

**Dissertação**

**Eng. João Carlos Arantes Costa Júnior**

**1998**

**Universidade Federal de Santa Catarina**  
**Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**

**Análise Numérica do Dano em Placas**  
**Espessas sob Fadiga de Baixo Ciclo**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina  
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

**João Carlos Arantes Costa Júnior**

**Florianópolis, outubro de 1998.**

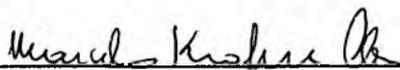
# **Análise Numérica do Dano em Placas Espessas sob Fadiga de Baixo Ciclo**

**João Carlos Arantes Costa Júnior**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

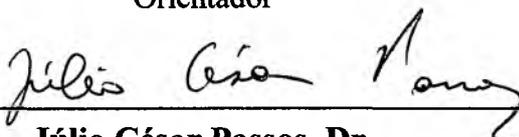
**Mestre em Engenharia**

Especialidade Engenharia Mecânica, área de concentração Projeto e Análise de Componentes Mecânicos, e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica



---

**Marcelo Krajnc Alves, Ph. D.**  
Orientador



---

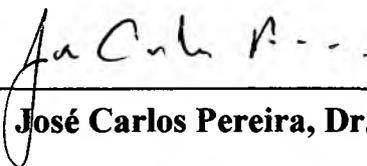
**Júlio César Passos, Dr.**  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora**



---

**Edison da Rosa, Dr. Eng. Mec.**  
Presidente



---

**José Carlos Pereira, Dr.**



---

**Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, Ph. D.**

## ***Dedicatória***

*À meu pai.*

*À minha tia Marina pelo carinho e apoio.*

*À minha querida irmã Adriana.*

*À minha amada mãe pelo afago e confiança  
depositados em mim desde sempre.*

## ***Agradecimentos***

*Ao Prof Marcelo Krajnc Alves pela orientação e apoio técnico neste trabalho, colaborando generosamente com seus ensinamentos e experiências. Sou grato também, pela sua atenção e empenho na minha formação, colocando-se sempre a disposição. As várias horas que passamos conversando, trocando idéias e até os conselhos relativos à vida, farão saudades do meu amigo.*

*Aos professores Armando Albertazzi G. Jr., Clóvis S. de Barcellos, Edison da Rosa, Eduardo Fancello, Paulo de Tarso R. de Mendonça e Roberto Jordan, pelos conhecimentos transmitidos e ao prof. José Carlos Pereira por ter gentilmente participado da banca.*

*À todos os colegas, os quais tive prazer de conviver. Entre eles: André Beck, Lauro Fernando S. Ignácio Jr., Nederson da Silva Koehler, Rodrigo Rossi e Valdir Mendes Cardoso. Em especial aos amigos Alexandre Kaelble Calixto, Valdir Mendes Cardoso e à toda família do amigo Michael de Jesus Fernandes pela recepção e o ótimo convívio.*

*Aos meus incansáveis amigos, Cesar Augusto do Canto Vinadé, Clodoaldo de Oliveira Carvalho Filho, Francisco Frederico dos Santos Matos e Raimundo Ricardo Matos da Cunha pelo ambiente descontraído, propiciando uma moradia prazerosa nestes últimos anos.*

*À Magali de Oliveira Taumaturgo pela paciência, e que apesar da distância, apoiou-me constantemente.*

# *Sumário*

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Sumário</b>   | <b>iii</b>  |
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>vi</b>   |
| <b>Lista de Tabelas</b>  | <b>ix</b>   |
| <b>Lista de Símbolos</b>   | <b>x</b>    |
| <b>Resumo</b>  | <b>xiii</b> |
| <b>Abstract</b>  | <b>xiv</b>  |
| <b>Capítulo 1</b>  | <b>1</b>    |
| 1.1 Objetivo e Contribuição .....                                    | 1           |
| 1.2 Revisão Bibliográfica.....                                       | 2           |
| 1.3 Definição e Importância da Análise Não Linear da Estrutura ..... | 3           |
| 1.4 Introdução à Teoria de Dano .....                                | 4           |
| 1.5 Fadiga .....   | 6           |
| 1.5.1 Comportamento do material sob carregamento cíclico.....        | 7           |
| 1.5.2 Mecanismos de Fadiga .....                                     | 8           |
| 1.5.3 Tipos de Fadiga .....  | 11          |
| <b>Capítulo 2</b>  | <b>13</b>   |
| 2.1 Introdução .....   | 13          |
| 2.2 Princípio das Potências Virtuais.....                            | 13          |
| 2.2.1 Teoria do Primeiro Gradiente .....                             | 15          |
| 2.2.2 Potência Virtual dos Esforços Internos.....                    | 16          |
| 2.2.3 Potência Virtual dos Esforços Externos .....                   | 16          |
| 2.2.4 Potência Virtual dos Esforços de Inércia.....                  | 17          |

|                   |   |           |
|-------------------|---|-----------|
| 2.2.5             | Equação de Equilíbrio .....                                     | 17        |
| 2.2.6             | Hipótese de Pequenas Deformações e Pequenos Deslocamentos ..... | 18        |
| 2.3               | Elementos da Termodinâmica dos Meios Contínuos .....            | 18        |
| 2.3.1             | Leis de Conservação.....  | 18        |
| 2.4               | Método do Estado Local .....                                    | 23        |
| 2.4.1             | Potencial Termodinâmico.....                                    | 24        |
| 2.4.2             | Pseudo Potencial de Dissipação .....                            | 25        |
| <b>Capítulo 3</b> | <b>.....</b>  | <b>27</b> |
| 3.1               | Introdução .....  | 27        |
| 3.2               | Plasticidade .....  | 28        |
| 3.2.1             | Função de Escoamento.....                                       | 28        |
| 3.2.2             | Regras de Encruamento.....                                      | 29        |
| 3.2.3             | Critério de Escoamento .....                                    | 32        |
| 3.3               | Micromecânica do Dano Contínuo .....                            | 32        |
| 3.3.1             | Escala dos Fenômenos da Deformação e Dano .....                 | 33        |
| 3.3.2             | Representação Mecânica do Dano.....                             | 34        |
| 3.3.3             | Estágio de Início do Dano .....                                 | 37        |
| 3.4               | Equações de Estado.....   | 38        |
| 3.5               | Equações de Evolução – Potencial de Dissipação.....             | 41        |
| 3.5.1             | Equação Constitutiva Não Linear Acoplada com Dano .....         | 42        |
| <b>Capítulo 4</b> | <b>.....</b>  | <b>46</b> |
| 4.1               | Introdução .....  | 46        |
| 4.2               | Teoria de Placas .....  | 47        |
| 4.2.1             | Definição.....  | 47        |
| 4.2.2             | Teorias de Primeira Ordem .....                                 | 48        |
| 4.2.2.1           | Teoria Clássica de Placas Finas .....                           | 48        |

|   |           |
|---|-----------|
| 4.2.2.2 Teoria Clássica de Placas Semi-espessas.....                    | 51        |
| 4.2.3 Teorias de Ordem Superior .....                                   | 54        |
| 4.2.3.1 Teoria de Reddy .....   | 54        |
| 4.2.3.2 Teoria de Lo, Christensen e Wu .....                            | 55        |
| 4.2.3.3 Teoria de Kant.....   | 56        |
| 4.2.4 Justificativa de Escolha entre as Teorias de Ordem Superior ..... | 57        |
| 4.2.5 Desenvolvimento.....  | 58        |
| 4.3 Desenvolvimento do Algoritmo .....                                  | 62        |
| 4.3.1 Equações de equilíbrio Globais.....                               | 63        |
| 4.4 Integração Local .....  | 65        |
| 4.5 Algoritmo.....  | 66        |
| 4.6 Determinação do Operador Tangente J.....                            | 67        |
| <b>Capítulo 5 - Resultados</b> .....                                    | <b>69</b> |
| 5.1 Introdução .....  | 69        |
| <b>Capítulo 6 - Conclusões e Sugestões</b> .....                        | <b>89</b> |
| <b>Revisão Bibliográfica</b> .....                                      | <b>91</b> |

## *Lista de Figuras*

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1-1  | Laços de Histerese .....   | 04 |
| 1-2  | Laço de histerese com deformação controlada do cobre, Fuchs & Stephens ..... | 08 |
| 1-3  | Curva tensão-deformação cíclica, Fuchs & Stephens .....                      | 09 |
| 1-4  | Intrusões e extrusões, Fuchs & Stephens .....                                | 10 |
| 1-5  | Estágios de propagação das trincas de fadiga .....                           | 11 |
| 1-6  | Mecanismo de evolução de trincas de fadiga, Fuchs & Stephens .....           | 12 |
| 2-1  | Descrição do sistema físico.....   | 15 |
| 2-2  | Configurações em deformações finitas .....                                   | 18 |
| 2-3  | Condições de contorno de um corpo $\Omega$ .....                             | 19 |
| 3-1  | Encruamento Isotrópico.....  | 30 |
| 3-2  | Encruamento Cinemático.....  | 31 |
| 3-3  | Elemento de volume representativo de dano.....                               | 35 |
| 3-4  | Tensão efetiva em um elemento unidimensional. ....                           | 36 |
| 4-1  | Representação gráfica da placa.....  | 48 |
| 4-2a | Cinemática da teoria de placas finas, plano y-z .....                        | 50 |
| 4-2b | Cinemática da teoria de placas finas, plano x-z .....                        | 51 |
| 4-3a | Cinemática da teoria de placas semi-espessas, plano y-z.....                 | 53 |
| 4-3b | Cinemática da teoria de placas semi-espessas, plano x-z.....                 | 53 |
| 5-1  | Geometria da viga engastada .....  | 70 |
| 5-2  | Viga engastada submetida à flexão cíclica.....                               | 70 |
| 5-3  | Evolução do dano .....   | 71 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 5-4  | Distribuição da tensão efetiva de von Mises .....                   | 71 |
| 5-5  | Evolução do dano .....  | 71 |
| 5-6  | Evolução da deformação plástica acumulada.....                      | 72 |
| 5-7  | Geometria da viga biengastada .....                                 | 73 |
| 5-8  | Viga biengastada submetida à flexão cíclica.....                    | 73 |
| 5-9  | Distribuição da tensão efetiva de von Mises .....                   | 74 |
| 5-10 | Evolução do dano .....  | 74 |
| 5-11 | Evolução da deformação plástica acumulada.....                      | 74 |
| 5-12 | Evolução do dano .....  | 75 |
| 5-13 | Geometria da viga.....  | 76 |
| 5-14 | Viga biapoçada submetida à flexão cíclica.....                      | 76 |
| 5-15 | Distribuição da tensão efetiva de von Mises .....                   | 77 |
| 5-16 | Evolução do dano .....  | 77 |
| 5-17 | Evolução da deformação plástica acumulada.....                      | 77 |
| 5-18 | Vista superior da placa quadrada engastada.....                     | 78 |
| 5-19 | Discretização da placa .....  | 78 |
| 5-20 | Evolução do dano .....  | 79 |
| 5-21 | Evolução da deformação plástica acumulada.....                      | 79 |
| 5-22 | Distribuição da tensão efetiva de von Mises, quando $t=18,15$ ..... | 79 |
| 5-23 | Discretização da placa quadrada em 9 elementos .....                | 80 |
| 5-24 | Distribuição da tensão efetiva de von Mises, quando $t=1,75$ .....  | 81 |
| 5-25 | Geometria da placa com furo .....                                   | 82 |
| 5-26 | Discretização da placa com furo .....                               | 82 |
| 5-27 | Evolução da deformação plástica acumulada.....                      | 83 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 5-28 | Evolução da deformação plástica acumulada apresentada por Rossi (1997)..... | 83 |
| 5-29 | Evolução da frente plástica apresentada por Foggiatto (1997).....           | 84 |
| 5-30 | Evolução da frente plástica apresentada por Zienkiewicz (1977) .....        | 84 |
| 5-31 | Geometria da placa biengastada.....   | 86 |
| 5-32 | Viga biengastada submetida à flexão cíclica.....                            | 86 |
| 5-33 | Distribuição da tensão efetiva de von Mises .....                           | 87 |
| 5-34 | Evolução do dano .....  | 87 |
| 5-35 | Evolução da deformação plástica acumulada.....                              | 87 |

## ***Lista de Tabelas***

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3-1 | Dimensões do elemento de volume representativo .....       | 34 |
| 3-2 | Propriedades do material (comum a todos os exemplos) ..... | 69 |
| 3-3 | Propriedades do material e geométricas (exemplo 1).....    | 70 |
| 3-4 | Propriedades do material e geométricas (exemplo 2).....    | 73 |
| 3-5 | Propriedades do material e geométricas (exemplo 3).....    | 76 |
| 3-6 | Propriedades do material e geométricas (exemplo 4).....    | 78 |
| 3-7 | Propriedades do material e geométricas (exemplo 5).....    | 80 |
| 3-8 | Propriedades do material e geométricas (exemplo 6).....    | 82 |
| 3-9 | Propriedades do material e geométricas (exemplo 7).....    | 86 |

## *Lista de Símbolos*

|              |  |
|--------------|--|
| $B_0$        | Configuração de referência.                    |
| $B_t$        | Configuração atual.                            |
| $C$          | Tensor de Quarta ordem da elasticidade.        |
| $D$          | Dano.  |
| $\mathbf{D}$ | Tensor taxa de deformação.                     |
| $D_c$        | Dano crítico.                                  |
| $e$          | Energia interna específica.                    |
| $E$          | Energia interna ( <i>cap. 2</i> ).             |
| $E$          | Módulo de Young.                               |
| $f$          | Função de escoamento.                          |
| $\bar{f}$    | Vetor densidade de forças de ação a distância. |
| $F$          | Pseudo potencial de dissipação.                |
| $F_D$        | Pseudo potencial de dissipação do dano.        |
| $F_p$        | Pseudo potencial de dissipação elastoplástico. |
| $\bar{g}$    | Aceleração gravitacional.                      |
| $G$          | Módulo de Young transversal.                   |
| $h$          | Espessura da placa.                            |
| $H$          | Função de Heaviside.                           |
| $K$          | Energia cinética.                              |
| $l$          | Largura da placa.                              |
| $l_c$        | Comprimento característico do material.        |

|            |   |
|------------|---|
| $N$        | Número de ciclos de carga.  |
| $p$        | Deformação plástica acumulada.                                      |
| $\dot{p}$  | Taxa de deformação plástica acumulada.                              |
| $p_D$      | Valor crítico da deformação plástica acumulada.                     |
| $P_a$      | Potência virtual dos esforços de inércia.                           |
| $P_e$      | Potência virtual dos esforços externos.                             |
| $P_i$      | Potência virtual dos esforços internos.                             |
| $\bar{q}$  | Vetor fluxo de calor.   |
| $Q$        | Fluxo de energia térmica entrando ou saindo do sistema.             |
| $r$        | Produção interna de calor ( <i>cap. 2</i> ).                        |
| $r$        | Deformação relacionada ao encruamento isotrópico ( <i>cap. 3</i> ). |
| $R$        | Variável dual da deformação relacionada ao encruamento isotrópico.  |
| $R_\infty$ | Patamar de estabilização do encruamento isotrópico.                 |
| $s$        | Entropia específica.  |
| $S$        | Entropia.   |
| $\bar{t}$  | Vetor densidade de forças de contato.                               |
| $T$        | Temperatura absoluta.   |
| $\bar{u}$  | Vetor aceleração.   |
| $\bar{v}$  | campo de velocidades.   |
| $V$        | Volume do meio contínuo.  |
| $W$        | Tensor taxa de rotação.   |
| $Y$        | Variável associada ao dano.   |
| $\alpha$   | Tensor deformação relacionada ao encruamento cinemático.            |

|                      |  |
|----------------------|--|
| $\Gamma_t$           | Contorno com tração prescrita.                                   |
| $\Gamma_u$           | Contorno com deslocamento prescrito.                             |
| $\Delta \varepsilon$ | Varição da deformação total.                                     |
| $\varepsilon$        | Tensor deformação total.   |
| $\varepsilon^e$      | Tensor deformação elástica.                                      |
| $\varepsilon^p$      | Tensor deformação plástica.                                      |
| $\varepsilon^{pD}$   | Valor crítico da deformação plástica para início de dano.        |
| $\bar{\Theta}$       | Vetor associado ao vetor gradiente do dano.                      |
| $\lambda$            | Multiplicador escalar.   |
| $\nu$                | Coefficiente de Poisson.   |
| $\Pi$                | Função que define a forma da superfície de escoamento.           |
| $\rho$               | Massa específica.  |
| $\sigma$             | Tensor tensão.   |
| $\tilde{\sigma}$     | Tensor tensão efetiva.   |
| $\sigma_{eq}$        | Tensão equivalente.  |
| $\varphi$            | Pseudo-potencial de dissipação.                                  |
| $\chi$               | Tensor dual da deformação relacionada ao encruamento cinemático. |
| $\chi_\infty$        | Patamar de estabilização do encruamento cinemático.              |
| $\Psi$               | Potencial de energia livre de Helmholtz.                         |
| $\Omega$             | Domínio.   |
| $\bar{\nabla}$       | Vetor operador gradiente.  |

## *Resumo*

Este trabalho apresenta uma teoria e propõe um esquema numérico para a análise do dano de fadiga de baixo ciclo em placas espessas. A teoria proposta se baseia nos trabalhos feitos por Lemaitre (1992) e está baseada na termodinâmica dos processos irreversíveis. O modelo elastoplástico considera uma lei de encruamento não linear do tipo isotrópico e cinemático, que depende da deformação plástica acumulada e apresenta um patamar de saturação que caracteriza uma estabilização no fenômeno de encruamento. Além disso, o modelo considera que o dano é isotrópico.

Com o objetivo de resolver problemas de placas espessas, utiliza-se o campo de deslocamentos de ordem superior da teoria proposta por Kant.

O método dos elementos finitos de Galerkin é utilizado para a discretização do domínio geométrico, e a regra de integração trapezoidal generalizada para o processo de evolução do tempo.

Para integrar as equações de evolução locais faz-se uso de um "elastic with damage predictor with a plastic corrector scheme". Este algoritmo, apresentado por Simo & Taylor e generalizado por Benallal *et al.* (1988), pertence à classe de mapeamento de retorno, que apresenta uma taxa de convergência quadrática, e é bastante robusto.

O código implementado para esta formulação é aplicado a problemas não lineares elastoplásticos de placas, o qual permite a determinação da evolução do dano e da deformação plástica. Quando possível, os resultados apresentados foram comparados com a literatura disponível.

## *Abstract*

The objective of this work is to present a theory and to propose a numerical scheme for the elastoplastic with damage analysis of thick plates, subjected to a cyclic loading. The theory is based on the work done by Lemaitre (1992) and it is based on the thermodynamics of irreversible processes. The elastoplastic model considers a nonlinear isotropic and cinematic hardening law, which depends on the accumulate plastic deformation and presents a saturation level in order to characterize a stabilization of the hardening phenomena. Moreover, the model considers the damage to be isotropic.

With the objective of solving thick plate problems, we make use of the higher order plate theory proposed by Kant.

The discretization of the cyclic elastoplastic with damage problem employs: the Galerkin finite element method, for the discretization of the geometric domain; and the generalized trapezoidal integration rule for the time evolution process.

In order to integrate the local evolution equations we make use of an "elastic with damage predictor with a plastic corrector scheme". This algorithm, presented by Simo & Taylor and generalized by Benallal *et al.* (1988), belongs to the class of the "return mapping algorithms", presents a quadratic convergence rate, and is quite robust.

The code implemented for this formulation is applied for the low cycle fatigue analysis of thick plates and allows us to determine the evolution of the damage and of the plastic deformation. When possible, the presented results were compared with the available literature.

# *Capítulo 1*

## *Introdução*

### *1.1 Objetivo e Contribuição*

---

O objetivo deste trabalho é o de apresentar uma teoria capaz de descrever adequadamente os fenômenos de elastoplasticidade e do dano em placas espessas sujeitas à carregamentos cíclicos, possibilitando a análise de fadiga, e desenvolver um procedimento numérico para a solução desta classe de problemas.

Esta formulação contribui para a análise de fadiga de baixo ciclo em estruturas e componentes em geral. Tais problemas são bastante comuns na indústria, como por exemplo, nas junções de chapas, onde ocorre o efeito local de concentração de tensões.

Vários modelos constitutivos foram propostos para descrever carregamentos cíclicos. Encontramos na literatura em anexo vários artigos tratando de teorias que se utilizam de campos de deslocamentos de primeira ordem. Com a teoria de ordem superior é possível descrever de forma mais adequada a evolução da frente de dano ao longo da espessura. Isto permite uma análise mais precisa do processo de fadiga.

Neste trabalho pretendemos utilizar uma teoria simples que descreva adequadamente os principais fenômenos ocorrentes para carregamento cíclico e aplicar a teoria em problemas de placas espessas.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

---

Falhas mecânicas têm causado muitos danos e prejuízos financeiros. Falhas devido a carregamentos repetidos (fadiga), são responsáveis por pelo menos a metade destas falhas mecânicas. A maioria dos livros e artigos comentam que entre 50 e 90 por cento de todas as falhas mecânicas, são falhas de fadiga; e a grande maioria destas falhas decorrem de fraturas inesperadas.

De acordo com as informações de Fuchs & Stephens (1980) e de Rossi (1997), os primeiros ensaios de fadiga datam de 1830, quando W. A. Albert observou o comportamento de correntes soldadas de um guindaste. A palavra *fadiga* foi introduzida entre 1840 e 1850 para descrever falhas decorrentes de tensões repetidas. Na Alemanha entre 1850 e 1860 foi realizado o trabalho de maior valor daquela época por August Wöhler, o qual, realizou vários ensaios de fadiga em corpos sob carregamentos repetidos. Entre estes ensaios destaca-se o do eixo de trem, submetido a carregamentos repetidos de flexão. Wöhler grafou os resultados em um diagrama de tensão alternada de falha versus vida, gerando assim o conhecido diagrama  $\sigma \times N$ .

Durante 1870 e 1890 substanciais pesquisas adicionais acrescentaram o trabalho de Wöhler. Entre estas pesquisas destacam-se a de Gerber, que analisou o efeito da tensão média na vida de um componente, e J. Goodman que propôs uma teoria simplificada para o efeito da tensão média.

Outras grandes contribuições só foram feitas com a utilização do microscópio óptico no início do século XX. Desta forma, foi possível observar os fenômenos metalúrgicos decorrentes das solicitações de tensão de fadiga. H. J. Gough em 1920 e H. F. Moore & J. B. Kammers em 1927 fizeram publicações importantes sobre estudos da fadiga em metais. Paralelamente aos trabalhos da fadiga, começavam a surgir os trabalhos na área da mecânica da fratura, como destaque cita-se o de A. A. Griffith. A contribuição do efeito benéfico que as tensões residuais produzem no problema de fadiga

deve-se a John Otto Almen. Em 1945, M. A. Miner formulou um critério de acúmulo linear de dano, sugerida inicialmente por A. Palmgren em 1924. Este critério de dano de fadiga ficou conhecido depois como lei de acúmulo de dano de Palmgren-Miner. É extensivamente usado no projeto de fadiga e, apesar de suas deficiências, ainda permanece uma ferramenta importante em previsões da vida de fadiga. Outro grande avanço na área de fadiga só veio a acontecer nos anos 60 com a relação de S. S. Manson e de L. F. Coffin para problemas de fadiga com controle de deformação, para maiores detalhes ver Fuchs & Stephens (1980).

Embora o conceito de uma variável que está relacionada com a degradação do material tenha sido apresentada já no trabalho de Palmgren-Miner, é o trabalho de L. M. Kachanov em 1958 que é considerado como o ponto inicial da teoria de dano mecânico contínuo. Alguns anos depois, a variável de dano  $D$  ganhou sentido de uma variável de estado interna dentro da termodinâmica. Em 1968, outro grande avanço foi alcançado através do conceito de tensão efetiva proposto por Y. N. Robotnov. A partir dos anos 70 a teoria do dano mecânico contínuo teve grandes avanços dado por L. M. Kachanov, J. L. Chaboche e principalmente por J. Lemaitre.

Hoje, a teoria do dano mecânico contínuo está fortemente montada dentro do contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis, podendo ser aplicada não só para o problema de fadiga, mas para qualquer problema que envolva algum tipo de degradação do material.

### ***1.3 Definição e Importância da Análise Não Linear da Estrutura***

---

A relação linear entre tensão e deformação em um material idealizado forma a base matemática da teoria de elasticidade. Esta teoria tem sido amplamente aplicada a certos materiais para estimar a tensão ou deformação nos elementos estruturais até uma

determinada condição de trabalho. A teoria de plasticidade representa a extensão necessária da teoria de elasticidade e seu interesse é com a análise de tensões e deformações na estrutura, tanto em regiões elásticas quanto em regiões plásticas. O objeto da teoria matemática de plasticidade é proveniente da descrição da relação entre tensão e deformação para um material que exibe uma reação elastoplástica. Em essência, o comportamento plástico é caracterizado por uma deformação irreversível que pode ser alcançada apenas quando um nível de tensão for atingido.

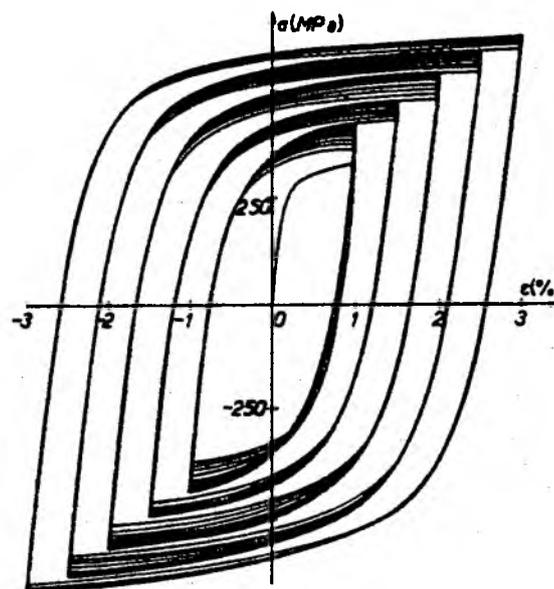


Figura 1-1: Laços de Histerese.

No caso particular de plasticidade cíclica, pretende-se modelar uma evolução elastoplástica levando em consideração o endurecimento isotrópico e cinemático, ambos não lineares, assim como mostrado na Figura 1-1.

## 1.4 Introdução à Teoria de Dano

---

Segundo Grosskreutz (1971), as primeiras teorias de fadiga foram apontadas nas informações da ampla curva  $\sigma \times N$ , em termos da acumulação de algum vago e

indefinido dano dentro do material, sendo assumido que a falha acontecia com o acúmulo de uma quantia crítica de dano.

De acordo com Kachanov (1986), todo corpo submetido a condições mecânicas e ambientais desfavoráveis, sofre variações microestruturais que diminuem a resistência do material. Estas variações prejudicam as propriedades mecânicas destes materiais, ocasionando o que chama-se de dano.

Considere alguns exemplos de dano:

*Dano de fluência:* quando o corpo é submetido a altas temperaturas e está sob a ação de tensões, dá-se início a nucleação e crescimento de microvazios (fratura devido a fluência transgranular dúctil). Pode ocorrer um acúmulo e crescimento de microtrincas nos contornos intergranulares (fratura devido a fluência intergranular frágil). Assim, dois mecanismos de fratura ocorrem simultaneamente.

*Dano plástico dúctil:* o mesmo fenômeno, i.e., nucleação e crescimento de microvazios e microtrincas, ocorre em metais como consequência de grandes deformações plásticas. Este processo descreve a conhecida fratura plástica.

*Dano de fadiga:* ocorre quando o corpo é submetido a carregamento cíclico ocasionando uma deterioração gradual da estrutura de um material, causado pelo acúmulo e crescimento das micro e macrotrincas.

*Fragilização do aço:* devido a ação da radiação atômica a estrutura do aço é modificada, diminuindo sua ductilidade e provocando sua fragilização. A difusão dos átomos de hidrogênio livre na estrutura de aço, ocasionam uma fragilização da estrutura.

*Dano químico-mecânico:* metais sob a ação de tensão de tração, operando em meios agressivos estão sujeitos a corrosão intensiva ou a algumas outras reações químicas.

*Degradação ambiental:* alguns materiais (geo-materiais, polímeros, ...) têm suas propriedades mecânicas alteradas devido ao meio ambiente até mesmo na ausência de tensão. Como exemplo pode-se citar o solo, a madeira e alguns outros materiais que dependam do nível de umidade.

*Dano em materiais porosos:* em um material não homogêneo existem zonas de baixa resistência mecânica, o qual, quando submetido a um certo carregamento provoca-se o aparecimento de trincas.

As variações na estrutura material mencionada acima são, em geral, irreversíveis, pois durante o processo de dano a entropia aumenta.

O acúmulo de dano ocorre quando submetido a deformação elástica (no caso de fadiga de alto ciclo), sob deformação elastoplástica (no caso de dano plástico dúctil e fadiga de alto ciclo), e sob condição de fluência (dano de fluência).

## **1.5 Fadiga**

---

Segundo da Rosa (1994), fadiga é a redução gradual da capacidade de carga do componente, pela ruptura lenta do material, conseqüência do aumento quase infinitesimal das fissuras que formam-se no seu interior. As cargas variáveis, sejam cíclicas ou não, fazem com que, em ao menos alguns pontos, o material sofra deformações plásticas também variáveis com o tempo. Estas deformações levam o material a uma deterioração progressiva, dando origem a uma trinca. Esta cresce até atingir um tamanho suficiente para a ruptura final, geralmente brusca, com características macroscópicas de uma fratura frágil.

O processo de fadiga ocorre de maneira muito localizada, onde certas áreas podem conter altas tensões ou deformações devido a aplicação de carregamentos externos,

mudanças abruptas de geometria, elevados diferenciais de temperatura, tensões residuais e imperfeições materiais tais como inclusões, Fuchs & Stephens (1980).

### **1.5.1 Comportamento do material sob carregamento cíclico**

Bauschinger (1833-1893), foi o primeiro a observar a diferença entre o comportamento de um ensaio de tração monotônico e o comportamento obtido em um ensaio sob carregamento cíclico. Em seus experimentos, ele verificou que a tensão de escoamento em tração ou compressão era reduzida após a aplicação de um carregamento de sinal contrário, caracterizando um amolecimento, tal fenômeno leva seu nome.

O efeito Bauschinger tem sido observado tanto em metais policristalinos quanto em metais monocristalinos. Isso se deve a anisotropia do campo de deslocamento causado pelo carregamento anterior.

Muitos estudos sobre a resposta de materiais ao carregamento cíclico ocorreram desde então, o qual, de acordo com Malvern (1969), podemos citar Templin e Sturm (1940), Batdorf e Budiansky (1954), Ramberg e Osgood (1943) e Phillips (1956). A terminologia adotada para estas mudanças na relação constitutiva de tensão-deformação foi de endurecimento cíclico ou amolecimento cíclico. Este comportamento é caracterizado na Figura 1-2, o qual é obtido utilizando corpos de prova de cobre submetido a um ensaio de deformação controlada.

As variáveis envolvidas no comportamento cíclico do material, definidas na Figura 1-2a, são a variação da deformação total  $\Delta\varepsilon$ , dada por  $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p$ , e a variação da tensão dada por  $\Delta\sigma$ . Porém, como  $\Delta\varepsilon^e = \Delta\sigma/E$ , pode-se escrever

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p = \Delta\sigma/E + \Delta\varepsilon^p \quad (1.1)$$

A área dentro do laço de histerese é a energia dissipada por unidade de volume por ciclo. Cada uma das três curvas mostradas nesta figura apresenta características bastante

diferentes, quanto ao comportamento cíclico. A curva apresentada em 1-2a mostra um progressivo endurecimento por ciclo, já a curva 1-2c apresenta um amolecimento cíclico, também progressivo. Por fim, a curva 1-2b apresenta um endurecimento cíclico seguido de um amolecimento. Embora a tensão mude bastante nos primeiros ciclos, depois de cerca de 10 a 30% do ensaio, o laço de histerese tende a estabilizar, acrescentando uma deformação plástica constante por ciclo até que o processo de ruptura tenha início.

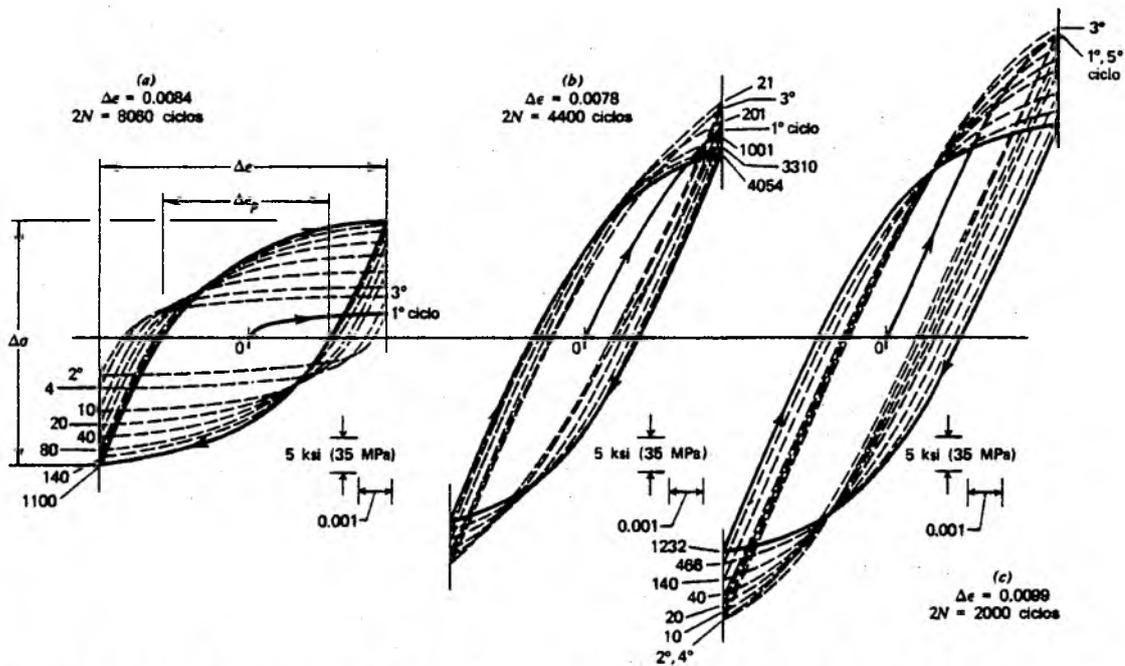


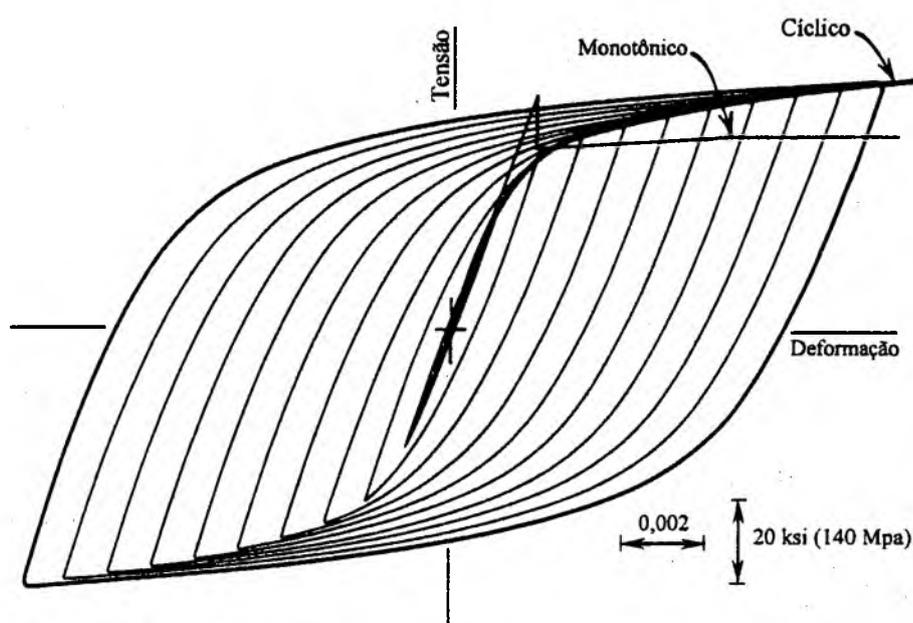
Figura 1-2: Laço de histerese com deformação controlada do cobre, Fuchs & Stephens.

A família de laços de histerese estabilizados, para diferentes amplitudes de deformação, é utilizada para obter a curva tensão-deformação cíclica para um dado material. Um exemplo desta curva é apresentado na Figura 1-3, na qual o extremo de cada ciclo de histerese estabilizado é ligado formando a curva tensão-deformação cíclica. A Figura 1-3 mostra também a curva do ensaio monotônico do mesmo material para efeito de comparação.

### 1.5.2 Mecanismos de Fadiga

Metais são materiais cristalinos. Isto significa que os átomos estão arranjados de uma maneira ordenada. A maioria dos aços estruturais são policristalinos e deste modo

consistem de um grande número de cristais ordenados individualmente ou grãos. Cada grão possui propriedades mecânicas e direções de ordenamento particulares. Alguns grãos encontram-se orientados de forma bastante desfavorável, i.e., com orientação mais próxima da direção da tensão cisalhante máxima acarretando uma deformação cisalhante irreversível. Esta distorção produz um deslizamento devido ao movimento das discordâncias ao longo dos planos cristalográficos.

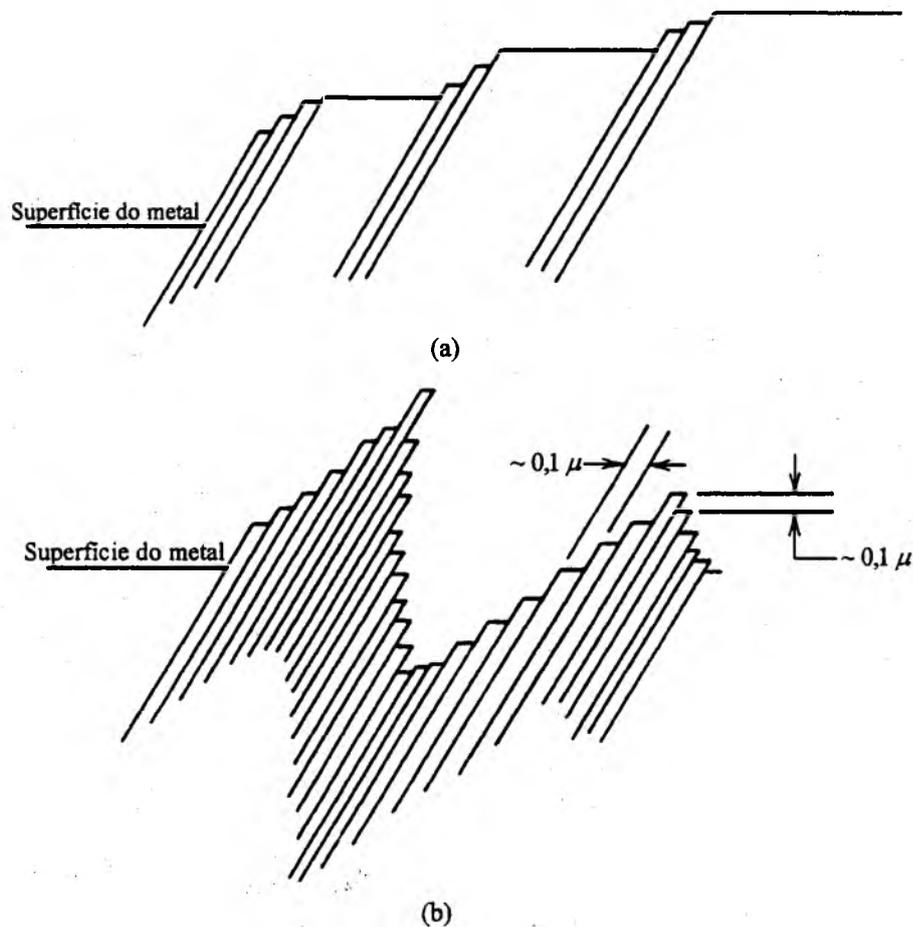


**Figura 1-3:** Curva tensão-deformação cíclica, Fuchs & Stephens.

O deslizamento ocorre tanto no carregamento monotônico quanto no carregamento cíclico. A Figura 1-4a, mostra um deslizamento grosseiro, o qual caracteriza carregamento monotônico ou grandes amplitudes de carregamento cíclico. Já a Figura 1-4b, representa o comportamento de carregamento cíclico com baixas amplitudes de carregamento.

Pode-se caracterizar as intrusões como o fundo da cavidade da Figura 1-4b e como extrusões os picos de elevação da mesma figura. Intrusões formam excelentes pontos de concentração de tensão, os quais podem ser a localização inicial de uma trinca. Inicialmente, o deslizamento é controlado pela tensão de cisalhamento. Assim, a trinca de fadiga tende a crescer em bandas de deslizamento locais na direção da máxima tensão de

cisalhamento. Este crescimento é relativamente pequeno, usualmente da ordem de alguns grãos. Com a continuidade do carregamento cíclico, as trincas de fadiga tendem a coalescer e crescer de acordo com o plano da máxima tensão de tração. Estes dois estágios de crescimento da trinca de fadiga são chamados de estágios I e II, respectivamente, este comportamento é mostrado na Figura 1-5.



**Figura 1-4:** Intrusões e extrusões, Fuchs & Stephens.

O mecanismo de fadiga em metais de alta resistência ou para metais frágeis pode não conter formação de bandas de deslizamento. Neste caso, as microtrincas são geralmente formadas diretamente nas discontinuidades, tais como inclusões ou vazios e então crescem ao longo dos planos de máxima tensão de tração, Fuchs & Stephens (1980).

A Figura 1-6 apresenta de forma esquemática o mecanismo de surgimento de trincas de fadiga de acordo com o nível de sollicitação.

### 1.5.3 Tipos de Fadiga

Alguns autores, como Lemaitre, costumam diferenciar a ocorrência do fenômeno da fadiga em duas partes, conforme o nível de sollicitação envolvida.

- **Fadiga de Alto Ciclo**

Na fadiga de alto ciclo a sollicitação produz valores baixos de tensão, deste modo, a única deformação irreversível é a microplasticidade, a qual é difícil de ser determinada pois geralmente ocorre na interface de inclusões e em torno da região de vazios. Conseqüentemente, os mecanismos de evolução do dano devem ser obtidos em termos de tensões. O nível de tensões, na melhor das hipóteses, é o da magnitude de escoamento do material. Este tipo de fadiga corresponde a um número de ciclos até a falha de  $N > 10N_r$  ciclos, onde  $N_r$  é o número de ciclos de transição. Em algumas literaturas ele é definido como  $N_r = 10^4$ , porém, em geral, depende das propriedades materiais. Neste tipo de fadiga o dano acontece de forma mais localizada .

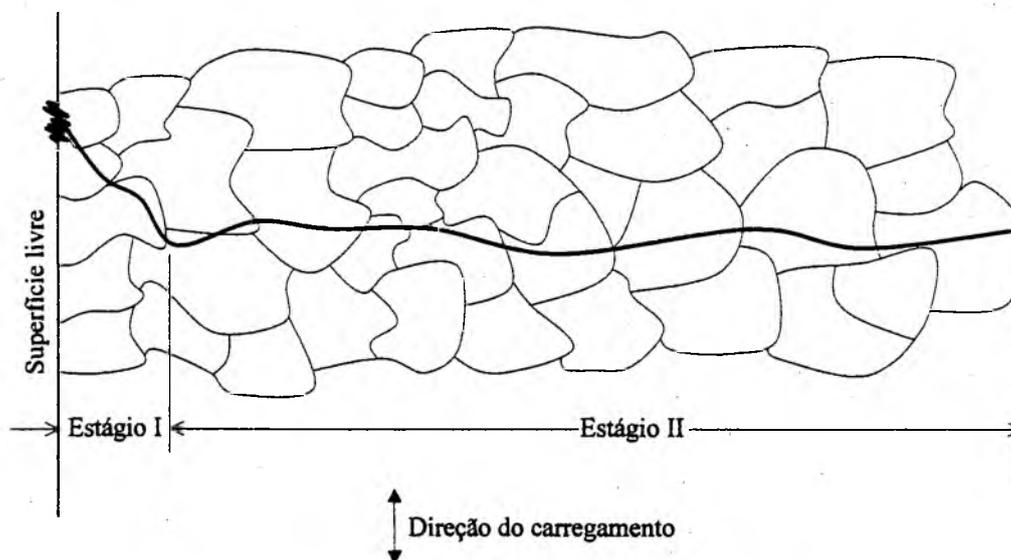
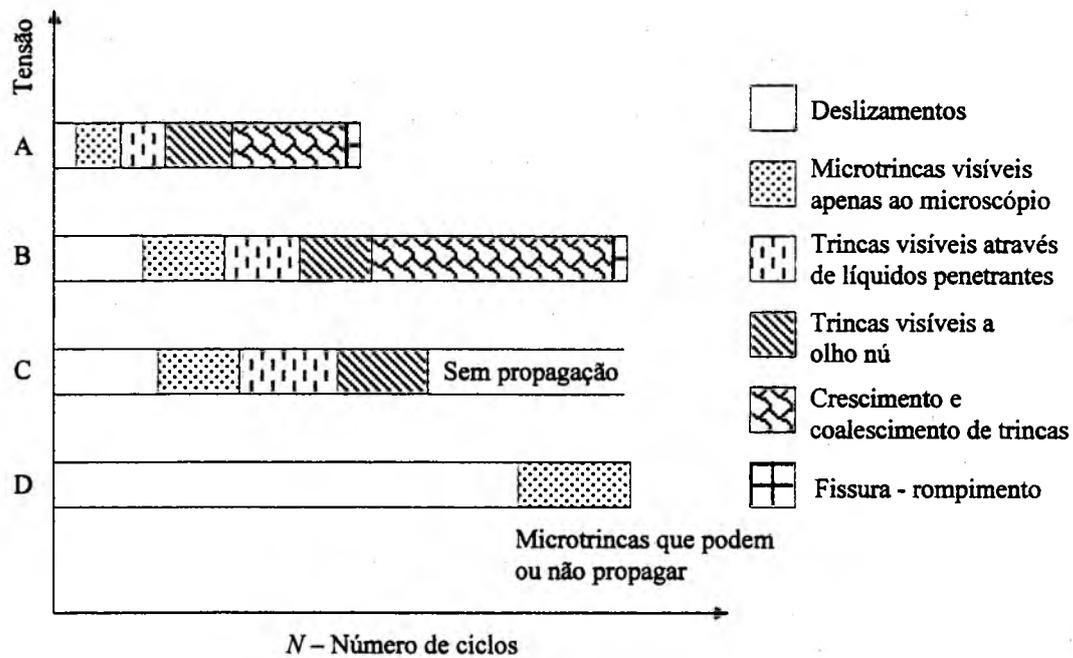


Figura 1-5: Estágios de propagação das trincas de fadiga.

• **Fadiga de Baixo Ciclo**

Considera-se fadiga de baixo ciclo quando a deformação plástica envolvida é grande o suficiente para ser medida. Isto corresponde a um nível de tensões pouco maior que a tensão de escoamento inicial e de um número de ciclos para falha na ordem de  $N < 10N_e$  ciclos.



**Figura 1-6:** Mecanismo de evolução de trincas de fadiga, Fuchs & Stephens.

## ***Capítulo 2***

### ***Termodinâmica dos Meios Contínuos***

#### ***2.1 Introdução***

---

Um método clássico de formular o fenômeno de dano em um tridimensional é postular a existência de potenciais de energia, afim de introduzir as variáveis características dos fenômenos de ruptura, utilizando o enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis. Sendo assim, este capítulo apresenta os conceitos básicos da teoria utilizada para modelar os fenômenos de deformação e de ruptura de um meio contínuo. O texto foi fundamentado principalmente nos trabalhos de Malvern (1969), de Germain (1973), de Germain *et al.* (1983), de Sampaio (1985), de Lemaitre & Chaboche (1994), de Khan & Huang (1995) e de Rossi (1997).

#### ***2.2 Princípio das Potências Virtuais***

---

O PPV é uma forma conveniente de enunciar as leis fundamentais da Dinâmica. Sua conveniência se deve, basicamente, a dois motivos principais, que são:

- i)* A razão teórica, é que o PPV permite uma associação entre o conceito de força e o de movimento (no sentido amplo, englobando deformação), mostrando claramente que não é possível tratar um dissociado do outro.

ii) A razão prática, é que o PPV conduz a uma formulação integral que se mostrou muito conveniente quando se busca uma solução numérica através do método dos elementos finitos.

Através do PPV e da escolha de um campo de descrição cinemática adequado com o corpo em análise, obtêm-se uma definição coerente das deformações, das equações de equilíbrio das forças e das condições de contorno apropriadas.

Segundo Sampaio (1985), o PPV consiste em descrever os movimentos possíveis de um sistema mecânico por um espaço vetorial  $\mathcal{V}$ , denominado espaço dos movimentos virtuais, sendo que a escolha deste espaço reflete o grau de detalhe com o qual se quer descrever o sistema mecânico em questão. A este espaço é associado uma topologia que descreva o conceito de proximidade em  $\mathcal{V}$ . As forças aplicadas no sistema mecânico são então descritas pela prescrição de um funcional linear contínuo em  $\mathcal{V}$ . O conjunto destes funcionais lineares constitui o espaço  $\mathfrak{F}$  das forças. Assim, o significado das forças é dado através da potência que esta força realiza em um movimento virtual qualquer.

O PPV é baseado em dois axiomas básicos, definidos como:

i) Axioma da invariância dos esforços internos, que afirma que a potência virtual dos esforços internos associada ao sistema num movimento rígido é nulo.

ii) Axioma de equilíbrio, que para todo o meio material, relacionado a um referencial absoluto, a cada instante de tempo e para todo o movimento virtual; a potência virtual dos esforços de inércia  $P_a$  é igual a soma das potências virtuais dos esforços internos  $P_i$  e das potências virtuais dos esforços externos  $P_e$ , i.e.,

$$P_a = P_i + P_e. \quad (2.1)$$

### 2.2.1 Teoria do Primeiro Gradiente

Considere um sistema físico representado<sup>1</sup> por um certo domínio  $\Omega$ , de fronteira  $\partial\Omega$ , interior a um meio de volume  $V$ , de fronteira  $\partial V$  e  $\bar{n}$  a normal exterior em um ponto  $M$  de  $\partial\Omega$ , relacionado a um sistema de coordenadas como na Figura 2-1. Com a finalidade de obter uma melhor descrição do movimento do corpo, é introduzido, além do campo de velocidades  $\bar{v}(M)$ , o campo do gradiente da velocidade  $\bar{\nabla}\bar{v}(M)$ , o qual, para facilitar os cálculos, definimos por  $L = \bar{\nabla}\bar{v}(M)$ .

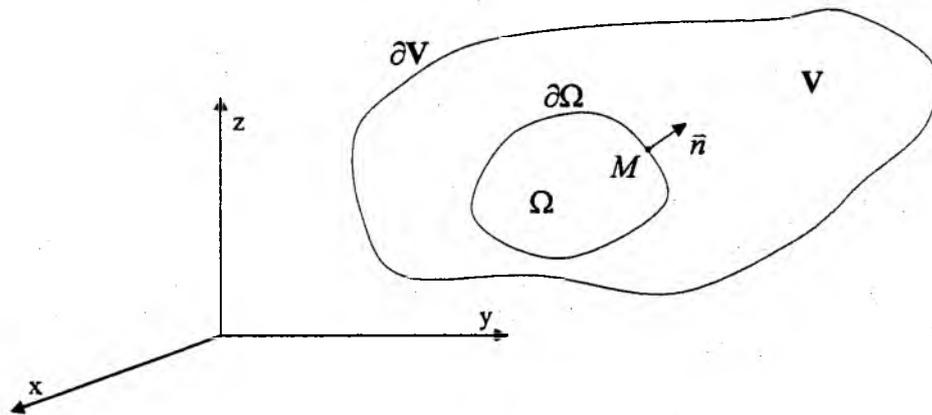


Figura 2-1: Descrição do sistema físico.

Decompondo o tensor  $L$  em duas partes, ficando definido da seguinte maneira

$$L = D + W, \tag{2.2}$$

no qual, a parte simétrica representada pelo tensor taxa de deformação  $D$ , também chamado tensor velocidade de deformação, é definido em termos de taxas de deslocamentos pela expressão

$$D = \frac{1}{2} \left\{ \bar{\nabla}\bar{v}(M) + [\bar{\nabla}\bar{v}(M)]^T \right\}. \tag{2.3}$$

<sup>1</sup> Neste trabalho convencionou-se que:

Campos escalares são representados por letras com fontes de estilo itálico, ex:  $R, \sigma, r$ ;

Campos vetoriais são representados por letras com fontes de estilo itálico e sobrescritas por seta, ex:  $\bar{\gamma}, \bar{n}$ ;

Campos tensoriais são representados por letras com fontes de estilo normal em negrito, ex:  $\sigma, \varepsilon, \chi, W$ .

A parte anti-simétrica é representada pelo tensor taxa de rotação  $\mathbf{W}$ , também chamado tensor vorticidade. Sua interpretação física pode ser explicada considerando-se o caso em que o corpo, em um determinado instante, possua todas as componentes do tensor taxa de deformação nulas, sendo que o movimento instantâneo resultante torna-se uma rotação de corpo rígido representada por este tensor, que é dado pela expressão

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{\nabla} \bar{v}(M) - [\bar{\nabla} \bar{v}(M)]^T \right\} . \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Potência Virtual dos Esforços Internos

Considera-se que a potência virtual dos esforços internos está definida por uma integral sobre o domínio  $\Omega$ . Assim,

$$P_i = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \, d\Omega . \quad (2.5)$$

### 2.2.3 Potência Virtual dos Esforços Externos

Os esforços externos são divididos em esforços de ação a distância e esforços de contato. Os esforços de ação a distância são devidos à ação do exterior sobre o sistema, atuando no volume do corpo  $\Omega$ , e são tais como o campo gravitacional e os campos eletromagnéticos. Estes esforços são representados por uma densidade de forças  $\bar{\mathbf{f}}$ . O segundo termo é devido aos esforços de contato que atuam na superfície do corpo  $\partial\Omega$  e são representados pelo vetor densidade de forças de superfície  $\bar{\mathbf{t}}$ . Assim, a potência virtual dos esforços externos é definida como

$$P_e = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\partial\Omega . \quad (2.6)$$

### 2.2.4 Potência Virtual dos Esforços de Inércia

Se  $\bar{u}$  é o vetor aceleração em cada ponto  $M$  e  $\rho$  é a massa específica, a potência das quantidades de aceleração é definida como<sup>2</sup>

$$P_a = \int_{\Omega} \rho \bar{u} \cdot \bar{v} \, d\Omega \quad (2.7)$$

### 2.2.5 Equação de Equilíbrio

Substituindo as equações integrais encontradas para cada um dos termos de potência na eq. (2.1) chega-se a

$$\int_{\Omega} \rho \bar{u} \cdot \bar{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma \cdot \mathbf{D} \, d\Omega + \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{t} \cdot \bar{v} \, d\partial\Omega \quad (2.8)$$

Com o teorema da divergência para um campo vetorial e algum algebrismo pode-se chegar à seguinte equação integral

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + \bar{f} - \rho \bar{u}) \cdot \bar{v} \, d\Omega = 0 \quad \forall \bar{v} \in \text{Var}_u \quad (2.9)$$

no qual

$$\operatorname{div} \sigma + \bar{f} - \rho \bar{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.10)$$

que é a clássica equação de equilíbrio dinâmico. Se o corpo estiver em equilíbrio estático então a potência devida à quantidade de aceleração  $P_a$  é nula e a eq. (2.10) reduz-se a

$$\operatorname{div} \sigma + \bar{f} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.11)$$

<sup>2</sup> A notação usando o ponto sobrescrito à variável representa a  $j$ -ésima derivada desta em relação ao tempo, de acordo com o número de pontos  $j$ .

que é a conhecida equação de equilíbrio estático. Temos ainda que  $\vec{t} = \sigma \vec{n}$  sobre  $\partial\Omega$ .

### 2.2.6 Hipótese de Pequenas Deformações e Pequenos Deslocamentos

No caso de deslocamentos e deformações infinitesimais é adotado classicamente que a configuração atual  $B_t$  seja aproximada pela configuração de referência  $B_0$ . Isto implica que as variáveis na descrição Lagrangeana e Euleriana sejam as mesmas, (ver Figura 2-2).

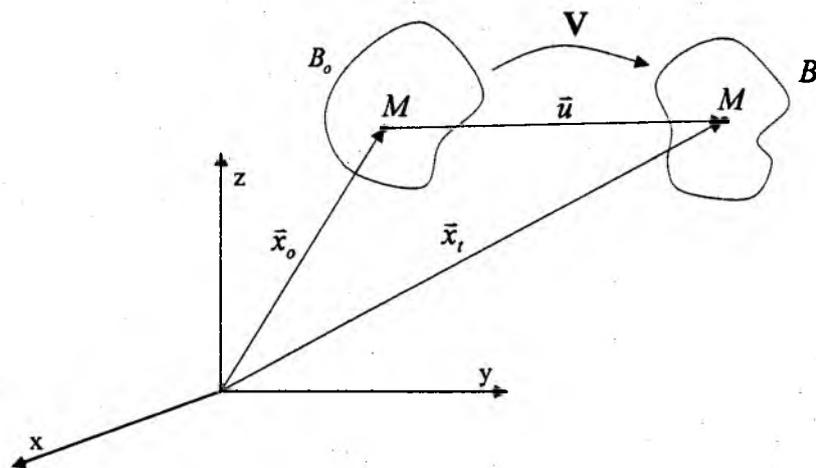


Figura 2-2: Configurações em deformações finitas.

## 2.3 Elementos da Termodinâmica dos Meios Contínuos

### 2.3.1 Leis de Conservação

#### i) Conservação da Massa:

A primeira lei de conservação é a lei de conservação da massa que é expressa por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega . \quad (2.12)$$

ii) Conservação da Quantidade de Movimento:

A equação de equilíbrio (2.10) pode ser interpretada como um balanço da quantidade de movimento, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \bar{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \bar{t} \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} \bar{f} \, d\Omega . \quad (2.13)$$

De acordo com o Princípio das Potências Virtuais, para um dado corpo  $\Omega$  sujeito a uma força de corpo  $\bar{f}$  e uma tração prescrita  $\bar{t}$  na parte  $\Gamma_t$  do contorno  $\partial\Omega$ , sendo:

$\Gamma_u$  - contorno com deslocamento prescrito  $u = \bar{u}$  em  $\Gamma_u$  e

$\Gamma_t$  - contorno com tração prescrita  $\sigma \bar{n} = \bar{t}$ ,

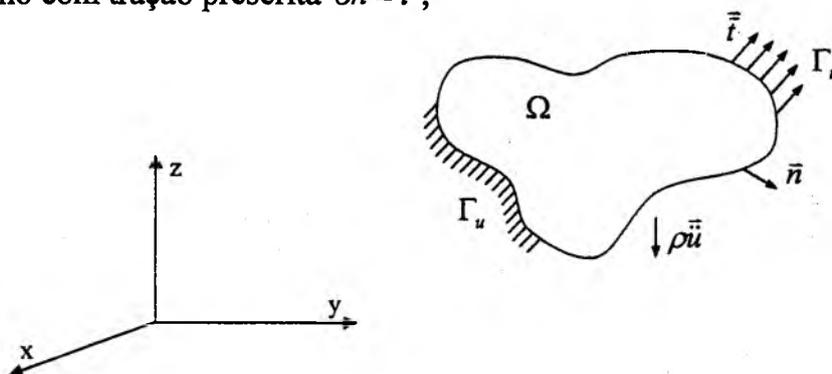


Figura 2-3: Condições de contorno de um corpo  $\Omega$ .

podemos introduzir dois conjuntos, os quais são:

o conjunto dos deslocamentos admissíveis, definido por

$$Kin = \{u \mid u \text{ é suf. regular, } u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u\} ,$$

e o conjunto dos deslocamentos virtuais

$$Var_u = \{v \mid v \text{ é suf. regular, } v = 0 \text{ em } \Gamma_u\} .$$

Desconsiderando os esforços de inércia, o Princípio das Potências Virtuais pode ser escrito, como

$$P_i + P_e = 0 \quad \forall v \in Var_u \quad (2.14)$$

então

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(\bar{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot \bar{v} d\Gamma \quad (2.15)$$

### iii) Primeiro Princípio da Termodinâmica:

A lei da conservação de energia ou princípio do balanço de energia exprime que a soma da taxa de variação de energia interna, definida como

$$\frac{d}{dt}(E) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e d\Omega = \int_{\Omega} \rho \dot{e} d\Omega \quad (2.16)$$

na qual  $e$  é a energia interna específica, com a taxa de variação da energia cinética, definida como

$$\frac{d}{dt}(K) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \bar{u} \cdot \bar{u} d\Omega \quad (2.17)$$

deve ser igual a soma da taxa de calor que o sistema recebe com a taxa de trabalho das forças externas definida pela eq. (2.6), isto é

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P_e + \frac{d}{dt}(Q) \quad (2.18)$$

A taxa de calor recebida pelo corpo compreende duas partes, uma devida ao calor gerado no interior do corpo  $\Omega$  pela ação das fontes de geração interna e a outra pelo calor recebido através da fronteira. Assim, a taxa de calor pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}(Q) = \int_{\Omega} \rho r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \bar{q} \cdot \bar{n} \, d\partial\Omega \quad (2.19)$$

na qual  $r$  é a produção interna de calor,  $\bar{q}$  é o vetor fluxo de calor e  $\bar{n}$  é a normal exterior à  $\partial\Omega$ , já definida anteriormente. Define-se a taxa de energia despendida na deformação por

$$P_d = P_e - \frac{d}{dt}(K) = \int_{\Omega} \sigma \cdot \mathbf{D} \, d\Omega \quad (2.20)$$

Substituindo  $\bar{v}$  por  $\bar{u}$  no PPV e utilizando-se das equações (2.15) a (2.20) determina-se o Primeiro Princípio da Termodinâmica o qual, na formulação local, é dado por:

$$\rho \dot{e} = \sigma \cdot \mathbf{D} + \rho r + \text{div } \bar{q} \quad (2.21)$$

Para o caso particular de processos isotérmicos, temos

$$\rho \dot{e} = \sigma \cdot \mathbf{D} \quad (2.22)$$

#### iv) Segundo Princípio da Termodinâmica:

O Segundo Princípio da Termodinâmica é definido por uma desigualdade, que relaciona as variáveis da temperatura absoluta  $T$  e da entropia  $S$ , conhecida como desigualdade de Clausius-Duhem. Esta desigualdade estabelece que a taxa de produção de entropia é sempre superior, ou no caso extremo, igual à taxa de calor recebida no domínio  $\Omega$ , ficando

$$\frac{d}{dt}(S) \geq \frac{1}{T} \frac{d}{dt}(Q) \quad (2.23)$$

No qual a entropia é definida por

$$S = \int_{\Omega} \rho s \, d\Omega , \quad (2.24)$$

sendo  $s$  a entropia específica. Através desta desigualdade pode-se restringir os processos físicos aos processos factíveis, i.e., processos que possuem taxa de entropia positiva. A aplicação do teorema de Reynolds na eq. (2.23) e usando a eq. (2.19) permite-nos escrever

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \left( \frac{\bar{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \right] d\Omega \geq 0 , \quad (2.25)$$

ou em sua forma local

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \left( \frac{\bar{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0 . \quad (2.26)$$

Com base no Primeiro Princípio da Termodinâmica expressa pela eq. (2.21), pode-se escrever

$$\rho \left( T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \sigma \cdot \mathbf{D} - \bar{q} \cdot \frac{\bar{\nabla} T}{T} \geq 0 . \quad (2.27)$$

introduzindo o potencial de energia livre de Helmholtz

$$\Psi = e - Ts \quad (2.28)$$

chega-se a

$$\sigma \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \bar{q} \cdot \frac{\bar{\nabla} T}{T} \geq 0 \quad (2.29)$$

que é a desigualdade de Clausius-Duhem. Assim tem-se enunciados os dois princípios da Termodinâmica.

Uma das grandes controvérsias em Termodinâmica é quanto ao seu domínio de validade. Uns advogam que a Termodinâmica só é válida nas vizinhanças de estados de equilíbrio e que não tem sentido definir grandezas como temperatura, energia e entropia longe de estados de equilíbrio. É a visão conservadora, que, enfim, nega a possibilidade de uma *Termodinâmica* e a reduz a uma simples *Termoestática*. Por outro lado, outros dizem que as técnicas desenvolvidas em termoestáticas podem ser aplicadas em qualquer situação, quer seja em equilíbrio ou não. O método do estado local, a ser apresentado, tem uma posição intermediária.

## 2.4 Método do Estado Local

---

O axioma do método do estado local considera que o estado termodinâmico de um meio contínuo pode ser definido através do conhecimento dos valores de um certo número de variáveis definidas em um instante  $t$  fixo. Esta hipótese implica que a evolução de um meio contínuo pode então ser considerada como a sucessão de vários estados de equilíbrio, ou termoestáticos. As variáveis que descrevem estes estados de equilíbrio são denominadas *variáveis de estado local*. Assim, o sucesso da representação do fenômeno físico em questão depende da boa escolha das variáveis de estado. Para esta formulação ser admissível dentro do contexto da Termodinâmica, impõe-se que, a cada instante  $t$  da evolução, seja satisfeita a inequação de Clausius-Duhem. As variáveis de estado local são classificadas segundo Lemaitre (1992) por:

### **i) Variáveis observáveis:**

Os fenômenos reversíveis ou elásticos são totalmente definidos por estas variáveis, que são definidas pelo escalar  $T$  da temperatura e pelo tensor de deformação total  $\epsilon$ .

### **ii) Variáveis internas:**

De acordo com a termodinâmica dos processos irreversíveis é necessário introduzir algumas variáveis internas, para a descrição fenomenológica das variações microestruturais. Para descrição da plasticidade é necessário a introdução da variável irreversível deformação plástica, representada por  $\varepsilon^p$ . Assim pode-se escrever a deformação total como

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e \quad (2.30)$$

Na eq. (2.30) duas variáveis internas foram definidas: a deformação plástica  $\varepsilon^p$  e a deformação elástica  $\varepsilon^e$ . Os outros fenômenos, tais como dano e o encruamento por exemplo, podem ser incluídos através da introdução de variáveis internas que os representem. Estas variáveis serão representadas aqui por  $V_k$ ,  $(V_1, V_2, \dots, V_k)$ . Dependendo do fenômeno estas podem ser de natureza escalar, vetorial ou tensorial.

### 2.4.1 Potencial Termodinâmico

Postula-se que as equações de estado são derivadas de um potencial termodinâmico  $\Psi$ . Este potencial tem as seguintes características:  $\Psi: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , é côncavo com relação a  $T$  e convexo com relação às demais variáveis de estado e contém a origem. O potencial termodinâmico escolhido para o trabalho é a energia livre de Helmholtz, definido pela eq. (2.28), e representado através das variáveis de estado, como

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, \varepsilon^p, T, V_k) \quad (2.31)$$

Para a elastoplasticidade pode-se escrever  $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$  e o potencial é dado como

$$\Psi = \Psi(\varepsilon^e, T, V_k) \quad (2.32)$$

Introduzindo a eq. (2.32) na eq. (2.29) (desigualdade de Clausius-Duhem), pode-se determinar as equações de estado para o problema. A primeira equação de estado é

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} . \quad (2.33)$$

Assim, diz-se que o tensor  $\sigma$  é a variável associada a variável interna  $\varepsilon^e$ . A segunda equação de estado é

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (2.34)$$

e diz-se que  $s$  é a variável associada a variável observável  $T$ . As demais equações de estado são definidas através de

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} , \quad (2.35)$$

no qual  $A_k$  são as variáveis associadas às variáveis internas  $V_k$ .

### 2.4.2 Pseudo Potencial de Dissipação

Afim de determinar as equações de evolução, para o processo dissipativo, postula-se a existência de um potencial ou pseudo-potencial, com as seguintes características:  $\varphi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , contínuo, convexo com relação às variáveis de fluxo, e nulo na origem, i.e.,

$$\varphi = \varphi \left( \left( \dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k, \frac{\bar{q}}{T} \right); (\varepsilon^e, T, V_k) \right) . \quad (2.36)$$

As equações de evolução são determinadas utilizando a propriedade de normalidade ou dissipação normal, i.e., elas são expressas pelas componentes do vetor  $\bar{\nabla} \varphi$  com relação às variáveis de fluxo, que são

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}^p} , \quad A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} \quad \text{e} \quad \bar{\nabla} T = -\frac{\partial \varphi}{\partial \left( \frac{\bar{q}}{T} \right)} . \quad (2.37)$$

Através da utilização da transformada de Fenchel<sup>3</sup> pode-se definir um potencial dual  $\varphi^*$ , que é definido em função das variáveis duais  $\sigma$ ,  $A_k$  e  $\bar{\nabla}T$ . Como o potencial também é diferenciável, a propriedade de dissipação normal continua válida. Assim

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma}, \quad \dot{V}_k = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} \quad \text{e} \quad \frac{\bar{q}}{T} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{\nabla}T}, \quad (2.38)$$

na qual a primeira equação conduz às equações de evolução da plasticidade, a segunda relação conduz a lei de Fourier. Os potenciais de dissipação podem ainda depender das variáveis de estado que fazem o papel de parâmetros.

Todo o problema de modelamento dos fenômenos físicos reside na determinação da expressão analítica dos potenciais acima e da identificação dos parâmetros materiais através de testes experimentais, uma descrição mais detalhada da formulação pode ser encontrada em Sampaio (1985).

---

<sup>3</sup> A transformada de Fenchel é uma generalização da transformada de Legendre no caso de funções não necessariamente diferenciáveis.

# *Capítulo 3*

## *Teoria de Dano*

### *3.1 Introdução*

---

Dentro do contexto da Termodinâmica dos Meios Contínuos, apresentado no capítulo 2, serão apresentadas as variáveis de estado e as suas respectivas variáveis associadas. Essas variáveis representarão os fenômenos de encruamento e o de degradação do material, sendo estes fenômenos necessários para modelar o problema de fadiga.

O fenômeno de encruamento será modelado através de duas variáveis de estado internas,

- i)* o escalar  $r$  que representa a deformação relacionada ao encruamento isotrópico, tendo como variável dual o escalar  $R$ ;
- ii)* e o tensor  $\alpha$  que representa a deformação relacionada ao encruamento cinemático, sendo o tensor  $\chi^D$  a sua variável dual.

Para modelar o fenômeno de degradação do material utiliza-se

- i)* uma variável interna dano representada pelo escalar  $D$  e seu gradiente  $\bar{\nabla}D$ , tendo como variáveis associadas o escalar  $Y$  e o vetor  $\bar{\Theta}$  respectivamente. O

campo escalar  $Y$  está relacionado à taxa de densidade de energia de deformação liberada.

**Tabela 3-1:** Variáveis responsáveis pelo fenômeno de degradação.

| Variável dual  | Variável associada |
|----------------|--------------------|
| $Y$            | $D$                |
| $\bar{\Theta}$ | $\bar{\nabla}D$    |

## 3.2 Plasticidade

---

Com o objetivo de descrever o comportamento de um material elastoplástico é necessário que a teoria constitutiva apresente, além das relações elásticas, i.e., Lei de Hooke generalizada, uma definição de carregamento plástico e de descarregamento elástico, bem como, uma regra de evolução que descreva o desenvolvimento da deformação plástica. O critério de carregamento será dado pela definição de uma função escoamento ou superfície de escoamento. Através do potencial de dissipação e da hipótese de dissipação normal, pode-se encontrar as leis de evolução não apenas para a deformação plástica, mas também para as demais variáveis. Este potencial de dissipação já foi apresentado no capítulo 2, eq. (2.36), e voltará a ser abordado após a definição de todas as variáveis do problema.

### 3.2.1 Função de Escoamento

Dentro do enfoque da teoria da plasticidade clássica, o estudo de um ponto material submetido a um carregamento é determinado por uma função de escoamento  $f$ . A deformação plástica ocorre quando o estado de tensão  $\sigma$  atinge a tensão de escoamento; isto corresponde a satisfazer o critério  $f = 0$  e  $\dot{f} = 0$ .

Para um material que apresenta endurecimento esta função é expressa como uma função das componentes do tensor tensão e das variáveis associadas  $R$  e  $\chi$ , i.e.,

$$f(\sigma, \chi, R) = 0 \quad (3.1)$$

Segundo Lemaitre & Chaboche (1990), para materiais que apresentam encruamento, é mais interessante utilizar uma formulação em termos da deformação  $\varepsilon$  e das variáveis de estado  $r$  e  $\alpha$ , assim,

$$\bar{f}(\varepsilon, \alpha, r) = 0 \quad (3.2)$$

Esta função divide o espaço das tensões em dois domínios; um domínio elástico  $f < 0$ , onde é válida a teoria da elasticidade; e o contorno  $f = 0$ , i.e., a superfície de escoamento onde o material pode ter resposta elastoplástica. A deformação plástica ocorre se o critério de escoamento é continuamente satisfeito, ou seja,  $\dot{f} = 0$ . Define-se então que:

$$\dot{\varepsilon}^p \neq 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases}, \quad \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} f < 0 \\ \text{ou} \\ \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Regras de Encruamento

#### i) Encruamento Isotrópico

É responsável pela expansão (endurecimento) ou redução (amolecimento) uniforme da superfície de escoamento inicial, ver Figura 3-1 (projeção das superfícies no plano  $\sigma_1 - \sigma_2$ ), sem translação e distorção. A função de escoamento pode ser definida como:

$$f(\sigma, \varepsilon^p) = \Pi(\sigma) - R(\varepsilon^p) = 0 \quad (3.4)$$

no qual,  $\Pi(\sigma)$  é uma função que define a forma da superfície de escoamento e  $R(\varepsilon^p)$  o seu tamanho.

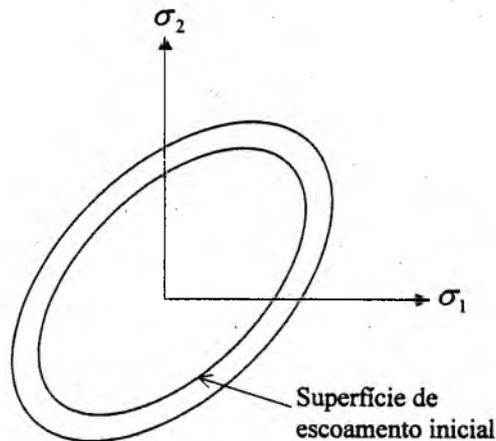


Figura 3-1: Encruamento Isotrópico<sup>4</sup>.

A expressão utilizada neste trabalho para o encruamento isotrópico possui as seguintes características:

- i) é não linear com relação à deformação plástica;
- ii) apresenta um patamar de estabilização definido pelo parâmetro material  $R_\infty$ .

Para o caso de tração uniaxial, é dada por:

$$R = R_\infty (1 - e^{-b\varepsilon^p}), \quad (3.5)$$

no qual,  $b$  também é um parâmetro do material.

## ii) Encruamento Cinemático

<sup>4</sup> Neste caso representativo observa-se a expansão da superfície de escoamento (endurecimento).

Este é responsável pela translação da superfície de escoamento, mantendo a sua forma e tamanho, ver Figura 3-2 (projeção das superfícies no plano  $\sigma_1 - \sigma_2$ ), e sua função é a de introduzir o efeito Bauschinger na formulação. Assim a função escoamento pode ser definida da seguinte forma

$$f(\sigma, \chi, \varepsilon^p) = \Pi(\sigma - \chi) - k = 0, \quad (3.6)$$

no qual,  $\chi$  define o encruamento cinemático e  $k$  é uma constante.

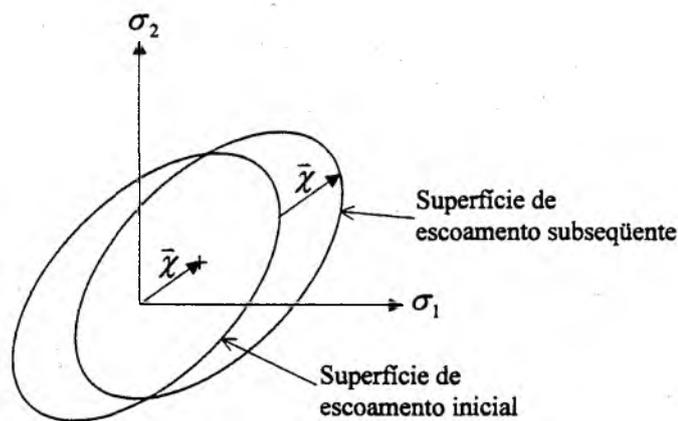


Figura 3-2: Encruamento Cinemático<sup>5</sup>.

O encruamento cinemático também apresenta as seguintes características:

- i) é não linear com relação à deformação plástica;
- ii) apresenta um patamar de estabilização definido pelo parâmetro material  $\chi_\infty$ .

Para o caso de tração uniaxial, sua expressão analítica é dada por:

$$\chi = \chi_\infty (1 - e^{-\gamma \varepsilon^p}), \quad (3.7)$$

no qual,  $\gamma$  também é um parâmetro do material.

<sup>5</sup> Denomina-se  $\bar{\chi}$ , o vetor resultante das componentes de encruamento cinemático principais  $\chi_1$  e  $\chi_2$ .

### 3.2.3 Critério de Escoamento

A função escoamento final adotada neste trabalho é obtida pela combinação dos dois tipos de encruamento. O critério de von Mises<sup>6</sup>, baseado no invariante  $J_2$ , é então transformado em uma expressão mais complexa levando em consideração o encruamento cinemático, i.e.,

$$(\sigma^D - \chi^D)_{eq} = \sqrt{3J_2(\sigma^D - \chi^D)} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma^D - \chi^D) \cdot (\sigma^D - \chi^D)} . \quad (3.8)$$

Assim a função de escoamento é definida como:

$$f = (\sigma^D - \chi^D)_{eq} - R - \sigma_y = 0 , \quad (3.9)$$

no qual,  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento inicial.

## 3.3 Micromecânica do Dano Contínuo

---

De um modo geral, a *evolução do dano*  $D$  se faz através de um processo irreversível, este *dano* influencia nas deformações plásticas diminuindo a resistência efetiva numa determinada porção do corpo. A *evolução* representa a deterioração do material devido a ação de algum tipo de mecanismo de falha interno como nucleação de vazios ou microtrincas.

---

<sup>6</sup> O critério de escoamento é definido pela função:  $f(J_2) = J_2 - k^2 = 0$ , sendo que  $k = \sigma_y / \sqrt{3}$  e o invariante  $J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D$ , no qual  $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ .

### 3.3.1 Escala dos Fenômenos da Deformação e Dano

Lemaitre dividiu a ocorrência do dano em três diferentes escalas para análise, dados pela

i) *microescala*, na qual, o dano é ocasionado pelo mecanismo de acúmulo de microtensões na vizinhança de defeitos ou interfaces, proporcionando tanto o rompimento de ligações atômicas quanto o crescimento plástico das microcavidades, dando origem a microplanos de descontinuidades;

ii) *mesoescala*, ou seja, no Elemento de Volume Representativo (EVR), no qual, o dano é o crescimento e a coalescência de microfissuras ou microvazios, que se manifesta de várias maneiras, dependendo da natureza do material, do tipo de carregamento e temperatura. Entre as mais estudadas manifestações do dano estão o dano frágil, o dano dúctil, o dano por fluência, o dano por fadiga de alto ciclo e o dano por fadiga de baixo ciclo, o qual será abordado nesta dissertação. O estágio final dessa escala é definido pela existência de uma descontinuidade no EVR que é a condição de início da trinca;

iii) *macroescala*, o dano é o crescimento da fissura já no tamanho visível. A partir deste ponto, o mecanismo de crescimento do dano depende do material e principalmente do processo de carregamento do corpo, sendo assim, a análise de crescimento da trinca deve ser feita dentro do contexto da mecânica da fratura. Para isso, introduz-se uma trinca, no ponto em que o dano atingiu o seu valor crítico, de dimensão da ordem do lado do volume representativo do material. A trinca é orientada de forma a manter a concordância da evolução do dano do material, numa vizinhança do ponto em que o dano é crítico.

A análise da primeira e da segunda escala pode ser realizada através da introdução de uma variável de estado contínua de dano. O dano é de natureza tensorial, mas se for

considerada a hipótese de isotropia ele se reduz a um escalar. Quando o dano apresenta-se na terceira escala é usualmente estudado pela mecânica da fratura.

A mecânica do contínuo lida com quantidades definidas em um ponto matemático. Do ponto de vista físico, estas quantidades representam uma média em um certo volume. Sendo assim, o EVR deve ser pequeno o suficiente para evitar a suavização de altos gradientes e grande o suficiente para representar uma média dos microprocessos, ou seja, sendo suficiente à formulação numérica e adequando-se aos princípios físicos. De acordo com ensaios experimentais e análises numéricas, Lemaitre (1992) sugere as magnitudes apresentadas na Tabela 3-1 para o EVR.

**Tabela 3-1:** Dimensões do elemento de volume representativo.

|  |                        |
|--|------------------------|
| Metais e cerâmica                      | (0,1 mm <sup>3</sup> ) |
| Polímeros e muitos materiais compostos | (1 mm <sup>3</sup> )   |
| Madeira                                | (10 mm <sup>3</sup> )  |
| Concreto                               | (100 mm <sup>3</sup> ) |

### 3.3.2 Representação Mecânica do Dano

Para representação do dano, considera-se um elemento de volume representativo de um ponto  $M$  do corpo. Neste ponto, um plano é definido por uma normal  $\bar{n}$  com uma abcissa  $x$  ao longo da direção de  $\bar{n}$ , como é mostrado na Figura 3-3. Nesta figura  $\delta S$  é a área total do plano definido no EVR e  $\delta S_D$  a área efetiva das interseções de todas as microtrincas ou microcavidades neste plano.

O valor do dano  $D$ , no ponto  $M$  e na direção de  $\bar{n}$  pode ser escrito como:

$$D(M, \bar{n}, x) = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (3.10)$$

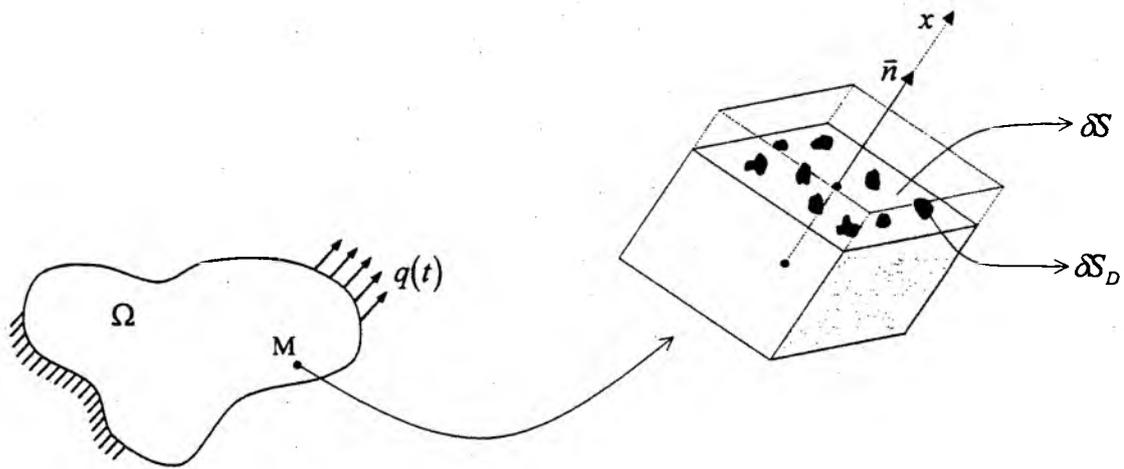


Figura 3-3: Elemento de volume representativo de dano.

A partir desta definição pode-se observar que o valor da variável escalar  $D$ , em uma certa direção  $\bar{n}$  do EVR, está limitada por 0 e 1. Logo, se  $D=0$  o EVR não apresenta dano e se  $D=1$  o EVR encontra-se separado em duas partes.

Para o caso particular de dano isotrópico, não existe dependência com um dado plano de normal  $\bar{n}$ , ou seja, o comportamento mecânico das microfissuras ou microvazios é independente de sua orientação tornando-o dependente apenas da variável escalar  $D$ , assim sendo, a eq. (3.10) torna-se

$$D(M) = \frac{S_D}{S} . \quad (3.11)$$

- Conceito de Tensão Efetiva (Y. N. Robotnov, 1968)

A tensão uniaxial em um elemento com área de seção transversal  $S$  com dano, sob ação de uma força  $\vec{F} = F\bar{n}$ , de acordo com a Figura 3-4, pode ser escrita como

$$\sigma = \frac{F}{S} . \quad (3.12)$$

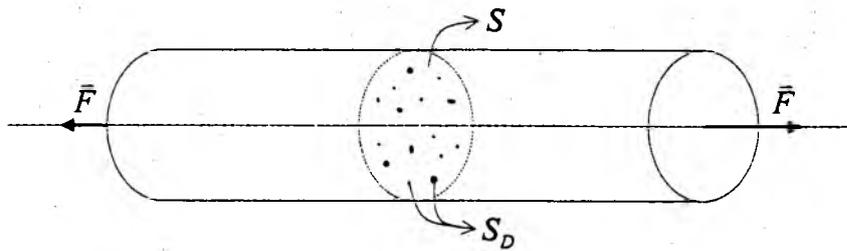


Figura 3-4: Tensão efetiva em um elemento unidimensional.

Se todos os defeitos estão abertos, de tal maneira que não existem microforças atuando sobre a superfície das microtrincas ou microcavidades, representadas por  $S_D$ , é conveniente introduzir uma tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$ , relacionada com a superfície que efetivamente resiste ao carregamento, i.e.,

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} \quad (3.13)$$

Considerando-se o caso de dano isotrópico, através da eq. (3.11) pode-se escrever

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.14)$$

- **Princípio da Deformação Equivalente (J. Lemaitre, 1971)**

“Qualquer equação constitutiva para um material com dano pode ser determinada da mesma maneira como para um material virgem, exceto que a tensão usual deve ser representada pela tensão efetiva.”

Este princípio válido na mesoescala impõe que as relações constitutivas para a deformação de um microelemento não são modificadas na vizinhança do microelemento que contém a microtrinca, evitando uma análise micromecânica para cada tipo de microdefeito e para cada tipo de mecanismo de dano.

Sendo assim, pode-se utilizar a mesma relação funcional para os seguintes casos:

$$i) \text{ se } D=0 \Rightarrow \varepsilon = \mathfrak{F}(\sigma, \dots, \dots) ;$$

$$ii) \text{ se } 0 < D < D_c \Rightarrow \varepsilon = \mathfrak{F}(\tilde{\sigma}, \dots, \dots)$$

no qual, o escalar  $D_c$  corresponde ao valor crítico do dano, pois hoje se sabe que, o início da fissura acontece com o valor de  $D$  inferior a 1. Embora Robotnov (1958), tenha utilizado como critério  $D=1$ , o que implica na completa ausência de área resistente. A discussão sobre qual é o melhor critério a ser utilizado continua em aberto (Benallal *et al.* 1992). Neste trabalho, utiliza-se a aproximação proposta por Lemaitre e Chaboche (1990) a qual considera o dano crítico  $D_c < 1$  constante e dependente de material para material, pois é uma característica deste, e como tal possui uma dispersão em torno de um valor médio. Uma vez atingido este valor, temos origem a um processo instável conduzindo a uma fissura no EVR.

### 3.3.3 Estágio de Início do Dano

Dentro do mecanismo micromecânico de ruptura em materiais dúcteis, para a existência de microtrincas, é necessário que um certo valor crítico de deformação plástica seja alcançado para dar início a um processo de nucleação das microtrincas. Em um ensaio monotônico de tração isto corresponde à seguinte condição:

$$\varepsilon^p < \varepsilon^{pD} \rightarrow D = 0 ,$$

no qual,  $\varepsilon^p$  é a deformação plástica uniaxial e  $\varepsilon^{pD}$  é o valor crítico de deformação plástica para início de dano. Uma interessante variável na plasticidade é a deformação plástica acumulada  $p$ , o qual tem sua evolução definida pela taxa

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p \cdot \dot{\varepsilon}^p} . \quad (3.15)$$

Como consequência, existe um valor crítico de deformação plástica acumulada,  $p_D$ , que deve ser alcançado para o início do dano<sup>7</sup>, i.e.,

$$p < p_D \rightarrow D = 0.$$

### 3.4 Equações de Estado

Uma vez definidas todas as variáveis internas é possível escrever o potencial de Helmholtz, eq. (2.32), como

$$\Psi = \Psi(\varepsilon^e, D, \bar{\nabla}D, r, \alpha).$$

Através da eq. (2.35) pode-se escrever as demais equações de estado como sendo

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \chi^D = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \quad Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \quad \text{e} \quad \bar{\Theta} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\nabla}D} \quad (3.16)$$

que, juntamente com as eqs. (2.33) e (2.34), definem as relações entre as variáveis de estado e as variáveis associadas.

A expressão analítica para o potencial de Helmholtz é baseada em experimentos e resultados da micromecânica. A proposta para este é a seguinte

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} C \varepsilon^e \cdot \varepsilon^e (1 - D) + R_\infty \left( r + \frac{1}{b} e^{-br} \right) + \frac{1}{3} \chi_\infty \gamma \alpha \cdot \alpha + k_D \left( \frac{D^2}{2} - D_c D \right) \bar{\nabla}D \cdot \bar{\nabla}D$$

ou, em notação indicial

<sup>7</sup>  $p_D$  é a quantidade de energia armazenada pelo material, resultado da concentração de microtensões desenvolvidas das discordâncias e nas inclusões de outros materiais, de acordo com Rossi (1997).

$$\rho\Psi = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \varepsilon_{ij}^e (1-D) + R_\infty \left( r + \frac{1}{b} e^{-br} \right) + \frac{1}{3} \chi_\infty \gamma \alpha_{ij} \alpha_{ij} + k_D \left( \frac{D^2}{2} - D_C D \right) D_{,i} D_{,i} ,$$

no qual  $C_{ijkl}$  é o tensor de quarta ordem da elasticidade,  $k_D = \beta \ell_c^2$ ,  $\beta$  tem a dimensão de energia de superfície e  $\ell_c$  é um comprimento característico do material, e  $D_C$  é o dano crítico.

Com o uso das eqs.(2.33) e (2.38) pode-se encontrar as expressões analíticas para as equações de estado, i.e.,

$$\sigma = C\varepsilon^e(1-D) \tag{3.17}$$

para a elasticidade acoplada com dano,

$$R = R_\infty(1 - e^{-br}) \tag{3.18}$$

para o encruamento isotrópico,

$$\chi^D = \frac{2}{3} \chi_\infty \gamma \alpha \tag{3.19}$$

para o encruamento cinemático e as variáveis duais associadas com as variáveis do dano  $D$  e do gradiente do dano  $\bar{\nabla}D$  são dadas respectivamente por:

$$Y = \frac{1}{2} C\varepsilon^e \cdot \varepsilon^e + k_D (D - D_C) \bar{\nabla}D \cdot \bar{\nabla}D \tag{3.20}$$

e

$$\bar{\Theta} = k_D \left( \frac{D^2}{2} - DD_C \right) \bar{\nabla}D . \tag{3.21}$$

O incremento da densidade de energia de deformação elástica do material, para o conhecido dano, é

$$d\omega_e = \sigma d\varepsilon^e, \quad (3.22)$$

Daí recolocando a eq. (3.17) na eq. (3.22) e integrando, obtém-se

$$Y = \frac{1}{2} \frac{d\omega_e}{dD} \Big|_{\sigma=cte} + k_D(D - D_C) \bar{\nabla} D \cdot \bar{\nabla} D \quad (3.23)$$

no qual o primeiro termo representa a energia cedida devido a perda de rigidez do EVR em que ocorreu dano. Dentro do enfoque termodinâmico,  $Y$  é a principal variável da formulação para a descrição da evolução do dano. Nesta variável está implícita a influência do estado triaxial de tensões, evidenciando a importância da tensão equivalente. Decompondo o incremento da densidade de energia de deformação em duas partes, uma deviatórica e outra esférica, denotado respectivamente por  $\sigma^D$  e  $\sigma_H$ , nós podemos escrever

$$\omega_e = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\sigma^D \cdot \sigma^D}{(1-D)} + \frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{\sigma_H^2}{(1-D)} \right], \quad (3.24)$$

e aplicando-se a eq. (3.24) na eq. (3.23) tem-se

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] + k_D(D - D_C) \bar{\nabla} D \cdot \bar{\nabla} D, \quad (3.25)$$

no qual, de acordo com a definição de von Mises

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \sigma^D \cdot \sigma^D \right)^{1/2}. \quad (3.26)$$

### 3.5 Equações de Evolução – Potencial de Dissipação

De acordo com o item 2.4.2 (Pseudo Potencial de Dissipação), para descrever o processo dissipativo é necessário introduzir as leis de evolução complementares.

Este pseudo potencial de dissipação  $F$  é decomposto por conveniência em duas partes: uma responsável pela derivação das equações de evolução do problema de elastoplasticidade cíclica  $F_p$  e a outra responsável pela evolução da variável de dano  $F_D$ , da seguinte forma:

$$F(\sigma, R, \chi^D, Y; \varepsilon^e, r, \alpha, D, \bar{\nabla}D) = F_p(\sigma, R, \chi^D; \varepsilon^e, r, \alpha, D) + F_D(Y; r, D) .$$

Consideramos que o gradiente do dano está associado a um comportamento reversível de forma a não dissipar por si mesmo. Como consequência  $F_D$  deve ser independente de  $\bar{\Theta}$ .

As equações de evolução do problema são obtidas através da aplicação da hipótese de dissipação normal sobre o potencial  $F$ . Assim, temos que as equações de evolução do problema elastoplástico são

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F_p}{\partial \sigma}, \quad \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_p}{\partial R} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_p}{\partial \chi^D}; \quad (3.27)$$

e a equação de evolução da variável de dano é

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \quad (3.28)$$

sendo  $\dot{\lambda}$  um multiplicador escalar que é sempre positivo e será definido no final deste capítulo.

### 3.5.1 Equação Constitutiva Não Linear Acoplada com Dano

Aqui o critério de escoamento será definido da mesma forma que o apresentado na eq. (3.9), porém a tensão será substituída pela tensão efetiva, logo

$$f = (\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq} - R - \sigma_y = 0 . \quad (3.29)$$

#### Determinação de $F_p$

Da mesma maneira que o potencial  $\Psi$ , a determinação da expressão analítica para  $F_p$  leva em consideração as proposições empíricas, ou seja, também é baseada sobre experimentos e resultados da micromecânica. Com base nas eqs. (3.5), (3.7) e (3.29), pode-se então definir a expressão analítica para este potencial, i.e.,

$$F_p = (\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq} - R - \sigma_y + \frac{3}{4\chi_\infty} \chi^D \cdot \chi^D \quad (3.30)$$

sendo que o último termo deste potencial é responsável pela não linearidade do encruamento cinemático.

É possível agora determinar as equações de evolução para o problema elastoplástico. Através do uso da eq. (3.27), pode-se escrever que:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3\lambda}{2(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq}} (\tilde{\sigma}^D - \chi^D) \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}^D}{\partial \sigma} , \quad (3.31)$$

a qual em notação indicial é representada por

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3\lambda}{2(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq}} (\tilde{\sigma}_{kl}^D - \chi_{kl}^D) \frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}^D}{\partial \sigma_{ij}}$$

para a evolução da deformação plástica,

$$\dot{r} = \dot{\lambda} \quad (3.32)$$

para a evolução da deformação relacionada ao encruamento isotrópico e

$$\dot{\alpha} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\dot{\lambda}}{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq}} (\tilde{\sigma}^D - \chi^D) - \frac{\dot{\lambda}}{\chi_\infty} \chi^D \right] \quad (3.33)$$

para a evolução da deformação relacionada com o encruamento cinemático.

Por conveniência escreve-se as equações de evolução (3.32) e (3.33) em função das variáveis associadas  $R$  e  $\chi^D$ . Isto é feito através da substituição das eqs. (3.32) e (3.33) dentro das derivadas das eqs. (3.18) e (3.19) com relação ao tempo, produzindo

$$\dot{R} = b(R_\infty - R)\dot{\lambda} \quad (3.34)$$

para a evolução do encruamento isotrópico e

$$\dot{\chi}^D = \gamma \chi_\infty \left[ \frac{\dot{\lambda}}{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq}} (\tilde{\sigma}^D - \chi^D) - \frac{\dot{\lambda}}{\chi_\infty} \chi^D \right], \quad (3.35)$$

para a evolução do encruamento cinemático.

Usando os resultados das eqs. (3.15) e (3.31), pode-se escrever a taxa de deformação plástica acumulada como

$$\dot{p} = \zeta \dot{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)} \quad (3.36)$$

no qual  $\zeta = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial F_p}{\partial \sigma}}$ .

**Determinação de  $F_D$**

O dano está sempre relacionado a alguma deformação irreversível na microescala ou na macroescala. Esta característica é introduzida na formulação do dano pelo multiplicador  $\lambda$ , o qual é proporcional à deformação plástica acumulada, como visto na eq. (3.36), ficando

$$\dot{D} = \lambda \frac{\partial F_D}{\partial Y} . \quad (3.37)$$

De acordo com a eq. (3.36), a variável  $\dot{p}$  controla a evolução do dano e devido a irreversibilidade deste tem-se  $\dot{p} \geq 0$ . Como visto na seção 3.3.3, o dano só se manifestará após a nucleação das microtrincas, esta característica conduz a

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\dot{p}}{\zeta} \frac{\partial F_D}{\partial Y} & \text{se } p \geq p_D \\ 0 & \text{se } p < p_D \end{cases} . \quad (3.38)$$

Este resultado permite introduzir no potencial de dissipação a função de Heaviside<sup>8</sup>, que é definida como

$$H(p - p_D) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \geq p_D \\ 0 & \text{se } p < p_D \end{cases} . \quad (3.39)$$

Para obter-se a expressão analítica para o potencial  $F_D$  considera-se que  $\dot{D} \propto Y\dot{p}$ , o que implica em  $F_D \propto Y^2$ . Conseqüentemente, com a introdução de um fator de escala  $S$ , que também é uma propriedade material, pode-se finalmente chegar a<sup>9</sup>

$$F_D(Y; r, D) = \frac{Y^2 \zeta}{2S} H(p - p_D) , \quad (3.40)$$

deste modo a eq. (3.38) pode ser escrita como

<sup>8</sup> Também conhecida como função degrau unitário.

<sup>9</sup>  $\dot{r} = \dot{p}$  e  $\dot{p} = \zeta \dot{\lambda}$

$$\dot{D} = \frac{Y\zeta}{S} H(p - p_D) \dot{\lambda} . \quad (3.41)$$

### Determinação de $\dot{\lambda}$

Para fechar o problema de evolução, a última expressão a determinar é a expressão analítica para o multiplicador  $\dot{\lambda}$ . Aplicando-se as condições para carregamento plástico apresentadas na eq. (3.3), que são  $\dot{f} = 0$  e  $f = 0$ , sobre a eq. (3.29) e após alguma manipulação matemática chega-se a

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{3}{2} (\tilde{\sigma}^D - \chi^D) \cdot \dot{\sigma}}{\chi_\infty \gamma + b(R_\infty - R) - \frac{3}{2} (\tilde{\sigma}^D - \chi^D) \cdot \Phi} , \quad (3.42)$$

sendo que  $\dot{\lambda} \geq 0$ ,  $f \leq 0$  e  $\dot{\lambda} f = 0$ ,

no qual

$$\Phi = \chi^D \gamma + \frac{\tilde{\sigma}^D}{(1-D)^2} \frac{Y}{S} H(p - p_D) . \quad (3.43)$$

## ***Capítulo 4***

### ***Teoria de Ordem Superior Aplicada em***

### ***Placas Espessas***

#### ***4.1 Introdução***

---

Neste capítulo, são apresentadas algumas teorias de placas e suas respectivas descrições cinemáticas, citando suas características. É realizada uma análise comparativa, entre as teorias de primeira ordem e as teorias de ordem superior, salientando as limitações inerentes às teorias de placas de primeira ordem. Justifica-se a utilização de uma teoria de placas de ordem superior, como uma forma de superar tais limitações que são de grande importância na qualidade dos resultados de plasticidade, sem o objetivo de cobrir as inúmeras teorias de ordem superior para placas já desenvolvidas. Posteriormente, é feito uma particularização do Princípio dos Trabalhos Virtuais, para o caso de placas, utilizando a teoria de ordem superior de Kant, no qual chegamos às equações de deformações e esforços atuantes na placa. As equações foram discretizadas pelo método dos elementos finitos, utilizando o elemento isoparamétrico Lagrangeano de nove nós.

## 4.2 Teoria de Placas

### 4.2.1 Definição

Uma placa é uma estrutura tridimensional com a peculiaridade de possuir uma de suas dimensões muito menor que as demais, representada pela espessura  $h$  da placa. Esta característica torna possível a aproximação de um problema tridimensional por um problema bidimensional, podendo-se fazer a descrição de todo o comportamento físico da estrutura em função da superfície de referência da placa. A grande diferença entre a espessura e as outras dimensões, de certa forma, cria dificuldades para o uso da elasticidade tridimensional na modelagem numérica de placas com o aparecimento de problemas de condicionamento (Luersen, 1994) e (Barp, 1996).

Colocando em um sistema de coordenadas cartesiano, fazendo com que um ponto qualquer da placa seja denotado pelas coordenadas  $(x, y, z)$  o seu domínio  $\Omega$  pode ser escrito de acordo com (Hughes, 1987), na forma:

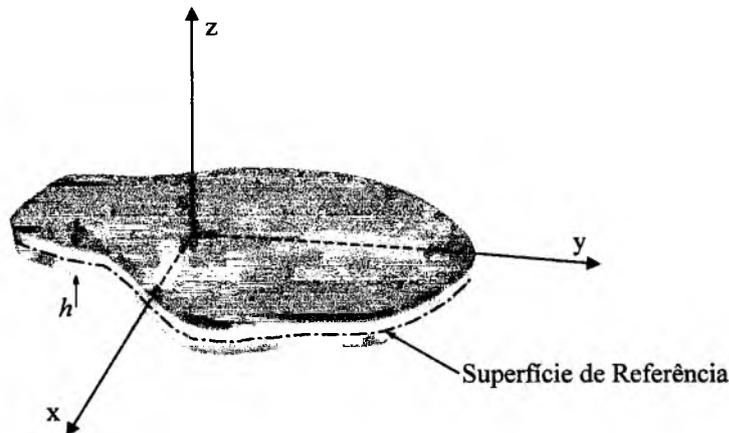
$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2 \right\} \quad (4.1)$$

onde  $h$  é a espessura e  $S$  é a superfície de referência da placa.

Na presente formulação os eixos  $x$  e  $y$  são coincidentes com o plano que contém a superfície de referência da placa e o eixo  $z$  é tomado na direção da normal à mesma superfície.

As teorias clássicas (de primeira ordem) de placas apresentadas por (Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, 1959) e de (Reissner, 1945; Mindlin, 1951), não descrevem de maneira adequada, a frente de plastificação que ocorre a partir da face externa, principalmente em placas espessas. Visando melhorar esta descrição, modelos cada vez

mais sofisticados, têm sido desenvolvidos. Como exemplos disto temos as teorias de ordem superior apresentadas por Lo, Christensen e Wu (1977a, 1977b), Kant (1982), Reddy (1984), entre outros, encontrando aplicações em problemas onde as teorias de primeira ordem são inadequadas.



**Figura 4-1:** Representação gráfica da placa.

Antes de analisar, particularmente, a teoria de placas de ordem superior de Kant (1982), será feita uma revisão rápida de algumas teorias para posteriormente compará-las com esta. Estudos mais completos estão descritos em inúmeras publicações, dentre estas publicações pode-se citar os trabalhos de Noor e Burton (1989) e o de Smith e Palazotto (1993).

### **4.2.2 Teorias de Primeira Ordem**

A teoria de primeira ordem tem seu campo de aplicação na análise de placas finas, moderadamente espessas, ou semi-espessas dependendo de como são definidos os seus coeficientes. É assim chamada devido ao fato de que os deslocamentos são representados por polinômios lineares em relação à coordenada da espessura  $z$ .

#### **4.2.2.1 Teoria Clássica de Placas Finas**

Hipóteses utilizadas no desenvolvimento da teoria:

- i) a placa é fina, se a relação entre a espessura  $h$  e a largura  $\ell$  da placa, é dada por  $h/\ell \ll 1/10$ ;
- ii) as deformações e os deslocamentos são pequenos, e especialmente estes quando comparados com a espessura da placa;
- iii) a tensão normal transversal é desprezível, i.e.,  $\sigma_z \cong 0$ ;
- iv) as seções retas da placa, que estão perpendiculares à superfície média antes da deformação, permanecem retas e perpendiculares à superfície média deformada e não sofrem nenhuma extensão, (Washizu, 1975).

A hipótese (iv), conhecida como a hipótese de Kirchhoff-Love, juntamente com as demais hipóteses, é responsável por uma inconsistência fundamental da teoria, que se consubstancia no excesso de restrições. A teoria clássica de Kirchhoff-Love tem seu campo de aplicação restrito aos problemas de placas finas e o campo de deslocamentos é dado por

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \\
 u_y(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad \text{e} \\
 u_z(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

no qual,  $u$  e  $v$  são os deslocamentos axiais (de membrana) de um ponto qualquer da placa sobre a superfície de referência no plano  $x$ - $y$  da placa, na direção das coordenadas axiais  $x$  e  $y$  respectivamente,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto qualquer da placa em relação à superfície de referência na configuração não deformada, na direção da coordenada transversal  $z$  e  $\partial w(x, y) / \partial x$  e  $\partial w(x, y) / \partial y$  são as rotações da normal em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente (Figura 4-2a e b).

Observa-se que a imposição simultânea das hipóteses (iii) e (iv) levam a imposição conjunta de um estado plano de tensões e de um estado plano de deformações, sendo que tal situação é absolutamente incompatível dentro da teoria da elasticidade. Devido a este fato, ocorrerá o aparecimento da inconsistência fundamental, caracterizada pelo aparecimento de condições de contorno em excesso, para a solução da equação diferencial do problema.

A teoria de placas finas requer funções de interpolação com continuidade  $C^1$  ou semi- $C^1$ , para o campo de deslocamento transversal  $w(x, y)$  como mostra a eq. (4.2).

De acordo com (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959) a teoria baseada na chamada hipótese de Kirchhoff-Love, é computacionalmente ineficiente quando considera-se uma formulação simples de elementos finitos (Zienkiewicz, 1977; Cook, Malkus e Plesha, 1988). Além disto, juntamente com as demais hipóteses simplificativas, faz com que a teoria clássica de placas finas omita os efeitos da deformação e tensão cisalhante transversal e da deformação e tensão normal transversal.

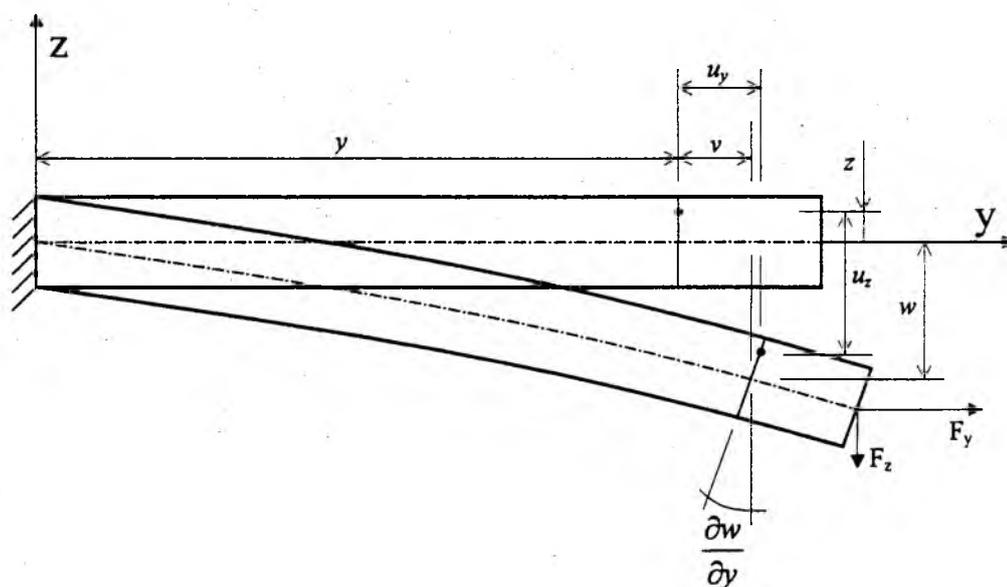


Figura 4-2a: Cinemática da teoria de placas finas, plano y-z.

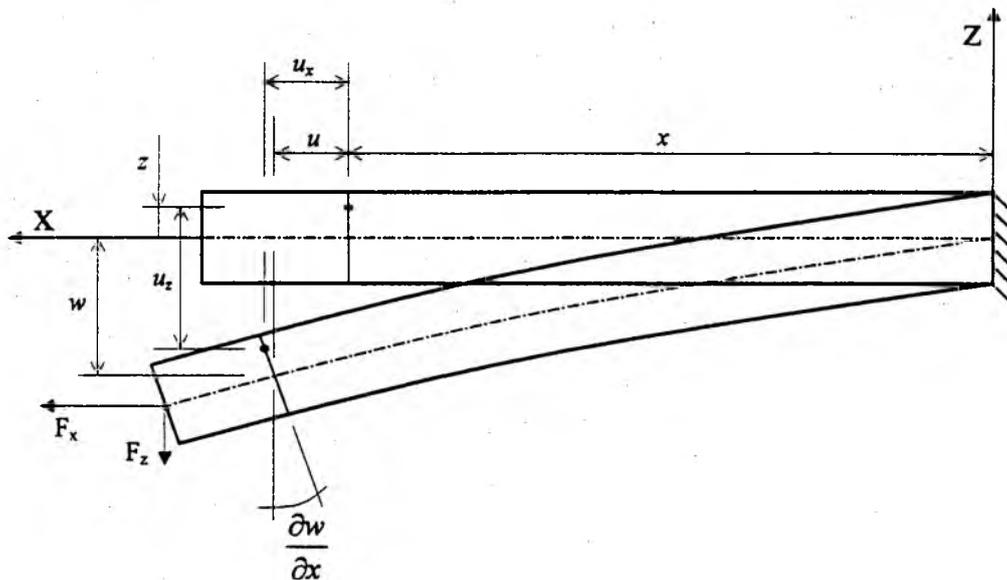


Figura 4-2b: Cinemática da teoria de placas finas, plano x-z.

#### 4.2.2.2 Teoria Clássica de Placas Semi-espessas

Hipóteses utilizadas no desenvolvimento da teoria:

- i) a placa é semi-espessa, se a relação entre a espessura  $h$  e a largura  $\ell$  da placa, é dada por  $h/\ell < 1/10$ ;
- ii) as deformações e os deslocamentos são pequenos, e especialmente estes quando comparados com a espessura da placa;
- iii) a tensão normal transversal é desprezível, i.e.,  $\sigma_z \cong 0$ ;
- iv) as seções retas da placa, que estão perpendiculares à superfície média antes da deformação, não permanecem perpendiculares à superfície média deformada, no entanto, permanecem retas e inextensíveis (considerando o caso particular de pequenos deslocamentos).

A hipótese (iv) apresenta, para a teoria de placas semi-espessas, uma versão relaxada da hipótese de Kirchhoff-Love da teoria de placas finas, a qual constitui-se em uma forma aproximada de levar em consideração a deformação cisalhante transversal. Esta consideração é a diferença fundamental entre as teorias de placas finas e as de placas semi-espessas (Reissner, 1945; Mindlin, 1951).

A teoria clássica de Reissner e Mindlin para placas semi-espessas tem o campo de deslocamentos dado por:

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_x(x, y), \\u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z\theta_y(x, y) \text{ e} \\u_z(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}\tag{4.3}$$

onde  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$  representam as rotações da normal em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente (Figura 4-3a e b). As demais variáveis são de descrição idêntica à aquelas da teoria de placas finas.

De acordo com a eq. (4.3), a teoria de placas semi-espessas requer funções de interpolação com continuidade  $C^0$ , para todos os campos escalares (graus de liberdade) envolvidos ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ ).

Nas deduções efetuadas por Reissner e Mindlin, é necessário a inclusão de um fator de correção da distribuição das tensões cisalhantes transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  para compensar o fato de que estas são constantes ao longo da espessura da placa, fato este que caracteriza uma limitação desta teoria, devido à tensão cisalhante transversal distribuir-se de forma parabólica ao longo da espessura da placa (Hughes e Tezduyar, 1981). Foi calculado através da comparação com a solução exata, apresentada pela teoria da elasticidade tridimensional, e o valor encontrado por Reissner (1945) para o fator de

correção das tensões cisalhantes transversais foi de  $5/6$  e o proposto por Mindlin (1951) foi de  $\pi^2/12$ .

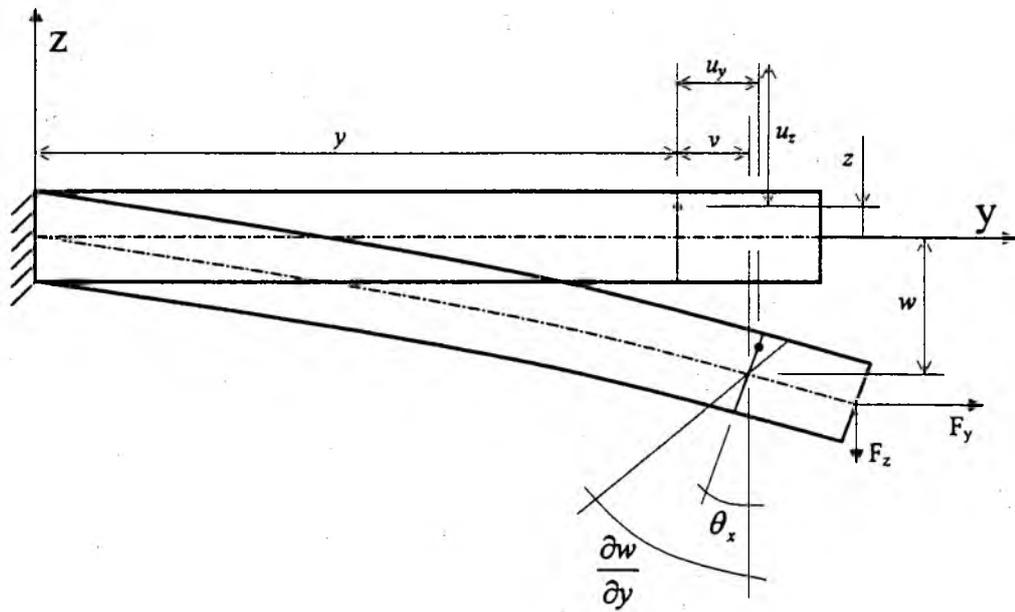


Figura 4-3a: Cinemática da teoria de placas semi-espessas, plano y-z.

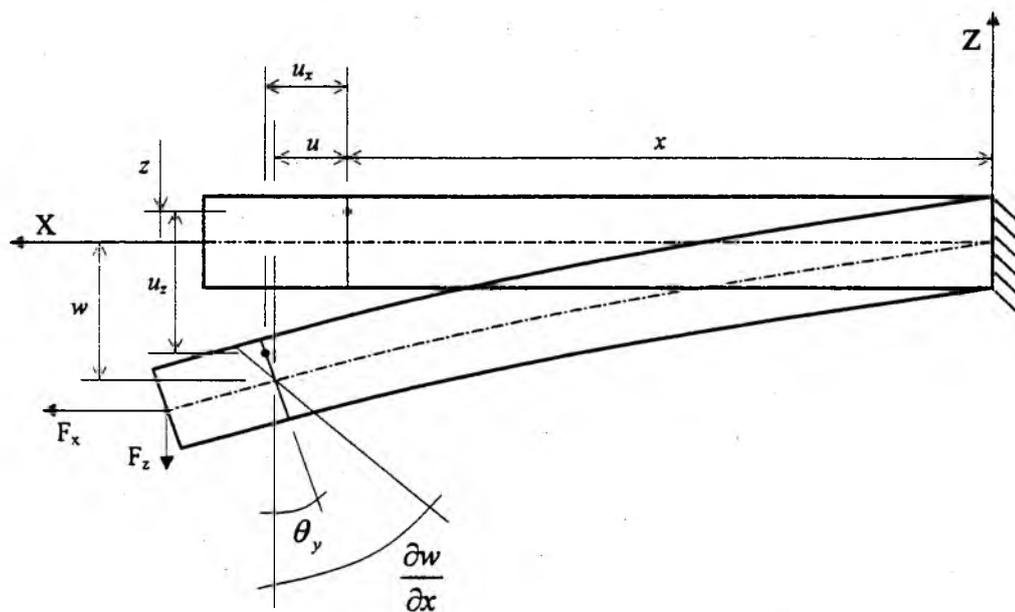


Figura 4-3b: Cinemática da teoria de placas semi-espessas, plano x-z.

### 4.2.3 Teorias de Ordem Superior

Com o objetivo de representar de forma mais adequada os efeitos da deformação cisalhante transversal, foram desenvolvidas as teorias de ordem superior, que são obtidas, tomando-se um número maior de termos na expansão do campo de deslocamento em relação à coordenada da espessura, i.e., coordenada  $z$ , do que o utilizado nas teorias de primeira ordem. Também, devido ao maior número de termos, a teoria de ordem superior tem seu campo de aplicação, como justificativa do tempo de processamento computacional, na análise de placas semi-espessas ou espessas onde os valores das tensões cisalhantes são expressivos.

As teorias de ordem superior têm sua maior aplicação em placas laminadas compostas, onde a razão entre os módulos de elasticidade ( $E$ ) e de cisalhamento ( $G$ ) é muito grande, no nosso caso é de grande importância termos um bom perfil do desenvolvimento da tensão cisalhante, pois, temos interesse em captarmos os valores iniciais da frente de plastificação que ocorre nas superfícies externas, quando submetidas a carregamentos de flexão. Devido ao perfil de cisalhamento mostrado pelas teorias de primeira ordem se mostrar inadequado para modelagem destes problemas, surge assim, a necessidade das teorias de ordem superior que modelam estes problemas com boa precisão e com representação física próxima a realidade. Porém, para cada problema particular, é aconselhável que se procure a teoria que irá satisfazer o maior número de requisitos.

#### 4.2.3.1 Teoria de Reddy

Esta teoria foi proposta por Reddy (1984), a teoria descreve de forma parabólica a deformação cisalhante transversal na espessura, e conseqüentemente, não é necessário utilizar um fator de correção para o cálculo das tensões cisalhantes transversais. A escolha do campo de deslocamentos foi realizada com o objetivo de satisfazer a condição de que  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  em  $z = \pm h/2$ , o que é correto caso não tenhamos uma distribuição de

trações tangenciais nas superfícies. A teoria de ordem superior de Reddy para placas semi-espessas tem o campo de deslocamentos dado por:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z \left[ \theta_x(x, y) - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \theta_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right) \right], \\
 u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z \left[ \theta_y(x, y) - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \theta_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right) \right] \quad e \\
 u_z(x, y, z) &= w(x, y) .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

O campo de deslocamentos é deduzido partindo do princípio de que as tensões cisalhantes transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yx}$  desaparecem sobre as superfícies da placa, observe também que, as contribuições e os efeitos da tensão e deformação normal transversal, i.e.,  $\sigma_{zz}$  e  $\varepsilon_{zz}$ , são ignoradas. Os graus de liberdade têm o mesmo significado das equações das teorias de primeira ordem já mencionados.

A formulação resultante da teoria de Reddy requer o uso de funções de interpolação para  $w(x, y)$  com continuidade  $C^1$  ou semi- $C^1$ . Esta condição é de difícil implementação no método dos elementos finitos.

#### 4.2.3.2 Teoria de Lo, Christensen e Wu

A teoria de ordem superior de Lo, Christensen e Wu (1977a, 1977b, 1978) leva em consideração os efeitos da deformação cisalhante transversal, da deformação normal transversal e da distribuição não linear dos deslocamentos no plano x-y em relação à coordenada da espessura, i.e., o efeito do empenamento da seção transversal. A teoria tem o campo de deslocamentos dado por:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2 u^*(x, y) + z^3 \theta_x^*(x, y) , \\
 u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2 v^*(x, y) + z^3 \theta_y^*(x, y) \quad e
 \end{aligned}$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) + z\theta_z(x, y) + z^2w^*(x, y) \quad (4.5)$$

no qual  $u$  e  $v$  são os deslocamentos axiais da superfície de referência,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto da superfície de referência,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações de primeira ordem em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente,  $\theta_z$  e  $w^*$  são quantidades relacionadas com a deformação da normal ao longo da espessura e  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  são quantidades relacionadas com o empenamento da seção transversal.

Nesta teoria são necessárias funções de interpolação da formulação de elementos finitos que tenham continuidade  $C^0$ .

Esta teoria descreve com maior exatidão problemas de flexão de placas com pontos de concentração de tensões, de contato unilateral e de placas laminadas compostas. Porém, deve-se questionar a necessidade prática de uma teoria tão complexa quanto esta, que necessita de bons recursos computacionais e requer um maior tempo de implementação. Isto torna a questão dependente do grau de precisão requerido, maiores detalhes desta teoria são encontrados em Barp (1996).

#### 4.2.3.3 Teoria de Kant

A teoria desenvolvida por Kant (1982) proporciona soluções refinadas e mais realistas para o caso de placas.

Kant, Owen e Zienkiewicz (1982) foram os primeiros a apresentar uma formulação de elementos finitos com continuidade  $C^0$ , baseada em um campo de deslocamentos, elasticidade linear, homogeneidade e isotropia. Posteriormente, Pandya e Kant (1988) estenderam este trabalho para placas ortotrópicas.

A teoria de Kant incorpora um campo de deslocamentos de ordem superior com as seguintes características:

- i) variação quadrática das deformações cisalhantes  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ ;
- ii) variação linear da deformação normal transversal  $\varepsilon_{zz}$ ;
- iii) consideração da eq. constitutiva tridimensional para determinação da tensão.

O campo de deslocamentos é dado por:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y), \\
 u_y(x, y, z) &= v(x, y) - z\theta_x(x, y) - z^3\theta_x^*(x, y) \quad e \\
 u_z(x, y, z) &= w(x, y) + z^2w^*(x, y)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

no qual,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as usuais rotações da normal ao plano de referência em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto da superfície de referência. Os parâmetros  $w^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  são os termos de ordem superior obtidos na expansão do campo de deslocamentos em relação a  $z$ , definidos na superfície de referência.

#### 4.2.4 Justificativa de Escolha entre as Teorias de Ordem Superior

A teoria de Reddy (1984) não foi adotada neste trabalho por incorporar derivadas de Segunda ordem por partes, as quais exigem funções de interpolação com continuidade  $C^1$  e por ignorar os efeitos da tensão e deformação normal transversal  $\sigma_{zz}$  e  $\varepsilon_{zz}$ . A teoria de Lo, Christensen e Wu (1977a, 1977b, 1978) introduz uma quantidade excessiva de graus de liberdade, e sua implementação foi descartada, devido a motivos de redução do problema a ser resolvido, sendo assim, escolhemos a teoria de Kant (1982) que alcança uma boa descrição física, evitando as anomalias e inconsistências das teorias clássicas de primeira ordem, fornecendo soluções mais refinadas e realistas para o caso de placas espessas com facilidade de implementação.

### 4.2.5 Desenvolvimento

A descrição cinemática da placa é dada por:

$$\bar{u} = u_x \bar{e}_x + u_y \bar{e}_y + u_z \bar{e}_z, \quad (4.7)$$

sendo  $\bar{e}_x$ ,  $\bar{e}_y$  e  $\bar{e}_z$  os vetores unitários que formam a base do sistema cartesiano global e os escalares referente as eq. (2.10) já definidas.

Derivando o campo de deslocamentos em relação a cada direção da base cartesiana encontraremos o seguinte campo de deformações infinitesimais:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 2zw^*,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + z^3 \left( \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \right),$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3\theta_y^* + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) \quad e$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3\theta_x^* + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right). \quad (4.8)$$

Definem-se os seguintes arranjos:

- i) o vetor das componentes de deformação na membrana

$$\{e^o\} = \begin{Bmatrix} e_{xx}^o \\ e_{yy}^o \\ e_{yx}^o \\ e_{xy}^o \end{Bmatrix} \text{ sendo } e_{xx}^o = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy}^o = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad e_{xy}^o = e_{yx}^o = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (4.9)$$

ii) o vetor das componentes de deformação devido a flexão

$$\{\chi^e\} = \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^e \\ \chi_{yy}^e \\ \chi_{yx}^e \\ \chi_{xy}^e \end{Bmatrix} \text{ sendo } \chi_{xx}^e = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \chi_{yy}^e = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \quad \chi_{xy}^e = \chi_{yx}^e = \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right),$$

$$\{\chi^*\} = \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^* \\ \chi_{yy}^* \\ \chi_{yx}^* \\ \chi_{xy}^* \end{Bmatrix} \text{ sendo } \chi_{xx}^* = \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x}, \quad \chi_{yy}^* = -\frac{\partial \theta_x^*}{\partial y} \quad \text{e} \quad \chi_{xy}^* = \chi_{yx}^* = \left( \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \right); \quad (4.10)$$

iii) o vetor das componentes de deformação devido a distorção transversal

$$\{\gamma^o\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^o \\ \gamma_{yz}^o \end{Bmatrix} \text{ sendo } \gamma_{xz}^o = 2e_{xz}^o = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^o = 2e_{yz}^o = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\{\gamma^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} \text{ sendo } \gamma_{xz}^* = 2e_{xz}^* = 3\theta_y^* + \frac{\partial w^*}{\partial x} \quad \text{e} \quad \gamma_{yz}^* = 2e_{yz}^* = -3\theta_x^* + \frac{\partial w^*}{\partial y}; \quad (4.11)$$

iv) a componente de deformação normal

$$e_{nn} = 2w^*. \quad (4.12)$$

Assim, o campo de deformações infinitesimais pode ser expresso como:

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx}^o + z\chi_{xx}^o + z^3\chi_{xx}^*,$$

$$\varepsilon_{yy} = e_{yy}^o + z\chi_{yy}^o + z^3\chi_{yy}^*,$$

$$\varepsilon_{zz} = z e_{zz} ,$$

$$\gamma_{xy} = (e_{xy}^o + e_{yx}^o) + z(N_{xy}^o + N_{yx}^o) + z^3(N_{xy}^* + N_{yx}^*) ,$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^o + z^2 \gamma_{xz}^* \quad \text{e}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^o + z^2 \gamma_{yz}^* . \tag{4.13}$$

Sendo a equação constitutiva definida por:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-D)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{xx}^e (1-\nu) + \nu(\varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_{zz}^e) \right] ,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(1-D)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{yy}^e (1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{zz}^e) \right] ,$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-D)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{zz}^e (1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{yy}^e) \right] ,$$

$$\sigma_{xy} = G(1-D)\gamma_{xy}^e = G(1-D)(\varepsilon_{xy}^e + \varepsilon_{yx}^e) ,$$

$$\sigma_{xz} = G(1-D)\gamma_{xz}^e = G(1-D)(\varepsilon_{xz}^e + \varepsilon_{zx}^e) \quad \text{e}$$

$$\sigma_{yz} = G(1-D)\gamma_{yz}^e = G(1-D)(\varepsilon_{yz}^e + \varepsilon_{zy}^e) . \tag{4.14}$$

valendo salientar que  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  e  $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ji}^e \forall i \neq j$ .

### Aplicação do MEF

Sendo  $Kin_u$  o conjunto dos deslocamentos admissíveis,  $Var_u$  o conjunto dos deslocamentos virtuais. Então, do Princípio das Potências Virtuais, nós temos que  $u \in Kin_u$  é uma solução para o problema se:

### 4.2.3 Teorias de Ordem Superior

Com o objetivo de representar de forma mais adequada os efeitos da deformação cisalhante transversal, foram desenvolvidas as teorias de ordem superior, que são obtidas, tomando-se um número maior de termos na expansão do campo de deslocamento em relação à coordenada da espessura, i.e., coordenada  $z$ , do que o utilizado nas teorias de primeira ordem. Também, devido ao maior número de termos, a teoria de ordem superior tem seu campo de aplicação, como justificativa do tempo de processamento computacional, na análise de placas semi-espessas ou espessas onde os valores das tensões cisalhantes são expressivos.

As teorias de ordem superior têm sua maior aplicação em placas laminadas compostas, onde a razão entre os módulos de elasticidade ( $E$ ) e de cisalhamento ( $G$ ) é muito grande, no nosso caso é de grande importância termos um bom perfil do desenvolvimento da tensão cisalhante, pois, temos interesse em captarmos os valores iniciais da frente de plastificação que ocorre nas superfícies externas, quando submetidas a carregamentos de flexão. Devido ao perfil de cisalhamento mostrado pelas teorias de primeira ordem se mostrar inadequado para modelagem destes problemas, surge assim, a necessidade das teorias de ordem superior que modelam estes problemas com boa precisão e com representação física próxima a realidade. Porém, para cada problema particular, é aconselhável que se procure a teoria que irá satisfazer o maior número de requisitos.

#### 4.2.3.1 Teoria de Reddy

Esta teoria foi proposta por Reddy (1984), a teoria descreve de forma parabólica a deformação cisalhante transversal na espessura, e conseqüentemente, não é necessário utilizar um fator de correção para o cálculo das tensões cisalhantes transversais. A escolha do campo de deslocamentos foi realizada com o objetivo de satisfazer a condição de que  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  em  $z = \pm h/2$ , o que é correto caso não tenhamos uma distribuição de

trações tangenciais nas superfícies. A teoria de ordem superior de Reddy para placas semi-espessas tem o campo de deslocamentos dado por:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z \left[ \theta_x(x, y) - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \theta_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right) \right], \\
 u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z \left[ \theta_y(x, y) - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \theta_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right) \right] \quad e \\
 u_z(x, y, z) &= w(x, y) .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

O campo de deslocamentos é deduzido partindo do princípio de que as tensões cisalhantes transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  desaparecem sobre as superfícies da placa, observe também que, as contribuições e os efeitos da tensão e deformação normal transversal, i.e.,  $\sigma_{zz}$  e  $\varepsilon_{zz}$ , são ignoradas. Os graus de liberdade têm o mesmo significado das equações das teorias de primeira ordem já mencionados.

A formulação resultante da teoria de Reddy requer o uso de funções de interpolação para  $w(x, y)$  com continuidade  $C^1$  ou semi- $C^1$ . Esta condição é de difícil implementação no método dos elementos finitos.

#### 4.2.3.2 Teoria de Lo, Christensen e Wu

A teoria de ordem superior de Lo, Christensen e Wu (1977a, 1977b, 1978) leva em consideração os efeitos da deformação cisalhante transversal, da deformação normal transversal e da distribuição não linear dos deslocamentos no plano x-y em relação à coordenada da espessura, i.e., o efeito do empenamento da seção transversal. A teoria tem o campo de deslocamentos dado por:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2 u^*(x, y) + z^3 \theta_x^*(x, y) , \\
 u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2 v^*(x, y) + z^3 \theta_y^*(x, y) \quad e
 \end{aligned}$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) + z\theta_z(x, y) + z^2 w^*(x, y) \quad (4.5)$$

no qual  $u$  e  $v$  são os deslocamentos axiais da superfície de referência,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto da superfície de referência,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações de primeira ordem em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente,  $\theta_z$  e  $w^*$  são quantidades relacionadas com a deformação da normal ao longo da espessura e  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  são quantidades relacionadas com o empenamento da seção transversal.

Nesta teoria são necessárias funções de interpolação da formulação de elementos finitos que tenham continuidade  $C^0$ .

Esta teoria descreve com maior exatidão problemas de flexão de placas com pontos de concentração de tensões, de contato unilateral e de placas laminadas compostas. Porém, deve-se questionar a necessidade prática de uma teoria tão complexa quanto esta, que necessita de bons recursos computacionais e requer um maior tempo de implementação. Isto torna a questão dependente do grau de precisão requerido, maiores detalhes desta teoria são encontrados em Barp (1996).

#### 4.2.3.3 Teoria de Kant

A teoria desenvolvida por Kant (1982) proporciona soluções refinadas e mais realistas para o caso de placas.

Kant, Owen e Zienkiewicz (1982) foram os primeiros a apresentar uma formulação de elementos finitos com continuidade  $C^0$ , baseada em um campo de deslocamentos, elasticidade linear, homogeneidade e isotropia. Posteriormente, Pandya e Kant (1988) estenderam este trabalho para placas ortotrópicas.

A teoria de Kant incorpora um campo de deslocamentos de ordem superior com as seguintes características:

- i) variação quadrática das deformações cisalhantes  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$ ;
- ii) variação linear da deformação normal transversal  $\varepsilon_z$ ;
- iii) consideração da eq. constitutiva tridimensional para determinação da tensão.

O campo de deslocamentos é dado por:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y), \\
 u_y(x, y, z) &= v(x, y) - z\theta_x(x, y) - z^3\theta_x^*(x, y) \quad e \\
 u_z(x, y, z) &= w(x, y) + z^2w^*(x, y)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

no qual,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as usuais rotações da normal ao plano de referência em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto da superfície de referência. Os parâmetros  $w^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  são os termos de ordem superior obtidos na expansão do campo de deslocamentos em relação a  $z$ , definidos na superfície de referência.

#### 4.2.4 Justificativa de Escolha entre as Teorias de Ordem Superior

A teoria de Reddy (1984) não foi adotada neste trabalho por incorporar derivadas de Segunda ordem por partes, as quais exigem funções de interpolação com continuidade  $C^1$  e por ignorar os efeitos da tensão e deformação normal transversal  $\sigma_z$  e  $\varepsilon_z$ . A teoria de Lo, Christensen e Wu (1977a, 1977b, 1978) introduz uma quantidade excessiva de graus de liberdade, e sua implementação foi descartada, devido a motivos de redução do problema a ser resolvido, sendo assim, escolhemos a teoria de Kant (1982) que alcança uma boa descrição física, evitando as anomalias e inconsistências das teorias clássicas de primeira ordem, fornecendo soluções mais refinadas e realistas para o caso de placas espessas com facilidade de implementação.

### 4.2.5 Desenvolvimento

A descrição cinemática da placa é dada por:

$$\bar{u} = u_x \bar{e}_x + u_y \bar{e}_y + u_z \bar{e}_z, \quad (4.7)$$

sendo  $\bar{e}_x$ ,  $\bar{e}_y$  e  $\bar{e}_z$  os vetores unitários que formam a base do sistema cartesiano global e os escalares referente as eq. (2.10) já definidas.

Derivando o campo de deslocamentos em relação a cada direção da base cartesiana encontraremos o seguinte campo de deformações infinitesimais:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 2zw^*,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + z^3 \left( \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \right),$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3\theta_y^* + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) \quad e$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3\theta_x^* + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right). \quad (4.8)$$

Definem-se os seguintes arranjos:

- i) o vetor das componentes de deformação na membrana

$$\{e^o\} = \begin{Bmatrix} e_{xx}^o \\ e_{yy}^o \\ e_{yx}^o \\ e_{xy}^o \end{Bmatrix} \text{ sendo } e_{xx}^o = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy}^o = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad e_{xy}^o = e_{yx}^o = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (4.9)$$

ii) o vetor das componentes de deformação devido a flexão

$$\{\gamma^o\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xx}^o \\ \gamma_{yy}^o \\ \gamma_{yx}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \text{ sendo } \gamma_{xx}^o = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yy}^o = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^o = \gamma_{yx}^o = \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right),$$

$$\{\gamma^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xx}^* \\ \gamma_{yy}^* \\ \gamma_{yx}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} \text{ sendo } \gamma_{xx}^* = \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x}, \quad \gamma_{yy}^* = -\frac{\partial \theta_x^*}{\partial y} \quad \text{e} \quad \gamma_{xy}^* = \gamma_{yx}^* = \left( \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \right); \quad (4.10)$$

iii) o vetor das componentes de deformação devido a distorção transversal

$$\{\gamma^o\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^o \\ \gamma_{yz}^o \end{Bmatrix} \text{ sendo } \gamma_{xz}^o = 2e_{xz}^o = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^o = 2e_{yz}^o = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\{\gamma^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} \text{ sendo } \gamma_{xz}^* = 2e_{xz}^* = 3\theta_y + \frac{\partial w^*}{\partial x} \quad \text{e} \quad \gamma_{yz}^* = 2e_{yz}^* = -3\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y}; \quad (4.11)$$

iv) a componente de deformação normal

$$e_{nn} = 2w^* \quad (4.12)$$

Assim, o campo de deformações infinitesimais pode ser expresso como:

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx}^o + zN_{xx}^o + z^3N_{xx}^*,$$

$$\varepsilon_{yy} = e_{yy}^o + zN_{yy}^o + z^3N_{yy}^*,$$

$$\varepsilon_z = z e_m ,$$

$$\gamma_{xy} = (e_{xy}^o + e_{yx}^o) + z(N_{xy}^o + N_{yx}^o) + z^3(N_{xy}^* + N_{yx}^*) ,$$

$$\gamma_x = \gamma_x^o + z^2 \gamma_x^* \quad e$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^o + z^2 \gamma_{yz}^* . \tag{4.13}$$

Sendo a equação constitutiva definida por:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-D)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{xx}^e (1-\nu) + \nu(\varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_z^e) \right] ,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(1-D)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{yy}^e (1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_z^e) \right] ,$$

$$\sigma_z = \frac{E(1-D)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_z^e (1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{yy}^e) \right] ,$$

$$\sigma_{xy} = G(1-D)\gamma_{xy}^e = G(1-D)(\varepsilon_{xy}^e + \varepsilon_{yx}^e) ,$$

$$\sigma_x = G(1-D)\gamma_x^e = G(1-D)(\varepsilon_x^e + \varepsilon_x^e) \quad e$$

$$\sigma_{yz} = G(1-D)\gamma_{yz}^e = G(1-D)(\varepsilon_{yz}^e + \varepsilon_{zy}^e) . \tag{4.14}$$

valendo salientar que  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  e  $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ji}^e \forall i \neq j$ .

### Aplicação do MEF

Sendo  $Kin_u$  o conjunto dos deslocamentos admissíveis,  $Var_u$  o conjunto dos deslocamentos virtuais. Então, do Princípio das Potências Virtuais, nós temos que  $u \in Kin_u$  é uma solução para o problema se:

$$\int_{\Omega} \sigma(\bar{u}) \cdot \varepsilon(\bar{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{g} \cdot \bar{v} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{t} \cdot \bar{v} d\Gamma \quad \forall \bar{v} \in Var_u \quad (4.15)$$

Pode-se escrever o primeiro membro da eq. (4.15) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma(\bar{u}) \cdot \varepsilon(\bar{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(\bar{v}) d\Omega \quad (4.16)$$

Integrando a eq. (4.16) com relação a espessura ( $z \in [-h/2, h/2]$ ), obtém-se:

$$\int_A \{N\}^T \cdot \{\hat{\varepsilon}^o\} + \{M\}^T \cdot \{\hat{\kappa}^o\} + \{M^*\}^T \cdot \{\hat{\kappa}^*\} + \{Q\}^T \cdot \{\hat{\gamma}^o\} + \{Q^*\}^T \cdot \{\hat{\gamma}^*\} + N_{mn} \hat{e}_{mn} dA \quad (4.17)$$

sendo que, o sobrescrito "o" indica que o campo considerado pertence ao espaço das variações admissíveis. Os esforços generalizados são definidos por:

i) o vetor das forças de membrana

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ N_{yy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} dz \quad (4.18)$$

ii) os momentos

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{xy} \\ M_{yx} \\ M_{yy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} z dz \quad \text{e} \quad \{M^*\} = \begin{Bmatrix} M_{xx}^* \\ M_{xy}^* \\ M_{yx}^* \\ M_{yy}^* \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (4.19)$$

iii) as forças de cisalhamento

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} z dz \quad \text{e} \quad \{Q^*\} = \begin{Bmatrix} Q_x^* \\ Q_y^* \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (4.20)$$

iv) a força normal

$$N_{nn} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zz} dz . \quad (4.21)$$

Integrando a primeira parte do segundo membro da eq. (4.15) com relação a espessura ( $z \in [-h/2, h/2]$ ) e considerando que  $\rho \bar{g} = cte.$ , obtém-se que:

$$\int_A \rho \bar{g} \cdot \bar{v} dA , \quad (4.22)$$

para a segunda parte, têm-se então

$$\int_{\Gamma_i} \bar{t} \cdot \bar{v} d\Gamma = \int_S \{ \bar{N} \} \cdot \{ \hat{u}^o \} + \{ \bar{M} \} \cdot \{ \hat{\theta}^o \} + \{ \bar{N}^* \} \cdot \{ \hat{u}^* \} + \{ \bar{M}^* \} \cdot \{ \hat{\theta}^* \} dS . \quad (4.23)$$

Sendo que os vetores são definidos da seguinte forma:

$$\{ \hat{u}^o \} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix}, \quad \{ \hat{\theta}^o \} = \begin{Bmatrix} \hat{\theta}_y \\ -\hat{\theta}_x \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{ \hat{u}^* \} = \begin{Bmatrix} \hat{u}^* \\ \hat{v}^* \\ \hat{w}^* \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{ \hat{\theta}^* \} = \begin{Bmatrix} \hat{\theta}_y^* \\ -\hat{\theta}_x^* \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (4.24)$$

$$(\bar{N} \quad \bar{M} \quad \bar{N}^* \quad \bar{M}^*) = \int_{-h/2}^{h/2} (1 \quad z \quad z^2 \quad z^3) \bar{t} dz . \quad (4.25)$$

### 4.3 Desenvolvimento do Algoritmo

Nesta parte do capítulo apresenta-se o desenvolvimento de um algoritmo da classe ‘*return mapping*’ utilizado para a integração das equações constitutivas elastoplásticas acopladas com dano, o qual, foi apresentado por Benallal *et al.* (1988) e é uma

generalização do algoritmo proposto por Simo & Taylor (1986). O algoritmo divide o problema nas seguintes etapas:

- i) satisfazer as equações de equilíbrio globais do problema, as quais são representadas por um sistema de elementos finitos;
- ii) integração local das equações constitutivas, para a determinação do valor das variáveis de evolução no instante de tempo  $t_{n+1}$ , para cada ponto de integração.

### 4.3.1 Equações de equilíbrio Globais

De acordo com Bathe (1992), o problema básico de uma análise não linear com o método dos elementos finitos é o de encontrar um estado de equilíbrio da configuração no tempo  $t_{n+1}$ . Como as forças externas,  $\bar{F}_{e_{n+1}}$  são geralmente uma função do tempo, a condição de equilíbrio de um sistema de elementos finitos, representando o domínio em consideração, pode ser expresso por

$$\bar{F}_{e_{n+1}} + \bar{F}_{i_{n+1}} = 0^{10}, \quad (4.26)$$

no qual  $\bar{F}_{i_{n+1}}$  é o vetor de forças internas.

Com o objetivo de resolver a equação não linear associada ao problema, faz-se uso do método iterativo de Newton-Raphson. O sistema pelo método de elementos finitos pode ser escrito como

$$h(\bar{u}^*) = \bar{F}_{e_{n+1}}(\bar{u}^*) - \bar{F}_{i_{n+1}}(\bar{u}^*), \quad (4.27)$$

definindo

---

<sup>10</sup> Observe que  $\bar{F}_{e_{n+1}}$  é considerado conhecido e independente do campo de deslocamento.

$$h(\bar{u}_{n+1}^i, \bar{v}) = \int_{\Omega} \sigma(\bar{u}_{n+1}^i) \cdot \varepsilon(\bar{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot \bar{v} \, d\Gamma \quad (4.28)$$

e para condição de equilíbrio

$$h(\bar{u}^*) = 0 \quad (4.29)$$

Este método consiste em expandir  $h(\bar{u}^*)$  em uma série de Taylor mantendo apenas o termo de primeira ordem, ou seja,

$$h(\bar{u}^*) = h(\bar{u}_{n+1}^i) + \frac{\partial h(\bar{u}_{n+1}^i)}{\partial \bar{u}} (\bar{u}^* - \bar{u}_{n+1}^i) \quad (4.30)$$

No entanto, quando se define que:

$$\Delta \bar{u}_{n+1}^i = (\bar{u}^* - \bar{u}_{n+1}^i) \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{n+1}^i = \frac{\partial \bar{F}_i(\bar{u}_{n+1}^i)}{\partial \bar{u}} \quad (4.31)$$

o método pode ser expresso como

$$\mathbf{K}_{n+1}^i \Delta \bar{u}_{n+1}^i = \bar{F}_{e_{n+1}} - \bar{F}_{i_{n+1}}^i, \quad (4.32)$$

na qual  $\mathbf{K}$  é chamada de matriz tangente. O processo de atualização é dado por

$$\bar{u}_{n+1}^{i+1} = \Delta \bar{u}_{n+1}^i + \bar{u}_{n+1}^i \quad (4.33)$$

Aqui foi adotado o seguinte critério de convergência:  $\|h(\bar{u}_{n+1}^{i+1})\| \leq \text{tolerância}$ , resultando  $\bar{u}_{n+1}^{i+1} \approx \bar{u}^*$  na convergência.

Dentro de uma abordagem incremental, a matriz de rigidez tangente pode ser escrita como

$$\mathbf{K}_{n+1}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{n+1}^i \mathbf{B} d\Omega, \quad (4.34)$$

na qual  $\mathbf{B}$  é a matriz de deformação-deslocamento definida por:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{I}_{e^{\mathcal{N}}}] \{e^o\} + z[\mathbf{I}_{e^{\mathcal{N}}}] \{N^o\} + z^3[\mathbf{I}_{e^{\mathcal{N}}}] \{N^*\} + z[\mathbf{I}_{e_m}] e_{nn} + [\mathbf{I}_{\gamma}] \{\gamma^o\} + z^2[\mathbf{I}_{\gamma}] \{\gamma^*\}, \quad (4.35)$$

sendo que,

$$[\mathbf{I}_{e^{\mathcal{N}}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}_{\gamma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{I}_{e_m}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

O operador tangente  $\mathbf{J}$  será definido em seguida,  $\mathbf{J}_{n+1}^i$  é uma aproximação de  $(\partial\sigma/\partial\varepsilon)_{n+1}^i$ .

Para iteração inicial foi considerado que  $\bar{u}_{n+1}^0 \approx \bar{u}_n^*$  juntamente com  $\lambda = 0$ .

#### 4.4 Integração Local

---

Com a intenção de simplificar a notação enquanto descrevemos o algoritmo define-se dois vetores:  $\bar{Q} = (\varepsilon^p, \chi^D, R, \bar{\nabla}D, D)$  e  $\bar{q} = (\sigma, \bar{Q}, \lambda)$ . Sendo assim, as equações de evolução podem ser escritas de forma compacta da seguinte forma

$$\bar{Q} = \lambda \bar{G}(\sigma, \bar{Q}), \quad (4.37)$$

e colocando-as em forma incremental obtêm-se

$$\Delta\bar{Q} - \Delta\lambda \bar{G}(\sigma_{n+\theta}, \bar{Q}_{n+\theta}) = 0,$$

no qual,  $\Delta(\circ) = (\circ)_{n+1} - (\circ)_n$  e  $(\circ)_{n+\theta} = (1-\theta)(\circ)_n + \theta(\circ)_{n+1}$  com  $\theta \in [0,1]$ .

## 4.5 Algoritmo

i) Conhecido  $\varepsilon_{n+1}$ , considera-se que o incremento é puramente elástico, assim

$$\sigma = C\varepsilon^* , \quad (4.38)$$

no qual,  $\varepsilon^* = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p$ .

ii) Com a tensão teste calculada em (i) checa-se a função de escoamento. Se  $f(\tilde{\sigma}_{d_{n+1}}, \bar{Q}_n) < 0$  então a hipótese inicial (i) está correta e o procedimento local pode ser encerrado atualizando as componentes de  $\bar{q}$ . Entretanto, se  $f(\tilde{\sigma}_{d_{n+1}}, \bar{Q}_n) \geq 0$  deve-se fazer as correções plásticas.

iii) Para realizar as correções plásticas, utiliza-se as equações incrementais. Agora, no instante  $t_{n+1}$  as variáveis devem satisfazer: o critério de escoamento, a lei da elasticidade e as equações de evolução. Com estas três condições é possível montar o seguinte sistema não linear:

$$g_1(\bar{q}_{n+1}) = f(\tilde{\sigma}_{n+1}, \bar{Q}_{n+1}) = 0 ,$$

$$g_{2..5}(\bar{q}_{n+1}) = \Delta\bar{Q} - \Delta\lambda\bar{G}(\sigma_{n+\theta}, \bar{Q}_{n+\theta}) = 0 \quad e$$

$$g_6(\bar{q}_{n+1}) = \varepsilon_{n+1}^e - C^{-1}\tilde{\sigma} ; \quad (4.39)$$

no qual,  $\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p$ .

Este sistema também é resolvido numericamente através do método de Newton-Raphson, ou seja,

$$\mathbf{M}_T \bar{\Delta} q_{n+1}^k = -\bar{g}(\bar{q}_{n+1}^k) \quad (4.40)$$

com  $\bar{q}_{n+1}^0 = (\sigma_n, \bar{Q}_n, 0)$  para a primeira iteração e sendo  $\mathbf{M}_{T,ij}^k = \partial g_i / \partial q_j$ . A atualização é feita da seguinte forma  $\bar{q}_{n+1}^{k+1} = \bar{q}_{n+1}^k + \bar{\Delta} q_{n+1}^k$  e o critério de convergência, assim como nas equações globais, é dado por  $\|\bar{g}_{n+1}\| \leq \text{tolerância}$ , no qual,  $k$  é referente ao número de iterações realizadas pelo método e  $n$  é referente ao passo do carregamento.

#### 4.6 Determinação do Operador Tangente J

---

Quando o algoritmo de integração local tiver convergido, determina-se o correspondente operador tangente  $\mathbf{J}_{n+1}^i$  mantendo a solução do instante  $t_{n+1}$  e sabendo que  $\delta\sigma = \mathbf{J}_{n+1}^i \delta\varepsilon$ .

Agora, de modo a calcular a diferenciação acima, deve-se satisfazer o seguinte sistema de equações de evolução,

A formulação de equilíbrio global do problema pode ser escrita como: Dado  $\bar{u}_{n+1}^0 = \bar{u}_n$ , solução teste para o passo (n+1), determinar a  $i$ -ésima iteração do passo (n+1)  $\bar{u}_{n+1}^i$  tal que,  $\|h(\bar{u}_{n+1}^i)\| \leq \text{tolerância}$ , no qual

$$Dh(\bar{u}_{n+1}^i, \bar{v}) \varepsilon(\Delta \bar{u}_{n+1}^i) = -h(\bar{u}_{n+1}^i, \bar{v}), \quad (4.41)$$

com

$$Dh(\bar{u}_{n+1}^i, \bar{v}) \varepsilon(\Delta \bar{u}_{n+1}^i) = \int_{\Omega} \mathbf{C}_{n+1}^i \varepsilon(\Delta \bar{u}_{n+1}^i) \cdot \varepsilon(\bar{v}) \, d\Omega \quad , \quad (4.42)$$

$$h(\bar{u}_{n+1}^i, \bar{v}) = \int_{\Omega} \sigma(\bar{u}_{n+1}^i) \cdot \varepsilon(\bar{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \bar{f} \cdot \bar{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \bar{t} \cdot \bar{v} \, d\Gamma \quad , \quad (4.43)$$

e

$$\mathbf{C}_{n+1}^i = \left. \frac{\partial \sigma(\sigma_n, \varepsilon_n, D_n, \bar{\nabla} D_n, \varepsilon_n^p, \varepsilon(\bar{u}) - \varepsilon_n)}{\partial \varepsilon} \right|_{\bar{u}_{n+1}^i} \quad . \quad (4.44)$$

Aqui,  $\mathbf{C}_{n+1}^i$  é a matriz tangente. Note que, para executar a diferenciação acima nós devemos satisfazer as seguintes equações de evolução:

$$\sum_{i=1} \left[ \left( \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \right)_{n+1} \delta q_j + \left( \frac{\partial g_i}{\partial \varepsilon} \right)_{n+1} \delta \varepsilon \right] = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad (4.45)$$

escritas de um modo incremental.

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1 Introdução

---

Com o objetivo de verificar se a formulação desenvolvida, nos capítulos anteriores, é adequada para a descrição de problemas de análise estrutural, alguns problemas típicos da área de estruturas, no regime elastoplástico, considerando não linearidade material, são resolvidos através de um código computacional, escrito em linguagem Fortran 90.

Muito embora não se tenha encontrado na literatura disponível soluções numéricas ou analíticas para todos os problemas, os resultados foram satisfatórios, com a evolução da frente plástica e do dano, comportando-se conforme o esperado.

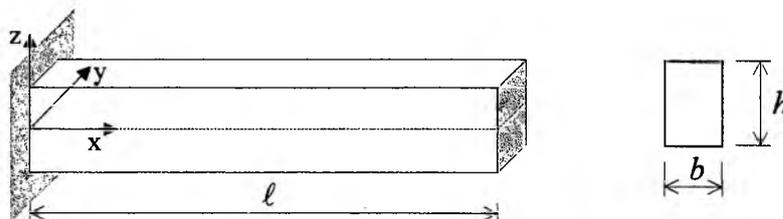
Algumas das propriedades materiais comuns a todos os exemplos utilizados, são dadas na Tabela 5-1.

**Tabela 5-1:** Propriedades do material.

|                              |                                   |                                |
|------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| $\nu = 0,3$                  | $\chi_{\infty} = 200 \text{ MPa}$ | $R_{\infty} = 300 \text{ MPa}$ |
| $\sigma_y = 260 \text{ MPa}$ | $b = 1$                           | $S = 7 \text{ MPa}$            |
|                              | $\gamma = 2$                      | $D_c = 0,15$                   |

### 5.2 Exemplo 1

- **Viga engastada, submetida à flexão devido a um deslocamento prescrito cíclico.**



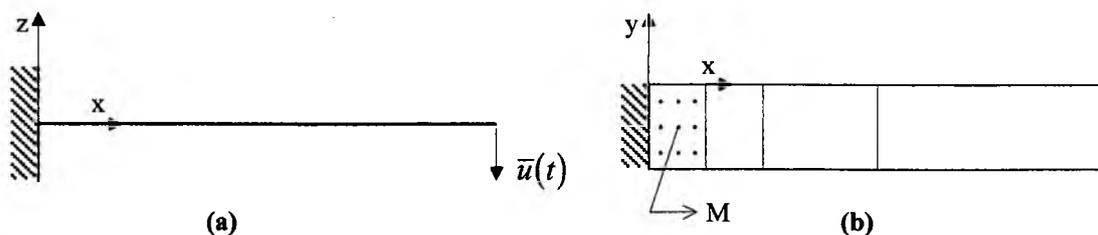
**Figura 5-1:** Geometria da viga engastada.

As propriedades complementares que descrevem a viga da Figura 5-1, estão na Tabela 5-2:

**Tabela 5-2:** Propriedades do material e geométricas.

|                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| $E = 210000 \text{ MPa}$ | $b = 20 \text{ mm}$  |
|                          | $h = 25 \text{ mm}$  |
|                          | $l = 200 \text{ mm}$ |

A viga será submetida a um deslocamento prescrito  $\bar{u}(t)$ , conforme a Figura 5-2a, e a discretização submetida a análise está de acordo com a Figura 5-2b. Sendo  $\bar{u}(t) = 2,5\text{sen}(2\pi t)$ , no qual,  $t$  corresponde ao número do ciclo da iteração.



**Figura 5-2:** Viga engastada submetida à flexão cíclica.

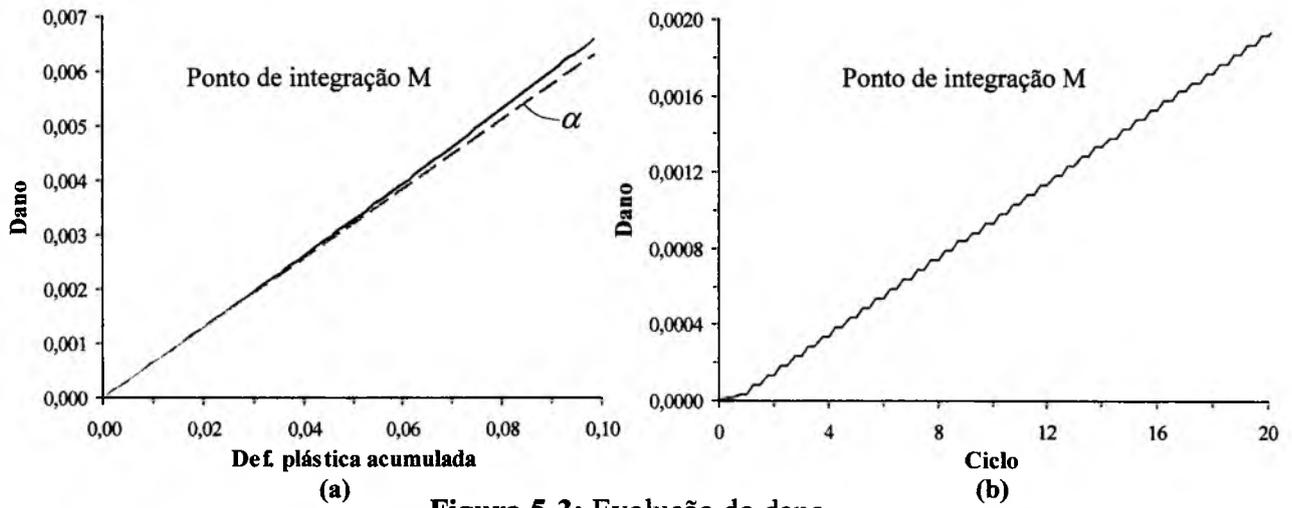


Figura 5-3: Evolução do dano.

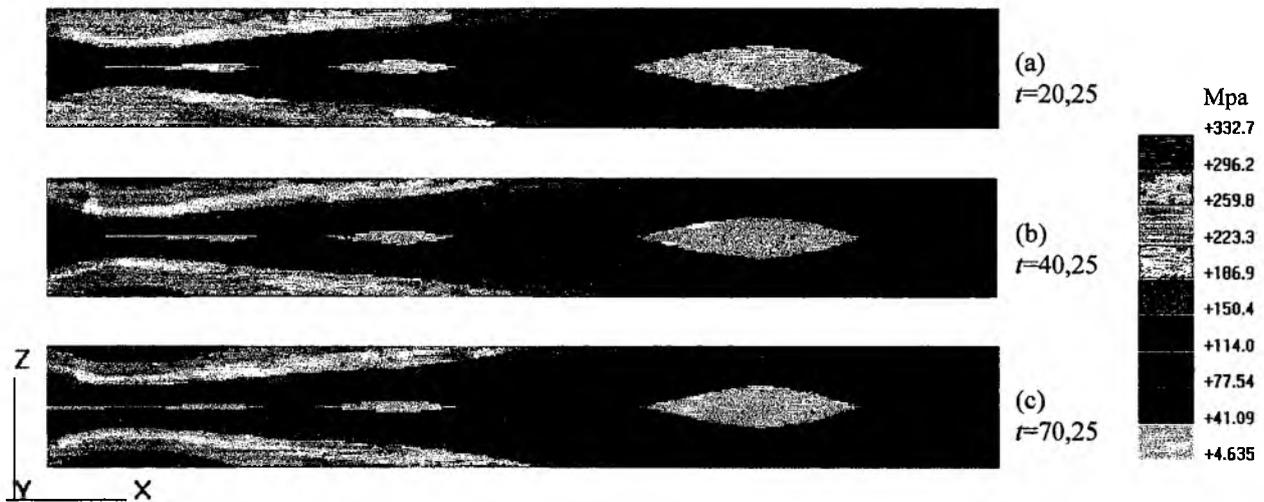


Figura 5-4: Distribuição da tensão efetiva de von Mises.

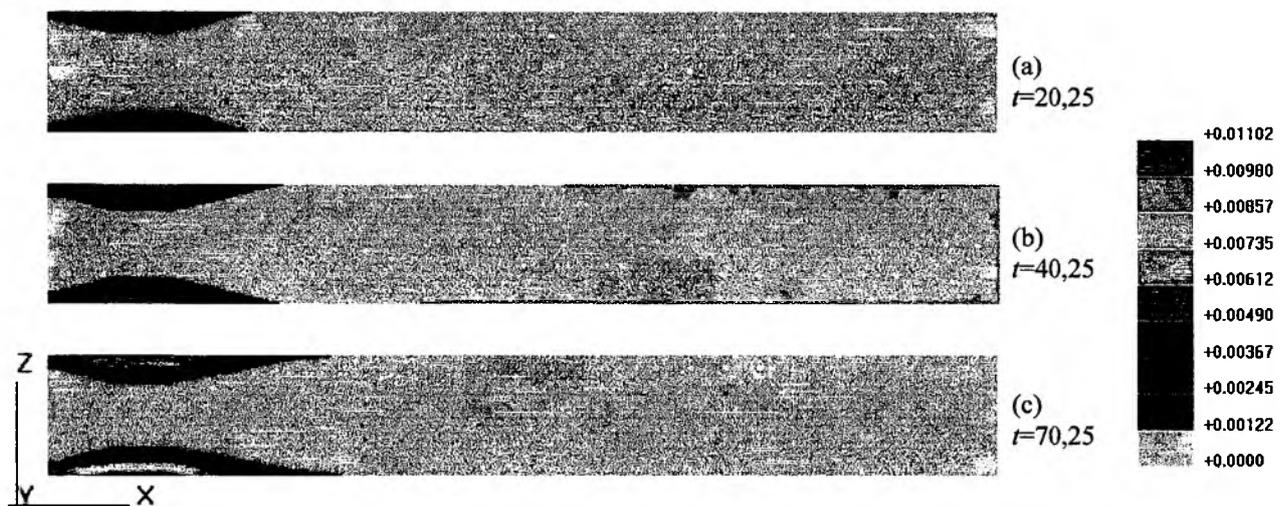
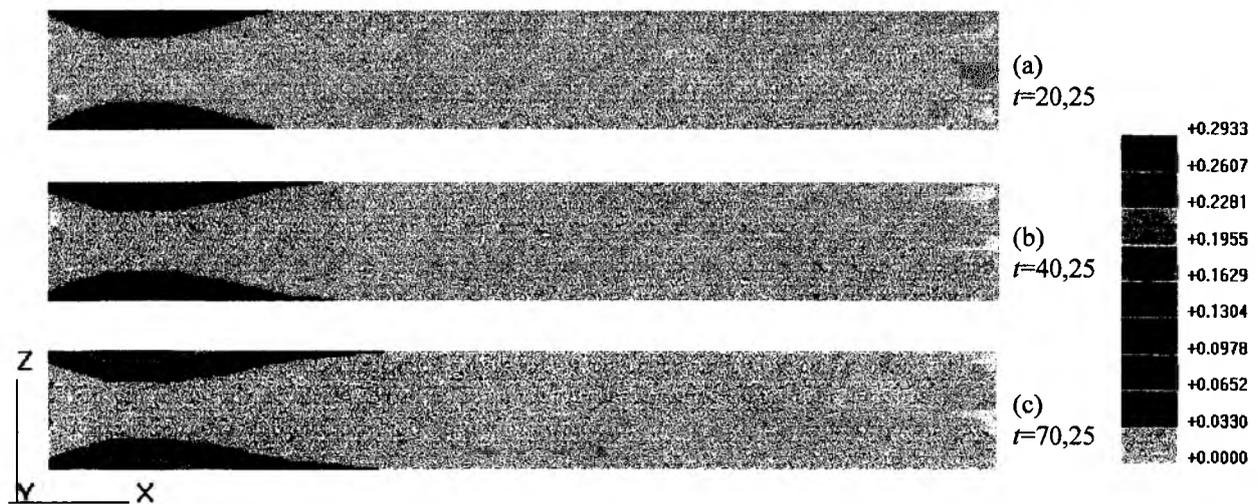


Figura 5-5: Evolução do dano.



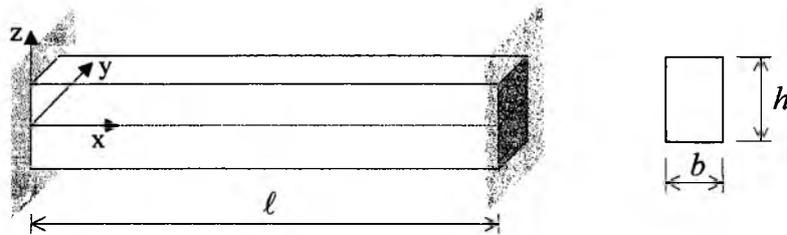
**Figura 5-6:** Evolução da deformação plástica acumulada.

Ao primeiro gráfico (Figura 5-3a) foi colocado uma reta tracejada, denominada  $\alpha$ , com a finalidade de ressaltar o comportamento da curva resposta do ponto de integração M (Figura 5-2b), ou seja, a evolução não linear do dano em relação à deformação plástica acumulada, pouco evidenciado pela pequena faixa de valores de deformação plástica acumulada devido ao alto custo computacional impedir a evolução do processo por um tempo suficientemente prolongado. Já no segundo gráfico (Figura 5-3b) observa-se a forma de evolução do dano. Os pequenos patamares horizontais vistos nesta figura estão relacionados à deformação elástica, i.e., na parte de carregamento ou descarregamento elástico nos quais não existe evolução do dano.

As Figuras 5-4, 5-5 e 5-6 descrevem os resultados obtidos por meio de isoformas, os campos escalares escolhidos para a visualização são a tensão de von Mises, o dano e a deformação plástica acumulada respectivamente.

### 5.3 Exemplo 2

- **Viga biengastada submetida a deslocamento prescrito cíclico em dois pontos simultaneamente.**



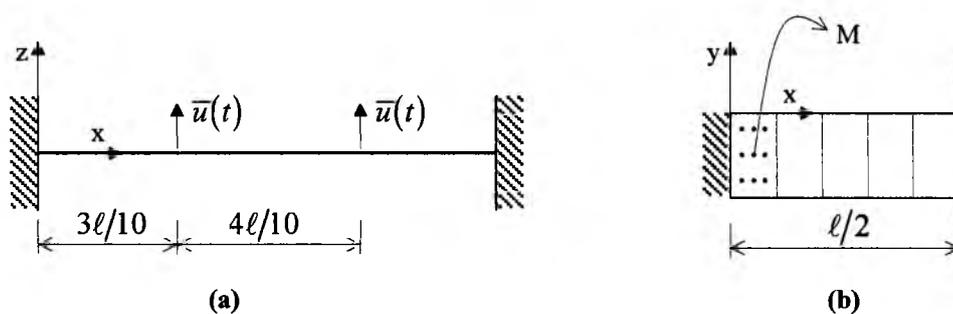
**Figura 5-7:** Geometria da viga biengastada.

As propriedades complementares que descrevem a viga da Figura 5-7, estão na Tabela 5-3:

**Tabela 5-3:** Propriedades do material e geométricas.

|                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| $E = 210000 \text{ MPa}$ | $b = 40 \text{ mm}$  |
|                          | $h = 50 \text{ mm}$  |
|                          | $l = 500 \text{ mm}$ |

A viga será submetida a um deslocamento prescrito  $\bar{u}(t)$ , conforme a Figura 5-8a,



**Figura 5-8:** Viga biengastada submetida à flexão cíclica.

e a discretização submetida a análise está de acordo com a Figura 5-8b.

Sendo  $\bar{u}(t) = 1,10\text{sen}(2\pi t)$ , no qual,  $t$  corresponde ao número do ciclo da iteração.

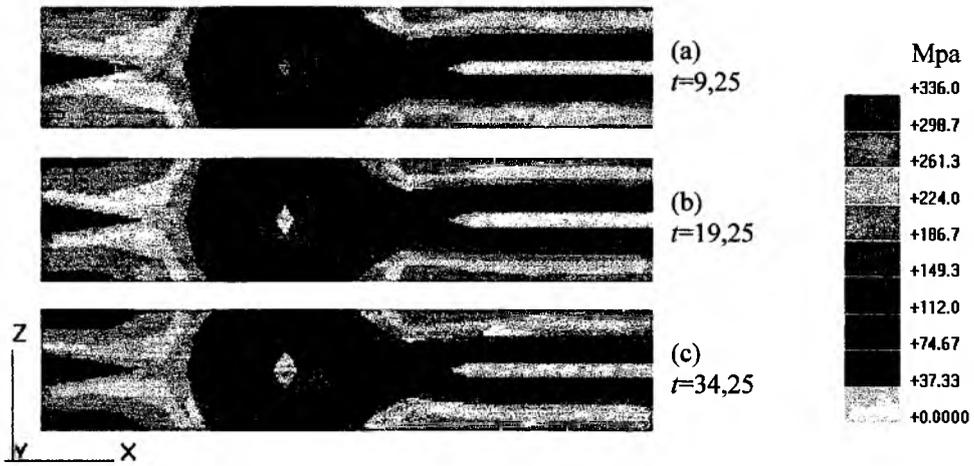


Figura 5-9: Distribuição da tensão efetiva de von Mises.

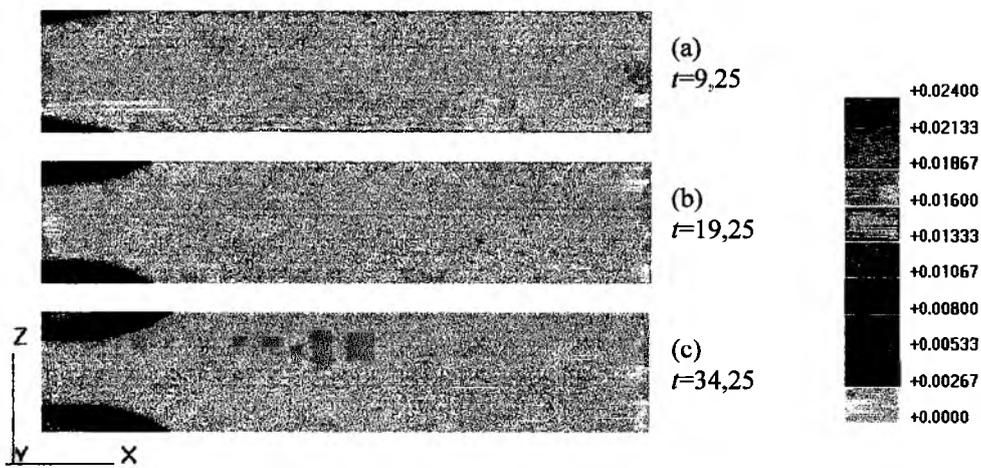


Figura 5-10: Evolução do dano.

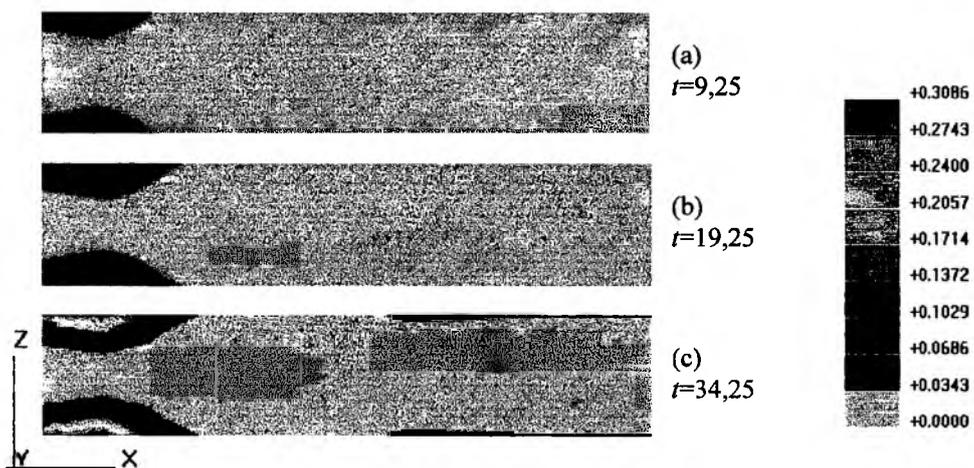
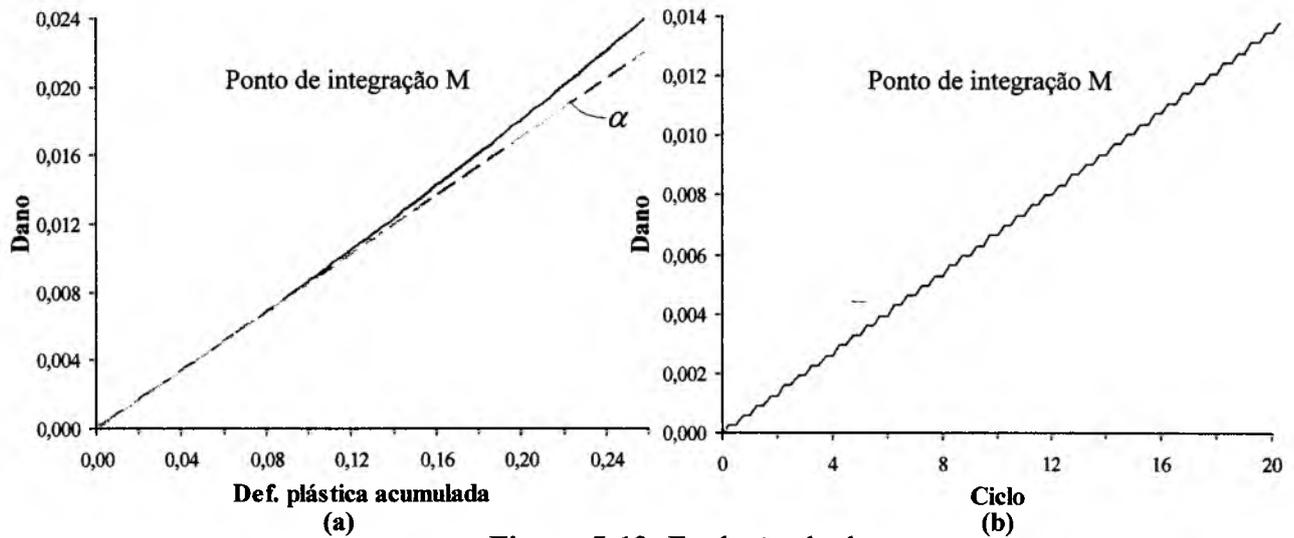


Figura 5-11: Evolução da deformação plástica acumulada.



**Figura 5-12:** Evolução do dano.

As Figuras 5-9, 5-10 e 5-11 descrevem os resultados obtidos por meio de isoformas, os campos escalares escolhidos para a visualização são a tensão efetiva de von Mises, o dano e a deformação plástica acumulada respectivamente.

Assim como no exemplo 1 o primeiro gráfico (Figura 5-12a) foi colocado uma reta tracejada, denominada  $\alpha$ , com a finalidade de ressaltar o comportamento da curva resposta do ponto de integração M (Figura 5-8b), ou seja, a evolução não linear do dano em relação à deformação plástica acumulada, melhor evidenciado que no exemplo anterior pela não tão pequena faixa de valores de deformação plástica acumulada quando comparada ao exemplo anterior, e com os mesmos problemas de alto custo computacional tornou-se inviável a evolução do processo. Para o segundo gráfico (Figura 5-12b), observa-se a forma de evolução do dano. Os pequenos patamares horizontais vistos nesta figura estão relacionados à deformação elástica, i.e., na parte de carregamento ou descarregamento elástico nos quais não existe evolução do dano.

### 5.4 Exemplo 3

- Viga biapoiada submetida a deslocamento prescrito cíclico em dois pontos simultaneamente.

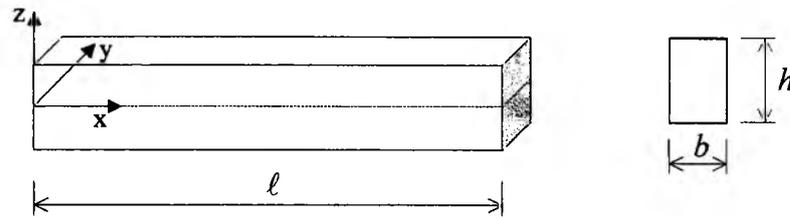


Figura 5-13: Geometria da viga.

As propriedades complementares que descrevem a viga da Figura 5-13, estão na Tabela 5-4:

Tabela 5-4: Propriedades do material e geométricas.

|                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| $E = 320000 \text{ MPa}$ | $b = 40 \text{ mm}$  |
|                          | $h = 60 \text{ mm}$  |
|                          | $l = 500 \text{ mm}$ |

A viga será submetida a um deslocamento prescrito  $\bar{u}(t)$ , conforme a Figura 5-14a,

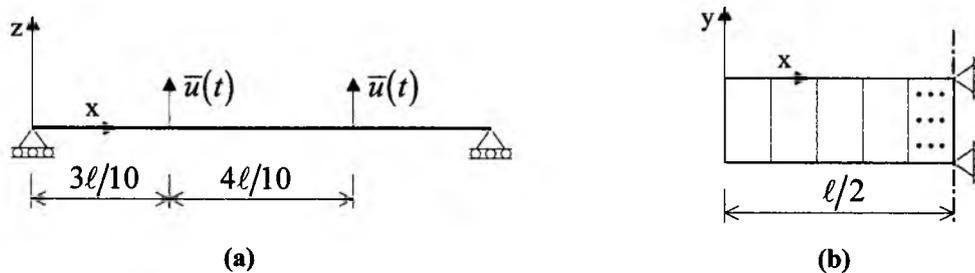


Figura 5-14: Viga biapoiada submetida à flexão cíclica.

e a discretização submetida a análise, devido a simetria, está de acordo com a Figura 5-14b.

Sendo  $\bar{u}(t) = 1,7 \text{sen}(2\pi t)$ , no qual,  $t$  corresponde ao número do ciclo da iteração. As Figuras 5-15 a 5-17, descrevem os resultados obtidos, para este caso.

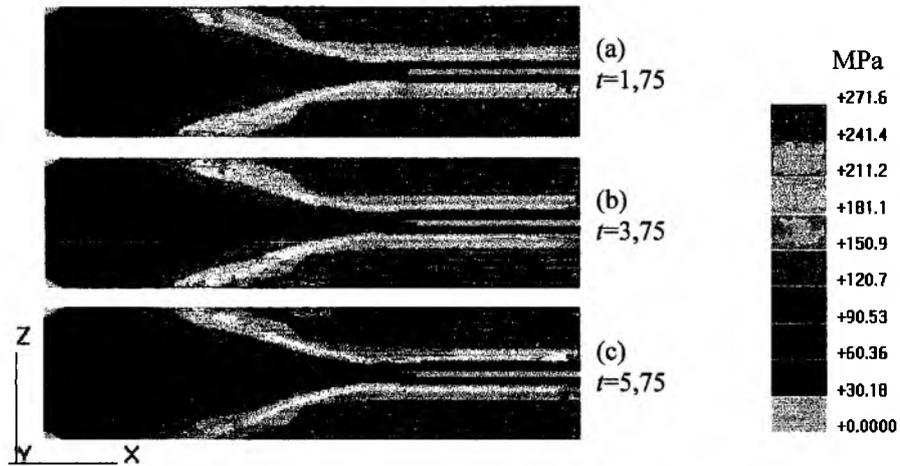


Figura 5-15: Distribuição da tensão efetiva de von Mises.

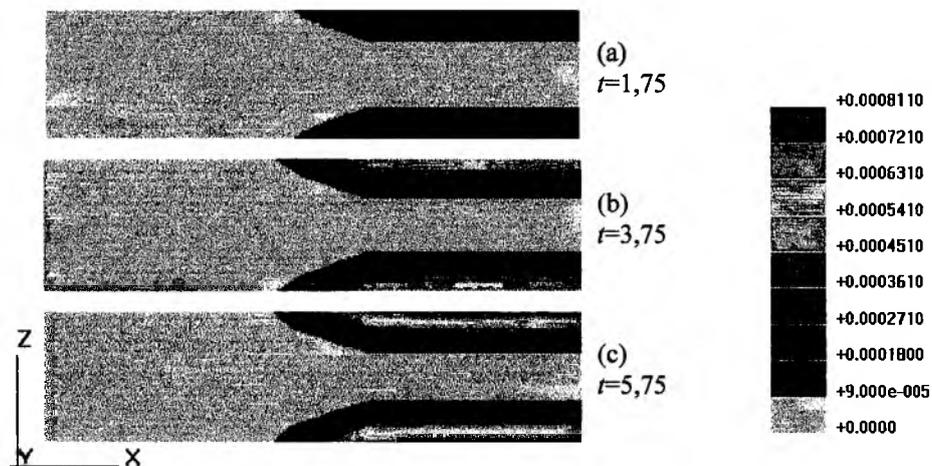


Figura 5-16: Evolução do dano.

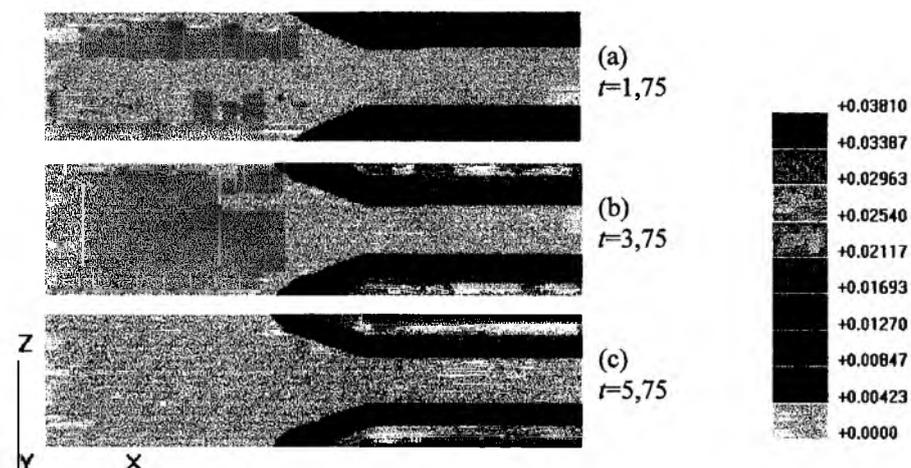


Figura 5-17: Evolução da deformação plástica acumulada.

### 5.5 Exemplo 4

- Placa quadrada com bordas engastadas e deslocamento prescrito cíclico central (ponto  $-p$ ).

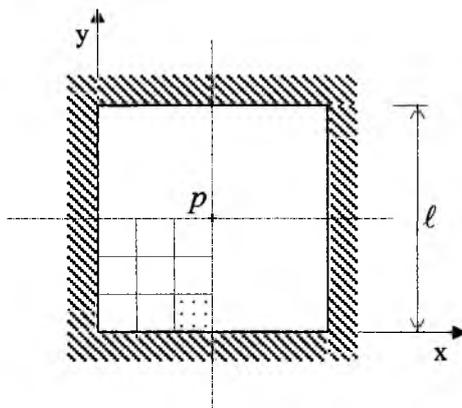


Figura 5-18: Vista superior da placa quadrada engastada.

As propriedades complementares que descrevem a placa quadrada de lado  $\ell$  da Figura 5-13, estão na Tabela 5-5:

Tabela 5-5: Propriedades do material e geométricas.

|                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| $E = 260000 \text{ MPa}$ | $h = 20 \text{ mm}$     |
|                          | $\ell = 360 \text{ mm}$ |

Considerando a simetria da geometria e das condições de contorno, foi modelado apenas 1/4 da placa, sendo esta submetida a um deslocamento prescrito  $\bar{u}_p(t)$ , conforme a Figura 5-19.

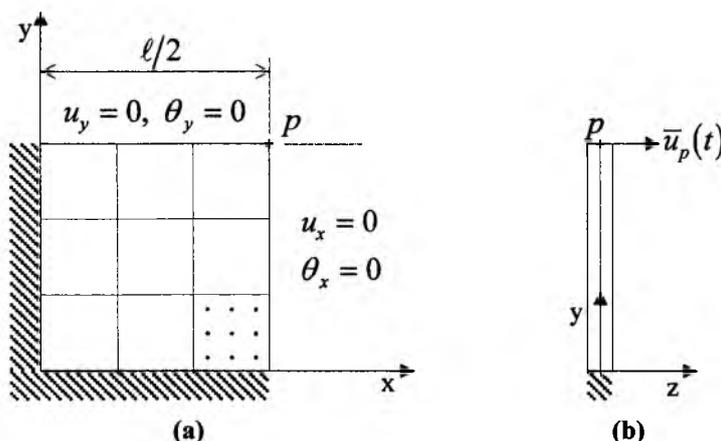


Figura 5-19: Discretização da placa.

Sendo  $\bar{u}_p(t) = 0,35\text{sen}(2\pi t)$ , no qual,  $t$  corresponde ao número do ciclo da iteração.

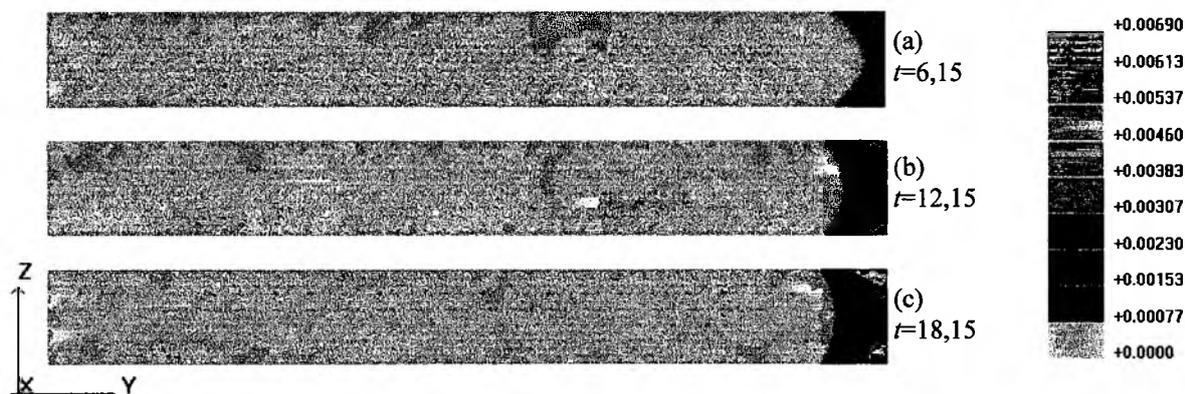


Figura 5-20: Evolução do dano.

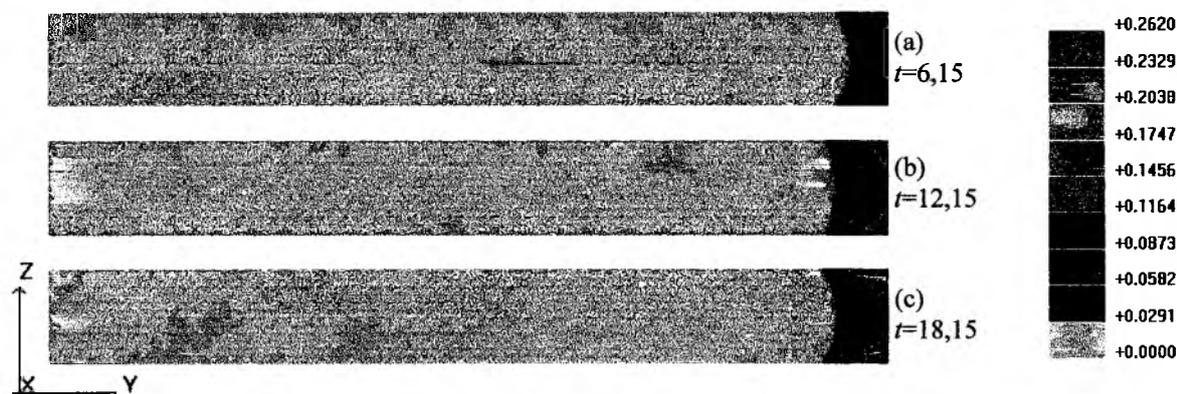


Figura 5-21: Evolução da deformação plástica acumulada.

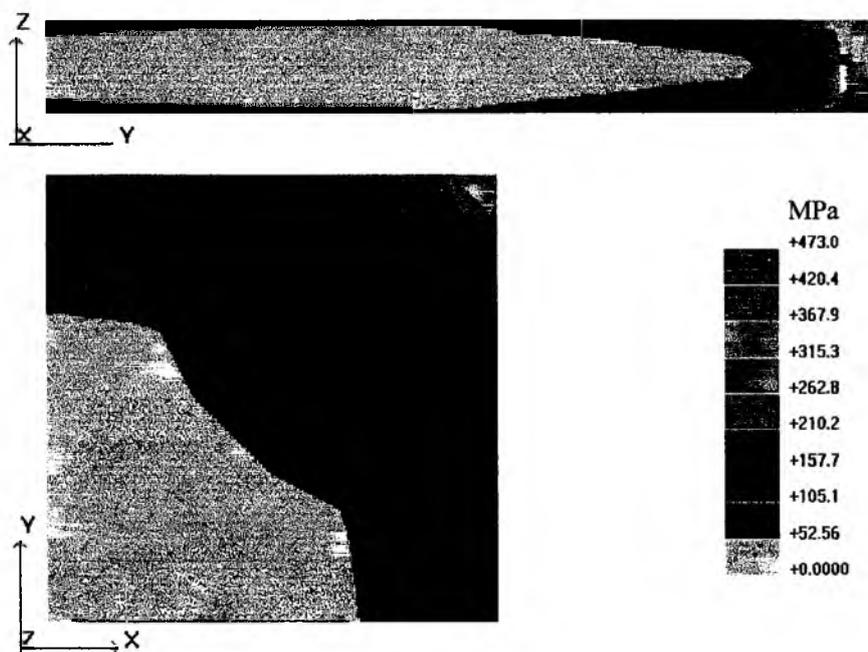


Figura 5-22: Distribuição da tensão efetiva de von Mises, quando  $t=18,15$ .

As Figuras 5-20 a 5-22, descrevem os resultados obtidos, para este caso. As Figuras 5-20 a 5-22, descrevem os resultados obtidos por meio de isoformas e os campos escalares escolhidos para a visualização são o dano, a deformação plástica acumulada e a tensão efetiva de von Mises respectivamente.

### 5.6 Exemplo 5

- Placa quadrada com duas bordas adjacentes engastadas e deslocamento prescrito cíclico no canto (ponto –  $p$ ).

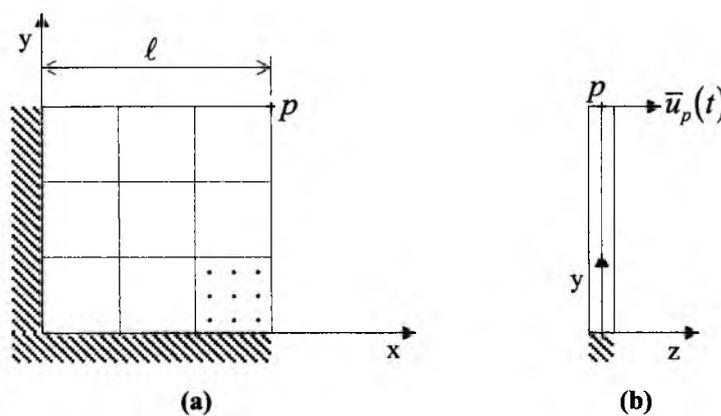
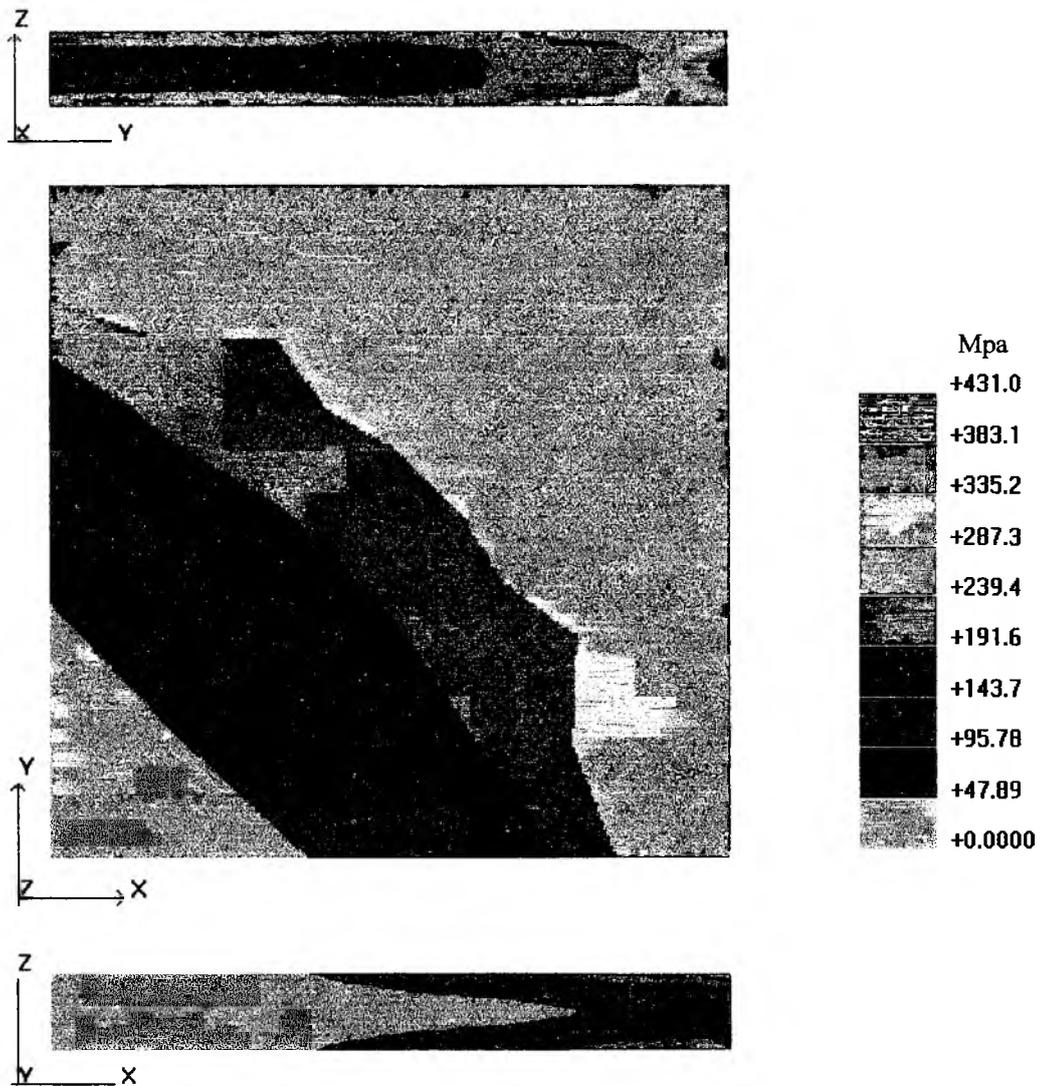


Figura 5-23: Discretização da placa quadrada em 9 elementos.

Será agora analisado o comportamento de uma placa quadrada de lado  $\ell$ , submetida a um deslocamento prescrito  $\bar{u}_p(t) = 2,0 \text{sen}(2\pi t)$ , no qual,  $t$  corresponde ao número do ciclo da iteração. Sua representação esquemática está representada na Figura 5-23, juntamente com a malha que foi submetida a análise e as condições de contorno. As propriedades complementares são dadas na Tabela 5-6:

Tabela 5-6: Propriedades do material e geométricas.

|                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| $E = 200000 \text{ MPa}$ | $h = 20 \text{ mm}$     |
|                          | $\ell = 180 \text{ mm}$ |



**Figura 5-24:** Distribuição da tensão efetiva de von Mises, quando  $t=1,75$ .

A Figura 5-24 descreve o resultado obtido para este caso, por meio de isoformas, do campo escalar da tensão efetiva de von Mises.

### 5.7 Exemplo 6

- Placa com deslocamento prescrito cíclico unidirecional no plano.

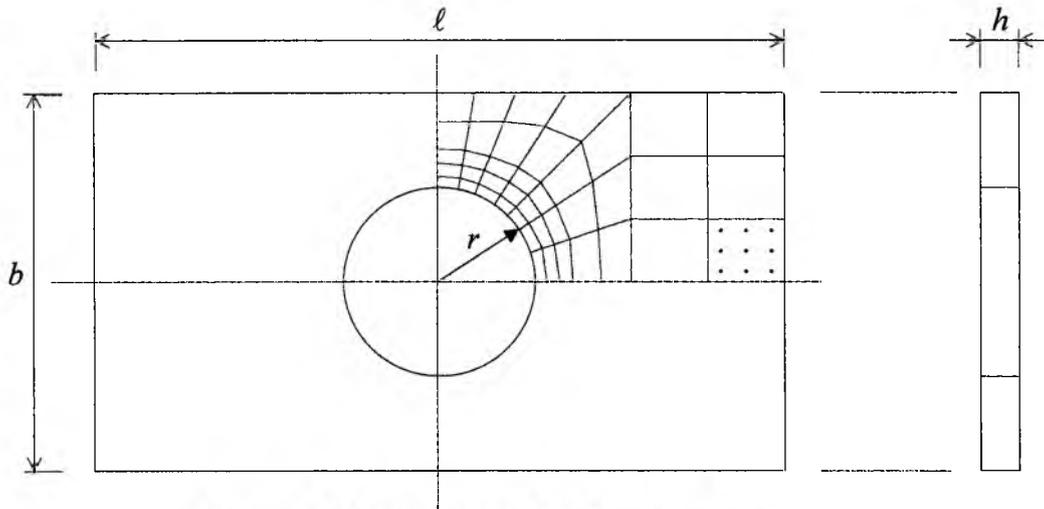


Figura 5-25: Geometria da placa com furo.

As propriedades complementares que descrevem a placa com furo da Figura 5-25, estão na Tabela 5-7:

Tabela 5-7: Propriedades do material e geométricas.

|                          |                        |
|--------------------------|------------------------|
| $E = 210000 \text{ MPa}$ | $b = 20 \text{ mm}$    |
|                          | $h = 1 \text{ mm}$     |
|                          | $\ell = 36 \text{ mm}$ |
|                          | $r = 5 \text{ mm}$     |

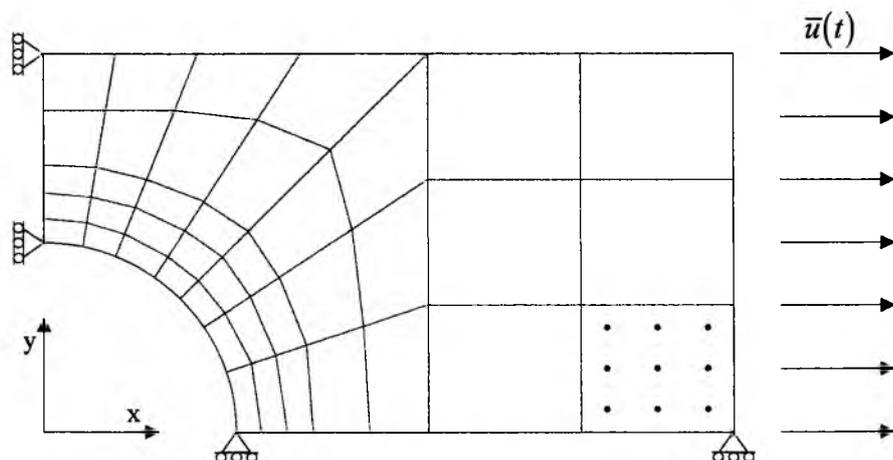


Figura 5-26: Discretização da placa com furo.

Considerando a simetria da geometria e das condições de contorno, foi modelado apenas 1/4 da placa, sendo esta submetida a um deslocamento prescrito  $\bar{u}(t)$ , conforme a Figura 5-26. Sendo  $\bar{u}(t) = 0,04\text{sen}(2\pi t)$ , no qual,  $t$  corresponde ao número do ciclo da iteração.

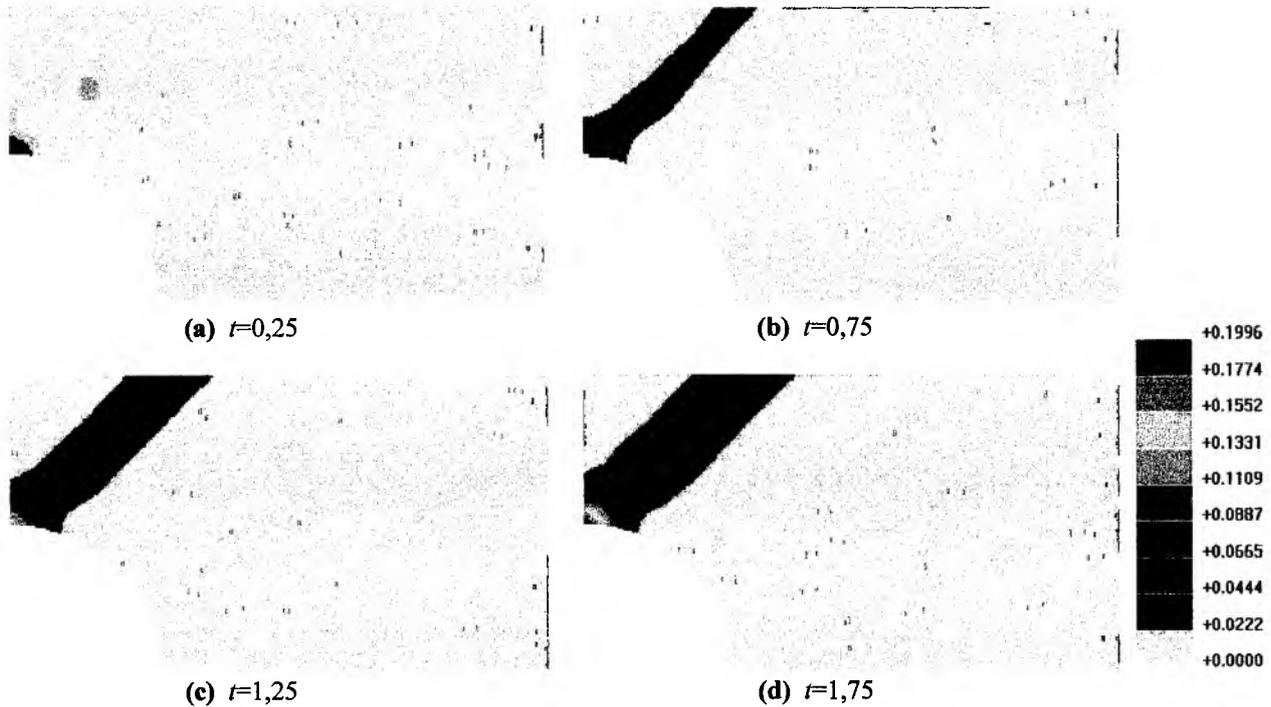


Figura 5-27: Evolução da deformação plástica acumulada.

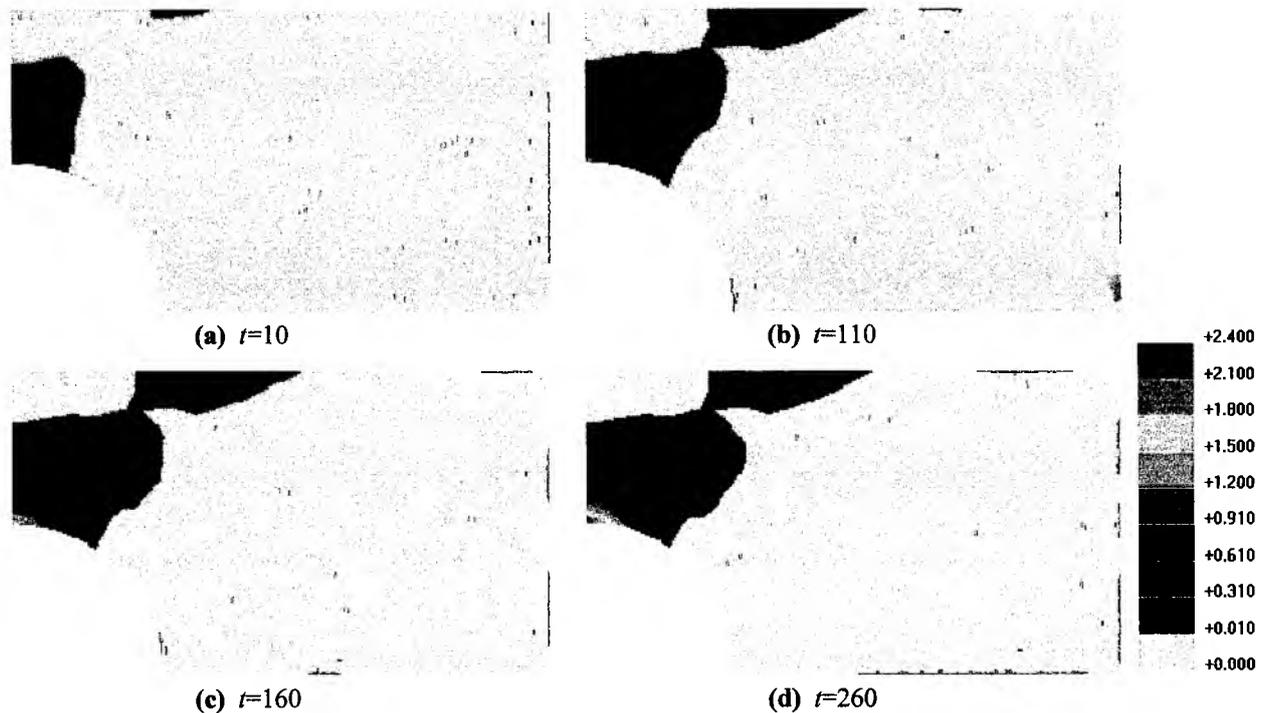


Figura 5-28: Evolução da deformação plástica acumulada apresentada por Rossi (1997).

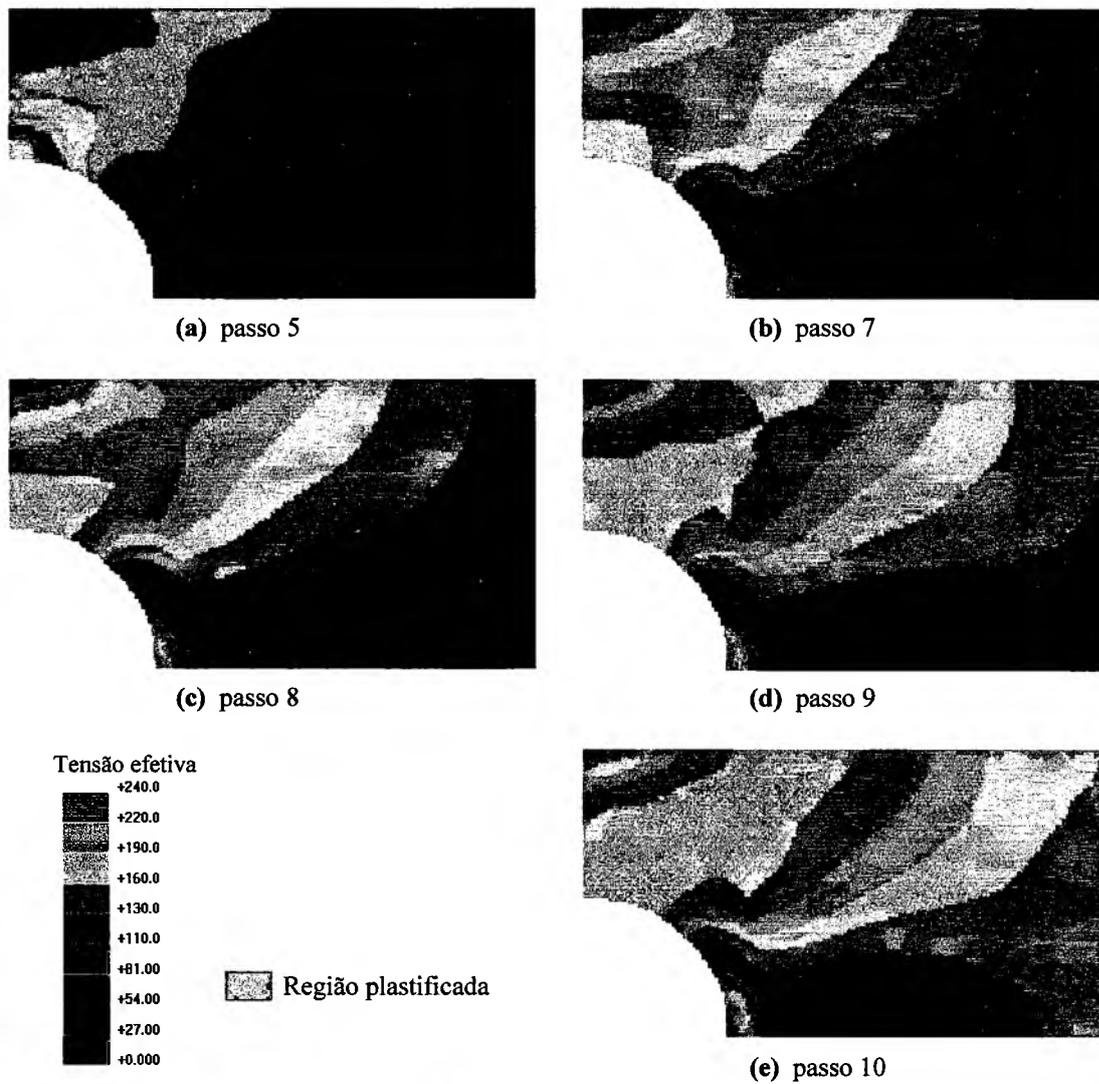


Figura 5-29: Evolução da frente plástica apresentada por Foggianto (1997).

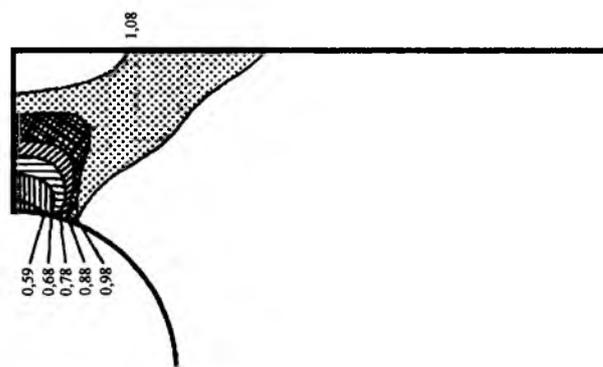


Figura 5-30: Evolução da frente plástica apresentada por Zienkiewicz (1977).

A Figura 5-27 descreve os resultados obtidos, por meio de isofoixas, para o campo escalar de deformação plástica acumulada  $p_D$ , para este caso. Este campo foi escolhido por representar as características físicas essenciais para descrever o processo evolutivo da degradação do material analisado.

Repare ainda na Figura 5-27, que a máxima região de deformação plástica acumulada encontra-se justamente no ponto de máxima concentração de tensão.

Na Figura 5-28, mostra-se os resultados obtidos<sup>11</sup> por Rossi (1997), o qual nota-se que as isofoixas com intervalos de valores bem elevados abrangem uma maior área, decorrente do alto número de ciclos de excitações. Contudo, percebe-se que a forma de como a evolução plástica acontece é muito semelhante.

Nos resultados deste trabalho torna-se inviável conseguir tal número de ciclos, devido ao alto custo computacional, mesmo tendo utilizado uma malha menos refinada (Figura 5-26) quando comparada com a utilizada por Rossi. No caso de Rossi ainda foi assumida a hipótese de estado plano de tensões.

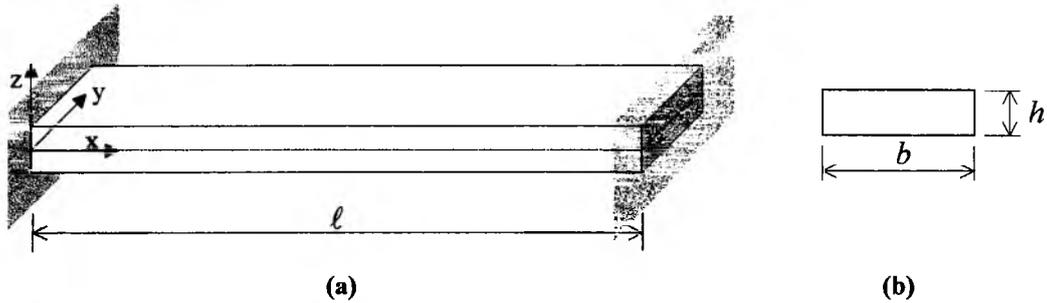
Os trabalhos de Foggiatto (1997) e Zienkiewicz (1977) mostram o comportamento de uma placa furada, com mesmas dimensões daquelas usadas na Figura 5-25, submetida a um carregamento monotônico. Porém estes trabalhos consideram apenas encruamento linear, possuem uma discretização diferente e ainda as propriedades materiais diferentes. Porém, do mesmo modo, se analisados estes trabalhos a forma de como a evolução plástica acontece é muito semelhante. No trabalho de Foggiatto (1997), Figura 5-29, está mostrada a evolução da frente plástica em termos da tensão efetiva, i.e., von Mises. Já no trabalho de Zienkiewicz (1977), Figura 5-30, estão mostrados os valores correspondentes à razão entre o dobro do carregamento aplicado e a tensão de escoamento inicial do material ( $2q/\sigma_y$ ), como mostrado por Rossi (1997).

---

<sup>11</sup> Os resultados de Rossi (1997), Foggiatto (1997) e Zienkiewicz (1977), Figuras 5-28 a 5-30 respectivamente, passaram por processo de tratamento de imagem para serem editados, para maiores detalhes verificar bibliografias originais.

### 5.8 Exemplo 7

- **Viga engastada, submetida a flexão devido a deslocamento prescrito cíclico.**



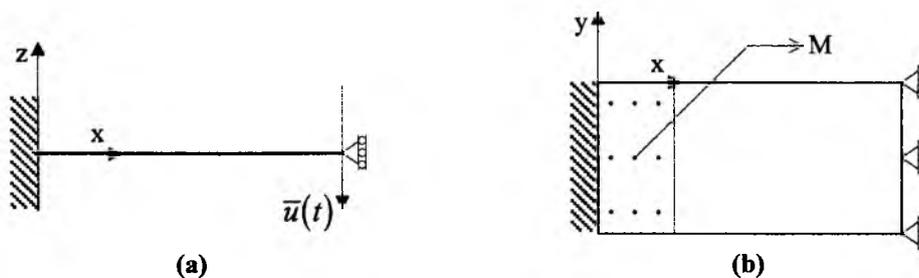
**Figura 5-31:** Geometria da placa biengastada.

Na Tabela 5-8 encontra-se as propriedades complementares que descrevem a placa biengastada da Figura 5-31.

**Tabela 5-8:** Propriedades do material e geométricas.

|                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| $E = 200000 \text{ MPa}$ | $b = 100 \text{ mm}$ |
|                          | $h = 28 \text{ mm}$  |
|                          | $l = 200 \text{ mm}$ |

Utilizando a condição de simetria a placa será submetida a um deslocamento prescrito  $\bar{u}(t)$ , conforme a Figura 5-32a e b.



**Figura 5-32:** Viga biengastada submetida à flexão cíclica.

Sendo  $\bar{u}(t) = 3,30 \text{ sen}(2\pi t)$ , no qual,  $t$  corresponde ao número do ciclo da iteração. As Figuras 5-33, 5-34 e 5-35 descrevem os resultados obtidos, para este caso.

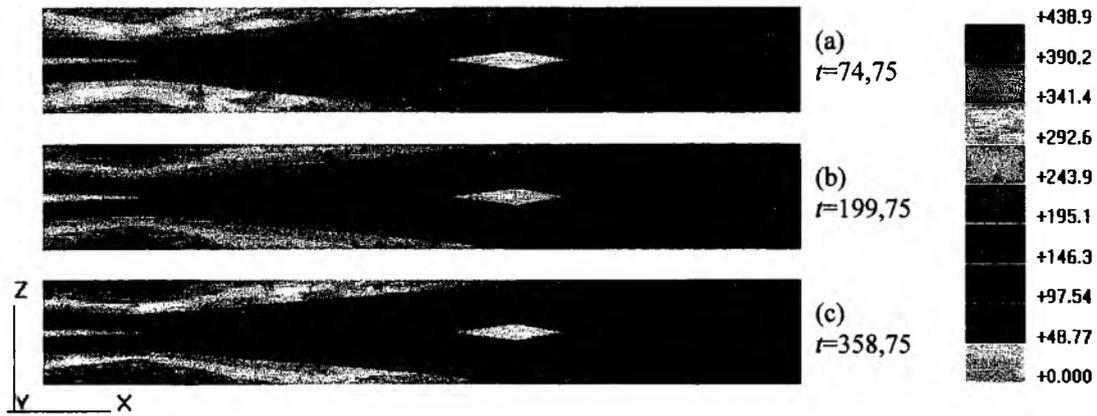


Figura 5-33: Distribuição da tensão efetiva de von Mises.

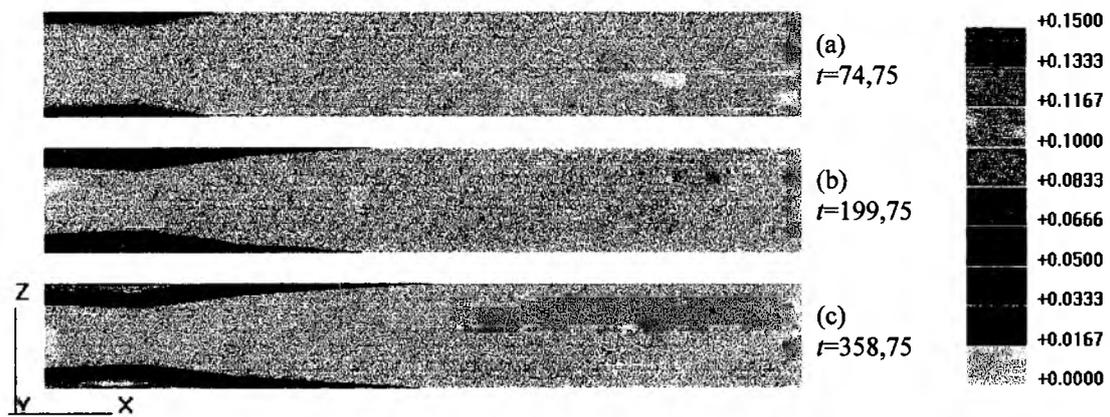


Figura 5-34: Evolução do dano.

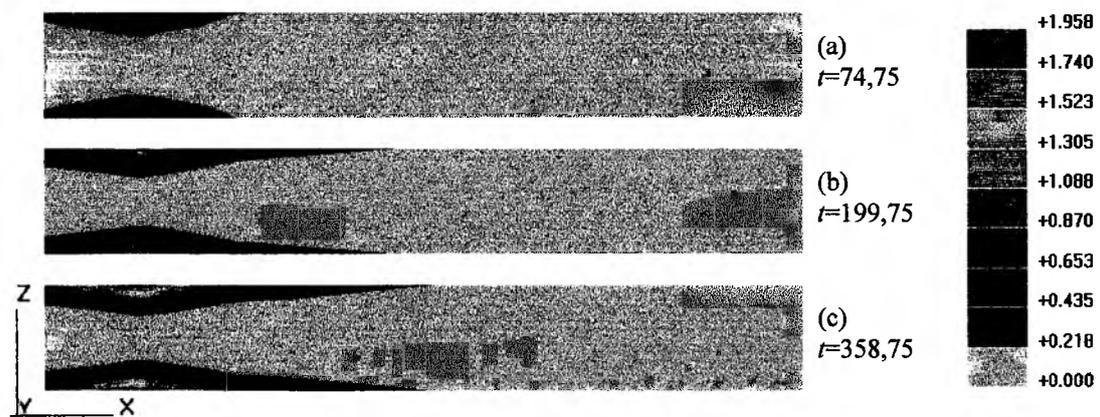
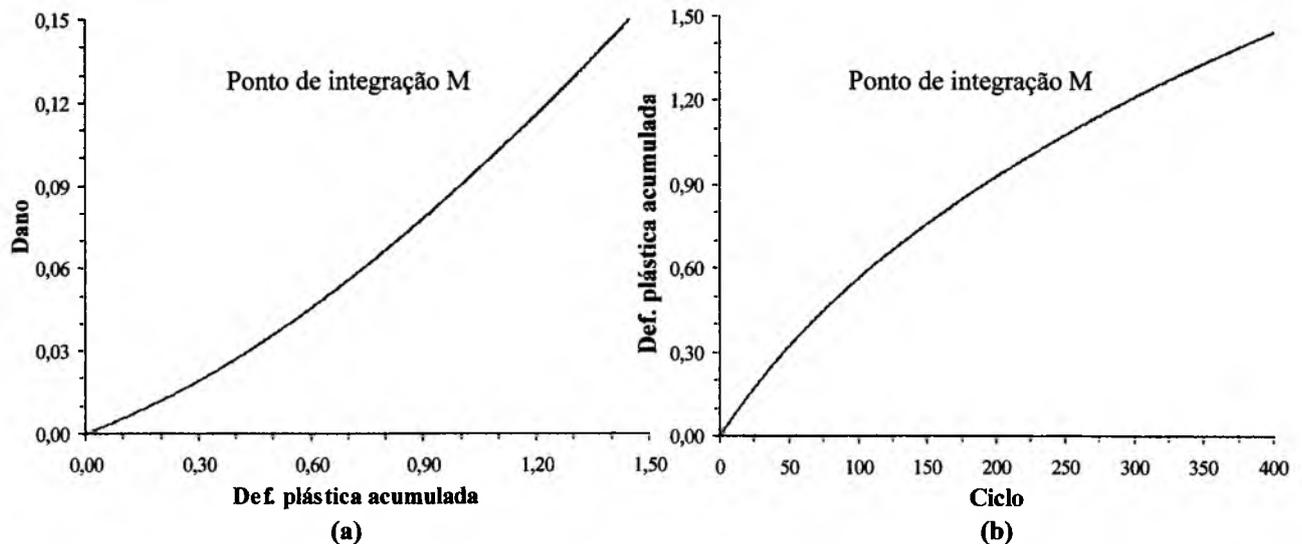


Figura 5-35: Evolução da deformação plástica acumulada.

As Figuras 5-33, 5-34 e 5-35 descrevem os resultados obtidos por meio de isofoixas, os campos escalares escolhidos para a visualização são a tensão efetiva de von Mises, o dano e a deformação plástica acumulada respectivamente.



**Figura 5-36:** Evolução do dano e da def. plástica acumulada.

Neste exemplo é evidente o comportamento da curva resposta do ponto de integração M (Figura 5-32b), ou seja, a evolução não linear do dano em relação a deformação plástica acumulada (Figura 5-36a), muito melhor evidenciado que nos dois primeiros exemplos, consequência da larga faixa de valores de deformação plástica acumulada quando comparada aos exemplos anteriores, mesmo com os problemas de alto custo computacional, a evolução atingiu o dano crítico. Repare que a faixa crítica, ou máximo atingido, pelos campos de deformação plástica (Figura 5-35c) e de dano (Figura 5-34c) é dado na região de maior concentração de tensão (Figura 5-33c). Ainda no segundo gráfico (Figura 5-36b), é mostrado o comportamento não linear da deformação plástica acumulada perante o número de ciclos, para este gráfico vale ressaltar que em consequência da escala, não é possível observar na evolução a parte elástica (linear) e a parte plástica (não linear) interna a cada ciclo.

## ***Capítulo 6***

### ***Conclusões e Sugestões***

Neste trabalho é feita uma análise elastoplástica e do dano em placas espessas possibilitando uma análise de fadiga de baixo ciclo em peças que se enquadram neste tipo de geometria.

A teoria de dano utilizada, proposta por Lemaitre *et al.*, apresenta a possibilidade de descrever de maneira precisa a evolução elastoplástica para um carregamento genérico e a capacidade de introduzir modelos de equações de evolução de dano mais sofisticados, possibilitando uma melhor descrição do problema físico. Para o caso específico da teoria clássica, a análise é baseada em experimentos uniaxiais, com corpos de prova normalizados, e em relações empíricas específicas para o problema utilizado. A extensão destes resultados, para casos mais complexos, é feita através da introdução de fatores de correção. Esta teoria é geral e permite, através da mudança da equação de evolução do dano, a representação de outros fenômenos físicos. A teoria é apresentada dentro do escopo da termodinâmica dos processos irreversíveis, a qual é uma poderosa ferramenta para a obtenção e validação de equações constitutivas, principalmente por se apresentar de maneira clara, metodológica e consistente.

A teoria de ordem superior de Kant foi utilizada para descrever o campo de deslocamentos da placa. Esta teoria elimina as inconsistências geradas pelas teorias de primeira ordem e o fator de correção para as tensões cisalhantes. Como consequência da distribuição quadrática das tensões cisalhantes transversais, pode-se captar com maior precisão a frente plástica que se forma a partir da superfície externa da placa. Os casos

rodados utilizam malhas não distorcidas, pois é sabido que com esta teoria não apresentam o problema de travamento, “locking”, caso contrário utilizar-se-ia uma integração reduzida, de 2x2 pontos, nos termos relacionados com a energia de cisalhamento eliminando, por completo, o travamento.

Devido a falta de trabalhos que introduzam modelos de plasticidade não lineares e os aplique a casos tridimensionais, da não existência de soluções analíticas e ainda da não disponibilidade de ensaios para validar os resultados destes problemas, é difícil de fazer algum tipo de comparação a não ser de caráter da evolução da frente plástica. No exemplo da placa com furo, a evolução do dano mostrou-se a partir dos pontos de concentração máxima da geometria.

O algoritmo proposto nesta dissertação foi baseado no trabalho de Benallal *et al.* (1988) e mostrou-se bastante satisfatório, tanto para a solução do problema local quanto para o problema global. Porém devido ao enorme esforço computacional necessário para satisfazer o número de equações, ocasionados pela complexidade e detalhamento das teorias de dano e de ordem superior utilizadas em relação as teorias clássicas, há necessidade de reestruturar a formulação de maneira que torne o código mais eficiente no que diz respeito ao tempo computacional, motivo que inviabilizou simular os exemplos até atingir o dano crítico.

Na formulação apresentada, é interessante considerar mais alguns efeitos, como:

1. o efeito do fechamento das microtrincas;
2. novos critérios de determinação do dano crítico, tais como os métodos baseados na ocorrência de localização;
3. implementação da teoria a materiais porosos;
4. sofisticação das equações de evolução do dano e de elastoplasticidade para carregamentos cíclicos.

## *Referências Bibliográficas*

- [01] Auricchio, F. & Taylor, R. L. – **A Generalized Elastoplastic Plate Theory and its Algorithmic Implementation** – International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pp. 2583-2608, John Wiley & Sons, 1994.
- [02] Babuska, I. – **Reliability of Computational Analysis of Plasticity** – Government Research Announcements and Index, vol. mar., 1991.
- [03] Barp, J. L. – **Problemas de Contato Unilateral em Placas Semi-espessas, Sujeitas a Grandes Deformações, Utilizando uma Teoria de Ordem Superior** – Dissertação de Mestrado, UFSC, 1996.
- [04] Bathe, K. J. – **Finite Elements Procedures in Engineering Analysis** – New Jersey, prentice-Hall, 1982.
- [05] Batoz, Jean-Louis & Dhatt, Gouri – **Modélisation des Structures par Éléments Finis** – vol. 3, Paris, Hermes, 1992.
- [06] Benallal, A.; Billardon, R. & Doghri, I. – **An Integration Algorithm and the Corresponding Consistent Tangent Operator for Fully Coupled Elastoplastic and Damage Equations** – Communications in Applied Numerical Methods, vol. 4, pp. 731-740, 1988.
- [07] Benallal, A.; Comi, C. & Lemaitre, J. – **Critical Damage States at Crack Initiation** – Damage Mechanics Localization – ASME, AMD–vol. 142/MD–vol. 34, pp. 13-23, 1992.
- [08] Chaboche, J. L., – **Time-Independent Constitutive Theories for Cycle Plasticity** – International Journal of Plasticity, vol. 2, n° 2, pp. 149-188, 1986.

- [09] Chaboche, J. L. & Rousselier, G. – **On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part I and II** – Journal of Pressure Vessel Technology, vol. 105, pp. 153-164, 1983.
- [10] Chen, W. F., & Han, D.J. – **Plasticity for Structural Engineers** – New York, Springer-Verlag, 1988.
- [11] Cook, R. D.; Malkus, D. S. & Plesha, M. E. – **Concepts and Applications of Finite Element Analysis** – 3<sup>rd</sup> edition, New York, John Wiley & Sons, 1988.
- [12] Dhatt G. & Touzot G. – **The Finite Element Method Displayed** – John Wiley and Sons, 1984, ISBN 0-471-90110-5.
- [13] Fuchs, H. O. & Stephens, R. I. – **Metal Fatigue in Engineering** – John Wiley & Sons, 1980.
- [14] Germain, P. – **Cours de Mécanique des Milieux Continus** – Paris, Masson et C<sup>ie</sup>, 1973.
- [15] Germain, P.; Nguyen, Q. S. & Suquet, P. – **Continuum Thermodynamics** – Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 50, pp. 1010-1020, 1983.
- [16] Grosskreutz, J. C. – **Fatigue Mechanics in the Sub-Creep Range** – Metal Fatigue Damage-Mechanism, Detection, Avoidance, and Repair, ASTM STP 495, pp. 5-60, 1971.
- [17] Gurtin, M. E. – **An Introduction to Continuum Mechanics** – New York, Academic Press, pp. 264, 1981.
- [18] Hughes, T. R. H. – **The Finite Element Method** – New Jersey, Prentice Hall International, pp. 797, 1987.

- [19] Kachanov, L. M. – **Foundations of the Theory of Plasticity** – Amsterdam, Elsevier, 1971.
- [20] Kachanov, L. M. – **Introduction to Continuum Damage Mechanics** – Brookline, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- [21] Kaliszky, Sándor – **Plasticity: theory and engineering applications** – Amsterdam, Elsevier, 1989.
- [22] Kamoulakos, A. – **Understanding and Improving the Reduced Integration of Midlin Shell Elements** – International Journal for Numerical Methods in engineering, vol. 26, 2009-2029, John Wiley & Sons, 1988.
- [23] Kant, Tarum – **Numerical Analysis of Thick Plates** – Computer Methods Applied Mech. Engng., vol. 31, pp. 1-18, 1982.
- [24] Kant, T. & Kommineni, J. R. –  **$C^0$  Finite Element Geometrically Non-Linear Analysis of Fibre Reinforced Composite and Sandwich Laminates Based on a Higher-Order Theory** – Computers & Structures, vol. 45, n° 3, pp. 511-520, 1992.
- [25] Kant, T. & Kommineni, J. R. – **Geometrically Non-Linear Transient Analysis of Laminated Composite and Sandwich Shells with a Refined Theory and  $C^0$  Finite Elements** – Computers & Structures, vol. 52, n° 6, pp. 1243-1259, 1994.
- [26] Kant, T. Owen; D. R. J. & Zienkiewicz, O. C. – **A Refined Higher Order  $C^0$  Plate Bending Element** – Computers & Structures, 15, n° 2, pp. 177-183, 1982.
- [27] Khan, A. S. & Huang, S. – **Continuum Theory of Plasticity** – New York, John Wiley & Sons, 1995.
- [28] Kraus, Harry – **Thin Elastic Shells** – New York, John Wiley & Sons, 1967.

- [29] Krajcinovic, D. & Lemaitre, J. – **Continuum Damage Mechanics – Theory and Applications, Courses and Lectures**, New York, Springer-Verlag, n° 295, p. 294, 1971.
- [30] Lemaitre, J. – **A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture** – Art. Trans. ASME, Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 107/1, 1985.
- [31] Lemaitre, J. – **How to Use Damage Mechanics!** – Nuclear Engineering and Design Journal, vol. 80, 1984.
- [32] Lemaitre, J. – **A Course on Damage Mechanics** – Germany, Springer-Verlag, p. 209, 1992.
- [33] Lemaitre, J. – **Micro-mechanics of Crack Initiation** – International Journal of Fracture, vol. 42, pp. 87-99, 1990.
- [34] Lemaitre, J. & Chaboche, J. L. – **Mechanics of Solids Materials** – First paper-back edition, Cambridge University Press, 1994.
- [35] Lemaitre, J. & Dufailly, J. – **Damage Measurements** – Engineering Fracture Mechanics, vol. 28, pp. 643-661, 1987.
- [36] Lo, K. H.; Christensen, R. M. & Wu, E. M. – **A High Order Theory of Plate Deformation Part 1: Homogeneous Plates** – J. Appl. Mech., 44, n° 4, pp. 663-668, 1977a.
- [37] Lo, K. H.; Christensen, R. M. & Wu, E. M. – **A High Order Theory of Plate Deformation Part 2: Laminated Plates** – J. Appl. Mech., 44, n° 4, pp. 669-676, 1977b.

- [38] Lo, K. H.; Christensen, R. M. & Wu, E. M. – **Stress Solution Determination for High Order Plate Theory** – Int. J. Solids Structures, 14, pp. 655-662, 1978.
- [39] Lubliner, Jacob – **Plasticity Theory** – New York, Macmillan Publishing Company, 1990.
- [40] Luersen, M.A. – **Problemas de Contato Unilateral em Placas Semi-espessas Sujeitas a Grandes Deflexões** – Dissertação de Mestrado, UFSC, 1994.
- [41] Malvern, L. E. – **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium** – New Jersey, Prentice-Hall, 1969.
- [42] Marcal, P.V. & Pilgrim, W. R. – **A Stiffness Method for ElasticPlastic Shells of Revolution** – Journal of Strain Analysis, pp. 417-428, 1966.
- [43] Noor, A. & Burton, W. S. – **Assessment of Shear Deformation Theories forMultilayered Composite Plates** –Appl. Mech., 42, n° 1, pp. 1-12, 1989.
- [44] Owen, D. R. J. & Hinton, E. – **Finite Elements in Plasticity** – Swansea, Pineridge Press Limited, 1980.
- [45] Reddy, J. N. – **A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates** – Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- [46] Reddy, J. N. – **A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation** – Int. J. Solids Structures, vol. 20, n° 9/10, pp. 881-896, 1984.
- [47] Ristinmaa, M. – **Consistent Stiffness Matrix in FE Calculations of Elastoplastic Bodies** – Computers & Structures, vol. 53, n° 1, pp. 93-103, Pergamon, 1994.
- [48] Robotnov, Y. N. – **Creep Rupture** – Proc. XII, Inter. Congress Appl. Mech., Stanford, Springer Berlin, 1969.

- [49] Rosa, E. – **Introdução ao Estudo de Fadiga em Componentes Mecânicos** – Apostila de Aula, Publicação Interna, UFSC, 1994.
- [50] Rossi, R. – **Análise de Fadiga de Baixo Ciclo Através da Teoria de Dano** – Dissertação de Mestrado, UFSC, 1997.
- [51] Sampaio, Rubens – **Análise Limite de Sistemas Físicos** – Introdução a Termomecânica dos Meios Contínuos, Rio de Janeiro, VI Escola de Matemática Aplicada, LNCC, 1985.
- [52] Simo, J. C. & Ju, J.W. – **Strain- and Stress-Based Continous Damage Model - Part I and II** – Int. J. Solids Structures, vol 23, pp. 821-869, 1987.
- [53] Simo, J. C. & Taylor, R. L. – **A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity** – International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 31, pp. 649-670, 1986.
- [54] Szabó, B. & Babuska, I. – **Finite Element Analysis** – New York, Jonh Wiley & Sons, pp. 368, 1991.
- [55] Truesdell C. – **Mechanics of Solids** – vol. III, Theory of Viscoelasticity, Plasticity, Elastic Waves, and Elastic Stability, Springer-Verlag, 1984.
- [56] Washizu, K. – **Variational Methods in Elasticity and Plasticity** – 2<sup>nd</sup> edition, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [57] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. - **The Finite Element Method** - Fourth Edition, vol.1 e 2, Mcgraw-Hill Book Company, ISBN 0-07-084175-6, 1989.
- [58] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. & Too, J. M. – **Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells** – International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 3, 275-290, Jonh Wiley & Sons, 1971.