

CONTRIBUIÇÕES PARA A ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS COM NÃO-LINEARIDADE MATERIAL

PAULO ROBERTO SENEM

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Daniel Domingues Loriggio

Florianópolis

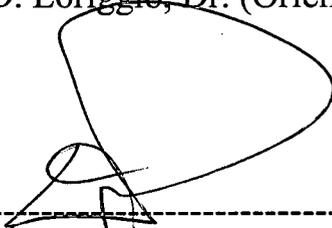
2000

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em 14/07/00, pela comissão examinadora.



Prof. Daniel D. Loriggio, Dr. (Orientador)



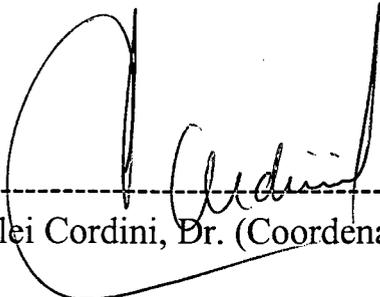
Prof. Ivo J. Padaratz, Ph.D.



Prof. Edison da Rosa, Dr. Eng.



Prof. Roberto C. A. Pinto, Ph.D.



Prof. Jucilei Cordini, Dr. (Coordenador do CPGEC)

**Aos meus pais, aos meus
irmãos e à Mari, com amor.**

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pela oportunidade que me proporcionaram de alcançar esta etapa.

À minha querida Mari, pela dedicação e companheirismo prestados na elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos, que me estimularam e acreditaram em meu objetivo

À empresa Coyne e Bellier Engenharia Ltda., pelo incentivo e apoio prestados.

Aos professores da comissão examinadora, pelas importantes sugestões.

À todos aqueles que, de uma forma ou de outra, apoiaram-me no desenvolvimento deste trabalho, especialmente o Prof. Daniel Loriggio, pelas suas importantes contribuições e constantes incentivos.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
RESUMO	xiv
ABSTRACT	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Alternativas de análise	3
2 ANÁLISE MATRICIAL	6
2.1 Processo linear	7
2.2 Comportamento não-linear do material	11
3 ANÁLISE LIMITE DE PÓRTICOS PLANOS	13
3.1 Introdução	13
3.2 Curva carga-deflexão	13
3.3 Relação momento fletor-curvatura	17
3.4 Curva tensão-deformação	19
3.5 Plastificação de uma seção transversal	20
3.6 Mecanismo de colapso	25
3.7 Equação do trabalho virtual	30
3.8 Teoremas fundamentais	33
3.9 Combinação de mecanismos	35
4 EFEITOS DO ESFORÇO NORMAL	44
5 MÉTODO PROPOSTO	53
5.1 Procedimento não-linear	53
5.2 Modelagem	56
5.3 Implementação computacional	58
5.4 Implementação da influência do esforço normal	60
6 EXEMPLOS E COMPARAÇÕES	63
6.1 Exemplo 1	64

6.2 Exemplo 2	68
6.3 Exemplo 3	79
6.4 Exemplo 4	81
6.5 Exemplo 5	85
6.6 Exemplo 6	87
6.7 Exemplo 7	91
6.8 Exemplo 8	94
6.9 Exemplo 9	97
6.10 Exemplo 10	100
7 CONCLUSÃO	104
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107
9 ANEXOS	109
9.1 Desenvolvimento do programa	109
9.2 Listagens	116
9.2.1 Programa	116
9.2.2 Exemplo 1	133

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Aplicação do método dos deslocamentos.	8
FIGURA 2.2 – Estrutura cinematicamente determinada.	8
FIGURA 2.3 – Rotação unitária em B.	9
FIGURA 2.4 – Rotação unitária em C.	9
FIGURA 2.5 – Momento fletor x curvatura em estruturas não-lineares.	11
FIGURA 2.6 – Gráfico simplificado de momento fletor x curvatura.	12
FIGURA 3.1 – Viga simplesmente apoiada, com carga distribuída.	14
FIGURA 3.2 – Curva carga-deflexão no centro da viga.	14
FIGURA 3.3 – Curva idealizada carga-deflexão no centro da viga.	15
FIGURA 3.4 – Rotação da rótula central.	16
FIGURA 3.5 – Curva momento fletor-curvatura.	17
FIGURA 3.6 – Curva idealizada momento fletor-curvatura.	18
FIGURA 3.7 – Curva tensão-deformação do aço.	19
FIGURA 3.8 – Curva idealizada tensão-deformação do aço.	20
FIGURA 3.9 – Tensões de flexão em uma viga de seção retangular.	20
FIGURA 3.10 – Curva momento fletor-curvatura de uma seção retangular.	24
FIGURA 3.11 – Curva momento fletor-curvatura.	24
FIGURA 3.12 – Viga bi-engastada com carga concentrada.	25
FIGURA 3.13 – Diagrama de momento fletor.	25
FIGURA 3.14 – Diagrama de momento fletor após a primeira rótula.	27
FIGURA 3.15 – Diagrama de momento fletor com duas rótulas.	27
FIGURA 3.16 – Diagrama de momento fletor após a terceira rótula.	28
FIGURA 3.17 – Curva carga-deflexão.	28
FIGURA 3.18 – Pórtico com cargas concentradas.	31
FIGURA 3.19 – Aplicação da equação do trabalho virtual.	31
FIGURA 3.20 – Pórtico de dois andares.	37
FIGURA 3.21 – Rotações de juntas.	37

FIGURA 3.22 – Mecanismos "verdadeiros".	38
FIGURA 3.23 – $(e) = (c) + (d)$.	39
FIGURA 3.24 – $(f) = (e) + (b)$.	40
FIGURA 3.25 – $(g) = (f) + (a)$.	41
FIGURA 3.26 – Estado final do pórtico.	42
FIGURA 3.27 – Equilíbrio de forças e momentos.	43
FIGURA 4.1 – Tensões devidas ao esforço normal e aumento gradativo do momento fletor.	44
FIGURA 4.2 – Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção retangular.	45
FIGURA 4.3 – Superfície de escoamento para seção transversal retangular.	47
FIGURA 4.4 – Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção I. Linha neutra sobre a alma.	48
FIGURA 4.5 – Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção I. Linha neutra sobre a mesa.	49
FIGURA 4.6 – Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção qualquer.	50
FIGURA 4.7 – Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção T.	50
FIGURA 4.8 – Superfície de escoamento para seção transversal T (P atuando em O).	51
FIGURA 4.9 – Superfície de escoamento para seção transversal T (P atuando em G).	52
FIGURA 5.1 – Alteração do módulo de elasticidade.	54
FIGURA 5.2 – Alterações consecutivas do módulo de elasticidade.	55
FIGURA 5.3 – Fluxograma do programa de análise limite.	60
FIGURA 6.1 – Viga com carga distribuída.	64
FIGURA 6.2 – Mecanismo de colapso teórico.	64
FIGURA 6.3 – Discretização do modelo: barras com 20 cm.	65
FIGURA 6.4 – Resultado teórico.	66
FIGURA 6.5 – Resultado do modelo com barras de 20 cm.	67
FIGURA 6.6 – Discretização do modelo com barras de 10 cm.	67
FIGURA 6.7 – Resultado do modelo com barras de 10 cm..	68
FIGURA 6.8 – Pórtico com carregamento H e V.	69
FIGURA 6.9 – Gráfico teórico (valores em kN).	70
FIGURA 6.10 – Discretização do modelo 1.	71

FIGURA 6.11 – Gráfico comparativo do modelo 1.	72
FIGURA 6.12 – Discretização do modelo 2.	73
FIGURA 6.13 – Gráfico comparativo do modelo 2.	74
FIGURA 6.14 – Discretização do modelo 3.	74
FIGURA 6.15 – Gráfico comparativo do modelo 3.	75
FIGURA 6.16 – Discretização do modelo 4.	76
FIGURA 6.17 – Gráfico comparativo do modelo 4.	77
FIGURA 6.18 – Discretização do modelo 5.	77
FIGURA 6.19 – Gráfico comparativo do modelo 5.	78
FIGURA 6.20 – Pórtico com carga distribuída.	79
FIGURA 6.21 – Discretização do modelo.	80
FIGURA 6.22 – Mecanismo de colapso.	81
FIGURA 6.23 – Pórtico com várias cargas concentradas.	81
FIGURA 6.24 – Seção transversal do pórtico da fig. 6.23.	82
FIGURA 6.25 – Pórtico com várias cargas concentradas.	82
FIGURA 6.26 – Mecanismo de colapso.	84
FIGURA 6.27 – Pórtico de telhado.	85
FIGURA 6.28 – Seção transversal do pórtico da fig. 6.27.	85
FIGURA 6.29 – Discretização do modelo.	86
FIGURA 6.30 – Mecanismo de colapso.	87
FIGURA 6.31 – Pórtico de dois andares.	88
FIGURA 6.32 – Seção transversal do pórtico da fig. 6.31.	88
FIGURA 6.33 – Discretização do modelo: numeração dos nós.	89
FIGURA 6.34 – Discretização do modelo: numeração das barras.	89
FIGURA 6.35 – Mecanismo de colapso.	91
FIGURA 6.36 – Pórtico com diferentes momentos de plastificação.	91
FIGURA 6.37 – Discretização do modelo: numeração dos nós.	92
FIGURA 6.38 – Discretização do modelo: numeração das barras.	92
FIGURA 6.39 – Mecanismo de colapso.	93
FIGURA 6.40 – Pórtico de dois andares com diferentes momentos de plastificação.	94
FIGURA 6.41 – Discretização do modelo: numeração dos nós.	95
FIGURA 6.42 – Discretização do modelo: numeração das barras.	95

FIGURA 6.43 – Mecanismo de colapso.	97
FIGURA 6.44 – Pórtico de quatro andares com várias cargas concentradas..	98
FIGURA 6.45 – Discretização. (a) Numeração dos nós. (b) Numeração das barras.	98
FIGURA 6.46 – Mecanismo de colapso.	100
FIGURA 6.47 – Pórtico de três andares e dois vãos.	101
FIGURA 6.48 – Discretização do modelo: numeração dos nós.	101
FIGURA 6.49 – Discretização do modelo: numeração das barras.	102
FIGURA 6.50 – Mecanismo de colapso.	103

LISTA DE TABELAS

TABELA 6.1 – Resultados do processamento para o modelo da fig. 6.3.	66
TABELA 6.2 – Barras com módulo de elasticidade alterado.	67
TABELA 6.3 – Resultados do processamento para o modelo da fig. 6.6.	67
TABELA 6.4 – Relação entre as cargas para o pórtico da fig. 6.8.	69
TABELA 6.5 – Resultados do processamento para o modelo 1.	71
TABELA 6.6 – Resultados do processamento para o modelo 2.	73
TABELA 6.7 – Resultados do processamento para o modelo 3.	75
TABELA 6.8 – Resultados do processamento para o modelo 4.	76
TABELA 6.9 – Resultados do processamento para o modelo 5.	78
TABELA 6.10 – Resultados do processamento para o modelo da fig. 6.21.	80
TABELA 6.11 – Resultados para um percentual de precisão de 1%.	83
TABELA 6.12 – Resultados para um percentual de precisão de 0,5%.	83
TABELA 6.13 – Resultados para um percentual de precisão de 0,1%.	83
TABELA 6.14 – Resultados com a influência do esforço normal.	84
TABELA 6.15 – Resultados sem a influência do esforço normal.	86
TABELA 6.16 – Resultados com a influência do esforço normal.	86
TABELA 6.17 – Resultados sem a influência do esforço normal.	90
TABELA 6.18 – Resultados com a influência do esforço normal.	90
TABELA 6.19 – Resultados do modelo da fig. 6.36.	93
TABELA 6.20 – Resultados do modelo da fig. 6.40.	96
TABELA 6.21 – Resultados do modelo da fig. 6.44.	99
TABELA 6.22 – Resultados do modelo da fig. 6.47.	102

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\{F\}$ - Vetor dos esforços nodais da estrutura.
- $\{Fo\}$ - Vetor dos esforços de engastamento perfeito da estrutura.
- $\{S\}$ - Vetor dos esforços nas extremidades das barras.
- $\{So\}$ - Vetor dos esforços de engastamento perfeito das barras.
- $[K]$ - Matriz de rigidez da estrutura.
- $[K_E]$ - Matriz de rigidez da barra.
- $\{D\}$ - Vetor dos deslocamentos nodais da estrutura.
- $\{D_E\}$ - Vetor dos deslocamentos nodais da barra.
- M_P - Momento de plastificação total da seção transversal.
- M_{P_0} - Momento de plastificação total na ausência de esforço normal.
- M_R - Momento resistente da seção transversal.
- M_y - Momento de escoamento da seção transversal no limite elástico.
- P - Esforço normal na seção transversal.
- P_0 - Esforço normal de plastificação na ausência de momento fletor.
- Z_P - Módulo plástico da seção transversal.
- Z_E - Módulo elástico da seção transversal.
- E - Módulo de elasticidade do material.
- E_A - Módulo de elasticidade alterado.
- I - Momento de inércia da seção transversal.
- A - Área da seção transversal.
- b - Largura da seção transversal retangular.
- h - Altura da seção transversal retangular.
- κ - Curvatura da seção transversal.
- θ - Rotação da seção transversal.
- δ - Deslocamento.
- α - Comprimento relativo do trecho elástico.
- σ - Tensão normal.

- σ_0 - Tensão de escoamento do material.
 λ - Fator de carga.
 λ_c - Fator de carga crítico.

RESUMO

Este trabalho visa o estudo do comportamento de pórticos planos além da fase elástica (estado limite último). Com algumas modificações na modelagem, simplificações no diagrama momento fletor-curvatura e um processo iterativo, consegue-se obter a carga de colapso de um pórtico, sem a necessidade do conhecimento prévio da configuração de colapso.

O método é baseado no Teorema do Limite Inferior, ou Teorema Estático, da Teoria das Rótulas Plásticas, fornecendo resultados a favor da segurança.

O comportamento não-linear do material é incorporado através da mudança do módulo de elasticidade de pequenas barras. Estas barras, com módulo de elasticidade alterado, têm a função de simular as rótulas plásticas. Além disso, o método permite considerar os efeitos do esforço normal no valor do momento de plastificação das seções.

Em suma, a Análise Limite por esse método torna-se mais prática e econômica, apresentando uma ferramenta adicional aos projetistas.

Palavras-Chave: análise elastoplástica de pórticos, análise limite, rótulas plásticas.

ABSTRACT

This main subject of this research is the study of behavior of plane frames when the elastic regime is exceeded (ultimate stress limit).

The method is based on the Lower Bound Theorem or Static Theorem of the Plastic Hinge Theory. Through some structural modeling changes, bending moment-curve diagram simplification and an iterative process it is found the collapse mode.

The material non-linear behavior is modeled changing the elastic modulus of little bars, which simulate the plastic hinges. The method also takes into account normal stress effects on the section's plastification moment.

The Ultimate Analysis with this method is practical and economical.

Keywords: plane frames elastoplastic analysis, limit analysis, plastic hinges.

1. INTRODUÇÃO

Conforme LORIGGIO (1995), a maioria das Normas Internacionais utiliza o Estado Limite Último para projetar suas estruturas. É muito importante, portanto, conhecer o comportamento das estruturas além da fase elástica e encontrar o carregamento de colapso. Geralmente isto é chamado de Análise Limite de Estruturas.

A Análise Limite é baseada, normalmente, no Teorema do Limite Superior da Teoria da Plasticidade, e consiste em encontrar o mecanismo de colapso, entre todos os mecanismos possíveis, verificando as condições de equilíbrio e escoamento em todos os pontos. Existe, neste método, um percurso trabalhoso até obter os resultados desejados, conforme será apresentado no capítulo 3.

Outros métodos alternativos podem ser utilizados para a Análise Limite. Entre eles, uma formulação pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando equações constitutivas complexas, mas que também consome muito tempo de análise, além do grau de dificuldade imposto ao projetista no equacionamento do problema.

Outra forma, mais simplificada, mas que também depende muito tempo na análise pelas operações manuais que exige, é utilizar programas de análise elástica e, através do monitoramento dos resultados fornecidos, criar rótulas plásticas fictícias nos pontos da estrutura que entrarem na fase de plastificação. Isto torna o processo muito cansativo, pelo constante acompanhamento e interrupção da análise, com freqüentes alterações nos dados de entrada.

Um método numérico para realizar a Análise Limite de pórticos planos será apresentado, com a mesma confiabilidade do clássico, permitindo obter os resultados de uma forma mais prática e econômica. O método é baseado na Análise Matricial de Estruturas, e o comportamento plástico do material é incorporado pela mudança dos módulos de elasticidade de pequenos elementos de barra, localizados nas posições de formação de possíveis rótulas plásticas. Assim, é um método iterativo, no qual cada iteração realiza uma Análise Elástica Linear.

Além da fácil formulação desta técnica numérica, o método é baseado no Teorema do Limite Inferior da Teoria de Plasticidade, fornecendo resultados que estão a favor da segurança. Diversos exemplos serão apresentados, mostrando as diversas formas de modelagem, com boa precisão dos resultados.

Apesar deste trabalho estar direcionado à análise de estruturas metálicas, o método também permite, com algumas alterações na relação momento fletor-curvatura, a extensão a estruturas de concreto armado.

Além disso, uma grande vantagem do método apresentado é permitir a inclusão de efeitos que geralmente são desprezados nos métodos clássicos, mas que, em muitos casos de projeto, alteram significativamente os resultados (por exemplo, o efeito do esforço normal no momento de plastificação de pilares).

É importante salientar que o método considera apenas a não-linearidade material da estrutura. Assim, é aplicável a pórticos rígidos com pequenos deslocamentos horizontais. A não-linearidade geométrica não é considerada no estudo apresentado.

Em suma, os objetivos específicos deste método são:

- simplificar os cálculos, minimizando o tempo utilizado na análise;
- apresentar um método alternativo para os projetistas;
- eliminar o processo de combinação de mecanismos, verificação do equilíbrio e condições de escoamento (processo baseado no Teorema do Limite Superior);
- realizar uma análise elastoplástica, acompanhando a redistribuição de momentos, e encontrar o carregamento crítico e o mecanismo de colapso baseado no Teorema do Limite Inferior;
- incluir o efeito do esforço normal no momento de plastificação de pilares.

Portanto, a análise limite por este método tem a finalidade de determinar o carregamento crítico de uma estrutura para um determinado momento de plastificação, determinando, simultaneamente, o seu mecanismo de colapso.

1.1. Alternativas de análise

Conforme citado anteriormente, existem outros métodos que podem ser utilizados para a realização da Análise Limite de pórticos planos.

Programas comerciais que fazem Análise Estrutural Elástica, como o Sistema Mix, por exemplo, podem ser utilizados para a Análise Limite, através da incorporação de rótulas nos pontos onde o momento ultrapassa o limite elástico, e a aplicação de um momento externo igual ao momento de plastificação.

Para cada nível de carregamento, uma análise elástica é processada e são verificados os pontos que ultrapassam o momento de plastificação. Nestes pontos, os dados de entrada do problema são alterados para a simulação de rótulas plásticas.

Então, com um carregamento maior, a análise é processada novamente, e novas verificações são realizadas, alterando, mais uma vez, os dados de entrada. Este processo continua até que se atinja o carregamento crítico, além do qual não se consegue mais uma convergência, com o programa apresentando erro na análise.

O processo citado anteriormente, se realizado manualmente, é muito exaustivo pela constante interrupção da análise, e alteração dos dados do problema para a criação externa das rótulas, exigindo um tempo muito grande de análise. O mesmo tipo de procedimento pode ser programado, mas necessita de uma análise incremental, mesmo para carregamentos abaixo do valor crítico.

Outra maneira de simular rótulas plásticas é através da utilização de molas. Programas comerciais, como o Eberick, utilizam esse procedimento para conseguir redistribuição de esforços. Definindo-se, adequadamente, a constante da mola, pode-se simular uma rótula plástica. A maior dificuldade é calibrar a constante da mola para conseguir redistribuições de esforços dentro de limites permitidos em concreto armado.

Formulações não-lineares de molas [PAMPLONA (2000)], podem auxiliar para a melhor representação das rótulas plásticas.

Existem programas, como o MSC/Nastran, que possuem recursos de análise não-linear para materiais elastoplásticos, com a utilização de relações tensão-

deformação definidas pelo usuário, mas sem possuir a capacidade de redistribuição de momentos fletores ao longo da estrutura, o que impossibilita o conhecimento da configuração de colapso.

Formulações através do Método dos Elementos Finitos também podem ser utilizadas, através de equações constitutivas complexas. Alguns destes métodos são apresentados por CHEN (1994), e outros. Estes processos, entretanto, geralmente apresentam um elevado grau de complexidade, tornando-os pouco utilizados pelos projetistas.

A Teoria das Rótulas Plásticas, apresentada por BAKER (1969), HORNE (1979), MASSONNET (1965), LORIGGIO (1998), entre outros, apresenta uma formulação clássica para a Análise Limite. Baseada no Teorema do Limite Superior, que não está a favor da segurança, e através de um processo de combinação de mecanismos, utilizando-se a equação dos trabalhos virtuais, obtém-se o mecanismo de colapso da estrutura.

A maior dificuldade aparece quando se analisam estruturas de grande porte, onde o número de mecanismos é muito grande, dificultando o processo de combinação e aumentando consideravelmente o tempo de análise.

MARTORANO (1986), em sua dissertação sobre Análise Limite de Sistemas Estruturais Reticulares, apresenta uma formulação em termos de programação matemática para estruturas rígido-plásticas. É baseada na aplicação dos princípios da máxima potência das forças externas para um vetor tensão generalizada no colapso plástico, e do princípio da mínima dissipação de energia para um vetor taxa de deslocamento no colapso. Esta formulação é puramente matemática e apresenta um alto grau de dificuldade para a aplicação pelos projetistas.

Pesquisas recentes também têm sido apresentadas sobre o assunto. MELLO (1989) mostra um trabalho sobre a avaliação da capacidade resistente de pórticos planos de concreto armado. O método utiliza-se de uma técnica incremental que conduz a uma análise não-linear.

Através de uma relação momento fletor-curvatura do tipo elástico não-linear-plástico perfeito, as verificações são feitas a cada incremento e incluem a verificação de esforços através das curvas de interação momento fletor-esforço normal e

da capacidade de rotação plástica pelo critério da Pré-Norma Européia 1991.

A cada incremento de carga as inércias à flexão das seções e uma nova matriz de rigidez global são determinadas. A inércia é uma função não-linear do momento fletor aplicado, e considera-se que o menor momento de plastificação de uma seção de concreto armado é o momento de fissuração, ou seja, o momento máximo que uma barra resiste sem fissurar.

MORAES (1993), em sua dissertação sobre análise elastoplástica de estruturas reticulares, apresenta uma formulação do tipo incremental-iterativa para análise geométrica e material de estruturas reticulares espaciais, baseada no princípio da energia complementar, supondo-se que o material empregado seja homogêneo e elastoplástico-perfeito, que as seções transversais das vigas-colunas sejam duplamente simétricas e constantes ao longo do comprimento, que as rotações relativas sejam pequenas e que os carregamentos sejam aplicados nos nós.

A matriz de rigidez tangente é deduzida explicitamente a partir de um princípio variacional misto-híbrido, sem empregar integração numérica ou funções de interpolação de deslocamentos.

A simulação do comportamento elastoplástico é efetuada através de modificações introduzidas na matriz de rigidez tangente pelo método dos nós plásticos, no qual a plastificação é localizada nos nós dos elementos, obedecendo a critérios de plastificação generalizados.

Finalizando, o assunto que será abordado neste trabalho é de grande interesse para a área de Estruturas, constituindo uma pesquisa em desenvolvimento na atualidade, onde os métodos clássicos podem ser reavaliados sob um novo enfoque, diante dos novos recursos computacionais.

2. ANÁLISE MATRICIAL

A Análise Matricial de Estruturas é utilizada para a resolução de estruturas reticulares com comportamento linear, baseada em métodos matriciais para a obtenção de esforços e deslocamentos em uma estrutura.

Os métodos tradicionais mais utilizados na análise estrutural são: *Método da Rigidez* (ou método dos deslocamentos) e *Método da Flexibilidade* (ou método das forças).

No primeiro, trabalha-se com deslocamentos unitários e os esforços que os produzem, os quais definem os coeficientes de rigidez (esforços por unidade de deslocamento). No segundo, trabalha-se com esforços unitários e os deslocamentos produzidos, os quais definem os coeficientes de flexibilidade (deslocamentos por unidade de força).

Neste trabalho será utilizado o método dos deslocamentos, com formulação matricial, para a resolução de estruturas com não-linearidade material. Utilizando simplificações no diagrama momento fletor-curvatura, modificações na modelagem da estrutura e um processo de iterações, consegue-se obter um método de resolução para problemas não-lineares de fácil aplicação prática e acessível aos projetistas.

Com este método pode-se chegar até a análise da carga de colapso da estrutura, sendo uma opção para substituir a Teoria das Rótulas Plásticas, pois se obtém a solução após um determinado número de iterações, não necessitando do conhecimento prévio da configuração de colapso da estrutura.

Na Teoria das Rótulas Plásticas é necessário testar todas as configurações e verificar qual delas satisfazem certas condições (mecanismo de colapso, equilíbrio e escoamento). Através do presente método, não é necessário testar tais configurações, pois a configuração real de colapso surgirá em consequência das iterações introduzidas no processo.

2.1. Processo linear

Um dos métodos de análise mais utilizados na resolução de estruturas com comportamento linear é o método dos deslocamentos. Tal método será descrito a seguir, baseado em WEAVER (1998), e servirá como base para a extensão ao comportamento não linear.

Uma extensão deste método (o Método dos Elementos Finitos) é aplicável a todos os tipos de estruturas, incluindo aquelas constituídas de vigas, pilares, placas, cascas, e outros elementos estruturais. Entretanto, as estruturas que serão analisadas neste trabalho serão estruturas reticulares. Este tipo de estrutura é, provavelmente, a estrutura mais comumente encontrada na engenharia civil, e pode ser estudada por uma formulação mais simples que a do M.E.F.

A formulação do método é feita por meio da álgebra matricial, pois isto permite uma imediata generalização a estruturas mais complexas, e esta é uma das principais vantagens da notação matricial. O uso de matrizes também é apropriado para a resolução de problemas usando programação em computadores.

O método dos deslocamentos pode ser organizado em um procedimento altamente sistemático para a análise de uma estrutura. Uma vez entendidos os conceitos básicos incorporados no procedimento, o método pode ser aplicado a estruturas com qualquer grau de complexidade.

As equações fundamentais deste método são deduzidas pelo uso do princípio da superposição. As incógnitas são os deslocamentos nodais na estrutura. Desta forma, o número de incógnitas a serem calculadas é o mesmo que o grau de indeterminância cinemática (número de graus de liberdade). O método envolve uso extensivo de ações em membros tendo extremidades fixas, utilizando com freqüência valores tabelados (reações, momentos de engastamento perfeito e coeficientes de rigidez).

Para ilustrar os conceitos do método dos deslocamentos, é apresentada a fig. 2.1, que representa uma viga com um engaste e dois apoios, sujeita às cargas concentradas P_1 e P_2 e ao momento fletor aplicado M .

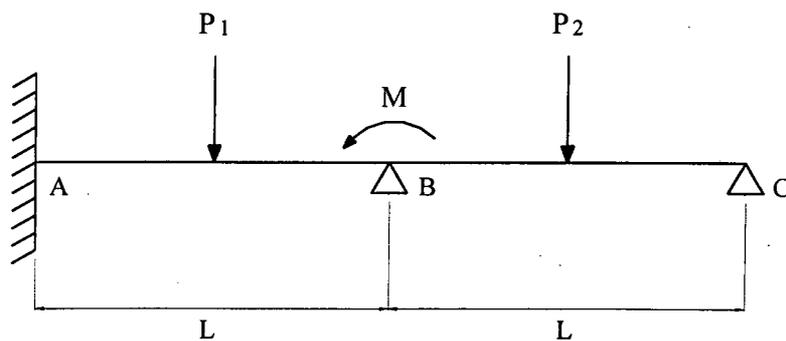


FIGURA 2.1 - Aplicação do método dos deslocamentos.

Desprezando os esforços horizontais, que são nulos, a estrutura acima é cinematicamente indeterminada em 2º grau. Determinando, pelo método dos deslocamentos, duas quantidades incógnitas (as rotações em B e C), todas as demais quantidades poderão ser calculadas.

Então, inicialmente, são aplicadas restrições aos deslocamentos incógnitos, criando engastes nos apoios B e C. Com isto, as rotações nesses pontos se anulam, e todos os apoios transformam-se em engastes (fig. 2.2), onde os *momentos de engastamento perfeito* (M_B e M_C), para a estrutura, são encontrados por meio de valores já calculados e tabelados para diversas situações de carregamento.

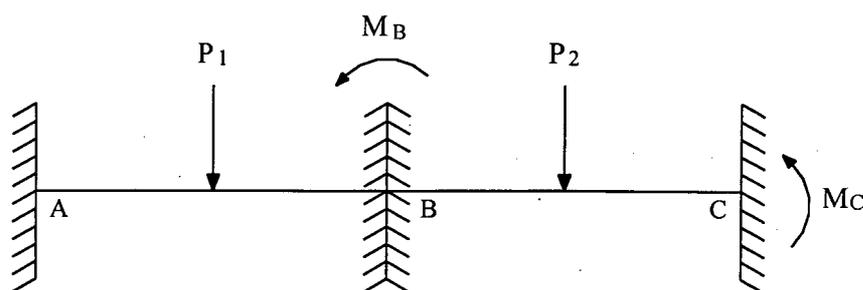


FIGURA 2.2 - Estrutura cinematicamente determinada.

Para compensar a eliminação dessas duas rotações, outras duas vigas devem ser superpostas à viga da fig. 2.2, cada uma contendo um deslocamento unitário e os esforços que o produzem, conforme figuras 2.3 e 2.4. Estes esforços são os *coeficientes de rigidez* (K_{11} , K_{12} , K_{21} e K_{22}), que podem ser calculados a partir da rigidez de cada barra componente da estrutura.

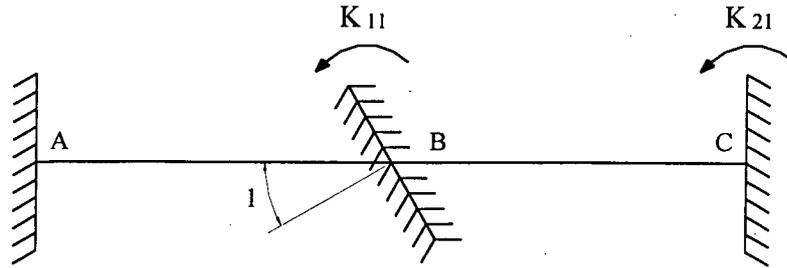


FIGURA 2.3 - Rotação unitária em B.

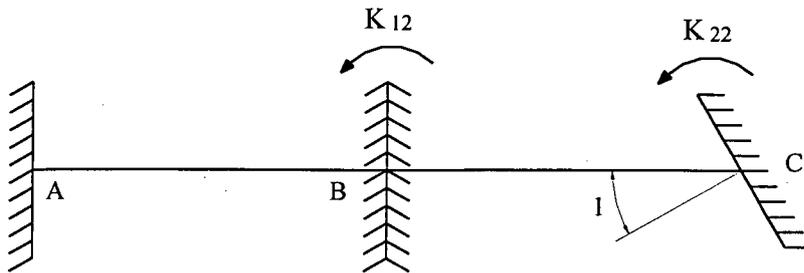


FIGURA 2.4 - Rotação unitária em C.

Portanto, a viga apresentada na fig. 2.1 pode ser analisada pela superposição das vigas das figuras 2.2, 2.3 e 2.4, ou seja, as ações na viga original foram divididas em ações correspondentes, na viga restrita, próprias do *carregamento* e ações correspondentes, na viga restrita, próprias das *rotações*.

Duas equações de superposição, representando os momentos atuando nos apoios B e C, podem ser escritas:

$$F_1 = Fo_1 + K_{11}D_1 + K_{12}D_2, \quad (2.1)$$

$$F_2 = Fo_2 + K_{21}D_1 + K_{22}D_2. \quad (2.2)$$

Expressando as equações (2.1) e (2.2) em forma matricial:

$$\{F\} = \{Fo\} + [K]\{D\}, \quad (2.3)$$

onde:

$\{F\}$ = vetor contendo os momentos aplicados nos apoios B e C da fig. 2.1;

$\{Fo\}$ = vetor contendo os momentos de engastamento perfeito nos apoios B e C da fig. 2.2;

$[K]$ = matriz contendo os coeficientes de rigidez das figuras 2.3 e 2.4;

$\{D\}$ = vetor contendo os deslocamentos incógnitos (rotações em B e C)

Em geral, o número de linhas nestas matrizes é igual ao número de deslocamentos incógnitos. Então, se n for o número de deslocamentos incógnitos, a ordem da matriz $[K]$ será $n \times n$, enquanto os vetores $\{F\}$, $\{F_o\}$ e $\{D\}$ terão ordem $n \times 1$.

Subtraindo $\{F_o\}$ de ambos os lados da eq. (2.3), e pré-multiplicando por $[K]^{-1}$, obtém-se a equação para os deslocamentos incógnitos:

$$\{D\} = [K]^{-1}(\{F\} - \{F_o\}). \quad (2.4)$$

Com os deslocamentos calculados, o próximo passo é determinar os esforços nos extremos das barras e as reações de apoio da estrutura.

Similarmente:

$$\{S\} = \{S_o\} + [k_E]\{D_E\}, \quad (2.5)$$

onde:

$\{S\}$ = vetor contendo os esforços nas extremidades de cada barra;

$\{S_o\}$ = vetor contendo os esforços de engastamento perfeito de cada barra;

$[k_E]$ = matriz contendo os coeficientes de rigidez de cada barra;

$\{D_E\}$ = vetor contendo os deslocamentos nodais calculados anteriormente, para cada barra.

Analogamente, uma equação para o cálculo das reações seria:

$$\{R\} = \{R_o\} + [k_R]\{D_R\}. \quad (2.6)$$

As equações (2.3), (2.5) e (2.6) constituem as três equações de superposição do método dos deslocamentos. A solução completa da estrutura consiste na resolução do vetor de deslocamentos $\{D\}$ da eq. (2.3), ou eq. (2.4), e posterior substituição nas equações (2.5) e (2.6) para determinar $\{S\}$ e $\{R\}$.

É importante salientar que a matriz $[k_E]$ contém os coeficientes de rigidez de cada barra isoladamente, os quais, com uma combinação adequada, formarão a matriz $[K]$ dos coeficientes de rigidez da estrutura global.

Assim, por exemplo, o coeficiente K_{11} , da matriz $[K]$, correspondente ao

apoio B, é igual à soma do coeficiente de rigidez definido pela barra do vão esquerdo da viga com o coeficiente de rigidez definido pela barra do vão direito da viga.

Os mesmos comentários são válidos para os valores dos esforços de engastamento perfeito $\{F_0\}$ e $\{S_0\}$.

2.2. Comportamento não-linear do material

Os materiais que compõem as estruturas, geralmente, apresentam comportamento não-linear, que pode ser observado através da relação momento fletor-curvatura, indicada no gráfico da fig. 2.5, que representa um material com um patamar de escoamento mais ou menos definido (aço, por exemplo).

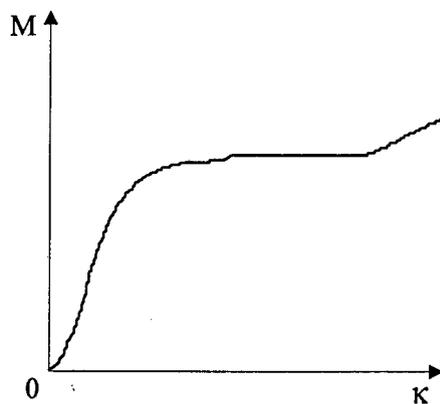


FIGURA 2.5 - Momento fletor x curvatura em estruturas não-lineares.

Quando se trabalha com estruturas com este comportamento, adota-se, em geral, uma simplificação na relação momento fletor-curvatura obtendo-se, assim, o seguinte diagrama simplificado da fig. 2.6.

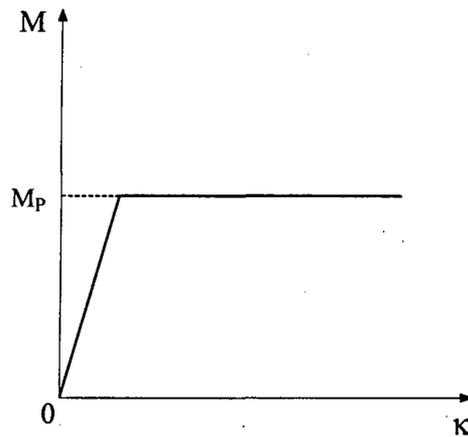


FIGURA 2.6 - Gráfico simplificado de momento fletor x curvatura.

No gráfico anterior, M_p é o momento de plastificação total da seção, ou seja, quando o momento fletor, em alguma seção da estrutura, atingir um valor igual a M_p , esta seção entrará em regime de escoamento. Isto significa que, mesmo com um aumento de carregamento, o momento nesta seção não ultrapassará o momento de plastificação, ou seja, ocorrerá rotação plástica da seção sem acréscimo de momento.

Neste caso, tem-se a formação de uma rótula plástica. Um aumento de carregamento implica em uma redistribuição de momentos ao longo da estrutura, pois a seção com a rótula plástica não suporta mais nenhum acréscimo de momento.

Aumentando, ainda mais, a carga da estrutura, outros pontos atingirão, um a um, o momento de plastificação, surgindo novas rótulas plásticas até um número limite, quando a estrutura entrará em colapso.

Nesta situação de colapso, a estrutura já se encontra com o carregamento crítico. Este número limite de rótulas, que não ultrapassa o número de graus de liberdade acrescido de um, define a configuração de colapso da estrutura, a qual é chamada de *Mecanismo de Colapso*.

Uma estrutura tem vários mecanismos possíveis de colapso, mas apenas um satisfaz as condições de equilíbrio para um dado carregamento e as condições de escoamento ($M \leq M_p$) em todos os pontos. O problema da Teoria das Rótulas Plásticas é determinar qual mecanismo, dentre vários, satisfaz estas condições.

Será apresentado, neste trabalho, um método para resolver este tipo de problema, com base no processo linear apresentado anteriormente.

3. ANÁLISE LIMITE DE PÓRTICOS PLANOS

3.1. Introdução

Uma estrutura de engenharia deve satisfazer muitas exigências funcionais, onde as mais importantes são:

- (a) resistência suficiente para suportar o carregamento;
- (b) rigidez suficiente para não defletir excessivamente sob o carregamento.

Na prática convencional para construção de pórticos metálicos, tem sido comum projetar tal estrutura dentro de seu comportamento elástico, isto é, garantindo que nenhuma deformação permanente ocorra sob as condições de carregamento mais desfavoráveis. Neste sentido, a resistência da estrutura é avaliada pela observação de que nenhum ponto atinja o escoamento.

Tal avaliação de resistência é, muitas vezes, arbitrária, e pode ser examinada à luz do comportamento real da estrutura quando o carregamento é lentamente aumentado.

Uma idéia geral da Teoria das Rótulas Plásticas é apresentada a seguir, baseada em BAKER e HEYMAN (1969).

3.2. Curva carga-deflexão

Seja uma viga simplesmente apoiada, sujeita a uma carga distribuída q , conforme fig. 3.1.

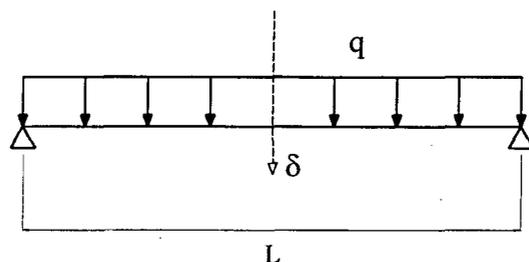


FIGURA 3.1 - Viga simplesmente apoiada, com carga distribuída.

Se o valor da carga q é plotado em função da deflexão central δ , a curva carga-deflexão teria a forma geral da fig. 3.2, para um material dúctil com um patamar de escoamento.

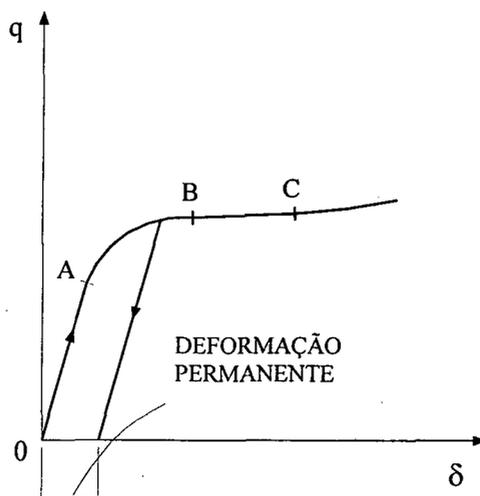


FIGURA 3.2 - Curva carga-deflexão no centro da viga.

De O a A o comportamento é elástico, onde as deformações da viga são completamente recuperáveis sob a retirada da carga, e nenhuma deformação permanente ocorre.

Quando a carga é aumentada, entretanto, existe alguma deformação permanente na viga, e as deflexões aumentam muito mais rapidamente, ao longo da curva AB, quando comparadas com o aumento da carga. Se a carga é reduzida nesta região, o descarregamento da viga ocorrerá elasticamente; se a carga é removida completamente, a viga ficará com uma forma deformada, com uma inflexão mais ou menos definida na seção transversal central.

Um aumento de carga q ao longo da porção BC da curva, conduz a um rápido aumento de deflexão. Em muitos casos, as deflexões são tão grandes nesta região que a viga, provavelmente, atingiria um limite de deformações inaceitável, e é perfeitamente justificável considerar o colapso da viga quando a carga alcança o valor correspondente a B, na fig. 3.2.

A forma característica da curva carga-deflexão é própria das propriedades do material. Porém, também depende das condições de carregamento. Uma curva diferente poderia ser traçada caso a carga fosse concentrada.

Com uma aproximação, entretanto, a curva anterior pode ser substituída pela curva idealizada da fig. 3.3, na qual as deflexões crescem indefinidamente sob uma carga constante q_c ao longo da porção BC da curva.

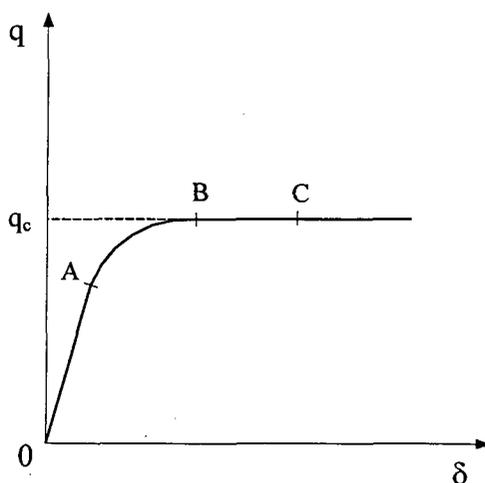


FIGURA 3.3 - Curva idealizada carga-deflexão no centro da viga.

A carga q_c é chamada *carga de colapso* da viga. Como a carga de colapso é constante na fig. 3.3, então os momentos de flexão na viga em colapso são também constantes (no mínimo para uma 1ª aproximação).

As deflexões irrestritas no colapso são produzidas por deformação extremamente localizada na inflexão central da viga. Esta seção transversal central comporta-se como uma rótula conectando as duas metades da viga, as quais, por comparação, são completamente rígidas. Mesmo que as deflexões têm se tornado muito grandes, qualquer pequena redução δq no valor da carga tornará a viga, novamente, uma estrutura capaz de suportar indefinidamente, sem aumento de deflexão, a carga reduzida.

Em seu estado de colapso, a viga tem a forma traçada na fig. 3.4(a), e quase todas as grandes deflexões de colapso da curva idealizada $q \times \delta$ podem ser consideradas como próprias da rotação da rótula central, representada na fig. 3.4(b).

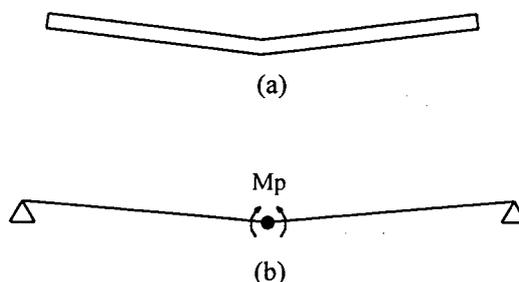


FIGURA 3.4 – Rotação da rótula central.

A rótula é conhecida como uma *rótula plástica*; como ela ocorre na seção de maior momento fletor na viga, sua formação corresponde a algum limite máximo do momento fletor que pode ser imposto na viga.

Para este modelo simples, a resistência da estrutura é dada pela sua carga de colapso q_c , e não está imediatamente relacionada ao comportamento elástico, como é convencionalmente assumido.

O início do escoamento, ponto A da curva idealizada, ocorre com uma carga inferior à carga de colapso, cuja razão varia de acordo com o tipo de estrutura considerada, ou seja, a relação entre o limite elástico (início do escoamento) e o limite plástico (carga de colapso) é variável.

Entretanto, a segunda exigência estrutural, a rigidez, deve ser considerada. Existe uma grande classe de estruturas, das quais o pórtico de múltiplos andares é um exemplo, para a qual o projetista está muito preocupado com as deflexões. Se os membros são definidos com base em suas resistências e os cálculos são feitos para deflexões estimadas, estes cálculos são raramente críticos. É para esta classe de estrutura que a teoria plástica tem sido desenvolvida.

A teoria plástica simples, em comum com a teoria elástica e o método convencional de "tensão de serviço" de projeto estrutural, assume, inicialmente, que deflexões de uma estrutura não definem critério de projeto; então, a estrutura como um todo, e suas componentes, podem ser dimensionadas com base na carga de colapso.

Naturalmente, alguma margem de segurança é incorporada no projeto. A

estrutura não é dimensionada no colapso sob os valores de serviço das cargas. O projetista não pode, é claro, ser liberado da responsabilidade de verificar as deflexões; se estas podem ser grandes o suficiente para causar inconveniência, então devem ser verificadas da maneira usual.

Grandes deflexões causarão inconveniência ao usuário, mas existe um outro sentido técnico no qual o efeito das deflexões deve ser tomado como secundário. Os métodos elástico e plástico assumem que deflexões são, em qualquer caso, pequenas quando comparadas com as dimensões totais de um pórtico; isto é, a geometria da estrutura não é sensivelmente alterada pela aplicação das cargas. Então, a deflexão do ponto A ou B, na fig. 3.3, é considerada, na realidade, muito pequena comparada com o vão L da viga, e a forma distorcida da fig. 3.4 tem sido exagerada para ilustrar o efeito da rótula plástica.

3.3. Relação momento fletor-curvatura

A curva da fig. 3.2 (ou a curva idealizada da fig. 3.3) resulta de uma certa relação momento-curvatura para a seção transversal da viga simplesmente apoiada. Para este exemplo, a relação momento fletor-curvatura, fig. 3.5, é similar à curva carga-deflexão da fig. 3.2.

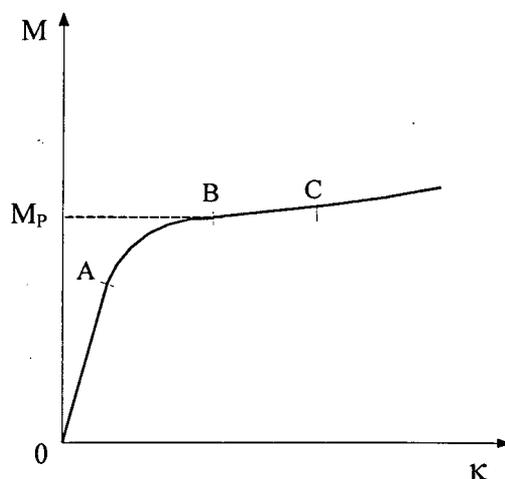


FIGURA 3.5 - Curva momento fletor-curvatura.

Como antes, uma forma ideal, fig. 3.6, pode ser desenhada da fig. 3.5, na qual a curvatura aumenta indefinidamente em um valor constante do momento fletor

M_p . Evidentemente, o valor de M_p corresponde ao momento atuando na rótula plástica; este momento é conhecido como *momento de plastificação total*.

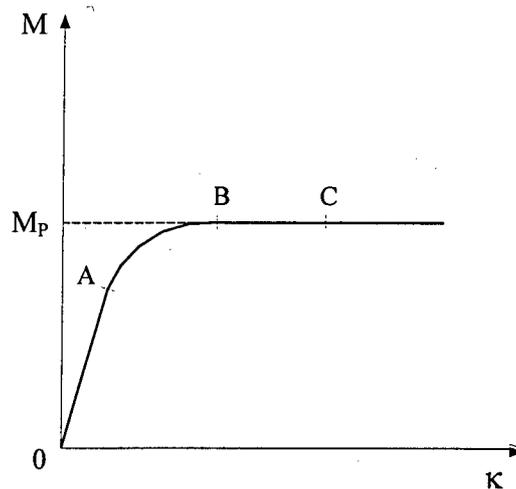


FIGURA 3.6 - Curva idealizada momento fletor-curvatura.

A razão para o adjetivo "total" será dada abaixo, mas deverá ser observado que a porção AB da curva da fig. 3.6 representa um estado de plasticidade parcial.

De O a A o comportamento é elástico e reversível; um pequeno aumento no momento fletor aplicado produz uma pequena mudança proporcional na curvatura. Se o momento fletor é aumentado acima do valor correspondente no ponto A, então se iniciará o escoamento, com um correspondente aumento maior na curvatura. Em B a rótula plástica é completamente desenvolvida, e um aumento ilimitado na curvatura, ou uma *rotação*, pode ocorrer sob um momento fletor constante M_p .

Um conhecimento do valor do momento de plastificação total é tudo o que é exigido na teoria plástica. Como será visto, se os momentos de plastificação total dos vários membros de uma estrutura são conhecidos, então a carga de colapso pode ser determinada, mesmo se a estrutura é complexa.

Similarmente, o projeto de um pórtico que suporta cargas dadas consiste na avaliação de certos valores mínimos de momento de plastificação para os membros.

Um teste de flexão simples produzindo uma curva carga-deflexão, tal como a fig. 3.2, dará uma estimativa do momento de plastificação total, e então fornece ao projetista a informação necessária.

Entretanto, a resistência do material é especificada em termos de uma tensão de escoamento, ao invés de em termos de um teste de flexão sobre um elemento

estrutural, e é natural tentar relacionar o comportamento totalmente plástico na flexão à relação tensão-deformação em tração simples. O projetista poderia, então, calcular conjuntos de *módulos plásticos* os quais, quando multiplicados pela tensão de escoamento do material, dariam os valores requisitados dos momentos de plastificação total.

3.4. Curva tensão-deformação

Para um aço estrutural, a curva tensão-deformação tem a aparência geral da curva traçada na fig. 3.7. Deformação elástica ocorre até que a tensão de escoamento σ_o seja alcançada. Após, a tensão permanece sensivelmente constante até grandes deformações (fase plástica), onde ocorre, então, uma deformação final acompanhada por um pequeno aumento de tensão, até a ruptura.

A fase plástica é suficientemente longa para ser considerada sem limite e ignorar a deformação final, ficando a favor da segurança.

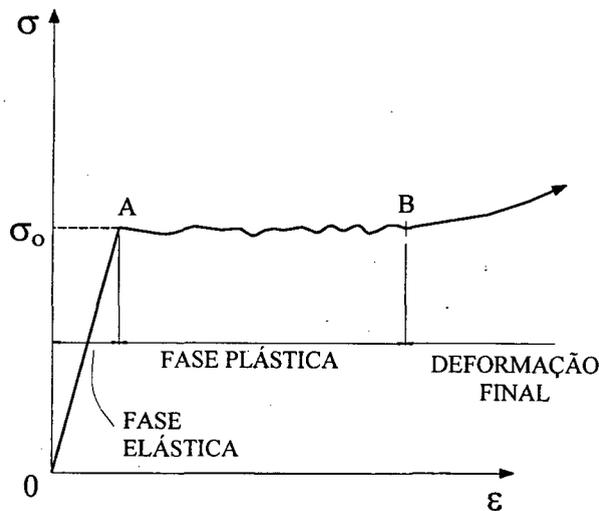


FIGURA 3.7 - Curva tensão-deformação do aço.

Então, na curva tensão-deformação ideal da fig. 3.8, as deformações são consideradas ilimitadas na tensão de escoamento σ_o .

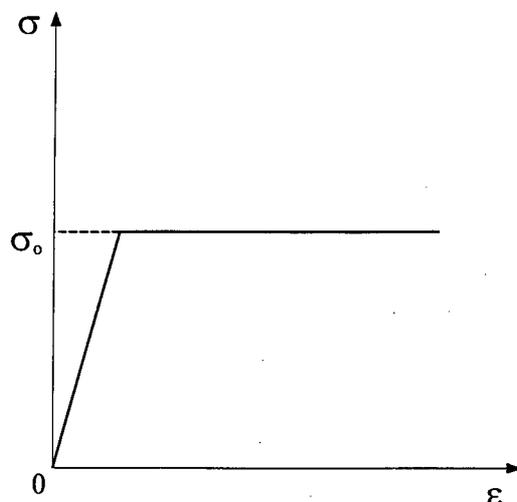


FIGURA 3.8 - Curva idealizada tensão-deformação do aço.

Na análise plástica, diversas hipóteses feitas na teoria elástica sobre flexão de vigas continuam válidas. As deformações variam linearmente através da seção transversal (seções planas permanecem planas) no regime elastoplástico, as fibras adjacentes não afetam umas às outras, e o efeito da tensão cisalhante na flexão pode ser ignorado.

3.5. Plastificação de uma seção transversal

Na flexão pura de vigas de seção transversal retangular, conforme BAKER (1969), um aumento gradativo no momento fletor ocasiona uma distribuição de tensões, ao longo da seção transversal, conforme fig. 3.9.

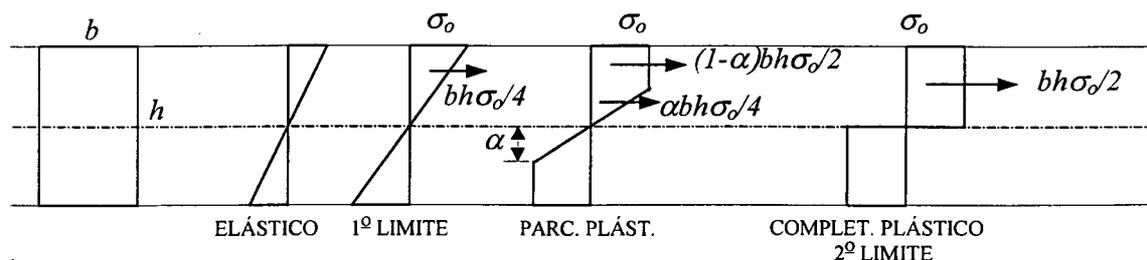


FIGURA 3.9 – Tensões de flexão em uma viga de seção retangular.

No 1º limite, a seção transversal ainda se comporta elasticamente, e o momento fletor M_y , atuante na seção, pode ser calculado como o produto entre a força resultante $bh\sigma_o/4$ e o braço de alavanca $2h/3$, resultando:

$$M_y = \frac{bh^2\sigma_o}{6}. \quad (3.1)$$

Definindo o *módulo elástico* através das fórmulas tradicionais da Resistência dos Materiais ($\sigma = M/Z_E$), tem-se, para a seção considerada:

$$Z_E = \frac{bh^2}{6}. \quad (3.2)$$

Um pequeno aumento do momento fletor, além da fase elástica, submete a seção a um estado *parcialmente plástico*, onde o momento também pode ser calculado, em termos de um coeficiente α :

$$M_R = \frac{(1-\alpha)bh\sigma_o}{2} \cdot \frac{(1+\alpha)h}{2} + \frac{\alpha bh\sigma_o}{4} \cdot \frac{2\alpha h}{3},$$

$$M_R = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_o}{4} \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right). \quad (3.3)$$

Na expressão acima, α é o comprimento relativo do trecho elástico.

O coeficiente α indica o nível de plastificação a que a seção transversal está submetida. Para $\alpha = 1$, a seção está totalmente elástica, enquanto que para $\alpha = 0$, a seção está totalmente plastificada. Valores intermediários de α indicam plastificação parcial.

Assim, um aumento ainda maior, no momento fletor, submete a seção transversal a um estado *completamente plástico*. Neste 2º limite, o momento fletor é calculado como o produto da força resultante $bh\sigma_o/2$ e o braço de alavanca $h/2$, resultando:

$$M_p = \frac{bh^2\sigma_o}{4}. \quad (3.4)$$

O *módulo plástico* de uma seção pode ser definido por analogia com o módulo elástico. Ele é a quantidade que, quando multiplicada pela tensão de

escoamento do material, fornece o valor do momento de plastificação M_p .

Da eq. (3.4), observa-se que $Z_p = \frac{bh^2}{4}$.

O *módulo plástico* é definido, então, como:

$$Z_p = \frac{bh^2}{4}. \quad (3.5)$$

As equações (3.1) e (3.4) podem ser determinadas através da eq. (3.3), através dos valores de α . Para $\alpha = 1$ (1º limite), a eq. (3.3) transforma-se na eq. (3.1), enquanto que para $\alpha = 0$ (2º limite), a eq. (3.3) transforma-se na eq. (3.4).

A razão entre os módulos plástico e elástico define o *fator de forma* da seção transversal, o qual depende apenas da geometria da seção, e tem valor igual a 1,5 para uma seção retangular:

$$\frac{Z_p}{Z_E} = 1,5. \quad (3.6)$$

O estado de plasticidade total, $\alpha = 0$ na eq. (3.3), implica em deformações infinitas na seção transversal; no caso parcialmente plástico, a deformação das fibras externas da seção transversal é $1/\alpha$ vezes a deformação no limite elástico.

Para um aço tendo uma fase plástica da ordem de 10:1, na qual a deformação nas fibras externas alcança dez vezes a deformação no limite elástico, o valor do momento resistente pode quase atingir o valor do momento de plastificação total, antes mesmo de atingir a deformação final.

Estabelecendo $\alpha = 0,1$, na eq. (3.3), o fator entre parêntesis difere da unidade por somente $1/3\%$ (0,0033333). Então, embora a teoria exija a condição impossível de que deformações infinitas possam ocorrer, é suficientemente preciso assumir que uma rótula plástica pode se formar, e pode sofrer rotação indefinida sob um valor constante de momento resistente M_p .

As equações (3.3) e (3.4) podem ser combinadas para fornecer a expressão geral para o momento resistente de uma seção retangular (fator de forma igual 1,5) no estado parcialmente plástico:

$$M_R = M_P \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right). \quad (3.7)$$

Em correspondência à expressão geral acima, a curvatura da seção transversal também pode ser calculada em termos do parâmetro α (fig. 3.9). A fórmula elástica usual deve se conservar para a faixa central elástica de comprimento αh , tal que a curvatura κ pode ser escrita:

$$\kappa = \frac{2\sigma_o}{\alpha E h}, \quad (3.8)$$

onde E = módulo de elasticidade do material.

As equações (3.7) e (3.8), juntas, são expressões paramétricas para a relação momento fletor-curvatura na fase elastoplástica, com α tendo valor entre 1 e 0.

A eq. (3.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{2\sigma_o}{\kappa E h}.$$

Substituindo a expressão anterior na eq. (3.3), simplificando e derivando em relação a κ :

$$M_R = \frac{bh^2\sigma_o}{4} \left(1 - \frac{4\sigma_o^2}{3\kappa^2 E^2 h^2} \right),$$

$$M_R = \frac{bh^2\sigma_o}{4} - \frac{b\sigma_o^3}{3\kappa^2 E^2},$$

$$\frac{dM_R}{d\kappa} = \frac{2b\sigma_o^3}{3\kappa^3 E^2}.$$

Substituindo a eq. (3.8) na expressão anterior:

$$\frac{dM_R}{d\kappa} = \frac{bh^3 E \alpha^3}{12}.$$

Considerando que $I = bh^3/12$, a inclinação da curva momento fletor-curvatura é dada por:

$$\frac{dM_R}{d\kappa} = E.I.\alpha^3, \quad (3.9)$$

tal que, para $\alpha = 1$, a porção elastoplástica da curva une-se com a linha elástica.

As equações (3.7) e (3.8) são plotadas na fig. 3.10.

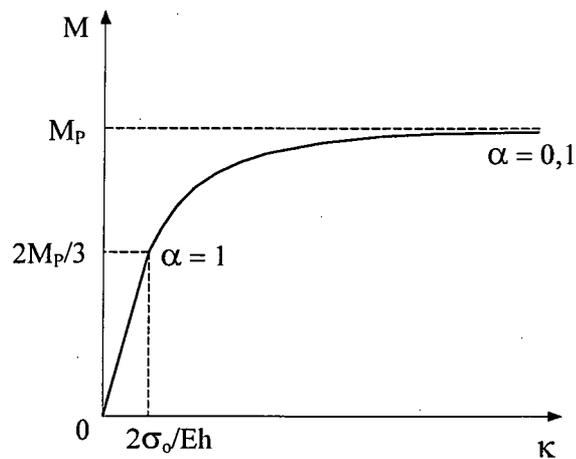


FIGURA 3.10 - Curva momento fletor-curvatura de uma seção retangular.

Ainda, para $\alpha = 1$ (limite elástico):

$$\frac{dM_R}{d\kappa} = EI,$$

$$M_R = EI\kappa. \quad (3.10)$$

A partir do que foi exposto até o momento, o método plástico será aplicado à análise de uma estrutura redundante, baseado em uma formulação apresentada por BAKER (1969). Para isto, é conveniente fazer uma outra idealização na relação momento fletor-curvatura para a flexão de uma viga. Na fig. 3.11 esta relação tem sido simplificada para admitir somente estados elástico ou perfeitamente plástico. A fig. 3.11 é idêntica à fig. 2.6 utilizada no capítulo anterior.

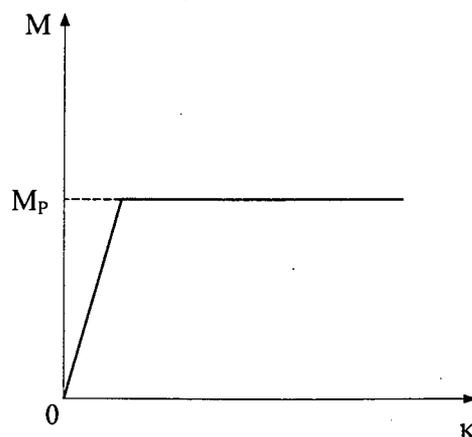


FIGURA 3.11 - Curva momento fletor-curvatura.

Considerar a curva idealizada da fig. 3.11 é o mesmo que admitir um fator de forma igual à unidade para a seção transversal. Dessa forma, o momento fletor produzirá curvaturas inteiramente elásticas se seu valor numérico for menor que M_p ; por outro lado, se $M = M_p$ (em valor absoluto), uma rótula plástica é formada a qual pode sofrer rotação indefinida.

Essa idealização, além de simplificar o trabalho numérico, não modifica a validade dos argumentos, pois a carga final de colapso de um pórtico depende somente do valor de M_p , e não da relação momento-curvatura completa.

3.6. Mecanismo de colapso

Seja, agora, a viga bi-engastada da fig. 3.12, que tem uma seção transversal uniforme e está sujeita a uma carga concentrada P que cresce gradativamente até o colapso.

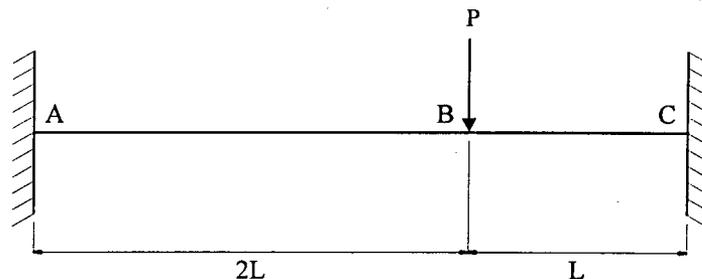


FIGURA 3.12 - Viga bi-engastada com carga concentrada.

Se P for pequeno, os momentos fletores na viga serão elásticos, e a distribuição será como mostrada na fig. 3.13.

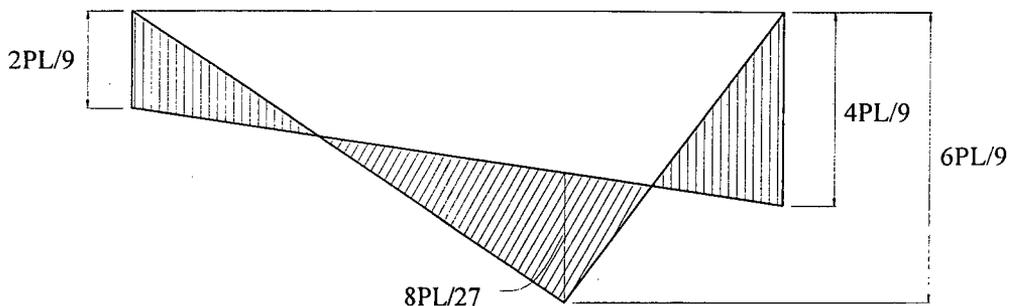


FIGURA 3.13 - Diagrama de momento fletor.

É importante salientar que a viga acima tem duas redundâncias (eliminados os esforços horizontais, que são nulos). O uso das equações de equilíbrio apenas determinará os momentos fletores em termos de duas quantidades incógnitas e, por isto, o problema é estaticamente indeterminado. Então, para se obter a solução, a deformação da viga deve ser considerada, levando em conta o fato de que as extremidades não podem sofrer rotação nem deflexão.

Essa deformação é governada pela relação momento-curvatura que, para o caso elástico, se expressa por:

$$\frac{M}{E.I} = \frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

$$M = EI\kappa = EI \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (3.11)$$

Integrando a expressão acima, com o momento em função de duas incógnitas, obtém-se uma expressão para dy/dx (inclinação da linha elástica). Com nova integração, obtém-se uma expressão para a deflexão y .

Assim, as expressões para dy/dx e y possuem quatro incógnitas: as duas incógnitas iniciais (das condições de equilíbrio) e duas constantes de integração. Estas quatro incógnitas podem ser encontradas das quatro condições de contorno: rotação e deflexão nulas nas extremidades.

A solução elástica exige, portanto, além das condições de EQUILÍBRIO, um conhecimento das propriedades materiais (RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA) e alguns requisitos de COMPATIBILIDADE (condições de contorno dos deslocamentos).

O diagrama de momento fletor elástico da fig. 3.13 será válido enquanto o maior momento fletor ($M_c = 4PL/9$) for menor que M_p . Quando a carga é aumentada, entretanto, a primeira rótula plástica se formará na extremidade C, sob uma carga $P = 9M_p/4L$. Um novo aumento de P causará rotação da rótula sem aumento do momento em C, conforme fig. 3.11. Este momento deve permanecer igual a M_p .

Para calcular a nova distribuição de momentos fletores, uma nova análise deve ser feita, mas será muito mais fácil que para o problema inicial. O valor do momento fletor, agora, é conhecido na extremidade C e igual a M_p , tal que somente uma

redundância permanece.

Utilizando as mesmas expressões anteriores, com $M_c = M_p$, serão encontradas três incógnitas: uma redundância e duas constantes de integração. Estas três incógnitas são encontradas das condições de contorno: deflexões nulas nas extremidades A e C, e rotação nula na extremidade A. A quarta condição original, rotação zero em C, não mais se conserva, pois a está ocorrendo rotação na rótula plástica. Estas são as condições necessárias para completar a solução traçada na fig. 3.14.

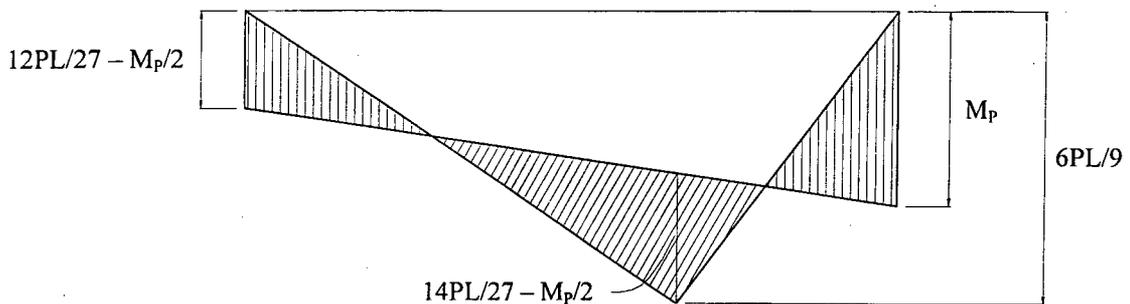


FIGURA 3.14 - Diagrama de momento fletor após a primeira rótula.

A redução do grau de redundância para um é balanceada pela perda de uma condição de contorno.

Quando o valor de P é aumentado para $81M_p/28L$, uma segunda rótula plástica forma-se em B, e outro aumento de P será acompanhado pelas rotações em B e C. Então, ocorre outra redução no grau de redundância, de um para zero, e a estrutura torna-se estaticamente determinada (isostática). O valor de M_A pode ser encontrado imediatamente, e diagrama de momento fletor, fig. 3.15, pode ser desenhado sem a necessidade do uso das equações diferenciais.

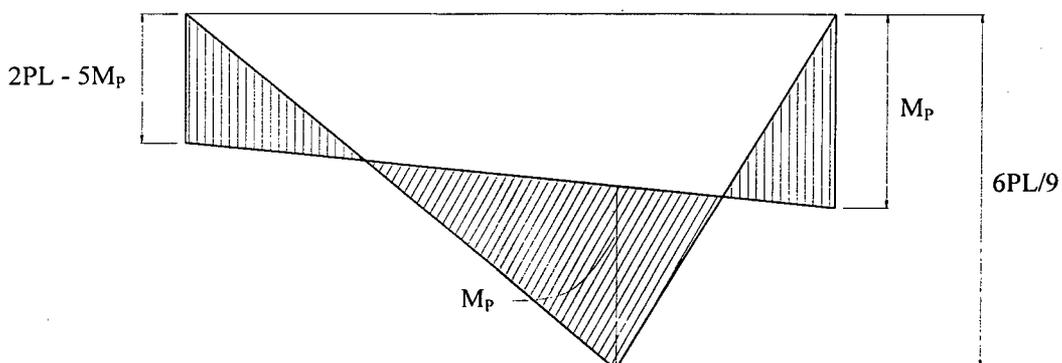


FIGURA 3.15 - Diagrama de momento fletor com duas rótulas.

Quando o valor de P é aumentado para $3M_p/L$, uma rótula final é formada em A (fig. 3.16). As duas rótulas prévias já haviam transformado a viga originalmente redundante em uma estrutura estaticamente determinada (isostática). A formação da terceira rótula transforma a viga em um mecanismo. Em geral, cada rótula que se forma reduz o grau de redundância; a rótula final transforma a viga em um *mecanismo de colapso*.

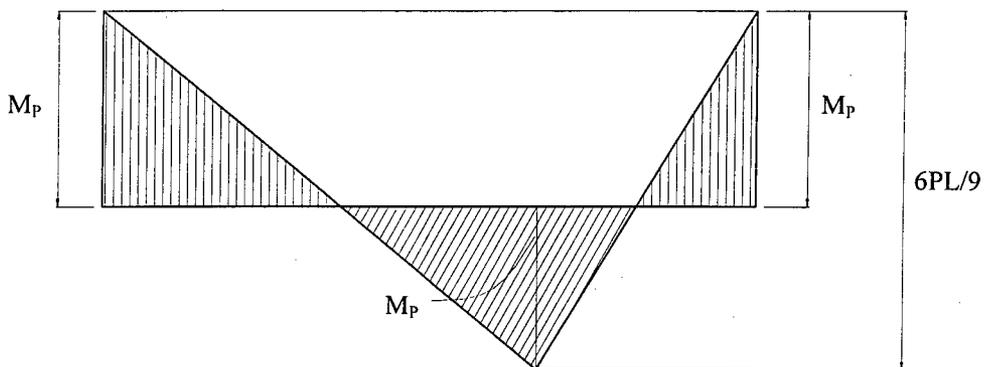


FIGURA 3.16 - Diagrama de momento fletor após a terceira rótula.

Para cada um dos diagramas acima, é relativamente simples calcular as deflexões da equação diferencial de flexão. Plotando os valores de P em função das deflexões no ponto B, a curva da fig. 3.17 é obtida.

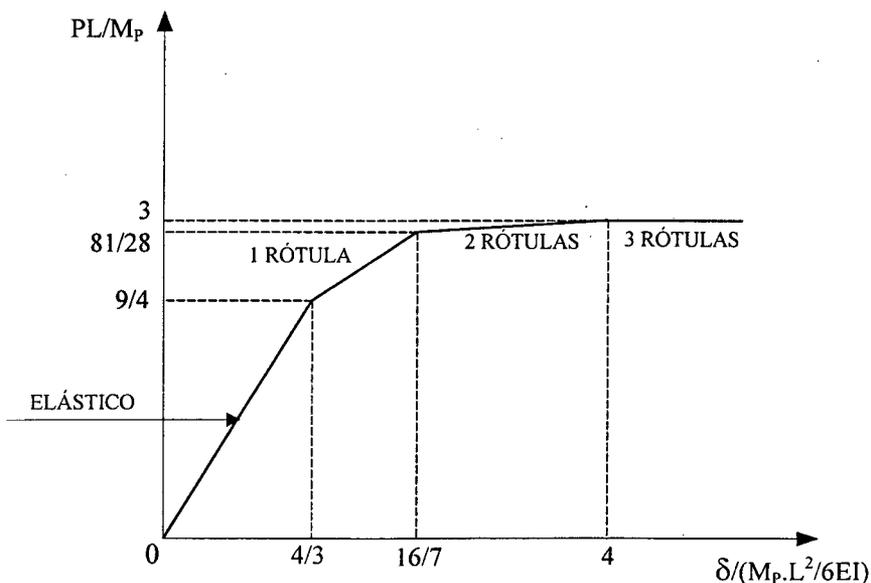


FIGURA 3.17 - Curva carga-deflexão.

A segmentação da curva em várias retas resulta da relação momento-

curvatura idealizada da fig. 3.11. Se a relação mais realística da fig. 3.6 tivesse sido utilizada, a curva carga-deflexão poderia ter cantos arredondados, ao invés da mudança abrupta da inclinação. Mesmo assim, os mesmos aspectos essenciais da curva teriam sido reproduzidos.

Em particular, a carga final de colapso depende apenas do valor de M_p . Embora a forma precisa da curva carga-deflexão é afetada pela relação momento-curvatura, é somente o valor do momento de plastificação que é utilizado na equação de colapso.

O valor final da carga de colapso não depende da formação gradativa das rótulas. Dessa forma, a análise de todo o processo de carregamento da viga não é exigida para o propósito de uma análise plástica simples. Para o problema elementar discutido anteriormente, o estado limite da figura 3.16 poderia ser determinado por inspeção, a partir da análise do diagrama de momento fletor (análise gráfica), a qual pode ser estendida para inúmeros modelos de vigas, onde o número de possíveis mecanismos de colapso é pequeno.

Porém, quando uma estrutura em análise torna-se mais complexa, as dificuldades crescem rapidamente. A análise do diagrama de momento fletor não é mais tão simples como no caso da viga. A escolha de quais seções irão atingir o momento de plastificação, isto é, onde vão se formar as rótulas plásticas, é de difícil dedução. Torna-se quase impossível descobrir imediatamente qual o mecanismo de colapso da estrutura, devendo ser feitas várias análises com cada mecanismo possível até se chegar ao mecanismo de colapso.

A análise plástica seria muito mais simples do que a análise elástica se os aspectos apresentados para o exemplo da viga pudessem ser estendidos para estruturas mais complexas.

Por inspeção da fig. 3.16, verifica-se que nenhum momento fletor excede o valor de M_p , mas isto não será óbvio em exemplos mais complexos. A condição de *escoamento*, como é chamada, deve ser satisfeita, isto é, os momentos fletores em qualquer seção de uma estrutura em colapso não devem exceder o valor do momento de plastificação.

Dessa forma, as três condições fundamentais da análise plástica são:

- MECANISMO
- EQUILÍBRIO
- ESCOAMENTO ($M \leq M_p$)

3.7. Equação do trabalho virtual

De acordo com BAKER (1969), a teoria das rótulas plásticas apresenta um método a partir da equação do trabalho virtual e utilizando combinação de mecanismos elementares, para a análise de estruturas complexas, como pórticos de vários andares.

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que, se sobre um corpo em equilíbrio são impostos pequenos deslocamentos, então o trabalho realizado pelas cargas externas ao longo dos deslocamentos externos é igual ao trabalho realizado pelas forças internas ao longo dos deslocamentos internos.

Alguns pontos devem ser realçados na aplicação do princípio dos trabalhos virtuais:

- o sistema de deslocamentos deve ser compatível, onde as deformações internas devem corresponder aos deslocamentos externos;
- as forças internas devem estar em equilíbrio com as cargas externas.

Com relação às condições citadas, é importante salientar que os deslocamentos não necessitam ser reais. O corpo pode ser arbitrariamente distorcido sem referência a qualquer sistema de carregamento, daí o uso da palavra “virtual”. Também, as forças internas não necessitam ser forças reais próprias às cargas externas; qualquer equilíbrio de forças pode ser usado na equação do trabalho virtual.

Uma aplicação da equação do trabalho virtual será apresentada para o pórtico da fig. 3.18, com vão ℓ e altura h , o qual é carregado por uma carga vertical V no meio do vão e uma carga horizontal H no canto superior direito.

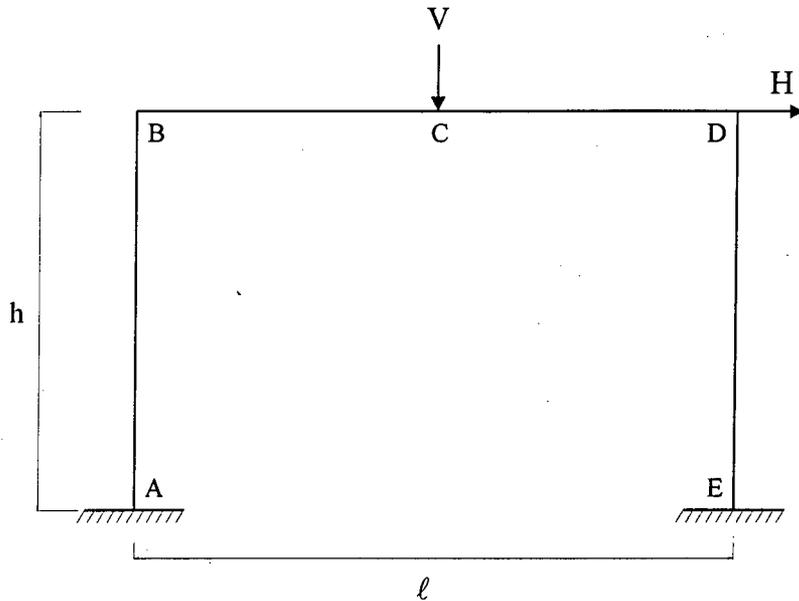


FIGURA 3.18 – Pórtico com cargas concentradas.

O pórtico acima possui três mecanismos distintos de colapso, dependendo dos valores para as cargas V e H , conforme será apresentado no capítulo referente aos exemplos de aplicação, mas somente um mecanismo será apresentado aqui para a aplicação da equação do trabalho virtual, o qual é traçado na fig. 3.19.

Na convenção adotada para o sinal das rotações, compressão nas faces internas do pórtico implica em rotação positiva, e faces internas tracionadas, rotação negativa.

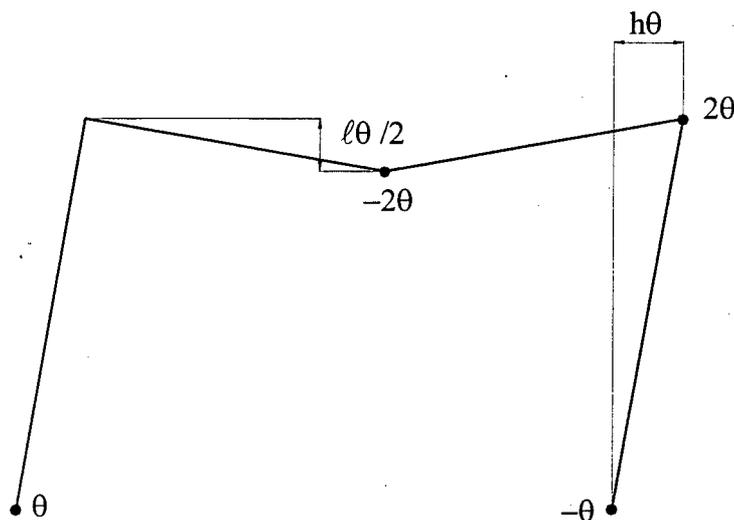


FIGURA 3.19 – Aplicação da equação do trabalho virtual.

Como todas as deformações internas do pórtico estarão concentradas nas rótulas, as quais são conectadas pelas barras que permanecem retas, as rotações das rótulas conduzirão a certos deslocamentos dos nós e pontos de carregamento.

Suponha que certos momentos fletores M_i (M_A , M_B , M_C , M_D e M_E para o pórtico da fig. 3.18) estão em equilíbrio com certas cargas externas W_j (V e H). Os cinco momentos fletores M_A a M_E satisfazem o equilíbrio estático, mas não são necessariamente os momentos fletores reais do pórtico. Como o pórtico tem três redundâncias, os cinco momentos fletores podem ser escritos em função de três quantidades incógnitas.

Independentemente do equilíbrio estático, suponha que certas rotações ϕ_i (θ , 0 , -2θ , 2θ , $-\theta$), nas rótulas conduzam a deslocamentos nodais correspondentes δ_j ($\ell\theta/2$, $h\theta$). Então, deslocamentos δ_j são compatíveis com rotações ϕ_i .

A equação do trabalho virtual combina as condições de equilíbrio e compatibilidade citadas anteriormente:

$$\sum W_j \delta_j = \sum M_i \phi_i. \quad (3.12)$$

Substituindo os valores para o pórtico em análise na eq. (3.12):

$$V \frac{\ell}{2} \theta + H h \theta = M_A \theta + M_C (-2\theta) + M_D 2\theta + M_E (-\theta),$$

$$\frac{1}{2} V \ell + H h = M_A - 2M_C + 2M_D - M_E. \quad (3.13)$$

Como o mecanismo virtual da fig. 3.19, o qual forneceu a eq. (3.13), é também uma representação do mecanismo de colapso, então os valores dos momentos fletores nas seções A, C, D e E são conhecidos e têm o valor igual a M_p . Como os sinais dos momentos fletores devem concordar com os sinais das rotações das rótulas para um mecanismo real, tem-se:

$$M_A = M_D = M_p, \quad M_C = M_E = -M_p. \quad (3.14)$$

Substituindo a eq. (3.14) na eq. (3.13), resulta a equação de colapso para o mecanismo considerado:

$$\frac{1}{2} V \ell + H h = 6M_p. \quad (3.15)$$

Como visto, os sinais negativos utilizados para as rotações das rótulas foram anulados pelos sinais negativos dos momentos. Assim, não há necessidade de considerar os sinais.

A eq. (3.12) também pode ser escrita de forma simplificada:

$$\Sigma W\delta = \Sigma M_p\theta. \quad (3.16)$$

Na eq. (3.16), M_p ocorre em cada rótula e, então, $\Sigma M_p\theta = M_p \Sigma\theta$, e no exemplo anterior $\Sigma\theta = \theta + 2\theta + 2\theta + \theta = 6\theta$. Como δ sempre será em função de θ , este sempre será cancelado. Assim, a equação de colapso resulta:

$$V\left(\frac{\ell}{2}\theta\right) + H(h\theta) = M_p(6\theta),$$

$$\frac{1}{2}V\ell + H.h = 6M_p. \quad (3.15)$$

A equação do trabalho virtual é muito valiosa na análise plástica quando se conhece o mecanismo de colapso da estrutura. Porém, encontrar o mecanismo de colapso por tentativa não é uma tarefa muito fácil, sendo necessário utilizar um artifício chamado “combinação de mecanismos”. Antes, porém, serão apresentados os teoremas fundamentais da teoria plástica.

3.8. Teoremas fundamentais da teoria plástica

As cargas em uma estrutura serão consideradas proporcionais, isto é, não variarão independentemente, mas estarão sujeitas a um fator de carga λ que atuará em todas as cargas. Os valores das cargas de serviço serão multiplicados por este fator de carga. Os teoremas fundamentais referem-se ao valor do fator de carga de colapso λ_c da estrutura.

O primeiro teorema afirma que λ_c tem um valor definido. Quando as cargas de uma estrutura são aumentadas lentamente, isto é, quando o valor de λ é aumentado, ocorrerá o colapso para um único valor de λ_c . Este é o “Teorema da Unicidade”.

O segundo teorema refere-se ao valor de λ resultante da análise de um suposto mecanismo de colapso. Se a suposição estiver correta, então $\lambda = \lambda_c$. Por outro

lado, o teorema afirma que o valor de λ será sempre maior ou, no mínimo, igual ao valor real de λ_c . Então, imaginando todas as cargas sendo aumentadas lentamente na proporção de seus valores de serviço, o colapso ocorrerá pelo suposto mecanismo, a menos que já tenha ocorrido pelo mecanismo correto. Este é o “*Teorema do Limite Superior*” ou “*Teorema Cinemático*”, também chamado de teorema inseguro, por não estar a favor da segurança.

O terceiro teorema refere-se ao estado de equilíbrio da estrutura. Suponha que é possível encontrar, em um certo fator de carga λ , uma distribuição de momento fletor para a estrutura, tal que o momento de plastificação não seja ultrapassado em qualquer seção. A distribuição de momentos não necessita ser uma distribuição real sob o valor do fator de carga. Tal distribuição, em geral, não corresponderá a um mecanismo, tal que o colapso não ocorrerá. Por outro lado, se a distribuição de momentos é a de colapso, então ocorrerá o mecanismo de colapso. O teorema afirma, então, que o valor de λ sempre será menor ou, no máximo, igual ao valor de λ_c . Este é o “*Teorema do Limite Inferior*” ou “*Teorema Estático*”, também chamado de teorema seguro, por estar a favor da segurança.

Os dois teoremas (estático e cinemático) são definidos em termos do fator de carga, o que corresponde a um problema de análise de estruturas. Isto pode ser invertido para ser aplicado a um problema de projeto de estrutura. As equações básicas de colapso relacionam as cargas aos momentos de plastificação total. O objetivo de uma análise é encontrar, para uma dada estrutura com os valores de M_p conhecidos, o valor do fator de carga de colapso. O objetivo de um projeto é dimensionar as seções das várias barras da estrutura tal que as cargas de serviço possam ser suportadas, seguramente, por um fator de carga específico.

Então, interpretando os teoremas no sentido de projeto, o Teorema do Limite Superior define que o valor de M_p , resultante da análise de um mecanismo arbitrariamente assumido, será menor do que o realmente exigido. Similarmente, o uso do Teorema do Limite Inferior conduzirá a um valor de M_p maior do que o realmente exigido.

Conforme citado, uma estrutura em colapso deve satisfazer três condições fundamentais.

Primeiro, deve ser formado um número suficiente de rótulas plásticas para

transformar a estrutura em um MECANISMO. Segundo, a distribuição de momentos fletores deve estar em EQUILÍBRIO com as cargas externas. Finalmente, a distribuição de momentos fletores deve ser tal que nenhuma seção da estrutura possua momento superior ao de plastificação. Esta é a condição de ESCOAMENTO.

Se essas três condições forem satisfeitas simultaneamente, então o valor correspondente do fator de carga é único (Teorema da Unicidade).

A demonstração detalhada dos teoremas citados pode ser encontrada em BAKER (1969), pois foge ao escopo deste trabalho. Os três teoremas podem ser resumidos como segue:

$$\lambda = \lambda_c \left\{ \begin{array}{l} \text{MECANISMO} \\ \text{EQUILÍBRIO} \\ \text{ESCOAMENTO} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda \geq \lambda_c \\ \\ \lambda \leq \lambda_c \end{array}$$

O Teorema do Limite Superior garante a primeira condição (mecanismo), enquanto o Teorema do Limite Inferior satisfaz a segunda e terceira condições (equilíbrio e escoamento). O Teorema da Unicidade satisfaz as três condições simultaneamente, o que garante a configuração real de colapso.

Nota-se que o equilíbrio não é, necessariamente, satisfeito pelo Teorema do Limite Superior de um mecanismo assumido. O mecanismo poderia ter rótulas extras para as quais nenhuma distribuição de equilíbrio para os momentos fletores poderia ser construída.

Uma observação importante do Teorema do Limite Superior é que o fator de carga verdadeiro no colapso é o menor fator possível que pode ser encontrado de uma consideração de todos os mecanismos possíveis. Esta é uma importante consideração no método de combinação de mecanismos que será apresentado a seguir.

3.9. Combinação de mecanismos

Como foi visto, a equação do trabalho virtual pode ser usada para deduzir uma equação de equilíbrio para uma estrutura, a partir de um mecanismo escolhido.

Para estruturas complexas, como pórticos de vários andares, o processo de combinação de mecanismos divide a estrutura em vários mecanismos independentes e define a equação de colapso para cada mecanismo, a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Todos os outros mecanismos possíveis são combinações destes mecanismos independentes.

Uma estrutura possui várias seções que são possíveis localizações de rótulas. Estas seções são chamadas de *seções críticas*. Se uma estrutura possui N seções críticas e R redundâncias, então existirão $(N - R)$ mecanismos independentes. Todos os outros mecanismos serão deduzidos destes $(N - R)$ mecanismos independentes.

Esse número de mecanismos independentes ainda poderá ser alterado através de *rotações de juntas*. Por exemplo, no pórtico apresentado anteriormente (fig. 3.18), a seção D foi considerada uma seção crítica. Nesta seção ocorreu uma rótula plástica que, na realidade, deve se formar no membro mais fraco (na viga ou no pilar). Assim, é comum considerar duas seções críticas na junta de ligação entre vigas e pilares de pórticos. Isto dará origem a rotações de juntas. Se J é o número de rotações de juntas, então existirão $(N - R - J)$ mecanismos a serem considerados como independentes. É claro que, com a inclusão das rotações de juntas, o número de seções críticas também aumenta.

O processo de combinação de mecanismos para encontrar o carregamento de colapso, ou o fator de carga λ , ficará mais claro no exemplo que segue.

Baseado em um exemplo extraído de BAKER (1969), um pórtico de dois andares tem seção uniforme e suporta as cargas mostradas na fig. 3.20.

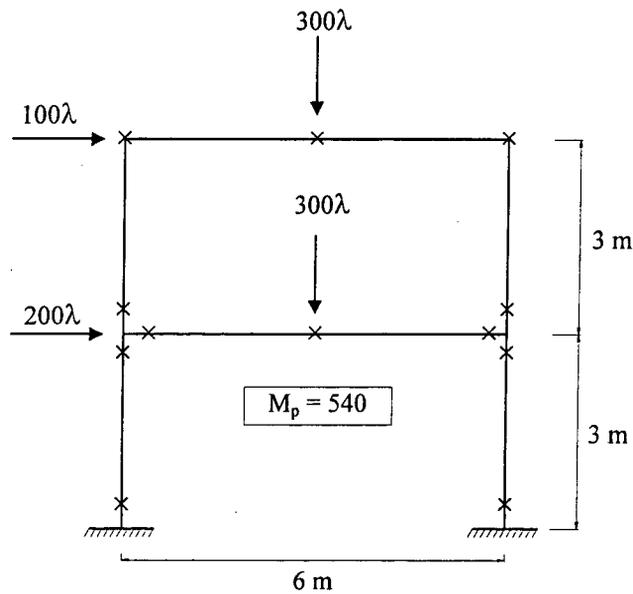


FIGURA 3.20 – Pórtico de dois andares.

Somente uma seção crítica é marcada em cada extremidade da viga superior, pois a seção é uniforme. Entretanto, três seções são marcadas em cada extremidade da viga inferior, pois uma rótula plástica poderá se formar na própria viga, ou nos pilares inferior ou superior. O somatório dos momentos fletores em cada conjunto de três seções críticas deve ser igual a zero.

As rotações de juntas são mostradas na fig. 3.21, e a convenção de sinais adotada não é importante, como será visto no desenvolvimento do problema.

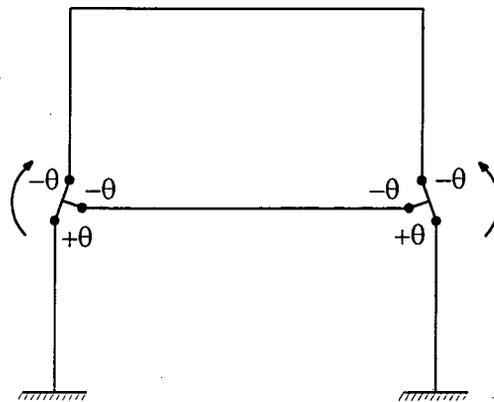


FIGURA 3.21 – Rotações de juntas.

O pórtico da fig. 3.20 tem 6 redundâncias e foram marcadas 12 seções críticas, tal que o número de mecanismos independentes é calculado a seguir.

- 12 seções críticas (fig. 3.20) (N)
- 6 redundâncias (R)

- 6 mecanismos independentes $(N - R)$
- 2 rotações de juntas (fig. 3.21) (J)

- 4 mecanismos “verdadeiros” $(N - R - J)$

Os 4 mecanismos, a partir dos quais pode-se construir todos os outros mecanismos possíveis, são traçados na fig. 3.22.

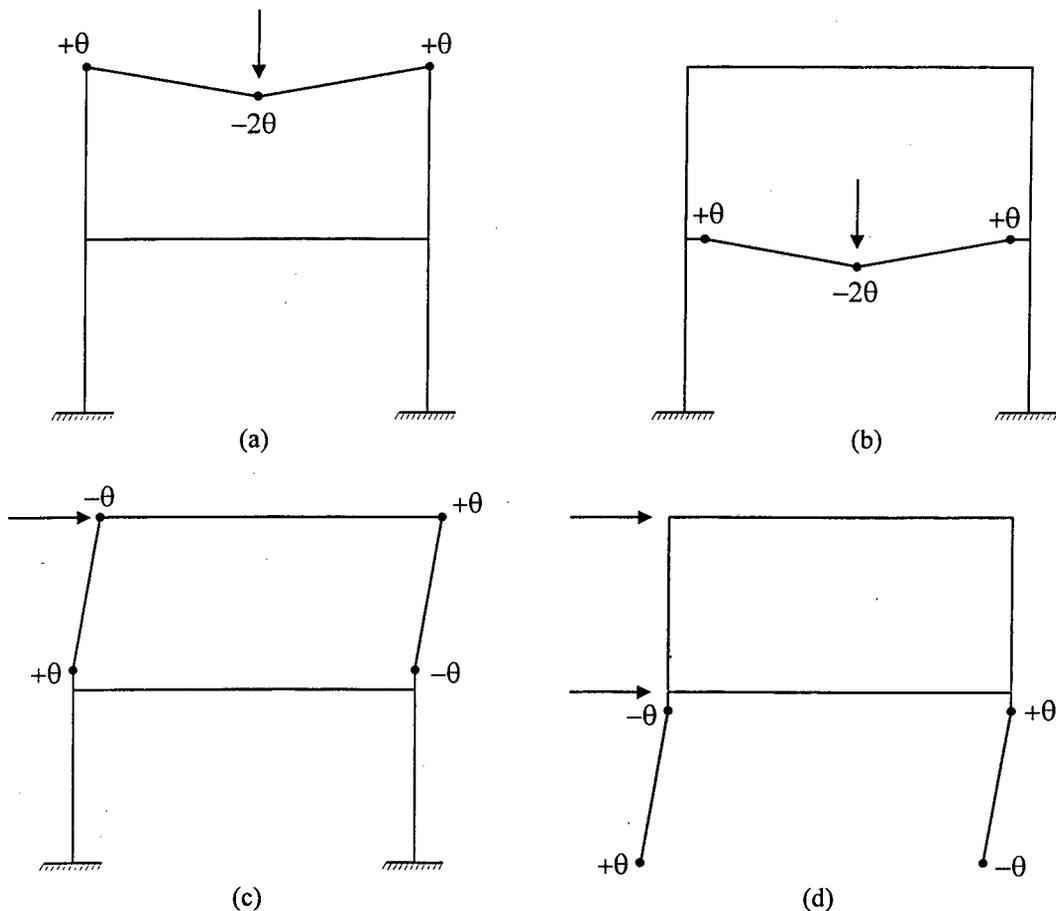


FIGURA 3.22 – Mecanismos “verdadeiros”.

Os 4 mecanismos acima representam o colapso das vigas e o colapso dos andares. São muito utilizados estes tipos de mecanismos em pórticos de múltiplos andares. Considerando n o número de andares e m o número de vãos entre os pilares extremos, para um pórtico retangular, existirão n mecanismos de andar e mn

mecanismos de viga, resultando em $n(m + 1)$ mecanismos “verdadeiros”. Para este exemplo, $n = 2$ e $m = 1$, o que resulta em 2 mecanismos de andar e 2 mecanismos de viga, somando 4 mecanismos “verdadeiros”.

Utilizando a equação do trabalho virtual ($\Sigma W\delta = \Sigma M_p\theta$) e as cargas da fig. 3.20, as equações de colapso podem ser escritas para os quatro mecanismos independentes da fig. 3.22.

- (a) $(300\lambda)(3\theta) = 540(\theta + 2\theta + \theta)$
 $900\lambda = 2160 \rightarrow \lambda = 2,4$ (fig. 3.22a)
- (b) $900\lambda = 2160 \rightarrow \lambda = 2,4$ (fig. 3.22b)
- (c) $300\lambda = 2160 \rightarrow \lambda = 7,2$ (fig. 3.22c)
- (d) $900\lambda = 2160 \rightarrow \lambda = 2,4$ (fig. 3.22d)

Estas quatro equações de colapso, juntamente com as rotações das juntas, fornecerão a solução final correta. A ordem de combinação dos mecanismos é arbitrária, mas geralmente inicia-se com os mecanismos que possuem os menores valores de λ . Neste exemplo particular, a combinação iniciará pelos mecanismos (c) e (d), para que as rotações das juntas sejam aplicadas uma única vez, diminuindo o trabalho na análise.

Combinando os mecanismos (c) e (d), e aplicando a rotação das juntas, obtém-se a figura 3.23.

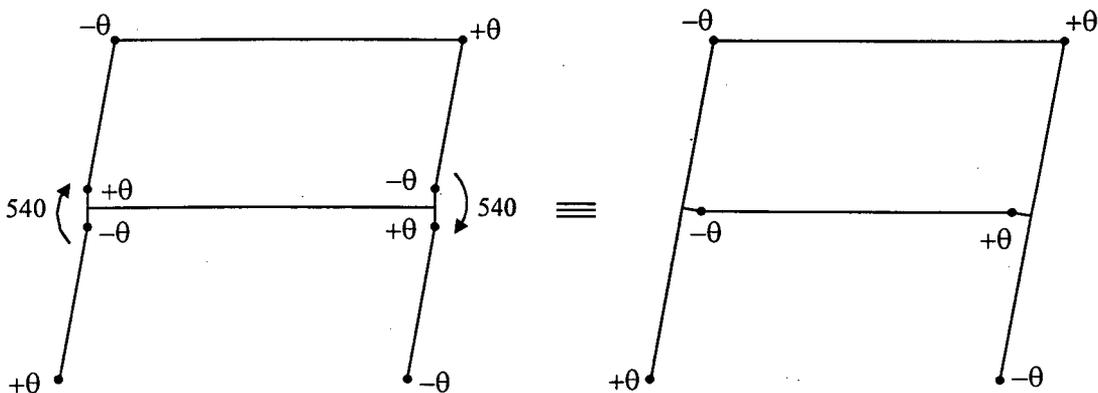


FIGURA 3.23 – (e) = (c) + (d).

A rotação na junta do lado esquerdo da viga inferior elimina as duas rótulas no pilar, tal que $2(M_p\theta)$ deve ser subtraído do lado direito das equações de colapso. Entretanto, uma rótula aparece na extremidade da viga, tal que $(M_p\theta)$ deve ser

adicionado no lado direito das equações. Como resultado disto, apenas $(M_p \times \theta)$ deve ser subtraído, o que resulta no valor de 540, já cancelando θ conforme as equações. A mesma consideração vale para a junta o lado direito.

Combinando as equações:

$$(c) \quad 300\lambda = 2160 \rightarrow \lambda = 7,2$$

$$(d) \quad 900\lambda = 2160 \rightarrow \lambda = 2,4$$

$$1200\lambda = 4320$$

$$1080 \quad (\text{rotação de juntas})$$

$$(e) \quad 1200\lambda = 3240 \rightarrow \lambda = 2,7$$

Combinando, agora, o mecanismo (e), fig. 3.23, com o mecanismo (b), fig. 3.22b, obtém-se o mecanismo (f) da fig. 3.24. Nesta combinação, as rótulas na extremidade esquerda da viga inferior, dos mecanismos (b) e (e), se anulam, e o valor de $2(M_p\theta)$ deve ser subtraído do lado direito da equação de colapso.

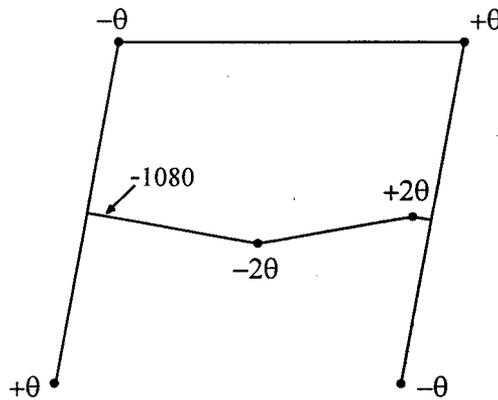


FIGURA 3.24 – (f) = (e) + (b).

Combinando as equações de colapso:

$$(e) \quad 1200\lambda = 3240 \rightarrow \lambda = 2,7$$

$$(b) \quad 900\lambda = 2160 \rightarrow \lambda = 2,4$$

$$2100\lambda = 5400$$

$$1080 \quad (\text{rótulas canceladas})$$

$$(f) \quad 2100\lambda = 4320 \rightarrow \lambda = 2,06$$

Finalmente, da combinação do mecanismo (f), fig. 3.24, com o mecanismo (a), fig. 3.22a, obtém-se o mecanismo (g) da fig. 3.25. Nesta combinação, também ocorre o cancelamento de duas rótulas, na extremidade esquerda da viga superior, dos mecanismos (f) e (a), e o valor de $2 (M_p \theta)$ deve ser subtraído do lado direito da equação de colapso

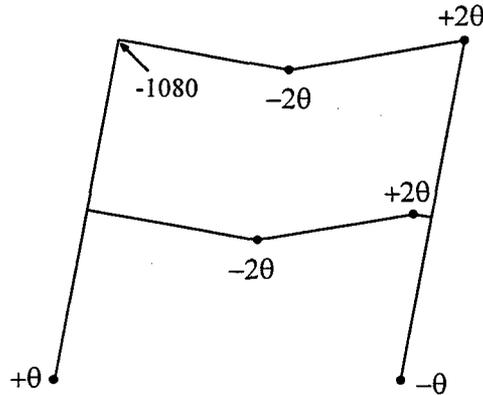


FIGURA 3.25 – (g) = (f) + (a).

Combinando as equações de colapso:

$$(f) \quad 2100\lambda = 4320 \rightarrow \lambda = 2,06$$

$$(a) \quad 900\lambda = 2160 \rightarrow \lambda = 2,4$$

$$3000\lambda = 6480$$

$$1080 \quad (\text{rótulas canceladas})$$

$$(g) \quad 3000\lambda = 5400 \rightarrow \lambda = 1,8$$

(3.17)

Como pode ser observado, o mecanismo (g) é a configuração correta de colapso, pois ele fornece o menor valor para o fator de carga ($\lambda = 1,8$). O estado do pórtico para $\lambda = 1,8$ é mostrado na figura 3.26, onde os momentos de plastificação são mostrados atuando nas posições das rótulas.

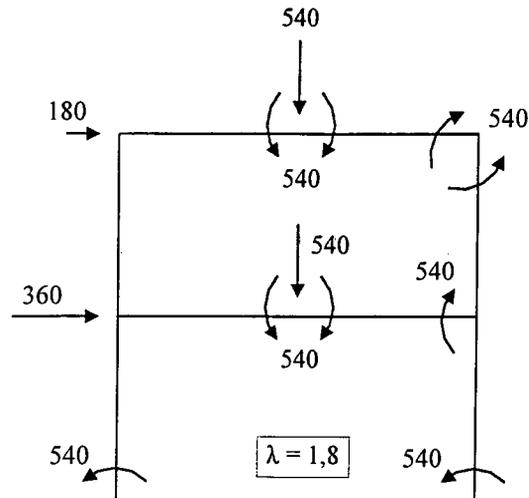


FIGURA 3.26 – Estado final do pórtico.

Este pórtico atingiu o colapso com a formação de seis rótulas. O número máximo possível de rótulas, para uma estrutura com N redundâncias, é $(N+1)$ rótulas. Quando isto ocorre, a estrutura transforma-se em isostática com a formação de N rótulas. Cada rótula que se forma reduz uma vez o grau de redundância. No exemplo apresentado, com seis redundâncias, apenas seis rótulas se formaram até ao mecanismo de colapso. Com isto, na configuração final, ainda restou uma redundância.

Para uma demonstração de que a solução encontrada é correta, os momentos devem ser determinados em cada seção crítica, e o equilíbrio e a condição de escoamento ($M \leq M_p$) devem ser verificados.

A análise estática pode ser feita utilizando-se a equação do trabalho virtual, ou, para este caso, verificando o equilíbrio diretamente pelo exame das barras individuais do pórtico.

Na fig. 3.27, os momentos de plastificação são colocados nas rótulas e os momentos flectores podem ser calculados imediatamente para as duas vigas. Para a análise completa dos pilares, entretanto, um momento fletor incógnito M deve ser introduzido, devido à redundância restante. Um balanço de forças através da estrutura permite determinar os momentos nos pilares em função de M . A análise estática não encontra o valor de M , pois a estrutura continua com uma redundância.

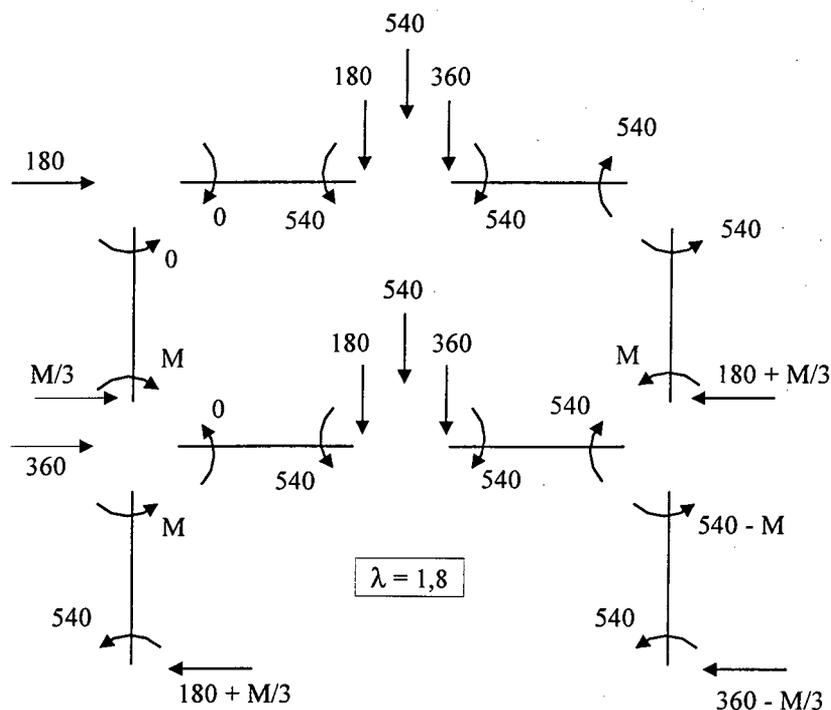


FIGURA 3.27 – Equilíbrio de forças e momentos.

O mecanismo de colapso será confirmado como correto, portanto, se algum valor de M puder ser encontrado tal que a condição de escoamento seja satisfeita, pois isto satisfará a três condições do Teorema da Unicidade. Primeiro, a distribuição de momentos fletores da fig. 3.27 satisfaz as condições de EQUILÍBRIO. Segundo, ela corresponde a um MECANISMO. Finalmente, se M for fixado com qualquer valor entre 0 e 540, a condição de ESCOAMENTO será satisfeita, tal que o fator de carga $\lambda = 1,8$ fornecido pelo mecanismo (g), fig. 3.25 e eq. (3.17), fica confirmado.

O exemplo apresentado está incluído nos exemplos analisados pelo método proposto, no capítulo 6.

4. EFEITOS DO ESFORÇO NORMAL

No capítulo 3 foi apresentada a plastificação de uma seção retangular sem a consideração do esforço normal.

Entretanto, se somente uma carga axial é aplicada à seção transversal de um pilar, a carga dará origem a uma tensão de compressão sobre toda a seção. Adicionando, então, um pequeno momento fletor, produzir-se-á uma variação linear de tensão através da seção.

Um aumento do momento fletor até um certo valor, com a carga axial permanecendo constante, provocará escoamento em uma das faces da seção, seguido de escoamento na outra face e, posteriormente, plastificação em toda a seção, conforme esquematizado na fig. 4.2.

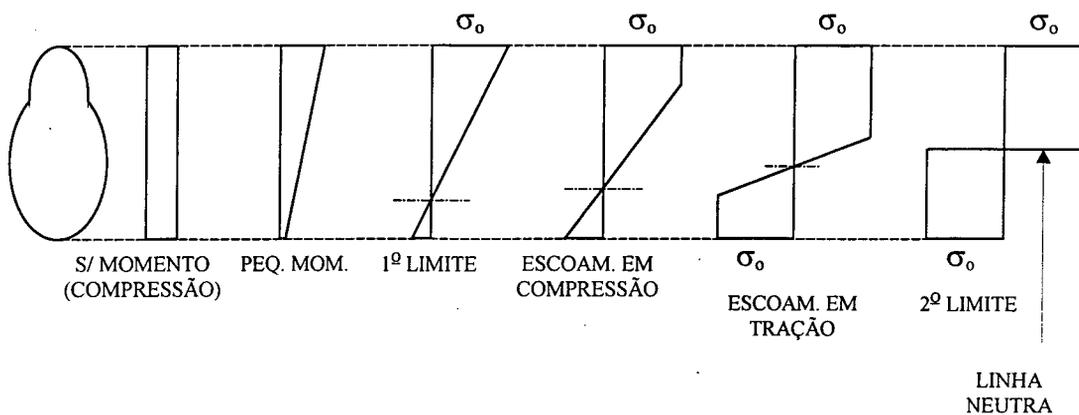


FIGURA 4.1 - Tensões devidas ao esforço normal e aumento gradativo do momento fletor.

Durante este processo, a linha neutra, a qual se situa fora da seção para valores de momento fletor muito pequenos, desloca-se gradativamente em direção a posição final no estado totalmente plastificado.

É este estado de plastificação total que interessa, e para ilustrar o efeito da carga axial sobre o valor do momento de plastificação total, uma seção transversal retangular será examinada, conforme fig. 4.3.

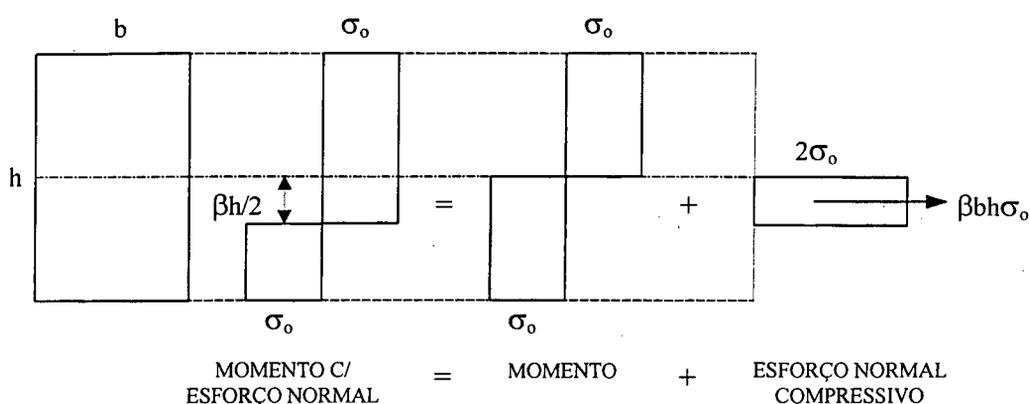


FIGURA 4.2 - Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção retangular.

Uma carga axial P é suposta atuar no centro de gravidade da seção transversal, em adição a um momento fletor M_p suficiente para causar plastificação total na seção transversal.

Como existe uma força resultante P através da seção, a linha neutra deve deslocar-se da linha central, para uma distância $\beta h/2$. Será visto que a distribuição de tensão totalmente plástica pode ser considerada como sendo composta de duas partes, isto é, sobre a distribuição original totalmente plástica na ausência de carga axial pode ser superposta uma distribuição fictícia envolvendo tensões de magnitude $2\sigma_0$. Esta segunda distribuição deve ser equivalente a uma força total P , e reduzirá o valor do momento de plastificação total por uma quantidade $P(\beta h/4)$.

Então, da fig. 4.2, resulta:

$$P = \beta b h \sigma_0 = \beta P_0, \quad (4.1)$$

$$M_p = M_{p0} - P \left(\frac{\beta h}{4} \right). \quad (4.2)$$

Substituindo a eq. (4.1) na eq. (4.2):

$$M_p = M_{p0} - (\beta b h \sigma_0) \left(\frac{\beta h}{4} \right),$$

$$M_p = M_{p0} - \frac{\beta^2 b h^2 \sigma_0}{4}. \quad (4.3)$$

Observando a eq. (3.4), e considerando $M_P = M_{P_0}$ naquela equação, a eq. (4.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_P &= M_{P_0} - \beta^2 M_{P_0}, \\ M_P &= (1 - \beta^2) M_{P_0}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nas equações (4.1) e (4.4), definem-se:

- P_0 = esforço normal de plastificação da seção transversal, na ausência de momento fletor.
- M_{P_0} = momento de plastificação total da seção transversal, na ausência de carga axial.

Da eq. (4.1):

$$\beta = \frac{P}{P_0}, \quad (4.5)$$

$$\beta^2 = \left(\frac{P}{P_0} \right)^2. \quad (4.6)$$

Da eq. (4.4):

$$\beta^2 = 1 - \frac{M_P}{M_{P_0}}. \quad (4.7)$$

Combinando as equações (4.6) e (4.7):

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 &= 1 - \frac{M_P}{M_{P_0}}, \\ \frac{M_P}{M_{P_0}} + \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A eq. (4.8) fornece a curva da fig. 4.3.

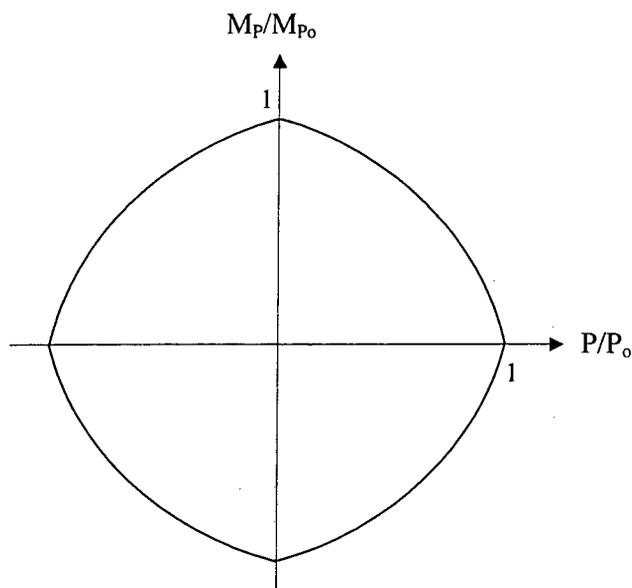


FIGURA 4.3 - Superfície de escoamento para seção transversal retangular.

Esta curva é duplamente simétrica. A carga P foi considerada de compressão, mas a mesma análise se conserva para tração e momento inverso.

Para pequenos valores de carga axial, existe muito pouca redução no valor de M_p .

A figura 4.3 é um exemplo de um importante conceito na teoria plástica. Ela representa uma *superfície de escoamento*.

Um ponto no plano da figura representa, para uma dada seção transversal, de M_{p_0} e P_0 conhecidos, uma certa combinação de momento fletor e carga axial.

Se o ponto se situa dentro do contorno, então a combinação de esforços pode ser suportada pela seção. Um ponto sobre o contorno representa uma seção totalmente plastificada. Um ponto fora do contorno representa um estado impossível.

Para a implementação, no programa de análise limite, do efeito do esforço normal no momento de plastificação, e uma extensão a uma seção transversal I, a eq. (4.8) será apresentada de maneira diferente.

Substituindo a eq. (4.5) na eq. (4.2), resulta:

$$M_p = M_{p_0} - P \left(\frac{Ph}{4P_0} \right),$$

$$M_P = M_{P_0} - \frac{P^2 h}{4P_0}. \quad (4.9)$$

A análise anterior, para uma seção transversal retangular, pode ser aplicada, com poucas alterações, para determinar o efeito do esforço axial sobre uma seção I, conforme fig. 4.4, considerando a linha neutra sobre a alma.

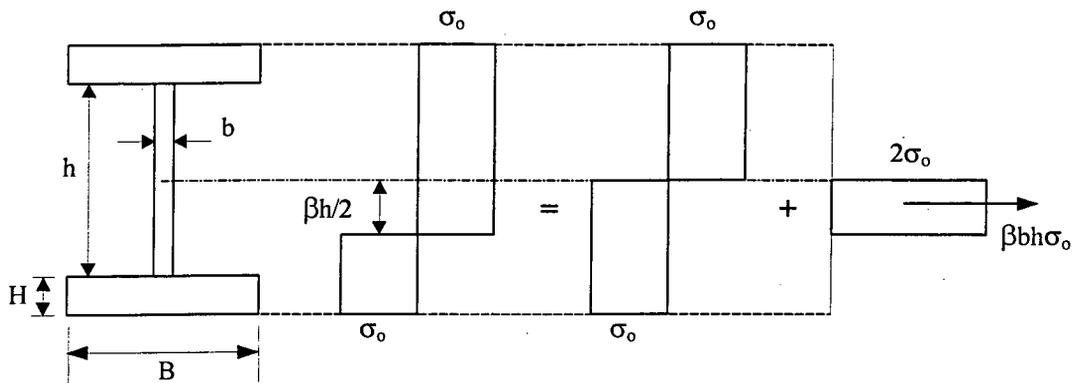


FIGURA 4.4 - Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção I. Linha neutra sobre a alma.

Da fig. 4.4, resulta:

$$P = \beta b h \sigma_0,$$

$$P = \beta P_0, \quad (4.10)$$

onde P_0 , neste caso, é a parcela do esforço normal de plastificação da seção transversal, na ausência de momento fletor, referente à alma da seção I.

Ainda da fig. 4.4:

$$M_P = M_{P_0} - P \left(\frac{\beta h}{2} \right). \quad (4.11)$$

Substituindo β da eq. (4.10):

$$M_P = M_{P_0} - \frac{P^2 h}{4P_0}. \quad (4.12)$$

A eq. (4.12) é válida para $0 \leq P \leq P_0$ (linha neutra sobre a alma), e é idêntica a eq. (4.9) para seção retangular. Portanto, uma *seção retangular pode ser considerada uma seção I com altura das mesas igual a zero*.

Quando o esforço normal ultrapassar o valor de P_0 , a linha neutra se

deslocará para a mesa da seção, conforme fig. 4.5.

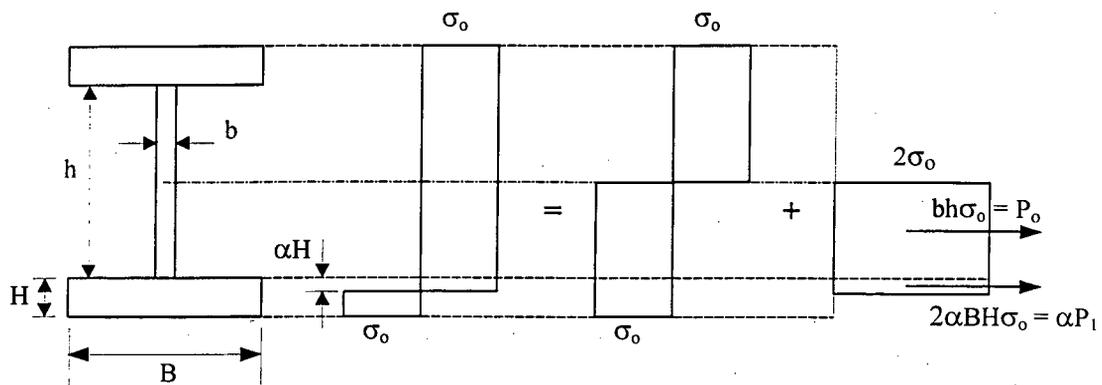


FIGURA 4.5 - Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção I. Linha neutra sobre a mesa.

De acordo com a figura 4.5, P_1 é a parcela do esforço normal de plastificação da seção transversal, na ausência de momento fletor, referente às mesas da seção I:

$$P_1 = 2BH\sigma_o.$$

O esforço normal resultante é, então:

$$P = P_o + \alpha P_1. \quad (4.13)$$

Ainda, da fig. 4.5:

$$M_p = M_{P_o} - \frac{P_o h}{4} - \alpha P_1 \left(\frac{h}{2} + \frac{\alpha H}{2} \right),$$

$$M_p = M_{P_o} - \frac{P_o h}{4} - \frac{\alpha P_1}{2} (h + \alpha H). \quad (4.14)$$

O coeficiente α pode ser obtido da eq. (4.13):

$$\alpha = \frac{P - P_o}{P_1}. \quad (4.15)$$

As equações (4.14) e (4.15) são válidas para $P_o \leq P \leq P_o + P_1$ (linha neutra sobre uma das mesas).

É importante observar que as equações deduzidas são válidas tanto para esforços normais de compressão como de tração, em função da simetria das seções.

Para um caso mais geral, com a seção transversal tendo no mínimo um

eixo de simetria, pode ser suposto que a carga P , atuando na linha neutra original, mova esta linha tal que uma área a é transferida de tração para compressão, ou vice-versa, conforme esquematizado na fig. 4.6.

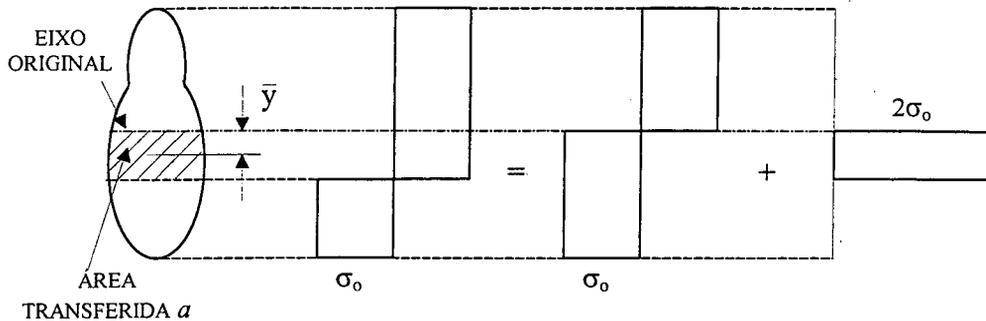


FIGURA 4.6 - Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção qualquer.

Similarmente as deduções anteriores, as equações para P , M_p e Z_p podem ser escritas:

$$P = 2\sigma_0 a, \quad (4.16)$$

$$M_p = M_{p0} - P\bar{y}, \quad (4.17)$$

$$Z_p = Z_{p0} - 2a\bar{y}. \quad (4.18)$$

A eq. (4.18) é uma expressão geral para calcular a redução no módulo plástico devido à carga axial.

Finalizando, para o caso de uma seção transversal T, com uma carga axial atuando em conjunto com um momento fletor, é possível considerar dois casos: esforço normal de compressão, fig. 4.7(a), e esforço normal de tração, fig. 4.7(b).

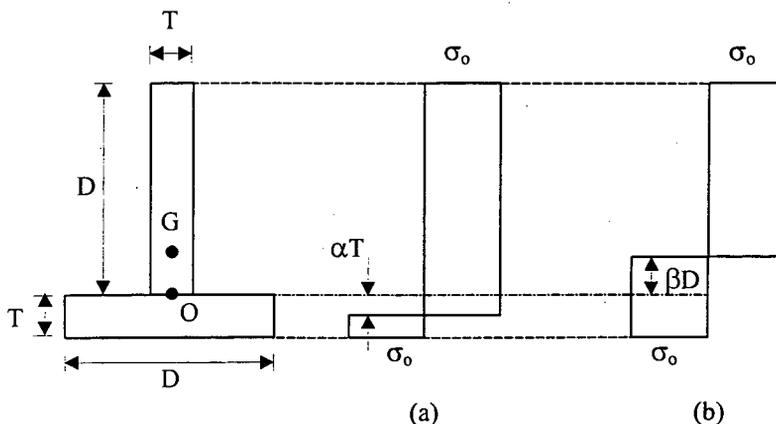


FIGURA 4.7 - Tensões devidas ao esforço normal e momento de plastificação em seção T.

Para carga axial de compressão, conforme fig. 4.7(a), tem-se a seguinte expressão para P :

$$P = -2\alpha TD\sigma_o = -\alpha P_o. \quad (4.19)$$

No caso de carga axial de tração, de acordo com a fig. 4.7(b):

$$P = 2\beta DT\sigma_o = \beta P_o. \quad (4.20)$$

Para uma relação T/D muito pequena, e P atuando na linha neutra original (O):

$$\frac{P}{P_o} \leq 0, \quad \frac{M_p}{M_{P_o}} = 1, \quad (4.21)$$

$$\frac{P}{P_o} \geq 0, \quad \frac{M_p}{M_{P_o}} + 2\left(\frac{P}{P_o}\right)^2 = 1. \quad (4.22)$$

As equações (4.21) e (4.22) fornecem a superfície de escoamento da fig. 4.8.

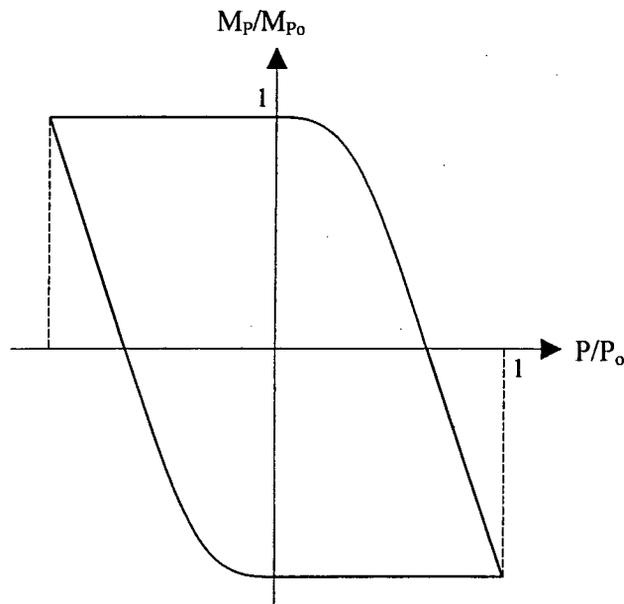


FIGURA 4.8 - Superfície de escoamento para seção T (P atuando em O).

Se P atua no centro de gravidade da seção (G):

$$\frac{P}{P_o} \leq 0, \quad \frac{M_p}{M_{P_o}} - \frac{P}{P_o} = 1, \quad (4.23)$$

$$\frac{P}{P_o} \geq 0, \quad \frac{M_P}{M_{P_o}} + \frac{P}{P_o} \left(2 \frac{P}{P_o} - 1 \right) = 1. \quad (4.24)$$

Plotando as equações (4.23) e (4.24), resulta a superfície de escoamento da fig. 4.9.

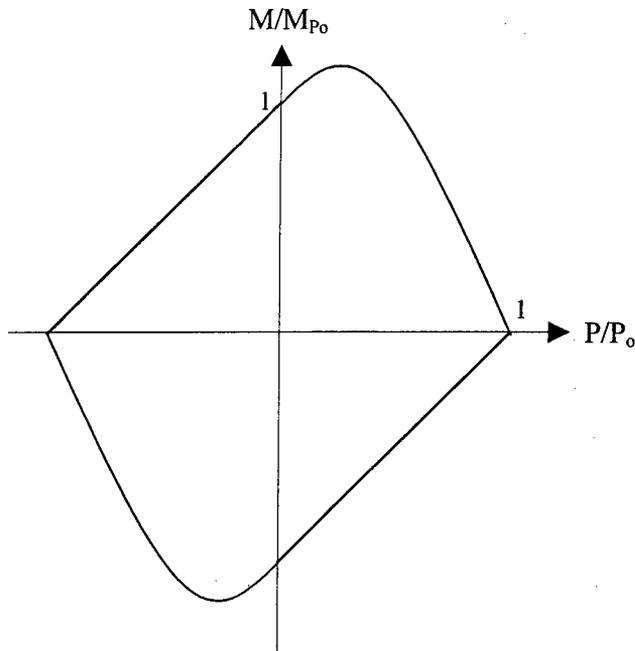


FIGURA 4.9 - Superfície de escoamento para seção T (P atuando em G).

5. MÉTODO PROPOSTO

5.1. Procedimento não-linear

Será proposto um procedimento não-linear para a resolução dos problemas citados, baseado no processo linear com algumas modificações, e a introdução de um processo iterativo para se alcançar o momento de plastificação. Também é baseado no diagrama momento fletor-curvatura simplificado, apresentado anteriormente.

O problema consiste em determinar o carregamento crítico de uma estrutura para a qual é definido o valor do momento de plastificação das seções, bem como determinar qual a configuração real de colapso (mecanismo).

Pelo processo linear, para valores de carregamento próximos ao crítico (e abaixo), os diagramas de momento fletor obtidos apresentarão pontos com valores superiores ao momento de plastificação predefinido.

Esses valores podem ser reduzidos ao momento de plastificação através de alterações nos módulos de elasticidade das barras, seguindo um critério apropriado.

A Resistência dos Materiais fornece a relação linear $M = EI\kappa$ [eq. (3.10)], mostrando que o momento fletor é diretamente proporcional ao módulo de elasticidade do material (no trecho elástico), para uma determinada curvatura e considerando o momento de inércia constante.

Dessa forma, diminuindo o módulo de elasticidade das barras adjacentes ao ponto considerado, diminuir-se-á o valor do momento fletor, se for mantida a mesma curvatura.

Sejam as seguintes expressões, onde E_A é o módulo de elasticidade alterado:

$$M = EI\kappa, \quad (5.1)$$

$$M_p = E_A I \kappa. \quad (5.2)$$

Dividindo as expressões (5.1) e (5.2), obtém-se:

$$\frac{M_p}{M} = \frac{E_A}{E},$$

$$E_A = \frac{EM_p}{M}. \quad (5.3)$$

As relações anteriores podem ser ilustradas pela fig. 5.1:

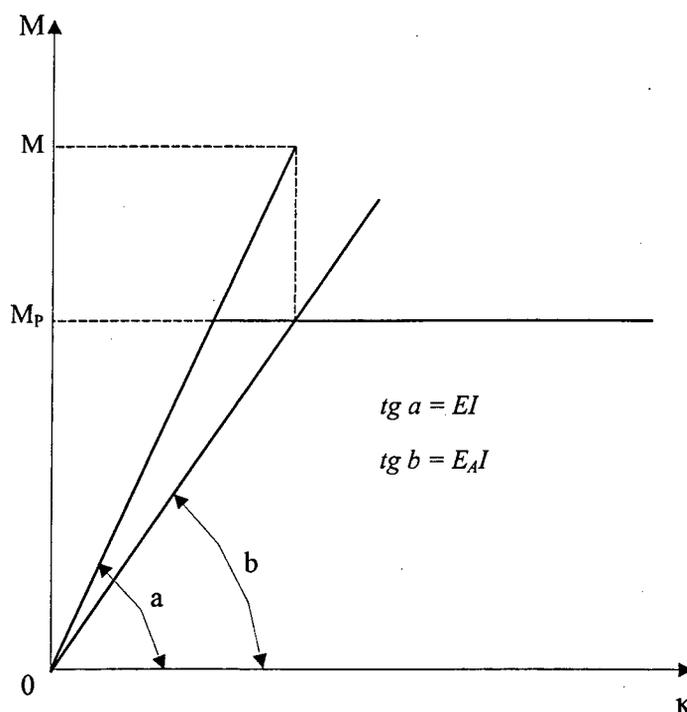


FIGURA 5.1 - Alteração do módulo de elasticidade.

Recalculando o momento, pelo processo linear, resulta:

$$M_A = E_A I \kappa = M_p.$$

Como visto, o novo valor do momento seria igual ao momento de plastificação e, fazendo isto para todos os pontos com momentos superiores ao momento de plastificação, resultaria em momentos máximos iguais a M_p . Desta forma, através do processo linear, conseguiria-se limitar os valores dos momentos ao momento de plastificação.

Entretanto, toda esta demonstração está baseada no fato de que a curvatura permanece constante, após a alteração do módulo de elasticidade, o que não é verdade. Na realidade, diminuindo o valor do módulo de elasticidade de uma barra, a tendência da curvatura é aumentar e influenciar a distribuição de momentos ao longo da estrutura.

Observando que, para uma determinada barra, desprezando a influência da variação da curvatura em outros pontos, o aumento da curvatura é proporcionalmente menor que a diminuição no módulo de elasticidade, seu momento fletor ainda assim diminuirá e, dessa forma, depois de várias alterações consecutivas no módulo de elasticidade, pode-se reduzir, de fato, o momento fletor ao momento de plastificação.

Este processo pode ser ilustrado pelo gráfico da fig. 5.2, onde M_1 , M_2 e M_3 são valores de momento fletor da barra para cada alteração do módulo de elasticidade.

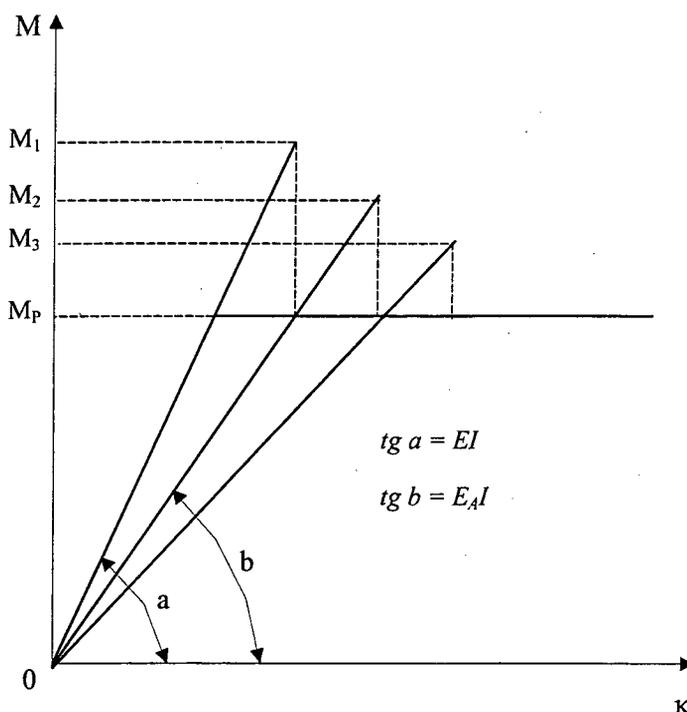


FIGURA 5.2 – Alterações consecutivas do módulo de elasticidade.

Estendendo este processo para toda a estrutura, também se consegue resolver o problema da influência da variação da curvatura nos outros pontos e, assim, após um determinado número de iterações, todos os pontos ficarão com momentos inferiores, ou no máximo iguais, ao momento de plastificação, desde que a carga utilizada esteja abaixo da carga que leva a estrutura ao colapso.

É importante comentar que, em função da redistribuição de momentos ao longo da estrutura durante as iterações, pode-se ter pontos que, ao diminuir o módulo de elasticidade, terão seus momentos fletores aumentados. Porém, após novas iterações e redistribuições de momentos, o momento fletor voltará a diminuir.

Em outros casos, após uma alteração no módulo de elasticidade de uma

barra, o momento fletor poderá ficar abaixo do momento de plastificação, o que exige uma nova alteração no módulo de elasticidade, utilizando um procedimento similar para o cálculo do novo módulo. *Uma barra só poderá ter momentos fletores menores que o de plastificação, se o seu módulo de elasticidade for igual ao valor original.*

Caso o módulo já tenha sido alterado, o momento deve ser conduzido a se igualar ao de plastificação, a não ser que, com as sucessivas alterações do módulo de elasticidade, este retorne ao valor original, caso em que o momento pode ficar abaixo do de plastificação. Obviamente, no cálculo do módulo de elasticidade alterado, este não pode resultar em valor maior que o original, devendo ser substituído por este último.

A eq. (5.3) mostra que, para momentos fletores maiores que o momento de plastificação, o módulo de elasticidade diminuirá, e para momentos menores que o de plastificação, o módulo de elasticidade aumentará.

Os pontos que resultarem com momentos iguais ao de plastificação representarão, *através de uma modelagem adequada*, os locais onde ocorrerão as rótulas plásticas e, conseqüentemente, definirão a configuração de colapso da estrutura (mecanismo) quando se trabalhar com o carregamento crítico.

5.2. Modelagem

Para simular uma rótula plástica neste processo, é necessário fazer uma modelagem adequada da estrutura. Os pontos com momentos iguais ao de plastificação ocorrerão, na realidade, tanto mais próximos da posição real da rótula plástica quanto melhor for a modelagem. As rótulas plásticas, então, podem ser simuladas por pequenas barras situadas nas posições dessas rótulas.

Dessa forma, para estruturas cuja configuração de colapso é conhecida, devem ser definidos nós nas posições das rótulas plásticas e, conseqüentemente, os pontos de momentos iguais ao de plastificação ocorrerão nestes nós, definindo a posição das rótulas.

Porém, para estruturas com configuração de colapso desconhecida, é necessário fazer uma modelagem de tal forma que os nós se situem próximos às posições prováveis de rótulas. Estas posições prováveis são, em geral, em engastes, nas

ligações de barras horizontais com verticais, no centro dos vãos de barras horizontais, nos pontos de aplicação de cargas concentradas, etc.

Depois de se adquirir uma determinada experiência em comportamento de pórticos planos, torna-se mais fácil definir estes prováveis pontos de plastificação.

Outro aspecto a ser considerado, e que influenciará no desempenho do processo, reduzindo o número de iterações e, conseqüentemente, o tempo de processamento, é a definição do tamanho das barras.

Depois de definidos os nós nas prováveis posições de rótulas, deve-se dividir as barras da estrutura de tal forma que os nós citados anteriormente tenham suas barras adjacentes com pequeno comprimento, pois estas serão as barras cujos módulos de elasticidade serão alterados durante o processo iterativo.

Se uma barra com comprimento muito grande tiver seu módulo de elasticidade alterado, toda a estrutura sofrerá consideráveis alterações em sua estabilidade e, conseqüentemente, o processo terá graves problemas numéricos antes da convergência, podendo impedir que a mesma ocorra.

Para o caso de várias barras adjacentes muito pequenas, onde a variação de momento fletor também é pequena, poderão existir algumas barras cujos módulos de elasticidade serão temporariamente alterados. Porém, após o término das iterações, estas barras terão o seu módulo de elasticidade retornado ao valor original.

Assim, definidos os nós e a divisão das barras, basta definir o tamanho destas barras de pequeno comprimento. Nos exemplos que serão apresentados, será estudado o tamanho das barras que melhor se adaptam para os modelos.

Experiências realizadas em diversos modelos mostram que barras de comprimento muito pequeno, adjacentes a barras de grandes comprimentos, podem afetar o processo numérico, chegando até ao incondicionamento da matriz de rigidez ou provocando graves erros numéricos na resolução do sistema.

Para estruturas onde a configuração de colapso é totalmente desconhecida, pode-se dividir toda a estrutura em pequenas barras, pois, desta forma, as rótulas surgirão em posições muito próximas da posição real.

É importante acrescentar que, como se trata de um processo numérico, os momentos nunca se igualarão exatamente ao momento de plastificação, por problemas

de precisão numérica. Para resolver este problema, define-se um intervalo de tolerância que definirá o término das iterações.

Por exemplo, se o momento de plastificação predefinido for igual a 100 kN.m e o *percentual de tolerância* for igual a 1%, então o intervalo de tolerância será definido como sendo de 99 a 100 kN.m. Isto significa que, durante as iterações, se os momentos fletores superiores ao de plastificação entrarem neste intervalo de tolerância, as iterações terminarão. Dessa forma, no final do processo, os momentos máximos não serão, necessariamente, iguais a 100 kN.m, mas sim, estarão compreendidos no intervalo de 99 a 100 kN.m. O valor deste percentual de tolerância será estudado nos exemplos que serão apresentados.

Com relação ao carregamento, os modelos serão apresentados com suas cargas submetidas a um fator de carga λ , cujo valor máximo dependerá do exemplo em análise.

Quando o carregamento crítico teórico for conhecido, o carregamento considerado no modelo será igual ao crítico e estará submetido a um fator de carga que atingirá um valor máximo igual à unidade. Por outro lado, quando o carregamento crítico teórico for desconhecido, a estrutura estará sujeita a um carregamento qualquer, cujo fator de carga atingirá valores máximos acima ou abaixo da unidade, para carregamento menor ou maior que o crítico, respectivamente.

O fator de carga poderá, ainda, ser alterado por algum coeficiente de segurança, conforme critérios de projeto adotados. Nos exemplos que serão apresentados, não foi considerado nenhum coeficiente de segurança na análise, pois o objetivo principal é o estudo do estado limite último dos pórticos.

5.3. Implementação Computacional

A implementação computacional do método exposto anteriormente é muito simples. Utilizando um programa de análise elástica e com algumas sub-rotinas adicionais, obtém-se um programa para análise limite de pórticos planos.

Basicamente, o programa inicia com a leitura de dados, onde obtém todas as informações sobre nós, barras, restrições nodais e carregamentos.

Com relação às propriedades das barras, o valor do momento de plastificação total das seções deverá ser fornecido. Também deverão ser fornecidos o fator de carga e o percentual de precisão desejado. Estes são os dados adicionais que diferem do programa original de análise elástica.

Em seguida, o programa calcula a matriz de rigidez de cada barra, no sistema local, e transforma para o sistema global. Os termos independentes também são calculados.

A montagem da matriz de rigidez, então, é processada, seguida da aplicação das condições de contorno.

O sistema de equações lineares, proveniente do método dos deslocamentos, é resolvido e as ações nas extremidades das barras são calculadas.

Neste momento, é realizada uma verificação do momento máximo de cada barra. Se o momento for maior que o de plastificação, o módulo de elasticidade será alterado. Da mesma forma, se o momento for menor que o de plastificação e o módulo de elasticidade for diferente do valor original, significa que esta barra já foi alterada na iteração anterior. Portanto, o módulo deverá ser alterado novamente.

Essa verificação de momentos será realizada para todas as barras e, utilizando um controlador do número de barras alteradas, a matriz de rigidez da estrutura é recalculada.

Este processo iterativo continua enquanto as condições citadas anteriormente sejam satisfeitas.

É importante esclarecer que, no cálculo da matriz de rigidez de cada barra, o valor do módulo de elasticidade não foi incorporado. Como esse módulo é comum a todos os termos da matriz, ele foi retirado e colocado em evidência, para posterior incorporação na matriz de rigidez da estrutura.

Assim, a matriz de rigidez de cada barra é, na verdade uma matriz de rigidez dividida pelo módulo de elasticidade. Conseqüentemente, após a alteração dos módulos de elasticidade das barras, o programa não necessita retornar ao cálculo da matriz de rigidez de cada barra. Ele retorna, apenas, até o cálculo da matriz de rigidez da estrutura, economizando tempo no processamento da análise.

Quando o controlador do número de barras alteradas estiver nulo após as verificações dos momentos máximos, o processo iterativo termina, o que indica que não há mais nenhuma barra com momentos superiores ao de plastificação, ou com momentos inferiores e módulos de elasticidade alterados.

Finalizando, o programa imprime os resultados em um arquivo. A configuração de colapso (posição das rótulas) poderá ser observada neste arquivo de resultados, além dos esforços em todas as barras.

Um fluxograma do programa é apresentado na fig. 5.3.

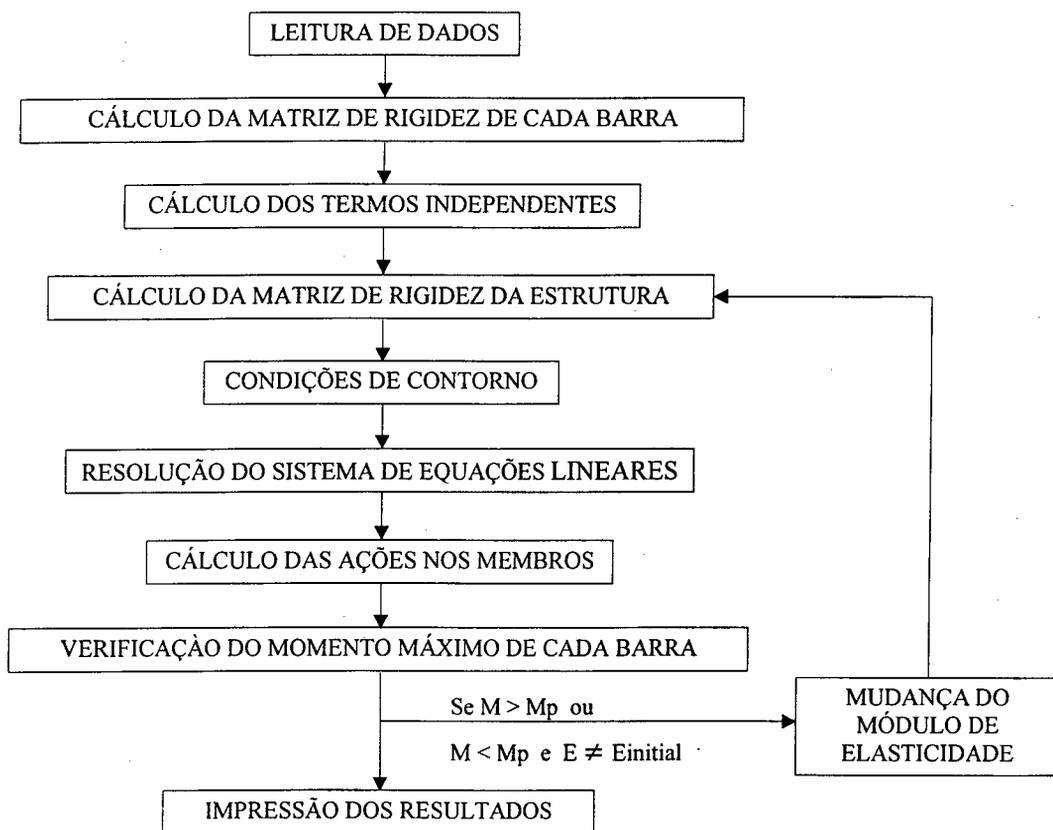


FIGURA 5.3 – Fluxograma do programa de análise limite.

5.4. Implementação da influência do esforço normal

As equações (4.12), (4.14) e (4.15) são facilmente incorporadas no programa de análise limite para considerar o efeito do esforço normal no valor do momento de plastificação, tanto em seções I como retangulares, e são rescritas a seguir:

$$M_p = M_{P_0} - \frac{P^2 h}{4P_0}, \quad (4.12)$$

$$M_p = M_{P_0} - \frac{P_0 h}{4} - \frac{\alpha P_1}{2} (h + \alpha H), \quad (4.14)$$

$$\alpha = \frac{P - P_0}{P_1}. \quad (4.15)$$

A eq. (4.12) é válida para seções retangulares, ou seções I com $P \leq P_0$ (linha neutra sobre a alma), enquanto as equações (4.14) e (4.15) são válidas para seções I com $P_0 < P \leq P_0 + P_1$ (linha neutra sobre a mesa).

De acordo com as equações acima, para uma *seção retangular*, além do valor do momento de plastificação total M_{P_0} (na ausência de esforço normal), deverão ser fornecidos, na entrada de dados do programa, o valor do esforço normal de plastificação P_0 (na ausência de momento fletor) e a altura h , da seção transversal.

Para o caso de seção I, além de P_0 e h , deverão ser fornecidos, também, os valores de P_1 e H da seção transversal, onde, conforme definido no capítulo 4, P_0 é a parcela do esforço normal de plastificação, na ausência de momento fletor, referente à alma da seção, P_1 é a parcela do esforço normal de plastificação, referente às mesas da seção, h é a altura da alma e H é a altura da mesa.

É importante notar que, para seção retangular, h é a altura total, e para seção I, h é a altura da alma. Da mesma forma, P_0 é o esforço normal de plastificação da seção retangular, ou a parcela referente à alma da seção I.

Antes das verificações dos valores dos momentos de cada barra, o programa calculará o novo valor do momento de plastificação, alterado pela influência do esforço normal. Em cada iteração, este valor é recalculado em função da redistribuição, também, dos esforços normais.

Portanto, o novo valor do momento de plastificação total M_p da seção será variável, de acordo com o nível de carregamento, e dependerá do valor do esforço normal P na seção considerada.

No caso de seção transversal com esforço axial nulo, o momento de plastificação total M_p da seção terá o mesmo valor que M_{P_0} , conforme eq. (4.12), o que concorda com a definição de M_{P_0} . Se $P = P_0$, para uma seção transversal retangular, esta

estará submetida à plastificação total sob o esforço normal, e nenhum momento fletor poderá ser resistido pela seção.

Para outras formas geométricas de seções transversais, as mesmas considerações são válidas e as fórmulas podem ser expressas em termos de momentos e esforços normais.

6. EXEMPLOS E COMPARAÇÕES

Neste capítulo, a Análise Limite será aplicada a vários modelos estruturais. Os exemplos que serão apresentados, em sua maioria, foram baseados em BAKER (1969).

O programa utilizado para o processamento da análise foi desenvolvido em QuickBasic. Como o tamanho da matriz de rigidez, por exemplo, está diretamente relacionada ao número de graus de liberdade da estrutura, e este é o número de nós multiplicado pelo número de graus de liberdade de cada nó (igual a 3 para pórticos planos), o programa foi convertido para o Visual Basic, com a finalidade de resolver as estruturas de maior porte, pois o QuickBasic tem problemas de limitação de memória (utiliza apenas a memória convencional do computador, que é de 640 Kb).

O computador utilizado foi um Pentium 133 MHz, com 32 Mb de RAM. Para os exemplos que exigiram maior tempo de processamento, a análise foi feita em um Pentium III 450 MHz. Considerando que a velocidade deste, para o programa utilizado, é de aproximadamente 5 vezes a velocidade do Pentium 133, o tempo foi convertido para que a apresentação dos resultados de todos os exemplos fosse referenciada a um único equipamento.

Inicialmente, será apresentado um exemplo simples de uma viga com carga distribuída, cuja posição da rótula ao longo do vão dependerá do tamanho das barras utilizadas na discretização.

Em seguida, vários modelos de pórticos com diversos carregamentos serão analisados, e a influência do esforço normal no momento de plastificação será considerada em alguns casos.

Finalmente, pórticos de maior porte serão analisados, utilizando o programa em Visual Basic.

6.1. Exemplo 1

Uma viga metálica com vão de 4 m, representada na fig. 6.1, possui como carregamento crítico teórico uma carga distribuída q , para uma seção transversal com $M_p = 200$ kN.m.

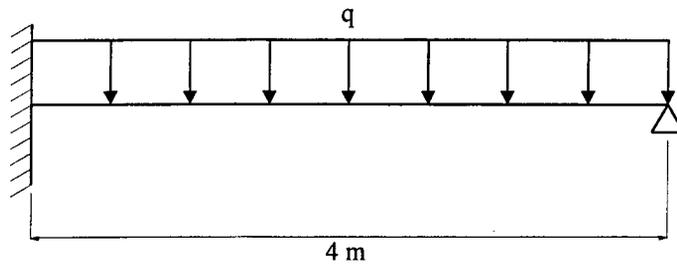


FIGURA 6.1 - Viga com carga distribuída.

As propriedades da seção transversal da viga são:

- $E = 210.000.000$ kN/m²
- $A = 0,03$ m²
- $I = 0,0001$ m⁴

O valor teórico da carga q e a posição da rótula podem ser calculados com o auxílio da equação do trabalho virtual, a partir da fig. 6.2, que apresenta o mecanismo de colapso para esta estrutura simples.

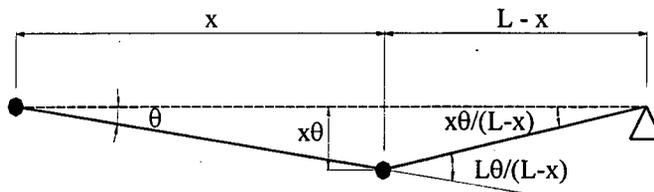


FIGURA 6.2 – Mecanismo de colapso teórico.

Considerando que a carga distribuída move-se ao longo de uma distância média igual a $x\theta/2$, e o momento fletor nas rótulas é igual a M_p , tem-se:

$$qL \frac{x\theta}{2} = M_p \left(\frac{L\theta}{L-x} + \theta \right),$$

$$\frac{qL}{2}x = M_p \frac{2L-x}{L-x},$$

$$M_p = \frac{qL}{2} \frac{x(L-x)}{2L-x}. \quad (6.1)$$

Na eq. (6.1), o valor correto de x é aquele que fornece o maior valor de M_p . Assim, derivando a equação em relação a x e igualando a zero:

$$x = L(2 - \sqrt{2}). \quad (6.2)$$

Substituindo o valor de L na eq. (6.2), encontra-se $x = 2,34$ m para a posição da rótula no vão da viga. Com este valor, e os valores de M_p e L , a eq. (6.1) fornece a carga crítica teórica para o exemplo considerado: $q = 145,7$ kN/m.

A viga será estudada com a aplicação de um carregamento λq , onde o fator de carga λ tem valor igual a unidade para o carregamento crítico teórico.

Como a distribuição de momentos não é simétrica, e desconsiderando o conhecimento da posição da rótula ao longo do vão, o modelo foi dividido em pequenas barras de 20 cm, conforme fig. 6.3.

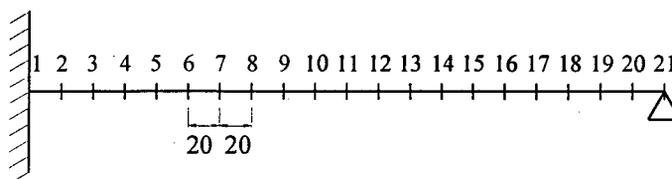


FIGURA 6.3 - Discretização do modelo: barras com 20 cm.

Em função de uma precisão razoável para o problema, e considerando a simplicidade do mecanismo de colapso da estrutura em estudo, o percentual de precisão utilizado foi de 0,1% ($M_p = 199,8$ a 200 kN.m).

A tabela 6.1 apresenta o número de iterações e o tempo de processamento do programa, de acordo com o fator de carga, bem como o número dos nós onde as rótulas plásticas ocorreram. Os números em negrito indicam o instante em que tal rótula ocorreu.

TABELA 6.1 – Resultados do processamento para o modelo da fig. 6.3.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,68	0	1"	-
0,69	40	9"	1
0,99	20	5"	1
1,00	24	6"	1 – 13
1,01	Não convergiu	-	-

Conforme tabela acima, observa-se que com 69% do carregamento crítico ocorreu a primeira rótula, o que significa que neste percentual a viga ultrapassou o regime elástico, entrando no regime plástico. Esta configuração, com apenas uma rótula, manteve-se até o percentual de 99%.

A segunda e última rótula, e, conseqüentemente, o mecanismo de colapso, foi formada com 100% do carregamento crítico, igualando-se ao valor teórico.

Para um fator de carga de 1,01, o processo não convergiu. Através de um acompanhamento dos valores dos momentos durante as iterações, observou-se que, para esse fator de carga, os valores dos momentos sofriam grandes variações em cada iteração, de forma aleatória, não correspondendo a uma redistribuição real de momentos. Outro aspecto observado para esse fator de carga foi o grande valor dos deslocamentos dos nós, incompatíveis com a estrutura.

Verifica-se, pela tabela 6.1, a grande reserva de resistência além do regime elástico.

O resultado teórico, pela Teoria das Rótulas Plásticas, apresenta a 2ª rótula a 2,34 m do engaste, enquanto que o método apresentou a 2,40 m, conforme figuras 6.4 e 6.5. Esta diferença ocorreu em função da discretização do modelo, pois não foi criado nenhum nó na posição de 2,34 m. Porém, o nó mais próximo era 2,40 m, onde ocorreu a rótula.

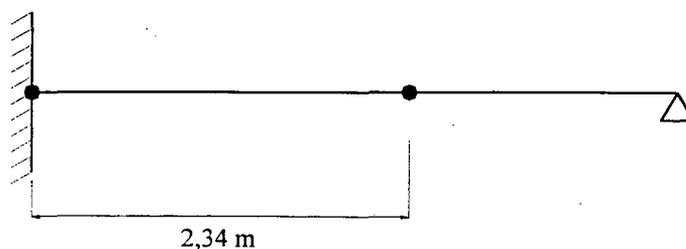


FIGURA 6.4 - Resultado teórico.

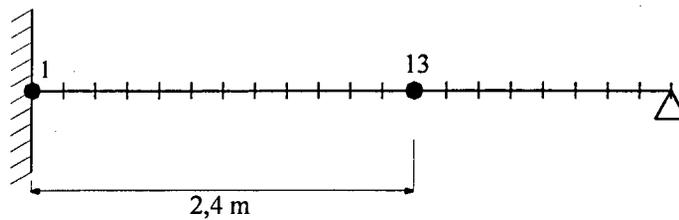


FIGURA 6.5 - Resultado do modelo com barras de 20 cm.

É importante observar que a plastificação ocorreu na barra adjacente ao nó 1, e nas barras adjacentes ao nó 13, o que confirma a formação das rótulas nestes nós. As barras plastificadas tiveram seus módulos de elasticidade sensivelmente alterados, conforme tabela 6.2.

TABELA 6.2 – Barras com módulo de elasticidade alterado.

Barra	Módulo de elasticidade inicial (kN/m ²)	Módulo de elasticidade final (kN/m ²)
12	210.000.000	44.234.920
13	210.000.000	182.453.826

Este mesmo exemplo, utilizando um modelo dividido em barras de 10 cm, conforme fig. 6.6, apresenta os resultados de acordo com a tabela 6.3.

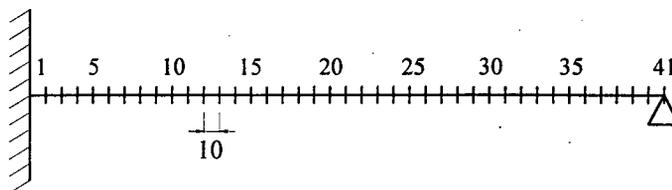


FIGURA 6.6 - Discretização do modelo com barras de 10 cm.

TABELA 6.3 – Resultados do processamento para o modelo da fig. 6.6.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,68	0	1"	-
0,69	56	13"	1
0,99	32	8"	1
1,00	44	11"	1 – 24
1,01	Não convergiu	-	-

Neste caso, as rótulas se formaram nos nós 1 e 24, sendo este último a 2,30 m do engaste, se aproximando da posição teórica, conforme fig. 6.7.

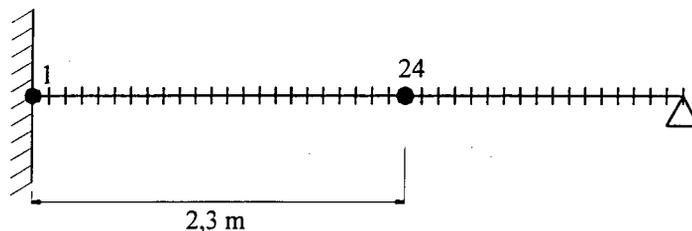


FIGURA 6.7 - Resultado do modelo com barras de 10 cm..

Diminuindo, ainda, o tamanho das barras para 5 cm, a rótula do vão ocorrerá a 2,35 m do engaste. Será visto, nos próximos exemplos, que esta diferença de posição da rótula vai ocorrer somente para o caso de cargas distribuídas, e dependerá do tamanho das barras definidas no modelo.

Para o caso de cargas concentradas, com modelagem apropriada, as rótulas surgirão nas verdadeiras posições.

6.2. Exemplo 2

Um pórtico, com 6 m de vão e 4 m de altura, é carregado com uma carga horizontal H e uma carga vertical V , conforme fig. 6.8, onde serão apresentados os resultados das combinações destas cargas, que resultarão em diferentes mecanismos de colapso. Este é um modelo clássico no estudo das rótulas plásticas.

As propriedades da seção transversal do pórtico são:

- $M_p = 100 \text{ kN.m}$
- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,03 \text{ m}^2$
- $I = 0,0001 \text{ m}^4$

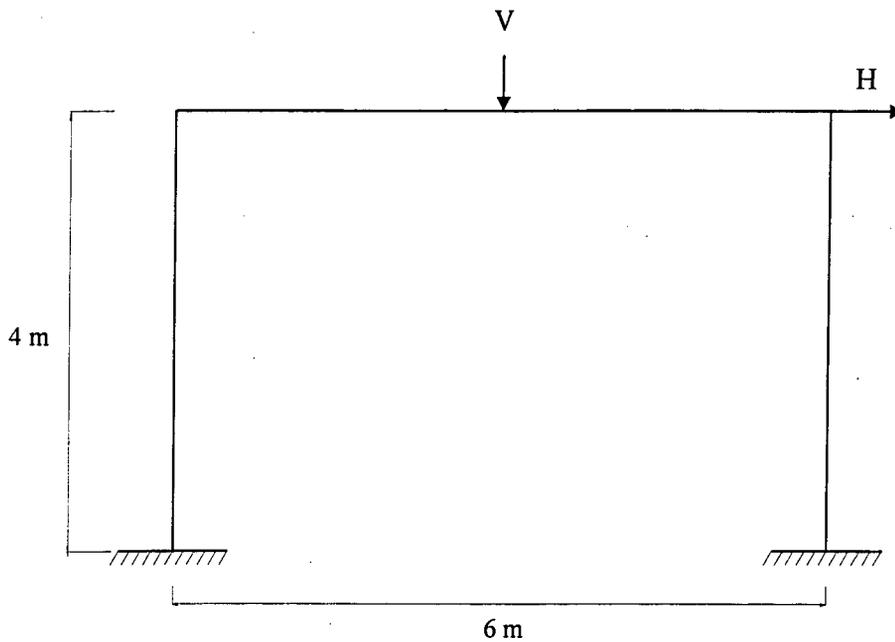


FIGURA 6.8 - Pórtico com carregamento H e V.

Os resultados teóricos para este exemplo são apresentados através de um gráfico, fig. 6.9, que relaciona as cargas horizontal e vertical, conforme tabela 6.4.

TABELA 6.4 – Relação entre as cargas para o pórtico da fig. 6.8.

H (kN)	V (kN)	V (kN)	H (kN)
0	133,33	0	100
50	133,33	66,67	100
100	66,67	133,33	50

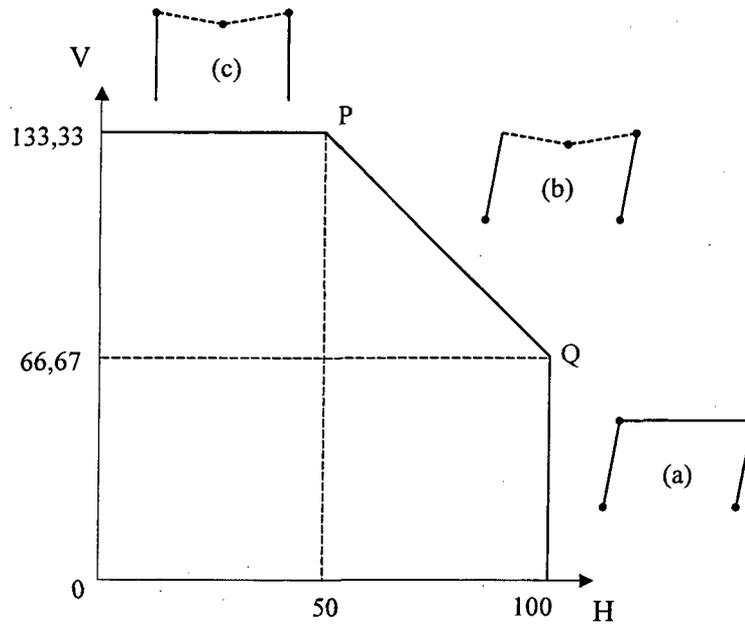


FIGURA 6.9 - Gráfico teórico (valores em kN).

Pelo gráfico acima, observa-se que existem três mecanismos de colapso para esse pórtico, dependendo do valor das cargas.

Pontos no interior do gráfico indicam que o pórtico encontra-se em regime elástico ou parcialmente plástico. Pontos sobre o gráfico indicam configuração de colapso. Pontos externos ao gráfico indicam uma situação impossível de ocorrer (além da ruptura).

É importante comentar que existem cinco possíveis posições de rótula, onde o valor do momento entre elas não pode exceder o momento de plastificação.

No ponto Q, as configurações (a) e (b) ocorrem simultaneamente. Se o diagrama de momento fletor for traçado para as duas configurações, será visto que a metade direita da barra horizontal está sujeita ao momento de plastificação. Para o ponto P, com auxílio do diagrama de momento fletor, observa-se que a barra vertical direita está inteiramente sujeita ao momento de plastificação. Estes dois pontos de transição também foram detectados e confirmados nos modelos utilizados.

Vários modelos foram utilizados para a análise deste pórtico e são apresentados a seguir.

a) *Modelo 1*

Este modelo foi discretizado com pequenas barras de 5 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas, conforme fig. 6.10.

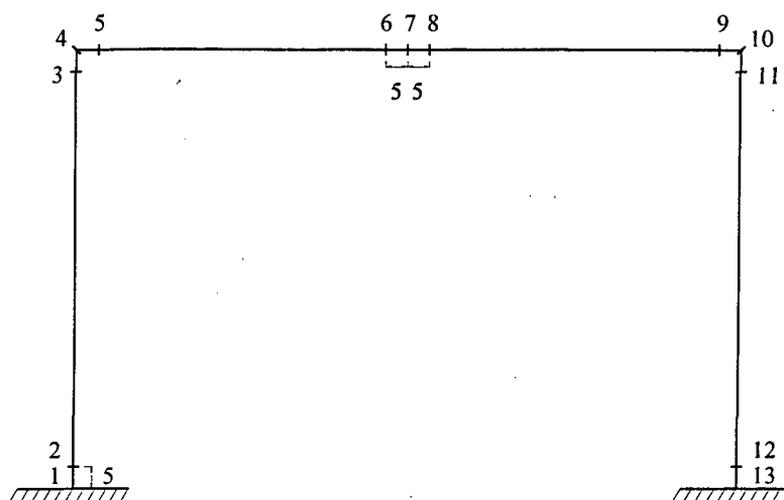


FIGURA 6.10 - Discretização do modelo 1.

A tabela 6.5 apresenta os resultados deste modelo, considerando um percentual de precisão igual a 0,1% ($M_p = 99,9$ a 100 kN.m).

TABELA 6.5 – Resultados do processamento para o modelo 1.

H (kN)	V _{máx.} (kN)	Número de iterações	V	H _{máx.} (kN)	Número de iterações
0	133,7	336	0	101,2	402
25	133,6	504	33,3	101,1	305
50	131,9	347	66,7	95,6	187
75	98,9	250	100	74,1	310
100	53,7	257	133,3	46,7	366

Pela tabela acima, verifica-se uma pequena distorção no ponto Q (fig. 6.9) quando os valores são comparados aos teóricos. Nos demais pontos, o resultado é apresentado com uma boa precisão. Essa distorção ocorrida no ponto de transição tem sua origem no tamanho adotado para as pequenas barras (5 cm), o qual é muito pequeno e acarreta os erros comentados no capítulo anterior.

A seguir, é apresentado um gráfico comparativo destes valores com os teóricos, fig. 6.11, onde a linha tracejada representa os valores do modelo e a linha contínua os valores teóricos do gráfico anterior.

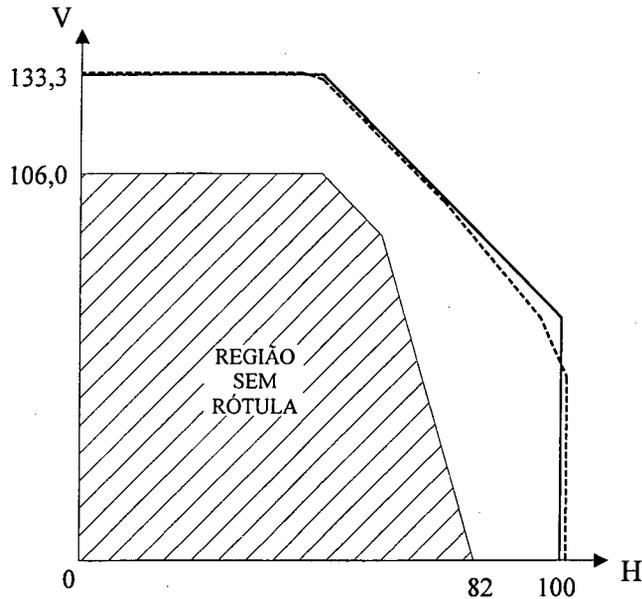


FIGURA 6.11 - Gráfico comparativo do modelo 1.

O gráfico da fig. 6.11 apresenta, também, a região onde não existe nenhuma rótula. De acordo com os exemplos anteriores, este método permite acompanhar a formação das rótulas, uma por uma, até a configuração de colapso.

É importante ressaltar que, na realidade, "região sem rótulas" não implica em estrutura totalmente no regime elástico. Antes da formação da rótula a seção entra em um regime de plastificação parcial e, desta forma, nessa região existem alguns pontos com seções que já ultrapassaram a fase elástica. Entretanto, considerando as simplificações adotadas na relação momento-curvatura, pode-se dizer que na região sem rótulas todas as seções estão no regime elástico.

b) Modelo 2

Este modelo foi discretizado com pequenas barras de 10 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas, conforme fig. 6.12.

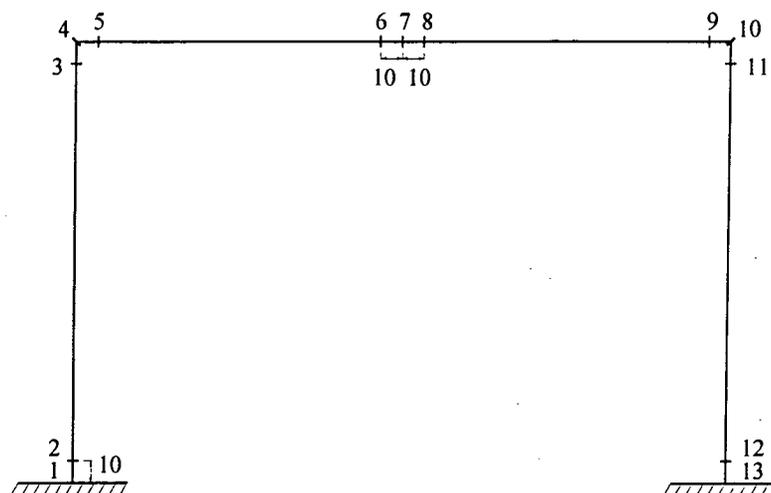


FIGURA 6.12 - Discretização do modelo 2.

A tabela 6.6 apresenta os resultados deste modelo, considerando um percentual de precisão igual a 0,1% ($M_p = 99,9$ a 100 kN.m).

TABELA 6.6 – Resultados do processamento para o modelo 2.

H (kN)	Vmáx. (kN)	Número de iterações	V (kN)	Hmáx. (kN)	Número de iterações
0	133,4	46	0	100,8	127
25	133,4	237	33,3	101,0	276
50	133,3	165	66,7	100,7	1074
75	103,1	269	100	77,5	255
100	67,5	214	133,3	50,9	273

Com o aumento das pequenas barras para 10 cm, este modelo já não apresenta mais a distorção próxima ao ponto de transição apresentada no modelo anterior, quando o comprimento das pequenas barras era menor. O resultado é apresentado com uma ótima precisão.

A figura 6.13 apresenta o gráfico comparativo destes valores com os teóricos.

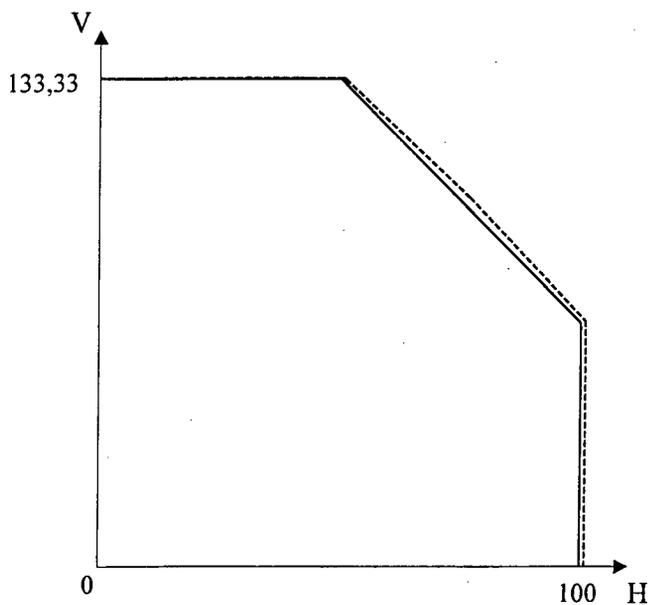


FIGURA 6.13 - Gráfico comparativo do modelo 2.

A região sem rótulas é a mesma para todos os modelos, pois antes da formação da primeira rótula todos se comportam de maneira idêntica.

c) *Modelo 3*

Este modelo foi discretizado com pequenas barras de 20 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas, conforme fig. 6.14.

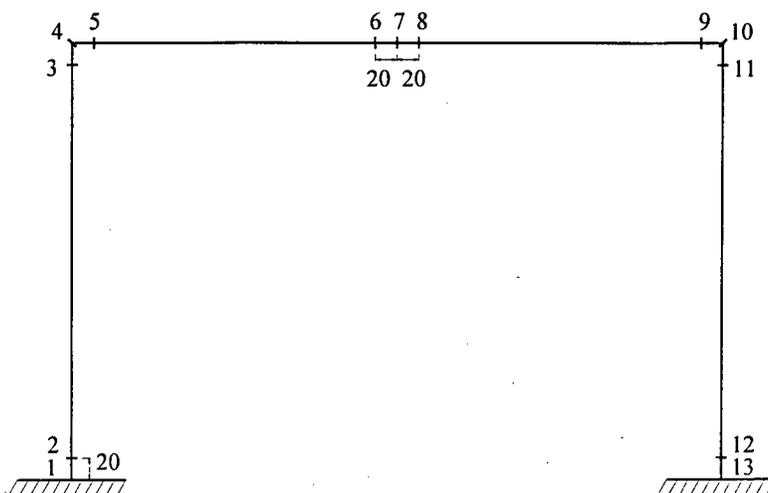


FIGURA 6.14 - Discretização do modelo 3.

A tabela 6.7 apresenta os resultados deste modelo, também com ótima precisão, e o gráfico comparativo é mostrado na fig. 6.15. O percentual de precisão adotado foi de 0,1% ($M_p = 99,9$ a 100 kN.m).

TABELA 6.7 – Resultados do processamento para o modelo 3.

H (kN)	V _{máx.} (kN)	Número de iterações	V (kN)	H _{máx.} (kN)	Número de iterações
0	133,3	42	0	101,5	284
25	133,3	165	33,3	101,5	250
50	133,3	68	66,7	100,8	223
75	104,2	266	100	78,0	264
100	70,0	819	133,3	52,0	415

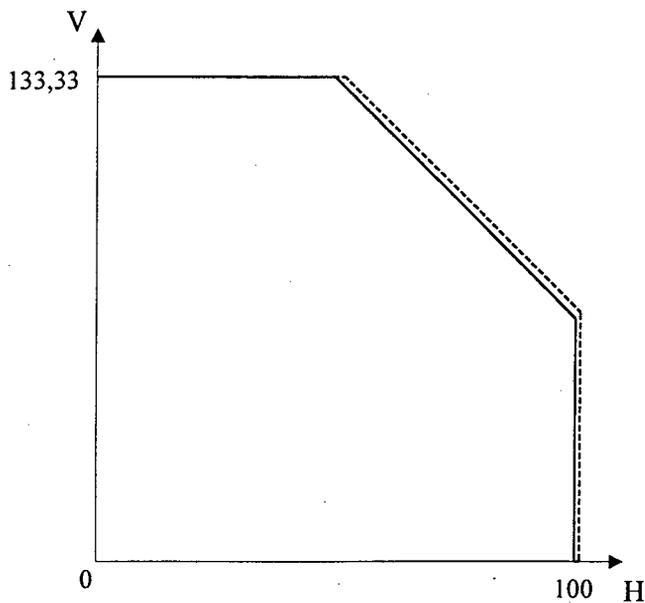


FIGURA 6.15 - Gráfico comparativo do modelo 3.

d) Modelo 4

Este modelo foi discretizado com pequenas barras de 50 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas, conforme fig. 6.16.

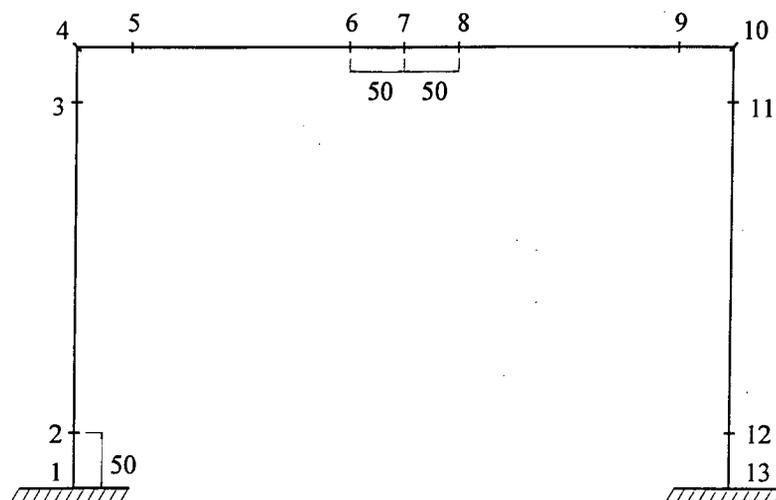


FIGURA 6.16 - Discretização do modelo 4.

A tabela 6.8 apresenta os resultados deste modelo, também com ótima precisão, e o gráfico comparativo é mostrado na fig. 6.17. O percentual de precisão adotado foi de 0,1% ($M_p = 99,9$ a 100 kN.m).

TABELA 6.8 – Resultados do processamento para o modelo 4.

H (kN)	V _{máx.} (kN)	Número de iterações	V	H _{máx.} (kN)	Número de iterações
0	133,3	35	0	100,5	651
25	133,3	105	33,3	100,5	570
50	133,3	65	66,7	100,3	394
75	100,0	145	100	75,0	145
100	66,8	38	133,3	50,1	252

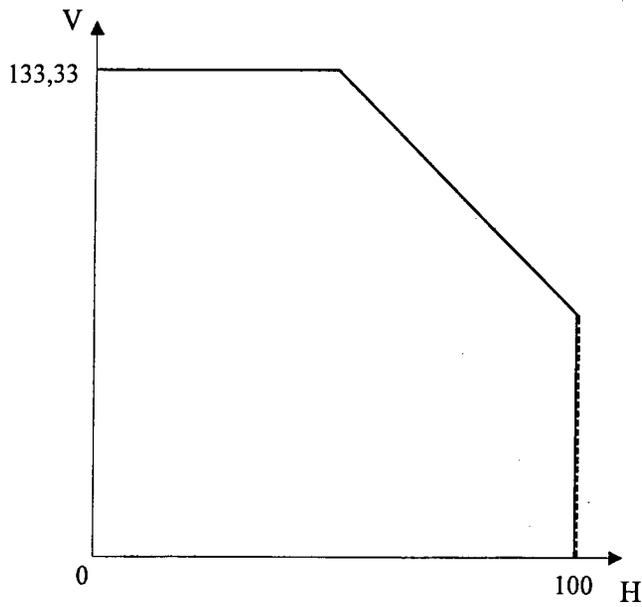


FIGURA 6.17 - Gráfico comparativo do modelo 4.

e) *Modelo 5*

Este modelo foi discretizado com barras de 1 m próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas, conforme fig. 6.18.

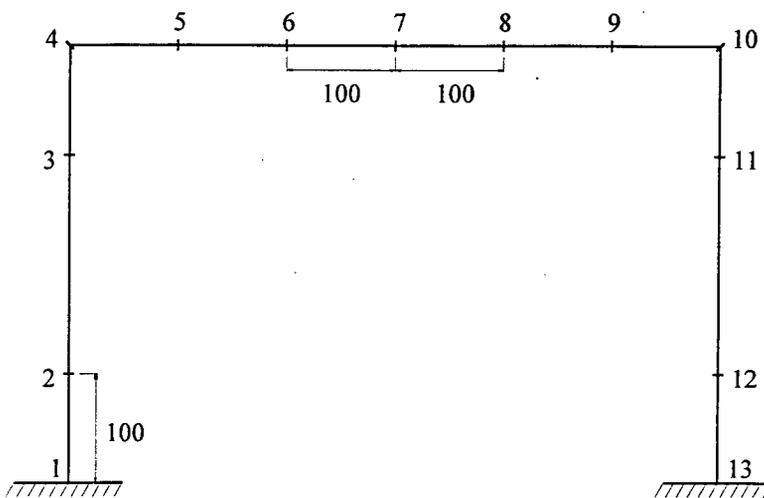


FIGURA 6.18 - Discretização do modelo 5.

A tabela 6.9 apresenta os resultados deste modelo, também com ótima precisão, e o gráfico comparativo é mostrado na fig. 6.19, com percentual de precisão de 0,1% ($M_p = 99,9$ a 100 kN.m).

TABELA 6.9 – Resultados do processamento para o modelo 5.

H (kN)	Vmáx. (kN)	Número de iterações	V (kN)	Hmáx. (kN)	Número de iterações
0	133,3	35	0	100,5	597
25	133,3	95	33,3	100,5	540
50	133,3	55	66,7	100,3	631
75	100,0	115	100	75,0	115
100	66,7	35	133,3	50,1	699

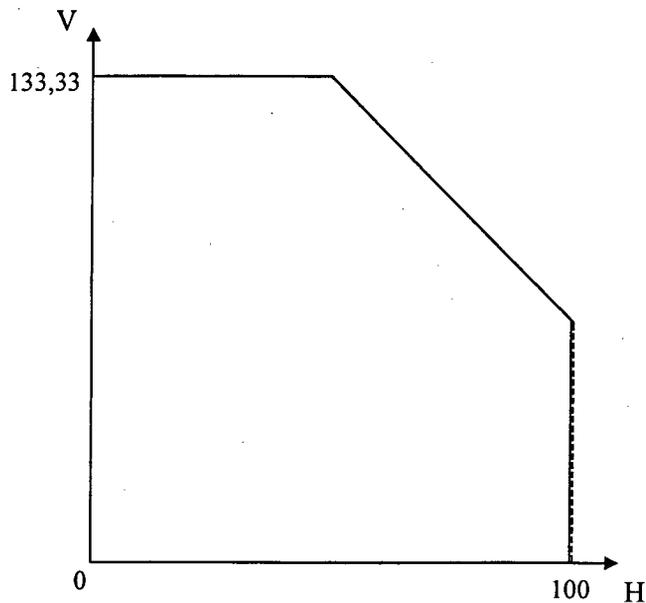


FIGURA 6.19 - Gráfico comparativo do modelo 5.

Comparando os modelos estudados anteriormente, observa-se que, para este caso particular, o tamanho das barras utilizadas na discretização não influenciou os resultados. Apenas no primeiro modelo, com barras de 5 cm, os resultados foram distorcidos em uma pequena região do gráfico.

Estes modelos também foram analisados com um percentual de precisão de 1%, apresentando praticamente os mesmos resultados.

6.3. Exemplo 3

Neste exemplo, um pórtico bi-engastado é solicitado por uma carga vertical distribuída de 50 kN/m e uma carga horizontal concentrada de 75 kN, conforme fig. 6.20. Este é um carregamento teórico crítico para o pórtico em questão..

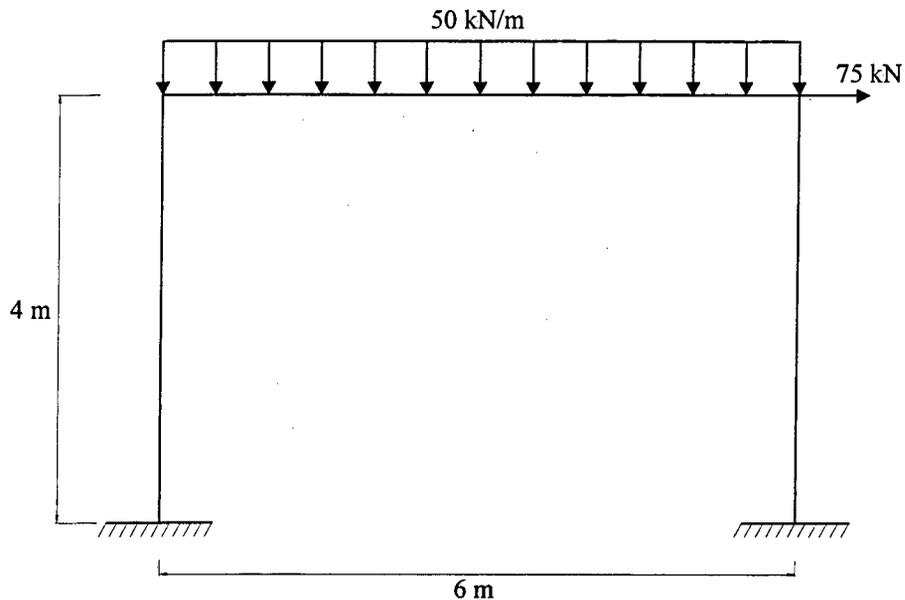


FIGURA 6.20 - Pórtico com carga distribuída.

As propriedades da seção transversal do pórtico são:

- $M_p = 100 \text{ kN.m}$
- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,03 \text{ m}^2$
- $I = 0,0001 \text{ m}^4$

O modelo criado para representar o pórtico foi discretizado em barras de 37,5 cm ao longo de todo o trecho horizontal, além de barras de 25 cm próximas aos engastes e nas mudanças de direção das barras, conforme fig. 6.21.

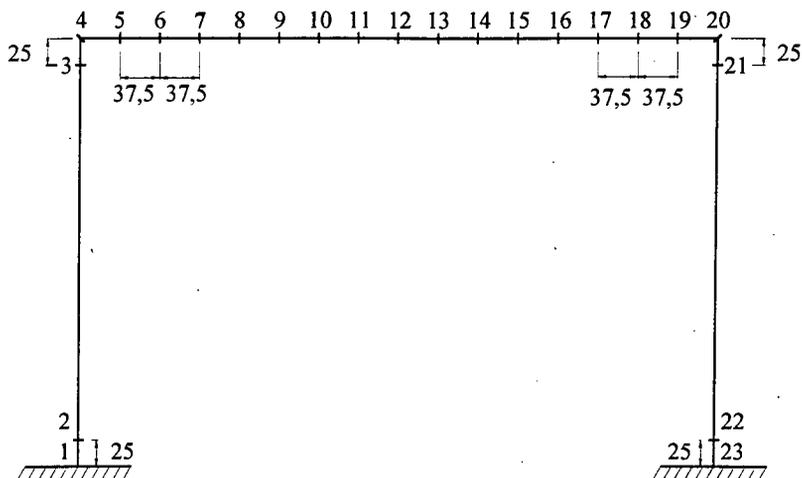


FIGURA 6.21 - Discretização do modelo.

A tabela 6.10 apresenta os resultados deste modelo, com um percentual de precisão de 1% ($M_p = 99$ a 100 kN.m).

TABELA 6.10 – Resultados do processamento para o modelo da fig. 6.21.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,71	0	1"	-
0,72	12	3"	20
0,81	36	7"	20
0,82	33	7"	20 – 23
0,90	40	8"	20 – 23
0,91	85	16"	20 – 23 – 12
0,99	137	25"	20 – 23 – 12
1,00	77	14"	20 – 23 – 1 – 12
1,01	Não convergiu	-	-

De acordo com a tabela acima, a primeira rótula formou-se com 72% do carregamento crítico, a segunda com 82%, a terceira com 91% e o mecanismo, como era de se esperar, com 100% do carregamento.

Um acompanhamento, durante as iterações, permitiu observar que, para alguns fatores de carga, a rótula do nó 12 apareceu temporariamente no nó 11, em função da discretização e pequena variação de momento fletor nas respectivas barras. Na verdade, a posição real da rótula é entre estes nós (ver comentários do exemplo 6.1).

A fig. 6.22 apresenta o pórtico com sua configuração de colapso:

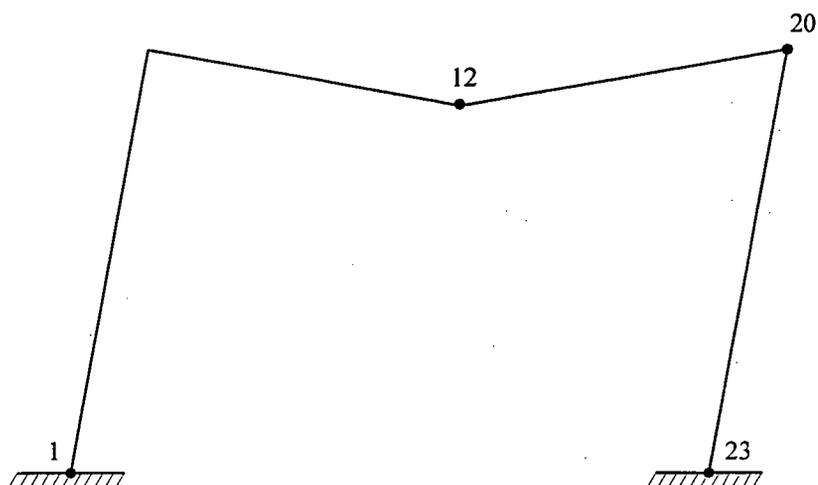


FIGURA 6.22 - Mecanismo de colapso.

6.4. Exemplo 4

Neste exemplo, um pórtico é carregado por várias cargas concentradas, conforme fig. 6.23. As cargas estão em kN. O modelo será analisado considerando dois casos. No primeiro caso, não será considerada a influência do esforço normal no momento de plastificação. No segundo caso, esta influência será considerada.

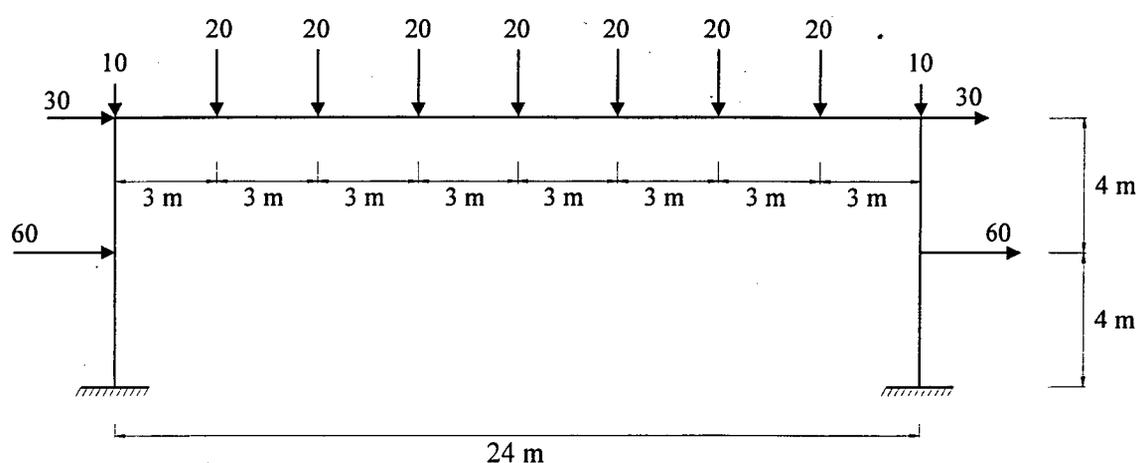


FIGURA 6.23 - Pórtico com várias cargas concentradas.

A seção transversal é apresentada na fig. 6.24, com as seguintes propriedades:

- $M_{Po} = 323 \text{ kN.m}$
- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,0085 \text{ m}^2$
- $I = 0,000238 \text{ m}^4$
- $P_o = 900 \text{ kN}$
- $P_l = 1225 \text{ kN}$
- $h = 0,38 \text{ m}$
- $H = 0,016 \text{ m}$

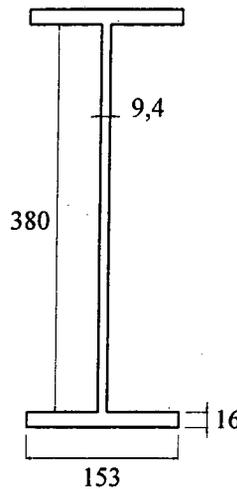


FIGURA 6.24 – Seção transversal do pórtico da fig. 6.23.

O modelo foi discretizado com pequenas barras de 50 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e, neste caso em particular, próximas à posição da rótula do trecho superior (já conhecida), conforme fig. 6.25. Neste exemplo, foi adotada uma discretização com duas barras pequenas, em cada lado das seções críticas, com o simples objetivo de estudar a influência destas barras adicionais nos resultados.

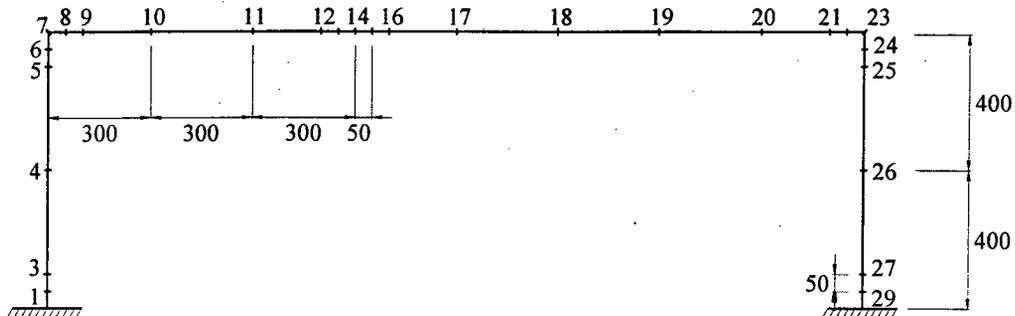


FIGURA 6.25 - Pórtico com várias cargas concentradas.

Neste exemplo, o modelo, sem a influência do esforço normal, foi analisado com vários percentuais de precisão, e os resultados são apresentados nas tabelas 6.11, 6.12 e 6.13. A influência do esforço normal no momento de plastificação é apresentada na tabela 6.14, somente para o percentual de precisão de 1%.

TABELA 6.11 – Resultados para um percentual de precisão de 1% ($M_p = 319,77$ a 323 kN.m).

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,65	0	1"	-
0,66	86	21"	29
0,80	42	10"	29
0,81	19	5"	29 – 23
0,90	35	9"	29 – 23
0,91	61	15"	29 – 23 – 1
1,00	37	9"	29 – 23 – 1
1,01	146	34"	29 – 23 – 1 – 14

TABELA 6.12 – Resultados para um percentual de precisão de 0,5% ($M_p = 321,385$ a 323 kN.m).

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,65	0	1"	-
0,66	86	21"	29
0,80	42	10"	29
0,81	19	5"	29 – 23
0,90	35	9"	29 – 23
0,91	61	15"	29 – 23 – 1
1,00	39	10"	29 – 23 – 1
1,007	37	9"	29 – 23 – 1
1,008	42	10"	29 – 23 – 1 – 14

TABELA 6.13 – Resultados para um percentual de precisão de 0,1% ($M_p = 322,677$ a 323 kN.m).

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,65	0	1"	-
0,66	86	21"	29
0,80	42	10"	29
0,81	25	6"	29 – 23
0,90	36	9"	29 – 23
0,91	77	19"	29 – 23 – 1
1,00	57	14"	29 – 23 – 1
1,009	491	1' 53"	29 – 23 – 1 – 14

TABELA 6.14 – Resultados com a influência do esforço normal ($M_{Po} = 323 \text{ kN.m}$).

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,65	0	1"	-
0,66	76	20"	29
0,80	48	13"	29
0,81	85	22"	29 – 23
0,90	57	15"	29 – 23 – 1
1,00	59	15"	29 – 23 – 1 – 14

Pelas tabelas acima, verifica-se que, praticamente, não existem diferenças nos resultados obtidos para os diversos percentuais de precisão. O aumento na precisão numérica, para o fator de carga das tabelas 6.12 e 6.13, foi adotado para permitir a formação da última rótula.

A 1ª rótula ocorreu com 66% do carregamento crítico, o que mostra a grande reserva de resistência além da fase elástica.

As 2ª e 3ª rótulas ocorreram com 81% e 91%, respectivamente.

O mecanismo de colapso, neste exemplo, foi obtido com um fator de carga um pouco acima da unidade (101% aproximadamente), o que pode ser considerada uma ótima precisão, pelo fato de ser um método numérico.

Na comparação dos resultados da tabela 6.11 com os resultados da tabela 6.14, observa-se que a influência do esforço normal, para este exemplo, é muito pequena. Mesmo assim, verifica-se que a 3ª e 4ª rótulas formaram-se com fatores de carga um pouco abaixo (diferença na ordem de 1%).

A fig. 6.26 apresenta o pórtico com sua configuração de colapso.

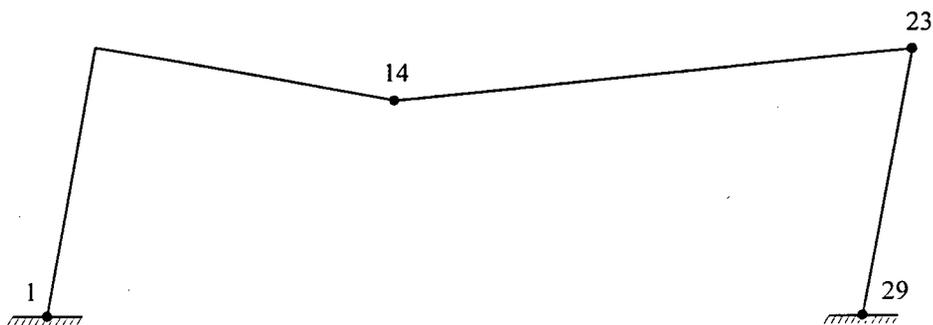


FIGURA 6.26 - Mecanismo de colapso.

6.5. Exemplo 5

Um pórtico de telhado é carregado com várias cargas concentradas verticais e horizontais, as quais estão expressas em kN, conforme fig. 6.27. O efeito do esforço normal no momento de plastificação também será considerado em uma segunda análise.

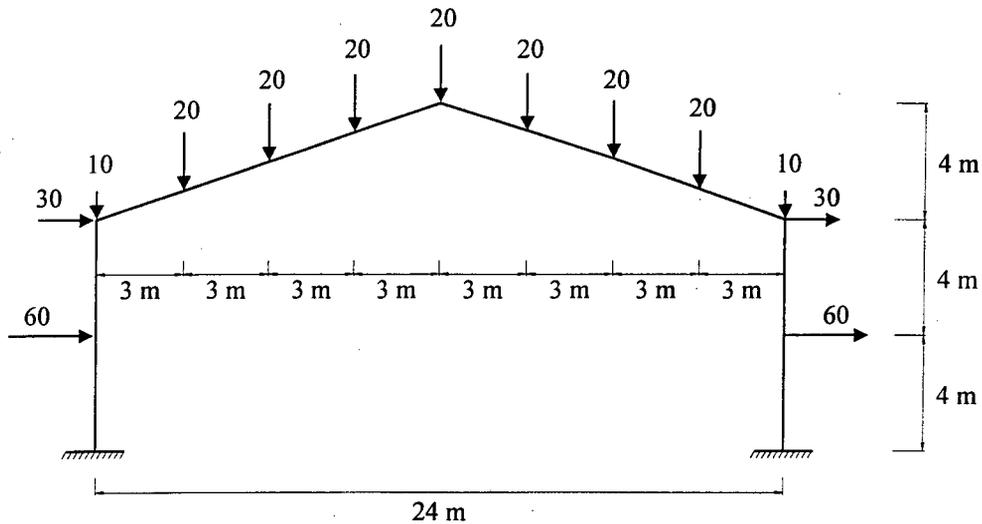


FIGURA 6.27 - Pórtico de telhado.

A seção transversal é apresentada na fig. 6.28, com as seguintes propriedades:

- $M_{Po} = 307,5 \text{ kN.m}$
- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,0085 \text{ m}^2$
- $I = 0,000213 \text{ m}^4$
- $P_o = 875 \text{ kN}$
- $P_l = 250 \text{ kN}$
- $h = 0,3564 \text{ m}$
- $H = 0,0163 \text{ m}$

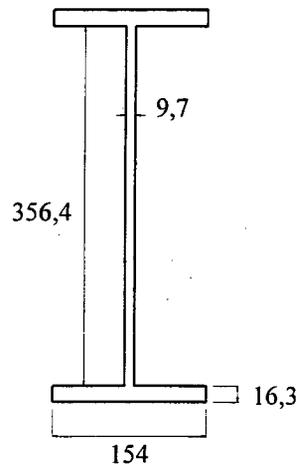


FIGURA 6.28 – Seção transversal do pórtico da fig. 6.27.

O modelo foi discretizado com pequenas barras de 50 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas adjacentes à carga vertical central, conforme fig. 6.29.

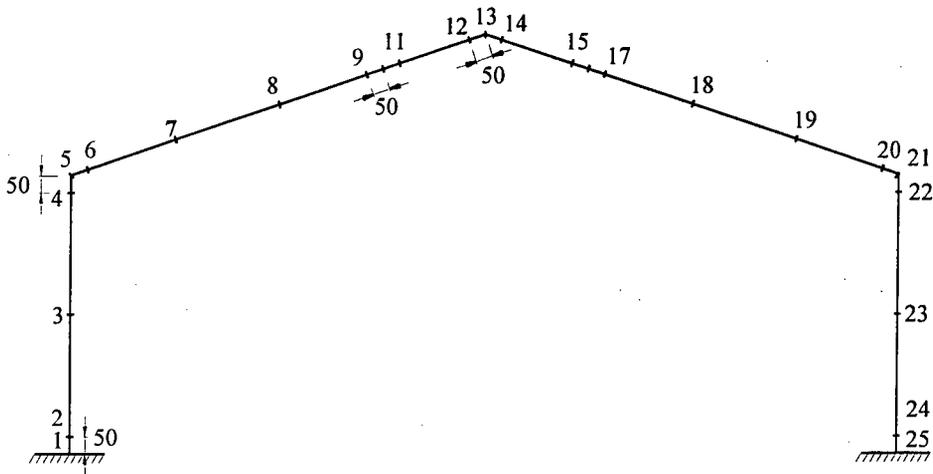


FIGURA 6.29 - Discretização do modelo.

Os resultados, sem a consideração do esforço normal, são apresentados na tabela 6.15, com um percentual de precisão de 1% ($M_p = 304,425$ a $307,5$ kN.m).

A influência do esforço normal é apresentada na tabela 6.16.

TABELA 6.15 – Resultados sem a influência do esforço normal.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,61	0	1"	-
0,62	77	17"	25
0,76	53	12"	25
0,77	48	11"	25- 21
0,85	41	10"	25 - 21
0,86	55	12"	25 - 21 - 1
0,97	35	35"	25 - 21 - 1
0,98	34	34"	25 - 21 - 1 - 10

TABELA 6.16 – Resultados com a influência do esforço normal.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,61	0	1"	-
0,62	78	18"	25
0,76	47	10"	25
0,77	93	20"	25- 21
0,85	76	18"	25 - 21
0,86	124	27"	25 - 21 - 1
0,97	221	45"	25 - 21 - 1 - 10

A 1ª rótula ocorreu com 62% do carregamento crítico. As 2ª e 3ª rótulas ocorreram com 77% e 86%, respectivamente.

O mecanismo de colapso, neste exemplo, foi obtido com um fator de carga um pouco abaixo da unidade (98% aproximadamente), o que também pode ser considerada uma ótima precisão, como no exemplo anterior, pelo fato de ser um método numérico. No caso da influência do esforço normal, a formação da última rótula ocorreu com um fator de carga ligeiramente inferior, ou seja, com 97% do carregamento.

A fig. 6.30 apresenta o pórtico com sua configuração de colapso.

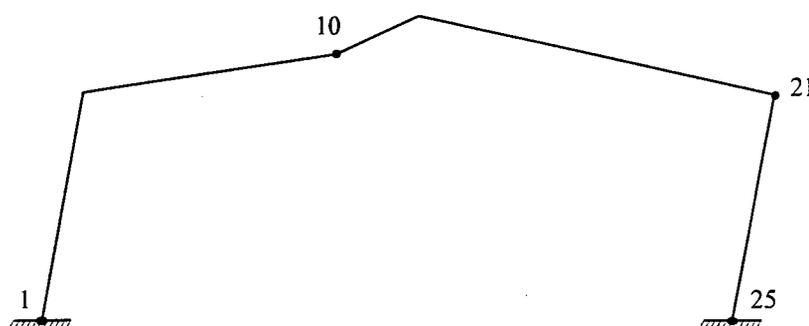


FIGURA 6.30 - Mecanismo de colapso.

6.6. Exemplo 6

Um pórtico de dois andares é carregado com cargas concentradas verticais e horizontais, as quais estão expressas em kN, conforme fig. 6.31.

Neste exemplo, também será considerado o efeito do esforço normal no valor do momento de plastificação.

A seção transversal é apresentada na fig. 6.32, cujas propriedades encontram-se ao lado da mesma.

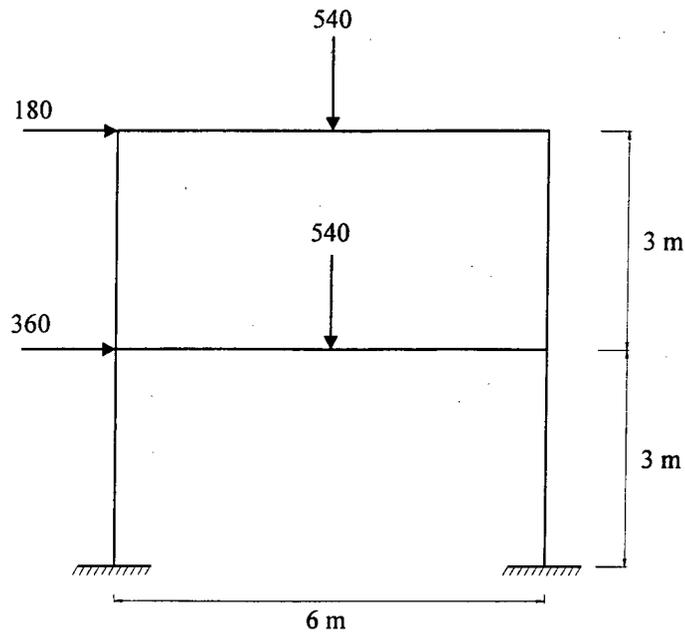


FIGURA 6.31 - Pórtico de dois andares.

- $M_{Po} = 540 \text{ kN.m}$
- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,0125 \text{ m}^2$
- $I = 0,000457 \text{ m}^4$
- $P_o = 1225 \text{ kN}$
- $P_l = 1900 \text{ kN}$
- $h = 0,4278 \text{ m}$
- $H = 0,0196 \text{ m}$

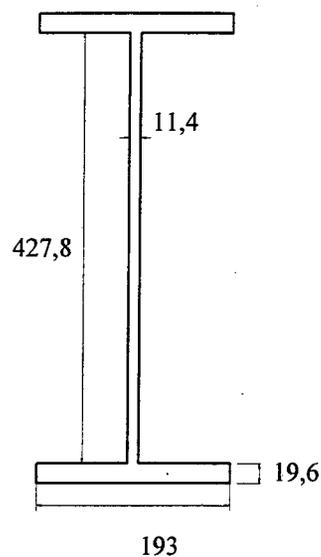


FIGURA 6.32 – Seção transversal do pórtico da fig. 6.31.

O modelo foi discretizado com pequenas barras de 20 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas. A numeração dos nós é apresentada na fig. 6.33, e a numeração das barras na fig. 6.34.

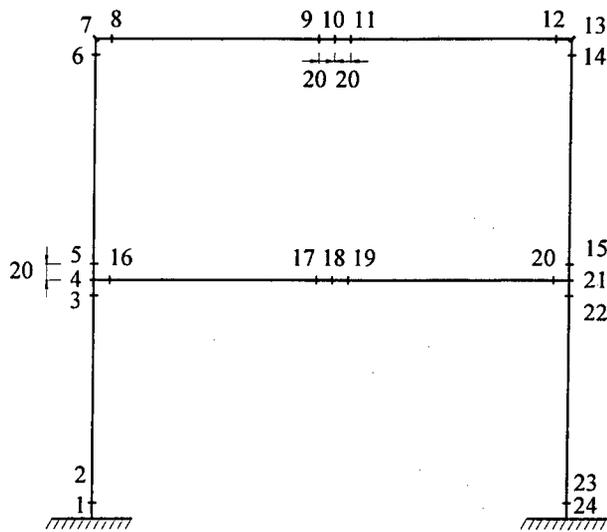


FIGURA 6.33 - Discretização do modelo: numeração dos nós.

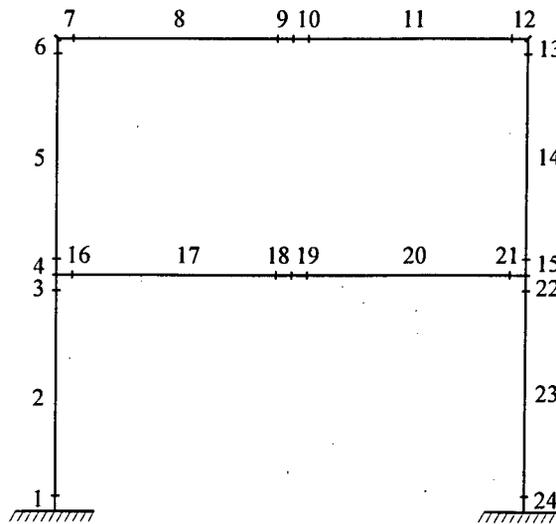


FIGURA 6.34 - Discretização do modelo: numeração das barras.

A tabela 6.17 apresenta os resultados deste exemplo, sem a consideração do esforço normal, onde o número entre parêntesis, na coluna "Posição das rótulas", referente ao fator de carga 0,73, indica a barra cujo módulo de elasticidade foi alterado, ou seja, a rótula se situa no nó 21 da barra 21. O percentual de precisão adotado foi de 1% ($M_p = 534,6$ a 540 kN.m). A influência do esforço normal é apresentada na tabela 5.18.

TABELA 6.17 – Resultados sem a influência do esforço normal.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,72	0	2"	-
0,73	0	2"	21 (21)
0,80	58	1'24"	21
0,90	84	2'03"	21 - 24
0,99	231	5'33"	21 - 24 - 1 - 13 - 18
1,00	203	4'54"	21 - 24 - 1 - 13 - 18 - 10

TABELA 6.18 – Resultados com a influência do esforço normal.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,72	0	2"	-
0,73	0	2"	21 (21)
0,80	59	1'27"	21
0,90	38	2'03"	21 - 24
0,98	507	13'20"	21 - 24 - 1 - 13 - 18
0,99	534	12'48"	21 - 24 - 1 - 13 - 18 - 10

A 1ª rótula ocorreu com 73% do carregamento crítico, em função do momento máximo na barra horizontal inferior. Com 90% do carregamento, ocorreu a 2ª rótula. A estrutura tornou-se isostática com a formação da 5ª rótula, com 99% do carregamento crítico, sem considerar o efeito do esforço normal; considerando este, a isostaticidade ocorreu com 98% do carregamento. A formação das rótulas intermediárias foi omitida para simplificar a apresentação.

O mecanismo de colapso foi obtido com um fator de carga de 100%, no caso da ausência do esforço normal, igualando-se aos resultados teóricos, para este exemplo. Isto demonstra, mais uma vez, a precisão do método.

A influência do esforço normal reduziu o fator de carga de colapso para 99%, o que pouco altera o resultado da análise.

A fig. 6.35 apresenta o pórtico com a sua configuração de colapso.

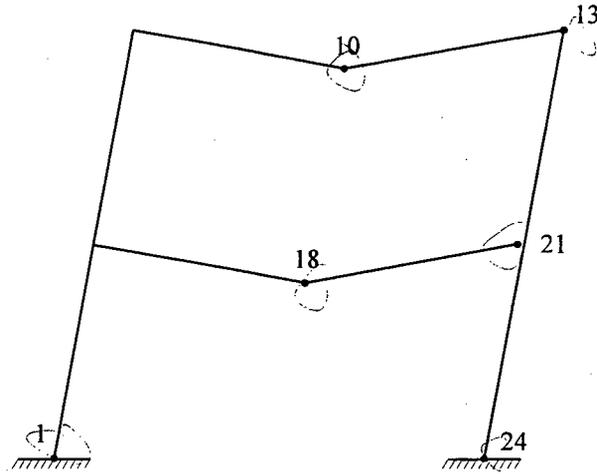


FIGURA 6.35 - Mecanismo de colapso.

6.7. Exemplo 7

Um pórtico é carregado com duas cargas verticais e uma horizontal, as quais estão expressas em kN, conforme fig. 6.36. Os números próximos às barras indicam o momento de plastificação da seção de cada uma delas, expressos em kN.m.

As propriedades da seção transversal do pórtico são:

- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,03 \text{ m}^2$
- $I = 0,0001 \text{ m}^4$

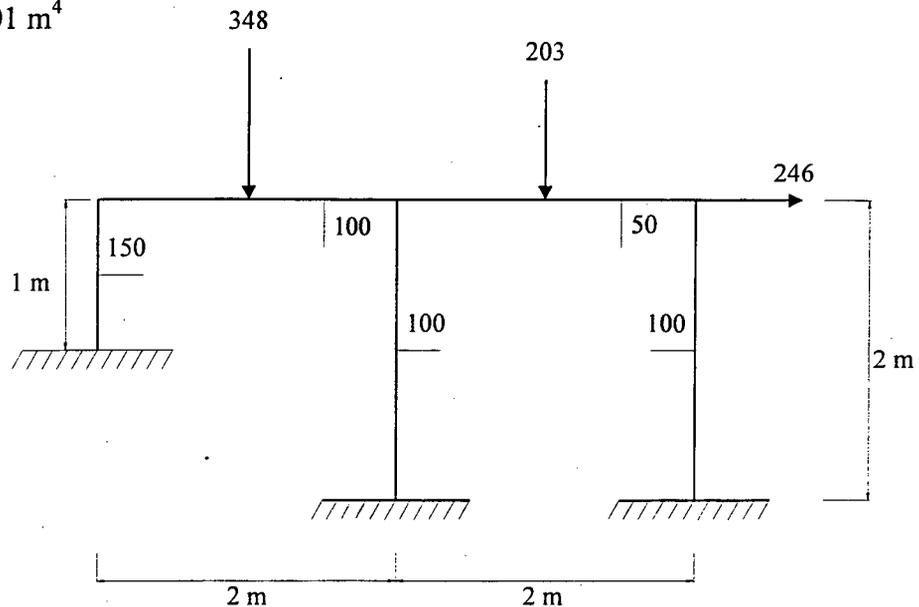


FIGURA 6.36 - Pórtico com diferentes momentos de plastificação.

O modelo foi discretizado com pequenas barras de 20 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas. A numeração dos nós é apresentada na fig. 6.37, bem como a numeração das barras na fig. 6.38.

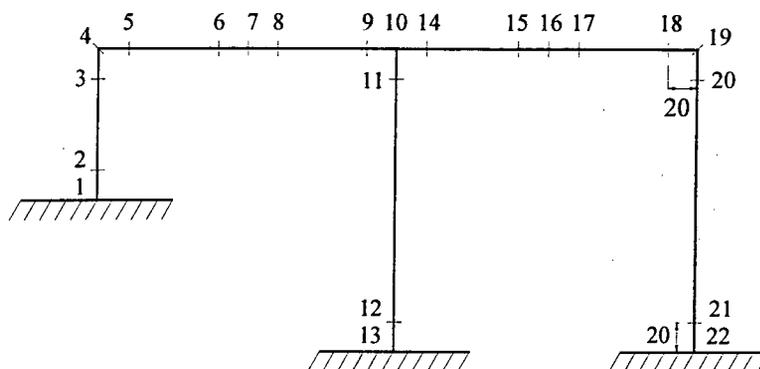


FIGURA 6.37 - Discretização do modelo: numeração dos nós.

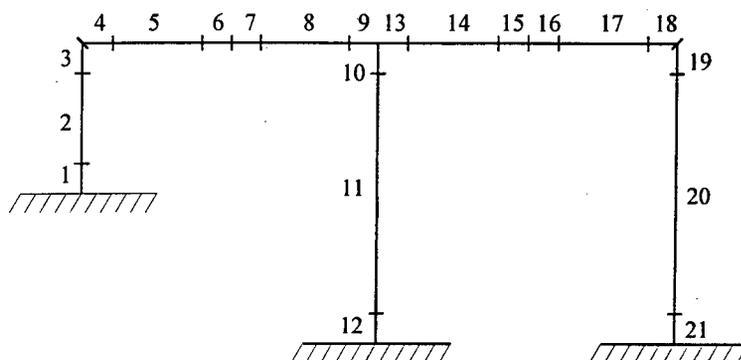


FIGURA 6.38 - Discretização do modelo: numeração das barras.

A tabela 6.19 apresenta os resultados deste exemplo, onde o número entre parêntesis, na coluna "Posição das rótulas", referente ao fator de carga 0,80, indica a barra cujo módulo de elasticidade foi alterado, ou seja, a rótula se situa no nó 10 da barra 9. O percentual de precisão utilizado foi de 1%.

TABELA 6.19 – Resultados do modelo da fig. 6.36.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,79	0	1"	-
0,80	38	20"	10 (9)
0,85	125	1'05"	10
0,86	124	1'05"	10 - 19
0,89	96	58"	10 - 19
0,90	87	47"	10 - 19 - 7
0,91	92	48"	10 - 19 - 7
0,92	188	1'37"	10 - 19 - 7 - 16
0,96	131	1'08"	10 - 19 - 7 - 16
0,97	178	1'32"	10 - 19 - 7 - 16 - 1
0,99	1229	10'26"	10 - 19 - 7 - 16 - 1 - 22
1,00	1523	12'56"	10 - 19 - 7 - 16 - 1 - 22 - 13

Até 79% do carregamento crítico, a estrutura continua no regime elástico. As rótulas começam a surgir a partir de 80% do carregamento e a estrutura torna-se isostática com 99% do carregamento. O mecanismo de colapso foi obtido com um fator de carga de 100%, igualando-se aos resultados teóricos. Acima deste percentual, o método não convergiu.

Apesar da seção transversal da barra 13 ter um momento de plastificação menor que o da seção da barra 9, é esta que governou o surgimento da rótula no nó 10. Isto acontece devido a um carregamento maior no vão direito do pórtico, além deste ser assimétrico. A fig. 5.39 apresenta o pórtico com sua configuração de colapso

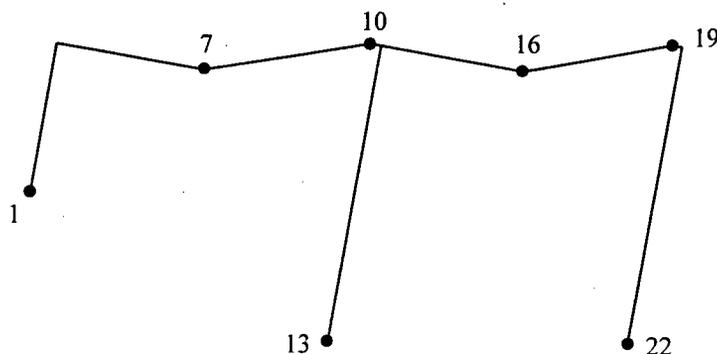


FIGURA 6.39 - Mecanismo de colapso.

6.8. Exemplo 8

Um pórtico é carregado com duas cargas verticais e duas horizontais, as quais estão expressas em kN, conforme fig. 6.40. Os números próximos às barras indicam o momento de plastificação da seção de cada uma delas, expressos em kN.m.

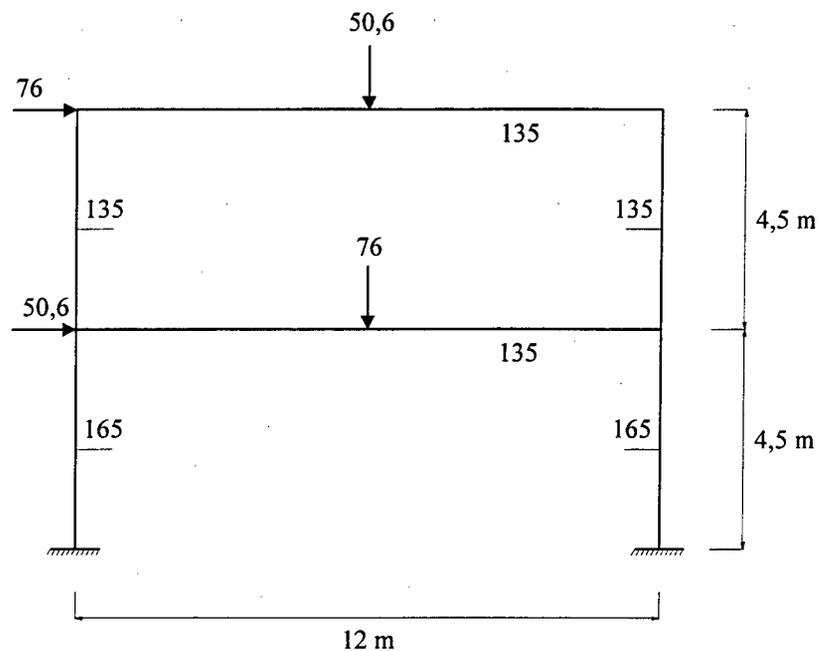


FIGURA 6.40 - Pórtico de dois andares com diferentes momentos de plastificação.

As propriedades da seção transversal do pórtico são:

- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,03 \text{ m}^2$
- $I = 0,0001 \text{ m}^4$

O modelo foi discretizado com pequenas barras de 20 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas. A numeração dos nós é apresentada na fig. 6.41, e a numeração das barras na fig. 6.42.

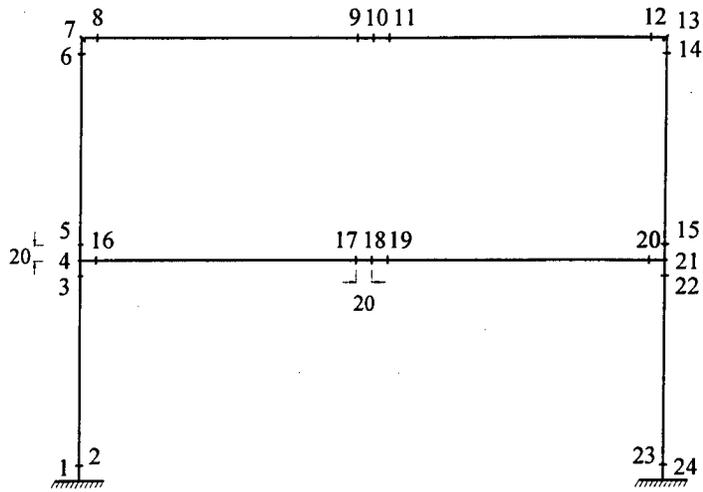


FIGURA 6.41 - Discretização do modelo: numeração dos nós.

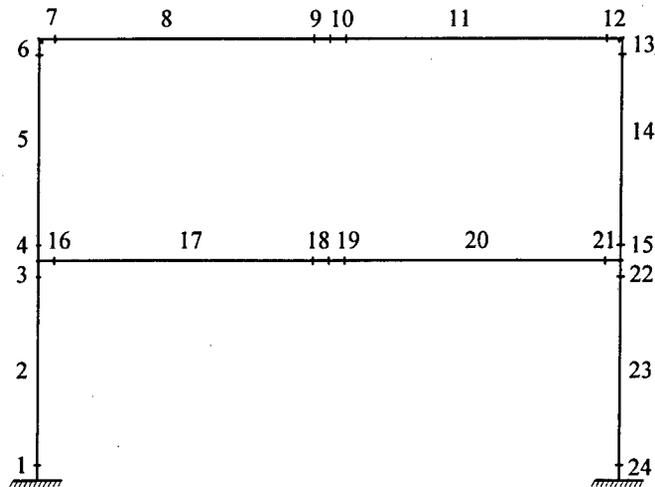


FIGURA 6.42 - Discretização do modelo: numeração das barras.

A tabela 6.20 apresenta os resultados deste exemplo, onde o número entre parêntesis, na coluna "Posição das rótulas", referente ao fator de carga 0,63, indica a barra cujo módulo de elasticidade foi alterado, ou seja, a rótula se situa no nó 21 da barra 21. O percentual de precisão utilizado foi de 1%.

TABELA 6.20 – Resultados do modelo da fig. 6.40.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processamento	Posição das rótulas
0,62	0	3"	-
0,63	0	3"	21 (21)
0,83	51	1'34"	21
0,88	50	1'34"	21 – 13 – 24
0,92	145	4'27"	21 – 13 – 24 – 1 – 18
0,96	109	3'21"	21 – 13 – 24 – 1 – 18
1,00	194	5'56"	21 – 13 – 24 – 1 – 18 – 10

Até 62% do carregamento crítico, a estrutura continua no regime elástico. As rótulas começam a surgir a partir de 63% do carregamento, indicando a grande reserva de resistência desta estrutura. A seqüência completa de surgimento das rótulas foi omitida para simplificar a apresentação.

O mecanismo de colapso foi obtido com um fator de carga de 100%, igualando-se aos resultados teóricos. Acima deste percentual, o método não convergiu.

É importante acrescentar que na análise dos resultados, através do arquivo de saída do programa, foi constatado que a rótula do nó 10 (que se situa nas barras 9 e 10) provocou uma pequena mudança no módulo de elasticidade da barra 8, levando o momento do nó final desta barra para dentro do intervalo de plastificação. Porém, a rótula ficou bem caracterizada no nó 10, que é um ponto de aplicação de carga, onde os módulos de elasticidade das barras 9 e 10 sofreram alterações muito maiores.

Isto ocorreu devido à escolha do tamanho das pequenas barras (20 cm), que é muito pequeno para um vão de 12 m. Mesmo assim, os resultados apresentados são excelentes.

A fig. 6.43 apresenta o pórtico com sua configuração de colapso.

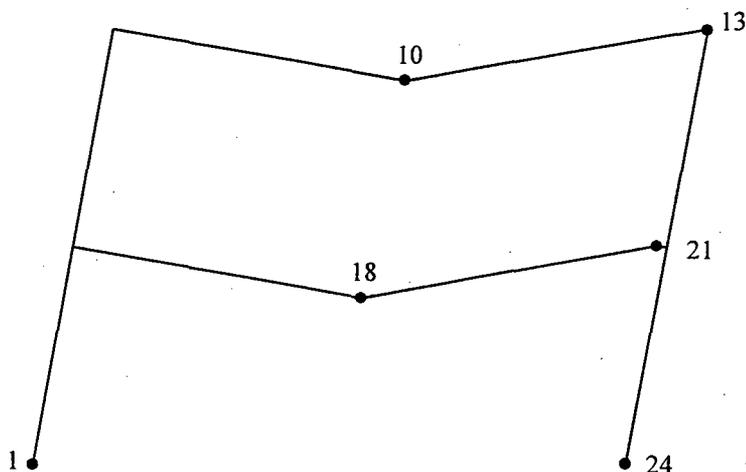


FIGURA 6.43 - Mecanismo de colapso.

6.9. Exemplo 9

Um pórtico de quatro andares é carregado com várias cargas concentradas verticais e horizontais, as quais estão expressas em kN, multiplicadas por um fator de carga λ , conforme fig. 6.44. O valor de λ para o carregamento crítico teórico, calculado pela Teoria das Rótulas Plásticas, é igual a 2,23.

O valor dos momentos de plastificação das seções está indicado pelo número próximo às barras

As propriedades da seção transversal do pórtico são:

- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,03 \text{ m}^2$
- $I = 0,0001 \text{ m}^4$

O modelo foi discretizado com pequenas barras de 20 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas.

A numeração dos nós e a numeração das barras estão representadas na fig. 6.45, (a) e (b) respectivamente.

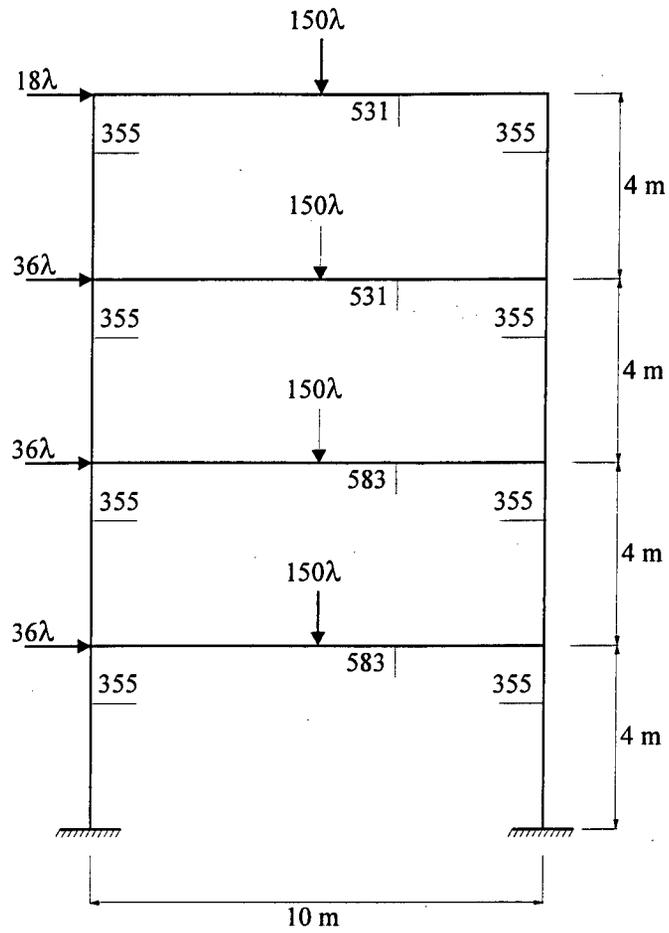


FIGURA 6.44 – Pórtico de quatro andares com várias cargas concentradas..

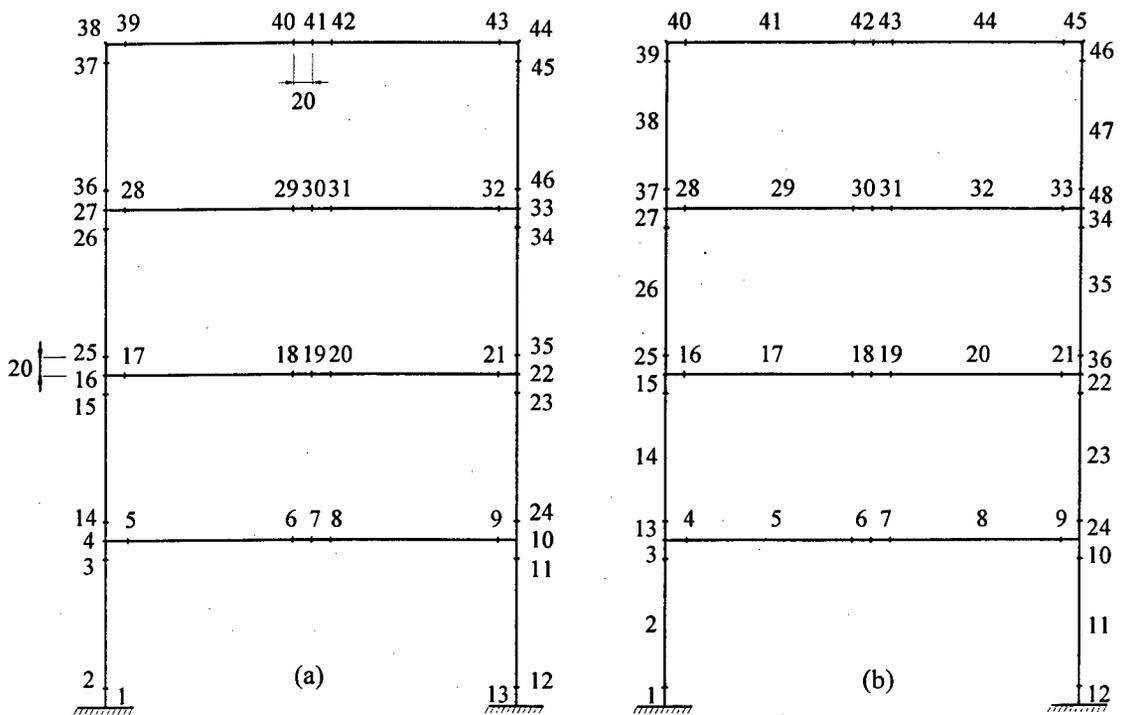


FIGURA 6.45 – Discretização. (a) Numeração dos nós. (b) Numeração das barras.

A tabela 6.21 apresenta os resultados deste exemplo. O percentual de precisão adotado foi de 1%.

TABELA 6.21 – Resultados do modelo da fig. 6.44.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processam.	Posição das rótulas
1,50	0	4"	-
1,60	107	4'09"	13
1,70	85	3'21"	13
1,80	69	2'41"	13 – 10 – 22
1,90	383	14'51"	13 – 10 – 22 – 1 – 44
2,00	325	12'36"	13 – 10 – 22 – 1 – 44 – 33
2,10	174	6'45"	13 – 10 – 22 – 1 – 44 – 33
2,20	873	33'55"	13 – 10 – 22 – 1 – 44 – 33 – 7 – 41
2,23	451	17'45"	13 – 10 – 22 – 1 – 44 – 33 – 7 – 41 – 19 – 30

Pela tabela acima, observa-se que o mecanismo de colapso formou-se com o mesmo fator de carga calculado pela Teoria das Rótulas Plásticas ($\lambda = 2,23$), demonstrando a grande precisão do método. Observa-se, também, que a primeira rótula (início do regime plástico) formou-se com um fator de carga de 1,6, o que representa aproximadamente 72% do carregamento crítico, indicando, também, uma expressiva reserva de resistência além da fase elástica.

O mecanismo de colapso do pórtico é apresentado na figura 6.46. É importante observar que a posição de algumas rótulas foi desenhada com um pequeno afastamento da posição real do nó, o que também pode ser observado em alguns exemplos anteriores. Isto serve para indicar qual é a barra responsável pela plastificação do nó.

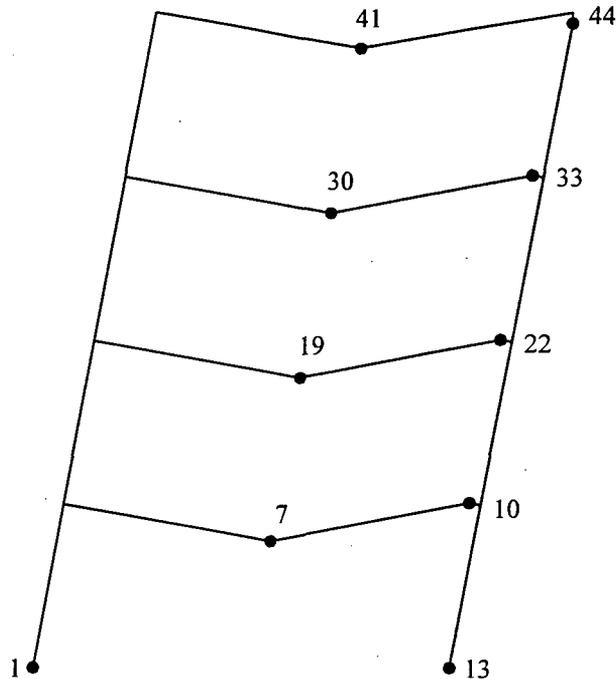


FIGURA 6.46 – Mecanismo de colapso.

6.10. Exemplo 10

Um pórtico de três andares e dois vãos é carregado com várias cargas concentradas verticais e horizontais, as quais estão expressas em kN, conforme fig. 6.47. As cargas também estão multiplicadas por um fator de carga λ , cujo valor crítico teórico é igual a 1,976.

O valor dos momentos de plastificação das seções está indicado pelo número próximo às barras.

As propriedades da seção transversal do pórtico são:

- $E = 210.000.000 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0,03 \text{ m}^2$
- $I = 0,0001 \text{ m}^4$

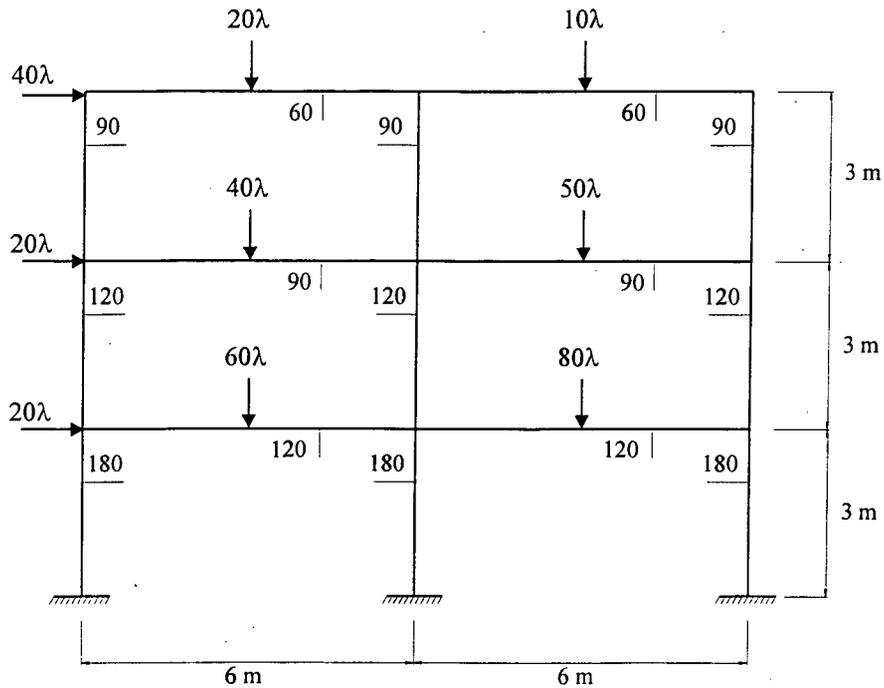


FIGURA 6.47 – Pórtico de três andares e dois vãos.

O modelo foi discretizado com pequenas barras de 20 cm próximas aos engastes, nas mudanças de direção das barras e nas posições das cargas concentradas.

A numeração dos nós está representada na fig. 6.48, e a numeração das barras na fig. 6.49.

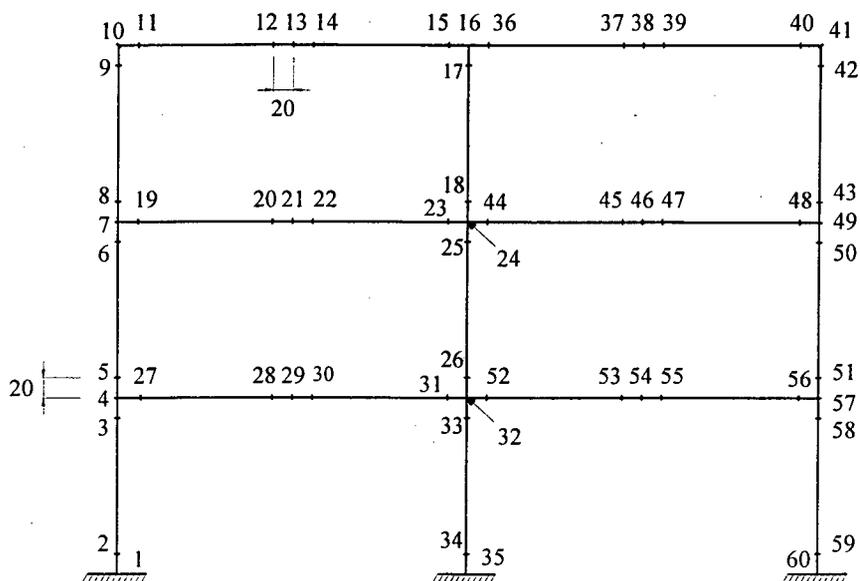


FIGURA 6.48 – Discretização do modelo: numeração dos nós.

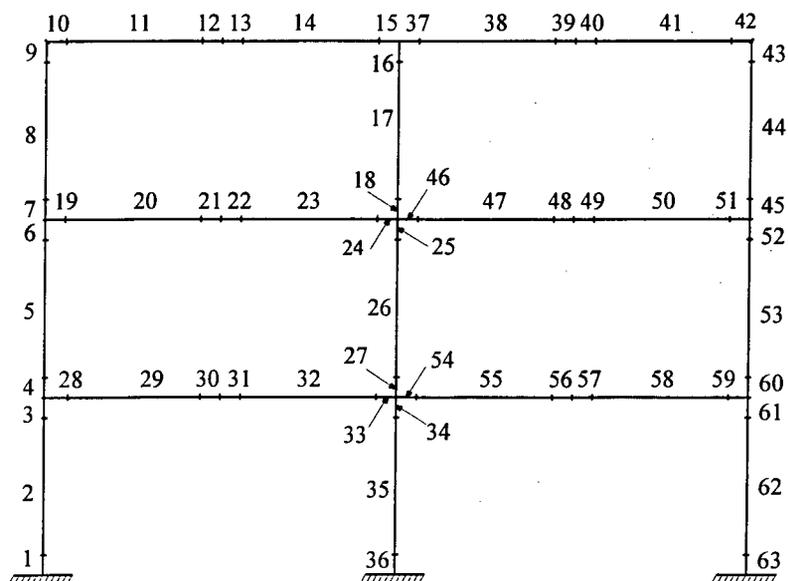


FIGURA 6.49 – Discretização do modelo: numeração das barras.

A tabela 6.22 apresenta os resultados deste exemplo. O percentual de precisão adotado foi de 1%.

TABELA 6.22 – Resultados do modelo da fig. 6.47.

Fator de carga	Número de iterações	Tempo de processam.	Posição das rótulas
1,30	0	8"	-
1,40	146	12'37"	24 - 32 - 49 - 57
1,50	96	8'20"	24 - 32 - 49 - 57
1,60	76	6'38"	24 - 32 - 49 - 57
1,70	205	17'40"	24 - 32 - 49 - 57 - 16 - 54
1,80	288	24'45"	24 - 32 - 49 - 57 - 16 - 54 - 41 - 46
1,90	269	23'53"	24 - 32 - 49 - 57 - 16 - 54 - 41 - 46 - 21 29
1,95	1109	1h35'18"	24 - 32 - 49 - 57 - 16 - 54 - 41 - 46 - 21 29 - 10 - 60
1,97	1501	2h08'45"	24 - 32 - 49 - 57 - 16 - 54 - 41 - 46 - 21 29 - 10 - 60 - 1 - 35

O mecanismo de colapso formou-se com o fator de carga de 1,97, equivalente a 99,7% do valor teórico ($\lambda = 1,976$), o que comprova, mais uma vez, a boa precisão do método. As primeiras rótulas formaram-se com um fator de carga de 1,4, o que corresponde aproximadamente a 71% do carregamento crítico, assemelhando-se, muito, com o exemplo anterior (exemplo 9).

A figura 6.50 apresenta o mecanismo de colapso para o pórtico.

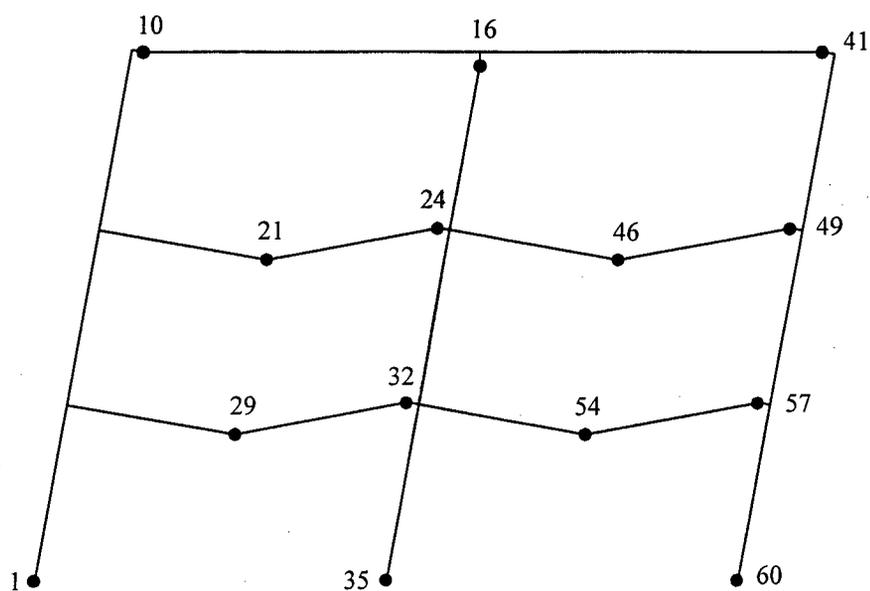


FIGURA 6.50 – Mecanismo de colapso.

7. CONCLUSÃO

Como exposto anteriormente, um processo iterativo transformará a distribuição de momentos fletores de forma que não haja momentos superiores ao de plastificação, para carregamento inferior ao carregamento crítico. Quanto mais próximo do carregamento crítico, maior será o número de iterações para se obter momentos inferiores ao de plastificação. Para carregamento acima do crítico, o processo não mais convergirá, pois não existirá nenhuma configuração de equilíbrio em tal situação.

Pode-se observar, também, que à medida que se aplica este processo iterativo para se ajustar os momentos, algumas barras terão seus módulos de elasticidade alterados temporariamente, durante as redistribuições de momentos que ocorrerão durante cada iteração, mas à medida que se aproxima a configuração de equilíbrio, seus módulos irão retornando ao valor original. Isto se deve ao fato de, muitas vezes, a variação de momento fletor ao longo de duas barras consecutivas ser muito pequena, de tal forma que as duas barras sofrem, inicialmente, alterações em seus módulos. No final das iterações, apenas as barras que simulam as rótulas plásticas terão seus módulos alterados.

Com base nos exemplos analisados, alguns critérios devem ser levados em consideração na formulação dos problemas. Assim, uma boa escolha para a determinação do tamanho das barras pequenas é dimensioná-las conforme o comprimento do vão. Uma boa relação entre o comprimento da barra e o comprimento do vão é o intervalo de $1/40$ a $1/10$. Assim, em um vão com comprimento de 4 m, as barras pequenas devem ter um comprimento variando de 10 cm a 40 cm.

Para valores fora desse intervalo, poderão surgir determinados problemas numéricos, antes da convergência, como incondicionamento da matriz de rigidez, ou grandes erros numéricos na resolução do sistema linear de equações, além de consideráveis alterações no número de iterações e no tempo de processamento. Vários exemplos foram testados com comprimentos de barra fora do intervalo recomendado,

surgindo, algumas vezes, os problemas citados anteriormente e, por esta razão, em sua maioria, não foram apresentados neste trabalho.

É importante destacar, no entanto, a necessidade da existência de barras pequenas próximas à posição de formação de rótulas. Isto é de suma importância para a aplicação do método.

Também, quanto menor o percentual de tolerância, maior será, geralmente, o número de iterações até convergir. Porém, para percentuais inferiores a 1%, os resultados obtidos não apresentam diferença considerável e, desta forma, não é necessário diminuir este percentual, evitando-se, assim, o acréscimo no tempo de processamento.

Com relação ao critério de convergência, pode-se introduzir uma verificação de deslocamentos durante a análise, limitando os seus valores. Quando a estrutura está submetida a um carregamento acima do crítico, os deslocamentos, durante as iterações, tornam-se muito grandes, indicando que não haverá convergência.

Um acompanhamento, durante as iterações, das variações dos momentos fletores, mostra que, para carregamentos abaixo e próximos ao crítico, existe uma tendência de convergência. Para carregamentos acima do crítico, os momentos variam de forma aleatória, atingindo, em determinadas iterações, valores com grande magnitude. Estas mudanças bruscas nos momentos fletores, entre duas iterações consecutivas, indicam que não haverá convergência. Pode-se, também, calcular essas variações e impor limitações, como critério de convergência.

Com a consideração de todas as observações acima, o método apresentado oferece inúmeras vantagens, principalmente quando aplicado a estruturas mais complexas, com resultados muito próximos das teorias clássicas.

Entretanto, para o cálculo dos deslocamentos, o método não traz bons resultados. Isto acontece pelo fato de que as rótulas plásticas são simuladas por pequenas barras. Quanto menor for o comprimento destas barras, mais próximo do valor real serão os deslocamentos da estrutura. Como as barras não são modeladas com comprimentos tão pequenos, o cálculo dos deslocamentos também não fornece bons resultados. Porém, pode-se calcular os valores reais dos deslocamentos realizando uma nova análise elástica onde as rótulas são criadas externamente nos pontos definidos por

este método. De qualquer forma, o objetivo do método é a Análise Limite, sem a preocupação com a exatidão dos valores dos deslocamentos.

Com a análise dos diversos exemplos, e sua comparação com os resultados teóricos da Teoria das Rótulas Plásticas, pode-se concluir que o método proposto neste trabalho sempre poderá ser aplicado a qualquer tipo de estrutura reticular, e os objetivos específicos citados no início do trabalho foram alcançados.

Além disso, conforme citado no capítulo introdutório, este método também permite, com algumas alterações na relação momento fletor-curvatura, a extensão a estruturas de concreto armado. Para isto, deve-se definir diagramas de momento fletor-curvatura levando em consideração, também, o estado de fissuração das seções. A aplicação deste método em estruturas de concreto armado pode servir de proposta para futuros trabalhos envolvendo a não-linearidade material.

Na parte computacional, pode-se também, em pesquisas futuras, automatizar o programa de forma que a variação do fator de carga seja realizada pelo próprio programa, fornecendo a configuração final de colapso, sem a preocupação com os valores intermediários.

A incorporação da não-linearidade geométrica também pode ser estudada, futuramente, tornando mais completa a análise das estruturas.

Finalmente, uma extensão deste trabalho a pórticos espaciais aumentará a área de abrangência deste método.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 8.1. ADVANCED analysis examples manual – MSC Nastran for Windows – U. S. A.: Mac Neal Schwendler Corporation, 1997.
- 8.2. ALTOQI Eberick. Projeto estrutural de edificações em concreto armado. Manual de referência, 1997.
- 8.3. ANSYS User's Manual: Teoria da barra plástica. Apêndice U.
- 8.4. BAKER, John; HEYMAN, Jacques. Plastic design of frames, vol. 1. London: Cambridge University Press, 1969.
- 8.5. CALLADINE, C. R. Engineering plasticity. London: Pergamon Press, 1969.
- 8.6. CEB/FIP Model code 1990.
- 8.7. CHEN, W. F. Plasticity in reinforced concrete. McGraw-Hill Book Company, 1982.
- 8.8. CHEN, W. F.; TOMA, S. Advanced analysis of steel frames. Theory, software, and applications. London: CRC Press, 1994
- 8.9. COOK, Robert D; MALKUS, David S.; PLESHA, Michael E. Concepts and applications of finite element analysis. Madison: John Wiley & Sons, 1989.
- 8.10. DARKOV. Structural mechanics. Moscow: Mir Publishers, 1983.
- 8.11. FUSCO, P. P. Fundamentos do projeto estrutural. EPUSP, McGraw-Hill do Brasil, 1976.
- 8.12. GERE, James; WEAVER, Willian. Analysis of framed structures. Princeton: D. Van Nostrand, 1998.
- 8.13. HEYMAN, Jacques. Plastic design of frames, vol. 2. London: Cambridge University Press.
- 8.14. HORNE, M. R. Plastic theory of structures. London: Pergamon Press, 1979.
- 8.15. LORIGGIO, Daniel D.; SENEM, Paulo R. Limit analysis of plane frames by

- numerical methods. International conference on education, practice and promotion of computational methods in engineering using small computers. Macau: 1995.
- 8.16. LORIGGIO, Daniel D. Notas de aula da disciplina Estruturas em Regime Elastoplástico. UFSC/ECV, 1998.
- 8.17. MARTORANO, Ivo César. Análise limite de sistemas estruturais reticulares. Florianópolis, 1986. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- 8.18. MEDEIROS, S. R. P.; FRANÇA, Ricardo. Um programa para análise não linear geométrica em microcomputadores. Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, 1989.
- 8.19. MELLO; FARIAS. Modelo elastoplástico para avaliação da capacidade resistente de pórticos planos de concreto armado. In: 41º Congresso Brasileiro de Concreto. Salvador, 1999.
- 8.20. MORAES, Poliana Dias de. Uma formulação mista de elementos finitos para a análise elastoplástica de estruturas reticulares. Florianópolis, 1993. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina
- 8.21. MRÁZIK, SKALOUD, TOCHÁČEK. Plastic design of steel structures. New York: Halsted Press, 1987.
- 8.22. POPOV, Egor Paul. Introdução à mecânica dos sólidos. Tradução Mauro O. C. Amorelli. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.
- 8.23. SAVE; MASSONNET. Plastic analysis and design. New York: Blaisdell Publishing, 1965.
- 8.24. SISTEMA Mix de Análise Estrutural. Manual Interface Texto.
- 8.25. ZIENKIEWICZ; CHEUNG. The finite element method in structural and continuum mechanics. London: McGraw-Hill, 1967.

9. ANEXOS

O método utilizado para a análise não linear de pórticos planos foi desenvolvido a partir de um programa de análise matricial escrito na linguagem QuickBasic, no qual foram incorporadas algumas sub-rotinas para levar em consideração as alterações no módulo de elasticidade das barras e a influência do esforço normal no momento de plastificação.

Para a análise de alguns modelos de pórticos, foi criada uma sub-rotina para a visualização do diagrama de momento fletor da estrutura, permitindo o acompanhamento gráfico da plastificação das barras. Esta sub-rotina não está incluída na apresentação da listagem do programa pelo fato de exigir uma alteração no modo gráfico da tela do computador, além de aumentar o tempo de processamento na análise. A mesma foi utilizada apenas da fase de experimentação.

Para os pórticos maiores, o programa foi convertido para linguagem Visual Basic, com a finalidade de resolver os problemas de limitação de memória, passando a utilizar, desta forma, a memória RAM do computador, e não somente a memória convencional de 640 Kb, como no caso do QuickBasic.

A listagem que será apresentada refere-se ao programa escrito em QuickBasic, pois a versão em Visual Basic é basicamente a mesma, com pequenas mudanças em algumas funções, além da tela inicial montada em um formulário sem elaboração de algoritmo.

9.1. Desenvolvimento de Programa

Antes de ser apresentada a explicação detalhada das sub-rotinas do programa, é necessário definir os dados de entrada que deverão ser incluídos em um arquivo no formato de texto, para leitura pelo programa.

A seqüência dos dados de entrada e a definição das variáveis, bem como os códigos de restrições, são apresentados a seguir.

Entrada de dados

- Número de nós = NNos
- Coordenadas dos nós = x, y
 x_1, y_1
 $:$ $:$
 $:$ $:$
 x_n, y_n ($n = \text{NNos}$)
- Número de barras = NBarras
- Propriedades das barras = $E, I, A, M_{Po}, P_o, P_1, h, H$
 $E_1, I_1, A_1, M_{Po1}, P_{o1}, P_{11}, h_1, H_1$
 $:$ $:$ $:$
 $:$ $:$ $:$
 $E_n, I_n, A_n, M_{Pon}, P_{on}, P_{1n}, h_n, H_n$ ($n = \text{NBarras}$)
- Incidência das barras = k, j
 k_1, j_1
 $:$ $:$
 $:$ $:$
 k_n, j_n ($n = \text{NBarras}$)
- Carregamento nas barras = q, p
 q_1, p_1
 $:$ $:$
 $:$ $:$
 q_n, p_n ($n = \text{NBarras}$)
- Número de nós com esforço = nf
- Nó e esforço nodal = $\text{nof}, F_x, F_y, M_i$
 $\text{nof}_1, F_{x1}, F_{y1}, M_{i1}$

$$\begin{array}{cccc}
 : & : & : & : \\
 : & : & : & : \\
 \text{nof}_n, \text{Fx}_n, \text{Fy}_n, \text{Mi}_n & (n = \text{nf})
 \end{array}$$

- Número de nós com restrição = nr

- Nó, código e restrição = nores, codx, cody, codz, valx, valy, valz
nores₁, codx₁, cody₁, codz₁, valx₁, valy₁, valz₁
: : : : : : :
: : : : : : :
nores_n, codx_n, cody_n, codz_n, valx_n, valy_n, valz_n (n = nr)

Definição das Variáveis

NNos = número de nós

- x_i = abcissa do i-ésimo nó
- y_i = ordenada do i-ésimo nó

NBarras = número de barras

- E_i = módulo de elasticidade da i-ésima barra
- I_i = momento de inércia da i-ésima barra
- A_i = área da seção transversal da i-ésima barra
- M_{Poi} = momento de plastificação da seção transversal da i-ésima barra
- P_{oi} = esforço normal de plastificação, na ausência de momento fletor, da seção transversal retangular, ou a parcela do esforço normal, referente à alma da seção transversal I, da i-ésima barra
- P_{ii} = parcela do esforço normal de plastificação referente às mesas da seção transversal I, da i-ésima barra
- h_i = altura da seção transversal retangular, ou da alma da seção I, da i-ésima barra
- H_i = altura da mesa da seção I, da i-ésima barra

q_i = carga distribuída na i-ésima barra (positiva para baixo)

p_i = carga concentrada central na i-ésima barra (positiva para baixo)

k_i = nó inicial da i-ésima barra

j_i = nó final da i-ésima barra

nf = número de nós com esforço (aplicado)

- nof_i = número do i -ésimo nó com esforço
- Fx_i = esforço horizontal no i -ésimo nó com esforço (positivo para a direita)
- Fy_i = esforço vertical no i -ésimo nó com esforço (positivo para cima)
- Mi_i = momento aplicado no i -ésimo nó com esforço (positivo no sentido anti-horário)

nr = número de nós com restrição

- nores_i = número do i -ésimo nó restrito
- codx_i = cód. de restr. em x (deslocam.) do i -ésimo nó restrito
- cody_i = cód. de restr. em y (deslocam.) do i -ésimo nó restrito
- codz_i = cód. de restr. em z (rotação) do i -ésimo nó restrito
- valx_i = valor do deslocamento x do i -ésimo nó restrito
- valy_i = valor do deslocamento y do i -ésimo nó restrito
- valz_i = valor da rotação do i -ésimo nó restrito

Códigos de restrições

1 = restrito

0 = livre

Com a entrada de dados definida, as sub-rotinas e suas funções são descritas a seguir.

SUB LeNos

Lê o número de nós e as coordenadas x e y de cada nó, armazenando na matriz "Nos".

SUB LePropr

Lê o número de barras e as propriedades E , I , A , M_{p_o} , P_o , P_l , h e H de cada barra, armazenando na matriz "Propr", sendo que o módulo de elasticidade de cada barra também é armazenado na matriz "Eo", para posterior utilização na parte não-

linear.

SUB LeIncidencia

Lê os nós inicial e final de cada barra, armazenando na matriz “Incid”.

SUB LeCargas

Lê as cargas que atuam em cada barra, multiplicando-as pelo fator de carga F_c e armazenando na matriz “Carreg”.

SUB LeEsforNo

Lê o número de nós onde atuam esforços e o número dos nós com seus respectivos esforços, armazenando na matriz “F”.

SUB Comprimento

Em função das coordenadas iniciais e finais de cada barra, calcula, pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento de cada barra e, por trigonometria, o ângulo de cada barra, armazenando, respectivamente, nas matrizes “L” e “Ang”.

SUB MatrizLocal

Através dos valores de E , I , A e L , calcula os coeficientes de rigidez de cada barra, armazenando-os na matriz de rigidez local “MatLoc”.

SUB MatrizGlobal

Através dos ângulos das barras, calcula a matriz de transformação do sistema local para o sistema global de cada barra, “MatTransf”. Em seguida, calcula a matriz transposta da matriz de transformação, “MatTransp”. Finalmente, calcula a matriz de rigidez global de cada barra:

$$\text{MatGlob} = \text{MatTransp} \times \text{MatLoc} \times \text{MatTransf.}$$

SUB MatrizEstrut

Através das matrizes de rigidez de cada barra no sistema global e a repetição dos graus de liberdade, monta a matriz de rigidez global da estrutura, “MatEstr”.

SUB TermoIndep

Em função do carregamento fornecido, calcula os momentos de engastamento perfeito e reações de apoio, no sistema local, para cada barra, armazenando no vetor “FoLoc”. Em seguida, transforma para o sistema global, armazenando no vetor “FoGlob”:

$$\text{FoGlob} = \text{MatTransp} \times \text{FoLoc.}$$

Verificando a repetição dos graus de liberdade, monta o vetor “Fo” (momentos de engastamento perfeito e reações para a estrutura).

Finalmente, calcula o vetor dos termos independentes: $\text{Indep} = F - \text{Fo}$.

SUB LeRestr

Lê o número de nós com restrição e o número dos nós com seus respectivos códigos de restrição e o valores destas restrições, armazenando na matriz “Restr”.

SUB TestaGlr

Testa o código de restrição: se for igual a 1, chama a *SUB RestrGl*.

SUB RestrGl

Impõe as condições de contorno, alterando o vetor *Indep* e a matriz *MatrEstr*.

SUB ResolSist

Resolve o sistema de equações lineares:

$$\text{Indep} = \text{MatrEstr} \times D \quad (F = F_0 + KD \Rightarrow b = K.D),$$

onde D é o vetor dos deslocamentos da estrutura. Os deslocamentos D , da estrutura, são armazenados no vetor Indep .

SUB CalEsforcos

Calcula os esforços de cada barra no sistema global, transformando, em seguida, para o sistema local.

$$\text{Aux} = F_0\text{Glob} + \text{MatGlob} \times \text{Desloc} \quad (S = S_0 + k.d),$$

onde Desloc é um subvetor do vetor Indep . Desloc contém os deslocamentos da barra e Indep contém os deslocamentos da estrutura.

$$\text{Esforco} = \text{MatTransf} \times \text{Aux}.$$

SUB Mpl

Para cada barra, verifica qual o maior momento e chama a *SUB AlterElast*.

Se houve alguma barra cujo módulo de elasticidade foi alterado, chama as sub-rotinas *SUB MatrizEstrut*, *SUB TermoIndep*, *SUB TestaGlr*, *SUB ResolSist* e *SUB CalEsforcos*. Em seguida, repete este procedimento até que não haja mais barras alteradas.

SUB AlterElast

Compara o maior momento de cada barra com o momento de plastificação. Se for maior, diminui o módulo de elasticidade. Se for menor e o módulo de elasticidade menor que o módulo inicial, aumenta o módulo de elasticidade, limitando o módulo inicial como valor máximo.

SUB Impressao

Imprime os resultados em um arquivo no formato de texto.

9.2. Listagens

9.2.1. Programa

```
DECLARE SUB AlterElast (Propr!(), Eo!(), Mpl(), Mom!, P!, BarrAlter!,  
bar!, Perc!, A$)  
DECLARE SUB ResolSist (ngl!, NBarras!, Incid!(), MatEstr!(), Indep!())  
DECLARE SUB LeEsforNo (F!(), ngl!, Fc!)  
DECLARE SUB MatrizGlobal (NBarras!, Ang!(), MatTransf!(),  
MatTransp!(), MatLoc!(), MatGlob!())  
DECLARE SUB LePropr (NBarras!, Propr!(), Eo!())  
DECLARE SUB Mpl (nr!, ngl!, Mpl(), NBarras!, Esforco!(), Propr!(),  
Eo!(), Incid!(), MatGlob!(), MatEstr!(), Carreg!(), L!(), Ang!(),  
MatTransf!(), MatTransp!(), FoGlob!(), F!(), Indep!(), Restr!(),  
NumIter!, Perc!, A$)  
DECLARE SUB CalEsforcos (NBarras!, Prop(), Mpl(), Resul!(),  
MatGlob!(), Incid!(), Indep!(), MatTran!(), Esfor!(), NumIter)  
DECLARE SUB LeIncidencia (NBarras!, Incid!())  
DECLARE SUB TermoIndep (NBarras!, ngl!, Carreg!(), L!(), Incid!(),  
Ang!(), MatTransp!(), FoGlob!(), F!(), Indep!())  
DECLARE SUB TestaGlr (NNos!, ngl!, Restr!(), MatEst!(), b!())  
DECLARE SUB RestrGl (gl!, valor!, ngl!, b!(), MatEst!())  
DECLARE SUB LeRestr (nr!, Restr!())  
DECLARE SUB MatrizEstrut (NBarras!, ngl!, Propr!(), Incid!(),  
MatGlob!(), MatEstr!())  
DECLARE SUB Impressao (NNos!, ngl!, Nos!(), NBarras!, Prop!(),  
Carreg!(), Incid!(), L!(), Ang!(), MatLoc!(), x!(), Esfor!(), pp, Fc,  
arq$, exe$, A$)  
DECLARE SUB LeCargas (NBarras!, Carreg!(), Fc)  
DECLARE SUB COMPRIMENTO (NBarras!, Incid!(), Nos!(), L!(), Ang!())  
DECLARE SUB LeNos (NNos!, ngl, Nos!())  
DECLARE SUB MatrizLocal (NBarras!, Prop!(), L!(), MatLoc!())  
CLS
```

```
'PROGRAMA PRINCIPAL
'DEFINICAO DE VARIAVEIS
'$DYNAMIC
DIM Nos(1, 2), Incid(1, 2), L(1), Ang(1), MatGlob(1, 6, 6), MatEstr(1,
1), MatTransp(1, 6, 6)
DIM Carreg(1, 2), Propr(1, 5), MatLoc(1, 6, 6), MatTransf(1, 6, 6),
Restr(1, 7), Esforco(1, 6)
DIM Indep(1), FoGlob(1, 6), F(1), Eo(1), Mpl(1)
'INICIO DO PROGRAMA
Inicio:
INPUT "Nome do arquivo: ", arq$
ON ERROR GOTO ErroLeit
OPEN "i", #1, arq$ + ".dad"
ON ERROR GOTO 0
OPEN "o", #2, arq$ + ".sad"
INPUT "Considerar o efeito do esforco normal (S/N) "; A$
INPUT "Percentual de tolerancia (%): ", pp
INPUT "Fator de carga:", Fc
PRINT "Processando..."
CronoExtI = TIMER
Perc = 1 - pp / 100
CALL LeNos(NNos, ngl, Nos())
CALL LePropr(NBarras, Propr(), Eo())
CALL LeIncidencia(NBarras, Incid())
CALL LeCargas(NBarras, Carreg(), Fc)
CALL LeEsforNo(F(), ngl, Fc)
CALL COMPRIMENTO(NBarras, Incid(), Nos(), L(), Ang())
CALL MatrizLocal(NBarras, Propr(), L(), MatLoc())
CALL MatrizGlobal(NBarras, Ang(), MatTransf(), MatTransp(), MatLoc(),
MatGlob())
CALL MatrizEstrut(NBarras, ngl, Propr(), Incid(), MatGlob(),
MatEstr())
CALL TermoIndep(NBarras, ngl, Carreg(), L(), Incid(), Ang(),
MatTransp(), FoGlob(), F(), Indep())
CALL LeRestr(nr, Restr())
CALL TestaGlr(nr, ngl, Restr(), MatEstr(), Indep())
CALL ResolSist(ngl, NBarras, Incid(), MatEstr(), Indep())
CALL CalEsforcos(NBarras, Propr(), Mpl(), FoGlob(), MatGlob(),
Incid(), Indep(), MatTransf(), Esforco(), NumIter)
CronoIntI = TIMER
```

```

CALL Mpl(nr, ngl, Mpl(), NBarras, Esforco(), Propr(), Eo(), Incid(),
MatGlob(), MatEstr(), Carreg(), L(), Ang(), MatTransf(), MatTransp(),
FoGlob(), F(), Indep(), Restr(), NumIter, Perc, A$)
CronoIntf = TIMER
CLS
PRINT "Valores finais dos momentos:"
PRINT ""
FOR bar = 1 TO NBarras
  PRINT Esforco(bar, 3); Esforco(bar, 6); "("; Mpl(bar)
NEXT bar
CALL Impressao(NNos, ngl, Nos(), NBarras, Propr(), Carreg(), Incid(),
L(), Ang(), MatLoc(), Indep(), Esforco(), pp, Fc, arq$, exe$, A$)
CronoExtF = TIMER
CLOSE #1
t1 = CronoExtF - CronoExtI
t2 = CronoIntf - CronoIntI
m1 = t1 \ 60
m2 = t2 \ 60
t1 = t1 - 60 * m1
t2 = t2 - 60 * m2
PRINT ""
PRINT "Numero de iteracoes:"; NumIter
PRINT ""
PRINT "Tempo para verificacao/alteracao dos momentos:"; m2; "min"; t2;
"seg"
PRINT "Tempo total de processamento:"; m1; "min"; t1; "seg"
CLOSE #2
END
ErroLeit:
  PRINT "Arquivo nao encontrado"
  RESUME Inicio

REM $STATIC
SUB AlterElast (Propr(), Eo(), Mpl(), Mom, P, BarrAlter, bar, Perc,
A$)
  IF A$ = "s" OR A$ = "S" THEN
    IF ABS(P) <= Propr(bar, 5) THEN
      Mp = Propr(bar, 4) - P ^ 2 * Propr(bar, 7) / 4 / Propr(bar, 5)
    ELSE
      Soma = Propr(bar, 5) + Propr(bar, 6)
    END IF
  END IF

```

```

IF ABS(P) < Soma THEN
  Alfa = (P - Propr(bar, 5)) / Propr(bar, 6)
  Mp = Propr(bar, 4) - Propr(bar, 5) * Propr(bar, 7) / 4 - Alfa *
  Propr(bar, 6) * (Propr(bar, 7) + Alfa * Propr(bar, 8)) / 2
ELSE
  PRINT "COLAPSO DEVIDO AO ESFORCO NORMAL"
END
END IF
END IF
ELSE
  Mp = Propr(bar, 4)
END IF
IF ABS(Mom / Mp) > 1 THEN
  Propr(bar, 1) = Propr(bar, 1) * Mp / ABS(Mom)
  BarrAlter = BarrAlter + 1
END IF
IF ABS(Mom / Mp) < Perc THEN
  IF Propr(bar, 1) < Eo(bar) THEN
    Propr(bar, 1) = Propr(bar, 1) * Mp / ABS(Mom)
    IF Propr(bar, 1) >= Eo(bar) THEN
      Propr(bar, 1) = Eo(bar)
    END IF
    BarrAlter = BarrAlter + 1
  END IF
END IF
Mpl(bar) = Mp
END SUB

SUB CalEsforcos (NBarras, Propr(), Mpl(), FoGlob(), MatGlob(),
Incid(), Indep(), MatTransf(), Esforco(), NumIter)
DIM Aux(6), ind(6)
ERASE Esforco
REDIM Esforco(NBarras, 6)
IF NumIter = 0 THEN
  CLS
  PRINT "Valores iniciais dos momentos:"
  PRINT ""
ELSE
  IF NumIter / 10 - NumIter \ 10 = 0 THEN
    CLS

```

```

PRINT "Valores dos momentos depois de"; NumIter; "iteracoes:"
PRINT ""
END IF
END IF
FOR bar = 1 TO NBarras
  j = Incid(bar, 1)
  k = Incid(bar, 2)
  ind(1) = 3 * j - 2
  ind(2) = 3 * j - 1
  ind(3) = 3 * j
  ind(4) = 3 * k - 2
  ind(5) = 3 * k - 1
  ind(6) = 3 * k
  FOR lin = 1 TO 6
    Aux(lin) = FoGlob(bar, lin)
    FOR col = 1 TO 6
      Aux(lin) = Aux(lin) + Propr(bar, 1) * MatGlob(bar, lin, col) *
      Indep(ind(col))
    NEXT col
  NEXT lin
  FOR gl = 1 TO 6
    FOR col = 1 TO 6
      Esforco(bar, gl) = Esforco(bar, gl) + MatTransf(bar, gl, col)
      * Aux(col)
    NEXT col
  NEXT gl
  IF NumIter / 10 - NumIter \ 10 = 0 THEN
    IF NumIter = 0 THEN
      PRINT Esforco(bar, 3); Esforco(bar, 6); "("; Propr(bar, 4); ")";
      Esforco(bar, 1)
    ELSE
      PRINT Esforco(bar, 3); Esforco(bar, 6); "("; Mpl(bar); ")";
      Esforco(bar, 1)
    END IF
  END IF
NEXT bar
END SUB

SUB COMPRIMENTO (NBarras, Incid(), Nos(), L(), Ang())
  ERASE L, Ang

```

```

REDIM L(NBarras), Ang(NBarras)
FOR b = 1 TO NBarras
  xi = Nos(IncId(b, 1), 1)
  yi = Nos(IncId(b, 1), 2)
  xf = Nos(IncId(b, 2), 1)
  yf = Nos(IncId(b, 2), 2)
'CALCULO DO COMPRIMENTO DAS BARRAS
  L(b) = SQR((xf - xi) ^ 2 + (yf - yi) ^ 2)
'CALCULO DO ANGULO DA BARRA
  IF xf > xi AND yf = yi THEN Ang(b) = 0
  IF xf < xi AND yf = yi THEN Ang(b) = 3.141592654#
  IF xf = xi AND yf > yi THEN Ang(b) = 1.570796327#
  IF xf = xi AND yf < yi THEN Ang(b) = 4.71238898#
  IF xf > xi AND yf > yi THEN Ang(b) = ATN((yf - yi) / (xf - xi))'1
Q
  IF xf < xi AND yf > yi THEN Ang(b) = 3.141592654# - ATN((yf - yi)
/ (xf - xi))'2 Q
  IF xf < xi AND yf < yi THEN Ang(b) = 3.141592654# + ATN((yf - yi)
/ (xf - xi))'3 Q
  IF xf > xi AND yf < yi THEN Ang(b) = 6.283185307# - ATN((yf - yi)
/ (xf - xi))'4 Q
NEXT b
END SUB

SUB Impressao (NNos, ngl, Nos(), NBarras, Propr(), Carreg(), IncId(),
L(), Ang(), MatLoc(), Indep(), Esforco(), pp, Fc, arq$, exe$, A$)
PRINT #2, "Modelo:"; arq$ + ".sad"
PRINT #2,
IF A$ = "s" OR A$ = "S" THEN
  PRINT #2, "Efeito do esforco normal: SIM"
ELSE
  PRINT #2, "Efeito do esforco normal: NAO"
END IF
PRINT #2, "Percentual de precisao  :"; pp; "%"
PRINT #2, "Fator de carga           :"; Fc
PRINT #2,
PRINT #2, "Numero de nos      :"; NNos
PRINT #2, "Numero de barras  :"; NBarras
FOR b = 1 TO NNos
  PRINT #2,

```

```

PRINT #2, "COORDENADAS DO NO"; b
PRINT #2, "Coordenada x :"; Nos(b, 1)
PRINT #2, "Coordenada y :"; Nos(b, 2)
NEXT b
PRINT #2,
FOR b = 1 TO NBarras
  PRINT #2,
  PRINT #2, "PROPRIEDADES DA BARRA"; b
  PRINT #2, "Modulo de elasticidade      "; Propr(b, 1)
  PRINT #2, "Momento de inercia      "; Propr(b, 2)
  PRINT #2, "Area da seccao transversal      "; Propr(b, 3)
  PRINT #2, "Momento de plastificacao      "; Propr(b, 4)
  PRINT #2, "Esforco normal de plastificacao:"; Propr(b, 5)
  PRINT #2, " "
  PRINT #2, "INCIDENCIAS DA BARRA"; b
  PRINT #2, "No inicial:"; Incid(b, 1)
  PRINT #2, "No final  "; Incid(b, 2)
  PRINT #2, " "
  PRINT #2, "COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA"; b
  PRINT #2, "Comprimento:"; L(b)
  PRINT #2, "Angulo      "; Ang(b) * 57.29577951#
  PRINT #2, " "
NEXT b
PRINT #2,
PRINT #2, "DESLOCAMENTOS"
PRINT #2,
FOR i = 1 TO NNos
  b = i * 3 - 2
  c = i * 3 - 1
  A = i * 3
  PRINT #2, "NO"; i
  PRINT #2, "Deslocamento horizontal = "; Indep(b)
  PRINT #2, "Deslocamento vertical.. = "; Indep(c)
  PRINT #2, "Rotacao..... = ", Indep(A)
  PRINT #2,
NEXT i
PRINT #2,
PRINT #2,
PRINT #2, "ESFORCOS NAS BARRAS"
PRINT #2,

```

```
FOR i = 1 TO NBarras
  PRINT #2, "BARRA"; i
  PRINT #2,
  PRINT #2, "ESFORCO NO NO"; Incid(i, 1)
  PRINT #2, "Esforco em x :"; Esforco(i, 1)
  PRINT #2, "Esforco em y :"; Esforco(i, 2)
  PRINT #2, "Momento      :"; Esforco(i, 3)
  PRINT #2, "ESFORCO NO NO"; Incid(i, 2)
  PRINT #2, "Esforco em x :"; Esforco(i, 4)
  PRINT #2, "Esforco em y :"; Esforco(i, 5)
  PRINT #2, "Momento      :"; Esforco(i, 6)
  PRINT #2,
NEXT i
END SUB

SUB LeCargas (NBarras, Carreg(), Fc)
  ERASE Carreg
  REDIM Carreg(NBarras, 2)
  FOR b = 1 TO NBarras
    INPUT #1, q      'Carga distribuida na barra
    INPUT #1, P      'Carga concentrada no meio da barra
    Carreg(b, 1) = q * Fc
    Carreg(b, 2) = P * Fc
  NEXT b
END SUB

SUB LeEsforNo (F(), ngl, Fc)
  INPUT #1, nf      'Numero de nos com esforco
  ERASE F
  REDIM F(ngl)
  FOR b = 1 TO nf
    INPUT #1, nof    'Numero do no com esforco
    INPUT #1, Fx     'Esforco horizontal aplicado
    INPUT #1, Fy     'Esforco vertical aplicado
    INPUT #1, Mi     'Momento aplicado
    c = 3 * nof - 2
    d = 3 * nof - 1
    t = 3 * nof
    F(c) = Fx * Fc
    F(d) = Fy * Fc
  NEXT b
END SUB
```

```
F(t) = Mi * Fc
NEXT b
END SUB

SUB LeIncidencia (NBarras, Incid())
  ERASE Incid
  REDIM Incid(NBarras, 2)
  FOR b = 1 TO NBarras
INPUT #1, Incid(b, 1)      'No inicial
    INPUT #1, Incid(b, 2)  'No final
  NEXT b
END SUB

SUB LeNos (NNos, ngl, Nos())
  INPUT #1, NNos          'Numero de nos
  ngl = 3 * NNos
  ERASE Nos
  REDIM Nos(NNos, 2)
  FOR d = 1 TO NNos
    INPUT #1, Nos(d, 1)   'Abcissa x
    INPUT #1, Nos(d, 2)   'Ordenada y
  NEXT d
END SUB

SUB LePropr (NBarras, Propr(), Eo())
  INPUT #1, NBarras      'Numero de barras
  ERASE Propr, Eo
  REDIM Propr(NBarras, 8), Eo(NBarras)
  FOR b = 1 TO NBarras
    INPUT #1, Propr(b, 1)  'E (modulo de elasticidade)
    INPUT #1, Propr(b, 2)  'I (momento de inercia)
INPUT #1, Propr(b, 3)      'A (area da seccao transversal)
    INPUT #1, Propr(b, 4)  'Mpo (momento de plastificacao)
    INPUT #1, Propr(b, 5)  'Po (esforco normal de plastificacao da
alma)
    INPUT #1, Propr(b, 6)  'Pl (esforco normal de plastificacao
dos flanges)
    INPUT #1, Propr(b, 7)  'h (altura da alma)
    INPUT #1, Propr(b, 8)  'H (altura do flange)
    Eo(b) = Propr(b, 1)
  NEXT b
END SUB
```

```
NEXT b
END SUB

SUB LeRestr (nr, Restr())
  INPUT #1, nr                                'Numero de nos com restricao
  ERASE Restr
  REDIM Restr(nr, 7)
  FOR d = 1 TO nr
    INPUT #1, Restr(d, 1)                    'Numero do no com restricao
    INPUT #1, Restr(d, 2)                    'Codigo de restricao em x
    INPUT #1, Restr(d, 3)                    'Codigo de restricao em y
    INPUT #1, Restr(d, 4)                    'Codigo de restricao em z
    INPUT #1, Restr(d, 5)                    'Valor de restricao em x
    INPUT #1, Restr(d, 6)                    'Valor de restricao em x
    INPUT #1, Restr(d, 7)                    'Valor de restricao em x
  NEXT d
END SUB

SUB MatrizEstrut (NBarras, ngl, Propr(), Incid(), MatGlob(),
MatEstr())
  ERASE MatEstr
  REDIM MatEstr(ngl + 20, ngl + 40)
  FOR b = 1 TO NBarras
    k = Incid(b, 1)
    j = Incid(b, 2)
    A = 3 * k - 2
    c = 3 * k - 1
    d = 3 * k
    e = 3 * j - 2
    F = 3 * j - 1
    g = 3 * j
    MatEstr(A, A) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 1, 1) + MatEstr(A, A)
    MatEstr(A, c) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 1, 2) + MatEstr(A, c)
    MatEstr(A, d) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 1, 3) + MatEstr(A, d)
    MatEstr(A, e) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 1, 4) + MatEstr(A, e)
    MatEstr(A, F) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 1, 5) + MatEstr(A, F)
    MatEstr(A, g) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 1, 6) + MatEstr(A, g)
    MatEstr(c, A) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 2, 1) + MatEstr(c, A)
    MatEstr(c, c) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 2, 2) + MatEstr(c, c)
    MatEstr(c, d) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 2, 3) + MatEstr(c, d)
  
```

```

MatEstr(c, e) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 2, 4) + MatEstr(c, e)
MatEstr(c, F) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 2, 5) + MatEstr(c, F)
MatEstr(c, g) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 2, 6) + MatEstr(c, g)
MatEstr(d, A) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 3, 1) + MatEstr(d, A)
MatEstr(d, c) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 3, 2) + MatEstr(d, c)
MatEstr(d, d) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 3, 3) + MatEstr(d, d)
MatEstr(d, e) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 3, 4) + MatEstr(d, e)
MatEstr(d, F) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 3, 5) + MatEstr(d, F)
MatEstr(d, g) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 3, 6) + MatEstr(d, g)
MatEstr(e, A) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 4, 1) + MatEstr(e, A)
MatEstr(e, c) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 4, 2) + MatEstr(e, c)
MatEstr(e, d) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 4, 3) + MatEstr(e, d)
MatEstr(e, e) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 4, 4) + MatEstr(e, e)
MatEstr(e, F) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 4, 5) + MatEstr(e, F)
MatEstr(e, g) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 4, 6) + MatEstr(e, g)
MatEstr(F, A) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 5, 1) + MatEstr(F, A)
MatEstr(F, c) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 5, 2) + MatEstr(F, c)
MatEstr(F, d) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 5, 3) + MatEstr(F, d)
MatEstr(F, e) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 5, 4) + MatEstr(F, e)
MatEstr(F, F) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 5, 5) + MatEstr(F, F)
MatEstr(F, g) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 5, 6) + MatEstr(F, g)
MatEstr(g, A) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 6, 1) + MatEstr(F, A)
MatEstr(g, c) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 6, 2) + MatEstr(g, c)
MatEstr(g, d) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 6, 3) + MatEstr(g, d)
MatEstr(g, e) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 6, 4) + MatEstr(g, e)
MatEstr(g, F) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 6, 5) + MatEstr(g, F)
MatEstr(g, g) = Propr(b, 1) * MatGlob(b, 6, 6) + MatEstr(g, g)

NEXT b
END SUB

SUB MatrizGlobal (NBarras, Ang(), MatTransf(), MatTransp(), MatLoc(),
MatGlob())
  DIM MatAux(NBarras, 6, 6)
  ERASE MatTransf, MatTransp, MatGlob
  REDIM  MatTransf(NBarras, 6, 6), MatTransp(NBarras, 6, 6),
MatGlob(NBarras, 6, 6)
  FOR bar = 1 TO NBarras
'CALCULO DA MATRIZ DE TRANSFORMACAO
    MatTransf(bar, 1, 1) = COS(Ang(bar))
    MatTransf(bar, 1, 2) = SIN(Ang(bar))

```

```
MatTransf(bar, 2, 1) = -MatTransf(bar, 1, 2)
MatTransf(bar, 2, 2) = MatTransf(bar, 1, 1)
MatTransf(bar, 3, 3) = 1
MatTransf(bar, 4, 4) = MatTransf(bar, 1, 1)
MatTransf(bar, 4, 5) = MatTransf(bar, 1, 2)
MatTransf(bar, 5, 4) = -MatTransf(bar, 1, 2)
MatTransf(bar, 5, 5) = MatTransf(bar, 1, 1)
MatTransf(bar, 6, 6) = 1
'CALCULO DA TRANSPOSTA DA MATRIZ DE TRANSFORMACAO
FOR b = 1 TO 6
  FOR c = 1 TO 6
    MatTransp(bar, b, c) = MatTransf(bar, c, b)
  NEXT c
NEXT b
NEXT bar
'CALCULO DA TRANSFORMACAO DO SISTEMA LOCAL PARA O GLOBAL
FOR bar = 1 TO NBarras
  FOR c = 1 TO 6
    FOR d = 1 TO 6
      FOR F = 1 TO 6
        MatAux(bar, c, d) = MatAux(bar, c, d) + MatTransp(bar, c, F)
      * MatLoc(bar, F, d)
    NEXT F
  NEXT d
NEXT c
NEXT bar
FOR bar = 1 TO NBarras
  FOR c = 1 TO 6
    FOR d = 1 TO 6
      FOR F = 1 TO 6
        MatGlob(bar, c, d) = MatGlob(bar, c, d) + MatAux(bar, c, F)
      * MatTransf(bar, F, d)
    NEXT F
  NEXT d
NEXT c
NEXT bar
END SUB

SUB MatrizLocal (NBarras, Prop(), L(), MatLoc())
  ERASE MatLoc
```

```

REDIM MatLoc(NBarras, 6, 6)
FOR bar = 1 TO NBarras
  i = Prop(bar, 2)
  A = Prop(bar, 3)
  MatLoc(bar, 1, 1) = A / L(bar)
  MatLoc(bar, 1, 4) = -MatLoc(bar, 1, 1)
  MatLoc(bar, 2, 2) = 12 * i / L(bar) ^ 3
  MatLoc(bar, 2, 3) = 6 * i / L(bar) ^ 2
  MatLoc(bar, 2, 5) = -MatLoc(bar, 2, 2)
  MatLoc(bar, 2, 6) = MatLoc(bar, 2, 3)
  MatLoc(bar, 3, 3) = 4 * i / L(bar)
  MatLoc(bar, 3, 5) = -MatLoc(bar, 2, 3)
  MatLoc(bar, 3, 6) = 2 * i / L(bar)
  MatLoc(bar, 4, 4) = MatLoc(bar, 1, 1)
  MatLoc(bar, 5, 5) = MatLoc(bar, 2, 2)
  MatLoc(bar, 5, 6) = -MatLoc(bar, 2, 3)
  MatLoc(bar, 6, 6) = MatLoc(bar, 3, 3)
  FOR c = 2 TO 6
    FOR d = 1 TO 6
      IF c > d THEN
        MatLoc(bar, c, d) = MatLoc(bar, d, c)
      END IF
    NEXT d
  NEXT c
NEXT bar
END SUB

SUB Mpl (nr, ngl, Mpl(), NBarras, Esforco(), Propr(), Eo(), Incid(),
MatGlob(), MatEstr(), Carreg(), L(), Ang(), MatTransf(), MatTransp(),
FoGlob(), F(), Indep(), Restr(), NumIter, Perc, A$)
  ERASE Mpl
  REDIM Mpl(NBarras)
  NumIter = 0
  BarrAlter = 1
  WHILE BarrAlter > 0
    IF NumIter < 5000 THEN
      BarrAlter = 0
      FOR bar = 1 TO NBarras
        IF ABS(Esforco(bar, 3)) >= ABS(Esforco(bar, 6)) THEN
          Mom = Esforco(bar, 3)
        END IF
      NEXT bar
    END IF
  END WHILE

```

```

        P = Esforco(bar, 1)
        CALL AlterElast(Propr(), Eo(), Mpl(), Mom, P, BarrAlter, bar,
Perc, A$)
    ELSE
        Mom = Esforco(bar, 6)
        P = Esforco(bar, 4)
        CALL AlterElast(Propr(), Eo(), Mpl(), Mom, P, BarrAlter, bar,
Perc, A$)
    END IF
NEXT bar
IF BarrAlter > 0 THEN
    NumIter = NumIter + 1
    CALL MatrizEstrut(NBarras, ngl, Propr(), Incid(), MatGlob(),
MatEstr())
    CALL TermoIndep(NBarras, ngl, Carreg(), L(), Incid(), Ang(),
MatTransp(), FoGlob(), F(), Indep())
    CALL TestaGlr(nr, ngl, Restr(), MatEstr(), Indep())
    CALL ResolSist(ngl, NBarras, Incid(), MatEstr(), Indep())
    CALL CalEsforcos(NBarras, Propr(), Mpl(), FoGlob(), MatGlob(),
Incid(), Indep(), MatTransf(), Esforco(), NumIter)
END IF
ELSE
    PRINT "Nao convergiu"
    INPUT "", A$
    BarrAlter = 0
END IF
WEND
END SUB

SUB ResolSist (ngl, NBarras, Incid(), MatEstr(), Indep())
DIM Aux(ngl, ngl), d(ngl)
'EQUACOES LINEARES
'CALCULO DA LARGURA DE BANDA
n = ngl
FOR m = 1 TO NBarras
    dif = ABS(Incid(m, 1) - Incid(m, 2)) * 3 + 3
    IF ms < dif THEN ms = dif
NEXT m
'ARMAZENA MATRIZ DE BANDA SIMETRICA SUPERIOR
e = 0

```

```
FOR m = 1 TO n
  FOR h = 1 TO ms
    Aux(m, h) = MatEstr(m, h + e)
  NEXT h
  e = e + 1
NEXT m
'RESOLUCAO DE SISTEMA DA MATRIZ DE BANDA SIMETRICA
n1 = n - 1
FOR k = 1 TO n1
  c = Aux(k, 1)
  k1 = k + 1
  IF (ABS(c) - .000001) <= 0 THEN
    PRINT #2, "singularidade na linha", k
  END
END IF
'DIVIDE A LINHA POR COEFICIENTE DA DIAGONAL
ni = (k1 + ms) - 2
IF ni <= n THEN
  L = ni
ELSE
  L = n
END IF
FOR j = 2 TO ms
  d(j) = Aux(k, j)
NEXT j
FOR j = k1 TO L
  k2 = (j - k) + 1
  Aux(k, k2) = Aux(k, k2) / c
NEXT j
Indep(k) = Indep(k) / c
FOR i = k1 TO L
  k2 = (i - k1) + 2
  c = d(k2)
  FOR j = i TO L
    k2 = (j - i) + 1
    k3 = (j - k) + 1
    Aux(i, k2) = Aux(i, k2) - c * Aux(k, k3)
  NEXT j
  Indep(i) = Indep(i) - c * Indep(k)
NEXT i
```

```

NEXT k
IF (ABS(Aux(n, 1)) - .000001) >= 0 THEN
  Indep(n) = Indep(n) / Aux(n, 1)
END IF
FOR i = 1 TO n1
  k = n - i
  k1 = k + 1
  ni = (k1 + ms) - 2
  IF ni <= n THEN
    L = ni
  ELSE
    L = n
  END IF
  FOR j = k1 TO L
    k2 = (j - k) + 1
    Indep(k) = Indep(k) - Aux(k, k2) * Indep(j)
  NEXT j
NEXT i

'ms = metade da largura de banda + diagonal principal
'n = numero de elementos da coluna da matriz a
'Indep = matriz dos termos independentes; vai conter os valores das
'      incognitas procuradas pela resolucao
'Aux = matriz que contem os coeficientes de rigidez
END SUB

SUB RestrGl (gl, valor, ngl, Indep(), MatEstr())
  FOR linha = 1 TO ngl
    Indep(linha) = Indep(linha) - MatEstr(linha, gl) * valor
    MatEstr(linha, gl) = 0
  NEXT linha
  FOR col = 1 TO ngl
    MatEstr(gl, col) = 0
  NEXT col
  MatEstr(gl, gl) = 1
  Indep(gl) = valor
END SUB

SUB TermoIndep (NBarras, ngl, Carreg(), L(), Incid(), Ang(),
MatTransp(), FoGlob(), F(), Indep())
  DIM FoLoc(6), F0(ngl)

```

```
ERASE FoGlob, Indep
REDIM FoGlob(NBarras, 6), Indep(ngl)
FOR bar = 1 TO NBarras
  j = Incid(bar, 1)
  k = Incid(bar, 2)
  c = 3 * j - 2
  d = 3 * j - 1
  t = 3 * j
  g = 3 * k - 2
  h = 3 * k - 1
  m = 3 * k
  q = Carreg(bar, 1)
  P = Carreg(bar, 2)
  p2 = q * L(bar)
  pt = P + p2
  FoLoc(1) = 0
  FoLoc(2) = pt / 2
  FoLoc(3) = P * L(bar) / 8 + q * L(bar) ^ 2 / 12
  FoLoc(4) = 0
  FoLoc(5) = pt / 2
  FoLoc(6) = -FoLoc(3)
  IF Ang(bar) <> 0 THEN
    FOR lin = 1 TO 6
      FOR col = 1 TO 6
        FoGlob(bar, lin) = FoGlob(bar, lin) + MatTransp(bar, lin,
col) * FoLoc(col)
      NEXT col
    NEXT lin
  END IF
  IF Ang(bar) = 0 THEN
    FOR b = 1 TO 6
      FoGlob(bar, b) = FoLoc(b)
    NEXT b
  END IF
  F0(c) = F0(c) + FoGlob(bar, 1)
  F0(d) = F0(d) + FoGlob(bar, 2)
  F0(t) = F0(t) + FoGlob(bar, 3)
  F0(g) = F0(g) + FoGlob(bar, 4)
  F0(h) = F0(h) + FoGlob(bar, 5)
  F0(m) = F0(m) + FoGlob(bar, 6)
```

```
NEXT bar
FOR i = 1 TO ngl
  Indep(i) = F(i) - F0(i)
NEXT i
END SUB

SUB TestaGlr (nr, ngl, Restr(), MatEstr(), Indep())
  FOR cr = 1 TO nr
    IF Restr(cr, 2) = 1 THEN
      gl = 3 * Restr(cr, 1) - 2
      valor = Restr(cr, 5)
      CALL RestrGlr(gl, valor, ngl, Indep(), MatEstr())
    END IF
    IF Restr(cr, 3) = 1 THEN
      gl = 3 * Restr(cr, 1) - 1
      valor = Restr(cr, 6)
      CALL RestrGlr(gl, valor, ngl, Indep(), MatEstr())
    END IF
    IF Restr(cr, 4) = 1 THEN
      gl = 3 * Restr(cr, 1)
      valor = Restr(cr, 7)
      CALL RestrGlr(gl, valor, ngl, Indep(), MatEstr())
    END IF
  NEXT cr
END SUB
```

9.2.2. Exemplo 1

A seguir, são apresentados os arquivos de entrada de dados e saída de resultados, referente ao exemplo analisado no item 6.1, com barras de 20 cm. Os resultados apresentados referem-se, apenas, ao fator de carga unitário (configuração de colapso).

Arquivo de Dados

21

0,0

.2,0

.4,0

.6,0

.8,0

1,0

1.2,0

1.4,0

1.6,0

1.8,0

2,0

2.2,0

2.4,0

2.6,0

2.8,0

3,0

3.2,0

3.4,0

3.6,0

3.8,0

4,0

20

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0,210000000,0.0001,0.03,200,0,0,0,0

1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10,11,11,12,12,13,13,14,14,15,15,
16

16,17,17,18,18,19,19,20,20,21

145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0

145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0

145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0,145.7,0

0

2

1,1,1,1,0,0,0

21,1,1,0,0,0,0

Arquivo de Resultados

Arquivo: Exl.sad

Efeito do esforco normal: NAO

Percentual de precisao : 0,1 %

Fator de carga : 1

Numero de nos : 21

Numero de barras : 20

PROPRIEDADES DA BARRA 1

Modulo de elasticidade : 44234920

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 1

No inicial: 1

No final : 2

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 1

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 2

Modulo de elasticidade : 2.1E+08

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 2

No inicial: 2

No final : 3

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 2

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 3

Modulo de elasticidade : 2.1E+08

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 3

No inicial: 3

No final : 4

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 3

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 4

Modulo de elasticidade : 2.1E+08

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 4

No inicial: 4

No final : 5

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 4

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 5

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 5

No inicial: 5
No final : 6

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 5

Comprimento: .2
Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 6

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 6

No inicial: 6
No final : 7

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 6

Comprimento: .2
Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 7

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 7

No inicial: 7
No final : 8

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 7

Comprimento: .1999999
Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 8

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 8

No inicial: 8
No final : 9

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 8

Comprimento: .2
Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 9

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 9

No inicial: 9
No final : 10

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 9

Comprimento: .1999999

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 10

Modulo de elasticidade : 2.1E+08

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 10

No inicial: 10

No final : 11

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 10

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 11

Modulo de elasticidade : 2.1E+08

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 11

No inicial: 11

No final : 12

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 11

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 12

Modulo de elasticidade : 182453826

Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 12

No inicial: 12
No final : 13

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 12

Comprimento: .2
Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 13

Modulo de elasticidade : 182453826
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 13

No inicial: 13
No final : 14

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 13

Comprimento: .1999998
Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 14

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 14

No inicial: 14

No final : 15

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 14

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 15

Modulo de elasticidade : 2.1E+08

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 15

No inicial: 15

No final : 16

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 15

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 16

Modulo de elasticidade : 2.1E+08

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 16

No inicial: 16

No final : 17

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 16

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 17

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 17

No inicial: 17
No final : 18

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 17

Comprimento: .2
Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 18

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 18

No inicial: 18
No final : 19

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 18

Comprimento: .1999998
Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 19

Modulo de elasticidade : 2.1E+08
Momento de inercia : .0001
Area da seccao transversal : .03
Momento de plastificacao : 200
Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 19

No inicial: 19

No final : 20

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 19

Comprimento: .2

Angulo : 0

PROPRIEDADES DA BARRA 20

Modulo de elasticidade : 2.1E+08

Momento de inercia : .0001

Area da seccao transversal : .03

Momento de plastificacao : 200

Esforco normal de plastificacao: 0

INCIDENCIAS DA BARRA 20

No inicial: 20

No final : 21

COMPRIMENTO/ANGULO DA BARRA 20

Comprimento: .2

Angulo : 0

ESFORCOS NAS BARRAS

BARRA 1

ESFORCO NO NO 1

Esforco em x : 0

Esforco em y : 341.4771

Momento : 199.9718

ESFORCO NO NO 2

Esforco em x : 0

Esforco em y : -312.3175

Momento : -134.5924

BARRA 2

ESFORCO NO NO 2

Esforco em x : 0

Esforco em y : 312.3172

Momento : 134.5926

ESFORCO NO NO 3

Esforco em x : 0

Esforco em y : -283.157

Momento : -75.04575

BARRA 3

ESFORCO NO NO 3

Esforco em x : 0

Esforco em y : 283.1588

Momento : 75.04603

ESFORCO NO NO 4

Esforco em x : 0

Esforco em y : -253.9987

Momento : -21.33128

BARRA 4

ESFORCO NO NO 4

Esforco em x : 0

Esforco em y : 254.0046

Momento : 21.33173

ESFORCO NO NO 5

Esforco em x : 0

Esforco em y : -224.8444

Momento : 26.55323

BARRA 5

ESFORCO NO NO 5

Esforco em x : 0

Esforco em y : 224.8248

Momento : -26.54932

ESFORCO NO NO 6

Esforco em x : 0

Esforco em y : -195.6647

Momento : 68.60088

BARRA 6

ESFORCO NO NO 6

Esforco em x : 0

Esforco em y : 195.6803

Momento : -68.602

ESFORCO NO NO 7

Esforco em x : 0

Esforco em y : -166.5202

Momento : 104.8221

BARRA 7

ESFORCO NO NO 7

Esforco em x : 0

Esforco em y : 166.5792

Momento : -104.8229

ESFORCO NO NO 8

Esforco em x : 0

Esforco em y : -137.419

Momento : 135.222

BARRA 8

ESFORCO NO NO 8

Esforco em x : 0

Esforco em y : 137.4765

Momento : -135.2248

ESFORCO NO NO 9

Esforco em x : 0

Esforco em y : -108.2968

Momento : 159.7982

BARRA 9

ESFORCO NO NO 9
Esforco em x : 0
Esforco em y : 108.3372
Momento : -159.8013

ESFORCO NO NO 10
Esforco em x : 0
Esforco em y : -79.15748
Momento : 178.5452

BARRA 10

ESFORCO NO NO 10
Esforco em x : 0
Esforco em y : 79.16564
Momento : -178.5503

ESFORCO NO NO 11
Esforco em x : 0
Esforco em y : -49.98595
Momento : 191.4664

BARRA 11

ESFORCO NO NO 11
Esforco em x : 0
Esforco em y : 50.047
Momento : -191.4674

ESFORCO NO NO 12
Esforco em x : 0
Esforco em y : -20.90637
Momento : 198.5574

BARRA 12

ESFORCO NO NO 12
Esforco em x : 0
Esforco em y : 20.86298
Momento : -198.5608

ESFORCO NO NO 13

Esforco em x : 0
Esforco em y : .8277645
Momento : 199.8199

BARRA 13

ESFORCO NO NO 13
Esforco em x : 0
Esforco em y : -8.281334
Momento : -199.82
ESFORCO NO NO 14
Esforco em x : 0
Esforco em y : 37.42196
Momento : 195.2424

BARRA 14

ESFORCO NO NO 14
Esforco em x : 0
Esforco em y : -37.45072
Momento : -195.2507
ESFORCO NO NO 15
Esforco em x : 0
Esforco em y : 66.63041
Momento : 184.8418

BARRA 15

ESFORCO NO NO 15
Esforco em x : 0
Esforco em y : -66.57497
Momento : -184.8436
ESFORCO NO NO 16
Esforco em x : 0
Esforco em y : 95.75466
Momento : 168.6111

BARRA 16

ESFORCO NO NO 16
Esforco em x : 0
Esforco em y : -95.73281
Momento : -168.6114

ESFORCO NO NO 17
Esforco em x : 0
Esforco em y : 124.893
Momento : 146.5494

BARRA 17

ESFORCO NO NO 17
Esforco em x : 0
Esforco em y : -124.8772
Momento : -146.5491

ESFORCO NO NO 18
Esforco em x : 0
Esforco em y : 154.0374
Momento : 118.6557

BARRA 18

ESFORCO NO NO 18
Esforco em x : 0
Esforco em y : -154.0287
Momento : -118.6564

ESFORCO NO NO 19
Esforco em x : 0
Esforco em y : 183.1888
Momento : 84.93658

BARRA 19

ESFORCO NO NO 19
Esforco em x : 0
Esforco em y : -183.1769
Momento : -84.93633

ESFORCO NO NO 20
Esforco em x : 0

Esforco em y : 212.3371
Momento : 45.38582

BARRA 20

ESFORCO NO NO 20

Esforco em x : 0

Esforco em y : -212.3441

Momento : -45.38496

ESFORCO NO NO 21

Esforco em x : 0

Esforco em y : 241.5043

Momento : -2.541447E-04

Numero de iteracoes: 24

Tempo para verif./alter. dos momentos: 0 min 4.90625 seg

Tempo total de processamento: 0 min 5.93254