

**Análise e Otimização de Cascas de  
Materiais Compostos Laminados**

**Dissertação**

**Eng. Alexandre Kaelble Calixto**

**1998**

**Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

**ANÁLISE E OTIMIZAÇÃO DE CASCAS DE  
MATERIAIS COMPOSTOS LAMINADOS**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina  
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

**Alexandre Kaelble Calixto**

**Florianópolis, julho de 1998.**


# Análise e Otimização de Cascas de Materiais Compostos Laminados

Alexandre Kaelble Calixto

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

**Mestre em Engenharia**

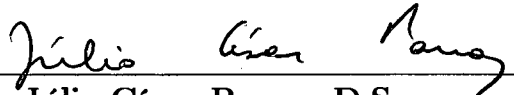
Especialidade Engenharia Mecânica, área de concentração Projeto e Análise  
de Componentes Mecânicos, e aprovada em sua forma final pelo curso de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica



---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Orientador do Trabalho

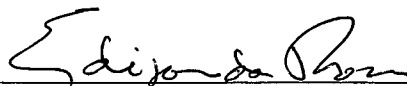


---

Júlio César Passos, D.Sc.

Coordenador do Curso

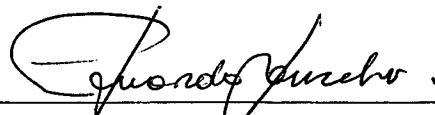
**Banca Examinadora**



---

Edison da Rosa, Dr. Eng. Mec.

Presidente



---

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.



---

Paulo de Tarso R. de Mendonça, Ph.D.

## DEDICATÓRIA

À minha querida Oma (*in memoriam*) pelo grande carinho.

Àqueles que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e  
incentivando em todos os momentos da vida,  
meus pais: Roberto e Christel.

## AGRADECIMENTOS

Quero manifestar minha gratidão ao amigo e orientador deste trabalho, Prof. Marcelo Krajnc Alves, por sua presteza e pela atenção que me dispensou durante todo este processo, colocando-se sempre a disposição para trocar idéias e colaborando generosamente com seus ensinamentos e experiências. Sou grato também, pela confiança depositada em mim e pelos conselhos relativos à vida.

À CAPES, pela concessão da bolsa de estudos durante dois anos.

Aos professores Acires Dias, Clóvis S. de Barcellos, Edison da Rosa, Eduardo Fancello, Paulo de Tarso Mendonça e Roberto Jordan, pelos conhecimentos transmitidos e ao Prof. Lauro Nicolazzi, pela ajuda prestada.

Aos amigos, Ricardo Resende, pela atenção quando cheguei à Florianópolis e Fred Lacerda Amorim, por me hospedar no primeiro mês.

Aos vizinhos, Adilson Oliveira da Silva & Liandra e Valner Brusamarello & Rita, pelo apoio nas horas mais difíceis e que se tornaram grandes amigos.

À todos os colegas da Pós, os quais tive o prazer de conviver, pela amizade demonstrada e por tornarem a jornada mais amena. Entre eles: Antonio André Novotny (bizus SWP), Fred Matos, Iván Jimenez Prado, Juan Jose Lopensino, Jucélio Tomáz Pereira, Juscelino de Farias Marimbondo, Lauro Fernando S. Ignácio Jr., Leonardo Toledo, Marcus Antonius da Costa Nunes, Nederson da Silva Koehler e Valdir Mendes Cardoso. Em especial aos amigos Alex Pizzatto, Fábio Klein, João Carlos Arantes Costa Jr. e Michael Fernandes (pela caminhada), pelos bons momentos de diversão.

Ao Rodrigo Rossi, pelas farras, “bizus”, conselhos e principalmente pela grande amizade construída nesse tempo.

À minha irmã, Adriana Kaelble Calixto, e aos amigos, Guilherme Vilela e Lucas Coelho, que apesar da distância, me apoiaram constantemente.

À Tatiane Waltrick Goeten, pelo ótimo convívio, apoio e carinho.

Meu muito obrigado.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação do Trabalho . . . . .	2
1.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Material Composto</b>	<b>10</b>
2.1	Introdução . . . . .	10
2.2	Micromecânica . . . . .	11
2.2.1	Introdução . . . . .	11
2.2.2	Regra da Mistura . . . . .	11
2.2.3	Propriedades Elásticas . . . . .	13
2.2.4	Módulo de Elasticidade Longitudinal de uma Lâmina . . . . .	14
2.2.5	Módulo de Elasticidade Transversal de uma Lâmina . . . . .	16
2.2.6	Módulo de Cisalhamento de uma Lâmina . . . . .	18
2.2.7	Coefficiente de Poisson de uma Lâmina . . . . .	19
2.3	Macromecânica . . . . .	20
2.3.1	Introdução . . . . .	20
2.3.2	Relações Constitutivas para um Material Anisotrópico . . . . .	20
2.3.3	Relações Constitutivas para uma Lâmina em uma Direção Arbitrária . . . . .	23
2.4	Critérios de Falha . . . . .	28
2.4.1	Critério de Falha de Tsai-Hill . . . . .	29
2.4.2	Critério de Falha de Hoffman . . . . .	29
2.4.3	Critério de Falha de Tsai-Wu . . . . .	30

<b>3</b>	<b>Teoria de Casca</b>	<b>32</b>
3.1	Introdução . . . . .	32
3.2	Descrição da Superfície Média . . . . .	33
3.3	Curvaturas . . . . .	35
3.4	Descrição de um Ponto . . . . .	37
3.5	Teoria de Kant . . . . .	39
3.6	Limitações das Teoria de Kirchhoff e de Mindlin-Reissner . . . . .	41
3.7	Vantagens da Teoria de Ordem Superior . . . . .	42
3.8	Deformação . . . . .	43
3.9	Relação Constitutiva . . . . .	44
3.10	Princípio dos Trabalhos Virtuais . . . . .	45
3.11	Discretização do Problema . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Otimização</b>	<b>50</b>
4.1	Introdução . . . . .	50
4.2	Método do Lagrangeano Aumentado . . . . .	53
4.2.1	Introdução . . . . .	53
4.2.2	Método para Restrições de Igualdade . . . . .	54
4.2.3	Extensão do Método para Restrições de Desigualdade . . . . .	56
4.3	Análise de Sensibilidade . . . . .	58
4.3.1	Introdução . . . . .	58
4.3.2	Método Direto . . . . .	58
4.4	Formulação do Problema do 1 <sup>o</sup> Nível . . . . .	60
4.4.1	Variável de Projeto . . . . .	60
4.4.2	Função Objetivo . . . . .	60
4.4.3	Restrição de Espessura . . . . .	61
4.4.4	Restrição de Tensão . . . . .	62
4.4.5	Gradiente da Função Objetivo . . . . .	65
4.4.6	Gradiente da Restrição de Espessura . . . . .	65
4.4.7	Gradiente da Restrição de Tensão . . . . .	66



4.5	Formulação do Problema do 2º Nível . . . . .	67
4.5.1	Variável de Projeto . . . . .	67
4.5.2	Função Objetivo . . . . .	67
4.5.3	Restrição de Ângulo . . . . .	68
4.6	Algoritmo de Minimização 1-D . . . . .	68
4.6.1	Quadratic Golden Side Search . . . . .	68
4.7	Algoritmo de Minimização N-D . . . . .	69
4.7.1	Steepest Descent Method . . . . .	69
4.7.2	Método de Newton . . . . .	69
4.7.3	Variable Metric Method . . . . .	70
4.8	Método do Refino Sucessivo . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>75</b>
5.1	Introdução . . . . .	75
5.2	Problemas com Materiais Isotrópicos . . . . .	77
5.2.1	Patch Test . . . . .	77
5.2.2	Placa isotrópica . . . . .	79
5.3	Problemas com Materiais Ortotrópicos . . . . .	81
5.3.1	Placa ortotrópica . . . . .	81
5.3.2	Laminado [0/90/90/0] . . . . .	84
5.3.3	Cilindro Laminado . . . . .	86
5.3.4	Tensão Interlaminar . . . . .	89
5.4	Problemas de Otimização . . . . .	93
5.4.1	Placa Ortotrópica sob Cisalhamento . . . . .	93
5.4.2	Placa Ortotrópica sob Flexão . . . . .	95
5.4.3	Vaso de Pressão com Tampa Semi Esférica . . . . .	97
5.4.4	Laminado sob Tração Bi-axial . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Conclusões e Sugestões</b>	<b>103</b>

# Lista de Figuras

2.1	Lâmina unidirecional em material composto. . . . .	13
2.2	Representação 2D da lâmina unidirecional. . . . .	14
2.3	Lâmina unidirecional sujeita à tração longitudinal. . . . .	14
2.4	Curva Tensão x Deformação para fibra e resinas. . . . .	15
2.5	Lâmina unidirecional sujeita à tração transversal. . . . .	17
2.6	Lâmina unidirecional sujeita à tensão cisalhante. . . . .	18
2.7	Rotação $\theta$ das direções principais de ortotropia do material. . . . .	24
3.1	Estrutura de placa.          Estrutura de casca. . . . .	32
3.2	Representação paramétrica da superfície média da casca. . . . .	33
3.3	Sistema local definido pelas base $\mathbf{t}_1$ , $\mathbf{t}_2$ e $\mathbf{n}$ . . . . .	35
3.4	Base covariante $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ e base ortonormal $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ . . . . .	35
3.5	Raios de curvatura. . . . .	36
3.6	Descrição de um ponto da casca. . . . .	37
3.7	Convenção de sinal para a rotação. . . . .	40
3.8	Representação dos vetores de deslocamento $\mathbf{u}_p$ e $\mathbf{u}_q$ . . . . .	41
3.9	Sólido elástico. . . . .	45
3.10	Base covariante $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ e base contravariante $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2)$ . . . . .	47
3.11	Elemento finito isoparamétrico, quadrilateral e de 9 nós - <i>quad9</i> . . . . .	49
4.1	Processo de otimização em dois níveis. . . . .	52
4.2	Esquema do Método do Refino Sucessivo. . . . .	74
5.1	a) Malha regular. b) Malha distorcida. . . . .	77

5.2	Placa isotrópica submetida a tração. . . . .	78
5.3	Deslocamento do ponto P para malha regular e distorcida sob flexão. . . . .	79
5.4	Placa ortotrópica submetida a um carregamento uniformemente distribuído. . . . .	81
5.5	Placa ortotrópica, $\theta = 30^\circ$ , na config. deformada: (a) plano XZ; (b) plano YZ. . . . .	83
5.6	Cilindro engastado sob pressão interna. . . . .	86
5.7	Distribuição da tensão circunferencial no cilindro laminado, $[0/90]_s$ e $(R/h=20)$ . . . . .	87
5.8	Deslocamento radial de um cilindro com as extremidades engastadas e sob pressão interna, $(R/h=20)$ . . . . .	88
5.9	Deslocamento radial de um cilindro com as extremidades engastadas e sob pressão interna, $(R/h=100)$ . . . . .	89
5.10	Distribuição das tensões cisalhantes transversais $\bar{\tau}_{xz}$ e $\bar{\tau}_{yz}$ . . . . .	90
5.11	Distribuição da tensão $\bar{\tau}_{xz}$ através da espessura do laminado $[0/90/0]$ . . . . .	91
5.12	Distribuição da tensão $\bar{\tau}_{yz}$ através da espessura do laminado $[0/90/0]$ . . . . .	91
5.13	Distribuição das tensões axiais $\bar{\sigma}_x$ e $\bar{\sigma}_y$ . . . . .	92
5.14	Distribuição da tensão cisalhante $\bar{\tau}_{xy}$ . . . . .	92
5.15	Convergência da deflexão central da placa com o refino uniforme da malha. . . . .	93
5.16	Placa ortotrópica submetida ao cisalhamento. . . . .	93
5.17	Tensões e direções principais. . . . .	94
5.18	Tensão efetiva de Tsai-Hill: (a) config. inicial; (b) config. otimizada. . . . .	94
5.19	Processo de otimização em dois níveis de uma placa submetida ao esforço de cisalhamento. . . . .	95
5.20	Placa ortotrópica sob flexão. . . . .	95
5.21	Distribuição da tensão $\sigma_x$ através da espessura da placa: (a) config. inicial; (b) config. otimizada. . . . .	97
5.22	Distribuição da tensão efetiva $\sigma_{TH}$ através da espessura da placa: (a) config. inicial; (b) config. otimizada. . . . .	97
5.23	Cilindro com tampa semi esférica. . . . .	98
5.24	Disposição dos grupos materiais. . . . .	98

5.25	Distribuição da tensão efetiva de Tsai-Hill. . . . .	99
5.26	Distribuição da tensão equivalente de Tsai-Hill, config. otimizada. . . . .	100
5.27	Deformação do vaso de pressão otimizado. . . . .	100
5.28	Ampliação da deformação na junção cilindro / tampa. . . . .	101
5.29	Laminado quadrado submetido à um carregamento bi-axial de tração. . . . .	101

# Lista de Tabelas

5.1	Propriedades mecânicas dos materiais. . . . .	76
5.2	Condição de contorno. . . . .	77
5.3	Deslocamento do ponto P para malha regular e distorcida sob tração. . . . .	78
5.4	Comparação da deflexão $\bar{w}$ no centro da placa sob flexão. . . . .	80
5.5	Comparação das tensões em uma placa sob flexão. . . . .	81
5.6	Efeito da orientação das fibras na deflexão do centro de uma placa retangular engastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído. . . . .	82
5.7	Diferenças das deflexões no centro da placa ortotrópica. . . . .	83
5.8	Laminado [0/90/90/0] simplesmente apoiada submetida a um carregamento senoidal. . . . .	85
5.9	Deslocamento radial máximo de um cilindro engastado sob pressão interna, (R/h=20). . . . .	87
5.10	Deslocamento radial máximo de um cilindro engastado sob pressão interna, (R/h=100). . . . .	87
5.11	Espessuras ótimas obtidas pelo processo de otimização e pela Teoria Clássica de Viga. . . . .	96
5.12	Espessura inicial dos grupos materiais. . . . .	99
5.13	Espessura final dos grupos materiais. . . . .	99

## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma teoria para análise e otimização de estruturas do tipo casca constituídas de materiais compostos laminados.

O material composto laminado considerado é formado pela sobreposição de várias lâminas ortotrópicas, sendo essas constituídas por fibras unidirecionais envolvidas por resina. As propriedades elásticas de cada lâmina são obtidas a partir das propriedades elásticas de seus constituintes utilizando a regra da mistura. O laminado é modelado através da teoria da lâmina equivalente que considera os deslocamentos e as deformações contínuas através da espessura do laminado.

As estruturas consideradas são do tipo casca de dupla curvatura. A teoria de casca utiliza um campo de deslocamentos de ordem superior fornecido pela Teoria de Kant [1982]. Os deslocamentos são obtidos pelo Método dos Elementos Finitos que emprega um elemento, Lagrangeano, quadrilateral, isoparamétrico, de 9 nós, resultando em 12 graus de liberdade por nó, no sistema global.

A otimização tem o objetivo de minimizar a massa da estrutura obtendo a espessura ótima e orientação ótima das fibras de cada lâmina que forma o laminado. São consideradas restrições que impõem limites à espessura e ao ângulo de orientação das fibras de cada lâmina e às tensões efetivas nos elementos.

São propostos problemas com o objetivo de validar e comprovar a viabilidade do modelo de análise e otimização. Os resultados são apresentados, analisados e comparados, quando possível, com soluções disponíveis na literatura.

## ABSTRACT

The present work presents a theory for the analysis and optimization of shell structures made of laminate composite materials.

The laminate composite material is formed by the superposition of several orthotropic layers, each constituted by unidirectional fibers involved by resin. The elastic properties of each layer are obtained from the elastic properties of each constituent by the use of the mixture rule. The laminate is modeled through the theory of the equivalent layer which considers continuous displacements and deformations through the thickness of the laminate.

The structures considered are of the type of shells of double curvature. The shell theory uses a field of displacements of higher order proposed by Kant [1982]. The displacement field is determined by the Finite Element Method and uses a nine node Lagrangean element, resulting in 12 degrees of freedom per node.

The optimization objective is minimize the weight of the structure obtaining both the optimum thickness and fiber orientation for each layer that forms the laminate. The problem considers restrictions that impose limits to the thickness and to the angles of orientation of the fibers of each layer and the effective stresses in the baricenter of each element.

Some examples are solved with the objective to validate and to check the viability of the analysis model and of optimization. The results are presented, analyzed and compared, when possible, with available literature solutions.

# Capítulo 1

## Introdução

A utilização de materiais compostos laminados tem tido um incremento assinalável nos últimos anos, constituindo cada vez mais uma alternativa aos materiais clássicos, o que se deve essencialmente às necessidades de se obter um componente estrutural de alta resistência e com um baixo peso. Além disso, o grande número de variáveis de projeto, tais como orientação de fibras, sequência de empilhamento das lâminas e tipo de fibra e de resina, possibilita uma melhor otimização no projeto de estruturas constituídas dessa classe de materiais. As características mecânicas e físicas que apresentam os compostos é que os tornam extremamente atrativos para uma grande variedade de aplicações industriais, na indústria naval, aeronáutica, aeroespacial e de defesa.

A análise de estruturas do tipo casca compreende uma vasta área de projetos de componentes mecânicos. Como exemplos de estruturas que podem ser modeladas usando a teoria de casca, pode-se citar os vasos sob pressão, tanques de armazenamento, estruturas de reatores nucleares e de satélites. As teorias clássicas de cascas finas tem apresentado resultados com enorme discrepância quando utilizadas na análise de placas e cascas laminadas de material composto, onde a razão entre os módulos de elasticidade,  $E_x$  e  $E_y$ , é muito grande. Isto mostra que essas teorias são inadequadas para modelagem destes problemas, Pandya e Kant [1988]. Surge assim, a necessidade de teorias que sejam mais adequadas, implicando em uma melhora da precisão e com uma representação física mais próxima da realidade.

Ao contrário dos materiais isotrópicos, os compostos apresentam uma rigidez relativamente baixa fora do plano da lâmina quando comparada com a rigidez no plano. Isso pode



resultar em uma deformação cisalhante transversal e uma deformação normal transversal bastante considerável, podendo assim influenciar significativamente a resposta e o mecanismo de falha da estrutura formada por lâminas anisotrópicas. Teorias de primeira ordem desprezam essas deformações pondo em risco a qualidade da análise mecânica da estrutura. Um dos fatores importantes em se optar pela utilização de teorias de ordem superior é que além de considerar as deformações transversais elas eliminam as inconsistências físicas que surgem com a utilização das teorias de primeira ordem. Assim diversas formulações envolvendo teorias de ordem superior foram desenvolvidas.

Em projeto de estruturas constituídas de materiais compostos laminados, um dos fatores que dificulta o uso destes materiais é o seu alto preço quando comparado com os materiais clássicos utilizados. Desta forma, a otimização de estruturas feitas de materiais compostos tem uma grande importância em projetos, pois o alto custo da matéria-prima, principalmente das fibras de alta resistência e alto módulo de elasticidade, muitas vezes inviabiliza o projeto forçando o engenheiro a utilizar os materiais usuais, como o aço por exemplo. Assim, o desenvolvimento de procedimentos para a análise e determinação da sensibilidade da resposta da estrutura, associados com técnicas de programação matemática, possibilitam a otimização destes materiais, tornando-os mais competitivos quando comparados com os materiais clássicos empregados.

A seguir é apresentada uma descrição do escopo do trabalho e uma revisão bibliográfica.

## 1.1 Apresentação do Trabalho

Nessa seção, são apresentados os assuntos discutidos em cada um dos 6 capítulos dessa dissertação.

No Capítulo 1, são apresentados alguns comentários introdutórios, bem como uma revisão bibliográfica acerca do tema que é desenvolvido nesta dissertação, com o objetivo de mostrar sua importância no contexto das pesquisas.

No Capítulo 2 é estudado o comportamento dos materiais compostos laminados. É apresentado uma análise micromecânica e macromecânica do composto, bem como alguns

dos seus principais critérios de falhas.

Já no Capítulo 3 são apresentadas as relações relativas a geometria da casca necessárias ao desenvolvimento do trabalho. A teoria de casca baseada nas hipóteses cinemáticas utilizando o campo de deslocamento de ordem superior, dado pela Teoria de Kant [1982], é desenvolvida e mostrada também nesse capítulo.

No Capítulo 4 é apresentado o problema de otimização e formulado um processo para resolução do mesmo. É também apresentado uma breve descrição dos algoritmos utilizados.

Por sua vez, o Capítulo 5 apresenta os resultados das análises e otimizações dos problemas propostos e as comparações com os resultados obtidos pela literatura.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para a continuidade do mesmo.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Na literatura existem muitos livros e artigos sobre materiais compostos. Aqui são apresentadas as referências sobre materiais compostos utilizadas nesse trabalho.

Vinson e Sierakowski [1987] apresentaram no livro “The Behavior of Structures Composed of Composite Materials” ferramentas capazes de modelar o comportamento micromecânico dos materiais ortotrópicos. A determinação das propriedades mecânicas do material composto é baseada principalmente nas propriedades dos seus constituintes e suas frações volumétricas. São discutidas algumas técnicas como: aproximação analítica exata, regra da mistura, fórmulas empíricas e aproximação de Halpin-Tsai. Nesse livro também são apresentados os principais critérios de falha para materiais compostos laminados. Um estudo mais aprofundado sobre a micromecânica dos materiais compostos pode ser encontrado no livro “Mechanics of Composite Materials” de Christensen onde também são avaliados problemas de inclusões esféricas e sistemas laminares.

São indicados, para um estudo mais geral de análise de materiais compostos, os livros escritos pelos autores Calcote [1969] e Jones [1975] e a apostila de Mendonça [1997].

Dois artigos sobre homogenização das propriedades mecânicas de materiais compostos

são referenciados a seguir.

Pecknold e Rahman [1994] descreveram um modelo para análise estrutural 3D de laminados compostos espessos que utiliza um conceito de homogenização baseado no Método dos Elementos Finitos. O modelo material consiste em dois módulos: (1) em um nível inferior, um micro modelo de uma lâmina unidirecional contendo informações constitutivas 3D básicas para os constituintes fibras e matriz, incluindo o processo de dano e critério de falha; e (2) em um nível superior, um modelo de uma sublâmina que impõe a continuidade das tensões fora do plano ( $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ) na interface das lâminas e que determina as deformações e tensões 3D homogenizadas.

Kolpakov e Kolpakova [1995] apresentaram uma formulação para análise de projetos de compostos laminados possuindo características homogeneizadas especificadas. A formulação proposta, a partir das propriedades dos seus constituintes, garante ao material composto as propriedades requeridas no projeto. Isso é obtido aplicando o método de homogenização e obtendo as relações entre as microcaracterísticas do composto e as propriedades (macroscópicas) homogenizadas.

A seguir, são referenciados alguns trabalhos desenvolvidos utilizando diferentes teorias de placas e cascas.

A Teoria Clássica de Laminação (Classical Lamination Theory - CLT), baseada nas hipóteses de Kirchhoff-Love, não considera a deformação cisalhante transversal. Esta teoria considera que a seção normal à superfície média permanece reta, inextensível e normal à superfície média quando deformada, desprezando assim, os efeitos do cisalhamento transversal.

Várias teorias que levam em conta o cisalhamento transversal estão disponíveis na literatura. Nestas, estão incluídas as teorias de deformação cisalhante de primeira ordem (First-order Shear Deformation Theory - FSDT) e as teorias de deformação cisalhante de ordem superior (Higher-order Shear Deformation Theory - HSDT).

Teorias de cascas de ordem superior tem sido pesquisadas ao longo destes últimos anos com o objetivo de representar com maior exatidão os efeitos das deformações cisalhantes transversais. Elas tem sido propostas, geralmente, tomando-se um número maior de termos

na expansão, em série de potências, do campo de deslocamentos em termos da coordenada da espessura,  $z$ , do que o utilizado pela teoria clássica e de primeira ordem.

Uns dos primeiros pesquisadores a se preocuparem com as deformações cisalhantes transversais em materiais anisotrópicos foram Whitney e Pagano [1970]. Eles pesquisaram uma teoria de flexão para laminados anisotrópicos desenvolvidos por Yang, Norris e Stavsky. A teoria inclui a deformação cisalhante e a inércia de rotação da mesma forma que a Teoria de Mindlin para placas isotrópicos. As equações de estado revelam para placas laminadas sem simetria o mesmo fenômeno de acoplamento flexão-tração que o encontrado na Teoria Clássica de Laminação, CLT.

Kant [1982] apresentou uma teoria de ordem superior que proporcionasse soluções refinadas e mais realistas para os casos de placas laminadas compostas, placas semi-espessas e distribuição de tensões próximas à carregamentos concentrados. Essa teoria incorpora um campo de deslocamentos de ordem superior com uma variação quadrática das deformações cisalhantes transversais através da espessura da placa e uma variação linear da deformação normal transversal. Essa primeira incorporação torna-se completamente desnecessário a introdução do fator de correção artificial para corrigir a distribuição das tensões cisalhantes. Além disso a teoria considera a Lei de Hooke tridimensional. Essa teoria foi escolhida para ser utilizada nesse trabalho pois, entre as teorias de ordem superior, é uma das mais simples e obtém bons resultados.

<sup>1</sup>Reddy [1984] propôs uma teoria de ordem superior para placas laminadas constituídas de materiais compostos. Ele apresentou uma simples teoria de ordem superior contendo as mesmas dependências desconhecidas que a teoria de deformação cisalhante de primeira ordem apresentada por Whitney e Pagano [1970]. A teoria proposta não só considera a deformação cisalhante transversal mas também uma distribuição parabólica para a deformação cisalhante transversal através da espessura da lâmina. Isso torna-se desnecessário a utilização do coeficiente de correção cisalhante para determinação da tensão cisalhante.

<sup>2</sup>Reddy [1984] apresentou uma teoria de deformação cisalhante de ordem superior para análise não linear de placas utilizando o campo de deslocamento de Karman. A teoria

considera uma variação cúbica completa dos deslocamentos no plano através da espessura da placa, sendo o deslocamento normal transversal, constante. Na formulação é imposto que as tensões cisalhantes transversais sejam nulas na face inferior e superior da placa.

Pandya e Kant [1988] apresentaram uma formulação de elementos finitos para a flexão de placas ortotrópicas baseada no modelo de deslocamentos de ordem superior e um estado de tensão e deformação tridimensional. A teoria de ordem superior proposta incorpora uma variação linear da deformação/tensão normal transversal e uma variação parabólica das deformações cisalhantes transversais através da espessura da placa. É desenvolvido um elemento quadrilateral de nove nós da família dos elementos Lagrangeanos isoparamétricos, cuja função base é de Classe  $C^0$ .

Wilt et al [1990] apresentaram um elemento finito de quatro nós para análise de cascas laminadas de materiais compostos baseado na Teoria Clássica de Laminação assumindo as suposições de Love-Kirchhoff. O elemento desenvolvido é baseado em um princípio variacional misto generalizado com deslocamentos assumidos independentemente. O campo de deformações é independente do número de lâminas utilizando o modelo de lâmina equivalente. Para eliminar o problema de travamento (locking) foram adicionados graus de liberdade cinemáticos referentes a uma função bolha.

Tessler e Saether [1991] propuseram uma teoria de ordem superior variacional envolvendo todas as componentes transversais de deformação e tensão para a análise de placas laminadas de materiais compostos. É apresentada uma metodologia derivada da elasticidade 3D, que utiliza um elemento de finito de 3 nós. Para definir o campo de deslocamentos transversal é introduzido uma função peso  $w = \frac{3}{4h} \int_{-h}^h u_z (1 - \xi^2) dz$ , onde  $\xi = \frac{z}{h} \in [-1, 1]$  dando uma forma parabólica especial à distribuição.

Kant e Kommineni [1992] apresentaram uma formulação de elementos finitos de classe  $C^0$  utilizando uma teoria de deformação cisalhante de ordem superior para análise geometricamente linear e não linear de compostos laminados e placas sanduíche. A teoria de ordem superior adotada incorpora uma expansão completa de 3<sup>o</sup> ordem da coordenada da espessura para descrever os deslocamentos de membrana e um deslocamento constante na direção

normal transversal à superfície do laminado.

Liangxin e Zhiyu [1992] propuseram uma teoria de ordem superior que agrega o efeito da deformação cisalhante transversal ao campo de deslocamentos baseado na Teoria Clássica de Laminação. A teoria introduz uma função  $f(z) = z \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right]$  no campo de deslocamentos para representar a distribuição de tensão cisalhante parabólica ao longo da espessura da placa. Essa função é determinada considerando que as tensões transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  na face inferior e superior da placa sejam nulas.

Sivakumaran et al [1994] fizeram um estudo racionando três diferentes teorias de ordem superior que consideram deformações cisalhantes transversais e deformação normal transversal com o objetivo de avaliar a performance de cada uma. São analisados laminados compostos reforçados por fibras contínuas através do Método dos Elementos Finitos, utilizando um elemento de nove nós. As três diferentes funções de deslocamentos são obtidas através da expansão em série de potências em termos da coordenada da espessura resultando em três, cinco e seis graus de liberdade por nó onde são desconsiderados os deslocamentos de membrana. Os modelos de deslocamentos de ordem superior considerados assumem um campo de deformação cúbico no plano, um campo de deformação cisalhante transversal parabólico e um campo linear de deformação normal transversal através da espessura do laminado.

Kant e Kommineni [1994] apresentaram uma formulação, semelhante à apresentada por eles em 1992, para análise transiente, geometricamente não linear de compostos laminados e cascas sanduíche.

Yong e Cho [1995] apresentaram uma formulação de elementos finitos para placas e cascas de compostos ortotrópicos usando o método de tensão híbrida parcial de ordem superior. As equações de estado do laminado são obtidas do princípio de Hellinger-Reissner. As componentes de tensão flexural são separadas das componentes de tensão cisalhante transversal de maneira que a continuidade da tensão interlaminar é imposta somente nas tensões cisalhantes transversais. O método de tensão híbrida parcial satisfaz exatamente a condição de continuidade das tensões cisalhantes transversais na interface das lâminas e evita

a complexidade da formulação que o método de tensão híbrida normal possui.

Xiao-Ping [1996] desenvolveu uma teoria de deformação cisalhante de ordem superior para cascas laminadas. Ele usou a aproximação geométrica de primeira ordem de Love e simplificações propostas por Donnell. A teoria contém as mesmas incógnitas e a mesma ordem de equações de estado associadas que a teoria de deformação cisalhante de primeira ordem. Mas a teoria conta com uma distribuição parabólica das tensões cisalhantes transversais através da espessura da casca e uma continuidade das mesmas na interface de cada lâmina. Essa teoria obtém soluções mais precisas que algumas teorias de ordem superior e ainda torna-se desnecessário a introdução do fator de correção cisalhante.

Cho e Kim [1996] desenvolveram um método de pós processamento para um elemento de Mindlin isoparamétrico de quatro nós para uma placa laminada constituída de material composto. O método utiliza somente a solução da teoria de deformação cisalhante de primeira ordem e obtém resultados eficientes. Para obter as deformações e as tensões melhoradas é utilizado uma rotina de pós processamento que emprega o campo de deslocamentos da teoria de placa de ordem superior. Igualando a energia de deformação cisalhante transversal, as variáveis que representam os graus de liberdade de rotação da teoria de primeira ordem podem ser expressas como as da teoria de ordem superior.

Soares e Correia [1992] apresentaram um modelo numérico para a otimização de projetos de estruturas laminadas do tipo placa-casca constituídas em materiais compostos. O modelo é baseado num elemento triangular, do tipo placa-casca, com 18 graus de liberdade formulado segundo a teoria discreta de Kirchhoff para a componente de flexão. As sensibilidades ou gradientes em ordem das variáveis de projeto são obtidas recorrendo a uma formulação semi-analítica. O problema de otimização tem o objetivo de obter os ângulos de orientação das fibras e as espessuras das lâminas que minimizam o peso da estrutura com restrições que impõem limites aos deslocamentos generalizados, tensões e frequência naturais do sistema. Conforme os autores, segundo uma pesquisa bibliográfica realizada por Miravete, verifica-se que a grande maioria dos trabalhos de otimização em materiais compostos referem-se a estruturas planas e como tal, há necessidade do desenvolvimento de

modelos discretos eficientes para a obtenção da sensibilidade para estruturas complexas do tipo casca, considerando geometrias e carregamentos arbitrários.

O estudo necessário para modelagem das estruturas do tipo casca foi baseado principalmente nos estudos feitos por Batoz e Dhatt [1992]. Para a implementação do Método dos Elementos Finitos foram utilizados resultados apresentados por Dhatt e Touzot [1984] e Hughes [1987].

Foram pesquisadas várias técnicas e métodos de otimização nos livros escritos por Arora [1989], Bazaraa et al [1993], Chong e Zak [1996], Haftka e Kamat [1985], McCormick [1983] com a finalidade de se obter um processo de otimização robusto, rápido e confiável. Para a resolução do processo de otimização sujeito à restrições foi escolhido o Método do Lagrangeano Aumentado por apresentar uma boa eficiência. Um estudo mais aprofundado desse método foi feito utilizando como base o livro do Bertsekas [1982].

Existem vários métodos capazes de determinar a sensibilidade da resposta da estrutura com relação às variáveis de projeto. Esses podem ser analíticos, semi-analíticos ou numéricos. Optou-se por um método analítico, o Método Direto, que foi estudado com mais rigor nos trabalhos apresentados por Adelman [1992] e Feijóo e Taroco [1993].



# Capítulo 2

## Material Composto

### 2.1 Introdução

A palavra composto significa “constituição de duas ou mais partes distintas”. Portanto um material constituído macroscopicamente por dois ou mais materiais ou fases distintas pode ser considerado como material composto. Isto é considerado somente quando as propriedades físicas dos constituintes forem significativamente diferentes. O objetivo dessa combinação de materiais é oferecer à estrutura propriedades mecânicas que os materiais constituintes, atuando sozinho, não são capazes de oferecer.

A definição de materiais compostos abrange uma faixa muito larga de materiais. O trabalho proposto é orientado ao estudo de materiais compostos laminados constituídos por fibras e resinas.

As estruturas laminadas do tipo casca, fabricadas em material composto, consistem na sobreposição de várias lâminas. As lâminas são formadas por fibras unidirecionais que são envolvidas por resina. Estas fibras podem estar orientadas diferentemente e tem a finalidade de oferecer resistência mecânica necessária à estrutura, já a matriz garante sua rigidez. A possibilidade do componente possuir resistência diferente em determinadas direções é uma das principais vantagens que os materiais compostos laminados apresentam sobre os materiais isotrópicos. Com isso, pode-se projetar um componente com resistência elevada somente nas direções das solicitações.

Considerando que o material composto é formado por constituintes distintos, as propriedades equivalentes de cada lâmina são determinadas a partir das propriedades elásticas

de seus constituintes. Esse modelo considera o material composto laminar como sendo um material homogêneo porém anisotrópico. Por causa das diferentes propriedades materiais das diferentes lâminas, o laminado resultante é modelado através da teoria da lâmina equivalente. Essa teoria é caracterizada por considerar uma adesão perfeita na interface das lâminas. Isto é, considera os deslocamentos e as deformações contínuas através da espessura do laminado.

Na análise de tensões de materiais compostos, divide-se o estudo em duas áreas:

- i- Micromecânica: estuda as propriedades mecânicas da lâmina.
- ii- Macromecânica: estuda o comportamento mecânico do laminado.

## 2.2 Micromecânica

### 2.2.1 Introdução

O objetivo da micromecânica é determinar, para uma dada camada de material composto laminar reforçado por fibras, a equação constitutiva referente ao material homogêneo de camada equivalente.

No estudo da micromecânica, as seguintes hipóteses são feitas:

- i- A lâmina é macroscopicamente homogênea e ortotrópica.
- ii- A lâmina é elástica linear e livre de qualquer tensão interna ou térmica.
- iii- As fibras são uniformes nas propriedades e diâmetros, são contínuas e paralelas, bem como regularmente espaçadas.
- iv- A matriz é considerada homogênea, isotrópica e de comportamento elástico linear.
- v- Existe perfeita adesão entre matriz e fibra e não existem vazios.

### 2.2.2 Regra da Mistura

Um importante fator na determinação das propriedades elásticas dos compostos é o conhecimento das proporções dos materiais constituintes, fibras e matriz, usadas nas re-

spectivas lâminas do laminado. Estas proporções podem ser dadas em termos das frações volumétricas ou das frações mássicas.

Considerando que  $V$ ,  $M$  e  $\rho$  sejam volume, massa e densidade, respectivamente, onde os subscritos  $c$ ,  $f$  e  $m$  designam, respectivamente, composto, fibra e matriz. A massa total do composto é dada por:

$$M_c = M_f + M_m, \quad (2.1)$$

e o volume por:

$$V_c = V_f + V_m. \quad (2.2)$$

Então pode-se reescrever a Eq.(2.1) e a Eq.(2.2) como segue:

$$1 = \frac{M_f}{M_c} + \frac{M_m}{M_c}, \quad (2.3)$$

$$1 = \frac{V_f}{V_c} + \frac{V_m}{V_c}. \quad (2.4)$$

Pode-se definir a fração de massa,  $m$ , como sendo:

$$\begin{aligned} m_f &= \frac{M_f}{M_c}, \\ m_m &= \frac{M_m}{M_c}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

e a fração de volume,  $\vartheta$ , como:

$$\begin{aligned} \vartheta_f &= \frac{V_f}{V_c}, \\ \vartheta_m &= \frac{V_m}{V_c}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Definidas as frações de massa e de volume, pode-se agora determinar a densidade do composto. Para isto utiliza-se da relação:

$$\rho_c = \frac{M_c}{V_c} = \frac{M_f + M_m}{V_c} = \frac{\rho_f V_f + \rho_m V_m}{V_c}, \quad (2.7)$$

resultando em:

$$\rho_c = \rho_f \vartheta_f + \rho_m \vartheta_m. \quad (2.8)$$

Do ponto de vista experimental, a fração de massa é mais fácil de se obter do que a correspondente fração de volume dos elementos constituintes. Assim é conveniente converter

a fração mássica em volumétrica para tornar mais simples as relações utilizadas nas propriedades elásticas das lâminas. Esta relação entre fração de massa e a fração de volume é obtida por:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{V_f}{V_c} = \frac{\rho_f M_f}{\rho_c M_c} = \frac{\rho_f}{\rho_c} m_f, \\ v_m &= \frac{V_m}{V_c} = \frac{\rho_m M_m}{\rho_c M_c} = \frac{\rho_m}{\rho_c} m_m. \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Propriedades Elásticas

As propriedades elásticas de uma lâmina podem ser determinada através de diversas formas. O método mais preciso para determinar essas propriedades é através de ensaios mecânicos. Outros métodos, menos precisos, utilizam-se da regra da mistura e de fórmulas empíricas. Neste trabalho é apresentado o método que emprega a regra da mistura.

Uma lâmina unidirecional de material composto pode ser representada como mostrado na Fig.(2.1). A direção das fibras define as três direções principais da lâmina, que são as direções onde serão referidas todas as propriedades, tensões e deformações para uma lâmina unidirecional. Como pode-se observar, é de se esperar diferentes propriedades mecânicas nas direções 1, 2 e 3 respectivamente, onde os eixos representam as seguintes direções:

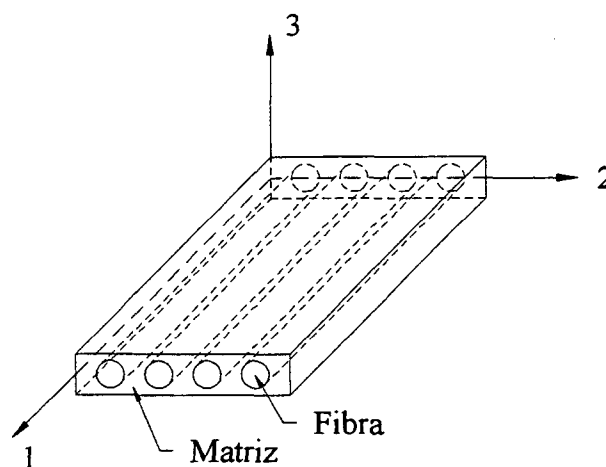


Figura 2.1: Lâmina unidirecional em material composto.

eixo 1: direção longitudinal às fibras, comprimento da lâmina;

eixo 2: direção transversal às fibras, largura da lâmina;

eixo 3: direção transversal às fibras, espessura da lâmina.

Considerando conhecidas as propriedades mecânicas dos constituintes da lâmina, fibra e matriz, utiliza-se para a determinação das propriedades da lâmina as definições de frações de volume e algumas relações básicas da resistência dos materiais. Para a obtenção das propriedades da lâmina é considerado que a mesma é formada por fibras unidirecionais e conseqüentemente a direção 3 é equivalente à direção 2. Com esta observação o estudo das propriedades é feita pelo estudo de uma lâmina 2D como representado pela Fig.(2.2).

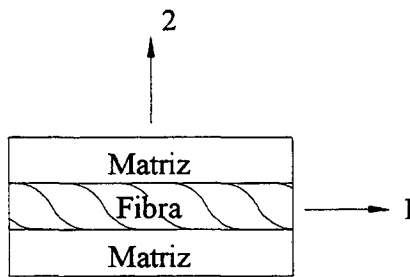


Figura 2.2: Representação 2D da lâmina unidirecional.

### 2.2.4 Módulo de Elasticidade Longitudinal de uma Lâmina

O módulo de elasticidade longitudinal de uma lâmina unidirecional pode ser determinado através do estudo da lâmina sujeita somente a um carregamento na direção 1. A Fig.(2.3) representa esquematicamente a situação proposta.

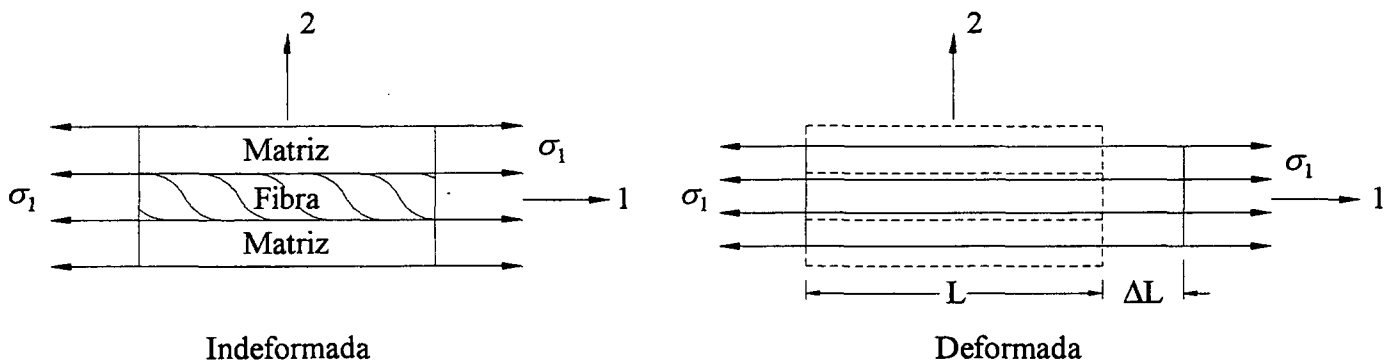


Figura 2.3: Lâmina unidirecional sujeita à tração longitudinal.

Sendo  $\epsilon_1$  a deformação longitudinal de uma lâmina unidirecional, tem-se que as defor-

mações no composto, nas fibras e na matriz são iguais, com isso:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m. \quad (2.10)$$

A tensão de tração na direção longitudinal,  $\sigma_1$ , do composto é dada por:

$$\sigma_1 = \sigma_f \vartheta_f + \sigma_m \vartheta_m. \quad (2.11)$$

Mas  $\sigma = E \varepsilon$ , logo o módulo de elasticidade na direção longitudinal é expresso por:

$$E_1 = E_f \vartheta_f + E_m \vartheta_m. \quad (2.12)$$

Como  $E_f \gg E_m$  e em geral  $\vartheta_f \simeq 0.6$ , tem-se que o módulo do composto na direção longitudinal será predominado pelo módulo da fibra. Para uma situação prática pode-se fazer um pré cálculo considerando:

$$E_1 \cong E_f \vartheta_f. \quad (2.13)$$

Um simples estudo, utilizando as Eqs.(2.10) e (2.11), é de grande importância para a escolha correta das propriedades da resina termofixa. A lâmina representada pela Fig.(2.3) é analisada considerando duas resinas com propriedades diferentes. A relação tensão-deformação da fibra e das duas matrizes são mostradas pela Fig.(2.4).

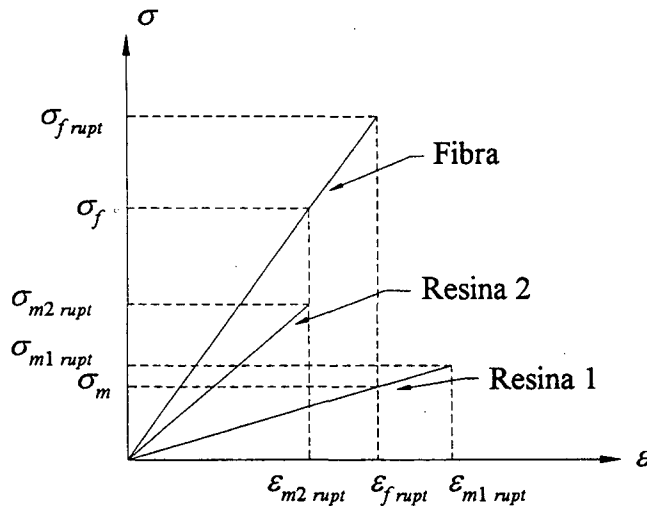


Figura 2.4: Curva Tensão x Deformação para fibra e resinas.

No caso da tensão de ruptura do composto,  $\sigma_{cruptura}$ , pode-se considerar dois casos:

Caso 1:

Optando-se por utilizar a *resina 1* para compor a matriz que possui uma deformação de ruptura maior que a da fibra, ou seja  $\varepsilon_{m1ruptura} > \varepsilon_{fruptura}$ , a falha do material composto ocorrerá quando  $\varepsilon_c = \varepsilon_{fruptura}$ . Conseqüentemente, a tensão máxima que o composto poderá suportar será obtida por  $\sigma_{cruptura} = \sigma_{fruptura} \vartheta_f + \sigma_m \vartheta_m$ , onde  $\sigma_m$  é a tensão na matriz correspondente à deformação máxima da fibra. Então para este caso, pode-se concluir que a fibra será utilizada com sua capacidade máxima à resistência à ruptura.

Caso 2:

Outra opção de escolha para compor a matriz é a *resina 2*. Esta, como pode ser observada na Fig.(2.4), possui uma deformação de ruptura menor que a da fibra. Neste caso, como  $\varepsilon_{m2ruptura} < \varepsilon_{fruptura}$  a ruptura ocorrerá primeiro na matriz, com isso as fibras ficarão soltas e perderão a sua eficiência como reforço. Considerando que a falha do material composto ocorrerá quando sua deformação atingir a deformação de ruptura da matriz,  $\varepsilon_c = \varepsilon_{m2ruptura}$ . Logo, tem-se que  $\sigma_{cruptura} = \sigma_f \vartheta_f + \sigma_{m2ruptura} \vartheta_m$ , onde a tensão na fibra,  $\sigma_f$ , é correspondente a deformação máxima da matriz. Conclui-se assim, que para evitar este tipo de falha a estrutura deverá ser menos solicitada e logo a fibra estará sendo subutilizada pois  $\sigma_f < \sigma_{fruptura}$ . Portanto a escolha da matriz deve ser de grande importância a fim de não se tornar um projeto inviável.

### 2.2.5 Módulo de Elasticidade Transversal de uma Lâmina

Neste caso, o módulo de elasticidade transversal de uma lâmina com suas fibras orientadas na direção 1, é determinado pelo modelo de uma lâmina sujeita à apenas um carregamento transversal à fibra,  $\sigma_2$ . A representação do modelo é dado pela Fig.(2.5).

Admite-se que a tensão aplicada no composto é igual na fibra e na matriz, assim:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= \frac{\sigma_2}{E_f} = \frac{\sigma_f}{E_f}, \\ \varepsilon_m &= \frac{\sigma_2}{E_m} = \frac{\sigma_m}{E_m}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

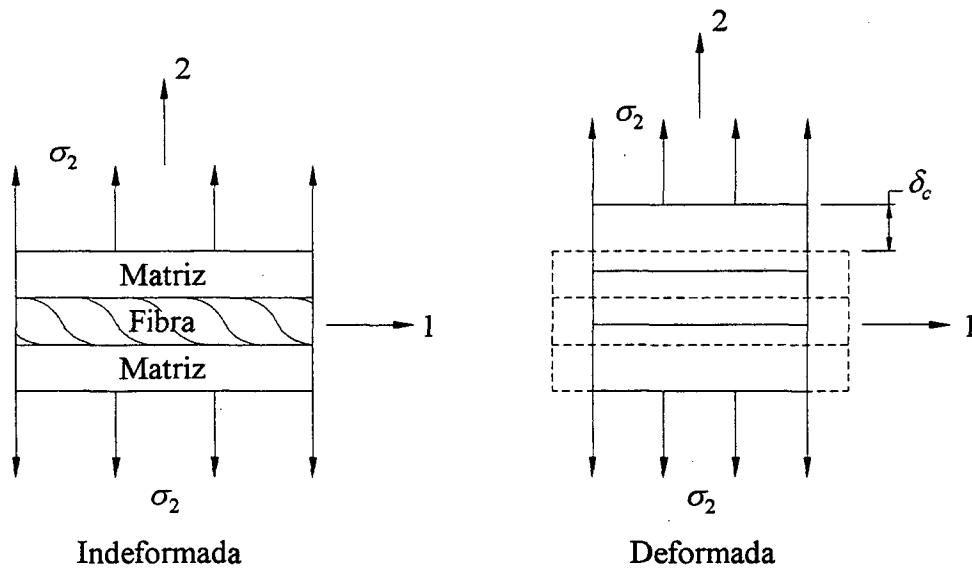


Figura 2.5: Lâmina unidirecional sujeita à tração transversal.

Admite-se também que o deslocamento total do composto,  $\delta_c$ , é a soma dos deslocamentos transversais da fibra, e da matriz, assim:

$$\delta_2 = \delta_c = \delta_f + \delta_m, \quad (2.15)$$

ou em termos das deformações:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_c = \varepsilon_f \vartheta_f + \varepsilon_m \vartheta_m.$$

Utilizando a relação tensão-deformação para um material elástico,  $\sigma = E \varepsilon$ , obtem-se a equação que determina o módulo de elasticidade transversal para uma lâmina unidirecional que é dada por:

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f \vartheta_m + E_m \vartheta_f}. \quad (2.16)$$

Como  $E_m \ll E_f$  e em geral  $\vartheta_f \simeq 0.6$ , então o módulo transversal do composto será predominado pelo módulo da matriz, então:

$$E_2 \simeq \frac{E_m}{\vartheta_m}. \quad (2.17)$$

Assim na direção transversal o módulo do composto depende essencialmente da matriz enquanto na direção longitudinal depende da fibra.



### 2.2.6 Módulo de Cisalhamento de uma Lâmina

O módulo de cisalhamento no plano 1-2 é determinado admitindo-se que a matriz e as fibras estão sujeitas à mesma tensão cisalhante. O modelo adotado é representado pela Fig.(2.6).

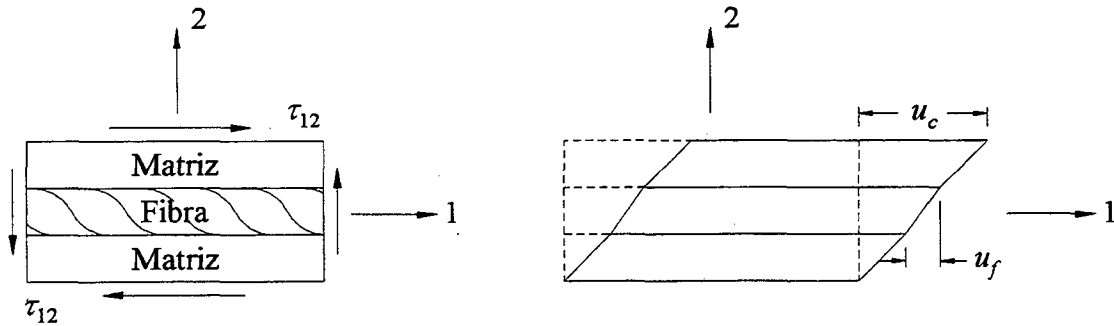


Figura 2.6: Lâmina unidirecional sujeita à tensão cisalhante.

O deslocamento da fibra e da matriz é representado, respectivamente, por  $u_f$  e  $u_m$ . Conseqüentemente o deslocamento total do composto,  $u_c$ , é dado por:

$$u_c = u_f + u_m, \tag{2.18}$$

ou reescrevendo a Eq.(2.18) em termo das deformações, tem-se:

$$\gamma_{12} = \gamma_f \vartheta_f + \gamma_m \vartheta_m. \tag{2.19}$$

Através da relação  $\tau = G \gamma$ , da Eq.(2.19) e admitindo-se que a tensão cisalhante no composto e nos seus constituintes são as mesmas, como proposto anteriormente, o módulo de cisalhamento,  $G_{12}$ , para o composto é dado por:

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f \vartheta_m + G_m \vartheta_f}. \tag{2.20}$$

Como  $G_f \gg G_m$  e em geral  $\vartheta_f \simeq 0.6$ , temos então:

$$G_{12} \cong \frac{G_m}{\vartheta_m}, \tag{2.21}$$

isto é, as propriedades de cisalhamento no plano 1-2, são ditadas pela matriz.

### 2.2.7 Coeficiente de Poisson de uma Lâmina

Resta-nos agora a determinação do coeficiente de Poisson. O coeficiente de Poisson  $\nu_{12}$  é definido pelas relações das deformações nos eixos 1 e 2, conseqüentes da aplicação de um carregamento na direção 1. Ou seja:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.22)$$

Para o caso quando há tração na direção longitudinal, a contração transversal total é dada por:

$$\delta_2 = \delta_f + \delta_m, \quad (2.23)$$

ou reescrevendo em termo das deformação:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{f2} \vartheta_f + \varepsilon_{m2} \vartheta_m. \quad (2.24)$$

Como visto anteriormente pela Eq.(2.10) a deformação longitudinal das fibras e da matriz são iguais ao do composto. Nesta etapa, utilizando a definição do coeficiente de Poisson, obtém-se:

$$\nu_{12} = \nu_f \vartheta_f + \nu_m \vartheta_m, \quad (2.25)$$

onde  $\nu_f$  e  $\nu_m$  são os coeficientes de Poisson da fibra e matriz, respectivamente.

Os coeficientes de Poisson,  $\nu_{12}$  e  $\nu_{21}$ , não são independentes dos módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$  e portanto existe uma relação. A Eq.(2.27) representa esta dependência. Assim o coeficiente de Poisson,  $\nu_{21}$ , que relaciona a deformação longitudinal, 1, com a deformação transversal, 2, quando se aplica um carregamento na direção 2 pode ser obtido como se segue:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}. \quad (2.26)$$

Esta dependência, também pode ser aplicada quando se relaciona às demais direções principais de uma lâmina unidirecional. Podem ser obtidas variando  $i = 1..3$  e  $j = 1..3$  para  $i \neq j$  na Eq.(2.27). Assim:

$$\frac{\nu_{ij}}{\nu_{ji}} = \frac{E_i}{E_j}. \quad (2.27)$$

Atribuindo os valores aos índices,  $i$  e  $j$ , resulta-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{12}}{\nu_{21}} &= \frac{E_1}{E_2}, \\ \frac{\nu_{13}}{\nu_{31}} &= \frac{E_1}{E_3}, \\ \frac{\nu_{23}}{\nu_{32}} &= \frac{E_2}{E_3}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

## 2.3 Macromecânica

### 2.3.1 Introdução

Na macromecânica determina-se a equação constitutiva do material composto laminar equivalente. Nesta etapa são consideradas conhecidas as propriedades equivalentes de cada lâmina, e podendo estas estarem orientadas arbitrariamente. Após o devido procedimento, é então determinada a equação constitutiva equivalente do material laminado.

### 2.3.2 Relações Constitutivas para um Material Anisotrópico

Materiais são considerados homogêneos quando suas propriedades não variam ponto a ponto. Se as propriedades materiais variam em função das orientações dos eixos, o material é dito anisotrópico e caso sejam constantes, o material é dito isotrópico.

Um material é considerado idealmente elástico quando o corpo formado por este material recupera completamente a sua forma original depois de removida a carga que causou a sua deformação. Além disso deve existir uma relação um para um entre o estado de tensão e o estado de deformação, para uma dada temperatura.

As equações constitutivas elásticas, geralmente chamadas de lei de Hooke generalizada, relacionam 9 componentes de tensão às 9 componentes de deformação através de 81 componentes constitutivas e podem ser expressas matematicamente por:

$$\sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.29)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor tensão de Cauchy,  $\varepsilon_{kl}$  as componentes do tensor deformação infinitesimal e  $Q_{ijkl}$  as componentes do tensor constitutivo.

O tensor  $Q_{ijkl}$  apresenta certas propriedades de simetria que reduzem para 21 o número total de componentes independentes para materiais que não possuem qualquer eixo de simetria.

A primeira redução nas componentes é obtida considerando simetria no tensor deformação. Por causa desta simetria,  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ , as 81 componentes de  $\mathbf{Q}$  que constituem as 9 equações expressas na Eq.(2.29) são reduzidas à 54 e não existe perda de generalidade ao se assumir simetria de  $Q_{ijkl}$  com relação aos seus dois últimos índices, ou seja:

$$Q_{ijkl} = Q_{ijlk}. \quad (2.30)$$

As componentes são reduzidas, em uma segunda etapa, de 54 para 36 quando se assume uma simetria do tensor constitutivo com relação aos seus dois primeiros índices. Esta simetria é obtida devido a simetria do tensor tensão,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , e portanto:

$$Q_{ijkl} = Q_{jikl}. \quad (2.31)$$

A última redução do número de constantes elásticas deixa o tensor  $\mathbf{Q}$  com o número final de 21 componentes e pode ser somente efetuada através de considerações termodinâmicas. Para isso, assume-se uma função de densidade de energia de deformação representada pela Eq.(2.32),

$$U = U(\varepsilon_{ij}), \quad (2.32)$$

com a propriedade:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.33)$$

Derivando ambos os lados da Eq.(2.33) em relação à  $\varepsilon_{kl}$  e permutando os índices, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left( \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left( \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right), \quad (2.34)$$

ou reescrevendo a Eq.(2.34) de outra forma:

$$Q_{ijkl} = Q_{klij}. \quad (2.35)$$

Portanto o primeiro par de índices do tensor constitutivo pode ser permutado com o segundo par sem que ocorra qualquer mudança de valores. Com isso, reduzindo para 21 componentes independentes.

Como consequência destas reduções pode-se escrever as relações constitutivas na forma matricial:

$$\sigma^1 = Q \varepsilon^1 \tag{2.36}$$

onde o sobrescrito 1 refere-se ao sistema de eixos 123, como mostrado na Fig.(2.1). Expandindo os termos da Eq.(2.36), tem-se:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ & & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ & & & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ & sim. & & & Q_{55} & Q_{56} \\ & & & & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Por causa da sua estrutura macroscópica, muitos materiais possuem simetria nas suas constantes elásticas com relação à certos planos. Isto significa que as suas constantes elásticas não variam quando a direção do eixo perpendicular ao plano de simetria é revertida. Com isso, o número de constantes elásticas diminuem com o incremento do número de planos de simetria.

Os materiais compostos por fibras estão inclusos no grupo de materiais ortotrópicos, que possuem 2 planos de simetria. Devido à estes planos a matriz de relações constitutivas possui menos componentes que para um material anisotrópico sem quaisquer planos de simetria, e então  $Q$  é reduzido à:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & Q_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & Q_{55} & 0 \\ & & & & & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Devido a existência de dois planos ortogonais de simetria existe um terceiro que é mutuamente ortogonal à estes dois. Contudo, este terceiro plano ortogonal de simetria não implica em nenhuma redução nas componentes e a Eq.(2.38) permanece inalterada.

A relação tensão-deformação representada pela Eq.(2.36) pode ser expressa na forma inversa por:

$$\varepsilon^1 = S \sigma^1, \tag{2.39}$$

onde a matriz de flexibilidade,  $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}$ , é definida em função das constantes elásticas como sendo:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Nota-se que, devido aos três planos de simetria existem somente nove constantes elásticas independentes na relação constitutiva de um material ortotrópico que são:

$$E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13} \text{ e } \nu_{23}.$$

Definida a matriz de flexibilidade, a matriz constitutiva  $\mathbf{Q}$  pode ser obtida explicitamente efetuando inversão de  $\mathbf{S}$ . Logo, suas componentes são representadas por:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 \left( 1 - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} \right) / \Delta, \\ Q_{22} &= E_2 \left( 1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} \right) / \Delta, \\ Q_{33} &= E_3 \left( 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} \right) / \Delta, \\ Q_{12} &= (\nu_{12} E_2 + \nu_{13} \nu_{23} E_3) / \Delta, \\ Q_{13} &= E_3 (\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) / \Delta, \\ Q_{23} &= E_3 \left( \nu_{23} + \nu_{12} \nu_{13} \frac{E_2}{E_1} \right) / \Delta, \\ Q_{44} &= G_{12}, \\ Q_{55} &= G_{13}, \\ Q_{66} &= G_{23}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde:

$$\Delta = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} - 2 \nu_{12} \nu_{13} \nu_{23} \frac{E_3}{E_1}. \quad (2.42)$$

### 2.3.3 Relações Constitutivas para uma Lâmina em uma Direção Arbitrária

Como já mencionado, um laminado é obtido através da superposição de lâminas, sendo que cada lâmina pode possuir uma orientação diferente uma das outras. Isto equivale a

dizer que a direção principal de ortotropia da lâmina está rotacionada de um ângulo  $\theta$  da direção do laminado. Entretanto, ao contrário de meios elásticos lineares isotrópicos, onde as propriedades independem da direção analisada, no caso dos materiais ortotrópicos estas propriedades dependem da direção considerada. Assim deve-se conhecer as propriedades de cada lâmina, na direção do laminado, a fim de que se possa determinar a rigidez global do laminado.

Para este efeito, considera-se um laminado, de eixos locais  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , formado por uma lâmina de espessura  $t$ , na direção 3, onde os eixos principais do material são 1, 2 e 3. A rotação  $\theta$  das direções principais de ortotropia do material em relação as direções do laminado são representadas esquematicamente pela Fig.(2.7). Visto que o eixo 3 não sofre nenhuma rotação o modelo adotado pode ser reduzido à  $2D$  e representado pelo plano 1-2.

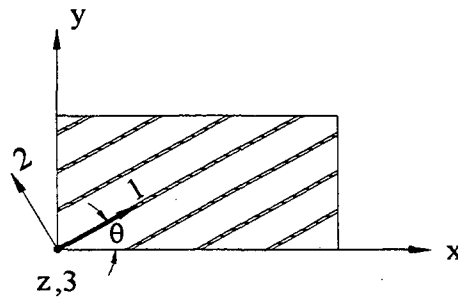


Figura 2.7: Rotação  $\theta$  das direções principais de ortotropia do material.

A relação entre o vetor tensão e o vetor deformação através da matriz constitutiva no sistema de coordenadas local que representa o laminado é expressa por:

$$\sigma^x = \bar{Q} \epsilon^x, \tag{2.43}$$

onde o sobrescrito  $x$  representa o sistema de eixos locais dado por  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A Eq.(2.43) pode ser expandida resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{14} & \bar{Q}_{15} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{24} & \bar{Q}_{25} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{33} & \bar{Q}_{34} & \bar{Q}_{35} & \bar{Q}_{36} \\ & & & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{46} \\ & & & & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{56} \\ & & & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \tag{2.44}$$

A matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  é obtida da rotação da matriz constitutiva nas direções principais de ortotropia  $\mathbf{Q}$ , em função da orientação da lâmina. Para isto, é necessário rotacionar o sistema 123, de um ângulo  $\theta$ , em relação ao sistema  $xyz$ . Esta transformação de sistema pode ser expressa pela matriz de transformação  $\mathbf{R}_t$  que é determinada por:

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

As tensões no sistema  $xyz$  podem ser obtidas através das tensões no sistema 123 através da relação abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{R}_t \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{R}_t^T, \quad (2.46)$$

onde as tensões são representadas pelas matrizes:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sim. & & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \sigma_2 & \tau_{23} \\ sim. & & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Efetuando as operações indicadas na Eq.(2.46), reagrupando os termos das matrizes  $\boldsymbol{\sigma}^x$  e  $\boldsymbol{\sigma}^1$  em forma de vetores e representando  $c = \cos \theta$  e  $s = \sin \theta$ , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ cs & -cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}, \quad (2.48)$$

onde  $\mathbf{T}^{-1}$  é dado por:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ cs & -cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Logo os vetores de tensões,  $\boldsymbol{\sigma}^x$  e  $\boldsymbol{\sigma}^1$ , podem ser transformados pela relação:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^1, \quad (2.50)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}^x, \quad (2.51)$$



onde a matriz  $\mathbf{T}$  é obtida substituindo  $\theta$  por  $-\theta$  na Eq.(2.49), resultando em:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -cs & cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

O vetor de deformação pode ser transformado da mesma forma que o vetor de tensão, desde que se utilize as deformações cisalhantes  $\varepsilon_{ij}$  em vez das  $\gamma_{ij}$ . Então esta transformação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

Na relação constitutiva, apresentada na Eq.(2.44), pode-se notar que as deformações cisalhantes utilizadas são apresentadas como  $\gamma$  e na transformação dos sistemas utiliza-se na forma de  $\varepsilon$ . Lembrando que  $\gamma = 2\varepsilon$ , pode-se construir uma matriz  $\mathbf{R}$ , Mendonça [1997], que transforma somente as deformações cisalhantes  $\varepsilon$  em  $\gamma$ , e vice-versa. Esta matriz é definida por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & sim. & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Utilizando os sobrescritos  $x/2$  e  $1/2$  para indicar que as deformações cisalhantes utilizadas são  $\varepsilon_{ij}^x$  e  $\varepsilon_{ij}^1$ , respectivamente, a Eq.(2.53) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon^{x/2} = \mathbf{T}^{-1} \varepsilon^{1/2}, \quad (2.55)$$

ou da forma inversa por:

$$\varepsilon^{1/2} = \mathbf{T} \varepsilon^{x/2}. \quad (2.56)$$

Então as transformações para as deformações cisalhantes são dadas por:

$$\varepsilon^1 = \mathbf{R} \varepsilon^{1/2}, \quad (2.57)$$

e

$$\epsilon^x = \mathbf{R} \epsilon^{x/2}. \quad (2.58)$$

Com as relações obtidas anteriormente pode-se determinar a matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  em função das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{T}$ . Fazendo sucessivas substituições das Eqs.(2.56), (2.57) e (2.58), a deformação apresentada na relação constitutiva da Eq.(2.36) pode ser transformada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \mathbf{Q} \epsilon^1, \\ \sigma^1 &= \mathbf{Q} \mathbf{R} \epsilon^{1/2}, \\ \sigma^1 &= \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \epsilon^{x/2}, \\ \sigma^1 &= \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} \epsilon^x. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Transformando agora as tensões  $\sigma^1$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \sigma^x &= \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} \epsilon^x, \\ \sigma^x &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} \epsilon^x, \\ \sigma^x &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-T} \epsilon^x. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Esta última equação é obtida pela substituição dada por:

$$\mathbf{T}^{-T} = \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1}, \quad (2.61)$$

que pode ser comprovada efetuando as devidas operações.

Comparando agora a Eq.(2.60) com a Eq.(2.43) pode se concluir que:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-T}. \quad (2.62)$$

onde as componentes da matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  podem ser obtidas na forma explícita como mostradas na Eq.(2.62), resultando em:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= c^4 Q_{11} + 2c^2 s^2 (Q_{12} + 2Q_{44}) + s^4 Q_{22}, \\ \bar{Q}_{12} &= c^4 Q_{12} + c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{44}) + s^4 Q_{12}, \\ \bar{Q}_{13} &= c^2 Q_{13} + s^2 Q_{23}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{14} &= c^3 s (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{44}) + c s^3 (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{44}), \\
\bar{Q}_{22} &= c^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 (Q_{12} + 2Q_{44}) + s^4 Q_{11}, \\
\bar{Q}_{23} &= c^2 Q_{23} + s^2 Q_{13}, \\
\bar{Q}_{24} &= c^3 s (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{44}) + c s^3 (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{44}), \\
\bar{Q}_{33} &= Q_{33}, \\
\bar{Q}_{34} &= c s (Q_{13} - Q_{23}), \\
\bar{Q}_{44} &= c^4 Q_{44} + c^2 s^2 (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{44}) + s^4 Q_{44}, \\
\bar{Q}_{55} &= c^2 Q_{55} + s^2 Q_{66}, \\
\bar{Q}_{56} &= c s (Q_{55} - Q_{66}), \\
\bar{Q}_{66} &= c^2 Q_{66} + s^2 Q_{55}.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

E os termos:

$$\bar{Q}_{15} = \bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{25} = \bar{Q}_{26} = \bar{Q}_{35} = \bar{Q}_{36} = \bar{Q}_{45} = \bar{Q}_{46} = 0. \tag{2.64}$$

## 2.4 Critérios de Falha

Os critérios de ruptura da máxima tensão e máxima deformação não consideram o conjunto de características obtidas a partir dos ensaios de propriedades mecânicas do material (limite de ruptura à tração e à compressão na direção longitudinal e transversal, limite de ruptura ao cisalhamento, etc), Pereira [1998]. Além disso, estes critérios excluem a existência de interações entre as tensões e deformações principais: os mecanismos de ruptura longitudinal, transversal ou em cisalhamento são supostos se produzirem de maneira independente.

Os critérios que permitem interligar os diferentes mecanismos de ruptura, chamados critérios interativos, são uma extensão do critério de Von Mises aplicado aos materiais ortotrópicos. Nesse trabalho é apresentado brevemente os critérios interativos de Tsai-Hill, Hoffman e Tsai-Wu.

### 2.4.1 Critério de Falha de Tsai-Hill

O Critério de Falha de Tsai-Hill surgiu devido a modificação feita por Hill no Critério de Falha de Von Mises que prevê o início de escoamento em materiais dúcteis isotrópicos. As modificações introduzidas tiveram o objetivo de prever o início de escoamento em chapas metálicas que apresentavam um certo grau de anisotropia gerado pelo processo de laminação, Vinson [1987]. A adaptação do critério de Hill para lâminas ortotrópicas foi feita por Tsai e Azzi em 1965, por isso o nome Tsai-Hill.

Para um estado triaxial de tensões, para uma lâmina constituída de material composto, o Critério de Falha de Tsai-Hill considera a ocorrência de uma falha quando:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_1^2}{X_r^2} - \sigma_2 \sigma_3 \left( -\frac{1}{X_r^2} + \frac{1}{Y_r^2} + \frac{1}{Z_r^2} \right) + \frac{\tau_{23}^2}{V_r^2} \\ & + \frac{\sigma_2^2}{Y_r^2} - \sigma_1 \sigma_3 \left( \frac{1}{X_r^2} - \frac{1}{Y_r^2} + \frac{1}{Z_r^2} \right) + \frac{\tau_{13}^2}{U_r^2} \\ & + \frac{\sigma_3^2}{Z_r^2} - \sigma_1 \sigma_2 \left( \frac{1}{X_r^2} + \frac{1}{Y_r^2} - \frac{1}{Z_r^2} \right) + \frac{\tau_{12}^2}{S_r^2} \geq 1, \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde  $X_r$  é a resistência na direção 1,  $Y_r$  na direção 2 e  $Z_r$  na direção 3. Esses limites de resistências são determinados por:

$$\begin{aligned} X_r &= \begin{cases} X_T & \text{se } \sigma_1 \geq 0 \\ X_C & \text{se } \sigma_1 < 0 \end{cases} \\ Y_r &= \begin{cases} Y_T & \text{se } \sigma_2 \geq 0 \\ Y_C & \text{se } \sigma_2 < 0 \end{cases} \\ Z_r &= \begin{cases} Z_T & \text{se } \sigma_3 \geq 0 \\ Z_C & \text{se } \sigma_3 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde os subscritos  $T$  e  $C$  representam, respectivamente, tração e compressão.  $S_r$ ,  $U_r$  e  $V_r$  são as resistências ao cisalhamento no plano, 1-2, 1-3 e 2-3, respectivamente.

### 2.4.2 Critério de Falha de Hoffman

A generalização do Critério de Falha de Tsai-Hill para incorporar o efeito de materiais frágeis foi considerado por Hoffman em 1967. Em termos das componentes de tensão, a falha ocorre quando a seguinte inequação é satisfeita:

$$C_1 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C_2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_3 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 +$$

$$+C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_6\sigma_3 + C_7\tau_{23}^2 + C_8\tau_{13}^2 + C_9\tau_{12}^2 \geq 1. \quad (2.67)$$

Os valores  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$  e  $C_9$  são constantes materiais determinadas em ensaios mecânicos.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} \right], \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X_T X_C} - \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} \right], \\ C_3 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{Z_T Z_C} \right], \\ C_4 &= \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, & C_7 &= \frac{1}{V_r^2}, \\ C_5 &= \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, & C_8 &= \frac{1}{U_r^2}, \\ C_6 &= \frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}, & C_9 &= \frac{1}{S_r^2}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Esta teoria também incorpora a diferença no comportamento dos materiais quando submetidos a tração e a compressão.

### 2.4.3 Critério de Falha de Tsai-Wu

Um critério de falha foi proposto por Tsai e Wu em 1971 para incorporar uma definição mais ampla para a falha, logo requerendo mais constantes materiais. Nesse critério a falha é assumida quando as seguintes inequações são satisfeitas:

$$\begin{aligned} F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j &\geq 1, \\ F_{ii} F_{jj} - F_{ij}^2 &\geq 0, & i, j &= 1..6. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Os termos  $F_i$  para  $i = 1..3$  são relacionados com as resistências ao escoamento de tração e compressão do material. Enquanto seis testes de cisalhamentos, tanto positivo quanto negativo, são requeridos para definir os parâmetros  $F_i$  e  $F_{ii}$  para  $i = 4..6$ .

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, & F_{11} &= \frac{1}{X_T X_C}, \\ F_2 &= \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, & F_{22} &= \frac{1}{Y_T Y_C}, \\ F_3 &= \frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}, & F_{33} &= \frac{1}{Z_T Z_C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{1}{V_r^+} - \frac{1}{V_r^-}, & F_{44} &= \frac{1}{V_r^+ V_r^-}, \\ F_5 &= \frac{1}{U_r^+} - \frac{1}{U_r^-}, & F_{55} &= \frac{1}{U_r^+ U_r^-}, \\ F_6 &= \frac{1}{S_r^+} - \frac{1}{S_r^-}, & F_{66} &= \frac{1}{S_r^+ S_r^-}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

# Capítulo 3

## Teoria de Casca

### 3.1 Introdução

Uma placa é uma estrutura tridimensional com a característica de possuir a dimensão transversal, que representa a espessura da placa, muito menor que as outras dimensões laterais da mesma. Casca é uma estrutura do tipo placa mas que possui pelo menos uma curvatura finita como mostrado na Fig.(3.1). Esta característica, peculiar às placas e cascas, torna possível a aproximação de um problema tridimensional por um bidimensional, podendo-se fazer a descrição de todo o comportamento físico da estrutura em função da superfície de referência da placa ou casca.

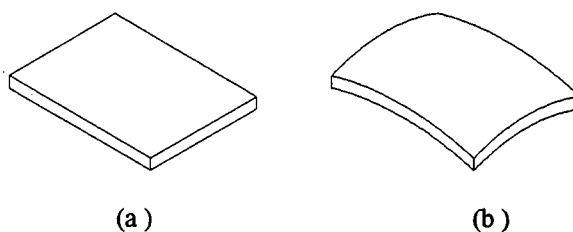


Figura 3.1: Estrutura de placa. Estrutura de casca.

A obtenção e aplicação das teorias de placas tem sido uma das áreas em constante desenvolvimento na análise estrutural. Estas teorias estão sendo constantemente aplicadas à problemas onde exige-se resultados mais precisos. Assim, modelos cada vez mais sofisticados, visando apresentar o comportamento de placas e cascas, têm sido desenvolvidos. Como por exemplo as teorias de ordem superior para descrição do campo de deslocamento apresentadas por Barp [1996], Liangxin e Zhiyu[1992], Reddy [1984], Xiao-Ping [1996]. Em certos casos as

teorias de Kirchhoff e Mindlin-Reissner são inadequadas para descrever o comportamento da estrutura. Nesse trabalho é utilizada a teoria de ordem superior proposta por Kant, [1982].

### 3.2 Descrição da Superfície Média

Na formulação do problema, é utilizado um sistema de coordenadas cartesiano global fixo representados pelos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  que são definidos por três vetores de base ortonormais  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ . Esse sistema é usado para definir os carregamentos, as condições de contorno, as coordenadas e os deslocamentos nodais.

A geometria de uma casca é caracterizada pela superfície média  $A$ , que é considerada como a superfície de referência, e pela espessura  $t$ . A superfície  $A$  é descrita por um par de coordenadas paramétricas denotadas por  $\xi$  e  $\eta$ . A localização de qualquer ponto material genérico  $p$ , pertencente à superfície média da casca na configuração indeformada, é definido por um vetor posição dado por:

$$\mathbf{x}_p(\xi, \eta) = X(\xi, \eta) \mathbf{i} + Y(\xi, \eta) \mathbf{j} + Z(\xi, \eta) \mathbf{k}. \tag{3.1}$$

O vetor posição é representado no sistema cartesiano de referência  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  em função das coordenadas paramétricas  $\xi$  e  $\eta$ , como descrito na Fig.(3.2).

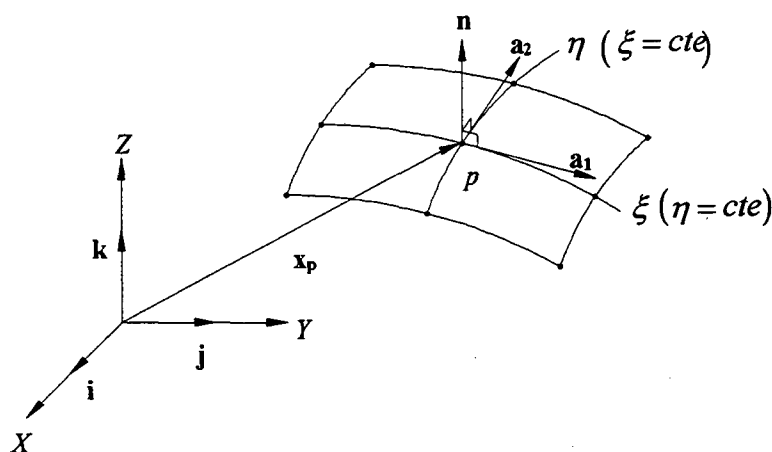


Figura 3.2: Representação paramétrica da superfície média da casca.

Onde:

$p$  - ponto na superfície média  $A$ ;



$\mathbf{x}_p$  - vetor posição do ponto  $p$ ;

$\mathbf{n}$  - vetor normal a superfície média  $A$ ;

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  - base covariante na superfície média  $A$ ;

$\xi, \eta$  - coordenadas paramétricas.

O elemento diferencial  $d\mathbf{x}_p(\xi, \eta)$  em  $p$  é escrito em função de  $d\xi$  e  $d\eta$ :

$$d\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_{p,\xi} d\xi + \mathbf{x}_{p,\eta} d\eta = \mathbf{a}_1 d\xi + \mathbf{a}_2 d\eta, \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  são chamados vetores da base covariante. São tangentes definidas nas linhas coordenadas definidas por  $\xi (\eta = cte)$  e  $\eta (\xi = cte)$  e suas componentes cartesianas são:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \{ x_{,\xi} \quad y_{,\xi} \quad z_{,\xi} \}^T, \\ \mathbf{a}_2 &= \{ x_{,\eta} \quad y_{,\eta} \quad z_{,\eta} \}^T. \end{aligned} \quad (3.3)$$

O comprimento  $ds_p$  do elemento diferencial  $d\mathbf{x}_p$  é tal que:

$$I = (ds_p)^2 = d\mathbf{x}_p \cdot d\mathbf{x}_p = \{ d\xi \quad d\eta \} \mathbf{A} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}. \quad (3.4)$$

$I$  é a primeira forma fundamental de  $\mathbf{A}$ . O valor de  $I$  independe de escolha das coordenadas paramétricas  $\xi$  e  $\eta$ . O tensor métrico  $\mathbf{A}$  na superfície média é determinado por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

$\mathbf{A}$  é simétrico ( $a_{12} = a_{21}$ ) e positivo definido ( $I > 0, \forall d\xi, d\eta \neq 0$ ).

O vetor  $\mathbf{n}$  é definido como sendo um vetor unitário normal ao plano tangente  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  em  $p$ . Logo  $\mathbf{n}$  pode ser determinado por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \quad (3.6)$$

Os vetores  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  e  $\mathbf{n}$  definem uma base paramétrica, dita covariante:

$$\mathbf{F}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \vdots & \mathbf{a}_2 & \vdots & \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Apartir da base covariante é definida uma nova base  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  e  $\mathbf{n}$ , porém ortonormal que é determinada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}, \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Esses vetores formam a base do sistema local, representado pelos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , onde  $z = \zeta$ .

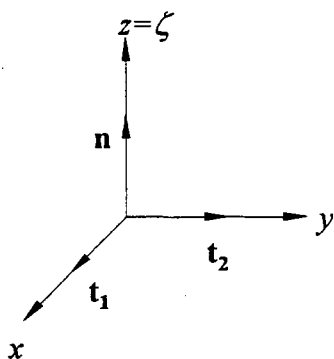


Figura 3.3: Sistema local definido pelas base  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  e  $\mathbf{n}$ .

A representação da base covariante e da base ortonormal no plano perpendicular ao vetor normal  $\mathbf{n}$  é dada pela Fig.(3.4).

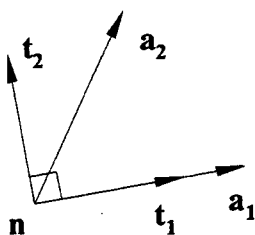


Figura 3.4: Base covariante  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  e base ortonormal  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ .

### 3.3 Curvaturas

Os vetores  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{dx}_p$  variam de um ponto para o outro na superfície  $A$ . A curvatura está associada com a taxa variação de  $\mathbf{n}$  ou de  $\mathbf{dx}_p$ .

A propriedade  $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{x}_p = 0$  conduz à:

$$II = \mathbf{n} \cdot d^2\mathbf{x}_p = \begin{Bmatrix} d\xi & d\eta \end{Bmatrix} [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde  $II$  é a segunda forma fundamental e  $\mathbf{B}$  é representado por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{1,\xi} & \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{1,\eta} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{2,\xi} & \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{2,\eta} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

A simetria de  $\mathbf{B}$  é evidente:  $\mathbf{a}_{2,\xi} = \mathbf{a}_{1,\eta}$ .

Seja  $(C)$  uma curva situada na superfície  $A$  e  $s_p$  o comprimento do arco  $d\mathbf{x}_p = \mathbf{l} \cdot ds_p$ , onde  $d\mathbf{x}_p$  é definido pela Eq.(3.2) e  $\mathbf{l}$  é o vetor unitário tangente à  $(C)$ . A curvatura normal  $\rho$  da curva  $(C)$  é definida em  $p$  por:

$$\begin{aligned} \rho &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_{,s_p} = -\mathbf{n}_{,s_p} \cdot \mathbf{l}, \\ \rho &= \frac{1}{R} = \frac{II}{I}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$R$  é o raio de curvatura em  $(C)$ . Os raios de curvatura das curvas paramétricas  $\xi (\eta = cte)$  e  $\eta (\xi = cte)$  são representados respectivamente por  $R_\xi$  e  $R_\eta$ , e mostrado pela Fig.(3.5).

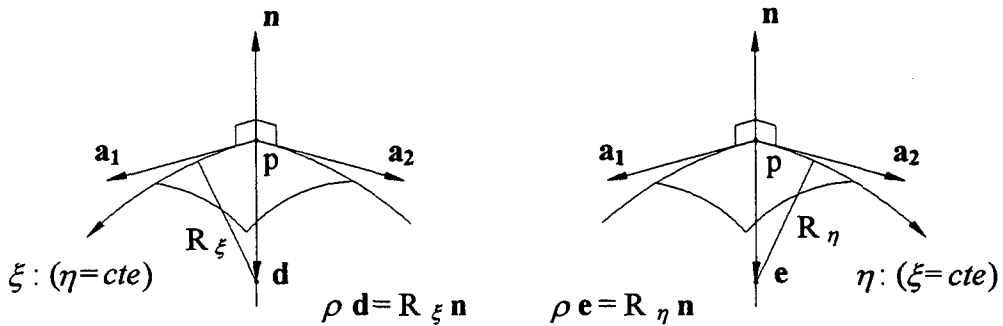


Figura 3.5: Raios de curvatura.

No caso particular em que  $\xi$  e  $\eta$  são direções principais, i.e.,  $a_{12} = b_{12} = 0$ , as curvaturas podem ser determinadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_\xi} &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{1,\xi}}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} = \frac{b_{11}}{a_{11}}, \\ \frac{1}{R_\eta} &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{2,\eta}}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2} = \frac{b_{22}}{a_{22}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.4 Descrição de um Ponto

Seja  $q$ , um ponto material da casca situado a uma distância  $\zeta$  da superfície média  $A$ , Fig.(3.6). O vetor posição  $\mathbf{x}_q$  do ponto  $q$  é definido em função do vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  e é dado por:

$$\mathbf{x}_q(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_p(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{n}(\xi, \eta). \quad (3.13)$$

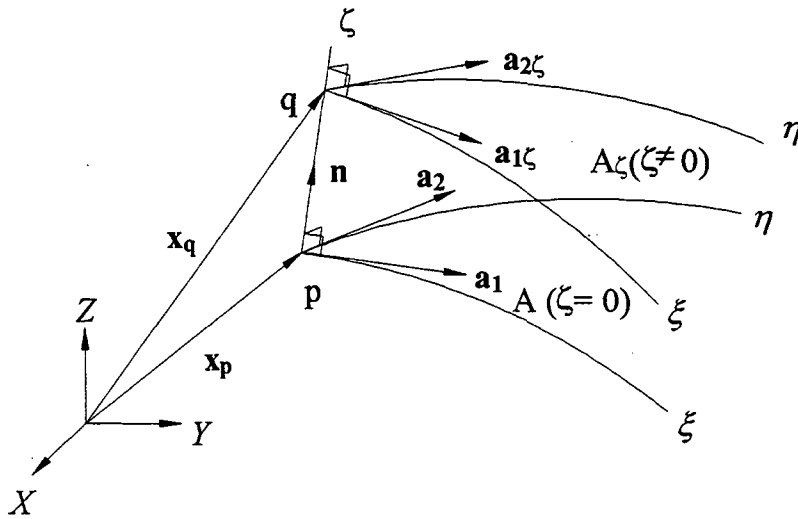


Figura 3.6: Descrição de um ponto da casca.

Onde:

$p$  - ponto na superfície média  $A$ ;

$q$  - ponto na superfície situada a uma distância  $\zeta$  de  $p$ ;

$\mathbf{x}_p$  - vetor posição do ponto  $p$ ;

$\mathbf{x}_q$  - vetor posição do ponto  $q$ ;

$A$  - superfície média;

$A_\zeta$  - superfície situada em  $q$ ;

$\mathbf{n}$  - vetor normal a superfície média  $A$ ;

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  - base covariante na superfície média  $A$ ;

$\mathbf{a}_{1\zeta}, \mathbf{a}_{2\zeta}$  - base covariante na superfície  $A_\zeta$ ;

$\xi, \eta$  - coordenadas paramétricas.

O elemento diferencial  $d\mathbf{x}_q$  é escrito em função de  $d\xi, d\eta$  e  $d\zeta$  onde:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_q &= d\mathbf{x}_p(\xi, \eta) + \zeta d\mathbf{n}(\xi, \eta) + d\zeta \mathbf{n}(\xi, \eta) \\ &= \mathbf{a}_{1\zeta} d\xi + \mathbf{a}_{2\zeta} d\eta + \mathbf{a}_{3\zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sendo que os vetores da base covariante em  $q$  são definidos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{1\zeta} &= \mathbf{a}_1 + \zeta \mathbf{n}_{,\xi}, \\ \mathbf{a}_{2\zeta} &= \mathbf{a}_2 + \zeta \mathbf{n}_{,\eta}, \\ \mathbf{a}_{3\zeta} &= \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Esses vetores formam a base covariante em um ponto  $q$  situado a uma distância  $\zeta$  da superfície média  $A$  que é representada por:

$$\mathbf{F}_\zeta = \left[ \mathbf{a}_{1\zeta} \quad \mathbf{a}_{2\zeta} \quad \mathbf{a}_{3\zeta} \right]. \quad (3.16)$$

A relação dada pela Eq.(3.14), pode ser escrita como:

$$d\mathbf{x}_q = \mathbf{F}_\zeta d\xi, \quad (3.17)$$

onde:

$$d\xi = \{ d\xi \quad d\eta \quad d\zeta \}^T. \quad (3.18)$$

O tensor métrico  $\mathbf{A}_\zeta$  no ponto  $q$  é tal que:

$$I = (ds_q)^2 = d\mathbf{x}_q \cdot d\mathbf{x}_q = \{ d\xi \quad d\eta \quad d\zeta \} \mathbf{A}_\zeta \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{A}_\zeta$  é determinado por:

$$\mathbf{A}_\zeta = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\zeta} \cdot \mathbf{a}_{1\zeta} & \mathbf{a}_{1\zeta} \cdot \mathbf{a}_{2\zeta} & 0 \\ \text{sim.} & \mathbf{a}_{2\zeta} \cdot \mathbf{a}_{2\zeta} & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

O elemento de área orientado  $d\mathbf{A}_\zeta$  é definido por:

$$d\mathbf{A}_\zeta = \mathbf{a}_{1\zeta} d\xi \times \mathbf{a}_{2\zeta} d\eta = dA_\zeta \mathbf{n}, \quad (3.21)$$

onde:

$$dA_\zeta = |\mathbf{a}_{1\zeta} \times \mathbf{a}_{2\zeta}| d\xi d\eta. \quad (3.22)$$

O elemento de volume  $dV_\zeta$  em  $q$  é definido por:

$$dV_\zeta = d\mathbf{A}_\zeta \cdot \mathbf{n} d\zeta = J_\zeta d\xi d\eta d\zeta, \quad (3.23)$$

onde:

$$J_\zeta = \det[\mathbf{F}_\zeta]. \quad (3.24)$$

### 3.5 Teoria de Kant

Kant, em busca de uma teoria que proporcionasse soluções mais realistas e refinadas para os casos de cascas laminadas compostas, placas semi-espessas e distribuição de tensões próximas à carregamentos concentrados, apresentou uma teoria de ordem superior. Essa teoria incorpora um campo de deslocamentos de ordem superior com as seguintes características:

- i* - Variação quadrática das deformações cisalhantes transversais,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , na espessura da casca, tornando completamente desnecessário a introdução do fator de correção artificial para corrigir a distribuição das tensões cisalhantes.
- ii* - Variação linear da deformação normal transversal,  $\varepsilon_z$ , na espessura.
- iii* - Consideração da Lei de Hooke tridimensional.

Tal campo de deslocamentos, para qualquer ponto  $(X, Y, Z)$  da casca, é dado por:

$$\begin{aligned} u_q(\xi, \eta, \zeta) &= u(\xi, \eta) + \zeta \theta_2(\xi, \eta) + \zeta^3 \theta_2^*(\xi, \eta), \\ v_q(\xi, \eta, \zeta) &= v(\xi, \eta) - \zeta \theta_1(\xi, \eta) - \zeta^3 \theta_1^*(\xi, \eta), \\ w_q(\xi, \eta, \zeta) &= w(\xi, \eta) + \zeta^2 w^*(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde  $u$  e  $v$  são os deslocamentos axiais,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto sobre a superfície de referência,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações da normal ao plano de referência em torno dos vetores de base  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$ , respectivamente. Os parâmetros  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  e  $w^*$  são os termos de ordem superior obtidos na expansão de uma série de potências em relação a  $\zeta$ . Segundo Kant e Kommineni [1994], os parâmetros  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  e  $w^*$  são correspondentes à  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $w$ , respectivamente. As componentes do deslocamento na superfície média  $u, v, w, \theta_1, \theta_2, w^*, \theta_1^*, \theta_2^*$  são os oito graus de liberdade presente na teoria.

As rotações utilizam a convenção de sinal dada pela “regra da mão direita” como mostrado na Fig(3.7).

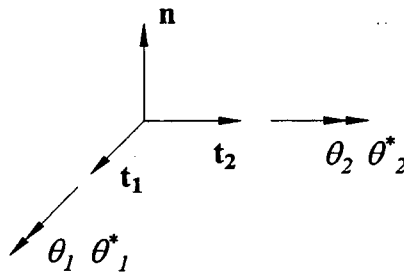


Figura 3.7: Convenção de sinal para a rotação.

Onde:

$\theta_2(\xi, \eta)$  - Descreve a rotação da normal  $\mathbf{n}$  no plano  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{n})$ , ie, a rotação ao redor de  $\mathbf{t}_2$ .

$\theta_2^*(\xi, \eta)$  - Tem a mesma interpretação de  $\theta_2$ . É responsável pela inclusão da dependência da rotação ao longo da espessura.

$$\theta_2^v(\xi, \eta, \zeta) = \theta_2(\xi, \eta) + \zeta^2 \theta_2^*(\xi, \eta) \tag{3.26}$$

$\theta_1(\xi, \eta)$  - Descreve a rotação da normal  $\mathbf{n}$  no plano  $(\mathbf{t}_2, \mathbf{n})$ , ie, a rotação ao redor de  $\mathbf{t}_1$ .

$\theta_1^*(\xi, \eta)$  - Tem a mesma interpretação de  $\theta_1$ .

$$\theta_1^v(\xi, \eta, \zeta) = \theta_1(\xi, \eta) + \zeta^2 \theta_1^*(\xi, \eta) \tag{3.27}$$

$w^*(\xi, \eta)$  Incorpora ao modelo a possibilidade de ter a deformação  $\epsilon_z \neq 0$ . Isso faz com que o deslocamento transversal à superfície média dependa quadraticamente de  $\zeta$ .

Na Fig.(3.8) é mostrada uma estrutura do tipo casca na configuração indeformada e na deformada resultante de um esforço externo. Os vetores  $\mathbf{u}_p$  e  $\mathbf{u}_q$  representam o deslocamento dos pontos  $p$  e  $q$  para os pontos  $p'$  e  $q'$ , respectivamente.

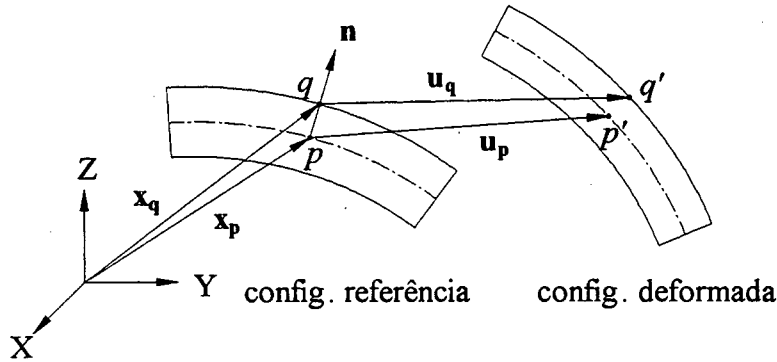


Figura 3.8: Representação dos vetores de deslocamento  $\mathbf{u}_p$  e  $\mathbf{u}_q$ .

O deslocamento de  $p$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{u}_p(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) \mathbf{t}_1 + v(\xi, \eta) \mathbf{t}_2 + w(\xi, \eta) \mathbf{n}, \quad (3.28)$$

e o deslocamento de  $q$  como:

$$\mathbf{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = u_q(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{t}_1 + v_q(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{t}_2 + w_q(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{n}. \quad (3.29)$$

O vetor deslocamento da Eq.(3.29) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{u}_p(\xi, \eta) + \zeta \boldsymbol{\beta}^{(1)}(\xi, \eta) + \zeta^2 \boldsymbol{\beta}^{(2)}(\xi, \eta) + \zeta^3 \boldsymbol{\beta}^{(3)}(\xi, \eta), \quad (3.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}^{(1)}(\xi, \eta) &= \theta_2(\xi, \eta) \mathbf{t}_1 - \theta_1(\xi, \eta) \mathbf{t}_2, \\ \boldsymbol{\beta}^{(2)}(\xi, \eta) &= w^*(\xi, \eta) \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\beta}^{(3)}(\xi, \eta) &= \theta_2^*(\xi, \eta) \mathbf{t}_1 - \theta_1^*(\xi, \eta) \mathbf{t}_2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.6 Limitações das Teoria de Kirchhoff e de Mindlin-Reissner

A teoria de Kirchhoff, devido às hipóteses simplificativas, omite os efeitos da deformação e tensão cisalhante transversal.



A teoria de Mindlin-Reissner baseia-se em uma variação linear do campo de deslocamentos ao longo da espessura, resultando na deformação e tensão cisalhante transversal constante. Assim, é necessário introduzir um fator de correção para o termo da energia cisalhante. Na modelagem de cascas laminadas, a validade desta formulação depende fortemente do valor deste fator de correção utilizado.

Tanto a deformação como a tensão normal transversal, i.e.,  $\varepsilon_z$  e  $\sigma_z$ , não são levadas em consideração em ambas teorias.

### 3.7 Vantagens da Teoria de Ordem Superior

Atualmente, devido ao crescente uso de materiais compostos laminados onde a resistência às solicitações estruturais são de grande importância, torna-se cada vez mais necessário uma análise confiável dos modos de falha. Considerando que um dos principais modos de falha que ocorre em laminados quando solicitados à esforços cisalhantes e transversais é o fenômeno de descolamento entre lâminas, a teoria utilizada na análise do componente estrutural permite uma melhor descrição das tensões cisalhantes transversais interlaminares,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . Uma melhor distribuição de tensões cisalhantes transversais no laminado pode ser obtida por meio de um pós-processamento, na qual é corrigida a condição de contorno nas faces.

Ao contrário das teorias de primeira ordem, as teorias de ordem superior não necessitam do fator de correção artificial para corrigir a distribuição das tensões cisalhantes. Esse fator, na análise de materiais compostos, varia conforme as propriedades materiais tornando-se difícil a sua determinação.

Com o objetivo de se alcançar a confiabilidade desejada, evitando as anomalias e inconsistências das teorias clássicas e de primeira ordem, torna-se essencial a utilização de uma teoria de ordem superior.

### 3.8 Deformação

A configuração deformada virtual está definida por um vetor posição virtual  $\hat{\mathbf{x}}_q$  que é resultado da superposição do vetor posição  $\mathbf{x}_q$ , mostrado na Eq.(3.13), e do vetor deslocamento virtual  $\hat{\mathbf{u}}_q$ .

$$\hat{\mathbf{x}}_q(\varepsilon, \eta, \varsigma) = \mathbf{x}_q(\varepsilon, \eta, \varsigma) + \hat{\mathbf{u}}_q(\varepsilon, \eta, \varsigma).$$

O elemento diferencial  $d\mathbf{u}_q$  é obtido pela relação:

$$d\mathbf{u}_q = \mathbf{L}_\zeta d\boldsymbol{\xi}, \tag{3.32}$$

onde  $d\boldsymbol{\xi}$  é dado pela Eq.(3.18) e  $\mathbf{L}_\zeta$  por:

$$\mathbf{L}_\zeta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{q,\xi} & : & \mathbf{u}_{q,\eta} & : & \mathbf{u}_{q,\zeta} \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

A matriz  $\mathbf{L}_\zeta$  pode ser decomposta através de:

$$\mathbf{L}_\zeta = \mathbf{L}_{0\zeta} + \zeta \mathbf{L}_{1\zeta} + \zeta^2 \mathbf{L}_{2\zeta} + \zeta^3 \mathbf{L}_{3\zeta}, \tag{3.34}$$

onde:

$$\mathbf{L}_{0\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p,\xi} & : & \mathbf{u}_{p,\eta} & : & \boldsymbol{\beta}^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

$$\mathbf{L}_{1\zeta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{(1)},_{\xi} & : & \boldsymbol{\beta}^{(1)},_{\eta} & : & 2 \boldsymbol{\beta}^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

$$\mathbf{L}_{2\zeta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{(2)},_{\xi} & : & \boldsymbol{\beta}^{(2)},_{\eta} & : & 3 \boldsymbol{\beta}^{(3)} \end{bmatrix}, \tag{3.37}$$

$$\mathbf{L}_{3\zeta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{(3)},_{\xi} & : & \boldsymbol{\beta}^{(3)},_{\eta} & : & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.38}$$

A relação entre o gradiente do deslocamento e o gradiente do vetor posição no ponto  $q$  é obtida através de  $\mathbf{L}^g$ ,

$$d\mathbf{u}_q = \mathbf{L}^g d\mathbf{x}_q. \tag{3.39}$$

$\mathbf{L}^g$  é a matrix que representa o gradiente do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_q$  em relação ao sistema cartesiano global e é determinada com o auxílio da Eq.(3.17). Logo:

$$\mathbf{L}^g = \mathbf{L}_\zeta \mathbf{F}_\zeta^{-1}. \tag{3.40}$$

O tensor deformação na base ortonormal local,  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  e  $\mathbf{n}$ , é determinado através de:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{x}/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}^{\mathbf{x}} + \mathbf{L}^{\mathbf{x}T}), \quad (3.41)$$

onde o tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{x}/2}$  é representado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{x}/2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \text{sim.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

A matriz  $\mathbf{L}^{\mathbf{x}}$  representa o gradiente do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_q$  em relação ao sistema cartesiano local e é determinada por:

$$\mathbf{L}^{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^T \mathbf{L}^{\mathbf{s}} \mathbf{P}, \quad (3.43)$$

onde:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

### 3.9 Relação Constitutiva

A relação constitutiva considera que a casca é constituída de um material ortotrópico de forma que  $\mathbf{n}$  é uma das direções principais, i.e.,  $\mathbf{n}$  é considerado uma das direções ortotrópicas. O ângulo de orientação das fibras é definido pelo ângulo formado entre os eixos  $l$  e  $x$  como mostrado na Fig.(2.7). A lei do comportamento material é escrita como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{x}}, \quad (3.45)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{x}}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{x}}$  são as componentes físicas em um ponto  $q$ , na base ortonormal  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  e  $\mathbf{n}$ .

O tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{x}}$  é decomposto em  $\boldsymbol{\sigma}_s$  e  $\boldsymbol{\tau}_s$ .  $\boldsymbol{\sigma}_s$  representa as tensões axiais e a tensão de cisalhamento na superfície paralela a superfície de referência. As tensões cisalhantes transversais são representadas por  $\boldsymbol{\tau}_s$ . Logo:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{x}} = \{ \boldsymbol{\sigma}_s \quad \boldsymbol{\tau}_s \}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{x}} = \{ \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad \boldsymbol{\gamma}_s \}^T, \quad (3.46)$$

cuja representação em componente é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \}^T, \quad \boldsymbol{\tau}_s = \{ \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \}^T, \quad (3.47)$$

$$\epsilon_s = \{ \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \}^T, \quad \gamma_s = \{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \}^T. \quad (3.48)$$

A matriz constitutiva  $\bar{\mathbf{Q}}$  dada pela Eq.(2.62), que relaciona o tensor tensão com o tensor deformação, pode ser decomposta como:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

As matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são características de cada lâmina. A matriz  $\mathbf{H}$  depende de 7 constantes elásticas ( $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}$ ) e do ângulo  $\theta$  entre a direção ortotrópica 1 e a direção definida pelo vetor  $\mathbf{t}_1$ . A matriz  $\mathbf{G}$  depende de 2 constantes elásticas ( $G_{13}, G_{23}$ ) e do mesmo ângulo  $\theta$ .

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{14} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{24} \\ & & \bar{Q}_{33} & \bar{Q}_{34} \\ sim. & & & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{56} \\ sim. & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Então decompostos os tensores tensão e deformação e a matriz constitutiva, as relações entre as tensões e deformações dadas pela Eq.(3.45) podem ser reescritas como:

$$\sigma_s = \mathbf{H} \epsilon_s, \quad \tau_s = \mathbf{G} \gamma_s. \quad (3.51)$$

### 3.10 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Considere um corpo contínuo de espessura  $t$  submetido à tração e deslocamentos prescritos com mostrado na Fig.(3.9). A parte do contorno da casca onde os deslocamentos e as rotações são prescritas é designada por  $S_u$ . A parte onde as forças são aplicadas é designada por  $S_f$ . Logo  $S_u \cap S_f = 0$ .

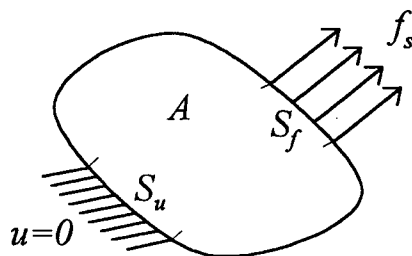


Figura 3.9: Sólido elástico.

Seja  $K$  o conjunto das soluções admissíveis e  $W$  o espaço das variações admissíveis, onde:

$$K = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ suf. regular, } \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } S_u \}. \quad (3.52)$$

$$W = \{ \hat{\mathbf{u}} \mid \hat{\mathbf{u}} \text{ suf. regular, } \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ em } S_u \}. \quad (3.53)$$

O Princípio dos Trabalhos Virtuais consiste em determinar  $\mathbf{u}_o \in W$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_r$ , onde  $\mathbf{u}_r \in K$ , talque:

$$W_{int} - W_{ext} = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in W. \quad (3.54)$$

O trabalho virtual pode ser escrito em função dos tensores  $\mathbf{L}^x$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^x$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^x$ . Logo:

$$W_{int} = \int_V \text{tr} (\mathbf{L}^x(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\sigma}^x(\mathbf{u})) dV = \int_V \text{tr} (\boldsymbol{\varepsilon}^x(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\sigma}^x(\mathbf{u})) dV, \quad (3.55)$$

onde  $dV$  é dado pela Eq.(3.23).

Após a integração na espessura e considerando que o sobrescrito “ $\hat{\phantom{x}}$ ” indica que o campo considerado pertence ao espaço das variações admissíveis, o  $W_{int}$  pode ser expresso como:

$$W_{int} = \int_A \{ \mathbf{N}^o \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \mathbf{M}^o \cdot \hat{\boldsymbol{\chi}}^o + \mathbf{N}^* \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* + \mathbf{M}^* \cdot \hat{\boldsymbol{\chi}}^* + \mathbf{Q}^o \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}^o + \mathbf{Q}^* \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}^* + \mathbf{Q}^{**} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{**} + N_n \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n \} dA, \quad (3.56)$$

onde  $dA$  é dado pela Eq.(3.22).

As componentes das deformações virtuais são dadas por:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xx}^o & \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xy}^o \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yx}^o & \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yy}^o \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xx}^* & \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xy}^* \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yx}^* & \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}^o = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\chi}}_{xx}^o & \hat{\boldsymbol{\chi}}_{xy}^o \\ \hat{\boldsymbol{\chi}}_{yx}^o & \hat{\boldsymbol{\chi}}_{yy}^o \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\chi}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\chi}}_{xx}^* & \hat{\boldsymbol{\chi}}_{xy}^* \\ \hat{\boldsymbol{\chi}}_{yx}^* & \hat{\boldsymbol{\chi}}_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}^o = \left\{ \begin{matrix} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{xz}^o \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{yz}^o \end{matrix} \right\}, \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}^* = \left\{ \begin{matrix} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{xz}^* \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{yz}^* \end{matrix} \right\}, \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{**} = \left\{ \begin{matrix} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{xz}^{**} \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{yz}^{**} \end{matrix} \right\}. \quad (3.59)$$

Os esforços generalizados são determinados por:

$$\mathbf{N}^o = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}^s d\zeta, \quad \mathbf{N}^* = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}^s \zeta^2 d\zeta, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{M}^o = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}^s \zeta d\zeta, \quad \mathbf{M}^* = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}^s \zeta^3 d\zeta, \quad (3.61)$$

$$N_n = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \sigma_z \kappa(\zeta) \zeta d\zeta, \quad (3.62)$$

$$Q^o = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \Lambda \tau_s d\zeta, \quad Q^* = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \Lambda \tau_s \zeta^2 d\zeta, \quad Q^{**} = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \Lambda \tau_s \zeta^3 d\zeta \quad (3.63)$$

onde:

$$\kappa(\zeta) = 1 - \zeta \left( \frac{1}{R_\xi} + \frac{1}{R_\eta} \right) + \zeta^2 \frac{1}{R_\xi R_\eta}. \quad (3.64)$$

Os limites de integração  $h_i$  e  $h_{i+1}$  representam, respectivamente, as coordenadas  $\zeta$  da superfície inferior e superior da  $i$ -ésima lâmina.

Para facilitar a representação das relações necessárias para definir  $\Lambda$  é conveniente introduzir dois vetores tangentes,  $\mathbf{a}^1$  e  $\mathbf{a}^2$ , que formam a base contravariante. Essa base é obtida a partir da base covariante por:

$$\left[ \mathbf{a}^1 \quad ; \quad \mathbf{a}^2 \right] = \left[ \mathbf{a}_1 \quad ; \quad \mathbf{a}_2 \right] \mathbf{A}^{-1}.$$

A Fig.(3.10) representa a relação da base covariante com a base contravariante.

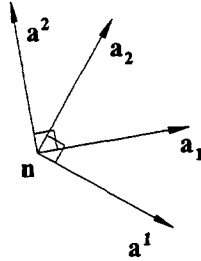


Figura 3.10: Base covariante ( $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ) e base contravariante ( $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ ).

Assim  $\Lambda$  é obtido por:

$$\Lambda = \mathbf{I} + \zeta \mathbf{C}_b, \quad (3.65)$$

onde:

$$\mathbf{C}_b = \mathbf{C}_o^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{C}_o, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{n}_{,\eta} & -\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{n}_{,\eta} \\ -\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{n}_{,\xi} & \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{n}_{,\xi} \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

O tensor tensão de segunda ordem  $\sigma^s$  é definido por:

$$\sigma^s = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Os esforços generalizados podem ser expressos em forma de componentes como:

$$\mathbf{N}^o = \begin{bmatrix} N_{xx}^o & N_{xy}^o \\ N_{yx}^o & N_{yy}^o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} N_{xx}^* & N_{xy}^* \\ N_{yx}^* & N_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

$$\mathbf{M}^o = \begin{bmatrix} M_{xx}^o & M_{xy}^o \\ M_{yx}^o & M_{yy}^o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} M_{xx}^* & M_{xy}^* \\ M_{yx}^* & M_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{Q}^o = \left\{ \begin{matrix} Q_{xz}^o \\ Q_{yz}^o \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{Q}^* = \left\{ \begin{matrix} Q_{xz}^* \\ Q_{yz}^* \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{Q}^{**} = \left\{ \begin{matrix} Q_{xz}^{**} \\ Q_{yz}^{**} \end{matrix} \right\}. \quad (3.72)$$

O trabalho virtual externo devido a pressão exercida na superfície média da casca  $\bar{\mathbf{f}}_p$  é obtido por:

$$W_{ext} = \int_{A_p} \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{f}}_p \, dA. \quad (3.73)$$

Onde:

$\bar{\mathbf{f}}_p$  - pressão na superfície média da casca e na mesma de direção  $\mathbf{n}$ ;

$A_p$  - parte da superfície da casca submetida a pressão  $\bar{\mathbf{f}}_p$ .

O trabalho virtual externo devido a forças externas  $\bar{\mathbf{f}}_s$  aplicada na parte do contorno de  $A$  designado por  $S_f$  é escrito por:

$$W_{ext} = \int_{S_f} \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{f}}_s \, dS = \int_{S_f} \hat{\mathbf{u}}^o \cdot \bar{\mathbf{f}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^o \cdot \bar{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{u}}^* \cdot \bar{\mathbf{f}}^* + \hat{\boldsymbol{\theta}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}^* \, dS. \quad (3.74)$$

Onde:

$\bar{\mathbf{f}}_s$  - forças externas aplicada no contorno da casca;

$S_f$  - parte do contorno com tração prescrita.

E os vetores representados por:

$$\hat{\mathbf{u}}^o = \{ \hat{u}_o \quad \hat{v}_o \quad \hat{w}_o \}^T, \quad \hat{\mathbf{u}}^* = \{ 0 \quad 0 \quad \hat{w}_o^* \}^T, \quad (3.75)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^o = \{ \hat{\theta}_2 \quad -\hat{\theta}_1 \quad 0 \}^T, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \{ \hat{\theta}_2^* \quad -\hat{\theta}_1^* \quad 0 \}^T, \quad (3.76)$$

$$(\bar{\mathbf{f}} \quad \bar{\mathbf{M}} \quad \bar{\mathbf{f}}^* \quad \bar{\mathbf{M}}^*) = \sum_{k=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} (1 \quad \zeta \quad \zeta^2 \quad \zeta^3) \bar{\mathbf{f}}_s \, dS. \quad (3.77)$$

### 3.11 Discretização do Problema

O Método dos Elementos Finitos de Galerkin é aplicado na discretização do espaço de vetores  $W$ . As funções de base que definem o subspaço  $W_N \subset W$  estão associadas com o elemento finito isoparamétrico *quad9*, mostrado na Fig.(3.11).

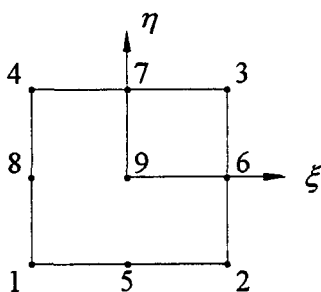


Figura 3.11: Elemento finito isoparamétrico, quadrilátero e de 9 nós - *quad9*.

As funções de interpolação clássicas  $N_i$  pertencentes à família das funções Lagrangeanas de classe  $C^0$ , assim como suas derivadas e demais características do elemento são apresentadas por Dhatt e Touzot, [1984].



# Capítulo 4

## Otimização

### 4.1 Introdução

A otimização de estruturas laminadas do tipo casca apresentada nesse trabalho tem o objetivo de minimizar a massa da estrutura, conseqüentemente reduzindo seu custo de matéria prima. O processo de otimização determina a espessura ótima e o ângulo ótimo de orientação das fibras de cada lâmina, que forma o laminado composto, sujeita à restrições que impõem limites à espessura de cada lâmina, às tensões efetivas nos elementos e aos ângulos de orientação das fibras. O problema é resolvido recorrendo a um processo em etapas - "Multilevel", onde o problema de otimização é transformado num problema em dois níveis distintos, como se descreve esquematicamente na Fig.(4.1).

Primeiramente, para compreender o problema de otimização, é necessário apresentar como ele é formulado. A estrutura é discretizada através de uma malha de elementos finitos na qual é indicado, para cada elemento, o grupo material à que pertence. Um grupo material define uma ou um conjunto de lâminas sobrepostas que possuem, independente das demais, características próprias definidas por:

- i- módulos de elasticidade, módulos de cisalhamento e coeficientes de Poisson;
- ii- massa específica, espessura e ângulo de orientação das fibras;
- iii- limites inferior e superior de espessura e tensão;
- iv- resistências à tração, à compressão e ao cisalhamento.

A otimização é feita à nível de grupos materiais, ou seja, para cada grupo material pertencente a estrutura é possível especificar se ele será ou não otimizado. Caso um grupo seja especificado para otimizar, todas as lâminas que o constituem serão otimizadas. Devido a essa formulação existe uma flexibilidade para otimizar somente partes da estrutura, mas impossibilitando também, otimizar lâminas específicas pertencente ao mesmo grupo material.

No primeiro nível de otimização o objetivo é a obtenção da espessura  $t$  de cada lâmina que minimiza a massa da estrutura sujeito a restrições de espessura e de tensão efetivas nos elementos. Como o objetivo dessa etapa de otimização é obter uma estrutura que possua a menor massa possível e que seja capaz de suportar a solicitação requerida foi estabelecida um critério capaz de classificar os possíveis projetos. Esta classificação é expressa por uma equação denominada função objetivo que é representada pela Eq.(4.1). Então o problema de otimização pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\min f(\mathbf{t}), \quad (4.1)$$

tal que

$$g^{t,\sigma}(\mathbf{t}) \leq 0. \quad (4.2)$$

sendo  $f(\mathbf{t})$  a função objetivo representando a massa da estrutura,  $g^{t,\sigma}(\mathbf{t})$  as restrições de desigualdade do 1º nível.

As restrições de desigualdades adotadas no 1º nível são divididas em dois grupos. O primeiro grupo de restrições impõem limites na espessura de cada lâmina pertencente aos grupos materiais a serem otimizados. O outro grupo limita a tensão efetiva em todos os elementos da malha.

No segundo nível, o objetivo é a obtenção dos ângulos  $\theta$  de orientação das fibras nas várias lâminas, que constituem o laminado, que minimiza a tensão efetiva média determinada pelo Critério de Tsai-Hill. As restrições impostas nesse nível impõem limites nos ângulos. O problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\min \phi(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.3)$$

tal que

$$g^{\theta}(\theta) \leq 0 \quad (4.4)$$

sendo  $\phi(\theta)$  a função objetivo representando a tensão efetiva média,  $g^{\theta}(\theta)$  as restrições de desigualdade do 2º nível impondo limites nos ângulos de orientação das fibras.

O processo de otimização do 1º nível é caracterizado por uma função objetivo não linear e sujeita também à restrições não lineares. O método utilizado para resolução deste problema de mínimo é o Método do Lagrangeano Aumentado e foi escolhido por resolver esta classe de problemas. A análise de sensibilidade da resposta da estrutura utiliza do Método Direto que é justificado posteriormente.

O processo de otimização do 2º nível utiliza o Método do Refino Sucessivo para determinação do ângulo ótimo de orientação das fibras.

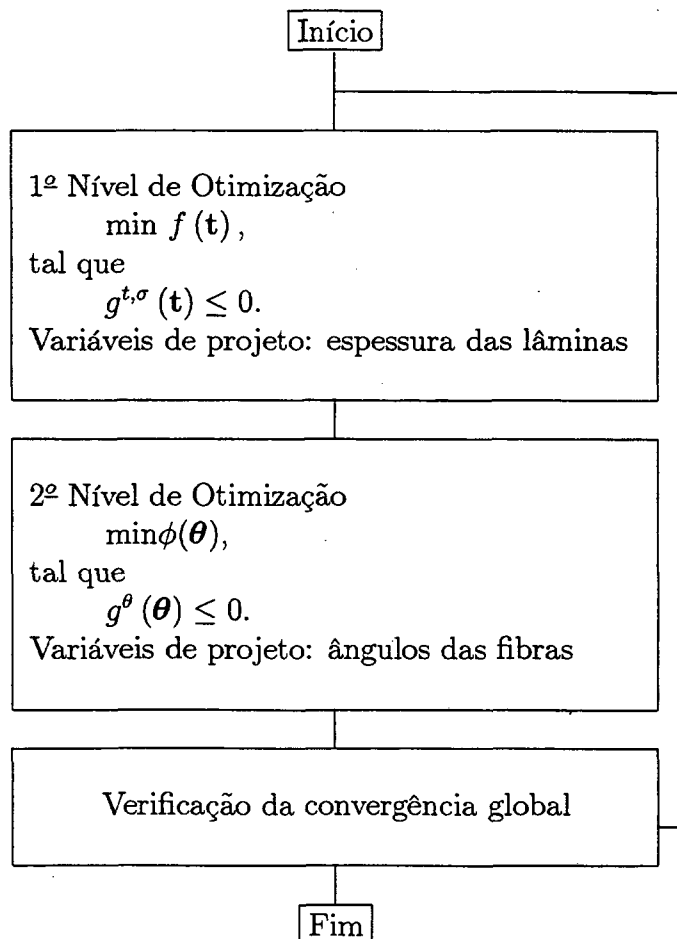


Figura 4.1: Processo de otimização em dois níveis.

## 4.2 Método do Lagrangeano Aumentado

### 4.2.1 Introdução

A idéia do Método do Lagrangeano Aumentado, o MLA, é resolver um problema de minimização com restrições através da solução de uma seqüência de problemas sem restrições. O algoritmo constrói uma seqüência de problemas aproximados que converge para o problema original, i.e., a correspondente seqüência de soluções aproximadas produz no limite a solução do problema original.

Na prática somente um número finito de problemas aproximados precisa ser solucionado para obter o que seria uma solução aproximada aceitável. Além disso, utiliza-se informações eficientes obtidas na solução de cada problema aproximado para a solução do próximo problema.

O MLA é um método que resolve problemas não lineares de otimização através da resolução de uma seqüência de problemas sem restrições. As restrições são removidas mediante o uso combinado do método dos multiplicadores de Lagrange e do método de penalização.

A idéia básica do método de penalização é eliminar algumas ou todas as restrições adicionando à função objetivo um termo de penalidade que provoca um alto valor nos pontos da região inviável. Neste método é adicionado um parâmetro  $r$ , que determina a severidade da penalização fazendo com que o problema original com restrições seja aproximado por um problema sem restrições.

Uma importante pergunta é como se deve selecionar o valor inicial para os multiplicadores de Lagrange,  $\lambda^1$  e  $\mu^1$ , e para o parâmetro de penalização,  $r^1$ , mas infelizmente não existe nenhuma regra geral, sendo que estes valores iniciais dependem de cada tipo de problema.

A taxa de convergência para o MLA está diretamente ligada ao decremento do parâmetro de penalização,  $r^k$ . O número de minimizações requeridas para a convergência do problema diminui com o aumento da taxa de decremento de  $r$  mas o efeito de mal condicionamento é mais evidenciado sobre estas circunstâncias também. A introdução dos multiplicadores de Lagrange evita o mal condicionamento dos métodos que utilizam funções de penalidade e

por isso algumas considerações devem ser observadas em relação ao valor inicial e a taxa de decremento de  $r$ .

O parâmetro inicial  $r^1$ :

- i- deve ser positivo;
- ii- não deve ser muito pequeno tornando o problema mal condicionado na primeira iteração.

O parâmetro  $r^k$ :

- i- deve eventualmente tornar-se pequeno e sempre positivo a cada iteração;
- ii- não deve sofrer um decremento muito rápido tornando o problema mal condicionado tão logo;
- iii- não deve sofrer um decremento muito lento para não provocar uma taxa de convergência pobre.

O Lagrangeano Aumentado foi inicialmente desenvolvidos para restrições de igualdade e depois estendido para restrições de desigualdade.

## 4.2.2 Método para Restrições de Igualdade

Considerando o problema:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

tal que

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1..N_h. \quad (4.6)$$

Onde  $f(\mathbf{x})$  é função objetivo,  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis de projeto,  $h_i(\mathbf{x})$  são as restrições de igualdade e  $N_h$  o número de restrições de igualdade.

A Função Lagrangeana  $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  associada ao problema é:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_h} \lambda_i h_i(\mathbf{x}), \quad (4.7)$$

onde  $\lambda_i$  é o multiplicador de Lagrange associado à  $i$ -ésima restrição de igualdade.

Note que se existir algum  $\lambda^*$  para o qual  $\mathbf{x}^*$  é solução do problema sem restrição

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda^*), \quad (4.8)$$

enquanto satisfazendo a restrição de igualdade dada pela Eq.(4.6), então  $\mathbf{x}^*$  é solução do problema representado pelas Eqs.(4.5) e (4.6). Logo o problema:

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda), \quad (4.9)$$

para um dado  $\lambda$  conveniente, tal que

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1..N_h, \quad (4.10)$$

é equivalente ao problema original.

Considerando agora a solução equivalente ao problema dado pelas Eqs.(4.9) e (4.10) fazendo uso do método de penalidade exterior. Isto faz com que acrescente-se o termo de penalidade à função Lagrangeana  $L(\mathbf{x}, \lambda)$  dando origem a função Lagrangeana aumentada  $\Psi(\mathbf{x}, \lambda, r)$ .

$$\Psi(\mathbf{x}, \lambda, r) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_h} \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{N_h} (h_i(\mathbf{x}))^2, \quad r \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Logo, dado  $\lambda$  e  $r$ , o Método do Lagrangeano Aumentado consiste em aplicar um algoritmo para a solução de um problema sem restrição  $\mathbf{x}(\lambda, r)$ .

Os parâmetros  $\lambda$  e  $r$  são reajustados utilizando certas regras e o processo é então repetido até a convergência.

Note que:

- i- Quando  $\lambda = 0$  o problema dado pela Eq.(4.11) se reduz ao método de penalidade exterior.
- ii- Ao decrescer  $r$  gradualmente a seqüência de soluções  $\mathbf{x}(r) \rightarrow \mathbf{x}^*$ . As soluções intermediárias  $\mathbf{x}(r)$  não são viáveis e de um modo geral o problema fica mal condicionado se  $r < r_{crítico}$ . Portanto é utilizado um valor mínimo para o fator de penalização,

$$r_{\min} = r_{crítico}. \quad (4.12)$$

iii- Se  $\lambda = \lambda^*$ , onde  $\lambda^*$  representa o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados ao critério de otimalidade em  $\mathbf{x}^*$  (Condição de Kuhn Tucker). Neste caso, a minimização do problema  $\Psi(\mathbf{x}, \lambda^*, r)$  independe do valor de  $r$ . Logo a condição de otimalidade em  $\mathbf{x}^*$  é:

$$\nabla_x \Psi(\mathbf{x}, \lambda^*, r)|_{\mathbf{x}^*} = \underbrace{\nabla_x f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{N_h} \lambda_i^* \nabla_x h_i(\mathbf{x}^*)}_{K.T.} + \frac{2}{r} \sum_{i=1}^{N_h} h_i(\mathbf{x}^*) \nabla_x h_i(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (4.13)$$

Estas observações sugerem então que atualizando  $\lambda_i$  de forma que  $\lambda_i \rightarrow \lambda_i^*$  pode-se determinar a solução ótima do problema utilizando valores para  $r \geq r_{\text{crítico}}$  e evitando desta forma o problema de mal condicionamento associado ao método de penalidade exterior.

Para determinar a fórmula de atualização de  $\lambda_i$ , a condição de otimalidade de  $\Psi(\mathbf{x}, \lambda, r)$  representada por:

$$\nabla_x \Psi(\mathbf{x}, \lambda, r) \equiv \nabla_x f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_h} \left( \lambda_i + \frac{2}{r} h_i(\mathbf{x}) \right) \nabla_x h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.14)$$

é comparada com a condição de estacionaridade de  $L(\mathbf{x}, \lambda)$  em  $\mathbf{x}^*$  e  $\lambda^*$ ,

$$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \equiv \nabla_x f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{N_h} \lambda_i^* \nabla_x h_i(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (4.15)$$

No limite em que  $\mathbf{x}(\lambda, r) \rightarrow \mathbf{x}^*$  o termo

$$\lambda_i + \frac{2}{r} h_i(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda_i^*. \quad (4.16)$$

Esta observação sugere a seguinte atualização para os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \frac{2}{r^k} h_i(\mathbf{x}^k). \quad (4.17)$$

### 4.2.3 Extensão do Método para Restrições de Desigualdade

Considerando o caso particular:

$$\min f(\mathbf{x}), \quad (4.18)$$

tal que

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1..N_g. \quad (4.19)$$

Onde  $g_i(\mathbf{x})$  são as restrições de desigualdade e  $N_g$  o número de restrições de desigualdade.

Este problema é convertido em um problema de restrição de igualdade adicionando variáveis de folga, i.e., as restrições de desigualdades passam a ser representadas por:

$$g_i(\mathbf{x}) + z_i^2 = 0, \quad i = 1..N_g, \quad (4.20)$$

onde  $z_i$  é a variável de folga associada à restrição  $g_i(\mathbf{x})$ .

Os resultados associados às restrições de igualdade dado pela Eq.(4.11) podem então ser aplicados as restrições de desigualdades resultando em:

$$\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, r, z) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_g} \mu_i (g_i(\mathbf{x}) + z_i^2) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{N_g} (g_i(\mathbf{x}) + z_i^2)^2, \quad (4.21)$$

onde  $\mu_i$  é o multiplicador de Lagrange associado à  $i$ -ésima restrição de desigualdade.

Note que o número de variáveis do problema foi aumentado em  $N_g$ . Porém, pode-se eliminar as variáveis de folga  $z_i$  da Eq.(4.21), minimizando  $\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, r, z)$  inicialmente com relação à  $z$ . Neste caso, para  $z$  satisfazendo a condição necessária de otimalidade se tem:

$$\nabla \Psi_z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, r, z) = 0, \quad (4.22)$$

resultando em:

$$z_i^2 = 0, \quad \text{ou} \quad z_i^2 = -\frac{r \mu_i}{2} - g_i(\mathbf{x}). \quad (4.23)$$

Logo  $z_i^2$  é selecionado como:

$$z_i^2 = \max \left\{ 0, -\frac{r \mu_i}{2} - g_i(\mathbf{x}) \right\}, \quad i = 1..N_g. \quad (4.24)$$

Esta condição satisfaz a condição necessária de otimalidade e  $z_i$  torna-se uma variável dependente. Pode-se então eliminar  $z_i$  de  $\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, r, z)$  utilizando a Eq.(4.24), o que resulta em:

$$g_i(\mathbf{x}) + z_i^2 = \max \left\{ g_i(\mathbf{x}), -\frac{r \mu_i}{2} \right\}, \quad i = 1..N_g. \quad (4.25)$$

Substituindo a Eq.(4.25) na Eq.(4.21)

$$\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, r) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{N_g} m_i(\mathbf{x}, \mu_i, r), \quad (4.26)$$



onde:

$$m_i(\mathbf{x}, \mu_i, r) = \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) (g_i(\mathbf{x}) + \mu_i r) & \text{se } g_i(\mathbf{x}) > -\frac{r\mu_i}{2} \\ -\left(\frac{r\mu_i}{2}\right)^2 & \text{se } g_i(\mathbf{x}) \leq -\frac{r\mu_i}{2} \end{cases} \quad (4.27)$$

Sendo a atualização de  $\mu_i$  feita através de:

$$\mu_i^{k+1} = \max \left\{ 0, \mu_i^k - \frac{2}{r^k} g_i(\mathbf{x}^k) \right\}, \quad i = 1..N_g. \quad (4.28)$$

## 4.3 Análise de Sensibilidade

### 4.3.1 Introdução

A determinação da sensibilidade da resposta da estrutura com relação às variáveis de projeto pode ser feita através de dois métodos, Direto ou Adjunto. Neste trabalho foi escolhido o Método Direto pelo fato de que o problema a ser resolvido envolve um número bem maior de restrições do que de variáveis de projeto, e conseqüentemente tornando-o mais barato computacionalmente quando comparado ao Método Adjunto sob essas mesmas condições. A descrição do método escolhido é apresentada a seguir.

### 4.3.2 Método Direto

Mediante a aplicação do Método de elementos Finitos, a estrutura inicialmente contínua é transformada em uma discreta. Limitando à casos de cargas estáticas que designa-se por  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{U}$  equilibra  $\mathbf{F}$  se o seguinte sistema de equações é satisfeito:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (4.29)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global de dimensão  $n \times n$ ,  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\mathbf{F}$  é o vetor de cargas nodais equivalentes.

Em geral,  $\mathbf{K}$  depende de parâmetros elásticos que caracterizam o comportamento da estrutura e de parâmetros geométricos que definem a forma da casca. O vetor de carga  $\mathbf{F}$  também pode depender das variáveis de projeto, por exemplo, quando se considera o peso próprio da estrutura. Neste trabalho é desprezado o efeito do peso próprio considerando que os carregamentos nodais resultantes devido a esse efeito sejam desprezíveis quando com-

parados com os carregamentos prescritos, sejam concentrados ou distribuídos. Nesse caso, o vetor de carga é independente das variáveis de projeto.

Definindo-se  $\mathbf{x}$  como sendo o vetor das variáveis de projeto a serem otimizadas, logo a Eq.(4.29) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}. \quad (4.30)$$

Assim os deslocamentos podem ser determinados através da resolução do sistema de equações lineares acima, ou seja:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}. \quad (4.31)$$

A função objetivo do problema apresenta a seguinte forma:

$$\psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{U}(\mathbf{x})). \quad (4.32)$$

Diferenciando ambos os termos da Eq.(4.32) com a finalidade de se obter o gradiente da função objetivo  $\nabla\psi$ , se tem que:

$$d\psi(\mathbf{x}) = \nabla\psi \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{U}} \cdot \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (4.33)$$

de onde resulta:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}} + (\nabla\mathbf{U})^T \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{U}}. \quad (4.34)$$

Como pode-se observar, para calcular o  $\nabla\psi$  é necessário calcular o  $\nabla\mathbf{U}$ . Assim, o gradiente dos deslocamentos pode ser obtido derivando ambos os lados da Eq.(4.30), logo:

$$\mathbf{K} \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_k} = -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial x_k} \mathbf{U}, \quad k = 1..N_x, \quad (4.35)$$

onde  $N_x$  representa o número de variáveis de projeto.

Considerando que o problema agora possui  $N_g$  restrições que geralmente são expressas como:

$$g_i(\mathbf{x}) = G_i(\mathbf{x}, \mathbf{U}(\mathbf{x})), \quad i = 1..N_g, \quad (4.36)$$

onde  $N_g$  é o número de restrições do problema. O tratamento realizado para a análise de sensibilidade da função objetivo  $\psi$  pode ser aplicado a cada uma das componentes  $g_i$  das

restrições. Então, para  $i$ -ésima restrição tem-se:

$$\nabla g_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_i}{\partial x_k} + \frac{\partial G_i}{\partial U_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}. \quad (4.37)$$

Onde  $i = 1..N_g$ ,  $k = 1..N_x$  e  $j = 1..n$ .

Então para efetuar o cálculo da sensibilidade deve-se:

i- Determinar para  $i = 1..N_g$ ,  $k = 1..N_x$  e  $j = 1..n$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_k}, \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \frac{\partial \Psi}{\partial U_j}, \frac{\partial G_i}{\partial x_k}, \frac{\partial G_i}{\partial U_j}. \quad (4.38)$$

ii- Determinar o  $\nabla \mathbf{U}$  através da solução de  $N_x$  sistemas de equações:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_k} \mathbf{U}. \quad (4.39)$$

iii- Por substituição determinar:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k}, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = \frac{\partial G_i}{\partial x_k} + \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k}. \quad (4.41)$$

Onde  $i = 1..N_g$  e  $k = 1..N_x$ .

## 4.4 Formulação do Problema do 1º Nível

### 4.4.1 Variável de Projeto

As variáveis de projeto consideradas nesse 1º nível de otimização representam a espessura de todas as lâminas que constituem os grupos materiais a serem otimizados. São designadas por  $\mathbf{t}$ , onde  $t_{(k,j)}$  representa a espessura da  $j$ -ésima lâmina pertencente ao grupo material  $k$ .

### 4.4.2 Função Objetivo

A função objetivo  $f(\mathbf{t})$  do 1º nível, dada pela Eq.(4.1), representa a massa total das lâminas pertencente aos grupos materiais a serem otimizados e é determinada por:

$$f(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{Nm} \sum_{i=1}^{Ne_k} \sum_{j=1}^{Nl_k} \rho_{(k,j)} V_{\zeta}(\mathbf{t})_{(k,j,i)}, \quad (4.42)$$

Onde:

$Nm$ - número de grupos materiais a serem otimizados;

$Ne_k$ - número de elementos pertencente ao grupo material  $k$ ;

$Nl_k$ - número de lâminas pertencente ao grupo material  $k$ ;

$\rho_{(k,j)}$ - massa específica da  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ ;

$V_{\zeta}(\mathbf{t})_{(k,j,i)}$ - volume do  $i$ -ésimo elemento determinado na  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ .

O volume do elemento  $V_{\zeta}(\mathbf{t})_{(k,j,i)}$  é determinado, utilizando a base covariante  $\mathbf{F}_{\zeta}$  dada pela Eq.(3.16), através de:

$$V_{\zeta}(\mathbf{t})_{(k,j,i)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{\zeta_{(k,j)}}^{\zeta_{(k,j+1)}} \det(\mathbf{F}_{\zeta}(\mathbf{t})_{(k,j,i)}) d\zeta d\xi d\eta. \quad (4.43)$$

Onde:

$\zeta_{(k,j)}$ - coordenada  $\zeta$  da superfície inferior da  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ ;

$\zeta_{(k,j+1)}$ - coordenada  $\zeta$  da superfície superior da  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ ;

$\mathbf{F}_{\zeta}(\mathbf{t})_{(k,j,i)}$ - base covariante do  $i$ -ésimo elemento determinada na coordenada  $\zeta$  da  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ .

Para melhorar o condicionamento numérico do problema a função objetivo é adimensionalizada, dividindo a mesma pela função objetivo determinada inicialmente. Então, a Eq.(4.42) pode ser reescrita como:

$$f(\mathbf{t}) = \frac{1}{f_{inicial}} \sum_{k=1}^{Nm} \sum_{i=1}^{Ne_k} \sum_{j=1}^{Nl_k} \rho_{(k,j)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{\zeta_{(k,j)}}^{\zeta_{(k,j+1)}} \det(\mathbf{F}_{\zeta}(\mathbf{t})_{(k,j,i)}) d\zeta d\xi d\eta. \quad (4.44)$$

### 4.4.3 Restrição de Espessura

As lâminas a serem otimizadas são limitadas por valores máximos e mínimos de espessura, logo a espessura da  $j$ -ésima lâmina pertencente ao grupo material  $k$  deve permanecer no intervalo:

$$t_{(k,j)}^{inf} \leq t_{(k,j)} \leq t_{(k,j)}^{sup}. \quad (4.45)$$

Cada lâmina a ser otimizada  $t_{(k,j)}$  necessita de duas restrições de espessura que são determinadas por:

$$\begin{aligned} g_{(k,j,1)}^t &= t_{(k,j)} - t_{(k,j)}^{\text{sup}} \leq 0, \\ g_{(k,j,2)}^t &= t_{(k,j)}^{\text{inf}} - t_{(k,j)} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Onde  $k = 1..Nm$  e  $j = 1..Nl_k$ .

Logo, o número de restrições de espessura  $N_g^t$  é determinado por:

$$N_g^t = \sum_{k=1}^{Nm} \sum_{j=1}^{Nl_k} 2. \quad (4.47)$$

Com o objetivo de melhorar o condicionamento numérico do algoritmo é feita a adimensionalização das restrições de espessura. Esse processo é feito dividindo as restrições de espessura por  $t_{(k,j)}^{\text{inf}}$ . Logo as restrições representadas pela Eq.(4.46) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} g_{(k,j,1)}^t &= \frac{1}{t_{(k,j)}^{\text{inf}}} \left( t_{(k,j)} - t_{(k,j)}^{\text{sup}} \right) \leq 0, \\ g_{(k,j,2)}^t &= 1 - \frac{t_{(k,j)}}{t_{(k,j)}^{\text{inf}}} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Onde  $k = 1..Nm$  e  $j = 1..Nl_k$ .

#### 4.4.4 Restrição de Tensão

No processo de otimização do 1º nível, além das restrições de espessura são utilizadas também as restrições de tensão. Da mesma forma que as espessuras, as tensões efetivas também são limitadas por um intervalo considerado admissível, logo:

$$\sigma_{(k,j)}^{\text{inf}} \leq \sigma_{(k,j,i)} \leq \sigma_{(k,j)}^{\text{sup}}. \quad (4.49)$$

Onde:

$\sigma_{(k,j)}^{\text{inf}}$ - limite inferior de tensão da  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ ;

$\sigma_{(k,j)}^{\text{sup}}$ - limite superior de tensão da  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ ;

$\sigma_{(k,j,i)}$ - tensão efetiva do  $i$ -ésimo elemento determinada na  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ .

Visto que uma alteração na espessura de qualquer lâmina pode alterar a tensão em qualquer elemento da malha, independente do grupo material pertencente, é necessário verificar se  $\sigma_{(k,j,i)}$  está dentro dos seus limites para todos os elementos da malha. Um único ponto foi escolhido para a determinação da tensão no elemento e está posicionado no seu baricentro, ou seja, no nó de número nove conforme mostrado na Fig.(3.11). Em relação a espessura da lâmina, foram escolhidos dois pontos, um na superfície inferior e o outro na superfície superior. Então o número de restrições de tensão  $N_g^\sigma$  pode ser determinado por:

$$N_g^\sigma = \sum_{k=1}^{Ntm} \sum_{i=1}^{Ne_k} \sum_{j=1}^{Nl_k} 4, \quad (4.50)$$

onde  $Ntm$  é número total de grupos materiais.

Considerando que  $\sigma_{(k,j,i)}^l$  e  $\sigma_{(k,j,i)}^u$  são as tensões na face inferior e superior, respectivamente, do  $i$ -ésimo elemento determinada na  $j$ -ésima lâmina do grupo material  $k$ , logo:

$$\begin{aligned} \sigma_{(k,j,i)}^l - \sigma_{(k,j)}^{\sup} &\leq 0, \\ \sigma_{(k,j)}^{\inf} - \sigma_{(k,j,i)}^l &\leq 0, \\ \sigma_{(k,j,i)}^u - \sigma_{(k,j)}^{\sup} &\leq 0, \\ \sigma_{(k,j)}^{\inf} - \sigma_{(k,j,i)}^u &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Onde  $k = 1..Ntm$ ,  $i = 1..Ne_k$  e  $j = 1..Nl_k$ .

Para as restrições de tensão também são feitas as adimensionalizações. Mas ao contrário das restrições de espessura as de tensões são adimensionalizadas utilizando o limite superior do intervalo admissível. Logo, as 4 restrições de tensão por lâmina de cada elemento podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{(k,j,i)}^l}{\sigma_{(k,j)}^{\sup}} - 1 &\leq 0, \\ \frac{1}{\sigma_{(k,j)}^{\sup}} (\sigma_{(k,j)}^{\inf} - \sigma_{(k,j,i)}^l) &\leq 0, \\ \frac{\sigma_{(k,j,i)}^u}{\sigma_{(k,j)}^{\sup}} - 1 &\leq 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma_{(k,j)}^{\sup}} (\sigma_{(k,j)}^{\inf} - \sigma_{(k,j,i)}^u) \leq 0. \quad (4.52)$$

A tensão efetiva  $\sigma_{(k,j,i)}$  adotada para comparação pode ser representada por qualquer componente do tensor tensão ou, até mesmo por uma norma de tensão. Para os problemas de otimização de estruturas de materiais compostos laminados a tensão efetiva escolhida para a comparação é determinada pelo Critério de Falha de Tsai-Hill, que para um estado triaxial de tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_{TH} = & \frac{\sigma_1^2}{X_r^2} - \sigma_2 \sigma_3 \left( -\frac{1}{X_r^2} + \frac{1}{Y_r^2} + \frac{1}{Z_r^2} \right) + \frac{\tau_{23}^2}{V_r^2} + \\ & + \frac{\sigma_2^2}{Y_r^2} - \sigma_1 \sigma_3 \left( \frac{1}{X_r^2} - \frac{1}{Y_r^2} + \frac{1}{Z_r^2} \right) + \frac{\tau_{13}^2}{U_r^2} + \\ & + \frac{\sigma_3^2}{Z_r^2} - \sigma_1 \sigma_2 \left( \frac{1}{X_r^2} + \frac{1}{Y_r^2} - \frac{1}{Z_r^2} \right) + \frac{\tau_{12}^2}{S_r^2}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Apesar de  $\sigma_{TH}$  ser adimensional, ou seja, não possuir dimensão de tensão, durante todo esse trabalho será utilizado o termo “tensão efetiva” para designá-la. Pois assim lembra-se que  $\sigma_{TH}$  trata-se de uma constante que, a partir de um estado de tensão, avalia o nível de solitação atuante na lâmina.

Esse critério considera que a falha ocorre quando  $\sigma_{TH} \geq 1$ . Como o valor de  $\sigma_{TH} \in [0, \infty)$  e considerando que as lâminas suportem a solitação submetida, os limites de tensão podem ser reescritos, resultando em:

$$0 \leq \sigma_{TH (k,j,i)} < 1. \quad (4.54)$$

Introduzindo agora um coeficiente de segurança  $C$  que representa o quanto o estado de tensão atual pode ser multiplicado para atingir o valor limite, a Eq.(4.54) pode ser reescrita como:

$$0 \leq \sigma_{TH (k,j,i)} \leq \frac{1}{C^2},$$

onde  $C$  deve pertencer ao intervalo  $(1, \infty)$  para que não ocorra a falha da lâmina.

Logo as restrições de tensão adimensionalizadas, dadas pela Eq.(4.52), podem ser representadas por:

$$g_{(k,j,i,1)}^\sigma = C^2 \sigma_{TH (k,j,i)}^1 - 1 \leq 0,$$

$$\begin{aligned}
 g_{(k,j,i,2)}^\sigma &= -C^2 \sigma_{TH}^l(k,j,i) \leq 0, \\
 g_{(k,j,i,3)}^\sigma &= C^2 \sigma_{TH}^u(k,j,i) - 1 \leq 0, \\
 g_{(k,j,i,4)}^\sigma &= -C^2 \sigma_{TH}^u(k,j,i) \leq 0.
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Onde  $k = 1..Ntm$ ,  $i = 1..Ne_k$  e  $j = 1..Nl_k$ .

Então, determinada as restrições de espessura e de tensão, o número total de restrições  $N_g^{t,\sigma}$  para o 1º nível de otimização é dado por:

$$N_g^{t,\sigma} = N_g^t + N_g^\sigma. \tag{4.56}$$

#### 4.4.5 Gradiente da Função Objetivo

O gradiente da função objetivo é em relação às variáveis de projeto, ou seja, em relação as espessuras  $t_{(k,j)}$ , onde a função objetivo é dada pela Eq.(4.44). Como pode-se observar, o único termo dependente de  $t_{(k,j)}$  é  $\mathbf{F}_\zeta(\mathbf{t})_{(k,j,i)}$  que é utilizado para determinar o volume do elemento, logo o gradiente da função objetivo é obtido por:

$$\nabla_{\mathbf{t}} f(\mathbf{t}) = \frac{1}{f_{inicial}} \sum_{k=1}^{Nm} \sum_{i=1}^{Ne_k} \sum_{j=1}^{Nl_k} \rho^{(k,j)} \frac{\partial V_\zeta(\mathbf{t})_{(k,j,i)}}{\partial t_{(k,j)}}, \tag{4.57}$$

onde:

$$\frac{\partial V_\zeta(\mathbf{t})_{(k,j,i)}}{\partial t_{(k,j)}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial}{\partial t_{(k,j)}} \int_{\zeta_{(k,j)}}^{\zeta_{(k,j+1)}} \det \mathbf{F}_\zeta(\mathbf{t})_{(k,j,i)} d\zeta \right) d\xi d\eta. \tag{4.58}$$

Para determinar o termo  $\frac{\partial}{\partial t_{(k,j)}} \int_{\zeta_{(k,j)}}^{\zeta_{(k,j+1)}} \det \mathbf{F}_\zeta(\mathbf{t})_{(k,j,i)} d\zeta$  utiliza-se a Regra de Leibnitz's para diferenciação da integral, Spiegel [1992] pág.149. Com isso:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t_{(k,j)}} \int_{\zeta_{(k,j)}}^{\zeta_{(k,j+1)}} \det \mathbf{F}_\zeta(\mathbf{t})_{(k,j,i)} d\zeta &= \det (\mathbf{F}_\zeta(\zeta_{(k,j+1)})_{(k,j,i)}) \frac{\partial \zeta_{(k,j+1)}}{\partial t_{(k,j)}} - \\
 &\quad \det (\mathbf{F}_\zeta(\zeta_{(k,j)})_{(k,j,i)}) \frac{\partial \zeta_{(k,j)}}{\partial t_{(k,j)}}.
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

#### 4.4.6 Gradiente da Restrição de Espessura

As restrições de espessura, como visto na Eq.(4.46), somente dependem diretamente  $t_{(k,j)}$ , logo a Eq.(4.37) pode ser reescrita como:

$$\nabla g_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_i}{\partial x_k}. \tag{4.60}$$



Onde  $i = 1..N_g$  e  $k = 1..N_x$ .

Efetuada a mudança de variável  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{t}$  e substituindo as restrições dadas pela Eq.(4.48) em  $G_i$  se obtém:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{(k,j,1)}^t}{\partial t_{(k,j)}} &= \frac{1}{t_{(k,j)}^{\text{inf}}}, \\ \frac{\partial g_{(k,j,2)}^t}{\partial t_{(k,j)}} &= -\frac{1}{t_{(k,j)}^{\text{inf}}}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Onde  $k = 1..Nm$  e  $j = 1..Nl_k$ .

#### 4.4.7 Gradiente da Restrição de Tensão

O gradiente das restrições de tensão não podem ser determinados diretamente pois as tensões dependem da espessura das camadas. Como pode ser visto na Eq.(4.49) não existe nenhuma dependência direta das restrições de tensão com as espessuras das camadas, logo a Eq.(4.37) pode ser reescrita como:

$$\nabla g_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_i}{\partial U_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}. \quad (4.62)$$

Onde  $i = 1..N_g$ ,  $k = 1..N_x$  e  $j = 1..n$ .

Efetuada a mudança de variável  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{t}$  e substituindo as restrições dadas pela Eq.(4.55) em  $G_i$  se obtém:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{(k,j,i,1)}^\sigma}{\partial t_{(k,j)}} &= C^2 \frac{\partial \sigma_{TH}^l(k,j,i)}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t_{(k,j)}} \leq 0, \\ \frac{\partial g_{(k,j,i,2)}^\sigma}{\partial t_{(k,j)}} &= -C^2 \frac{\partial \sigma_{TH}^l(k,j,i)}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t_{(k,j)}} \leq 0, \\ \frac{\partial g_{(k,j,i,3)}^\sigma}{\partial t_{(k,j)}} &= C^2 \frac{\partial \sigma_{TH}^u(k,j,i)}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t_{(k,j)}} \leq 0, \\ \frac{\partial g_{(k,j,i,4)}^\sigma}{\partial t_{(k,j)}} &= -C^2 \frac{\partial \sigma_{TH}^u(k,j,i)}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t_{(k,j)}} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Onde  $k = 1..Ntm$ ,  $j = 1..Nl_k$  e  $i = 1..Ne_k$ .

O termo  $\frac{\partial \sigma}{\partial U}$  da Eq.(4.63) pode ser determinado diretamente derivando a Eq.(4.53), logo:

$$\frac{\partial \sigma_{TH}(k,j,i)}{\partial U} = \left\{ 2 \frac{\sigma_1}{X_r^2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial U} - \left( -\frac{1}{X_r^2} + \frac{1}{Y_r^2} + \frac{1}{Z_r^2} \right) \left( \sigma_2 \frac{\partial \sigma_3}{\partial U} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial U} \sigma_3 \right) + 2 \frac{\tau_{23}}{V_r^2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial U} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +2\frac{\sigma_2}{Y_r^2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial U} - \left( \frac{1}{X_r^2} - \frac{1}{Y_r^2} + \frac{1}{Z_r^2} \right) \left( \sigma_1 \frac{\partial \sigma_3}{\partial U} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial U} \sigma_3 \right) + 2\frac{\tau_{13}}{U_r^2} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial U} + \\
 & +2\frac{\sigma_3}{Z_r^2} \frac{\partial \sigma_3}{\partial U} - \left( \frac{1}{X_r^2} + \frac{1}{Y_r^2} - \frac{1}{Z_r^2} \right) \left( \sigma_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial U} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial U} \sigma_2 \right) + 2\frac{\tau_{12}}{S_r^2} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial U} \left. \right\} \cdot \frac{\partial U}{\partial t_{(k,j)}} \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

O outro termo da Eq.(4.63), o  $\frac{\partial U}{\partial t_{(k,j)}}$  é determinado efetuando a mudança de variável  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{t}$  e resolvendo o sistema de equações lineares dado pela Eq.(4.39). Logo:

$$\mathbf{K} \frac{\partial U}{\partial t_{(k,j)}} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_{(k,j)}} \mathbf{U}. \quad (4.65)$$

Onde  $k = 1..Ntm$  e  $j = 1..Nl_k$ .

## 4.5 Formulação do Problema do 2º Nível

### 4.5.1 Variável de Projeto

As variáveis de projeto consideradas no 2º nível de otimização representam o ângulo de orientação das fibras das lâminas que constituem os grupos materiais a serem otimizados. São designados por  $\theta$ , onde  $\theta_{(k,j)}$  representa o ângulo de orientação das fibras da  $j$ -ésima lâmina pertencente ao grupo material  $k$ .

### 4.5.2 Função Objetivo

No 2º nível de otimização, a minimização é feita localmente para cada lâmina de cada grupo material a ser otimizado. A função objetivo  $\phi$  a ser minimizada representa a tensão efetiva média determinada pelo Critério de Tsai-Hill e é obtida por:

$$\phi(\theta) = \sum_{k=1}^{Ntm} \frac{1}{Ne_k} \sum_{i=1}^{Ne_k} \sum_{j=1}^{Nl_k} \sigma_{TH}^l(k,j,i) + \sigma_{TH}^u(k,j,i). \quad (4.66)$$

As tensões efetivas são obtidas através do estado de tensão, representado pelas componentes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , determinado no 9º nó. Então, dado o estado de tensão no elemento, pode-se obter as tensões nas direções principais de ortotropia ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$ ) utilizando a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  dado pela Eq.(2.52), e conseqüentemente, determinar a tensão efetiva através da Eq.(4.53).

### 4.5.3 Restrição de Ângulo

As restrições impostas nesse nível de otimização impõem limites nos ângulos de orientação das fibras. Esses limites adotados para as variações angulares definem todo o intervalo fisicamente viável pois a função objetivo é periódica a cada intervalo de  $180^\circ$ . Logo os ângulos devem permanecer no intervalo dado por:

$$-90^\circ \leq \theta_{(k,j)} \leq 90^\circ. \quad (4.67)$$

Onde  $k = 1..Nm$  e  $j = 1..Nl_k$ .

## 4.6 Algoritmo de Minimização 1-D

### 4.6.1 Quadratic Golden Side Search

É desejável ter um algoritmo para encontrar o ótimo de uma função 1-D que seja eficiente e preciso. Existem vários algoritmos de otimização 1-D disponíveis sendo que o “Golden Search” e o “Brent” são os dois mais populares.

O “Golden Search”, embora seja um algoritmo lento, tem sido aplicado em vários campos. A vantagem de se utilizar esse método é que para quase todo tipo de função ele pode encontrar a solução ótima precisamente. De acordo com Yu et al [1991], Jarratt propôs um algoritmo de sucessivas interpolações quadráticas que é mais rápido, porém a solução obtida por esse método não é confiável em todo tipo de aplicação. “Brent” combinou o método de “Golden Search” e o da interpolação quadrática em um só algoritmo que é mais rápido e normalmente confiável na localização do mínimo. Durante esse processo de procura o algoritmo acompanha e atualiza seis pontos no intervalo atual de procura. O algoritmo de “Brent” é relativamente rápido e seguro mas falha em alguns casos.

O algoritmo de procura 1-D utilizado neste trabalho, o “Quadratic Golden Side Search” foi proposto por Yu et al [1991]. Esse algoritmo combina o método da interpolação quadrática, o “Golden Search” e um algoritmo de procura lateral que possui as vantagens individuais de cada um portanto resultando em um algoritmo mais eficiente e mais confiável. O algoritmo unificado se baseia em duas etapas. Inicialmente ele utiliza o método de interpolação

quadrática para reduzir o intervalo de procura até um tamanho suficientemente pequeno. A finalização dessa etapa é obtida quando os pontos de interpolação tem uma distância menor que um erro definido. Reduzido o tamanho do intervalo de procura, o segundo processo é baseado na comparação dos valores da função e os novos pontos são determinados pela divisão apropriada de segmentos de retas tal como o “Golden Search” e conseqüentemente obtendo uma solução com maior precisão.

O algoritmo assume que no interior do intervalo inicial existe um mínimo local. Esse intervalo contendo o mínimo é obtido rapidamente utilizando a subrotina MNBRACK oferecida por Press et. al. [1992].

## 4.7 Algoritmo de Minimização N-D

### 4.7.1 Steepest Descent Method

O “Steepest Descent Method” é um método bem simples. A idéia é de se utilizar somente a informação da primeira derivada da função objetivo. O método inicia a busca do ponto ótimo da função a partir de um valor pré estimado  $\mathbf{x}^1$  e em seguida é determinada a direção de descida no ponto pela Eq.(4.68).

$$\mathbf{d}^k = -\nabla_x f(\mathbf{x}^k). \quad (4.68)$$

Se a direção de descida não é nula então é computado, pela procura 1-D, o tamanho do passo  $\alpha$  e o próximo ponto a ser determinado pela Eq.(4.69). Esse processo é repetido até a convergência, ou seja, até que  $\nabla_x f(\mathbf{x}^k) < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é a tolerância adotada para o problema.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k. \quad (4.69)$$

O “Steepest Descent Method” apesar de ser um método bem simples não foi utilizado nesse trabalho porque possui uma taxa de convergência ruim. Isso ocorre porque somente a informação da derivada de primeira ordem é utilizada.

### 4.7.2 Método de Newton

O Método de Newton possui uma propriedade de convergência muito boa porque são usadas as informações da derivada de segunda ordem. Mas para maioria dos problemas

de projeto de engenharia esse método é ineficiente porque requer o cálculo de  $n(n+1)/2$  derivadas de segunda ordem, onde  $n$  representa o número de variáveis de projeto, Arora [1989].

A idéia básica do método é usar a expansão até a segunda ordem da função objetivo, em Série de Taylor, no ponto. Se as derivadas de segunda ordem, representadas pela Eq.(4.70), são possíveis de serem calculadas pode-se obter melhores informações sobre a função e uma direção de descida mais precisa é encontrada. Isso faz com que a taxa de convergência do método seja alta.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^k) = \nabla_x^2 f(\mathbf{x}^k). \quad (4.70)$$

Determinada a direção de descida, dada pela Eq.(4.71), e o tamanho do passo  $\alpha$  por qualquer método de procura 1-D o novo ponto pode ser obtido através da Eq.(4.69). Para encontrar o ponto ótimo do problema esse processo deve ser repetido até a convergência.

$$\mathbf{d}^k = -\mathbf{H}^{-1} \nabla_x f(\mathbf{x}^k). \quad (4.71)$$

A complexidade associada com o alto custo computacional para a determinação da derivada de segunda ordem da função objetivo e das restrições foi o fator decisivo por não se optar pelo uso do Método de Newton.

Pode-se notar, em ambos os métodos, que cada iteração é iniciada com novas variáveis de projeto sem usar qualquer outra informação da iteração anterior.

### 4.7.3 Variable Metric Method

O “Variable Metric Method” é o método utilizado para minimizar uma função sem restrição. Optou-se por este método já que ele possui uma taxa de convergência superior ao “Steepest Descent Method” e, para o problema proposto, apresenta um custo computacional aceitável. Várias variações desse método são apresentados na literatura específica, Arora [1989], Bazaraa e Shetty [1979], Chong e Zak [1996] e McCormick [1983]. Os dois mais utilizados são o DFP (Davidon-Fletcher-Powell) e o BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). O esquema do BFGS e do DFP diferem somente em detalhes tais como erro de arredondamento, tolerância de convergência e que estão fora do escopo desse trabalho. É

geralmente reconhecido que, empiricamente, o BFGS é superior nesses detalhes e tem mostrado ser mais eficiente em aplicações, Arora [1989]. Devido a esse fato foi utilizado o BFGS o qual é descrito a seguir.

A idéia básica do “Variable Metric Method” é construir, iterativamente, uma boa aproximação para a inversa da matriz Hessiana  $\mathbf{H}^{-1}$ , ou seja, construir uma seqüência de matrizes  $\mathbf{A}^k$  com a propriedade,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{H}^{-1}. \quad (4.72)$$

A razão deste método também ser chamado de Quasi-Newton pode ser entendido a seguir. Considera a busca do mínimo usando o Método de Newton para a procura do ponto ótimo no qual o gradiente da função objetivo é nulo. Na vizinhança do ponto atual  $\mathbf{x}^k$ , a segunda ordem da expansão de Taylor e dada por:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^k) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \cdot \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k), \quad (4.73)$$

e conseqüentemente:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k). \quad (4.74)$$

No Método de Newton é imposto que  $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$  para determinar o próximo ponto:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = -\mathbf{H}^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k). \quad (4.75)$$

O método utilizado difere do Método de Newton porque não se determina exatamente a matriz Hessiana de  $f$ , mas sim uma aproximação dela. Esse método tem se mostrado na prática superior ao método de Newton. Para entender esse resultado, considere a direção de descida da função  $f$  no ponto  $\mathbf{x}^k$ . Essas são as direções  $\mathbf{d}$  ao longo da qual a função objetivo decresce:  $\nabla f(\mathbf{x}^k) \cdot \mathbf{d} < 0$ . Para a direção de Newton ser uma direção de descida, deve se ter:

$$\nabla f(\mathbf{x}^k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = -(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \cdot \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) < 0, \quad (4.76)$$

isto é,  $\mathbf{H}$  deve ser positiva definida. Tomando o passo atual de Newton com a Hessiana exata pode-se mover para pontos onde a função incrementa de valor. A idéia do Quasi-Newton é iniciar o processo iterativo com a aproximação de  $\mathbf{H}$  sendo positiva definida e

simétrica, usualmente utilizando a matriz identidade, e construir aproximando  $\mathbf{A}^k$  de tal forma que a matriz  $\mathbf{A}^k$  permaneça sempre positiva definida e simétrica. Portanto próximo ao mínimo é garantido que sempre a direção de descida determinada moverá para um ponto que decreta a função objetivo. Perto do mínimo, a atualização de  $\mathbf{A}^k$  tende à inversa da Hessiana exata e é obtida a convergência quadrática do Método de Newton.

Considerando que o processo é iterativo a Eq.(4.74) pode ser reescrita como:

$$(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = \mathbf{A} (\nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}^k)). \quad (4.77)$$

A atualização da inversa da Hessiana é feita através de  $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k + \text{correção}$ . Uma das vantagens desse método é que não é necessário determinar a segunda derivada da função objetivo. A atualização requer a determinação somente da primeira derivada e a utilização de informações obtidas em iterações anteriores para a aceleração da convergência em direção ao mínimo.

A atualização pelo DFP é feito através de:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k + & \frac{(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) \otimes (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k)}{(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) \cdot (\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k))} \\ & - \frac{[\mathbf{A}^k (\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k))] \otimes [\mathbf{A}^k (\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k))]}{(\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k)) \cdot \mathbf{A}^k (\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k))}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

A atualização da inversa da Hessiana utilizando a variação de BFGS é exatamente a mesma mostrada pela Eq.(4.78), mas com um termo adicional,

$$\dots + [(\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k)) \cdot \mathbf{A}^k (\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k))] \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \quad (4.79)$$

onde  $\mathbf{c}$  é definido como o vetor:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \equiv & \frac{(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k)}{(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) \cdot (\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k))} \\ & - \frac{\mathbf{A}^k (\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k))}{(\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k)) \cdot \mathbf{A}^k (\nabla_x f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla_x f(\mathbf{x}^k))}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

A direção de descida pode ser obtida através de

$$\mathbf{d}^k = -\mathbf{A}^k \nabla_x f(\mathbf{x}^k). \quad (4.81)$$

Devido a propriedade de  $\mathbf{A}^k$ , positiva definida,  $\mathbf{d}$  é direção de descida. Para determinar o ponto de ótimo basta computar, pela procura 1-D, o tamanho do passo  $\alpha$ , atualizar as variáveis de projeto  $\mathbf{x}^k$  pela Eq.(4.82) e repetir o processo até a convergência. Onde a convergência é obtida quando  $\nabla_x f(\mathbf{x}^k) < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é a tolerância adotada para o problema.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k. \quad (4.82)$$

Embora raro, pode acontecer que os erros de arredondamento tornem a matriz  $\mathbf{A}^k$  próxima de ser singular ou de se tornar não positiva definida. Isto pode resultar que a direção estabelecida não seja de descida e também que devido a aproximação da singularidade da matriz  $\mathbf{A}^k$  as outras subseqüentes tenderão a ficar próximas da singularidade. Para resolver esses raros problemas existem algumas implementações modernas do “Variable Metric Method” que podem ser encontradas em uma revisão mais aprofundada sobre o assunto.

## 4.8 Método do Refino Sucessivo

O Método do Refino Sucessivo é utilizado, nesse trabalho, para a busca do ângulo ótimo de orientação das fibras. Esse método foi escolhido porque tem a capacidade de encontrar o mínimo global da função objetivo  $\phi$  e por ser relativamente rápido, pois o processo para cálculo de  $\phi$  é simples e o intervalo de procura é pequeno e bem definido. A idéia básica do método, conforme mostrado pela Fig.(4.2), é a seguinte:

- i- dividir o intervalo de procura em pontos  ${}^1p_i$  igualmente espaçados, onde o intervalo é definido por  $L_1 = \{\theta \mid \theta \in [-90^\circ, 90^\circ]\}$ ;
- ii- determinar o ponto  ${}^1p_i^*$  em que a função objetivo  $\phi$  é menor;
- iii- determinar o novo intervalo de procura definido por  $L_2 = \{\theta \mid \theta \in ({}^1p_{i-1}^*, {}^1p_{i+1}^*)\}$ ;
- iv- utilizar um algoritmo para a busca do mínimo local no intervalo  $L_2$ ;
- v- determinar o mínimo global  ${}^2p_i^*$  pertencente ao intervalo  $L_2$ .



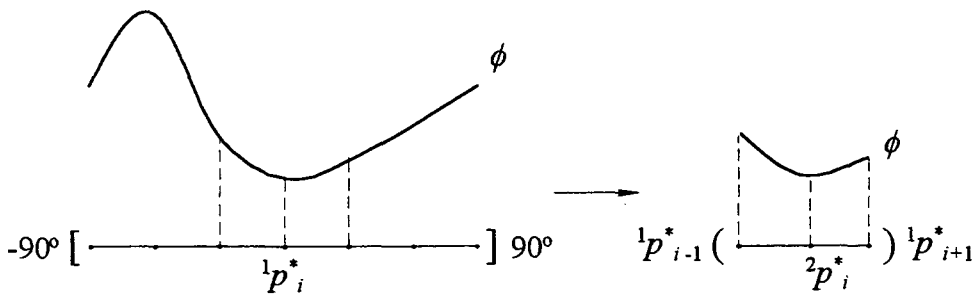


Figura 4.2: Esquema do Método do Refino Sucessivo.

Nesse trabalho, é utilizado o Método da Interpolação Quadrática para a busca do mínimo local. A descrição desse método pode ser encontrada em qualquer referência de otimização citada. Para a determinação do ponto  ${}^1p_i^*$  o intervalo  $L_1$  foi dividido em 13 pontos, ou seja, em  $15^\circ$  em  $15^\circ$ . Esse valor foi definido com o intuito de se garantir que a primeira derivada da função  $\phi$  não mude de sinal no intervalo  $[{}^1p_i, {}^1p_{i+1}]$  e conseqüentemente, garantindo que o mínimo encontrado seja global. Foi adotada uma tolerância de  $1^\circ$  para a determinação do ângulo ótimo de orientação das fibras.

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados, analisados e comparados resultados numéricos de vários problemas cujas soluções são encontradas nas referências citadas. Os problemas propostos tem o objetivo de validar e comprovar a viabilidade do modelo de análise e otimização de cascas de materiais compostos laminados. Os resultados são obtidos através de um programa escrito, em linguagem Fortran 90, durante a dissertação onde foram implementados o Método dos Elementos Finitos e o processo de otimização descrito anteriormente.

As aplicações englobam as mais diversas situações para comprovar a versatilidade do programa. São utilizadas estruturas de diferentes geometrias, planas e curvas, constituídas de materiais isotrópicos e anisotrópicos submetidas à varios tipos de carregamentos e condições de contorno.

Os materiais utilizados nos problemas possuem características que os classificam como isotrópicos, transversalmente isotrópicos e anisotrópicos podendo possuir uma ou várias lâminas. Suas propriedades mecânicas são apresentadas na Tab.(5.1).

Em todas as aplicações,  $h$  é a espessura da placa ou casca,  $a$  o comprimento característico da placa,  $R$  o raio do cilindro e  $q_0$  a intensidade do carregamento atuante.

Os resultados apresentados quando adimensionalizados são obtidos por meio das seguintes relações:

$$\bar{w} = w \left( \frac{E_2 h^3}{q_0 a^4} \right) 10^n,$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i &= \sigma_i \left( \frac{h^2}{q_0 a^2} \right), & i = x, y, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy} \left( \frac{h^2}{q_0 a^2} \right), \\ \bar{\tau}_{iz} &= \tau_{iz} \left( \frac{h}{q_0 a} \right), & i = x, y. \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $E_2$  é o módulo de elasticidade na direção transversal às fibras e  $n$  é uma constante inteira que define o fator multiplicativo de  $w$ .

Tabela 5.1: Propriedades mecânicas dos materiais.

Denominação	Característica	Propriedades Mecânicas
Material 1	isotrópico	$E = 210 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3$
Material 2	transver. isotrópico	$E_1 \quad G_{12} = 0.5 E_2 \quad \nu_{12} = 0.25$ $E_2 = E_1 / 25 \quad G_{13} = 0.5 E_3 \quad \nu_{13} = 0.25$ $E_3 = E_1 / 25 \quad G_{23} = 0.2 E_3 \quad \nu_{23} = 0.25$
Material 3	transver. isotrópico	$E_1 \quad G_{12} = 0.6 E_2 \quad \nu_{12} = 0.25$ $E_2 = E_1 / 40 \quad G_{13} = 0.6 E_3 \quad \nu_{13} = 0.25$ $E_3 = E_1 / 40 \quad G_{23} = 0.5 E_3 \quad \nu_{23} = 0.25$
Material 4	anisotrópico	$E_1 = 7.5 \times 10^6 \quad G_{12} = 1.25 \times 10^6 \quad \nu_{12} = 0.25$ $E_2 = 2.0 \times 10^6 \quad G_{13} = 6.25 \times 10^5 \quad \nu_{13} = 0.25$ $E_3 = 2.0 \times 10^6 \quad G_{23} = 6.25 \times 10^5 \quad \nu_{23} = 0.25$
Material 5	transver. isotrópico	$E_1 = 76.0 \text{ GPa} \quad G_{12} = 2.30 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.34$ $E_2 = 5.5 \text{ GPa} \quad G_{13} = 2.30 \text{ GPa} \quad \nu_{13} = 0.34$ $E_3 = 5.5 \text{ GPa} \quad G_{23} = 1.15 \text{ GPa} \quad \nu_{23} = 0.34$ $X_T = 1400 \text{ MPa} \quad Y_T = 32 \text{ MPa} \quad Z_T = 32 \text{ MPa}$ $X_C = 235 \text{ MPa} \quad Y_C = 140 \text{ MPa} \quad Z_C = 140 \text{ MPa}$ $S_r = 60 \text{ MPa} \quad U_r = 60 \text{ MPa} \quad V_r = 30 \text{ MPa}$ $\rho = 1400 \text{ Kg/m}^3$
Material 6	isotrópico	$E = 210 \text{ GPa} \quad G = 84 \text{ GPa} \quad \nu = 0.25$ $X_T = 250 \text{ MPa} \quad S_r = 165 \text{ MPa}$ $X_T = X_C = Y_T = Y_C = Z_T = Z_C$ $S_r = U_r = V_r$ $\rho = 7500 \text{ Kg/m}^3$
Material 7	transver. isotrópico	Propriedades do Material 5 a não ser $X_T = 1400 \text{ MPa} \quad Y_T = 12 \text{ MPa} \quad Z_T = 12 \text{ MPa}$ $X_C = 235 \text{ MPa} \quad Y_C = 53 \text{ MPa} \quad Z_C = 53 \text{ MPa}$ $S_r = 34 \text{ MPa} \quad U_r = 34 \text{ MPa} \quad V_r = 13,6 \text{ MPa}$

Nos problemas analisados são considerados diversas situações. São consideradas restrições livres, apoiadas e engastadas e carregamentos concentrados, uniformemente distribuídos e senoidais.

Vale lembrar que das equações de equilíbrio de placas e cascas laminadas para a Teoria

de Kant, resultam oito condições de contorno associadas aos graus de liberdade  $u, v, w, \theta_1, \theta_2, w^*, \theta_1^* \text{ e } \theta_2^*$ . Quando rotacionadas para o sistema global aparecem quatro graus de liberdade adicionais resultando nos 12 graus de liberdade na base global, representados por  $u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, u_x^*, u_y^*, u_z^*, \theta_x^* \text{ e } \theta_y^* \text{ e } \theta_z^*$ . No caso particular de uma placa retangular, em cada ponto do contorno devem ser especificadas as doze condições de contorno, de acordo com a Tab.(5.2), onde 0 e 1 represntam graus de liberdade livre e fixo, respectivamente.

Tabela 5.2: Condição de contorno.

Tipo de apoio	Condição de contorno											
	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$	$u_x^*$	$u_y^*$	$u_z^*$	$\theta_x^*$	$\theta_y^*$	$\theta_z^*$
livre	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
simples em x	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
simples em y	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
simétrico em x	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
simétrico em y	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
engastado	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

## 5.2 Problemas com Materiais Isotrópicos

### 5.2.1 Patch Test

O “Patch Test” é um teste numérico para verificar se o elemento satisfaz a condição de ser completo, ou seja, ter a capacidade de representar uma função linear. Através deste teste pode se avaliar a sensibilidade do elemento à distorção da malha.

Uma placa quadrada constituída pelo Material 1, descrito na Tab.(5.1), é discretizada usando-se nove elementos regulares e nove elementos linearmente distorcidos, representada pela Fig.(5.1) por (a) e (b), respectivamente. A placa é submetida à dois estados de solicitação, um de tração e o outro de flexão.

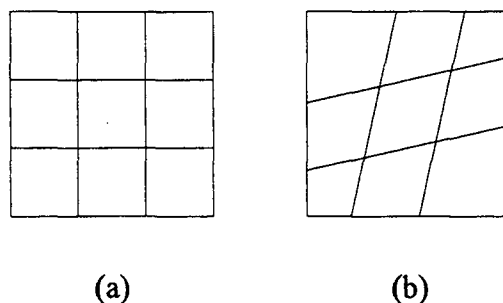


Figura 5.1: a) Malha regular. b) Malha distorcida.

Primeiramente o teste é feito tracionando uniaxialmente a placa conforme a Fig.(5.2). Devido a simetria material, geométrica e de carregamento somente 1/4 da placa é discretizada. São analisadas duas razões de lado sobre espessura  $a/h$  e obtidos os valores do deslocamento axial no sentido da tração no ponto P para malha regular e distorcida. Estes valores são mostrados na Tab.(5.3), onde os subscritos  $a$  e  $b$  representam malha regular e distorcida, respectivamente.

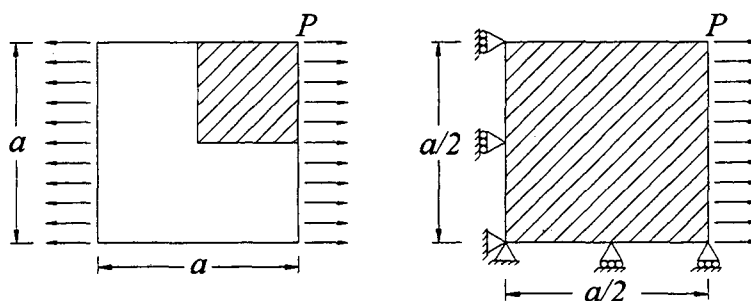


Figura 5.2: Placa isotrópica submetida a tração.

Da análise dos resultados deste problema conclui-se que e as soluções obtidas utilizando a malha regular e a malha distorcida são idênticas. Isso mostra que para esse tipo de solicitação o elemento finito distorcido comporta-se muito bem.

Tabela 5.3: Deslocamento do ponto P para malha regular e distorcida sob tração.

$a/h$	$u_a$	$u_b$	$u_a/u_b \cdot 100\%$
10	$0.4333 \times 10^{-8}$	$0.4333 \times 10^{-8}$	1.00
1000	$0.4333 \times 10^{-6}$	$0.4333 \times 10^{-6}$	1.00

O segundo teste é feito considerando a placa simplesmente apoiada submetida à um carregamento, no ponto P, concentrado e na direção transversal à face da placa. São utilizadas várias razões de  $a/h$ . Nesse caso pode-se observar a presença de locking<sup>1</sup> somente na malha distorcida. Isso ocorre quando a relação lado por espessura da placa ultrapassa à 400. Para evitar este problema numérico é utilizada uma integração reduzida de 2 x 2 pontos nos termos relacionados com a energia de cisalhamento. Os valores do deslocamento transversal no ponto P para a malha regular, malha distorcida e malha distorcida utilizando a sub

<sup>1</sup>Locking - Travamento que consiste na redução da capacidade de aproximação do elemento pelo surgimento de uma excessiva rigidez na estrutura.

integração são comparados com os obtidos analiticamente por Roark [1975] e mostrados na Fig.(5.3).

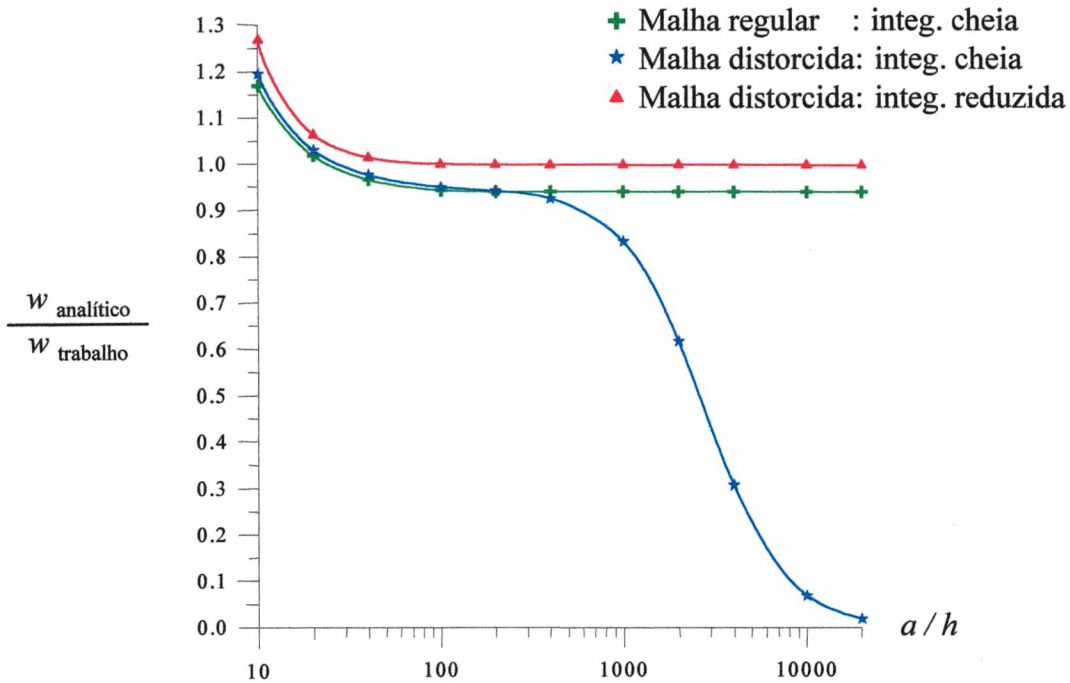


Figura 5.3: Deslocamento do ponto P para malha regular e distorcida sob flexão.

Pode-se observar que, com a utilização da sub-integração, os resultados permaneceram próximos aos obtidos por Roark resolvendo o problema de locking. A maior diferença dos valores de deflexão no ponto  $P$  é atingida quando razão  $a/h = 10$ . Isso ocorre porque na análise feita por Roark foi considerada uma placa fina, o que não se pode considerar quando se utiliza essa razão.

### 5.2.2 Placa isotrópica

Uma placa isotrópica constituída pelo Material 1, descrito na Tab.(5.1), é analisada neste caso. A placa quadrada, de lado  $a$ , simplesmente apoiada é submetida à um carregamento uniformemente distribuído de intensidade  $q_0$ . Devido à condição de simetria de material, carregamento e condição de contorno, somente 1/4 da placa é discretizado. As condições de contorno utilizadas, devido à simetria, foram indicadas na Tab.(5.2). A placa é discretizada por quatro malhas com densidade de 1, 4, 16 e 64 elementos.

Os resultados mostrados na Tab.(5.4) representam os valores da deflexão adimensionalizadas  $\bar{w}$  no centro da placa para  $n = 2$ , ou seja, os valores de  $\bar{w}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ . Pode-se verificar que a convergência da solução é obtida rapidamente. Esses resultados são comparados com mais duas teorias e pode-se verificar que os valores obtidos estão bem próximos. Os resultados utilizando a Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem, a FSDT e a Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior, a HSDT foram obtidos por <sup>2</sup>Reddy [1984] e desconsideram as deformações normais transversais, ou seja,  $\epsilon_z = 0$ . Quando a razão  $a/h$  aumenta a solução tende à solução obtida pela Teoria de Placa Fina, onde  $\bar{w} = 4.44$ .

Tabela 5.4: Comparação da deflexão  $\bar{w}$  no centro da placa sob flexão.

$a/h$	M 1x1	M 2x2	M 4x4	M 8x8	HSDT	FSDT
5	5.60	5.43	5.42	5.42	5.35	5.36
10	4.84	4.69	4.68	4.68	4.67	4.67
100	4.59	4.45	4.44	4.44	4.44	4.44

Nesse problema, também são analisados os valores de tensões normais,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ; tensão cisalhante,  $\tau_{xy}$ ; e tensões cisalhantes transversais,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . Esses valores são determinados nos seguintes pontos:

$$\begin{aligned}
 &\sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right), \\
 &\sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right), \\
 &\tau_{xy}\left(0, 0, \pm \frac{h}{2}\right), \\
 &\tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right), \\
 &\tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como pode-se observar na Tab.(5.5), as tensões no plano de referência da placa se aproximaram mais que as tensões cisalhantes transversais quando comparadas com os valores obtidos por Reddy. Essas variações são admissíveis devido à diferença nas formulações. Para  $a/h = 100$  as tensões cisalhantes transversais obtidas foram significativamente maiores.

Tabela 5.5: Comparação das tensões em uma placa sob flexão.

$a/h$	Teoria	$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz}$	
				Eq. const.	Eq. equil.
5	M4x4	0.2965	0.2135	0.5177	
	HSDT	0.2944	0.2112	0.4840	0.3703
	FSDT	0.2873	0.1946	0.3928	0.4909
10	M4x4	0.2903	0.2030	0.5951	
	HSDT	0.2890	0.1990	0.4890	0.4543
	FSDT	0.2873	0.1946	0.3928	0.4909
100	M4x4	0.2880	0.1986	1.7717	
	HSDT	0.2873	0.1947	0.4909	0.4905
	FSDT	0.2873	0.1946	0.3928	0.4909

### 5.3 Problemas com Materiais Ortotrópicos

#### 5.3.1 Placa ortotrópica

Uma placa de geometria retangular  $b = 2a$ , constituída de uma única lâmina, submetida à um carregamento uniformemente distribuído de intensidade  $q_0$  e com as quatro extremidades engastadas, como mostrado pela Fig.(5.4), é analisada. O material da placa possui características ortotrópicas e suas propriedades elásticas são referentes ao Material 3 da Tab.(5.1). São considerados, para duas razões de  $a/h$ , vários ângulos de orientações das fibras. A condição de simetria, nesse caso, não pode ser aplicada pois as orientações das fibras diferentes de  $0^\circ$  e  $90^\circ$  resultam em uma não simetria material, com isso toda a placa é modelada. Esse problema é considerado um teste difícil para o elemento devido à combinação da razão de aspecto da placa, com a condição de contorno e com a alta anisotropia material.

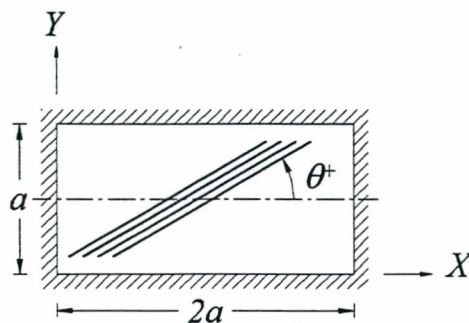


Figura 5.4: Placa ortotrópica submetida a um carregamento uniformemente distribuído.



Este problema foi inicialmente proposto por Lakshiminarayana e Murthy [1984] e os resultados apresentados, obtidos com o elemento TRIPLT, têm sido usados como referência uma vez que não existe solução analítica. O elemento triangular TRIPLT possui três nós com quinze graus de liberdade cada um. Nessa análise, eles discretizaram a placa ortotrópica utilizando uma malha de 8x8 elementos.

Noel [1991] apresenta os resultados obtidos através do Método dos Elementos Finitos que utiliza um elemento quadrilateral, Lagrangeano de nove nós e uma formulação usando o Princípio de Hellinger-Reissner modificado. Noel também discretizou a placa utilizando uma malha de densidade de 8x8 elementos.

Para uma placa fina, os resultados obtidos por Wilt et al [1990], usando um elemento quadrilateral, de quatro nós e uma malha de 10x10 elementos, também são apresentados para comparação.

Os deslocamentos transversais adimensionalizados  $\bar{w}$  no centro da placa, para uma placa espessa ( $a/h = 10$ ) e para uma placa fina ( $a/h = 100$ ), obtidos utilizando malha 8x8 são apresentados na Tab.(5.6), considerando o fator multiplicativo  $n = 3$ . Nessa análise foram utilizados os dois tipos de integração, cheia e reduzida.

Tabela 5.6: Efeito da orientação das fibras na deflexão do centro de uma placa retangular engastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

$a/h$	$\theta$	M 8x8	M 8x8	TRIPLT	Noel	Wilt
		integ. cheia	integ. red.	8x8	8x8	10x10
10	0°	15.6713	15.7343	16.0507	16.2272	—
	15°	14.5403	14.6168	14.8537	15.0643	—
	30°	10.7993	10.8630	11.0010	11.1749	—
	45°	6.6797	6.7023	6.8400	6.9045	—
	60°	4.3700	4.3751	4.5215	4.5367	—
	75°	3.3957	3.4000	3.5430	3.5458	—
	90°	3.1338	3.1388	3.2798	3.2798	—
100	0°	9.9150	10.3073	10.5375	10.6598	10.8879
	15°	9.0188	9.5603	9.4455	8.8907	10.0215
	30°	5.8082	6.2694	6.0859	6.4782	6.5132
	45°	2.7256	2.8067	2.8985	2.8969	2.9226
	60°	1.3073	1.3409	1.4139	1.3847	1.3820
	75°	0.8573	0.8883	0.9134	0.9177	0.9133
	90°	0.7664	0.7793	0.8017	0.8051	0.8073

A Fig.(5.5) mostra a placa ortotrópica com às fibras orientadas à 30° na configuração deformada. Pode-se notar, que devido à não simetria material, a deformação não é simétrica.

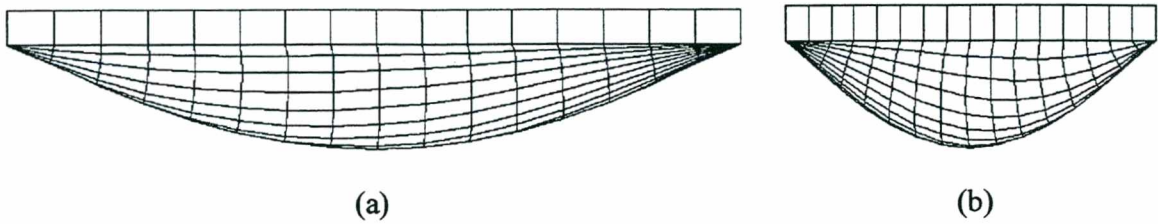


Figura 5.5: Placa ortotrópica,  $\theta = 30^\circ$ , na config. deformada: (a) plano XZ; (b) plano YZ.

Inicialmente é feita a comparação dos valores obtidos pela formulação proposta utilizando os dois tipos de integração. Como previsto, a deflexão no centro da placa foi maior quando utilizado a integração reduzida. Isso ocorre porque a sub-integração torna a estrutura um pouco mais flexível. Para a razão  $a/h = 10$ , a média das diferenças relativas foi de 0.3% e a maior foi de 0.6% e ocorreu quando  $\theta = 30^\circ$ . Agora, para  $a/h = 100$  a média das diferenças relativas foi de 3.9% e a maior foi de 7.4% e para o mesmo ângulo de 30°. Não deixa de ser curioso resaltar que o ângulo em torno de 30° corresponde ao pico máximo do momento torçor  $M_{xy}$ , Lakshiminarayana e Murthy [1984].

Comparando os resultados obtidos utilizando a sub-integração com as soluções determinadas pelos outros autores pode-se montar a Tab.(5.7) de diferenças, onde  $\theta$  é o ângulo em que ocorre a maior diferença.

Tabela 5.7: Diferenças das deflexões no centro da placa ortotrópica.

$a/h$		TRIPLT	Noel	Wilt
10	$\Delta_{med.} [\%]$	2.6	3.4	—
	$\Delta_{máx.} [\%]$	4.3	4.3	—
	$\theta [^\circ]$	90	90	—
100	$\Delta_{med.} [\%]$	2.9	3.8	3.8
	$\Delta_{máx.} [\%]$	5.2	7.5	5.3
	$\theta [^\circ]$	60	15	0

As diferenças são menores para  $a/h = 10$  e os valores máximos ocorreram quando  $\theta = 90^\circ$ . Tanto TRIPLT quanto Noel obtiveram defexões maiores para todos os ângulos. Avaliando a razão  $a/h = 100$ , as deflexões obtidas por Wilt foram sempre maiores enquanto

as obtidas pelo elemento TRIPLT e por Noel foram menores para os ângulos:  $15^\circ$  e  $30^\circ$ ;  $15^\circ$ , respectivamente.

Conclui-se que as soluções obtidas se mostraram próximas às obtidas pelos outros autores. Vale a pena resaltar que em seus trabalhos foram utilizados uma teoria de primeira ordem e uma relação constitutiva  $2D$ , e não uma teoria de ordem superior e uma relação constitutiva  $3D$  como nesse trabalho.

### 5.3.2 Laminado [0/90/90/0]

Um placa quadrada composta por quatro lâminas, [0/90/90/0], simplesmente apoiada é submetida à um carregamento senoidal. Nota-se que uma vez que o problema é simétrico somente 1/4 da placa necessita ser modelado. O carregamento senoidal é descrito por:

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (5.3)$$

sendo  $a$  e  $b$  as dimensões dos lados da placa e  $q_0$  a intensidade do carregamento. As propriedades elásticas consideradas são referentes ao Material 2 da Tab.(5.1). São analisadas várias razões de  $a/h$  para o problema. Os valores do deslocamento no centro da placa e das tensões nodais são determinados nos pontos representados pela Eq.(5.2), exceto que:

$$\sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{4}\right). \quad (5.4)$$

Os resultados foram obtidos utilizando uma malha de 8x8 elementos e são comparados com alguns resultados encontrados na literatura. Os resultados de Pagano e Hatfield [1972] foram obtidos através das equações tridimensionais da elasticidade. Os valores obtidos utilizando a HSDT e a FSDT são apresentados por <sup>1</sup>Reddy [1984] e foram obtidos através de séries. As tensões cisalhantes transversais, utilizando a FSDT, foram determinadas através da equação constitutiva 3D.

Tabela 5.8: Laminado [0/90/90/0] simplesmente apoiada submetida a um carregamento senoidal.

$a/h$	Teoria	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
4	M 8x8	1.8977	0.7124	0.6434	0.0454	0.2134	0.2491
	Pagano	1.9367	0.7200	0.6630	0.0467	0.2190	0.2920
	HSDT	1.8937	0.6651	0.6322	0.0440	0.2064	0.2389
	FSDT	1.7100	0.4059	0.5765	0.0308	0.1398	0.1963
10	M 8x8	0.7086	0.5649	0.3969	0.0268	0.2852	0.1637
	Pagano	0.7370	0.5590	0.4010	0.0275	0.3010	0.1960
	HSDT	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	0.1531
	FSDT	0.6628	0.4989	0.3615	0.0241	0.1667	0.1292
20	M 8x8	0.4952	0.5468	0.3080	0.0224	0.3108	0.1380
	Pagano	0.5128	0.5430	0.3080	0.0230	0.3280	0.1560
	HSDT	0.5060	0.5393	0.3043	0.0228	0.2825	0.1234
	FSDT	0.4912	0.5273	0.2957	0.0221	0.1749	0.1087
100	M 8x8	0.4213	0.5409	0.2717	0.0208	0.4147	0.2713
	Pagano	0.4347	0.5390	0.2710	0.0214	0.3390	0.1390
	HSDT	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213	0.2897	0.1117
	FSDT	0.4337	0.5382	0.2705	0.0213	0.1780	0.1009

A formulação apresentada nesse trabalho obteve bons resultados que podem ser observados na Tab.(5.8). Os valores da deflexão adimensionalizada  $\bar{w}$  no centro da placa, considerando  $n = 2$ , se aproximam dos valores obtidos pelas outras teorias. Pode-se verificar pela deflexão, que existe uma rigidez maior do laminado quando analisado pela teoria de ordem superior de Kant. Pode-se tornar o laminado um pouco menos rígido utilizando uma integração reduzida nos termos relacionados com a energia de cisalhamento. Os valores de tensões obtidos nesse trabalho se mativeram entre os obtidos por Pagano e Reddy utilizando a teoria da elasticidade 3D e a Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior, respectivamente. Somente para a razão  $a/h = 100$  os valores obtidos, inclusive da deflexão, apresentaram uma maior diferença.

A Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem mostrou-se eficiente somente nos cálculos das deflexões e tensões no plano do laminado e para razões  $a/h \geq 20$ . Percebe-se uma enorme discrepância nos valores das tensões cisalhantes transversais adimensionalizadas  $\bar{\tau}_{xz}$  e  $\bar{\tau}_{yz}$ , para todas as razões de  $a/h$ . Os valores obtidos pela FSDT são bem menores quando comparados com os obtidos pelas outras teorias, isso pode induzir erroneamente o engenheiro à subdimensionar um componente. Através desses resultados pode-se concluir

que a teoria de primeira ordem, mesmo considerando as deformações cisalhantes transversais, torna-se inadequada para analisar uma estrutura constituída de material composto laminado.

### 5.3.3 Cilindro Laminado

Um cilindro laminado sob pressão interna e com as extremidades engastadas é analisado. Este problema foi proposto por Hass e Lee [1987] e também analisado por Wilt et al [1990]. O cilindro, representado pela Fig.(5.6), submetido à pressão interna de intensidade  $q_o = 6.41 \pi$  possui as seguintes dimensões:  $L = 2R = 20$ . As propriedades são referentes ao Material 4, mostrado na Tab.(5.1).

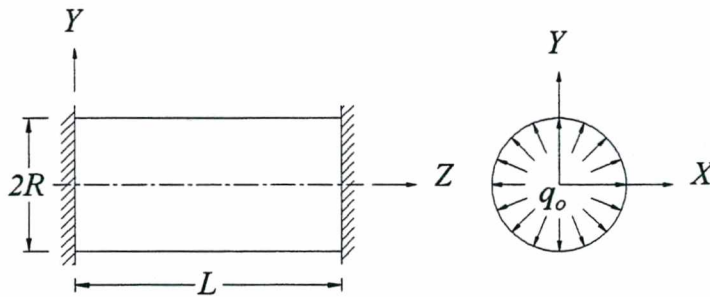


Figura 5.6: Cilindro engastado sob pressão interna.

O cilindro é analisado para três laminados distintos:  $[0]$ ,  $[45/-45]_s$  e  $[0/90]_s$ . Apesar do laminado  $[45/-45]_s$  não apresentar simetria material somente um octante do cilindro é modelado pois nos trabalhos referenciados isso é considerado. Esse problema foi escolhido para demonstrar a capacidade do elemento em modelar laminados ortotrópicos de geometria curva.

Convém resaltar que em ambos os trabalhos citados só foi apresentada uma análise de convergência, uma vez que não se dispõe de solução analítica para comparações. Nesse problema são analisadas duas razões de raio sobre espessura,  $R/h = 20$  e  $R/h = 100$ . Os resultados obtidos são apresentados nas Tabs.(5.9) e (5.10), respectivamente. Para cada razão  $R/h$  foram utilizadas malhas com densidades de  $6 \times 6$  e  $10 \times 10$  elementos. São também comparados com os resultados obtidos por Hass e Lee [1987] e por Wilt et al [1990] que discretizaram, respectivamente, um octante do cilindro com uma malha de  $6 \times 6$  e  $16 \times 16$  elementos.

Pelos resultados apresentados verifica-se que o laminado  $[0/90]_s$  é o mais rígido. Este resultado era esperado visto que a pressão interna causa tensões circunferenciais elevadas que são eficientemente suportadas pelas lâminas de  $90^\circ$ . A distribuição da tensão circunferencial através da espessura do laminado  $[0/90]_s$ , na configuração deformada, é mostrada na Fig.(5.7). Como esperado o laminado unidirecional à  $0^\circ$  é o mais flexível pois a matriz, sendo menos resistente a tração, suporta a tensão circunferencial. A comparação com Hass e Lee [1987] e Wilt et al [1990] mostra que soluções muito semelhantes foram obtidas.

Tabela 5.9: Deslocamento radial máximo de um cilindro engastado sob pressão interna, ( $R/h=20$ ).

Orientação das lâminas	Deflexão, $w \times 100$			
	6x6	10x10	Wilt	Hass
[0]	0.3750	0.3745	0.3758	0.3781
$[45/-45]_s$	0.1777	0.2095	0.2331	0.2402
$[0/90]_s$	0.2064	0.1623	0.1787	0.1783

Tabela 5.10: Deslocamento radial máximo de um cilindro engastado sob pressão interna, ( $R/h=100$ ).

Orientação das lâminas	Deflexão, $w \times 100$		
	6x6	10x10	Hass
[0]	1.796	1.881	2.044
$[45/-45]_s$	0.982	1.033	1.068
$[0/90]_s$	0.784	0.824	0.842

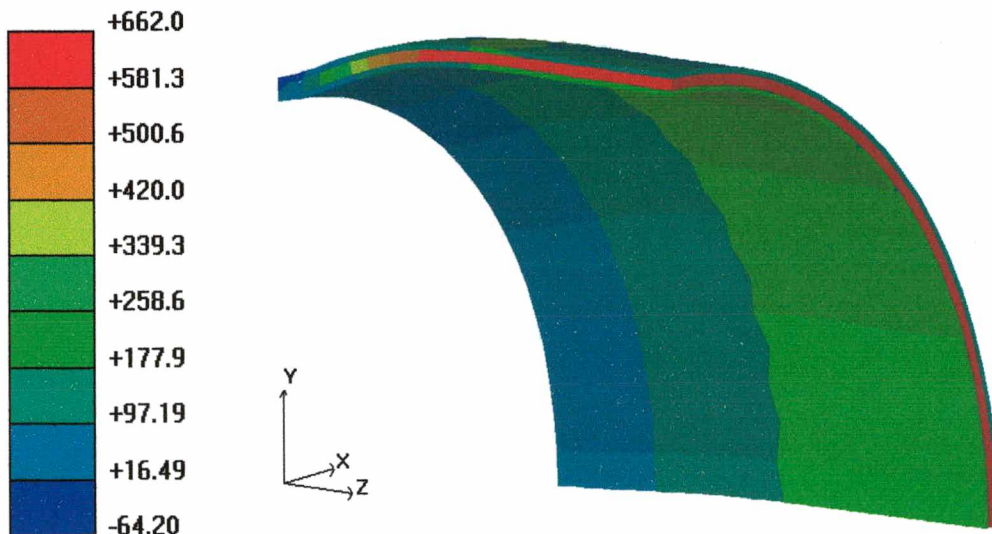


Figura 5.7: Distribuição da tensão circunferencial no cilindro laminado,  $[0/90]_s$  e ( $R/h=20$ ).

Na referência citada, Wilt et al [1990], encontrou-se dois erros teóricos. O primeiro foi modelar somente um octante do cilindro laminado  $[45/-45]_s$ , resultando em orientações principais de ortotropia material diferentes das propostas. O segundo erro foi considerar o material transversalmente isotrópico com as propriedades mecânicas  $G_{13} = G_{23}$  e não com  $G_{13} = G_{12}$ .

Nas Figs.(5.8) e (5.9) é apresentado o deslocamento radial ao longo da geratriz do cilindro para os três laminados estudados utilizando-se uma relação de raio sobre espessura de 20 e 100, respectivamente.

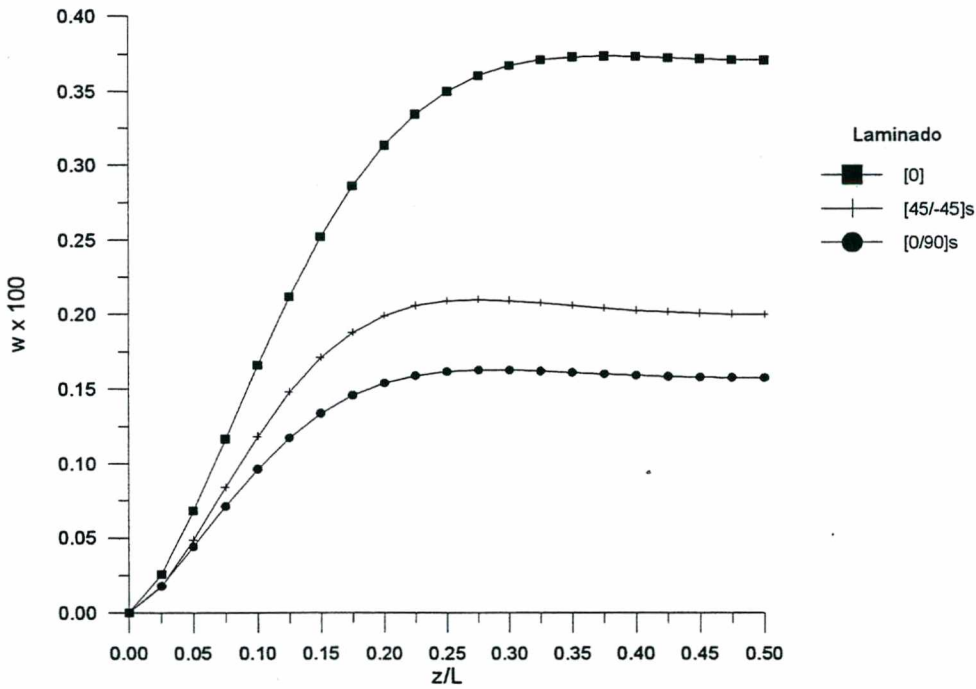


Figura 5.8: Deslocamento radial de um cilindro com as extremidades engastadas e sob pressão interna, (R/h=20).

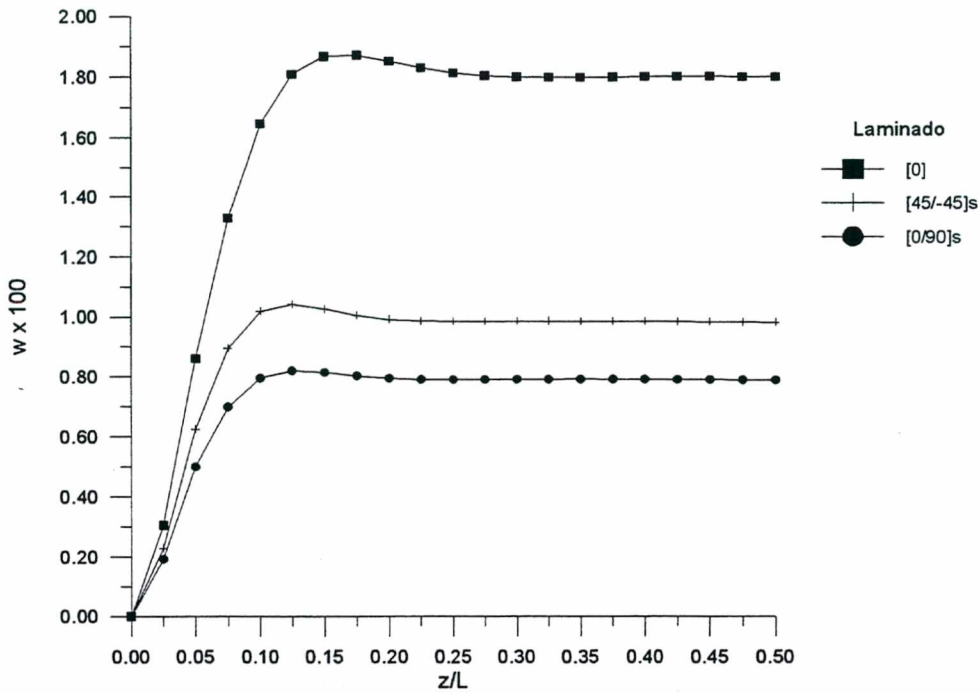


Figura 5.9: Deslocamento radial de um cilindro com as extremidades engastadas e sob pressão interna, ( $R/h=100$ ).

### 5.3.4 Tensão Interlaminar

Um placa ortotrópica, quadrada, composta por três lâminas,  $[0/90/0]$  de mesma espessura, é usada para a análise da distribuição de tensão através da espessura. A placa de espessura  $a/h = 10$  é simplesmente apoiada e submetida a um carregamento senoidal dado pela Eq.(5.3). Considerando a vantagem da simetria material, geométrica, condição de contorno e carregamento, somente um quadrante da placa é discretizado. Nesse exemplo são consideradas as propriedades mecânicas do Material 2 da Tab.(5.1) e as tensões são adimensionalizadas pela Eq.(5.1). Para o cálculo das tensões é utilizado uma malha de densidade de  $8 \times 8$  elementos. São mostrados e comparados os resultados obtidos pela Teoria de Kant e pela Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT).

As tensões cisalhantes transversais, utilizando a FSMT, foram obtidas através da equação constitutiva 3D. Essas tensões também poderiam ser determinadas integrando as equações de equilíbrio (da elasticidade tri-dimensional na ausência das forças de corpo) em



relação à coordenada da espessura, ou seja:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= - \int_{-h/2}^z \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} dz, \\ \tau_{yz} &= - \int_{-h/2}^z \sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} dz. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Através da Fig.(5.10) pode-se confirmar mais uma vez que os valores das tensões cisalhantes transversais obtidas pela Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem, em alguns pontos na espessura do laminado, se afastam bastante dos obtidos pela Teoria de Kant. Observa-se também que a distribuição de  $\bar{\tau}_{xz}$  e  $\bar{\tau}_{yz}$  pela Teoria de Kant e pela FSDT é, respectivamente, quadrática e constante. Isso é uma consequência direta do campo de deslocamentos apresentado pelas teorias. Por essa característica, a Teoria de Kant obtém resultados mais próximos da realidade quando comparados com os obtidos pela FSDT. O surgimento de descontinuidade de  $\bar{\tau}_{xz}$  e  $\bar{\tau}_{yz}$  é devido à não imposição da continuidade das tensões cisalhantes transversais na interface das lâminas. As Figs.(5.11) e (5.12) mostram a distribuição de  $\bar{\tau}_{xz}$  e  $\bar{\tau}_{yz}$  através da espessura do laminado na configuração deformada, considerando a formulação utilizada nesse trabalho.

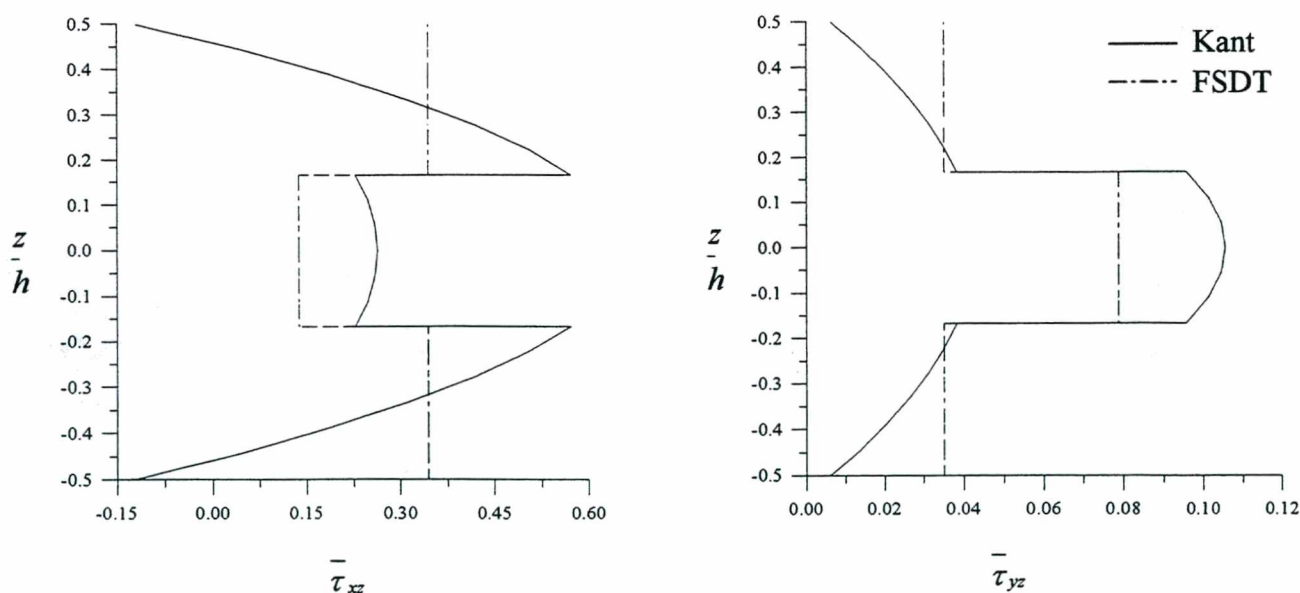


Figura 5.10: Distribuição das tensões cisalhantes transversais  $\bar{\tau}_{xz}$  e  $\bar{\tau}_{yz}$ .

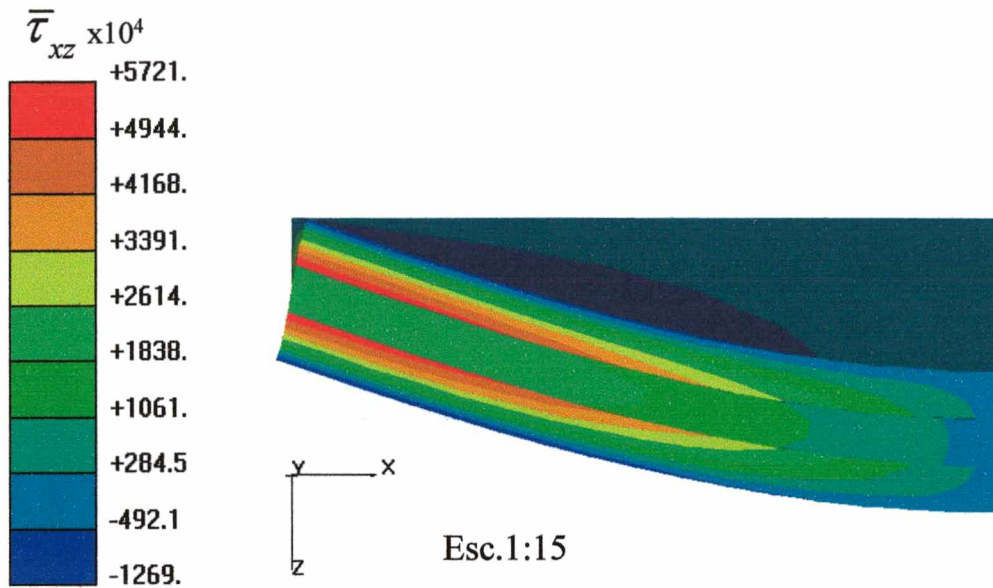


Figura 5.11: Distribuição da tensão  $\bar{\tau}_{xz}$  através da espessura do laminado [0/90/0].

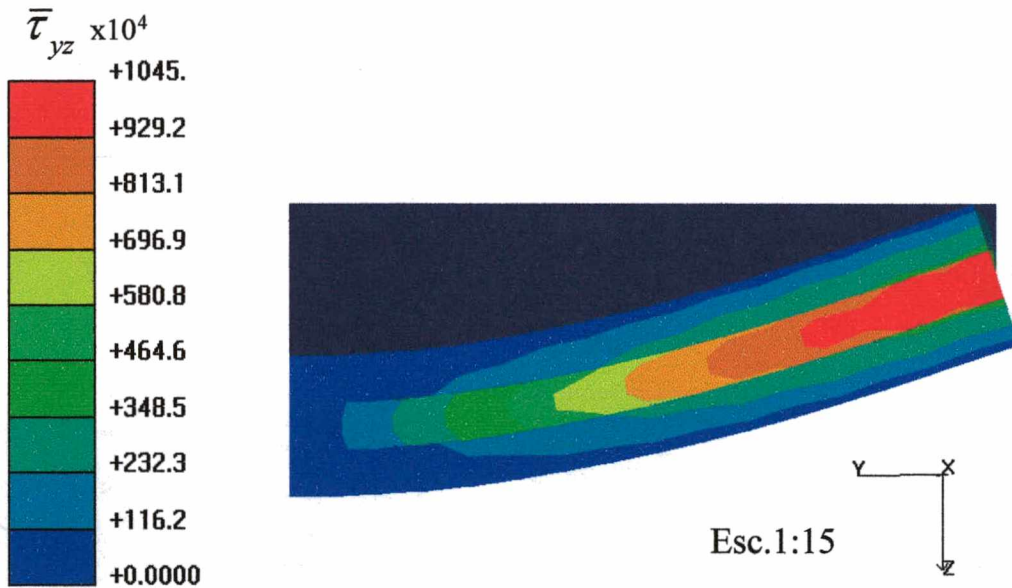


Figura 5.12: Distribuição da tensão  $\bar{\tau}_{yz}$  através da espessura do laminado [0/90/0].

Observando as Figs.(5.13) e (5.14), apesar da distribuição das tensões  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  e  $\bar{\tau}_{xy}$  serem cúbicas pela Teoria de Kant e lineares pela FSDT, nota-se que não há uma diferença significativa nos valores obtidos.

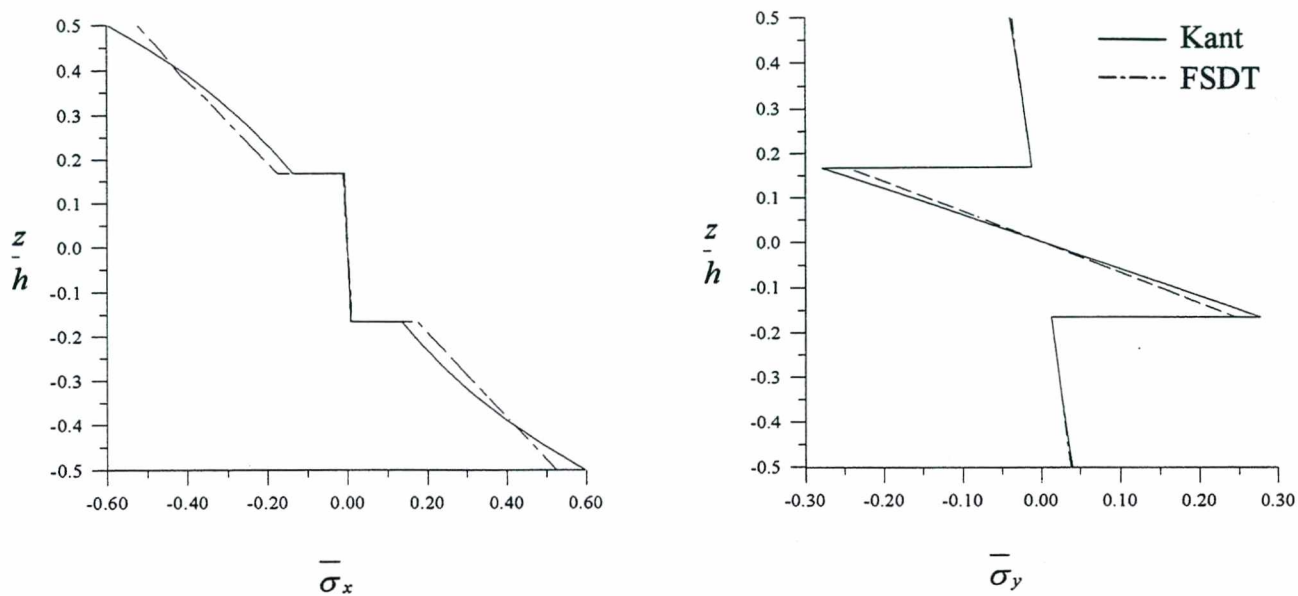


Figura 5.13: Distribuição das tensões axiais  $\bar{\sigma}_x$  e  $\bar{\sigma}_y$ .

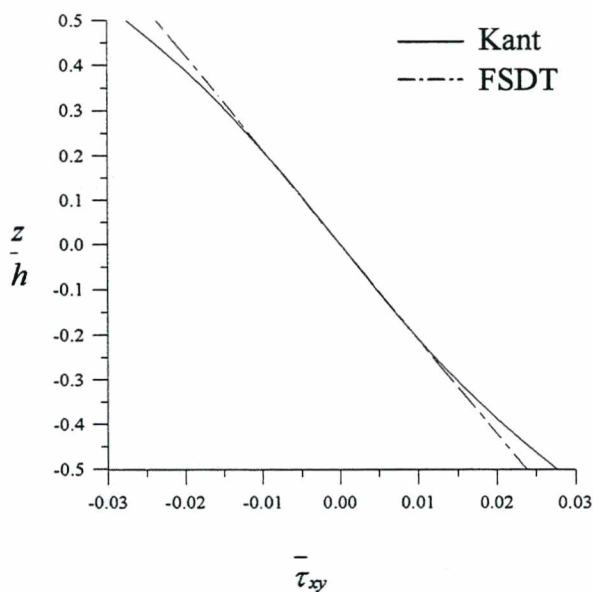


Figura 5.14: Distribuição da tensão cisalhante  $\bar{\tau}_{xy}$ .

Na Fig.(5.15) é mostrado a taxa de convergência da deflexão central do laminado. Pode-se ver, que apesar de existir uma diferença visual grande em relação a malha de 1x1 e 2x2 elementos, a diferença relativa entre as deflexões no centro da placa é menor que 1%, sendo que:

$$\left| \frac{\bar{w}_{1x1} - \bar{w}_{2x2}}{\bar{w}_{2x2}} \right| \approx 0.7\% \tag{5.6}$$

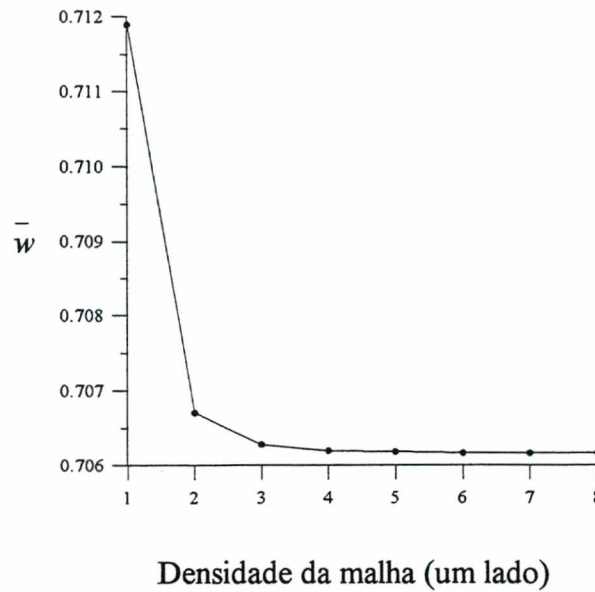


Figura 5.15: Convergência da deflexão central da placa com o refino uniforme da malha.

## 5.4 Problemas de Otimização

### 5.4.1 Placa Ortotrópica sob Cisalhamento

O objetivo desse problema, embora simples, é comprovar a eficiência do algoritmo de otimização. Uma placa ortotrópica, quadrada, de lado  $a = 1$  m, cujas propriedades materiais são referentes ao Material 5 da Tab.(5.1) é submetida a um cisalhamento puro,  $F_{xy} = 115$  KN/m. A representação da placa é dada pela Fig.(5.16).

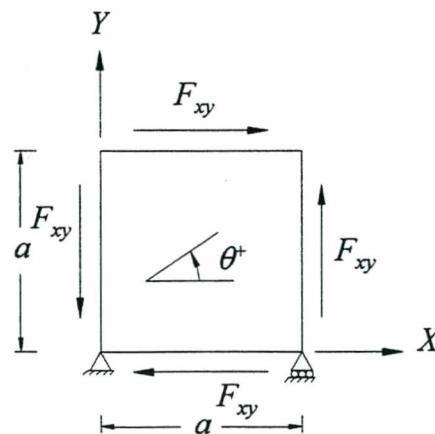


Figura 5.16: Placa ortotrópica submetida ao cisalhamento.

Para a validação do processo de otimização do ângulo elaborado nesse trabalho é feita

uma simples análise de tensões. Através da resistência dos materiais básica pode se obter as tensões principais,  $F_p = F_{xy}$ , e as direções principais,  $\theta_p = 45^\circ$ , na placa onde:

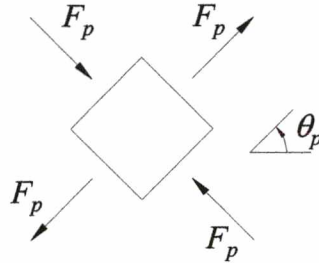


Figura 5.17: Tensões e direções principais.

Como pode ser visto na Tab.(5.1) as fibras possuem uma alta resistência à tração quando comparadas à matriz. Já a resistência à compressão da matriz é maior que a da fibra. Devido à essas propriedades materiais as fibras tendem a se orientar na direção principal onde a tensão de tração for predominante. Assim é possível comprovar a eficiência do algoritmo através de um simples exemplo.

A eficiência do processo de otimização de espessura pode ser verificada pela Fig.(5.18). Essa figura mostra a tensão efetiva de Tsai-Hill na configuração deformada antes do processo de otimização, caso (a), e depois, caso (b).

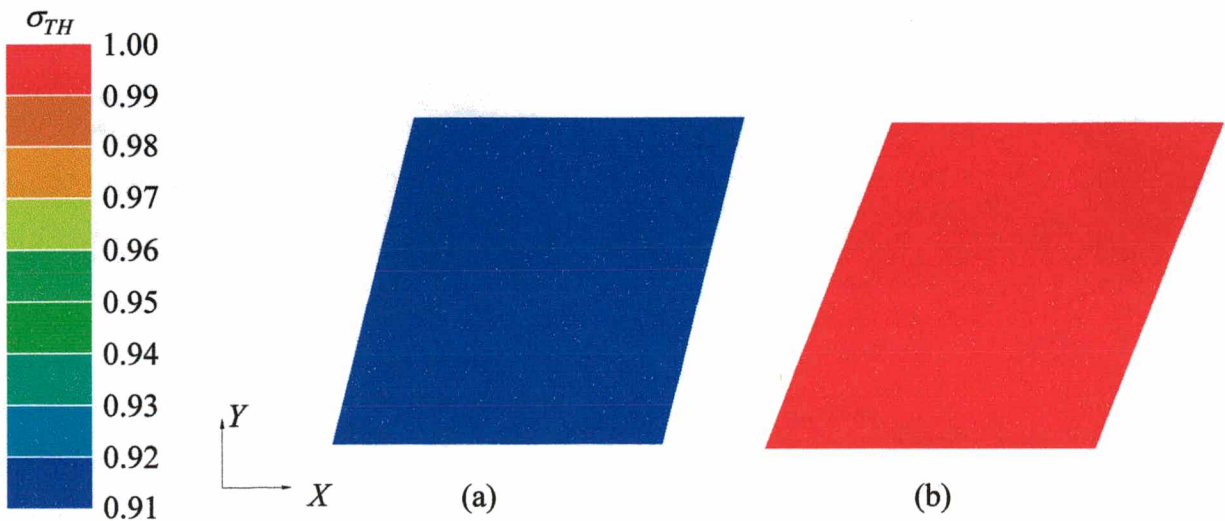


Figura 5.18: Tensão efetiva de Tsai-Hill: (a) config. inicial; (b) config. otimizada.

A Fig.(5.19) mostra os valores obtidos no decorrer do processo de otimização.

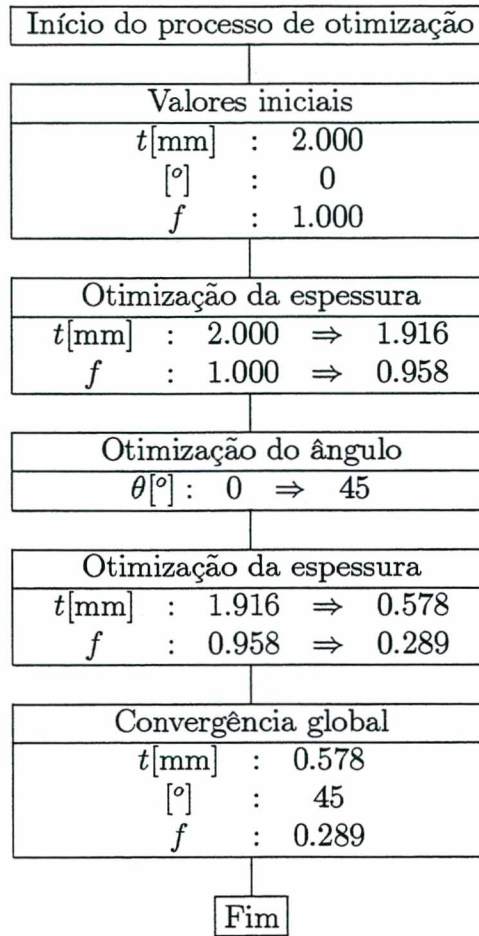


Figura 5.19: Processo de otimização em dois níveis de uma placa submetida ao esforço de cisalhamento.

### 5.4.2 Placa Ortotrópica sob Flexão

Uma placa, representada pela Fig.(5.20), é engastada em uma das extremidades e submetida à um carregamento distribuído na outra extremidade. A placa, constituída pelo Material 7 da Tab.(5.1), é discretizada por uma malha de 10x1 elementos onde cada elemento representa uma lâmina as quais inicialmente possui a mesma espessura.

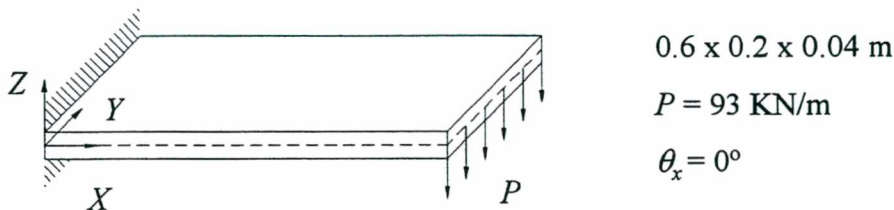


Figura 5.20: Placa ortotrópica sob flexão.

Pelo processo de otimização e pelo Método dos Elementos Finitos é obtida a espessura

ótima de cada lâmina que satisfaz as restrições de tensão impostas pelo Critério de Tsai-Hill. Devido às características do problema e a predominância da tensão axial  $\sigma_x$  o resultado obtido pode ser comparado com o fornecido pela Teoria Clássica de Viga. Como visto, a resistência axial à compressão é menor que à tração portanto a tensão de flexão máxima admissível é limitada pela resistência à compressão na direção  $X$ , dada por  $X_C$ . Logo as espessuras ótimas pela teoria de viga podem ser determinadas por:

$$t_k = \sqrt{\frac{30 M_k}{X_C}} \quad (5.7)$$

onde  $M_k$  é o momento fletor no baricentro do elemento que representa a  $k$ -ésima lâmina.

Os valores das espessuras das lâminas obtidas pelo processo de otimização utilizando o Método dos Elementos Finitos (*MEF*) são apresentadas na Tab.(5.11) e comparadas com os valores obtidos pela Teoria Clássica de Viga, (*TCV*).

Tabela 5.11: Espessuras ótimas obtidas pelo processo de otimização e pela Teoria Clássica de Viga.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{MEF}$ [mm]	36.5	34.6	32.4	30.2	27.7	25.0	22.0	18.5	14.4	9.0
$t_{TCV}$ [mm]	36.8	34.8	32.7	30.4	28.0	25.3	22.3	18.9	14.6	8.4
$\Delta\%$	0.8	0.6	0.9	0.7	1.1	1.2	1.3	2.1	1.4	7.1

As espessuras obtidas pelo processo de otimização possibilitam uma redução de 37.4% na massa inicial da placa. A distribuição, através da espessura, da tensão  $\sigma_x$  e da tensão efetiva  $\sigma_{TH}$ , antes e depois da otimização, é apresentada nas Figs.(5.21) e (5.22), respectivamente.

Como visto no Capítulo 4, as tensões efetivas de Tsai-Hill são determinadas no baricentro do elemento, na superfície inferior e superior da lâmina. Essa consideração no modelo de otimização não limita as tensões em todo elemento permitindo, nesse caso,  $\sigma_{TH} > 1$  em alguns pontos da placa. Mas pode-se verificar que nos pontos onde são impostas as restrições (baricentro do elemento) a tensão efetiva pertence ao intervalo admissível sendo que na superfície inferior da lâmina  $\sigma_{TH} = 1$ .

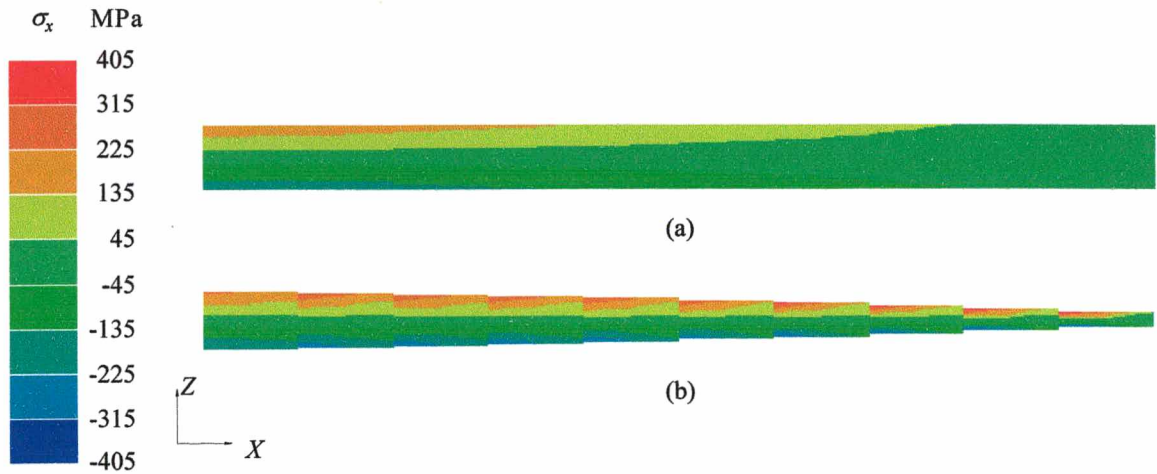


Figura 5.21: Distribuição da tensão  $\sigma_x$  através da espessura da placa: (a) config. inicial; (b) config. otimizada.

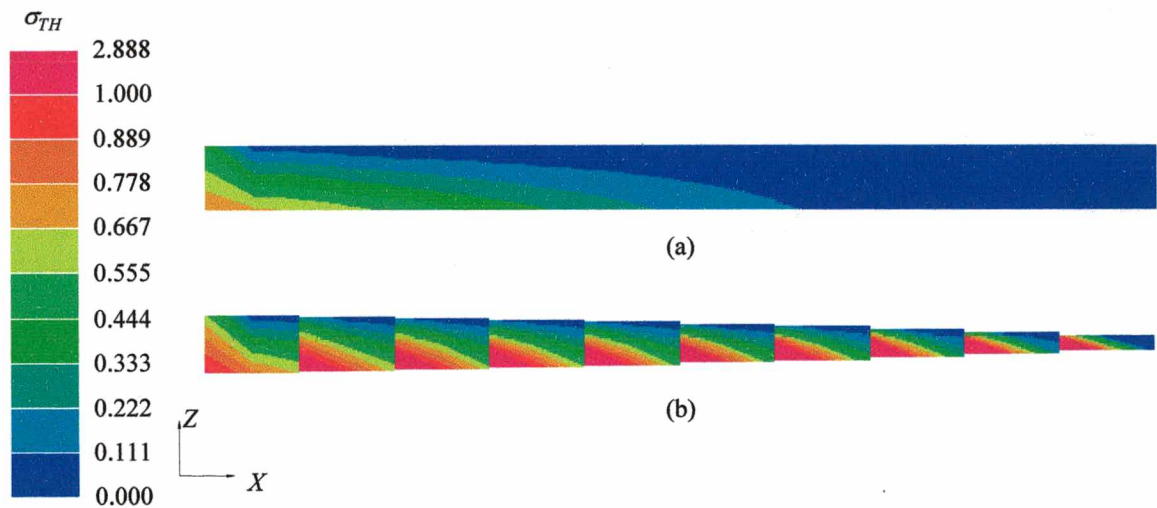


Figura 5.22: Distribuição da tensão efetiva  $\sigma_{TH}$  através da espessura da placa: (a) config. inicial; (b) config. otimizada.

### 5.4.3 Vaso de Pressão com Tampa Semi Esférica

Nesse exemplo, um vaso de pressão isotrópico com tampas semi esféricas como mostrado na Fig.(5.23) é otimizado. O vaso de pressão, constituído do Material 6 da Tab.(5.1), é submetido a uma pressão interna de  $q_o = 20$  MPa. O cilindro possui um raio  $R = 0.11$  m e um comprimento  $L = 0.40$  m. As tampas semi-esféricas, de raio  $R = 0.09$  m, possuem uma válvula considerada extremamente rígida em relação à tampa. Devido a condição de simetria de geometria, material e de carregamento somente um octante do cilindro é discretizado.



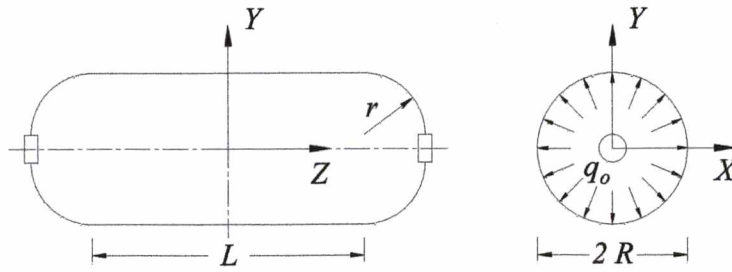


Figura 5.23: Cilindro com tampa semi esférica.

Nesse problema, o octante analisado é discretizado por uma malha regular de 135 elementos, 9 ao longo da circunferência e 15 na direção de  $Z$ . Sendo que desses 15, 6 elementos na parte cilíndrica e 9 na tampa. A estrutura é dividida em 4 grupos materiais, onde o 1º grupo representa a parte cilíndrica da estrutura, contendo 54 elementos, e os outros 3 a tampa semi esférica. A tampa é segmentada em 9 anéis com 9 elementos por anel na direção circunferencial. Esses anéis são numerados a partir da junção com o cilindro. O 2º grupo material, contendo 18 elementos, é formado pelos anéis 1 e 2. O 3º grupo, contendo 45 elementos, é formado pelos anéis 3,4,5,6 e7. O 4º grupo, contendo 18 elementos, é formado pelos anéis 8 e 9. A disposição dos grupos materiais pode ser melhor entendida através da Fig.(5.24).

Para efeito de visualização, o elemento utilizado nesse trabalho, um elemento de casca quadrilateral de 9 nós, é transformado em quatro elementos sólidos de 8 nós.

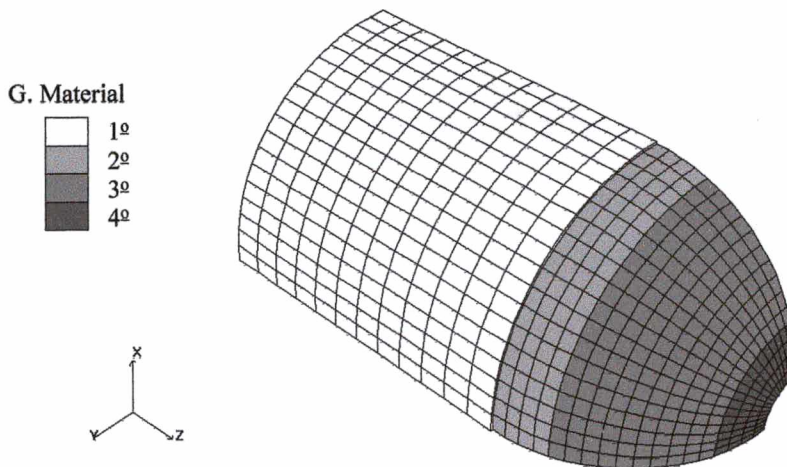


Figura 5.24: Disposição dos grupos materiais.

O vaso de pressão, inicialmente, foi modelado considerando a parte cilíndrica com  $t = 9.0$  mm e a tampa semi-esférica com  $t = 6.5$  mm, ou seja:

Tabela 5.12: Espessura inicial dos grupos materiais.

Grupo material	1 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>
Espessura [mm]	9.00	6.50	6.50	6.50

A distribuição da tensão efetiva de Tsai-Hill no vaso de pressão considerando as espessuras iniciais é mostrada na Fig.(5.25).

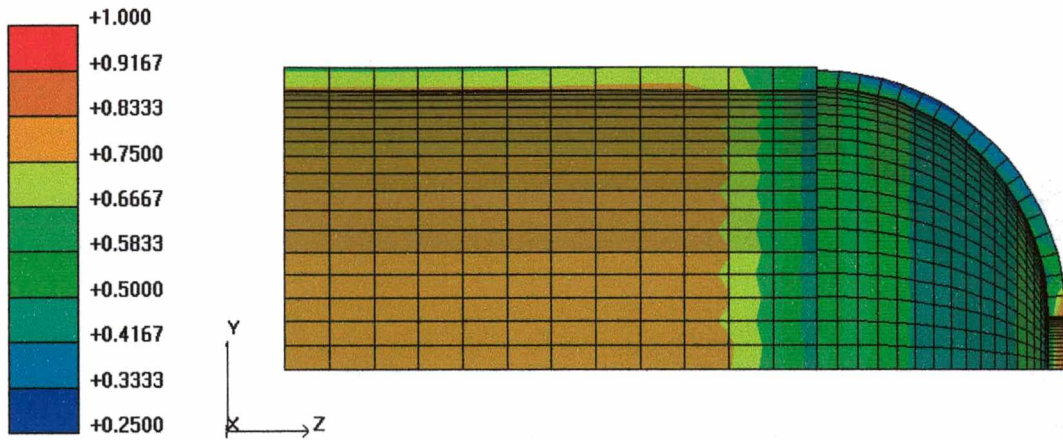


Figura 5.25: Distribuição da tensão efetiva de Tsai-Hill.

Após o processo de otimização de espessura dos grupos materiais, a espessura ótima determinada é dada pela Tab.(5.13) e a distribuição da tensão efetiva de Tsai-Hill no vaso de pressão pode ser visto na Fig.(5.26).

Tabela 5.13: Espessura final dos grupos materiais.

Grupo material	1 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>
Espessura [mm]	8.05	4.56	4.47	5.66

O processo de otimização de espessura realizado nesse vaso de pressão possibilitou uma redução de 15.4% na massa inicial.

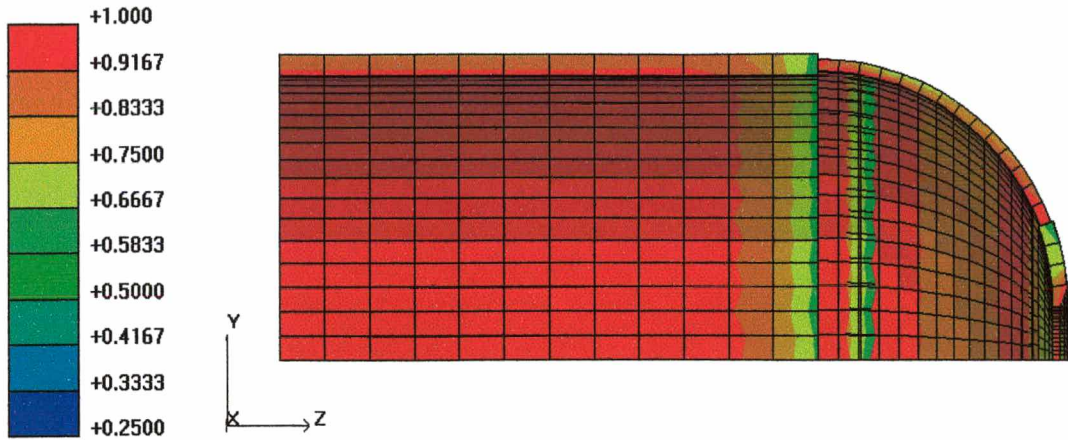


Figura 5.26: Distribuição da tensão equivalente de Tsai-Hill, config. otimizada.

A Fig.(5.27) mostra a configuração deformada do vaso de pressão considerando as espessuras ótimas.

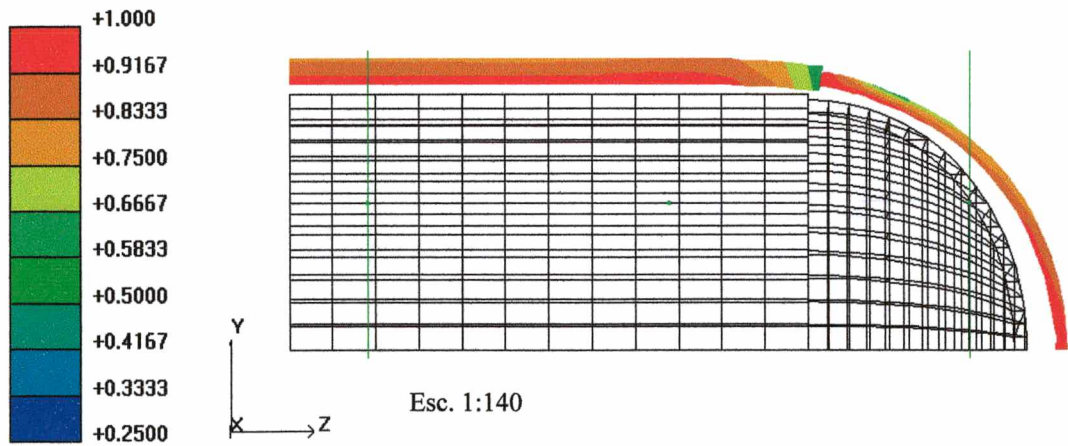


Figura 5.27: Deformação do vaso de pressão otimizado.

Pode-se notar, através da Fig.(5.28), que nas proximidades da junção do cilindro / tampa semi-esférica ocorre uma mudança na curvatura. Esse fenômeno ocorre devido a mudança de sinal do momento próximo a interface cilindro / tampa e pode ser comprovado através da literatura específica, Flügge [1966].

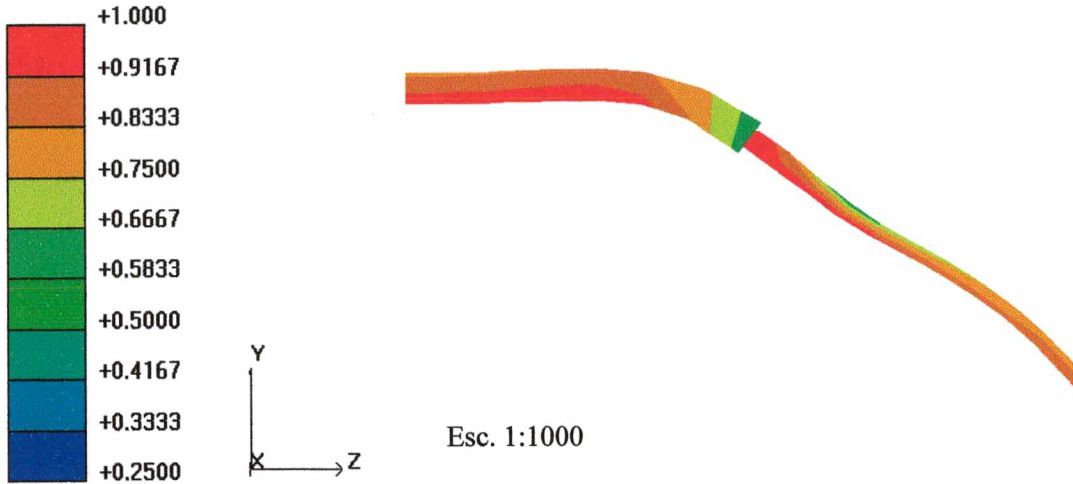


Figura 5.28: Ampliação da deformação na junção cilindro / tampa.

### 5.4.4 Laminado sob Tração Bi-axial

Um laminado simétrico, quadrado de lado  $a = 1$  m, formado por quatro lâminas é analisado e otimizado. O laminado é submetido à um carregamento bi-axial de tração no plano de referência com a característica de  $F_y = 2F_x = 700$  KN/m conforme mostrado na Fig.(5.29). As propriedades materiais das lâminas são referentes ao Material 5 da Tab.(5.1).

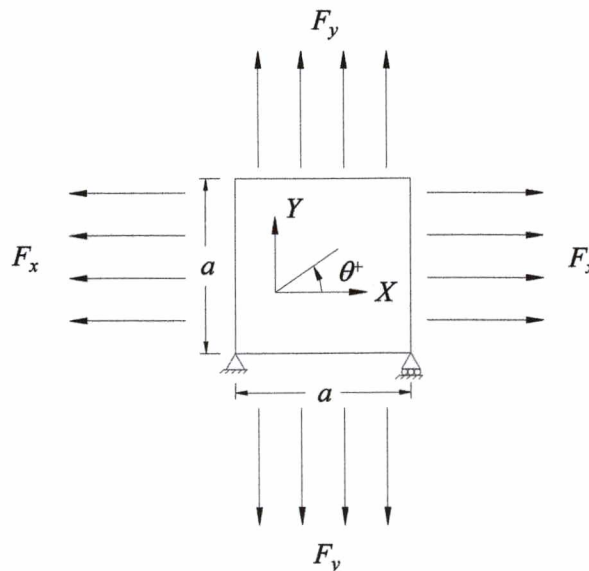


Figura 5.29: Laminado quadrado submetido à um carregamento bi-axial de tração.

Inicialmente é feita a otimização somente da espessura das lâminas considerando o laminado formado pelas lâminas orientadas à  $[0/90]_s$ . Foram obtidas as espessuras ótimas,

$t_1 = t_4 = 0.50$  mm e  $t_2 = t_3 = 1.20$  mm, resultando em um laminado com 4.76 Kg.

Uma segunda otimização é feita considerando o processo em dois níveis. É imposto uma orientação  $[-\theta/\theta]_s$  para o empilhamento das lâminas. Foram obtidos o ângulo ótimo,  $\theta = 52.5^\circ$ , e as espessuras ótimas,  $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0.61$  mm, resultando em um laminado com 3.42 Kg. O valor do ângulo  $\theta$  obtido pela otimização ficou bem próximo do valor  $\theta = 54.7^\circ$  obtido, analiticamente e considerando algumas simplificações, por Christensen.

Através desse problema é possível ver a importância da otimização tanto da espessura como da orientação das fibras das lâminas. A otimização realizada em dois níveis obteve um laminado com lâminas de mesma espessura e com uma massa aproximadamente 28% menor que o obtido pela otimização somente da espessura.

## Capítulo 6

# Conclusões e Sugestões

O propósito desse trabalho foi desenvolver uma formulação, utilizando o Método dos Elementos Finitos, para análise e otimização de estruturas do tipo casca constituídas de materiais compostos laminados. Essa idéia surgiu devido à carência de trabalhos realizados nessa área e a importância da otimização de componentes de materiais compostos.

A teoria de cascas utiliza, para descrever os deslocamentos, um campo fornecido pela teoria de ordem superior de Kant. Essa teoria mostrou-se eficiente, eliminando as inconsistências geradas pelas teorias de primeira ordem e o fator de correção para as tensões cisalhantes. Através dos resultados apresentados pode-se ver uma boa precisão dos valores obtidos quando comparados com outras teorias. Como consequência da distribuição quadrática das tensões cisalhantes transversais os valores obtidos tornaram os problemas mais próximo da realidade. Através do uso da Teoria de Kant se esperava a ausência do problema de travamento, “locking”. Esse fenômeno não foi eliminado completamente, pois ainda persiste nos casos em que as malhas são distorcidas. Para esses casos foi utilizado uma integração reduzida, de 2x2 pontos, nos termos relacionados com a energia de cisalhamento eliminando, por completo, o travamento.

A otimização de componentes de materiais compostos laminados, devido ao alto custo da matéria prima, torna-se indispensável no projeto de qualquer estrutura. Quando se utiliza os materiais compostos, existe um grande número de variáveis de projeto, tais como tipo de fibra e resina, espessura das lâminas, orientação das fibras e seqüência de empilhamento. Devido à essas variáveis e pelo fato de poder existir um acoplamento de membrana-flexão-

torção dificulta ao engenheiro agir intuitivamente. O programa desenvolvido nesse trabalho, que inclui o processo de otimização da espessura e do ângulo de orientação das fibras de cada lâmina, torna-se uma ótima ferramenta para o engenheiro projetista no auxílio da escolha de algumas variáveis importantes. O programa, nos exemplos apresentados, mostrou-se eficiente e robusto, obtendo bons resultados.

Na formulação apresentada, é interessante considerar mais alguns efeitos, como:

- i- tensões térmicas devido a diferença de temperatura de trabalho e de cura da resina no momento da fabricação do composto;
- ii- carregamentos dinâmicos, incluindo o efeito da aceleração centrípeta para a análise de centrifugadores;
- iii- outros métodos para determinar as propriedades equivalentes das lâminas: fórmulas empíricas, teoria de homogeneização, etc;
- iv- imposição da continuidade das tensões transversais  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{zx}$  na interface das lâminas.

No programa desenvolvido há necessidade de algumas implementações, tais como:

- i- solver para resolução de sistemas de equações com pré-condicionador, onde a matriz de rigidez, simétrica e positiva definida, seja armazenada na forma esparsa;
- ii- subrotina para renumeração dos nós da malha devido ao grande número de graus de liberdade envolvidos nos problemas encontrados na prática. Isso é necessário pois a malha é gerada através de um programa que também foi desenvolvido durante o trabalho e que numera a malha de uma forma seqüencial.

# Referências Bibliográficas

- [1] ADELMAN, Howard M. ; HAFTKA, Raphael T. - **Sensitivity Analysis of Discrete Systems** - American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.
- [2] ARORA, Jasbir S. - **Introduction to Optimum Design** - McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
- [3] BARP, Jackson L. - **Problemas de Contato Unilateral em Placas Semi-Espessas, Sujeitas a Grandes Deflexões, Utilizando uma Teoria de Ordem Superior** - Dissertação de Mestrado em Eng. Mecânica, GRANTE-UFSC, Santa Catarina, 1996.
- [4] BATOZ, Jean-Louis ; DHATT, Gouri - **Modélisation des Structures par Éléments Finis** - Hermes, Paris, 1992.
- [5] BAZARAA, Mokhtar S. ; SHERALI, Hanif D. ; SHETTY, C. M. - **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms** - John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [6] BERTSEKAS, Dimitri P. - **Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods** - Academic Press, San Diego, 1982.
- [7] CALCOTE, Lee R. - **The Analysis of Laminated Composite Structures** - Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.
- [8] CHO, Maenghyo ; KIM, Jun-Sik - **Four-Noded Finite Element Post-Process Method Using a Displacement Field of Higher-Order Laminated Composite Plate Theory** - Computers & Structures, Vol. 61, No. 2, pp. 283-290, 1996.
- [9] CHONG, Edwin K. P. ; ZAK, Stanislaw H. - **An Introduction to Optimization** - John Wiley & Sons, New York, 1996.



- [10] CHRISTENSEN, Richard M. - **Mechanics of Composite Materials** - John Wiley & Sons, New York.
- [11] DHATT, G. ; TOUZOT, G. - **The Finite Element Method Displayed** - John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [12] FEIJÓO, R. A. ; TAROCO, E. - **Introducción al Análisis de Sensibilidad** - Laboratorio Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro, 1993.
- [13] FLÜGGE, Wilhelm - **Stresses in Shells** - Sprenger-Verlag, Berlin, 1966.
- [14] HAFTKA, Raphael T. ; KAMAT, Manohar P. - **Elements of Structural Optimization** - Martinus Nijhoff Publishers, Boston, 1985.
- [15] HAAS D. J. ; LEE, S. W. - **A nine-node assumed-strain finite element for composite plates and shells** - Computers & Structures, Vol. 26, No. 3, pp. 445-452, 1987.
- [16] HUGHES, T. J. R. - **The Finite Element Method** - Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [17] JONES, Robert M. - **Mechanics of Composite Materials** - McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.
- [18] KANT, Tarun - **Numerical Analysis of Thick Plates** - Computer Methods Applied Mech. Engng., Vol. 31, pp. 1-18, 1982.
- [19] KANT, T. ; KOMMINENI, J. R. - **C<sup>0</sup> Finite Element Geometrically Non-Linear Analysis of Fibre Reinforced Composite and Sandwich Laminates Based on a Higher-Order Theory** - Computers & Structures, Vol. 45, No. 3, pp. 511-520, 1992.
- [20] KANT, T. ; KOMMINENI, J. R. - **Geometrically Non-Linear Transient Analysis of Laminated Composite and Sandwich Shells with a Refined Theory and C<sup>0</sup> Finite Elements** - Computers & Structures, Vol. 52, No. 6, pp. 1243-1259, 1994.

- [21] KOLPAKOV, A. G. ; KOLPAKOVA, I. G. - **Design of Laminated Composites Possessing Specified Homogenized Characteristics** - Computers & Structures, Vol. 57, No. 4, pp. 599-604, 1995.
- [22] LAKSHIMINARAYANA, H. V. ; MURTHY S. S. - **A Shear-Flexible Triangular Finite Element Method for Thin Laminated Composites Plates** - Int. J. Numerical Methods Engng., Vol. 20, pp. 591-623, 1984.
- [23] LIANGXIN, Sun ; ZHIYU, Shi - **The Analysis of Laminated Composite Plates Based on the Simple Higher-Order Theory** - Computers & Structures, Vol. 43, No. 5, pp. 831-837, 1992.
- [24] McCORMICK, Garth P. - **Nonlinear Programming: Theory, Algorithms, and Applications** - John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [25] MENDONÇA, Paulo de Tarso R. - **Análise de Componentes de Materiais Compostos** - Universidade Federal de Santa Catarina, Grante, Santa Catarina, 1997.
- [26] NOEL, André T. - **Desenvolvimento de um Elemento Misto de Casca de Dupla Curvatura para Análise de Materiais Multilaminados** - Dissertação de Mestrado em Eng. Mecânica, GRANTE-UFSC, Santa Catarina, 1991.
- [27] PANDYA, B. N. ; KANT, Tarun - **A Refined Higher-Order Generally Orthotropic C° Plate Bending Element** - Computers & Structures, Vol. 28, No. 2, pp. 119-133, 1988.
- [28] PECKNOLD, D. A. ; RAHMAN, S. - **Micromechanics-Based Structural Analysis of Thick Laminated Composites** - Computers & Structures, Vol. 51, No. 2, pp. 163-179, 1994.
- [29] PEREIRA, José Carlos - **Análise de Estruturas Uni e Bidimensionais em Materiais Compostos pelo Método dos Elementos Finitos** - Monografia apresentada ao Dep. de Eng. Mecânica UFSC, Santa Catarina, 1998.

- [30] PRESS, William H. ; TEUKOLSKY, Saul A.; VETTERLING, William T. ; FLANNERY, Brian P. - **Numerical Recipes in Fortran** - 2Ed. Cambridge University Press, 1992.
- [31] <sup>1</sup>REDDY, J. N. - **A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates** - Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- [32] <sup>2</sup>REDDY, J. N. - **A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation** - Int. J. Solids Structures, Vol. 20, No. 9/10, pp. 881-896, 1984.
- [33] ROARK, Raymond J. ; YOUNG, Warren C. - **Formulas for Stress and Strain** - McGraw-Hill, 1975.
- [34] SIVAKUMARAN, K. S. ; CHOWDHURY, S. H. ; VAJARASATHIRA, K. - **Some Studies on Finite Elements for Laminated Composite Plates** - Computers & Structures, Vol. 52, No. 4, pp. 729-741, 1994.
- [35] SOARES, Cristóvão M. Mota ; CORREIA, Victor Franco - **Optimização de Estruturas Laminadas em Materiais Compósitos** - 2º Anais do III Encontro de Mecânica Computacional - Portugal, Coimbra, 1992.
- [36] SPIEGEL, Murray R. - **Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas** - Schaum McGraw-Hill, São Paulo, 1992.
- [37] TESSLER, Alexander ; SAETHER, Erik - **A Computationally Viable Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates** - Int. J. Numerical Methods Engng., Vol. 31, pp. 1069-1086, 1991.
- [38] VINSON, J. R. ; SIERAKOWSKI, R. L. - **The Behavior of Structures Composed of Composite Materials** - Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987.
- [39] WILT, T. E. ; SALEEB, A. F. ; CHANG, T. Y. - **A Mixed Element for Laminated Plates and Shells** - Computers & Structures, Vol. 37, No. 4, pp. 597-611, 1990.

- [40] WHITNEY, J. M. ; PAGANO, N. J. - **Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates** - Journal of Applied Mechanics, pp. 1031-1036, Dec. 1970.
- [41] XIAO-PING, Shu - **An Improved Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Shells** - Computers & Structures, Vol. 60, No. 3, pp. 343-350, 1996.
- [42] YONG, Yook-Kong ; CHO, Young - **Higher-Order, Partial Hybrid Stress, Finite Element Formulation for Laminated Plate and Shell Analyses** - Computers & Structures, Vol. 57, No. 5, pp. 817-827, 1995.
- [43] YU, F. X. ; SINGH, V. P. - **An Efficient and derivative-free algorithm for finding the minimum of a 1-D user-defined function** - Advances in Engineering Software, 16, pp.161-169, 1993.