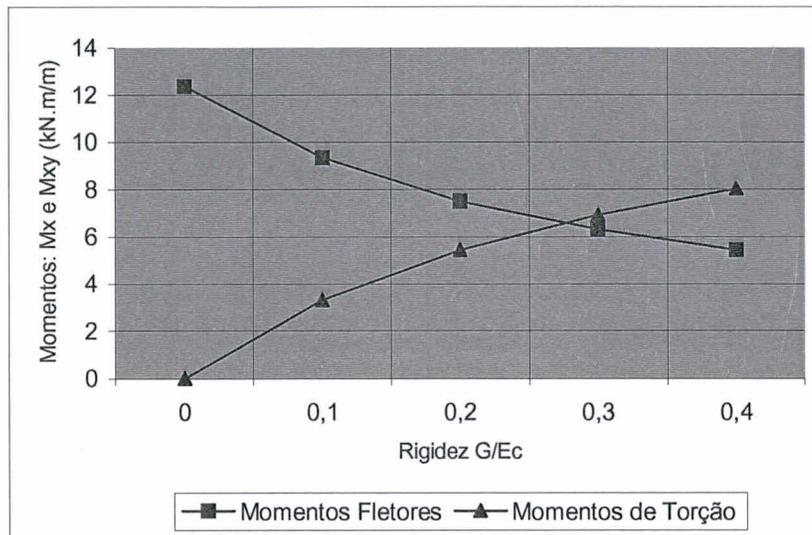


Figura 5.23 - Momentos fletores e de torção em função de G/E_c .

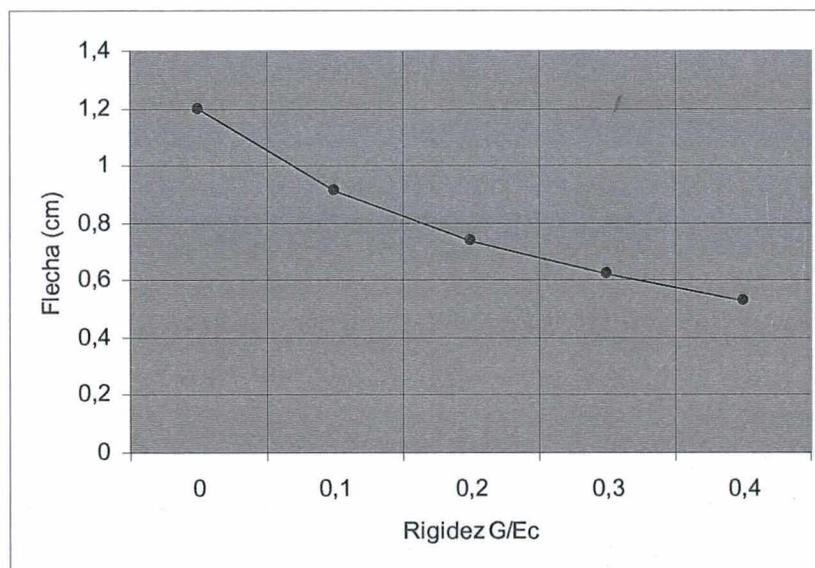


Figura 5.24 - Flechas máximas em função de G/E_c .

Os resultados apresentados no gráfico 5.22 e 5.23 demonstram que, para um espaçamento fixo da malha, os resultados variam em relação à rigidez a torção, porém, segundo uma relação não linear com valores sempre ascendentes ou descendentes.

5.3.2.3- ESTUDO DE UMA LAJE QUADRADA COM RIGIDEZ À TORÇÃO PROPORCIONAL À RIGIDEZ À FLEXÃO DAS FAIXAS.

A partir das conclusões obtidas no item anterior, foram analisados diversos casos da laje quadrada com momento de inércia à torção proporcional ao momento de inércia à flexão para as faixas. Para as mesmas malhas estudadas anteriormente, foram calculados os deslocamentos máximos, os momentos fletores e de torção, apresentados a seguir.

*Tabela 5.4 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m²
Relação $G/Ec = 0,4$ e $Jp/Iyy = 1$*

Malha (cm)	Mx kN.m/m	My kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
80x80	9,07	9,07	3,62	0,84
57x57	8,87	8,87	3,85	0,85
44x44	8,78	8,78	3,95	0,85
36x36	8,74	8,74	4,01	0,85
26x26	8,69	8,69	4,07	0,85
19x19	8,66	8,66	4,10	0,85
10x10	8,64	8,64	4,14	0,85

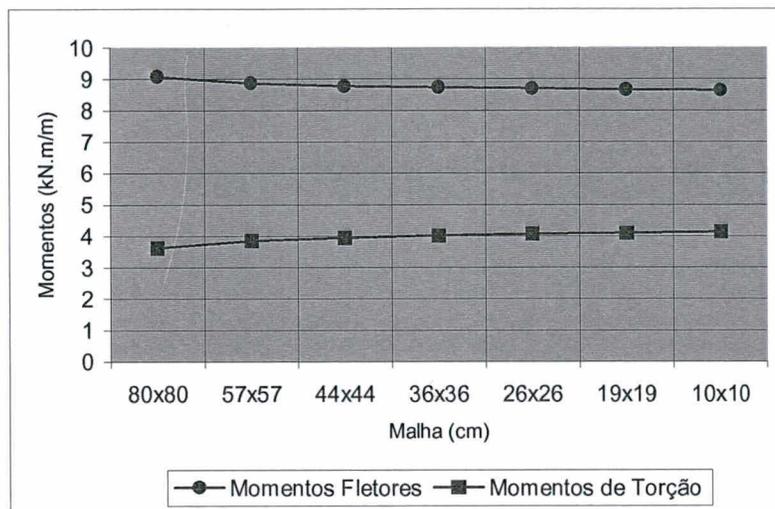


Figura 5.25 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=1$ e $G/E_c=0,4$

A tabela 5.4 mostra que os resultados dos momentos e dos deslocamentos mantêm-se praticamente constantes para qualquer espaçamento de malha, para um momento de inércia polar em função do momento de inércia a flexão, para o valor adotado de $J_p = I_{yy}$.

A seguir, serão analisados os resultados para outros valores da relação J_p/I_{yy} , variando-se também a relação entre G e E_c .

Tabela 5.5 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada $4 \times 4 \text{ m}$, altura $h=10 \text{ cm}$, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2

Relação $G/E_c = 0,2$ e $J_p/I_{yy} = 1$

Malha (cm)	M_x (kN.m/m)	M_y (kN.m/m)	M_{xy} (kN.m/m)	Flecha (cm)
80x80	10,46	10,46	2,10	0.74
57x57	10,33	10,33	2,23	0.74
44x44	10,27	10,27	2,29	0.74
36x36	10,24	10,24	2,32	0.74
26x26	10,21	10,21	2,35	0.74
19x19	10,19	10,19	2,38	0.74
10x10	10,17	10,17	2,39	0.74

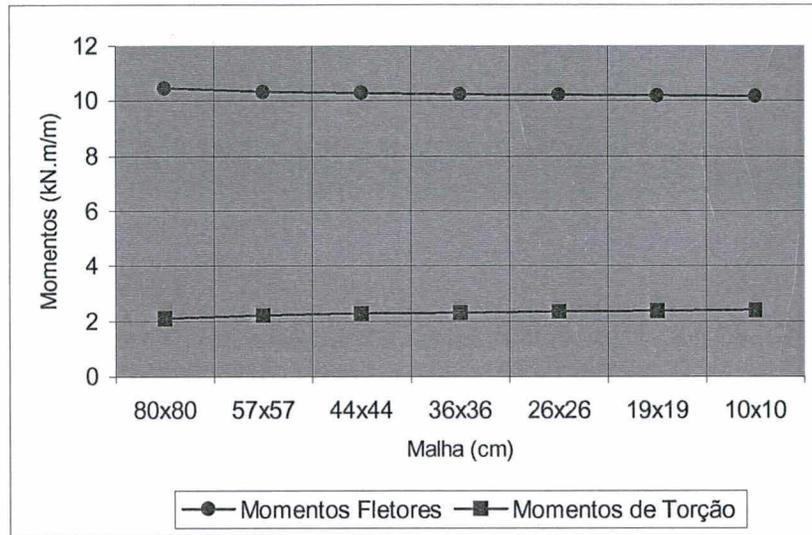


Figura 5.26 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=1$ e $G/E_c=0,2$

Tabela 5.5 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m²

Relação $G/E_c = 0,2$ e $J_p/I_{yy} = 2$

Malha (cm)	Mx (kN.m/m)	My (kN.m/m)	Mxy (kN.m/m)	Flecha (cm)
80x80	9,07	9,07	3,62	0,84
57x57	8,87	8,87	3,85	0,85
44x44	8,78	8,78	3,95	0,85
36x36	8,73	8,73	4,01	0,85
26x26	8,69	8,69	4,07	0,85
19x19	8,66	8,66	4,11	0,85
10x10	8,64	8,64	4,13	0,85

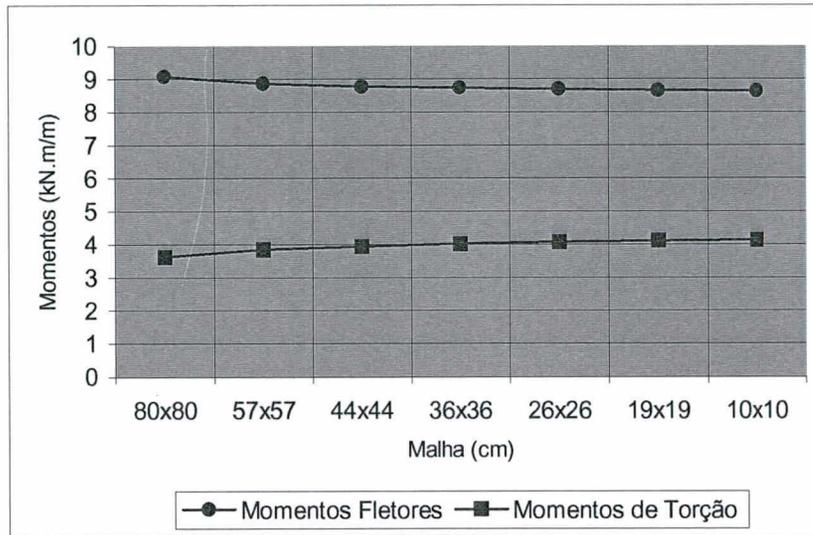


Figura 5.27 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=2$ e $G/E_c=0,2$

Tabela 5.6 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m².

Relação $G/E_c = 0,4$ e $J_p/I_{yy} = 3$

Malha (cm)	Mx (kN.m/m)	My (kN.m/m)	Mxy (kN.m/m)	Flecha (cm)
80x80	6,65	6,65	6,99	0,55
57x57	6,07	6,07	7,48	0,54
44x44	5,79	5,79	7,71	0,54
36x36	5,64	5,64	7,84	0,54
26x26	5,49	5,49	7,96	0,54
19x19	5,41	5,41	8,05	0,54
10x10	5,34	5,34	8,11	0,54

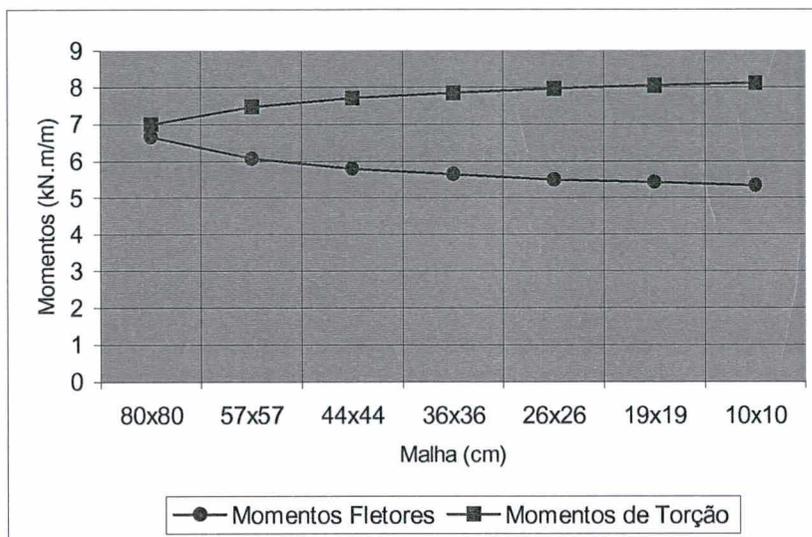


Figura 5.28 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=3$ e $G/E_c=0,4$

Tabela 5.7 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/E_c = 0,2$ e $J_p/I_{yy} = 3$

Malha (cm)	Mx (kN.m/m)	My (kN.m/m)	Mxy (kN.m/m)	Flecha (cm)
80x80	8,04	8,04	4,76	0,74
57x57	7,80	7,80	5,08	0,74
44x44	7,69	7,69	5,22	0,74
36x36	7,63	7,63	5,30	0,74
26x26	7,57	7,57	5,38	0,74
19x19	7,53	7,53	5,43	0,74
10x10	7,50	7,50	5,47	0,74

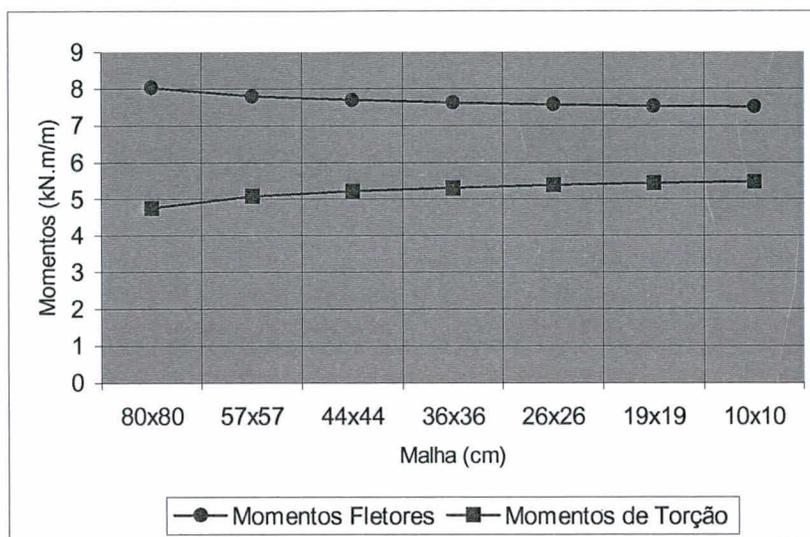


Figura 5.29 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=3$ e $G/E_c=0,2$

Tabela 5.8 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m².

Relação $G/E_c = 0,2$ e $J_p/I_{yy} = 4$

Malha (cm)	Mx (kN.m/m)	My (kN.m/m)	Mxy (kN.m/m)	Flecha (cm)
80x80	7,43	7,43	5,67	0,67
57x57	7,09	7,09	6,05	0,66
44x44	6,91	6,91	6,22	0,66
36x36	6,81	6,81	6,32	0,66
26x26	6,71	6,71	6,42	0,66
19x19	6,66	6,66	6,48	0,66
10x10	6,61	6,61	6,53	0,66

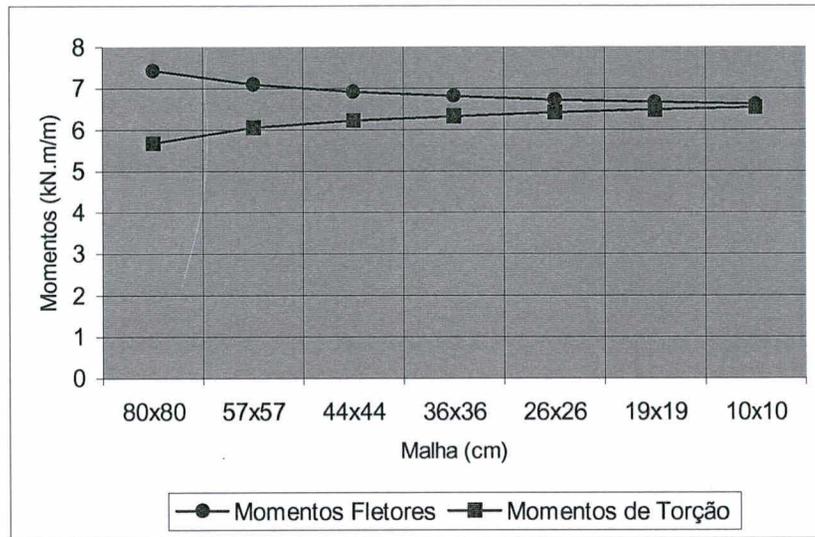


Figura 5.30 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=4$ e $G/E_c=0,2$

Tabela 5.9 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/E_c = 0,4$ e $J_p/I_{yy} = 4$

Malha (cm)	Mx (kN.m/m)	My (kN.m/m)	Mxy (kN.m/m)	Flecha (cm)
80x80	6,10	5,91	6,10	0,47
57x57	5,36	5,36	8,50	0,46
44x44	5,03	5,03	8,77	0,46
36x36	4,87	4,87	9,18	0,46
26x26	4,69	4,69	9,07	0,46
19x19	4,57	4,58	9,17	0,46
10x10	4,48	4,47	9,26	0,46

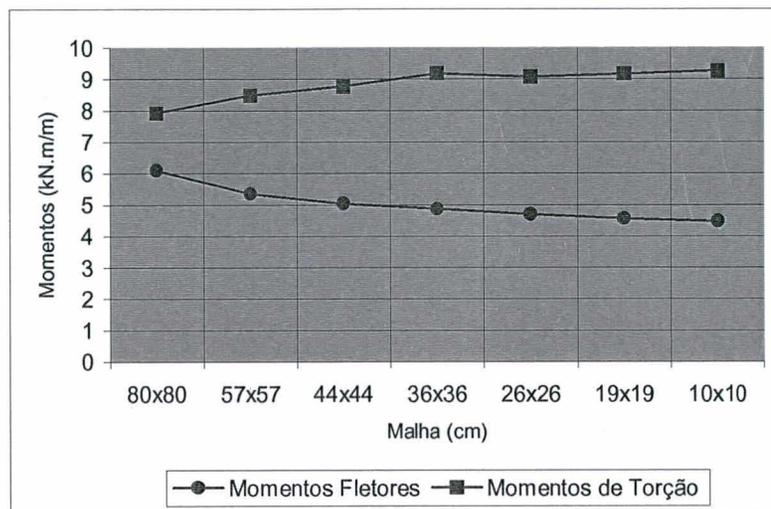


Figura 5.31 - Momentos fletores e de torção em função da malha $J_p/I_{yy}=4$ e $G/E_c=0,4$

É importante notar que, praticamente, não existe variação nos resultados dos esforços e deslocamentos para as discretizações em diversas malhas. Para um determinado valor de J_p/I_y e G/E_c . Portanto, os resultados acabam ficando praticamente independentes da malha. A tabela 5.10 e os gráficos 5.32 e 5.33, mostrados a seguir, apresentam um resumo destes resultados para uma malha de 36x36 cm.

Tabela 5.10 - Resultados dos momentos e flecha máxima em função da rigidez a torção J_p/I_{yy} laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2

Relação $G/E_c = 0,4$

J_p/I_{yy}	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	
1	9,07	9,07	3,62	0,85
2	7,43	7,43	5,67	0,66
3	5,64	5,64	7,84	0,54
4	4,87	4,87	9,18	0,46

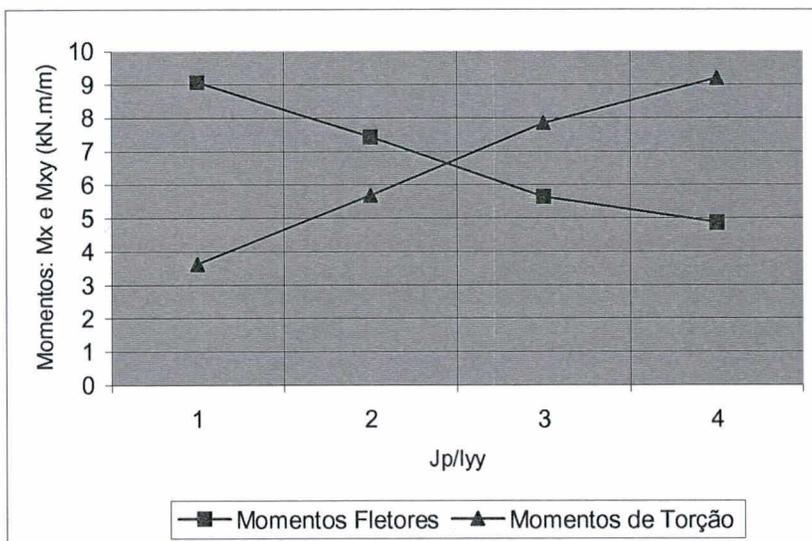


Figura 5.32 - Momentos fletores e de torção pela Analogia de Grelha em função da rigidez à torção.

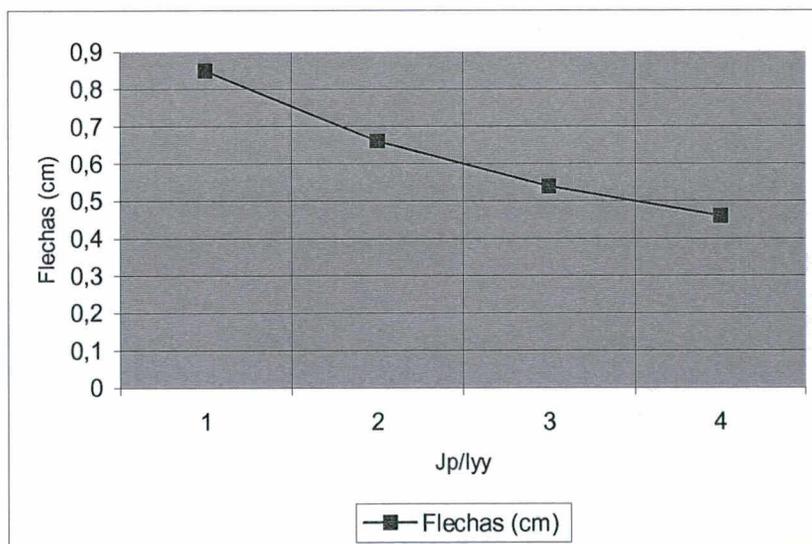


Figura 5.33 - Flechas pela Analogia de Grelha em função da rigidez à torção

5.3.3 – ESTUDO COMPARATIVO ENTRE AS SOLUÇÕES CLÁSSICAS E A ANALOGIA DE GRELHA.

5.3.3.1- RESULTADOS DA SOLUÇÃO DE NAVIER

Conforme foi apresentado no capítulo 4, a solução de Navier pode ser usada para calcular a distribuição de deslocamentos e esforços em uma laje retangular simplesmente apoiada.

Para realizar um estudo comparativo entre a solução clássica e a Analogia de Grelha, foram calculados, pela solução de Navier, os momentos fletores máximos nas direções X e Y, os momentos de torção e os deslocamentos máximos para diversos valores do coeficiente de Poisson (ν).

A tabela 5.16 apresenta estes resultados. Para valores mais altos do coeficiente de Poisson os valores dos momentos fletores são maiores. A diferença chega a 30% entre os valores de $\nu = 0$ e $\nu = 0,3$. Para os momentos de torção ocorre o inverso, devido ao equilíbrio, conforme a equação 2.13, sendo que a diferença é de 42%. Para os deslocamentos a diferença não é tão significativa, ficando os valores entre 0,594 cm e 0,541 cm.

Estes resultados calculados pela Teoria Elástica serão usados para o estudo comparativo com a Analogia de Grelha.

Tabela 5.11 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4 m pela Solução de Navier, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

ν	Mx kN.m/m	My kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
0	5,90	5,90	7,38	0,594
0,1	6,49	6,49	6,66	0,588
0,15	6,78	6,78	6,29	0,581
0,2	7,08	7,08	5,92	0,570
0,25	7,37	7,37	5,55	0,557
0,3	7,67	7,67	5,18	0,541

5.3.3.2- RESULTADOS DA SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Para fins de estudos comparativos, serão calculados também os resultados dos esforços e deslocamentos pelo Método dos Elementos Finitos. Para isso, foi utilizado o programa de computador SAP90, com um modelo de laje quadrada de 4 x 4 m com 10 cm de espessura. Foi utilizada uma malha de 196 elementos quadrados do tipo *shell* (placa) com aproximadamente 28.5 cm de lado. Esta malha foi considerada suficiente, pois foram feitas diversas análises com malhas mais refinadas, sem a obtenção de resultados mais precisos. Foram analisados 6 casos, variando os coeficientes de Poisson de 0 a 0.3

A figura 5.34 apresenta os resultados dessa análise em uma saída gráfica do programa de computador, com as regiões de mesmo valor de momento fletor, denominadas isomomentos, na direção M11. Este resultado corresponde a um coeficiente de Poisson 0,2 e o momento máximo no nó central é de 7,10 kN.m/m.

Na figura 5.23 é apresentado o resultado dos momentos de torção. Como pode ser observado, os valores máximos acontecem nos cantos e correspondem a 5,77 kN.m/m.

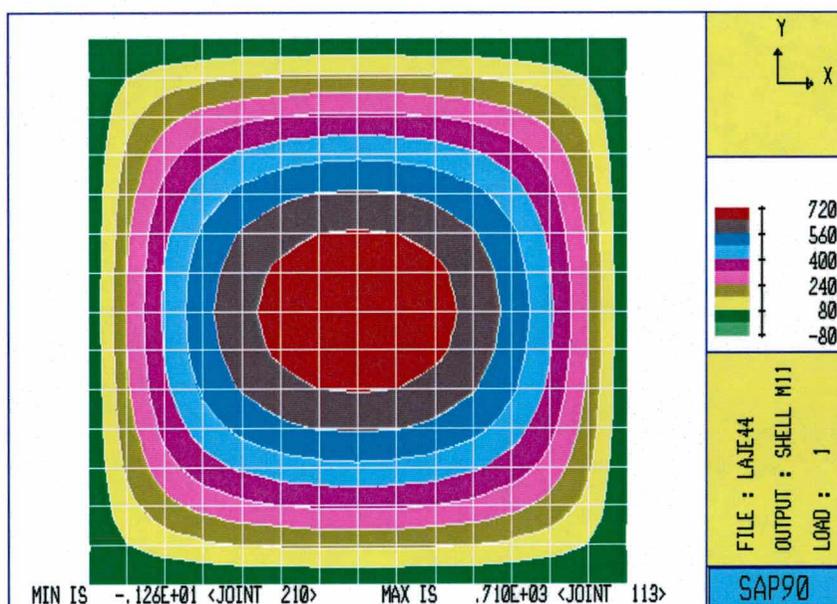


Figura 5.34 - Distribuição dos momentos fletores calculados por elementos finitos.

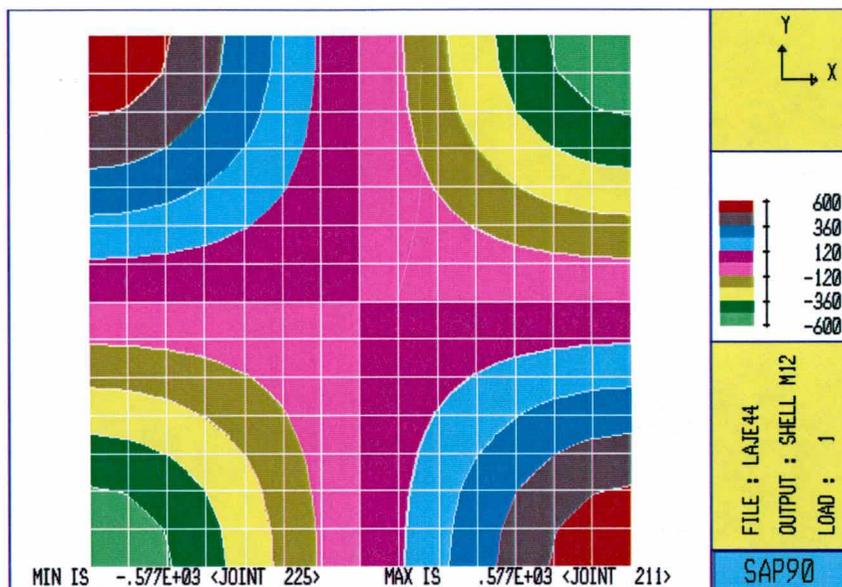


Figura 5.35 - Distribuição dos momentos de torção calculados por elementos finitos.

Os deslocamentos são obtidos a partir de uma listagem numérica. O valor máximo encontra-se no nó 113 e é de 0,57 cm.

Os demais resultados calculados para os outros valores de coeficiente de Poisson, estão apresentados na tabela 5.12.

Tabela 5.12 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m pelo Método dos Elementos Finitos altura $h=10\text{cm}$, carga uniformemente distribuída de 1000 kN/m^2 .

	Mx	My	Mxy	Flecha
v	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	5,91	5,91	7,21	0,594
0,1	6,50	6,50	6,49	0,588
0,15	6,80	6,80	6,13	0,581
0,2	7,10	7,10	5,77	0,570
0,25	7,39	7,39	5,41	0,557
0,3	7,69	7,69	5,05	0,541

É importante salientar que os resultados obtidos são muito próximos aos de Navier para os momentos e idênticos para os deslocamentos.

Isso já era esperado, pois os dois procedimentos são soluções numéricas da equação de Lagrange. Os resultados das duas análises estão traçados na figura 5.36.

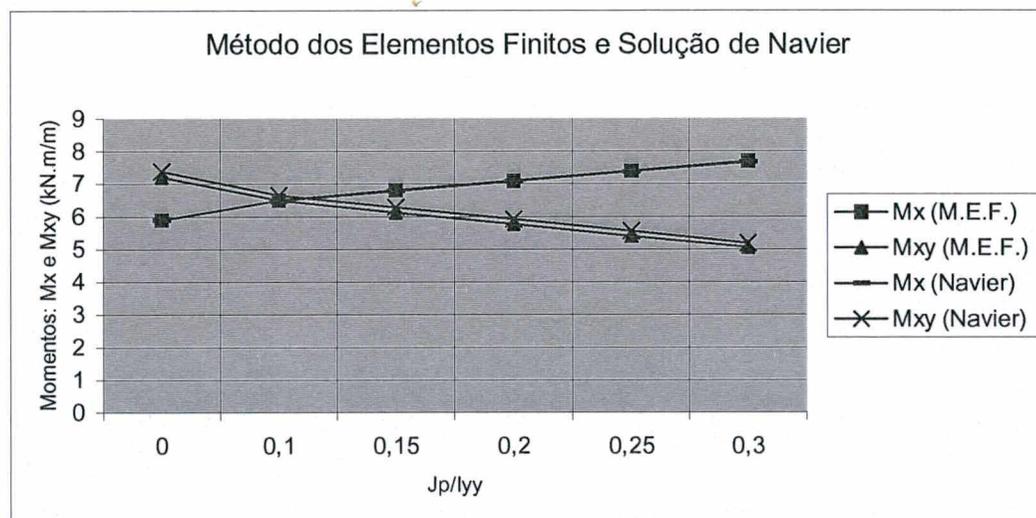


Figura 5.36 - Momentos fletores e de torção pelo Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) e pela Solução de Navier.

5.3.3.2- COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Analisando os resultados da Analogia de Grelha apresentados na tabela 5.10, é possível observar que os valores mais próximos da solução elástica, para um coeficiente de Poisson 0,2, para o caso do concreto armado, estão entre os valores de rigidez $J_p/I_{yy} = 2$ e $J_p/I_{yy} = 3$. Os valores dos momentos fletores e de torção da solução elástica de Navier e da Analogia de Grelha foram traçados no gráfico da figura 5.37 e mostram que o valor recomendado para a relação J_p/I_{yy} , isto é, para a relação entre o momento de inércia polar e o momento de inércia à flexão, está entre 2 e 3, aproximadamente 2,2. Isso ocorre para uma análise cujo objetivo é, obter os resultados para os momentos fletores e de torção da laje, já que, para os deslocamentos, especificamente para a flecha máxima, o valor de

J_p/I_{yy} , conforme pode ser observado no gráfico da figura 5.38, encontra-se entre 2,5 e 3, aproximadamente 2,7.

Pode-se notar que o valor sugerido por Montoya (1973), correspondente de 2 era uma boa sugestão.

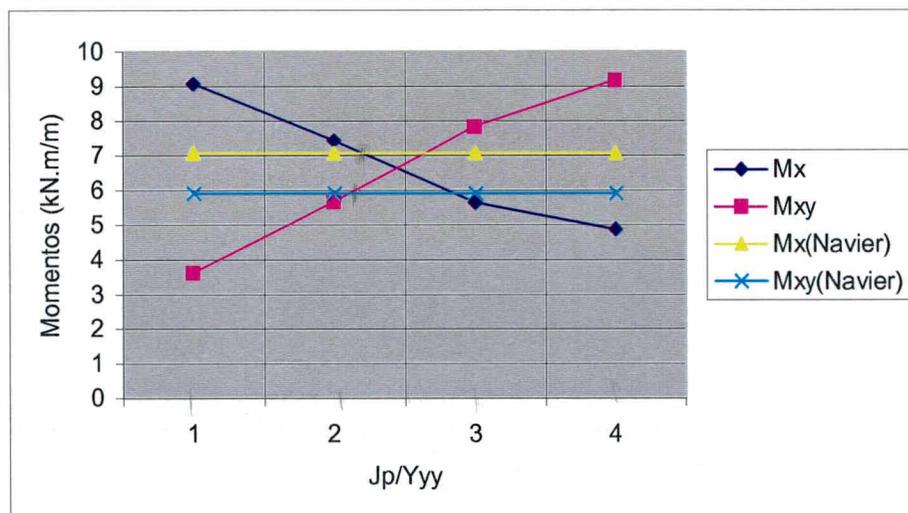


Figura 5.37 - Momentos fletores e de torção calculados pela Analogia de Grelha e Teoria da Elasticidade

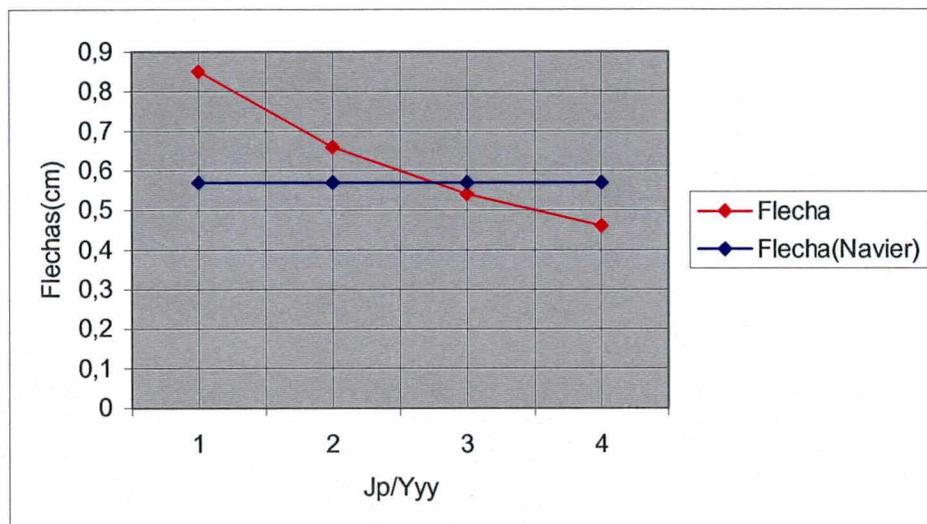


Figura 5.38 - Flechas calculados pela Analogia de Grelha e Teoria da Elasticidade

5.3.4 – ESTUDO COMPARATIVO PARA LAJE RETANGULAR COM RELAÇÃO ENTRE LADOS $Lx/Ly = 1.5$

Neste item, os estudos realizados para a laje quadrada serão repetidos para uma laje retangular simplesmente apoiada com relação entre lados de 1,5, para verificar se existe alguma influência da relação entre os lados nos resultados obtidos para o estudo de malha.

Para uma relação entre lados de 1,5, foi adotada uma laje com as seguintes dimensões $Lx = 4$ m e $Ly = 6$ m, espessura de 10 cm e um carregamento uniformemente distribuído de 10 kN/m^2 .

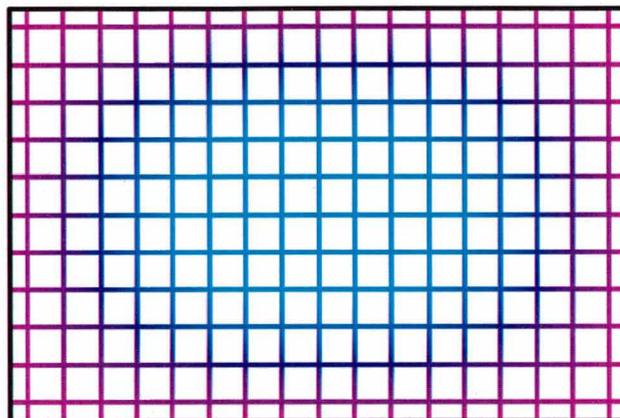


Figura 5.39 - Malha de uma laje retangular com relação entre lados $L_y/L_x = 1,5$

Os resultados da tabela 5.13 mostram que os resultados dos momentos e dos deslocamentos mantêm-se praticamente constantes, como para as lajes quadradas, para qualquer espaçamento de malha, para um momento de inércia polar em função do momento de inércia à flexão.

Para garantir que este comportamento também se verifica para outros valores de rigidez à torção, foram analisados todos os casos, desde $J_p/I_{yy} = 1$ até $J_p/I_{yy} = 4$, com a relação $G/E_c = 0,2$ e $G/E_c = 0,4$. Porém, neste item serão apresentados somente os resultados para $J_p/I_{yy} = 2$ para as relações de rigidez $G/E_c = 0,2$ e $G/E_c = 0,4$.

Tabela 5.13 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x6 m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/E_c = 0,2$ e $J_p/I_{yy} = 2$

Malha (cm)	M_x kN.m/m	M_y kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	Flecha cm
70x75	16,41	7,03	3,81	-1,50
54x54	16,16	6,86	4,91	-1,51
36x36	15,99	6,64	5,06	-1,52
17x19	15,91	6,42	5,16	-1,52

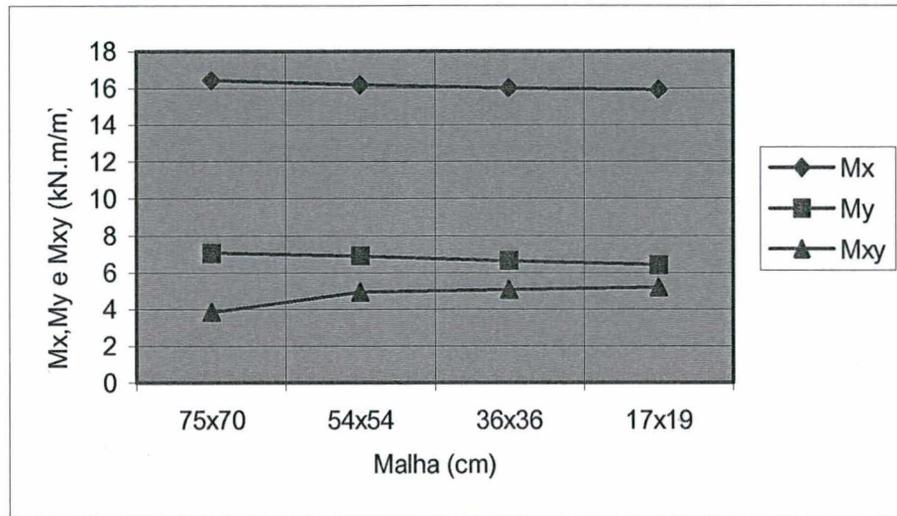


Figura 5.40 - Momentos fletores e de torção em função da malha

Tabela 5.14 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 1000 kN/m^2 .

Relação $G/Ec = 0,4$ e $Jp/Iyy = 2$

Malha (cm)	Mx (kN.m/m)	My (kN.m/m)	Mxy (kN.m/m)	Flecha (cm)
70x75	13,49	6,35	7,81	-1,23
54x54	13,15	6,22	8,04	-1,23
36x36	12,94	5,74	8,31	-1,24
17x19	12,83	5,36	8,47	-1,24

Os resultados mostraram que o comportamento da laje com relação 1,5 entre lados é o mesmo da laje quadrada. Os resultados também praticamente independem da malha.

De modo semelhante à laje quadrada, será feito um estudo comparativo com os resultados da teoria elástica.

Na tabela 5.15 estão os resultados da análise elástica obtidos através das tabelas de Bares.

Tabela 5.15 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 , calculada pelas Tabelas de Bares.

ν	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	11,68	4,61	9,81	1,13
0,15	12,35	6,22	-	1,10
0,25	12,74	7,38	-	1,06
0,3	12,99	7,99	-	1,03

Na tabela 5.16 estão os resultados da análise elástica obtidos através da solução por Elementos Finitos, somente para o coeficiente de Poisson 0,2. Na figura 5.41 e 5.42, a saída gráfica dos momentos fletores na menor direção (M22) e na maior direção (M11) respectivamente. Os momentos de torção estão apresentados na figura 5.30.

Tabela 5.16 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 , calculada por elementos finitos.

Coeficiente de Poisson 0,2

ν	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0,2	12,50	6,69	7,17	1,05

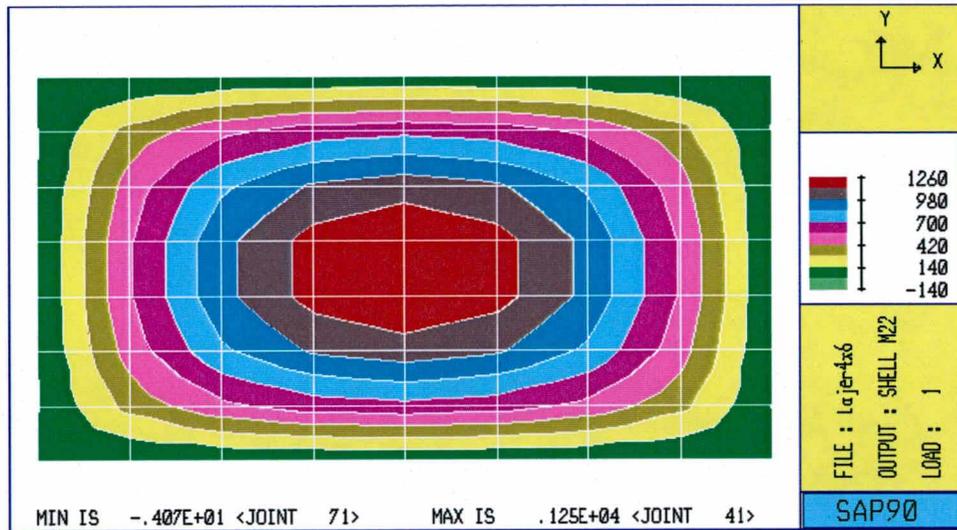


Figura 5.41 - Momentos fletores na menor direção M22.

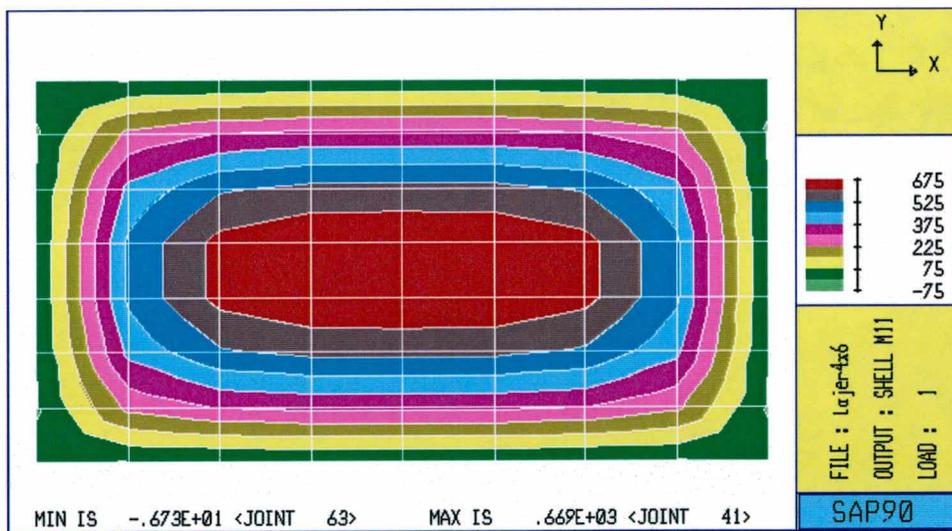


Figura 5.42 - Momentos fletores na maior direção M11

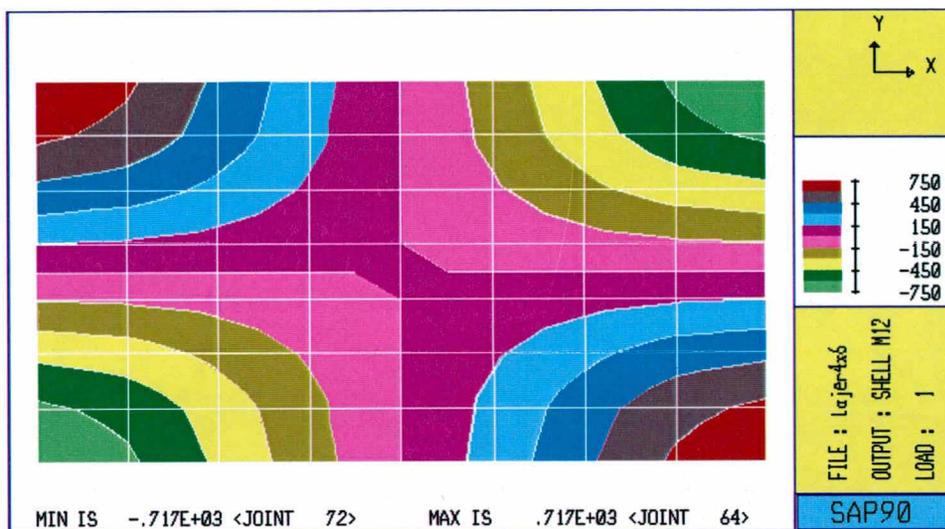


Figura 5.43 - Momentos de torção por elementos finitos

As tabelas 5.17 e 5.18 apresentam um resumo dos resultados obtidos para diversos valores do parâmetro de rigidez à torção G/Ec , para uma malha de 36x 36 cm.

Tabela 5.17 - Valores de momentos e flechas em função de Jp/Iyy para laje quadrada 4x6m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/Ec = 0,4$ Malha 36x36

Jp/Iyy	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
1	15,99	6,63	5,06	1,52
2	12,94	5,74	8,31	1,24
3	10,85	5,15	10,58	1,04
4	9,34	4,75	12,26	0,90

Tabela 5.18 - Valores de momentos e flechas em função de J_p/I_{yy} para laje quadrada $4 \times 6m$, altura $h=10\text{ cm}$, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/E_c = 0,2$ Malha 36×36

J_p/I_{yy}	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	KN.m/m	cm
1	18,12	7,30	2,85	1,72
2	15,99	6,64	5,06	1,52
3	14,31	6,14	6,84	1,36
4	12,94	5,74	8,31	1,24

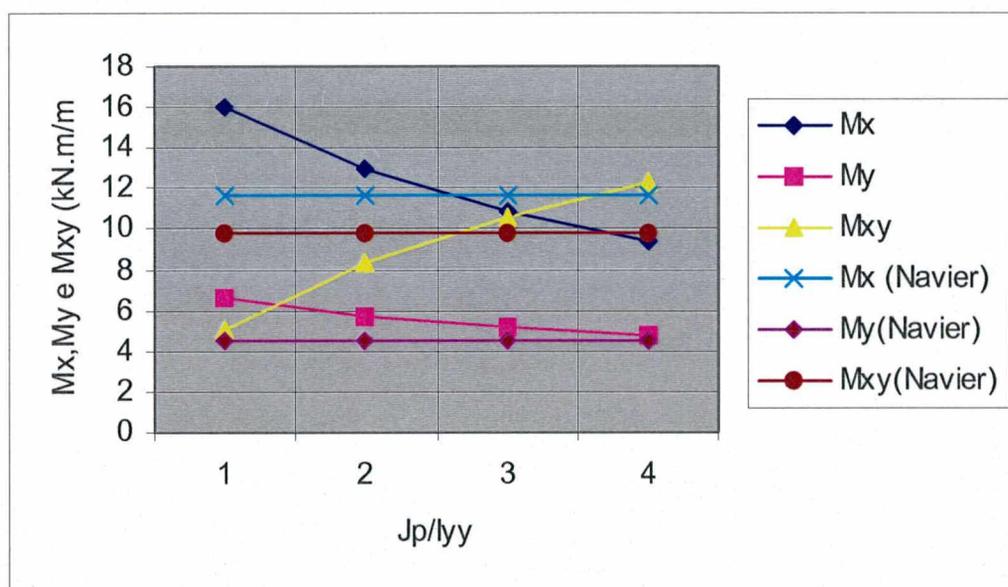


Figura 5.44 - Momentos fletores e de torção em função de J_p/I_{yy}

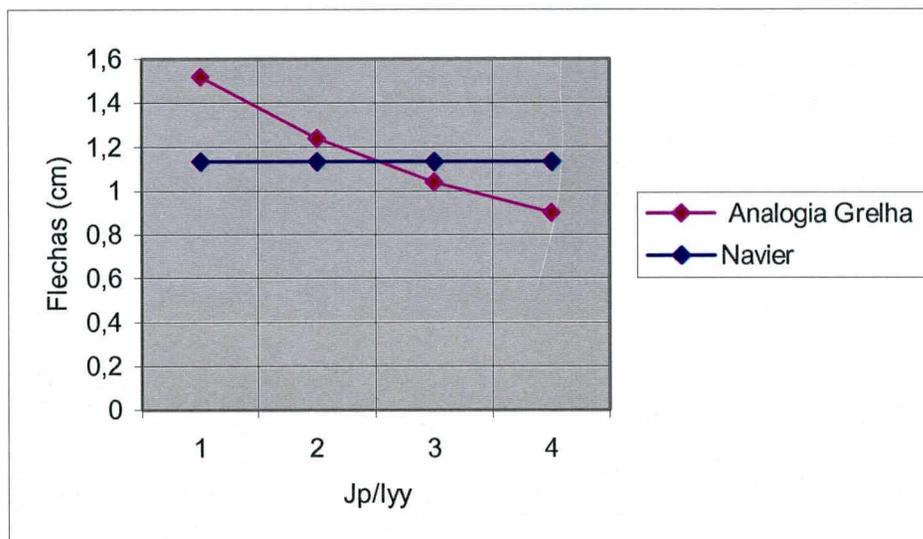


Figura 5.45 - Flechas máximas em função de J_p/I_{yy}

Analisando os resultados obtidos através dos gráficos das figuras 5.44 e 5.45, é possível observar que os valores mais próximos da solução elástica para um coeficiente de Poisson 0,2, para o caso do concreto armado, estão entre os valores de rigidez $J_p/I_{yy} = 2$ e $J_p/I_{yy} = 3$. Os valores dos momentos fletores e de torção da solução elástica de Navier e da Analogia de Grelha foram traçados no gráfico da figura 5.44 e mostram que o valor recomendado para a relação J_p/I_{yy} , isto é para a relação entre o momento de inércia polar e o momento de inércia axial, está entre 2 e 3, aproximadamente 2,6. Para os deslocamentos, especificamente para a flecha máxima, o valor de J_p/I_{yy} , conforme pode ser observado no gráfico da figura 5.45, encontra-se entre 2,5 e 3, aproximadamente 2,6 também. Estes resultados estão muito próximos dos obtidos para a laje quadrada.

5.3.4 – ESTUDO COMPARATIVO PARA LAJE RETANGULAR COM RELAÇÃO ENTRE LADOS $L_x/L_y = 2$

Neste item, os estudos realizados para a laje quadrada serão repetidos para uma laje retangular simplesmente apoiada, com altura de 10 cm, com carregamento uniformemente distribuído de 10 kN/m^2 . Porém adota-se agora uma relação entre lados definindo-se as seguintes dimensões para a laje $L_x = 4 \text{ m}$ e $L_y = 8 \text{ m}$.

Os resultados mostraram que os momentos e os deslocamentos são também praticamente constantes, como para as lajes quadradas, para qualquer espaçamento de malha, para um momento de inércia polar em função do momento de inércia à flexão e para o valor adotado de $J_p = I_{yy}$.

Os resultados mostram que o comportamento da laje com relação 2 entre lados é o mesmo da laje quadrada. Os resultados também independem da malha.

De modo semelhante à laje quadrada, será feito um estudo comparativo com os resultados da teoria elástica.

Na tabela 5.20 estão os resultados da análise elástica obtidos através da solução de Navier, somente para o coeficiente de Poisson 0,2.

Tabela 5.19 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x8m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 , calculada pelas Tabelas de Bares.

ν	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	15,40	3,97	10,54	1,48
0,15	15,86	5,06	-	1,44
0,25	16,12	6,65	-	1,38
0,3	16,27	7,42	-	1,35

Tabela 5.20 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje retangular 4x8m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 , calculada pela Teoria da Elasticidade (Navier) Coeficiente de Poisson 0,2

ν	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0,2	15,99	5,89	8,37	1,42

Tabela 5.21 - Valores de momentos e flechas em função de J_p/I_{yy} para laje quadrada $4 \times 8m$, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/E_c = 0,4$ Malha 36×36

J_p/I_{yy}	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
1	19,23	5,70	5,13	1,82
2	16,61	5,25	8,80	1,58
3	14,61	4,93	11,57	1,39
4	13,04	4,70	13,73	1,25

Tabela 5.22 - Valores de momentos e flechas em função de J_p/I_{yy} para laje quadrada $4 \times 8m$, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação

$G/E_c = 0,2$, Malha 36×36 cm

J_p/I_{yy}	Mx	My	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
1	20,87	6,01	2,80	1,97
2	19,23	5,70	5,12	1,82
3	17,85	5,45	7,10	1,69
4	16,61	5,25	8,80	1,58

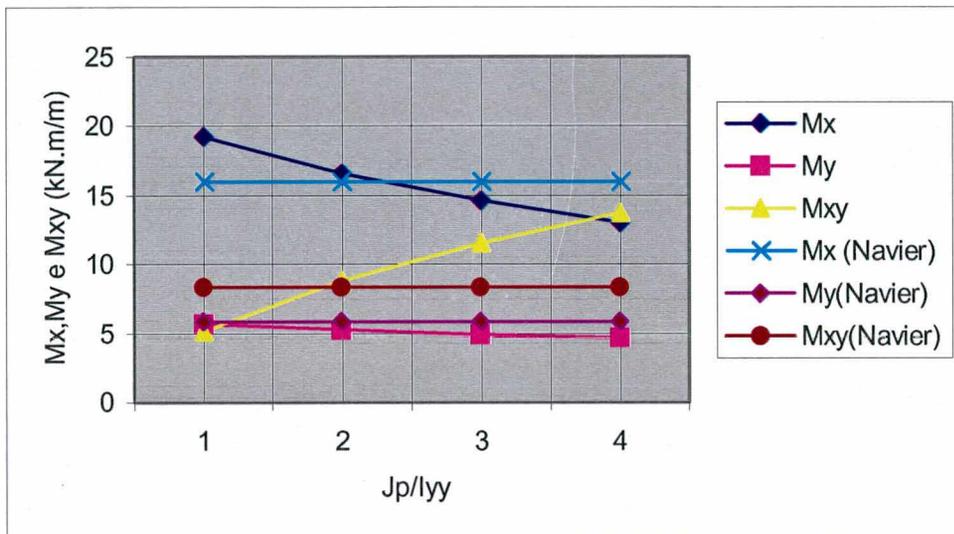


Figura 5.46 - Momentos fletores e de torção em função de J_p/I_{yy}

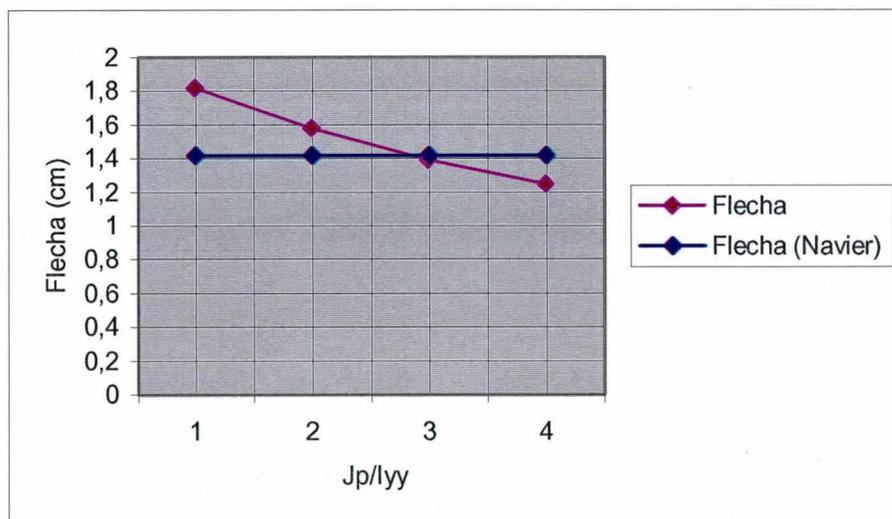


Figura 5.47 - Flecha máxima em função J_p/I_{yy}

5.4 – LAJES ENGASTADAS

A solução de painéis contínuos de lajes pela Teoria da Elasticidade é um problema muito difícil e, nos casos práticos de projeto, frequentemente resolvidos através do cálculo de lajes isoladas consideradas engastadas nos lados onde existe a continuidade.

As lajes isoladas com lados engastados são resolvidas pela teoria da elasticidade como lajes simplesmente apoiadas, às quais são superpostos os deslocamentos da mesma laje submetida a momentos aplicados ao longo dos apoios, ajustados de tal maneira que a condição de rotação nula nesses apoios seja satisfeita. Com esse procedimento, são construídas tabelas para o cálculo de lajes retangulares com lados engastados.

Para fazer um estudo comparativo dos resultados da Analogia de Grelha com os resultados obtidos por estas tabelas, será analisada uma laje quadrada com 4x4m com os mesmos parâmetros utilizados anteriormente no estudo de laje isolada.

Pelo fato de não estar disponível no programa de computador utilizado para os estudos de Analogia de Grelha a opção de engastamento dos vínculos de apoio da grelha, utilizou-se um artifício. Calculou-se as lajes engastadas em um painel de lajes contínuas com simetria, produzindo o mesmo resultado com aproximação suficiente para esse estudo. Foram analisados os casos de um engaste e de dois lados adjacentes engastados, conforme mostrado nas figuras 5.48 e 5.49.

5.4.1 – LAJES ENGASTADA EM DOIS LADOS ADJACENTES.

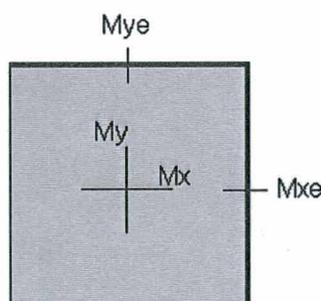


Figura 5.48 - Momentos fletores em painel contínuo para analisar lajes engastadas.

As tabelas 5.23 e 5.24 apresentam os resultados da laje quadrada com dois lados adjacentes engastados. Para esta análise foi utilizado um painel com quatro lajes quadradas, iguais. Como a rotação nos apoios entre lajes contíguas é nula, o resultado é o mesmo para uma laje isolada com os lados engastados.

Foram calculados os esforços e deslocamentos para diversas malhas com os parâmetros de rigidez $G/E_c = 0,4$ e $J_p/I_{yy} = 2$ e $J_p/I_{xx} = 2,5$.

Tabela 5.23 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2

Relação $G/E_c = 0,4$ $J_p/I_{xx}=2$

Malha (cm)	Mx kN.m/m	Mxe kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
80x80	5,72	-8,52	4,15	0,39
57x57	5,29	-8,90	4,49	0,38
44x44	5,01	-9,25	4,63	0,38
36x36	4,98	-9,59	4,69	0,38
26x26	4,85	-10,04	4,73	0,38
19x19	4,74	-10,32	4,75	0,37
10x10	4,61	-10,83	4,72	0,36

Tabela 5.24 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2

$$\text{Relação } G/Ec = 0,4 \quad Jp/Ixx=2.5$$

Malha (cm)	M_x kN.m/m	M_{xe} kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	Flecha cm
80x80	5,46	-8,17	4,76	0,36
57x57	4,96	-8,53	5,17	0,36
44x44	4,72	-8,85	5,33	0,35
36x36	4,64	-9,18	5,41	0,35
26x26	4,48	-9,62	5,46	0,35
19x19	4,37	-9,91	5,49	0,35
10x10	4,24	-10,41	5,47	0,34

5.4.2 – LAJE QUADRADA COM UM ENGASTE.

As tabelas 5.25 e 5.26 apresentam os resultados da laje quadrada com dois lados adjacentes engastados. Para esta análise foi utilizado um painel com quatro lajes quadradas, iguais. Como a rotação nos apoios entre lajes contíguas é nula, o resultado é o mesmo para uma laje isolada com os lados engastados.

Foram calculados os esforços e deslocamentos para diversas malhas com os parâmetros de rigidez $G/Ec = 0,4$ e $Jp/Iyy = 2$ e $Jp/Ixx = 2.5$.

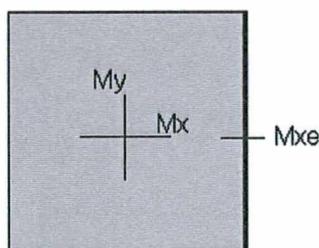


Figura 5.49 - Momentos fletores em painel contínuo para analisar lajes engastadas.

Tabela 5.25 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2

$$\text{Relação } G/Ec = 0,4 \quad Jp/Ixx=2$$

Malha (cm)	Mx kN.m/m	MY kN.m/m	Mxe kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
80x80	7,13	5,69	-10,28	4,71	0,49
57x57	6,72	5,28	-10,78	5,07	0,49
44x44	6,47	5,05	-11,24	5,22	0,48
36x36	6,32	4,95	-11,59	5,29	0,48
26x26	6,24	4,81	-12,13	5,35	0,48
19x19	6,15	4,69	-12,52	5,38	0,48
10x10	6,07	4,54	-13,17	5,37	0,47

Tabela 5.26 - Resultados dos momentos fletores e de torção e a flecha máxima para uma laje quadrada de 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2

$$\text{Relação } G/Ec = 0,4 \quad Jp/Ixx=2.5$$

Malha (cm)	Mx kN.m/m	MY kN.m/m	Mxe kN.m/m	Mxy KN.m/m	Flecha cm
80x80	6,72	5,47	-9,76	5,38	0,45
57x57	6,21	4,97	-10,20	5,81	0,45
44x44	5,93	4,69	-10,64	5,98	0,44
36x36	5,81	4,61	-11,48	6,07	0,44
26x26	5,70	4,45	-11,49	6,13	0,44
19x19	5,60	4,31	-11,87	6,17	0,44
10x10	5,54	4,16	-12,51	6,18	0,43

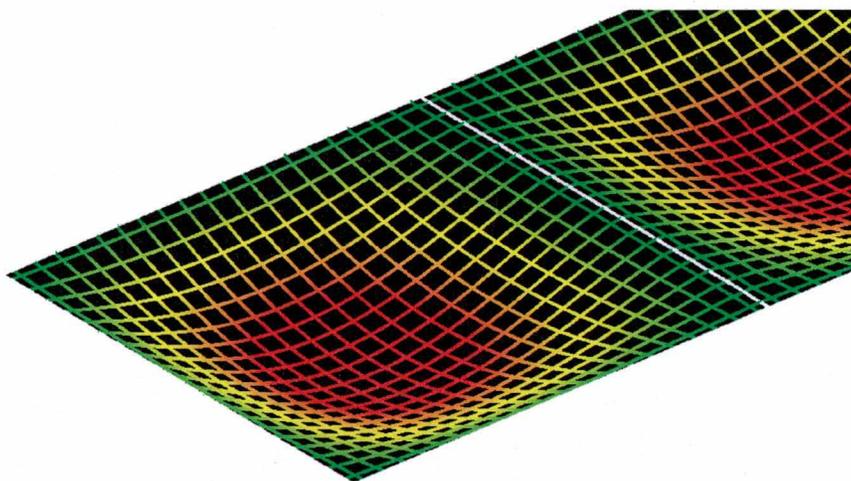


Figura 5.50 - Deformada de uma laje quadrada com um engaste.

As tabelas 5.27 e 5.28 apresentam os resultados da laje quadrada com dois lados adjacentes engastados e um lado engastado, calculadas pela Teoria da Elasticidade, através das tabelas de Bares, para os coeficientes de Poisson 0 e 0,15.

Tabela 5.27 - Resultado tabela de Bares . laje Quadrada 4x4 m, $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Coeficiente de Poisson = 0

Engastes	Mx	My	Mxe	Mye	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
4	2,82	2,82	-8,24	-8,24	0,19
3	2,69	3,63	-8,74	-9,87	0,23
2	3,98	3,98	-11,18	-11,18	0,31
1	5,44	3,89	-13,44	0	0,41

Tabela 5.28 -Resultado tabela de Bares . laje Quadrada 4x4 m, h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m² .

Coefficiente de Poisson = 0.15

Engastes	Mx	My	Mxe	Mye	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	KN.m/m	kN.m/m	cm
4	3,23	3,23	-8,24	-8,24	0,18
3	3,23	4,03	-8,74	-9,87	0,22
2	4,30	4,30	-11,18	-11,18	0,30
1	5,66	4,65	-13,44	0	0,40

A tabela 5.32 apresenta os resultados da laje quadrada com dois lados adjacentes engastados e um lado engastado, calculadas pelo Método dos Elementos Finitos.

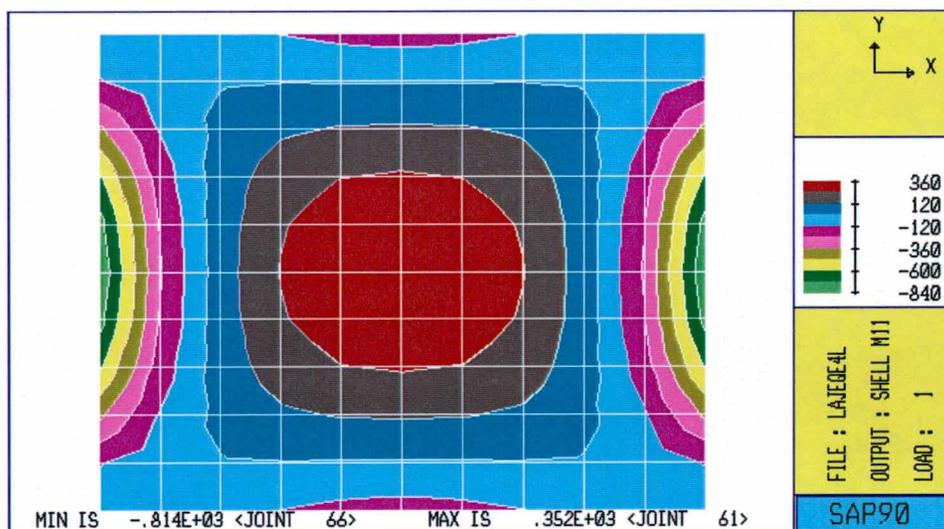


Figura 5.51 - Momentos fletores em na laje quadrada com quatro lados engastados.

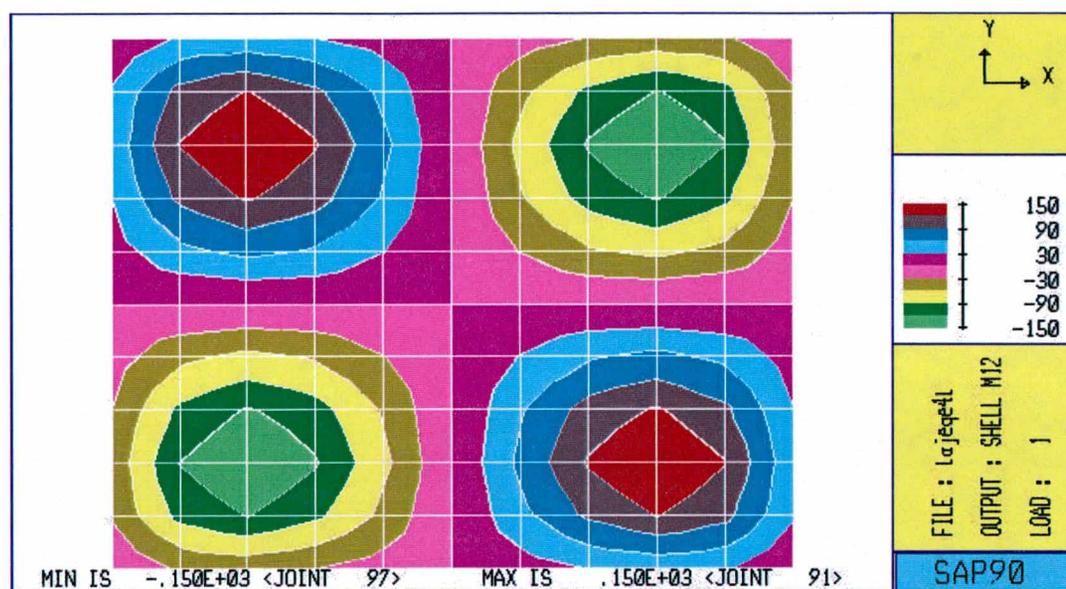


Figura 5.52 - Momentos de torção na laje quadrada com quatro lados engastados.

Tabela 5.32 - Resultado da Análise por Elementos Finitos. Laje Quadrada 4x4 m, h=10 cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m².

Coefficiente de Poisson = 0.2

Engastes	Mx	My	Mxe	Mye	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
4	3,52	3,52	-8,14	-8,14	0,18
3	3,68	4,38	-8,71	-9,67	0,22
2	4,94	4,94	-10,90	-10,90	0,30
1	6,33	5,13	-13,33	0	0,40

5.4 - INFLUÊNCIA DA ALTURA (H) DA LAJE

Este estudo será feito para verificar se a espessura da laje tem alguma influência no procedimento de cálculo por Analogia de Grelha. Com todos os outros parâmetros fixos, foram analisadas quatro lajes com alturas de 5, 10, 20 e 30 cm.

Foi utilizada a mesma laje de 4 x 4 m, com os mesmos dados de carregamento, para comparação com os resultados já obtidos pela teoria da elasticidade para as alturas de 5, 10, 20 e 30 cm.

Tabela 5.33 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=5$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/Ec = 0,4$ e $Jp/Iyy = 3$

Malha (cm)	M_x kN.m/m	M_y kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	Flecha cm
80x80	6,65	6,65	699	4,42
57x57	6,07	6,07	7,48	4,36
44x44	5,79	5,79	7,71	4,34
36x36	5,64	5,64	7,84	4,33
26x26	5,49	5,49	7,96	4,32
19x19	5,41	5,41	8,05	4,32
10x10	5,34	5,34	8,11	4,31

Tabela 5.34 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2

Relação $G/Ec = 0,4$ e $Jp/Iyy = 3$

Malha (cm)	Mx kN.m/m	My kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
80x80	6,65	6,65	6,99	0,55
57x57	6,07	6,07	7,48	0,54
44x44	5,79	5,79	7,71	0,54
36x36	5,64	5,64	7,84	0,54
26x26	5,49	5,49	7,96	0,54
19x19	5,41	5,41	8,05	0,54
10x10	5,34	5,34	8,11	0,54

Tabela 5.35 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=20$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/Ec = 0,4$ e $Jp/Iyy = 3$

Malha (cm)	Mx kN.m/m	My kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
80x80	6,65	6,65	6,99	0,07
57x57	6,07	6,07	7,48	0,07
44x44	5,79	5,79	7,71	0,07
36x36	5,64	5,64	7,84	0,07
26x26	5,49	5,49	7,96	0,07
19x19	5,41	5,41	8,05	0,07
10x10	5,34	5,34	8,11	0,07

Tabela 5.36 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, altura $h=30$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Relação $G/Ec = 0,4$ e $Jp/Iyy = 3$

Malha (cm)	Mx kN.m/m	My kN.m/m	Mxy kN.m/m	Flecha cm
80x80	6,65	6,65	6,99	4,42
57x57	6,07	6,07	7,48	4,36
44x44	5,79	5,79	7,71	4,34
36x36	5,64	5,64	7,84	4,33
26x26	5,49	5,49	7,96	4,32
19x19	5,41	5,41	8,05	4,32
10x10	5,34	5,34	8,11	4,31

Na tabela 5.37, são apresentados os resultados da teoria da elasticidade calculada pela solução de Navier para a laje com coeficiente de Poisson $\nu=0$. Pode-se observar claramente que os esforços independem da altura da laje, o que já era esperado, pois as equações das soluções elásticas para os esforços são independentes do parâmetro de rigidez D , que é o único termo que depende da altura. Os deslocamentos, no entanto, dependem da altura.

Tabela 5.37 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4 m, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m²

Solução Elástica de Navier

h	Mx	My	Mxy	Flecha
(cm)	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
5	5,89	5,89	7,38	4,75
10	5,89	5,89	7,38	0,59
20	5,89	5,89	7,38	0,07
30	5,89	5,89	7,38	0,02

A tabela 5.38 apresenta um resumo dos resultados obtidos pela Analogia de Grelha para as diversas alturas.

Tabela 5.38 - Resultados dos momentos e flecha máxima para laje quadrada 4x4m, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m²

Resultados da Analogia de Grelha para a malha de 36x36 cm

h	Mx	My	Mxy	Flecha
(cm)	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
5	5,64	5,64	7,84	4,30
10	5,64	5,64	7,84	0,54
20	5,64	5,64	7,84	0,07
30	5,66	5,66	7,80	0,02

Os resultados obtidos pela Analogia de Grelha também apresentam valores praticamente idênticos para uma mesma malha e diversas alturas, mantendo-se os demais parâmetros fixos.

Como pôde ser visto, os deslocamentos variam na mesma proporção da teoria da elasticidade.

5.5 – LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA EM VIGAS FLEXÍVEIS.

Em pavimentos de edifícios reais, as lajes estão apoiadas sobre vigas que são flexíveis. Esta condição de apoio altera o campo de deformações da laje e, como consequência, os esforços internos e as reações de apoio. Na solução por Analogia de Grelha é possível considerar as vigas de apoio em conjunto com o modelo de grelha das lajes e analisar todo o conjunto como uma grelha plana. A laje e as vigas de apoio passam a ser, portanto, uma única estrutura.

Em painéis de lajes contínuas, este modelo é muito mais conveniente, obtendo-se uma configuração de deformação e esforços mais próxima da situação real em regime elástico.

A solução do problema de lajes sobre apoios flexíveis é muito mais complexa na teoria da elasticidade, sendo apresentada apenas para alguns casos particulares com lajes isoladas. A solução para o caso de lajes com placas quadradas apoiadas em quatro vigas flexíveis é apresentada por TIMOSHENKO, S.P. E WOINOWSKY-KRIEGER, S (1959).

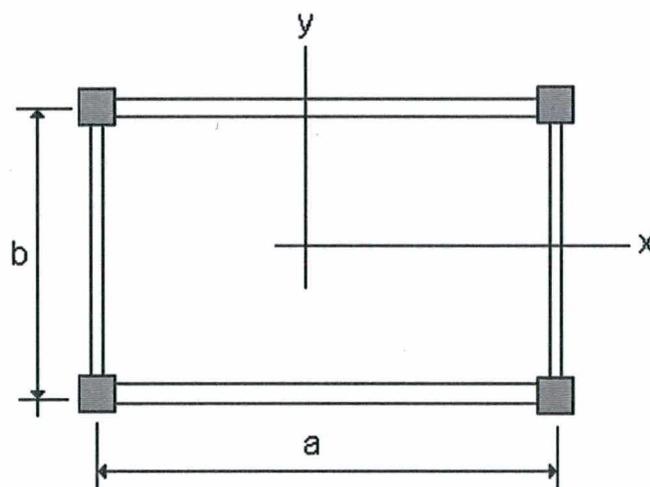


Figura 5.53 - Laje retangular apoiada em vigas elásticas

A figura 5.53 mostra, uma laje quadrada apoiada em todo o contorno em quatro vigas iguais e flexíveis, que por sua vez, estão apoiadas em suportes rígidos nos cantos da laje. A relação entre a rigidez da viga e a placa é calculada pela expressão:

$$\gamma = \frac{EI}{aD} \quad (4.23)$$

onde

- E = módulo de elasticidade longitudinal
- I = momento de inércia à flexão da viga
- a = vão da viga
- D = rigidez a flexão da placa

Os deslocamentos e os momentos fletores no meio da placa ($X=0$ e $Y=0$) são calculados pelas expressões:

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad (4.24)$$

$$M_x = M_y = \beta_1 \cdot qa^2 \quad (4.25)$$

Os momentos fletores junto às vigas no ponto $X=0$ e $Y = a/2$, são obtidas pela expressão:

$$M_x = M_y = \beta_2 \cdot qa^2 \quad (4.26)$$

Tabela 5.39 - Coeficientes para flechas e momentos de laje quadrada com quatro lados apoiados em vigas flexíveis, conforme TIMOSHENKO.

Coeficiente de Poisson = 0,25

γ	α	β_1	β_2
∞	0,00406	0,046	0
100	0,00412	0,0462	0
50	0,00418	0,0463	1
25	0,00429	0,0467	0,0002
10	0,00464	0,0477	0,0024
5	0,00519	0,0494	0,0065
4	0,00546	0,0502	0,0085
3	0,00588	0,0515	0,0117

2	0,00668	0,0539	0,0177
1	0,00873	0,0601	0,0332
0,5	0,01174	0,0691	0,0559
0	0,02570	0,1109	0,1527

Dimensões usuais de vigas e lajes, podem resultar em valores do coeficiente γ abaixo de 1, como por exemplo, em vigas com seção retangular de 12 x 30 cm e laje com espessura de 10 cm, onde o valor de γ chega a 0,8. Para o caso de $\gamma=0$, a laje está apoiada apenas nos quatro pontos dos cantos.

Pelos valores da tabela, entre os casos de apoio rígido e totalmente flexível, os deslocamentos podem ser seis vezes maiores que o deslocamento da laje sobre apoios rígidos e os esforços até 2,5. A laje quadrada de 4 x 4 m com espessura de 10 cm será novamente utilizada para este estudo. A rigidez da placa depende do coeficiente de Poisson, que para este estudo será tomado como 0,25.

Para obter os mesmos valores de γ da tabela 5.39, serão calculadas alturas de vigas para uma largura fixa de 12 cm a partir da expressão:

$$h_{vig} = 3 \sqrt{\frac{\gamma}{(1-\nu^2)} \frac{ah^3}{b_{vig}}} \quad (4.27)$$

A tabela 5.40 apresenta os resultados da flecha máxima e do momento fletor máximo pela teoria da elasticidade conforme apresentado por TIMOSHENKO, S.P. E WOINOWSKY-KRIEGER, S (1959).

Nesta tabela, M_x é o momento máximo no meio do vão da laje, M_{xa} é o momento no meio da viga de apoio e f é a flecha máxima.

Tabela 5.40 - Momentos fletores e flechas calculados pela Teoria da Elasticidade.

Coeficiente de Poisson = 0,25

γ	h(viga)	α	f	β_1	Mx	β_2	Mxa
	cm		cm		kNm/m		kNm/m
∞	500	0,00406	0,56	0,046	7,36	0	0
100	151	0,00412	0,57	0,0462	7,39	0	0
50	120	0,00418	0,57	0,0463	7,41	1	0
25	95	0,00429	0,59	0,0467	7,47	0,0002	0,32
10	70	0,00464	0,64	0,0477	7,63	0,0024	0,38
5	56	0,00519	0,71	0,0494	7,90	0,0065	0,90
4	52	0,00546	0,75	0,0502	8,03	0,0085	1,36
3	47	0,00588	0,81	0,0515	8,24	0,0117	1,87
2	41	0,00668	0,92	0,0539	8,62	0,0177	2,83
1	33	0,00873	1,20	0,0601	9,62	0,0332	5,31
0,5	26	0,01174	1,61	0,0691	11,06	0,0559	8,94
0	0	0,02570	3,52	0,1109	17,74	0,1527	24,43

Na tabela 5.41, estão os resultados do mesmo problema analisado por Analogia de Grelha.

Tabela 5.41 - Momentos fletores e flechas calculados por Analogia de Grelha.

 $G/Ec = 0,4$ $Jp/Iyy = 2,8$

γ	h(viga)	f	Mx	Mxa
	cm	cm	kNm/m	kNm/m
∞	500	0,56	5,70	0
100	151	0,57	5,73	0
50	120	0,57	5,76	0
25	95	0,59	5,83	0,89
10	70	0,64	6,01	1,35

5	56	0,72	6,31	2,02
4	52	0,76	6,45	2,35
3	47	0,82	6,67	2,86
2	41	0,93	7,11	3,85
1	33	1,23	8,26	6,31
0,5	26	1,69	9,91	9,80
0	0	3,72	16,13	22,46

Tabela 5.42 - Momentos fletores e flechas calculados por Analogia de Grelha.

$$G/Ec = 0,4 \quad Jp/Iyy = 2$$

γ	h(viga)	f	Mx	Mx
	cm	cm	kNm/m	kNm/m
∞	500	0,72	7,31	0
100	151	0,73	7,35	0
50	120	0,74	7,36	0
25	95	0,76	7,40	1,07
10	70	0,80	7,51	1,46
5	56	0,88	7,69	2,09
4	52	0,92	7,77	2,40
3	47	0,98	7,91	2,89
2	41	1,10	8,19	3,81
1	33	1,41	8,89	6,23
0,5	26	1,87	9,95	9,79
0	0	3,89	14,57	24,28

Os gráficos das figuras 5.54 até 5.56 mostram como os resultados obtidos pela teoria da elasticidade estão próximos do modelo em Analogia de Grelha, com os parâmetros escolhidos. A análise por Analogia de Grelha foi feita para diversos valores de rigidez Jp/Iyy . Encontrou-se valores mais próximos da solução elástica para $Jp/Iyy = 2,8$.

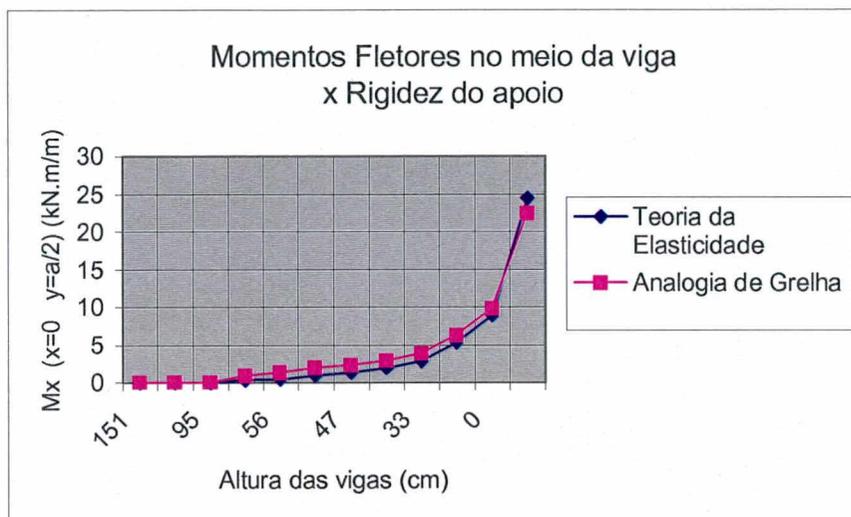


Figura 5.54 - Momentos Fletores Máximos M_x no meio da viga em função da rigidez do apoio por Analogia de Grelha e Teoria da elasticidade

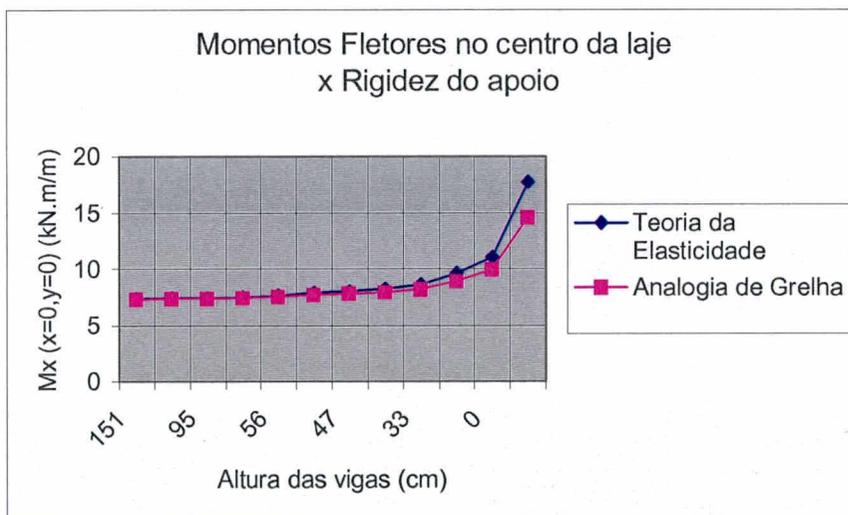


Figura 5.55 - Momentos Fletores Máximos M_x no meio da laje em função da rigidez do apoio por Analogia de Grelha e Teoria da elasticidade

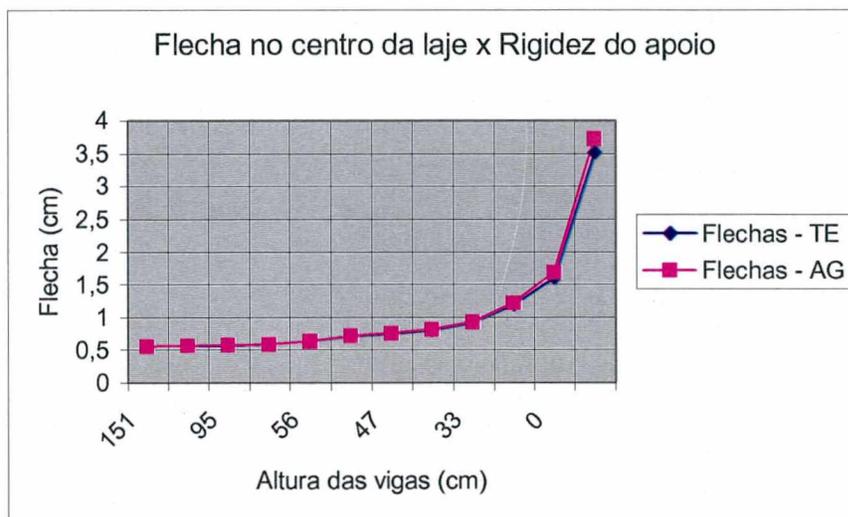


Figura 5.56 - Flecha máxima em função da rigidez do apoio por Analogia de Grelha e Teoria da elasticidade

5-6 – LAJES RETANGULARES CONTÍNUAS

5.6.1- COM APOIOS INTERMEDIÁRIOS RÍGIDOS

Ao longo dos anos, muitas soluções diferentes foram adotadas para os pavimentos dos edifícios. Os primeiros pavimentos eram construídos inteiramente de madeira ou em piso de madeira apoiado em vigas metálicas. Os pavimentos em madeira eram, geralmente, considerados como placas isoladas e simplesmente apoiadas em uma única direção nas vigas de suporte, em um esquema estrutural semelhante às lajes pré-moldadas atuais. Com o avanço do concreto armado como técnica construtiva, os pavimentos de edifícios começaram a ser construídos com placas de concreto. As lajes em concreto eram isoladas e apoiadas em uma só direção, não sendo considerados os momentos fletores nos apoios, paralelos as vigas. Conforme PARK e GAMBLE (1980), em muitas destas construções executadas até 1930 podem ser observadas fissuras na parte superior das lajes junto aos apoios.

Os sistemas de lajes contínuas, apoiadas e armadas em duas direções, só foram usados depois que análises cuidadosas foram realizadas. Por simplificação, os apoios eram considerados indeformáveis, e as vigas eram dimensionadas para as reações de lajes em apoios rígidos.

A continuidade sobre os apoios resulta em um comportamento distinto das lajes isoladas. Soluções rigorosas pela teoria da elasticidade são muito complexas e não são práticas para fins de projeto. Por isso, diversos processos simplificados foram apresentados e vêm sendo utilizados ao longo de anos na área de projetos para o cálculo de painéis de lajes contínuas.

Como será mostrado, a Analogia de Grelha também mostra-se como uma solução possível para o problema de lajes contínuas. Pode-se construir um modelo do pavimento com uma grelha que incorpora as paredes e as vigas de apoio e analisar tudo como um conjunto. No entanto, algumas dificuldades surgem na aplicação imediata do modelo, como por exemplo, a continuidade sobre os apoios. É difícil discretizar as lajes isoladas e obter uma única malha com a continuidade perfeita entre as barras de lajes contíguas.

Isto pode ser visto na figura 5.57, mostrada a seguir, onde as barras de uma laje não são perfeitamente contínuas em relação à laje contígua.

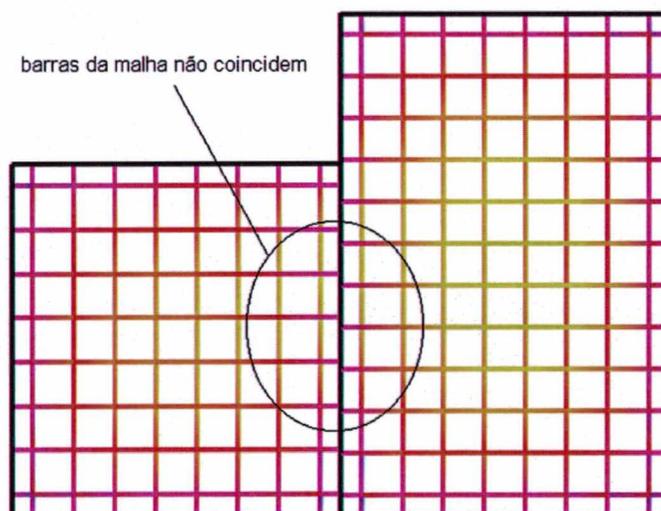


Figura 5.57 - Continuidade da malha da grelha sobre os apoios.

Para solucionar este problema, será utilizado um artifício, através do qual a continuidade será garantida pela rigidez à torção das vigas de apoio. As barras da grelha de cada laje isolada serão engastadas na viga de apoio, a qual será considerada como capaz de resistir a torção, simulando, a continuidade.

Para esta análise, foi escolhido um painel com duas lajes retangulares apoiadas e vigas de grande rigidez, que simulam um apoio indeslocável.

As lajes são retangulares, com dimensão de 4 x 6 m, espessura de 10 cm e carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Serão apresentados resultados de análise para diversos valores de rigidez da grelha e diversos valores de espaçamento de malha. Estes resultados serão comparados com os resultados obtidos por um modelo em elementos finitos e tabelas.

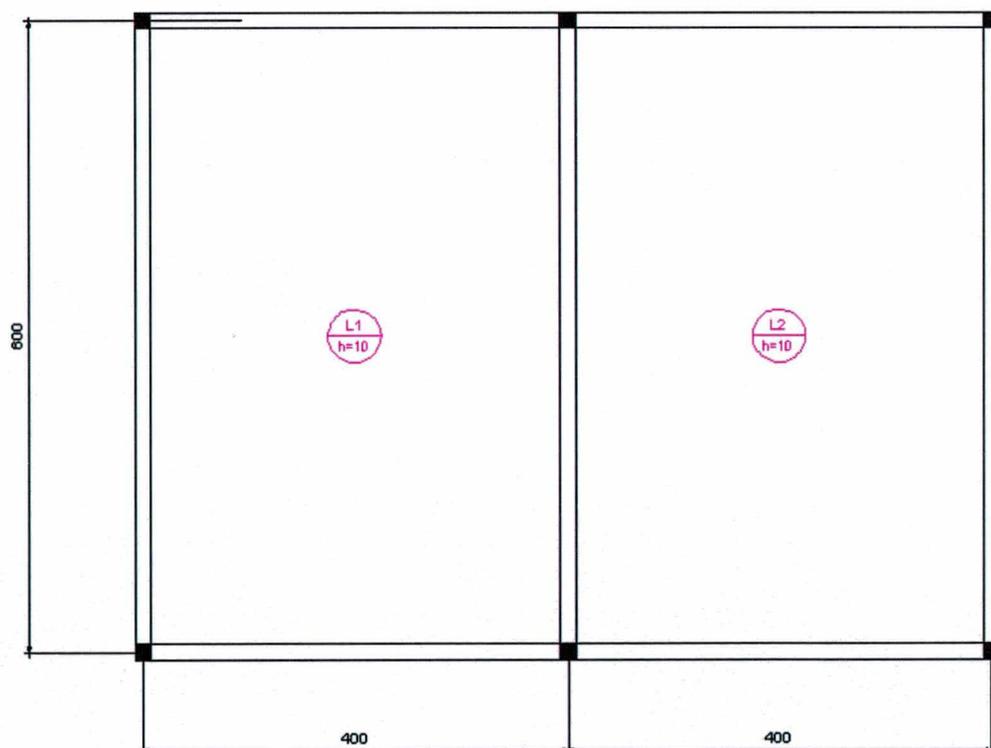


Figura 5.58 - Painel de lajes contínuas.

Neste exemplo, não será estudado o problema que há quando as barras da grelha de lajes contíguas nos apoios não coincidem, mas serão analisados os primeiros resultados da utilização da Analogia de Grelha em lajes contínuas. Este modelo de duas lajes retangulares é simétrico e, se for adotada a mesma carga uniforme nas duas lajes, a continuidade no apoio central comporta-se como um engaste perfeito, ou seja, a rotação das barras da grelha neste ponto é nula. Isso permite a comparação dos resultados também com tabelas baseadas na teoria da elasticidade.

Para calcular o painel de lajes da figura 5.58 pela teoria da elasticidade, as lajes foram calculadas como isoladas pela tabela 1.2, página 36 de BARES e RICHARD, (1970). A laje possui 3 lados simplesmente apoiados e um lado engastado. Foram obtidos da tabela os valores máximos para os momentos fletores, de torção e a flecha máxima, com coeficiente de Poisson $\nu=0$.

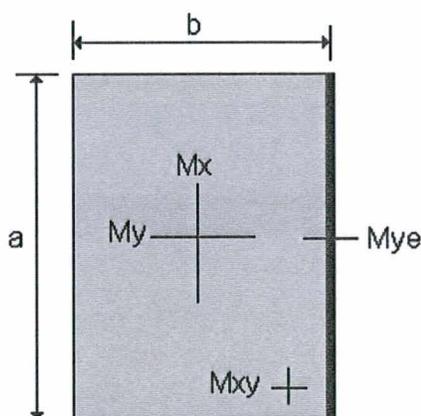


Figura 5.59 - Laje simplesmente apoiada em 3 lados e um lado engastado.

Tabela 5.43 - Resultados pela Tabela de Bares. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

	M_x	M_y	M_{yvs}	M_{xy}	Flecha
v	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	2,88	8,06	17,70	7,01	0,62

5.6.2- LAJES CONTÍNUAS CALCULADAS POR ELEMENTOS FINITOS

O exemplo também foi analisado em elementos finitos, com o programa SAP90. O painel contínuo, conforme mostrado na figura 5.60, foi discretizado com elementos do tipo “shell”.

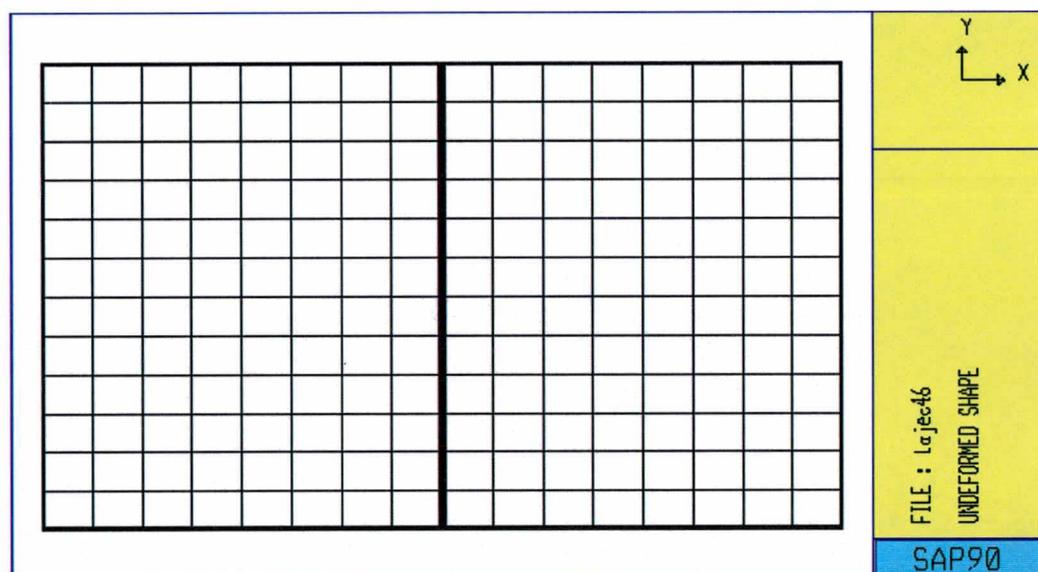


Figura 5.60 - Painel de lajes contínuas, malha em elementos finitos.

Como primeiro resultado da análise, os deslocamentos são obtidos em cada nó da malha. O nó 89 apresenta a flecha máxima com $0,62$ cm.

Na figura 5.61 está ilustrada a deformada do painel de lajes contínuo, onde se destacam os trechos em curvatura positiva no meio do vão e curvatura negativa sobre o apoio.

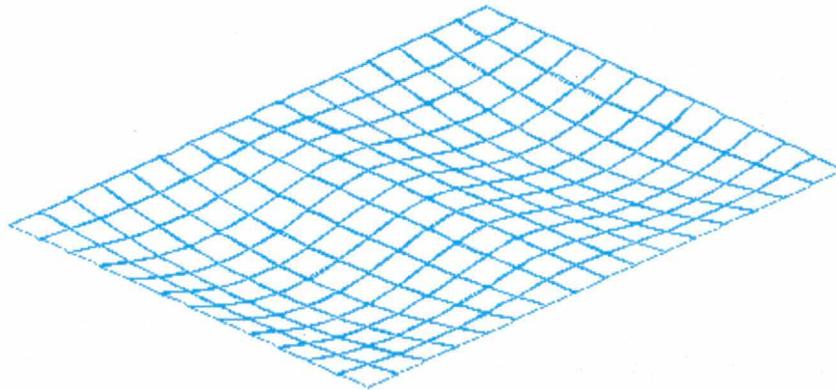


Figura 5.61 - Saída gráfica da deformada do painel contínuo.

As figuras seguintes apresentam as saídas gráficas dos momentos fletores e de torção do painel contínuo.

O valor máximo positivo de 9,01 kN.m/m corresponde ao M_y da tabela de Bares e o valor máximo negativo sobre o apoio de 17,60 kN.m/m corresponde ao M_{ye} da tabela de Bares.

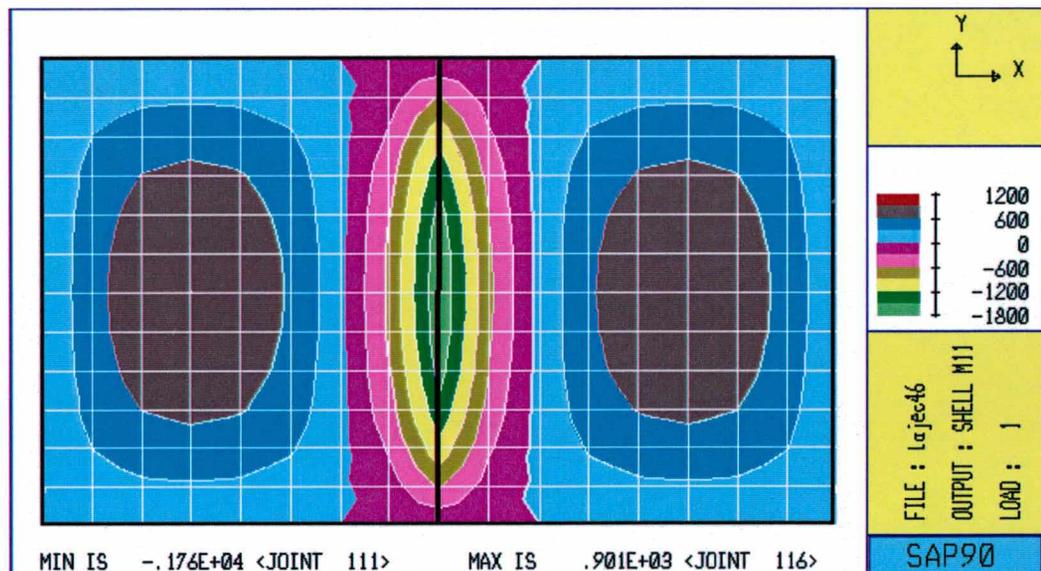


Figura 5.62 - Saída gráfica dos momentos fletores na direção X.

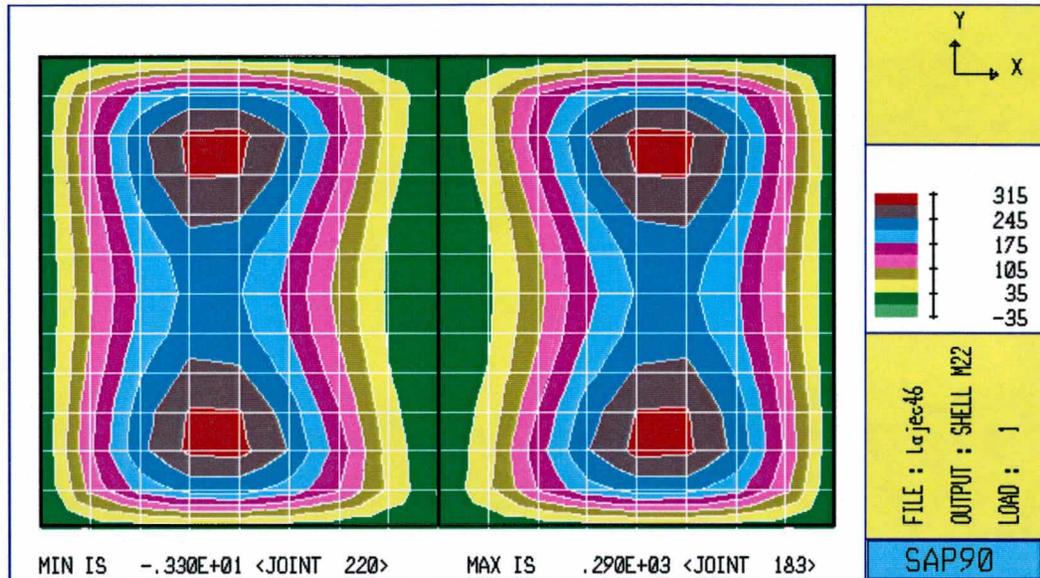


Figura 5.63 - Saída gráfica dos momentos fletores na direção Y.

O valor máximo do momento M22 (2,90 kN.m/m), apresentado no gráfico da figura 5.63, corresponde ao momento Mx da tabela de Bares.

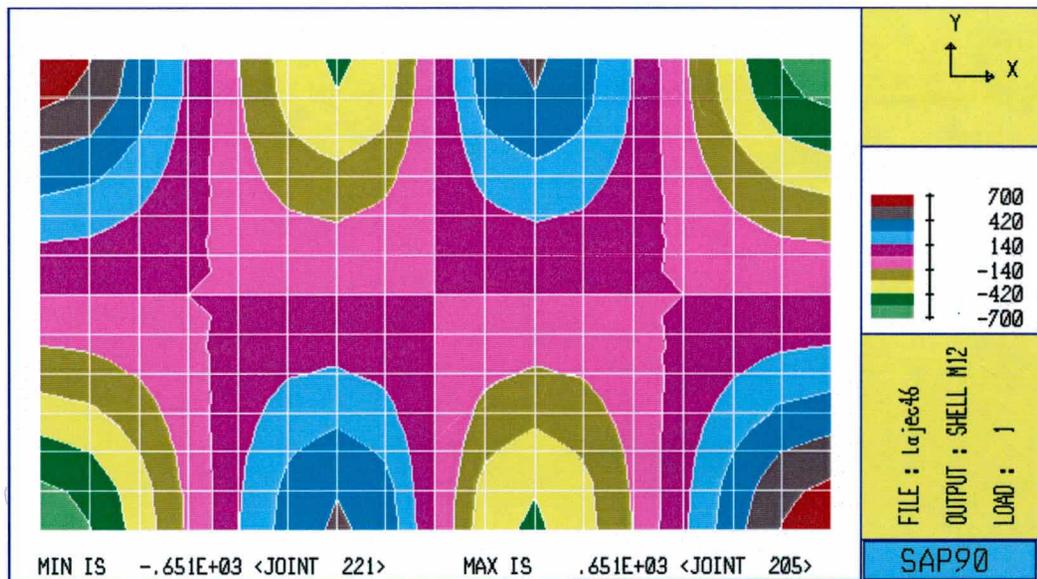


Figura 5.64 - Saída gráfica dos momentos de torção Mxy.

O valor máximo do momento M12, apresentado no gráfico da figura 5.64 (6,51 kN.m/m), corresponde ao momento Mxy da tabela de Bares. As tabelas a seguir apresentam um resumo dos resultados obtidos com a análise em elementos finitos e com as tabelas de Bares, para outros valores de coeficiente de Poisson.

Tabela 5.44 - Resultados da análise por elementos finitos. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

v	Mx	My	Mye	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	2,90	9,01	17,60	6,51	0,62
0,1	3,51	9,23	17,60	5,86	0,61
0,15	3,84	9,34	17,60	5,54	0,60
0,2	4,18	9,45	17,60	5,22	0,59
0,25	4,55	9,56	17,60	4,89	0,58
0,3	4,95	9,67	17,60	4,57	0,56

Tabela 5.45 - Resultados da análise pelas tabelas de Bares. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

v	Mx	My	Myvs	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	2,88	8,06	17,74	7,01	0,62
0,1	*	*	*	*	*
0,15	3,38	8,38	17,74	*	0,61
0,2	3,78	8,49	*	*	*
0,25	4,18	8,60	17,74	*	0,59
0,3	4,57	8,70	17,74	*	0,57

Obs: * Resultados não tabelados

Os resultados obtidos por elementos finitos e pelas tabelas de Bares apresentam diferenças no entorno de 10%. As flechas máximas possuem valores crescentes com o

aumento do coeficiente de Poisson de 0 a 0,3. Os momentos de torção também diminuem, enquanto os fletores no meio do vão aumentam. É importante notar que o momento negativo máximo sobre o apoio permanece constante para qualquer valor do coeficiente de Poisson, tanto na análise por elementos finitos quanto nas tabelas de Bares.

Isto não significa que a distribuição de momentos negativos sobre os apoios seja idêntica, os resultados obtidos foram apenas para os valores máximos. No entanto, este resultado é significativo para comparações com a Analogia de Grelha.

De modo semelhante ao modelo de elementos finitos, foram analisados os resultados de um modelo de laje contínua com as mesmas características .

A figura 5.65 mostra a discretização da malha das duas lajes, com espaçamento de 26 cm.

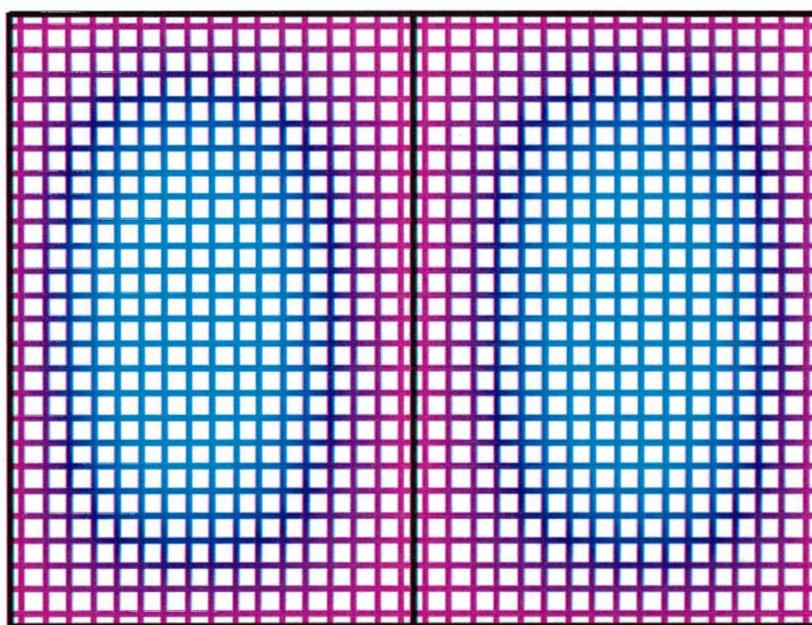


Figura 5.65 - Painel contínuo por Analogia de Grelha.

O painel é composto de duas lajes com 4x6 m, com 10 cm de espessura. O momento de inércia polar das faixas segue o critério já estabelecido de proporcionalidade com o momento de inércia a flexão e, nesta análise, foi tomado como $J_p = 2,5 I_{yy}$. A variação da

rigidez à torção das faixas foi feita com o coeficiente G/E_c sobre o valor do módulo de elasticidade transversal G .

Os resultados são apresentados a seguir, em saídas gráficas que mostram a distribuição dos deslocamentos e momentos, de acordo com um tabela de cores para melhor visualização dos campos. Comparando as saídas gráficas da Analogia de Grelha com as saídas gráficas do Método dos Elementos Finitos, pode-se observar a semelhança dos resultados e de comportamento dos dois modelos.

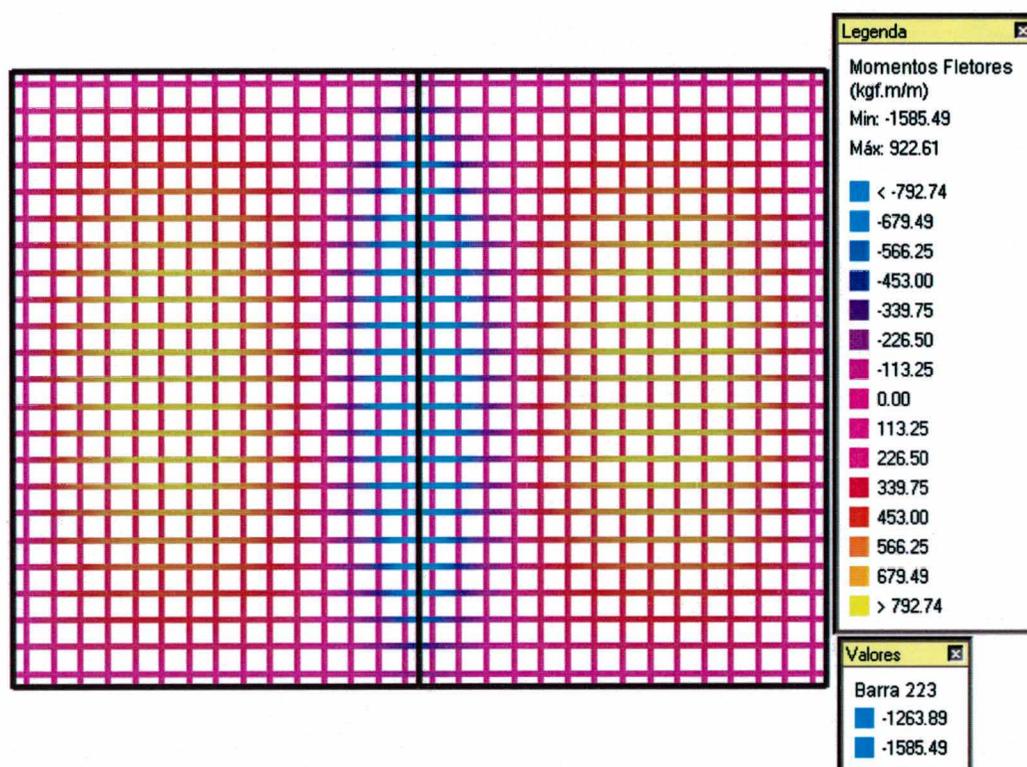


Figura 5.66 - Painel contínuo, saída dos momentos fletores por Analogia de Grelha.

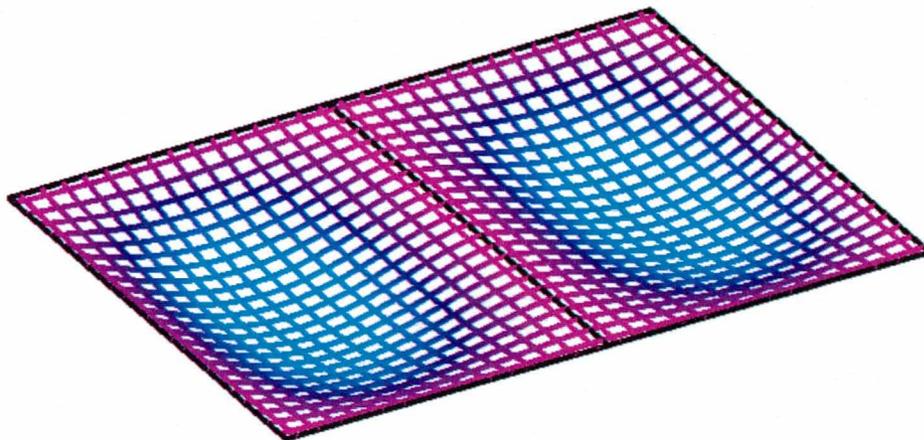


Figura 5.67 - Paineis contínuos, deformados por Analogia de Grelha.

Tabela 5.46 - Resultados da análise por Analogia de Grelha. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

$$J_p = 2,5 I_{yy}$$

G/Ec	Mx	My	Mye	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	4,53	13,38	20,39	0	0,98
0,2	4,00	10,94	17,74	4,23	0,81
0,4	3,64	9,23	15,86	7,17	0,69
0,6	3,38	7,97	14,43	9,34	0,61
0,8	3,21	7,02	13,30	11,03	0,54
1	3,06	6,26	12,45	12,37	0,49

Diferentemente das teorias clássicas, o valor do momento fletor no apoio não é constante. Como mostrado na tabela 5.46, os valores de M_{ye} diminuem com o aumento da

rigidez à torção, tendo o seu valor máximo para $G/E_c = 0$. Os momentos fletores no vão e a flecha apresentam valores máximos enquanto o momento de torção é nulo.

O comportamento da laje contínua por Analogia de Grelha mostra-se semelhante aos resultados já obtidos para lajes retangulares isoladas. Para este caso estudado os resultados estão muito próximos dos obtidos pelas teorias clássicas.

Como neste exemplo as barras da malha coincidem exatamente sobre o apoio, o próximo modelo será usado para verificar a eficiência do artifício da continuidade através da rigidez à torção da viga de apoio. Duas lajes com malhas de espaçamento diferentes serão usadas neste estudo. A laje L1 terá malha de 36 x 36 cm e a L2, 26x26 cm.

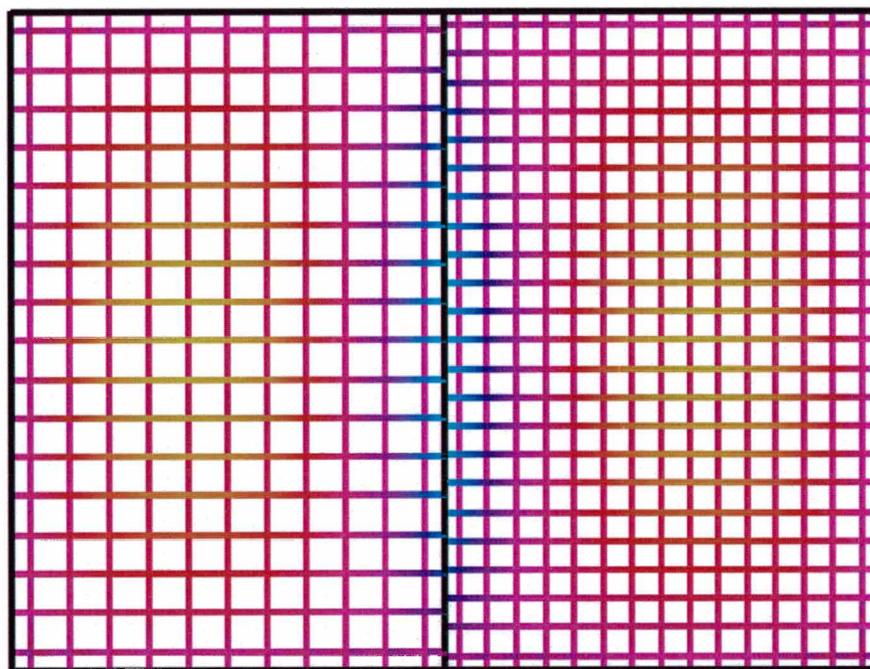


Figura 5.68 - Continuidade da malha através da rigidez à torção da viga de apoio.

Tabela 5.47 - Resultados da análise por Analogia de Grelha , $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

G/Ec	Mx	My	Mye	Mxy	Flecha
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	4,53	13,38	20,40	0	0,98
0,2	4,00	10,94	17,76	4,23	0,82
0,4	3,64	9,23	15,86	7,17	0,69
0,6	3,37	7,97	14,43	9,33	0,61
0,8	3,20	7,01	13,31	11,01	0,54
1	3,06	6,26	12,40	12,35	0,48

Comparando-se os dois exemplos, pode-se observar que as diferenças entre os resultados são muito pequenas, mostrando que o artifício utilizado para garantir a continuidade é eficiente, pelo menos nos casos de apoios indeslocáveis. Esta análise também ficou restrita aos casos de lajes retangulares com malhas ortogonais aos lados. Outras situações, onde o formato das lajes leva a discretização com malhas não ortogonais aos apoios, necessitam ser melhor analisadas.

5.6.2- INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DO APOIO INTERMEDIÁRIO

Em um painel contínuo de lajes em um edifício de concreto armado, as lajes são apoiadas em paredes rígidas ou em vigas. Na maioria dos projetos estas vigas não são totalmente rígidas. A flexibilidade destas vigas pode influenciar bastante o resultado dos deslocamentos e dos esforços.

Conforme PARK, R. e GAMBLE, W.L. (1980), ``Usando as teorias elásticas, é possível demonstrar que para painéis retangulares apoiados em vigas rígidas, a distribuição das reações por áreas tributárias, com triângulos e trapézios com ângulos de base de 45° , é bastante precisa. Porém se a rigidez das vigas for pequena, esta hipótese de distribuição pode levar a erros significativos``.

A teoria das charneiras plásticas por outro lado não dá nenhuma indicação da distribuição das reações ao longo dos apoios.

Estes argumentos segundo PARK, R. e GAMBLE, W.L. (1980), são bastante fortes para sempre considerar o sistema de lajes e vigas como um todo, ao invés de separar os dois componentes e projetar as lajes e as vigas como elementos isolados, quando eles, de fato, forem fortemente integrados.

Portanto, é recomendado utilizar em projetos os procedimentos que permitem a análise dos pavimentos como um sistema integrado de lajes e vigas. Entre esses procedimentos encontram-se o Método dos Elementos Finitos, o Método das Diferenças Finitas e a Analogia de Grelha.

Para analisar primeiro a influência da flexibilidade dos apoios em uma análise elástica, o painel contínuo da figura 5.58 será calculado por elementos finitos para várias alturas da viga intermediária, a partir de 15x100 até 15x20 cm. Os demais apoios do painel serão considerados com vigas de grande altura, para simular o efeito de um apoio indeformável.

As saídas gráficas das figuras 5.69 e 5.70 apresentam os resultados para uma viga intermediária com 100 cm de altura, que é suficientemente rígida para demonstrar que os resultados não diferem de um painel calculado com duas lajes retangulares contínuas sobre apoios indeformáveis. Como o painel é simétrico, pode-se observar que os resultados seriam os mesmos se as lajes fossem consideradas isoladas, com três lados simplesmente apoiados e um dos maiores lados engastados.

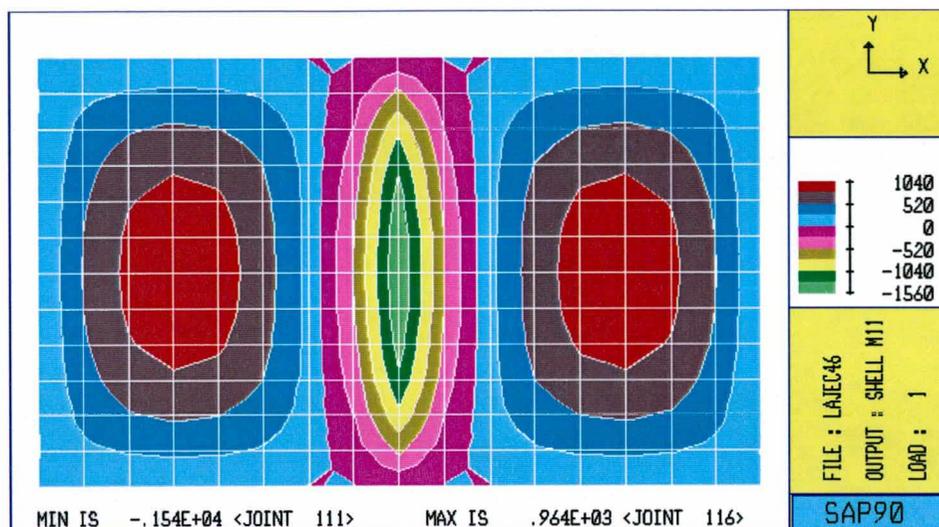


Figura 5.69 - Laje contínua (duas de 4x6m) com apoio intermediário rígido em viga de 15x100.

A figura 5.69 apresenta os momentos fletores na direção M11, ou seja, momentos que atuam na menor direção de uma das lajes. A configuração de momentos de torção também é mostrada, para ser comparada, posteriormente, com a análise do mesmo painel por Analogia de Grelha. Como pode ser visto, a configuração é muito semelhante, destacando mais uma vez, o fato de que a Analogia de Grelha com parâmetros ajustados pode apresentar resultados muito próximos aos obtidos pela teoria elástica.

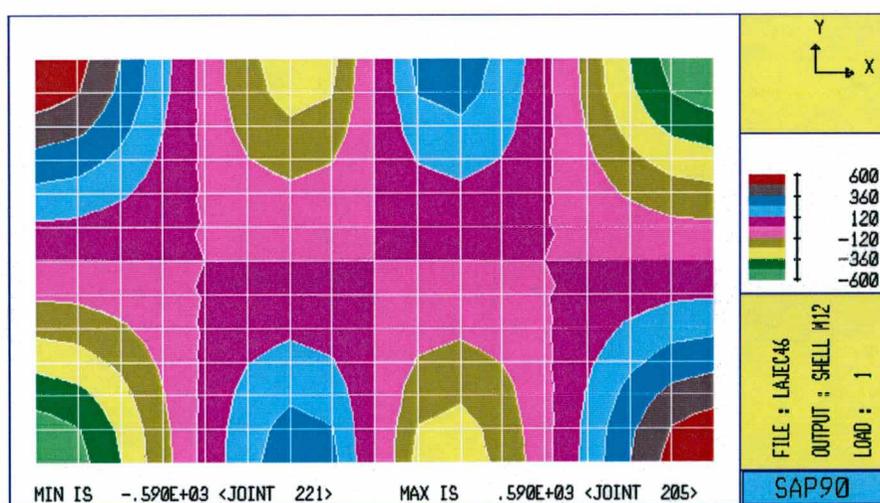


Figura 5.70 - Momentos fletores M_x no vão e M_{ye} no apoio com viga de 15x100

A análise feita a seguir, com uma viga flexível no apoio intermediário, com seção de 15x40 cm, mostra uma significativa influência da rigidez dos apoios em painéis de lajes contínuas. Examine-se, por exemplo, o momento fletor máximo negativo na região de apoio das lajes sobre a viga intermediária. No caso de um apoio rígido, ou viga de grande rigidez, o valor do momento fletor na direção M11 (M_{yvs}) é de 15,60 kN.m/m. Com a redução da rigidez desse apoio intermediário, adotando-se uma viga de 15x40 cm, o valor desse momento cai para 2,66 kN.m/m, conforme mostrado na figura 5.71. E, em um caso extremo de uma viga bastante flexível, com uma seção de 15x20 cm, este momento passa a ser positivo, apresentando um valor de 11,20 kN.m/m, conforme mostrado na figura 5.73. A flexibilidade do apoio nesse caso, é tão alta, que o painel composto por duas lajes de 4x6m passa a se comportar quase como se fosse uma única laje retangular de 6x8m, simplesmente apoiada no contorno.

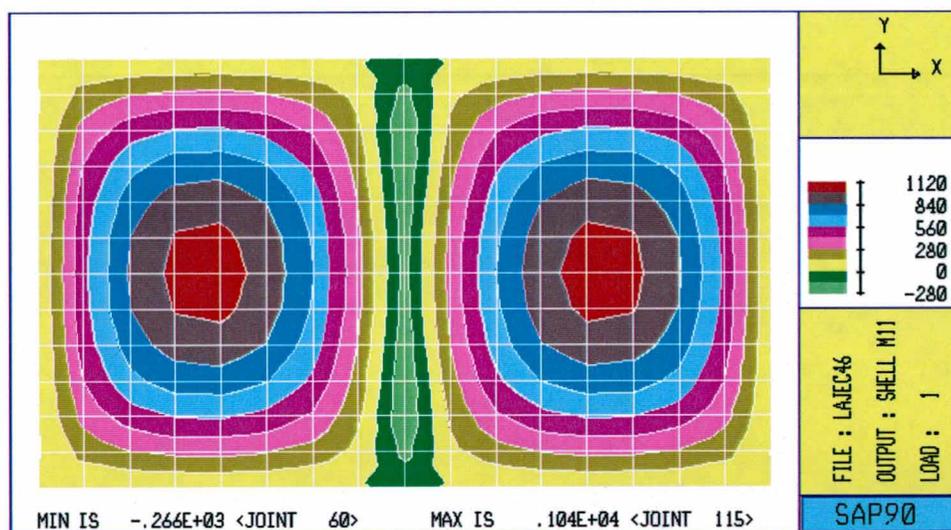


Figura 5.71 - Momentos fletores M_x no vão e M_{ye} no apoio, viga de 15x40

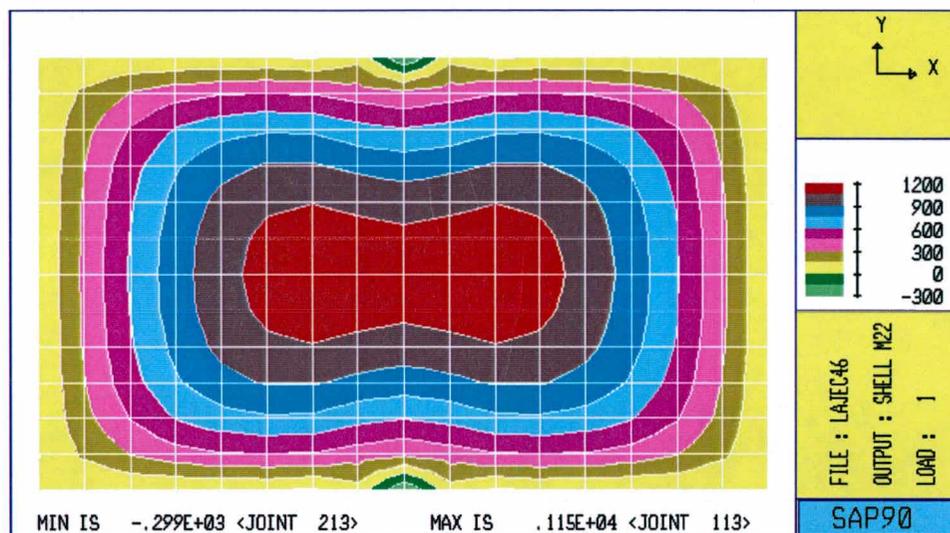


Figura 5.72 - Momentos fletores M_y no vão e M_{ye} no apoio, viga de 15x40.

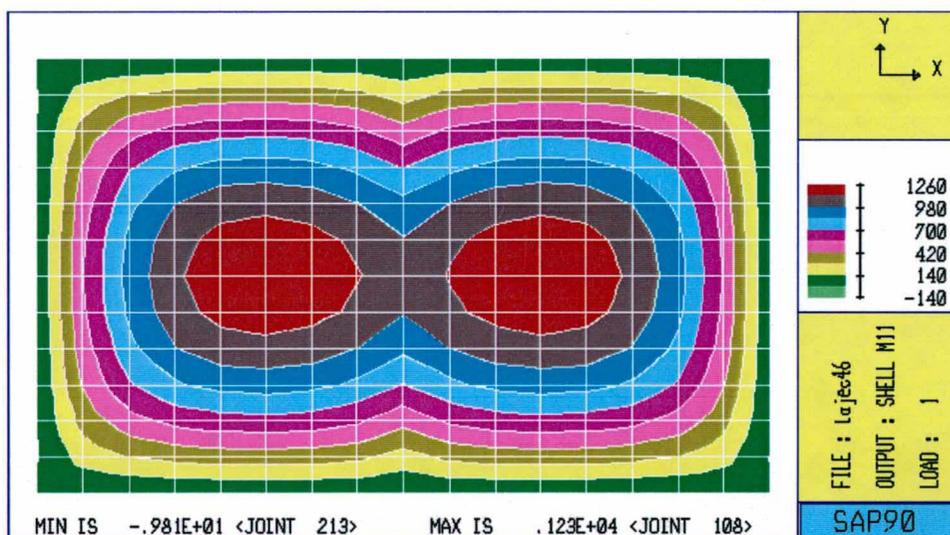


Figura 5.73 - Momentos fletores M_x no vão e M_{yvs} no apoio, viga 15x20.

A figura 5.74 apresenta a saída gráfica dos momentos fletores na direção M22, correspondente à direção dos momentos M_y nas tabelas de Bares, com a viga de apoio intermediária de 15x20 cm. Nota-se que o momento máximo nesta direção passa a ser no centro dessa viga, com o painel transformando-se praticamente em uma única laje de 4x8m.

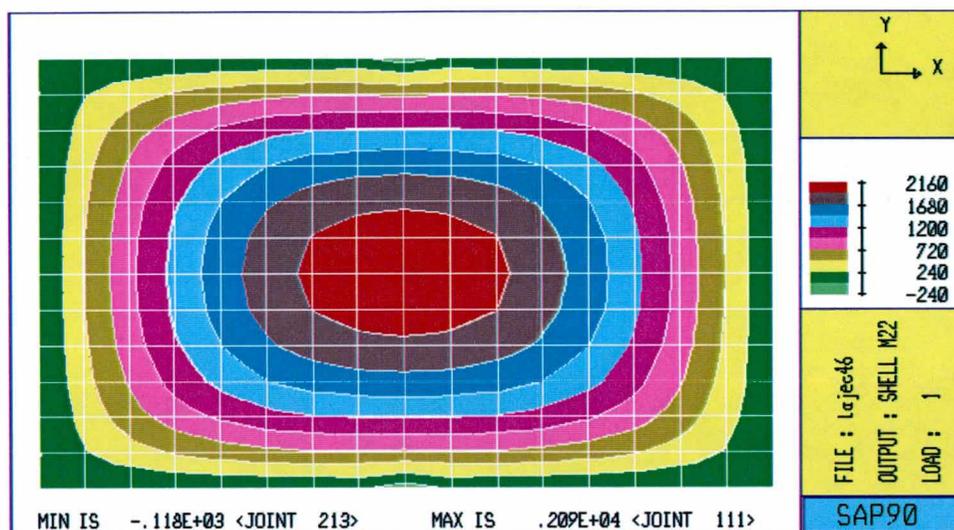


Figura 5.74 - Momentos fletores M_y no vão e M_{ye} no apoio, viga de 15x20

A tabela 5.48 apresenta um resumo dos resultados para a análise do painel, com diversas alturas para a viga de apoio intermediário. Nessa tabela, os deslocamentos correspondentes à flecha 1 referem-se aos deslocamentos no meio de cada uma das lajes de 4x6 m e os deslocamentos da flecha 2 referem-se ao do apoio da viga intermediária, que varia desde zero, para o caso de um apoio rígido, até 4,29 cm para a viga de apoio com 15x20 cm.

É possível observar também, uma variação nos momentos de torção. Nesse caso, para comparação, foram tabelados os momentos nos cantos do painel, onde a variação é de aproximadamente 2,5 vezes, entre os casos analisados com as vigas de apoio de 15 x 26 cm e as de 15 x 100 cm.

Tabela 5.48 - Resultados da análise por Elementos Finitos. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Viga	M_x kN.m/m	M_y kN.m/m	M_{ye} kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	Flecha 1 cm	Flecha 2 cm
15X100	9,35	4,07	-15,60	6,61	0,79	0,30
15X80	9,44	4,63	-14,00	7,21	0,94	0,67
15X60	9,66	6,24	-1040	8,60	1,31	1,10

15X40	10,40	11,50	-2,66	11,90	2,05	2,38
15X20	12,30	20,90	11,20	16,80	3,22	4,29

Para obter os resultados para um estudo comparativo, o mesmo painel de lajes contínuas foi analisado por Analogia de Grelha. A figura 5.75 apresenta uma saída gráfica da deformada do painel com uma viga de apoio intermediário bastante rígida com seção de 15x100 cm.

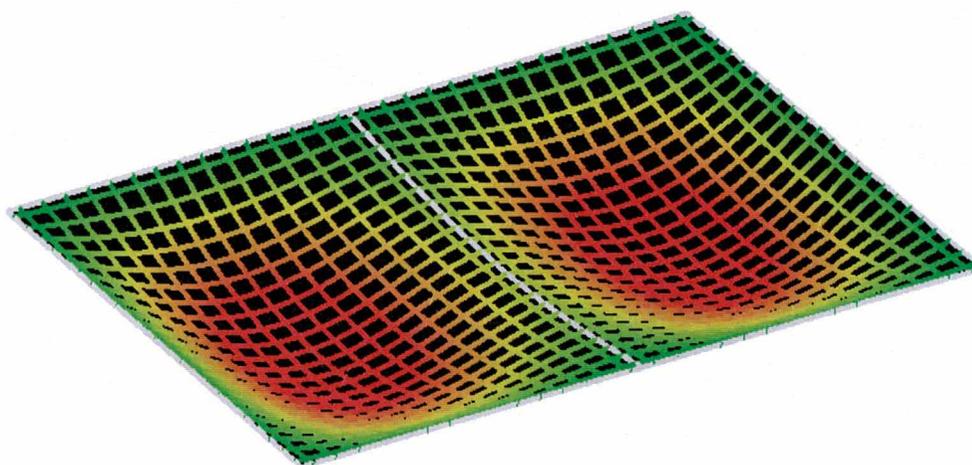


Figura 5.75 - Painel contínuo com viga intermediária de 15x100

As figuras 5.57 e 5.58 apresentam as saídas gráficas dos momentos fletores nas duas direções M_x e M_y e os momentos de torção. A comparação com as figuras 5.50 e 5.51 da análise por elementos finitos mostra que a distribuição dos momentos possui uma configuração bastante semelhante nas duas análises.

As figuras 5.76, 5.77 e 5.78 apresentam os mesmos resultados, porém com vigas de apoio intermediário flexíveis. Nas figuras 5.78 e 5.81, é visível a deformação da viga de apoio intermediário e a sua influência no campo de deformações do painel de lajes contínuas.

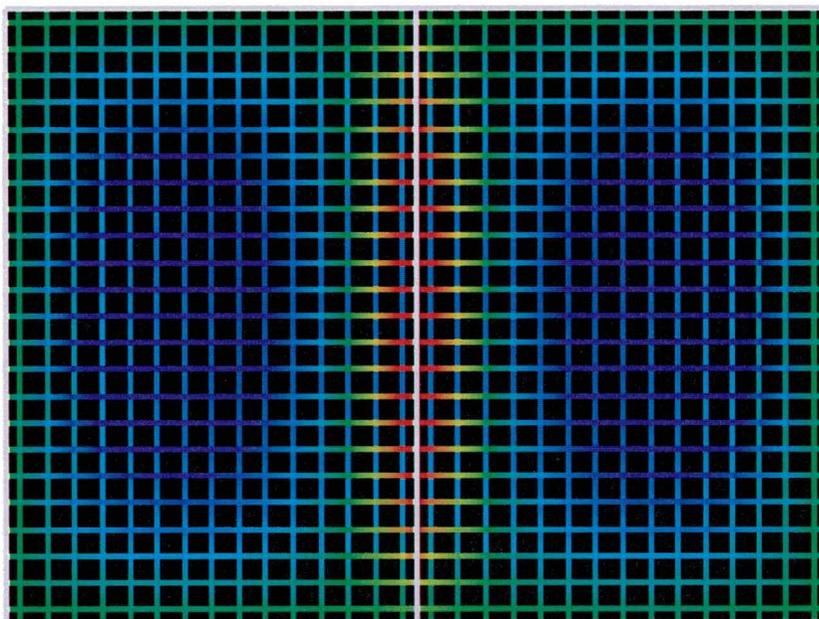


Figura 5.76 - Momentos fletores em painel contínuo com viga intermediária de 15x100

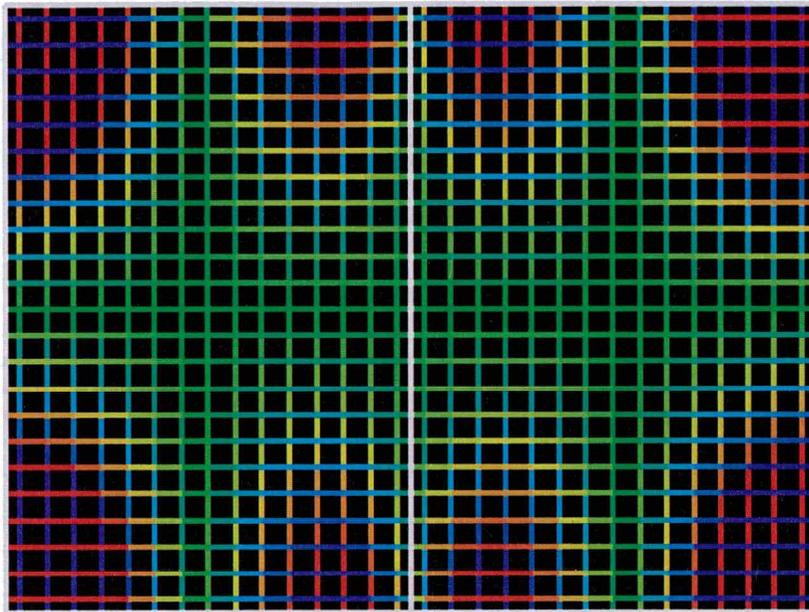


Figura 5.77 - Momentos fletores em painel contínuo com viga intermediária de 15x100

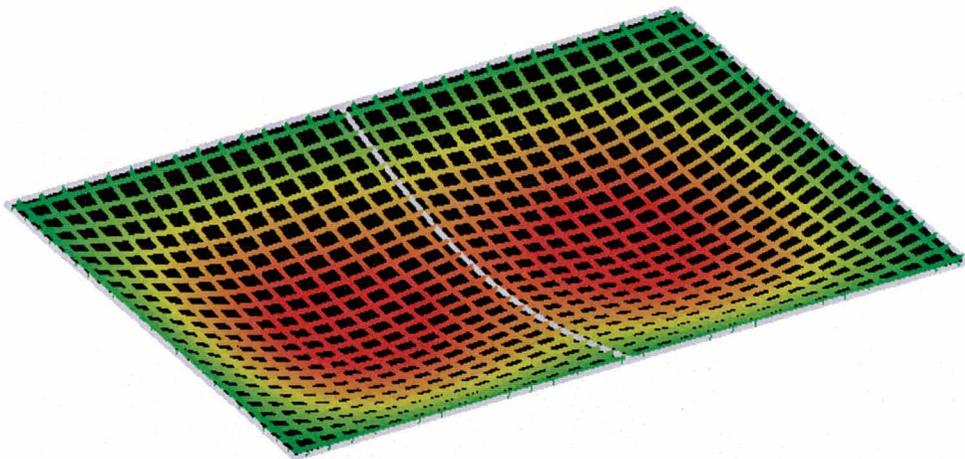


Figura 5.78 - Painel contínuo com viga intermediária de 15x60

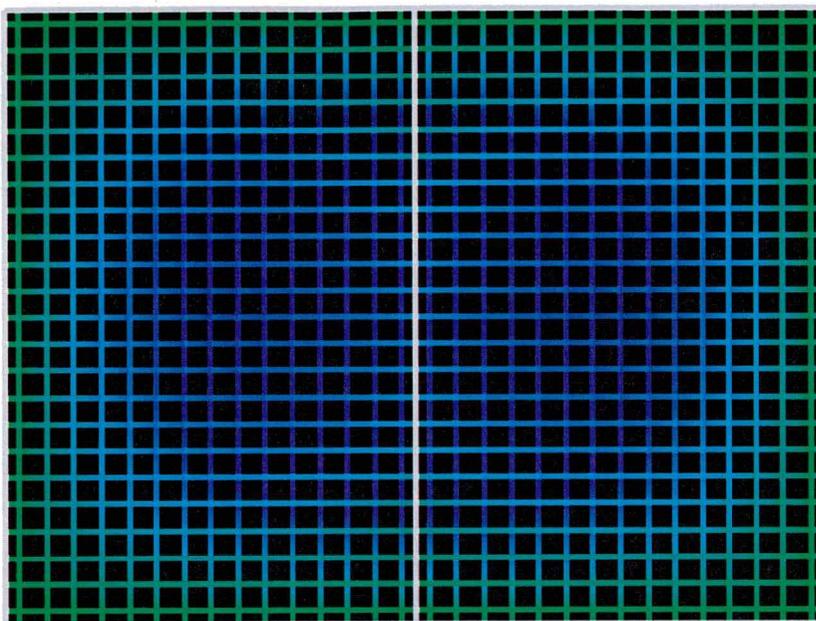


Figura 5.79 - Momentos fletores de Painel contínuo com viga intermediária de 15x60

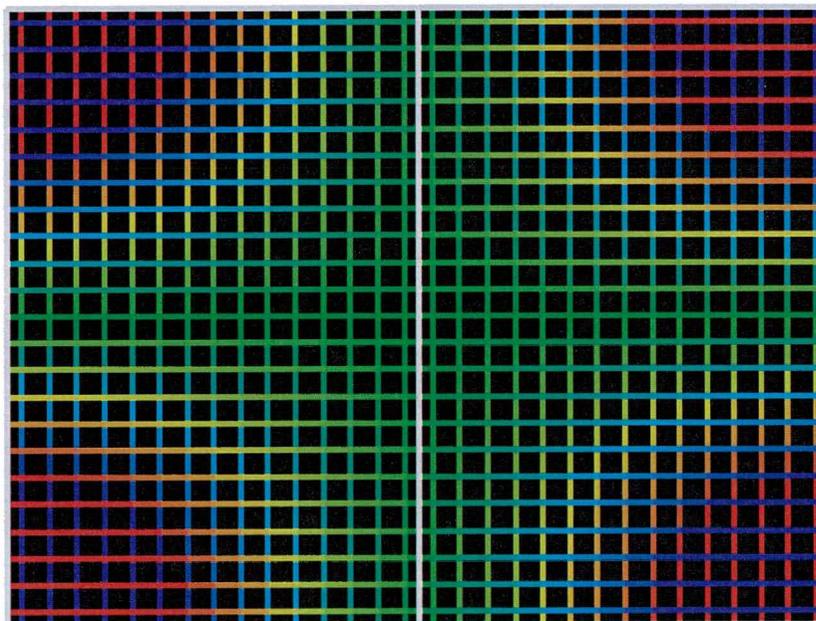


Figura 5.80 - Momentos de torção de Painel contínuo com viga intermediária de 15x20

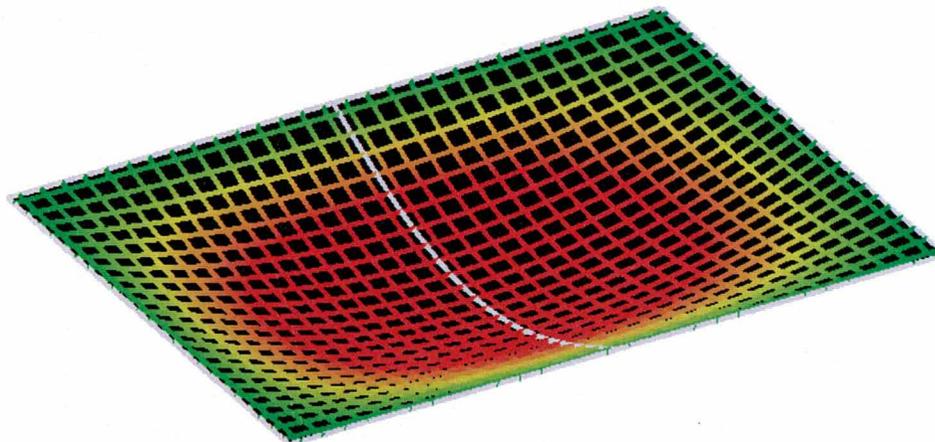


Figura 5.81 - Painel contínuo com viga intermediária de 15x20

A tabela 5.49 apresenta os resultados dos momentos fletores no meio do vão M_x e M_y , o momento sobre o apoio intermediário na direção X, denominado de M_{xa} , e os momentos de torção M_{xy} . A Flecha 1 indica o deslocamento no meio do vão de uma das lajes do painel e a Flecha 2 o deslocamento no meio da viga de apoio intermediária.

Tabela 5.49 - Resultados da análise por Analogia de Grelha . $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

$$G/Ec = 0,4 \quad Jp/Iyy = 2,5$$

Viga	M_x kN.m/m	M_y kN.m/m	M_{xa} kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	Flecha 1 cm	Flecha 2 cm
15X100	9,31	4,03	-14,39	7,90	0,84	0,29
15X80	9,37	4,45	-13,12	8,53	0,98	0,52
15X60	9,54	5,71	-10,10	10,01	1,33	1,06
15X40	10,08	11,18	-3,32	13,58	2,07	2,38
15X20	11,09	20,22	20,22	19,02	3,26	4,39

Para analisar a influência da rigidez à torção das faixas, foram analisadas as mesmas situações da tabela 5.49, com uma relação de rigidez $J_p/I_{yy} = 1$, cujos resultados estão mostrados na tabela 5.50. Observa-se um aumento dos momentos fletores e deslocamentos e uma redução nos momentos de torção. Na tabela 5.51 é apresentado um resumo dos resultados por Analogia de Grelha e Elementos Finitos.

Tabela 5.50 - Resultados da análise por Analogia de Grelha . $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

$$G/Ec = 0,4 \quad J_p/I_{yy} = 1,0$$

Viga	Mx	My	Mye	Mxy	Flecha 1	Flecha 2
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm	cm
15X100	11,43	4,51	-16,83	3,82	0,99	0,30
15X80	11,50	4,98	-15,61	4,10	1,12	0,55
15X60	11,71	6,39	-12,64	4,77	1,50	1,15
15X40	12,41	13,09	-4,76	6,58	2,48	2,77
15X20	14,23	27,23	-	10,01	4,33	5,83

Tabela 5.51 - Resultados da análise por Analogia de Grelha . $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

$$G/Ec = 0,4 \quad J_p/I_{yy} = 2,5$$

Viga	AG	FEM	AG	FEM	AG	FEM
	Mx	Mx	Mxe	Mxe	Flecha 1	Flecha 1
	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm	cm
15X100	9,31	9,35	-14,39	-15,60	0,84	0,79
15X80	9,37	9,44	-13,12	-14,00	0,98	0,94
15X60	9,54	9,66	-10,10	-10,40	1,33	1,31
15X40	10,08	10,40	-3,32	-2,66	2,07	2,05
15X20	11,09	12,30	20,22	11,20	3,26	3,22

5.7 – PAINÉIS DE LAJES SEM VIGAS.

As lajes sem vigas são denominadas pelo termo genérico de lajes planas (*flat slabs* ou *flat plates*). A laje plana é uma das estruturas mais simples para a construção de pisos de edifícios, pois compõe-se apenas de uma laje de espessura uniforme apoiada diretamente nos pilares. Em muitos casos, a laje plana é apoiada em vigas nos bordos externos. O termo laje cogumelo também é usado freqüentemente para este tipo de laje. Porém, o correto é designar de laje cogumelo os painéis de lajes sem vigas que possuem um região de maior espessura junto aos pilares. As lajes planas são uma conseqüência do desenvolvimento das lajes cogumelo apoiada em capitéis sobre os pilares. Estes capitéis são regiões de maior espessura na laje, ao redor do apoio nos pilares, para aumentar a resistência à punção. As lajes planas podem ser totalmente maciças em concreto, nervuradas ou mistas com regiões maciças.

Através da Analogia de Grelha, é possível modelar e analisar lajes planas ou lajes cogumelo. O painel de laje é discretizado em uma malha de grelha plana e os pilares são colocados em nós com vínculos de apoio.

A figura 5.82 apresenta um exemplo de painel de laje plana que será utilizado para fazer um estudo comparativo entre a análise em elementos finitos e a Analogia de Grelha. Um pavimento de 15 x 15 m é apoiado em todo o contorno em paredes ou vigas rígidas. No interior do painel existem quatro pilares de sustentação espaçados a cada 5m. Este exemplo tem uma configuração simétrica e modulada, para permitir também a utilização de tabelas para a obtenção dos resultados pela teoria da elasticidade. Para esse cálculo foi utilizada a tabela 1.123 de Bares. Na figura, estão indicados pontos característicos utilizados por esta tabela para o cálculo dos momentos fletores. Estes pontos também serão utilizados para apresentar os resultados por elementos finitos e por Analogia de Grelha.

As figuras 5.84 e 5.86 apresentam as saídas dos momentos fletores M_{II} e de torção M_{I2} calculados por elementos finitos.

É importante salientar que na análise por elementos finitos os momentos negativos sobre os pilares (ponto 5) tendem a apresentar valores muito elevados em relação à solução elástica calculada com as tabelas de Bares, conforme mostrado na tabela 5.53.

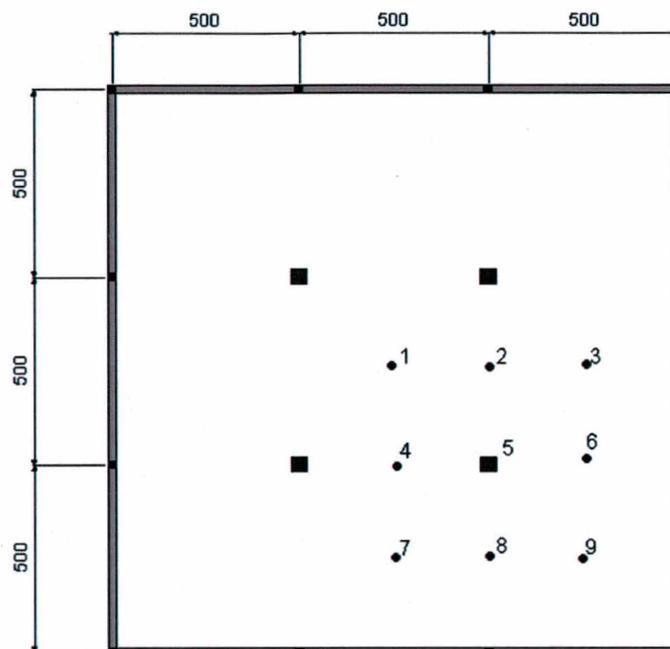


Figura 5.82 - Laje cogumelo com quatro pilares, vão de 5m, espessura de 10 cm e carga de 10 kN/m^2

A figura 5.83 mostra a deformada do painel de lajes sem vigas, uma configuração típica do campo de deslocamentos desse tipo de laje e de lajes cogumelo.

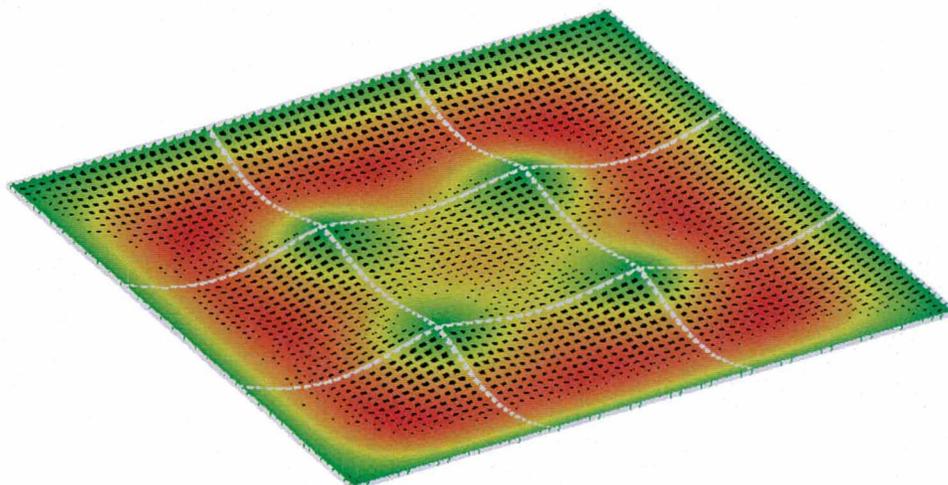


Figura 5.83 - Deformação da laje cogumelo por Analogia de Grelha

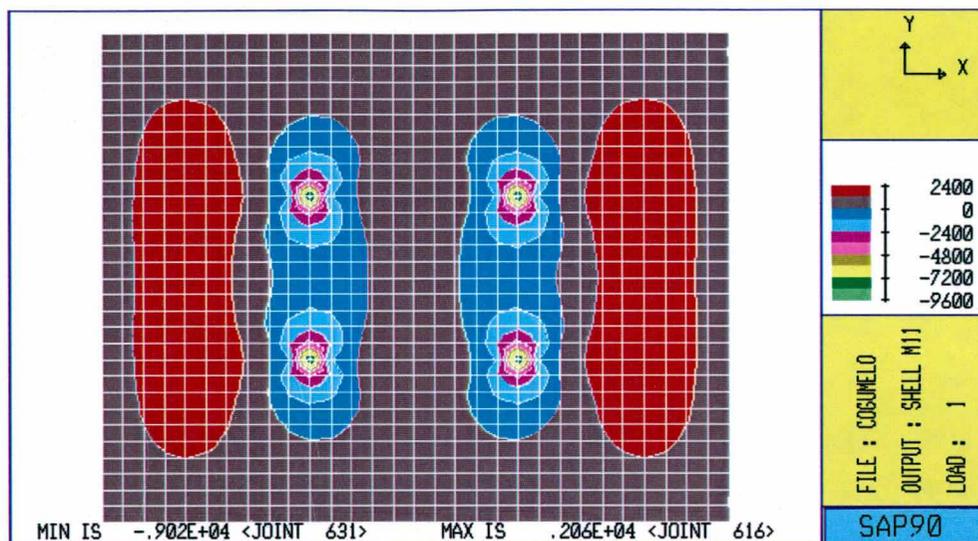


Figura 5.84 - Momentos fletores da laje cogumelo por elementos finitos

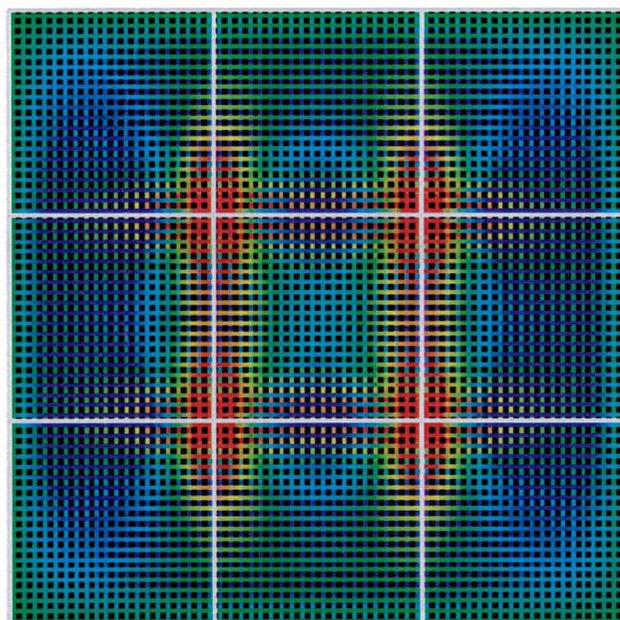


Figura 5.85 - Momentos fletores da laje cogumelo por Analogia de Grelha

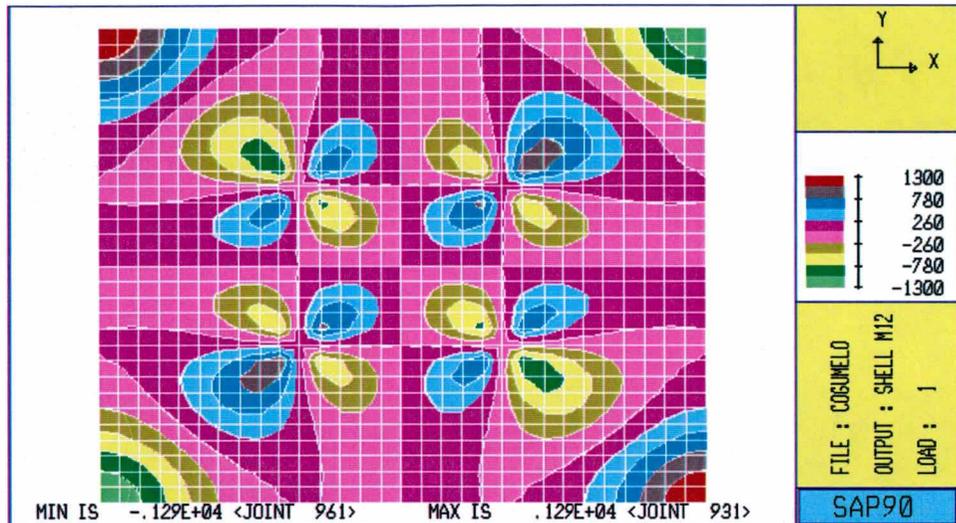


Figura 5.86 - Momentos de torção da laje cogumelo por elementos finitos

A saída gráfica da figura 5.87 mostra a configuração de momentos de torção obtidos na análise do pavimento de laje plana com Analogia de Grelha. A distribuição dos momentos, comparado com a análise por elementos finitos mostrada na fig.5.86, mostra que a Analogia de Grelha leva a resultados muito parecidos com os da teoria elástica.

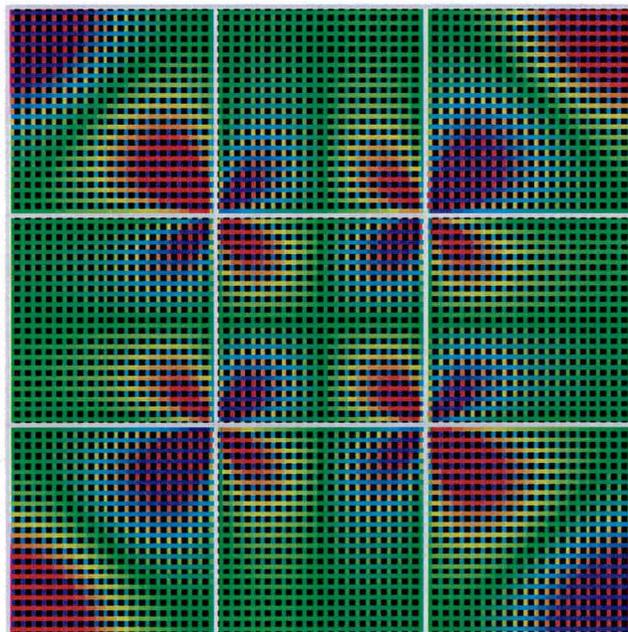


Figura 5.87 - Deformação da laje cogumelo por Analogia de Grelha

Tabela 5.52 - Resultados da Laje Cogumelo por Analogia de Grelha e Elementos Finitos .

$$G/Ec = 0,4 \quad Jp/Iyy = 2.5$$

	Analogia de Grelha	Elementos Finitos
	Mxy	M12
Ponto	kN.m/m	kN.m/m
5	11,61	10,40
Cantos	16,62	12,90

Na tabela 5.53, estão apresentados os resultados dos momentos fletores nos pontos indicados na figura 5.82, das análises por elementos finitos, Analogia de Grelha e dos cálculos obtidos das tabelas de Bares (Teoria da Elasticidade).

Tabela 5.53 - Resultados da Laje Cogumelo por Analogia de Grelha e Elementos Finitos .

$$G/Ec = 0,4 \quad Jp/Iyy = 2.5$$

	Teoria Elasticidade		Analogia de Grelha	
	Mx	My	Mx	My
Ponto	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m
1	5,25	5,25	5,74	5,74
2	-10,00	9,50	-10,41	14,81
3	17,25	6,25	17,78	5,07
4	9,50	-10,00	14,81	-10,41
5	-35,00	-35,00	-51,90	-51,90
6	18,50	-0,10	19,49	-3,71
7	6,25	17,25	5,07	17,78
8	-0,10	18,50	-3,71	19,49
9	13,25	13,25	11,61	11,61

5.8 - LAJES NERVURADAS

Conforme a NBR6118 (1978), “são consideradas lajes nervuradas aquelas cuja zona de tração é constituída por nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte, de modo a tornar plana a superfície externa, poderão ser calculadas de acordo com o item 3.3.2.1 e 3.3.2.3 a 3.3.2.8, desde que se observem as prescrições do item 6.1.1.3”.

O mesmo item ainda diz: “As nervuras deverão ser verificadas a cisalhamento, como vigas se a distância livre entre elas for superior a 50 cm e como laje em caso contrário”.

O item 3.3.2.1 diz que: “As lajes poderão ser calculadas como placa no regime elástico com os valores do módulo de deformação e do coeficiente de Poisson prescritos em 8.2.5 e 8.2.6, permitindo-se processos simplificados devidamente justificados.”

A NBR-6118 estabelece certas limitações para que a laje possa ser considerada como laje nervurada dentre elas destacamos :

- A distância livre entre nervuras não deve ultrapassar 100 cm;
- A espessura da nervuras não deve ser inferior a 4 cm e a mesa da laje não deve ser menor que 4 cm nem a 1/15 da distância livre entre as nervuras.

Estas limitações têm por objetivo eliminar os casos em que a laje nervurada teria que ser calculada como grelha plana, necessariamente. Nos casos em que a laje obedece às limitações impostas pela norma, a laje pode ser calculada como maciça por qualquer procedimento clássico ou simplificado, plenamente justificado.

POLILLO (1977), apresenta um exemplo de cálculo de uma laje nervurada quadrada com 8,5 m de lado, simplesmente apoiada, com um carregamento distribuído de 7,64 kN/m² e com as características mostradas na figura 5.88. Os resultados para os momentos fletores máximos por ele obtidos no centro da laje são:

Pelo Processo de Marcus: $M_x = M_y = 20,14 \text{ kN.m/m}$

Calculado como uma grelha: $M_x = M_y = 34,50 \text{ kN.m/m}$

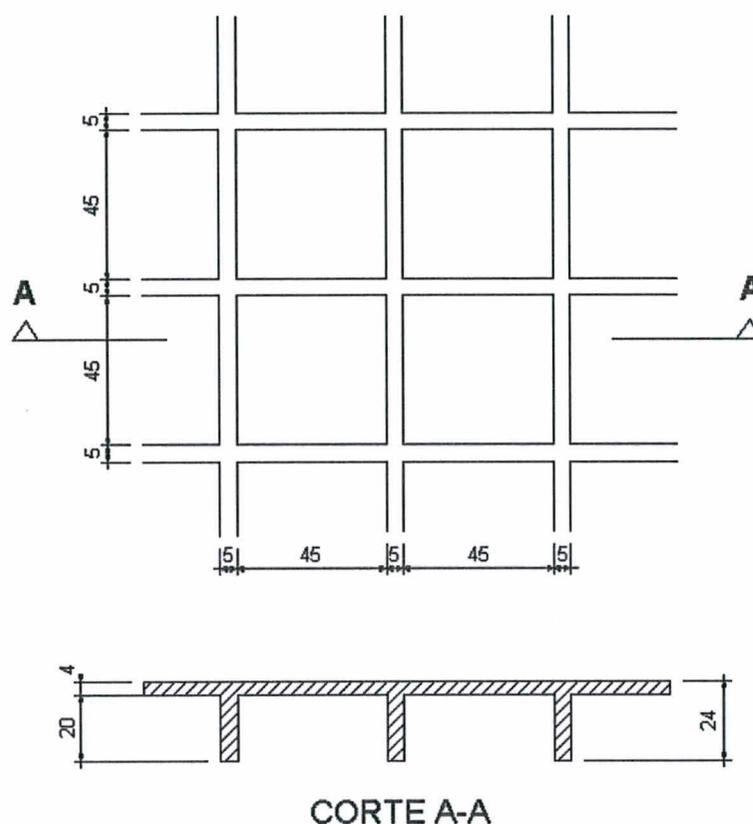


Figura 5.88 - Laje nervurada quadrada com 8,5 x 8,5 m

A diferença entre os momentos máximos calculados pelo processo de Marcus e a teoria das grelhas é de 70%. Esta diferença deve-se ao fato do processo de Marcus considerar a laje nervurada como uma laje maciça. A maioria das tabelas de Marcus apresentada nas bibliografias, são calculadas com uma redução dos momentos fletores através de um coeficiente de correção para que os valores se aproximem da teoria da elasticidade. Uma laje nervurada possui uma rigidez à torção menor do que uma laje maciça com a mesma altura. Esta redução na rigidez faz com que os momentos de torção sejam menores do que os calculados para uma laje maciça pela teoria da elasticidade. Por consequência, de acordo com a equação de equilíbrio das placas, os momentos fletores e os deslocamentos sofrerão acréscimos significativos.

A mesma laje do exemplo mostrado acima será calculada por Analogia de Grelha com diversos parâmetros dos coeficientes de rigidez. No primeiro modelo, cujos resultados estão na tabela 5.54, a rigidez das faixas será calculada com o momento de inércia polar proporcional ao momento de inércia à flexão. No segundo modelo, cujos resultados estão na tabela 5.55, a rigidez das faixas será calculada com o momento de inércia polar calculado com a equação 5.6 e com as barras com as características geométricas da seção T entre cada nervura.

Tabela 5.54 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje nervurada

$$G/Ec = 0,4$$

Jp/Iyy	Mx	My	Mxy	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	42,62	42,62	0	5,9
1	29,94	29,94	14,10	4,2
2	23,09	23,09	22,24	3,2
2,5	20,74	20,74	25,17	2,9
3	18,82	18,82	27,62	2,6

Tabela 5.55 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje nervurada, Jp das faixas calculado com a equação 5.6

G/Ec	Mx	My	Mxy	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	KN.m/m	cm
0	42,62	42,62	0	5,9
0,2	41,49	41,49	0,12	5,7
0,4	40,41	40,41	2,40	5,6

Como pode ser observado, para uma rigidez à torção nula, os dois modelos apresentam os mesmos resultados. Porém, para os demais valores de rigidez, os resultados com J_p calculado pela equação 5.6, apresentam-se mais elevados para os momentos e

flechas. Isso é devido ao fato de a rigidez à torção das faixas, como seção T, ser muito mais baixa do que a obtida pela relação J_p/I_{yy} .

A tabela 5.56 apresenta os resultados dos momentos e das flechas da laje nervurada calculada pela Teoria da Elasticidade através das tabelas de Bares, com dois valores de coeficiente de Poisson. Para o cálculo da flecha máxima na laje, foi utilizada a altura total da laje, ou seja 24 cm. Com a tabela de Bares o cálculo da flecha máxima é feito com o coeficiente w_s através da fórmula:

$$f_{\max} = w_s \frac{q \cdot l_x^4}{E \cdot h^3}$$

Os resultados para as flechas utilizando a altura total da laje, são muito baixos, comparados com os resultados obtidos pela Analogia de Grelha. Resultados melhores podem ser obtidos adotando-se para a altura da laje, considerada como maciça, um valor equivalente. Este valor de altura equivalente, pode ser calculado através da transformação da seção T de uma nervura em uma seção retangular equivalente, com uma largura igual à distância entre eixos de cada nervura, com o mesmo momento de inércia.

O momento de inércia da seção T é igual a 13200 cm^4 , uma seção retangular com uma largura de 50 cm, possui o mesmo momento de inércia com uma altura equivalente igual a 14,7 cm. Com esse valor as flechas calculadas, apresentam valores próximos da Analogia de Grelha calculada pelo primeiro modelo, cujos resultados estão apresentados na tabela 5.57.

Tabela 5.56 - Resultados pela Teoria da Elasticidade uma laje nervurada,

Tabela de Bares

Altura total da laje $h=24 \text{ cm}$

v	Mx	My	Mxy	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
0	20,31	20,31	25,56	0,67
0,15	23,34	23,34	-	0,65

*Tabela 5.57 - Resultados pela Teoria da Elasticidade uma laje nervurada,**Tabela de Bares**Altura equivalente $h_{eq} = 14,7$ cm*

v	Mx	My	Mxy	Flecha
cm	kN.m/m	KN.m/m	kN.m/m	cm
0	20,31	20,31	25,56	2,92
0,15	23,34	23,34	-	2,86

Segundo HAHN, (1972), as normas alemãs exigem que o cálculo de lajes nervuradas, cujas armaduras estão cruzadas, seja feito com o coeficiente de redução à torção de Marcus igual a um. Isto significa que a rigidez à torção da placa é desprezada.

A rigidez à torção não se reduz por completo, mas como mostram os resultados da tabela 5.55, são tão pequenos que a sua influência pode ser desprezada no cálculo.

Portanto, o cálculo de lajes nervuradas não pode ser corretamente analisado pelas teorias elásticas, considerando a laje como maciça, mesmo que se utilize uma altura equivalente reduzida para considerar o fato de as nervuras serem seções T. Nesse caso, a Analogia de Grelha, utilizando os parâmetros de rigidez da própria seção T, parece ser um modelo mais conveniente, pois apresenta resultados a favor da segurança.

O modelo de Analogia de Grelha no caso de lajes nervuradas, também introduz algum erro, contra a economia, ao considerar as capa de concreto da laje como parte da viga T, e portanto, desconectadas entre si, permitindo um deslocamento relativo que não corresponde bem à realidade, levando a resultados superiores aos da laje real, porém como já foi citado, a favor da segurança.

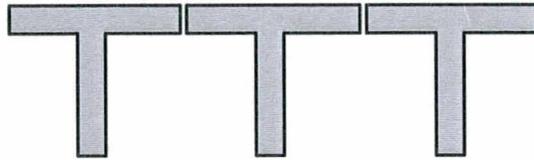


Figura 5.89 - Faixas da laje nervurada

Análises mais precisas, utilizando um modelo de elementos finitos para a capa de concreto e de grelha para as vigas das nervuras, podem ser feitas para obter resultados mais próximos do comportamento das lajes das estruturas reais. Esses resultados poderiam ser comparados com resultados de testes de laboratório em lajes nervuradas.

6- EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo serão apresentados diversos exemplos de aplicação de lajes em projetos de edifícios de concreto. Além de apresentarem os resultados da análise por Analogia de Grelha, alguns exemplos apresentam os resultados pela teoria elástica, a partir de tabelas ou calculados por elementos finitos.

Em todos os exemplos observa-se uma boa aproximação dos resultados da Analogia de Grelha com as soluções elásticas, para os parâmetros de rigidez ajustados.

6.1 – EXEMPLO 1 - LAJE COM BORDO LIVRE

Lajes com bordos livres possuem soluções pela teoria da elasticidade e encontram-se tabeladas em diversas bibliografias. A solução por Analogia de Grelha também é possível neste tipo de laje como será mostrado no exemplo a seguir.

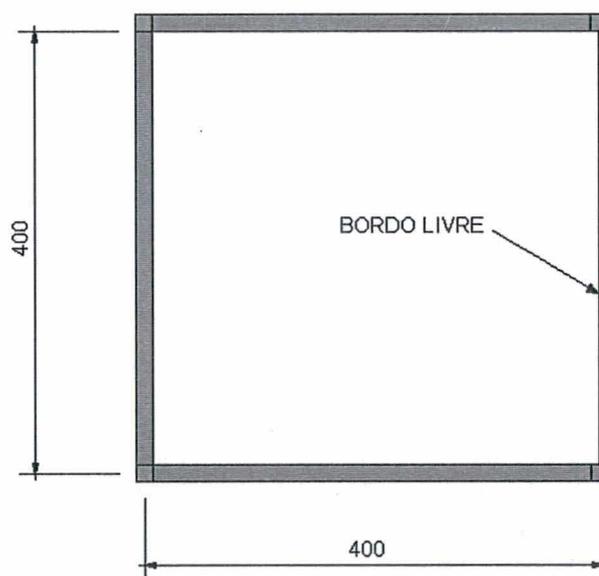


Figura 6.1 - Laje com bordo livre

A figura 6.2 apresenta a saída gráfica da deformada da laje com bordo livre e a figura 6.3 e 6.4 apresentam as saídas gráficas dos momentos de torção e dos momentos fletores.

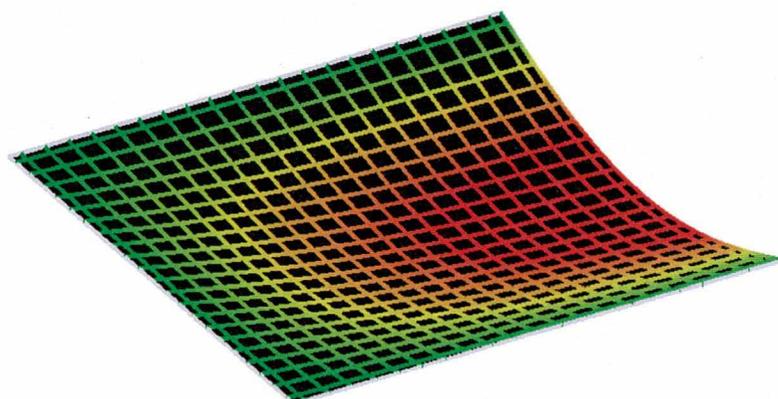


Figura 6.2 - Laje com bordo livre , deformada

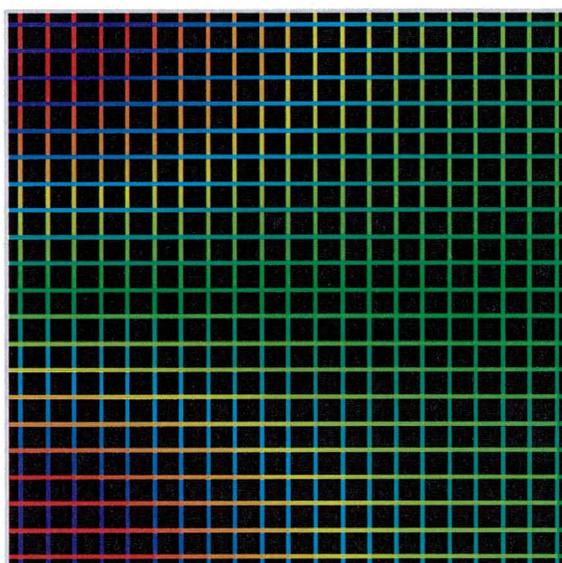


Figura 6.3 - Laje com bordo livre, momentos de torção

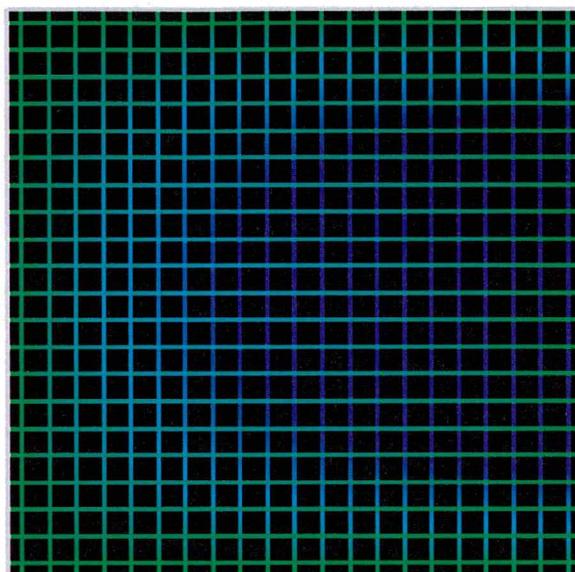


Figura 6.4 - Laje com bordo livre, momentos fletores M_x

Os resultados mostrados nas figuras 6.5 e 6.6 são as saídas gráficas dos momentos fletores e de torção da análise por elementos finitos. Para comparação, os resultados obtidos pelos dois procedimentos estão mostrados nas tabelas 6.1 e 6.2.

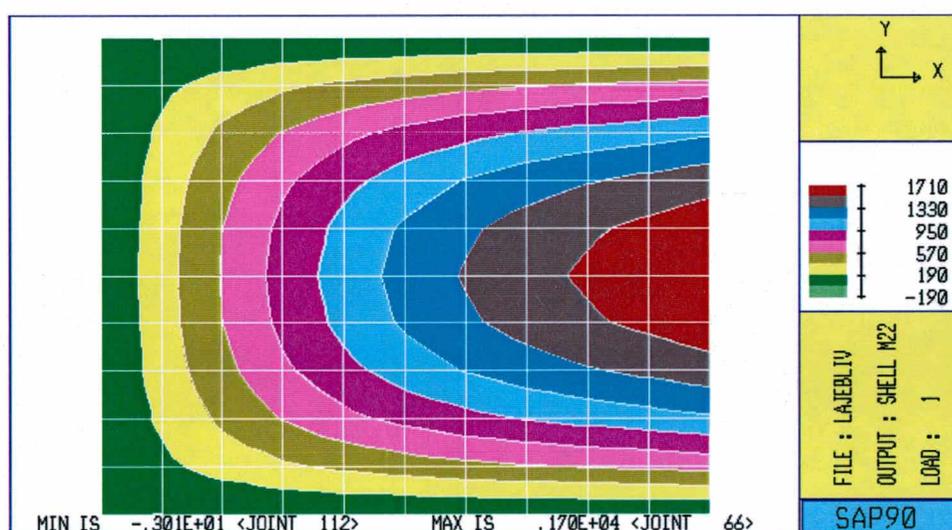


Figura 6.5 - Laje com bordo livre momentos M_{22}

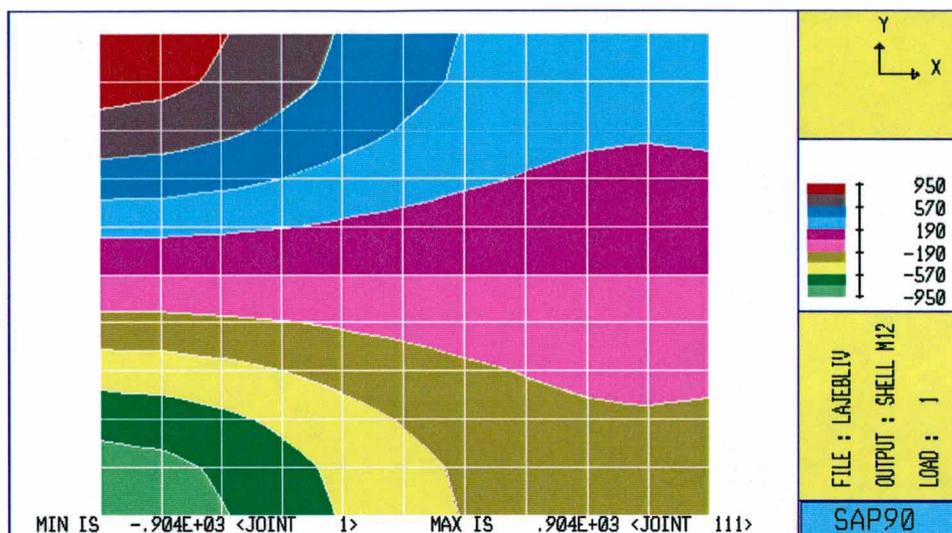


Figura 6.6 - Laje com bordo livre, momentos de torção.

Tabela 6.1 - Resultados da análise por Elementos Finitos de uma laje em L. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Malha	Mx	My	Mxy	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
40x40	17,00	4,67	9,04	1,61

Tabela 6.2 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje com bordo livre. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

$$G/Ec = 0,4 \quad Jp/Iyy = 2,5$$

Malha	Mx	My	Mxy	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
19x19	16,33	4,41	10,38	1,57

A solução deste tipo de laje é também encontrada em tabelas de diversas bibliografias, já que se trata de um caso possível de ser solucionado pela solução de Navier. Nas tabelas 6.3 e 6.4 são apresentados os resultados obtidos através das tabelas de

Bares, para coeficientes de Poisson 0 e 0,15. A tabela de Bares não apresenta valores para os momentos de torção.

Tabela 6.3 - Resultados da análise pela tabela de Bares de uma laje com bordo livre. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 100 kN/m^2 .

Momentos M_y no centro da laje

Coefficiente de Poisson = 0

Mx	My	Mxy	Flecha
KN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
1633	3,45	-	1,57

Tabela 6.4 - Resultados da análise pela tabela de Bares de uma laje com bordo livre. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 . Momentos M_y no centro da laje

Coefficiente de Poisson = 0.15

Mx	My	Mxy	Flecha
KN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
1772	4,88	-	1,66

6.2- EXEMPLO 2 - LAJES EM FORMATO DE L

Os métodos clássicos, como a teoria da elasticidade, têm muita dificuldade de resolver lajes com formatos especiais, como é o caso das lajes em formato de L. Esse tipo de laje é usado com certa frequência em pavimentos de edifícios e, antes do advento dos computadores, era calculado apenas através de processos simplificados. Com o uso de tabelas, o cálculo era feito separando-se o painel da laje em L em duas lajes, uma retangular com um bordo livre, com uma carga linear aplicada neste bordo, proveniente da reação da outra laje também retangular, considerada como apoiada em todo o contorno. HAHN (1972), apresenta a solução do um exemplo prático de uma laje com uma abertura

para o vão de uma escada, no qual a laje em L é tratada como duas lajes em separado. Este processo simplificado tem o inconveniente de desconsiderar a deformação desta parte da laje que se considerava apoiada no bordo livre. O método das faixas também apresenta uma solução para este tipo de laje usando faixas rígidas (ou *strong bands*).

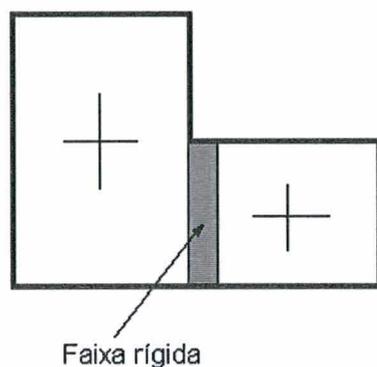


Figura 6.7 - Laje em L pelo método das faixas de Hillerborg

O exemplo que será apresentado a seguir, mostrou que é possível solucionar este tipo de laje através da Analogia de Grelha. Os resultados de deformações e esforços são apresentados em alguns pontos característicos para comparação com o mesmo exemplo analisado pelo método dos elementos finitos.

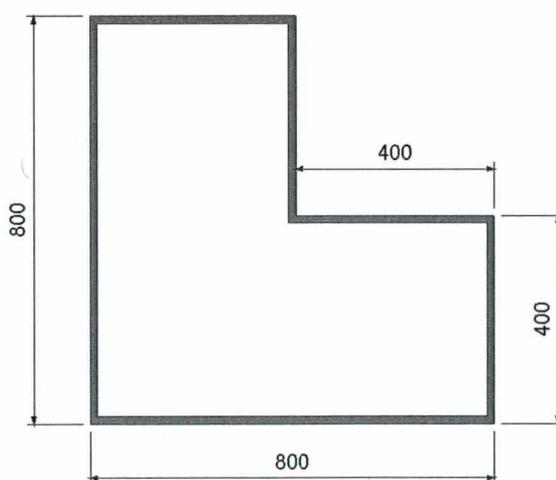


Figura 6.8 - Laje em L

A análise foi feita com uma laje em L com as dimensões mostradas na figura 6.8, considerada simplesmente apoiada, em todo o contorno, em apoios rígidos. No modelo de grelha este apoio foi simulado com uma viga de grande altura, praticamente indeformável, apoiada em pilares. No modelo em elementos finitos, para obter a mesma condição de apoio, considera-se os nós do contorno como vínculos indesejáveis, permitindo-se apenas o giro.

A figura 6.9 apresenta a saída gráfica com a laje em L deformada. Os valores foram ampliados em 30 vezes para que se possa visualizar melhor o campo de deslocamentos. É possível observar, nesta figura, que o deslocamento máximo ocorre na diagonal entre o canto esquerdo inferior e o canto de 270° . O valor deste deslocamento é de 1,64 cm. O valor obtido pela análise em elementos finitos é de 1,47 cm, apresentando uma diferença de 11,5 %.

Esta laje foi analisada em Analogia de Grelha com $G_c=0,4E_c$ e com uma relação da inércia polar $J_p = 2,5 I_y$.

Como mostrado na tabela 6.1, os demais resultados também apresentaram uma boa aproximação com os valores obtidos pela análise em elementos finitos.

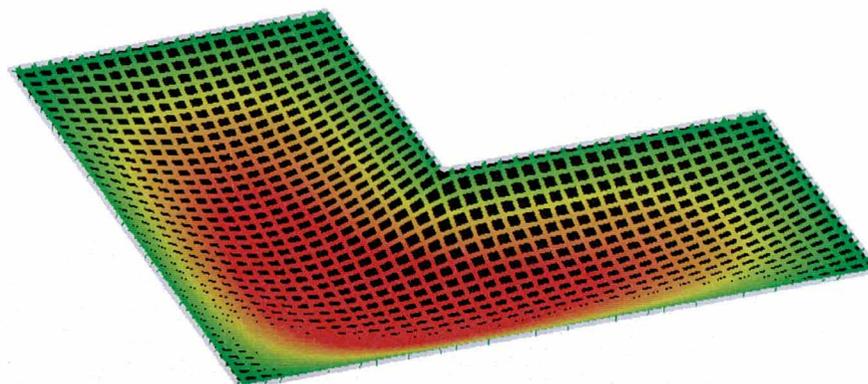


Figura 6.9 - Deformada da laje cogumelo por Analogia de Grelha

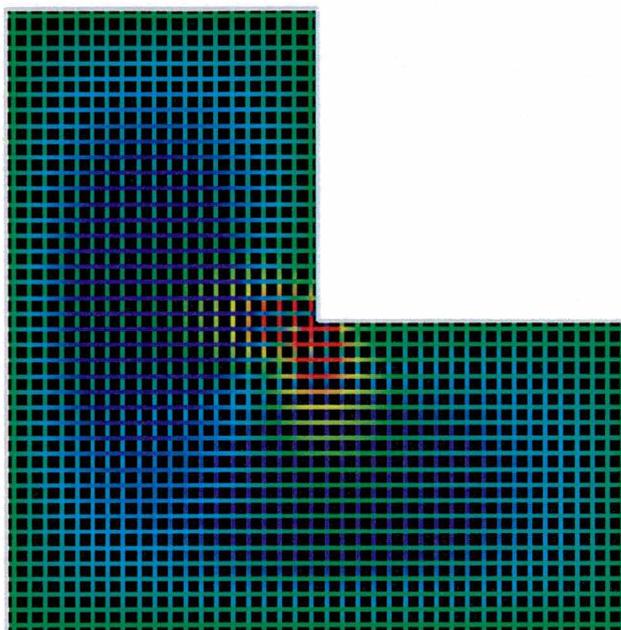


Figura 6.10 - Momentos fletores da laje cogumelo por Analogia de Grelha

Nas saídas gráficas das figuras 6.10, por Analogia de Grelha, e 6.11, por elementos finitos, onde são mostradas as distribuições de momentos fletores, observa-se uma grande semelhança na distribuição dos esforços. Os momentos fletores positivos comportam-se como se a região esquerda da laje em L, que forma um retângulo de 8x4 m, fosse uma laje retangular simplesmente apoiada em todo o contorno e também no trecho da região que forma uma laje quadrada de 4x4 m com um dos bordos livres. Os momentos fletores de uma laje retangular de 8 x 4 m calculada com os mesmos parâmetros apresentou momentos $M_x = 15,55 \text{ kN.m/m}$ e $M_y = 5,08 \text{ kN.m/m}$. O valor M_x é praticamente o mesmo obtido para a laje em L, ou seja, $15,34 \text{ kN.m/m}$. Isso mostra que o processo simplificado descrito anteriormente, separando a laje em L em duas lajes, uma retangular simplesmente apoiada e outra retangular com bordo livre, levava a resultados satisfatórios para fins práticos.

Neste tipo de laje, observa-se, nos dois modelos, uma concentração de esforços, especificamente uma região com momentos fletores negativos bastante altos, no canto de 270° . Nas lajes reais de concreto armado, esta forte concentração de esforços resulta em

uma redistribuição de momentos para toda a laje, se essas regiões não tiverem armaduras suficientes para absorvê-los. No entanto, é necessário que todas as seções tenham ductilidade suficiente para que essa redistribuição ocorra.

Para contornar esse problema da análise por Analogia de Grelha, pode-se dizer que é possível desenvolver procedimentos não lineares e elasto-plásticos em novos estudos desenvolvidos sobre esse tema.

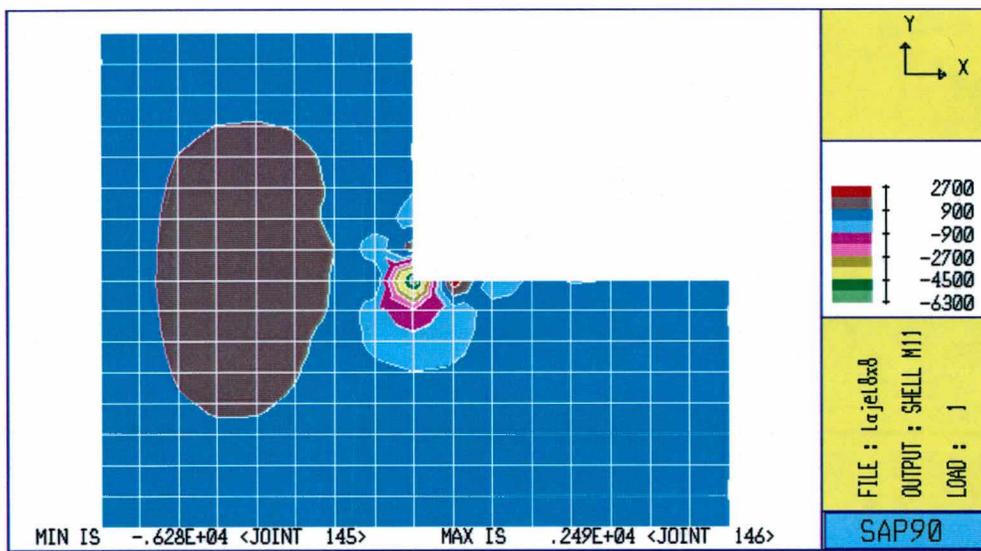


Figura 6.11 - Momentos fletores da laje em L por Analogia de Grelha

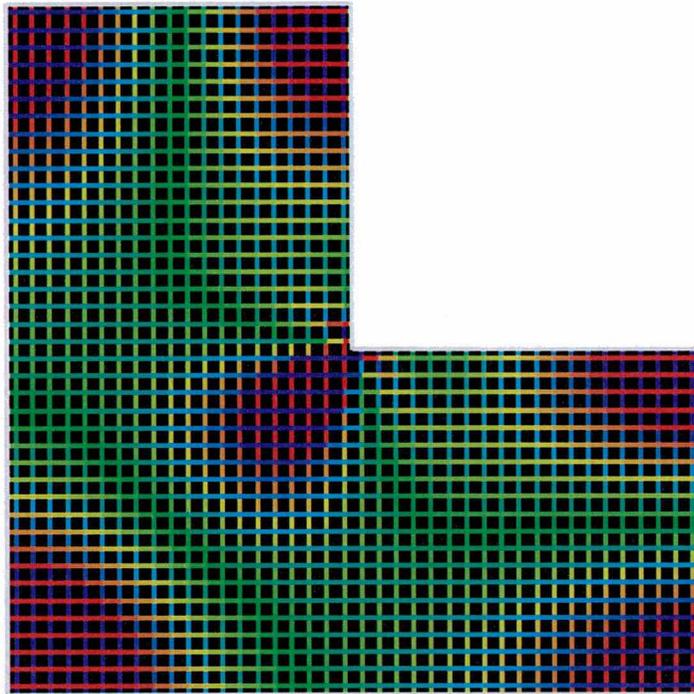


Figura 6.12 - Momentos fletores da laje em L por Analogia de Grelha

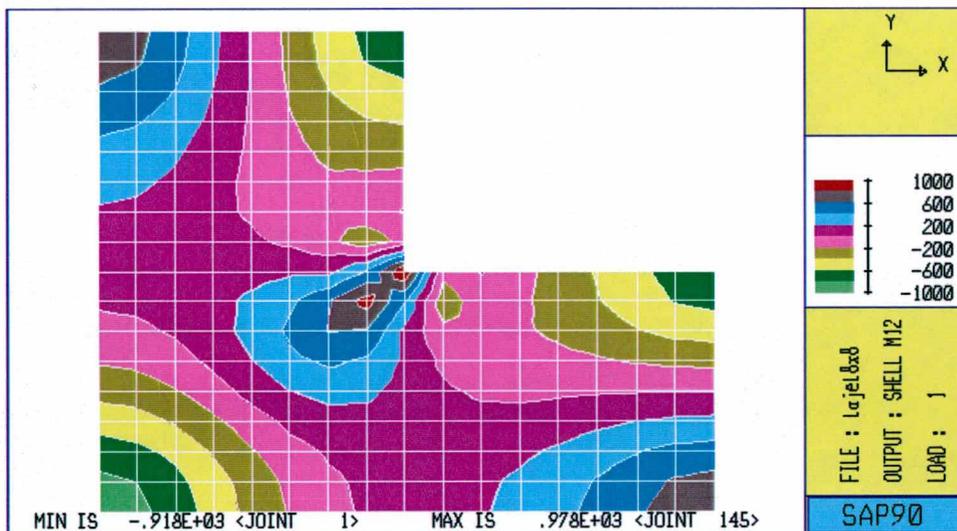


Figura 6.13 - Momentos de torção da laje em L por elementos finitos.

Para comparação de resultados, foram tomados alguns valores significativos dos momentos fletores, de torção e das flechas.

As flechas apresentadas são os valores máximos para a laje. O momento fletor positivo M_x é o valor máximo no vão da laje indicado pela região azul escuro na Analogia de Grelha e na região cinza escuro em elementos finitos. Os momentos de torção foram tomados no canto esquerdo superior.

Tabela 6.5 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje em L. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

$$G/E_c = 0,4 \quad J_p/I_{yy} = 2,5$$

Malha	M_x	M_{canto}	M_{xy}	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
10x10	14,76	-123,62	9,74	1,56
20x20	15,34	-70,77	9,85	1,64
40x40	16,35	-38,85	9,84	1,76
60x60	17,39	-18,35	9,90	1,81

Os resultados da tabela 6.5 mostram que existe uma influência significativa da malha no valor dos momentos no canto em 270° , no modelo calculado por Analogia de Grelha.

Tabela 6.6 - Resultados da análise por Elementos Finitos de uma laje em L. $h=10$ cm, carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 .

Malha	M_x	M_{canto}	M_{xy}	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
50x50	14,70	-62,80	9,78	1.47

6.3 – EXEMPLO 3 - LAJE COM CARGA LINEAR

A carga linear ocorre, geralmente, quando as paredes apoiam-se diretamente sobre a laje. Como exemplo, a laje quadrada mostrada na figura 6.14 será analisada por Analogia de Grelha e pelo método dos elementos finitos, com uma carga linear de 22,5 kN/m, aplicada no meio da laje.

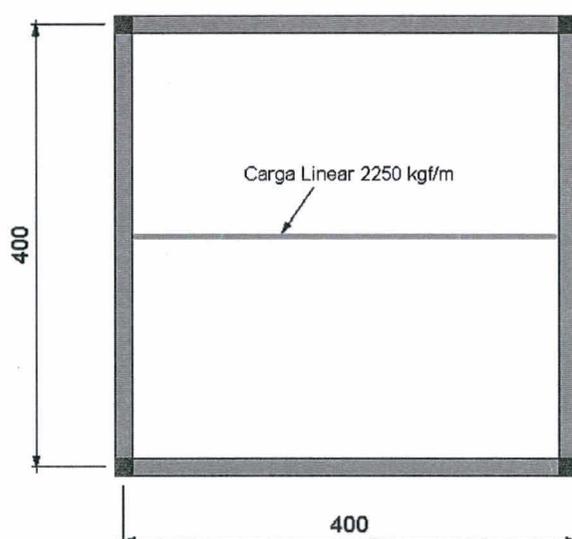


Figura 6.14 - Laje quadrada 4x4 m com carga linear

Na Analogia de Grelha, podemos simular este carregamento através de cargas concentradas nos nós da grelha mais próximos da carga linear. A carga concentrada é calculada a partir de um trecho de influência para cada nó, conforme mostrado na figura 6.15. O mesmo artifício é usado para aplicar as cargas lineares no modelo em elementos finitos.

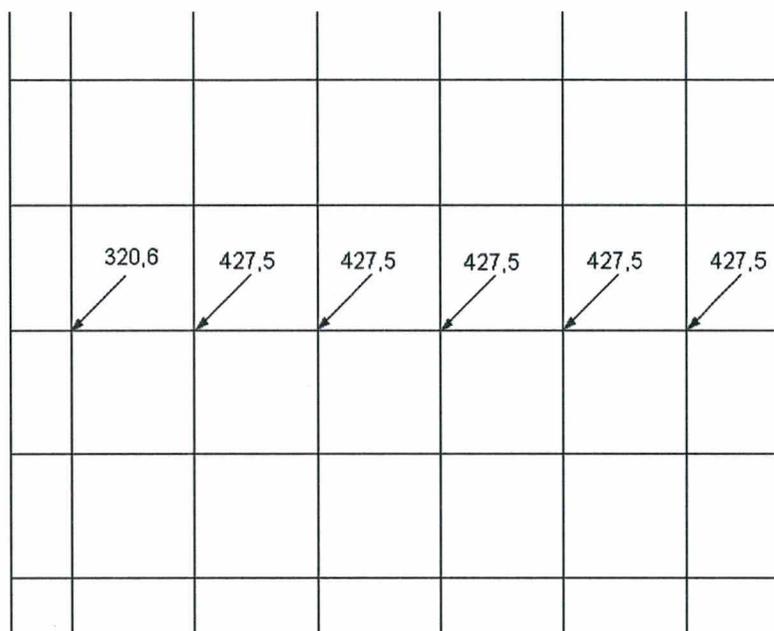


Figura 6.15 - Cargas concentradas aplicadas nos nós da grelha.

Nas figura 6.16 e 6.17, são apresentadas as saídas gráficas dos momentos fletores nas direções M11 e M22 da análise por elementos finitos. Observa-se a configuração típica da distribuição de isomomentos, onde os momentos M22, que atuam na direção perpendicular à carga linear, apresentam valores mais elevados, com um valor máximo de 10,90 kN.m/m. O valor máximo obtido pela Analogia de Grelha para os momentos fletores nessa mesma direção é de 9,89 kN.m/m. Pode-se observar que a configuração da distribuição de momentos nessa direção é muito semelhante ao método dos elementos finitos.

Na tabela 6.7, apresentam-se os resultados da análise pelos dois procedimentos. Pode-se notar que os valores dos momentos e do deslocamento máximo são muito próximos.

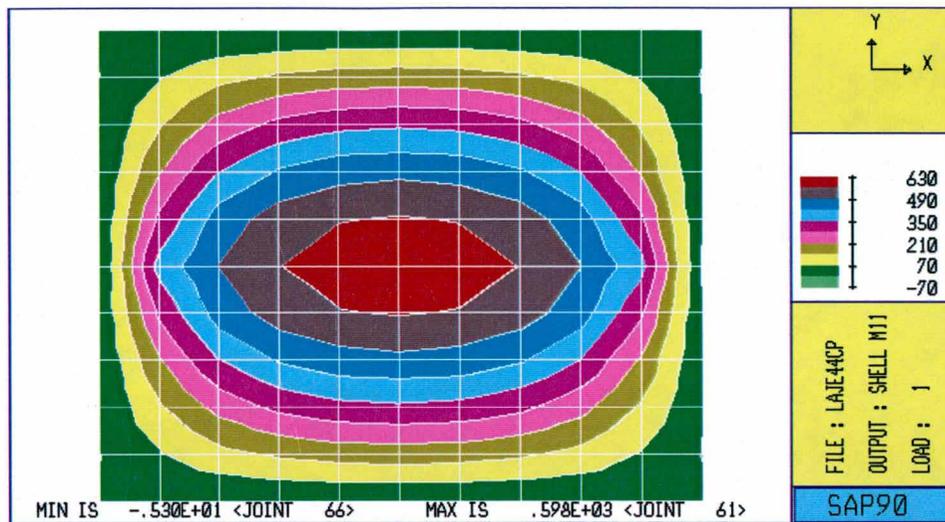


Figura 6.16 - Momentos fletores M11 laje com carga linear

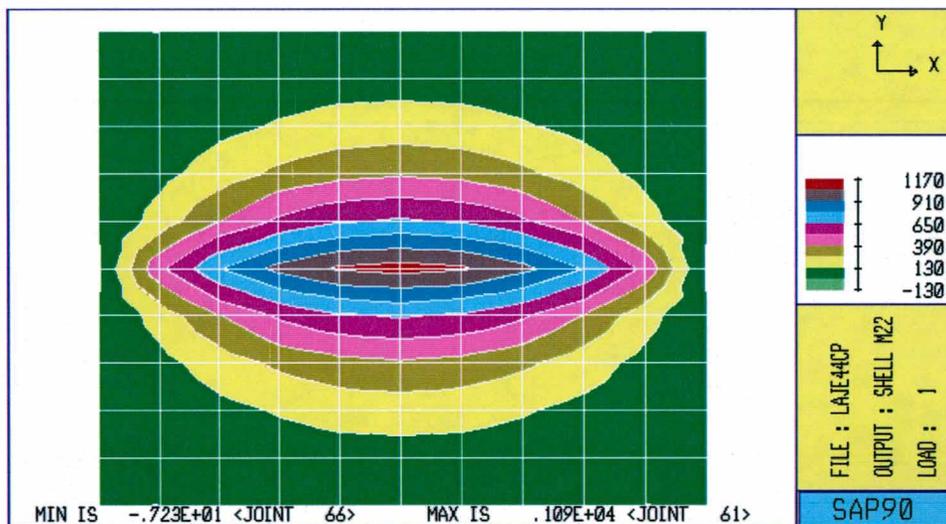


Figura 6.17 - Momentos fletores M11 laje com carga linear

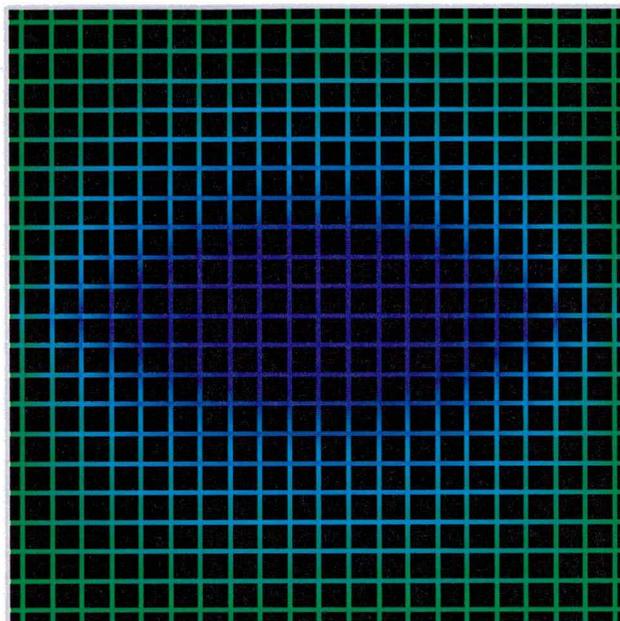


Figura 6.18 - Momentos fletores M_x laje com carga linear

Tabela 6.7 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje com carga linear de $22,50 \text{ kN/m}$. $h=10 \text{ cm}$,

$$G/E_c = 0,4 \quad J_p/I_{yy} = 2,5$$

Malha	M_x	M_y	M_{xy}	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
19x19	5,42	9,89	5,32	0,56

Tabela 6.8 - Resultados da análise por Elementos Finitos de uma laje com carga linear de $22,50 \text{ kN/m}$. $h=10 \text{ cm}$ - Coeficiente de Poisson = 0

Malha	M_x	M_y	M_{xy}	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	cm
40x40	5,98	10,90	5,85	0,62

6.4 – EXEMPLO 4 – LAJE RETANGULAR COM FURO

Para mostrar a versatilidade do procedimento de análise de lajes por Analogia de Grelha será analisado o caso de laje com furo. Nesse exemplo, e nos outros que serão apresentados nesse item, não será feita nenhuma comparação com outros tipos de análise. Esses próximos exemplos têm como objetivo mostrar diversos casos de projeto que podem ser analisados por este procedimento.

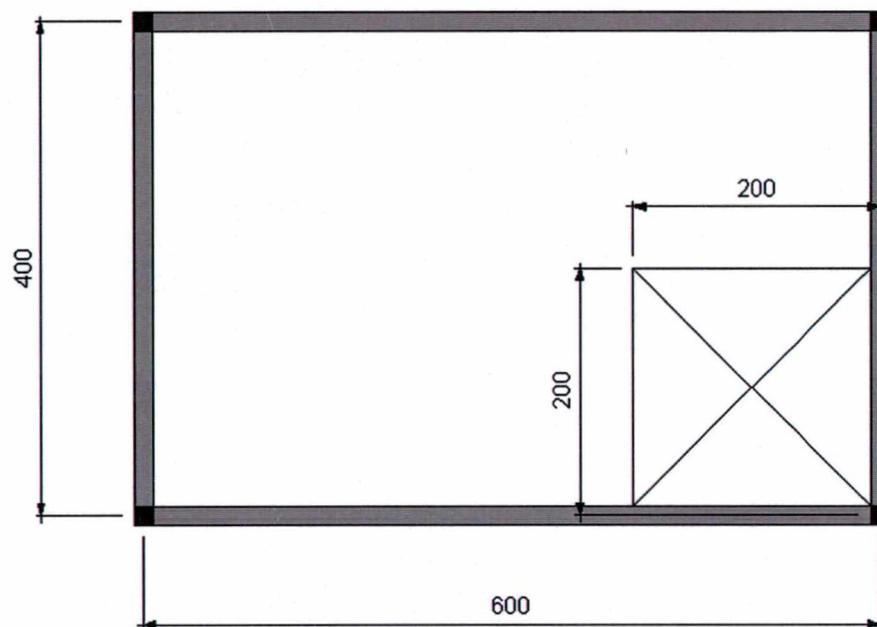


Figura 6.19 - Laje retangular de 4x6m com furo de 2x2m

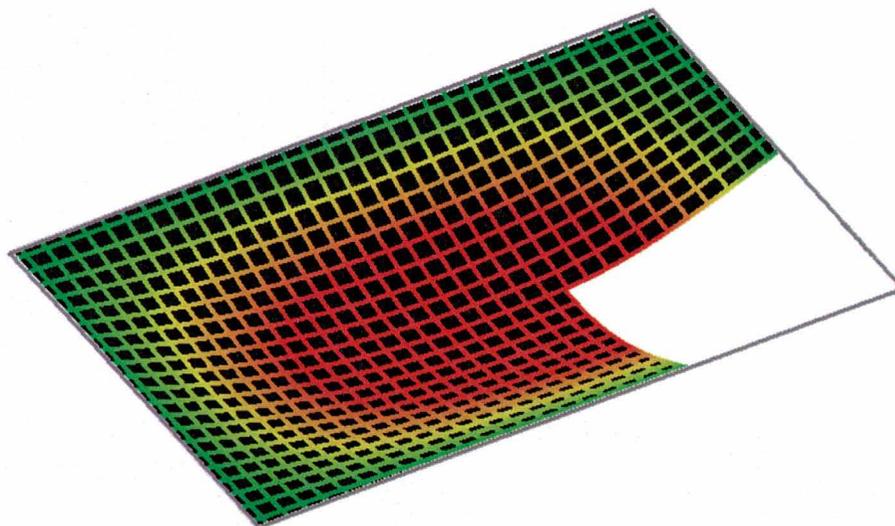


Figura 6.20 - Deformada da laje com furo

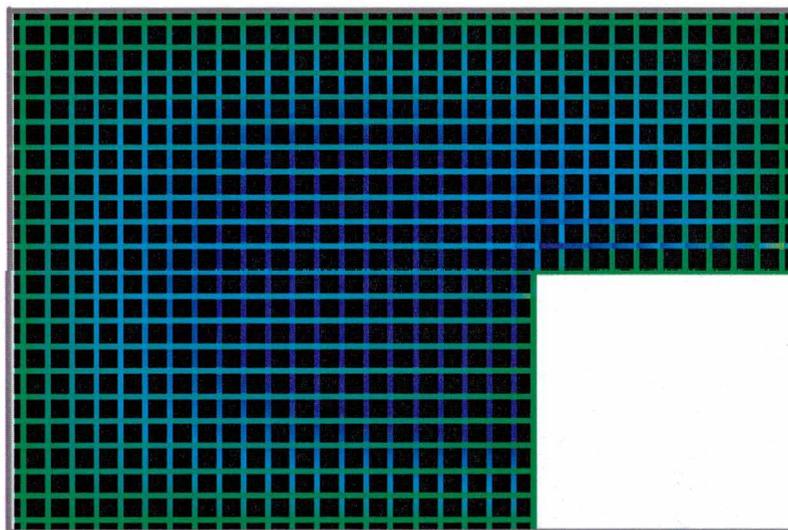


Figura 6.21 - Momentos fletores da laje com furo

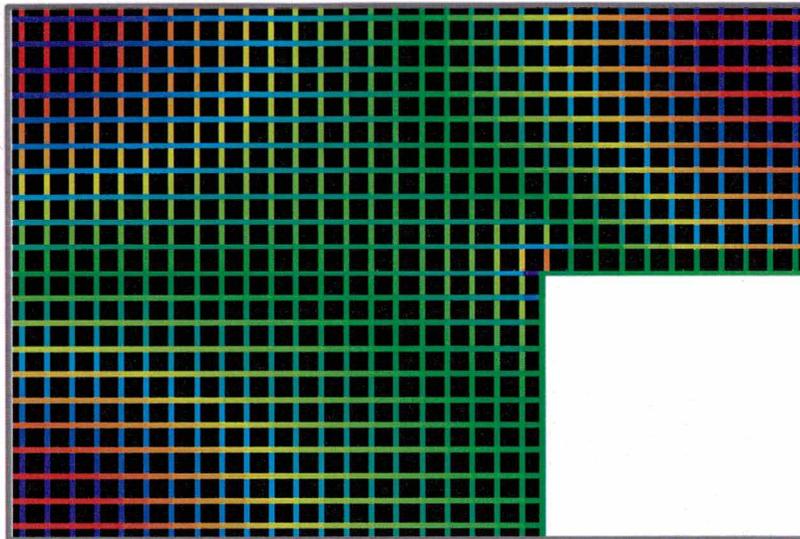


Figura 6.22 - Momentos de torção da laje com furo

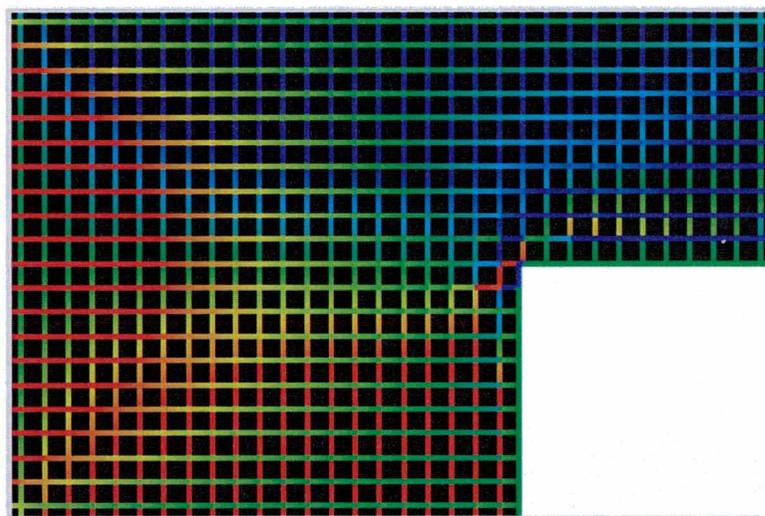


Figura 6.23 - Esforços cortantes na laje com furo

Na figura 6.23 é possível notar a definição da área triangular e trapezoidal na distribuição dos esforços cortantes, semelhante ao critério de distribuição de cargas por áreas tributárias.

Tabela 6.9 - Resultados da análise por Analogia de Grelha de uma laje com furo com carga distribuída de 10 kN/m^2 . $h=10 \text{ cm}$,

$$G/Ec = 0,4 \quad Jp/Iyy = 2,5$$

Malha	Mx	Mxmax	My	Mymax	Mxy	Flecha
cm	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	KN.m/m	cm
19x19	12,46	18,71	3,64	9,25	10,53	-1,27

6.6 – EXEMPLO 5 - PAVIMENTO DE EDIFÍCIO EM LAJE COGUMELO

Este exemplo apresenta as saídas gráficas da estrutura deformada e das regiões de isomomentos fletores e momentos de torção de um pavimento em laje cogumelo.

Trata-se de um edifício que realmente foi construído. Os pavimentos foram projetados em laje cogumelo, com vigas apenas em duas laterais, conforme mostrado na figura 6.24. A análise destes pavimentos foi feita por analogia de grelha e por elementos finitos. Os resultados obtidos por estas duas análises apresentaram valores de esforços e deslocamentos muito próximos.

A figura 6.24 apresenta apenas dois pavimentos desse edifício para maior clareza. O edifício real possui mais pavimentos.

A figura 6.25 apresenta a estrutura do pavimento deformada. As regiões em vermelho são as que possuem os maiores deslocamentos.

A figura 6.26 mostra uma saída gráfica do pavimento com as regiões de mesmo momento fletor e a 6.27 a saída gráfica dos momentos de torção.

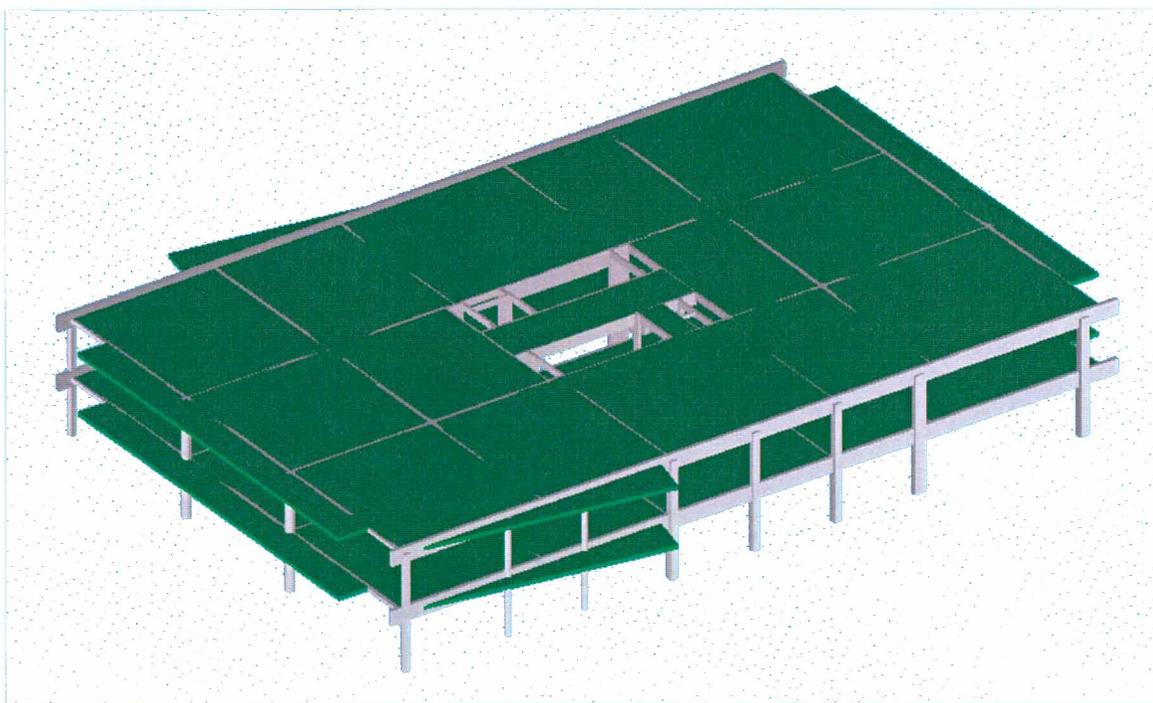


Figura 6.24 - Pavimento de um edifício em laje cogumelo

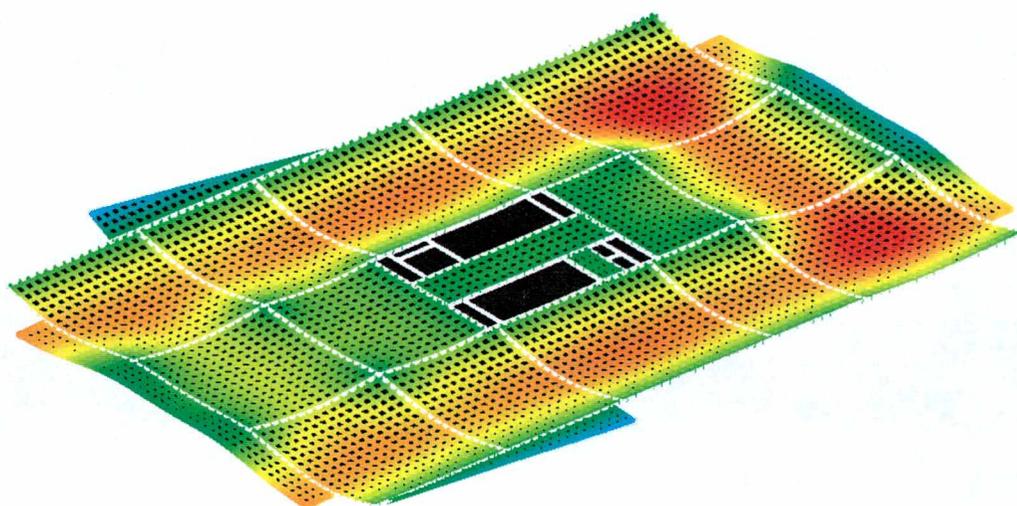


Figura 6.25 - Deformada do pavimento em laje cogumelo.

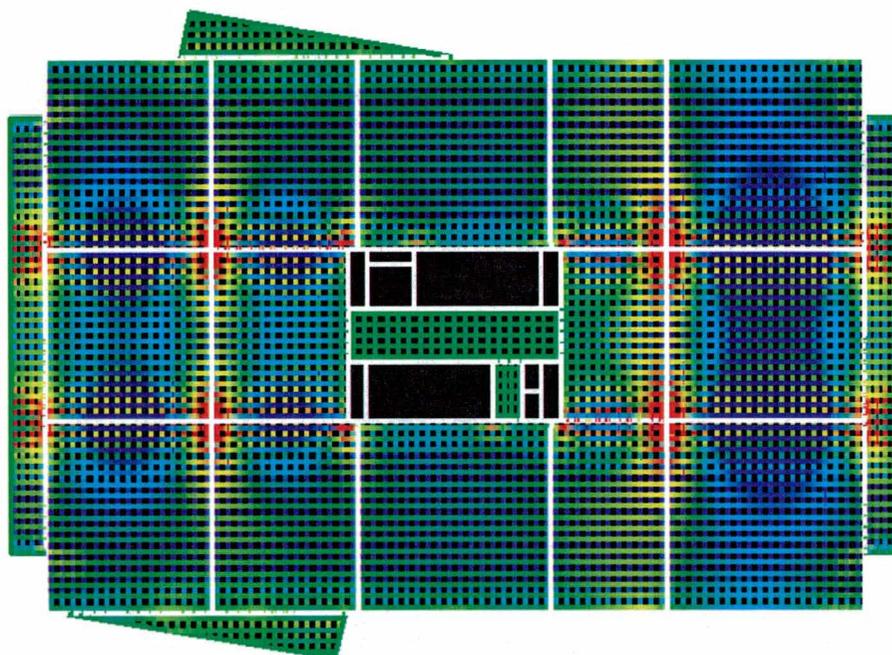


Figura 6.26 - Momentos fletores da laje cogumelo

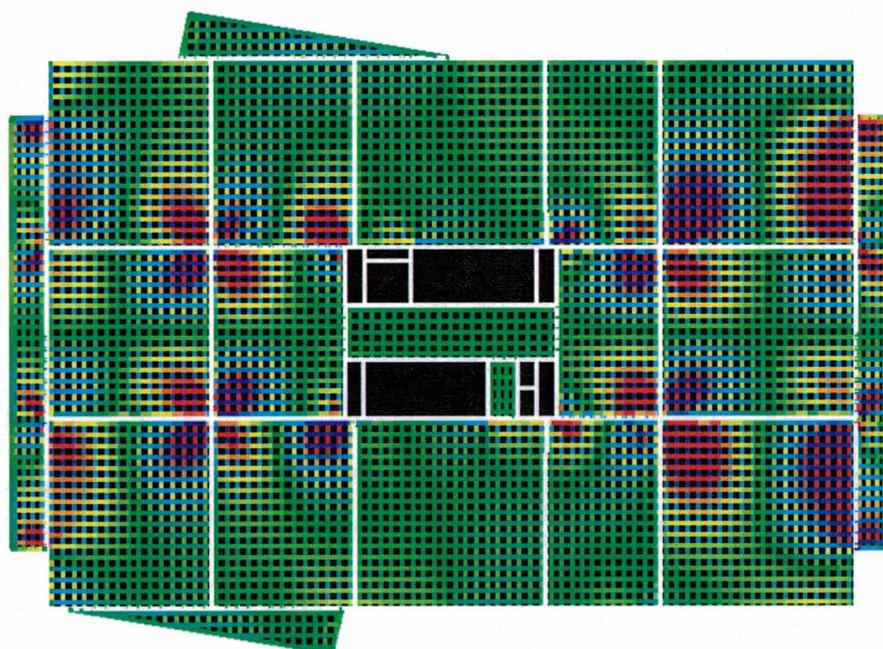


Figura 6.27 - Momentos de torção da laje cogumelo

7- CONCLUSÕES

A Analogia de Grelha, como o próprio nome já diz é uma analogia. O dicionário Universal define analogia como: Lat. *analogia* < Gr. *analogia*, proporção, correspondência, relação de semelhança entre coisas diferentes. Neste caso a analogia é entre uma placa, ou mais especificamente uma laje de concreto armado e uma estrutura de barras em grelha. Apesar de serem duas estruturas diferentes, apresentam, em diversos aspectos comportamentos muito semelhantes. Nos diversos casos analisados nesse trabalho, a Analogia de Grelha apresentou resultados muito próximos dos obtidos pelas teorias clássicas elásticas, com os parâmetros de rigidez à torção da grelha e da malha ajustados para tal.

No caso de lajes quadradas e retangulares simplesmente apoiadas, com cargas uniformemente distribuídas ou cargas lineares, com a malha de grelha paralela aos lados, os resultados obtidos com um módulo de elasticidade transversal $G = 0,4.Ec$ e um momento de inércia polar de duas a duas vezes e meia o momento de inércia axial, a Analogia de Grelha apresentou resultados para os esforços e deslocamentos, que diferem muito pouco da teoria da elasticidade. Além disso, para essas lajes, os resultados praticamente independem da malha utilizada.

No caso de lajes quadradas e retangulares engastadas ou componentes de um painel de lajes contínuas, os momentos fletores no vão e os deslocamento também se mostraram pouco dependentes da malha com o momento de inércia proporcional ao momento de inércia axial. No entanto, os momentos nos engastes, no caso de lajes isoladas, e os momentos nos apoios, no caso de lajes em painéis contínuos, apresentaram uma variação com tendência aos valores da teoria da elasticidade para malhas mais finas.

Alterando-se a rigidez à torção, obtém-se outros valores para os esforços e deslocamentos, que mesmo diferentes da teoria da elasticidade, são resultados válidos sob o ponto de vista da análise estrutural pelo método da análise limite, pelo fato de obedecerem ao Teorema Estático da Análise Limite.

Pode-se concluir, portanto, que qualquer placa isolada solucionada por Analogia de Grelha é uma solução possível e a favor da segurança por apresentar resultados para os

esforços que equilibram o carregamento aplicado e portanto obedecem ao Teorema Estático. No entanto para que a solução final da laje seja uma solução válida, é necessário que as seções de concreto tenham suficiente ductilidade e sejam dimensionadas com armaduras para resistirem aos esforços obtidos pela análise.

Em certos casos, como por exemplo a laje em L estudada no exemplo de aplicação 6.1, a análise apresenta resultados de esforços muito elevados em uma região reduzida, o que também é obtido com a análise elástica pelo método dos elementos finitos. Nestes casos, o dimensionamento correto da laje deveria ser feito pela teoria da plasticidade, com consideração da plastificação das seções de concreto nesta região de esforços elevados, e uma redistribuição de esforços teria que ser considerada para toda a laje. De outro modo a laje teria que ser dimensionada com altura e armaduras adequadas para resistirem a estes esforços, que para valores muito elevados é impraticável.

Neste trabalho conclui-se que a Analogia de Grelha pode ser considerada como um aprimoramento do método das faixas de Hillerborg, por considerar a resistência e a rigidez a torção das faixas além é claro da compatibilidade dos deslocamentos dos pontos onde as faixas se cruzam, diferentemente do método de Hillerborg que considera as faixas independentes. Como no método de Hillerborg a validade do procedimento está assegurado pelos teoremas da Análise Limite.

Semelhante ao método de Hillerborg pode-se escolher a direção e a distribuição de cargas para as faixas. No entanto, como já foi dito, é importante que no caso de projeto a laje seja dimensionada e armada para resistir a distribuição de esforços calculada e ainda deve ser garantida a ductilidade em todas as seções.

No caso das lajes nervuradas, esse estudo demonstra que a Analogia de Grelha é um dos procedimentos mais adequados para a análise e projeto desse tipo de laje. A aplicação simples da teoria da elasticidade, calculando lajes nervuradas como lajes maciças, mesmo usando o recurso de espessura equivalente, pode levar a erros consideráveis na avaliação dos esforços e deslocamentos. Portanto, a não ser que se utilize modelos mais sofisticados em elementos finitos, combinados com elementos de barras, é mais recomendado utilizar-se um modelo em Analogia de Grelha, com os parâmetros de rigidez calculados com as seções em T das nervuras. Além disso, com o modelo de Analogia de Grelha o projetista

tem a possibilidade de adotar valores mais baixos do módulo de elasticidade transversal do que o recomendado pelas norma NBR-6118 ($G = 0,4.Ec$) e através disso, reduzir os momentos de torção, dimensionando a laje com momentos fletores mais altos, obtendo assim resultados mais conservadores e a favor da segurança.

Atualmente, vem crescendo muito a utilização de lajes pré-moldadas com vigotas treliçadas, devido a grande versatilidade, pois essa solução permite a execução de lajes com vãos maiores do que as lajes pré-moldadas convencionais. Essas lajes vem sendo utilizadas também com nervuras perpendiculares às vigotas, formando assim lajes nervuradas armadas em duas direções, o que melhora sensivelmente o desempenho dessas lajes em relação a armadas em uma só direção.

O mesmo procedimento, de reduzir a rigidez à torção para obter momentos de torção mais baixos, também pode ser utilizado para outros casos de lajes. No caso de lajes maciças, esse recurso pode ser interessante para reduzir os momentos de torção e tirar proveito da colaboração do concreto na resistência à torção da laje.

8- RECOMENDAÇÕES

Com base nos resultados deste trabalho recomenda-se, por enquanto, a utilização da Analogia de Grelha em projeto de lajes de concreto armado, maciças ou nervuradas, retangulares, isoladas ou contínuas ou dentro dos casos estudados nesse trabalho e com cargas estáticas. No caso de lajes planas ou lajes cogumelo não deve ser esquecida a verificação e se necessário, o dimensionamento das armaduras de punção. No caso de lajes com bordos livres e com aberturas, deve-se dimensionar a armadura de reforço nos bordos.

Recomenda-se estudos adicionais para os casos de lajes com formatos diferentes dos estudados neste trabalho, principalmente aqueles que resultem em uma malha de grelha com barras inclinadas. Pois não foram feitos neste trabalho nenhum estudo com o caso de lajes onde as barras são inclinadas em relação aos lados, como é o caso de lajes triangulares, trapezoidais e outros casos semelhantes.

Estudos posteriores com análises não lineares e análises elasto-plásticas poderão ser feitos para obter-se modelos mais avançados para o cálculo de lajes com redistribuição dos esforços, com a consideração da não linearidade física e dos efeitos reológicos do concreto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1- ALTOQI INFORMÁTICA. AltoQi Eberick Master – Manual de Referência. Florianópolis, SC: 1998.
- 2- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Armado. NBR 6118. Rio de Janeiro, RJ : 1978
- 3- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – Cálculo e Execução de Lajes Mistas. NBR 6119. Rio de Janeiro, RJ : 1980
- 4- BAKER, Jonh e HEYMAN, Jacques – Plastic Design of Frames – Cambridge University Press, Great Britain, 1969
- 5- BARES, Richard – “Tablas para el calculo de placas y vigas pared “, Editorial Gustavo Gili, S.A Barcelona, 1970.
- 6- BARES, Richard – “Tables for the Analysis os Plates, Slabs and Diaphragms Based on Elastic Theory”, Bauverlag, Gmbh, Wiesbaden, 1971 (German-English Edition)
- 7- COOK, Robert D., MALKUS, David S. e PLESHA, Michael E. – Concepts and Applications of Finite Element Analysis - Editora John Wiley & Sons- New York
- 8- CORDOVIL, F. – Notas de Aula “Estudos Avançados de Concreto Armado,” do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFSC, Florianópolis, SC
- 9- CUNHA, A. J. P. e SOUZA, V. C. M. – “Lajes em Concreto Armado e Protendido”, Universidade Federal Fluminense, RJ, 1994
- 10- HAHN, J – “Vigas continuas, porticos, placas y vigas flotantes sobre lecho elastico”, Editorial Gustavo Gili, S.A Barcelona, 1972
- 11- JOHANSEN, K.W. – Linhas de Ruptura – Traduzido e Adaptado por Mason, J.- Teoria e Prática – Ao Livro Técnico S.^a, Rio de Janeiro, 1962,
- 12- KENNETH, Leet – Reinforced Concrete Design – Editora McGraw-Hill International Editions, USA, 1991
- 13- LAURSEN, H. I. – Structural Analysis – McGraw-Hill Book Company , USA, 1988
- 14- LORIGGIO, D. – Notas de Aula “Placas e Lajes em Concreto Armado” do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFSC, Florianópolis, SC

- 15- LORIGGIO, D. – Notas de Aula “Estruturas em Regime Elasto –Plástico” do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFSC, Florianópolis, SC
- 16- LEONHARDT, F e MONNIG, E – Construções de Concreto Vols 1 e 5 – Editora Livraria Interciência, Rio de Janeiro, 1977
- 17- MATHSOFT – Mathcad 8 – Reference Manual, Mathsoft, Inc, Cambridge, USA, 1998
- 18- MONTOYA, Jimenez ; Meseguer, A.Garcia e Cabre,F.Moran – “Hormigon Armado”, Editorial Gustavo Gili, S.A Barcelona, 1973
- 19- PARK, R. e GAMBLE, W.L. – Reinforced Concrete Slabs – Editora John Wiley & Sons- New York, USA, 1980
- 20- PARK, R. e PAULAY, T. . – Reinforced Concrete Structures – Editora John Wiley & Sons- New York, USA, 1975
- 21- POLILLO, Adolfo – “Dimensionamento de Concreto Armado Vol II”, Editora Científica, Rio de Janeiro, 1977.
- 22- PERSEKIAN, G. A. CORREA, M. R. e RAMALHO , M. A. – “ Determinação de Armaduras em Lajes de Concreto Armado Considerando a Resistência do Concreto ao Momento Volvente “, 40^o Congresso Brasileiro do Concreto, Rio de Janeiro, RJ, 1998.
- 23- ROCHA, Aderson Moreira – “Novo Curso Prático de Concreto Armado Vol I “, Editora Científica, Rio de Janeiro, 1981
- 24- SZILARD, Rudolph – “Theory and Analysis of Plates”, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey,1974
- 25- SUSSEKIND, J.C. – Curso de Concreto Armado Vols. 1 e 2 – Editora Globo, São Paulo , 1979
- 26- TIMOSHENKO, S.P. e Woinowsky-Krieger, S – “Theory of Plates and Shells”, McGraw-Hill Kogakusha,Ltda, 1959
- 27- UTKU, S., NORRIS, C. H. WILBUR, J.B. – Elementary Structural Analysis, McGraw-Hill, Inc. USA, 1991

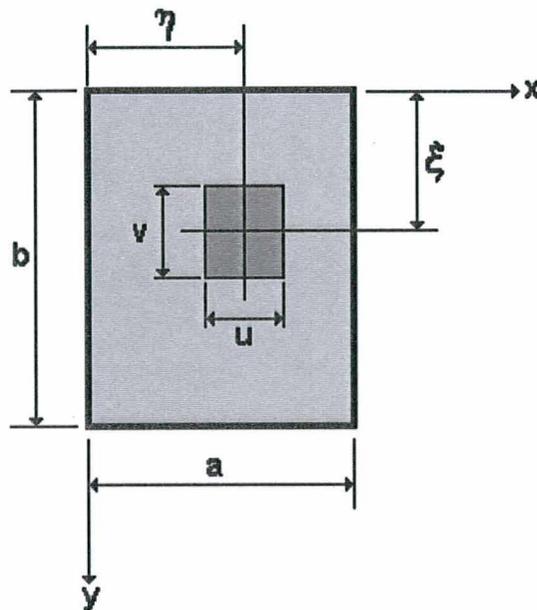
28- WILSON, E. L. e HABIBULLAH, A. – SAP90 – A Series of Computer Programs for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures, Users Manual – Computers&Structures Inc, Berkeley, California, 1988

29- WIPPEL, H e Stiglat, K – “Platten”, Ed. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn Berlin/Munchen, 1966.

ANEXO 1

O MathCad, Versão 8, é um *software* capaz de programar procedimentos e fórmulas matemáticas em forma de texto. Através da programação de um caso genérico, é possível obter-se resultados de casos particulares, apenas através da entrada de dados específicos. Para obter-se os resultados de diversos casos de lajes retangulares analisados nesse trabalho, foi programado com o MathCad 8 a solução por séries trigonométricas, de uma placa retangular, simplesmente apoiada em todo o contorno, com uma carga uniformemente distribuída em uma área retangular, de lados v e u , em uma posição qualquer com as coordenadas η e ξ em relação ao centro do retângulo. Desse modo um número bastante grande de casos de lajes retangulares, podem ser calculadas com diversos casos de carregamento. Para obter-se os resultados de uma laje submetida a uma carga de parede, ou seja uma carga linear, basta usar uma carga retangular com as dimensões da parede em planta. Para o caso de uma carga concentrada, pode-se utilizar um retângulo com as dimensões v e u bem pequenas em relação aos lados a e b da placa.

LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA



Dados da placa:

Dimensões $a := 4 \text{ m}$ $b := 4 \text{ m}$

Posição

 $\xi := 0.5 \cdot a$

da carga

 $\eta := 0.5 \cdot b$

Dimensão

 $u := 1 \cdot a$

da carga

 $v := 1 \cdot b$

Espessura da placa (m) :

 $h := 0.10 \text{ m}$ Carga distribuída na área u, v $q := 1000 \text{ kgf/m}^2$ Carga P total na área u, v : $P := q \cdot u \cdot v \quad P = 16000 \text{ kgf}$

Parâmetros

Coeficiente de Poisson:

 $\nu := 0.2$

Módulo de elasticidade longitudinal :

 $E := 2100000000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$

Rigidez da placa:

 $D := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$

Função Pmn:

$$p0(m, n) := \frac{16 \cdot P}{\pi^2 \cdot m \cdot n \cdot u \cdot v} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot \xi}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot \eta}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot u}{2 \cdot a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot v}{2 \cdot b}\right)$$

Carga distribuída:

$$p(x, y, nTermos) := \left[\sum_{m=1}^{nTermos} \left(\sum_{n=1}^{nTermos} p0(m, n) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right) \right]$$

Superfície elástica:

$$w(x, y, nTermos) := \left[\sum_{m=1}^{nTermos} \left[\sum_{n=1}^{nTermos} \frac{p0(m, n)}{\pi^4 \cdot D \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right] \right]$$

$$100 \cdot w(2.5, 2.5, 10) = 0.019$$

Momentos fletores:

$$m_x(x, y, nTermos) := \sum_{m=1}^{nTermos} \sum_{n=1}^{nTermos} \frac{p0(m, n)}{\pi^4 \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \left[\left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + v \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

$$m_y(x, y, nTermos) := \sum_{m=1}^{nTermos} \sum_{n=1}^{nTermos} \frac{p0(m, n)}{\pi^4 \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \left[\left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 \cdot v + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

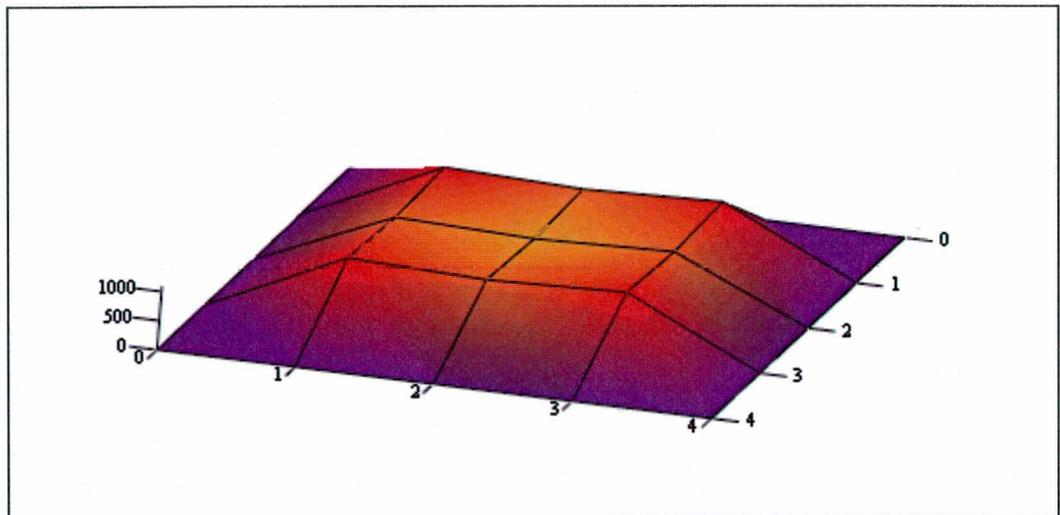
$$m_{xy}(x, y, nTermos) := \sum_{m=1}^{nTermos} \sum_{n=1}^{nTermos} \frac{p0(m, n)}{\pi^4 \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot (1 - v) \cdot \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \left(\cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right)$$

Gráfico da carga:

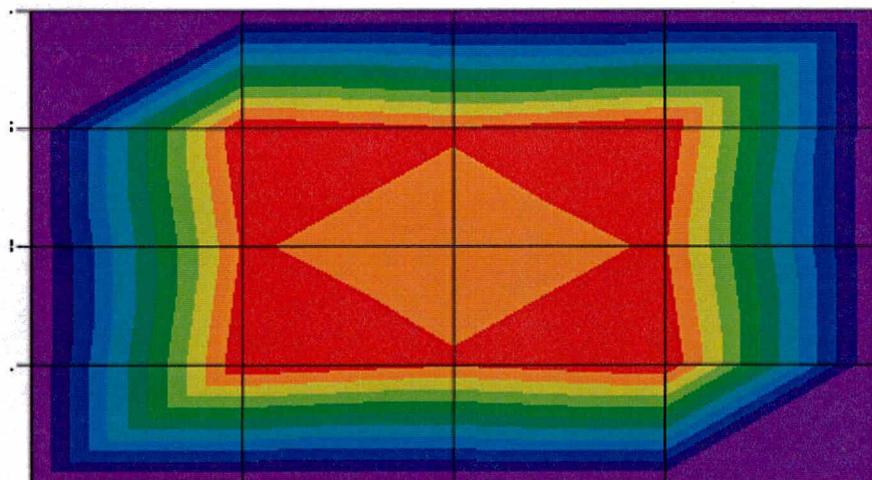
nTermos := 20

x := 0.. a y := 0.. b

carga_{x,y} := p(x, y, nTermos)



carga



carga

Superfície elástica:

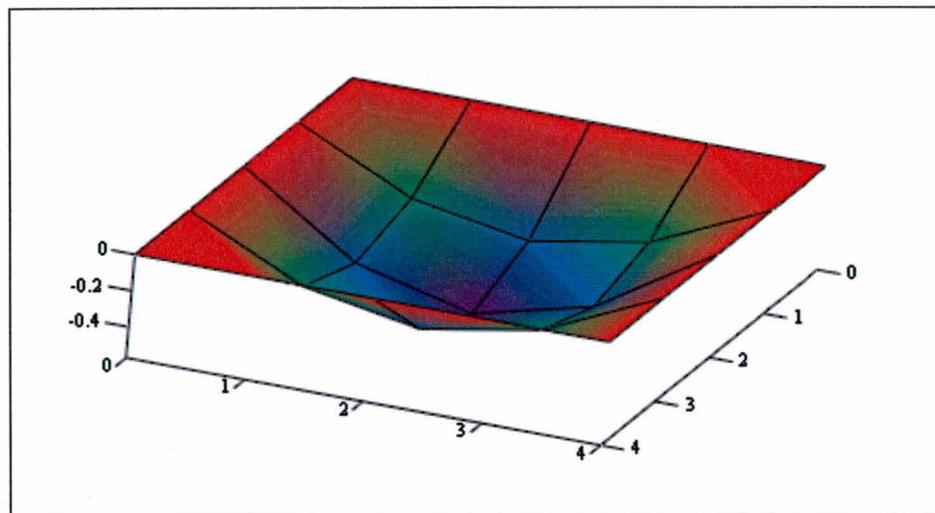
nTermos := 10

x := 0.. a y := 0.. b

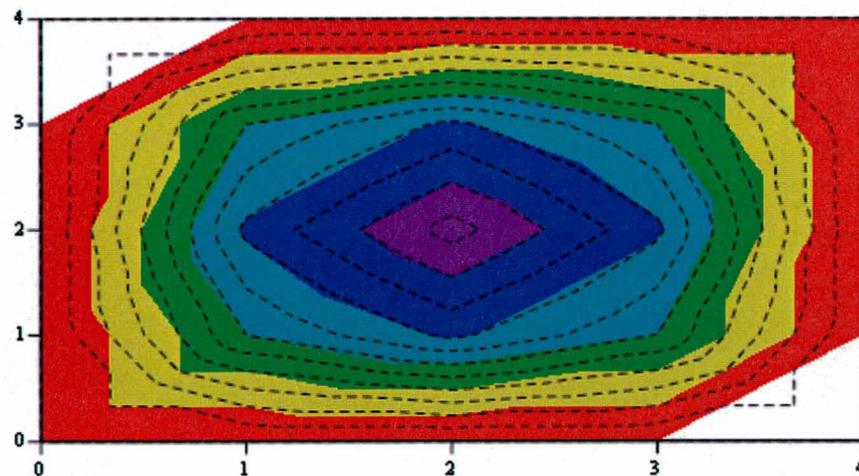
deformada_{x,y} := -w(x, y, nTermos) · 100

Flecha máxima:

deformada _{$\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$} = -0.5705



deformada



deformada

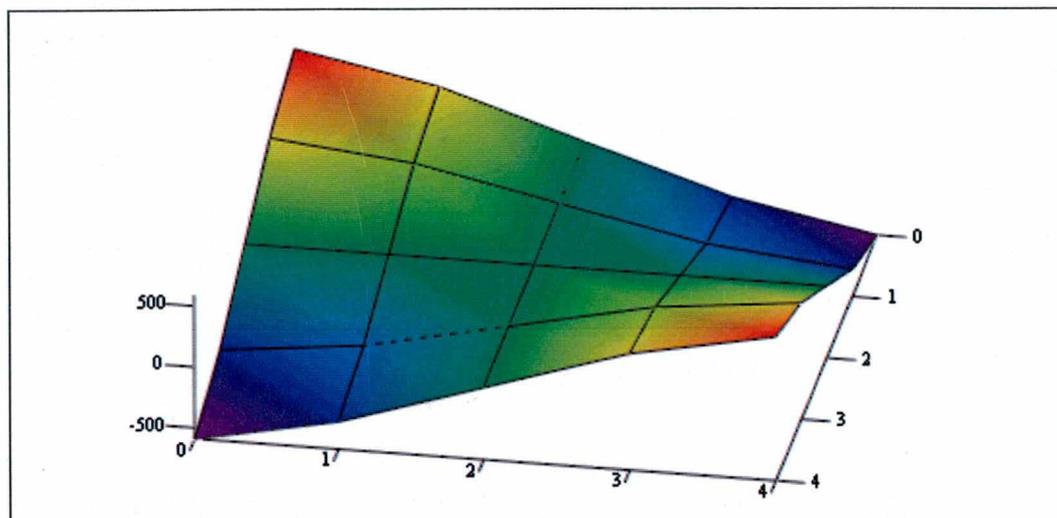
Momento Mxy:

nTermos := 10

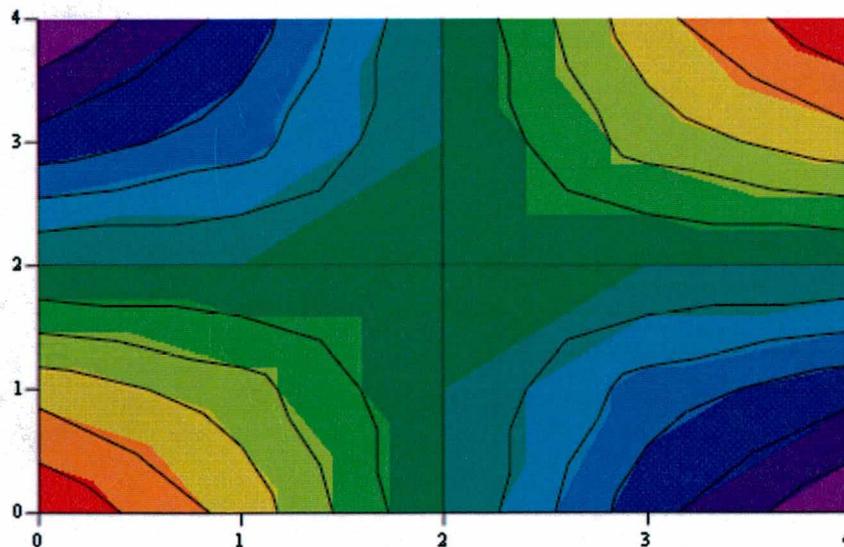
x := 0.. a y := 0.. b

momentoT_{x,y} := mxy(x, y, nTermos)

momentoT_{0,0} = 591



momentoT



momentoT

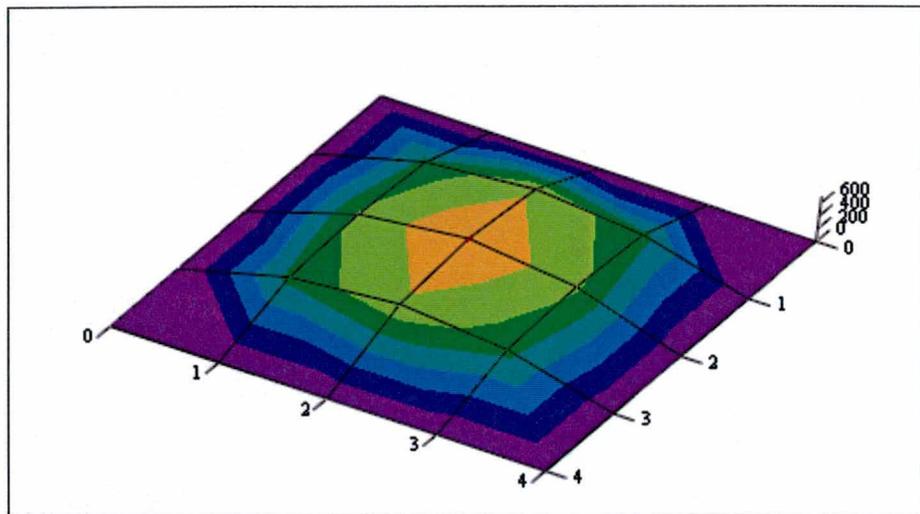
Momento Mx:

nTermos := 14

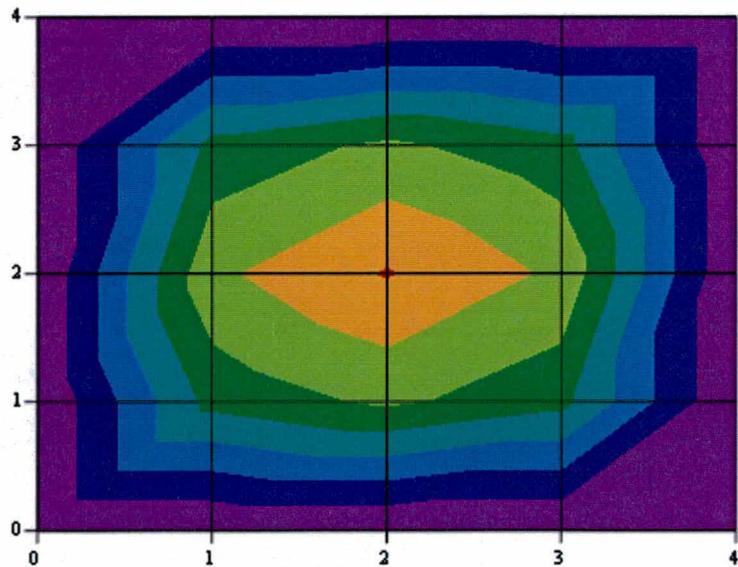
x := 0.. a y := 0.. b

momentoX_{x,y} := mx(x, y, nTermos)

$$\text{momentoX}_{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}} = 707.688$$



momentoX



momentoX