

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA**

**CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE NÃO-LINEAR  
GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE  
FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Eng. Civil Fabiano Luis Zermiani**

**FLORIANÓPOLIS, AGOSTO DE 1998**

**CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE NÃO-LINEAR  
GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS**

**Eng. Civil Fabiano Luis Zermiani**

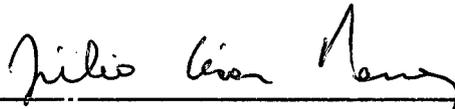
**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA  
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**



---

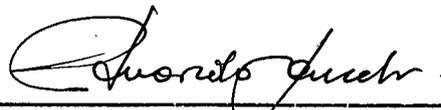
Prof. Daniel Domingues Longgio, Dr. - Orientador



---

Prof. Júlio César Passos, Dr. - Coordenador do Curso

Banca Examinadora:



---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.Sc. - Presidente



---

Profa. Henriette Lebre La Rovere, Ph.D.



---

Prof. Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

# **HOMENAGENS**

## **Agradecimentos**

Ao Professor Jucilei Cordini, cujo auxílio foi muito importante, quando do início neste curso.

Ao Professor Daniel Domingues Loriggio, que orientou este trabalho.

À CAPES, que forneceu a bolsa de estudos, através do grupo PET/ECV/UFSC.

À Engenharia Grande Sul Ltda, que forneceu os equipamentos e suporte logístico.

À Mary Zermiani, pela revisão do texto.

À Dayse.

À Ana Fronza Zermiani.

## RESUMO

O dimensionamento de estruturas de edifícios altos, com predominância de carregamentos verticais, é, na maioria dos casos, feito através de análise simplificada, isolando vigas e pilares ou pela análise linear dos esforços resistentes dos pórticos planos constituintes, ou seja, apenas elementos de barras são considerados na modelagem.

A proposta desta dissertação está em melhorar a análise de pórticos planos para edifícios e outras construções, incorporando o comportamento não-linear da geometria das estruturas.

Um relato dos métodos mais comuns disponíveis na bibliografia especializada é apresentado para fornecer uma idéia geral do que já foi desenvolvido sobre o assunto.

Dois métodos merecem destaque, o método P- $\Delta$  e o da Matriz de rigidez geométrica. No método P- $\Delta$  foram analisadas duas maneiras diferentes de utilização, a primeira com a inclusão do efeito não linear apenas nas barras verticais e a segunda com a inclusão nas barras verticais, horizontais e inclinadas. No método da matriz de rigidez geométrica foram estudadas a sua formulação completa e uma simplificada.

Os métodos em destaque estão implementados em um programa de resolução de pórticos planos e diversos exemplos numéricos são apresentados. Os tempos de resolução computacional foram levados em consideração para comparação entre os métodos.

Os resultados das análises demonstraram que os métodos descritos são muito eficientes para a análise não linear de estruturas convencionais. Em alguns casos, a subdivisão das barras da estrutura torna-se necessária para melhorar os resultados numéricos.

Um conjunto de anexos traz as listagens das rotinas utilizadas na análise não-linear geométrica e alguns métodos de resolução de sistemas de equações lineares.

## **ABSTRACT**

The design of high building structures with a predominance of vertical loading is, commonly performed by a simplified analysis, either by considering separately beams and columns or by a plane frame linear analysis. Therefore only bar elements are considered in the model.

The dissertation intends to improve the plane frame analysis of buildings, including the geometrical non-linear effects.

A survey of the most used methods available in the literature is presented initially in order to give a general idea of the subject.

Emphasis was given on two main methods: P- $\Delta$  method and the geometric stiffness matrix method. Two approaches were considered for the P- $\Delta$  method: the first one includes the nonlinear effects on the vertical bars only, whereas in the second one, these effects are included on the vertical, horizontal and inclined bars. For the geometric stiffness matrix method the complete and simplified formulation were considered.

These methods were implemented in a plane frame analysis program and several numerical examples were presented. The processing time of the analyses were taken into account in order to compare the efficiency of the methods.

The results of the analysis have shown that the described methods are very efficient for geometric non linear analysis of conventional structures. In some cases, the subdivision of the bars was necessary for improving the numerical results.

A list of routines utilized in, are enclosed at the end of the work and some methods for solution of linear equation systems.

# ÍNDICE

|                        |      |
|------------------------|------|
| LISTA DE ANEXOS .....  | viii |
| LISTA DE FIGURAS ..... | ix   |
| LISTA DE TABELAS ..... | xiii |

## CAPÍTULOS

|   |    |
|---|----|
| Introdução .....  | 1  |
| Objetivos .....   | 2  |
| Importância.....  | 3  |
| Contribuições.....  | 3  |
| Estrutura da Dissertação .....  | 4  |
| 1    Análise linear e não-linear de pórticos planos.....                | 6  |
| 1.1    Análise linear de pórticos planos com formulação matricial ..... | 7  |
| 1.1.1    Graus de liberdade de uma estrutura .....                      | 8  |
| 1.1.2    Matriz de rigidez de uma barra .....                           | 9  |
| 1.1.3    Sistemas de referência local e global .....                    | 12 |
| 1.1.4    Matriz de rigidez de uma barra no sistema local .....          | 14 |
| 1.1.5    Matriz de rigidez da estrutura como um todo.....               | 15 |
| 1.1.6    Forças concentradas aplicadas nos nós.....                     | 17 |
| 1.1.7    Forças aplicadas nas barras .....                              | 18 |
| 1.1.8    Imposição das condições de contorno .....                      | 20 |
| 1.1.9    Roteiro para resolução.....                                    | 22 |
| 1.2    Análise com não-linearidade física .....                         | 22 |
| 1.3    Análise com não-linearidade geométrica.....                      | 23 |
| 1.3.1    Flambagem .....  | 26 |
| 1.3.2    Instabilidade .....  | 28 |
| 2    Avaliação da flexibilidade e implementação numérica.....           | 29 |
| 2.1    Avaliação da flexibilidade.....                                  | 29 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.1.1 | Parâmetro de instabilidade $\alpha$ .....                                  | 29 |
| 2.1.2 | Parâmetro de instabilidade Q.....  | 31 |
| 2.1.3 | Coeficiente $\gamma_z$ .....   | 32 |
| 2.1.4 | Prescrições da NBR8800.....  | 33 |
| 2.2   | Métodos de implementação numérica.....                                     | 34 |
| 2.2.1 | Método incremental linear.....   | 34 |
| 2.2.2 | Método Incremental não-linear.....   | 35 |
| 2.2.3 | Método iterativo direto.....   | 36 |
| 3     | Análise não-linear pelo processo P- $\Delta$ .....                         | 37 |
| 3.1   | Processo P- $\Delta$ .....   | 37 |
| 3.2   | Processo P- $\Delta$ genérico.....   | 40 |
| 3.3   | Escolha de um valor de convergência.....                                   | 41 |
| 3.4   | Exemplos numéricos.....  | 45 |
| 3.4.1 | Pilar com múltiplos nós intermediários.....                                | 45 |
| 3.4.2 | Pilar com múltiplos nós intermediários e cargas de tração.....             | 48 |
| 3.4.3 | Viga horizontal bi-engastada.....  | 50 |
| 3.4.4 | Pórtico para edifício baixo (primeira parte).....                          | 51 |
| 3.4.5 | Pórtico para edifício baixo (segunda parte).....                           | 54 |
| 4     | Análise não-linear com a matriz de rigidez geométrica.....                 | 58 |
| 4.1   | Definição da matriz rigidez geométrica pelo método elementos finitos... .. | 59 |
| 4.1.1 | Matriz de rigidez geométrica.....  | 59 |
| 4.1.2 | Matriz de rigidez geométrica simplificada.....                             | 65 |
| 4.2   | Escolha de um valor de convergência.....                                   | 66 |
| 4.3   | Exemplos numéricos.....  | 67 |
| 4.3.1 | Pilar com múltiplos nós intermediários.....                                | 67 |
| 4.3.2 | Pilar com múltiplos nós intermediários e cargas de tração.....             | 69 |
| 4.3.3 | Viga bi-engastada.....   | 71 |
| 4.3.4 | Pórtico para edifício baixo (primeira parte).....                          | 72 |
| 4.3.5 | Pórtico para edifício baixo (segunda parte).....                           | 75 |
| 5     | Outros processos de análise não-linear geométrica.....                     | 79 |

|       |  |      |
|-------|--|------|
| 5.1   | Método do fator de amplificação.....   | 79   |
| 5.2   | Método do carregamento gravitacional iterativo.....                            | 81   |
| 5.3   | Método direto.....   | 82   |
| 5.4   | Método do membro fictício com propriedade negativa.....                        | 83   |
| 5.5   | Método da matriz de rigidez de ordem superior.....                             | 84   |
| 5.5.1 | Implementação incremental.....   | 85   |
| 5.5.2 | Implementação secante.....   | 90   |
| 6     | Relação entre os métodos de análise não linear geométrica de pórticos planos.. | 91   |
| 6.1   | Comentários dos exemplos numéricos dos capítulos III e IV.....                 | 93   |
| 6.2   | Exemplo comparativo de pórtico plano para edifício de múltiplos andares.....   | 94   |
|       | Conclusões.....  | 101  |
|       | Dos objetivos.....   | 101  |
|       | Comentário gerais.....   | 101  |
|       | Comentários sobre os métodos P- $\Delta$ genérico e P- $\Delta$ .....          | 102  |
|       | Comentários sobre os métodos da matriz de rigidez geométrica Kg e Kgs.....     | 103  |
|       | Recomendações.....   | 104  |
|       | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....  | 105  |
|       | BIBLIOGRAFIA.....  | 108  |
|       | ANEXO 01.....  | A1-1 |
|       | ANEXO 02.....  | A2-1 |
|       | ANEXO 03.....  | A3-1 |
|       | ANEXO 04.....  | A4-1 |
|       | ANEXO 05.....  | A5-1 |
|       | ANEXO 06.....  | A6-1 |
|       | ANEXO 07.....  | A7-1 |

## LISTA DE ANEXOS

|   |  |      |
|---|--|------|
| 1 | Programa para a resolução de pórticos planos com análise linear. ....                                    | A1-1 |
| 2 | Programa para a resolução de pórticos planos pelo processo P- $\Delta$ ,<br>segundo a NBR8800. ....      | A2-1 |
| 3 | Programa para a resolução de pórticos planos pelo processo P- $\Delta$ genérico. ...                     | A3-1 |
| 4 | Programa para a resolução de pórticos planos com a utilização da<br>matriz geométrica. ....              | A4-1 |
| 5 | Programa para a resolução de pórticos planos com a utilização da<br>matriz geométrica simplificada. .... | A5-1 |
| 6 | Construção do arquivo de entrada de dados. ....  | A6-1 |
| 7 | Métodos de resolução de sistemas de equações lineares. ....  | A7-1 |

## LISTA DE FIGURAS

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Graus de liberdade de uma barra de pórtico plano.....  | 9  |
| 1.2  | Convenção de sinais dos deslocamentos para barra de pórtico plano.....   | 9  |
| 1.3  | Rigidez devido à um deslocamento unitário na direção 1 .....   | 10 |
| 1.4  | Barra de pórtico e o sistema local de referência .....   | 12 |
| 1.5  | Estrutura arbitrária com o sistema global de referência .....  | 12 |
| 1.6  | Relação entre os graus de liberdade dos sistemas local e global.....   | 13 |
| 1.7  | Graus de liberdade de uma barra no sistema local .....   | 16 |
| 1.8  | Graus de liberdade no sistema global .....   | 16 |
| 1.9  | Esforços aplicados nos nós da estrutura.....   | 18 |
| 1.10 | Esforços de imobilização devido aos carregamentos aplicados em uma barra ....  | 19 |
| 1.11 | Divisão da estrutura: parte “a” sem vinculações externas e<br>parte “b” com condições de contorno .....                  | 20 |
| 1.12 | Exemplo da deformação elástica linear do material, relacionado com a tensão ..   | 23 |
| 1.13 | Exemplo da deformação não linear do material, relacionado com a tensão .....   | 23 |
| 1.14 | Momento de primeira ordem (linear) .....   | 25 |
| 1.15 | Momento de segunda ordem (não linear).....   | 25 |
| 1.16 | Pilar com carga centrada .....   | 26 |
| 1.17 | Posição deformada do pilar com carga centrada.....   | 26 |
| 1.18 | Gráfico com deformação “ f ” x Carga “P” .....   | 27 |
| 1.19 | Modelo deformado de pilar com deslocamento e carga excêntrica .....  | 27 |
| 1.20 | Gráfico deformação “ f ” x Carga “P”, para vários valores de excentricidades ...   | 27 |
| 1.21 | Gráfico deformação “ f ” x Carga “P”, para vários valores de excentricidades,<br>com solução da análise não linear ..... | 28 |
| 2.1  | Pórtico plano.....   | 30 |
| 2.2  | Pilar equivalente.....   | 30 |
| 2.3  | Curva força x deflexão para o método incremental linear .....  | 35 |
| 2.4  | Curva força x deflexão para o método incremental não linear.....   | 35 |
| 2.5  | Curva força x deflexão para o método iterativo .....   | 36 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.1  | Barra de pórtico plano .....   | 38 |
| 3.2  | Barra vertical de pórtico plano com esforços e deformações horizontais .....   | 39 |
| 3.3  | Barra vertical de pórtico plano, com esforços e deformações horizontais, considerando o esforço horizontal adicional pelo método P- $\Delta$ ..... | 39 |
| 3.4  | Barra genérica de pórtico plano com esforços e deformações perpendiculares ao eixo .....   | 41 |
| 3.5  | Barra genérica de pórtico plano com esforços e deformações perpendiculares ao eixo, considerando o esforço adicional pelo método P- $\Delta$ ..... | 41 |
| 3.6  | Exemplo para a determinação do valor limite de convergência dos métodos P- $\Delta$ e P- $\Delta$ genérico. Pilar vertical engastado .....         | 42 |
| 3.7  | Gráfico Aumento dos deslocamentos x número de iterações .....  | 44 |
| 3.8  | Gráfico Deslocamento horizontal x número de iterações.....   | 44 |
| 3.9  | Pilar modelado com dois nós .....  | 45 |
| 3.10 | Pilar modelado com três nós.....   | 45 |
| 3.11 | Pilar modelado com onze nós .....  | 45 |
| 3.12 | Evolução do momento no engaste com o número de nós .....   | 47 |
| 3.13 | Pilar com dois nós, momento aplicado na extremidade e carga de tração.....   | 49 |
| 3.14 | Pilar com três nós, momento aplicado na extremidade e carga de tração .....  | 49 |
| 3.15 | Pilar com onze nós, momento aplicado na extremidade e carga de tração.....   | 49 |
| 3.16 | Viga horizontal bi-engastada .....   | 50 |
| 3.17 | Pórtico plano, modelado com quatro nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....   | 52 |
| 3.18 | Pórtico plano, modelado com seis nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....   | 52 |
| 3.19 | Pórtico plano, modelado com dez nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....  | 52 |
| 3.20 | Pórtico plano, modelado com treze nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....  | 53 |
| 3.21 | Pórtico plano, modelado com quatro nós, com cargas horizontais e verticais .....   | 55 |
| 3.22 | Pórtico plano, modelado com seis nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....   | 55 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.23 | Pórtico plano, modelado com dez nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....      | 55 |
| 3.24 | Pórtico plano, modelado com treze nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....    | 56 |
| 4.1  | Direções positivas dos deslocamentos em uma viga .....                                       | 60 |
| 4.2  | Pilar modelado com dois nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão ..... | 68 |
| 4.3  | Pilar modelado com três nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão ..... | 68 |
| 4.4  | Pilar modelado com onze nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão ..... | 68 |
| 4.5  | Pilar com dois nós e carga de tração .....   | 70 |
| 4.6  | Pilar com três nós e carga de tração .....   | 70 |
| 4.7  | Pilar com onze nós e carga de tração .....   | 70 |
| 4.8  | Viga horizontal bi-engastada .....   | 71 |
| 4.9  | Pórtico plano, modelado com quatro nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....   | 73 |
| 4.10 | Pórtico plano, modelado com seis nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....     | 73 |
| 4.11 | Pórtico plano, modelado com dez nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....      | 73 |
| 4.12 | Pórtico plano, modelado com treze nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....    | 74 |
| 4.13 | Pórtico plano, modelado com quatro nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....   | 76 |
| 4.14 | Pórtico plano, modelado com seis nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....     | 76 |
| 4.15 | Pórtico plano, modelado com dez nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....      | 76 |
| 4.16 | Pórtico plano, modelado com treze nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas .....    | 77 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 5.1 | Esquema de deformações parciais.....   | 81 |
| 5.2 | Coluna fictícia .....  | 81 |
| 6.1 | Dimensões, carregamento e nós a serem estudados do pórtico plano .....           | 95 |
| 6.2 | Disposição dos nós intermediários para o pórtico plano, vinculação rotulada .... | 95 |
| 6.3 | Disposição dos nós intermediários para o pórtico plano, vinculação engastada..   | 99 |

## LISTA DE TABELAS

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Relação entre graus de liberdade de uma barra e da estrutura.....   | 16 |
| 3.1 | Deslocamentos no topo, aumento dos deslocamentos com o número de iterações.....   | 43 |
| 3.2 | Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 3.9,3.10 e 3.11 - Pilares modelados com vários nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão ..... | 46 |
| 3.3 | Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 3.13, 3.14 e 3.15 - Pilares modelados com vários nós, com momento aplicado na extremidade e carga de tração.....    | 49 |
| 3.4 | Dados da análise linear e não linear do exemplo da figura 3.16 - Estrutura horizontal com extremidades engastadas.....  | 51 |
| 3.5 | Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 3.17 a 3.20 - Momentos de engastamento do lado esquerdo do pórtico .....  | 53 |
| 3.6 | Dados da análise linear e não linear do exemplos das figuras 3.17 a 3.20 - Deslocamento no topo, lado esquerdo do pórtico.....  | 53 |
| 3.7 | Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 3.21 a 3.24 - Momentos de engastamento do lado esquerdo do pórtico .....  | 56 |
| 3.8 | Dados da análise linear e não linear do exemplos das figuras 3.21 a 3.24 - Deslocamento no topo, lado esquerdo do pórtico.....  | 56 |
| 4.1 | Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 4.2, 4.3 e 4.4 - Pilar modelado com vários nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão .....     | 68 |
| 4.2 | Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 4.5, 4.6 e 4.7 - Pilar modelado com vários nós, com momento aplicado na extremidade e carga de tração.....          | 70 |
| 4.3 | Dados da análise linear e não linear do exemplo da figura 4.8 - Estrutura horizontal com extremidades engastadas.....   | 72 |
| 4.4 | Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras   |    |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
|     | 4.9 à 4.12 - Momentos de engastamento do lado esquerdo do pórtico .....   | 74  |
| 4.5 | Dados da análise linear e não linear do exemplos das figuras  |     |
|     | 4.9 à 4.12 - Deslocamento no topo do pórtico, lado esquerdo do pórtico.....                                     | 75  |
| 4.6 | Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras   |     |
|     | 4.13 à 4.16 - Momentos de engastamento do lado esquerdo do pórtico .....  | 77  |
| 4.7 | Dados da análise linear e não linear do exemplos das figuras  |     |
|     | 4.13 à 4.16 - Deslocamento no topo, lado esquerdo do pórtico.....   | 78  |
| 6.1 | Deslocamentos e momentos no nó 1, tempo de resolução e número de iterações, para os pórticos da figura 6.2..... | 96  |
| 6.2 | Deslocamentos e momentos nos nós 2 e 3, dos pórticos da figura 6.2.....   | 97  |
| 6.3 | Deslocamentos e momentos no nó 1, número de iterações e tempo de resolução, para os pórticos da figura 6.3..... | 99  |
| 6.4 | Deslocamentos e momentos nos nós 2 e 3, nos pórticos da figura 6.3 .....  | 100 |

## INTRODUÇÃO

Este trabalho de dissertação, dentro da área de concentração “Projeto e análise de componentes mecânicos”, aborda uma visão teórica do modelamento de estruturas de pórticos planos, com a inclusão da não linearidade geométrica, com vários casos estudados e a preocupação de modelar estruturas com interesse prático.

Constituirá, principalmente, na análise e implementação computacional de dois métodos conhecidos como P- $\Delta$  e da matriz geométrica.

Utilizando bibliografia especializada, o trabalho faz uma explanação prévia das formas de determinar os esforços nos pórticos planos com a inclusão da não-linearidade geométrica da estrutura, ou seja, considera os esforços internos de um pórtico plano, quando este está deformado.

Esse conhecimento, na análise de estruturas, está disponível no meio científico há décadas, porém em poucas situações os projetistas incorporam-no em seus projetos, às vezes substituindo-o por conceitos práticos, cujos resultados nem sempre fornecem boas soluções estruturais.

Os conceitos da não linearidade geométrica foram bastante estudados no final da década de 60 e início da de 70, em universidades e centros de pesquisas do mundo todo, porém sua aplicação estava limitada pela ferramenta computacional disponível. Não se popularizou e nem tão pouco foi se distribuindo pelo mundo, pois os computadores eram de custo altíssimo e não estavam disponíveis na maioria dos escritórios de projetos.

A aplicação destes conceitos teve um impulso com a popularização dos computadores pessoais e com a informatização dos centros de pesquisa. Já podem ser aplicados atualmente por escritórios de cálculo, pois como os sistemas CAD foram amplamente difundidos no meio dos projetistas, foram feitos os investimentos para a informatização dessas empresas.

Num escritório de cálculo de estruturas, um conceito prático muito comum é adotar seções para barras dos pórticos planos, que modelam os edifícios tridimensionais, bastante robustas, de modo a evitar o efeito não linear geométrico. Desta forma pode-se ter soluções

com um custo diferente do ideal, por se evitar uma análise de segunda ordem, quando do projeto e dimensionamento.

Este trabalho tem o objetivo de aproximar dos calculistas e projetistas de estruturas as técnicas de análise não linear geométrica, propiciando a incorporação desta teoria nos projetos citados.

Com acesso a esta nova ferramenta de auxílio ao projeto, pode-se melhorar a qualidade dos projetos e provavelmente o custo das estruturas.

## **OBJETIVOS**

Os objetivos deste trabalho podem ser divididos em principais e secundários. Os objetivos principais são os horizontes aos quais se deseja chegar, e os objetivos secundários são decorrentes do trabalho realizado para alcançar os objetivos principais. Todos os objetivos caminham lado a lado e se completam.

A idéia inicial, como objetivo principal, foi de deter o conhecimento de normas nacionais e internacionais de estruturas de aço e concreto, estabelecer diferenças entre os dois métodos principais propostos para a análise não-linear geométrica, dissertar sobre as formas de modelamento de estruturas de pórticos planos e criar um trabalho escrito que possa servir de base a estudos e a implementação de rotinas não lineares.

Os objetivos secundários, de suma importância, são apresentar diversas formas de análise não-linear geométrica, implementar as principais, estabelecer suas diferenças e deixar um material atualizado incluindo exemplos de comparação dos métodos de determinação dos esforços internos de pórticos planos levando em conta sua deformação.

Como complemento tem-se o objetivo de estabelecer, para estruturas usuais, situações em que se deve considerar os efeitos não lineares geométricos; e verificar, para essas estruturas, quais dos métodos possuem eficácia comprovada e quais possuem resultados aproximados, mas confiáveis, e com respectivos custos nos tempos computacionais.

## **IMPORTÂNCIA**

Com a popularização do aparato computacional, o presente estudo torna-se importante porque permite análises mais exatas, com soluções confiáveis, com a simples utilização dos recursos disponíveis e dos conhecimentos apresentados.

Com isto pode-se ter uma melhora na qualidade das análises que estão por trás dos projetos de edifícios.

## **CONTRIBUIÇÕES**

Como contribuição acadêmica, este trabalho irá atualizar o cálculo de ações em estruturas planas em relação aos modelos preconizados pela norma brasileira para projeto de estruturas de aço de edifícios.

Pela gama de aparatos computacionais atualmente desenvolvidos, existem condições suficientes para se aplicar teorias mais elaboradas na determinação dos esforços em estruturas.

Com isto estaria preenchida uma lacuna existente entre os processos mais atuais de análise de estruturas e os projetos das mesmas.

Também na área acadêmica resultará um material que pode ser utilizado como complemento didático, reunindo vários tópicos, com comentários a respeito das estruturas de pórticos planos e o seu comportamento.

Como contribuição para a sociedade, é proposta uma atualização dos métodos de análise não linear geométrica, com exemplos didáticos, definições, e uma série de programas computacionais disponíveis para utilização e implementação nos escritórios de cálculo.

O fato de haver em seu conteúdo dados de pórticos planos reais, respaldados por bibliografia especializada e considerações analíticas, é uma forma de transferir aos interessados e ao mercado, indústrias e engenheiros de projetos, esta tecnologia e aplicação.

## ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho está dividido em seis capítulos, da forma mais clara possível, e trata principalmente de análise não-linear geométrica de pórticos planos.

O primeiro capítulo trata da teoria das estruturas que envolve a área de pórticos planos, da determinação dos esforços lineares, da formulação matricial do método dos deslocamentos, como está descrito em GERE & WEAVER (1981) e onde são citados os passos e definições para a resolução do problema linear. Os efeitos não lineares existentes nos pórticos são dissertados ainda nesta parte, onde uma explanação situa quais deles foram considerados.

No segundo capítulo são descritos e comentados alguns dos métodos de avaliação da flexibilidade dos pórticos planos, uma vez que nem sempre será necessário considerar a estrutura em seu estado deformado. Nesta mesma parte, três são os métodos de implementação numérica descritos e comentados, onde um é escolhido para figurar nos exemplos numéricos.

O terceiro capítulo está voltado para o Método P- $\Delta$  de análise não linear geométrica e suas variações.

Como o método P- $\Delta$  é um processo numérico iterativo, a escolha dos parâmetros de convergência deu-se de forma experimental, ali descrito e exemplificado.

Da mesma forma outro capítulo está voltado para o Método da matriz de rigidez geométrica e suas variações.

O quarto capítulo apresenta a matriz de rigidez geométrica e suas variações como apresentado por ZERMIANI & LORIGGIO (1996). Traz a definição algébrica pelo método dos elementos finitos, a escolha do valor de convergência e exemplos numéricos.

Estes dois capítulos são a base desta dissertação. A matriz de rigidez geométrica é definida utilizando a formulação do método dos elementos finitos, que não é apresentado de maneira completa neste trabalho, já que é de fácil acesso na bibliografia especializada.

Diversos outros métodos de análise não-linear geométrica são descritos e comentados no quinto capítulo, inclusive com a formulação matemática.

Nos capítulos sexto e sétimo apresenta-se a comparação entre os métodos principais.

Os anexos trazem dados auxiliares para a verificação dos resultados: programas implementados em linguagem BASIC e rotinas de resolução de equações lineares.

## CAPÍTULO I

### ANÁLISE LINEAR E NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS

Uma análise estrutural é dita linear para as situações quando admitem-se algumas hipóteses básicas, como por exemplo, a lei de Hooke é satisfeita e existem pequenos deslocamentos.

Essa análise requer a formação de um conjunto de equações lineares de equilíbrio de forças que são determinadas a partir da geometria, do carregamento e do tipo de material componente da estrutura. Sua resolução determina os deslocamentos nas diversas direções e conseqüentemente os esforços nas extremidades das barras. O comportamento interno da barra é facilmente determinado, pois são agora conhecidos os carregamentos, a geometria, o material e os esforços nas extremidades das barras.

Uma vasta maioria de estruturas são analisadas linearmente pelo fato de que os deslocamentos causados pelos carregamentos externos são muito pequenos, se comparado às dimensões dos elementos de barras.

Entretanto, o comportamento não linear está sempre presente, e até nas estruturas mais simples os projetistas deparam-se com ela.

Os efeitos não lineares associados a uma estrutura, podem ser agrupados em três grandes grupos, conforme classificação de BIRNSTIEL (1980), que são:

- ⇒ Os efeitos causados pela mudança da geometria da estrutura, ou do conjunto de barras (efeitos geométricos);
- ⇒ Os efeitos devido ao tipo de comportamento do material quando submetido a esforços (efeitos materiais), e;
- ⇒ Os efeitos devido à natureza e tipo do carregamento (efeitos de carregamento).

Poucos são os materiais elástico-lineares. O que comumente se encontra são materiais com comportamento não-linear. Possuem comportamento elástico-linear inicial e após um

certo ponto (ponto chamado de limite de proporcionalidade), possuem comportamento não-linear. É o caso do aço e do alumínio.

Na análise linear de estruturas de aço e alumínio, considera-se somente o material até a parte linear do gráfico tensão x deformação, restringindo o domínio de utilização do material até o limite de proporcionalidade. Quando considera-se a parte não linear, esta análise é dita *não linear física* ou *não linear material*.

Outra forma de análise é determinar a influência dos deslocamentos da estrutura nas ações internas. Quando isto ocorre, realiza-se uma análise mais exata, conhecida por *análise não linear geométrica*.

O terceiro tipo de não linearidade diz respeito ao carregamento imposto, que pode variar quando a estrutura passa para o estado deformado. Um exemplo comum é quanto ao peso próprio do material que a compõe, que estará agindo sempre na direção e sentido da força gravitacional, independente do estado da estrutura; outro exemplo são as ações devido ao vento, que atuam sempre em direção perpendicular às barras da estrutura.

MEAGHER (1990) esclarece que o efeito não linear geométrico, objeto de estudo desta dissertação, é o mais significativo e, conseqüentemente, o mais importante no caso de pórticos planos relativamente esbeltos.

Apresenta-se, inicialmente, o método de resolução *linear* de estruturas de pórticos planos, o qual serve de base para a resolução de estruturas com não linearidade geométrica. Faz-se a análise não linear por sucessivas modificações da análise linear (é um processo iterativo).

## 1.1 - ANÁLISE LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS COM FORMULAÇÃO MATRICIAL

A análise de estruturas através do método dos deslocamentos com formulação matricial, segundo MOREIRA (1977), pode envolver quatro tipos de grandezas:

- (a) cargas aplicadas (ações mecânicas aplicadas reativas e/ou ativas);
- (b) esforços resistentes (ações mecânicas internas);
- (c) deslocamentos da estrutura e
- (d) deformações.

Os elementos conhecidos são a geometria da estrutura, características do material que a compõe, as cargas aplicadas (ações mecânicas ativas) e condições de contorno (tais como deslocamentos impostos ou nulos). Existe basicamente um tipo de incógnita, os deslocamentos nos nós da estrutura. Quando conhecidos os deslocamentos, podem ser encontrados os demais elementos (ações mecânicas reativas, internas, etc.).

O método em questão parte de algumas hipóteses. Uma destas hipóteses é a de que o material segue o enunciado pela Lei de Hooke, ou seja, que o material é elástico e linear, ou ainda que existe um valor de proporcionalidade constante entre a tensão e a deformação do mesmo (módulo de elasticidade). A segunda hipótese é que a estrutura vai estar submetida a pequenos deslocamentos, isto é, a estrutura deformada vai ter uma configuração muito parecida com a estrutura antes de sofrer a ação de cargas estáticas. Diz-se então que a estrutura vai estar obrigatoriamente no regime linear. No caso de existirem deformações maiores, a Lei de Hooke pode perder a validade.

Deve-se ter em mente que, como este trabalho versa sobre estruturas de barras, as mesmas vão ter uma dimensão predominante em relação às outras duas; a hipótese de NAVIER será válida, onde as seções transversais planas irão permanecer planas após sua deformação. Despreza-se as deformações por cisalhamento.

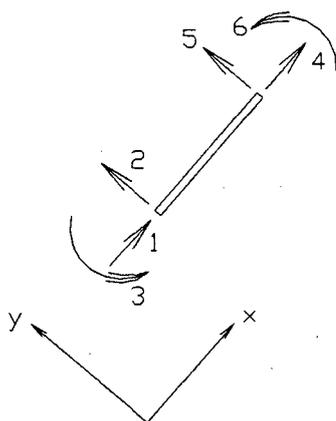
### **1.1.1 - GRAUS DE LIBERDADE DE UMA ESTRUTURA**

*Um grau de liberdade é um tipo de movimento possível em cada uma das extremidades das barras que compõe a estrutura. Para o caso específico de pórticos planos, cada extremidade de uma barra possui três movimentos possíveis, que são: deslocamento na*

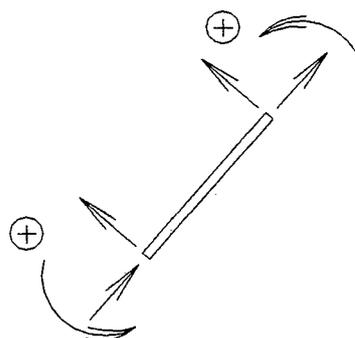
direção do eixo da barra, deslocamento na direção perpendicular ao eixo da barra e giro em torno da extremidade da barra. Com isto, cada barra possui um total de seis graus de liberdade.

A figura 1.1 apresenta os movimentos possíveis (graus de liberdade) em uma extremidade da barra para pórtico plano.

É necessário adotar uma convenção para os sentido positivos e negativos de cada um destes graus, sendo neste trabalho, adotada a convenção proposta por GERE & WEAVER (1981), apresentada na figura 1.2.



**Figura 1.1** - Graus de liberdade de uma barra de pórtico plano.



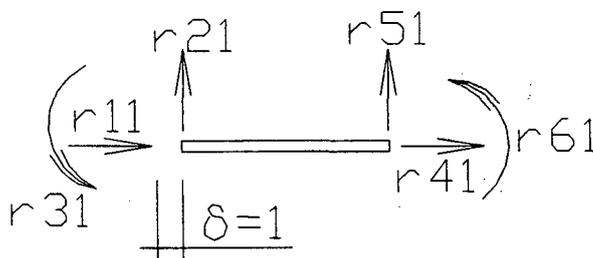
**Figura 1.2** - Convenção de sinais dos deslocamento para barras de pórtico plano.

### 1.1.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ DE UMA BARRA

A rigidez, que pode ser de uma barra ou de um conjunto delas, possui uma forma de representação matricial, onde cada um dos elementos da matriz possui um significado físico. Esse significado da matriz de rigidez para uma barra de pórtico plano passa a ser apresentada a seguir.

Dado um deslocamento unitário na direção 1 e deslocamentos nulos nas outras direções, determinam-se os esforços nas extremidades da barra, em cada uma das direções principais, como mostrado na figura 1.3.

Os valores das rigidezes  $r_{11}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{31}$ ,  $r_{41}$ ,  $r_{51}$  e  $r_{61}$ , representam os esforços que devem atuar nos graus de liberdade 1,2,3,4,5 e 6, devido ao deslocamento unitário na direção 1, de modo à barra permanecer em equilíbrio. Da mesma forma, estendendo-se o mesmo raciocínio para um deslocamento unitário em cada um dos graus de liberdade, determinam-se os demais esforços. De forma genérica, o elemento  $r_{ij}$  da matriz de rigidez para uma barra de pórtico representa o esforço que aparece no grau de liberdade  $i$  devido a um deslocamento unitário na direção  $j$ .



**Figura 1.3 - Rigidez devido a um deslocamento unitário na direção 1.**

A equação 1.1 apresenta a matriz de rigidez para uma barra de pórtico plano apresentado no BULLETIN D'INFORMACION N°123 (1977). Como a barra possui seis graus de liberdade a matriz de rigidez terá dimensões de 6 linhas e 6 colunas. Pode-se demonstrar que a mesma é simétrica.

$$[r] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Onde:

E= Módulo de elasticidade da seção transversal da barra;

I = Inércia da seção transversal da barra, em relação ao centro de gravidade;

A = Área da seção transversal da barra;

L = Comprimento da barra.

A matriz de rigidez relaciona os esforços aplicados nas extremidades da barra com os deslocamentos causados pela sua aplicação. Esta relação se aplica ao sistema de referência local da barra e é a seguinte:

$$\{s\} = [r] \cdot \{d\} \quad (1.2)$$

Onde:

\{s\} Vetor formado pelas forças aplicadas na extremidade da barra;

[r] matriz de rigidez de uma barra no sistema local ;

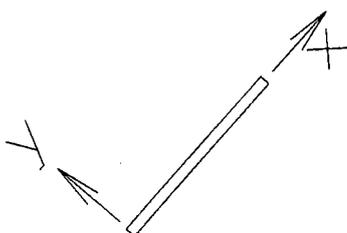
\{d\} vetor formado pelas deformações no sistema local.

### 1.1.3 - SISTEMAS DE REFERÊNCIA LOCAL E GLOBAL

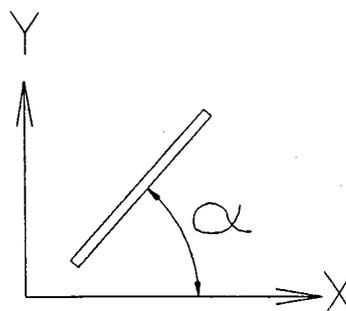
O sistema de referência local está posicionado de forma ao seu primeiro eixo coincidir com o eixo longitudinal da barra, seu segundo eixo ser perpendicular ao mesmo e o sentido de rotação ser coincidente com o sistema anti-horário, ou seja, o mesmo do convencionado por GERE & WEAVER (1981) e apresentado na figura 1.1.

O sistema de referência global é um sistema genérico ao qual a estrutura como um todo será referenciada e a princípio será determinada pelo leitor ou usuário, desde que seus dois eixos principais sejam ortogonais. A figura 1.4 mostra a representação do sistema local de uma barra, enquanto a figura 1.5 apresenta uma estrutura qualquer referenciada a um sistema qualquer global de coordenadas.

O ângulo “ $\alpha$ ” representa a defasagem entre o sistema local e global de referência.



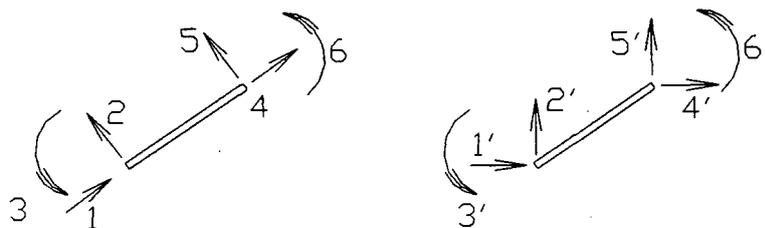
**Figura 1.4** - Barra de pórtico e o sistema local de referência.



**Figura 1.5** - Estrutura arbitrária com o sistema global de referência.

Os dois sistemas podem ser correlacionados através do ângulo  $\alpha$ . Partindo da análise dos deslocamentos da extremidade de uma barra, no sistema local, chega-se a uma relação entre os dois sistemas de referência.

Os graus de liberdade referente aos dois sistemas estão apresentados na figura 1.6.



**Figura 1.6** - Relação entre os graus de liberdade dos sistemas local e global.

Os deslocamentos referenciados ao sistema local  $\{ d \}$ , podem ser determinados pela multiplicação de uma matriz de transformação  $[ T ]$  pelos deslocamentos referenciados ao sistema global  $\{ D \}$ , como apresentou GERE & WEAVER (1981).

$$\{ d \} = [ T ] . \{ D \} \quad (1.3)$$

O mesmo acontece em relação às forças aplicadas na barra da seguinte forma: as forças aplicadas referenciadas ao sistema local  $\{ s \}$  podem ser determinadas pela multiplicação de uma matriz de transformação  $[ T ]$  pelas forças aplicadas nas estruturas das barras referenciadas ao sistema global  $\{ S \}$ .

$$\{ s \} = [ T ] . \{ S \} \quad (1.4)$$

A mesma relação expressa na equação 1.1 pode ser expressa em termos globais:

$$\{ S \} = [ R ] . \{ D \} \quad (1.5)$$

A equação 1.6 mostra a matriz de transformação acima citada.

$$[ T ] = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(1.6)

#### 1.1.4 - MATRIZ DE RIGIDEZ DE UMA BARRA NO SISTEMA LOCAL

Conhecidas as relações das equações 1.2 à 1.5, e a propriedade matricial de que uma matriz ortogonal, multiplicada pela sua transposta é igual à matriz identidade, pode-se demonstrar que a matriz de rigidez de uma barra no sistema global é igual à multiplicação sucessiva de três matrizes, sendo a primeira a matriz transposta ( $[ T ]^*$ ) da matriz de transformação (acima definida), a segunda, a matriz de rigidez da barra no sistema local ( $[ r ]$ ) e a terceira a matriz de transformação ( $[ T ]$ ). Este triplo produto matricial é apresentado na equação 1.7.

$$[ R ] = [ T ]^* \cdot [ r ] \cdot [ T ] \quad (1.7)$$

Com pequeno esforço manual, conforme apresentado por CAMPANARI (1985), chega-se diretamente à matriz de rigidez de uma barra no sistema global. Essa matriz é apresentada na equação 1.8.

No presente trabalho, a matriz de rigidez no sistema global foi encontrada pela multiplicação das matrizes apresentadas na equação 1.7.

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2 & (\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})CS & -\frac{6EI}{L^2}S & -(\frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2) & -(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})CS & -\frac{6EI}{L^2}S \\ (\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C & -(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})CS & -\frac{EA}{L}S^2 - \frac{12EI}{L^3}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C \\ -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}S & -\frac{6EI}{L^2}C & \frac{2EI}{L} \\ -(\frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2) & (-\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3})CS & \frac{6EI}{L^2}S & \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2 & (\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})CS & \frac{6EI}{L^2}S \\ -(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})CS & -\frac{EA}{L}S^2 - \frac{12EI}{L^3}C^2 & -\frac{6EI}{L^2}C & (\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C \\ -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}S & -\frac{6EI}{L^2}C & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

(1.8)

Onde:

$$\begin{aligned} C &= \text{COS}\alpha; & S &= \text{SEN}\alpha \\ C^2 &= \text{COS}^2\alpha & S^2 &= \text{SEN}^2\alpha \end{aligned}$$

### 1.1.5 - MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA COMO UM TODO

De forma semelhante à uma barra uma estrutura também a possui matriz de rigidez, que pode ser montada em função das rigidezes individuais das barras que a compõem.

Uma estrutura de pórtico plano é formada de várias barras ligadas entre si em pontos denominados nós. Os nós possuem os mesmos graus de liberdade da extremidade de uma barra, referenciados a um sistema global de coordenadas.

A relação entre os graus de liberdade da estrutura e da barra é apresentada na tabela 1.1 e exemplificada nas figuras 1.7 e 1.8.

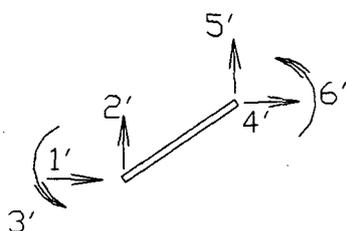
| Grau de liberdade da barra | Grau de liberdade da estrutura |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1                          | $3 * i - 2$                    |
| 2                          | $3 * i - 1$                    |
| 3                          | $3 * i$                        |
| 4                          | $3 * j - 2$                    |
| 5                          | $3 * j - 1$                    |
| 6                          | $3 * j$                        |

**Tabela 1.1** - Relação entre graus de liberdade de uma barra e da estrutura.

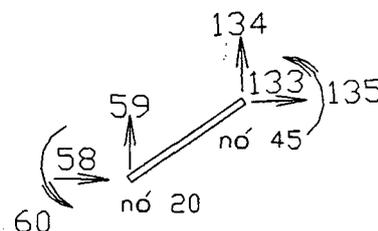
Onde:

$i$  = nó inicial da barra na estrutura;

$j$  = nó final da barra na estrutura;



**Figura 1.7** - Graus de liberdade de uma barra no sistema global.



**Figura 1.8** - Graus de liberdade da estrutura no sistema global.

O sistema a ser resolvido é:

$$\{ F \} = [ K ] \{ D \}, \quad (1.9)$$

onde:  $[ K ]$  é a matriz de rigidez global da estrutura,

$\{ F \}$  é o vetor das forças aplicadas e

$\{ D \}$ , as incógnitas (deslocamentos).

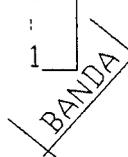
Inicialmente monta-se a matriz de rigidez da estrutura como um todo sem a imposição das restrições de apoio. A matriz assim determinada possui algumas propriedades:

- ⇒ É quadrada;
- ⇒ É singular (determinante é igual a zero) e;
- ⇒ É de banda simétrica, onde existem partes da matriz cujos valores são nulos, formando triângulos, como mostra a equação 1.10.

Para que o sistema da equação 1.9 possa ser resolvido, é necessário que sejam incorporadas as restrições devido aos apoios da estrutura. Se os apoios fornecerem um equilíbrio estável para a estrutura, o sistema resultante é possível e determinado. Ele também tem a propriedade de ser positivo definido (os autovalores associados são reais e positivos, portanto seu determinante é positivo e diferente de zero e esta matriz é inversível).

Este fato auxilia na resolução do sistema de equações por eliminar a necessidade de pivotação de linhas no processo de inversão.

$$[R] = \begin{bmatrix}
 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 4 & 4 & 9 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 5 & 9 & 4 & 4 & 7 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 4 & 4 & 6 & 1 & 6 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 7 & 1 & 9 & 6 & 1 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 4 & 7 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 7 & \dots & 1 \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}$$



(1.10)

### 1.1.6 - FORÇAS CONCENTRADAS APLICADAS NOS NÓS

As forças aplicadas nos nós  $\{ F_i \}$  formam o primeiro componente do vetor  $\{ F \}$  e seguem a mesma convenção dos esforços internos, como mostrado na figura 1.9.

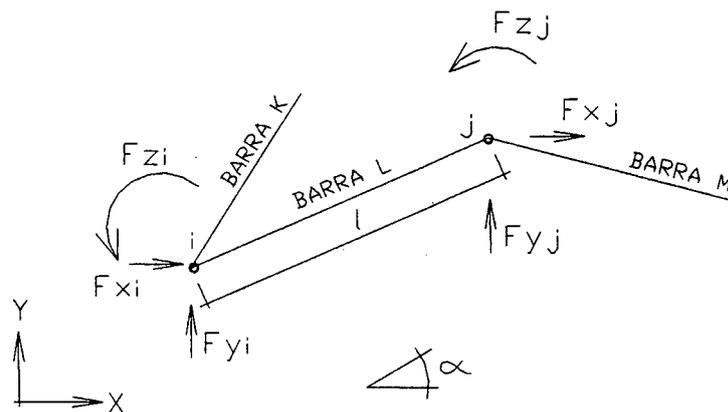


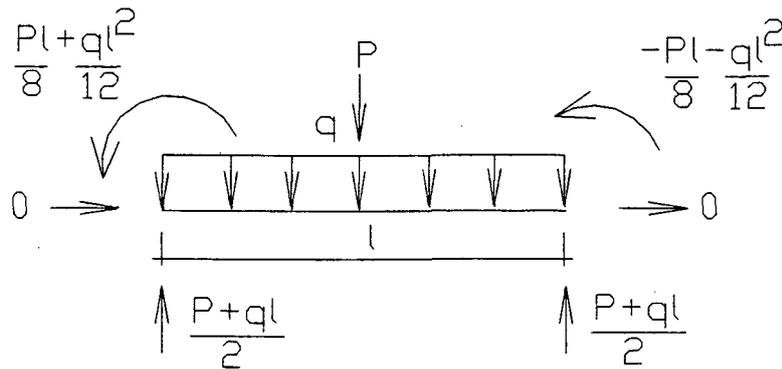
Figura 1.9 - Esforços aplicados nos nós da estrutura.

### 1.1.7 - FORÇAS APLICADAS NAS BARRAS

As forças aplicadas nas barras serão transformadas em esforços de imobilização dos nós da estrutura  $\{F_o\}$  e formam o segundo componente do vetor  $\{F\}$ . O vetor  $\{F\}$  é aquele que contém as ações mecânicas aplicadas.

$$\{F\} = \{F_i\} - \{F_o\} \quad (1.11)$$

Está previsto e implementado na rotina de resolução do programa utilizado, que cada barra de pórtico plano possa receber uma carga distribuída “q”, em toda a extensão da mesma, e uma carga concentrada “P”, no meio desta. Os esforços de imobilização do nó, deste caso, estão na figura 1.10.



**Figura 1.10** - Esforços de imobilização devido aos carregamentos aplicados em uma barra.

A equação 1.12 apresenta a composição do vetor  $\{ f_o \}$  para uma barra. CAMPANARI (1985) também apresenta esta formulação.

$$\{ f_o \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{(P + q.l)}{2} \\ \frac{P.l}{8} + \frac{q.l^2}{12} \\ 0 \\ \frac{(P + q.l)}{2} \\ -\left(\frac{P.l}{8} + \frac{q.l^2}{12}\right) \end{Bmatrix}$$

(1.12)

O vetor é aqui apresentado apenas para uma barra no sistema local. De forma semelhante ao já exposto neste capítulo, os esforços deverão ser transformados para o sistema global.

Depois deverá ser montado o o vetor  $\{ F_o \}$  pela soma dos diversos  $\{ f_o \}$  das barras já no sistema global. A montagem de  $\{ F_o \}$  segue a mesma relação entre os graus de liberdade da barra e da estrutura, exposta na tabela 1.1.

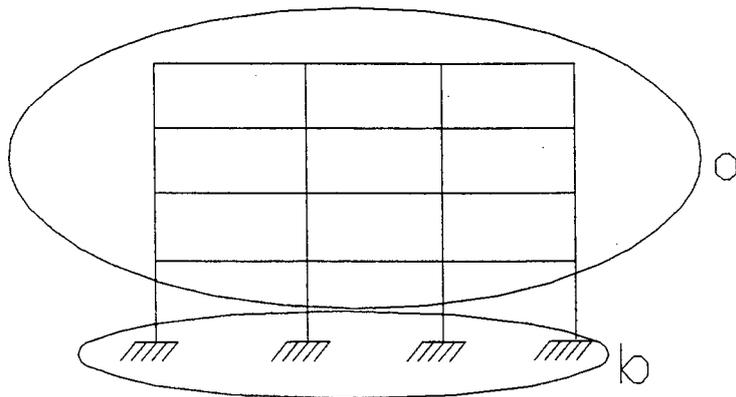
### 1.1.8 - IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para a resolução do sistema de equações apresentado na equação 1.9, devem ser impostas as condições de contorno, que correspondem às vinculações externas da estrutura (apoios, engastes, etc). Sem a vinculação, a matriz  $[ K ]$  é singular e o sistema torna-se impossível de resolver.

As condições de contorno conhecidas neste tipo de estrutura são os deslocamentos (nulos ou não) prescritos em algum nó do pórtico. Serão introduzidos no sistema, dividindo a matriz de rigidez em duas partes:

- ⇒ Uma parte referente aos nós da estrutura que não tem vinculações externas (a), e;
- ⇒ Outra parte referente aos nós da estrutura que possuem condições de contorno conhecidas (b).

A figura 1.11 apresenta a divisão da estrutura, conforme a divisão da matriz de rigidez.



**Figura 1.11 - Divisão da estrutura: parte "a" sem vinculações externas e parte "b" com condições de contorno.**

A equação fica, então, da forma apresentada pela equação 1.13.

$$\begin{Bmatrix} Fa \\ Fb \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Kaa & Kab \\ Kba & Kbb \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Da \\ Db \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

São então conhecidos os termos de  $\{ Fa \}$ ,  $[ Kaa ]$ ,  $[ Kab ]$ ,  $[ Kba ]$ ,  $[ Kbb ]$ , e  $\{ Db \}$ .  
 Executando a multiplicação da equação 1.13, temos as equações 1.14 e 1.15.

$$\{ Fa \} = [ Kaa ] * \{ Da \} + [ Kab ] * \{ Db \} \quad (1.14)$$

$$\{ Fb \} = [ Kba ] * \{ Da \} + [ Kbb ] * \{ Db \} \quad (1.15)$$

Os termos de  $\{ Da \}$  podem ser obtidos a partir da equação 1.14, como segue:

$$\{ Da \} = ( \{ Fa \} - [ Kab ] * \{ Db \} ) * [ Kaa^{-1} ] \quad (1.16)$$

Por substituição dos valores de  $\{ Da \}$  na equação 1.15, encontra-se os valores de  $\{ Fb \}$ , que são as reações de apoio.

No programa utilizado pela dissertação modifica-se a matriz de rigidez da estrutura, colocando-se valores nulos nas linhas e colunas correspondentes a graus de liberdade restringidos, na diagonal onde as linhas e colunas se encontram coloca-se valor unitário.

Os termos independentes (esforços aplicados nos nós) da equação também são alterados colocando-se valores nulos nas linhas correspondentes às vinculações.

Desta maneira a resolução do sistema de equações fornece valores nulos para os graus de liberdade restringidos. Como de uma maneira geral, os números de vinculações é pequeno comparado com o número de graus de liberdade de toda a estrutura, esse procedimento não aumenta significativamente o tempo de resolução.

---

### 1.1.9 - ROTEIRO PARA RESOLUÇÃO

Um roteiro mínimo simplificado para a resolução de uma estrutura de pórtico plano é apresentado abaixo, segundo o acima apresentado:

- 1 - Calcular a matriz de rigidez de cada barra, diretamente no sistema global. (ou no sistema local, fazendo após isto a transformação para o sistema global);
- 2 - Montar a matriz de rigidez da estrutura;
- 3 - Montar o vetor de esforços de imobilização dos nós e transformá-la ao sistema global, Calcular o valor de  $\{ F \}$ , pela subtração  $\{ F_i \} - \{ F_o \}$ ;
- 4 - Modificar a matriz de rigidez da estrutura com a imposição das condições de contorno;
- 5 - Resolver o sistema por qualquer método de resolução de equações lineares (Gauss, inversão, Cholesky, etc.), encontrando assim, os deslocamentos;
- 6 - Calcular os esforços nas barras no sistema global e convertê-los ao sistema local.

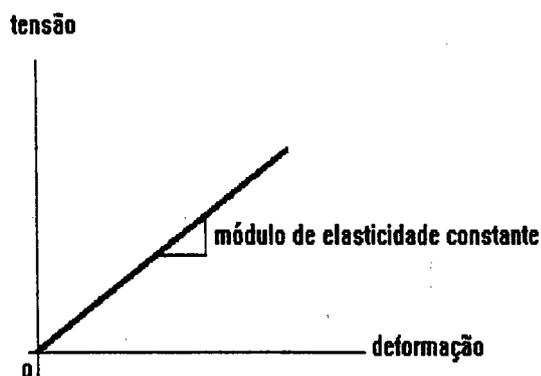
### 1.2 - ANÁLISE COM NÃO LINEARIDADE FÍSICA

A *não linearidade física* ou material é uma característica da maioria dos materiais utilizados para fins estruturais em engenharia. Diz-se que um material é não linear quando não há uma proporção constante entre a tensão e a deformação do material quando submetido a um carregamento externo.

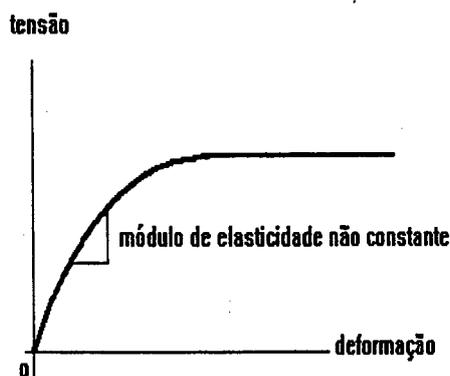
Na grande maioria dos projetos de estruturas faz-se simplificações quanto ao material. Esta simplificação consiste em considerar o material como elástico linear, o que nem sempre reflete a realidade do comportamento do material.

Quando faz-se uma análise estrutural com não linearidade física, considera-se o material como não linear, elástico não linear, elasto-plástico e etc. *Estes tipos de análise não serão contempladas nesta dissertação.*

Na figura 1.12 está apresentado o gráfico tensão x deformação para um material elástico-linear. Na figura 1.13 está apresentado um gráfico tensão x deformação para um material elástico não linear.



**Figura 1.12** - Exemplo da deformação elástica linear do material relacionado com a tensão.



**Figura 1.13** - Exemplo da deformação não linear do material relacionado com a tensão.

As tensões residuais presentes no material são oriundas dos processos de manufatura e produção, também são não lineares e somente estudos específicos podem determinar sua intensidade. A expansão da zona inelástica nas barras como decorrência do aumento das forças nas barras são consideradas não lineares.

### 1.3 - ANÁLISE COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Existem cinco efeitos não lineares geométricos que podem ser facilmente diferenciados numa análise estrutural:

- 1- A influência da força axial na rigidez à flexão do elemento de barra;
- 2- Os efeitos dos deslocamentos relativos perpendiculares ao eixo axial. A combinação destes dois é conhecido como efeito P- $\Delta$ ;
- 3- A mudança do comprimento da barra quando da existência de uma força axial. A combinação do primeiro com este terceiro é conhecido como efeito P-  $\delta$ . Estes últimos três efeitos interagidos foram comentados por DE BUEN (1992);
- 4- Excentricidades devido à falhas construtivas; as falhas construtivas, para algumas estruturas estão presentes e podem causar excentricidades à linha de carregamento, ocasionando uma alteração da geometria inicialmente proposta e por conseguinte, uma nova distribuição dos esforços.
- 5- Zonas de deformações diferenciadas devido às irregularidades geométricas da barra da estrutura. Representa o caso em que o eixo da barra da estrutura não é retilíneo por defeito de fabricação ou outro motivo e esta imperfeição vai adicionar à estrutura esforços que deverão ser considerados.

Segundo MEAGHER (1990), os primeiros dois efeitos são de suma importância quando é considerada a rigidez do pórtico e sua estabilidade, contudo, existem situações em que os outros três efeitos podem se tornar também significativos e serem preponderantes quando do projeto da estrutura.

BIRNSTIEL, C. E OUTROS, (1980) citam e incluem outros fatores menos importantes que influenciam na análise não-linear geométrica de pórticos planos, que são as deformações por esforço cortante, movimentação do pórtico para fora do plano, flambagem local de barras, tensões residuais de alguns materiais.

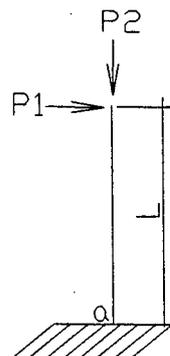
Quando se faz uma análise com não linearidade geométrica em uma estrutura, determina-se os esforços internos considerando os efeitos de segunda ordem na estrutura, ou seja, os deslocamentos que aparecem na estrutura.

Os efeitos de segunda ordem são aqueles oriundos da mudança de geometria da estrutura ou da barra com a incidência do carregamento.

“Se uma peça está submetida à flexo-compressão e possui um baixo índice de esbeltez, então os deslocamentos que ocorrem na peça são praticamente iguais àqueles que aparecem

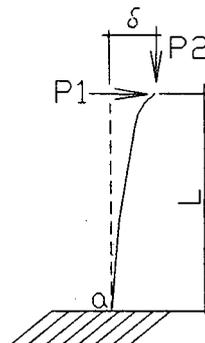
devido somente aos momentos fletores. Entretanto, se a esbeltez da peça for elevada, o esforço normal contribui efetivamente para o deslocamento final da peça. Esses efeitos do esforço normal, que só se manifestam devido à existência de deslocamentos na peça por flexão, são chamados de efeitos de segunda ordem e são responsáveis pelo comportamento não-linear da estrutura”, LORIGGIO (1995).

Como exemplos, a figura 1.14 apresenta um caso de elasticidade linear com o momento de primeira ordem e a figura 1.15 apresenta um caso com não linearidade geométrica.



$$M_a = P_1 \cdot L$$

**Figura 1.14** - Momento de primeira ordem (linear).



$$M_a = P_1 \cdot L + P_2 \cdot \delta$$

**Figura 1.15** - Momento de segunda ordem (não linear).

A figura 1.15 apresenta exemplo de efeito de segunda ordem em uma barra, onde a carga axial e a carga transversal causam um deslocamento no topo e um acréscimo no momento de engastamento na base da barra. Este é o efeito de segunda ordem preponderante na maioria dos casos.

Quando as deflexões ocorridas são grandes a ponto de causarem mudanças significativas na geometria da estrutura, faz-se necessário uma correção na formulação das equações de equilíbrio e aparecerão termos não lineares e, conseqüentemente, as soluções não serão explícitas como no caso da análise linear. Faz-se necessário um processo iterativo, a partir da análise linear, para determinar a solução.

Vários são os métodos para alterar a análise linear de modo a fazer-se uma análise não linear geométrica, dentre eles cita-se os métodos simplificados P- $\Delta$ , das MATRIZES GEOMÉTRICAS com implementação tangente e com implementação secante. Os capítulos 3, 4 e 5 contemplam comentários a este respeito.

### 1.3.1 - FLAMBAGEM

“O modelo da flambagem, que corresponde ao comportamento de uma barra de material elástico linear de eixo perfeitamente reto e carga exatamente centrada ainda vem sendo utilizado para representar barras submetidas à compressão centrada.” LORIGGIO (1995).

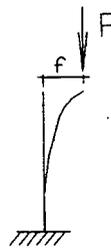
A figura 1.16, mostra um pilar com carga centrada  $P$  menor que a carga de flambagem, e a figura 1.17 apresenta a mesma estrutura com carga  $P$  maior que a carga de flambagem, assumindo uma configuração com grandes deformações.

As barras com cargas acima do seu valor crítico vai encontrar outra posição de equilíbrio fora da vertical.

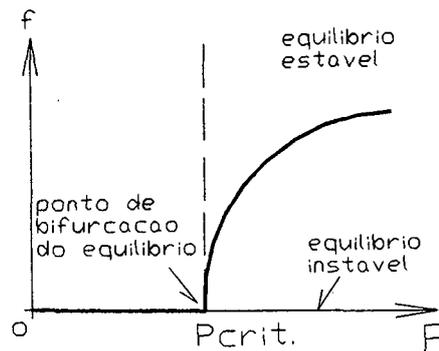
O comportamento desta estrutura com o aumento da carga  $P$  em relação ao deslocamento no topo está mostrado na figura 1.18, onde encontra-se o “ponto de bifurcação do equilíbrio”, e duas regiões possíveis de equilíbrio, estável e instável, no comportamento pós crítico.



**Figura 1.16 - Pilar com carga centrada.**



**Figura 1.17 - Posição deformada do pilar com carga centrada.**

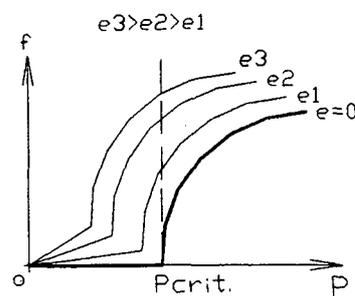
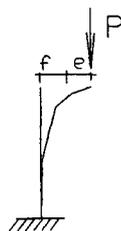


**Figura 1.18** - Gráfico deformação “  $f$  ” x Carga “  $P$  ”.

Segundo ROCHA (1991) os efeitos de flambagem são de maior amplitude e significância para barras com esbeltez maiores de 40.

Como nenhuma peça pode ser construída com perfeição e que cargas laterais sempre podem existir, as peças estão sempre sujeitas a momentos que são introduzidos por alguma excentricidade.

Segundo LORIGGIO (1995), a influência da excentricidade, no caso de barras esbeltas, pode ser exemplificada pela figura 1.20, onde, para pequenas excentricidades, o comportamento do pilar tende para o modelo de flambagem apresentado na figura 1.18.

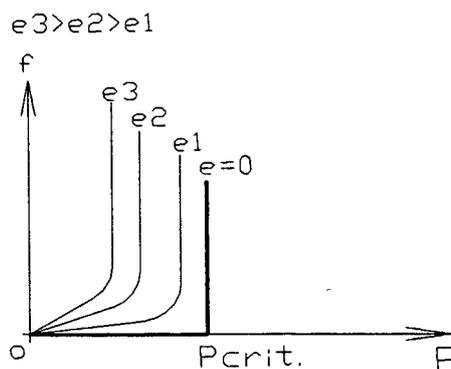


**Figura 1.19** - Modelo deformado de pilar com deslocamento e carga excêntrica.

**Figura 1.20** - Gráfico deformação “  $f$  ” x Carga “  $P$  ”, para vários valores de excentricidades.

O comportamento não-linear pode ser encontrado iterativamente, por modificações sucessivas da análise linear. São encontrados valores aproximados, que representam a solução de maneira satisfatória enquanto no regime anterior da carga crítica, porém não consegue simular o comportamento pós crítico.

Este tipo de solução pode ser representada pela figura 1.21.



**Figura 1.21** - Gráfico deformação “ f ” x Carga “ P ”, para vários valores de excentricidades, como solução da análise não linear.

Tendo uma ótica diferente da análise de segunda ordem, o modelo da flambagem ainda hoje é usado na norma brasileira de estruturas metálicas, e pode servir de parâmetro de comparação das análises não lineares apresentadas nesta dissertação.

### 1.3.2 - INSTABILIDADE

A instabilidade em pórticos está usualmente associada à não linearidade geométrica e física atuando simultaneamente. *Este trabalho não contempla estudos e comentários sobre os efeitos da instabilidade.*

## CAPÍTULO II

# AVALIAÇÃO DA FLEXIBILIDADE E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

## 2.1 - AVALIAÇÃO DA FLEXIBILIDADE

A princípio, todos os métodos de avaliação da flexibilidade que são apresentados neste capítulo tem como objetivo determinar se a estrutura em análise é flexível a ponto de ser necessária uma análise de segunda ordem. Os métodos apresentados estão contidos na bibliografia especializada, porém apenas o primeiro destes, que foi escolhido por conveniência, será utilizado nos exemplos que figuram nos capítulos posteriores.

### 2.1.1 - PARÂMETRO DE INSTABILIDADE $\alpha$

Define-se o Parâmetro de Instabilidade “ $\alpha$ ” pela equação 2.1, que é função do material (módulo de elasticidade), da seção transversal de uma barra equivalente (inércia), da carga total atuante e altura total da estrutura.

Esta forma de avaliação é aplicável para estruturas constituídas por barras retas submetidas à flexão simples ou composta, onde desprezam-se os efeitos de torção. É, também aplicável a pórticos planos.

$$\alpha = h \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} \quad (2.1)$$

Onde:

$h$  = altura total do pórtico plano;

$P$  = carga total vertical atuante no pórtico plano, toma-se o valor de serviço;

$E$  = módulo de elasticidade do material;

$I$  = momento de inércia equivalente de um pilar engastado, fictício e equivalente, com mesmo deslocamento horizontal da estrutura.

As figuras 2.1 e 2.2 trazem esquema ilustrativo.

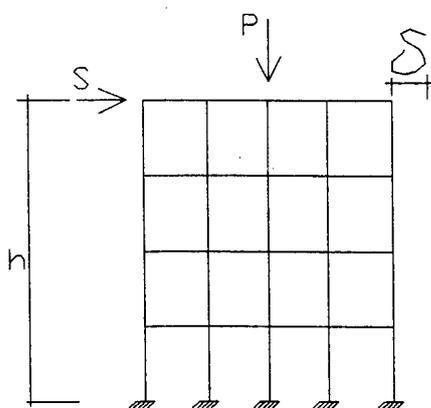


Figura 2.1 - Pórtico plano.

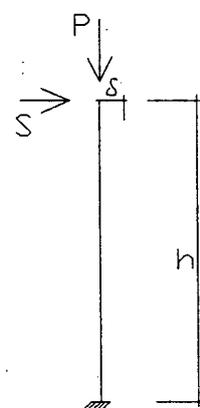


Figura 2.2 - Pilar equivalente.

Para o caso do material ser o concreto, FUSCO (1981) sugere que o valor do módulo de elasticidade seja aquele dado pela equação 2.2

$$E = 6000 \cdot \sqrt{fck + 3,5} \quad (\text{em MPa}) \quad (2.2)$$

Onde:

$fck$  é a resistência característica do concreto, conforme dado pela NB1 (1986)

Um valor citado por SILVA (1988) como limite, determina duas situações distintas, caso  $\alpha > \alpha_{\text{lim}}$ , faz-se necessária uma análise não-linear e caso  $\alpha \leq \alpha_{\text{lim}}$  esta análise é desnecessária.

O valor limite é  $\alpha_{\text{lim}} = 0,50$  para pórticos.

Este método é aplicável à todos os tipos de pórticos, planos e espaciais, com cargas verticais atuando.

Outros autores citam um valor de  $\alpha_{\text{lim}}$  proporcional ao número de andares, sendo:

$$\alpha_{\text{lim}} = 0,2 + 0,1n \quad , \text{ para } n \leq 3$$

$$\alpha_{\text{lim}} = 0,6 \quad , \text{ para } n \geq 4$$

onde  $n$ , é o número de andares do pórtico plano.

Já FRANCO (1993), apresenta valores de  $\alpha_{\text{lim}}$  para três situações distintas:

$$\alpha_{\text{lim}} = 0,6 \quad , \text{ para estruturas usuais, como pórticos com pilares paredes}$$

$$\alpha_{\text{lim}} = 0,7 \quad , \text{ para apenas pilares paredes}$$

$$\alpha_{\text{lim}} = 0,5 \quad , \text{ para pórticos}$$

### 2.1.2 - PARÂMETRO DE INSTABILIDADE Q

É definido por CHAJES (1987), outro parâmetro de instabilidade, denominado Q, que é apresentado na equação 2.3. Este parâmetro é função da carga vertical total da estrutura, da força horizontal do andar, da altura do andar e do deslocamento horizontal da análise linear ou de primeira ordem.

$$Q = \left( \frac{D1}{H.h} \right) \cdot \sum P \quad (2.3)$$

Onde:

$\sum P$  = somatório das cargas verticais no andar;

D1 = deslocamento horizontal de primeira ordem;

H = força horizontal do andar;

h = altura do andar.

Para este método, o valor comparativo é  $Q_{lim} = 0,04750$  e três situações são possíveis:

Caso  $Q \leq Q_{lim}$ , é desnecessária a análise não-linear;

Caso  $Q_{lim} < Q \leq 0,220$ , apenas a análise geométrica de segunda ordem é necessária e;

Caso  $Q > 0,220$ , faz-se necessária uma análise de segunda ordem mais precisa.

Este método é aplicável apenas para pórticos de edifícios.

### 2.1.3 COEFICIENTE $\gamma_z$

Conforme citam SANTOS e FRANCO (1993), e PENNER & FUSCO (1997), o coeficiente  $\gamma_z$  é um multiplicador dos efeitos de primeira ordem para estimar os efeitos não-lineares (de segunda ordem) que ocorrem nas estruturas de pórticos planos. Este coeficiente é dado pela equação 2.4.

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\sum F_i \cdot \delta_j}{M_{\text{tombamento}}}} \quad (2.4)$$

onde:

$\sum F_i \cdot \delta_j$  é a somatória do produto de todas as forças verticais, multiplicado pelos respectivos deslocamentos horizontais, obtidos com a análise de primeira ordem.

$M_{\text{tombamento}}$  é o momento de tombamento do pórtico plano, onde são considerados todos os carregamentos horizontais de cálculo, em relação á base.

Para a situação em que  $\gamma_Z < 1,1$  pode-se desprezar os efeitos de segunda ordem e para o caso em que  $\gamma_Z \geq 1,1$  deve-se fazer a análise não linear geométrica (de segunda ordem).

Os autores supra citados apresentam este método como sendo aplicável principalmente aos pórticos de edificios de múltiplos pavimentos, com vãos entre os pilares na ordem de 5 metros.

Existem propostas de criar elementos em normas para utilizar este método como multiplicador dos efeitos lineares e, então, encontrar uma ordem de grandeza dos efeitos não lineares.

#### 2.1.4 - PRESCRIÇÕES DA NBR-8800

A NBR8800 (1988) recomenda que se projete considerando a análise não linear quando esta diferir em mais de 10 % (dez por cento) da análise linear. Isto implica que se utilize algum método para estimar sua influência ou se faça sempre a análise não linear. A Norma, portanto, apenas indica um limite a partir do qual é necessária uma análise mais apurada. Faz-se uso dos métodos anteriormente citados para estimar a influência dos efeitos não lineares.

Esta mesma norma cita que a análise não linear pode ser feita apenas para barras verticais, desprezando as barras inclinadas e horizontais.

## **2.2 - MÉTODOS DE IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA**

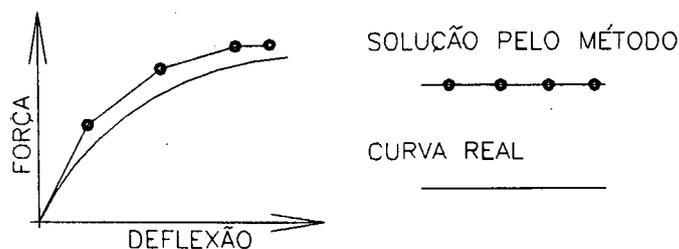
Existem, basicamente, três formas de se implementar numericamente os procedimentos para a solução de um problema não linear geométrico com a utilização de matrizes e simular a curva força x deflexão real da estrutura, como elucida CHAJES (1987).

### **2.2.1 - MÉTODO INCREMENTAL LINEAR**

No método incremental linear determina-se uma aproximação da curva citada, pelo incremento linear sucessivo, como mostra a figura 2.3. O carregamento é aplicado como uma série de pequenas parcelas, onde para cada incremento de carregamento determina-se a deformação por análise linear. Para cada incremento de força é determinado um deslocamento.

O deslocamento total é dado pela soma das parcelas da análise linear (primeira parte) com as parcelas de cada incremento.

O método linear incremental constrói uma matriz de rigidez para a estrutura baseada nas forças internas e deformações existentes no início de cada incremento e que é tangente à curva força x deflexão naquele ponto. Desde que os termos desta matriz tangente não se alterem significativamente durante um dado incremento, esse método fornece uma boa aproximação da curva real. É chamado de método linear incremental tangente

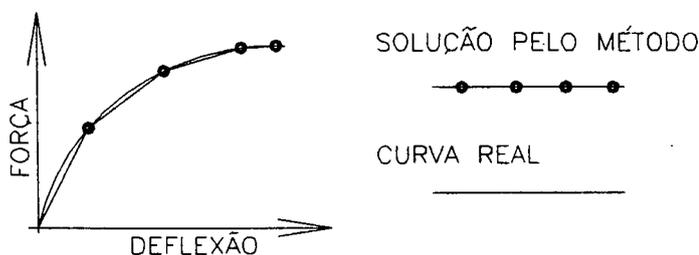


**Figura 2.3** - Curva força x deflexão para o método incremental linear.

### 2.2.2 - MÉTODO INCREMENTAL NÃO-LINEAR

O método incremental não linear é similar ao método incremental linear; aplica-se o carregamento como uma série de parcelas incrementais e, então, calcula-se as mudanças nos deslocamentos causadas por cada incremento de carregamento. A diferença está na forma como determinam os deslocamentos em cada etapa.

O método incremental não-linear usa uma matriz de rigidez tangente, que é montada a partir das forças internas e deslocamentos que aparecem no início de cada incremento, mas que é modificada para incluir modificações ao longo da etapa de carregamento. A figura 2.4 apresenta a curva força x deflexão para o método incremental não linear.



**Figura 2.4** - Curva força x deflexão para o método incremental não linear.

### 2.2.3 - MÉTODO ITERATIVO DIRETO

O método iterativo direto simula o comportamento não linear com uma análise elástica linear, onde a rigidez da estrutura é deduzida. ZIENKIEWICS (1983) e LORIGGIO (1995).

A matriz de rigidez é uma matriz secante e o seu valor é encontrado iterativamente de modo que os resultados da análise linear coincidam com os resultados esperados.

A figura 2.5 traz a curva força x deflexão para este método.

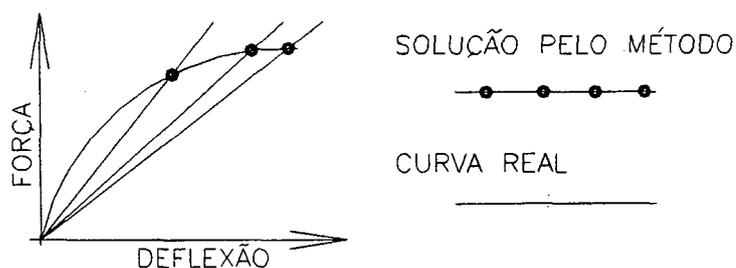


Figura 2.5 - Curva força x deflexão para o método iterativo.

## CAPÍTULO III

### ANÁLISE NÃO LINEAR PELO PROCESSO P- $\Delta$

A ação simultânea de forças horizontais com forças verticais cria esforços adicionais aos obtidos em uma análise linear em pórticos. Este efeito não linear é denominado efeito P- $\Delta$ .

O objetivo deste capítulo é o de apresentar uma forma de determinar os esforços segunda ordem nos pórticos planos, denominada processo P- $\Delta$ .

“O efeito da força normal na rigidez à flexão das barras de pórtico plano e o efeito dos deslocamentos horizontais relativos dos andares são os principais efeitos de segunda ordem em pórticos de edifícios altos”, SILVA (1988).

Dada sua importância, o processo será apresentado em duas variações que serão doravante chamados de Método P- $\Delta$  e Método P- $\Delta$  genérico. O primeiro refere-se à aplicação do método às barras verticais e o segundo a todas as barras do pórtico.

Note que o método é o mesmo, porém será dividido em duas partes, pois em projetos de edifícios somente o primeiro vem sendo utilizado, mas existem casos em que a utilização do segundo é necessária.

#### 3.1 - PROCESSO P- $\Delta$

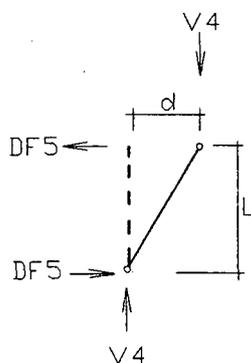
O primeiro método P- $\Delta$  implementado é o citado pela Norma Brasileira de Dimensionamento de Edifícios em Aço (1988), porém deduzido para programação como descrito a seguir e consiste em determinar os esforços atuantes na estrutura, levando-se em consideração a estrutura no estado deformado.

No Método P-Δ, são consideradas as ações internas das barras de forma simples, através de um processo iterativo, modificando-se sucessivamente os resultados da análise linear (de primeira ordem), usando forças horizontais fictícias determinadas a partir dos deslocamentos e deformações de primeira ordem para simular o efeito de segunda ordem.

Este é um processo iterativo aplicado somente às barras verticais que segundo a Norma Brasileira de Aço (1988), deve convergir em, no máximo, cinco (05) iterações.

GAIOTTI (1989) afirma que três iterações são suficientes e se não convergir em cinco iterações a estrutura pode tornar-se instável pela mudança de geometria.

Para uma barra de pórtico plano considerada articulada em ambas as extremidades, com seus esforços e deformações como mostrados na figura 3.1, o esforço horizontal DF5 necessário para equilibrar essa estrutura é determinado fazendo-se o equilíbrio de momentos em relação ao nó inferior



**Figura 3.1 - Barra de pórtico plano.**

$$DF5 = \frac{(V4 \cdot d)}{L} \quad (3.1)$$

Onde:

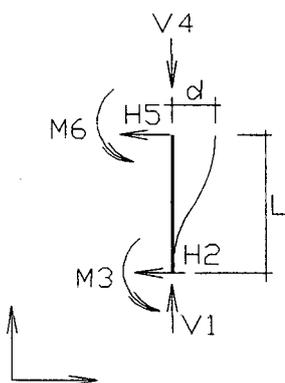
V4 é o esforço vertical na barra;

L é o comprimento da barra;

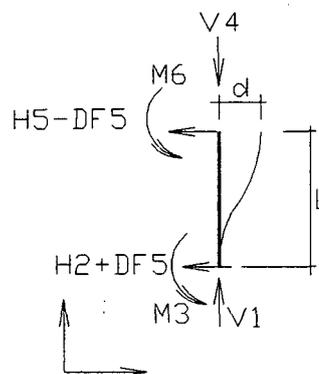
d é o deslocamento horizontal e;

DF5 é a força horizontal necessária para equilibrar a barra submetida a V4 e a um deslocamento horizontal d.

Para simular o efeito de segunda ordem, aplica-se DF5 nas extremidades da barra, com sinal contrário àquele encontrado na figura 3.1. A figura 3.3 mostra como estes esforços devem ser adicionados aos esforços já existentes.



**Figura 3.2** - Barra vertical de pórtico plano com esforços e deslocamentos horizontais.



**Figura 3.3** - Barra vertical de pórtico plano, com esforços e deslocamentos horizontais, considerando o esforço horizontal adicional pelo Método P- $\Delta$ .

A forma de implementação se dá apenas para as barras verticais dos pórticos, uma vez que para edifícios de múltiplos andares modelados por pórticos planos, o esforço axial ocorre principalmente nas barras verticais. Os esforços axiais nas barras horizontais são usualmente inexpressivos.

Como a implementação se dá apenas nas barras verticais, o ângulo que a barra tem com a horizontal vai definir se esta barra vai ou não ser incluída para este tipo de análise. Todas as barras que possuem o ângulo muito próximo de noventa graus com a horizontal serão incluídas. Adotou-se o intervalo de 89.999944 até 90.000056, ou seja, uma variação de  $90 \pm 0,000056$  graus.

Como os esforços DF5 são sempre horizontais, eles podem ser adicionados diretamente ao vetor { F } global, das cargas externas aplicadas.

### 3.2 - PROCESSO P-Δ GENÉRICO

O Método P-Δ genérico, onde são consideradas as ações internas das barras de forma simples, através de um processo iterativo similar ao supra exposto, modifica sucessivamente os resultados da análise linear (de primeira ordem), usando forças fictícias perpendiculares ao eixo principal da barra, determinadas a partir dos deslocamentos e deformações de primeira ordem.

Este segundo método P-Δ implementado é citado por autores como GAIOTTI (1989) e POCESKI (1986), e coincide com o método anterior em muitos casos práticos.

*Aplicado agora a todas as barras do pórtico plano*, o método consiste em determinar um esforço fictício adicional perpendicular ao eixo principal da barra, que produza a mesma deformação encontrada quando feita a análise não linear. Este é um processo iterativo que deve convergir em, no máximo, cinco (5) iterações.

Seja uma barra de pórtico plano, com seus esforços e deformações como mostrados na figura 3.4.

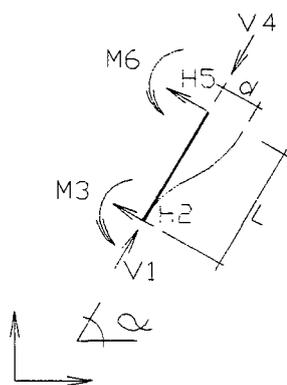
Considera-se a barra da estrutura no espaço plano e, determinando o momento de segunda ordem em relação ao nó inferior, teremos:

$$DF5 = \frac{(V4.d)}{L} \quad (3.2)$$

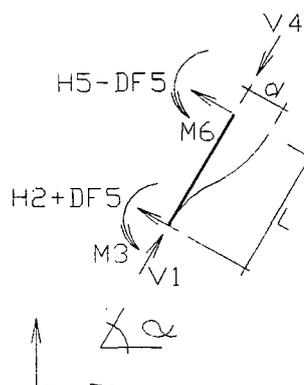
A carga DF5 tem o mesmo significado da equação 3.1, devendo ser aplicada perpendicularmente à barra. Esses esforços podem ser incorporados aos esforços de imobilização dos nós devido aos carregamentos aplicados nas barras.

De uma maneira geral, as duas variações do método podem ser diferenciadas apenas pelo fato de que o método P- $\Delta$  é aplicável às barras verticais de um pórtico plano e o método P- $\Delta$  genérico é aplicável a todas as barras do pórtico plano, mesmo estando na posição horizontal ou inclinada.

A implementação se dá em todas as barras do pórtico, independentemente do ângulo que a barra faça com o sistema de eixos utilizado.



**Figura 3.4** - Barra genérica de pórtico plano com esforços e deformações perpendiculares ao eixo.



**Figura 3.5** - Barra genérica de pórtico plano com esforços e deformações perpendiculares ao eixo, considerando o esforço adicional pelo Método P- $\Delta$ .

### 3.3 - ESCOLHA DE UM VALOR DE CONVERGÊNCIA

Todo processo iterativo necessita de um teste de convergência para indicar que o mesmo atingiu uma determinada precisão, podendo então ser encerrado. No presente trabalho adotou-se como critério de convergência que a diferença entre todos os deslocamentos de duas iterações consecutivas deva possuir variação menor que 1,00 % (um por cento). Este valor foi arbitrado inicialmente e será reavaliado posteriormente.

MACGREGOR citado por SILVA (1988) afirma que este valor pode ser de 5,00 % e ainda apresentar resultados satisfatórios.

A convergência é dada pela equação 3.3:

$$dif = \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{\delta_{i+1}} \quad (3.3)$$

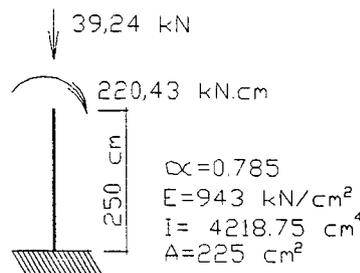
Onde:

$dif$  = valor relativo do deslocamento;

$\delta_{i+1}$  = valor do deslocamento da iteração  $i+1$  ;

$\delta_i$  = valor do deslocamento da iteração  $i$ .

Tendo o valor de 1,00 % para aceitar a convergência dos métodos, como apresentado por SILVA (1988), fez-se uma verificação através de um exemplo simples, de um pilar engastado na base e com a extremidade superior livre, como mostra a figura 3.6.



**Figura 3.6** - Exemplo para a determinação do valor limite de convergência do Método P-Δ e P-Δgenérico. Pilar vertical engastado.

Este exemplo representa adequadamente o universo dos pórticos flexíveis. É um pilar em madeira, para uma edificação, e foi apresentado inicialmente por LORIGGIO (1995).

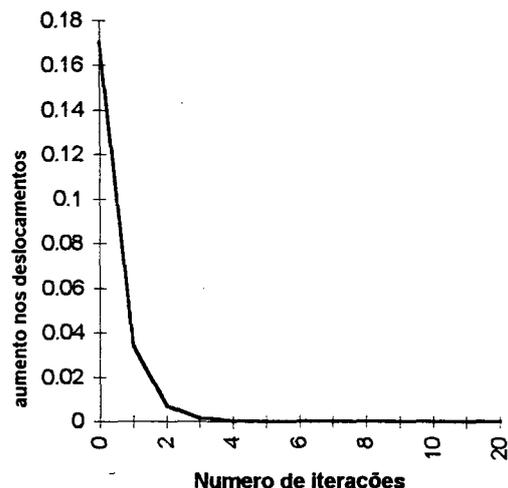
O parâmetro de instabilidade  $\alpha$  é de 0,785 para este pilar, o que nos indica que será necessária a análise de segunda ordem, uma vez que é um valor maior que 0,5, segundo SILVA (1988), PITTA (1997) e FRANCO (1993).

Os gráficos *deslocamentos X número de iterações* e *aumento nos deslocamentos X número de iterações* das figuras 3.7 e 3.8 são obtidos da Tabela 3.1.

Para este exemplo, os valores apresentados pelas duas variações do método P- $\Delta$  são idênticos, uma vez só existe uma barra na posição vertical e que para o método P- $\Delta$  são consideradas apenas as barras verticais e para o método P- $\Delta$  genérico todas as barras são consideradas.

| Número de iterações | deslocamento no topo (cm) | diferença (%) |
|---------------------|---------------------------|---------------|
| 0                   | 1.731506                  |               |
| 1                   | 2.08732                   | 17.046452     |
| 2                   | 2.160435                  | 3.384272      |
| 3                   | 2.17546                   | 0.690659      |
| 4                   | 2.178547                  | 0.141700      |
| 5                   | 2.179182                  | 0.029139      |
| 6                   | 2.179312                  | 0.005965      |
| 7                   | 2.179339                  | 0.001238      |
| 8                   | 2.179344                  | 0.000229      |
| 9                   | 2.179346                  | 0.000092      |
| 10                  | 2.179346                  | 0             |
| 11                  | 2.179346                  | 0             |
| 20                  | 2.179346                  | 0             |
| 50                  | 2.179346                  |               |

**Tabela 3.1** - Deslocamentos no topo, aumento dos deslocamentos com o número de iterações.



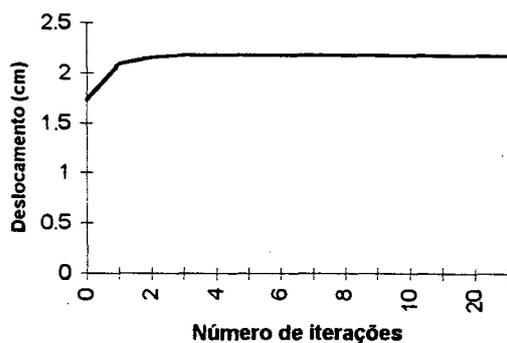
**Figura 3.7** - Gráfico *aumento dos deslocamentos x número de iterações*,

Analisando a Tabela 3.1, observa-se que o valor de 1,00 %, para considerar que os métodos convergiram não é difícil de atingir. Deste modo, confirmou-se o exposto por SILVA (1988).

Pelos gráficos das figuras 3.7 e 3.8 observa-se que, com três iterações, os deslocamentos atingiram praticamente seu valor máximo.

Os deslocamentos no topo deste pilar possuem maior amplitude. Por este motivo foram escolhidos para esta análise.

O valor de 1% citado será utilizado doravante, uma vez que ficou confirmado que a convergência é rápida, conforme já descrito por SILVA (1988).



**Figura 3.8** - Gráfico *deslocamento horizontal x número de iterações*,

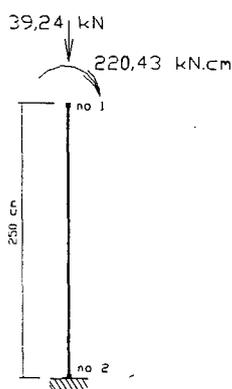
### 3.4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Uma série de exemplos é apresentada e comentada a seguir, para verificar suas aplicações e comparações entre as variações P-Δ e P-Δgenérico.

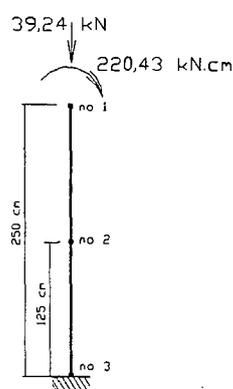
As próximas figuras apresentam o modelamento de pórticos planos compostos por barras. As tabelas seguintes trazem alguns dos dados da análise linear e não linear de cada um dos exemplos, para comparações.

#### 3.4.1 - PILAR COM MÚLTIPLOS NÓS INTERMEDIÁRIOS

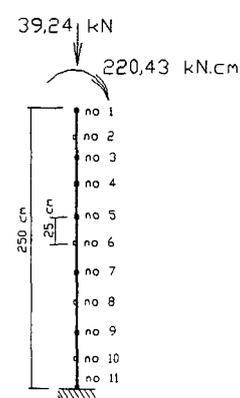
Estes exemplos vão mostrar a influência da disposição dos nós nas barras nos resultados da análise não-linear geométrica pelo processo P-Δ. São apresentados pilares com mesma altura total, mesmo carregamento aplicado e mesma condição de apoio. A variante é a quantidade de nós intermediários. O primeiro dos exemplos é modelado com dois nós, o segundo com três nós e o terceiro com onze nós, conforme mostram as Figuras 3.9 a 3.11.



**Figura 3.9** - Pilar modelado com dois nós.



**Figura 3.10** - Pilar modelado com três nós.



**Figura 3.11** - Pilar modelado com onze nós.

Onde.:

O módulo de elasticidade é igual a 943 kN/cm<sup>2</sup>

A inércia é igual a 4218,75 cm<sup>4</sup>

A área da seção transversal é de 225,00 cm<sup>2</sup>

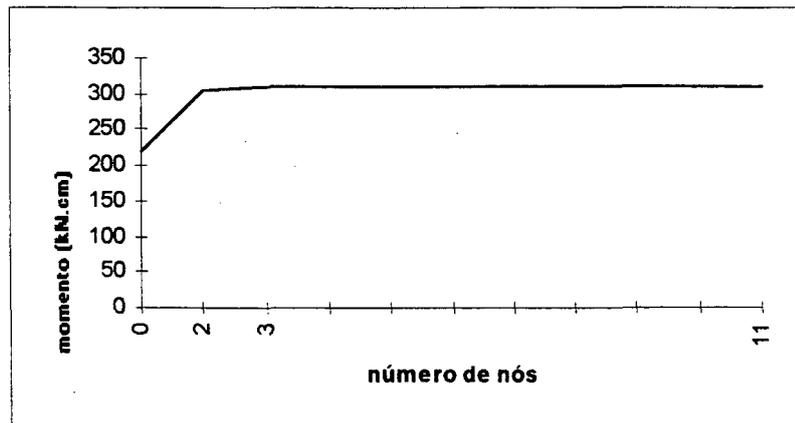
O parâmetro de instabilidade  $\alpha$  é igual a 0,785

|        | desloc. hor. nó 1 (cm) |          | momento no engaste (kn.cm) |          | iterações |
|--------|------------------------|----------|----------------------------|----------|-----------|
|        | linear                 | p-Δ      | linear                     | p-Δ      |           |
| 2 nós  | 1,73151                | 2,17546  | 220,4299                   | 305,2055 | 3         |
| 3 nós  | 1,731511               | 2,284110 | 220,4300                   | 309,8362 | 4         |
| 11 nós | 1,731511               | 2,320885 | 220,4300                   | 311,2305 | 4         |

**Tabela 3.2** - Dados da análise linear e não linear pelo método P-Δ do exemplo das figuras 3.9, 3.10 e 3.11. - Pilares modelados com vários nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão.

Os exemplos das figuras 3.9, 3.10 e 3.11 são praticamente iguais, apenas variando-se o número de nós na modelagem, permanecendo a altura total do pilar e variando a quantidade e o tamanho das barras. O primeiro possui duas barras, o segundo, três barras e o terceiro, dez barras.

A Figura 3.12 traz a evolução do momento no engaste, com o número de nós utilizado na modelagem do pilar em questão.



**Figura 3.12** - Evolução do momento no engaste com o número de nós.

Os resultados das análises não lineares, pelas duas variações do método são iguais, pois as barras são todas verticais.

Percebe-se que, com o aumento da quantidade de barras e a diminuição de seus comprimentos, a análise não linear geométrica aproximada tende para valores maiores.

Com o aumento do número de barras, de uma para duas, tivemos um aumento no número de iterações de três para quatro, e quando aumentadas as barras, de duas para dez, o número de iterações permaneceu em quatro.

A estrutura apresentada é, portanto, bastante flexível, pois os valores dos momentos são 220,4300 kN.cm na análise linear, nos três casos, 309,8362 kN.cm para o segundo caso e 311,2305 kN.cm na análise do terceiro caso.

O aumento é de 27,9 % no primeiro caso e 29,2 % no segundo caso.

É possível relacionar o comprimento de flambagem  $\lambda$  com os efeitos de segunda ordem em pilares. O comprimento de flambagem de um pilar é dado pelas equações 3.4 e 3.5.

$$\lambda = k \frac{l}{r} \quad (3.4)$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (3.5)$$

Onde:

$\lambda$  = comprimento de flambagem

$k$  = coeficiente de flambagem (para o exemplo anterior é igual a 2)

$L$  = comprimento da barra

$r$  = rigidez

$I$  = módulo de inércia

$A$  = área da seção transversal

Com o aumento do comprimento de flambagem existe a tendência de aumentar os deslocamentos e momentos no engastamento. Por outro lado, pode-se concluir que barras com pequenos  $\lambda$  serão menos sensíveis ao modelamento com maior número de nós, uma vez que serão mais rígidos e terão menor efeito de segunda ordem. Entretanto  $\lambda$  não é o único parâmetro de influência.

### 3.4.2 - PILAR COM MÚLTIPLOS NÓS INTERMEDIÁRIOS E CARGAS DE TRAÇÃO

Estes exemplos tem por objetivo apresentar uma situação em que os valores dos esforços normais nas barras são de tração. Os pilares são os mesmos apresentados anteriormente, apenas com a carga concentrada no topo de baixo para cima.

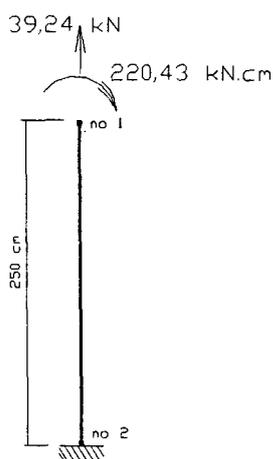
Onde:

O módulo de elasticidade é igual a  $943 \text{ kN/cm}^2$

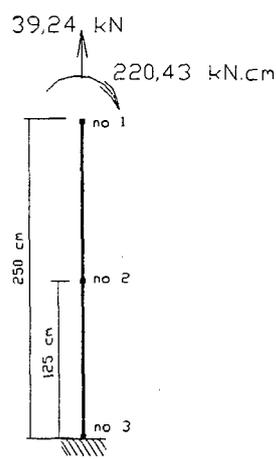
A inércia é igual a  $4218,75 \text{ cm}^4$

A área da seção transversal é de  $225,00 \text{ cm}^2$

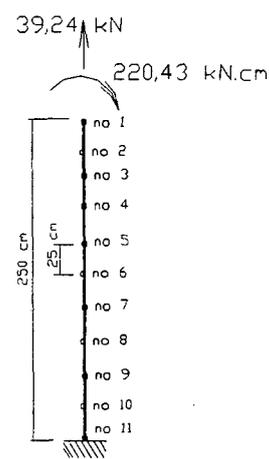
O parâmetro de instabilidade  $\alpha$  é igual a  $0,785$



**Figura 3.13** - Pilar com dois nós, momento aplicado na extremidade, carga de tração.



**Figura 3.14** - Pilar com três nós, momento aplicado na extremidade, carga de tração.



**Figura 3.15** - Pilar com onze nós, momento aplicado na extremidade, carga de tração.

|        | desloc. hor. nó 1 (cm) |          | momento no engaste (kn.cm) |          | iterações |
|--------|------------------------|----------|----------------------------|----------|-----------|
|        | linear                 | p-Δ      | linear                     | p-Δ      |           |
| 2 nós  | 1,731512               | 1,375702 | 220,4302                   | 152,4857 | 1         |
| 3 nós  | 1,731512               | 1,308988 | 220,4302                   | 152,4857 | 1         |
| 11 nós | 1,731511               | 1,287605 | 220,4300                   | 152,4885 | 1         |

**Tabela 3.3** - Dados da análise linear e não linear do exemplo das figuras 3.13, 3.14 e 3.15 - Pilares modelados com vários nós, com momento aplicado na extremidade e carga de tração.

As Figuras 3.13 a 3.15 trazem exemplos similares aos das Figuras 3.9, 3.10 e 3.11, porém com a carga normal de tração.

O efeito agora, é o inverso do anteriormente descrito, onde o momento no engastamento diminui, bem como as deformações na extremidade livre, quando considerada a análise não linear geométrica. Da mesma forma que anteriormente explicado, os resultados do método P-Δ e P-Δgenérico são idênticos pois as barras são todas verticais.

O efeito não linear geométrico é restituidor, pois as cargas são de tração. Também para cargas de tração, o modelamento com maior número de barras diferiu, porém, desta vez, em menor intensidade.

Os valores dos momentos no engaste são: 220,4302 kN.cm para a análise linear, 152,4857 kN.cm para a análise não linear com modelamento com uma barra, 152,4857 kN.cm com modelamento com duas barras e 152,4885 kN.cm com modelamento com dez barras.

A diferença entre o momento da análise linear com da análise não linear é da ordem de -30,8 %.

O mesmo ocorreu com os deslocamentos. O número de iterações não sofreu variações com o aumento do número de barras, permanecendo em um.

### 3.4.3 - VIGA HORIZONTAL BI-ENGASTADA

O objetivo deste exemplo é apresentar uma situação que não consegue ser analisada pelo processo P-Δ, uma vez que não há esforço normal às barras de primeira ordem.

Onde.: A área é de 0,01 m<sup>2</sup>

A inércia é de 0,0001 m<sup>4</sup>

O módulo de elasticidade é de 1000000,00 tf/m<sup>2</sup>

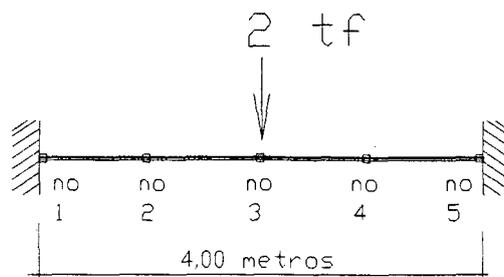


Figura 3.16 - Viga horizontal bi-engastada.

---

---

|                              | Esf. normal centro<br>( tf ) | Esf. cortante nó1<br>( tf ) | Mom. fletor centro<br>( tf.m ) |
|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| Análise Linear               | 0,00                         | 1,00                        | 1,00                           |
| Análise P- $\Delta$          | 0,00                         | 1,00                        | 1,00                           |
| Análise P- $\Delta$ genérico | 0,00                         | 1,00                        | 1,00                           |

---

**Tabela 3.4** - Dados da análise linear e não linear pelo método P- $\Delta$  do exemplo da figura 3.16 - Estrutura horizontal com extremidades engastadas.

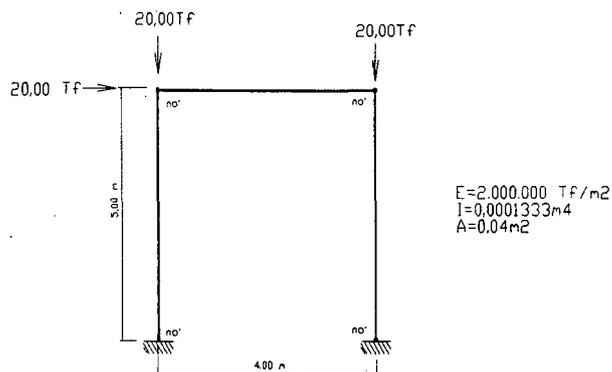
Para o exemplo da figura 3.6, temos que o método P- $\Delta$  e P- $\Delta$  genérico não são aplicáveis, pois este exemplo não possui esforço normal de primeira ordem na barra. Percebe-se pela análise aos dados da Tabela 3.4, que os resultados das análises linear e não linear geométrica são idênticos e que o esforço normal é nulo.

Esta barra pode apresentar esforços de tração nas barras, desde que a deformação vertical seja suficientemente grande. Este tipo de efeito não é contemplado pelo modelo em estudo e é conhecido como efeito de membrana.

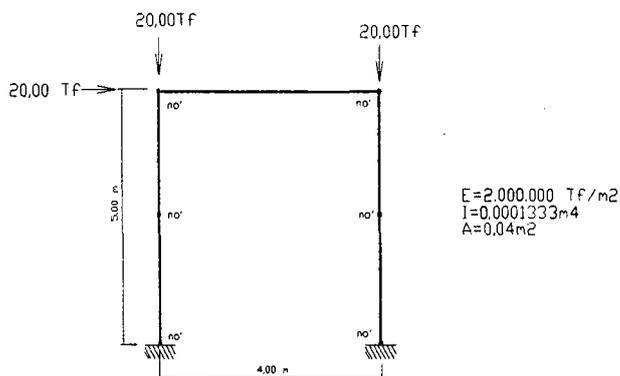
#### 3.4.4 - PÓRTICO PARA EDIFÍCIO BAIXO (primeira parte)

O objetivo deste exemplo é de, principalmente, apresentar os diferentes resultados das duas variações dos métodos P- $\Delta$ . O pórtico plano proposto é composto de dois pilares engastados na base e uma viga superior. Possui carregamento horizontal e vertical.

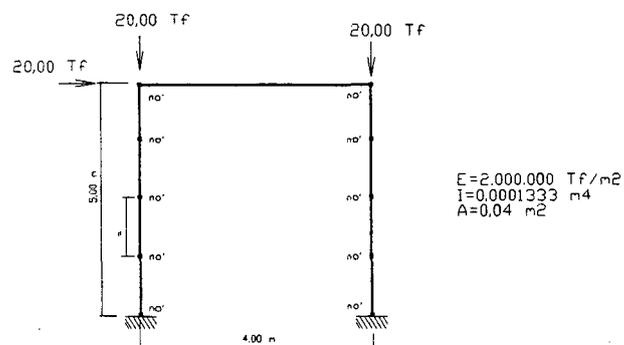
Este pórtico possui a mesma ordem de grandeza na geometria e no carregamento de um pórtico de edifício, submetido ao carregamento de empuxo de terra, como mostram as Figuras 3.17 a 3.20. O coeficiente de instabilidade  $\alpha$  é igual a 1,369.



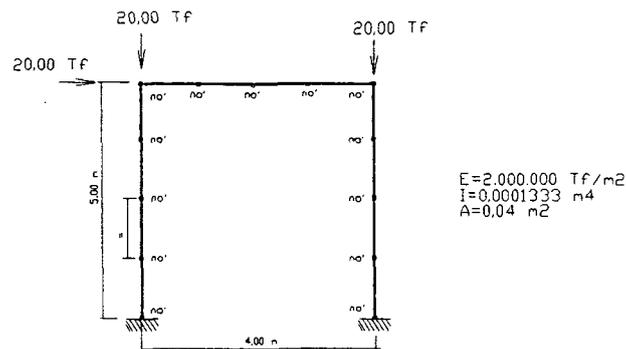
**Figura 3.17** - Pórtico plano, modelado com quatro nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 3.18** - Pórtico plano, modelado com seis nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 3.19** - Pórtico plano, modelado com dez nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 3.20** - Pórtico plano, modelado com treze nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.

|           | Análise linear | Análise P-Δ | Nº it. | Análise P-Δgen. | Nº iterações |
|-----------|----------------|-------------|--------|-----------------|--------------|
| c/ 4 nós  | 27,9682        | 35,40393    | 3      | 35,40394        | 3            |
| c/ 6 nós  | 27,96836       | 35,37696    | 3      | 35,37698        | 3            |
| c/ 10 nós | 27,96844       | 35,77873    | 3      | 35,77875        | 3            |
| c/ 13 nós | 27,97069       | 35,78565    | 3      | 35,37696        | 4            |

**Tabela 3.5** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das Figuras 3.17 a 3.20 - Momentos no engaste do lado esquerdo do pórtico (em tf.m).

|           | Análise linear | Análise P-Δ | Análise P-Δgen. |
|-----------|----------------|-------------|-----------------|
| c/ 4 nós  | 0,52963        | 0,67042     | 0,67042         |
| c/ 6 nós  | 0,52967        | 0,67368     | 0,67368         |
| c/ 10 nós | 0,52964        | 0,68838     | 0,68838         |
| c/ 13 nós | 0,52973        | 0,68851     | 0,68850         |

**Tabela 3.6** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 3.17 à 3.20 - Deslocamentos no topo, lado esquerdo do pórtico (em metros).

Os resultados das duas variações do método P- $\Delta$  possuem resultados muito parecidos, uma vez que os esforços normais das barras horizontais são muito pequenos.

Com estes resultados, confirma-se que, para um maior número de nós no modelamento das barras verticais, temos resultados muito parecidos para a análise não linear geométrica pelos métodos P- $\Delta$  e P- $\Delta$ genérico.

Para os momentos de segunda ordem acima expostos, a diferença entre este e o momento linear é da ordem de 26.49 %.

Observa-se uma diferença entre os resultados da análise não linear com o modelamento com maior número de nós nas barras verticais. Valores da ordem de 35.37696 á 35.77873, com diferença de 1,13%, que para este caso é pouco expressivo.

O número de iterações permaneceu em três, para os exemplos supra, com exceção do pórtico modelado com 13 nós e análise por P- $\Delta$ genérico, que foi de quatro.

Para as variações P- $\Delta$  e P- $\Delta$ genérico, o modelamento do pórtico com maior número de nós nas barras horizontais não influi significativamente nos resultados finais

### **3.4.5 - PÓRTICO PARA EDIFÍCIO BAIXO (segunda parte)**

Ligeiramente diferente do exemplo anterior, este pórtico também possui a mesma ordem de grandeza na geometria e no carregamento de um pórtico de edifício, apenas que agora submetido ao carregamento de vento, como mostram as Figuras 3.21 a 3.24

O coeficiente de instabilidade  $\alpha$  é igual a 1,369.

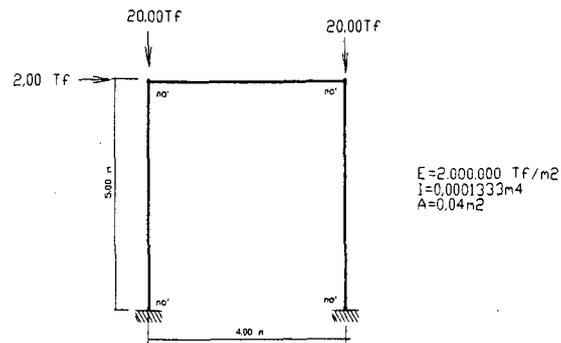


Figura 3.21- Pórtico plano, modelado com quatro nós, com cargas horizontais e verticais

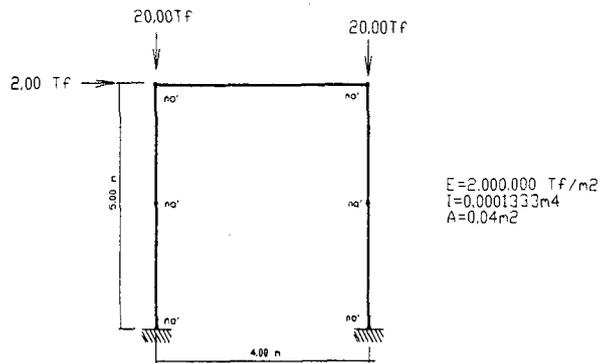


Figura 3.22 - Pórtico plano, modelado com seis nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.

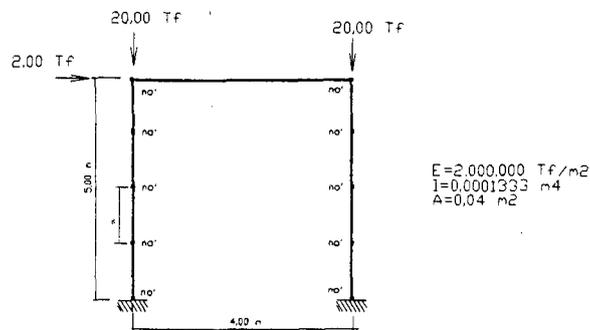
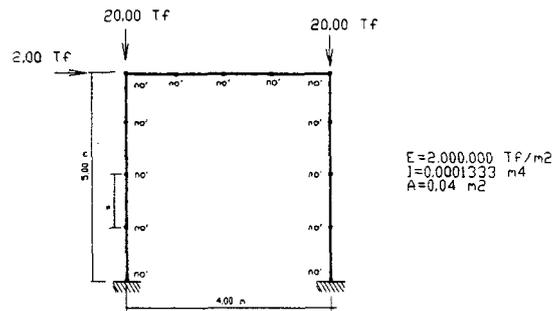


Figura 3.23 - Pórtico plano, modelado com dez nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 3.24** - Pórtico plano, modelado com treze nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.

|           | Análise linear | Análise P-Δ | Nº it. | Análise P-Δgen. | Nº iterações |
|-----------|----------------|-------------|--------|-----------------|--------------|
| c/ 4 nós  | 2,796819       | 3,540685    | 3      | 3,540685        | 3            |
| c/ 6 nós  | 2,797036       | 3,50717     | 3      | 3,50717         | 3            |
| c/ 10 nós | 2,796827       | 3,51507     | 3      | 3,51507         | 3            |
| c/ 13 nós | 2,797299       | 3,51579     | 3      | 3,51618         | 3            |

**Tabela 3.7** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das Figuras 3.21 a 3.24 - Momentos no engaste do lado esquerdo do pórtico (em tf.m).

|           | Análise linear | Análise P-Δ | Análise P-Δgen. |
|-----------|----------------|-------------|-----------------|
| c/ 4 nós  | 0,052963       | 0,067048    | 0,067048        |
| c/ 6 nós  | 0,052967       | 0,067369    | 0,067369        |
| c/ 10 nós | 0,052964       | 0,068834    | 0,068834        |
| c/ 13 nós | 0,052973       | 0,068848    | 0,068863        |

**Tabela 3.8** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 3.21 à 3.24 - Deslocamentos no topo, lado esquerdo do pórtico (em metros).

Da mesma forma que no exemplo anterior, tem-se que para um maior número de nós no modelamento das barras verticais, tem-se resultados muito parecidos para a análise não linear geométrica pelos métodos P- $\Delta$  e P- $\Delta$ genérico. O mesmo ocorreu com a adição de nós na barra horizontal.

Para os momentos de segunda ordem acima expostos, a diferença entre este e o momento linear é da ordem de 20,43% contra 26,49 % do exemplo anterior.

Percebe-se uma pequena diferença entre os resultados das duas variações da análise não linear com o modelamento com 13 nós. Valores da ordem de 3,51579 á 3,51618. Diferença de 0,01%, o que é pouco expressivo.

O número de iterações permaneceu em três, para todos esses exemplos.

O coeficiente de instabilidade utilizado conseguiu identificar com clareza duas situações em que a análise não linear foi necessária, mesmo que os deslocamentos no topo do pórtico tenha sido muito diferente nos dois grupos de exemplos.

Nota-se que, como apresentado no capítulo anterior, o coeficiente de instabilidade  $\alpha$  independe das forças horizontais.

## CAPÍTULO IV

# ANÁLISE NÃO LINEAR COM A MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA

Problemas envolvendo a não linearidade geométrica devem levar em conta os deslocamentos da estrutura. Alguns dos problemas não são necessariamente diferentes do problema linear somente porque grandes deslocamentos ocorrem, mas porque as forças axiais que ali aparecem, na presença de deformações laterais exercem significativa influência na rigidez. CHAJES (1987)

As equações de equilíbrio precisariam ser formuladas para a configuração deformada da estrutura. Entretanto existem formulações simplificadas que trabalham com a estrutura indeformada, modificando as relações entre esforços aplicados e deslocamentos.

Isto significa que a relação linear  $[K]$  da equação 4.1, entre as forças aplicadas e os deslocamentos não representam bem a estrutura pois existem termos não lineares relacionando forças aplicadas  $[F]$  e deslocamentos  $[D]$ .

$$(F) = [K].(D) \quad (4.1)$$

Uma correção na equação acima é necessária, ficando a mesma assim:

$$(F) = [K + K_G].(D) \quad (4.2)$$

Onde  $[K]$  é a matriz de rigidez calculada para a geometria dos elementos no instante em que não há deformação, ou seja, antes da aplicação das cargas e  $[K_G]$  é a matriz de rigidez

geométrica que depende não apenas da geometria dos elementos mas também das forças internas iniciais encontradas a partir da análise linear.

Este é um método iterativo aproximado, e que leva em consideração os efeitos não lineares geométricos mais importantes.

Para definir a matriz  $K_g$  da equação 4.2, usa-se o procedimento descrito pelo CEB (1977) que, partindo do método dos elementos finitos chegou à matriz  $[K_g]$ , que corrige a Equação 4.1. Neste caso, a matriz chama-se geométrica secante, devido ao método de implementação.

#### **4.1 - DEFINIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

CEB (1977) e PRZEMIENIECKI (1968) determinam através do método dos elementos finitos, a matriz de rigidez  $[K_g]$ , partindo da energia de deformação, que é apresentada detalhada no item 4.1.1.

O método dos deslocamentos com resolução por matrizes não foi adequado para a definição da matriz de rigidez geométrica, uma vez que seu significado físico é de difícil entendimento, portanto foi adotado o método dos elementos finitos com formulação em deslocamentos, que forneceu a resolução do problema com maior facilidade.

##### **4.1.1 - MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA**

A variação dos deslocamentos ao longo de uma barra de pórtico plano pode ser dada pela equação 4.3.

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 6(\xi-\xi^2)\eta & (-1+4\xi-3\xi^2)l\eta & \xi & 6(-\xi+\xi^2)\eta & (2\xi-3\xi^2)l\eta \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & (\xi-2\xi^2+\xi^3)l & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & (-\xi^2+\xi^3)l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

(4.3)

Onde  $\eta = \frac{y}{l}$ ,  $\xi = \frac{x}{l}$  (coordenada normalizada) e  $u_1, \dots, u_6$  são os deslocamentos dos nós da barra de pórtico plano, como mostra a figura 4.1.

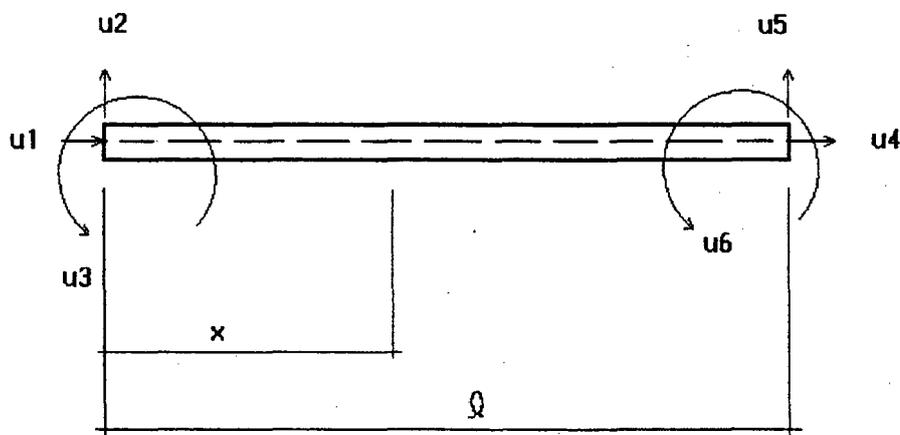


Figura 4.1 - Direções positivas dos deslocamentos em uma viga.

Define-se  $u_x = u_0 - \theta_y$ , onde  $\theta = \frac{du_y}{dx}$  e  $u_0 = u_x$ , para  $y = 0$ .

Partindo da equação 4.3 pode-se facilmente obter as equações 4.4, 4.5 e 4.6.

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{l}(-u_1 + u_4) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{1}{l} \left[ 6(-\xi + \xi^2)u_2 + (1 - 4\xi + 3\xi^2)lu_3 + 6(\xi - \xi^2)u_5 + (-2\xi + 3\xi^2)lu_6 \right] \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} \left[ 6(-1 + 2\xi)u_2 + 2(-2 + 3\xi)lu_3 + 6(1 - 2\xi)u_5 + 2(-1 + 3\xi)lu_6 \right] \quad (4.6)$$

Calculando a energia de deformação  $U_i$ , considerando nulas as deformações e tensões de cisalhamento, sendo consideradas apenas as tensões  $\mathcal{E}_{xx}$ , que são obtidas a partir da equação 4.7, onde foram consideradas pequenas as deformações  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ :

A Equação das tensões  $\mathcal{E}_{xx}$  completa está apresentada na equação 4.7

$$\mathcal{E}_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \quad (4.7)$$

Desprezando-se o termo  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2$ , para considerar grandes deslocamentos, grandes rotações e deformações específicas axiais, obtêm-se a equação 4.8.

$$\mathcal{E}_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \quad (4.8)$$

A energia de deformação  $U$  é calculada pela equação 4.9.

$$U_i = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_{xx}^2 dV \quad (4.9)$$

Que interagindo com a equação 4.8, vai produzir as equações 4.10 e 4.11.

$$U_i = \frac{E}{2} \int_V \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dV \quad (4.10)$$

$$U_i = \frac{E}{2} \int_{x=0}^l \int_A \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 y^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^4 - 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} y \\ - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 y + \frac{\partial u_0}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \end{array} \right] dx dA \quad (4.11)$$

O termo de quarta ordem da equação 4.11 pode ser considerado nulo, como apresentado na equação 4.12, haja visto possuir uma grandeza diminuta.

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^4 \cong 0 \quad (4.12)$$

Fazendo a integração da equação 4.11, através da área A da seção transversal tem-se a equação 4.13.

$$U_i = \frac{EA}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^l \frac{\partial u_0}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.13)$$

Onde  $I$  é o momento de inércia da seção transversal.

Por substituição das equações 4.4, 4.5 e 4.6 na equação 4.13, tem-se a equação 4.14.

$$\begin{aligned}
 U_i = & \frac{EA}{2l} (u_1^2 - 2u_1u_4 + u_4^2) + \frac{2EI}{l^3} \left( 3u_2^2 + l^2u_3^2 + 3u_5^2 + l^2u_6^2 + 3lu_2u_3 - 6u_2u_5 + 3lu_2u_6 \right) + \\
 & + \frac{EA}{l^2} (u_4 - u_1) \left( \frac{3}{5}u_2^2 + \frac{1}{15}l^2u_3^2 + \frac{3}{5}u_5^2 + \frac{1}{15}l^2u_6^2 \right) + \\
 & + \frac{EA}{l^2} (u_4 - u_1) \left( \frac{1}{10}lu_2u_3 - \frac{6}{5}u_2u_5 + \frac{1}{10}lu_2u_6 - \frac{1}{10}lu_3u_5 - \frac{1}{30}l^2u_3u_6 - \frac{1}{10}lu_5u_6 \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Para o caso de barras de pórtico plano, pode-se introduzir a equação 4.15.

$$F \cong \frac{EA}{l} (u_4 - u_1) = \text{constante}
 \tag{4.15}$$

Aplicando o Teorema de Castigliano (parte 1), à expressão da energia de deformação, equação 4.14, tem-se a equação 4.16, que é a equação matricial de equilíbrio de forças no elemento de barra de pórtico plano.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \frac{F}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & \frac{2}{15}l^2 & 0 & -\frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{2}{15}l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}
 \tag{4.16}$$

Que pode ser escrita simbolicamente como a equação 4.17

$$(F) = [K + K_g] \cdot (D) \quad (4.17)$$

Onde:

[K] é a matriz de rigidez da barra de pórtico plano;

[K<sub>g</sub>] é a matriz de rigidez geométrica secante da barra de pórtico plano;

( D ) são os deslocamentos nas extremidade da barra e;

( F ) são as forças aplicadas na barra.

A parcela [K<sub>g</sub>] da Equação 4.17 é apresentada na Equação 4.18.

$$[K_g] = \frac{F}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & \frac{2}{15}l^2 & 0 & -\frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{2}{15}l^2 \end{bmatrix}$$

(4.18)

Esta será uma das matrizes que corrige a equação 4.1 possíveis de serem utilizadas, e objeto deste estudo.

#### 4.1.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA SIMPLIFICADA

Outro tipo de matriz pode ser obtida, com pequenas simplificações, conforme encontrado na bibliografia.

Na equação 4.5, PRZEMIENIECKI (1968) faz uma simplificação, fazendo com que a equação 4.19 seja aceita. Introduzindo-se esta equação na equação da energia de deformação e aplicando-se o Teorema de Castigliano, obtem-se uma nova equação matricial para o equilíbrio de forças na barra.

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \cong \frac{1}{l}(u_5 - u_2) \quad (4.19)$$

A simplificação proposta implica que seja considerada a rotação constante ao longo do eixo x da barra.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \frac{F}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

O que leva a uma nova matriz geométrica.

Passa-se a convencionar a matriz de rigidez geométrica como [Kg] e a partir da simplificação acima proposta, a matriz de rigidez geométrica simplificada como [Kgs], originando a Equação 4.21.

$$(F) = [K + K_{gs}](D) \quad (4.21)$$

A Equação 4.22 apresenta a matriz de rigidez geométrica simplificada para uma barra de pórtico plano.

$$[K_{gs}] = \frac{F}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

#### 4.2- ESCOLHA DE UM VALOR DE CONVERGÊNCIA

De forma similar ao exposto no capítulo anterior, este processo iterativo possui teste de convergência para indicar a situação na qual atinge-se uma determinada precisão e o processo encerra-se.

O encerramento do processo é dado quando a diferença, entre **todos** os deslocamentos de duas iterações consecutivas possua variação menor que 1,00 % (um por cento).

A convergência é dada pela equação 4.23:

$$dif = \frac{(\delta_{i+1} - \delta_i)}{\delta_i} \quad (4.23)$$

Onde:

dif = valor relativo do deslocamento;

$\delta_{i+1}$  = valor do deslocamento da iteração i+1 ;

$\delta_i$  = valor do deslocamento da iteração i.

### 4.3 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Uma série de exemplos são apresentados e comentados a seguir, para verificar suas aplicações e comparações entre a matriz de rigidez geométrica [Kg] e a matriz de rigidez geométrica simplificada [Kgs]. As próximas figuras apresentam o modelamento de pórticos planos compostos por barras. As tabelas que seguem trazem alguns dos dados lineares e não lineares de cada um dos exemplos, para comparações.

#### 4.3.1 - PILAR COM MÚLTIPLOS NÓS INTERMEDIÁRIOS

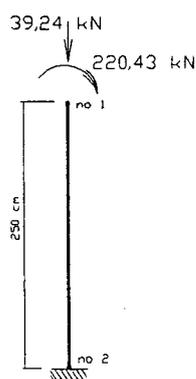
Os exemplos que seguem são os apresentados no capítulo anterior. Para maior clareza são apresentadas novamente suas figuras.

Obs.: O módulo de elasticidade é igual a 943 kN/cm<sup>2</sup>

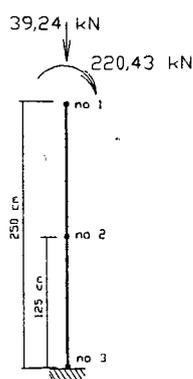
A inércia é igual a 4218,75 cm<sup>4</sup>

A área da seção transversal é de 225,00 cm<sup>2</sup>

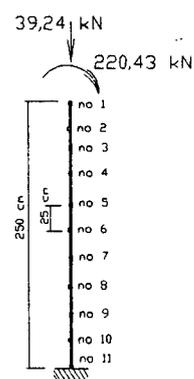
O parâmetro de instabilidade  $\alpha$  é igual a 0,785



**Figura 4.2** - Pilar modelado com dois nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão.



**Figura 4.3** - Pilar modelado com três nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão.



**Figura 4.4** - Pilar modelado com onze nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão.

|        | desloc. hor. nó 1 (cm) |          |          | momento no engaste (kN.cm) |          |          |           |
|--------|------------------------|----------|----------|----------------------------|----------|----------|-----------|
|        | linear                 | Kg       | Kgs      | linear                     | Kg       | Kgs      | iterações |
| 2 nós  | 1,73151                | 2,323334 | 2,179346 | 220,4299                   | 311,5974 | 305,9474 | 2         |
| 3 nós  | 1,73151                | 2,324826 | 2,285873 | 220,4301                   | 311,6566 | 310,1279 | 2         |
| 11 nós | 1,73143                | 2,324733 | 2,323123 | 220,4298                   | 311,6391 | 311,5942 | 2         |

**Tabela 4.1** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 4.2, 4.3 e 4.4 - Pilares modelados com vários nós, com momento aplicado na extremidade e carga de compressão.

Os exemplos das figuras 4.2, 4.3 e 4.4 são praticamente iguais, apenas com modelamento por um número maior de nós, permanecendo a altura total do pilar e variando a quantidade e o tamanho das barras, conforme descrito no capítulo anterior.

Tem-se, que, com o aumento da quantidade de barras e a diminuição de seus comprimentos, a análise com Kgs mostra valores variáveis que tendem para valores próximos de Kg com maior número de barras, enquanto que para a análise com Kg a variação entre os valores obtidos não foi significativa.

Com o aumento do número de barras, de uma para duas, não obteve-se aumento no número de iterações, permanecendo em duas, e quando aumentadas as barras, de duas para dez, o número de iterações permaneceu em duas.

O valor dos resultados da análise com Kgs tende para os valores de Kg, com o aumento da quantidade de barras e diminuição de seus comprimentos.

Para a matriz Kgs, admitiu-se que as rotações  $\frac{\partial v}{\partial x}$  eram constantes ao longo da barra.

Discretizando-se a barra em diversas sub-barras, em cada sub-barra,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  será constante, ou seja, melhora-se a precisão da solução, captura-se melhor o comportamento.

Se comparados com os resultados do mesmo exemplo no capítulo anterior, percebe-se as mesmas características nas respostas obtidas para Kgs e P $\Delta$ genérico.

#### 4.3.2 - PILAR COM MÚLTIPLOS NÓS INTERMEDIÁRIOS E CARGAS DE TRAÇÃO

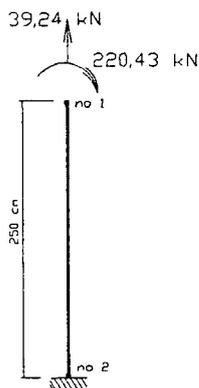
Os exemplos que seguem são os apresentados no capítulo anterior. Para maior clareza são apresentadas novamente suas figuras.

Obs.: O módulo de elasticidade é igual a 943 kN/cm<sup>2</sup>

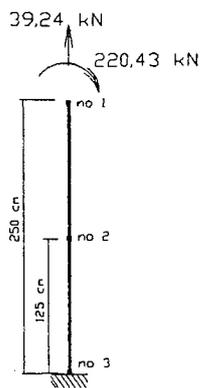
A inércia é igual a 4218,75 cm<sup>4</sup>

A área da seção transversal é de 225,00 cm<sup>2</sup>

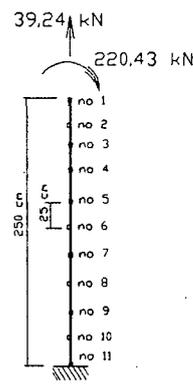
O parâmetro de instabilidade  $\alpha$  é igual a 0,785



**Figura 4.5** - Pilar com dois nós e carga de tração.



**Figura 4.6** - Pilar com três nós e carga de tração.



**Figura 4.7** - Pilar com onze nós e carga de tração.

|        | desloc. hor. nó 1 (cm) |          |          | momento no engaste (kN.cm) |          |          |           |
|--------|------------------------|----------|----------|----------------------------|----------|----------|-----------|
|        | linear                 | Kg       | Kgs      | linear                     | Kg       | Kgs      | iterações |
| 2 nós  | 1,731512               | 1,375358 | 1,436354 | 220,4302                   | 166,4611 | 164,0676 | 2         |
| 3 nós  | 1,731513               | 1,375917 | 1,390230 | 220,4303                   | 166,4391 | 165,8774 | 2         |
| 11 nós | 1,731434               | 1,375956 | 1,376466 | 220,4300                   | 166,4418 | 166,4148 | 2         |

**Tabela 4.2** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das figuras 4.5, 4.6 e 4.7 - Pilares modelados com vários nós, com momento aplicado na extremidade e carga de tração.

As Figuras 4.5, 4.6 e 4.7 trazem exemplos similares aos das Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, porém com a carga normal de tração.

O efeito agora, é o inverso do anteriormente descrito, onde o momento no engastamento diminui, bem como as deformações na extremidade livre, quando considerada a análise não linear geométrica.

O efeito não linear geométrico é restituidor, quando as cargas são de tração.

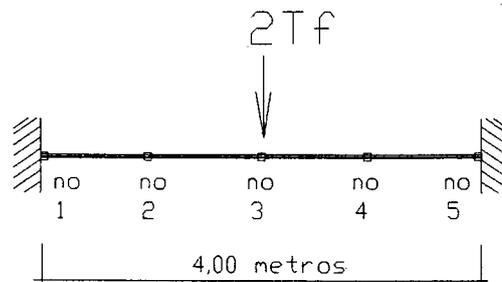
Também para cargas de tração, o modelamento com maior número de barras diferiu, porém, desta vez, em menor intensidade.

A diferença entre o momento da análise linear com da análise não linear é da ordem de -32,00 %.

O mesmo ocorreu com os deslocamentos. O número de iterações não sofreu variações com o aumento do número de barras.

### 4.3.3 - VIGA BI-ENGASTADA

Este exemplo figura de forma a mostrar que existe limitação para o método apresentado.



**Figura 4.8** - Viga horizontal bi-engastada.

Obs.:

A área é de  $0,01 \text{ m}^2$

A inércia é de  $0,0001 \text{ m}^4$

O módulo de elasticidade é de  $1000000,00 \text{ Tf/m}^2$

---



---

|                | Esf. normal centro<br>( Tf ) | Esf. cortante nó 1<br>( Tf ) | Mom. fletor centro<br>( tf.m ) |
|----------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| Análise Linear | 0,00                         | 1,00                         | 1,00                           |
| Análise Kg     | 0,00                         | 1,00                         | 1,00                           |
| Análise Kgs    | 0,00                         | 1,00                         | 1,00                           |

---

**Tabela 4.3** - Dados da análise linear e não linear do exemplo da figura 4.8 - Estrutura horizontal com extremidades engastadas.

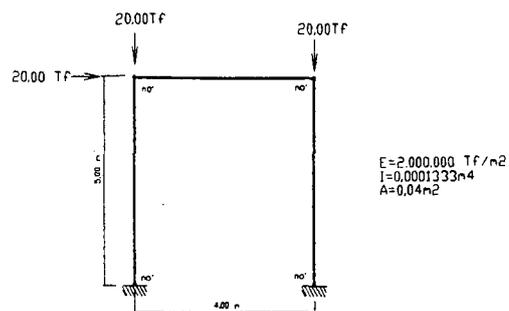
Como visto no capítulo anterior, não existe esforço normal, neste tipo de estrutura, tem-se que os métodos Kg e Kgs com as simplificações adotadas, não são aplicáveis. Percebe-se pela análise aos dados da tabela 4.3, que os resultados das análises linear e não linear geométrica são idênticos.

Este tipo de estrutura está sujeito a apenas momento fletor e esforço cortante, desprezando-se o efeito de segunda ordem (efeito de membrana).

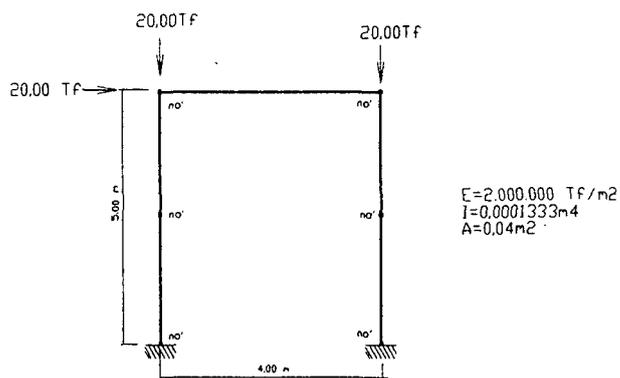
#### 4.3.4 - PÓRTICO PARA EDIFÍCIO BAIXO (primeira parte)

Também este exemplo é o mesmo daquele apresentado no capítulo anterior. É composto de dois pilares na vertical e uma viga horizontal. Todos os dados deste pórtico referem-se à ordem de grandeza de um edifício com carregamento horizontal devido ao empuxo de terra.

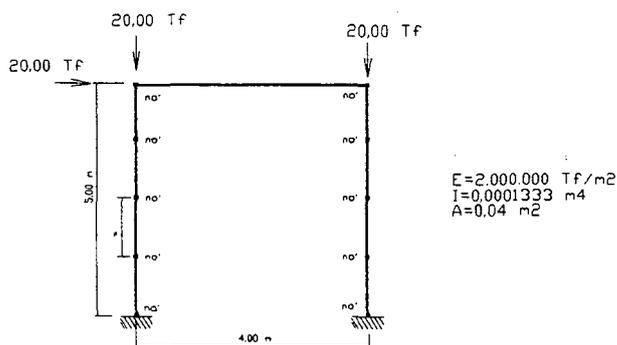
O coeficiente de instabilidade é 1,369.



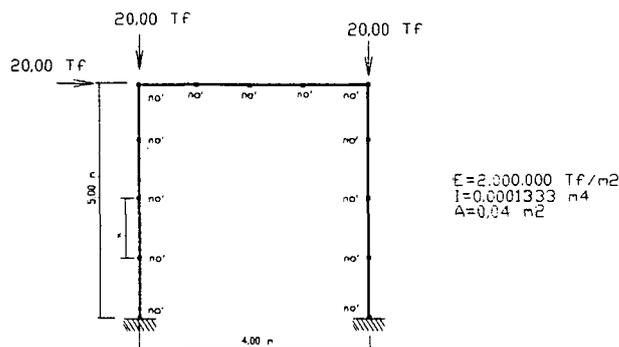
**Figura 4.9** - Pórtico plano, modelado com quatro nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 4.10** - Pórtico plano, modelado com seis nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 4.11** - Pórtico plano, modelado com dez nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 4.12** - Pórtico plano, modelado com treze nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.

|          | Análise linear | Análise Kg | Nº it. | Análise Kgs | Nº iterações |
|----------|----------------|------------|--------|-------------|--------------|
| c/ 4 nós | 27,9682        | 36,3376    | 3      | 35,47433    | 3            |
| c/ 6 nós | 27,97037       | 36,36026   | 3      | 35,54799    | 3            |
| c/ 10nós | 27,96828       | 36,37384   | 3      | 36,09389    | 3            |
| c/ 13nós | 27,97301       | 36,34898   | 4      | 36,10564    | 4            |

**Tabela 4.4** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das Figuras 4.9 a 4.12 - Momentos de engastamento do lado esquerdo do pórtico (em tf.m).

Com estes resultados, confirmamos então, que para um maior número de nós no modelamento das barras verticais, temos resultados diferentes para a análise não linear geométrica pelos métodos Kg e Kgs e que os resultados de Kgs tendem a valores próximos dos resultados de Kg.

Para os momentos de segunda ordem acima expostos, a análise com Kg e Kgs mostrou-se menos sensível ao aumento do número de nós, ou seja, com menor número de nós possui um resultado satisfatório.

O aumento do número de nós intermediários aumentou o número de iterações.

---

---

|          | Análise linear | Análise Kg | Análise Kgs |
|----------|----------------|------------|-------------|
| c/ 4 nós | 0,52963        | 0,6980     | 0,6717      |
| c/ 6 nós | 0,52967        | 0,6984     | 0,6751      |
| c/ 10nós | 0,52964        | 0,6987     | 0,6905      |
| c/ 13nós | 0,52973        | 0,6985     | 0,6917      |

---

---

**Tabela 4.5** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das Figuras 4.9 a 4.12 -  
Deslocamentos no topo do pórtico, lado esquerdo (em metros).

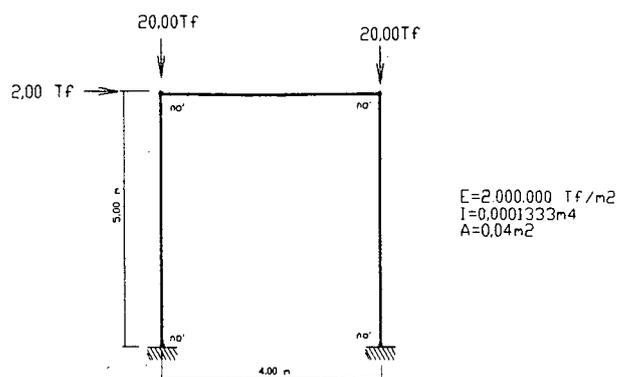
Conforme a tabela acima para o método Kg, o modelamento do pórtico com maior número de nós nas barras verticais pouco influi nos resultados dos deslocamentos horizontais finais.

Para o modelamento com Kgs, o maior número de nós intermediários melhorou o resultado da análise não linear.

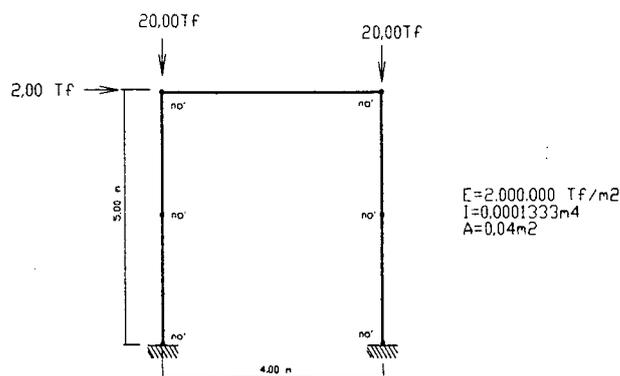
#### 4.3.5 - PÓRTICO PARA EDIFÍCIO BAIXO (segunda parte)

Pouco diferente do exemplo anterior, este pórtico possui ordem de grandeza de sua geometria e carregamento de um pórtico de edificio submetido ao carregamento de vento, como mostra as Figuras 4.13 a 4.16

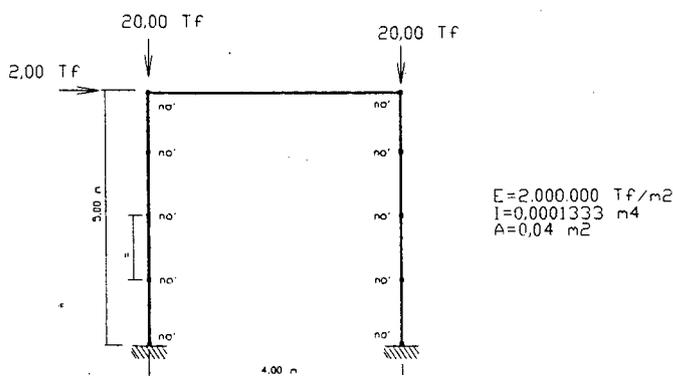
O coeficiente de instabilidade  $\alpha$  é igual a 1,369.



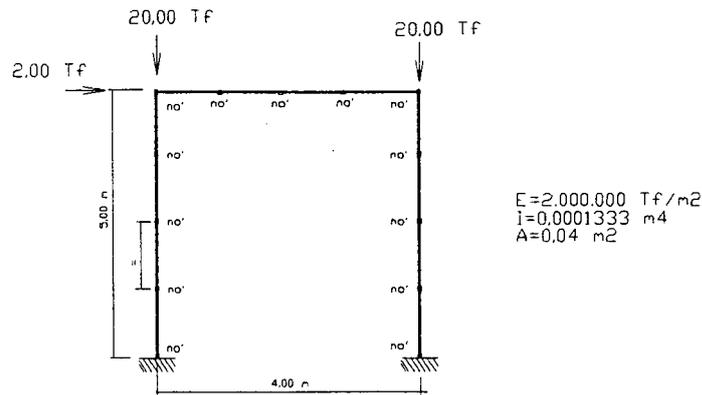
**Figura 4.13** - Pórtico plano, modelado com quatro nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 4.14** - Pórtico plano, modelado com seis nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 4.15** - Pórtico plano, modelado com dez nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.



**Figura 4.16** - Pórtico plano, modelado com treze nós, com cargas horizontais e verticais aplicadas.

|           | Análise linear | Análise Kg | Nº it. | Análise Kgs. | Nº iterações |
|-----------|----------------|------------|--------|--------------|--------------|
| c/ 4 nós  | 2,796819       | 3,53345    | 3      | 3,547796     | 3            |
| c/ 6 nós  | 2,797036       | 3,53278    | 3      | 3,515022     | 3            |
| c/ 10 nós | 2,796827       | 3,53291    | 3      | 3,526554     | 3            |
| c/ 13 nós | 2,797299       | 3.532309   | 3      | 3,52887      | 3            |

**Tabela 4.6** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das Figuras 4.13 a 4.16 - Momentos de engastamento do lado esquerdo do pórtico (em tf.m).

Da mesma forma que no exemplo anterior, tem-se que para um maior número de nós no modelamento das barras verticais, tem-se resultados muito parecidos para a análise não linear geométrica pelos métodos Kg e Kgs.

Para os momentos de segunda ordem acima expostos, a diferença entre este e o momento linear é da ordem de 75% contra 51 % do exemplo anterior.

Percebe-se uma pequena diferença entre os resultados das duas variações da análise não linear com o modelamento com 13 nós, valores da ordem de 3.52 á 3.53, diferença de 0,28%, que é pouco expressivo.

O número de iterações permaneceu em três, para todos esses exemplos.

---

|           | Análise linear | Análise Kg | Análise Kgs. |
|-----------|----------------|------------|--------------|
| c/ 4 nós  | 0.052963       | 0,069671   | 0,067183     |
| c/ 6 nós  | 0,052967       | 0,069653   | 0,067460     |
| c/ 10 nós | 0,052964       | 0,069669   | 0,069043     |
| c/ 13 nós | 0,052967       | 0,069695   | 0,069080     |

---

**Tabela 4.7** - Dados da análise linear e não linear dos exemplos das Figuras 4.13 a 4.16 -  
Deslocamentos no topo, lado esquerdo do pórtico (em metros).

Conforme a tabela acima, para o método Kg e Kgs, o modelamento do pórtico com maior número de nós nas barras verticais pouco influi nos resultados dos deslocamentos horizontais finais. O mesmo ocorreu com a adição de nós na barra horizontal.

## CAPÍTULO V

# OUTROS PROCESSOS DE ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

O efeito das cargas verticais agindo nos pórticos planos com deslocamentos horizontais, é chamado de efeito P- $\Delta$ . Este efeito pode ser considerado a partir de diversos métodos propostos na literatura, como por exemplo: Método do fator de amplificação, Método do carregamento gravitacional iterativo, Método direto, Método do membro fictício com propriedade negativa.

GAIOTTI e outros (1989) descrevem os métodos citados, conforme reproduzidos a seguir.

### 5.1 MÉTODO DO FATOR DE AMPLIFICAÇÃO

O método do fator de amplificação é uma forma prática de obter o efeito P- $\Delta$  final de uma estrutura vertical e de determinar se o efeito vai ser significativo; é aproximado e rápido para obtê-lo.

Este método consiste em se determinar um fator de amplificação para o deslocamento horizontal no topo de uma barra vertical da estrutura, decorrente da análise linear. O deslocamento  $D_{linear}$  no topo é multiplicado pelo fator de amplificação  $F$ , para encontrar o valor do deslocamento não-linear  $D_{naolinear}$ , ou seja:

$$D_{naolinear} = D_{linear} \cdot F \quad (5.1)$$

$$F = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{P}{P_{critico}}\right)\right]} \quad (5.2)$$

$$P_{critico} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (5.3)$$

A Equação 5.3 representa o valor da carga crítica para pilares com uma base engastada e o topo livre, com rigidez EI e comprimento L.

Aplicando as Equações 5.2 e 5.3 e 5.1 resulta na Equação 5.4

$$D_{naolinear} = D_{linear} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{P4L^2}{\pi^2 EI}\right)\right]} \quad (5.4)$$

Onde:  $D_{naolinear}$  = Deslocamento não-linear, no topo da barra vertical;

$D_{linear}$  = Deslocamento de primeira ordem, no topo da barra vertical;

$F$  = Fator de amplificação;

$P$  = Carregamento vertical no topo da barra;

$P_{critico}$  = Carga crítica na base da barra;

Analisando-se a equação 5.4, percebe-se a não-linearidade entre os deslocamentos para um carregamento crescente.

## 5.2 - MÉTODO DO CARREGAMENTO GRAVITACIONAL ITERATIVO

O método do carregamento gravitacional iterativo consiste em criar um modelo fictício para simular os efeitos da mudança de geometria da estrutura com o carregamento.

Partindo do pórtico em análise, criar uma barra vertical (coluna) ao lado da estrutura, com propriedades especiais, com rigidez axial muito grande e rigidez à flexão nula, como mostrado na figura 5.2

Une-se esta coluna ao pórtico principal com barras horizontais também com uma propriedade especial, com rigidez axial muito grande.

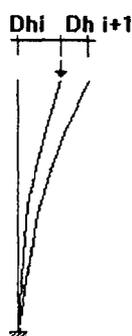
Proceder da seguinte forma:

1 - Para a estrutura, determinar os deslocamentos elásticos horizontais  $Dh_i$  ( $Dh_i$ , com  $i=1$  é igual à  $Dh_1$ ) com apenas os esforços horizontais aplicados;

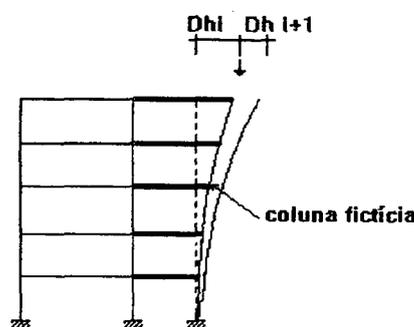
2 - Aplicar estes deslocamentos  $Dh_i$  ao pilar fictício, pela mudança das coordenadas dos nós e utilizar agora somente os esforços verticais aplicados, encontrando os deslocamentos horizontais  $Dh_{i+1}$ ;

3 - Repetir esta operação até que o deslocamento  $Dh_{i+1}$  seja desprezível ou nulo.

As figuras 5.1 e 5.2 apresentam esquemas ilustrativos deste método.



**Figura 5.1** - Esquema de deformações parciais.



**Figura 5.2** - Coluna fictícia

O deslocamento final será a soma dos deslocamentos  $D_{hi}$ .

$$D_n = D_{h1} + D_{h2} + \dots + D_{hi} \quad (5.5)$$

Através de cada um dos deslocamentos parciais determina-se o momento correspondente, portanto, o momento não-linear será a soma dos momentos parciais.

$$M_n = M_{h1} + M_{h2} + \dots + M_{hi} \quad (5.6)$$

Este também é um método rápido de resolução, GAIOTTI (1989) conclui que o desempenho é de um terço do tempo, se comparada a outros métodos aqui exposto.

### 5.3 - MÉTODO DIRETO

O método direto, de forma similar ao método do fator de amplificação, calcula um fator baseado no carregamento vertical e na rigidez lateral, que será dividido pelo resultado da análise linear de primeira ordem.

O momento não-linear será o momento linear de primeira ordem dividido pelo fator  $G$ , o que se aplica também aos deslocamentos.

$$M_n = M_{lin} / G \quad (5.7)$$

$$G = 1 - [( \pi * d_i ) / ( S_i * h_i )] \quad (5.8)$$

Onde:

$G$  = Fator de proporcionalidade;

$\pi_i$  = Carga vertical total;

$d_i$  = deslocamento;

$S_i$  = Esforço Cisalhante externo;

$h_i$  = Altura da barra

O fator G da equação 5.8 varia de forma não-linear por toda a altura da estrutura, com o carregamento vertical.

#### 5.4 - MÉTODO DO MEMBRO FICTÍCIO COM PROPRIEDADE NEGATIVA

O método do membro fictício com propriedade negativa consiste em somar ao pilar existente, um pilar fictício com propriedades negativas de forma a diminuir a rigidez da estrutura e, desta forma, encontrar os esforços internos com a estrutura no seu estado deformado. Resume-se a somar à matriz de rigidez [ K ] uma outra matriz que inclua o efeito do P- $\Delta$  [ K<sub>g</sub> ]. Esta matriz chama-se matriz de rigidez geométrica, porém definida de forma diferente da anteriormente exposta..

$$\{ F \} = [ K - K_g ] * \{ D \} \quad (5.9)$$

Da mesma forma que o método direto, que calcula um acréscimo de força horizontal aplicada nos nós da barra da estrutura, este modifica a matriz de rigidez para simular este acréscimo. A matriz de rigidez geométrica é apresentada na Equação 5.9.a.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 H'1 & & P_0/h_0 & -P_1/h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & d_1 \\
 & & +P_1/h_1 & & & & & & & & \\
 H'2 & & -P_1/h_1 & P_1/h_1 + & -P_2/h_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & & d_2 \\
 & & & P_2/h_2 & & & & & & & \\
 H'3 & & 0 & -P_2/h_2 & P_2/h_2 + & -P_3/h_3 & 0 & \dots & 0 & & d_3 \\
 & & & & P_3/h_3 & & & & & & \\
 \vdots & = & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & * & \vdots \\
 H'i & & 0 & 0 & 0 & 0 & (P_{i-1}/h_{i-1}) + & \dots & 0 & & d_i \\
 & & & & & & (P_i/h_i) & & & & \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\
 H'n & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (P_{n-1}/h_{n-1}) + (P_n/h_n) & & d_n
 \end{array}$$

(5.9.a)

Onde:

$H'$  = incremento do carregamento horizontal;

$P_i$  = Soma das forças axiais na barra;

$h_i$  = altura da barra;

$d_i$  = deslocamento superior da barra, incluindo o efeito P- $\Delta$ .

### 5.5 - MÉTODO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ORDEM SUPERIOR

O método da matriz de rigidez geométrica de ordem superior foi apresentado por CHAGES A. & CHURCHILL E. (1987). Consiste em uma matriz mais complexa, que somada à matriz de rigidez de cada uma das barras da estrutura, resulta em uma matriz que simula o comportamento não-linear geométrico. Está apresentado abaixo, utilizando o método dos elementos finitos, e pode ser implementada numericamente de duas formas, incremental (como é apresentada inicialmente) ou secante ( em item posterior).

### 5.5.1 IMPLEMENTAÇÃO INCREMENTAL

Seja um elemento de barra com comprimento  $L$ , área da seção transversal  $A$ , momento de inércia  $I$ , módulo de elasticidade  $E$  e os seis deslocamentos nodais  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  e  $u_6$  definidos na figura 4.1

Seja  $\varepsilon_0$  a deformação axial no elemento quando do início do incremento, e seja a relação deformação-deslocamento apresentada na equação 5.10

$$\varepsilon_a = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} Y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (5.10)$$

A energia de deformação pode ser calculada por:

$$U = \int_L \int_A \left[ \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0 + \varepsilon_a} \sigma d\varepsilon \right] dA dx \quad (5.11)$$

E, usando a lei de Hooke, e integrando em relação à  $\varepsilon$  tem-se a equação 5.12.

$$U = E \varepsilon_0 \int_L \int_A \varepsilon_a dA dx + \frac{E}{2} \int_L \int_A \varepsilon_a^2 dA dx \quad (5.12)$$

Substituindo a equação 5.10 na equação 5.12, teremos a equação 5.13

$$U = P \int_0^L \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{E}{2} \int_0^L \left[ A \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + I \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + A \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{A}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 \right] dx \quad (5.13)$$

Onde P é representado pela equação 5.14.

$$P = \varepsilon_{xx} EA \quad (5.14)$$

São admitidas as seguintes funções de deslocamento, apresentadas nas equações 5.15 e 5.16:

$$u_0 = a_0 + a_1 x \quad (5.15)$$

$$u_y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (5.16)$$

As condições de contorno são aquelas dadas pelas equações 5.17 e 5.18.

$$u_0 = \left( 1 - \frac{x}{L} \right) u_1 + \left( \frac{x}{L} \right) u_4 \quad (5.17)$$

$$u_y = \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) u_2 + \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) u_5 + \left( -\frac{2x^2}{L} + x + \frac{x^3}{L^2} \right) u_3 + \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) u_6 \quad (5.18)$$

Percebe-se que esta apresentado de forma similar ao capítulo 5, usando  $\xi$  no lugar de

$$\frac{x}{l}$$

Substituindo agora as equações 5.17 e 5.18 na equação 5.13 para poder expressar a energia  $U$  em termos dos incrementos dos deslocamentos  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  e  $u_6$ , tem-se a equação 5.19.

$$(\Delta F) = \left\{ [K] + [K_g] + \frac{EA}{2}[K_1] + \frac{EA}{3}[K_2] \right\} (\Delta D) \quad (5.19)$$

Onde:

$[K]$  = matriz de rigidez da estrutura;

$[K_g]$  = matriz de rigidez geométrica;

$[K_1]$  = primeira matriz de rigidez geométrica de ordem superior.

$[K_2]$  = segunda matriz de rigidez geométrica de ordem superior.

Os termos destas parcelas são apresentadas respectivamente, nas Equação 4.18 do capítulo 4 e Equações 5.20 e 5.21. Os deslocamentos  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  ali apresentados são da iteração anterior.

$$\begin{aligned}
 K_{1(1,2)} &= \frac{6}{5L^2}(u_5 - u_2) - \frac{1}{10L}(u_3 + u_6) & K_{1(1,3)} &= \frac{1}{10L}(u_5 - u_2) + \frac{1}{30}(u_6 - 4u_3) \\
 K_{1(1,5)} &= -\frac{6}{5L^2}(u_5 - u_2) + \frac{1}{10L}(u_3 + u_6) & K_{1(1,6)} &= \frac{1}{10L}(u_5 - u_2) + \frac{1}{30}(u_3 - 4u_6) \\
 K_{1(2,2)} &= \frac{6}{5L^2}(u_4 - u_1) & K_{1(2,3)} &= -\frac{1}{10L}(u_4 - u_1) \\
 K_{1(2,4)} &= -\frac{6}{5L^2}(u_5 - u_2) + \frac{1}{10L}(u_3 + u_6) & K_{1(2,5)} &= -\frac{6}{5L^2}(u_4 - u_1) \\
 K_{1(2,6)} &= -\frac{1}{10L}(u_4 - u_1) & K_{1(3,3)} &= \frac{2}{15}(u_4 - u_1) \\
 K_{1(3,4)} &= \frac{1}{10L}(u_5 - u_2) + \frac{1}{30}(u_6 - 4u_3) & K_{1(3,5)} &= \frac{1}{10L}(u_4 - u_1) \\
 K_{1(3,6)} &= -\frac{1}{30}(u_4 - u_1) & K_{1(4,5)} &= \frac{6}{5L^2}(u_5 - u_2) - \frac{1}{10L}(u_3 + u_6) \\
 K_{1(4,6)} &= -\frac{1}{10L}(u_5 - u_2) - \frac{1}{30}(u_3 - 4u_6) & K_{1(5,5)} &= \frac{6}{5L^2}(u_4 - u_1) \\
 K_{1(5,6)} &= \frac{1}{10L}(u_4 - u_1) & K_{1(6,6)} &= \frac{2}{15}(u_4 - u_1)
 \end{aligned}$$

(5.20)

$$\begin{aligned}
 K_{2(2,2)} &= \frac{1}{140} \left[ \frac{18u_2^2}{L} + \frac{18u_6^2}{L} + \frac{432}{L^3} (u_5 - u_2)^2 - \frac{108}{L^2} (u_5 - u_2)(u_3 - u_6) \right] \\
 K_{2(2,3)} &= \frac{1}{280} \left[ -3u_3^2 + 3u_6^2 + 6u_3u_6 + \frac{108}{L^2} (u_5 - u_2)^2 - \frac{72}{L} u_3(u_5 - u_2) \right] \\
 K_{2(2,5)} &= -\frac{1}{140} \left[ \frac{18u_2^2}{L} + \frac{18u_6^2}{L} + \frac{432}{L^3} (u_5 - u_2)^2 - \frac{108}{L^2} (u_5 - u_2)(u_3 - u_6) \right] \\
 K_{2(2,6)} &= \frac{1}{280} \left[ 3u_3^2 - 3u_6^2 + 6u_3u_6 + \frac{108}{L^2} (u_5 - u_2)^2 - \frac{72}{L} u_6(u_5 - u_2) \right] \\
 K_{2(3,3)} &= \frac{1}{140} \left[ 12Lu_3^2 + Lu_6^2 - 3Lu_3u_6 + \frac{18}{L} (u_5 - u_2)^2 + 3(u_5 - u_2)(u_3 - u_6) \right] \\
 K_{2(3,5)} &= -\frac{1}{280} \left[ -3u_3^2 + 3u_6^2 + 6u_3u_6 + \frac{108}{L^2} (u_5 - u_2)^2 - \frac{72}{L} u_3(u_5 - u_2) \right] \\
 K_{2(3,6)} &= \frac{1}{280} \left[ -3Lu_3^2 - 3Lu_6^2 + 4Lu_3u_6 - 6(u_5 - u_2)(u_3 + u_6) \right] \\
 K_{2(5,5)} &= \frac{1}{140} \left[ \frac{18u_2^2}{L} + \frac{18u_6^2}{L} + \frac{432}{L^3} (u_5 - u_2)^2 - \frac{108}{L^2} (u_5 - u_2)(u_3 - u_6) \right] \\
 K_{2(5,6)} &= \frac{1}{280} \left[ 3u_3^2 - 3u_6^2 + 6u_3u_6 + \frac{108}{L^2} (u_5 - u_2)^2 - \frac{72}{L} u_6(u_5 - u_2) \right] \\
 K_{2(6,6)} &= \frac{1}{140} \left[ Lu_3^2 + 12Lu_6^2 - 3Lu_3u_6 + \frac{18}{L} (u_5 - u_2)^2 + 3(u_5 - u_2)(u_6 - u_3) \right]
 \end{aligned}$$

(5.21)

Portanto, a matriz de rigidez geométrica incremental é aquela apresentada na equação 5.22.

$$[K_{gtotal}] = \left\{ [K_g] + \frac{EA}{2} [K_1] + \frac{EA}{3} [K_2] \right\} \quad (5.22)$$

A equação final vai ser:

$$(F) = \{ [K] + [K_{gtotal}] \} \cdot (D) \quad (5.23)$$

### 5.5.2 IMPLEMENTAÇÃO SECANTE

Esta matriz é deduzida de forma idêntica ao item 4.1.2 a menos de se considerar a deformação inicial nula, o que acarreta uma modificação da equação 5.19, originando a equação 5.24.

$$(F) = \left\{ [K] + \frac{EA}{2} [K_1] + \frac{EA}{3} [K_2] \right\} \cdot (D) \quad (5.24)$$

Portanto, a matriz de rigidez geométrica secante é aquela apresentada na equação 5.25.

$$[K_{gsec}] = \frac{EA}{2} [K_1] + \frac{EA}{3} [K_2] \quad (5.25)$$

Esta matriz não será implementada pois o método de resolução associado a esta, possui os mesmos resultados daquele obtido com o uso da matriz de rigidez geométrica incremental.

## CAPÍTULO VI

### RELAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS

Analisando os resultados obtidos com a implementação dos métodos P- $\Delta$  genérico e da matriz de rigidez geométrica simplificada percebe-se que estes são muito similares.

Para se analisar a semelhança dos dois métodos, partindo da equação 6.1, anteriormente citada, esta foi reescrita na forma da equação 6.2 e 6.3 com todos os seus termos, sem perda de significado.

$$[F] = [K + K_{gs}] \cdot [D] \quad (6.1)$$

$$[F] = [K] \cdot [D] + [K_{gs}] \cdot [D] \quad (6.2)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} + \frac{F}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

A segunda parte desta equação pode ser reescrita como a equação 6.4, com todos os seus termos que segue.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F}{l}(u_2 - u_5) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{F}{l}(u_2 - u_5) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Agrupando convenientemente os termos, pode-se obter as equações 6.5 e 6.6.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F}{l}(u_2 - u_5) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{F}{l}(u_2 - u_5) \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

$$(F) - (\Delta F) = [K]. (D) \quad (6.6)$$

A equação 6.6 é a definição do método P-Δ genérico apresentada no capítulo III desta dissertação.

Aparentemente os métodos são idênticos, apenas definidos de forma distinta, o primeiro através da observação da deformação de um pórtico, conforme a NBR 8800 (1988), expandida a análise para todas as barras da estrutura e o segundo pela equação que define o comportamento físico da deformação.

Prestando atenção na passagem da equação 6.4 para 6.5 e 6.6, os valores das deformações utilizadas no vetor (ΔF) da equação 6.6 referem-se a mesma iteração do vetor (D).

No método P- $\Delta$  genérico, o vetor ( $\Delta F$ ) deve ser da iteração anterior do vetor (D).

A diferença principal, está no método de implementação; basicamente a implementação da matriz de rigidez geométrica se dá com a soma desta com a matriz de rigidez linear, onde o sistema será resolvido com a nova matriz de rigidez. O método P- $\Delta$  genérico, resolve uma única vez a matriz de rigidez, alterando apenas o vetor das forças, o que implica em uma simples multiplicação de uma matriz por um vetor.

Os resultados numéricos dos exemplos citados e comentados nos capítulos 3 e 4 nos levam a concluir que, mesmo implementados de forma diferenciada, levam praticamente aos mesmos valores.

## 6.1 - COMENTÁRIOS DOS EXEMPLOS NUMÉRICOS DOS CAPÍTULOS III e IV

São aqui apresentados os comentários comparativos de alguns dos exemplos citados nos capítulos 3 e 4.

Os exemplos escolhidos são os pilares e os pórticos para edifícios baixos.

Analisando o exemplo do pilar com esforço aplicado de compressão, nas figuras 3.9, 3.10, 3.11, 4.2, 4.3, 4.4 e as tabelas 3.2 e 4.1, tem-se que os métodos P- $\Delta$  e Kg apresentam resultados muito parecidos.

Os dois métodos possuem convergência muito rápida, porém o método da matriz de rigidez geométrica apresentou convergência em menos iterações e necessitou de menor subdivisão das barras verticais para alcançar aos valores aproximado de deslocamentos e esforços na configuração deformada.

Dando vistas ao exemplo do pilar com esforço aplicado de tração, nas figuras 3.12, 3.13, 3.14, 4.7, 4.8, 4.9 e as tabelas 3.3 e 4.2, nota-se também que os métodos P- $\Delta$  e Kg apresentam resultados muito parecidos.

Percebe-se que existem situações em que o efeito de segunda ordem pode ser restituído, alcançando valores menores de deslocamentos e esforços.

Nos pórticos das figuras 3.17 à 3.24 e 4.11 à 4.18 e nos valores das tabelas 3.5 à 3.8 e 4.4 à 4.7 observa-se que o método P- $\Delta$  não necessitou de muitas subdivisões nas barras para alcançar valores satisfatórios de momentos e deslocamentos.

O método da matriz de rigidez geométrica apresentou valores mais altos, tanto para deslocamentos como para momentos. Ou seja, verificou-se que é mais preciso que o método P- $\Delta$ , pois faz menos aproximações.

O número de iterações foi praticamente o mesmo para os casos analisados.

## **6.2 - EXEMPLO COMPARATIVO DE PÓRTICO PLANO PARA EDIFÍCIO DE MÚLTIPLOS ANDARES**

Um exemplo interessante e bastante prático é apresentado a seguir: um pórtico plano que modela um edifício em concreto armado, constituído de um pavimento térreo, três pavimentos tipo e uma laje de cobertura.

Este exemplo foi inicialmente proposto por PITTA (1997).

As Figuras 6.1 a 6.3 apresentam variações das condições de apoio, da disposição dos nós no esquema estrutural e o carregamento solicitante para o exemplo.

Duas situações de vinculações possíveis para este pórtico que modela um edifício são engaste total e rótula pura. A disposição dos nós de controle (1 a 3) tem por objetivo fixar certos pontos para analisar os resultados.

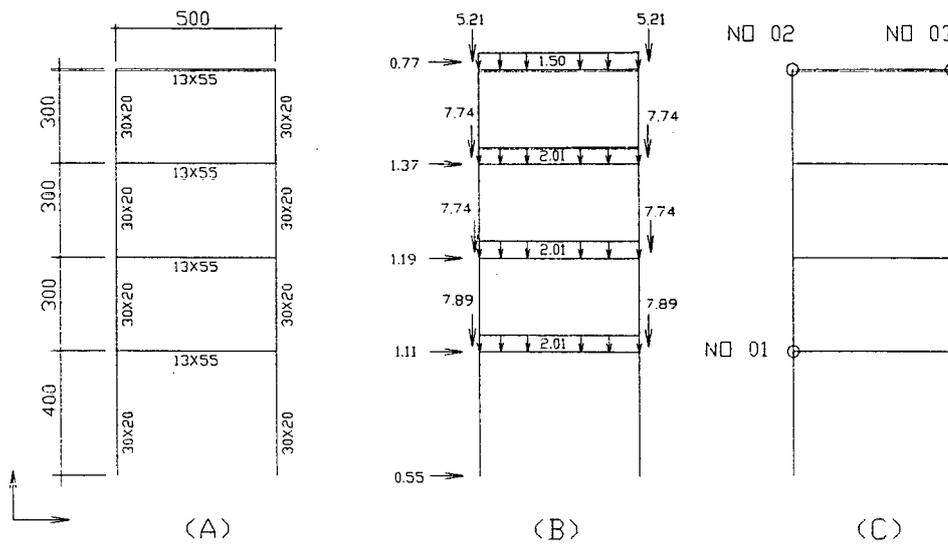


Figura 6.1 - Dimensões, carregamento e nós a serem estudados do pórtico plano.

Onde:

As dimensões são em centímetros,

As cargas concentradas são em tf,

As cargas distribuídas são em tf/m

O módulo de elasticidade é de 2100000 tf/m<sup>2</sup>

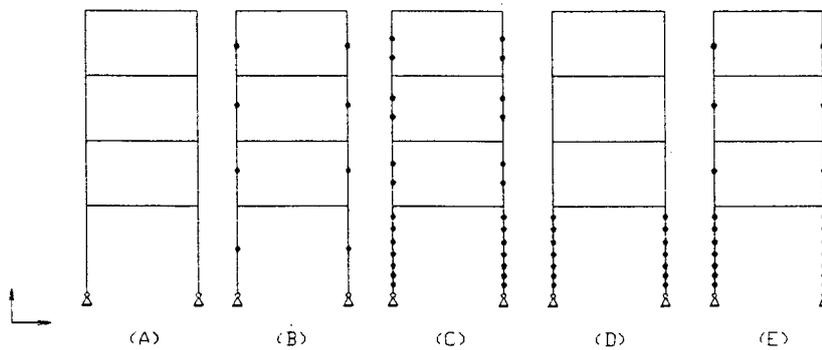


Figura 6.2 - Disposição dos nós intermediários para o pórtico plano, vinculação rotulada.

| delta01 (m) | m1(tf.m) | iterações | tempo (s) | análise      | figura |
|-------------|----------|-----------|-----------|--------------|--------|
| 0,0956279   | 8,373465 | 0         | 4,011719  | linear       | A      |
| 0,1902576   | 17,31954 | 6         | 4,121094  | p-delta      |        |
| 0,1902576   | 17,31955 | 6         | 4,609375  | p-delta gen. |        |
| 0,2338849   | 19,98053 | 3         | 16,52734  | kg           |        |
| 0,1917913   | 17,46452 | 3         | 15,60156  | kgs          |        |
| delta01 (m) | m1(tf.m) | iterações | tempo (s) | análise      | figura |
| 0,0956399   | 8,374528 | 0         | 16,85938  | linear       | B      |
| 0,2181185   | 18,8583  | 7         | 18,07031  | p-delta      |        |
| 0,2181186   | 18,85835 | 7         | 18,12891  | p-delta gen. |        |
| 0,2350808   | 20,06212 | 3         | 68,10938  | kg           |        |
| 0,2206745   | 19,19502 | 3         | 66,85156  | kgs          |        |
| delta01 (m) | m1(tf.m) | iterações | tempo (s) | análise      | figura |
| 0,09568928  | 8,390982 | 0         | 125,0703  | linear       | C      |
| 0,2320717   | 19,68154 | 8         | 129,2891  | p-delta      |        |
| 0,2320717   | 19,68093 | 8         | 135,8281  | p-delta gen. |        |
| 0,23554     | 19,89861 | 3         | 518,9883  | kg           |        |
| 0,2345054   | 19,89069 | 3         | 519,1484  | kgs          |        |
| delta01 (m) | m1(tf.m) | iterações | tempo (s) | análise      | figura |
| 0,09566776  | 8,388932 | 0         | 38,33984  | linear       | D      |
| 0,2319219   | 19,67012 | 8         | 40,26172  | p-delta      |        |
| 0,2319219   | 19,66961 | 8         | 40,48047  | p-delta gen. |        |
| 0,2356618   | 20,23831 | 3         | 152,5313  | kg           |        |
| 0,2343592   | 20,12549 | 3         | 152,5781  | kgs          |        |
| delta01 (m) | m1(tf.m) | iterações | tempo (s) | análise      | figura |
| 0,09566859  | 8,38844  | 0         | 73,32031  | linear       | E      |
| 0,2319523   | 19,67216 | 8         | 76,40234  | p-delta      |        |
| 0,2319522   | 19,67147 | 8         | 76,62109  | p-delta gen. |        |
| 0,2356162   | 20,12202 | 3         | 300,2188  | kg           |        |
| 0,2342896   | 20,11632 | 3         | 293,1406  | kgs          |        |

**Tabela 6.1** - Deslocamentos e momentos no nó 1, tempo de resolução e número e iterações, para os pórticos da Figura 6.2.

| delta02 (m) | delta03 (m) | m2 (tf.m)  | m3 (tf.m) | análise      | figura |
|-------------|-------------|------------|-----------|--------------|--------|
| 0,1158246   | 0,1157932   | -0,4843658 | 1,735964  | linear       | A      |
| 0,2143822   | 0,2143488   | -0,4685417 | 1,750988  | p-delta      |        |
| 0,2143823   | 0,2143489   | -0,4685287 | 1,750975  | p-delta gen. |        |
| 0,2588417   | 0,258831    | -0,4685825 | 1,75043   | kg           |        |
| 0,215988    | 0,2159707   | -0,4671331 | 1,75115   | kgs          |        |
| delta02 (m) | delta03 (m) | m2 (tf.m)  | m3 (tf.m) | análise      | figura |
| 0,1158413   | 0,1158155   | -0,4854587 | 1,7360028 | linear       | B      |
| 0,2426672   | 0,2426451   | -0,4713211 | 1,750915  | p-delta      |        |
| 0,2426673   | 0,2426452   | -0,4712749 | 1,750909  | p-delta gen. |        |
| 0,260052    | 0,2600276   | -0,4698114 | 1,749479  | kg           |        |
| 0,2452955   | 0,2452574   | -0,4715095 | 1,751059  | kgs          |        |
| delta02 (m) | delta03 (m) | m2 (tf.m)  | m3 (tf.m) | análise      | figura |
| 0,115906    | 0,1158814   | -0,4818631 | 1,739275  | linear       | C      |
| 0,2569313   | 0,2569131   | -0,4629418 | 1,757756  | p-delta      |        |
| 0,2569314   | 0,2569132   | -0,4628268 | 1,757749  | p-delta gen. |        |
| 0,2605466   | 0,2605248   | -0,4600331 | 1,74493   | kg           |        |
| 0,2594629   | 0,2594612   | -0,4747379 | 1,749535  | kgs          |        |
| delta02 (m) | delta03 (m) | m2 (tf.m)  | m3 (tf.m) | análise      | figura |
| 0,1158692   | 0,1158413   | -0,4843704 | 1,73596   | linear       | D      |
| 0,2566912   | 0,2566655   | -0,4684502 | 1,751431  | p-delta      |        |
| 0,2566912   | 0,2566655   | -0,4684547 | 1,75139   | p-delta gen. |        |
| 0,2605567   | 0,2605113   | -0,4639937 | 1,7550692 | kg           |        |
| 0,2591879   | 0,2591379   | -0,4748031 | 1,751903  | kgs          |        |
| delta02 (m) | delta03 (m) | m2 (tf.m)  | m3 (tf.m) | análise      | figura |
| 0,1158709   | 0,1158487   | -0,4854606 | 1,73597   | linear       | E      |
| 0,2567197   | 0,2567067   | -0,4713779 | 1,750889  | p-delta      |        |
| 0,2567198   | 0,2567067   | -0,4713818 | 1,750781  | p-delta gen. |        |
| 0,2606379   | 0,2605974   | -0,4688356 | 1,752678  | kg           |        |
| 0,2591426   | 0,2590756   | -0,4724134 | 1,751502  | kgs          |        |

**Tabela 6.2** - Deslocamentos e momentos nos nós 2 e 3, dos pórticos da Figura 6.2.

Os comentários serão baseados nas comparações observadas entre os valores dos deslocamentos e momentos dos três nós acima indicados, denominados nós 01,02 e 03, cujos deslocamentos e momentos associados serão denominados delta01 m1, delta 02 e m2, delta03 e m3, encontrados nas tabelas deste capítulo.

O modelamento conforme a figura 6.2 A é normalmente utilizado em projetos de edifícios, com cada barra vertical modelando um tramo dos pilares. Os demais modelamentos são bases para comparação dos resultados.

Analisando os deslocamentos encontrados no modelo linear, da figura 6.2, tem-se que o pórtico plano é bastante flexível no primeiro lance dos pilares.

Os deslocamentos horizontais (deformações) são de aproximadamente 10 centímetros no nível do topo do primeiro tramo do pilar. No topo do pórtico, o deslocamento é de apenas 11,5 centímetros. O movimento de corpo rígido é de 10 cm e a deformação é de 1.5 cm.

Os efeitos não lineares geométricos aparecem significativamente associados aos maiores deslocamentos horizontais .

O número de iterações foi de 6 para os resultados com P- $\Delta$  e P- $\Delta$ genérico pelo modelo (A) para tempo de resolução de aproximadamente 04 segundos. Para os resultados com Kg e Kgs As iterações foram de apenas 03, com tempo gasto de 16 segundos. Esta diferença nos tempos gastos se dá pois no Kg e Kgs o sistema de equações lineares tem que ser resolvido a cada iteração, enquanto que para P- $\Delta$  e P- $\Delta$ genérico só deve ser resolvido uma vez.

Os resultados de P- $\Delta$  e P- $\Delta$ genérico são muito parecidos pois o esforço normal para as barras horizontais é muito pequeno em todos os exemplos citados.

P- $\Delta$ genérico e Kgs possuem resultados muito próximos, pois sua formulação é muito parecida, como visto no início deste capítulo.

Kg apresentou os resultados mais precisos.

Os efeitos não lineares geométricos foram mais sensíveis na parte mais flexível do pórtico plano. O modelamento com maior número de nós intermediários nas barras verticais proporciona resultados de P- $\Delta$ , P- $\Delta$ genérico e Kgs mais próximos de Kg.

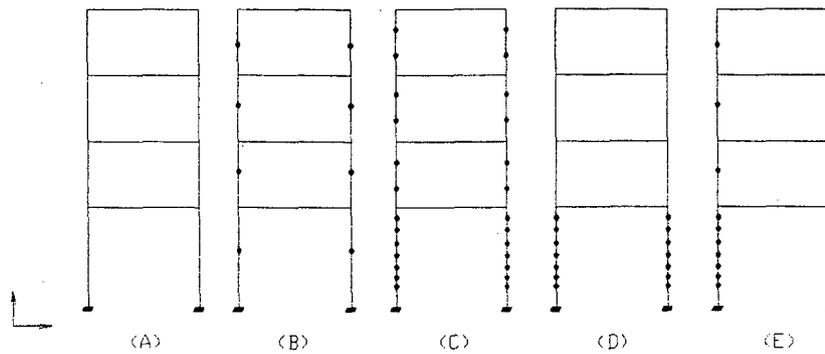


Figura 6.3 - Disposição dos nós intermediários para o pórtico plano, vinculação engastada.

| delta01    | m1       | iterações | tempo    | análise      | figura |
|------------|----------|-----------|----------|--------------|--------|
| 0,02432793 | 3,632868 | 0         | 4,011719 | linear       | A      |
| 0,02787008 | 4,272901 | 3         | 3,902344 | p-delta      |        |
| 0,02787008 | 4,2729   | 3         | 3,949219 | p-delta gen. |        |
| 0,02858713 | 4,342779 | 3         | 16,21094 | kg           |        |
| 0,02787648 | 4,274081 | 3         | 15,98438 | kgs          |        |
| delta01    | m1       | iterações | tempo    | análise      | figura |
| 0,02432678 | 3,632666 | 0         | 16,91016 | linear       | B      |
| 0,0278741  | 4,297419 | 3         | 17,52344 | p-delta      |        |
| 0,02787542 | 4,297421 | 3         | 17,57031 | p-delta gen. |        |
| 0,0285897  | 4,343503 | 3         | 66,63281 | kg           |        |
| 0,02788293 | 4,298539 | 3         | 66,61719 | kgs          |        |
| delta01    | m1       | iterações | tempo    | análise      | figura |
| 0,02432998 | 3,631589 | 0         | 125,1211 | linear       | C      |
| 0,0285272  | 4,337204 | 3         | 126,9297 | p-delta      |        |
| 0,02852719 | 4,337125 | 3         | 127,3164 | p-delta gen. |        |
| 0,0285986  | 4,345713 | 3         | 499,7617 | kg           |        |
| 0,02853838 | 4,338651 | 3         | 499,3828 | kgs          |        |
| delta01    | m1       | iterações | tempo    | análise      | figura |
| 0,02432847 | 3,631261 | 0         | 38,39844 | linear       | D      |
| 0,02852344 | 4,337885 | 3         | 39,37891 | p-delta      |        |
| 0,02852345 | 4,33796  | 3         | 39,49219 | p-delta gen. |        |
| 0,02859705 | 4,34549  | 3         | 152,5781 | kg           |        |
| 0,02853822 | 4,340264 | 3         | 152,6953 | kgs          |        |
| delta01    | m1       | iterações | tempo    | análise      | figura |
| 0,0243285  | 3,631345 | 0         | 73,32031 | linear       | E      |
| 0,02852483 | 4,337845 | 3         | 74,75    | p-delta      |        |
| 0,02852483 | 4,337835 | 3         | 78,43359 | p-delta gen. |        |
| 0,02859343 | 4,343415 | 3         | 292,75   | kg           |        |
| 0,02854092 | 4,340193 | 3         | 292,7031 | kgs          |        |

Tabela 6.3 - Deslocamentos e momentos no nó 1, número de iterações e tempo de resolução, para os pórticos da figura 6.3.

| delta02    | delta03    | m2         | m3       | análise      | figura |
|------------|------------|------------|----------|--------------|--------|
| 0,04314597 | 0,04311646 | -0,484904  | 1,735847 | linear       | A      |
| 0,04787912 | 0,04784957 | -0,470749  | 1,749973 | p-delta      |        |
| 0,04787916 | 0,04784961 | -0,4707505 | 1,749972 | p-delta gen. |        |
| 0,04872245 | 0,04869422 | -0,4703878 | 1,748366 | kg           |        |
| 0,04788549 | 0,04785716 | -0,471064  | 1,750001 | kgs          |        |
| delta02    | delta03    | m2         | m3       | análise      | figura |
| 0,04314454 | 0,04311602 | -0,4849651 | 1,735853 | linear       | B      |
| 0,04788797 | 0,04785953 | -0,4713052 | 1,749491 | p-delta      |        |
| 0,04788802 | 0,04785958 | -0,4712969 | 1,749492 | p-delta gen. |        |
| 0,04872554 | 0,04869739 | -0,4702946 | 1,748375 | kg           |        |
| 0,04789729 | 0,0478677  | -0,4712289 | 1,749665 | kgs          |        |
| delta02    | delta03    | m2         | m3       | análise      | figura |
| 0,04315212 | 0,04312302 | -0,4843356 | 1,736288 | linear       | C      |
| 0,04860747 | 0,04857837 | -0,4699463 | 1,749231 | p-delta      |        |
| 0,04860752 | 0,04857843 | -0,4699391 | 1,749305 | p-delta gen. |        |
| 0,04873996 | 0,04871023 | -0,4696591 | 1,748545 | kg           |        |
| 0,04861675 | 0,04858856 | -0,4708806 | 1,749373 | kgs          |        |
| delta02    | delta03    | m2         | m3       | análise      | figura |
| 0,04314645 | 0,04311679 | -0,4849066 | 1,735848 | linear       | D      |
| 0,04854314 | 0,04851341 | -0,4707838 | 1,750013 | p-delta      |        |
| 0,04854318 | 0,04851346 | -0,4707795 | 1,750013 | p-delta gen. |        |
| 0,04873305 | 0,04870479 | -0,4703942 | 1,748365 | kg           |        |
| 0,04855793 | 0,04853005 | -0,4711091 | 1,750036 | kgs          |        |
| delta02    | delta03    | m2         | m3       | análise      | figura |
| 0,04314652 | 0,04311778 | -0,4849726 | 1,73589  | linear       | E      |
| 0,04854382 | 0,04851513 | -0,4713502 | 1,749579 | p-delta      |        |
| 0,04854387 | 0,04851518 | -0,4713399 | 1,74958  | p-delta gen. |        |
| 0,04872929 | 0,04870104 | -0,4702844 | 1,748396 | kg           |        |
| 0,048564   | 0,04853483 | -0,4712385 | 1,749659 | kgs          |        |

Tabela 6.4 - Deslocamentos e momentos nos nós 2 e 3, nos pórticos da Figura 6.3.

Esta última situação, com as bases engastadas, proporcionou menores deslocamentos horizontais gerais no pórtico, portanto pois obteve-se menor movimento de corpo rígido das barras, ocasionando menores efeitos de segunda ordem.

A menor flexibilidade encontrada nos fez encontrar menor número de iterações para as análises com  $P-\Delta$  e  $P-\Delta$  genérico, sem melhoras significativas no tempo gasto, uma vez que a maior parte do tempo gasto é devida a resolução do sistema de equações lineares.

O número de iterações permaneceu em três para Kg e Kgs.

Os esforços internos são menores para situações com vinculações externas engastadas, trazendo menores efeitos não lineares geométricos.

## CONCLUSÕES

### DOS OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho foram abordados, uma vez que as normas nacionais de interesse foram aqui comentadas, os métodos de análise não-linear geométrica foram apresentados, comentados e comparados. Além disto, outras variações dos métodos propostos foram apresentadas.

Comentários sobre modelamento foram amplamente vistos, sendo que a maioria das conclusões são referente a esta parte da dissertação.

Foi criado também um texto com enfoque didático para servir de base para estudos e aplicação em projetos.

### COMENTÁRIOS GERAIS

Referente às publicações na área de modelamento de estruturas, percebe-se uma carência no enfoque da análise não-linear geométrica para projetos. Há uma preocupação muito grande em deduções matemáticas de métodos e formas, utilizando teorias sofisticadas mas com aplicação muito distante dos escritórios de cálculo e de sua execução.

A maior preocupação dos autores com publicações no Brasil está na avaliação da flexibilidade das estruturas. Mesmo não sendo objetivo desta dissertação, o Capítulo II apresenta e descreve algumas formas de avaliar quão flexíveis podem ser os pórticos planos.

Estes métodos foram apresentados e um destes foi escolhido por conveniência para ser utilizado para complementar os exemplos numéricos.

---

## COMENTÁRIOS SOBRE OS MÉTODOS P- $\Delta$ GENÉRICO E P- $\Delta$

As variações do método P- $\Delta$ , (P- $\Delta$  para barras verticais e P- $\Delta$  genérico para todas as barras), apresentam resultados idênticos para pilares verticais isolados e valores muito próximos quando aos pórticos planos que modelam edifícios, uma vez que nestes casos, o esforço normal está situado praticamente só nos pilares. Representa a maioria dos casos de edifícios.

O método P- $\Delta$  se aplica a somente barras verticais, um pilar modelado na horizontal não vai apresentar resultado satisfatório. O método P- $\Delta$  genérico é recomendado para esta situação pois aceita, além das barras verticais, as horizontais e as inclinadas.

As estruturas de pórticos planos com barras sem esforço normal não possuem efeito de segunda ordem geométrico detectado pelo método P- $\Delta$ .

A convergência dos exemplos numéricos deu-se para um erro máximo de 1% entre duas iterações consecutivas, para todos os deslocamentos das extremidades das barras.

O método P- $\Delta$  é recomendado para pórticos de edifícios e a variação para P- $\Delta$  genérico nos demais casos.

Para pilares, o método P- $\Delta$  apresenta melhores resultados se as barras com maior deslocamento forem divididas em partes iguais, levando a valores adequados.

O modelamento de pilares isolados ou de pilares de pórticos com nós intermediários nas barras apresenta resultados mais próximos da curva real dos deslocamentos.

No caso da existência de esforço normal de tração, o efeito é restituidor, ou seja, o método apresenta resultados com deslocamentos e esforços condizentes com o fenômeno.

O efeito não linear não está sempre associado ao aumento dos esforços internos. Existem situações em que o efeito não linear pode indicar menores esforços internos.

### **COMENTÁRIOS SOBRE OS MÉTODOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA Kg E Kgs**

Neste tipo de análise, a orientação horizontal, vertical ou inclinada das barras não influenciou nos resultados, da mesma forma que ocorreu com o método P- $\Delta$  genérico. Isto é devida à sua formulação. O efeito da mudança de geometria é inserido diretamente na matriz de rigidez de cada barra, no sistema local.

Observou-se o efeito restituidor também foi detectado para este método.

Outro dado interessante é de que os valores determinados por Kgs aproximam-se dos valores encontrados para Kg, quando as barras com maiores deslocamentos forem modeladas com maior número de nós intermediários. O mesmo ocorreu com P- $\Delta$  genérico quando o pórtico for modelado com maior número de nós.

Para a utilização de Kg, este mostrou-se menos sensível ao aumento do número de nós intermediários de uma barra. Com a utilização deste método, o efeito não linear é detectado já na primeira iteração, e pouco depende do comprimento da barra ou da quantidade de subdivisões que esta possa ter.

---

A utilização do método da Matriz de rigidez Geométrica,  $K_g$ , apresentou os melhores resultados, sem o aumento substancial do número de iterações para a convergência, tomando maior tempo computacional.

Os tempos gastos foram maiores para  $K_g$ , pois necessita resolver todo o sistema de equações lineares a cada iteração.  $K_g$  necessitou de menor número de iterações para as situações em que o pórtico é mais flexível.

O modelamento com maior número de nós intermediários nas barras verticais proporciona resultados de  $P-\Delta$ ,  $P-\Delta$  genérico e  $K_g$ s mais próximos de  $K_g$ .

Os esforços internos foram menores para situações com vinculações externas engastadas, trazendo menores efeitos não lineares geométricos. A articulação, nos exemplos mostrados, concentraram os efeitos de segunda ordem nas barras ligadas a eles.

## RECOMENDAÇÕES

Para os projetistas que não estão se preocupando com a inclusão da análise linear em seus projetos que o façam, pois está comprovado que esta é de supra importância.

Para os que comumente utilizam o método  $P-\Delta$  previsto pelas normas Brasileiras, atentar-se ao fato de que este não apresenta resultados definitivos, uma vez que pode ser necessário o modelamento com maior número de nós intermediários nas barras.

Este estudo pode ser expandido para outros tipos de estruturas, como por exemplo os pórticos espaciais, treliças planas e espaciais. Para tal, deve-se testar, para cada tipo de estrutura os métodos disponíveis.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas, NB8800, "**Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios**", Rio de Janeiro, R. J., 1988.

Birnstiel, C., Iffland, J. S. B., "**Factors influencing frame stability**", Journal of Structural Engineering, Vol 106, n.ST2, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Fevereiro 1980.

Campanari, F. A., "**Teoria das estruturas**", Editora Guanabara Dois, Vol. 1, Rio de Janeiro, R. J., 1985.

Chajes, A., Churchill, J. E., "**Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods**", Journal of Structural Engineering, Vol 113, n.06, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Junho de 1987.

Comitê Euro-International Du Beton, "**Bulletin D'informacion n.123**", Paris, 1977.

De Buen, O., "**Column Design in Steel Frames Under Gravity Loads**", Journal of Structural Engineering, Vol 118, n.10, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Outubro de 1992.

Franco, M. e Santos L. M., "**Instabilidade e efeitos de segunda ordem nas estruturas de concreto**", III simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto", São Paulo, Brasil, 1993.

Gaiotti, R., Smith, B. S., "**P-Delta Analysis of Building Structures**", Journal of Structural Engineering, Vol 115, n.04, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Abril de 1989.

---

Gere, J. M.; Weaver Júnior, W., "Análise de estruturas reticuladas", Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, R.J., 1981.

Loriggio, D. D., "Considerações sobre o dimensionamento de peças de madeira submetidas à flexo-compressão com a inclusão da não-linearidade geométrica", Ebramen V, Brasil, 1995.

Meagher, R. J., "Some aspects os second order structural analysis", Second national structural engineering conference, Austrália, 1990.

Moreira, D. F., "Análise Matricial das Estruturas", Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, S.P., 1977.

Penner, E. e Fusco, P. B., "A estabilidade de edifícios altos", Revista Técnica, São Paulo, Brasil, 1997.

Pitta, A. L. "Edifícios de pequena altura: normalização simplificada", Revista Ibracon, Ano IV, n. 16, São Paulo, SP, Dez/96 e Jan/97.

Poceski, A. M., "On the coupled action of the vertical and horizontal forces on frames", Ed. Pineridge Press. Sawnsea, UK, 1986.

Przemieniecki, J. S., "Teory of matrix structural analysis", Editora MacGraw-Hill, N.Y., U.S.A, 1968.

Rocha, A. M., "Concreto Armado", Livraria Nobel Editora-Distribuidora, Vol II, São Paulo - SP, Brasil, 1991.

Silva, R.M., “**Análise de edifícios altos - efeito P-Delta**”, Dissertação de mestrado, USP, São Paulo, S.P., 1988.

Zermiani, F. L., Logiggio, D. D. “**Matriz de Rigidez Geométrica para pórticos planos**”, Congresso Técnico e Científico de Engenharia Civil, Vol IV, Editora da UFSC, Brasil, Abril 1996.

Zienkiewics, O, C, “**The Finite Element Method**”, McGRAW-HILL Book Company, Berkshire, England, 1983.

## BIBLIOGRAFIA

Badawi, M., Cusens A. R., **“Symetry of the stiffness matrices for geometrically non-linear analysis”**, Communications in applied numerical methods, Vol. 8, 1992.

Baron, F., Venkatesan, M. S., **“Nonlinear formulations of beam-column effects”**, Journal of Structural Engineering, Vol 97, n.ST4, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Abril 1971.

Beaufait, F. W., etc e tal, **“Computer methods of structural analysis”**, Prentice-Hall Inc., N.J., U.S.A., 1970.

Birnstiel, C., Iffland, J. S. B., **“Factors influencing frame stability”**, Journal of Structural Engineering, Vol 106, n.ST2, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Fevereiro 1980.

Calzon, J. M., **“Metodos Matriciales para Calculo de Estructuras”**, Selecciones Gráficas, Madrid, 1970.

Chajes, A., **“Principles of structural stability theory”**, Editora Prentice-Hall, New York, 1974.

Cheong-Siat-Moy, F., Downs T., **“New interaction equation for steel beam-columns”**, Journal of Structural Engineering, Vol 106, n.ST5, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Maio 1980.

Cheong-Siat-Moy, F., **“K-factor paradox”**, Journal of Structural Engineering, Vol 112, n.8, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Agosto 1986.

---

Cheong-Siat-Moy, F., **“Column design in gravity-loaded frames”**, Journal of Structural Engineering, Vol 117, n.5, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Maio 1991.

De Zagotis, D., **“Introdução à teoria das estruturas”**, cap. 10, Editora da USP, São Paulo, S.P., 1980.

Disque, R. O., **“Applied plastic design in steel”**, Editora Van Nostrand Reinhold Company, New York, EUA, 1971.

Fusco, P. B., **“Estruturas de concreto, solicitações normais”**, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, R. J., 1981.

Gattass, M., Roehl, D. M., **“Análise lagrangeana atualizada de estruturas de aço especiais com rótulas e cargas distribuídas”**, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, S. C., Brasil, 1987.

Holzer, S.M. **“Computer analysis of structures”**, Editora Elsevier, New York, EUA, 1985.

Horne, M. R., Merchant W., **“The stability of frames”**, Editora Pergamon Press Ltd., Oxford, G.B., 1965.

Hughes, T. J. R., **“The finite element method”**, Editora Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

James Jr., E. M., Kozik, T. J., Martinez, J. E., **“Effect of curvature on nonlinear frame analyses”**, Journal of Structural Engineering, Vol 100, n.ST7, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Julho 1974.

King, W. S., White, D. W., Chen, W. F., **“Second-Order Inelastic Analysis Methods for Steel-Frame Design”**, Journal of Structural Engineering, Vol 118, n.02, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Fevereiro de 1992.

Lindsey, S. D., Goverdhan, A. V., Swensson, K. D., **“Discussion: K-factor paradox”**, Journal of Structural Engineering, Vol 114, n.9, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Setembro 1988.

Medeiros, S. R. P., França, R. L. S., **“Um programa para análise não linear geométrica em microcomputadores”**, Adendo dos anais do Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, São Paulo, S.P., 1989.

Moraes, P. D. de, **“Uma Formulação Mista de Elementos Finitos para a Análise Elastoplástica de Estruturas Reticulares”**, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, S.C., 1993.

Moreira, D. F., **“Análise Matricial das Estruturas”**, Editora da Universidade de São Paulo e Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, Brasil, 1977.

Oran C., **“Tangent stiffness in plane frames”**, Journal of Structural Engineering, Vol 99, n.ST6, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Junho 1973.

Oran C., **“Tangent stiffness in space frames”**, Journal of Structural Engineering, Vol 99, n.ST6, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Junho 1973.

Oran C., **“Geometric nonlinearity in nonprismatic members”**, Journal of Structural Engineering, Vol 100, n.ST7, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Julho 1974.

Pacitti, T.; Atkinson, C. P., **“Programação e métodos computacionais”**, Volume 2, 2a edição, Editora Livros Técnicos e Científicos, 1977.

Pfeil, W., **“Concreto Armado”**, Livros Técnicos e Científicos Editora, Vol II, 5ª edição, Rio de Janeiro, Brasil, 1988.

Pimenta da Cunha, A.J., Araújo Lima, N., Moreira de Souza, V.C., **“Acidentes estruturais na construção civil”**, Editora Pini, Vol I, Curitiba - PR, Brasil, outubro/96. Páginas 105 - 126. Artigo escrito por Péricles Brasiliense Fusco.

Puri, S. P. S., **“Discussion: K-factor paradox”**, Journal of Structural Engineering, Vol 114, n.9, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Setembro 1988.

Rachid, M., Mori, D. D., **“Instabilidade : Conceitos - Aplicação na flambagem por flexão”**, Dissertação de mestrado, USP, São Paulo, S.P., 1989.

Rajasekaran S., Murray, D. W., **“Incremental finite element matrices”**, Journal of Structural Engineering, Vol 99, n.ST12, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Dezembro 1973.

Roy, J. R., **“Numerical error in structural solutions”**, Journal of Structural Engineering, Vol. 97, n.ST4, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Abril 1971.

Ruggiero, M.A.G.; Lopes V. L. da R., **“Cálculo numérico - aspectos teóricos”**, Editora McGraw-Hill, São Paulo, S.P., 1988.

Scholz, H., **“P-Delta Effect Under Repeated Loading”**, Journal of Structural Engineering, Vol 116, n.08, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Agosto de 1990.

Scholz, H., **“P-Delta Effect in Elastic Analysis of Sway Frames”**, Journal of Structural Engineering, Vol 113, n.03, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Março de 1987.

---

Selke, C. A. C., Pereira, L. T. do V., **"Introdução ao método dos elementos finitos"**, Editora da UFSC, Florianópolis, S. C, 1994.

Soriano, H. L., **"Sistemas de equações algébricas lineares em problemas estruturais"**, Lisboa, 1981.

Stricklin, J. A., Haisler, W. E., Von Riesemann, W. A., **"Geometrically nonlinear structural analysis by direct stiffness method"**, Journal of Structural Engineering, Vol 97, n.ST9, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Setembro 1971.

Sussekind, J.C., **"Curso de análise estrutural"**, Vol 2, Editora Globo, Porto Alegre, R. S. e Editora da USP, São Paulo, S.P., 1976.

Vasquez, J. A. R., Rosas e Silva, R., **"Estudo comparativo de matrizes geométricas para análise da estabilidade de pórticos espaciais"**, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, S. C., Brasil, 1987.

Victor, M.S.L, Venâncio Filho, F., **"Considerações sobre a não-linearidade geométrica em estruturas reticulares"**, Editora da EPUSP, São Paulo & Editora da COPPE, Rio de Janeiro, 1982.

Wen, R. K., Rahimzadeh, J., **"Nonlinear Elastic analysis by finite element"**, Journal of Structural Engineering, Vol 109, n.8, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Agosto 1983.

White, R.N.; Gergely, P.; Sexsmith R. G., **"Structural engineering - Indeterminate structures"**, volume 2, Editora Wiley, New York, EUA, 1972.

---

Yang, Y., McGuire, W., **“Joint rotation and geometric nonlinear analysis”**, Journal of Structural Engineering, Vol 112, n.4, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Abril 1986.

Yang, Y., McGuire, W., **“Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis”**, Journal of Structural Engineering, Vol 112, n.4, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Abril 1986.

Yura, J. A., **“Discussion: K-factor paradox”**, Journal of Structural Engineering, Vol 114, n.9, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Setembro 1988.

## ANEXO 01

### PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS COM ANÁLISE LINEAR

Seque abaixo a transcrição do programa principal que faz a análise linear de pórticos planos, utilizando o método dos deslocamentos, com programação por análise matricial de estruturas. Este programa originou-se de trabalhos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Engenharia Civil, em projetos de pesquisa do Laboratório de Experimentação de Estruturas.

#### PROGRAMA PRINCIPAL

Declara os subprogramas. Esta é a primeira parte do programa principal, onde são declaradas as subrotinas do programa, as variáveis entre parênteses representam os valores que serão trocados entre o programa central e as subrotinas.

```
DECLARE SUB calesforcos (nbarras!, resul!(), matglob!(), incid!(), x!(), mattran!(), esfor!())
DECLARE SUB leincidencia (nbarras!, incid!())
DECLARE SUB esforcono (F!())
DECLARE SUB termoindp (nbarras!, nnos!, carreg!(), l!(), incid!(), ang!(), mattramp!(), resul!(), F!(), b!())
DECLARE SUB testaglr (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(), b!())
DECLARE SUB resolmat (ne!, nbarras!, incid!(), a!(), b!(), x!())
DECLARE SUB restrgl (gl!, valor!, ngl!, b!(), matest!())
DECLARE SUB testaglr (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(), b!())
DECLARE SUB lerestr (nr!, restr!())
DECLARE SUB matrizestrut (nbarras!, incid!(), matglob!(), matest!())
DECLARE SUB impressao (nnos!, ngl!, nos!(), nbarras!, prop!(), carreg!(), incid!(), l!(), ang!(), matloc!(), x!(), esfor!())
DECLARE SUB lecargas (nbarras!, carreg!())
DECLARE SUB leprop (nbarras!, prop!())
DECLARE SUB comprimento (nbarras!, incid!(), nos!(), l!(), ang!())
DECLARE SUB lenos (nnos!, nos!())
DECLARE SUB incidencia (nbarras!, incid!())
DECLARE SUB matrizlocal (nbarras!, prop!(), l!(), matloc!())
DECLARE SUB matriztran (nbarras!, ang!(), mattramp!(), mattran!(), matloc!(), matglob!())
```

#### CLS

Definição de variáveis. Aqui são definidos os tamanhos máximos dos vetores e das matrizes que as variáveis representam.

```
DIM nos(50, 2), incid(50, 2), l(50), ang(50), matglob(50, 6, 6), matest(100, 100), mattramp(50, 6, 6)
DIM carreg(50, 2), prop(50, 3), matloc(50, 6, 6), mattran(50, 6, 6), restr(100, 7), esfor(100, 6)
DIM a(100, 100), b(100), c(100), mat(50, 6, 6), FO(6), resul(100, 6), F0(100), F(100), x(100)
```

Abre os arquivos de entrada e de saída. A extensão ".dad" indica o arquivo de entrada e o arquivo ".sad" indica o arquivo de saída.

```
OPEN "i", #1, "5sport.dad"
OPEN "o", #2, "5portn.sad"
```

Chama os subprogramas. O comando CALL chama os subprogramas, cada um deles possui uma função específica.

```
CALL lenos(nnos, nos())
CALL leprop(nbarras, prop())
CALL lecargas(nbarras, carreg())
CALL leincidencia(nbarras, incid())
CALL comprimento(nbarras, incid(), nos(), l(), ang())
CALL matrizlocal(nbarras, prop(), l(), matloc())
CALL matriztran(nbarras, ang(), mattramp(), mattran(), matloc(), matglob())
CALL matrizestrut(nbarras, incid(), matglob(), matest())
CALL esforcono(F())
CALL termoindp(nbarras, nnos, carreg(), l(), incid(), ang(), mattramp(), resul(), F(), b())
CALL lerestr(nr, restr())
CALL testaglr(nnos, ngl, restr(), matest(), b())
CALL resolmat(ngl, nbarras, incid(), matest(), b(), x())
CALL calesforcos(nbarras, resul(), matglob(), incid(), x(), mattran(), esfor())
```

Preenche o arquivo de entrada com os dados de saída.

```
CALL impressao(nnos, ngl, nos(), nbarras, prop(), carreg(), incid(), l(), ang(), matloc(), x(), esfor())
```

Fecha os arquivos de entrada e saída de dados.

```
CLOSE #1
```

```
CLOSE #2
```

```
INPUT z
```

Finaliza o programa.

```
END
```

#### SUBROTINAS

As subrotinas serão apresentadas aqui na ordem que são citadas no programa principal.

A subrotina LENOS, lê, do arquivo de entrada, o número de nós (NNOS) e as coordenadas X e Y de cada um dos nós. Todas estas informações são armazenadas na matriz NOS.

```
SUB lenos (nnos, nos())
INPUT #1, nnos
```

```

nos(0, 1) = nnos
FOR d = 1 TO nos(0, 1)
    INPUT #1, x
    INPUT #1, y
    nos(d, 1) = x
    nos(d, 2) = y
NEXT d
END SUB
    
```

A subrotina LEPROP, lê, do arquivo de entrada, as propriedades físicas e geométricas de cada uma das barras da estrutura plana. A variável "NBARRAS" representa o número de barras, "E" representa o módulo de elasticidade do material, "I" representa o momento de inércia, "A" representa a área da seção transversal. Estes dados serão armazenados na matriz "PROP".

```

SUB leprop (nbarras, prop())
    INPUT #1, nbarras
    prop(0, 1) = nbarras
    FOR nbcont = 1 TO prop(0, 1)
        INPUT #1, e
        INPUT #1, i
        INPUT #1, a
        prop(nbcont, 1) = e
        prop(nbcont, 2) = i
        prop(nbcont, 3) = a
    NEXT nbcont
END SUB
    
```

A subrotina LECARGAS, lê, do arquivo de entrada, a carga concentrada no meio do vão (P) e a carga distribuída (Q), para cada uma das barras. Estes dados serão armazenados na matriz "CARREG".

```

SUB lecargas (nbarras, carreg())
    FOR nbcont = 1 TO nbarras
        INPUT #1, q
        INPUT #1, p
        carreg(nbcont, 1) = q
        carreg(nbcont, 2) = p
    NEXT nbcont
END SUB
    
```

A subrotina LEINCIDENCIA, lê, do arquivo de entrada, os nós de incidência inicial e final de cada barra. Estes dados são armazenados na matriz "INCID".

```

SUB leincidencia (nbarras, incid())
    FOR b = 1 TO nbarras
        INPUT #1, k
        INPUT #1, j
        incid(b, 1) = k
        incid(b, 2) = j
    NEXT b
END SUB
    
```

A subrotina COMPRIMENTO calcula o comprimento das barras e o ângulo da mesma.

```

SUB comprimento (nbarras, incid(), nos(), l(), ang())
    FOR b = 1 TO nbarras
        xi = nos(incid(b, 1), 1)
    
```

```

        yi = nos(incid(b, 1), 2)
        xf = nos(incid(b, 2), 1)
        yf = nos(incid(b, 2), 2)
    
```

Calcula o comprimento das barras

```

        l(b) = SQR(((xf - xi) ^ 2) + ((yf - yi) ^ 2))
    
```

Calcula os ângulos das barras

```

        IF xf > xi AND yf = yi THEN ang(b) = 0
    
```

```

        IF xf < xi AND yf = yi THEN ang(b) = 3.141592654#
    
```

```

        IF xf = xi AND yf > yi THEN ang(b) = 1.570796327#
    
```

```

        IF xf = xi AND yf < yi THEN ang(b) = 4.71238898#
    
```

```

        IF xf > xi AND yf > yi THEN ang(b) = ATN((yf - yi) /
(xf - xi))1 Q
    
```

```

        IF xf < xi AND yf > yi THEN ang(b) = 3.141592654# -
ATN((yf - yi) / (xf - xi))2 Q
    
```

```

        IF xf < xi AND yf < yi THEN ang(b) = 3.141592654#
+ ATN((yf - yi) / (xf - xi))3 Q
    
```

```

        IF xf > xi AND yf < yi THEN ang(b) = 6.283185307# -
ATN((yf - yi) / (xf - xi))4 Q
    
```

```

        NEXT b
    
```

```

END SUB
    
```

A subrotina MATRIZLOCAL, calcula a matriz de rigidez no sistema local, a partir das propriedades físicas e geométricas, e armazena em "MATLOC".

```

SUB matrizlocal (nbarras, prop(), l(), matloc())
    
```

```

    FOR nbcont = 1 TO nbarras
    
```

```

        i = prop(nbcont, 2)
    
```

```

        e = prop(nbcont, 1)
    
```

```

        a = prop(nbcont, 3)
    
```

```

        matloc(nbcont, 1, 1) = e * a / l(nbcont)
    
```

```

        matloc(nbcont, 1, 4) = -matloc(nbcont, 1, 1)
    
```

```

        matloc(nbcont, 2, 2) = 12 * e * i / (l(nbcont) ^ 3)
    
```

```

        matloc(nbcont, 2, 3) = 6 * e * i / (l(nbcont) ^ 2)
    
```

```

        matloc(nbcont, 2, 5) = -matloc(nbcont, 2, 2)
    
```

```

        matloc(nbcont, 2, 6) = matloc(nbcont, 2, 3)
    
```

```

        matloc(nbcont, 3, 3) = 4 * e * i / l(nbcont)
    
```

```

        matloc(nbcont, 3, 5) = -matloc(nbcont, 2, 3)
    
```

```

        matloc(nbcont, 3, 6) = 2 * e * i / l(nbcont)
    
```

```

        matloc(nbcont, 4, 4) = matloc(nbcont, 1, 1)
    
```

```

        matloc(nbcont, 5, 5) = matloc(nbcont, 2, 2)
    
```

```

        matloc(nbcont, 5, 6) = -matloc(nbcont, 2, 3)
    
```

```

        matloc(nbcont, 6, 6) = matloc(nbcont, 3, 3)
    
```

```

    FOR c = 2 TO 6
    
```

```

        FOR b = 1 TO 6
    
```

```

            IF c > b THEN
    
```

```

                matloc(nbcont, c, b) = matloc(nbcont, b, c)
    
```

```

            END IF
    
```

```

        NEXT b
    
```

```

    NEXT nbcont
    
```

```

END SUB
    
```

A subrotina MATRIZTRAN cria a matriz de transformação entre os sistemas local e global, cria sua transposta e faz a transformação da matriz de rigidez de cada uma das barras dos sistemas local para o sistema global.

```

SUB matriztran (nbarras, ang(), mattramp(), mattran(),
matloc(), matglob())
    DIM mat(50, 6, 6)
    
```

```

FOR nbcont = 1 TO nbarras
Cálculo da matriz de transformação
  mattran(nbcont, 1, 1) = COS(ang(nbcont))
  mattran(nbcont, 1, 2) = SIN(ang(nbcont))
  mattran(nbcont, 2, 1) = -mattran(nbcont, 1, 2)
  mattran(nbcont, 2, 2) = mattran(nbcont, 1, 1)
  mattran(nbcont, 3, 3) = 1
  mattran(nbcont, 4, 4) = mattran(nbcont, 1, 1)
  mattran(nbcont, 4, 5) = mattran(nbcont, 1, 2)
  mattran(nbcont, 5, 4) = -mattran(nbcont, 1, 2)
  mattran(nbcont, 5, 5) = mattran(nbcont, 1, 1)
  mattran(nbcont, 6, 6) = 1
Cálculo da transposta da matriz de transformação
FOR b = 1 TO 6
  FOR c = 1 TO 6
    mattramp(nbcont, b, c) = mattran(nbcont, c, b)
  NEXT c
NEXT b
NEXT nbcont
Cálculo da transformação da matriz de rigidez da barra
dos sistemas local para o global
FOR nbcont = 1 TO nbarras
  FOR c = 1 TO 6
    FOR d = 1 TO 6
      FOR F = 1 TO 6
        mat(nbcont, c, d) = mat(nbcont, c, d) +
(mattramp(nbcont, c, F) * matloc(nbcont, F, d))
      NEXT F
    NEXT d
  NEXT c
NEXT nbcont
FOR nbcont = 1 TO nbarras
  FOR c = 1 TO 6
    FOR d = 1 TO 6
      FOR F = 1 TO 6
        matglob(nbcont, c, d) = matglob(nbcont, c, d) +
(mat(nbcont, c, F) * mattran(nbcont, F, d))
      NEXT F
    NEXT d
  NEXT c
NEXT nbcont
END SUB

```

A subrotina MATRIZESTRUT monta a matriz de rigidez da estrutura a partir das matrizes de rigidez no sistema global de cada barra.

```

SUB matrizestrut (nbarras, incid(), matglob(), matest())
FOR b = 1 TO nbarras
  k = incid(b, 1)
  j = incid(b, 2)
  a = 3 * k - 2
  c = 3 * k - 1
  d = 3 * k
  e = 3 * j - 2
  F = 3 * j - 1
  g = 3 * j
  matest(a, a) = matglob(b, 1, 1) + matest(a, a)
  matest(a, c) = matglob(b, 1, 2) + matest(a, c)
  matest(a, d) = matglob(b, 1, 3) + matest(a, d)

```

```

  matest(a, e) = matglob(b, 1, 4) + matest(a, e)
  matest(a, F) = matglob(b, 1, 5) + matest(a, F)
  matest(a, g) = matglob(b, 1, 6) + matest(a, g)
  matest(c, a) = matglob(b, 2, 1) + matest(c, a)
  matest(c, c) = matglob(b, 2, 2) + matest(c, c)
  matest(c, d) = matglob(b, 2, 3) + matest(c, d)
  matest(c, e) = matglob(b, 2, 4) + matest(c, e)
  matest(c, F) = matglob(b, 2, 5) + matest(c, F)
  matest(c, g) = matglob(b, 2, 6) + matest(c, g)
  matest(d, a) = matglob(b, 3, 1) + matest(d, a)
  matest(d, c) = matglob(b, 3, 2) + matest(d, c)
  matest(d, d) = matglob(b, 3, 3) + matest(d, d)
  matest(d, e) = matglob(b, 3, 4) + matest(d, e)
  matest(d, F) = matglob(b, 3, 5) + matest(d, F)
  matest(d, g) = matglob(b, 3, 6) + matest(d, g)
  matest(e, a) = matglob(b, 4, 1) + matest(e, a)
  matest(e, c) = matglob(b, 4, 2) + matest(e, c)
  matest(e, d) = matglob(b, 4, 3) + matest(e, d)
  matest(e, e) = matglob(b, 4, 4) + matest(e, e)
  matest(e, F) = matglob(b, 4, 5) + matest(e, F)
  matest(e, g) = matglob(b, 4, 6) + matest(e, g)
  matest(F, a) = matglob(b, 5, 1) + matest(F, a)
  matest(F, c) = matglob(b, 5, 2) + matest(F, c)
  matest(F, d) = matglob(b, 5, 3) + matest(F, d)
  matest(F, e) = matglob(b, 5, 4) + matest(F, e)
  matest(F, F) = matglob(b, 5, 5) + matest(F, F)
  matest(F, g) = matglob(b, 5, 6) + matest(F, g)
  matest(g, a) = matglob(b, 6, 1) + matest(g, a)
  matest(g, c) = matglob(b, 6, 2) + matest(g, c)
  matest(g, d) = matglob(b, 6, 3) + matest(g, d)
  matest(g, e) = matglob(b, 6, 4) + matest(g, e)
  matest(g, F) = matglob(b, 6, 5) + matest(g, F)
  matest(g, g) = matglob(b, 6, 6) + matest(g, g)
NEXT b
END SUB

```

A subrotina ESFORCONO, lê, do arquivo de entrada, o número de nós, o número dos nós onde existem esforços nodais e seus valores. Armazena estes dados na matriz "F".

```

SUB esforcono (F())
INPUT #1, nf
F(0) = nf
FOR b = 1 TO nf
  INPUT #1, noF
  INPUT #1, Fx
  INPUT #1, Fy
  INPUT #1, mi
  c = 3 * noF - 2
  d = 3 * noF - 1
  t = 3 * noF
  F(c) = Fx
  F(d) = Fy
  F(t) = mi
NEXT b
END SUB

```

A subrotina TERMOINDEP monta a matriz de esforços de engastamento perfeito no sistema local.

Posteriormente realiza a multiplicação dessa matriz pela matriz de transformação transposta. Deduz dos esforços de engastamento perfeito os valores dos esforços aplicados a cada barra.

SUB termoindep (nbarras, nnos, carreg(), l(), incid(), ang(), mattramp(), resul(), F(), b())

```

DIM FO(6), F0(100)
FOR i = 1 TO nbarras
  j = incid(i, 1)
  k = incid(i, 2)
  c = 3 * j - 2
  d = 3 * j - 1
  t = 3 * j
  g = 3 * k - 2
  h = 3 * k - 1
  m = 3 * k
  q = carreg(i, 1)
  p = carreg(i, 2)
  p2 = q * l(i)
  pt = p + p2
  FO(1) = 0
  FO(2) = pt / 2
  FO(3) = (p * l(i) / 8) + (q * l(i) ^ 2 / 12)
  FO(4) = 0
  FO(5) = pt / 2
  FO(6) = -(p * l(i) / 8) + (q * l(i) ^ 2 / 12))
  IF ang(i) < 0 THEN
    FOR lin = 1 TO 6
      FOR col = 1 TO 6
        resul(i, lin) = (resul(i, lin) + (mattramp(i, lin, col) *
FO(col)))
      NEXT col
    NEXT lin
  END IF
  IF ang(i) = 0 THEN
    FOR b = 1 TO 6
      resul(i, b) = FO(b)
    NEXT b
  END IF
  FO(c) = resul(i, 1) + FO(c)
  FO(d) = resul(i, 2) + FO(d)
  FO(t) = resul(i, 3) + FO(t)
  FO(g) = resul(i, 4) + FO(g)
  FO(h) = resul(i, 5) + FO(h)
  FO(m) = resul(i, 6) + FO(m)
NEXT i
FOR i = 1 TO nnos * 3
  b(i) = F(i) - FO(i)
NEXT i
END SUB

```

A subrotina LEREST, lê, do arquivo de entrada, o número de nós com restrição, o número do nó onde elas existem, e os códigos que as definem. Armazena na matriz "restr".

```

SUB lerestr (nr, restr())
  INPUT #1, nr
  restr(0, 1) = nr
  FOR d = 1 TO nr

```

```

  INPUT #1, nores
  INPUT #1, codx
  INPUT #1, cody
  INPUT #1, codz
  INPUT #1, valx
  INPUT #1, valy
  INPUT #1, valz
  restr(d, 1) = nores
  restr(d, 2) = codx
  restr(d, 3) = cody
  restr(d, 4) = codz
  restr(d, 5) = valx
  restr(d, 6) = valy
  restr(d, 7) = valz
NEXT d
END SUB

```

A subrotina TESTAGLR, verifica os códigos de restrição dos graus de liberdade.

```

SUB testaglr (nnos, ngl, restr(), matest(), b())
  ngl = nnos * 3
  nr = restr(0, 1)
  FOR cr = 1 TO nr
    IF restr(cr, 2) = 1 THEN
      gl = 3 * restr(cr, 1) - 2
      valor = restr(cr, 5)
      CALL restrgl(gl, valor, ngl, b(), matest())
    END IF
    IF restr(cr, 3) = 1 THEN
      gl = 3 * restr(cr, 1) - 1
      valor = restr(cr, 6)
      CALL restrgl(gl, valor, ngl, b(), matest())
    END IF
    IF restr(cr, 4) = 1 THEN
      gl = 3 * restr(cr, 1)
      valor = restr(cr, 7)
      CALL restrgl(gl, valor, ngl, b(), matest())
    END IF
  NEXT cr
END SUB

```

A subrotina RESTRGL altera a matriz de rigidez da estrutura para por as condições de contorno. Coloca nas linhas e colunas onde deve ser inserida a condição de contorno, valores ZEROS, e, valor UM, no termo da diagonal. Na matriz dos termos independentes, nas linhas correspondentes às restrições, substitui-se o valor original pelo valor da restrição obtida da matriz "RESTR", na subrotina TESTAGLR.

```

SUB restrgl (gl, valor, ngl, b(), matest())
  FOR linha = 1 TO ngl
    b(linha) = b(linha) - matest(linha, gl) * valor
    matest(linha, gl) = 0
  NEXT linha
  FOR col = 1 TO ngl
    matest(gl, col) = 0
  NEXT col
  matest(gl, gl) = 1
  b(gl) = valor

```

END SUB

A subrotina RESOLMAT resolve o sistema de equações lineares por banda simétrica, usando uma matriz auxiliar para armazenar a matriz banda superior da matriz global da estrutura. Seja:

ms = metade da largura de banda + diagonal principal

n = numero de elementos da coluna da matriz a

b = matriz dos termos independentes; vai conter os valores das

incógnitas procuradas pela resolução

a = matriz que contem os coeficientes

de rigidez

SUB resolmat (ne, nbarras, incid(), matest(), b(), x())

DIM a(120, 120), d(100)

Equações lineares

n = ne

FOR m = 1 TO nbarras

Cálculo da largura de banda

g = ABS(incid(m, 1) - incid(m, 2)) \* 3 + 3

IF ms < g THEN

ms = g

END IF

NEXT m

Armazena matriz de banda simétrica superior

e = 0

FOR m = 1 TO n

FOR h = 1 TO ms

a(m, h) = matest(m, h + e)

NEXT h

e = e + 1

NEXT m

Resolução do sistema da matriz de banda simétrica

n1 = n - 1

FOR k = 1 TO n1

c = a(k, 1)

k1 = k + 1

IF (ABS(c) - .000001) <= 0 THEN

PRINT #2, "singularidade na linha", k

END

END IF

Divide a linha por coeficiente da diagonal

ni = (k1 + ms) - 2

IF ni <= n THEN

l = ni

ELSE

l = n

END IF

FOR j = 2 TO ms

d(j) = a(k, j)

NEXT j

FOR j = k1 TO 1

k2 = (j - k) + 1

a(k, k2) = a(k, k2) / c

NEXT j

b(k) = b(k) / c

FOR i = k1 TO 1

k2 = (i - k1) + 2

c = d(k2)

FOR j = i TO 1

k2 = (j - i) + 1

k3 = (j - k) + 1

a(i, k2) = a(i, k2) - c \* a(k, k3)

NEXT j

b(i) = b(i) - c \* b(k)

NEXT i

NEXT k

IF (ABS(a(n, 1)) - .000001) >= 0 THEN

b(n) = b(n) / a(n, 1)

END IF

FOR i = 1 TO n1

k = n - i

k1 = k + 1

ni = (k1 + ms) - 2

IF ni <= n THEN

l = ni

ELSE

l = n

END IF

FOR j = k1 TO 1

k2 = (j - k) + 1

b(k) = b(k) - a(k, k2) \* b(j)

x(k) = b(k)

NEXT j

NEXT i

END SUB

A subrotina CALESFORCOS, calcula os esforços nas barras, segundo o seu sistema local de referência.

SUB calesforcos (nbarras, resul(), matglob(), incid(), x(), mattran(), esfor())

DIM b(100, 6), aux(100, 6), esfglob(100, 6)

FOR i = 1 TO nbarras

j = incid(i, 1)

k = incid(i, 2)

c = 3 \* j - 2

d = 3 \* j - 1

t = 3 \* j

g = 3 \* k - 2

h = 3 \* k - 1

m = 3 \* k

b(i, 1) = x(c)

b(i, 2) = x(d)

b(i, 3) = x(t)

b(i, 4) = x(g)

b(i, 5) = x(h)

b(i, 6) = x(m)

FOR lin = 1 TO 6

FOR col = 1 TO 6

aux(i, lin) = (aux(i, lin) + (matglob(i, lin, col) \* b(i, col)))

NEXT col

esfglob(i, lin) = aux(i, lin) + resul(i, lin)

NEXT lin

NEXT i

```

FOR i = 1 TO nbarras
  FOR o = 1 TO 6
    FOR z = 1 TO 6
      esfor(i, o) = (esfor(i, o) + (mattran(i, o, z) *
esfglob(i, z)))
    NEXT z
  NEXT o
NEXT i
END SUB
    
```

```

PRINT #2, "ESFORCO NO NO", incid(i, 1)
PRINT #2, "esforco em x =", esforco(i, 1)
PRINT #2, "esforco em y =", esforco(i, 2)
PRINT #2, "esforco em z =", esforco(i, 3)
PRINT #2, "ESFORCO NO NO", incid(i, 2)
PRINT #2, "esforco em x =", esforco(i, 4)
PRINT #2, "esforco em y =", esforco(i, 5)
PRINT #2, "esforco em z =", esforco(i, 6)
PRINT #2,
NEXT i
END SUB
    
```

A subrotina IMPRESSAO preenche o arquivo de saída com os dados de entrada da estrutura e os dados calculados, os esforços nas barras.

```

SUB impressao (nmos, ngl, nos(), nbarras, prop(),
carreg(), incid(), l(), ang(), matloc(), x(), esforco())
PRINT #2, "numero de nos =", nmos
PRINT #2, "numero de barras =", nbarras
FOR b = 1 TO nmos
  PRINT #2,
  PRINT #2, "COORDENADAS DO NO", b
  PRINT #2, "coordenada x do no", b, "=", nos(b, 1)
  PRINT #2, "coordenada y do no", b, "=", nos(b, 2)
NEXT b
FOR b = 1 TO nbarras
  PRINT #2,
  PRINT #2, "PROPRIEDADES DA BARRA", b
  PRINT #2, "modulo de elasticidade da barra", b, "=",
prop(b, 1)
  PRINT #2, "momento de inercia da barra", b, "=",
prop(b, 2)
  PRINT #2, "area da barra", b, "=", prop(b, 3)
  PRINT #2, " "
  PRINT #2, "INCIDENCIAS DA BARRA", b
  PRINT #2, "no inicial da barra", b, "=", incid(b, 1)
  PRINT #2, "no final da barra", b, "=", incid(b, 2)
  PRINT #2, " "
  PRINT #2, "COMPREIMENTO/ANGULO DA
BARRA", b
  PRINT #2, "comprimento da barra", b, "=", l(b)
  PRINT #2, "angulo da barra", b, "=", ang(b) *
57.29577951#
  PRINT #2, " "
  PRINT #2, " "
NEXT b
PRINT #2,
PRINT #2, "DESLOCAMENTOS"
FOR i = 1 TO nmos
  b = i * 3 - 2
  c = i * 3 - 1
  a = i * 3
  PRINT #2, "DESLOCAMENTO", b, "=", x(b)
  PRINT #2, "DESLOCAMENTO", c, "=", x(c)
  PRINT #2, "ROTACAO", a, "=", x(a)
NEXT i
PRINT #2,
PRINT #2, "ESFORCOS NAS BARRAS"
FOR i = 1 TO nbarras
  PRINT #2, "BARRA", i
  PRINT #2,
    
```

**ANEXO 02 - PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DE  
PÓRTICOS PLANOS PELO PROCESSO P-Δ,  
SEGUNDO A NBR8800.**

Seque abaixo a descrição do programa principal que faz, inicialmente, a análise linear de pórticos planos, utilizando o método dos deslocamentos, com programação por análise matricial de estruturas. Com os resultados da análise linear, faz, por um processo iterativo, a análise não-linear geométrica pelo método P-Δ das barras verticais, segundo o preconizado pela NBR 8800 [(1988).

Está apresentado o programa principal e as subrotinas que diferem das anteriormente apresentadas.

**PROGRAMA PRINCIPAL**

Declara os subprogramas. Esta é a primeira parte do programa principal, onde são declaradas as subrotinas do programa, as variáveis entre parênteses representam os valores que serão trocados entre o programa central e as subrotinas.

```
DECLARE SUB calesforcos (nbarras!, resul!(), matglob!(),  
incid!(), x!(), mattran!(), esfor!())  
DECLARE SUB leincidencia (nbarras!, incid!())  
DECLARE SUB esforcono (F!())  
DECLARE SUB termoinddep (nbarras!, nnos!, carreg!(), l!(),  
incid!(), ang!(), mattramp!(), resul!(), F!(), b!())  
DECLARE SUB testagl (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(), b!())  
DECLARE SUB restrgl (gl!, valor!, ngl!, b!(), matest!())  
DECLARE SUB testagl (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(), b!())  
DECLARE SUB lerestr (nr!, restr!())  
DECLARE SUB matrizestrut (nbarras!, incid!(), matglob!(),  
matest!())  
DECLARE SUB impressao (nnos!, ngl!, nos!(), nbarras!,  
prop!(), carreg!(), incid!(), l!(), ang!(), matloc!(), x!(), esfor!())  
DECLARE SUB lecargas (nbarras!, carreg!())  
DECLARE SUB leprop (nbarras!, prop!())  
DECLARE SUB comprimento (nbarras!, incid!(), nos!(), l!(),  
ang!())  
DECLARE SUB lenos (nnos!, nos!())  
DECLARE SUB incidencia (nbarras!, incid!())  
DECLARE SUB matrizlocal (nbarras!, prop!(), l!(), matloc!())  
DECLARE SUB matriztran (nbarras!, ang!(), mattramp!(),  
mattran!(), matloc!(), matglob!())  
DECLARE SUB ident (ngl!, i!())  
DECLARE SUB invmat (ngl!, nbarras!, incid!(), matest!(),  
i!(), b!(), x!())  
DECLARE SUB pdelta (nbarras!, ang!(), incid!(), x!(),  
esforco!(), l!(), b!(), ngl!, i!(), x2!(), b1!())  
DECLARE SUB convergencia (ngl!, x!(), x2!(), dif!())  
DECLARE SUB desenho (nos!(), nbarras!, incid!(), ang!(),  
esfor!(), l!(), escal!, escala2!, z!())  
DECLARE SUB escala (maior!, maior2!, nos!(), esfor!(),  
escal!, escala2!, nbarras!)  
DECLARE SUB recalesforcos (nbarras!, resul!(), matglob!(),  
incid!(), x2!(), mattran!(), esfor!())
```

**CLS**

Definição de variáveis. Aqui são definidos os tamanhos máximos dos vetores e das matrizes que as variáveis representam.

```
DIM nos(50, 2), incid(50, 2), l(50), ang(50), matglob(50, 6,  
6), matest(100, 100), mattramp(50, 6, 6), b1(100)  
DIM carreg(50, 2), prop(50, 3), matloc(50, 6, 6), mattran(50,  
6, 6), restr(100, 7), esfor(100, 6), i(120, 120)  
DIM a(100, 100), b(100), c(100), mat(50, 6, 6), FO(6),  
resul(100, 6), F0(100), F(100), x(100), x2(100), dif(100)
```

Abre os arquivos de entrada e de saída. A extensão ".dad" indica o arquivo de entrada e o arquivo ".sad" indica o arquivo de saída.

```
OPEN "i", #1, "5port.dad"
```

```
OPEN "o", #2, "5portn.sad"
```

Chama os subprogramas. O comando CALL chama os subprogramas, cada um deles possui uma função específica.

```
CALL lenos(nnos, nos())
```

```
CALL leprop(nbarras, prop())
```

```
CALL lecargas(nbarras, carreg())
```

```
CALL leincidencia(nbarras, incid())
```

```
CALL comprimento(nbarras, incid(), nos(), l(), ang())
```

```
CALL matrizlocal(nbarras, prop(), l(), matloc())
```

```
CALL matriztran(nbarras, ang(), mattramp(), mattran(),  
matloc(), matglob())
```

```
CALL matrizestrut(nbarras, incid(), matglob(), matest())
```

```
CALL esforcono(F())
```

```
CALL termoinddep(nbarras, nnos, carreg(), l(), incid(), ang(),  
mattramp(), resul(), F(), b())
```

```
CALL lerestr(nr, restr())
```

```
CALL testagl(nnos, ngl, restr(), matest(), b())
```

```
CALL ident(ngl, i())
```

```
CALL invmat(ngl, nbarras, incid(), matest(), i(), b(), x())
```

```
CALL calesforcos(nbarras, resul(), matglob(), incid(), x(),  
mattran(), esfor())
```

```
CALL escala(maior, maior2, nos(), esfor(), escal, escala2,  
nbarras)
```

```
z = 9
```

```
CALL desenho(nos(), nbarras, incid(), ang(), esfor(), l(),  
escal, escala2, z)
```

```
INPUT z
```

Resolve a parte não linear geométrica pelo processo P-DELTA. Esta parte do programa principal é que determina a quantidade de iterações necessárias para assegurar a convergência de 1,00 %. Esta convergência pode ser alterada assumindo um novo valor ao valor ".01" em negrito abaixo.

```
FOR numero = 1 TO 10
```

```
CALL pdelta(nbarras, ang(), incid(), x(), esfor(), l(), b(), ngl,  
i(), x2(), b1())
```

```
CALL convergencia(ngl, x(), x2(), dif())
```

```
r = 0
```

```
FOR a = 1 TO ngl
```

```
IF dif(a) < .01 THEN r = r + 1
```

```
z = numero
```

```
IF r = ngl THEN numero = 10
```

```
NEXT a
```

```
NEXT numero
```

```
PRINT z
z = 10
    Recalcula os esforços nas barras após a análise não
    linear geométrica pelo processo P-DELTA.
CALL recalcesforcos(nbarras, resul(), matglob(), incid(), x2(),
mattran(), esfor())
    Preenche o arquivo de entrada com os dados de
    saída.
CALL impressao(nnos, ngl, nos(), nbarras, prop(), carreg(),
incid(), l(), ang(), matloc(), x(), esfor())
    Desenha as barras da estrutura com os momentos
    não lineares, deixando em sobreplano os momentos lineares.
CALL escala(maior, maior2, nos(), esfor(), escal, escala2,
nbarras)
CALL desenho(nos(), nbarras, incid(), ang(), esfor(), l(),
escal, escala2, z)
    Fecha os arquivos de entrada e saída de dados.
CLOSE #1
CLOSE #2
INPUT z
    Finaliza o programa.
END
```

#### SUB ROTINAS

As subrotinas serão apresentadas aqui na ordem que são citadas no programa principal e são diferentes das apresentadas no anexo 01.

A subrotina IDENT cria uma matriz identidade, para uso posterior.

```
SUB ident (ngl, i())
n = ngl
FOR a = 1 TO n
FOR b = 1 TO n
IF a <> b THEN
i(a, b) = 0
END IF
IF a = b THEN
i(a, b) = 1
END IF
NEXT b
NEXT a
END SUB
```

A subrotina INVMAT resolve o sistema linear de equações pelo processo de inversão de matrizes. Inicialmente aplica o Método de Escalonamento de Gauss na matriz identidade e na matriz de rigidez da estrutura, transformando-as na inversa da matriz de rigidez e na matriz identidade, respectivamente. Logo após, resolve o sistema, encontrando os deslocamentos incógnitas do método.

```
SUB invmat (ngl, nbarras, incid(), matest(), i(), b(), x())
n = ngl
FOR d = 1 TO (n - 1)
FOR a = 1 TO (n - d)
pivo = matest(d + a, d) / matest(d, d)
FOR b = 1 TO n
```

```
matest(a + d, b) = -matest(a + d, b) + (matest(d, b) * pivo)
i(a + d, b) = -i(a + d, b) + (i(d, b) * pivo)
NEXT b
NEXT a
NEXT d
FOR d = n TO 2 STEP -1
FOR a = (d - 1) TO 1 STEP -1
pivo = matest(d - a, d) / matest(d, d)
FOR b = 1 TO n
matest(d - a, b) = -matest(d - a, b) + (matest(d, b) * pivo)
i(d - a, b) = -i(d - a, b) + (i(d, b) * pivo)
NEXT b
NEXT a
NEXT d
FOR a = 1 TO n
pivo = matest(a, a)
FOR b = 1 TO n
matest(a, b) = matest(a, b) / pivo
i(a, b) = i(a, b) / pivo
NEXT b
NEXT a
FOR a = 1 TO ngl
c = 0
FOR b = 1 TO ngl
c = c + i(a, b) * b(b)
NEXT b
x(a) = c
NEXT a
END SUB
```

A subrotina ESCALA determina as escalas horizontais e verticais do desenho.

```
SUB escala (maior, maior2, nos(), esfor(), escal, escala2,
nbarras)
maior = 0
maior2 = 0
FOR a = 1 TO nos(0, 1)
IF nos(a, 2) > maior THEN maior = nos(a, 2)
IF nos(a, 1) > maior THEN maior = nos(a, 1)
NEXT a
escal = .5 * 480 / maior
FOR b = 1 TO nbarras
IF ABS(esfor(b, 3)) > maior2 THEN maior2 = ABS(esfor(b,
3))
IF ABS(esfor(b, 6)) > maior2 THEN maior2 = ABS(esfor(b,
6))
NEXT b
escala2 = .25 * 480 / maior2
END SUB
```

A subrotina DESENHO cria, na tela, as barras da estrutura, apresenta um gráfico com o valor do momento nas extremidades e uma linha que une estas extremidades, em escala apropriada. A cor do gráfico é determinada aleatoriamente.

```
SUB desenho (nos(), nbarras, incid(), ang(), esfor(), l(), escal,
escala2, z)
SCREEN 12
acres = .25 * 480
```

```

acres2 = .5 * 160
FOR b = 1 TO nbarras
  no1 = incid(b, 1)
  no2 = incid(b, 2)
  x1 = escal * nos(no1, 1) + acres + acres2
  y1 = escal * nos(no1, 2) + acres
  x2 = escal * nos(no2, 1) + acres + acres2
  y2 = escal * nos(no2, 2) + acres
  PSET (x1, 480 - y1)
  PSET (x2, 480 - y2)
  LINE (x1, 480 - y1)-(x2, 480 - y2)
  m1 = esfor(b, 3) * escala2: PRINT esfor(b, 3)
  m2 = esfor(b, 6) * escala2: PRINT esfor(b, 6)
  COLOR z
  LINE (x1, 480 - y1)-(x1 - m1 * SIN(ang(b)), (480 - y1) - m1
  * COS(ang(b)))
  LINE (x2, 480 - y2)-(x2 - m2 * SIN(ang(b)), (480 - y2) - m2
  * COS(ang(b)))
  LINE (x1 - m1 * SIN(ang(b)), (480 - y1) - m1 *
  COS(ang(b)))-(x2 - m2 * SIN(ang(b)), (480 - y2) - m2 *
  COS(ang(b)))
  COLOR 15
NEXT b
z = z + 1
END SUB
    
```

A subrotina PDELTA calcula o acréscimo fictício de carga horizontal, em uma barra vertical, devido à ação de uma carga vertical em uma deformação horizontal. Calcula os novos deslocamentos da estrutura devido ao acréscimo da força fictícia.

```

SUB pdelta (nbarras, ang(), incid(), x(), esforco(), l(), b()),
ngl, i(), x2(), bl())
FOR i = 1 TO nbarras
  deltap2 = 0
  deltap5 = 0
  IF ang(i) > 1.5707953# AND ang(i) < 1.5707973# OR ang(i)
  > 4.7123879# AND ang(i) < 4.7123899# THEN
    no1 = incid(i, 1)
    no2 = incid(i, 2)
    dd1 = x(no1 * 3 - 2)
    dd2 = x(no2 * 3 - 2)
    d2 = dd2 - dd1
    deltap5 = esforco(i, 4) * d2 / l(i)
    deltap2 = -deltap5
  END IF
  c = 3 * no1 - 1
  j = 3 * no2 - 1
  bl(c) = deltap2
  bl(j) = deltap5
NEXT i
FOR a = 1 TO ngl
  b(a) = b(a) + bl(a)
NEXT a
FOR a = 1 TO ngl
  c = 0
  FOR b = 1 TO ngl
    c = c + i(a, b) * b(b)
    
```

```

NEXT b
x2(a) = c
NEXT a
END SUB
    
```

A subrotina CONVERGENCIA calcula a diferença percentual entre duas iterações sucessivas, para todos os deslocamentos.

```

SUB convergencia (ngl, x(), x2(), dif())
FOR a = 1 TO ngl
  IF x2(a) <> 0 THEN
    dif(a) = (x2(a) - x(a)) / x2(a)
  ELSE
    dif(a) = 0
  END IF
  x(a) = x2(a)
NEXT a
END SUB
    
```

A submatriz RECALESFORCOS, calcula os esforços nas barras, segundo o seu sistema local de referência. SUB recalesforcos (nbarras, resul(), matglob(), incid(), x2(), mattran(), esfor())

```

DIM b(100, 6), aux(100, 6), esfglob(100, 6)
FOR i = 1 TO nbarras
  j = incid(i, 1)
  k = incid(i, 2)
  c = 3 * j - 2
  d = 3 * j - 1
  t = 3 * j
  g = 3 * k - 2
  h = 3 * k - 1
  m = 3 * k
  b(i, 1) = x2(c)
  b(i, 2) = x2(d)
  b(i, 3) = x2(t)
  b(i, 4) = x2(g)
  b(i, 5) = x2(h)
  b(i, 6) = x2(m)
  FOR lin = 1 TO 6
    FOR col = 1 TO 6
      aux(i, lin) = (aux(i, lin) + (matglob(i, lin, col) * b(i,
      col)))
    NEXT col
    esfglob(i, lin) = aux(i, lin) + resul(i, lin)
  NEXT lin
NEXT i
FOR i = 1 TO nbarras
  FOR o = 1 TO 6
    esfor(i, o) = 0
    FOR z = 1 TO 6
      esfor(i, o) = (esfor(i, o) + (mattran(i, o, z) * esfglob(i,
      z)))
    NEXT z
  NEXT o
END SUB
    
```

## ANEXO 03 - PROGRAMA PARA A RESOLUÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS PELO PROCESSO P-Δ GENÉRICO

Seque abaixo a descrição do programa principal que faz, inicialmente, a análise linear de pórticos planos, utilizando o método dos deslocamentos, com programação por análise matricial de estruturas. Com os resultados da análise linear, faz, por um processo iterativo, a análise não-linear geométrica pelo método P-Δ de todas as barras, de forma genérica.

### PROGRAMA PRINCIPAL

Declara os subprogramas. Esta é a primeira parte do programa principal, onde são declaradas as subrotinas do programa, as variáveis entre parênteses representam os valores que serão trocados entre o programa central e as subrotinas.

```
DECLARE SUB calesforcos (nbarras!, resul!(),  
matglob!(), incid!(), x!(), mattran!(), esfor!())  
DECLARE SUB leincidencia (nbarras!, incid!())  
DECLARE SUB esforcono (F!())  
DECLARE SUB termoindp (nbarras!, nnos!, carreg!(),  
l!(), incid!(), ang!(), mattrap!(), resul!(), F!(), b!())  
DECLARE SUB testaglr (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(),  
b!())  
DECLARE SUB restrgl (gl!, valor!, ngl!, b!(), matest!())  
DECLARE SUB testaglr (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(),  
b!())  
DECLARE SUB lerestr (nr!, restr!())  
DECLARE SUB matrizestrut (nbarras!, incid!(),  
matglob!(), matest!())  
DECLARE SUB impressao (nnos!, ngl!, nos!(), nbarras!,  
prop!(), carreg!(), incid!(), l!(), ang!(), matloc!(), x!(),  
esfor!())  
DECLARE SUB lecargas (nbarras!, carreg!())  
DECLARE SUB leprop (nbarras!, prop!())  
DECLARE SUB comprimento (nbarras!, incid!(), nos!(),  
l!(), ang!())  
DECLARE SUB lenos (nnos!, nos!())  
DECLARE SUB incidencia (nbarras!, incid!())  
DECLARE SUB matrizlocal (nbarras!, prop!(), l!(),  
matloc!())  
DECLARE SUB matriztran (nbarras!, ang!(),  
mattrap!(), mattran!(), matloc!(), matglob!())  
DECLARE SUB ident (ngl!, i!())  
DECLARE SUB invmat (ngl!, nbarras!, incid!(),  
matest!(), i!(), b!(), x!())  
DECLARE SUB pdelta (nbarras!, ang!(), incid!(), x!(),  
esforco!(), l!(), b!(), ngl!, i!(), x2!(), b1!())
```

```
DECLARE SUB convergencia (ngl!, x!(), x2!(), dif!())  
DECLARE SUB desenho (nos!(), nbarras!, incid!(),  
ang!(), esfor!(), l!(), escal!, escala2!, z!)  
DECLARE SUB escala (maior!, maior2!, nos!(), esfor!(),  
escal!, escala2!, nbarras!)  
DECLARE SUB recalesforcos (nbarras!, resul!(),  
matglob!(), incid!(), x2!(), mattran!(), esfor!())  
CLS
```

Definição de variáveis. Aqui são definidos os tamanhos máximos dos vetores e das matrizes que as variáveis representam.

```
DIM nos(50, 2), incid(50, 2), l(50), ang(50),  
matglob(50, 6, 6), matest(100, 100), mattrap(50, 6, 6),  
b1(100)  
DIM carreg(50, 2), prop(50, 3), matloc(50, 6, 6),  
mattran(50, 6, 6), restr(100, 7), esfor(100, 6), i(120,  
120)  
DIM a(100, 100), b(100), c(100), mat(50, 6, 6), FO(6),  
resul(100, 6), F0(100), F(100), x(100), x2(100), dif(100)
```

Abre os arquivos de entrada e de saída. A extensão ".dad" indica o arquivo de entrada e o arquivo ".sad" indica o arquivo de saída.

```
OPEN "i", #1, "5port.dad"  
OPEN "o", #2, "5portn.sad"
```

Chama os subprogramas. O comando CALL chama os subprogramas, cada um deles possui uma função específica.

```
CALL lenos(nnos, nos())  
CALL leprop(nbarras, prop())  
CALL lecargas(nbarras, carreg())  
CALL leincidencia(nbarras, incid())  
CALL comprimento(nbarras, incid(), nos(), l(), ang())  
CALL matrizlocal(nbarras, prop(), l(), matloc())  
CALL matriztran(nbarras, ang(), mattrap(), mattran(),  
matloc(), matglob())  
CALL matrizestrut(nbarras, incid(), matglob(), matest())  
CALL esforcono(F())  
CALL termoindp(nbarras, nnos, carreg(), l(), incid(),  
ang(), mattrap(), resul(), F(), b())  
CALL lerestr(nr, restr())  
CALL testaglr(nnos, ngl, restr(), matest(), b())  
CALL ident(ngl, i())  
CALL invmat(ngl, nbarras, incid(), matest(), i(), b(),  
x())  
CALL calesforcos(nbarras, resul(), matglob(), incid(),  
x(), mattran(), esfor())  
CALL escala(maior, maior2, nos(), esfor(), escal,  
escala2, nbarras)  
z = 9  
CALL desenho(nos(), nbarras, incid(), ang(), esfor(), l(),  
escal, escala2, z)  
INPUT z
```

Resolve a parte não linear geométrica pelo processo P-DELTA. Esta parte do programa principal é que determina a quantidade de iterações necessárias para assegurar a convergência de 1,00 %. Esta

convergência pode ser alterada assumindo um novo valor ao valor ".01" em negrito abaixo.

```
FOR numero = 1 TO 10
  CALL pdelta(nbarras, ang(), incid(), x(), esfor(), l(),
  b(), ngl, i(), x2(), b1())
  CALL convergencia(ngl, x(), x2(), dif())
  r = 0
  FOR a = 1 TO ngl
    IF dif(a) < .01 THEN r = r + 1
    z = numero
    IF r = ngl THEN numero = 10
  NEXT a
NEXT numero
PRINT z
z = 10
```

Recalcula os esforços nas barras após a análise não linear geométrica pelo processo P-DELTA.

```
CALL recalesforcos(nbarras, resul(), matglob(), incid(),
x2(), mattran(), esfor())
```

Preenche o arquivo de entrada com os dados de saída.

```
CALL impressao(nnos, ngl, nos(), nbarras, prop(),
carreg(), incid(), l(), ang(), matloc(), x(), esfor())
```

Desenha as barras da estrutura com os momentos não lineares, deixando em sobreplano os momentos lineares.

```
CALL desenho(nos(), nbarras, incid(), ang(), esfor(), l(),
escal, escala2, z)
```

Fecha os arquivos de entrada e saída de dados.

```
CLOSE #1
CLOSE #2
INPUT z
```

Finaliza o programa.

```
END
```

## SUBROTINAS

A subrotina será apresentadas aqui na ordem que foi citada no programa principal e não está contida nos anexos 01 e 02.

A subrotina PDELTA calcula o acréscimo fictício de carga horizontal, em todas as barras, devido à ação de uma carga vertical em uma deformação horizontal. Calcula os novos deslocamentos da estrutura devido ao acréscimo da força fictícia.

```
SUB pdelta (nbarras, ang(), incid(), x(), esforco(), l(),
b(), ngl, i(), x2(), b1())
```

```
FOR i = 1 TO nbarras
```

```
  deltap2 = 0
```

```
  deltap5 = 0
```

```
  deltap1 = 0
```

```
  deltap4 = 0
```

```
  no1 = incid(i, 1)
```

```
  no2 = incid(i, 2)
```

```
  dd12 = x(no1 * 3 - 2) * COS(ang(i))
```

```
  dd22 = x(no2 * 3 - 2) * COS(ang(i))
```

```
  d2 = dd22 - dd12
```

```
  deltap5 = (esforco(i, 4) * d2 / l(i)) * COS(ang(i))
```

```
  deltap2 = -deltap5
```

```
  deltap1 = (esforco(i, 4) * d2 / l(i)) * SIN(ang(i))
```

```
  deltap4 = -deltap1
```

```
  c = 3 * no1 - 1
```

```
  j = 3 * no2 - 1
```

```
  m = 3 * no1 - 2
```

```
  n = 3 * no2 - 2
```

```
  b1(c) = deltap2
```

```
  b1(j) = deltap5
```

```
  b1(m) = deltap1
```

```
  b1(n) = deltap4
```

```
NEXT i
```

```
FOR a = 1 TO ngl
```

```
  b(a) = b(a) + b1(a)
```

```
NEXT a
```

```
INPUT z
```

```
FOR a = 1 TO ngl
```

```
  c = 0
```

```
  FOR b = 1 TO ngl
```

```
    c = c + i(a, b) * b(b)
```

```
  NEXT b
```

```
  x2(a) = c
```

```
NEXT a
```

```
END SUB
```

#### ANEXO 04 - PROGRAMA PARA A RESOLUÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS COM A UTILIZAÇÃO DA MATRIZ GEOMÉTRICA.

Seque abaixo a descrição do programa principal que faz a análise linear de pórticos planos, utilizando o método dos deslocamentos, com programação por análise matricial de estruturas. Logo após, com os resultados da análise linear, faz a análise não-linear, somando à matriz de rigidez de cada barra, a matriz geométrica.

#### PROGRAMA PRINCIPAL

Declara os subprogramas. Esta é a primeira parte do programa principal, onde são declaradas as subrotinas do programa, as variáveis entre parênteses representam os valores que serão trocados entre o programa central e as subrotinas. DECLARE SUB desenho (nos!(), nbarras!, incid!(), ang!(), esfor!(), l!(), escal!, escala2!, z!)

DECLARE SUB escala (maior!, maior2!, nos!(), esfor!(), escal!, escala2!, nbarras!)

DECLARE SUB matrizgeo (matloc!(), esfor!(), nbarras!, l!())

DECLARE SUB calesforcos (nbarras!, resul!(), matglob!(), incid!(), x!(), mattran!(), esfor!())

DECLARE SUB leincidencia (nbarras!, incid!())

DECLARE SUB esforcono (F!())

DECLARE SUB termoindep (nbarras!, nnos!, carreg!(), l!(), incid!(), ang!(), mattramp!(), resul!(), F!(), b!())

DECLARE SUB testaglr (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(), b!())

DECLARE SUB resolmat (ne!, nbarras!, incid!(), a!(), b!(), x!())

DECLARE SUB restrgl (gl!, valor!, ngl!, b!(), matest!())

DECLARE SUB testaglr (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(), b!())

DECLARE SUB lerestr (nr!, restr!())

DECLARE SUB matrizestrut (nbarras!, incid!(), matglob!(), matest!())

DECLARE SUB impressao (imos!, ngl!, nos!(), nbarras!, prop!(), carreg!(), incid!(), l!(), ang!(), matloc!(), x!(), esfor!())

DECLARE SUB lecargas (nbarras!, carreg!())

DECLARE SUB leprop (nbarras!, prop!())

DECLARE SUB comprimento (nbarras!, incid!(), nos!(), l!(), ang!())

DECLARE SUB lenos (nnos!, nos!())

DECLARE SUB incidencia (nbarras!, incid!())

DECLARE SUB matrizlocal (nbarras!, prop!(), l!(), matloc!())

DECLARE SUB matriztran (nbarras!, ang!(), mattramp!(), mattran!(), matloc!(), matglob!())

CLS

Definição de variáveis. Aqui são definidos os tamanhos máximos dos vetores e das matrizes que as variáveis representam.

```
DIM nos(50, 2), incid(50, 2), -l(50), ang(50),
matglob(50, 6, 6), matest(100, 100), mattramp(50, 6, 6)
DIM carreg(50, 2), prop(50, 3), matloc(50, 6, 6),
mattran(50, 6, 6), restr(100, 7), esfor(100, 6)
DIM a(100, 100), b(100), c(100), mat(50, 6, 6), FO(6),
resul(100, 6), F0(100), F(100), x(100)
```

Abre os arquivos de entrada e de saída. A extensão ".dad" indica o arquivo de entrada e o arquivo ".sad" indica o arquivo de saída.

```
OPEN "i", #1, "5port.dad"
OPEN "o", #2, "5portn.sad"
```

Chama os subprogramas. O comando CALL chama os subprogramas, cada um deles possui uma função específica.

```
CALL lenos(nnos, nos())
CALL leprop(nbarras, prop())
CALL lecargas(nbarras, carreg())
CALL leincidencia(nbarras, incid())
CALL comprimento(nbarras, incid(), nos(), l(), ang())
CALL esforcono(F())
CALL lerestr(nr, restr())
```

Faz um LOOP finito, na primeira volta do loop faz a análise linear e no segundo loop faz a análise não-linear.

```
FOR q = 1 TO 2
  IF q = 1 THEN
    CALL matrizlocal(nbarras, prop(), l(), matloc())
  END IF
  IF q = 2 THEN
    CALL matrizgeo(matloc(), esfor(), nbarras, l())
  END IF
  CALL matriztran(nbarras, ang(), mattramp(),
mattran(), matloc(), matglob())
  CALL matrizestrut(nbarras, incid(), matglob(),
matest())
  CALL termoindep(nbarras, nnos, carreg(), l(), incid(),
ang(), mattramp(), resul(), F(),
b())
  CALL testaglr(nnos, ngl, restr(), matest(), b())
  CALL resolmat(ngl, nbarras, incid(), matest(), b(), x())
  CALL calesforcos(nbarras, resul(), matglob(), incid(),
x(), mattran(), esfor())
  CALL impressao(nnos, ngl, nos(), nbarras, prop(),
carreg(), incid(), l(), ang(), matloc(),
x(), esfor())
  CALL escala(maior, maior2, nos(), esfor(), escal,
escala2, nbarras)
  z = 9
  CALL desenho(nos(), nbarras, incid(), ang(), esfor(),
l(), escal, escala2, z)
  PRINT
NEXT q
```

Preenche o arquivo de entrada com os dados de saída.

```
CALL impressao(nnos, ngl, nos(), nbarras, prop(),
carreg(), incid(), l(), ang(), matloc(), x(), esfor())
```

Fecha os arquivos de entrada e saída de dados.

```
CLOSE #1
```

```
CLOSE #2  
INPUT z  
Finaliza o programa.  
END
```

### SUBROTINAS

As subrotinas serão apresentadas aqui na ordem que são citadas no programa principal e não estão nos anexos anteriores.

A subrotina MATRIZGEO, calcula a matriz de rigidez não linear no sistema local pela soma da matriz de rigidez da análise linear com a matriz geométrica.

```
SUB matrizgeo (matloc(), esfor(), nbarras, l())  
DIM kgeo(6, 6)  
FOR nbcont = 1 TO nbarras  
  kgeo(2, 2) = (esfor(nbcont, 1) * 6) / (5 / l(nbcont))  
  kgeo(2, 3) = (esfor(nbcont, 1) / 10)  
  kgeo(2, 5) = -kgeo(2, 2)  
  kgeo(2, 6) = -kgeo(2, 3)  
  kgeo(3, 3) = esfor(nbcont, 1) * 2 * l(nbcont) / 15  
  kgeo(3, 5) = -kgeo(2, 3)  
  kgeo(3, 6) = -esfor(nbcont, 1) * l(nbcont) / 30  
  kgeo(5, 5) = kgeo(2, 2)  
  kgeo(5, 6) = -kgeo(2, 3)  
  kgeo(6, 6) = kgeo(3, 3)  
  FOR c = 2 TO 6  
    FOR b = 1 TO 6  
      IF c > b THEN  
        kgeo(c, b) = kgeo(b, c)  
      END IF  
    NEXT b  
  NEXT c  
NEXT nbcont  
FOR c = 1 TO 6  
  FOR b = 1 TO 6  
    matloc(nbcont, c, b) = kgeo(c, b) + matloc(nbcont, c,  
b)  
  NEXT b  
NEXT c  
END SUB
```

## ANEXO 05 - PROGRAMA PARA A RESOLUÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS COM A UTILIZAÇÃO DA MATRIZ GEOMÉTRICA SIMPLIFICADA

Seque abaixo a descrição do programa principal que faz a análise linear de pórticos planos, utilizando o método dos deslocamentos, com programação por análise matricial de estruturas. Logo após, com os resultados da análise linear, faz a análise não-linear, somando à matriz de rigidez de cada barra, a matriz geométrica simplificada.

### PROGRAMA PRINCIPAL

```
Declara os subprogramas. Esta é a primeira
parte do programa principal, onde são declaradas as
subrotinas do programa, as variáveis entre parênteses
representam os valores que serão trocados entre o
programa central e as subrotinas. DECLARE SUB
desenho (nos!(), nbarras!, incid!(), ang!(), esfor!(), l!(),
escal!, escala2!, z!)
DECLARE SUB escala (maior!, maior2!, nos!(), esfor!(),
escal!, escala2!, nbarras!)
DECLARE SUB matrizgeo (matloc!(), esfor!(), nbarras!,
l!())
DECLARE SUB calesforcos (nbarras!, resul!(),
matglob!(), incid!(), x!(), mattran!(), esfor!())
DECLARE SUB leincidencia (nbarras!, incid!())
DECLARE SUB esforcono (F!())
DECLARE SUB termoindp (nbarras!, nnos!, carreg!(),
l!(), incid!(), ang!(), mattramp!(), resul!(), F!(), b!())
DECLARE SUB testaglr (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(),
b!())
DECLARE SUB resolmat (ne!, nbarras!, incid!(), al!(),
b!(), x!())
DECLARE SUB restrgl (gl!, valor!, ngl!, b!(), matest!())
DECLARE SUB testaglr (nnos!, ngl!, restr!(), matest!(),
b!())
DECLARE SUB lerestr (nr!, restr!())
DECLARE SUB matrizestrut (nbarras!, incid!(),
matglob!(), matest!())
DECLARE SUB impressao (nnos!, ngl!, nos!(), nbarras!,
prop!(), carreg!(), incid!(), l!(), ang!(), matloc!(), x!(),
esfor!())
DECLARE SUB lecargas (nbarras!, carreg!())
DECLARE SUB leprop (nbarras!, prop!())
DECLARE SUB comprimento (nbarras!, incid!(), nos!(),
l!(), ang!())
DECLARE SUB lenos (nnos!, nos!())
DECLARE SUB incidencia (nbarras!, incid!())
DECLARE SUB matrizlocal (nbarras!, prop!(), l!(),
matloc!())
DECLARE SUB matriztran (nbarras!, ang!(),
mattramp!(), mattran!(), matloc!(), matglob!())
CLS
```

Definição de variáveis. Aqui são definidos os tamanhos máximos dos vetores e das matrizes que as variáveis representam.

```
DIM nos(50, 2), incid(50, 2), l(50), ang(50),
matglob(50, 6, 6), matest(100, 100), mattramp(50, 6, 6)
DIM carreg(50, 2), prop(50, 3), matloc(50, 6, 6),
mattran(50, 6, 6), restr(100, 7), esfor(100, 6)
DIM a(100, 100), b(100), c(100), mat(50, 6, 6), FO(6),
resul(100, 6), F0(100), F(100), x(100)
```

Abre os arquivos de entrada e de saída. A extensão ".dad" indica o arquivo de entrada e o arquivo ".sad" indica o arquivo de saída.

```
OPEN "i", #1, "5port.dad"
```

```
OPEN "o", #2, "5portn.sad"
```

Chama os subprogramas. O comando CALL chama os subprogramas, cada um deles possui uma função específica.

```
CALL lenos(nnos, nos())
```

```
CALL leprop(nbarras, prop())
```

```
CALL lecargas(nbarras, carreg())
```

```
CALL leincidencia(nbarras, incid())
```

```
CALL comprimento(nbarras, incid(), nos(), l(), ang())
```

```
CALL esforcono(F())
```

```
CALL lerestr(nr, restr())
```

Faz um LOOP finito, na primeira volta do loop faz a análise linear e no segundo loop faz a análise não-linear.

```
FOR q = 1 TO 2
```

```
IF q = 1 THEN
```

```
CALL matrizlocal(nbarras, prop(), l(), matloc())
```

```
END IF
```

```
IF q = 2 THEN
```

```
CALL matrizgeo(matloc(), esfor(), nbarras, l())
```

```
END IF
```

```
CALL matriztran(nbarras, ang(), mattramp(),
mattran(), matloc(), matglob())
```

```
CALL matrizestrut(nbarras, incid(), matglob(),
matest())
```

```
CALL termoindp(nbarras, nnos, carreg(), l(), incid(),
ang(), mattramp(), resul(), F(),
```

```
b())
```

```
CALL testaglr(nnos, ngl, restr(), matest(), b())
```

```
CALL resolmat(ngl, nbarras, incid(), matest(), b(), x())
```

```
CALL calesforcos(nbarras, resul(), matglob(), incid(),
x(), mattran(), esfor())
```

```
CALL impressao(nnos, ngl, nos(), nbarras, prop(),
carreg(), incid(), l(), ang(), matloc(),
x(), esfor())
```

```
CALL escala(maior, maior2, nos(), esfor(), escal,
escala2, nbarras)
```

```
z = 9
```

```
CALL desenho(nos(), nbarras, incid(), ang(), esfor(),
l(), escal, escala2, z)
```

```
PRINT
```

```
NEXT q
```

Preenche o arquivo de entrada com os dados de saída.

```
CALL impressao(nnos, ngl, nos(), nbarras, prop(),  
carreg(), incid(), l(), ang(), matloc(), x(), esfor())  
    Fecha os arquivos de entrada e saída de dados.  
CLOSE #1  
CLOSE #2  
INPUT z  
    Finaliza o programa.  
END
```

## SUBROTINAS

As subrotinas serão apresentadas aqui na ordem que são citadas no programa principal e não estão nos anexos anteriores.

A subrotina MATRIZGEO, calcula a matriz de rigidez não linear no sistema local pela soma da matriz de rigidez da análise linear com a matriz geométrica simplificada.

```
SUB matrizgeo (matloc(), esfor(), nbarras, l())  
DIM kgeo(6, 6)  
FOR nbcont = 1 TO nbarras  
    kgeo(2, 2) = (esfor(nbcont, 1) ) / ( l(nbcont))  
    kgeo(2, 5) = -kgeo(2, 2)  
    kgeo(5, 5) = kgeo(2, 2)  
    kgeo(5, 2) = -kgeo(2, 2)  
    FOR c = 2 TO 6  
        FOR b = 1 TO 6  
            IF c > b THEN  
                kgeo(c, b) = kgeo(b, c)  
            END IF  
        NEXT b  
    NEXT c  
NEXT nbcont  
FOR c = 1 TO 6  
    FOR b = 1 TO 6  
        matloc(nbcont, c, b) = kgeo(c, b) + matloc(nbcont, c,  
b)  
    NEXT b  
NEXT c  
END SUB
```

## ANEXO 06 - CONSTRUÇÃO DO ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

### A) ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

A entrada de dados é feita através de um arquivo texto, que deve ser feito em qualquer editor de texto não gráfico, e possuir a extensão “.DAD” e seu conteúdo será uma seqüência numérica, que represente o pórtico a ser resolvido da seguinte maneira e seqüência:

- \* Número de nós do pórtico plano;
- \*,\* Coordenadas dos nós da estrutura; serão inseridas tantas linhas quantos forem o número de nós; as coordenadas em questão deverão ser segundo um plano cartesiano (ortogonal) plano.
- \* Número de barras que constituem o pórtico plano;
- \*,\*,\* Módulo de elasticidade, inércia e área da seção transversal de cada uma das barras do pórtico; serão inseridas tantas linhas quantos forem o número de barras;
- \*,\* Carga distribuída ao longo da barra, carga concentrada no centro do vão; serão inseridas tantas linhas quantos forem o número de barras;
- \*,\* Incidência inicial (número do nó onde se origina cada uma das barras), incidência final (número do nó onde termina cada uma das barras); serão inseridas tantas linhas quantos forem o número de barras;
- \* Número de nós com carga aplicada;
- \*,\*,\*,\* Número do nó com carga aplicada; carga horizontal, carga vertical, momento aplicado no nó indicado; este último item será repetido quantos forem o número de nós com carga aplicada. A convenção de sinais é aquela dada pela figura 01;

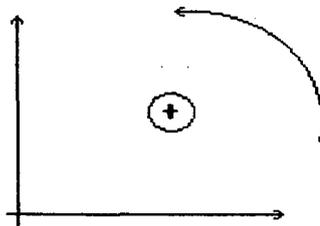


Figura 01 - Convenção de sinais

- \* Número de nós com restrição; (a restrição representa um movimento impedido no nó);
- \*,\*,\*,\*,\*,\* Número do nó com restrição, código indicando se o nó em questão possui restrição na direção X, código indicando se o nó em questão possui restrição na direção Y, código indicando se o nó em questão possui restrição na direção Z, valor da restrição na direção X, valor da restrição na direção Y, valor da restrição na direção Z, este último item será repetido quantos forem o número de nós com restrição. Usa-se o código “1” para o caso de haver restrição e código “0” para o caso de não haver restrição.

### B) EXEMPLO DE ARQUIVO TEXTO DE ENTRADA DE DADOS, COM EXTENSÃO “. DAD”

A figura 02 contém um exemplo de pórtico simples, e a seqüência numérica abaixo se traduz na listagem do arquivo de entrada do pórtico plano contido na figura 02.

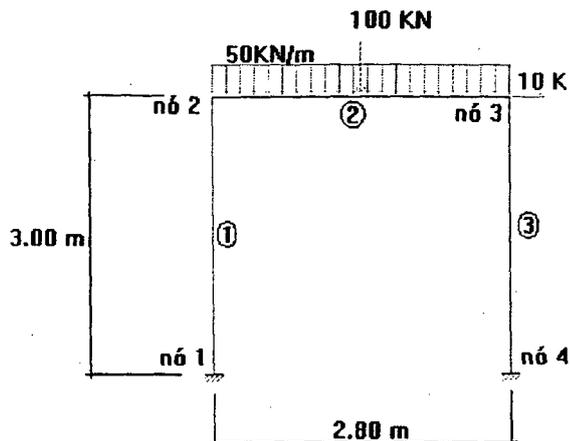


Figura 02 - Pórtico plano

```

4
0,0
0,3
2.8,3
2.8,0
3
2000000,0.000675,0.09
2000000,0.000675,0.09
2000000,0.000675,0.09
0,0
-50,-100
0,0
1,2
2,3
3,4
1
3,10,0,0
2
1,1,1,1,0,0,0
4,1,1,1,0,0,0
    
```

**C) EXEMPLO DE ARQUIVO TEXTO DE SAÍDA DE DADOS,  
 COM EXTENSÃO “.SAD”**

Esta é a listagem com a saída de dados do pórtico apresentado na figura 02.

```

numero de nós = 4
numero de barras = 3
COORDENADAS DO NÓ 1
coordenada x do nó 1 = 0
coordenada y do nó 1 = 0
COORDENADAS DO NÓ 2
coordenada x do nó 2 = 0
coordenada y do nó 2 = 3
    
```

COORDENADAS DO NÓ 3  
coordenada x do nó 3 = 2.8  
coordenada y do nó 3 = 3  
COORDENADAS DO NÓ 4  
coordenada x do nó 4 = 2.8  
coordenada y do nó 4 = 0  
PROPRIEDADES DA BARRA 1  
módulo de elasticidade da barra 1 = 2000000  
momento de inércia da barra 1 = .000675  
área da barra 1 = .09  
INCIDÊNCIAS DA BARRA 1  
nó inicial da barra 1 = 1  
nó final da barra 1 = 2  
COMPRIMENTO/ÂNGULO DA BARRA 1  
comprimento da barra 1 = 3  
ângulo da barra 1 = 90.00000249963647  
PROPRIEDADES DA BARRA 2  
módulo de elasticidade da barra 2 = 2000000  
momento de inércia da barra 2 = .000675  
área da barra 2 = .09  
INCIDÊNCIAS DA BARRA 2  
nó inicial da barra 2 = 2  
nó final da barra 2 = 3  
COMPRIMENTO/ÂNGULO DA BARRA 2  
comprimento da barra 2 = 2.8  
ângulo da barra 2 = 0  
PROPRIEDADES DA BARRA 3  
módulo de elasticidade da barra 3 = 2000000  
momento de inércia da barra 3 = .000675  
área da barra 3 = .09  
INCIDÊNCIAS DA BARRA 3  
nó inicial da barra 3 = 3  
nó final da barra 3 = 4  
COMPRIMENTO/ÂNGULO DA BARRA 3  
comprimento da barra 3 = 3  
ângulo da barra 3 = 270.0000006687202  
DESLOCAMENTOS  
DESLOCAMENTO 1 = 0  
DESLOCAMENTO 2 = 0  
ROTAÇÃO 3 = 0  
DESLOCAMENTO 4 = 1.190226E-02  
DESLOCAMENTO 5 = -1.922988E-03  
ROTAÇÃO 6 = -2.681312E-02  
DESLOCAMENTO 7 = 1.163799E-02  
DESLOCAMENTO 8 = -2.077011E-03  
ROTAÇÃO 9 = 2.223073E-02  
DESLOCAMENTO 10 = 0  
DESLOCAMENTO 11 = 0  
ROTAÇÃO 12 = 0  
ESFORÇOS NAS BARRAS  
BARRA 1  
ESFORÇO NO NÓ 1  
esforço em x = 115.3793  
esforço em y = -16.99045  
esforço em z = -13.41977  
ESFORÇO NO NÓ 2  
esforço em x = -115.3793  
esforço em y = 16.99045  
esforço em z = -37.55157

---

BARRA 2  
ESFORÇO NO NÓ 2  
esforço em x = 16.98917  
esforço em y = 115.3793  
esforço em z = 37.55155  
ESFORÇO NO NÓ 3  
esforço em x = -16.98917  
esforço em y = 124.6207  
esforço em z = -50.48949  
BARRA 3  
ESFORÇO NO NÓ 3  
esforço em x = 124.6207  
esforço em y = 26.99045  
esforço em z = 50.4895  
ESFORÇO NO NÓ 4  
esforço em x = -124.6207  
esforço em y = -26.99045  
esforço em z = 30.48184

## ANEXO 07 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

São apresentados os dois métodos de resolução do sistema de equações lineares utilizados nos programas acima apresentados. Os métodos são: inversão de matrizes e Gauss com matrizes de banda simétrica.

### MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR INVERSÃO DE MATRIZES

O método de resolução de sistemas de equações lineares por inversão de matrizes é uma modificação do Método de Gauss; é um método direto pois nos informa a solução exata da equação, a menos de erros de arredondamento.

Constitui, basicamente, em transformar o sistema de equações lineares em outro equivalente, que possua mesma solução.

Este método consiste em resolver o sistema de equações lineares do tipo:

$$[K] \cdot \{d\} = \{F\}, \quad \text{onde: } [K] = \text{matriz de ordem } n;$$

$$\{d\} = \text{vetor com as incógnitas, ordem } 1 \times n;$$

$$\{F\} = \text{vetor dos termos independentes, ordem } 1 \times n.$$

Pré-multiplicando os dois lados da equação matricial pela inversa de  $[K]$ , teremos:

$$[K]^{-1} \cdot [K] \cdot \{d\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \quad \text{ou seja:}$$

$$\{d\} = [K]^{-1} \cdot \{F\}$$

Então, o problema transformou-se em determinar a inversa da matriz  $[K]$ , já que o vetor das incógnitas é obtido pela simples multiplicação matricial de uma matriz por um vetor.

#### Solução:

Cria-se uma matriz aumentada, de ordem  $(n \times 2n)$ , formada pela matriz dos coeficientes das equações  $[K]$ , de ordem  $(n)$  e de uma matriz identidade  $[I]$  de mesma ordem da anterior. A matriz aumentada será operada conforme o Método de Gauss, esta operação também é conhecida como escalonamento.

$$\begin{array}{cccc|cccc} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

Transforma-se os elementos  $k_{21}, k_{31}, \dots, k_{n1}$  em valores ZEROS, por operações entre linhas, através das equações:

linha 2 = pivô \* linha 1 - linha 2, onde: pivô =  $k_{21}/k_{11}$

linha 3 = pivô \* linha 1 - linha 3, onde: pivô =  $k_{31}/k_{11}$

linha n = pivô \* linha 1 - linha n, onde: pivô =  $k_{n1}/k_{11}$

Da mesma forma, repetir as operações para as outras colunas, transformando a parte inicial da matriz aumentada em triangular inferior.

Expandir as operações para a parte superior da matriz, transformando-a em uma matriz diagonal.

Dividir toda a linha pelo elemento  $k_{ii}$  da mesma, transformando a matriz na matriz identidade, seguida da matriz inversa de  $[K]$ .

O método de resolução de equações lineares por inversão de matrizes possui um tempo computacional ligeiramente superior se comparado com o método de resolução por matriz de banda simétrica.

Temos abaixo uma subrotina para resolução de equações lineares por inversão de matrizes.

#### Subrotina para resolução de sistemas de equações lineares por inversão de matrizes

```
SUB invmat (ngl, nbarras, incid(), matest(), i(), b(), x())
n = ngl
FOR d = 1 TO (n - 1)
FOR a = 1 TO (n - d)
pivo = matest(d + a, d) / matest(d, d)
FOR b = 1 TO n
matest(a + d, b) = -matest(a + d, b) + (matest(d, b) * pivo)
i(a + d, b) = -i(a + d, b) + (i(d, b) * pivo)
NEXT b
NEXT a
NEXT d
```

```
FOR d = n TO 2 STEP -1
FOR a = (d - 1) TO 1 STEP -1
  pivo = matest(d - a, d) / matest(d, d)
  FOR b = 1 TO n
    matest(d - a, b) = -matest(d - a, b) + (matest(d, b) * pivo)
    i(d - a, b) = -i(d - a, b) + (i(d, b) * pivo)
  NEXT b
NEXT a
NEXT d
FOR a = 1 TO n
  pivo = matest(a, a)
  FOR b = 1 TO n
    matest(a, b) = matest(a, b) / pivo
    i(a, b) = i(a, b) / pivo
  NEXT b
NEXT a
FOR a = 1 TO ngl
  c = 0
  FOR b = 1 TO ngl
    c = c + i(a, b) * b(b)
  NEXT b
  x(a) = c
NEXT a
END SUB
```

**MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES PELO MÉTODO DE GAUSS COM O USO DE MATRIZES COM BANDA SIMÉTRICA**

Em muitos problemas de elasticidade, tem-se um conjunto de equações lineares a ser resolvido e algumas propriedades da matriz que as representa são conhecidas, como por exemplo: *ser positiva definida, não singular, de banda e simétrica*.

Seja uma matriz quadrada de banda simétrica e com os seguintes elementos identificados como:

$$A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & 0 \\ \text{simétr} & \text{ica} & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad n$$

Veja que é possível armazenar esta matriz de outra forma, de tal sorte que a mesma fique com tamanho menor e as mesmas informações.

$$B = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{55} & k_{56} & 0 \\ k_{66} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad n$$

Percebe-se que todas as informações da matriz [ A ] estão na matriz [ B ]. A posição dos elementos ( i,j ) de [ A ] foram transportadas para a posição ( i, j-i+1 )

De posse desta nova matriz [ B ], fazer seu escalonamento pelo método de Gauss, lembrando de estender as operações aos termos independentes das equações.

Deve-se restituir as duas linhas a serem operadas em dois vetores auxiliares de dimensão ( 1 x n ), com as posições originais. Fazer as operações nestas linhas como apresentado anteriormente, retornar o resultado à matriz [ B ].

Repetir este processo para todas as linhas a serem operadas.

Este método foi desenvolvido para proporcionar menor tamanho de alocação de memória, possibilitando a resolução de equações com maior número de incógnitas a um mesmo espaço de memória alocada.

**Subrotina para resolução de sistemas de equações lineares pelo método de Gauss com o uso de matrizes com banda simétrica**

SUB resolmat (né, nbarras, incid(), matest(), b(), x())

DIM a(120, 120), d(100)

**Equações lineares**

n = ne; FOR m = 1 TO nbarras

**Cálculo da largura de banda**

g = ABS(incid(m, 1) - incid(m, 2)) \* 3 + 3

IF ms < g THEN

ms = g

END IF

NEXT m

**Armazena matriz de banda simétrica superior**

e = 0

FOR m = 1 TO n

FOR h = 1 TO ms

a(m, h) = matest(m, h + e)

NEXT h

e = e + 1

NEXT m

**Resolução do sistema da matriz de banda simétrica**

```

n1 = n - 1
FOR k = 1 TO n1
  c = a(k, 1)
  k1 = k + 1
  IF (ABS(c) - .000001) <= 0 THEN
    PRINT #2, "singularidade na linha", k
  END IF
  END IF
Divide a linha por coeficiente da diagonal
  ni = (k1 + ms) - 2
  IF ni <= n THEN
    l = ni
  ELSE
    l = n
  END IF
  FOR j = 2 TO ms
    d(j) = a(k, j)
  NEXT j
  FOR j = k1 TO l
    k2 = (j - k) + 1
    a(k, k2) = a(k, k2) / c
  NEXT j
  b(k) = b(k) / c
  FOR i = k1 TO l
    k2 = (i - k1) + 2
    c = d(k2)
    FOR j = i TO l
      k2 = (j - i) + 1
      k3 = (j - k) + 1
      a(i, k2) = a(i, k2) - c * a(k, k3)
    NEXT j
    b(i) = b(i) - c * b(k)
  NEXT i
NEXT k
IF (ABS(a(n, 1)) - .000001) >= 0 THEN
  b(n) = b(n) / a(n, 1)
END IF
FOR i = 1 TO n1
  k = n - i
  k1 = k + 1
  ni = (k1 + ms) - 2
  IF ni <= n THEN
    l = ni
  ELSE
    l = n
  END IF
  FOR j = k1 TO l
    k2 = (j - k) + 1
    b(k) = b(k) - a(k, k2) * b(j)
    x(k) = b(k)
  NEXT j
NEXT i
END SUB
    
```

Onde: ms = metade da largura de banda + diagonal principal  
 n = numero de elementos da coluna da matriz a  
 b = matriz dos termos independentes; vai conter os valores das incógnitas procuradas pela resolução  
 a = matriz que contem os coeficientes de rigidez