

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO**

Mario Regis Agostini

**Avaliação Computacional de uma Forma
Consistente de Representação das Equações do
Movimento dos Fluidos usando o Método dos
Volumes Finitos em Malha Desencontrada**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação

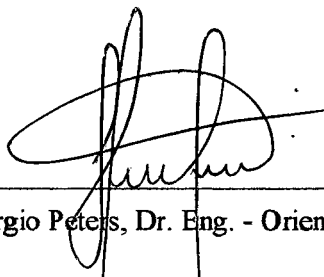
Prof. Sérgio Peters, Dr. Eng. - Orientador

Florianópolis, agosto de 2000

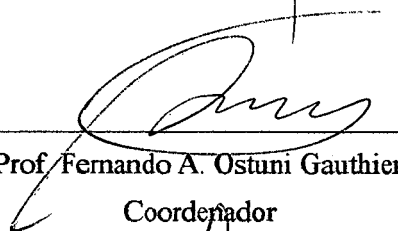
Avaliação Computacional de uma Forma Consistente de Representação das Equações do Movimento dos Fluidos usando o Método dos Volumes Finitos em Malha Desencontrada

Mario Regis Agostini

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação Área de Concentração Sistemas de Computação e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

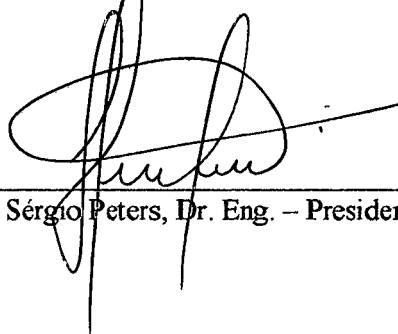


Prof. Sérgio Peters, Dr. Eng. - Orientador

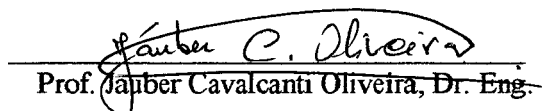


Prof. Fernando A. Ostuni Gauthier, Dr. Eng.
Coordenador

Banca Examinadora:



Prof. Sérgio Peters, Dr. Eng. – Presidente



Prof. Jauber Cavalcanti Oliveira, Dr. Eng.



Prof. Daniel Santana de Freitas, Dr. Eng.

Aos meus pais Mario e Regina

À minha querida esposa Janice

Aos meus amados filhos Eduardo (in memoriam), Marcos e Andreia

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador e amigo Sergio Peters, por ter se disposto a orientar este trabalho, pelos inúmeros ensinamentos transmitidos e pela proverbial paciência demonstrada ao longo de nosso convívio.

Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições valiosas ao aprimoramento desta dissertação.

Aos colegas e amigos Ewerton, Alkaim, Viviane e Fred e aos professores Custódio e Mazzuco, pelo apoio e incentivo.

À Vera, Valdete, Ronaldo, Mario e demais funcionários, colegas e professores do INE e do CTC que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	v
NOMENCLATURA	vi
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO SOBRE ESCOAMENTOS RADIAIS	3
3 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES	5
3.1 INTRODUÇÃO.....	5
3.2 DISCRETIZAÇÃO EM MALHA DESENCONTRADA	6
3.3 DISCRETIZAÇÃO DO TERMO FONTE.....	10
4 RESULTADOS OBTIDOS	13
4.1 INTRODUÇÃO.....	13
4.2 RESULTADOS OBTIDOS COM INTERPOLAÇÃO QUICK CONSISTENTE EM MALHA DESENCONTRADA	13
5 CONCLUSÕES	19
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	20
APÊNDICE A- DEDUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES N-S PARA A NOVA VARIÁVEL V_r	22
APÊNDICE B- EXTENSÃO DA INTERPOLAÇÃO QUICK CONSISTENTE PARA MALHA DESENCONTRADA	26

O estudo do escoamento de fluidos em difusores radiais tem se revestido de grande interesse tendo em vista sua larga aplicação na área da engenharia.

Com o desenvolvimento da informática, particularmente na construção de computadores com grande capacidade de processamento e com software mais eficientes, foi possível incrementar o uso da simulação numérica nos referidos estudos.

O presente trabalho foi motivado pela tese apresentada por Peters (1994), o qual sugeriu uma forma alternativa para a modelação numérica de escoamentos radiais com alimentação radial. Diversos modelos utilizados para a solução numérica do escoamento não apresentaram resposta numericamente estável em escoamentos com n° de Reynolds da ordem 1000. Diante desses resultados Peters (1994) sugeriu a substituição da variável V (velocidade transversal) pela variável rV (proporcional à vazão) nas Equações de Navier-Stokes com discretização em malha colocalizada com Interpolação QUICK Consistente (Hayase, 1992).

No presente trabalho foi adotado o mesmo modelo numérico proposto por Peters (1994), mas adotando a discretização em malha desencontrada.

Ao adotar tal alternativa pôde-se obter resultados numericamente mais estáveis e consistentes com a realidade física.

No Apêndice A do presente trabalho é revista a adaptação das equações diferenciais do movimento (Equações da Navier-Stokes) para as novas variáveis. A discretização dessas novas equações para a interpolação QUICK consistente (Hayase et alli, 1992) utilizando malha desencontrada é desenvolvida no Apêndice B.

Verificou-se que nos regimes de transição entre o escoamento laminar e turbulento, como o investigado aqui, as soluções dos escoamentos são extremamente sensíveis a qualquer variação na metodologia numérica empregada. Desta forma é necessário muita cautela para se atribuir uma configuração definitiva a uma solução das equações que governam o escoamento.

ABSTRACT

The study of fluid flows in radial diffusers have been of great interest due to its many applications in engineering.

The development of computer science, specially with fast computers and efficient softwares, increased the capabilities for performing numerical simulations of radial flows.

The main motivation of the present work was the thesis of Peters(1994), who proposed an alternative form of modeling numerically radial flow with radial feeding. In that work, several models built for the numerical simulation of the flow obtained numerically unstable results for flows at a Reynolds number about 1000. As a consequence of these results, Peters(1994) suggested the change of the variable V (transversal velocity) by the variable rV (proportional to the flow rate) in the discretization of the Navier-Stokes equations with a collocated grid and interpolation QUICK Consistent (Hayase, 1992).

At the present work, the same model proposed by Peters(1994) was used, with the exception of the staggered grid used instead of the collocated grid.

This alternative obtained numerically stable, physically realizable results.

Appendix A contains a description of the resulting Navier-Stokes equations after the change of variables is made. The discretization of the new form of the equations is based on the interpolation scheme QUICK Consistent (Hayase et alli, 1992) and it is described in the Appendix B.

It was verified that the transition regimes investigated here are characterized by an extreme sensitivity of the numerical solutions with the numerical methodology chosen for solving them. Therefore, it is necessary great caution in assigning a definitive configuration to the solution of the governing equations.

	Título	pag.
Fig 2.1	Esquema do difusor radial com alimentação radial	3
Fig 3.1	Volume de controle interno ao domínio de cálculo.	6
Fig 3.2	Volume de Controle desencontrado de V_r referente ao ponto nodal (i,j)	10
Fig 4.1	Escoamento simétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=100$, com malha colocalizada , obtido por Peters (1994)	14
Fig 4.2	Escoamento simétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=100$, com malha desencontrada (Presente trabalho)	14
Fig 4.3	Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=300$, com malha colocalizada , obtido por Peters (1994)	14
Fig 4.4	Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=300$, com malha desencontrada (Presente trabalho)	15
Fig 4.5	Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=600$, com malha colocalizada , obtido por Peters (1994)	15
Fig 4.6	Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=600$, com malha desencontrada (Presente trabalho)	15
Fig 4.7	Escoamento assimétrico instantâneo em difusor radial com alimentação radial para $Re=1000$, com malha colocalizada , obtido por Peters (1994)	16

Fig 4.8	Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=1000$, com malha desencontrada 60x135 pontos nodais (Presente trabalho)	16
Fig. 4.9	Escoamento assimétrico radial com alimentação radial para $Re=1000$ com malha desencontrada 70x70 pontos nodais (Langer, 1991)	16
Fig 4.10	Comportamento estacionário da velocidade u no ponto médio da seção transversal em três posições radiais do difusor radial com alimentação radial, $Re=1000$, com malha desencontrada (Presente trabalho)	17
Fig 4.11	Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=1000$, com malha desencontrada 80x200 pontos (Presente trabalho)	17
Fig B.1	Volume de controle para a variável ϕ_i em malha colocizada	26
Fig B.2	Volume de controle para a variável $\phi_i = U(i,j)$ em malha desencontrada	26
Fig B.3	Volume de controle para a variável $\phi_{i+1} = U(i+1,j)$ em malha desencontrada	28
Fig B.4	Volume de controle para o cálculo de S_n^+	30
Fig B.5	Volume de controle para o cálculo de S_n^-	31

Tabela B.1	Substituições na expressão de S_e^+ para obter S_n^+	pág. 32
Tabela B.2	Substituições na expressão de S_e^- para obter S_n^- .	33

a_i	Coefficiente do método dos volumes finitos, eq. (3.7).
A_i	Coefficiente de ajuste convecção/difusão de acordo com a lei da potência.
A_p^+	Coefficiente nodal principal sem o efeito de subrelaxação.
D_i	Termo difusivo discretizado.
f	Função genérica
f, f', f''	Derivadas de 1ª, 2ª e 3ª ordem de uma função f , respectivamente.
F_i	Fluxo mássico em cada face de volume de controle.
J_x e J_r	Fluxos totais convectivos e difusivos nas direções x e r , eqs. (3.1) a (3.3).
k	Condutividade térmica.
P	Campo de pressão total.
Re	Número de Reynolds dos vários escoamentos presentes neste trabalho, eqs. (2.2), (2.3), (3.4), (3.12), (3.13), (3.16), (3.17), (3.18), (3.21), (3.27), (A.2), (A.3), (A.5) a (A.7), (A.10), (A.12), (A.14) e (A.15)
s	Espaçamento entre os discos do difusor radial, fig. (2.1).
S	Espaçamento entre discos do difusor radial adimensional.
S^*	Termo fonte da equação da conservação da quantidade de movimento.
S_p	Parcela de S^* linearizada conforme, eqs. (3.6) e (3.6a).
S_c	Parcela de S^* que independe de ϕ_p , conforme eq. (3.6)
t	Tempo adimensional.
t^*	Tempo dimensional
T	Temperatura dimensional.
U, V, P	Componentes adimensionais de velocidades e pressão.
U^*, V^*, P^*	Componentes dimensionais de velocidades e pressão.
x^*, y^*	Valores dimensionais respectivamente para as coordenadas longitudinal e transversal para escoamentos em coordenadas cartesianas.
x^*, r^*	Valores dimensionais respectivamente para as coordenadas transversal e radial para escoamentos em coordenadas cilíndricas.
x, y, r	Valores adimensionalizados de x^*, y^* e r^* , respectivamente.

Símbolos gregos

α	Difusividade térmica.
δ	Número real arbitrário e positivo.
Δ	Incremento finito.
ρ	Massa específica.
μ	Viscosidade dinâmica do fluido.
ϕ	Grandeza genérica, eq. (3.1) a (3.5), e em todas as eqs. do Apêndice B.
ρ	Massa específica do fluido.
Γ	Coefficiente do termo difusivo, equivalente à viscosidade.

Subíndices

i	Índice referente a fronteira do volume de controle : w, e, n, s.
I	Índice referente aos pontos nodais : W, E, N, S e P.
o	Valor inicial de um campo de velocidades.
s	Indica o valor da superfície do domínio de cálculo.
$\ \quad \ $	Avalia-se o máximo dos valores internos às barras duplas.

Superíndices

o	Índice relativo às grandezas do instante anterior.
$+ \quad e^-$	Indica o sentido do fluxo convectivo no V.C.
k	Nível iterativo.
t	Instante de tempo.

1 INTRODUÇÃO

Escoamentos em difusores estão presentes em várias situações em problemas de engenharia. Em particular, dentre os difusores radiais, onde o fluido escoava entre discos paralelos concêntricos, pode-se citar os seguintes dispositivos:

- mancais aerostáticos radiais;
- impactadores de aerossol;
- simulação de máquinas de usinagem por eletroerosão ;
- válvulas do tipo palheta, muito utilizadas em compressores alternativos de refrigeração.

Dentre os diversos estudos sobre escoamento radial, encontram-se os trabalhos sobre escoamento radial com alimentação radial realizado por Deschamps (1987), Langer (1991), Oliveira (1992), Peters (1994), dentre outros. Nestes trabalhos, constatou-se ser necessária uma análise cuidadosa dos métodos numéricos a serem empregados neste tipo de escoamento por diversas razões, entre as quais pode-se destacar:

- As Equações de Navier-Stokes, que modelam os diversos tipos de escoamentos de fluidos, são não lineares e, ao discretizá-las, há o risco de empregar-se aproximações nem sempre consistentes ao problema em estudo;

- À medida que as partículas de fluido caminham na direção radial a sua velocidade média decai gradativamente para manter a vazão, gerando um gradiente de pressão $\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)$ adverso ao escoamento;

- Existência de uma grande dependência da variável V (velocidade) em relação à coordenada radial r ($v_{\text{médio}}$ é inversamente proporcional à coordenada radial), devido à condição de conservação da massa em escoamento do tipo incompressível, de modo que a vazão ($\rho \cdot v_{\text{médio}} \cdot S$) se mantenha constante ao longo de r , onde ρ é a massa específica do fluido, $v_{\text{médio}}$ é a velocidade média em uma seção transversal do difusor e S é o espaçamento entre discos.

- Grande dependência de u e v em relação a Re (nº de Reynolds).

Uma das proposições estudadas por Peters (1994) visa eliminar a grande dependência entre V e r através de uma mudança de variáveis, onde passa-se a resolver as variáveis U e (rV) ao invés de U e V . Este modelo foi aplicado aos casos limites (Re baixíssimo e Re altíssimo) com excelentes resultados (vide Peters (1994)). No entanto no caso real com Re variando entre

1 INTRODUÇÃO

100 e 1000 com discretização em malhas colocalizadas, os resultados numéricos não foram satisfatórios, apresentando oscilações não periódicas atribuídas à instabilidades numéricas.

Esta alternativa para diminuir a dependência de V em relação a r se baseia na substituição da variável V pela variável rV . A variável rV é proporcional à vazão, e não depende diretamente de r e, neste caso, tem uma variação menos brusca à medida que o fluido se afasta do centro do difusor.

2 REVISÃO SOBRE ESCOAMENTOS RADIAIS

Dentre os difusores radiais tem-se os alimentados axialmente e os alimentados radialmente .

Este trabalho será dedicado ao estudo do difusor com alimentação radial, de modo que a alimentação é feita uniformemente entre os discos do difusor, conforme Fig. 1, caracterizando assim um escoamento paralelo entre eles . O escoamento radial pode ser considerado como um caso simplificado do escoamento axial.

A simulação numérica deste escoamento pode ser feita dentro do domínio computacional mostrado na Fig. (2.1), onde adota-se $r_0=2/3$, $S=2$, $r_1=1$, $r_2=20$ ($Re \leq 300$) e $r_2=30$ ($Re > 300$), que são parâmetros geométricos adimensionalizados pelo valor de r_1^* dimensional ($x=x^*/r_1^*$, $r=r^*/r_1^*$, $r_0=r_0^*/r_1^*$, $r_1=r_1^*/r_1^*$, $S=s/r_1^*$)

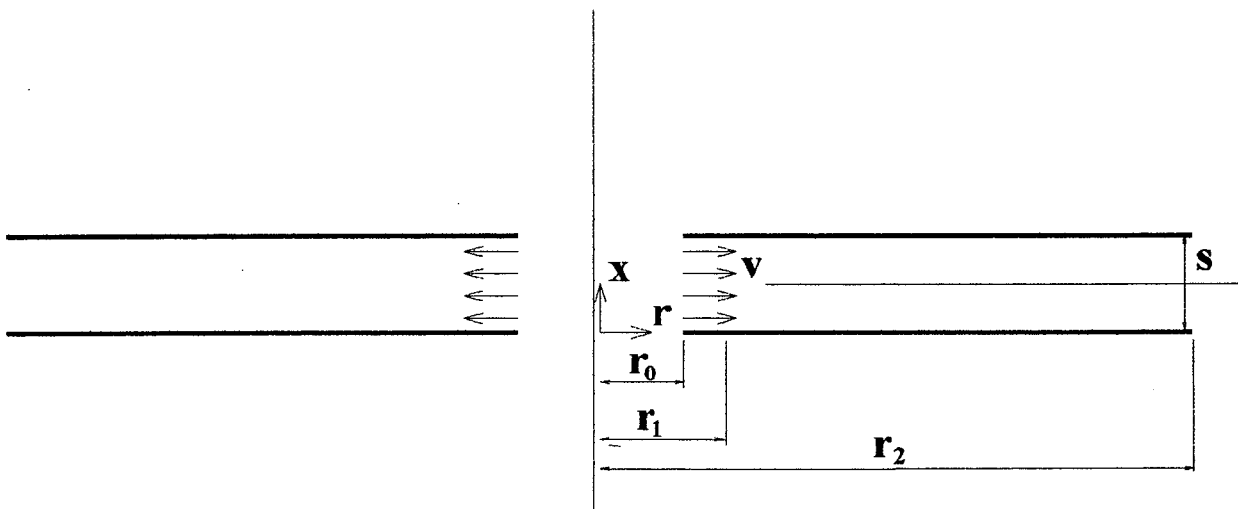


Figura 2.1 - Esquema do difusor radial com alimentação radial

O modelo matemático representativo do escoamento de fluidos em coordenadas cilíndricas é dado pelo seguinte sistema de EDP's (Equações Diferenciais Parciais) não lineares:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rUU)}{\partial x} + \frac{\partial(rVU)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{rRe} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rUV)}{\partial x} + \frac{\partial(rVV)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{rRe} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{Re} \frac{V}{r^2} \quad (2.3)$$

2 REVISÃO SOBRE ESCOAMENTOS RADIAIS

onde

$$U = \frac{u}{\bar{v}_1} : \text{componente adimensional de velocidade transversal};$$

$$V = \frac{v}{\bar{v}_1} : \text{componente adimensional de velocidade radial};$$

$$P = \frac{p}{\rho \bar{v}_1^2} : \text{pressão adimensional};$$

$$x = \frac{x^*}{r_1} : \text{coordenada transversal adimensional};$$

$$t = \frac{\bar{v}_1 t^*}{r_1} : \text{tempo adimensional};$$

$$Re = \frac{\rho \bar{v}_1 r_1}{\mu} : \text{número de Reynolds};$$

sendo

u, v, p, x^*, r^*, t^* : variáveis dimensionais;

\bar{v}_1 : velocidade radial média em $r = r_1^*$ (vide Fig. 2.1)

ρ : Massa específica do fluido;

μ : Viscosidade dinâmica do fluido.

Este sistema de equações diferenciais parciais (EDP's) é chamado de Equações de Navier-Stokes e é apresentado para escoamento laminar, incompressível e transiente, a partir de sua representação em coordenadas cilíndricas, sujeito às seguintes condições de contorno:

$r = r_0$	$V = 1/r_0$ e $\partial U / \partial r = 0$
$r = r_2$	$\partial^2 U / \partial r^2 = \partial^2 (rV) / \partial r^2 = 0$
$x = 0$ e $r < r_1$ $x = S$ e $r < r_1$	$U = 0$ e $\partial V / \partial x = 0$
$x = 0$ e $r > r_1$ $x = S$ e $r > r_1$	$U = V = 0$

3 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descrevem-se as metodologias de solução das equações que regem os problemas em estudo. As hipóteses simplificativas adotadas são: escoamento laminar, transiente, bidimensional, com propriedades constantes. As equações governantes de conservação da massa e quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas, são descritas, de uma forma geral como

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_r}{\partial r} = S^\phi \quad (3.1)$$

onde

$$J_x = \rho U\phi - \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$J_r = \rho V\phi - \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (3.3)$$

e S^ϕ é um termo fonte genérico.

Em cada equação de conservação, ϕ assume um valor correspondente,

$$\text{Massa:} \quad \phi = 1, \quad \Gamma = 0 \quad \text{e} \quad S^\phi = 0 \quad (3.4a)$$

$$\text{Quantidade de movimento em x:} \quad \phi = 1, \quad \Gamma = \mu \quad \text{e} \quad S^\phi = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.4b)$$

$$\text{Quantidade de movimento em y:} \quad \phi = V, \quad \Gamma = \mu$$
$$\text{e} \quad S^\phi = -r \frac{\partial P}{\partial r} + \left(\frac{V_r}{r}\right)^2 - \frac{2}{r \text{Re}} \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (3.4c)$$

onde

$$V_r = rV$$

3.2 DISCRETIZAÇÃO EM MALHA DESENCONTRADA

O primeiro modelo numérico a ser utilizado neste trabalho para resolver as equações de Navier-Stokes consiste na metodologia de discretização apresentada por Patankar (1980), com formulação por volumes finitos, malha desencontrada para U , V , e P , solução segregada de cada grandeza, com acoplamento SIMPLEC (Van Doormal e Raithby, 1984) entre pressão e velocidade.

Por esta metodologia obtém-se uma equação evolutiva discreta para ϕ por integração da eq. (3.1) sobre cada volume de controle (VC) do domínio, conforme fig. (3.1)

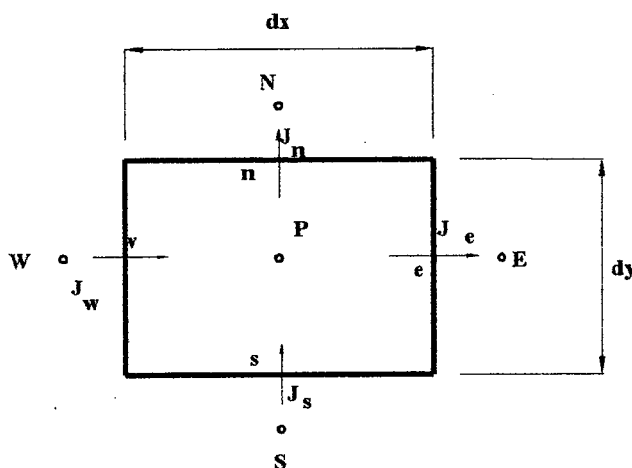


Figura 3.1 - Volume de controle interno ao domínio de cálculo.

A integração da EDP (3.1) acima em um intervalo de tempo entre t e $t+\Delta t$ segundo a discretização temporal totalmente implícita nos fornece a equação a seguir

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (3.5)$$

onde a_p é originalmente calculado como

$$a_P = a_E + a_W + a_S + a_N + a_p^0 - S_P \Delta V \quad (3.6)$$

onde $b = S^\phi \Delta V$ e $b = S^\phi \Delta V$

O termo S^ϕ , constante nas eqs. (3.1), é desmembrado em uma parcela $S_p\phi_p$, que considera a dependência de S^ϕ em relação a ϕ_p , e uma parcela S_c , que independe de ϕ_p .

Tendo em vista que este sistema de equações é linearizado, é recomendável introduzir um fator de sub-relaxação α no cálculo de a_p . Assim a equação anterior fica modificada para

$$a_p = \frac{a_E + a_W + a_S + a_N + a_p^0 - S_p \Delta V}{\alpha} \quad (3.6.a)$$

com $0 < \alpha < 1$, sendo que na nossa simulação foi adotado $\alpha = 0.8$.

Os coeficientes a_i , ou seja a_E, a_W, a_N, a_S , são calculados de acordo com a forma genérica a seguir:

$$a_i = D_i + \max(F_i, 0) \quad (3.7)$$

Onde F_i (com $i = w, e, s$ ou n) corresponde ao fluxo mássico em cada face do volume de controle, D_i é o respectivo termo difusivo discretizado e as barras duplas tomam o máximo valor entre os dois argumentos apresentados internamente a elas.

Cada termo D_i é calculado da seguinte forma:

$$D_i = \mu_i r_i \frac{\Delta r_i}{\delta x_i} \quad (i = E, W) \quad (3.8)$$

$$D_i = \mu_i r_i \frac{\Delta x_i}{\delta r_i} \quad (i = N, S) \quad (3.9)$$

O termo a_p^0 é calculado da seguinte forma:

$$a_p^0 = \frac{r_p \Delta r_p \Delta x_p}{\Delta t} \quad (3.10)$$

O termo "b" que aparece à direita da equação (3.4) é o termo fonte da equação discretizada que incorpora a parcela S_c , o gradiente de pressão e os termos decorrentes da interpolação QUICK Consistente (Hayase, 1992), que serão tratados separadamente na Seção 3.3.

A resolução do sistema algébrico linearizado, resultante desta discretização, é feito pelo esquema TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm), juntamente com o algoritmo de correção em bloco (Settari e Aziz, 1973).

No processo iterativo de integração numérica avança-se no tempo t , em intervalos Δt , de forma totalmente implícita. Este avanço temporal é feito dentro de um laço iterativo interno, onde todo o campo de velocidades deve satisfazer às equações de conservação naquele instante de tempo; isto é necessário devido às não-linearidades das equações. Neste laço interno mantém-se fixo o campo anterior de velocidades e atualiza-se iterativamente o campo do novo instante de tempo, até que este atinja um resíduo tolerável na equação de conservação da massa. Apresentam-se dois controles numéricos neste laço interno, um é o resíduo da equação de conservação da massa e o outro é um limite do número de iterações internas. Estes dois controles são parâmetros importantes no processo de convergência temporal.

A metodologia descrita anteriormente é a mais tradicional (Patankar, 1980) e foi empregada por Gashe (1992), Oliveira (1992), Langer (1991), Pilichi (1990), Todescat (1988) e Deschamps (1987), no estudo do escoamento em difusores radiais.

Conforme a presente proposta vamos adotar uma modificação sugerida por Peters (1994) em relação à metodologia acima descrita, ou seja, substituir a variável V (velocidade radial) por V_r (proporcional à vazão) e utilizar a interpolação QUICK Consistente (Hayase, 1992) com Malha Desencontrada. A aproximação numérica adotada por Peters (1994), conjuntamente com a malha colocalizada, mostrou-se numericamente instável e chega a tornar-se inconsistente quando ocorre alteração no incremento Δt , gerando uma elevação abrupta no resíduo da equação de conservação da massa (Peters, 1994).

De acordo com o demonstrado no Apêndice A, o novo Sistema de Equações Diferenciais de conservação torna-se o seguinte:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_r)}{\partial r} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rUU)}{\partial x} + \frac{\partial(V_r U)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rUV_r)}{\partial x} + \frac{\partial(V_r V_r)}{\partial r} \right] = -r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \right] + \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 - \frac{2}{r \text{Re}} \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (3.13)$$

As adimensionalizações a serem utilizadas no difusor radial com alimentação radial (capítulo 02) são apresentadas a seguir,

$$U = U^*/\bar{V}, V_r = V_r^*/r_1 \bar{V}, P = P^*/\rho \bar{V}^2 \quad (3.14)$$

$$x = x^*/r_1, \quad r = r^*/r_1, \quad \tau = \bar{V}t/r_1 \quad (3.15)$$

$$\text{e } \text{Re} = \rho \bar{V} r_1 / \mu \quad (3.16)$$

onde \bar{V} é a velocidade radial média na posição radial r_1 (vide figura 2.1) e * indica as variáveis dimensionais.

No presente trabalho será adotada a interpolação QUICK Consistente (Hayase, 1992). Segundo Tamamidis e Assanis (1993) as interpolações QUICK podem gerar instabilidades numéricas devidas à interpolação quadrática utilizada. No esquema QUICK o valor interpolado em cada face pode exceder ao valor dos seus dois vizinhos imediatos, e neste caso tem-se uma espécie de inconsistência numérica. Para evitar isso dever-se-ia ter uma malha mais refinada de modo a se obter um valor interpolado em uma região de comportamento monotônico, ou seja, em uma região sem inversão no sentido de crescimento da variável ϕ interpolada. Naturalmente este problema surge em escoamentos sujeitos a altos gradientes, na variável ϕ em questão, e são chamados escoamentos com gradientes descontínuos.

3.3 DISCRETIZAÇÃO DO TERMO FONTE

Ao transformar as equações N-S para as variáveis U e rV , gera-se um termo fonte representado pelas duas últimas parcelas da equação (3.12) da Seção 3.2 conforme transcrição abaixo.

$$\frac{\partial V_r}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rUV_r)}{\partial x} + \frac{\partial (V_r V_r)}{\partial r} \right] = -r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \right] + \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 - \frac{2}{r \text{Re}} \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (3.17)$$

Assim, denomina-se de B o termo fonte da equação, conforme a eq. (3.18), destacando que a primeira parcela decorre do termo advectivo e a segunda decorre do termo difusivo.

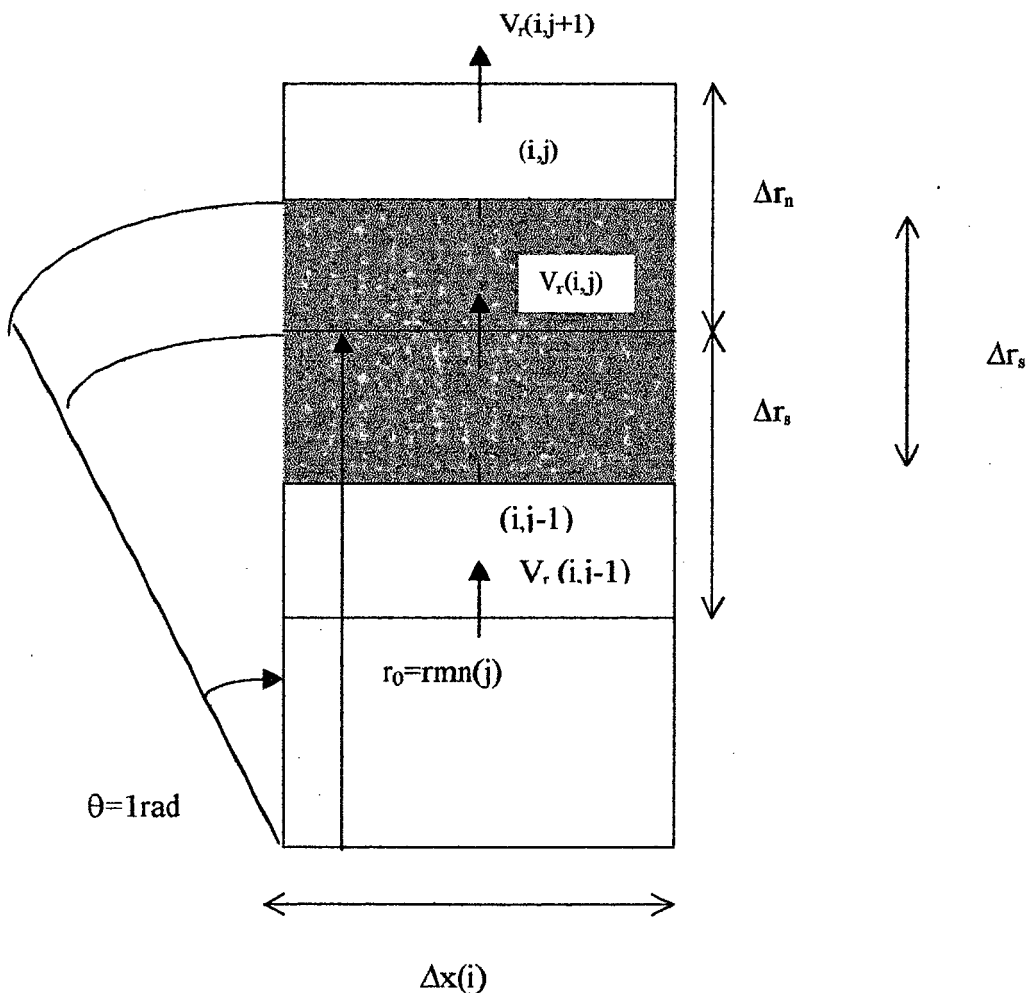


Fig.3.2-Volume de Controle desconstruído de V_r referente ao ponto nodal (i,j)

$$B = \left(\frac{V_r}{r}\right)^2 - \frac{2}{r\text{Re}} \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (3.18)$$

Baseando-se na figuras (3.2), integra-se cada uma dessas parcelas do termo B no VC(i,j) desencontrado (área hachuriada).

A integral de volume da 1ª parcela de B, definida por I₁, pode ser obtida considerando V_r e r constantes ao longo do VC e iguais aos seus respectivos valores médios. Assim

$$I_1 = \iint_V \left(\frac{V_r}{r}\right)^2 r dr dx = \left(\overline{\frac{V_r}{r}}\right)^2 \iint_V r dr dx = \left(\overline{\frac{V_r}{r}}\right)^2 \Delta V = \left(\frac{V_r(i,j)}{r_{mn}(j)}\right)^2 \Delta V(i,j) \quad (3.19)$$

onde a barra (—) indica o valor médio no V.C., e ΔV(i,j) é o volume do V.C.(i,j) (área hachuriada da fig. 3.2), dado por

$$\Delta V(i,j) = r_{mn}(j) \cdot \Delta r(j) \cdot \Delta x(i) \quad (3.20)$$

De acordo com a figura (3.2) pode-se constatar que o valor médio de V_r é o próprio valor nodal dado por V_r(i,j). A integral dupla remanescente representa o próprio volume nodal do V.C., o qual é designado por ΔV(i,j). A variável r(raio) que representa a posição nodal de V_r(i,j) é dada por r_{mn}(j).

Por sua vez a integral de volume da 2ª parcela de B, dada por I₂ necessita da avaliação de uma derivada conforme eq. (3.21) abaixo

$$I_2 = -2 \iint_V \left(\frac{1}{r\text{Re}} \frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r dr dx \quad (3.21)$$

Esta integral envolve a aproximação da derivada de 1ª ordem ∂V_r/∂r no ponto r=r_{mn}(j). Na presente discretização adota-se uma aproximação de 2ª ordem que será apresentada a seguir :

Empregando uma aproximação em Série de Taylor para avaliar uma função genérica f(r) em dois pontos genéricos f(r₀ + Δr) e f(r₀ - Δr) em torno de r₀, tem-se

$$f(r_0 + \Delta r_n) = f(r_0) + f'(r_0)\Delta r_n + f''(r_0)\frac{\Delta r_n^2}{2} + f'''(r_0)\frac{\Delta r_n^3}{6} + \dots \quad (3.22)$$

$$f(r_0 - \Delta r_s) = f(r_0) - f'(r_0)\Delta r_s + f''(r_0)\frac{\Delta r_s^2}{2} - f'''(r_0)\frac{\Delta r_s^3}{6} + \dots \quad (3.23)$$

Multiplicando as equações (3.22) e (3.23) respectivamente por Δr_s^2 e Δr_n^2 , e subtraindo a 2ª equação da primeira obtém-se

$$f'(r_0) = \frac{\Delta r_s}{\Delta r_n(\Delta r_n + \Delta r_s)} f(r_0 + \Delta r_n) + \frac{\Delta r_n - \Delta r_s}{\Delta r_n \Delta r_s} f(r_0) - \frac{\Delta r_n}{\Delta r_s(\Delta r_n + \Delta r_s)} f(r_0 - \Delta r_s) - O(\Delta r^3) \quad (3.24)$$

Desta forma o termo da 2ª derivada é eliminado.

O termo de 3ª ordem ($O(\Delta r^3)$) é truncado e então obtém-se uma aproximação 2ª ordem para a derivada $f'(r_0)$

$$f'(r_0) = \frac{\Delta r_s}{\Delta r_n(\Delta r_n + \Delta r_s)} f(r_0 + \Delta r_n) + \frac{\Delta r_n - \Delta r_s}{\Delta r_n \Delta r_s} f(r_0) - \frac{\Delta r_n}{\Delta r_s(\Delta r_n + \Delta r_s)} f(r_0 - \Delta r_s) \quad (3.25)$$

O termo $\partial V_r / \partial r$ indica a derivada de V_r em relação a r no ponto $r_0 = r_{mn}(j)$, que é definido através da equação (3.25). Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial r}(r_0 = r_{mn}(j)) &= \frac{\Delta r_s}{\Delta r_n(\Delta r_n + \Delta r_s)} V_r(i, j+1) + \frac{\Delta r_n - \Delta r_s}{\Delta r_n \Delta r_s} V_r(i, j) \\ &\quad - \frac{\Delta r_n}{\Delta r_s(\Delta r_n + \Delta r_s)} V_r(i, j-1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assim a eq. (3.20) fica da seguinte forma:

$$I_2 = -2 \cdot \frac{1}{r_{mn}(j) \cdot \text{Re}} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r}(r_0 = r_{mn}(j)) \cdot \Delta V(i, j) \quad (3.27)$$

4 RESULTADOS OBTIDOS

4.1 INTRODUÇÃO

A seguir são apresentados os resultados obtidos em simulação numérica com o modelo proposto. Foram utilizadas malhas com volumes retangulares de 60x90 pontos nodais para os números de Reynolds (Re) 100 e 300, e uma malha de 60x135 pontos nodais para os números de Reynolds 600 e 1000, conforme trabalho de Peters (1994). Para os três primeiros valores de Re foi reproduzido o mesmo resultado obtido por Peters (1994) utilizando arranjo colocalizado, resolvendo as equações do movimento para U e V_r .

Para o valor de $Re=1000$, procurou-se inicialmente alcançar um regime estacionário, adotando-se $\Delta t=1.0$ seguido de $\Delta t=0.1$, com apenas uma repetição interna para obter uma solução aproximada para o escoamento. Nesta etapa inicial a solução não convergida se apresentava de uma forma oscilatória. Para obter uma solução convergida utilizou-se $\Delta t=0.01$ e 5 (cinco) iterações internas para cada avanço no tempo, para depois apresentar o resultado da simulação numérica em termos de linhas de corrente.

Com este procedimento numérico final foi obtido um resultado estacionário, mas com a presença de oscilações de ordem muito inferior, conforme avaliação que será apresentada neste capítulo. No caso do trabalho de Peters (1994) foi constatado um comportamento oscilatório não periódico para os modelos numéricos aplicados a escoamento em $Re=1000$.

Tendo em vista a observação de Tamamidis e Assanis (1993) acerca da instabilidade numérica da interpolação QUICK Consistente em malhas menos refinadas, foi acrescentado aos testes uma nova simulação para $Re=1000$ com maior refinamento da malha, ou seja, uma malha de 80x200 pontos nodais.

4.2 RESULTADOS OBTIDOS COM INTERPOLAÇÃO QUICK CONSISTENTE EM MALHA DESENCONTRADA

Todos os resultados apresentados a seguir foram obtidos para o modelo numérico com interpolação QUICK Consistente (Hayase, 1992) resolvendo as equações do movimento para U e V_r . No caso de Peters (1994) é utilizada a discretização em arranjo colocalizado, ao passo que no presente trabalho adotou-se a discretização em arranjo desencontrado.

As figuras 4.1 a 4.6 a seguir representam os resultados obtidos por Peters (1994) e pelo presente trabalho para $Re=100,300$ e 600 , utilizando malha de 60×90 pontos nodais até $Re=300$ ($RO = 20$), e malha de 60×135 pontos para $Re= 600$ devido a maior dimensão radial total ($RO = 30$).



Fig 4.1-Escoamento simétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=100$, com **malha colocizada**, obtido por Peters (1994)

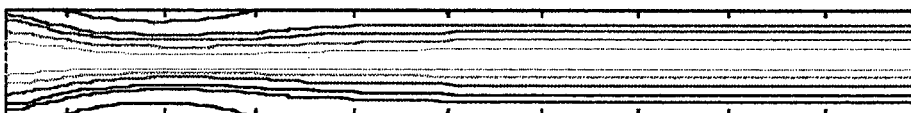


Fig 4.2-Escoamento simétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=100$, com **malha desencontrada** (Presente trabalho)



Fig 4.3-Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=300$, com **malha colocizada**, obtido por Peters (1994)



Fig 4.4-Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=300$, com **malha desencontrada** (Presente trabalho)



Fig 4.5-Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=600$, com **malha colocalizada**, obtido por Peters (1994)

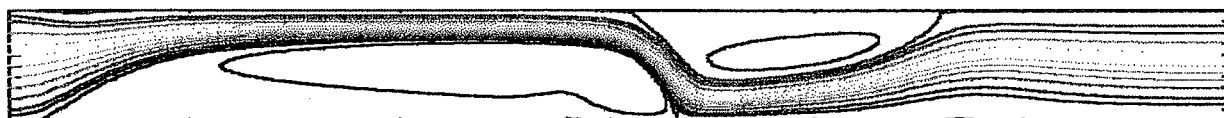


Fig 4.6-Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=600$, com **malha desencontrada** (Presente trabalho)

Para $Re = 1000$ empregou-se utilizada a malha de 60×135 pontos nodais utilizada no trabalho de Peters. No trabalho de Peters (1994) foi obtido um escoamento oscilatório não periódico conforme Fig. 4.7 a seguir, para uma configuração instantânea qualquer.



Fig 4.7-Escoamento assimétrico instantâneo em difusor radial com alimentação radial para $Re=1000$, com **malha colocalizada**, obtido por Peters (1994)

No presente trabalho, utilizando a mesma malha de 60x135 pontos e armazenamento desencontrado de variáveis, obtém-se os resultados apresentados na Fig. 4.8.

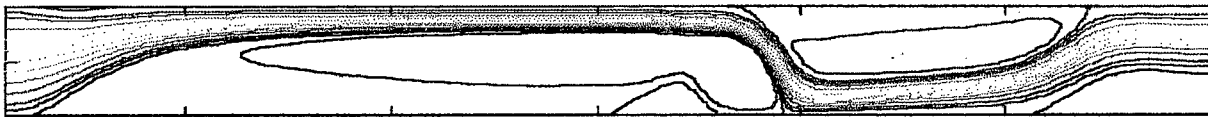


Fig 4.8 -Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=1000$, com **malha desencontrada** 60x135 pontos nodais (Presente trabalho)

Conforme verificado na Fig 4.8 para $Re=1000$, o padrão de escoamento obtido com malha desencontrada é estacionário. Tal resultado é análogo ao obtido por Langer (1991) em malha desencontrada e interpolação Lei da Potência, conforme Fig. 4.9 (malha de 70x70 pontos nodais)



Fig. 4.9-Escoamento assimétrico radial com alimentação radial para $Re=1000$ com malha desencontrada 70x70 pontos nodais (Langer, 1991)

Uma malha mais refinada de 80x200 pontos nodais também foi adotada no presente trabalho e foram obtidos os mesmos resultados em regime estacionário anteriormente apresentados, conforme demonstrado nas figuras 4.10 e 4.11, utilizando $\Delta t=0.01$ com 5(cinco) iterações internas.

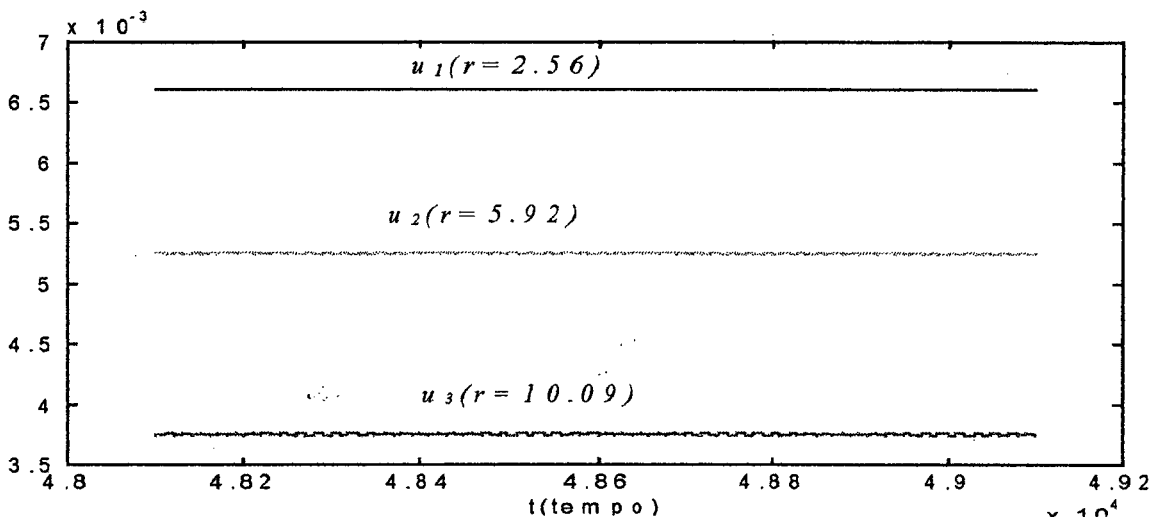


Fig 4.10-Comportamento estacionário da velocidade u no ponto médio da seção transversal em três posições radiais do difusor radial com alimentação radial, $Re=1000$, com malha desencontrada (Presente trabalho)



Fig 4.11 -Escoamento assimétrico em difusor radial com alimentação radial para $Re=1000$, com malha desencontrada 80x200 pontos (Presente trabalho)

Para $Re=1000$, conseguiu-se alcançar um estado estacionário, praticamente livre de oscilações, alcançando-se então um resultado numérico mais consistente com a realidade física, conforme pode-se verificar na Fig 4.10. Conforme pode ser observado nesta mesma figura,

as referidas oscilações, embora não tenham sido investigadas com profundidade no presente trabalho, atingem amplitude de ordem inferior a 10^{-4} da velocidade radial.

Verifica-se que para os números de Reynolds até 600 os resultados obtidos no presente trabalho corroboram os obtidos por Peters (1994). Nesta faixa de Reynolds os escoamentos se apresentam em regime estacionário e sem oscilações numéricas. A solução numérica obtida para o escoamento a $Re=1000$ apresentou pequenas oscilações durante o processo de convergência, mas convergiu para uma solução estacionária conforme Figs. 4.8 e 4.11. Observa-se que este resultado é bastante semelhante ao obtido por Langer (1991) (Fig 4.9).

O modelo implementado por Peters (1994) para $Re=1000$ apresentou solução numérica instável, com grandes oscilações não periódicas. Tais soluções oscilatórias foram consideradas numericamente inconsistentes, e as oscilações foram atribuídas a instabilidades numéricas devidas ao método de interpolação, QUICK Consistente (Hayase, 1992), mas pelo presente trabalho pode-se concluir que a discretização em arranjo colocalizado é que gerou as referidas oscilações não periódicas.

A Fig. 4.11 apresenta a solução para $Re=1000$ com maior refinamento da malha. Uma comparação entre as figuras 4.9 e 4.11 permite concluir que os resultados obtidos são independentes da malha utilizada.

No presente trabalho, usando a mesma metodologia empregada por Peters (1994), alterando apenas a discretização para malha desencontrada, obteve-se uma solução considerada numericamente consistente e praticamente livre de oscilações numéricas.

5 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi a avaliação um modelo numérico de solução das equações que regem o movimento de fluidos num escoamento laminar radial com alimentação radial para uma determinada faixa de Reynolds(Re), analisando em detalhe os resultados para o número de Re em torno de 1000, visto que em outro modelo numérico estudado por Peters (1994) não funcionara bem nesse valor, embora tivesse apresentado bons resultados em números de Reynolds mais baixos.

O modelo adotado no presente trabalho foi um sistema de equações baseado nas variáveis U e V_r (proporcional à vazão), interpolação QUICK consistente, com **malha desencontrada**, o qual difere daquele empregado por Peters (1994), o qual utilizou **malha colocalizada**.

O presente modelo foi validado em uma faixa moderada de número de Reynolds 100, 300 e 600, onde o modelo anterior (Peters, 1994) apresentara bons resultados. Constatou-se nesta faixa ambos os modelos apresentam resultados semelhantes.

Finalmente avaliou-se o modelo proposto para $Re=1000$, neste número de Reynolds em que o modelo estudado por Peters apresentara um comportamento oscilatório, não periódico, considerado inconsistente. Neste caso, com o modelo proposto conseguiu-se uma resposta praticamente livre de oscilações numéricas, coerente com o comportamento físico desse escoamento previsto em faixas de números de Reynolds mais baixos.

Considerando que a diferença entre o modelo estudado por Peters (1994) e o modelo deste trabalho reside apenas no tipo de malha utilizada, que neste caso é malha desencontrada, pode-se concluir que este modelo numérico, mesmo utilizando uma interpolação de 2ª ordem (QUICK Consistente), conduz a resultados numéricos bem mais estáveis.

Assim pode-se concluir que a discretização temporal, associada a malha desencontrada, conduz a resultados numericamente mais estáveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CRANK, J. and NICOLSON, P. A Practical Method for Numerical Evaluations of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-Conduction Type. **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, 43: 50-67, 1953.
- DESCHAMPS, C.J. **Escoamento Laminar através de Válvulas de Compressores**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- DESCHAMPS, C.J., PRATA, A.T. e FERREIRA, R.T.S. Modelagem de um Escoamento Turbulento em Presença de Estagnação, Recirculação, Aceleração e Gradientes de Pressão Adversos. **Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**. Rio de Janeiro, I: 57-60, 1989.
- FERREIRA, R.T.S., DESCHAMPS, C.J. and PRATA, A.T. Pressure Distribution Along Valve Reeds of Hermetic Compressors. **Int. J. Exp. Thermal and Fluid Sciences**. 2: 201-207, 1989.
- HAYASE, T., HUMPHREY, C. and GREIF, R. A Consistent Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures. **Journal of Computation Physics**. 98: 108-118, 1992.
- KELKAR, K.M. **Numerical Study of Stability of Fluid Flow**. PhD Thesis, University of Minnesota, 1988.
- KELKAR, K.M. and PATANKAR, S.V. Numerical Prediction of Vortex Shedding Behind a Square Cylinder. 1989 National Heat Transfer Conference. HTD Vol.110, **Numerical Heat Transfer with Personal Computers and Supercomputing**. 185-191, 1989.
- LANGER, C. A. **Separação, Bifurcação e Transferência de Calor em Escoamentos Radiais**. Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1991.
- MALISKA, C.R. **Mecânica dos Fluidos Computacional II**. Curso de Pós-graduação, UFSC, 1990.

-
- OLIVEIRA, J.C. Estudo Numérico da Estabilidade Hidrodinâmica em Difusores Radiais.**
Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina,
1992.
- PATANKAR, S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.** New York, Hemisphere
Publishing Co, 1980.
- PETERS, S. , Bifurcação e Oscilações Auto-Induzidas em Escoamentos de Fluidos em Difusores
Radiais .Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de
Santa Catarina. Florianópolis,1994..**
- SETTARI, and AZIS, K. A generalization of the Additive Correction Methods for the Solution of
Matrix Equations. SIAM J. Numerical Analysis, 10:506-521, 1973.**
- TAMAMIDIS, P. and ASSANIS, D. Evaluation of Various High-Order-Accuracy Schemes with
and without Flux Limiters. Int. Journal for Num. Methods in Fluids, 16: 931-948,
(1993).**
- VAN DOORMAL, J.P. and RAITHBY, G.D. Predicting Incompressible Fluid Flows. Numerical
Heat Transfer, 7: 147-63, 1984.**

APÊNDICE A- DEDUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES N-S PARA A NOVA VARIÁVEL V_r

O modelo do presente trabalho, que foi proposto por Peters(1994), consiste em substituir a variável V (velocidade radial) pela variável V_r , sabendo que $V = V_r / r$. Assim, adapta-se as equações de N-S em coordenadas cilíndricas para a nova variável V_r .

O sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDP) para escoamento laminar e incompressível para variáveis primitivas U , V e P são apresentados a seguir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rUU)}{\partial x} + \frac{\partial(rVU)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rUV)}{\partial x} + \frac{\partial(rVV)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{V}{r^2} \quad (\text{A.3})$$

onde

U, V : componentes adimensionais de velocidades transversal e radial;

P : componente adimensional de pressão;

x, r : coordenadas transversal e radial adimensionais;

t : tempo adimensional;

Re : número de Reynolds.

Substituindo $V = V_r / r$ em cada uma das equações acima, obtemos

Na eq. (A.1):

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \frac{V_r}{r} \right)}{\partial r} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(V_r)}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Na eq. (A.2):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rUU)}{\partial x} + \frac{\partial(r \frac{V_r}{r} U)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right]$$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rUU)}{\partial x} + \frac{\partial(V_r U)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Na eq. (A.3):

$$\frac{\partial \frac{V_r}{r}}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rU \frac{V_r}{r})}{\partial x} + \frac{\partial(r \frac{V_r}{r} \frac{V_r}{r})}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \frac{V_r}{r}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \frac{V_r}{r}}{\partial r} \right) \right]$$

$$-\frac{1}{\text{Re}} \frac{V_r}{r^2}$$

$$\therefore \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(UV_r)}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{1}{r} V_r V_r)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \frac{V_r}{r}}{\partial r} \right) \right]$$

$$-\frac{1}{\text{Re}} \frac{V_r}{r^3}$$

(A.6)

Multiplicando ambos os membros da eq. (A.6) por r :

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[r \frac{\partial(UV_r)}{\partial x} + r \frac{\partial(\frac{1}{r} V_r V_r)}{\partial r} \right] = -r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \frac{V_r}{r}}{\partial r} \right) \right]$$

$$-\frac{1}{\text{Re}} \frac{V_r}{r^2}$$

(A.7)

Tem-se que

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}V_rV_r\right)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial(V_rV_r)}{\partial r} + V_rV_r\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(V_rV_r)}{\partial r} - \frac{V_r^2}{r^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{e } r \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}V_r\right)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo as eqs. (A.8) e (A.9) em (A.7) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rUV_r)}{\partial x} + r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(V_rV_r)}{\partial r} - \frac{V_r^2}{r^2}\right)\right] &= -r\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r\text{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial x}\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r}\right)\right] \\ &\quad - \frac{1}{\text{Re}}\frac{V_r}{r^2} \\ \therefore \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rUV_r)}{\partial x} + r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(V_rV_r)}{\partial r}\right)\right] &= -r\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r\text{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial x}\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}V_r\right)\right] \\ &\quad + \frac{V_r^2}{r^2} - \frac{1}{\text{Re}}\frac{V_r}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Como } r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}V_r\right) = r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}V_r\right) = \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{1}{r}V_r \quad (\text{A.11})$$

Substituindo a eq. (A.11) na eq. (A.10), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rUV_r)}{\partial x} + \frac{\partial(V_rV_r)}{\partial r}\right] &= -r\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r\text{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial x}\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r}\right)\right] \\ &\quad + \left(\frac{V_r}{r}\right)^2 - \frac{1}{\text{Re}}\frac{V_r}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Mas } \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad \therefore r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) - \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo-se a eq. (A.13) na eq. (A.12), tem-se

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rUV_r)}{\partial x} + \frac{\partial(V_r V_r)}{\partial r} \right] = -r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \right] + \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 - \frac{1}{\text{Re}} \frac{V_r}{r^2} \quad (\text{A.14})$$

Simplificando-se a eq. (A.14) obtém-se finalmente

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rUV_r)}{\partial x} + \frac{\partial(V_r V_r)}{\partial r} \right] = -r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \right] + \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 - \frac{2}{r \text{Re}} \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (\text{A.15})$$

As equações (A.4), (A.5) e (A.15) são respectivamente as equações (3.10), (3.11) e (3.12) do Capítulo 03 do presente Trabalho .

**APÊNDICE B - EXTENSÃO DA INTERPOLAÇÃO QUICK CONSISTENTE
PARA MALHA DESENCONTRADA**

No Apêndice B de Peters (1994) é apresentada a dedução das equações de Navier-Stokes para a variável genérica ϕ , em uma malha colocada não uniforme com interpolação QUICK Consistente (Hayase, 1992), onde ϕ pode ser U, V ou qualquer outra variável armazenada no mesmo ponto (vide Figura B.1).

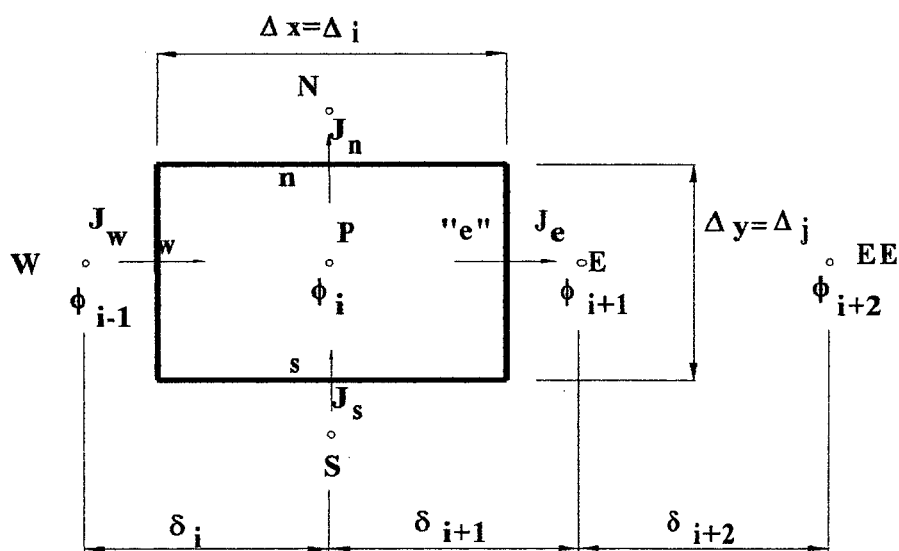


Figura B.1 - Volume de controle para a variável ϕ_i em malha colocada.

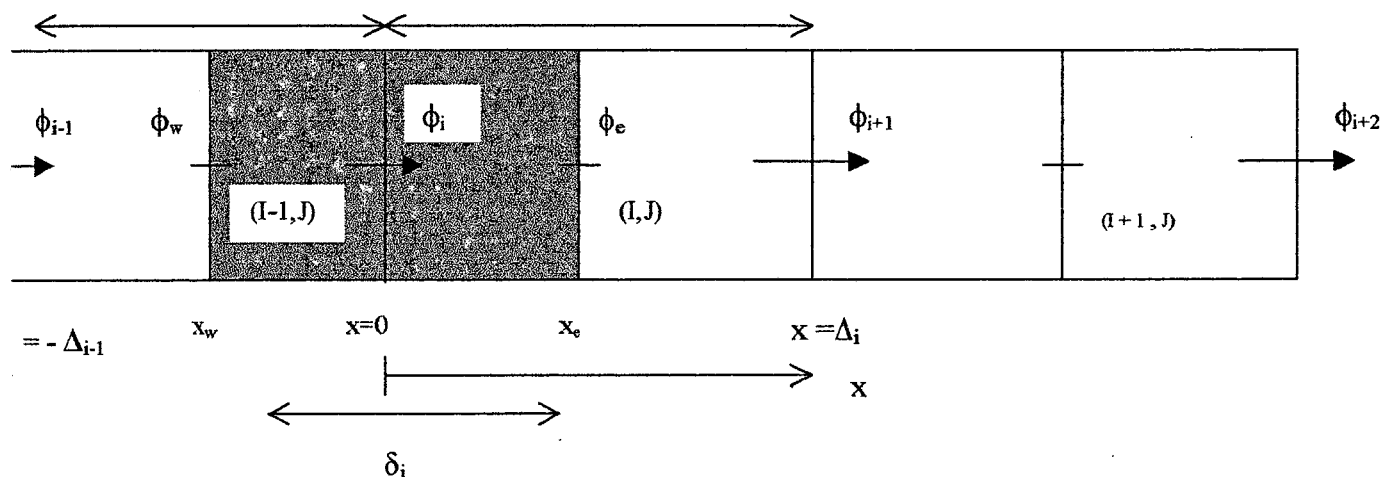


Figura B.2 - Volume de controle para a variável $\phi_i = U(i,j)$ em malha desencontrada

A seguir as equações para ϕ_i em uma malha desencontrada (vide fig. B.2) não uniforme, são discretizadas com interpolação QUICK Consistente.

EXPRESSÃO PARA ϕ_e^+

Para fluxo mássico positivo na face 'e', $Fe > 0$, denotado por Fe^+ , tem-se uma expressão para ϕ_e que depende dos dois valores a montante (ϕ_{i-1} e ϕ_i) e de um valor a jusante (ϕ_{i+1}) de ϕ_i , conforme se segue:

$$\phi(x) = \phi_i + Ax^2 + Bx + C = \phi_i + f(\phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, x) \quad (B.1)$$

$$\phi_e^+ = \phi(x_e = 0.5\Delta_i) = \phi_i + Se^+ \Rightarrow S_e^+ = Ax_e^2 + Bx_e + C \quad (B.2)$$

Avaliando-se a expressão (B.1) conforme a figura (B.2), pode-se calcular A, B e C:

$$p/x = 0 \rightarrow \phi(x = 0) = \phi \therefore \phi(0) = \phi_i + 0 + 0 + C \therefore \phi_i = \phi_i + C \Rightarrow C = 0$$

$$p/x = -\Delta_{i-1} \rightarrow \phi(x = -\Delta_{i-1}) = \phi_{i-1} \therefore \phi_{i-1} = \phi_i + A(-\Delta_{i-1})^2 + B(-\Delta_{i-1}) \quad (B.3)$$

$$p/x = \Delta_i \rightarrow \phi(x = \Delta_i) = \phi_{i+1} \therefore \phi_{i+1} = \phi_i + A(\Delta_i)^2 + B(\Delta_i)$$

Assim tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \Delta_{i-1}^2 A - \Delta_{i-1} B = \phi_{i-1} - \phi_i \\ \Delta_i^2 A + \Delta_i B = \phi_{i+1} - \phi_i \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtém-se A e B conforme se segue,

$$A = \frac{\Delta_{i-1}(\phi_{i+1} - \phi_i) - \Delta_i(\phi_i - \phi_{i-1})}{\Delta_{i-1}\Delta_i(\Delta_{i-1} + \Delta_i)} \quad (B.4)$$

$$B = \frac{\Delta_{i-1}^2 (\phi_{i+1} - \phi_i) + \Delta_i^2 (\phi_i - \phi_{i-1})}{\Delta_{i-1} \Delta_i (\Delta_{i-1} + \Delta_i)} \quad (B.5)$$

Substituindo as expressões obtidas para A e B em (B.2), obtém-se

$$\phi(x) = (\phi_{i+1} - \phi_i) \frac{x(x + \Delta_{i-1})}{\Delta_i (\Delta_{i-1} + \Delta_i)} - (\phi_i - \phi_{i-1}) \frac{x(x - \Delta_i)}{\Delta_{i-1} (\Delta_{i-1} + \Delta_i)} \quad (B.6)$$

Tomando a expressão (B.2) para Se^+ e substituindo $x_e = 0.5\Delta_i$, então Se^+ assume a seguinte expressão

$$Se^+ = (\phi_{i+1} - \phi_i) \frac{\Delta_i + 2\Delta_{i-1}}{4(\Delta_i + \Delta_{i-1})} + (\phi_i - \phi_{i-1}) \frac{\Delta_i^2}{4\Delta_{i-1}(\Delta_i + \Delta_{i-1})} \quad (B.7)$$

EXPRESSÃO PARA ϕ_e^-

Para fluxo mássico negativo na face 'e', $Fe < 0$, denotado por Fe^- , tem-se

$$\phi(x) = \phi_i + Ax^2 + Bx + C = \phi_i + f(\phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, x) \quad (B.8)$$

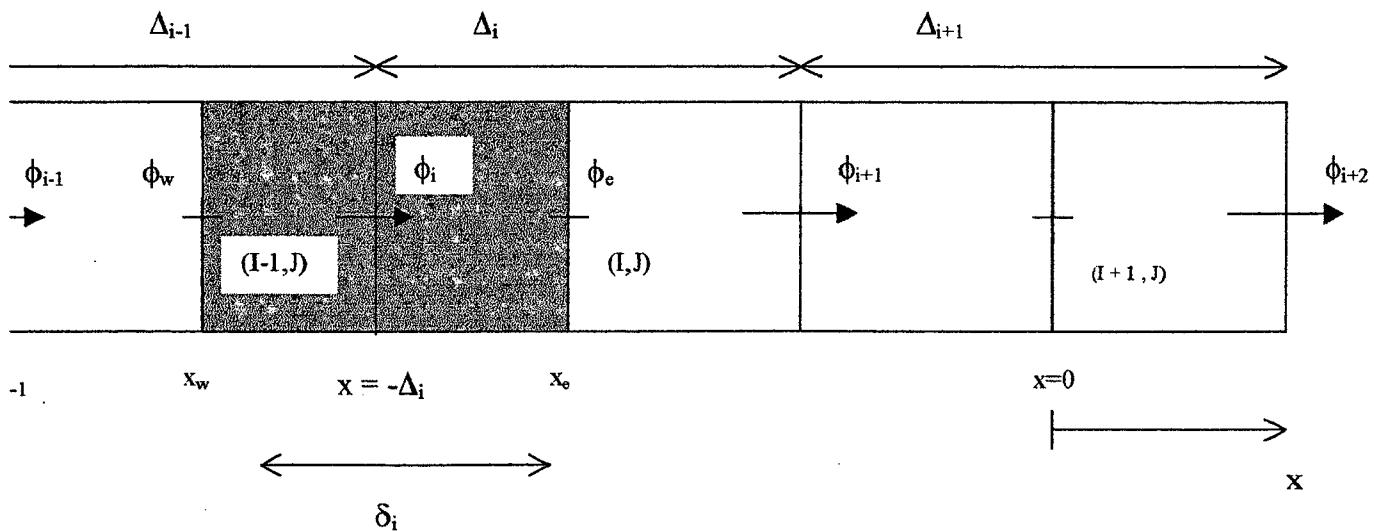


Figura B.3 - Volume de controle para a variável $\phi_{i+1} = U(i+1,j)$ em malha desencontrada

Conforme esquema definido na fig. B.3 acima ,

$$\phi_e^- = \phi(x_e = -0.5\Delta_i) = \phi_{i+1} + Se^- \Rightarrow S_e^- = Ax_e^2 + Bx_e + C \quad (B.9)$$

Avaliando-se a expressão (B.9) conforme a figura (B.3), podemos calcular A, B e C:

$$\begin{aligned} p/x = 0 &\rightarrow \phi(x = 0) = \phi_{i+1} = \phi_{i+1} + 0 + 0 + C \therefore \phi_{i+1} = \phi_{i+1} + C \Rightarrow C = 0 \\ p/x = -\Delta_i &\rightarrow \phi(x = -\Delta_i) = \phi_{ii} = \phi_{ii+1} + \Delta_i^2 A - \Delta_i B \therefore \phi_{ii} = \phi_{ii+1} + \Delta_i^2 A - \Delta_i B \\ p/x = \Delta_{i+1} &\rightarrow \phi(x = \Delta_{i+1}) = \phi_{i+2} = \phi_{i+1} + \Delta_{i+1}^2 A - \Delta_{i+1} B \therefore \phi_{i+2} = \phi_{ii+1} + \Delta_{i+1}^2 A - \Delta_{i+1} B \end{aligned} \quad (B.10)$$

Assim, tem-se o sistema de equações para A e B:

$$\begin{cases} \Delta_i^2 A - \Delta_i B = \phi_i - \phi_{i-1} \\ \Delta_{i+1}^2 A - \Delta_{i+1} B = \phi_{i+2} - \phi_{i+1} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, resultam as expressões abaixo para A e B:

$$A = \frac{\Delta_{i+1}(\phi_i - \phi_{i+1}) + \Delta_i(\phi_{i+2} - \phi_{i+1})}{\Delta_i \Delta_{i+1} (\Delta_i + \Delta_{i+1})} \quad (B.11)$$

$$B = \frac{\Delta_i^2(\phi_{i+2} - \phi_{i+1}) + \Delta_{i+1}^2(\phi_{i+1} - \phi_i)}{\Delta_i \Delta_{i+1} (\Delta_i + \Delta_{i+1})} \quad (B.12)$$

Substituindo as expressões de A e B acima em (B.8), tem-se

$$\phi(x) = (\phi_{i+2} - \phi_{i+1}) \frac{x(x + \Delta_i)}{\Delta_{i+1} (\Delta_i + \Delta_{i+1})} - (\phi_{i+1} - \phi_i) \frac{x(x - \Delta_{i+1})}{\Delta_i (\Delta_i + \Delta_{i+1})} \quad (B.13)$$

Tomando a expressão (B.9) para Se^- e substituindo $x_e = -0.5\Delta_i$, então Se^- assume a expressão

$$S_e^- = (\phi_{i+2} - \phi_{i+1}) \frac{\Delta_i^2}{4\Delta_{i+1}(\Delta_i + \Delta_{i+1})} - (\phi_{i+1} - \phi_i) \frac{\Delta_i + 2\Delta_{i+1}}{4(\Delta_i + \Delta_{i+1})} \quad (\text{B.14})$$

Expressões para S_n^+ e S_n^-

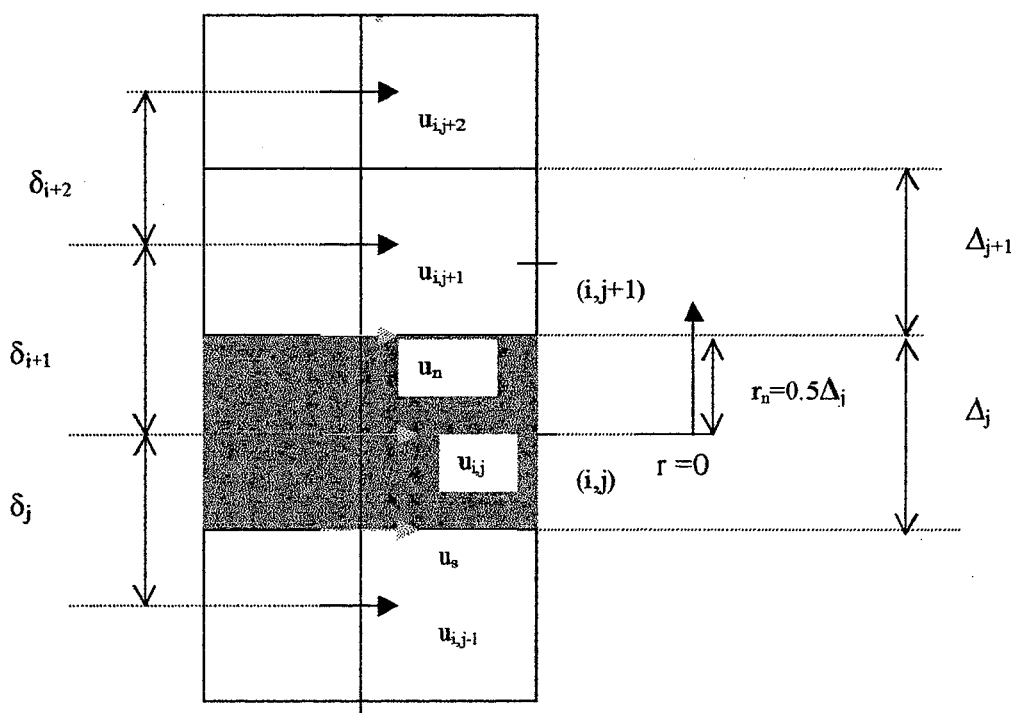


Fig.B.4- Volume de controle para o cálculo de S_n^+

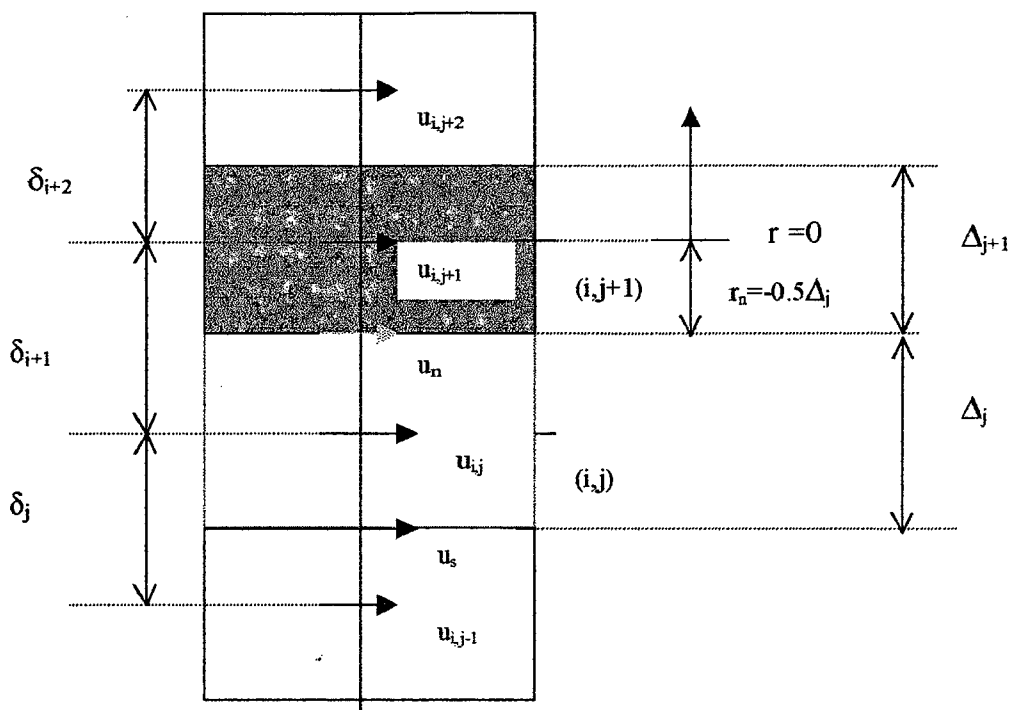


Fig.B.5- Volume de controle para o cálculo de S_n^-

Substituir	Por
S_e^+	S_n^+
ϕ_e	ϕ_n
ϕ_{i+1}	ϕ_{j+1}
ϕ_i	ϕ_j
ϕ_{i-1}	ϕ_{j-1}
Δ_{i-1}	δ_j
Δ_i	δ_{j+1}
x	r
$x_e=0.5\Delta_i$	$r_n=0.5\Delta_j$

Tabela B.1-Substituições na expressão de S_e^+ para obter S_n^+

Fazendo uma analogia entre as figuras (B.2) e (B.4) e as figuras (B.3) e (B.5), pode-se obter S_n^+ e S_n^- . Para obter S_n^+ procede-se às substituições previstas na tabela B.1 na expressão de S_e^+ (eq.B.7) e para obter S_n^- procede-se substituições na expressão de S_e^- (eq. B.14) previstas na tabela B.2.

Para obter S_e^- , faz-se as substituições abaixo na expressão (B.7):

Substituir	Por
S_e^-	S_n^-
ϕ_{i+2}	ϕ_{j+2}
ϕ_{i+1}	ϕ_{j+1}
ϕ_i	ϕ_j
Δ_{i+1}	δ_{j+2}
Δ_i	δ_{j+1}
x	R
$x_e = -0.5 \Delta_i$	$r_n = -0.5 \Delta_{j+1}$

Tabela B.2-Substituições na expressão de S_e^- para obter S_n^-

Desta forma , obtém-se as expressões

$$S_n^+ = (\phi_{j+1} - \phi_j) \frac{\Delta_j(\Delta_j + 2\delta_j)}{4\delta_{j+1}(\delta_j + \delta_{j+1})} + (\phi_j - \phi_{j-1}) \frac{\Delta_j(\Delta_j - 2\delta_{j+1})}{4\delta_j(\delta_j + \delta_{j+1})} \quad (B.15)$$

$$S_n^- = (\phi_{j+2} - \phi_{j+1}) \frac{\Delta_{j+1}(\Delta_{j+1} - 2\delta_{j+1})}{4\delta_{j+2}(\delta_{j+1} + \delta_{j+2})} + (\phi_{j+1} - \phi_j) \frac{\Delta_{j+1}(\Delta_{j+1} + 2\delta_{j+2})}{4\delta_{j+1}(\delta_{j+1} + \delta_{j+2})} \quad (B.16)$$