

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE DO FLUXO DE ENERGIA VIBRATÓRIA ENTRE PLACAS
RETANGULARES SIMPLEMENTE APOIADAS PELO MÉTODO DA
MOBILIDADE**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

PAULO ROBERTO DE OLIVEIRA BONIFÁCIO

Florianópolis, junho de 1998

**ANÁLISE DO FLUXO DE ENERGIA VIBRATÓRIA ENTRE PLACAS
RETANGULARES SIMPLEMENTE APOIADAS PELO MÉTODO DA
MOBILIDADE**

PAULO ROBERTO DE OLIVEIRA BONIFÁCIO

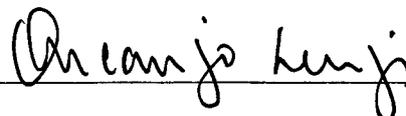
**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO
VIBRAÇÕES E ACÚSTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA
DE PÓS-GRADUAÇÃO**



Prof. Júlio César Passos, Dr.

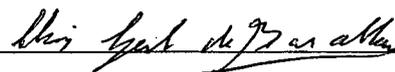
Coordenador



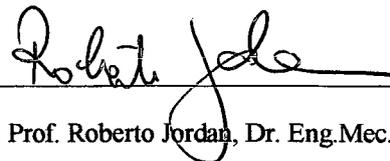
Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Orientador

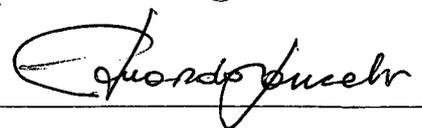
BANCA EXAMINADORA.



Prof. Clóvis Sperb de Barcelos, Ph.D.



Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng. Mec.



Prof. Eduardo Alberto Francello, D. Sc.

AGRADECIMENTOS

- À Deus.
- À minha família pelo amor que me deu durante toda minha vida.
- Ao amigo Arcanjo Lenzi pela sua brilhante orientação.
- Aos companheiros de sala Marcão, Wiliam e João Bid pela ajuda nos momentos difíceis.
- Ao amigo Fábio A. Schneider pela sua grandiosa contribuição na implementação computacional deste trabalho.
- A todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho de forma direta ou indireta.

SUMÁRIO

SIMBOLOGIA	vi
LISTA DE FIGURAS E TABELAS	ix
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
CAPÍTULO I	
Introdução	1
CAPÍTULO II	
Conceitos básicos sobre fluxo de potência vibratória e Método da Mobilidade	5
2.1 - Fluxo de potência vibratória	5
2.2 - Método da Mobilidade	9
CAPÍTULO III	
Análise de duas placas acopladas	13
3.1 - Análise de duas placas acopladas	13
3.2. - Cálculo dos deslocamento das placas	15
3.2.1 - Deslocamento do subsistema I	17
3.2.2 - Deslocamento do subsistema II	21
3.3 - Cálculo das Mobilidade	24
3.4 - Cálculo dos esforços na união	26
3.5 - Cálculo das potências	28
3.6 – Resultados	30
3.6.1 - Resultado do esforço ao longo da união	31

3.6.2 - Resultado da velocidade angular ao longo da união	33
3.6.3 - Resultado das potências de estrada e transferida entre as placas	35
3.6.4 - Resultado da distribuição da potência transferida ao longo da união	37
3.6.5 - Análise de sensibilidade	40
3.6.6 – Modos desacoplados e modos bloqueados	43
3.6.7 – Efeito do número de discretizações na determinação da potência	48

Capítulo IV

Análise de duas placas acopladas com uma viga na união	49
4.1 - Cálculo da resposta da viga (subsistema III)	50
4.2 - Cálculo da Mobilidade da viga	57
4.3 – Resultados.....	62
4.4 - Influência dos parâmetros geométricos da viga na determinação da potência transferida	68

Capítulo V

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	73
Referências bibliográficas	76
Apêndice	79
Algoritmos e Fluxogramas computacionais	80

SIMBOLOGIA

Abaixo estão relacionados os símbolos utilizados neste trabalho, sendo que os mais específicos se encontram adequadamente descritos ao longo do trabalho.

c	velocidade de ondas de torção
D	rigidez à flexão da placa
Δx	intervalo da discretização na direção x da linha de união entre as placas
E'	módulo de elasticidade real
E	módulo de elasticidade complexo
$E_{i,j}$	energia vibratória transmitida entre os pontos i e j
f	frequência em Hz
F	força
G	módulo de elasticidade ao cisalhamento
h_p	espessura da placa
h_v	espessura da viga
I	momento da inércia
K_p	energia cinética da placa
K_v	energia cinética da viga
Y_{ij}	mobilidade no ponto j , resultante de uma excitação no ponto i da placa
Y_v	mobilidade na viga
L_x	dimensão da estrutura na direção x
L_y	dimensão da estrutura na direção y
m_p	massa da placa

M	momento fletor
P	potência
T	momento torsor na viga
u	deslocamento transversal na estrutura
U_p	energia potencial da placa
U_v	energia potencial na viga
V_i	velocidade linear no i -ésimo componente
Z_{ii}	impedância no ponto j , resultante de uma excitação no ponto i da placa

Símbolos gregos

ρ	massa específica
θ	deslocamento angular
η	fator de amortecimento
ν	coeficiente de Poisson
ω	frequência angular

Convenções

O símbolo * ao lado da variável indica complexo conjugado

O símbolo $| \cdot |$ indica o valor absoluto

O símbolo j representa a unidade imaginária $\sqrt{-1}$

O símbolo $\text{Re}\{ \cdot \}$ indica a parte real do termo entre chaves

O símbolo $\text{Im}\{ \cdot \}$ indica a parte real do termo entre chaves

Um ponto acima de qualquer variável indica derivada temporal

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 2.1 – Sistema formado por dois componentes	6
Figura 2.2 – Sistema representando o balanço de potências	6
Figura 2.3 – Força aplicada em um sistema genérico	7
Figura 2.4 – Força aplicada em um sistema genérico	7
Figura 2.5 - Representação das velocidades e dos esforços em um componente genérico	10
Figura 3.1 – Sistema com duas placas acopladas	14
Figura 3.2 – Sistema representando os esforços na placa I	15
Figura 3.3 – Sistema representando os esforços na placa II	15
Figura 3.4 – Subsistema I	15
Figura 3.5 – Subsistema II	15
Figura 3.6 – Vista transversal do sistema acoplado	26
Figura 3.7 – Distribuição do momento fletor ao longo da união	31
Figura 3.8 – Distribuição do momento fletor ao longo da união	32
Figura 3.9 – Velocidade angular ao longo da união	33
Figura 3.10 – Velocidade angular ao longo da união	34
Figura 3.11 – Potência de Estrada	36
Figura 3.12 – Potência Transferida	36
Figura 3.13 – Razão de Potências	37
Figura 3.14 – Representação ilustrativa da transferência de potência na união das placas	38
Figura 3.15 – Distribuição da transferência de potência ao longo da união	39
Figura 3.16 – Distribuição da transferência de potência ao longo da união	39

Figura 3.17 – Verificação da sensibilidade do momento fletor na união com variações de 0,05 Hz em torno da frequência de ressonância, ---- Método da Mobilidade, — Método de Elementos Finitos	41
Figura 3.18 – Verificação da sensibilidade da velocidade angular na união com variações de 0,05Hz em torno da frequência de ressonância, ---- Método da Mobilidade, — Método de Elementos Finitos	41
Figura 3.19 – Verificação da sensibilidade do momento fletor na união com variações de 0,05 Hz em torno da frequência de ressonância, ---- Método da Mobilidade, — Método de Elementos Finitos	42
Figura 3.20 – Verificação da sensibilidade da velocidade angular na união com variações de 0,05 Hz em torno da frequência de ressonância, --- Método da Mobilidade, — Método de Elementos Finitos	42
Figura 3.21 – Representação ilustrativa dos modos desacoplados e bloqueados	43
Figura 3.22 – Configuração espacial do primeiro modo desacoplado	44
Figura 3.23 – Configuração espacial do primeiro modo bloqueado	45
Figura 3.24 – Configuração espacial dos modos desacoplados e bloqueados	46
Figura 3.25 – Configuração espacial dos modos desacoplados e bloqueados	47
Figura 3.26 – Espectro de potência transferida destacando os efeitos dos modos desacoplados e bloqueados para obtenção do sistema acoplado	47
Figura 3.27 – Efeito do número de discretizações na determinação da potência transferida	48
Figura 4.1 – Representação do sistema acoplado com uma viga na união	49
Figura 4.2 – Seção transversal do sistema acoplado	50
Figura 4.3 – Seção transversal da viga retangular.....	51
Figura 4.4 – Seção transversal da viga I	52
Figura 4.5 – Distribuição do momento fletor e momento torçor ao longo da união- com uma viga quadrada na união	63
Figura 4.6 – Distribuição do momento fletor e momento torçor ao longo da união - com uma viga quadrada na união	64
Figura 4.7 – Distribuição da velocidade angular ao longo da união - com uma viga quadrada na união	64

Figura 4.8 – Distribuição da velocidade angular ao longo da união - com uma viga quadrada na união	65
Figura 4.9 – Potência transferida - com uma viga quadrada na união	66
Figura 4.10 – Potência transferida - com uma viga em I na união	67
Figura 4.11 – Potência transferida - com uma viga quadrada na união	67
Figura 4.12 – Seção transversal da viga retangular	69
Figura 4.13–Efeito da variação dos parâmetros geométricos de um viga quadrada, na determinação da potência transferida entre as duas placas. Análise feita em uma placa com as mesmas características mencionada no trabalho, porém, com estruturas de aço	69
Figura 4.14 – Seção transversal da viga I	70
Figura 4.15 –Efeito da variação dos parâmetros geométricos de um viga I, na determinação da potência transferida entre as duas placas. Análise feita em uma placa com as mesmas características mencionada no trabalho, porém, com estruturas de aço. .	70
Figura 4.16 – Seção transversal da viga vazada	71
Figura 4.17 –Efeito da variação dos parâmetros geométricos de um viga vazada, na determinação da potência transferida entre as duas placas. Análise feita em uma placa com as mesmas características mencionada no trabalho. Estruturas de alumínio.	71
Figura 4.18–Efeito da variação dos parâmetros geométricos de um viga quadrada, na determinação da potência transferida entre as duas placas. Análise feita em uma placa com as mesmas características mencionada no trabalho. Estruturas de alumínio.	72

RESUMO

Excitações geradas em pontos específicos de uma estrutura são facilmente transmitidas ao longo de seus componentes por vários tipos de ondas, gerando níveis indesejáveis de vibração e ruído. O controle destes níveis pode ser obtido reduzindo-se o fluxo de potência transmitida aos componentes de interesse. Assim, o conhecimento do fluxo de potência, bem como dos mecanismos relacionados à sua propagação são indispensáveis no controle de vibrações.

O objetivo deste trabalho consiste em analisar, através do Método da Mobilidade a resposta dinâmica de placas vibrando por flexão, com o objetivo de se conhecer o fluxo de energia vibratória transmitida através das uniões, avaliando os efeitos dos principais parâmetros envolvidos no processo. Estruturas navais, aeroespaciais e de plataformas de prospecção e produção de petróleo, principalmente, são exemplos de onde este estudo pode ser aplicado. Nestes lugares, máquinas pesadas funcionam como fonte de energia vibratória que se propaga pela estrutura, causando altos níveis de vibrações e ruído em outras áreas, surgindo a necessidade de controle.

No presente trabalho, o fluxo de energia é, inicialmente, avaliado entre duas placas unidas e posteriormente estendido para acoplamentos geometricamente mais complexos, como por exemplo, com uma viga de reforço na união. A análise é feita até a frequência de 1000 Hz e os resultados dos esforços na união entre as placas, das velocidades angulares na união e a potência transferida são analisadas através de comparação com os resultados obtidos pelo Método de Elementos Finitos, permitindo avaliar os caminhos de propagação da energia vibratória e a contribuição de cada estrutura, viga e placa, no processo de transmissão de energia.

ABSTRACT

Vibrations generated in specific points of a structure are easily transmitted along its components by several types of waves generating undesirable levels of vibration and noise. The control of these levels can be obtained by reducing the power flow transmitted to the components of interest. In this way, the knowledge of the energy transmission paths, from the source to the components, are essential for the analysis and diagnosis of vibration problems.

The knowledge of the power flow, as well as of the mechanisms related to its propagation, are critical in vibration control. Thus, the objective of this work is to analyze the flexural waves response of plates, by the Mobility Method, with the aim of determining the flow of vibratory energy transmitted through their joints and assessing the effects of the main related parameters.

Naval, aerospace structures, and offshore platforms are examples of where this study can be applied. In these cases, heavy machines are sources of vibratory energy, which is transmitted throughout the structure, causing high levels of vibrations and noise.

In the present work, the power flow through two plates is initially analysed. The analysis is later extended for plates having a beam in the joint. The analysis was made up to 1000 Hz, in pure tones, with variable steps (1Hz, 5Hz and 10Hz), depending on the frequency range. Plates bending waves were modeled by thin plate theory. Results for the angular velocity and moment in the joint and the power flow were analyzed and compared with numerical results obtained by Finite Elements Method. This allowed to analyse the effects of beams on the power flow through the joint.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Excitações geradas em pontos específicos de uma estrutura são facilmente transmitidas ao longo dos componentes através de vários tipos de ondas, gerando níveis indesejáveis de vibrações e ruído. O controle destes níveis pode ser obtido reduzindo-se o fluxo de potência transmitida aos componentes estruturais. O conhecimento dos caminhos de transmissão de energia da fonte aos componentes de interesse é indispensável para a análise e o diagnóstico de problemas de vibrações e ruídos excessivos. O principal objetivo deste trabalho consiste em analisar a resposta dinâmica de placas, vibrando por ondas de flexão, usando o Método da Mobilidade para a determinação do fluxo de energia vibratória transmitida através das uniões e avaliar os efeitos dos principais parâmetros envolvidos no processo.

Sistemas estruturais que envolvem acoplamentos tipo placas e vigas estão presentes em inúmeras áreas, seja em estruturas aeroespaciais, navais, como também em plataformas de prospecção e produção de petróleo. Nestes lugares, máquinas pesadas funcionam como fonte de energia vibratória que se propaga pela estrutura, causando altos níveis de ruído em outras áreas, surgindo a necessidade de controle.

O fluxo de potência entre estruturas acopladas começou a ser estudado na década de 60, com os trabalhos de Lyon e Scharon [23] e Newland [22], que analisaram o fluxo de potência entre osciladores lineares acoplados. No final dos anos 70 os trabalhos de Davies [18], Goyder e White [20] e de Davies e Wahab [19] se destacaram pela análise do fluxo de potência entre componentes estruturais como vigas acopladas.

Recentemente, Cuschieri [1] analisou o fluxo de potência entre placas acopladas envolvendo uma linha de união. Neste trabalho, Cuschieri utilizou o Método da Mobilidade para estimar o fluxo de potência em acoplamentos de placas acopladas em forma de L, cujo movimento é descrito usando equação de movimento de placa fina, negligenciando ondas no plano, e mostrando, portanto, que a potência transmitida através da junção simplesmente apoiada se dá através dos momentos fletores e das rotações correspondentes.

O mesmo autor também analisou [2] o fluxo de potência em acoplamentos de placas usando modelo de placa semi espessa através das equações de Mindlin e conclui-se que o Método da Mobilidade pode ser aplicado em uma faixa mais ampla de frequência, ou seja, não tendo limite de frequência, tornando, assim, a análise mais abrangente possível no que diz respeito à dinâmica de estruturas.

Baars [5] aplicou o Método da Mobilidade para a análise do fluxo de potência em vigas acopladas considerando as ondas longitudinais e de flexão. Analisou a influência da rigidez do acoplamento, das dimensões das vigas e do amortecimento estrutural sobre a energia vibratória e as potências de entrada e transferida. Embora este trabalho tenha apresentado bons resultados, estes estudos foram restritos a componentes de geometria simples.

Fiates [6] aplicou esta mesma metodologia para estruturas compostas de vigas formando uma geometria mais complexa, em forma de grelha, vibrando por ondas torcionais e de flexão. Analisou fluxos de energia e o comportamento dinâmico dessas estruturas até a frequência de 2000 Hz. Os resultados foram comparados aos obtidos por Elementos Finitos indicando ótima concordância.

O presente trabalho dá continuidade a estes estudos e tem como objetivo analisar o fluxo de energia através de duas placas retangulares acopladas e, posteriormente, estender estes estudos para uniões mais complexas, tais como placas com uma viga na união. O estudo é

desenvolvido usando o modelo de placas finas submetidas a ondas de flexão [3] observando o comportamento das mesmas até frequências de 1000 Hz. Os resultados são comparados com os obtidos pelo Método de Elementos Finitos analisando os momentos fletores na união das placas, as rotações, a potência transferida e a energia vibratória permitindo, assim, avaliar o fluxo de propagação da energia vibratória ao longo da união.

A abordagem destes problemas através do Método de Elementos Finitos limita o estudo às baixas frequências, pois a complexidade geométrica das estruturas para representação do sistema implica em um grande número de elementos e, conseqüentemente, proporciona um tempo excessivo no processamento computacional para cobrir toda a faixa de frequência de interesse. Entretanto, a Análise Estatística Energética (SEA) é aplicável a estes tipos de sistemas [13], pois requer apenas que seja possível dividir a estrutura em subsistemas e conhecer os parâmetros relacionados: energia vibratória, densidade modal, fatores de acoplamento e eficiência de radiação [14]. Através deste método torna-se possível conhecer a energia vibratória transmitida através de cada acoplamento. Portanto, um dos objetivos do presente trabalho é conhecer o comportamento das placas reforçadas por vigas através do Método da Mobilidade para identificar alguns desses parâmetros, mais precisamente o fator de acoplamento, no objetivo de serem usados em modelos de SEA de estruturas navais, já que existem poucas informações disponíveis na literatura.

São discutidos, no Capítulo II, alguns conceitos básicos sobre fluxo de potência vibratória e o Método da Mobilidade, conceitos estes fundamentais dentro do contexto deste trabalho, onde a partir destas definições se pode desenvolver o método.

No Capítulo III é feita uma primeira análise sobre o acoplamento entre duas placas determinando as respostas das mesmas através das suas respectivas funções mobilidades, com o objetivo de serem determinados os esforços na união (momentos fletores) e a potência líquida

transferida entre as duas placas. Para esta análise, a união das placas é discretizada e o método é aplicado para cada intervalo pertencente à discretização, gerando assim um sistema de equações em função dos esforços. Neste mesmo capítulo a distribuição de potências ao longo da união entre as placas é calculada para cada frequência de ressonância do sistema, avaliando os pontos da união em que a energia vibratória é máxima.

Finalmente, no Capítulo IV, a união entre as placas é reforçada com uma viga e a potência transferida é analisada avaliando a influência dos parâmetros relacionados à viga na determinação da potência transferida entre as placas. Neste estudo, além dos momentos fletores nas placas aparece a torção na viga e a energia é transferida através das três subestruturas.

O Capítulo V apresenta as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS SOBRE FLUXO DE POTÊNCIA VIBRATÓRIA E MÉTODO DA MOBILIDADE

2.1. Fluxo de Potência Vibratória

A potência vibratória transmitida ao longo de meios contínuos através dos seus esforços internos é dissipada pelo amortecimento estrutural, sendo transformada em calor e irradiada em forma de energia sonora. O fluxo de potência representa a taxa de trabalho realizado ou de energia fornecida para um sistema mecânico. A análise do fluxo de potência ao longo de componentes é de grande importância, já que o conhecimento dos mecanismos de propagação objetiva reduzir a resposta estrutural, principalmente nos casos em que a irradiação de ruído é parte integrante do problema.

O comportamento dinâmico de sistemas mecânicos lineares, em regime permanente, pode ser representado por funções harmônicas de duração infinita. Fisicamente, essas funções são válidas no intervalo de tempo para o qual a resposta do sistema possa ser considerada como permanente. Tal comportamento se dá quando a energia total, que resulta da soma da energia cinética e da energia potencial, atinge um valor invariante no tempo.

Para que um sistema genérico, como o mostrado na Figura 2.1, seja mantido em regime permanente a potência que é dissipada deve ser a fornecida pelos esforços de excitação. No regime transiente este balanço de potência não é válido, visto que a potência dissipada é diferente da fornecida (Figura 2.2), sendo que o excedente de energia irá aumentar as energias cinéticas e potencial até que, mantida a excitação constante, o equilíbrio seja atingido.

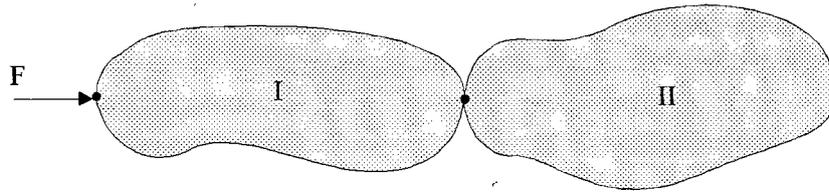


Figura 2.1 – Sistema formado por dois componentes

O sistema da Figura 2.1, composto por dois componentes acoplados, pode ser representado em função das potências de entrada, transferida e dissipada conforme mostrado na Figura 2.2.

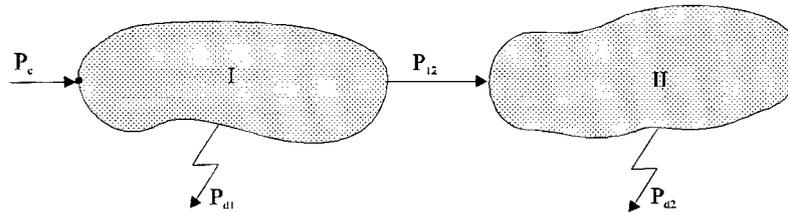


Figura 2.2 – Sistema representando o balanço de potências

Considerando que o acoplamento é conservativo e que o regime seja permanente, tem-se, então, para o componente I, o balanço de potências dado por

$$P_e - P_{12} - P_{d1} = 0 \quad (2.1)$$

e para o componente II

$$P_{12} - P_{d2} = 0 \quad (2.2)$$

As energias vibratórias totais de cada componente podem ser escritas em função das potências de entrada e transferida:

$$E_2 = \frac{P_{12}}{\omega \eta_2} \quad (2.3)$$

$$E_1 = \frac{P_e - P_{12}}{\omega \eta_1} \quad (2.4)$$

sendo P_e , a potência de entrada; P_{12} , a potência líquida transferida; E_i , a energia vibratória do componente i , η_1 , e η_2 são os fatores de amortecimento referentes aos componentes.

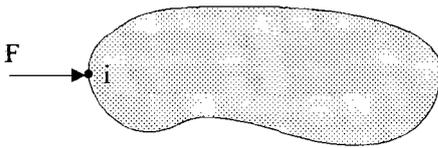


Figura 2.3 – Força aplicada em um sistema genérico

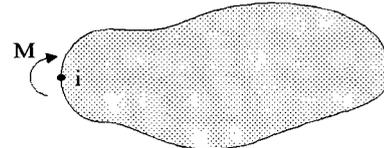


Figura 2.4 – Momento aplicado a um sistema genérico

Considerando um esforço de excitação harmônica tipo força aplicado no ponto i , que causa uma velocidade instantânea V_i no mesmo ponto (Figura 2.3), esta transmite uma potência que pode ser expressa por:

$$P_i = \frac{1}{2} \text{Re}\{F_i V_i^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{F_i^* V_i\} \quad (2.5)$$

onde F_i representa o esforço aplicado no ponto i e V_i , a velocidade no ponto i .

Caso a excitação seja dada por um momento M e a resposta em função da velocidade angular $\dot{\theta}$ (Figura 2.4), a potência instantânea é, então, dada por

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{M_i^* \dot{\theta}_i\} \quad (2.6)$$

onde M_i representa o momento aplicado no ponto i e $\dot{\theta}_i$, a velocidade angular no mesmo ponto.

Estas expressões podem ser reescritas no domínio da frequência, válidas para regime permanente,

$$P_i(f) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F_i(f) V_i^*(f)\} \quad (2.7)$$

$$P_i(f) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{M_i(f)^* \dot{\theta}_i(f)\} \quad (2.8)$$

O fluxo de potência pode ser obtido, também, em função da mobilidade ou da impedância estrutural

$$P_i = \frac{1}{2} |F_i|^2 \operatorname{Re}\{Y_{ii}\} = \frac{1}{2} |V_i|^2 \operatorname{Re}\{Z_{ii}\} \quad (2.9)$$

As equações apresentadas acima são válidas apenas para um esforço de excitação. Quando o sistema apresentar múltiplos esforços em pontos distintos, as dificuldades na obtenção da potência aumentam de maneira considerável. Considerando-se a hipótese de fraco acoplamento, a potência é obtida como se cada esforço de excitação atuasse sem interferir nos demais.

2.2. Método da Mobilidade

As características dinâmicas de uma estrutura são definidas pela função resposta em frequência, que descreve a relação causa e efeito de dois pontos da estrutura. Estas funções permitem identificar as propriedades intrínsecas relacionadas à dinâmica do sistema.

Seis tipos de funções de transferência são empregadas na análise de estruturas, são elas: Receptância (deslocamento/excitação), Mobilidade (velocidade/excitação), Inertância (aceleração/excitação) e suas recíprocas, todas interrelacionadas algebricamente. Estas funções expressam módulo e fase em função da frequência, essenciais para se obterem as informações modais.

A mobilidade indica, portanto, o comportamento da resposta na forma de velocidade de um certo ponto da estrutura a uma dada excitação, podendo esta excitação ser de qualquer natureza: uma força, um esforço cortante, um momento fletor ou torçor. Da mesma forma o termo velocidade pode representar uma velocidade de translação ou angular.

A mobilidade pontual representa a resposta de um ponto a uma dada excitação aplicada no mesmo ponto. Já para mobilidade de transferência, a resposta e a excitação estão em pontos diferentes.

$$Y_{ij} = \frac{V_j}{F_i} \quad (2.10)$$

Para $i = j$ tem-se uma mobilidade pontual e, para $i \neq j$, mobilidade de transferência.

O Método da Mobilidade é também conhecido como Método da Receptância e baseia-se nos princípios da superposição dos efeitos e da reciprocidade, válidos em sistemas lineares. O método utiliza as soluções do sistema sob forma de funções mobilidades, que podem ser obtidas via métodos clássicos analíticos, superposição modal, Método de Elementos Finitos, procedimentos experimentais ou até mesmo uma combinação destes.

A partir do sistema da Figura 2.5, que apresenta dois elementos acoplados com condições de contorno bem definidas, podem-se determinar, aplicando o Método da Mobilidade, os esforços na união e, conseqüentemente, a potência transferida por cada componente. Respeitando o equilíbrio e a continuidade na união das placas, nas quais, respectivamente, a resultante dos esforços e as velocidades são iguais na linha de união entre as placas. Portanto, pode-se obter um sistema de equações onde os esforços nos acoplamentos podem ser determinados.

Analisando os seguintes elementos acoplados, a seguinte condição de continuidade deve ser obedecida

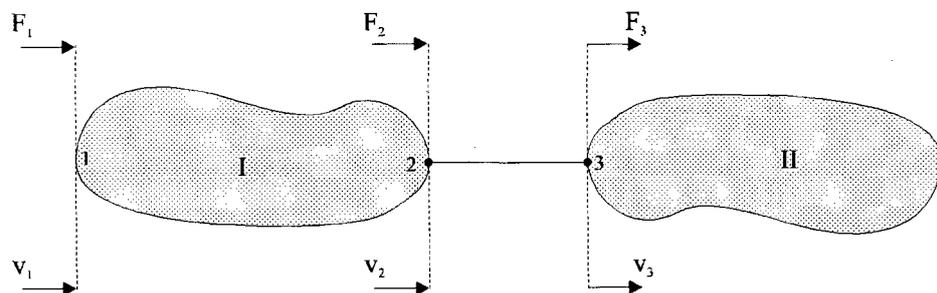


Figura 2.5 - Representação das velocidades e dos esforços em um componente genérico.

$$V_2 = V_3 \quad (2.11)$$

onde

$$V_2 = Y_{12} F_1 + Y_{22} F_2 \quad (2.12)$$

$$V_3 = Y_{33} F_3 \quad (2.13)$$

logo

$$Y_{12} F_1 + Y_{22} F_2 = Y_{33} F_3 \quad (2.14)$$

sendo F_2 e F_3 relacionados através da equação de equilíbrio vetorial,

$$F_2 + F_3 = 0 \quad (2.15)$$

Portanto, pode ser gerado um sistema de equações, utilizando uma excitação conhecida F_1 harmônica e unitária, através do qual o esforço F_2 , até então desconhecido, é determinado.

$$-(Y_{22} + Y_{33}) = F_1 Y_{12} \quad (2.16)$$

Com os resultados dos esforços, determinados acima, a potência transferida através da união pode ser obtida.

$$P_{23} = \frac{I}{2} \text{Re}\{F_2 V_2^*\} \quad (2.17)$$

onde P é a potência transferida do componente, V_2^* velocidade no acoplamento; F_2 , esforço de excitação no acoplamento.

Pode-se estimar a energia vibratória total de cada componente, sabendo-se que a relação entre o fluxo de potência e a energia vibratória é dada por:

$$E_j = \frac{I}{\omega} \eta_j^{-1} P_{ij} \quad (2.18)$$

Esta formulação também é válida para potências transmitidas através de vários esforços para os quais são considerados mais de um tipo de onda no componente. A resposta, de acordo com o princípio da superposição, é obtida pelo simples somatório dos efeitos provocados individualmente pelas ondas no componente. Uma das principais vantagens deste método consiste na liberdade de escolha do método de determinação das mobilidades: experimental, analítico, numérico ou mesmo uma combinação destes.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DE DUAS PLACAS ACOPLADAS

3.1. Análise de duas placas acopladas

Uma primeira análise consiste em estudar duas placas unidas, simplesmente apoiadas nas bordas, com uma força de excitação harmônica unitária pontual atuando em uma delas (Figura 3.1). Entre os componentes surgem os esforços cortantes e momentos fletores, que se distribuem através dos componentes estruturais. No entanto, esta análise consiste em estudar duas placas idênticas, com a transmissão de energia dada apenas pelos esforços de flexão, ou seja, a transferência de energia é dada somente pelo momento fletor na união. Consegue-se isto com a introdução de um vínculo de segunda ordem na união, de maneira que permita apenas a rotação em torno da linha de união. Este modelo caracteriza a maioria dos acoplamentos que envolvem placas e vigas.

Utilizando uma discretização ao longo da união se consegue aplicar o Método da Mobilidade e obter resultados para os esforços na linha de união e, conseqüentemente, da potência transmitida em cada intervalo discretizado. Para a seguinte análise são consideradas algumas hipóteses:

- a) as placas são consideradas finas comparando-se com o comprimento de onda gerado pela maior frequência da análise (1000 Hz);
- b) o apoio entre as placas é considerado como um apoio simples (rótula), garantindo que a energia é transferida apenas pelos esforços de flexão.
- c) a distribuição do momento na união entre as placas é expresso de forma discretizada, sendo M_i o momento que atua no i -ésimo intervalo, sendo considerados NI intervalos.

d) cada intervalo , Δx , da discretização é considerado constante.

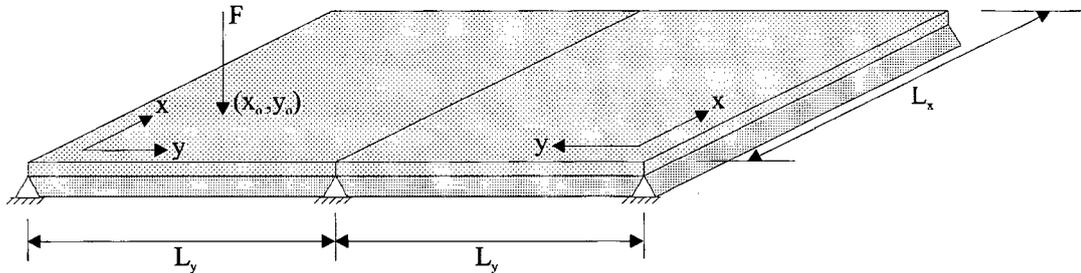


Figura 3.1 – Sistema com duas placas acopladas

Para a análise consideram-se as seguintes características geométricas e propriedades das placas:

$$\begin{aligned}
 L_x &= 1m \quad , \quad L_y = 0,5m \\
 x_0 &= 0,33m \quad , \quad y_0 = 0,375m \\
 \eta &= 0,01 \quad , \quad h_p = 6,35mm \\
 E' &= 7,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \\
 \rho &= 2710 \text{ kg/m}^3 \text{ (alumínio)}
 \end{aligned}$$

Para uma melhor visualização, a estrutura é dividida em duas subestruturas (Figuras 3.2 e 3.3) e, posteriormente, em dois subsistemas. Os subsistemas consistem em considerar a cada estrutura apenas o efeito de um esforço, força de excitação ou momento fletor, para, em seguida, ser feita a superposição dos efeitos desses esforços.

Observa-se que o deslocamento da placa I pode ser obtido da superposição dos dois subsistemas, mostrados nas Figuras 3.4 e 3.5, enquanto que para a Substrutura II se pode obter o deslocamento através do Subsistema II.

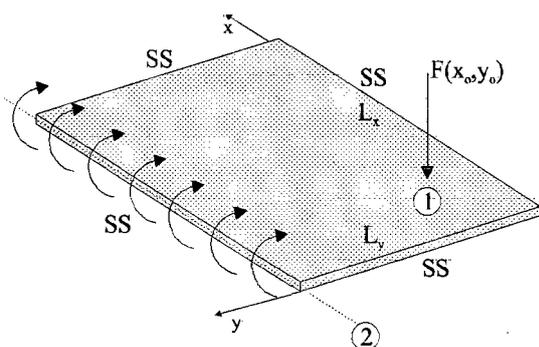


Figura 3.2 – Sistema representando os esforços na placa I

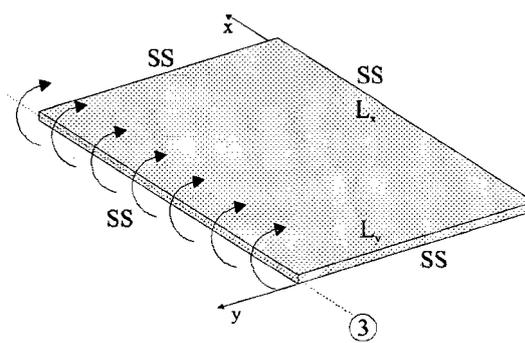


Figura 3.3 – Sistema representando os esforços na placa II

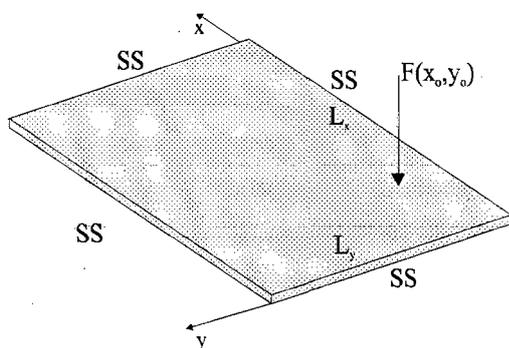


Figura 3.4 – Subsistema I

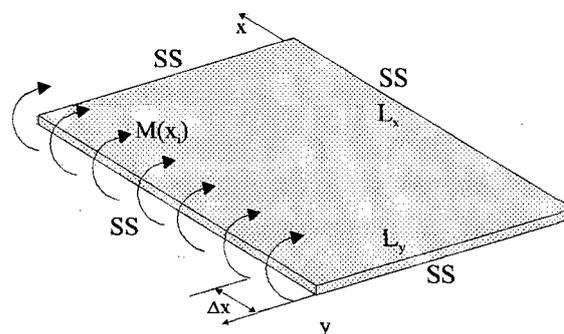


Figura 3.5 – Subsistema II

3.2. Cálculo do deslocamento das placas

As ondas de flexão são as mais importantes por gerarem maiores deflexões na direção transversal à direção do fluxo de potência, e por serem responsáveis pela maior parte da irradiação de ruído das estruturas [3]. Além disso, estruturas vibrando sob este tipo de onda possuem considerável densidade modal, o que aumenta a irradiação sonora.

Este trabalho analisa a propagação dessas ondas de flexão em placas finas finitas para frequências de até 1000 Hz, o que gera comprimentos de onda de flexão bem maiores do que a

espessura da placa. Assim, a resposta de uma placa submetida a uma onda de flexão provocada por uma força variando harmonicamente no tempo e concentrada no ponto (x_o, y_o) , pode ser obtida através da seguinte equação diferencial [8]:

$$D \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \rho h_p \omega^2 u = F \delta(x_o) \delta(y_o) \quad (3.1)$$

onde D é a rigidez à flexão da placa dado em função do módulo de elasticidade complexo do material.

$$D = \frac{E h_p^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{onde: } E = E' (1 + \eta j) \quad (3.2)$$

onde η é o fator de amortecimento da estrutura.

A forma da solução do deslocamento de uma placa simplesmente apoiada nas extremidades submetidas a um esforço de flexão, pode ser expressa em expansão de funções *senoidais*, tanto na direção x como na direção y. Partindo-se deste princípio podem-se determinar as coordenadas generalizadas desta expansão a partir das equações de Lagrange.

A aplicação direta das leis de Newton em sistemas mecânicos resulta em um conjunto de equações de movimento, em termos de coordenadas cartesianas de cada partícula que compõe o sistema. Em muitos casos, este não é o sistema de coordenadas mais conveniente para se resolver o problema ou descrever o movimento do sistema. As equações de Lagrange resultam da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (caso dinâmico), que envolvem equilíbrio dinâmico, em função das coordenadas generalizadas. Em outras palavras, seus termos representam forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas [21]. Os sistemas de coordenadas do tipo

descrito serão englobados sob o nome de coordenadas generalizadas. Tal método proposto por Lagrange será usado neste estudo.

Com as equações das energias cinética e potencial de uma placa [9], utilizam-se as Equações de Lagrange para determinar o deslocamento transversal ao longo de toda a placa.

3.2.1. Deslocamento do Subsistema I

Portanto, para o Subsistema I, que consiste em uma placa com condições de contorno bem definidas e com a presença de uma força de excitação harmônica pontual (Figura 3.4), pode ser obtido o deslocamento da placa através das Equações de Lagrange, supondo-se os seguintes modos.

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) q_k(t) \quad (3.3)$$

onde k_x e k_y são os números de ondas para as direções x e y , respectivamente, e o índice k corresponde a um dado par n, m , e $q_k(t)$ é dado por $q_k(t) = q_k e^{j\omega t}$

$$k_x = \frac{n\pi}{L_x} \quad (3.4)$$

$$k_y = \frac{m\pi}{L_y} \quad (3.5)$$

As Equações de Lagrange são [24]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{K}_p}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial \mathcal{K}_p}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{U}_p}{\partial q_k} = F_k \quad (3.6)$$

A energia cinética de uma placa submetida às ondas de flexão, é dada por [9]

$$K_p = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{m_p}{L_x L_y} \dot{u}^2(x, y, t) dy dx \quad (3.7)$$

onde m_p é a massa da placa, dada por

$$m_p = \rho h_p L_x L_y \quad (3.8)$$

Substituindo-se a solução proposta na equação da energia cinética, tem-se

$$K_p = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{1}{2} \frac{m_p}{L_x L_y} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) \dot{q}_k(t) \right]^2 dy dx \quad (3.9)$$

e, por conseguinte

$$K_p = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} m_p \dot{q}_k(t)^2 \quad (3.10)$$

Derivando a energia cinética em relação à k -ésima velocidade generalizada e em relação ao tempo, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_p}{\partial \dot{q}_k} \right] = \frac{1}{2} j \omega m_p q_k(t) \quad (3.11)$$

A energia potencial de uma placa submetida as ondas de flexão, é dada por [9]

$$U_p = \frac{D}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dy dx \quad (3.12)$$

Substituindo a solução proposta (Equação 3.3) na equação acima e usando a ortogonalidade dos modos, chegar-se na forma final da energia potencial

$$U_p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D}{8} L_x L_y (k_x^2 + k_y^2)^2 q_k(t)^2 \quad (3.13)$$

Derivando a energia potencial em relação a k-ésima coordenada generalizada, tem-se

$$\frac{\partial U_p}{\partial q_k} = \frac{1}{4} D L_x L_y (k_x^2 + k_y^2)^2 q_k(t) \quad (3.14)$$

Com a força de excitação concentrada em um ponto, o cálculo das forças generalizadas neste subsistema pode ser realizado incorporando na integral uma função delta $\delta(x_o)\delta(y_o)$ tornando claro que a excitação é pontual [7,24],

$$F_k = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} F \delta(x_o) \delta(y_o) \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) dy dx \quad (3.15)$$

$$F_k = F \operatorname{sen}(k_x x_o) \operatorname{sen}(k_y y_o) \quad (3.16)$$

Aplicando as Equações 3.11, 3.14 e 3.16 na Equação 3.6, obtém-se as coordenadas generalizadas do sistema e o deslocamento da placa referente ao Subsistema I.

$$\frac{1}{4} m_p \ddot{q}_k(t) + \frac{D}{4} L_x L_y [k_x^2 + k_y^2] q_k(t) = F \operatorname{sen}(k_x x_o) \operatorname{sen}(k_y y_o) \quad (3.17)$$

cuja solução para variações harmônicas no tempo $F = F_o e^{j\omega t}$, é

$$q_k(t) = \frac{4F_o \operatorname{sen}(k_x x_o) \operatorname{sen}(k_y y_o)}{L_x L_y D (k_x^2 + k_y^2)^2 - \omega^2 m_p} e^{j\omega t} \quad (3.18)$$

Assim, o deslocamento do subsistema I, é dado por

$$u(x, y, t) = \frac{4F_o}{L_x L_y \rho h_p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k_x x_o) \operatorname{sen}(k_y y_o)}{\frac{D}{\rho h_p} (k_x^2 + k_y^2)^2 - \omega^2} \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) e^{j\omega t} \quad (3.19)$$

As frequências naturais deste subsistema podem ser determinadas usando a condição de deslocamento (resposta) tendendo a infinito. Isto ocorre quando o denominador da Equação 3.19 tende a zero, ou

$$\frac{D}{\rho h_p} (k_x^2 + k_y^2)^2 - \omega^2 = 0 \quad (3.20)$$

Logo, as frequências naturais de uma placa retangular simplesmente apoiada nas bordas podem ser obtidas por:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\frac{D}{\rho h_p}} (k_x^2 + k_y^2) \quad [\text{rad / s}] \quad (3.21)$$

ou

$$f_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho h_p}} (k_x^2 + k_y^2) \quad [\text{Hz}] \quad (3.22)$$

3.2.2. Deslocamento do Subsistema II

Para o Subsistema II (Figura 3.5), no qual a estrutura é submetida a um esforço tipo momento fletor em um de seus contornos, pode-se obter a solução geral para o cálculo do deslocamento através de quatro termos envolvendo quatro constantes, as quais são obtidas através de quatro condições de contorno da placa. Sabendo-se que se trata de uma placa simplesmente apoiada nas bordas, e com um momento distribuído $M(x)$ atuando no contorno ($y = L_y$), pode-se, portanto, escrever as seguintes condições para a coordenada y :

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2} = 0$$

$$u(x, L_y) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x, L_y)}{\partial y^2} = -\frac{M(x)}{D}$$

A expressão geral do deslocamento da placa para este subsistema pode ser expressa na forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) e^{j\omega t} \quad (3.23)$$

A função $\psi_n(y)$ tem como funções base as indicadas abaixo, cujas constantes podem ser calculadas através das condições de contorno em y , citadas anteriormente

$$\psi_n(y) = A_1 e^{s_1 y} + A_2 e^{s_2 y} + A_3 e^{s_3 y} + A_4 e^{s_4 y} \quad (3.24)$$

onde

$$s_1 = (k_x^2 + K^2)^{1/2}, s_2 = (k_x^2 - K^2)^{1/2}, s_3 = -(k_x^2 + K^2)^{1/2}, s_4 = -(k_x^2 - K^2)^{1/2} \quad (3.25)$$

e

$$K^4 = \frac{\rho \omega^2}{D} \quad (3.26)$$

A solução proposta, quando substituída na equação diferencial de flexão da placa (Equação 3.1), gera o sistema de equações em que, a partir de uma simples inversão de matrizes, podem ser obtidos os valores das incógnitas A_1, A_2, A_3, A_4 ,

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

$$A_1 e^{s_1 L_y} + A_2 e^{s_2 L_y} + A_3 e^{s_3 L_y} + A_4 e^{s_4 L_y} = 0$$

$$A_1 s_1^2 + A_2 s_2^2 + A_3 s_3^2 + A_4 s_4^2 = 0$$

$$A_1 s_1^2 e^{s_1 L_y} + A_2 s_2^2 e^{s_2 L_y} + A_3 s_3^2 e^{s_3 L_y} + A_4 s_4^2 e^{s_4 L_y} = -\frac{M(x)}{D^*}$$

São, então, calculadas as quatro constantes A_1, A_2, A_3, A_4 , e obtém-se, em seguida, a solução de $\psi_n(y)$, já na forma simplificada. Esta é a forma como a placa descreve seu movimento transversal ao longo da direção y para o Subsistema II, pois, na direção x a mesma se desloca através de funções *senoidais*.

$$\psi_n(y) = -\frac{M_n}{4\pi f \sqrt{\rho D^*}} \left(\frac{\text{sen}(k_2 y)}{\text{sen}(k_2 L_y)} - \frac{\text{senh}(k_1 y)}{\text{senh}(k_1 L_y)} \right) \quad (3.27)$$

Logo, pode-se representar o deslocamento transversal ao longo de todo o domínio da placa excitada pelo momento distribuído, usando a Equação geral (3.23),

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{4\pi f \sqrt{\rho h_p D^*}} \left(\frac{\text{sen}(k_2 y)}{\text{sen}(k_2 L_y)} - \frac{\text{senh}(k_1 y)}{\text{senh}(k_1 L_y)} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L_x} x \right) e^{j\omega t} \quad (3.28)$$

onde

$$k_2 = \sqrt{\beta^2 - k_x^2} \quad (3.29)$$

$$k_1 = \sqrt{\beta^2 + k_x^2} \quad (3.30)$$

$$\beta^4 = \frac{(2\pi f)^2 \rho h_p}{D} \quad (3.31)$$

Observa-se que para o cálculo do deslocamento do Subsistema II (Equação 3.28) apenas um simples somatório é necessário para descrever a resposta deste subsistema, para qualquer ponto do domínio da placa, tornando a implementação computacional simples e rápida.

3.3. Cálculo das mobilidades

As funções respostas em frequência, na forma de mobilidade, fundamentais para desenvolvimento deste trabalho, podem ser determinadas a partir dos deslocamentos das placas, obtidos na seção anterior. Com estas expressões dos deslocamentos, o campo de velocidade ao longo de toda estrutura pode ser conhecido e as funções mobilidades podem ser determinadas.

Contudo, as mobilidades envolvidas nesta análise não são mobilidades pontuais, mas sim, envolvem excitação em um ponto e resposta em outros ao longo da linha de união, fazendo-se necessário expressar a função mobilidade de maneira discreta, já que a linha de união está sendo representada por NI segmentos. Portanto, é feita uma discretização que consiste em dividir a linha de união em intervalos constantes de forma que seja possível aplicar o Método da Mobilidade para cada intervalo. Disto, posteriormente, resulta um sistema de equações que possibilita determinar os esforços (momentos fletores) que atuam em cada intervalo, sendo que o número de discretização deve ser suficiente para descrever a distribuição dos esforços na união em toda faixa de frequências de interesse.

Os números mostrados nos índices de cada mobilidade se referem aos pontos de excitação e resposta, correspondentes a cada mobilidade. Portanto, a mobilidade Y_{11} indica que se trata de uma mobilidade pontual, sendo a resposta obtida no ponto 1, correspondente à excitação neste mesmo ponto; Y_{12} é uma mobilidade de transferência envolvendo a excitação no ponto 1 e resposta em forma de velocidade angular na linha de união (ponto 2), e finalmente, a mobilidade Y_{22} também mobilidade pontual, porém, envolvendo o momento atuando na linha de união (ponto 2) e a velocidade angular no mesmo ponto.

Pode-se determinar a expressão da mobilidade Y_{12} , a partir do deslocamento do subsistema I, já calculado anteriormente, considerando uma excitação conhecida $F(x_o, y_o)$ harmônica e de módulo unitário:

$$Y_{12}(x) = \frac{\dot{\theta}(x, y)}{F(x_o, y_o)} = \frac{j2f}{\rho h_p L_x L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \text{sen}(k_x x_o) \text{sen}(k_y y_o)}{(f_{n,m}^2 - f^2)} \text{sen}(k_x x) \quad (3.32)$$

Esta mobilidade (Equação 3.32) relaciona a velocidade angular na linha de união provocada pela excitação atuando na placa I, como visto na Figura 3.4.

Conhecida a resposta do subsistema II, representa-se o momento dado pela Equação 3.33, que atua na linha de união, por [1]

$$M_n = \frac{\Delta x}{L_x} \sum_{i=1}^{NI} M(x_i) \text{sen}[k_x x_i] \quad (3.33)$$

onde NI representa o número de discretizações e $M(x_i)$ é o momento que atua em cada segmento da união.

Logo, a mobilidade referente a este subsistema pode ser expressa por

$$Y_{22} = \frac{\dot{\theta}_2(x_j)}{M(x_i)} = -\frac{\Delta x j}{4L_x \sqrt{\rho h_p D^*}} \sum_{n=1}^{\infty} [\text{sen}(k_x x_i) \text{sen}(k_x x_j)] \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \quad (3.34)$$

Cada momento que atua em cada intervalo da união provoca velocidades em todos os outros intervalos da mesma linha da união. Logo, esta mobilidade pode ser representada por uma matriz que contém informações de todos os esforços na linha de união.

3.4. Cálculo dos esforços

Com a superposição dos efeitos de cada esforço, consegue-se obter a resposta do problema completo. Este procedimento denominado Método da Superposição [10], combina as soluções independentes de cada esforço tornando possível a obtenção da solução do sistema completo com a simples soma de cada solução. Para isto, considera-se que o sistema seja linear.

Parte-se do princípio de que na união, linha comum às duas placas, as velocidades angulares são iguais, isto é, obedecendo a continuidade dos deslocamentos na união. Considera-se, também, que a resultante dos esforços são nulos na linha de união, caracterizando a reciprocidade dos esforços no acoplamento. E considerando que as placas são idênticas ($Y_{22}=Y_{33}$).

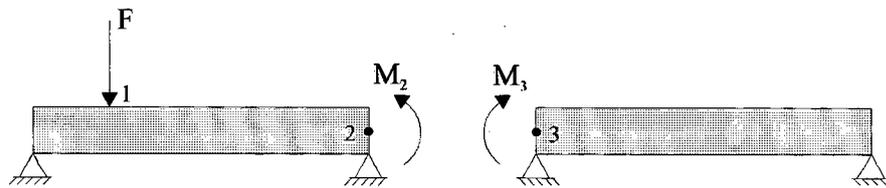


Figura 3.6 – Vista transversal do sistema acoplado

a) continuidade das velocidades angulares nas uniões

$$\dot{\theta}_2(x_i, y = L_y) = \dot{\theta}_3(x_i, y = L_y) \quad (3.35)$$

$$\dot{\theta}_2^{M_2} + \dot{\theta}_2^F = \dot{\theta}_3^{M_3} \quad (3.36)$$

onde $\dot{\theta}_2^{M_2}$ é a velocidade angular no ponto 2 provocada pelo momento M_2 atuando no contorno, união da placa I; $\dot{\theta}_2^F$, velocidade angular no ponto 2 (linha de união), provocada pela força de

excitação F atuando em um ponto da placa I; $\dot{\theta}_3^{M_3}$, velocidade angular no ponto 3 provocada pelo momento M_3 atuando no contorno da união da placa II. De outra forma.

$$Y_{22}(x_i, x_j) M_2(x_i) + Y_{12}(x_i) F(x_o, y_o) = Y_{33}(x_i) M_3(x_i, x_j) \quad (3.37)$$

b) Resultante dos esforços nulos na união

$$M_2(x_i) + M_3(x_i) = 0 \quad (3.38)$$

c) Considerando placas iguais

$$Y_{22} = Y_{33} \quad (3.39)$$

Considerando que a Equação 3.35 seja válida para todo intervalo da união, e considerando a excitação F unitária, tem-se

$$\begin{bmatrix} Y_{22}(x_1, x_1) & Y_{22}(x_1, x_2) & \dots & Y_{22}(x_1, x_j) \\ Y_{22}(x_2, x_1) & Y_{22}(x_2, x_2) & \dots & Y_{22}(x_2, x_j) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{22}(x_i, x_1) & Y_{22}(x_i, x_2) & \dots & Y_{22}(x_i, x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(x_1) \\ M(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M(x_i) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_{12}(x_1) \\ Y_{12}(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{12}(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

de forma simplificada

$$[Y_{22}][M] = \frac{1}{2}[Y_{12}] \quad (3.41)$$

Considerando NI intervalos de discretizações, obtém-se um sistema de equações de ordem NI , através do qual pode-se obter os NI esforços (momentos fletores) ao longo da união. Assim, quanto maior o número de discretizações maior a precisão na estimativa dos esforços e no cálculo da potência transferida.

Para o cálculo do espectro de potência transferida, é necessário que este sistema consiga descrever a distribuição dos esforços na união para cada frequência, tornando-se necessário resolvê-lo para cada frequência discreta na faixa de interesse, considerando 100 modos de vibrações nesta análise.

Nesta análise, o sistema dado pela Equação 3.40, resultou da discretização da união em 25 divisões, ou seja, 25 valores de momento foram obtidos ao longo da união. Este número é considerado suficiente para descrever a resposta neste particular acoplamento, em toda faixa de frequências, pois, o mesmo é recomendado pelo manual do Ansys que indica o uso de no mínimo seis discretizações por meio comprimento de onda, e no caso o uso de 25 discretizações atende esta recomendação.

3.5. Cálculo das potências

Para as estruturas acopladas desta maneira, com a aplicação de uma força de excitação em um simples ponto, as expressões para as potências de entrada e transmitida podem ser computadas por

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(F(f) \dot{u}^*(x_o, y_o, f)) \quad (3.42)$$

$$P_{trans}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{ M(x_i, f) \dot{\theta}^*(x_i, f) \} \quad (3.43)$$

sendo $F(f)$, o espectro de potência da força de excitação e E , a energia vibratória, dada por

$$E_{i,j} = \frac{1}{\omega} \eta^{-1} P_{i,j} \quad (3.44)$$

onde η é o fator de amortecimento ou fator de perda da estrutura

3.6. Resultados

Os resultados são calculados através de um programa elaborado em linguagem C++ usando uma discretização de 25 intervalos ao longo do acoplamento, onde o algoritmo e o fluxograma computacional estão contidos no apêndice.

Portanto, foram calculados 25 valores do momento ao longo da linha de união, que estão mostrados nas Figuras 3.7 e 3.8. Da mesma forma, foram calculadas as velocidades angulares na união entre as placas (Figuras 3.9 e 3.10). Os resultados foram obtidos nas frequências de ressonâncias do sistema e comparados com os resultados obtidos pelo Método de Elementos Finitos.

Neste programa os resultados são obtidos 75% mais rápido que os resultados adquiridos pelo Método de Elementos Finitos, pois o Método da Mobilidade usa apenas uma discretização envolvendo a linha de união das placas e expressões analíticas para o cálculo das respostas das placas, enquanto que o Método de Elementos Finitos envolve uma discretização em todo o domínio da estrutura proporcionando um maior esforço computacional.

3.6.1. Resultados dos esforços de flexão ao longo da união

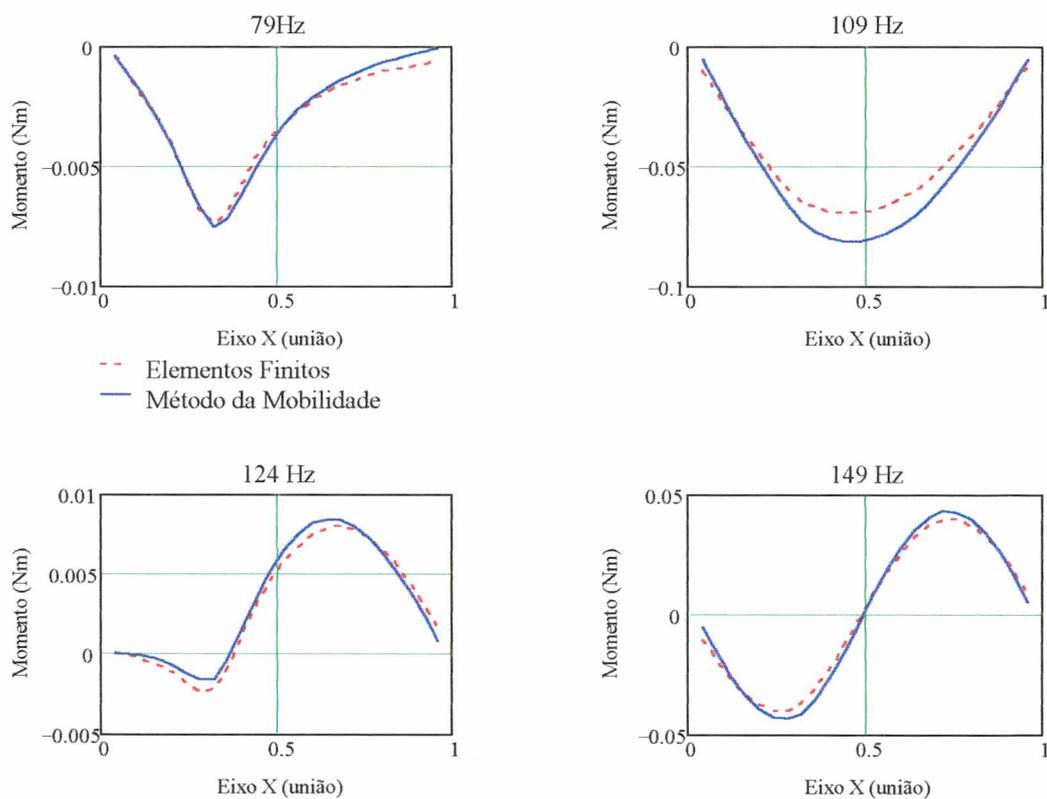


Figura 3.7 – Distribuições do momento fletor ao longo da união

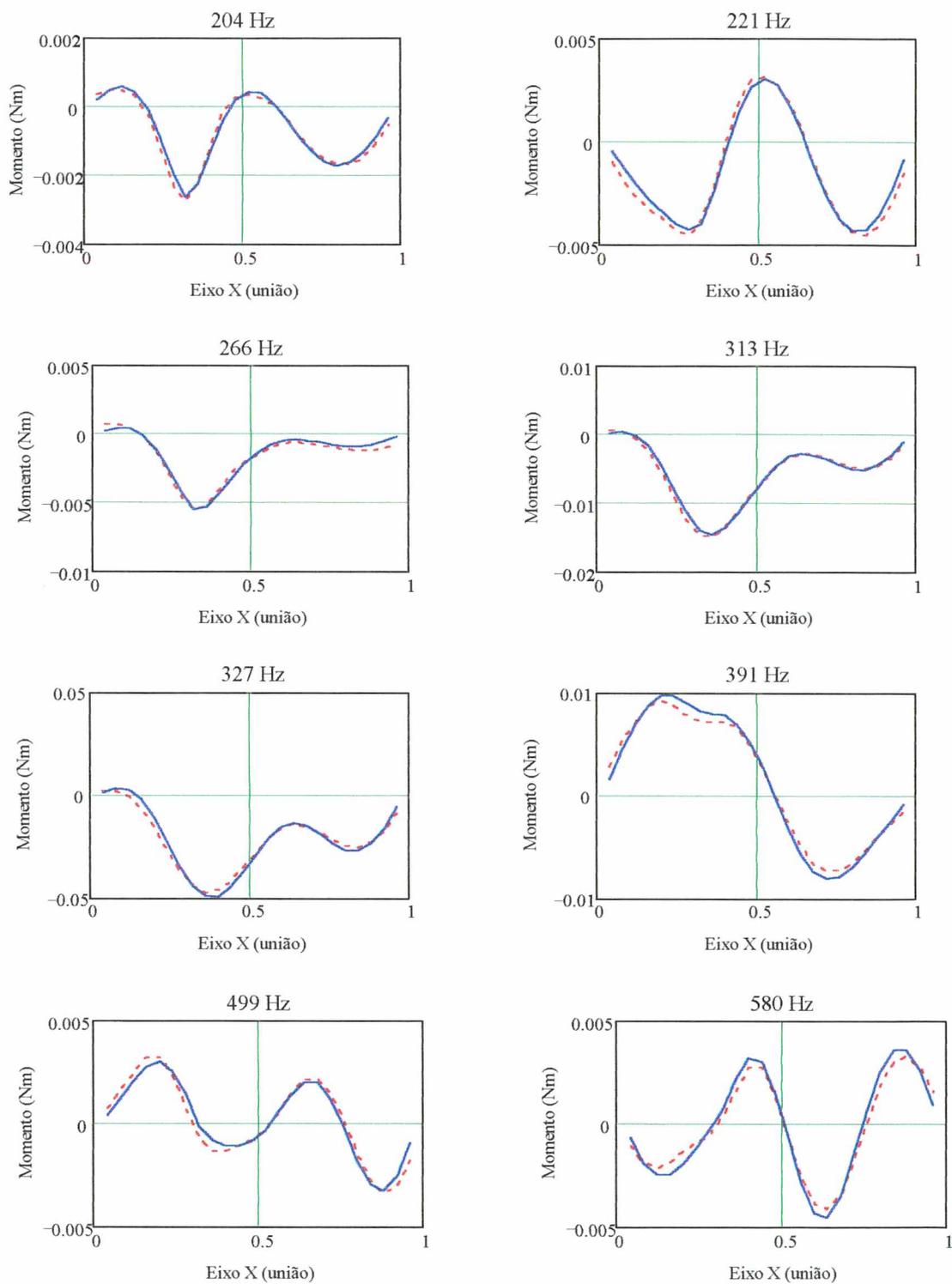


Figura 3.8 – Distribuições do momento fletor ao longo da união

3.6.2. Resultados da velocidade angular ao longo da união

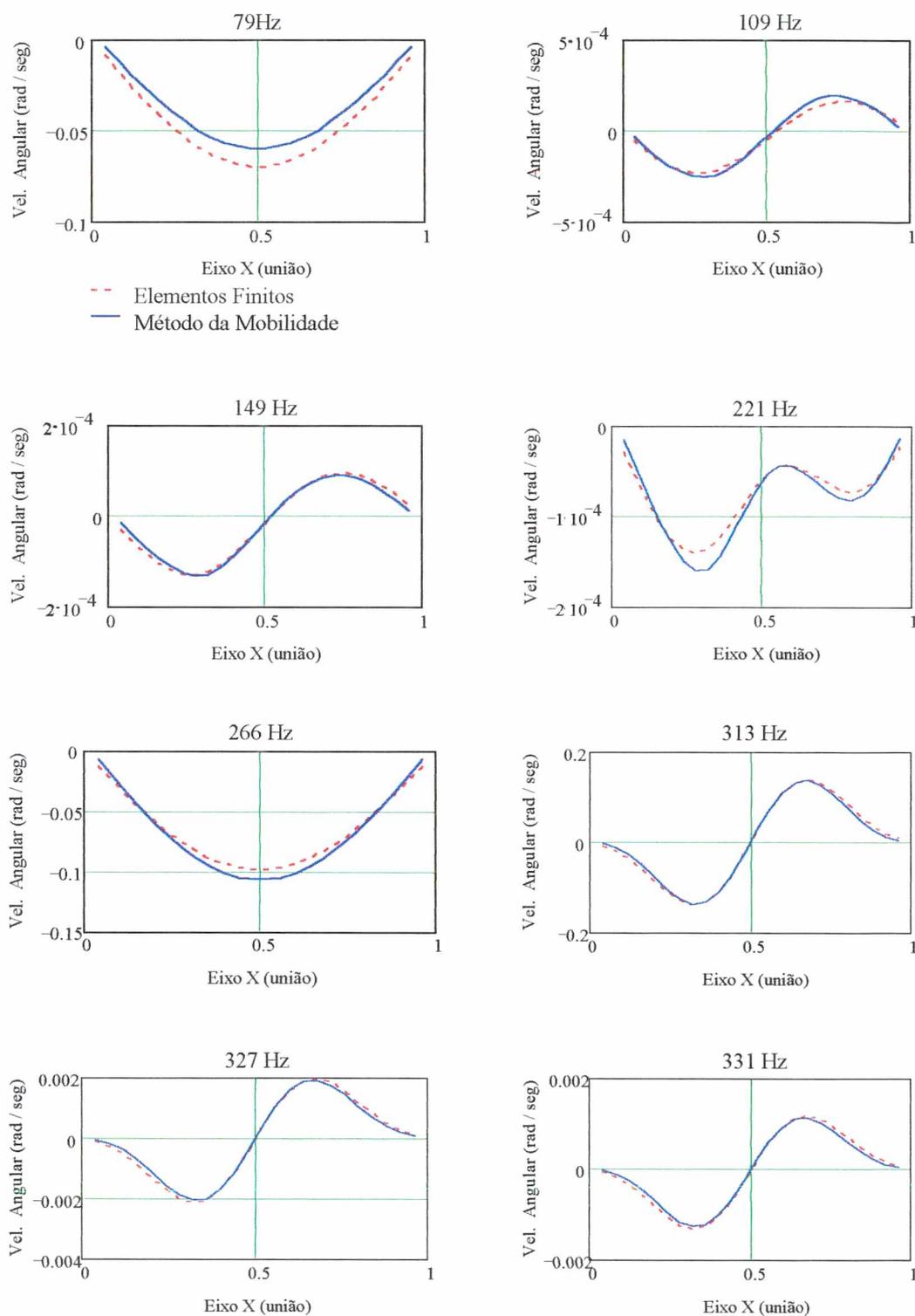


Figura 3.9 – Velocidades angulares ao longo da união

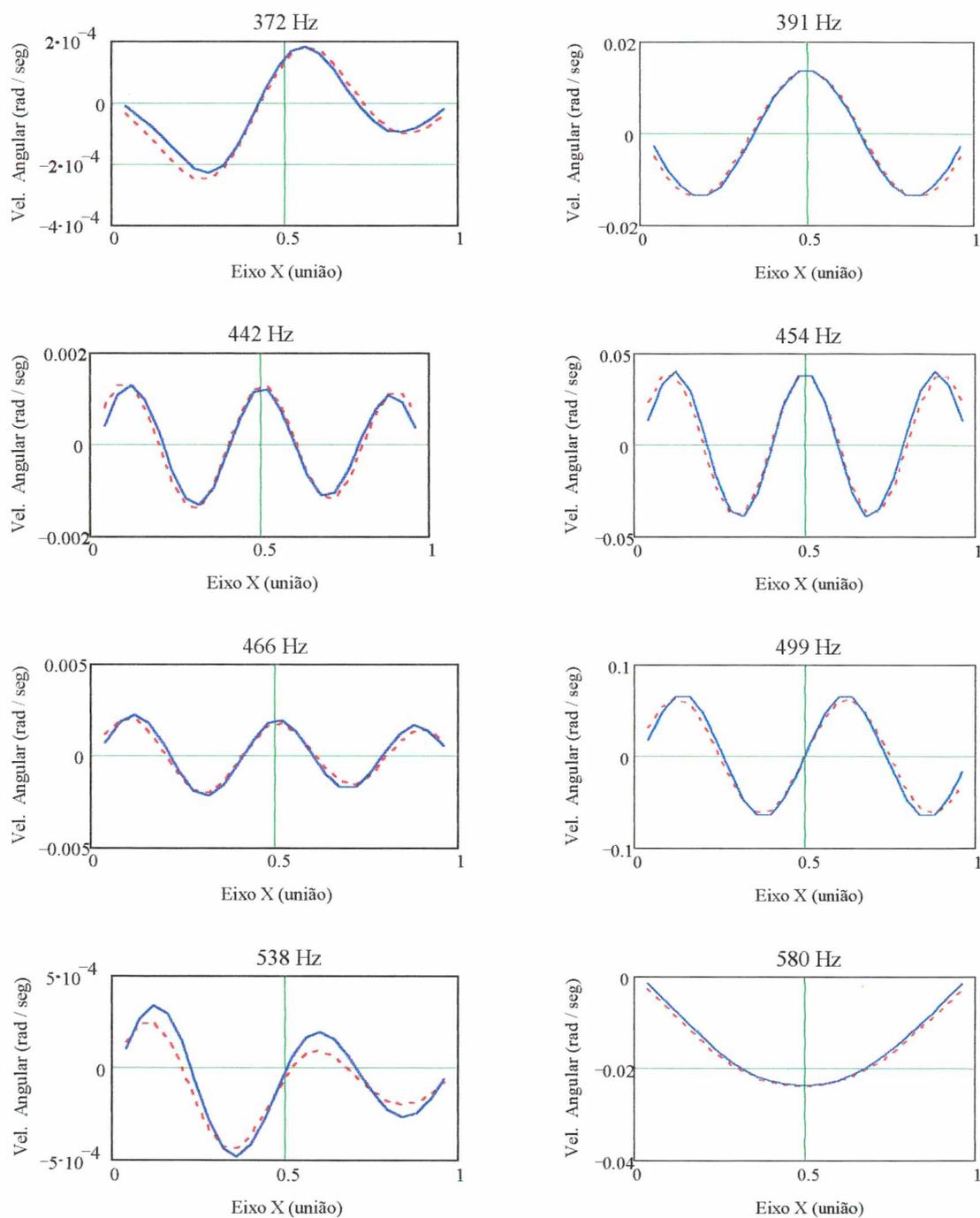


Figura 3.10 – Velocidades angulares ao longo da união

3.6.3. Resultado das potências de entrada e transferida

A potência líquida transferida foi determinada através do mesmo programa em linguagem C++ que, por sua vez, utiliza um algoritmo com um método numérico (Decomposição LU), para a solução do sistema de equações. Os resultados são obtidos para uma discretização de 25 divisões ao longo da união e uma força de excitação de módulo unitário atuando sobre uma placa. Optou-se por este número de discretização por ser suficiente para descrever o resultado da potência transferida e dos esforços de flexão, atendendo os critérios para descrever o comprimento de onda da maior frequência em análise. Na faixa de frequência de 0 a 200Hz foi usado um incremento de frequência de 1 Hz, entre 200 Hz a 500 Hz o passo foi de 5 Hz e de 500 Hz a 1000 Hz foi usada uma variação de 10 Hz.

Nas comparações mostradas nas Figuras 3.11 e 3.12, verifica-se a confiabilidade do Método da Mobilidade através da comparação com o Método de Elementos Finitos, os quais apresentam ótima concordância em toda a faixa de frequências analisada, embora, existam pequenas diferenças nas altas frequências. Os resultados do Método de Elementos Finitos, foram obtidos, também, para uma discretização de 25 divisões na linha de união, usando elementos de placa bilinear.

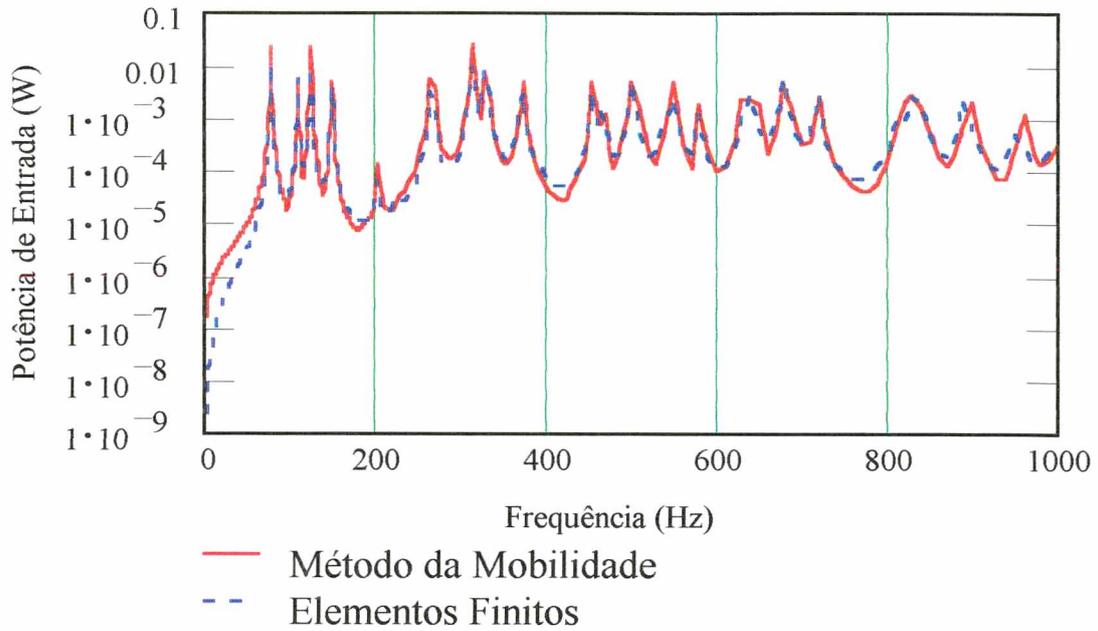


Figura 3.11 – Potência de Entrada

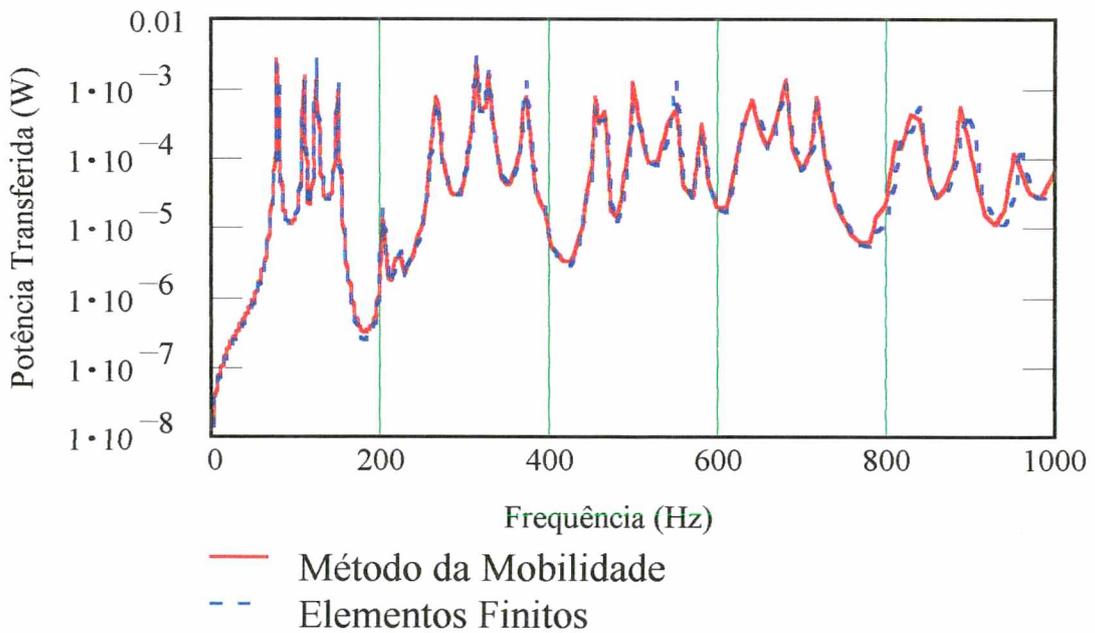


Figura 3.12 – Potência Transferida

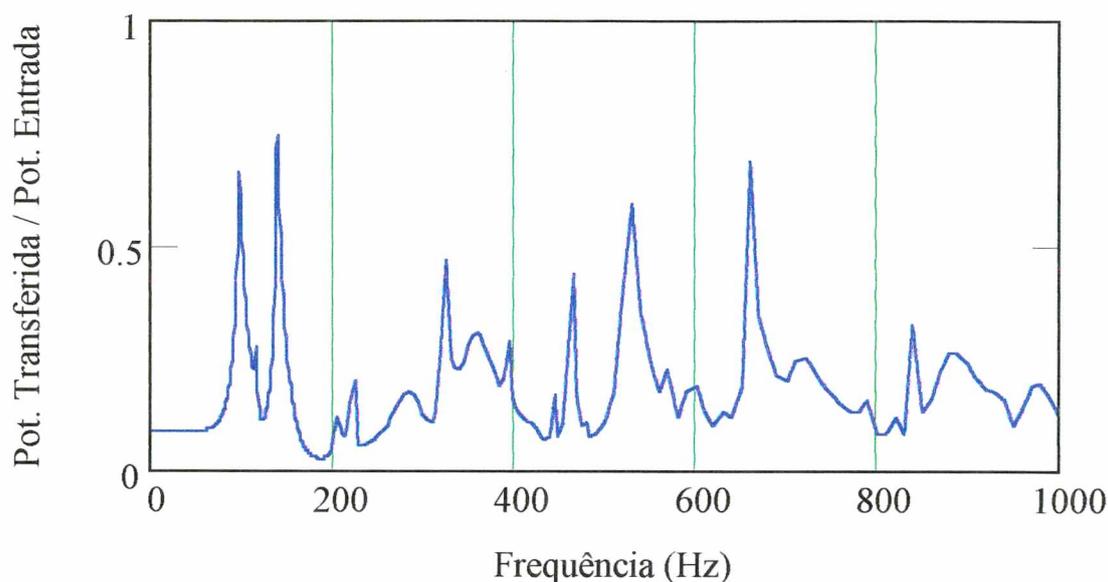


Figura 3.13 – Razão de Potências

Optou-se, também, por apresentar os resultados da razão de potências, ou seja, a potência transferida dividida pela potência de entrada (Figura 3.13), para analisar a potência transferida normalizada em relação à potência de entrada. Assim sendo, a frequência onde a maior parte da energia é transferida é aquela em que o valor da razão de potência se aproxima da unidade, pois desta forma a potência de entrada é quase que totalmente transferida para a outra placa.

3.6.4. Resultados da distribuição da potência transferida ao longo da união entre as placas

Em sistemas estruturais dinâmicos a energia vibratória é transmitida ao longo dos componentes através de suas uniões, atingindo outros componentes e proporcionando níveis de vibrações e ruído. A Figura 3.14 ilustra a forma como o fluxo de potência é transmitido entre as duas estruturas. Da mesma forma, as Figuras 3.15 e 3.16 mostram os resultados do fluxo de potência ao longo da união descrevendo o perfil da energia vibratória que atinge a segunda

estrutura e indicando a região onde o fluxo atinge maior magnitude para uma dada frequência, ou seja, mostra o caminho preferencial da energia vibratória em cada modo de vibração.

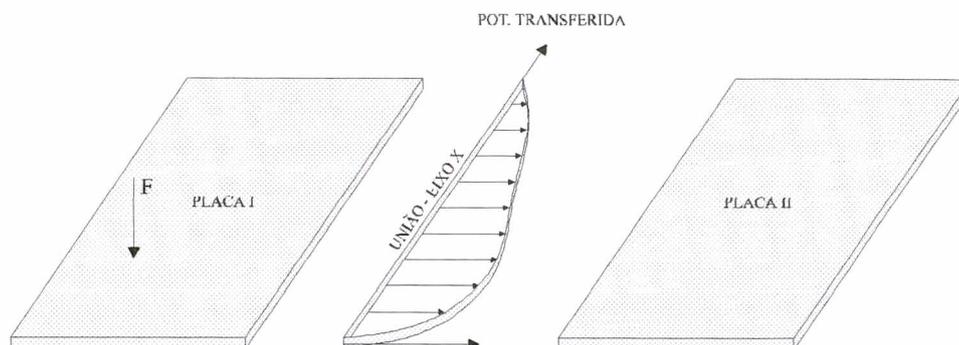
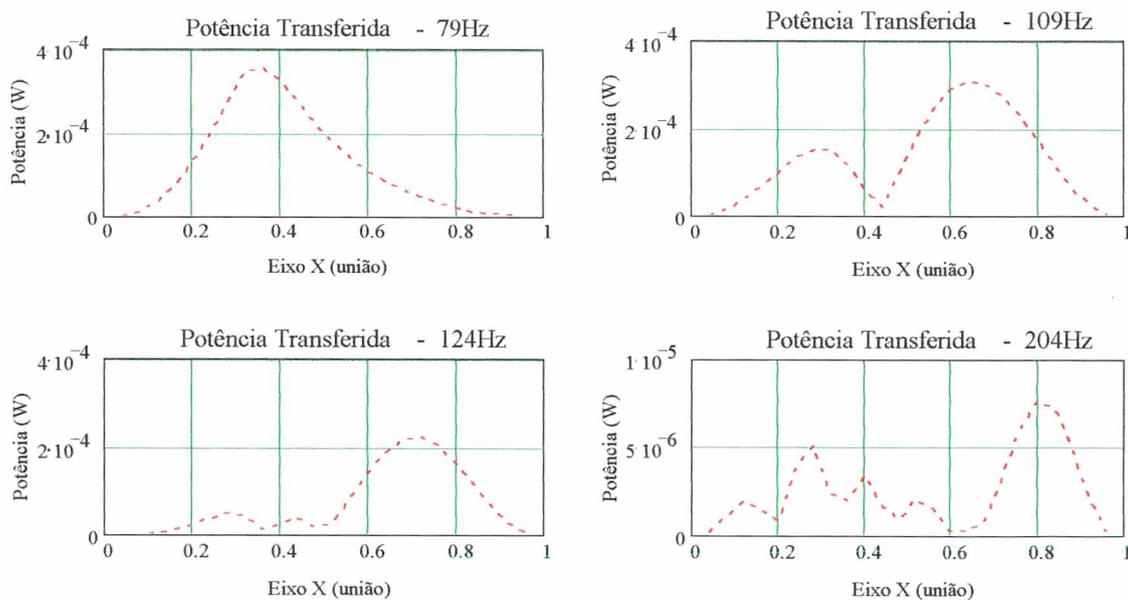


Figura 3.14 – Representação ilustrativa da transferência de potência na união das placas.

Este diagnóstico é de fundamental importância para a previsão do controle de vibração, pois, conhecendo os pontos preferenciais de propagação da energia vibratória pode-se achar, então, uma maneira ótima para reduzir o fluxo.



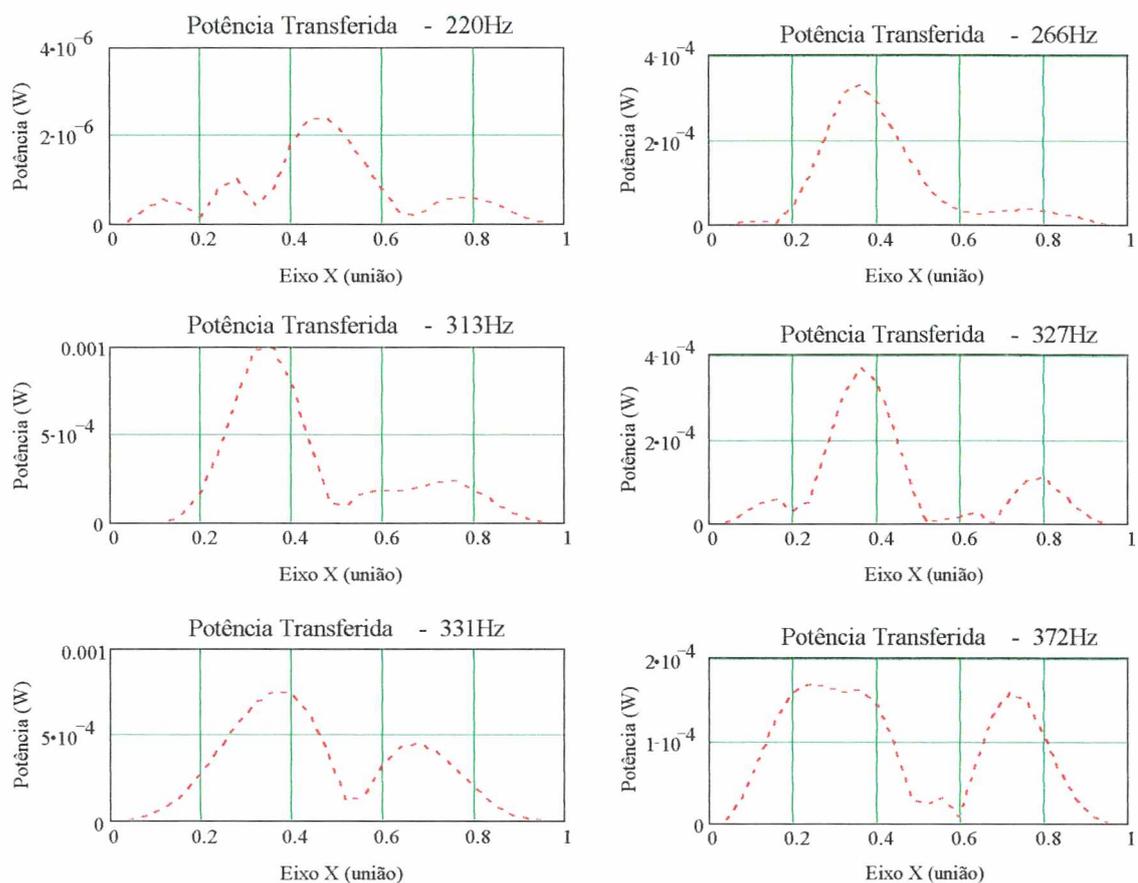


Figura 3.15 – Distribuições da transferência de potência ao longo da união.

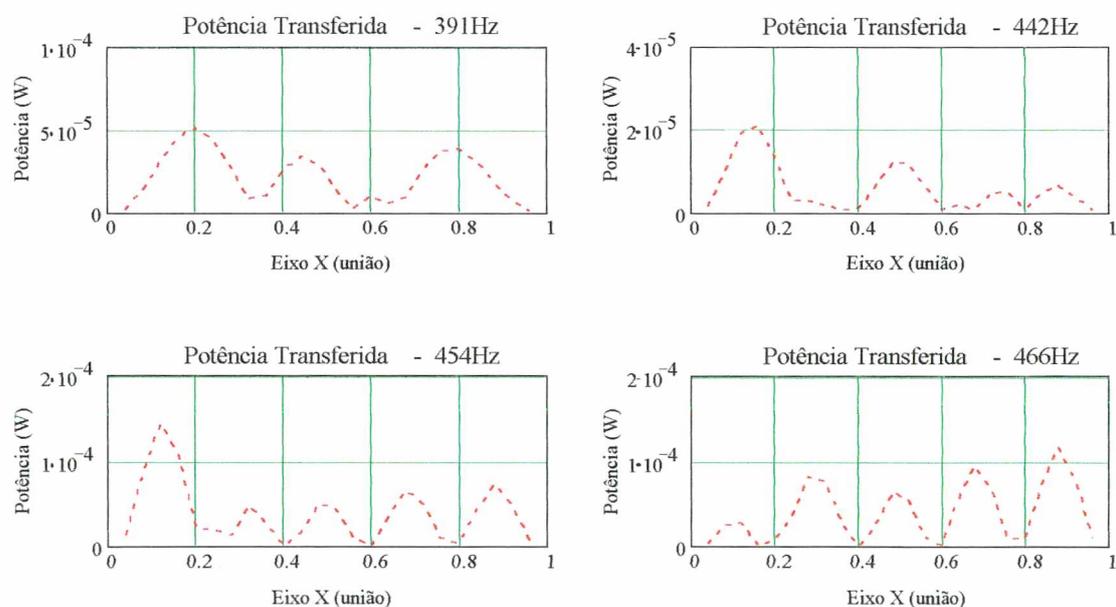


Figura 3.16 – Distribuições da transferência de potência ao longo da união.

3.6.5. Análise de sensibilidade

Dentre os gráficos dos momentos e rotações apresentados na seção anterior, existem algumas comparações que apresentam pequenas diferenças. Para demonstrar a fonte dessas incertezas, fez-se uma análise de sensibilidade, que consiste em provocar uma pequena variação na frequência em torno da frequência de ressonância e observar a configuração dos momentos fletores e das velocidades angulares. Para esta análise utilizou-se uma variação de 0,05Hz em torno da respectiva frequência de ressonância .

Observando os gráficos mostrados nas Figuras 3.17, 3.18, 3.19 e 3.20, nota-se que uma pequena variação na frequência (0,05Hz) provoca uma variação muito grande no módulo dos momentos ao longo da união. Pode-se conferir esta variação em consequência de que a análise está sendo feita na frequência de ressonância, pois, qualquer variação da em torno da frequência de ressonância provoca uma significativa diferença na comparação dos resultados. Pode-se concluir, portanto, que as diferenças dos resultados mostradas na seção anterior estão provavelmente relacionadas às pequenas incertezas referentes aos valores das frequências de ressonância obtidas pelos dois métodos.

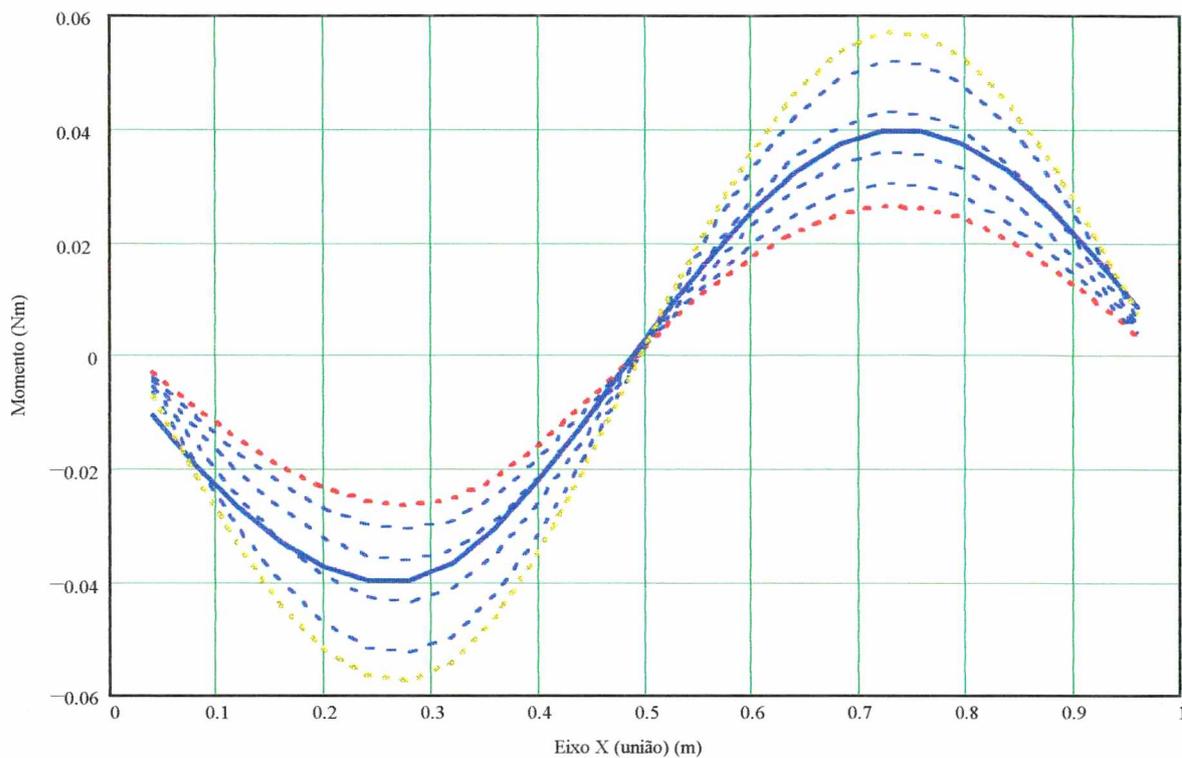


Figura 3.17 – Verificação da sensibilidade do momento fletor na união, com variações de 0,05 Hz em torno da frequência 149 Hz, --- Método da Mobilidade, — Método de Elementos (149 Hz) Finitos. Variação da frequência entre $f_1 = 148,85$ Hz (vermelho) e $f_2 = 149,15$ Hz (marrom).

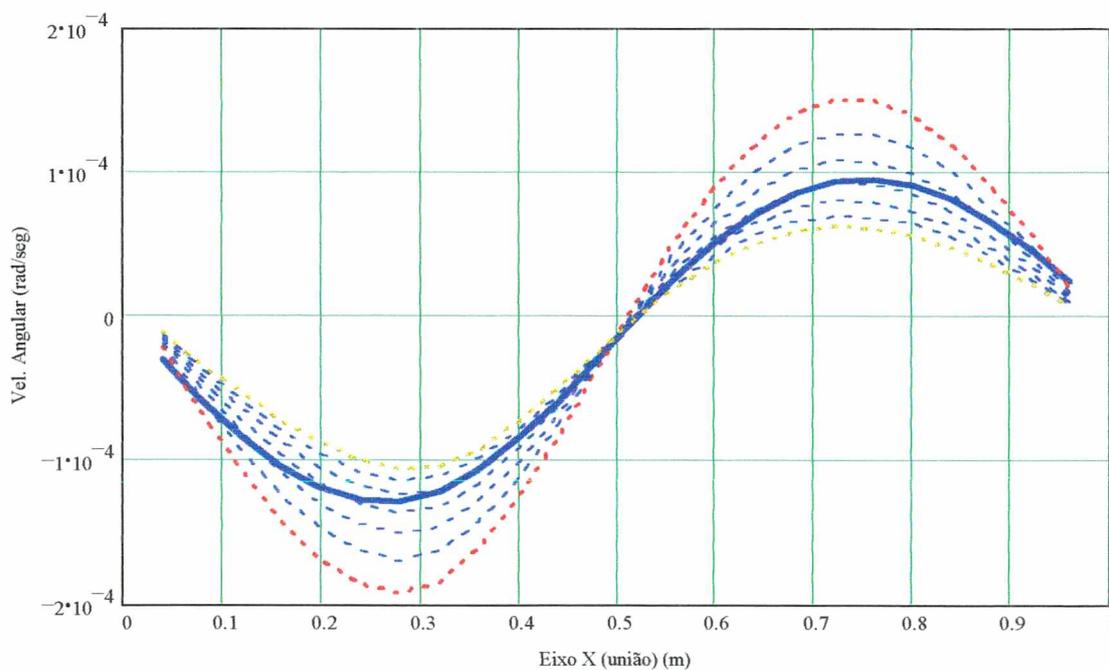


Figura 3.18 – Verificação da sensibilidade na velocidade angular, com variações de 0,05 Hz em torno da frequência 149 Hz. --- Método da Mobilidade, — Método de Elementos Finitos (149 Hz). Variação da frequência entre $f_1 = 148,85$ Hz (vermelho) e $f_2 = 149,15$ Hz (marrom)

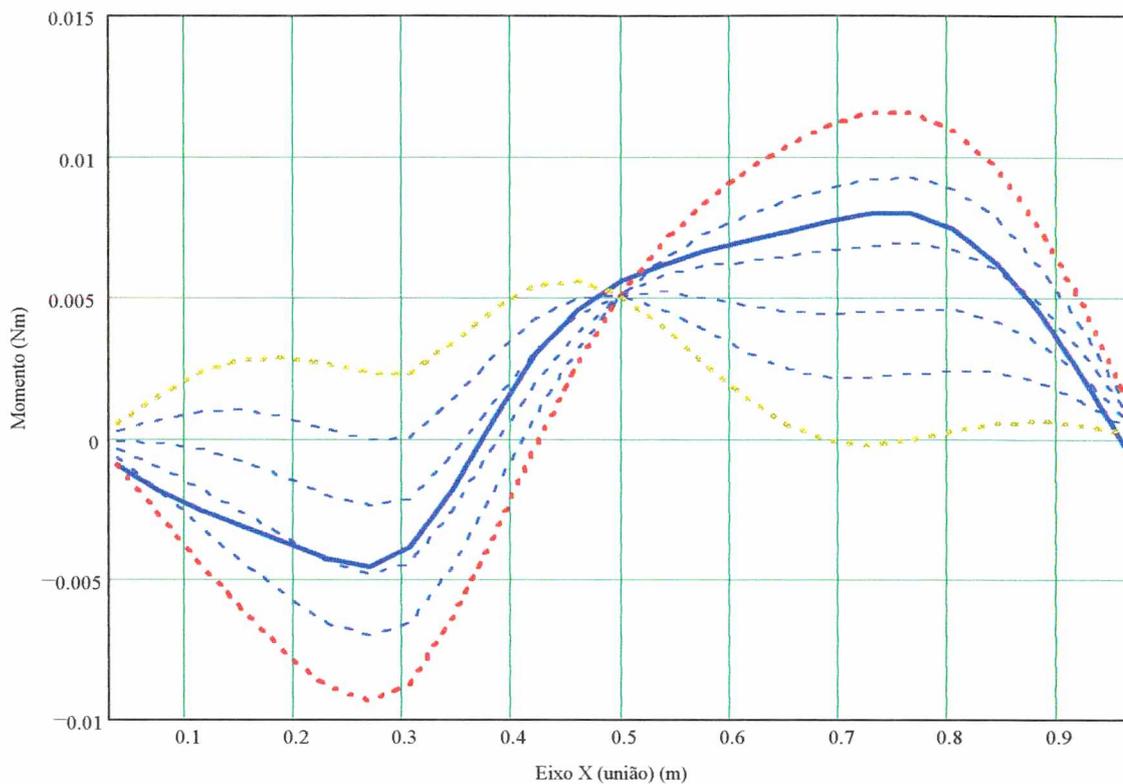


Figura 3.19 – Verificação da sensibilidade do momento fletor na união com variações de 0,05 Hz em torno da frequência 372 Hz, --- Método da Mobilidade, — Método de Elementos Finitos (372 Hz). Variação da frequência entre $f_1 = 371,85$ Hz (vermelho) e $f_2 = 372,15$ Hz (marrom)

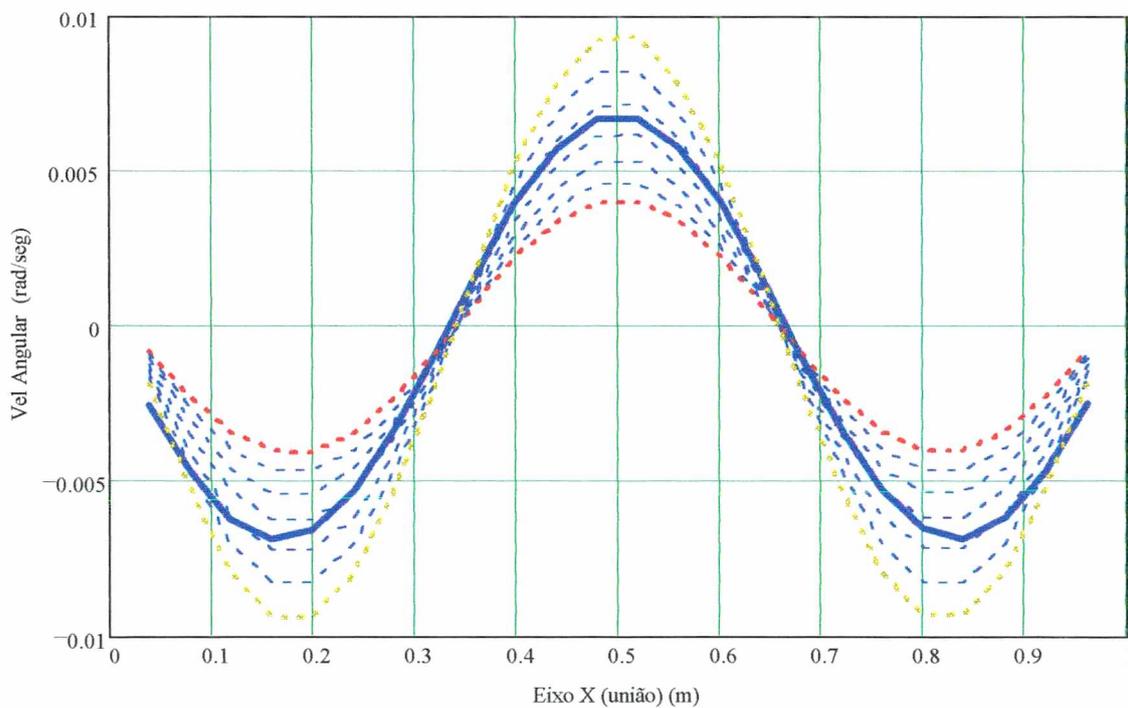


Figura 3.20 – Verificação da sensibilidade na velocidade angular, com variações de 0,05 Hz em torno da frequência 204 Hz, --- Método da Mobilidade, — Método de Elementos Finitos (204 Hz). Variação a frequência entre $f_1 = 203,85$ Hz (vermelho) e $f_2 = 204,15$ Hz (marrom)

3.6.6. Modos desacoplados e modos bloqueados

Neste estudo ficou evidenciada a existência de duas classes de modos, que se caracterizam como sendo os modos desacoplados e os bloqueados, e que juntos formam o sistema acoplado, cuja resposta total é uma superposição dessas duas classes.

A resposta desacoplada pode ser analogamente comparada como se o componente de interesse estivesse completamente desacoplado do outro componente, como se o outro componente não oferecesse resistências ao seu movimento, contribuindo portanto para a resposta do sistema apenas com suas frequências naturais. A resposta bloqueada pode ser vista como se o componente de interesse tivesse seu movimento completamente bloqueado pelo outro componente, provocando assim, o aparecimento das frequências de ressonância do componente como se este estivesse engastado.

Este fenômeno ocorre porque para algumas frequências de ressonâncias o ponto de união sofre rotação, ou seja, as duas placas têm o mesmo modo de vibrar e o fazem em fase, o que confere aos componentes isoladamente um comportamento de estrutura desacoplada. Por isto estes são chamados de modos desacoplados.

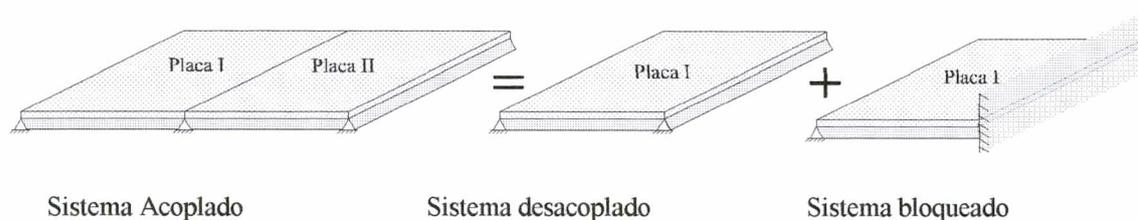
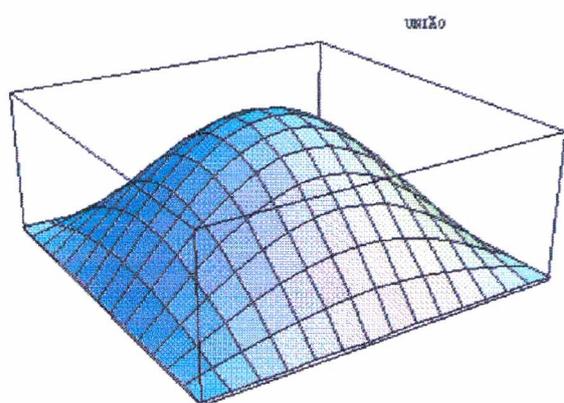
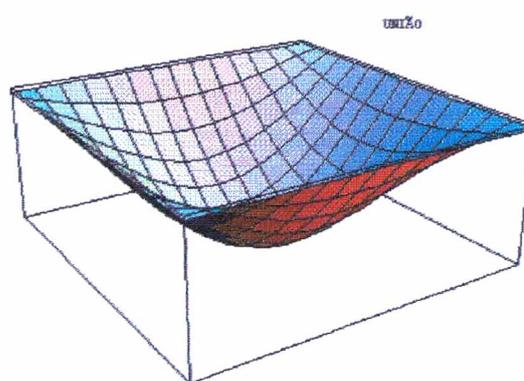


Figura 3.21 – Representação ilustrativa dos modos desacoplados e bloqueados

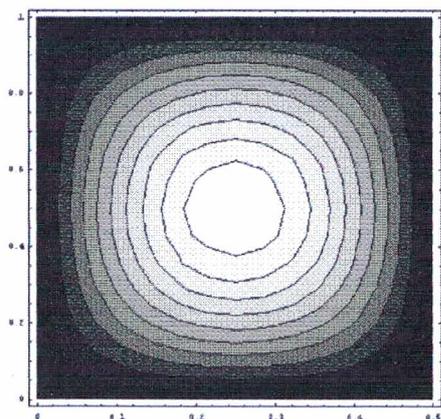
Em outras frequências de ressonâncias, os modos também são iguais e, no entanto, os componentes vibram em oposição de fase, fazendo com que a rotação resultante no ponto de união seja nula, pois o componente vibra como se o outro estivesse totalmente bloqueando seu movimento. Por isto estes são chamados de modos bloqueados.



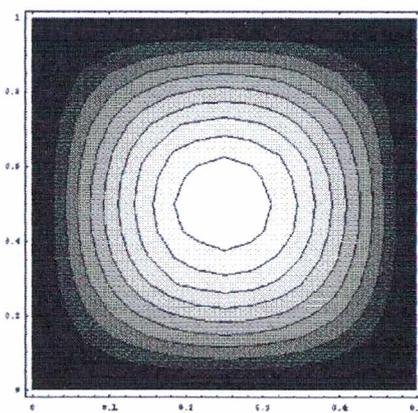
Placa I - Primeiro Modo Desacoplado



Placa II - Primeiro Modo Desacoplado



Placa I – Níveis de Deslocamento



Placa II – Níveis de Deslocamento

Figura 3.22 – Configuração espacial do primeiro modo desacoplado. Resultados obtidos diretamente do Método da Mobilidade

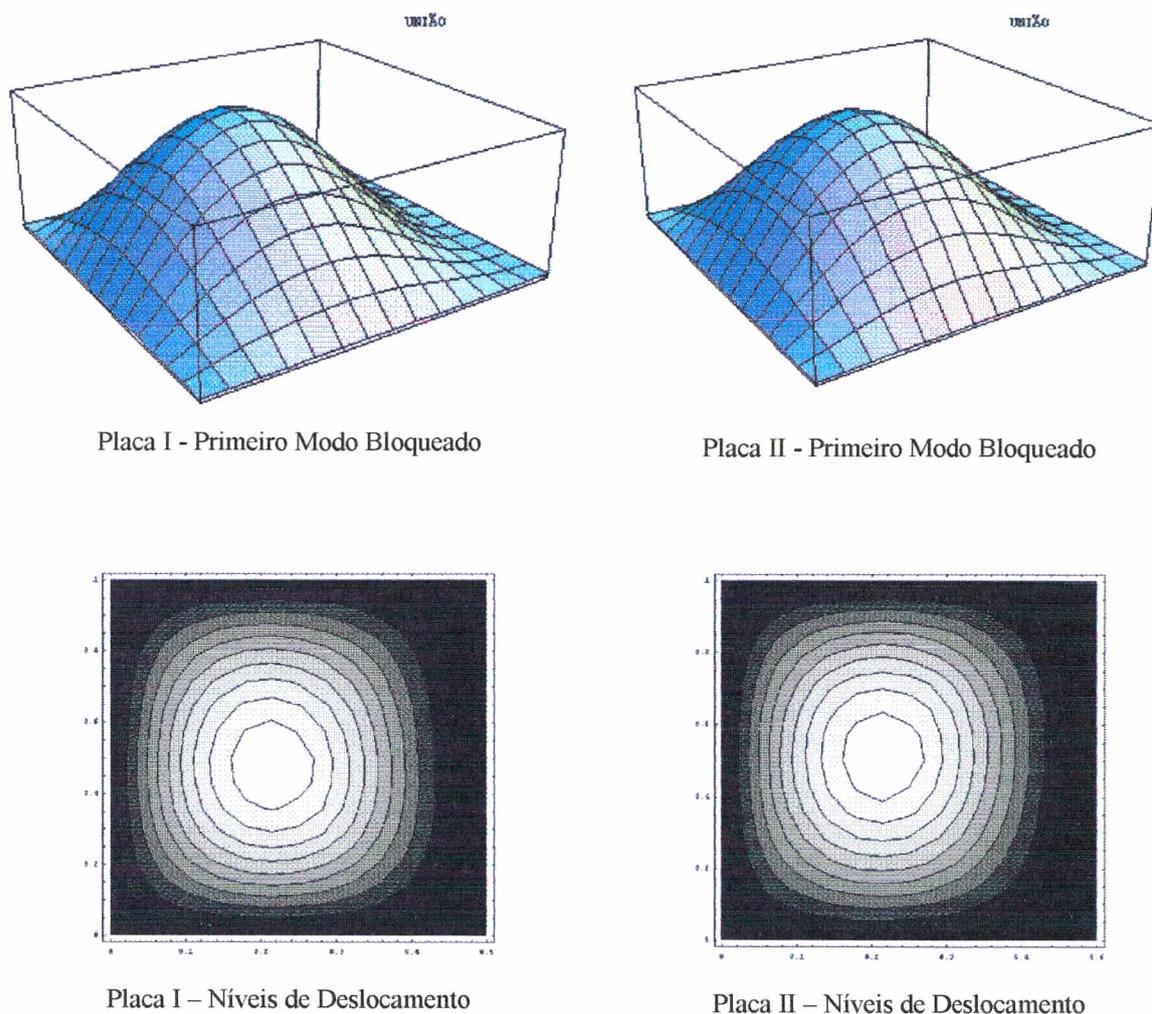


Figura 3.23 – Configuração espacial do primeiro modo bloqueados. Resultados obtidos diretamente do Método da Mobilidade

Estes modos podem ser observados nas Figuras 3.22 e 3.23 nas quais são mostrados os modos de duas placas acopladas em seus dois primeiros modos. Observa-se que na configuração espacial das placas para o modo desacoplado, Figura 3.22, as placas se comportam como se não existisse o outro componente, tornando assim totalmente simétrica a configuração espacial deste modo. No entanto, na Figura 3.23, verifica-se que na linha de união entre as placas o deslocamento angular em relação ao eixo x é nulo, mostrando que cada placa tem seu movimento de rotação totalmente restringido pelo outro componente, caracterizando os modos

bloqueados. Nesta mesma idéia são mostrados nas Figuras 3.24 e 3.25 outros modos para um melhor entendimento desse fenômeno.

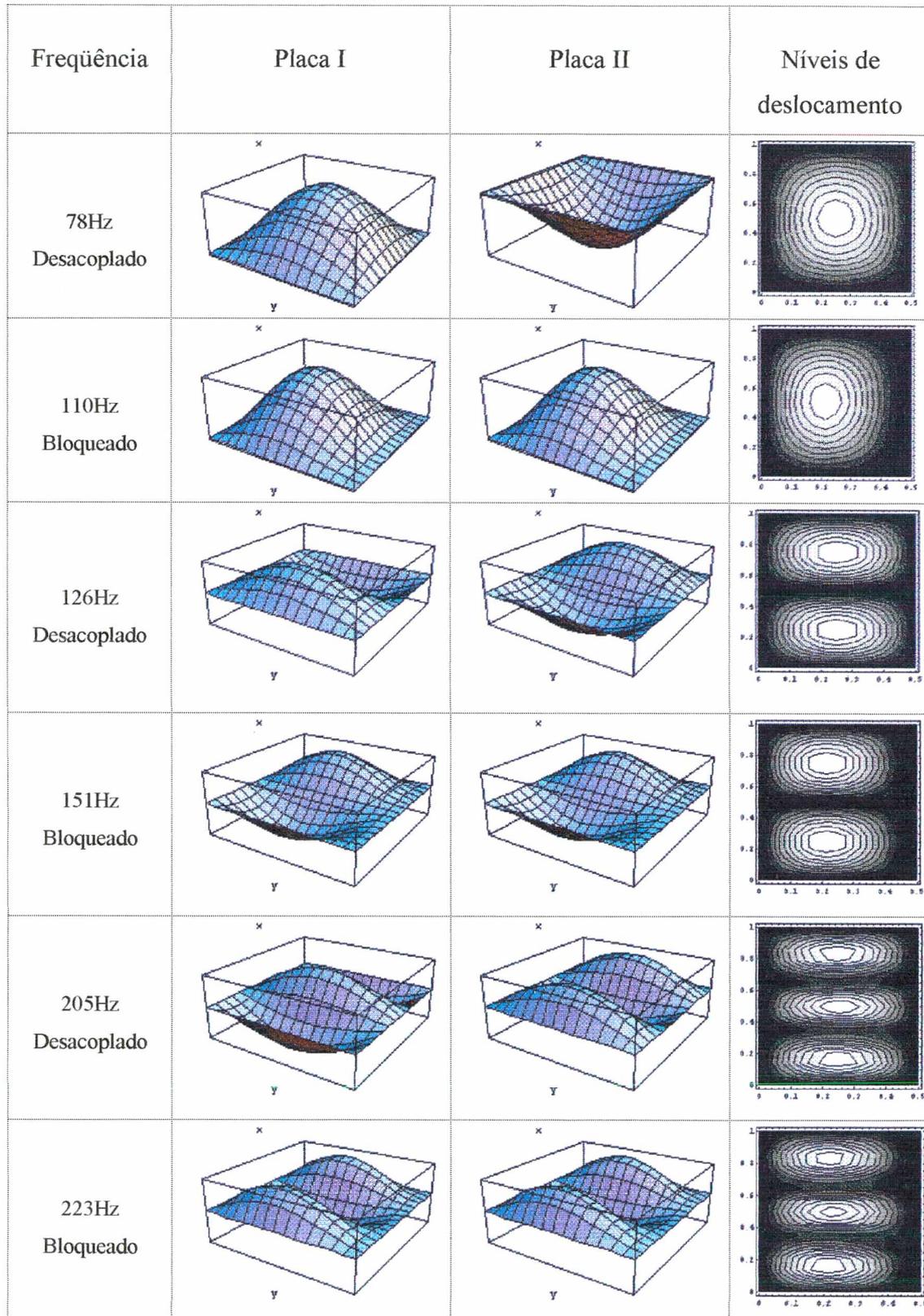


Figura 3.24 – Configurações espaciais dos modos desacoplados e bloqueados

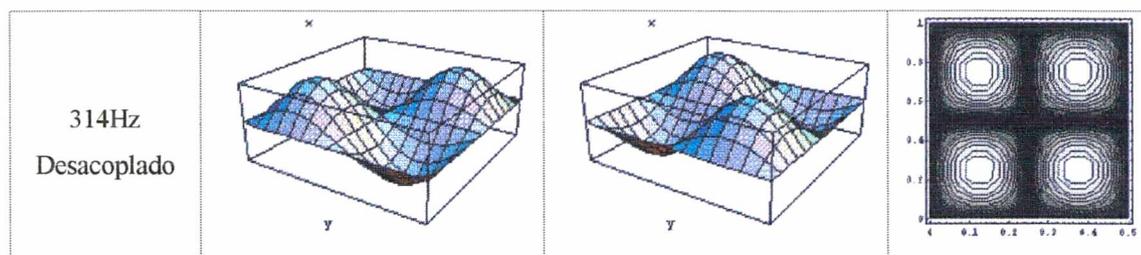


Figura 3.25 – Configurações espaciais dos modos desacoplados e bloqueados

Com o aparecimento desses dois grupos de modos a resposta do sistema total (sistema acoplado) é então composto da superposição dos dois tipos de respostas, como visto na Figura 3.26 em que estão mostrados o espectro de frequência da potência transferida destacando a contribuição das duas classes de modos para a composição da resposta do sistema completo .

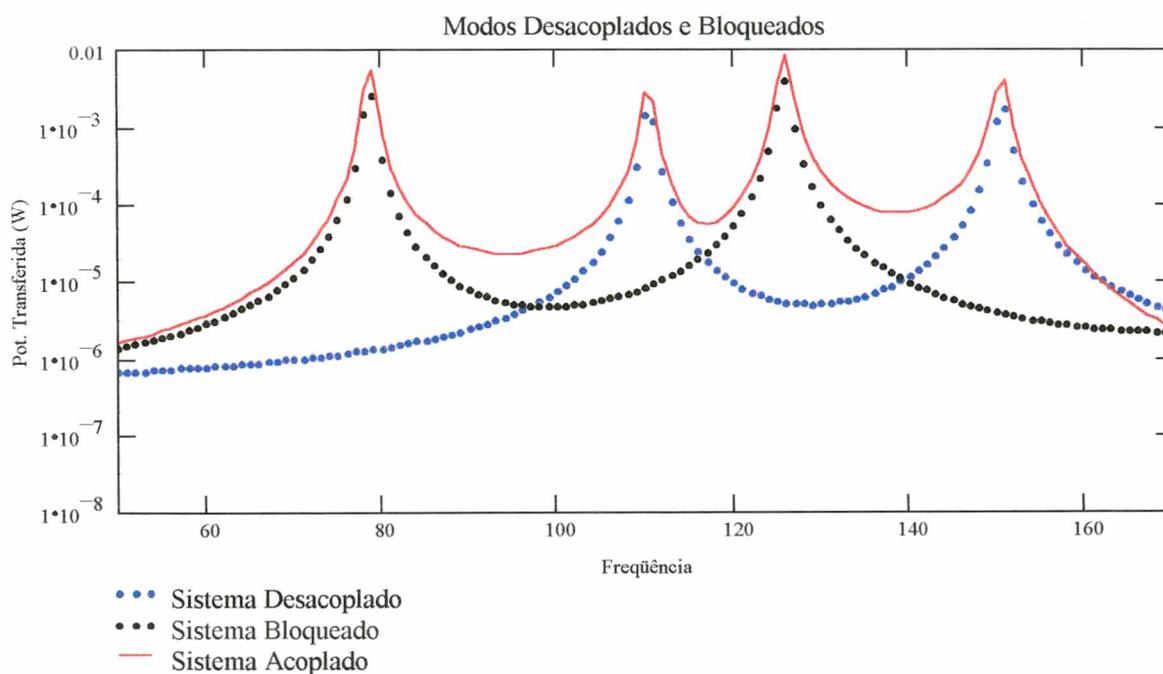


Figura 3.26 – Espectro de potência transferida destacando os efeitos do modos desacoplado e bloqueados para obtenção do sistema acoplado

3.6.7. Efeito do número de discretizações na determinação da potência transferida

Na Figura 3.27 é mostrado o espectro de potência transferida para vários números de discretizações na linha de união das placas. E observa-se que a potência transferida não sofre grandes modificações a partir de 10 discretizações, mesmo sabendo que um número menor que 25 discretizações não é suficiente para descrever as deformações (deslocamentos transversais) ao longo da toda faixa de frequência. No entanto, mostram-se aceitáveis os resultados da potência transferida obtida a partir de 10 discretizações. Assim, se o objetivo do estudo é analisar apenas a potência transferida e não as deformações da estrutura, então, o número de discretizações na linha de união não precisa atender rigorosamente as recomendação do Ansys que determina o uso de no mínimo 6 discretizações por meio comprimento de onda considerando a maior frequência da análise.

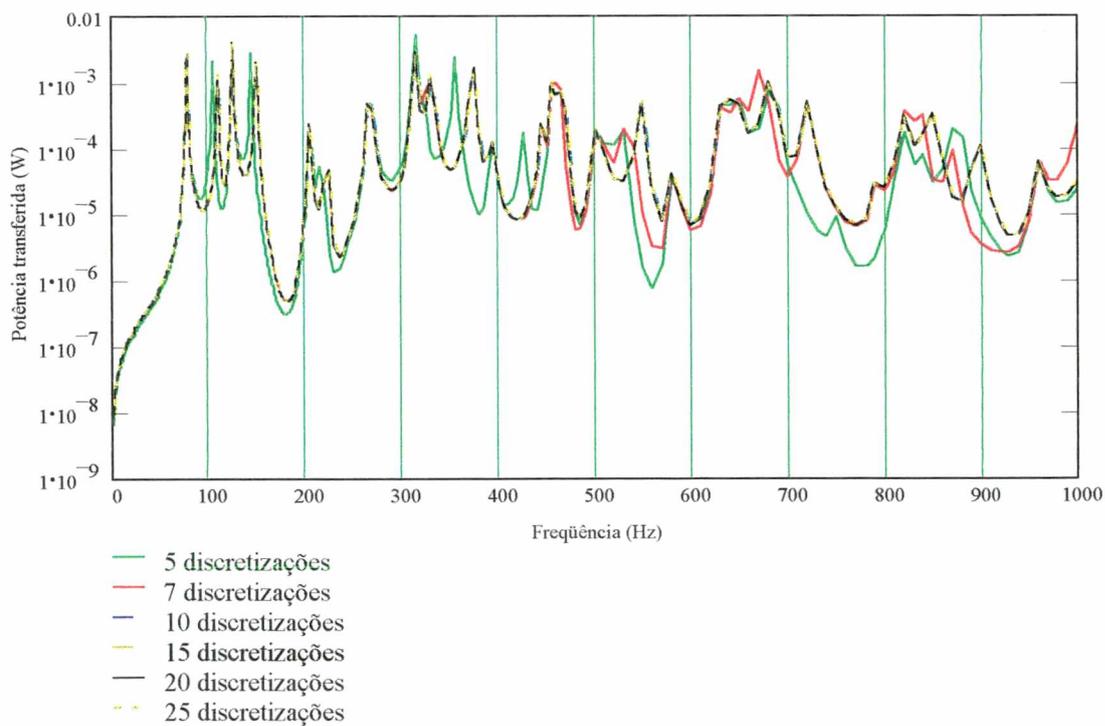


Figura 3.27 – Efeito do número de discretizações na determinação do espectro de potência transferida

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DE DUAS PLACAS ACOPLADAS COM UMA VIGA NA UNIÃO

Uma segunda análise considera duas placas acopladas, com uma viga na união. O objetivo é analisar a potência transferida, avaliando a influência da viga na determinação da energia transferida entre as duas estruturas.

Como visto no capítulo anterior, este trabalho se baseia no princípio do método da superposição, permitindo que nesta nova análise seja introduzido o efeito de mais uma subestrutura no sistema, neste caso o efeito da viga.

Pode ser vista na Figura 4.1, a forma com que este mecanismo funciona. Neste novo sistema, observa-se que a viga provoca uma inércia à rotação na linha de união entre as placas, proporcionando uma impedância vibratória ao fluxo de energia.

As ondas de flexão geradas na placa pelo esforço de excitação na placa I, prolongando-se ao longo de toda a placa, atingem a viga através de ondas de torção, alcançando a placa II novamente na forma de ondas de flexão, isto é, as ondas torcionais que atingem a viga ocorrem quando os momentos das placas coincidem com o eixo axial da viga e, então, os momentos fletores da placa se transformam em momento torçores para viga.

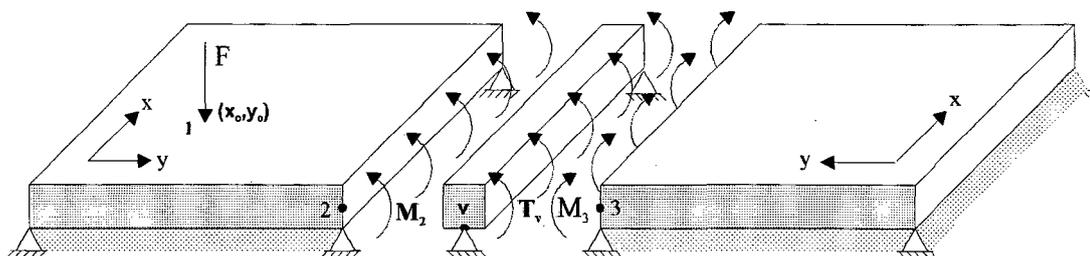


Figura 4.1 – Representação do sistema acoplado com uma viga na união.

As hipóteses e considerações usadas nas análises do capítulo anterior são válidas para esta análise. Na linha de união considera-se a existência de um vínculo que restringe o movimento transversal permitindo apenas a rotação da viga. A placa promove, portanto, uma torção distribuída ao longo de toda a viga, que por sua vez, responde com um deslocamento angular na direção correspondente a torção. Existe, então, na união o equilíbrio de três esforços envolvendo o momento na placa I, momento na placa II e o momento torçor na viga, como mostrado através da Equação 4.1.

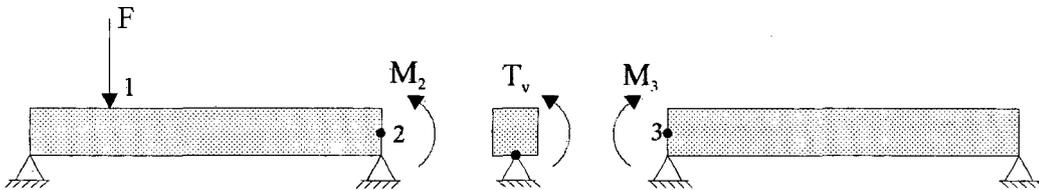


Figura 4.2 - Seção transversal do sistema acoplado.

$$M_2 + M_3 + T_v = 0 \quad (4.1)$$

4.1. Cálculo da resposta da viga

A equação que descreve o deslocamento angular de uma viga submetida a um esforço de torção é dada por

$$c^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

onde a velocidade das ondas de torção é calculada pela seguinte expressão

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{I}} \quad (4.3)$$

onde G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento; J , momento de inércia à torção da seção transversal da viga; I , momento de inércia de massa por unidade de comprimento da viga, e sendo

$$\rho = \frac{m_v}{V_v} \quad (4.4)$$

sendo m_v e V_v a massa da viga e o volume da viga respectivamente, sendo que G pode ser obtido por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.5)$$

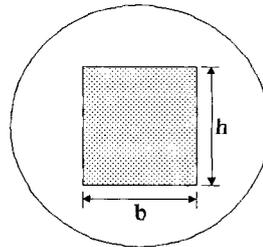


Figura 4.3 - Seção transversal da viga retangular

$$J = \frac{hb^3}{3} \left[1 - \frac{192b}{\pi^5 h} \tanh\left(\frac{\pi h}{2b}\right) \right] \quad (4.6)$$

$$I = \frac{\rho}{12} (bh^3 + hb^3) \quad (4.7)$$

para vigas de perfil I estes parâmetros são

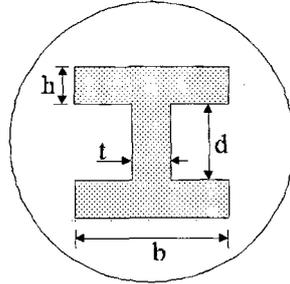


Figura 4.4 - Seção transversal da viga I

$$J = \frac{1}{3}(2bh^3 + dt^3) \quad (4.8)$$

$$I = \frac{\rho}{12}(8bh^3 + 8hb^3 + 12bh^2d + 6bhd^2 + td^3 + dt^3) \quad (4.9)$$

A resposta da viga pode ser calculada através das Equações de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_n} \right] - \frac{\partial K_v}{\partial q_n} + \frac{\partial U_p}{\partial q_n} = F_n \quad (4.10)$$

Considerando os modos $\phi_n(x)$

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (4.11)$$

A solução pode ser representada por uma família de senos: $\phi_n(x) = \text{sen}(k_x x)$, sendo $q_n(t) = q_n e^{j\omega t}$.

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \text{sen}(k_x x) \quad (4.12)$$

A energia potencial de uma viga submetida a ondas de torção, é dada por [24]

$$U_v = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} GJ(x) \left[\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (4.13)$$

sendo viga com seção uniforme $J(x) = J$; e GJ a rigidez torcional por unidade de comprimento dada por [10], [11] e [12].

Substituindo a Equação 4.11 na Equação da energia potencial, tem-se

$$U_v = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} GJ \left[\sum_{n=1}^{\infty} k_x q_n(t) \cos(k_x x) \right]^2 dx \quad (4.14)$$

então

$$U_v = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} GJ k_x^2 L q_n(t)^2 \quad (4.15)$$

Derivando a energia potencial em relação à n-ésima coordenada generalizada, tem-se

$$\frac{\partial U_v}{\partial q_n} = \frac{GJ k_x^2 L}{2} q_n(t) \quad (4.16)$$

A energia cinética de uma viga submetida às ondas de torção, é dada por [24]

$$K_v = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} I(x) \left[\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (4.17)$$

Em caso de viga com seção constante $I(x) = I$. Substituindo os modos assumidos tem-se

$$K_v = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} I \left[\sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \text{sen}(k_x x) \right]^2 dx \quad (4.18)$$

e, por conseguinte

$$K_v = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} I [\dot{q}_n(t)]^2 L_x \quad (4.19)$$

Derivando a energia cinética em relação à n-ésima velocidade generalizada, \dot{q}_n , e em relação ao tempo

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_n} \right] = \frac{1}{2} I \ddot{q}_n(t) L \quad (4.20)$$

Observa-se que

$$\frac{\partial K_v}{\partial q_n} = 0 \quad (4.21)$$

A equação da força generalizada pode ser obtida através da equação

$$F_n = \frac{\Delta x}{L_x} \sum_{i=1}^{NI} T(x_i) \phi_n(x) \quad (4.22)$$

onde NI é o número de discretizações.

Logo

$$F_n = \frac{\Delta x}{L_x} \sum_{i=1}^{NI} T(x_i) \text{sen}(k_x x_i) \quad (4.23)$$

Aplicando as equações da energia potencial, energia cinética e forças generalizadas na Equações de Lagrange, isto é, Equações 4.16, 4.20 e 4.22 em 4.10.

$$\frac{LI\ddot{q}_n}{2} + \frac{GJ k_x^2 L q_n}{2} = F_n \quad (4.24)$$

então, as coordenadas generalizadas podem ser calculadas por

$$q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n}{L(GJ k_x^2 - \omega^2 I)} \quad (4.25)$$

Portanto, pode-se escrever a resposta desta estrutura da seguinte forma

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n}{L(GJ k_x^2 - \omega^2 I)} \sin(k_x x) e^{j\omega t} \quad (4.26)$$

As frequências naturais desta subestrutura ocorrem nas frequências nas quais a magnitude do deslocamento angular se torna infinito. Assim, a condição de ressonância é dada por

$$GJ k_x^2 L - \omega^2 IL = 0 \quad (4.27)$$

e as frequências naturais da viga são dadas por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_x^2 GJ}{I}} \quad (\text{rad/s}) \quad (4.28)$$

ou

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_x^2 GJ}{I}} \quad (\text{Hz}) \quad (4.29)$$

4.2. Cálculo da Mobilidade na viga

Para o cálculo da mobilidade desta subestrutura verifica-se que cada torque T_i , aplicado em cada um dos x_i pontos, provoca velocidade angular em todos os x_j pontos da discretização, assim

$$Y_v(x_i, x_j) = \frac{\dot{\theta}(x_j)}{T(x_i)} \quad (4.30)$$

ou

$$Y_v(x_i, x_j) = 2\omega i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(k_x x_i) \text{sen}(k_x x_j)}{GJ k_x^2 L_x - \omega^2 I L_x} \quad (4.31)$$

ou ainda

$$Y_v(x_i, x_j) = \frac{f i}{\pi I L_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(k_x x_i) \text{sen}(k_x x_j)}{f_n^2 - f^2} \quad (4.32)$$

Com as mobilidades definidas para as três subestruturas, sendo as mobilidades das placas calculadas no capítulo anterior, podem-se calcular os esforços, usando da continuidade nas uniões, e o equilíbrio de esforços na união.

Da continuidade nas uniões

a) Velocidade angular na placa I na linha de união é igual à velocidade angular na placa II na linha de união.

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 \quad (4.33)$$

ou

$$Y_{12} F + Y_{22} M_2 = Y_{33} M_3 \quad (4.34)$$

b) Velocidade angular na viga é igual à velocidade angular na placa II na linha de união.

$$\dot{\theta}_v = \dot{\theta}_3 \quad (4.35)$$

ou

$$Y_v T_v = Y_{33} M_3 \quad (4.36)$$

Do equilíbrio de esforços na união.

a) Equilíbrio de momento envolvendo as três subestruturas

$$M_2 + M_3 + T_v = 0 \quad (4.37)$$

Assim, pode-se constituir um sistema de equações para a determinação dos esforços M_2 ,

M_3 e T_v

$$Y_{12} F + Y_{22} M_2 + Y_{33} M_3 = 0 \quad (4.38)$$

$$Y_{33} M_3 = Y_v T_v \quad (4.39)$$

$$M_2 + M_3 + T_v = 0 \quad (4.40)$$

pré multiplicando-se a Equação 4.39 por Y_v^{-1} , tem-se

$$T_v = Y_v^{-1} Y_{33} M_3 \quad (4.41)$$

e da Equação 4.40, obtém-se

$$M_2 = -M_3 - T_v \quad (4.42)$$

Substituindo as Equações 4.41, 4.42, na Equação 4.38, tem-se

$$[Y_{22} Y_v^{-1} Y_{33} - 2Y_{22}] M_3 = Y_{12} F \quad (4.43)$$

Através deste sistema de equações pode-se determinar M_3 , momento que atua na placa II, responsável pela potência vibratória transmitida através da união. Com o conhecimento deste momento pode-se determinar o espectro de potência transferida, bem como os esforços que atuam nas outras estruturas, que são M_2 , momento que atua na placa I, e T_v , que atua na viga.

Analisando o sistema de equação obtido na análise do capítulo anterior, através de uma comparação com o obtido nesta análise, verifica-se que se diferencia matematicamente através de um produto triplo de matrizes, que na primeira formulação não existe.

$$[2Y_{22}] M_3 = Y_{12} F \quad (\text{duas placas acopladas}) \quad (4.44)$$

$$[Y_{22} Y_v^{-1} Y_{33} + 2Y_{22}] M_3 = Y_{12} F \quad (\text{duas placas acopladas com uma viga na união}) \quad (4.45)$$

A Equação 4.44 é um caso particular da Equação 4.45, pois, neste último no instante em que a viga deixa de existir a mobilidade Y_v atinge valores infinitos e, por consequência a impedância provocada pela viga é nula tornando, portanto, o sistema idêntico ao da primeira análise onde duas placas estão acopladas sem viga na união (Equação 4.44).

Uma outra forma de analisar o problema, consiste em resolver o sistema de equações, usando como incógnitas M_2 e M_3 .

Neste caso, usando a Equação 4.40, obtém-se

$$T_v = -M_2 - M_3 \quad (4.46)$$

Substituindo esta última em 4.38, tem-se

$$Y_v M_2 + (Y_{33} + Y_v) M_3 = 0 \quad (4.47)$$

Então, o sistema é constituído de duas equações

$$Y_{22} M_2 + Y_{33} M_3 = -Y_{21} F \quad (4.48)$$

$$Y_v M_2 + (Y_{33} + Y_v) M_3 = 0 \quad (4.49)$$

Para uma excitação unitária, tem-se

$$\begin{bmatrix} Y_{22} & Y_{33} \\ Y_v & (Y_{33} + Y_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

A partir deste sistema os esforços M_2, M_3 são simultaneamente calculados.

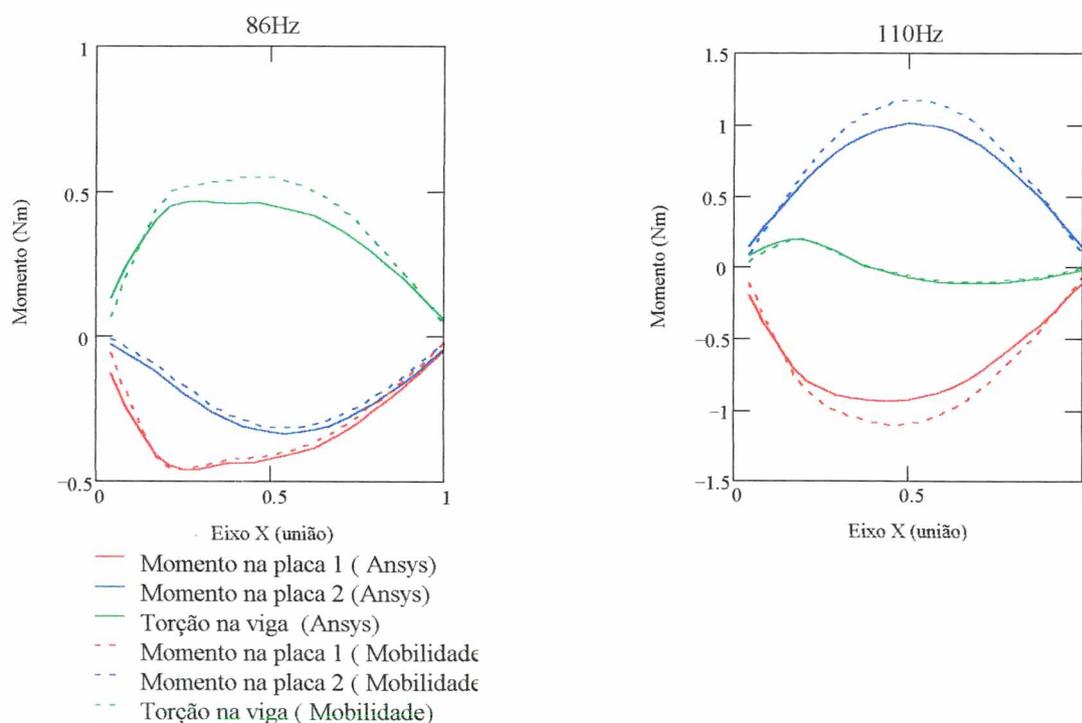
É importante deixar claro que cada componente da matriz dos coeficientes deste sistema (Equação 4.50) é constituído de uma matriz, por exemplo: $Y_{22} = [Y_{22}]_{NI \times NI}$, $Y_{33} = [Y_{33}]_{NI \times NI}$, $Y_v = [Y_v]_{NI \times NI}$.

Da mesma forma, os vetores deste sistema que constituem as incógnitas possuem a ordem determinada também pelo número de discretizações, $M_2 = \{M_2\}_{NI}$ e $M_3 = \{M_3\}_{NI}$. E cada componente destes vetores representa exatamente o esforço que atuam em cada intervalo discretizado. Portanto, este sistema pode ser resolvido para NI discretizações na linha de união, gerando um sistema de equação de ordem $2NI$. Assim $2NI$ incógnitas devem ser calculadas.

4.3. Resultados

Para esta análise, os resultados foram obtidos com o mesmo número de discretizações usada na análise anterior. São mostrados nas Figuras 4.5 e 4.6 a distribuição dos esforços de flexão (momento fletor) que atuam na linha de união das placas. Da mesma forma, são mostrados também, os momentos torçores ao longo da viga.

Os esforços foram obtidos para a faixa de frequência usada nas análises anteriores. São mostrados apenas os esforços nas ressonâncias do sistema, pois nestas eles atingem valores significantes. Os mesmos são comparados com os resultados obtidos pelo MEF (Ansys).



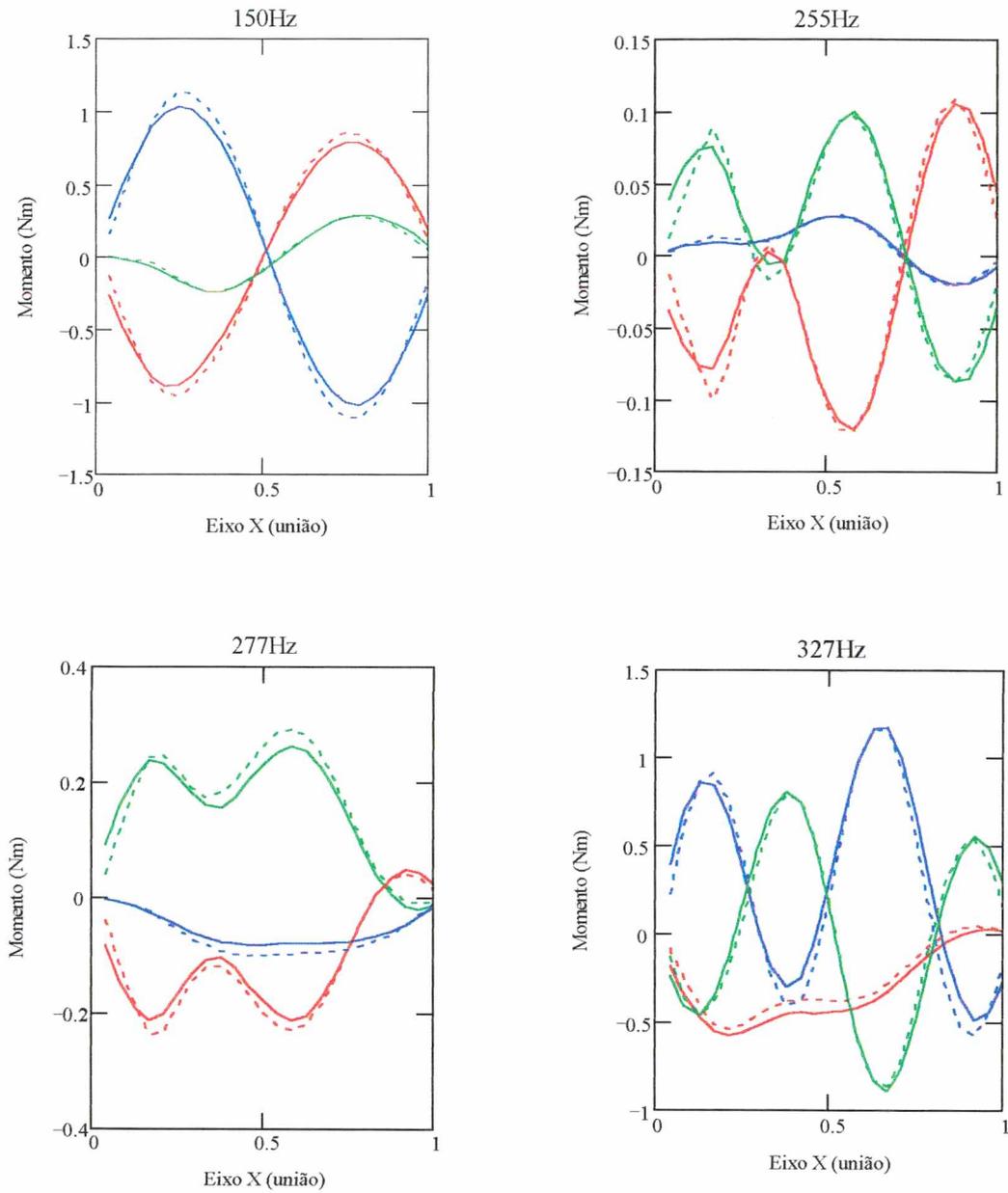


Figura 4.5 – Distribuições do momento fletor e do momento torçor ao longo da união, com uma viga quadrada na união ($b_v = h_v = 0,0254\text{m}$)

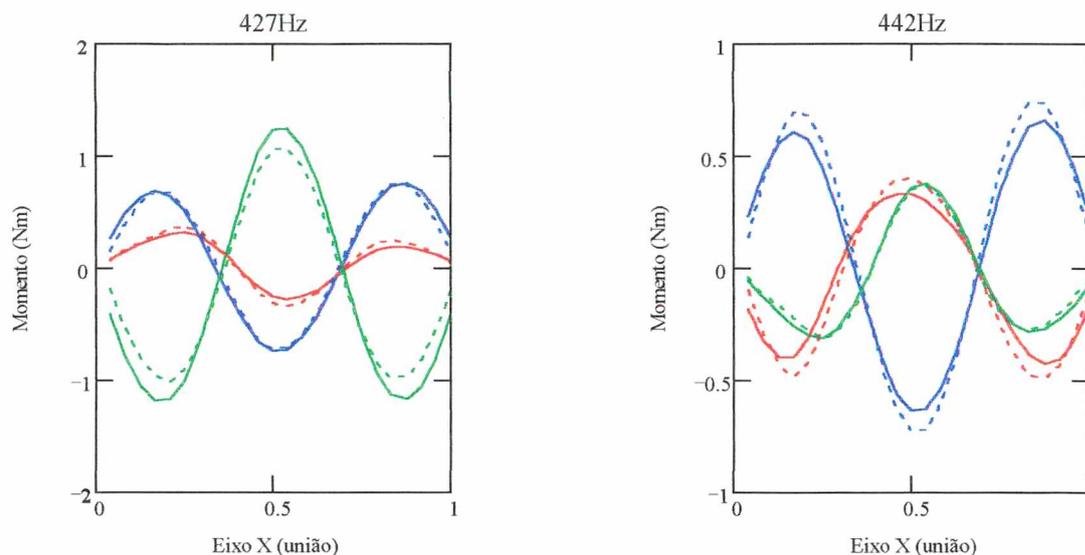


Figura 4.6 – Distribuição do momento fletor e momento torsor ao longo da união, com uma viga quadrada na união ($b_v = h_v = 0,0254\text{m}$).

Na linha de união, as velocidades angulares nas três estruturas são iguais, obedecendo a continuidade do sistema. Nas Figuras 4.7 e 4.8, são mostradas as comparações dos resultados das velocidades angulares, com os resultados obtidos pelo MEF. Da mesma forma que os resultados anteriores, estes estão plotados para frequência de ressonâncias do sistema.

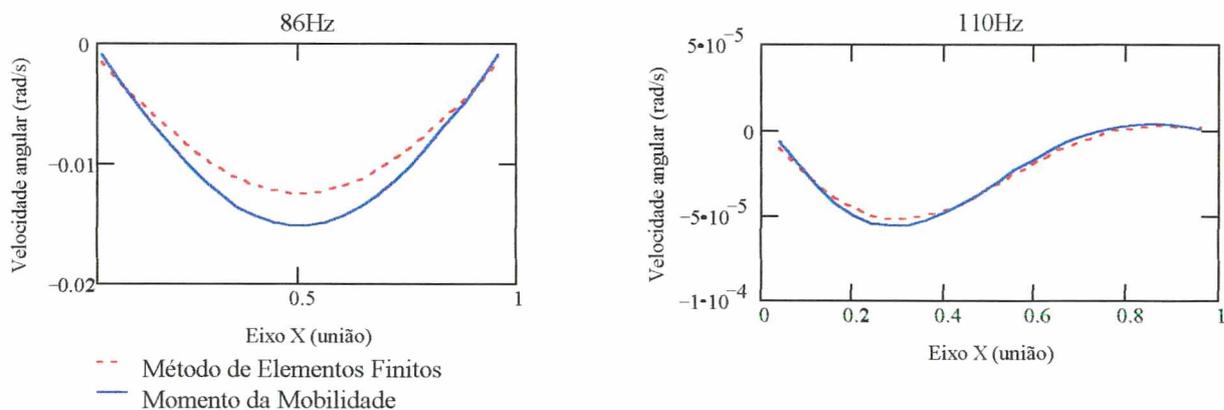


Figura 4.7 – Distribuição da velocidade angular ao longo da união, com uma viga quadrada na união ($b_v = h_v = 0,0254\text{m}$).

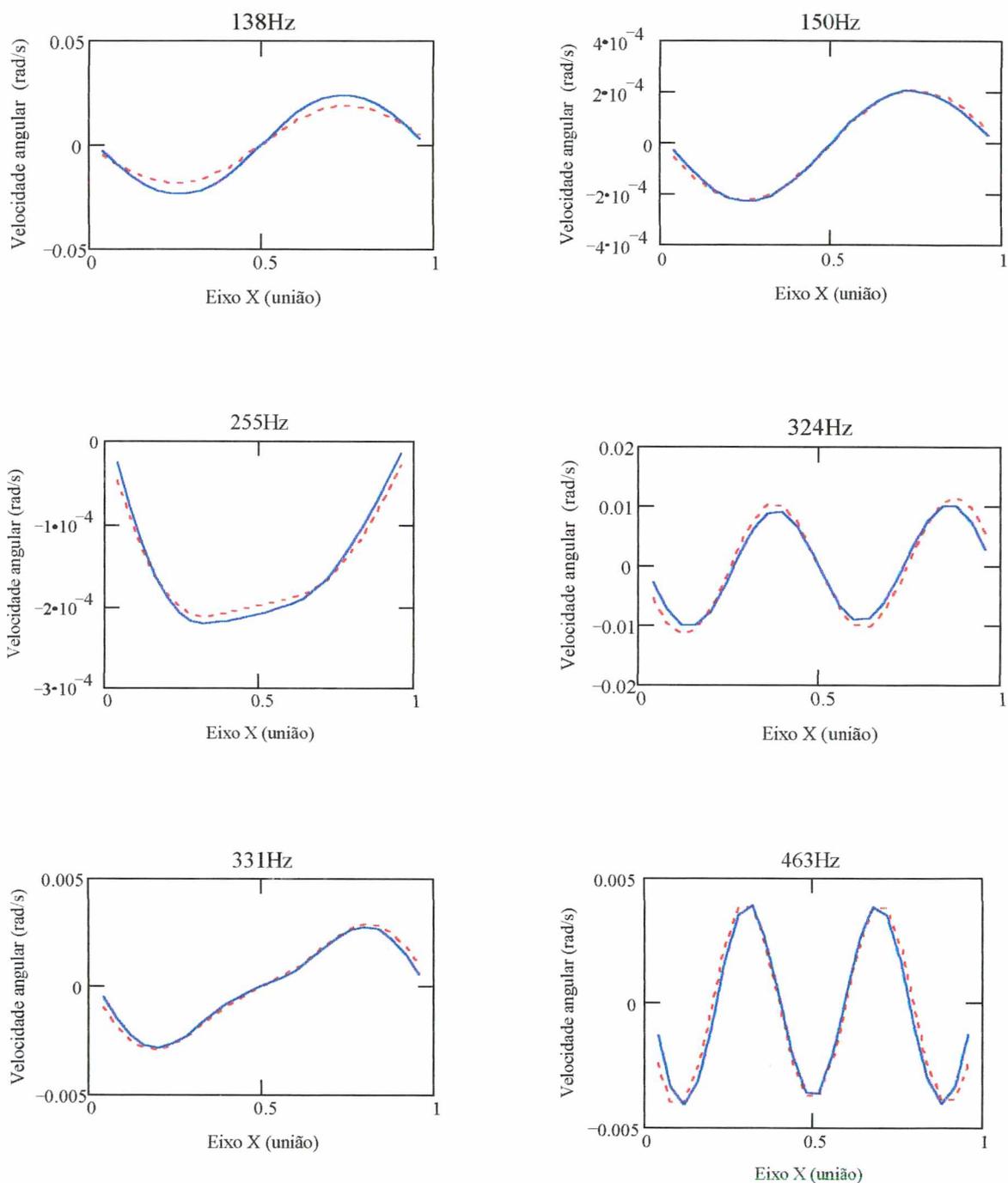


Figura 4.8 – Distribuição da velocidade angular ao longo da união, com uma viga quadrada na união ($b_v = h_v = 0.0254\text{m}$).

Com a introdução de uma viga entre as placas ocorre um aumento da rigidez do sistema, mudando as ressonâncias do mesmo, e diminuindo as amplitudes da resposta. As Figuras 4.9 e 4.10 mostram os espectros de potência transferida entre as placas, com uma viga quadrada e uma viga I na união das placas, respectivamente, e comparados com os resultados do MEF. A Figura 4.11, mostra o espectro, para uma viga quadrada na união. Neste último, a viga possui uma seção transversal maior provocando com isso um considerável aumento da rigidez do sistema, proporcionando um número reduzido de ressonâncias no espectro de potência, diminuindo também, a amplitude da potência transferida em toda faixa de frequências. Estes resultados mostram claramente a influência de uma viga na resposta do sistema.

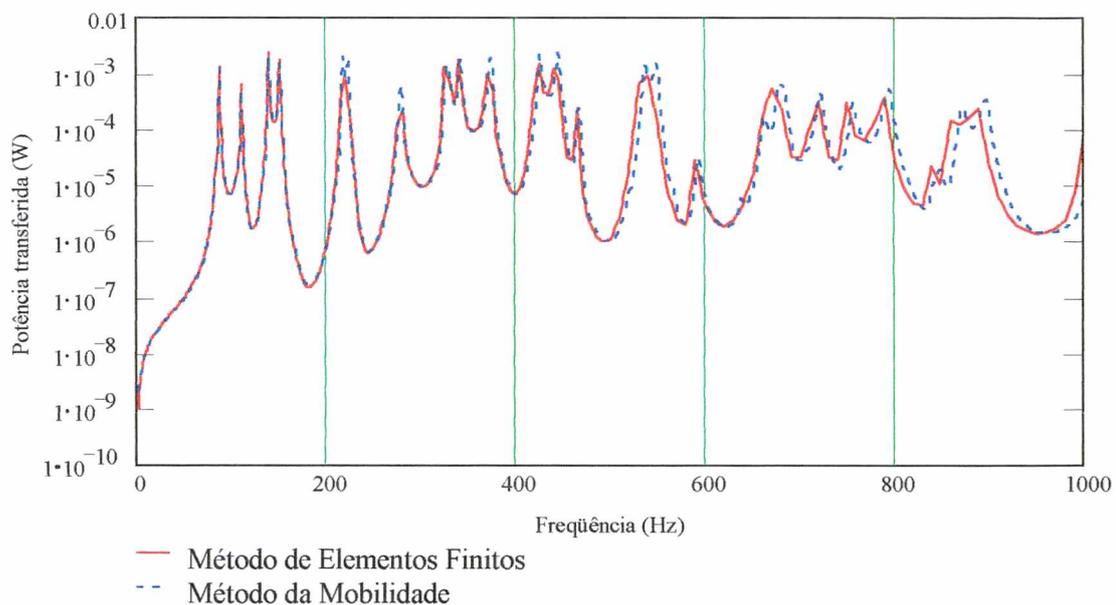


Figura 4.9 – Potência transferida entre as placas, com uma viga quadrada na união ($b_v = h_v = 0,0254\text{m}$)

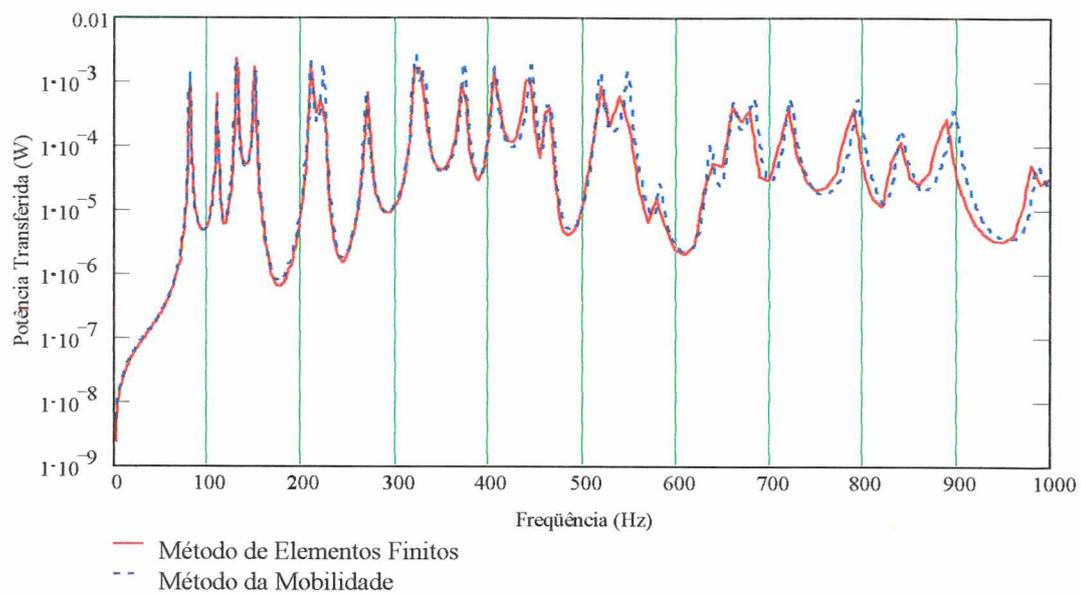


Figura 4.10– Potência transferida entre as placas, com uma viga em I na união, $b_v=0,0254\text{m}$, $d_v = 0,008\text{m}$, $t_v = h_v = 0,008\text{m}$

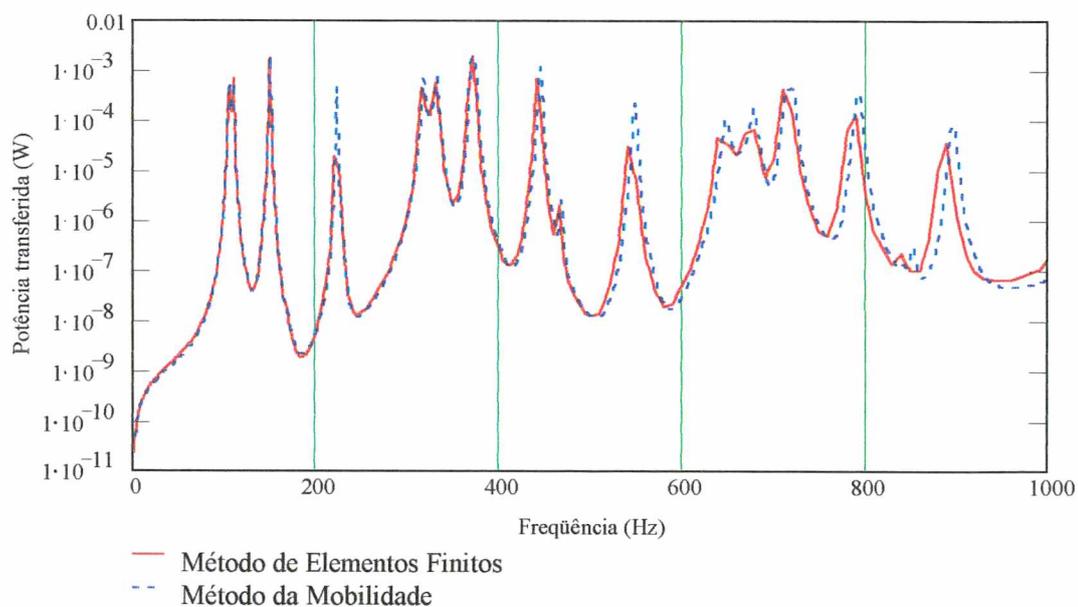


Figura 4.11 – Potência transferida, com uma viga quadrada na união, $h_v = b_v = 0,05\text{m}$

4.4. Influência dos parâmetros geométricos da viga na determinação da potência transferida.

Com o aumento das dimensões geométricas relacionadas à seção transversal da viga, a potência transferida entre as placas (Figura 4.13), diminui consideravelmente. Influencia, também, no aumento da rigidez do sistema e, conseqüentemente, desloca as ressonâncias referentes aos modos desacoplados, modos ímpares, fazendo com que estas ressonâncias atinjam as regiões de altas frequências.

Verifica-se que as frequências de ressonâncias dos modos bloqueados, modos pares, permanecem constantes com o aumento da seção transversal da viga. Como visto no Item 3.6.6, os modos bloqueados são aqueles caracterizados como sendo os modos em que cada estrutura comporta-se bloqueando o movimento de rotação da outra, como se os componentes estivessem engastados. Então, se os componentes encontram-se engastados nas ressonâncias dos modos bloqueados, o mesmo estará engastado, para qualquer dimensão da viga. Portanto, as frequências de ressonância referentes a estes modos permanecem constantes.

Observa-se que, com a colocação de uma viga quadrada maciça na união das placas (Figura 4.13), a potência transferida atinge amplitudes menores, pois, este tipo de viga possui uma grande quantidade de massa, provocando uma grande impedância vibratória na união das placas.

Nas Figuras 4.13, 4.15 e 4.17, são mostradas as influências das dimensões da seção transversal da viga no espectro de potência transferida. Nestes gráficos também é mostrada a potência transferida entre as duas placas acopladas sem viga na união, destacando assim, a importância de uma viga no controle do fluxo de energia vibratória entre placas.

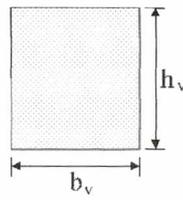


Figura 4.12 - Seção transversal da viga retangular

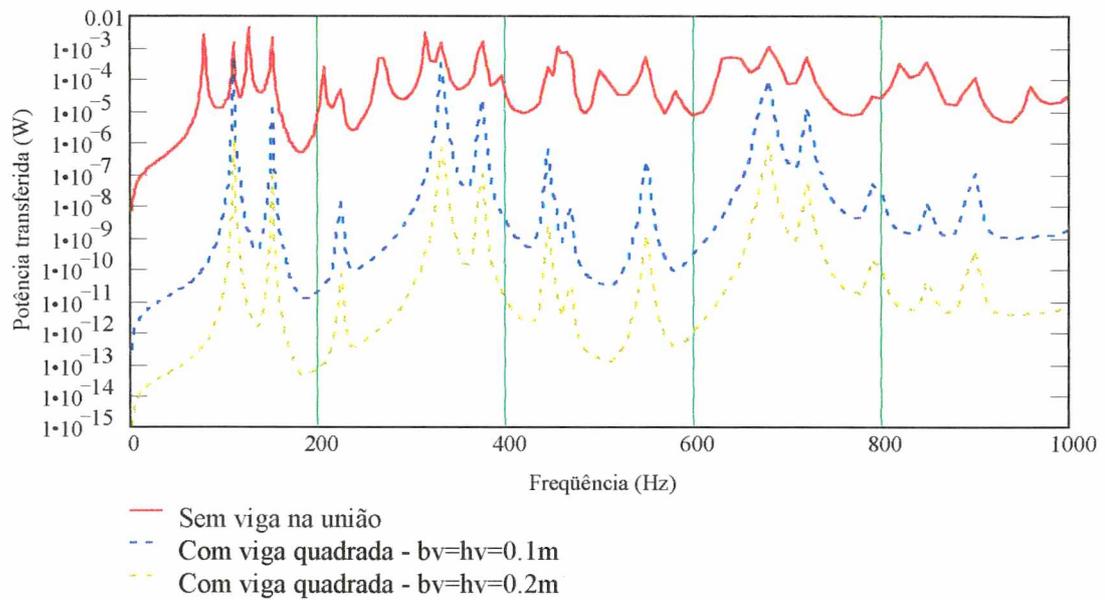


Figura 4.13 – Efeito da variação dos parâmetros geométricos de um viga quadrada, na determinação da potência transferida entre as duas placas. Análise feita em uma placa com as mesmas características mencionada no trabalho, porém, com estruturas de aço.

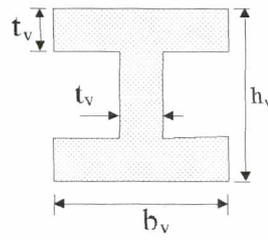


Figura 4.14 - Seção transversal da viga em I

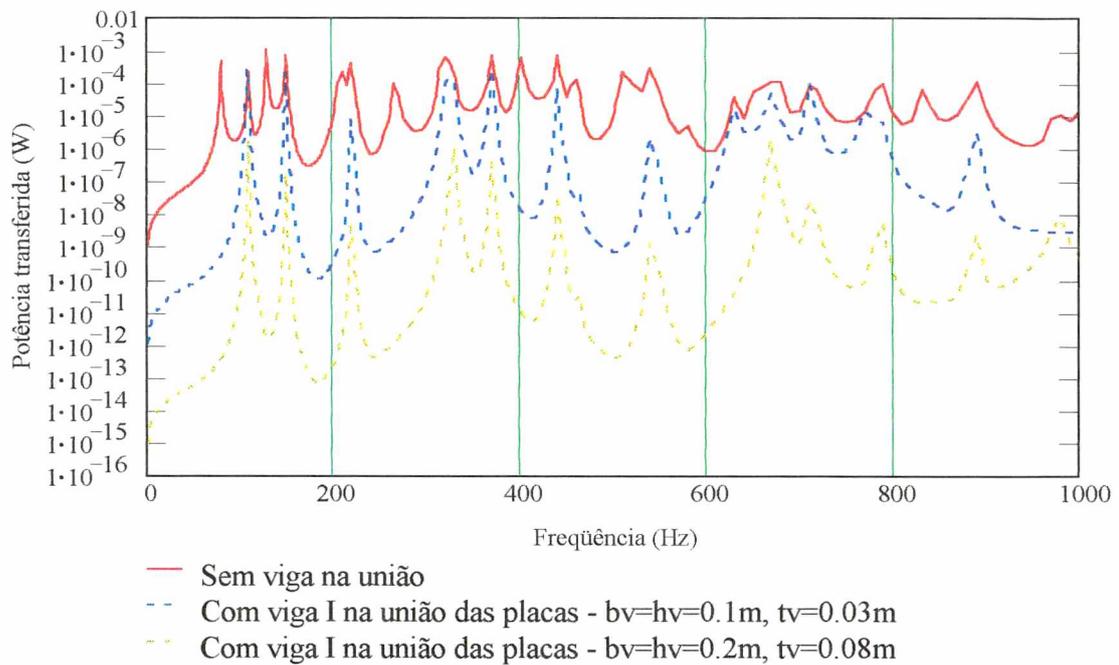


Figura 4.15 – Efeito da variação dos parâmetros geométricos de um viga I, na determinação da potência transferida entre as duas placas. Análise feita em uma placa com as mesmas características mencionada no trabalho, porém, com estruturas de aço.

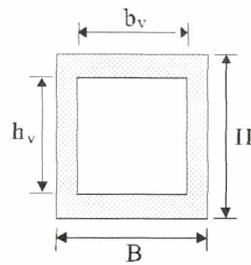


Figura 4.16 - Seção transversal da viga vazada

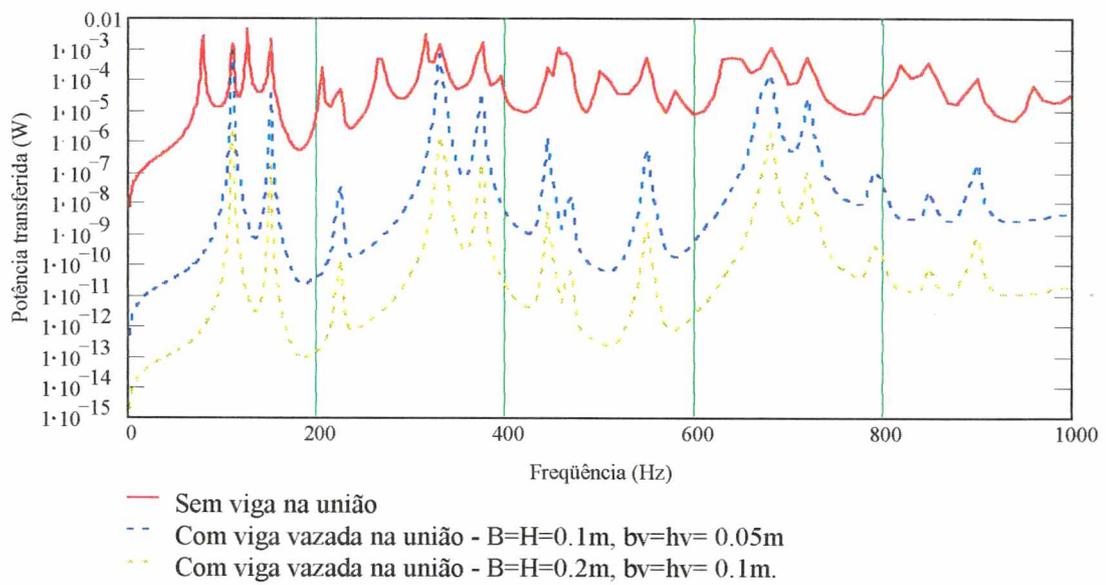


Figura 4.17 – Efeito da variação dos parâmetros geométricos de um viga vazada, na determinação da potência transferida entre as duas placas. Análise feita em uma placa com as mesmas características mencionada no trabalho. Estruturas de alumínio.

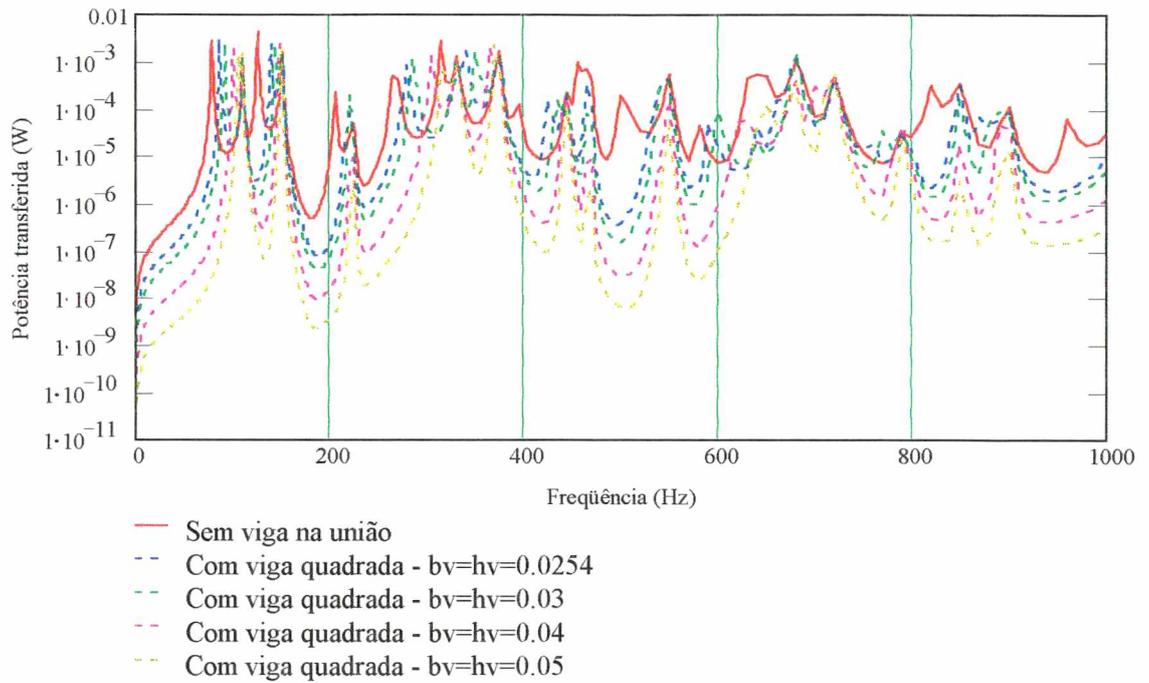


Figura 4.18 – Efeito da variação dos parâmetros geométricos de um viga quadrada, na determinação da potência transferida entre as duas placas. Análise feita em uma placa com as mesmas características mencionada no trabalho. Estruturas de alumínio.

O espectros da Figura 4.18 mostram como as freqüência de ressonâncias dos modos desacoplados são deslocadas para a região de altas freqüências, mesmo com pequenas variações da seção transversal de uma viga quadrada. Este gráfico mostra claramente, que as freqüências de ressonâncias dos modos bloqueados são pouco influenciadas pelas variações das dimensões da viga.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As limitações do Método de Elementos Finitos para a solução de problemas dinâmicos envolvendo placas e vigas de grandes dimensões, nas altas frequências, justificam a elaboração deste trabalho, que tem como resultado final um programa para resolver uma classe de problemas que envolve acoplamentos de placas simplesmente apoiadas acopladas com vigas na união. Boa parte do sistema é descrita por expressões obtidas analiticamente das equações da onda de flexão de placa e torção em vigas. O problema se restringe apenas na busca de informações contidas na linha de união das placas reduzindo, portanto, a ordem do sistema de equações para o cálculo das respostas do sistema, tornando o processamento computacional mais rápido, se comparado com o Método de Elementos Finitos. Assim o método aplicado neste trabalho pode ser caracterizado como sendo um método semi-analítico que envolve expressões analíticas em meio a uma aproximação numérica dada por uma discretização na linha de união.

Esta metodologia, que pode ser usada para avaliar os esforços de flexão, bem como as velocidades angulares, em acoplamento de placas retangulares simplesmente apoiadas, estimando o conteúdo energético transferido através de duas placas, quer com ou sem viga na união. Estas informações são fundamentais para o controle de vibrações em problemas deste tipo.

Este programa fornece, também, a distribuição da potência ao longo da linha de união para cada frequência de ressonância, verificando as regiões nas quais o fluxo é máximo. Estas informações podem ser usadas, tanto na predição quanto no controle de vibrações em estruturas típicas.

Foi evidenciado, no andamento do trabalho, que com a existência do acoplamento identificam-se duas classes de modos, denotados por desacoplados e bloqueados. O

entendimento deste fenômeno permite identificar as ressonâncias do sistema, pois, a energia vibratória atinge picos de máximos tanto nos modos desacoplados quanto nos bloqueados e, a superposição destes dois grupos de modos constituem o sistema total.

O trabalho avaliou a influência de uma viga, na determinação da potência transferida entre as duas placas, e verificou-se que a variação dos parâmetros relacionados à viga modificam significativamente, tanto a magnitude, quanto as frequências dos modos desacoplados, dentro do espectro da energia transferida. A aplicabilidade do método é portanto verificada. A confiabilidade é atribuída à excelente concordância verificada na comparação feita com os resultados obtidos pelo Método de Elementos Finitos.

Sugere-se que seja feito em trabalhos futuros: a) um processo de otimização envolvendo os parâmetros geométricos da seção transversal da viga, com o objetivo de encontrar uma relação ótima entre os parâmetros da viga, que minimize o fluxo potência transferida entre as placas; b) que o fluxo potência transferida seja avaliado em placas submetidas a outras condições de contorno, como exemplo: em acoplamentos sem apoio na união da placas. Desta forma, a potência transferida entre as placas é dada, não somente pelos esforços de flexão (momento fletores), mas também, pelos esforços cisalhantes na união (esforço cortante); c) recomenda-se que sejam usadas equações de placa semi-espessa ou moderadamente, isto é, formulação de Mindlin para o cálculo da solução das respostas do problema. Assim o sistema poderá ser analisado para uma faixa mais ampla de frequências; d) para descrever os esforços na união, sugere-se que seja usada uma função interpolação, pois, desta forma, tornará mais precisa a distribuição de potência ao longo da união, necessitando de um número de discretização reduzido para descrever a distribuição dos esforços no acoplamento. e) por fim, recomenda-se que seja avaliado o fluxo de potência com vigas de reforço em todas as bordas das placas.

A elaboração de uma nova metodologia para o controle de vibrações em estruturas, objetivo deste trabalho, oferece uma opção a mais na estimativa do fluxo de energia para

solucionar uma classe de problemas. Se rompidas as fronteiras que cercam as limitações do problema, ter-se-á disponível uma ferramenta que poderá predizer a energia transferida em estruturas acopladas tipo placas e vigas, sujeitas a uma fonte vibratória, auxiliando no diagnóstico e no controle dos níveis de vibração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CUSCHIERI, J. M., Structural power Flow analysis using a mobility approach of an L-shaped plate, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol 87, No. 3, March 1990, pg 1159.
- [2] CUSCHIERI, J. M., Thick plate bending wave transmission using a mobility power flow approach. *J. Acoust. Soc. Am.* Vol 88, No. 3, September 1990, pg 1472.
- [3] CUSCHIERI, J. M., In-Plane and out-of-plane waves power transmission through an L-plate junction using the mobility power flow approach, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol 100, Pt. 1, August 1996, pg 857.
- [4] CUSCHIERI, J. M., Parametric analysis of the power flow on an L-shaped plate using a mobility power flow approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol 91, Pt. 1, May 1996 - pg 2686.
- [5] BAARS, E., Fluxo de potência vibratória em componentes estruturais tipo barras e vigas - Dissertação de Mestrado, UFSC, Março 1996.
- [6] FIATES, F., Análise de vibrações de componentes estruturais tipo vigas acopladas pelo método da mobilidade, Dissertação de Mestrado, UFSC, Setembro 1996.
- [7] GRAFF, K. F., Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publications, Inc., New York, 1975.
- [8] CREMER, L., HECKL, M. e UNGAR, E. E., Structure-Borne Sound, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [9] LEISSA, A. W., Vibration of Plates, Ohio State University, Columbus, Ohio, Nasa SP - 160, 1969.

- [10] GORMAN, D. J., Free Vibration Analysis of Plates by The Method of Superposition, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 49-(4), 453 – 467, 1976.
- [11] SABLİK, M. J., Coupling loss factors at joint revisited, *Journal of the Acoust. Soc. of Am.*, Vol. 77(3), p. 1285 – 1291, 1982.
- [12] TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, S. N. , Teoria da Elasticidade, Guanabara Dois, Rio de Janeiro RJ, 1980.
- [13] LENZI, A, “Análise Estatística Energética - SEA”, Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Eng. Mecânica da UFSC, 1996.
- [14] LENZI, A., Aplicação da Análise Estatística Energética para a Predição dos Níveis de Vibração Estrutural e de Ruído em Plataformas *Offshore*, COBEM 1997, Bauru, SP.
- [15] SHANKAR, K., KEANE, A. J., Vibrational Energy Flow Analysis Using a Substructure Approach: The Application of Receptance Theory to FEA and SEA, *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 201(4), 491-513.
- [16] OZELAME, A, Análise de Densidade Modal e de Fatores de Acoplamento para Placas Reforçadas por Vigas. Dissertação de Mestrado, UFSC, 1997.
- [17] FAHY, F. J., LINDQVIST, E. Wave Propagation in Damped, Stiffened Structures Characteristic of Ship Construction, *Journal of Sound and Vibration*, 45(1) 115-138, 1976.
- [18] DAVIES, H. G., Power flow between two coupled beams, *Journal of the Acoust. Soc. of Am.*, Vol. 51(1), p. 393-401, 1971.
- [19] DAVIES, H. G., WAHAB, M., Ensemble averages of power flow in randomly excited beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 77(3), p. 331-321, 1981.
- [20] GOYDER, H. G. D., WHITE, R. G., Vibrational power flow from machines into built-up structures, part III: power flow through isolation systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 68(1) p. 97-117, 1980.

- [21] SYMON, K. R., *Mecânica*, Sexta edição, Editora Campus, 1990.
- [22] NEWLAND, D. E., Power flow Between a Class of Coupled Oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 43, 553-559, 1968.
- [23] LYON, R. H., SCHARTON, T. D., Power flow between linearly coupled oscillators, *Journal of the Acoust Soc. of Am.*, Vol. 35, p. 640-651, 1962.
- [24] MEIROVITCH, L., *Analytical Methods in Vibrations*, Fred Landis, 1964.

APÊNDICE
ALGORITMOS E FLUXOGRAMAS COMPUTACIONAIS

Algoritmo computacional

Primeira análise: com um apoio simples na união

- Dados de entrada:

$$L_x, L_y, \rho, v, x_0, y_0, \eta, h_p, NI$$

n e m (número de modos nas duas direções da placa)

- Construção dos vetores que formam a discretização na linha de união:

$$\Delta x = \frac{L_x}{NI}$$

$$x_i = \Delta x (i - 1) + \frac{\Delta x}{2} \quad (\text{em relação ao comprimento } L_x \text{ discretizado na união})$$

$$x_j = \Delta x (j - 1) + \frac{\Delta x}{2} \quad (\text{em relação ao momento } M_i \text{ discretizado na união})$$

- Construção da matriz mobilidade (início do laço de frequência):

Entrada de dados na subrotina: x_i, x_j

Saída: $Y_{22}(x_i, x_j)$

- Construção do vetor mobilidade:

Entrada de dados na subrotina: x_i

Saída: $Y_{12}(x_i)$

- Resolução do sistema de equação usando rotina numérica (Decomposição LU):

Entrada: Matriz $Y_{22}(x_i, x_j)$ e o vetor $Y_{12}(x_j)$

$Y_{22}(x_i, x_j) M(x_i) = Y_{12}(x_j)$ (sistema de equações)

Saída: $M(x_i)$ (momento discretizado na união das placas)

- Cálculo da velocidade angular na união das placas:

Entrada: x_i, x_j, M_i

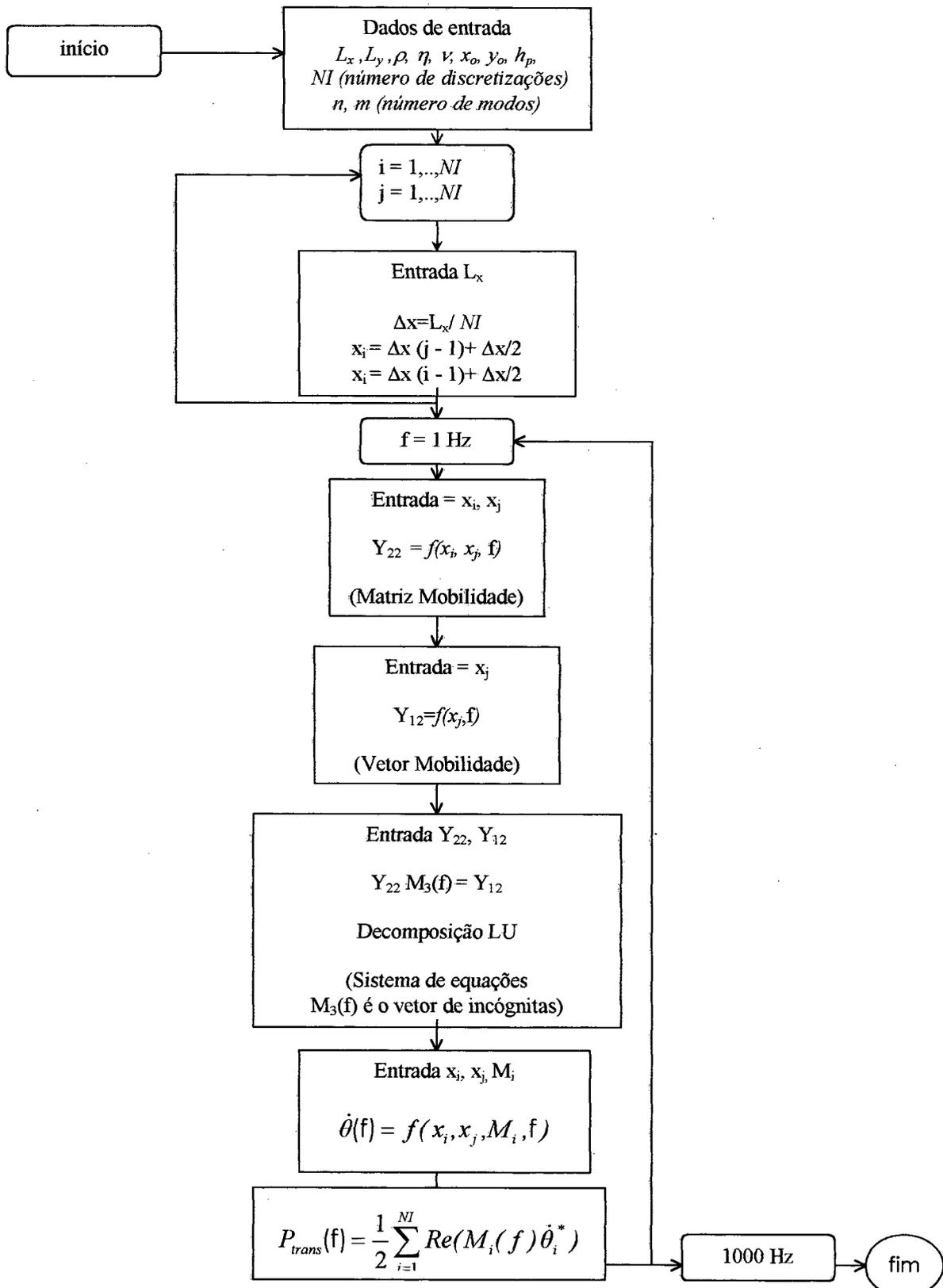
Saída: $\dot{\theta}(x_i, x_j, M_i)$ (velocidade angular na união)

- Cálculo da potência transferida:

Entrada: $\dot{\theta}, M_j$

$$\text{Saída: } P = \frac{1}{2} \sum_{i=j=1}^{NI} \text{Re}[\dot{\theta}_{i,j} M_i]$$

Fluxograma computacional (apoio simples na união)



Algoritmo computacional

Segunda análise: com uma viga na união

- Dados de entrada:

$L_x, L_y, \rho, \nu, x_o, y_o, \eta, h_p, NI,$
 I (o momento de inércia de massa por unidade de comprimento da viga),
 J (momento de inércia à torção da seção transversal da viga),
 n e m (número de modos nas duas direções da placa)

- Construção dos vetores que formam a discretização na linha de união:

$$\Delta x = \frac{L_x}{NI}$$

$$x_i = \Delta x (i - 1) + \frac{\Delta x}{2} \text{ (em relação ao comprimento } L_x \text{ discretizado na união)}$$

$$x_j = \Delta x (j - 1) + \frac{\Delta x}{2} \text{ (em relação ao momento } M_i \text{ discretizado na união)}$$

- Construção da matriz mobilidade referente à placa (início do laço de frequência):

Entrada de dados na subrotina: x_i, x_j

Saída: $Y_{22}(x_i, x_j)$

- Construção da matriz mobilidade referente à viga:

Entrada de dados na subrotina: x_i, x_j

Saída: $Y_v(x_i, x_j)$

- Construção do vetor mobilidade:

Entrada de dados na subrotina: x_i

Saída: $Y_{12}(x_i)$

- Resolução do sistema de equação, método numérico (Decomposição LU):

Entrada: Matrizes $Y_{22}(x_i, x_j)$, $Y_v(x_i, x_j)$ e o vetor $Y_{12}(x_j)$

$[Y_{22} Y_v^{-1} Y_{22} - 2 Y_{22}] M(x_i) = Y_{12}$ (sistema de equações)

Saída: $M(x_i)$ momento discretizado na união na união da placa 2

- Cálculo da velocidade angular na união das estruturas:

Entrada: x_i, x_j, M_i

Saída: $\dot{\theta}(x_i, x_j, M_i)$ (velocidade angular na união)

- Cálculo da potência transferida para a placa 2:

Entrada: $\dot{\theta}, M_i$

$$P_{trans} = \frac{1}{2} \sum_{i=j=1}^{NI} Re[\dot{\theta}_{i,j} M_i]$$

Fluxograma computacional (com uma viga na união)

