

univ

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

ODACIR DEONÍSIO GRACIOLLI
1998

12/08/98

**DIMENSIONAMENTO E OTIMIZAÇÃO DE
SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO FÍSICA DE PRODUTOS -
UM ENFOQUE CONTÍNUO**

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTOR EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

ODACIR DEONÍSIO GRACIOLLI



0.295.159-8



UFSC-BU

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL - 1998

12/08/98

**DIMENSIONAMENTO E OTIMIZAÇÃO DE
SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO FÍSICA DE PRODUTOS -
UM ENFOQUE CONTÍNUO**

ODACIR DEONÍSIO GRACIOLLI

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de:

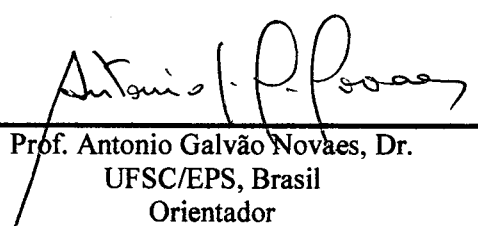
Doutor em Engenharia de Produção

e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.




Prof. Ricardo Miranda Barcia PhD.
Coordenador

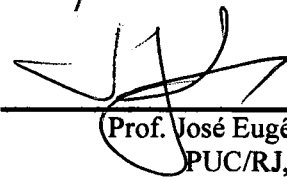
BANCA EXAMINADORA



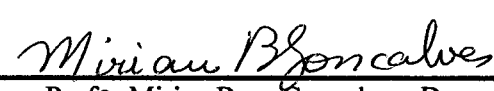
Prof. Antonio Galvão Novaes, Dr.
UFSC/EPS, Brasil
Orientador




Prof. José Eduardo Souza de Cursi, Dr.
INSA-Rouen, França
Co-Orientador e Examinador Externo



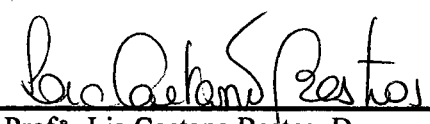
Prof. José Eugênio Leal, Dr.
PUC/RJ, Brasil
Examinador Externo



Profª. Mirian Buss Gonçalves, Dra.
UFSC/MTM, Brasil



Prof. João Carlos Souza, Dr.
UFSC/ARQ, Brasil



Profª. Lia Caetano Bastos, Dra.
UFSC/ECV, Brasil
Moderadora

Este trabalho é dedicado à minha esposa *Elisangela* e
ao meu filho *Lucas*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido com o constante incentivo e apoio decisivo de meu orientador Prof. Antonio Galvão Novaes. Ao Prof. Novaes agradeço pelos ensinamentos acadêmicos e transmissão de uma filosofia de ação e conduta.

Agradeço aos colegas e professores do Grupo de Pesquisa em Transportes e Logísticas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Aos professores, funcionários, colegas e amigos do Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas agradeço o convívio e o estímulo para o desenvolvimento de trabalhos científicos.

Aos professores, funcionários, colegas e amigos do Institut National des Sciences Appliquées de Rouen (INSA-Rouen) - França, agradeço pela dedicação e pela experiência gratificante que nos proporcionaram, a mim e a minha família.

Sou grato ao co-orientador desse trabalho, Prof. José Eduardo Souza de Cursi, com quem tive o prazer de trabalhar durante minha permanência no INSA-Rouen.

Aos Professores membros da Banca Examinadora, agradeço pela inestimável contribuição ao trabalho.

Ao CNPq e CAPES agradeço pela ajuda financeira em forma de bolsa de estudos.

E principalmente agradeço a minha família pelo carinho sempre presente e, por aceitar e participar dessa experiência.

RESUMO

Este trabalho trata do problema de dimensionamento e otimização de sistemas de distribuição física de produtos no contexto urbano. O objetivo é dividir uma região em zonas e determinar as áreas e os contornos dessas zonas, divisão espacial, de forma a minimizar uma função custo global sujeito a restrições de tempo e capacidade. Cada zona corresponde a um roteiro de entrega, a ser realizado por um veículo. Neste trabalho, nós apresentamos uma metodologia para obtenção da solução aproximadamente ótima da divisão espacial da região utilizando um algoritmo genético híbrido, combinando o método do gradiente com perturbações aleatórias. A região é tratada de forma contínua e tanto o tempo de ciclo quanto a capacidade de carga do veículo são tratados de maneira probabilística. No final, discutimos a aplicação do modelo num problema de distribuição urbana.

Palavras Chave: Distribuição, Roteiros de Veículos, Zoneamento

ABSTRACT

This thesis deals with the problem of designing and optimizing physical distribution systems in the urban context. The main objective is the partitioning of a region into districts, determining its areas and contours in such way as to minimize a global cost function subject to restrictions of time and vehicle capacity. Each district is assigned to a tour, which, in its turn, is assigned to one vehicle. In this research work we present a methodology to get a quasi-optimal partitioning scheme of the served region based on a hybrid-genetic algorithm, combined with the gradient method with random perturbations. The spatial representation of the region is treated in a continuous way. On the other hand, both vehicle cycle time and vehicle load are treated probabilistically. Next, we apply the model to solve an urban distribution problem.

SUMÁRIO

LISTA DE GRÁFICOS	x
LISTA DE TABELAS	xi
LISTA DE FIGURAS	xii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo	6
1.2 Justificativa	7
1.3 Estrutura do Trabalho	8
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 Percurso do Veículo na Zona de Entrega	10
2.1.1 Aproximação Clássica	11
2.1.2 Aproximação de Daganzo	12
2.1.3 Outras Aproximações	15
2.1.4 Correções Devido a Rede Viária	24
2.2 Problema Clássico de Distribuição Física de Produtos	26
2.2.1 Custos	26
2.2.2 Zoneamento	32
2.2.3 Estratégias Operacionais	42
2.3 Conclusões	48

CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO	49
3.1 Distância e Tempo de Viagem dentro da Zona Z_{ij}	52
3.2 Características do Ciclo dos Veículos	55
3.3 Restrições do Problema	57
3.4 Função Custo	60
CAPÍTULO 4. METODOLOGIA	62
4.1 Perturbações Aleatórias	63
4.2 Algoritmos Genéticos	64
4.3 Detalhamento dos Algoritmos Utilizados	65
4.4 Metodologia	69
CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO DO MODELO	81
5.1 Definição da Capacidade do Veículo	85
5.2 Definição do Número de Setores.....	90
5.3 Localização de um Depósito	94
5.4 Comparação de Objetivos	98
5.5 Avaliação da Performance	102
5.6 Conclusões	106
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	107
BIBLIOGRAFIA	112
ANEXO - Artigo NOVAES E GRACIOLLI (1997)	

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 5.1	- Capacidade de carga (W) X Custo.....	89
Gráfico 5.2	- Número de Setores X Custo Total.....	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	- Simulações para veículos de diferentes capacidade.....	88
Tabela 5.2	- Exemplos para número diferente de setores.....	93
Tabela 5.3	- Exemplos para diferentes localizações do depósito.....	98
Tabela 5.4	- Exemplos variando o custo fixo.....	99
Tabela 5.5	- Parâmetros do Algoritmo para os exemplo da Tabela 5.4.....	101
Tabela 5.6	- Avaliação do tempo de execução (CPU)	102

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	- Estratégia Proposta por Daganzo	13
Figura 2.2	- Distância Euclidiana e Retangular	14
Figura 2.3	- Tipos de <i>Spacefilling Curves</i> recursivas	16
Figura 2.4	- Rota Obtida pela Estratégia de <i>Spacefilling Curves</i>	17
Figura 2.5	- Zona de Serviço (Grade)	18
Figura 2.6	- Grade com arestas adicionais que permite uma Rota de Euler	19
Figura 2.7	- Estratégias de Varredura sobre a Zona de Serviço.....	21
Figura 2.8	- Esquema Geral de um Sistema de Coleta/Distribuição	28
Figura 2.9	- Alongamento da zona em direção ao depósito	34
Figura 2.10	- Zonas de diferentes formas para diferentes localizações do depósito	36
Figura 2.11	- Zonas com diferentes coeficientes de esbeltez	37
Figura 2.12	- Partição da Região (<i>anel-radial</i>) em Zonas de Entrega	40
Figura 2.13	- Representação Reticulada de uma Região de Distribuição	42
Figura 2.14	- Estratégias <i>dual-strip</i> e <i>single-strip</i>	46
Figura 2.15	- Estratégias de distribuição com transferência intermediária ...	47
Figura 3.1	- Divisão da região em sub-regiões através de raios e ângulos .	51
Figura 4.1	-Fluxograma do Método.....	69

Figura 4.2	- Divisão da Região em sub-regiões (Setores) através de raios .	72
Figura 4.3	- Exemplos de uma população de setores de tamanho 3	73
Figura 4.4	- Exemplo de uma população de setores gerada a partir de um indivíduo base.....	74
Figura 4.5	- Sub-divisão de um setor em zonas	77
Figura 4.6	- Exemplo de uma população de zonas (ângulos) de um setor ..	78
Figura 4.7	- Forma de geração de zonas (ângulos) usando uma semi reta .	79
Figura 5.1	- Pontos sobre a região exemplo	83
Figura 5.2	- Configuração com frota heterogênea	84
Figura 5.3	- Divisão da região considerando um veículo de 500 kg	85
Figura 5.4	- Divisão da região considerando um veículo de 750 kg	86
Figura 5.5	- Divisão da região considerando um veículo de 1000 kg	86
Figura 5.6	- Divisão da região considerando um veículo de 1500 kg	87
Figura 5.7	- Divisão da região considerando 5 setores	90
Figura 5.8	- Divisão da região considerando 7 setores	91
Figura 5.9	- Divisão da região considerando 9 setores	91
Figura 5.10	- Divisão da região considerando 10 setores	92
Figura 5.11	- Divisão da região considerando 13 setores	92
Figura 5.12	- Divisão da região com o depósito nas coordenadas (10, 6)	95

Figura 5.13 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (14, 15) ..	95
Figura 5.14 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (7, 22) ...	96
Figura 5.15 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (1, 1)	96
Figura 5.16 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (20, 25) ..	97
Figura 5.17 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (25, 15) ..	97
Figura 5.18 - Configuração que apresenta o menor custo	100
Figura 5.19 - Configuração que apresenta o menor número de veículos	101
Figura 5.20 - Configuração do exemplo 28	103
Figura 5.21 - Configuração do exemplo 29	104
Figura 5.22 - Configuração do exemplo 30	104
Figura 5.23 - Configuração do exemplo 31	105
Figura 5.24 - Configuração do exemplo 32	105
Figura 6.1 - Divisão da região em sub-regiões através de raios e ângulos .	109
Figura 6.2 - Divisão da região em sub-regiões através de forma livres	109
Figura 6.3 - Cálculo da área de zonas nos limites da região	110
Figura 6.4 - Configuração resultante (exemplo 32) com o contorno da região	111

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

A logística, no contexto do sistema produtivo, pode ser definida como sendo o planejamento e a operação de sistemas físicos, informacionais e gerenciais necessários para que insumos e produtos vençam condicionantes espaciais e temporais de forma econômica (DASKIN, 1985).

O enfoque logístico tem sido considerado vital para as empresas e para a economia em geral. Para muitas empresas, o transporte, tanto de insumos quanto de produtos, é a atividade logística mais importante, basicamente porque representa, em média, entre um terço a dois terços do total dos custos logísticos. Sua importância reside no fato de que a atividade produtiva envolve o deslocamento espacial de matérias primas e/ou produtos acabados, independentemente do ramo de negócios da empresa, da localização de suas instalações e dos mercados consumidores (BALLOU, 1993).

O sucesso de empresas bem sucedidas, mesmo em mercados bastante competitivos, não se deve apenas a vantagens tecnológicas ou mercadológicas, mas principalmente a ganhos logísticos significativos face à concorrência. Esses ganhos são decorrentes de uma competitividade em termos de custos de distribuição e nível de serviço aos clientes, por exemplo.

A distribuição física é o ramo da logística que reúne as atividades de movimentação interna, armazenagem e transporte de produtos acabados e semi-acabados (DASKIN, 1985). Além da importância decorrente da magnitude

dos seus estudos, a distribuição física é essencial nos esforços de promoção do aumento da demanda dos produtos comercializados, de ampliação da participação da empresa nos segmentos de mercado em que atua, na diferenciação dos produtos/serviços oferecidos e na obtenção de outras vantagens competitivas.

O gerenciamento da distribuição física se dá em três níveis: *estratégico*, *tático* e *operacional*. No nível *estratégico*, o horizonte de análise é de longo prazo, com o objetivo genérico de definição das linhas gerais, dos requisitos e da configuração geral do sistema de distribuição. São considerados aspectos quanto ao número e localização de instalações produtivas e de armazenamento, tais como fábricas, armazéns e centrais de distribuição; aos canais de distribuição; aos meios de transporte e tipos de veículo a serem utilizados; ao sistema de processamento de pedidos e faturamento; etc. (BALLOU, 1993);

Já o nível *tático* corresponde a um planejamento de curto prazo, de forma a assegurar a maior eficiência na operação do sistema de distribuição, bem como na utilização dos equipamentos, dos veículos e das instalações, definidas no nível estratégico.

Por fim, o nível *operacional* engloba a programação, execução e controle das atividades diárias, de forma a assegurar o deslocamento dos produtos para os canais de distribuição ou diretamente para os mercados consumidores, no tempo correto. Diversas atividades compõem a rotina da operação da distribuição, entre elas os procedimentos de armazenamento e movimentação interna de materiais, o processo de carregamento dos veículos e a programação dos roteiros de entregas, por exemplo.

Nos últimos anos, profissionais e pesquisadores de sistemas de suprimento e distribuição tem salientado a importância do planejamento eficiente nos três níveis do gerenciamento de sistemas de distribuição de forma a melhorar o nível de serviço ao cliente e reduzir os custos logísticos.

A importância do planejamento eficiente ainda é pouco observada no contexto nacional. Por exemplo, para que a otimização dos roteiros dê resultados satisfatórios é preciso que o sistema tenha sido bem planejado e bem dimensionado nos níveis estratégicos e táticos . De fato, o problema da roteirização surge na fase de operação do sistema, quando já estão definidos a frota e as zonas de distribuição.

Sistemas de suprimento e distribuição apresentam características táticas e operacionais semelhantes. Na sua forma mais geral, o primeiro faz a coleta de insumos de vários fornecedores para um depósito, enquanto que o segundo faz entregas de produtos a partir de um depósito para vários clientes. Portanto, muitas metodologias podem ser aplicadas diretamente em ambos os casos. Esse problema é conhecido na literatura (Daskin, 1985; Daganzo, 1996) como *problema de distribuição de um-para-muitos sem transbordo*.

Num sistema de distribuição típico, veículos fazem entregas de um depósito central para atender a demanda de clientes que estão geograficamente dispersos sobre uma dada região. Na maioria das aplicações o objetivo comum é determinar um conjunto de rotas para os veículos que satisfaça restrições espaciais e temporais, minimizando o custo total de operação da frota.

O problema de determinar um conjunto de rotas para atender a demanda de clientes, que minimize o custo total, associado geralmente a distância e/ou tempo de viagem, é chamado de *problema de roteirização de*

veículos - PRV. Esse tipo de problema pode ser resolvido por modelos matemáticos que determinam a seqüência ótima em que os clientes devem ser visitados.

Por outro lado, outras pesquisas estão interessadas no problema de dividir um região em distritos de entrega de forma aproximadamente ótima, não havendo interesse direto em determinar o melhor roteiro de visita aos clientes. Fórmulas são usadas para estimar a distância percorrida numa rota e o esforço está concentrado na divisão da região suprida por um depósito, em zonas de entrega.

Essas duas importantes abordagens para soluções de problemas de distribuição são baseadas em programação matemática e aproximações contínuas. A primeira abordagem usa métodos numéricos e conjunto de dados detalhados. Enquanto que a segunda, usa modelos analíticos e conjunto resumido de dados. Modelos analíticos simplificados são úteis em fase de planejamento de sistemas onde uma definição mais exata não se apresenta oportuna, ou para interpretar resultados antes de uma modelagem matemática mais complexa e demorada.

Aproximações contínuas permitem desenvolver um modelo mais simples, fácil de implementar, rápido, mas plausível. O objetivo principal dessa abordagem é obter soluções razoáveis com o mínimo de informação possível para entender claramente os *trade-offs*, por exemplo em fase de planejamento de um novo serviço ou expansão de um existente.

1.1 OBJETIVOS

Apresentamos nesta tese um modelo, no contexto da distribuição física de produtos, para particionar uma região em zonas de entregas através de uma abordagem contínua. O modelo busca a configuração de mínimo custo, determinando as áreas e os contornos das zonas, onde cada zona corresponde a um roteiro de entrega a ser realizado por um veículo, respeitando restrições de tempo e capacidade.

1.2 JUSTIFICATIVA

Em decorrência da abertura de mercado nos últimos anos, a concorrência entre empresas, o nível de serviço oferecido ao cliente entre outros fatores, tem aumentado a necessidade de redução dos custos para poder competir. Modelos que venham a reduzir custos logísticos e melhorar o nível de serviço nas empresas de forma que elas possam competir no mercado são sempre vistos com bons olhos. Portanto, a necessidade de se investigar soluções cada vez mais eficientes aos problemas da distribuição física é flagrante.

Em sistemas de distribuição física de produtos, os modelos, em geral, ou são muito complexos ou não representam de forma robusta a realidade. Portanto, a busca de modelos que não apresentem alto grau de complexidade e ao mesmo tempo sejam robusto, deve continuar.

Numa etapa do dimensionamento do sistema de distribuição física de produtos, é necessário fazer a divisão da região, um espaço contínuo, em zonas de distribuição. Alguns pesquisadores resolvem esta etapa através da discretização do espaço contínuo de forma que o problema se transforme em um problema mais simples. Entretanto essa transformação no processo faz uma aproximação da realidade que geralmente leva a resultados muito distorcidos. Portanto existe uma necessidade de se buscar soluções que tratem o espaço de forma contínua sem aumentar excessivamente a complexidade do problema e apresentar um resultado mais preciso.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

No próximo capítulo, são apresentadas várias formulações para estimar a distância de uma rota a ser percorrida por um veículo dentro de uma zona de entrega. Em seguida, é apresentado um esquema para o problema clássico de distribuição física de produtos, composto por várias zonas de entrega e, a partir do esquema geral são apresentados os custos envolvidos no sistema. Também apresentamos alguns modelos para a sub-divisão da região em zonas de entrega aproximadamente ótimas, isto é, zonas que minimizam os custos do sistema, e por fim, algumas estratégias operacionais.

No capítulo 3, apresentamos uma formulação matemática para o problema de dividir uma região em sub-regiões para um sistema de distribuição física de produtos.

O capítulo 4 descreve a metodologia para a repartição da região em zonas de entregas.

No capítulo 5 analisamos uma aplicação do modelo para um exemplo de distribuição física de produtos numa região urbana.

O último capítulo desse trabalho é uma discussão sobre as vantagens e perspectivas futuras sobre o modelo proposto.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, é feita uma revisão de modelos para o dimensionamento de sistema de distribuição física de produtos. Primeiramente, abordamos modelos da literatura que tratam o problema de estimar a distância percorrida dentro de uma zona de entrega definida a priori. Em seguida, apresentamos um esquema geral para um sistema de distribuição, os custos envolvidos e considerações sobre o processo de zoneamento e estratégias operacionais.

2.1 Percurso do Veículo na Zona de Entrega

Muitas pesquisas foram feitas para estimar a distância do roteiro ótimo a ser percorrido por um veículo dentro de uma zona de forma a visitar todos os clientes e retornar ao depósito. Esse problema é conhecido como *problema do caixeiro viajante* - PCV. Primeiramente abordamos a aproximação clássica e em seguida derivações e abordagens diferentes de vários pesquisadores.

2.1.1 Aproximação Clássica

Na fase de planejamento e dimensionamento de um sistema de distribuição física, o conhecimento do roteiro ótimo não é necessário, sendo desejado tão somente uma boa estimativa da distância percorrida pelo veículo.

Para a métrica Euclidiana, onde a distância entre dois pontos, d , de coordenadas $(x_A; y_A)$ e $(x_B; y_B)$ é calculada por $d = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{1/2}$, foi desenvolvida uma boa aproximação para a distância percorrida ao longo de um roteiro otimizado, dentro de uma zona de área A . Sejam considerados n clientes dispersos aleatoriamente e independentemente sobre uma região de área A , com a localização de cada cliente determinada por uma distribuição uniforme sobre A . Na métrica Euclidiana, a estimativa da distância da rota ótima para o *problema do caixeiro viajante* que visita todos os n clientes dentro de uma zona de área A , foi estabelecida por BEARDWOOD *et al.* (1959) como:

$$L = k\sqrt{nA} \quad (2.1)$$

onde k é uma constante.

Um conjunto de simulações experimentais elaborados por EILON *et al.* (1971) estimaram a constante $k = 0,750$. Em 1978, STEIN estimou k como sendo aproximadamente igual a $0,765$. Em geral, para zonas razoavelmente compactas e convexas (ver LARSON E ODONI, 1981), o comprimento esperado da rota ótima é aproximado por:

$$L = 0,765\sqrt{nA} \quad (2.2)$$

Dessa maneira, por exemplo, pode ser estimado o número de pontos que podem ser servidos com recursos disponíveis.

Para $n \geq 15$ a expressão acima apresenta bons resultados para zonas de formas diversas (triângulo, retângulo, círculo, quadrado, etc.), de acordo com simulações realizadas por EILON *et al.* (1971).

2.1.2 Aproximação de Daganzo

A estratégia proposta por DAGANZO (1984a) analisa uma área de serviço dividida em faixas de largura igual, como mostra a Figura 2.1. Iniciando a rota pela faixa mais à esquerda no ponto de menor coordenada y , percorre-se os pontos na ordem que eles aparecem ao longo da faixa. Quando atingir o último ponto da faixa muda-se para a faixa seguinte, iniciando com o ponto de maior coordenada y e segue o mesmo processo, não permitindo retornos na rota. Neste processo contínuo em forma de *zig-zag*, a rota é então determinada percorrendo todas as faixas até o último ponto da área de serviço.

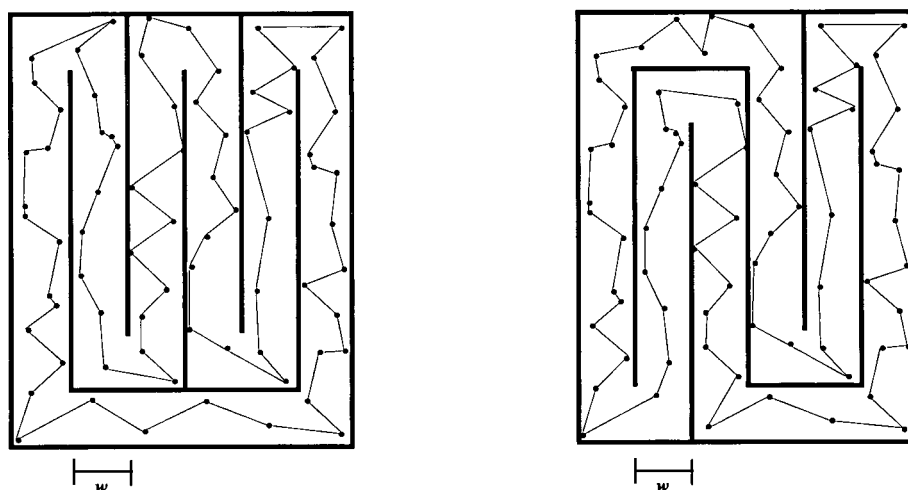


Figura 2.1 - Estratégia Proposta por Daganzo

Essa formulação procura tirar partido das características morfológicas da rede viária, principalmente quando há predomínio de artérias em direções bem definidas e quando há um grande número de pontos a serem atendidos por um veículo.

Para uma dada densidade de pontos, $\lambda = n/A$, DAGANZO (1984a) mostra que a o valor esperado da distância, d_w , entre dois pontos consecutivos, nas respectivas métricas (ver Figura 2.2), é dado por:

$$d_w = w/3 + (1/\lambda w) \quad \text{para métrica retangular} \quad (2.3)$$

$$d_w \cong w/3 + (1/\lambda w) \phi(\lambda w^2) \quad \text{para métrica Euclidiana} \quad (2.4)$$

onde w é a largura da faixa e onde:

$$\phi(x) = (2/x^2) [(1+x) \text{Log}(1+x) - x] \quad (2.5)$$



a) Euclidiana $d = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{1/2}$ b) Retangular $d = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$

Figura 2.2 - Distância Euclidiana e Retangular

A largura w^* que leva ao valor mínimo de d_w é

$$w^* = (a / \lambda)^{1/2} \tag{2.6}$$

onde $a = 3$ para a métrica retangular e $a = 1,15$ para a métrica Euclidiana.

Adotando a melhor largura w^* , então a distância esperada entre pontos é dada por:

$$d^* = k (\lambda)^{-1/2} \tag{2.7}$$

onde $k = 1,15$ para a métrica retangular e $k = 0,90$ para a métrica Euclidiana.

Resulta então, a seguinte expressão para o valor esperado do comprimento da rota dentro da zona de serviço:

$$L \approx k (n\lambda^{1/2}) = k\sqrt{nA} \quad (2.8)$$

onde $k = 1,15$ para a métrica retangular e $k = 0,90$ para a métrica Euclidiana.

Se compararmos o segundo valor ($k = 0,90$) com o resultado obtido por STEIN para o caso mais geral (isto é, $k = 0,765$) nota-se um acréscimo de 17,6 % na distância percorrida. Se, no entanto, for tirada vantagem da conformação viária, nos casos em que isso for possível, o método de percurso por faixas pode dar resultados satisfatórios, além de permitir que se faça a programação do roteiro do veículo com maior facilidade.

Zonas com dimensões grandes comparadas com w^* podem ser cobertas pela faixa de largura $\approx w^*$ em mais de uma maneira. Portanto, pelo menos conceitualmente, seria possível escolher o melhor padrão de faixa que sirva a arranjos particulares de pontos, talvez até mesmo variando sua largura dependendo da densidade de pontos no local. Isto reduziria o comprimento da rota resultante (ROB E DAGANZO, 1990). Além disso, o comprimento da rota pode também ser reduzida se for permitido retorno, cruzamento de limites de faixa e reversão de direção. NEWELL E DAGANZO (1986b), estimam que essa redução na distância poderia chegar em torno de 15% para rotas típicas.

2.1.3 Outras Estratégias

BARTHOLDI E PLATZMAN (1988), propuseram uma estratégia baseada em *spacefilling curves* (curvas de Peano), que produzem uma solução aproximada muito rapidamente para o PCV, e que pode ser usada como uma

boa solução inicial para uma heurística mais precisa mas que consome muito tempo para obtenção de uma solução inicial.

Spacefilling curves, primeiramente descrito pelos matemáticos Peano e Hilbert, são mapeamentos contínuos de uma unidade de intervalo sobre um quadrado unitário. A seqüência de construções recursivas, como mostra a Figura 2.3, produz curvas contínuas que podem ser convertidas em um segmento de reta através de um processo de alongamento.

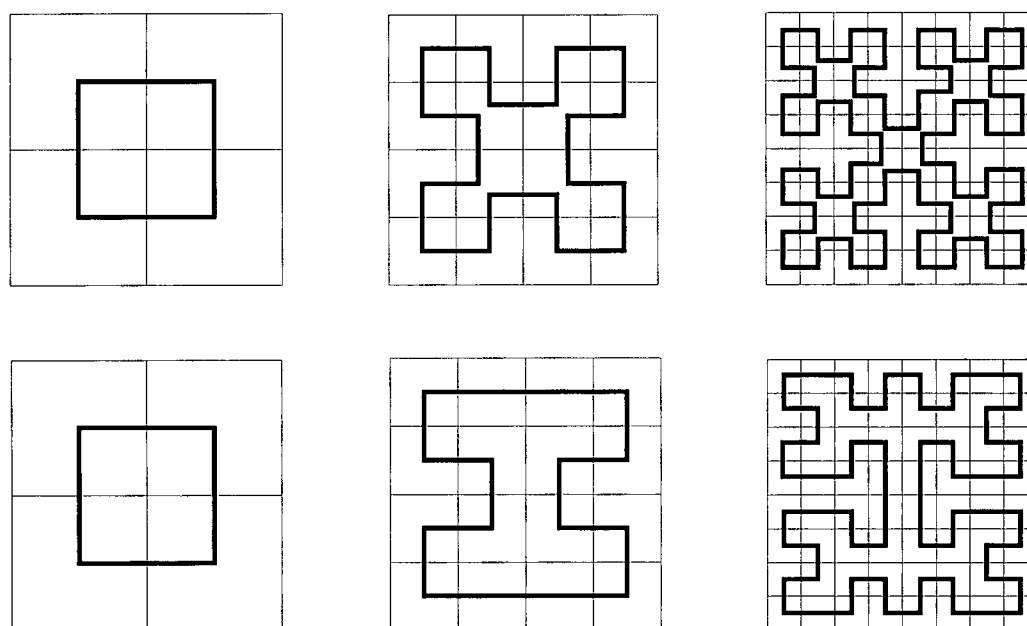


Figura 2.3 - Tipos de *Spacefilling Curves* recursivas

Para cada um dos n pontos dentro do quadrado é tomado o ponto na curva o mais próximo dele. Um procedimento de seleção simples sobre o segmento linear obtido pelo alongamento da curva, produzirá uma seqüência

de pontos da rota aproximada para PCV (Figura 2.4). O número de curvas recursivas à ser considerado dependerá do grau de precisão desejado.

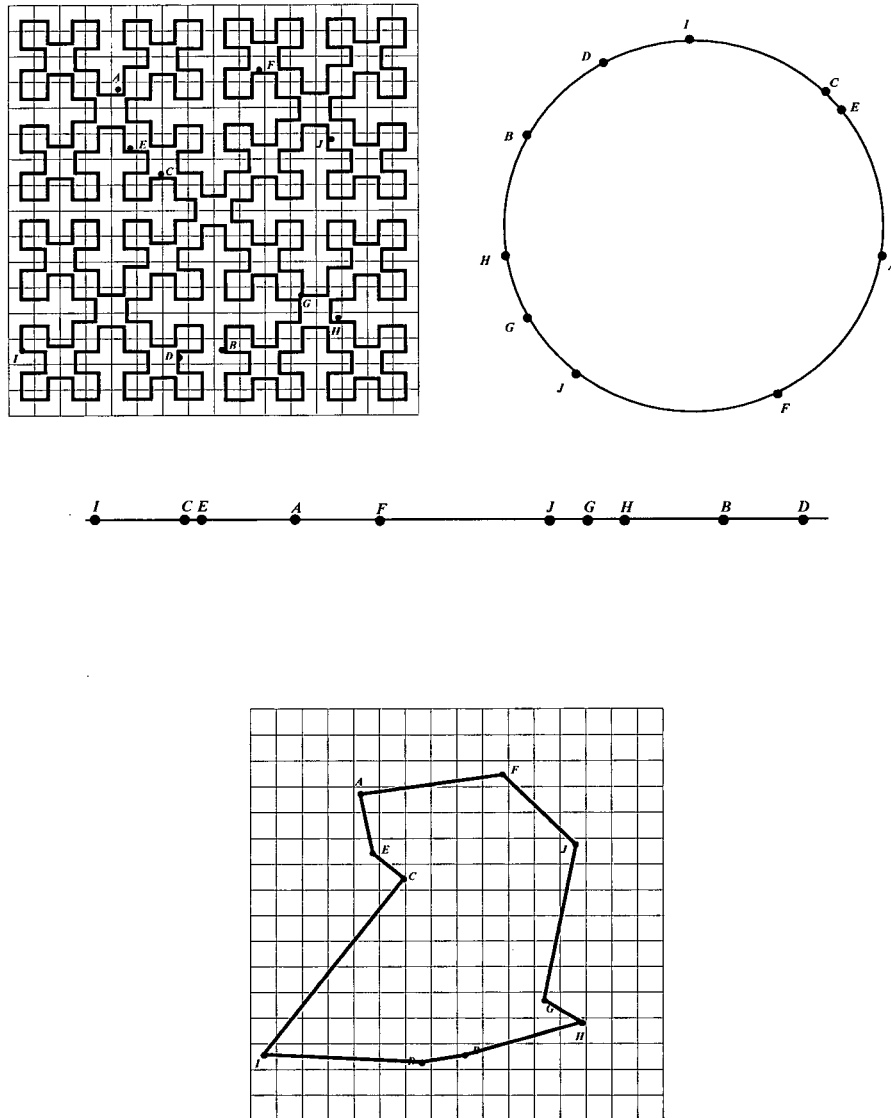


Figura 2.4 - Rota Obtida pela Estratégia de *Spacefilling Curves*

NOVAES, 1992, aborda o problema de distribuição para áreas de alta densidade de maneira diferente. Suponha uma região urbana com ruas formando uma grade quadrada com espaçamento a (Figura 2.5). Suponha também que o serviço de distribuição sobre uma zona de área A de tal tipo, com um grande número de ponto de visita, n , aleatoriamente distribuídos sobre a rede. Se n é suficientemente grande, no caso limite, o veículo que serve a zona cobrirá todos as arestas. Portanto, o problema de roteamento pode ser tratado como um *problema do carteiro chinês* - PCC para $n \rightarrow \infty$.

Este fato sugere que para problemas de distribuição em grade de alta densidade de pontos, a abordagem do problemas do caixeiro viajante clássico (PCV), pode não ser a melhor opção prática. Primeiro, conhecendo que problemas PCV são *NP-Hard* e conseqüentemente é muito inconveniente resolve-los para valores de n grande. Segundo, um padrão de rota fixa para ser seguida todos os dias facilitaria o processo de programação dos veículos e de pessoal bem como sua implementação. A solução do PCV clássico usualmente leva à padrões de rotas diferentes, dependendo do número de pontos, da distribuição espacial, etc.

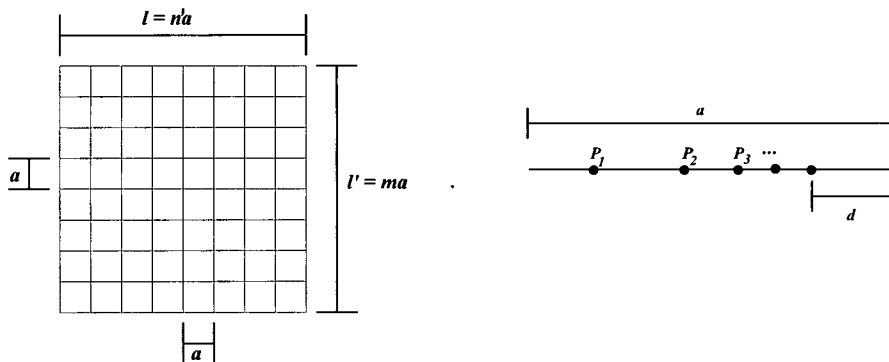


Figura 2.5 - Zona de Serviço (Grade)

Supondo a zona de serviço uma grade de forma retangular, formando uma veneziana de espaçamento a (Figura 2.5), os lados do retângulo são $l = n'a$ e $l' = ma$, onde n' e m são inteiros positivos e, os n pontos de visita são distribuídos aleatoriamente e uniformemente sobre os arcos da rede.

Suponha ainda que o veículo tem que cobrir todas as arestas da rede. Então, este é o problema do carteiro chinês clássico. Sua solução é facilmente obtida para grade retangular da Figura 2.5. Portanto, deve ser determinada a rota de Euler de comprimento mínimo (rota de comprimento mínimo que passa por todas as arestas uma e somente uma vez), que existe se e somente se o grafo correspondente não possuir vértice de grau ímpar (LARSON E ODONI, 1981). Verificando a Figura 2.5, vemos que os vértices de grau ímpar ocorrem somente no perímetro externo do retângulo. Os comprimentos mínimos dos pares de vértices ímpares são imediatamente identificáveis, levando às arestas suplementares que são necessárias para obter a rota de Euler.

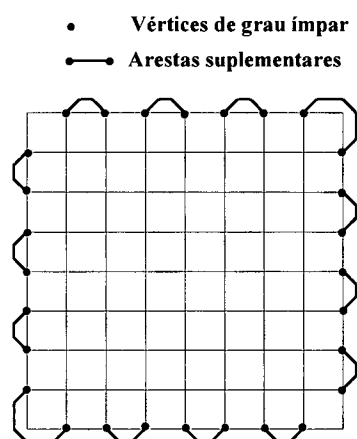


Figura 2.6 - Grade com arestas adicionais que permite uma Rota de Euler

Assumindo que n' e m são pares (ou n' par e m ímpar, ou vice-versa) a Figura 2.6 mostra como adicionar as arestas suplementares de maneira a eliminar os vértices de grau ímpar, a necessária e suficiente condição para obter uma rota de Euler. A extensão total das arestas da grade da Figura 2.5 é dado por:

$$L_{PCC} = 2 [A/a + (1 + \beta) (A/\beta)^{1/2}] \quad (2.9)$$

onde

$$\beta = l'/l = m/n'$$

A estratégia de varredura do veículo segue uma rota em *zig-zag*, como indicado na Figura 2.7. As ruas transversais são percorridas somente se um ou mais pontos são alocados na aresta. A distância total esperada para a estratégia de ordem 1 é:

$$L_A = A/a + (1 + \beta) (A/\beta)^{1/2} + (A/a^2) z \quad (2.10)$$

Onde

$$z = 2 (a - E[d])$$

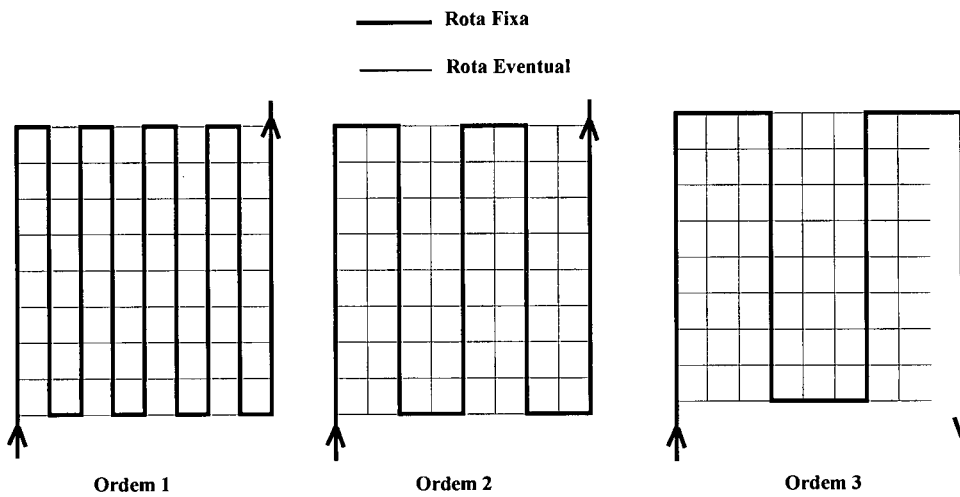


Figura 2.7 - Estratégias de Varredura sobre a Zona de Serviço

Comparando os resultados da melhor estratégia de varredura, dada pela equação (2.10), com a solução esperada para o PCV dado pela equação (2.8), NOVAES (1992), determina o ponto onde ambas as curvas se interceptam. Uma vez que a heurística para resolver o PCV envolve erros não desprezíveis, foi introduzido um coeficiente α na relação (2.8) para considerar o fato que o comprimento da rota PCV como obtida é maior que o ótimo real.

$$L_{PCV} = k\alpha\sqrt{nA} \quad \text{com } \alpha > 1 \quad (2.11)$$

Por exemplo, assumindo $s = 4 \text{ km}^2$, $\beta = 1$, $a = 0,2 \text{ km}$ e $\alpha = 1,05$, foi determinado que para $n > 667$ pontos ($\lambda = 167 \text{ pontos/km}^2$) a estratégia da varredura com $c = 1$, produz melhores resultados que a abordagem PCV convencional (NOVAES, 1992). Portanto considerando uma grade com alta densidade de pontos de serviço, outras estratégias de roteirização que não a

PCV, podem produzir resultados satisfatórios com muito menos esforço computacional.

DAGANZO (1984b), desenvolveu uma formulação que pode ser usada para estimar o comprimento do rota ótima do PCV através de n pontos para o problema de roteirização de veículos - PRV. Ele considera a distância total como dois segmentos: a distância percorrida do depósito até a zona de entrega mais o retorno ao depósito, $2D$, mais o comprimento da rota que visita todos os pontos na zona, expressão (2.1) com $k = 0,75$.

$$L_C \approx 2D + 0,75\sqrt{nA} \quad (2.12)$$

Mais recentemente, CHIEN (1992), testa a exatidão de 7 modelos diferentes para estimar L_C . Ele usou 16 formas diferentes para a região de serviço (incluindo as formas retangular e "cunha") e localizou o depósito na origem. Ele gerou aleatoriamente 4.160 problemas testes variando o número de clientes de 5 à 30 (embora discuta brevemente resultados em 4 problemas contendo 100 à 250 pontos). Usando o conjunto de dados completo, Chien então determinou, usando busca exaustiva, o coeficiente para cada um dos 7 modelos que minimiza a média total da porcentagem de erro absoluto. Por exemplo, usando todos os 4.160 problemas teste, ele achou $k = 0.88$ em (2.8), produzindo seu modelo $L_C = 0,88(nA)^{1/2}$.

Sendo D a média da distância dos clientes ao depósito, R a área do menor retângulo que cobre somente clientes e N o número de clientes mais o depósito, Chien determinou o seguinte modelo para o conjunto total de dados:

$$L_C = 2,10D + 0,67\sqrt{R(n-1)} \quad (2.13)$$

Chien também desenvolveu 7 modelos para cada uma das 16 diferentes regiões e examinou exatamente cada modelo. Cada uma das regiões contém 260 problemas teste e os coeficientes em cada modelo variam de acordo com a forma da região. Por exemplo, na região retangular onde a comprimento do retângulo dividido pela largura é igual a 1, a equação (2.13) resulta na seguinte expressão:

$$L_C = 2,39D + 0,57\sqrt{R(n-1)} \quad (2.14)$$

KWON *et al.* (1995), propuseram a construção de modelos de regressão e modelos de redes neuronais para estimar o comprimento da rota ótima para o problema do caixeiro viajante. Eles examinaram a performance dos modelos em problemas com o número de pontos variando de 10 à 80. Os pontos eram localizados numa região retangular e o depósito estava localizado em um dos cantos do retângulo ou no centro. Os modelos de regressão e redes neuronais foram facilmente construídos e testados (os modelos em redes neuronais são também treinados) razoavelmente bem e, produzindo resultados precisos. Os modelos foram derivados dos modelos propostos por Beardwood, Daganzo e por Chien. Os modelos de redes neuronais apresentaram uma leve superioridade na exatidão sobre os modelos de regressão.

2.1.4 Correções Devido a Rede Viária

A rede viária, tanto a nível urbano como regional, incorpora ainda acréscimos na distância percorrida em função da sinuosidade das ruas e estradas, desvios, etc. No contexto urbano aparece ainda os efeitos de vias com única mão de direção, restrições de cruzamento de artérias preferenciais, etc., obrigando os veículos a realizarem percursos relativamente maiores do que os teóricos. Na literatura é comum se adotar um crescimento de 35% na distância Euclidiana, para levar em conta tais fatores. Esse valor reflete um grande número de observações, envolvendo pares de pontos situados a distâncias variadas entre si. Nos casos de roteiros realizados em zonas de grande densidade de pontos, esse valor tende a ser maior, porque os efeitos mencionados (ruas com mão única, etc.) tendem a penalizar mais as distâncias mais curtas. Antes de adotar um valor para esse coeficiente de correção, em geral, é necessário analisar a rede específica e ajustar um valor através de técnicas estatísticas (regressão, por exemplo).

De uma forma geral, o percurso dentro de uma região de área A , razoavelmente compacta e convexa (LARSON E ODONI, 1981), correspondente a um roteiro otimizado via solução do PCV, com n pontos distribuídos aleatoriamente na região, pode ser aproximado através da expressão:

$$L = k'k\sqrt{nA} \quad (2.15)$$

com $k = 0,765$, e k' obtido através de ajuste estatístico, correlacionando distâncias efetivas com as respectivas distâncias Euclidianas.

Uma outra forma utilizada para expressar esse resultado é através da densidade de pontos λ (quantidade de ponto por Km²). Tem-se $\lambda = n/A$, e portanto $A = n/\lambda$. Substituindo em (2.15), vem:

$$L = \frac{k \cdot kn}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.16)$$

Um outro parâmetro bastante utilizado nas análises é o percurso médio por ponto, igual à distância L é dividida pelo número de pontos:

$$d = \frac{L}{n} = \frac{k \cdot k}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.17)$$

Em resumo, todos os autores comentados anteriormente, expressões (2.1), (2.8), (2.11) e (2.15), acabam chegando, de alguma maneira, na seguinte formulação para determinar a distância esperada percorrida pelo veículo dentro da zona de serviço:

$$L = K\sqrt{An} \quad (2.18)$$

Com a variação do coeficiente k dependendo das características consideradas nas simulações realizadas pelos pesquisadores.

Discutidas então, as formulações para estimar a distância a ser percorrida por um veículo no roteiro ótimo que visite todos os clientes de uma zona, agora discutiremos o problema num escopo acima, isto é, o sistema de distribuição física formado por várias zonas de entrega ou coleta.

2.2 O problema Clássico da Distribuição Física de Produtos

Os problemas de coleta e de distribuição são conceitualmente análogos, na maioria dos casos. Podem ser analisados de forma conjunta, fazendo-se as correções específicas no momento das aplicações.

As características básicas desse tipo de problema são as seguintes (NOVAES, 1989):

- (a) Uma região geográfica é dividida em zonas, cujos contornos podem ser rígidos ou, em alguns casos, podem sofrer alterações momentâneas para acomodar diferenças de demanda em regiões contíguas.
- (b) A cada zona é alocado um veículo, com uma equipe de serviço, podendo ocorrer outras situações (mais de um veículo por zona, por exemplo).
- (c) A cada veículo é designado um roteiro, incluindo os locais de parada (pontos de coleta ou entrega, atendimento de serviço, etc.) e a seqüência em que a equipe deverá atendê-los.
- (d) O serviço deverá ser realizado dentro de um tempo de ciclo pré-determinado. No caso de coleta/entrega urbana, o roteiro típico inicia de manhã cedo e se encerra no fim do dia. Nas entregas regionais o ciclo pode ser maior. Há casos de entrega rápida em que o ciclo é menor que um dia útil.
- (e) Os veículos são despachados a partir de um depósito onde se efetua a triagem da mercadoria (ou serviço) em função das

zonas. Nos casos em que há mais de um depósito o problema pode ser analisado de forma análoga, efetuando-se, para isso, as divisões adequadas da demanda e/ou da área geográfica atendida.

Algumas questões metodológicas se colocam ao planejador do sistema destacando-se as seguintes:

- (a) Como dividir a região de atendimento em zonas de serviço ?
- (b) Como selecionar o veículo/equipe mais adequado ao serviço ?
- (c) Qual a quilometragem média da frota e os diversos tempos associados ao serviço, de forma a quantificar os custos ?
- (d) Qual a fração do serviço (carga coletada ou distribuída, número de chamadas, etc.) não cumpridas num dia útil ?
- (e) Qual a frequência ideal de serviço ?
- (f) Como, enfim, selecionar a configuração mais adequada ?

Esse tipo de problema apresenta dois níveis de resolução. Na fase de planejamento e projeto do sistema de coleta/distribuição ainda não se tem idéia precisa dos pontos reais de atendimento. Nesse caso é mais interessante

adotar estimativas aproximadas, mas de cálculo rápido, de forma a possibilitar a análise de diversas configurações alternativas.

Na fase de operação, são conhecidos os locais de atendimento. Em alguns casos esses pontos são fixos, como, por exemplo, na distribuição diária de jornais, entrega de produtos nos estabelecimentos varejistas, etc. Noutros casos os locais de atendimento são aleatórios, sendo conhecidos somente na hora de executar o roteiro de serviços. Como exemplo, citamos os serviços de entrega de compras para as lojas, os sistemas de atendimento para reparos e consertos, etc. Em ambas as situações é necessário definir um roteiro otimizado para a equipe de serviço.

Na Figura 2.8, é mostrado o esquema espacial de um sistema típico de coleta e distribuição de mercadorias. Uma região R , atendida pelo sistema, é dividida em M zonas. A cada zona é alocado um veículo de coleta/distribuição.

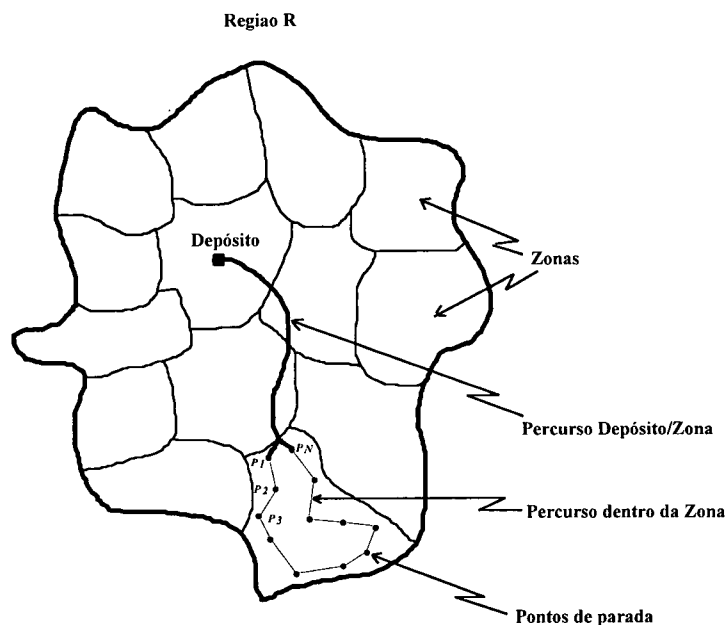


Figura 2.8 - Esquema Geral de um Sistema de Coleta/Distribuição

O veículo, ao ser liberado no depósito, sai carregado com a mercadoria a ser entregue e o roteiro das visitas, com indicação da ordem de seqüência das paradas.

O veículo percorre uma rota desde o depósito até o primeiro ponto de parada (ponto p_i na Figura 2.8). Denominando de t o tempo decorrido nesse percurso (variável aleatória) e admitindo que, no regresso ao depósito, o tempo seja também igual à t . A distância percorrida nesse percurso é denominada D .

Na zona de entrega o veículo gasta um tempo T_p em cada parada, tempo esse necessário para estacionar, procurar a pessoa responsável no endereço, efetuar a descarga, providenciar a assinatura na nota, etc.

O tempo total de ciclo, medido desde que o veículo sai do depósito até seu retorno ao fim do serviço, é dado então por:

$$T_C = t + T_p^* + T_r^* + t \quad (2.19)$$

onde:

T_C = tempo de ciclo

t = tempo de percurso entre depósito e zona de distribuição ou vice-versa. Notar que separamos os tempos referentes às viagens de ida e de volta porque, em termos estatísticos, são valores independentes, embora regidos pela mesma distribuição

T_p^* = soma dos tempos de parada dentro da zona de distribuição

T_r^* = soma dos tempos de percurso entre parada sucessivas

Enquanto que a distância percorrida por um veículo, num ciclo T_C , é dada pela expressão:

$$L_C = D + L + D \quad (2.20)$$

onde:

L_C = distância total de um ciclo

D = distância do depósito à zona e vice-versa

L = soma das distâncias percorridas entre paradas sucessivas, dentro da zona

2.2.1 Custos

Os custos operacionais básico de uma frota de veículos de entrega é dado por:

$$C_T = C_F M_Z + C_{EX} H_{EX} + C_{KM} K_{MF} \quad (2.21)$$

onde:

C_T = custo total

C_F = custo fixo diário de um veículo (\$/dia/veículo)

M_Z = número total de zonas = número de veículos ($M_Z = \sum M_i$)

C_{EX} = custo da hora extra

H_{EX} = total de horas extras da frota, por dia

C_{KM} = custo variável (\$/km)

K_{MF} = distância média diária da frota (km)

O custo operacional por parada pode ser calculado considerando separadamente o custo fixo e o custo variável (quilométrico), o primeiro dado em valor monetário/dia/veículo (C_f) e, o segundo, em valor monetário por quilômetro rodado (C_{KM}).

Cada veículo realiza m roteiros por semana, rodando então mL_c quilômetro semanais. A quilometragem semanal da frota será então $n_v mL_c$ (onde n_v é o número de veículos). O custo médio por parada é dado então por:

$$C_{medio} = \frac{n_v (C_f + C_{km} mL_c)}{\lambda A} \quad (2.22)$$

HIGGINSON (1993), apresenta um discussão sobre "conceito de custo total" nos custos da distribuição física. Esta visão declara que todos os custos do sistema logístico estão interligados e qualquer análise deve examinar o efeito em todos os custos em vez de somente alguns. Modelos na literatura de distribuição, entretanto, tipicamente têm focalizado em uma atividade, tal como roteamento de veículo, localização de facilidades ou planejamento de cargas, e tem ignorado o impacto da análise em outras atividades do sistema de distribuição. Além disso, modelos têm quase que exclusivamente abordado os custos diretos (aqueles que podem ser facilmente traçados para um despacho ou pedido) e tem omitido aqueles que são menos visíveis. Portanto, enquanto o conceito de custo total tem sido reconhecido por muitos anos, ele não tem recebido adequada aplicação por modelos teóricos.

Expressões para o custo total de um sistema logístico tem sido propostas por vários autores e abordagens práticas para custeio de despacho tem sido desenvolvidas. Enquanto estes modelos diferem em detalhes em que certas atividades são consideradas, os custos incluídos podem ser classificados

como aqueles relacionados ao transporte, estoque em trânsito, manuseio, armazenagem e atividades indiretas (por exemplo, processamento de pedidos e marketing).

2.2.2 Zoneamento

A distribuição física de produtos numa determinada região implica geralmente na sub-divisão da mesma em zonas, às quais se alocam os veículos de coleta/entrega. A situação mais freqüente é a da alocação de um veículo à cada zona.

A subdivisão da região em zonas depende de uma série de fatores, destacando-se: (a) distância da zona ao depósito ou armazém; (b) densidade de pontos de parada por Km²; (c) condições viárias e de tráfego; (d) tipo e capacidade dos veículos.

A determinação precisa dos contornos das zonas de distribuição constitui um problema relativamente complexo porque envolve conceitos topológicos, operacionais, urbanísticos e viários. Na prática, os serviços logísticos de distribuição física de produtos têm as zonas dimensionadas e delimitadas através de uma sistemática empírica, baseada na experiência contínua, no próprio processo operacional.

DAGANZO (1984b), apresenta formulações para zoneamento, dividindo uma área em zonas objetivando a minimização da distância média percorrida por ponto de parada. Considerando a distância como a soma de duas

componentes: a distância do depósito até a zona, denotada por D , e a distância percorrida no interior da zona, L (Figura 2.9).

A distância total percorrida, $L_c = 2D + L$, depende do número de pontos de parada, da forma geométrica das zonas, da área da zona e da localização do depósito.

Para cada zona há C pontos de paradas (cada zona está associada à um único veículo), a área de cada zona é pequena comparada com a área total da região, a densidade de pontos de parada na zona, λ , é constante (podendo variar para a região), então a área de uma zona pode ser determinada da seguinte forma:

$$A_z \cong C/\lambda \quad (2.23)$$

DAGANZO (1984b), mostra que pequenas variações nas formas das zonas não afetam significativamente o comprimento de roteiros sub-ótimos.

Para zonas de forma retangular com a distância D grande, convém “alongar” as zonas na direção do depósito (Figura 2.9).

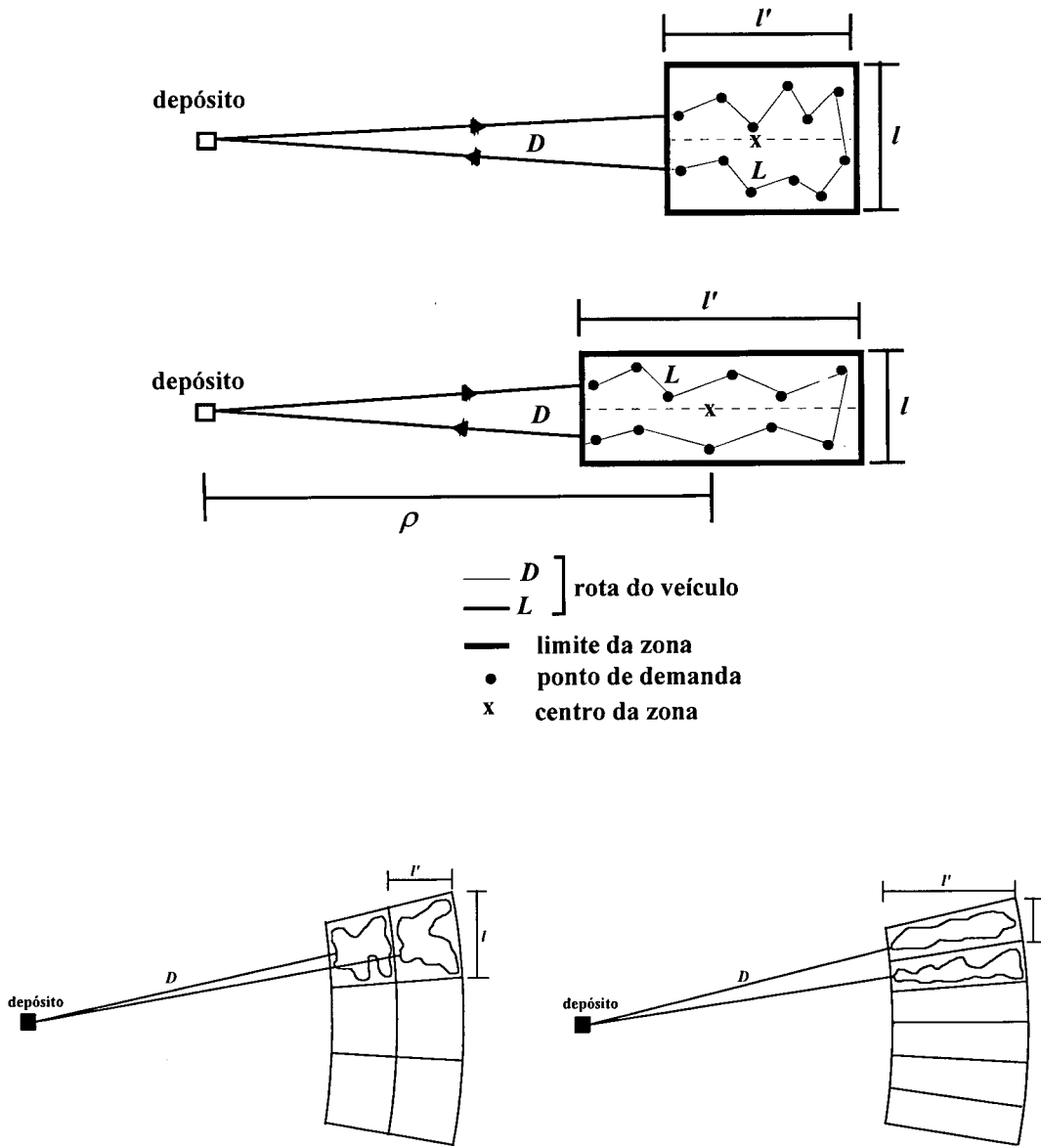


Figura 2.9 - Alongamento da zona em direção ao depósito

Para determinar o quanto a zona deve ser alongada em direção ao depósito são necessárias algumas considerações:

A distância esperada entre pontos de paradas de um roteiro numa zona de forma retangular de lados l e l' , $l \leq l'$ é:

$$d^* = \frac{\phi(\lambda l^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \quad (2.24)$$

onde $\phi(x)$ é contínuo e não crescente dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0,9 & \text{se } x \geq 12 \\ \frac{\sqrt{x}}{6} + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{(x/4)^2} \right) \left[\left(1 + \frac{x}{4} \right) \log \left(1 + \frac{x}{4} \right) - \frac{x}{4} \right] & \text{se } x < 12 \end{cases}$$

Se o retângulo está orientado com o lado mais comprido, l' , na direção do depósito, a distância média por ponto, \tilde{d} , incluindo a distância percorrida do depósito até a zona é:

$$\tilde{d} \cong \begin{cases} \frac{2}{C} \left[\rho - \frac{l'}{2} \right] + d^* & \text{se } \rho \geq \frac{l'}{2} \\ d^* & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Uma vez que a área da zona, $Az = C/\lambda$, é constante e conhecida e, l' também constante, conclui-se que: (a) quando l aumenta e ϕ diminui então d^* diminui; (b) quando l aumenta e l' diminui então $(\rho - l'/2)$ aumenta.

Portanto é possível determinar um coeficiente de esbeltez, $\beta = l / l'$, que minimiza \tilde{d} .

Para ρ grande o coeficiente de esbeltez, β , é:

$$\beta^* = \min \left\{ 1 ; \frac{6,7}{C} \right\} \quad (2.25)$$

A Figura 2.10, representa todos os casos que podem ocorrer para localizações diferentes do depósito e valores diferentes para C .

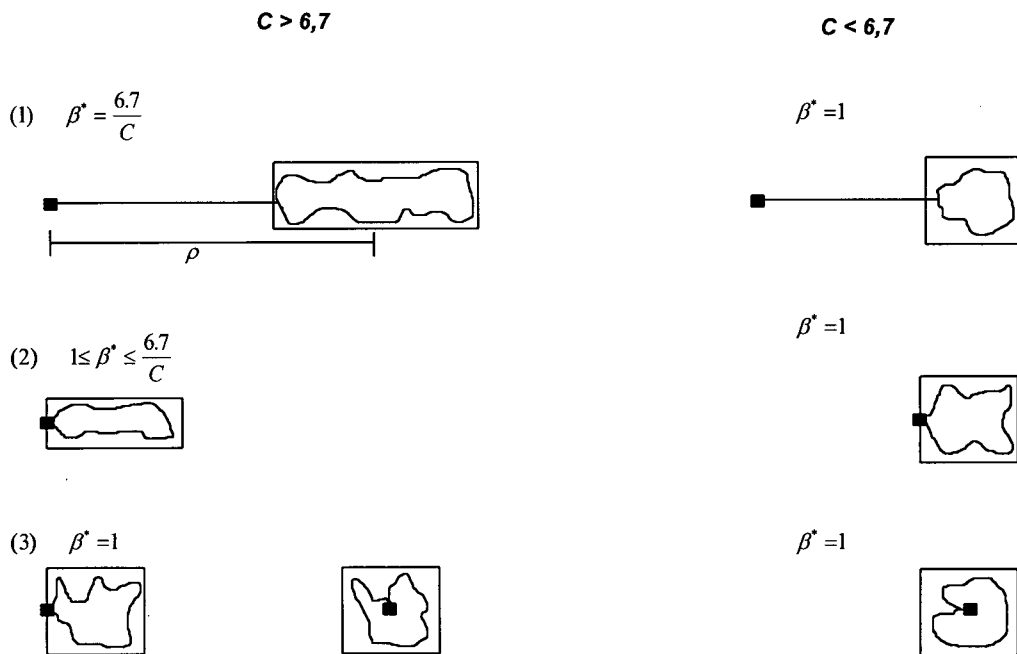


Figura 2.10 - Zonas de diferentes formas para diferentes localizações do depósito.

Na divisão da Região R em zonas, pode ser que não seja possível usar retângulos e o melhor coeficiente de esbeltez, β , para todas as zonas. Zonas terão que ser deformadas apropriadamente. Para este caso, β é escolhido da seguinte forma:

$$\beta^* \cong \min \left\{ 1 ; \max \left[4 \left(\frac{C}{n} \right) ; \frac{6,7}{C} \right] \right\} \quad (2.26)$$

Isto pode ser visto na Figura 2.11, que é auto explicativa. Segundo DAGANZO (1984b), este impacto no comprimento total não é grande.

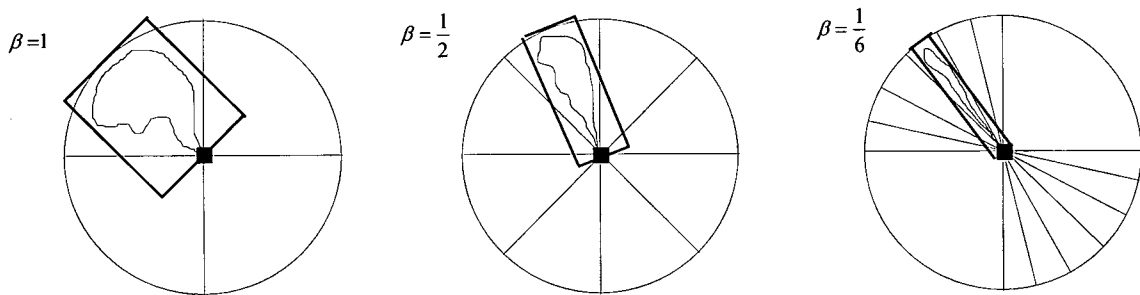


Figura 2.11 - Zonas com diferentes coeficientes de esbeltez

Na formulação proposta por HAN E DAGANZO (1986), duas desejáveis propriedades na partição das zonas ideais são consideradas:

P_1 : é possível, todas as zonas serem definidas cobrindo toda a região e cada uma sendo coberta com um tempo τ_0 .

P_2 : para cada zona, o tamanho (A) e o coeficiente de esbeltez (β) serem ótimos (isto é, $A = A^*$ e $\beta = \beta^*$).

Considere uma região circular com raio R , o depósito localizado no centro. O zoneamento ótimo da região é aquele que produz o mínimo custo de serviço para toda a região. Para tal região, P_2 pode ser aproximada com uma partição *anel-radial* que satisfaz também P_1 . Dado m , o número de zonas no círculo definido pelos dois círculos concêntricos de raio r_0 e r_1 , tal que, $r_1 > r_0 > 0$ (Figura 2.12). Dado r_0 ou r_1 , o outro raio e A^* podem ser determinados da seguinte maneira:

$$r_1 = r_0 + l^* \quad (2.27)$$

e

$$A^* = \begin{cases} \frac{U_{\tau_0} - (r_0 + r_1)/2}{\alpha_1 \lambda} & \text{se } r_0 + r_1 < 2\rho_c \\ \frac{U_{\tau_0} - (r_0 + r_1)/2}{\alpha_2 \lambda} & \text{se } r_0 + r_1 > 2\rho_c \end{cases} \quad (2.28)$$

sendo:

$$\alpha_1 = US + 0,753\lambda^{-1/2}$$

$$\alpha_2 = US + 0,574\lambda^{-1/2}$$

onde:

S = tempo consumido para cada ponto de demanda;

U = média de velocidade do veículo de entrega;

$\alpha_1 = US + 0,753\lambda^{1/2}$

$\alpha_2 = US + 0,574\lambda^{1/2}$

Note que α_1 e α_2 são as distâncias que o veículo pode percorrer durante o tempo de atendimento à um ponto.

O número de zonas no círculo é:

$$m = \frac{\pi(r_1^2 - r_0^2)}{\lambda} \quad (2.29)$$

Quando os valores l e l^* são calculados para $\rho = (r_0 + r_1)/2$, a equação (2.27) produz:

$$r_1 = r_0 + (U_{\tau_0} - r_0)k \quad (2.30a)$$

ou

$$r_0 = \frac{(r_1 - U_{\tau_0}k)}{1 - k} \quad (2.30b)$$

onde:

$$k = \begin{cases} \left(0,5 + 2,83\alpha_1\lambda^{1/2}\right)^{-1} & \text{se } r_0 + r_1 < 2\rho_c \\ \left(0,5 + 2,83\alpha_2\lambda^{1/2}\right)^{-1} & \text{se } r_0 + r_1 > 2\rho_c \end{cases}$$

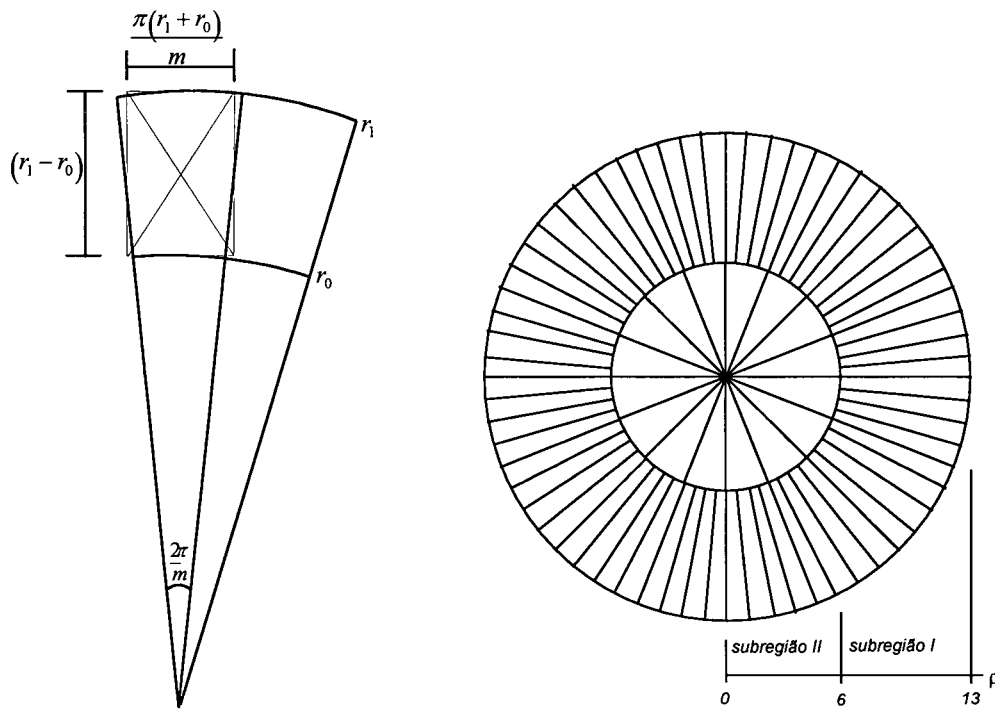


Figura 2.12 - Partição da Região (*anel-radial*) em Zonas de Entrega

NEWELL E DAGANZO (1986), analisaram o problema de determinar as dimensões ótimas das zonas (admitidas retangulares), considerando uma estratégia de roteirização diferente do PCV. Essa estratégia, somente válida para altas densidades de pontos, pressupõe a divisão da região a ser atendida em faixas de largura constante, formando um *zig-zag* ao longo de uma direção principal. A distância dos roteiros ótimos obtidas por esse método são um pouco superiores aos obtidos através de outros métodos para o PCV, mas a estratégia é fácil de implementar na prática, sobretudo quando os roteiros envolvem um número grande de pontos. Nesse trabalho, os autores aplicaram sua metodologia a uma região circular, com depósito situado no centro, e com uma rede formadas por vias radiais e circulares.

Mais tarde LANGEVIN E SOUMIS (1989), estenderam a formulação de NEWELL E DAGANZO, considerando restrições de tempo, mas admitindo a mesma formação inicial (região circular, com rede rádio-anelar).

NOVAES (1991), apresenta um desenvolvimento metodológico diferente das anteriores propostas, que possibilita a incorporação de características importantes na solução de problemas reais. Por exemplo, a região analisada pode ter qualquer forma, o depósito pode estar localizado em qualquer ponto da região, a densidade pode variar ponto a ponto, de forma não uniforme. A metodologia representa a região de distribuição de forma reticulada, dividindo a região em quadrículas elementares (abordagem com tratamento discreto da região) (Figura 2.13). Para cada quadrícula são determinadas as coordenadas e a densidade de pontos e, juntamente com um esforço de produção dos veículos, é determinado a divisão da região em zonas de distribuição aproximadamente ótimas.

Esta metodologia auxilia bastante a tarefa de zoneamento no processo de distribuição física de produtos, possibilitando, ao analista, uma pré seleção de configurações consistentes entre si e obedecendo a critérios objetivos e claros.

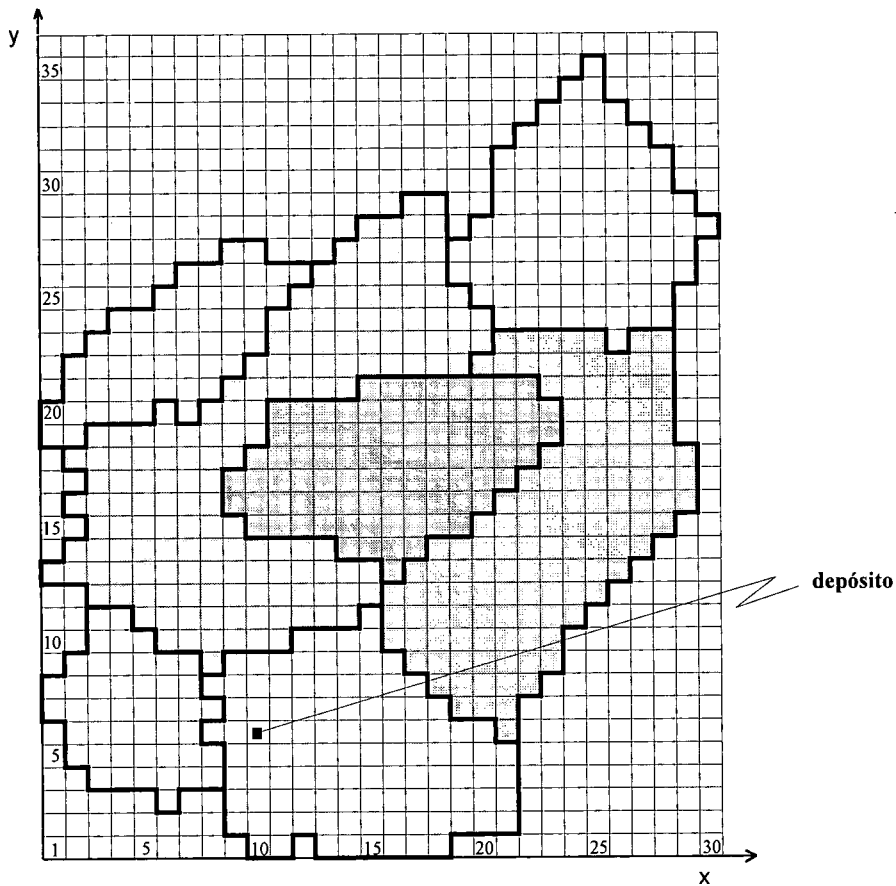


Figura 2.13 - Representação Reticulada de uma Região de Distribuição

2.2.3 Estratégias Operacionais

HALL (1985), apresenta um problema que envolve a coleta de mercadorias (matéria-prima) de várias origens (fornecedores) para um único destino (fábrica). Pesquisas mostram métodos que otimizam a frequência desses despachos dos veículos de coleta e assumem que todos os fornecedores são visitados em cada despacho. Nesse trabalho, o mencionado autor apresenta um método que determina a frequência de despacho ótima, quando clientes grandes são visitados mais frequentemente do que clientes pequenos. Este

método permite combinar custos de estoque e custos de transporte de serviços de coleta objetivando a redução destes custos. O método é desenvolvido e avaliado analiticamente e ilustrado com um exemplo.

Para um dado tamanho de carga a ser coletada de várias origens para ser entregue num único destino, uma rota de coleta pode ter muitos pontos de parada com um tempo pequeno entre despachos, ou poucas paradas, com um tempo maior entre despachos. No primeiro caso, o custo de transporte é alto e o custo de estoque é baixo. No segundo caso, o custo de transporte é baixo e o custo de estoque é alto.

BURNS *et al.* (1985), apresentam estratégias para a distribuição que minimizem custos de estoque e custos de transporte, isto é, determinam o *trade-off* ótimo entre esses custos. O autor analisa e compara duas estratégias de distribuição: despacho direto (despacho com uma carga separada para cada cliente) e *peddling* (despacho de caminhões que entregam itens para mais de um cliente por carga). O custo em cada estratégia depende do tamanho do despacho. Os resultados indicam que, para despacho direto, o tamanho do despacho ótimo é dado pelo modelo *economic order quantity (EOQ)* enquanto que para os despachos para vários clientes na mesma carga (*peddling*), o tamanho do despacho ótimo é o caminhão com lotação completa. O custo para despacho com entrega para mais de um cliente por carga depende também do número de clientes incluídos na rota. O enfoque desse trabalho está na abordagem analítica para resolver problemas de distribuição. Fórmulas são obtidas em termos de poucos parâmetros facilmente mensuráveis. Esta abordagem simplifica substancialmente problemas de distribuição proporcionando exatidão suficiente para aplicações práticas. Ela permite avaliar rapidamente *trade-offs* entre custos, usando uma calculadora de mão,

evitando a necessidade de técnicas de programação matemática e algoritmos computacionais. Facilita também a análise sensitiva que indica como alteração de valores dos parâmetros afetam os custos e as estratégias operacionais.

HAN E DAGANZO (1986), apresentam estratégias para a distribuição de itens de um depósito para muitos pontos de demanda sem transbordo e com restrição de tempo, objetivando determinar um zoneamento aproximadamente ótimo.

A primeira estratégia, *dual-strip*, é uma estratégia de roteamento que gera rotas de distâncias aproximadamente mínimas, utilizando os “dois sentidos” da rota para efetuar as visitas (o primeiro e o último ponto de entrega são os pontos mais próximos ao depósito - ver Figura 2.14). Essa estratégia, determina as dimensões da zona e tamanho da carga que minimiza a média do custo de distribuição por ponto de serviço. O custo ótimo por ponto consiste de três componentes: primeiro, o custo por parada; segundo, a média do custo de operação local, que depende da distância local percorrida por ponto; terceiro, a média dos custos para percorrer a distância entre o depósito e a zona, que depende principalmente da distância da zona ao depósito e do tamanho da carga (ou o número de pontos servido pelo veículo). Essa estratégia (*dual-strip*), produz aproximadamente a média mínima da distância local por ponto. Por isso, ela é apropriada para ser usada quando o custo de operação local é a maior componente do custo total de distribuição.

A segunda estratégia de roteamento, estratégia *single-strip*, produz distâncias mais longas (percorre a rota efetuando visitas somente num sentido - ver Figura 2.14). Ela permite um número aproximadamente máximo de pontos para serem servidos numa jornada de trabalho. Esta estratégia é preferida

quando o custo médio do deslocamento entre depósito e zona é a maior componente do custo total de distribuição

A comparação dos custos de distribuição das duas estratégias mostra que o roteamento que efetua as visitas nos dois sentidos da rota, deve ser aplicado, em geral, quando a zona de entrega está próxima ao depósito. Caso contrário, o roteamento que efetua as visitas em um sentido da rota é mais apropriado. Portanto, para uma densidade de demanda constante, o zoneamento ótimo da região de serviço tem zonas maiores e mais largas próximo ao depósito e menores e mais estreitas ao longo dos limites da região (Figura 2.14).

DAGANZO (1988), examina maneiras para reduzir estoques nos problemas de distribuição física, nos quais itens são distribuídos de uma origem para muitos destinos. Em geral, a estratégia usando despachos com mais de uma visita por carga e sem transbordo é superior a estratégia que usam algum tipo de transbordo. Ainda que as condições que levem a esta conclusão não sejam sempre satisfeitas, os resultados sugerem que transbordos são indesejáveis para a distribuição de cargas. Isto está em contraste com operações de despacho de *muito-para-muitos*, que alguns casos, podem beneficiar-se de operações de transbordos.

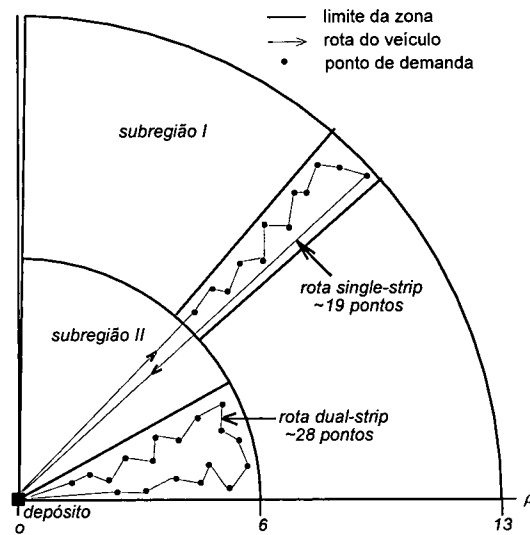
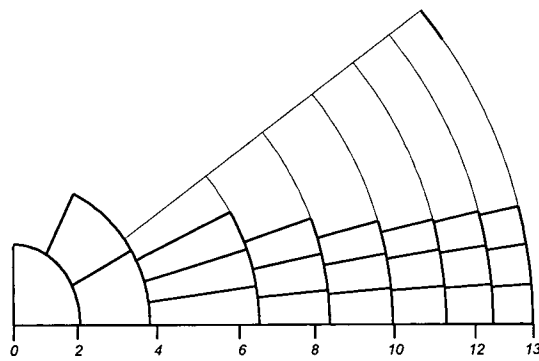


Figura 2.14 - Estratégias *dual-strip* e *single-strip*

Esse trabalho de Daganzo examina sistemas de distribuição de cargas, nos quais a produção de itens em uma única origem tem que ser carregada para muitos destinos. Para tal sistema, o despacho de itens diretamente para cada destino resulta em grandes estoques na origem porque a carga separada para cada destino está sempre em processo de formação. Para reduzir esse problema, os estoques para vários destinos podem ser

consolidados num único despacho, que pode ser enviado tão logo atingir um tamanho suficiente. Assim, um único veículo servirá a todos os destinos devidamente consolidados num único despacho. Ao contrário, se o veículo visitar cada um dos destinos separadamente para entregar itens (cada entrega consolida uma carga), resultaria em muitas e longas rotas de entrega.

Alternativamente, os itens poderiam ser entregues para um terminal próximo aos destinos, do qual outros veículos poderiam entregá-los localmente. Esta estratégia evita longas rotas de entrega, mas envolveria um transbordo e resultaria em manuseio extra (carga e descarga). DAGANZO E NEWELL (1986), apresentam um método para planejamento de sistemas de distribuição com transbordo. A Figura 2.15 mostra diferentes estratégias de distribuição com a utilização de transbordo.

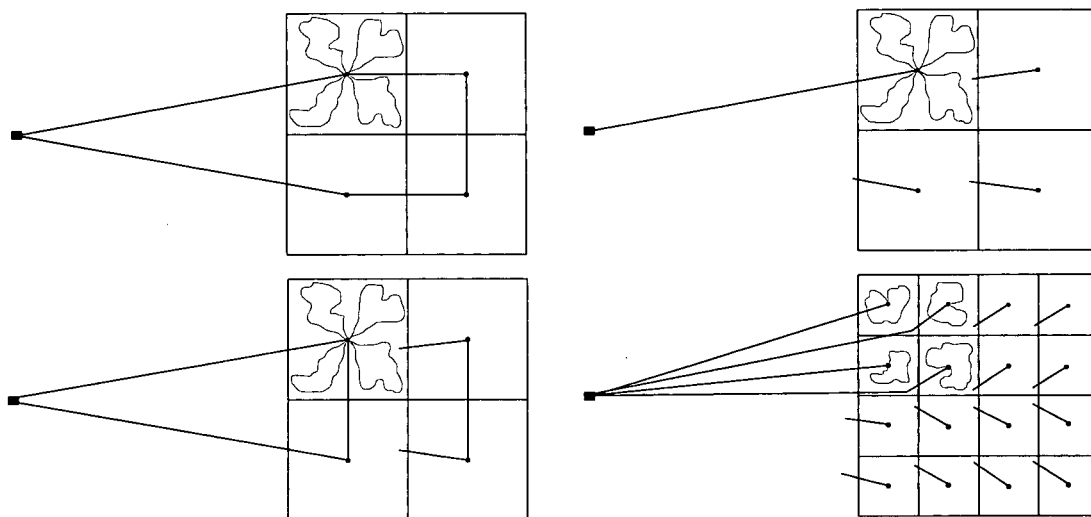


Figura 2.15 - Estratégias de distribuição com transferência intermediária

Em resumo, transferência intermediária pode ser usada para distribuição de *um-para-muitos* para demanda uniforme, reduzindo as rotas dos veículos e superando obstáculos geográficos. Diferente do caso *muitos-para-muitos*, entretanto, casos de distribuição de *um-para-muitos* parecem não requererem transbordos.

2.2.4 Conclusões

Os problemas de distribuição física de produtos apresentam parâmetros diferentes, tais como, forma da zona, característica da frota e densidade da demanda, não havendo uma única maneira de resolvê-los. Além disso, alguns modelos apresentam um alto grau de complexidade na resolução de problemas reais. No capítulo a seguir, apresentamos um modelo alternativo para o planejamento de um sistema de distribuição. Nesse modelo, estão incorporadas várias das considerações comentadas nesse capítulo.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO

Nesse capítulo, apresentamos uma formulação matemática para resolver o problema de dividir uma região em zonas (a formulação mais detalhada pode ser encontrada no trabalho de NOVAES e GRACIOLLI, 1997). Utilizamos uma abordagem que emprega aproximações contínuas. O objetivo principal dessa abordagem é obter soluções razoáveis com o mínimo de informação possível, de forma a facilitar as aplicações.

Nesse trabalho, apresentamos uma formulação que trata a região como espaço contínuo. Os pontos de demanda são considerados dispersos sobre uma região urbana de forma irregular, o depósito estando localizado em qualquer ponto dentro ou fora da região. A demanda e o tempo de serviço associados a cada ponto de visita, também variam sobre a região e são variáveis aleatórias. Também admitimos que pontos requerem uma visita com probabilidade p (JAILLET E ODoni, 1988). Cada rota é associada a um veículo com restrição de tempo e de capacidade, de forma estocástica. Deseja-se então, determinar as áreas e os contornos das zonas de distribuição (divisão espacial da região) de forma a minimizar uma função custo global sujeita à restrições. Cada zona corresponde a um roteiro de entrega a ser realizado por um veículo numa jornada diária de trabalho. Além disso, busca-se também dimensionar as zonas de forma homogênea sob um determinado critério (tempo ou custo).

Para resolver esse problema através de uma abordagem que trata a região de forma contínua, primeiro dividimos a região em sub-regiões através de raios (formando o que chamamos de setor) com o centro localizado no

depósito. Em seguida, cada setor (sub-região compreendida entre o raio r_{i-1} e raio r_i) é dividido em sub-regiões menores através de ângulos θ_p , de forma a definirem as fronteiras de cada zona, (Figura 3.1). Portanto, os raios definem setores e os ângulos, dentro de cada setor, definem zonas. O objetivo é determinar o número e os respectivos comprimento dos raios e, para cada setor, o número e os respectivos valores dos ângulos formando então os contornos das zonas, minimizando uma função custo global.

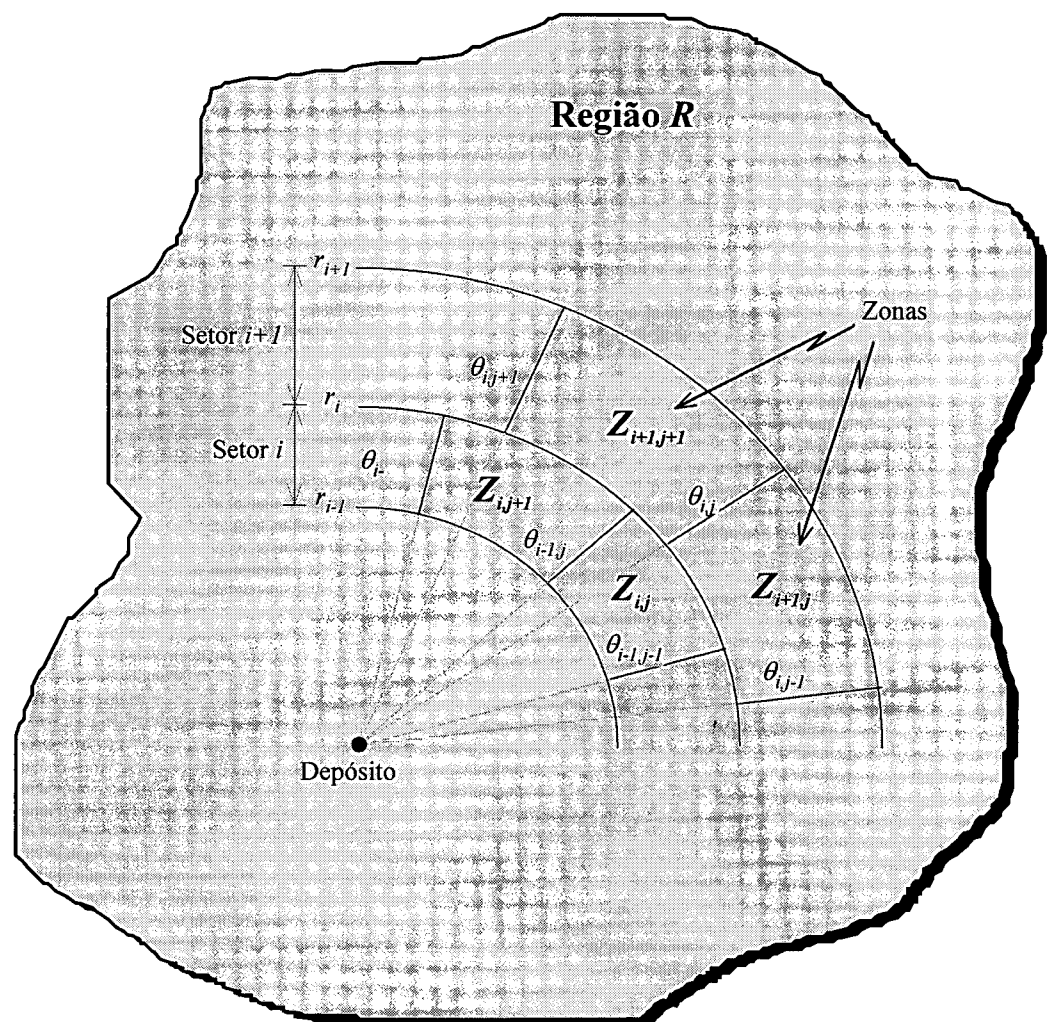


Figura 3.1 - Divisão da região em sub-regiões através de raios e ângulos

A área da zona Z_{ij} , situada entre os raios r_{i-1} e r_i e entre os ângulos θ_{j-1} e θ_j (Figura 3.1), pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$A_{ij} = \frac{\theta_{ij} - \theta_{ij-1}}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \quad (3.1)$$

O número de pontos da zona Z_{ij} depende dos raios r_{i-1} e r_i e dos ângulos $\theta_{i,j-1}$ e $\theta_{i,j}$:

$$n_{ij} = f(\theta_{ij-1}, \theta_{ij}, r_{i-1}, r_i) \quad (3.2)$$

3. 1 Distância e Tempo de Viagem dentro da Zona Z_{ij}

A distância percorrida dentro da zona compreende a soma dos deslocamentos consecutivos entre as entregas. Dado n pontos localizados uniformemente e independentemente sobre uma zona aproximadamente compacta e convexa de área A (LARSON AND ODoni, 1981), o valor esperado do comprimento da rota ótima, $E(L_{ij})$, para o problema do caixeiro viajante determinístico pode ser aproximado (BEARDWOOD *et al.*, 1959) pela seguinte expressão:

$$E(L_{ij}) = k\sqrt{A_{ij}n_{ij}} \quad \text{com } n_{ij} \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad E(L_{ij}) = n_{ij}k\delta_{ij}^{-1/2} \quad (3.3)$$

onde k é uma constante e $\delta_{ij} = \frac{n_{ij}}{A_{ij}}$ é a densidade de pontos por unidade de área em Z_{ij} e, n_{ij} e A_{ij} são o número de pontos e a área da zona Z_{ij} respectivamente.

A constante k depende da métrica utilizada e da estratégia de roteirização (ver Seção 2.1). Um valor muito usado para k na métrica Euclidiana foi estimado aproximadamente 0,765 por STEIN (1978).

Admitimos agora que há uma probabilidade p dos n pontos da rota requererem uma visita num dia aleatório. Portanto, o número k de pontos visitados em um dia é uma variável aleatória. Uma estratégia para esse problema é determinar uma rota otimizada para ser seguida todos os dias. O veículo visitaria todos os clientes sempre na mesma seqüência, mas “pula” os pontos que não requererem o serviço naquele dia. A partir de fórmulas de aproximações similares a de BEARDWOOD *et al.*(1959) para o PCV clássico, JAILLET E ODoni (1988), desenvolveu uma formulação também para o PCV probabilístico que estima a distância percorrida numa rota:

$$E(L_{ij}) = k_0 \sqrt{A_{ij} n_{ij}} \quad (3.4)$$

tal que $k\sqrt{p} \leq k_0 \leq \min(k ; 0,9204\sqrt{p})$ com $0 \leq p \leq 1$

onde k é a constante definida anteriormente.

Incluimos ainda um fator de correção da distância, k' , resultando em percursos maiores devido as normas do sistema viário, ruas de mão única, por exemplo. O valor desse fator de correção da distância, maior que um, depende do caso em estudo. Em geral, é determinado da seguinte forma: defini-se alguns pontos sobre a região e estima-se, através de regressão linear, a relação entre as distâncias euclidianas e as distâncias reais (medidas sobre a rede viária obedecendo a sinalização existente). Usualmente adota-se 1,35 ou

maior para áreas urbanas. Então a expressão (3.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$E(L_{ij}) = kk' \sqrt{A_{ij}n_{ij}} \quad (3.5)$$

onde k é a constante definida anteriormente e k' é o coeficiente correção da distância.

Dada uma zona retangular de lados l e l' ($l = l'$) com o lado maior em direção ao depósito, pode ser vantajoso alongar a zona em direção ao depósito, isto é, aumentar l' e diminuir l mantendo-se a área constante (ver Seção 2.2.2). Dessa forma, a distância dentro da zona, se mantém a mesma, pela expressão (3.3), enquanto que a distância da zona até o depósito diminui, conseqüentemente, diminuindo o custo total do roteiro. Mas, esse alongamento em direção ao depósito tem um limite. Uma deformação excessiva pode levar a um aumento substancial na distância percorrida no roteiro dentro da zona.

Introduzimos um coeficiente de correção ρ ($\rho \geq 1$) que leva em conta a esbeltez da zona para ser aplicado sobre L_{ij} dado pela expressão (3.3).

$$E(L_{ij}) = \rho kk' \sqrt{A_{ij}n_{ij}} \quad (3.6)$$

Considere $\gamma = l/l'$ como sendo o coeficiente de esbeltez de um retângulo. Sobre uma zona retangular hipotética de área constante, NOVAES E GRACIOLLI (1997) desenvolveram num experimento simulações e calibrações para estimar o valor de ρ resultando na seguinte expressão empírica:

$$\rho(n, \gamma) = \frac{k_1}{2} \left[1 + k_2^{\lambda-1} n^{(\lambda-1)k_3} \right] \quad (3.7)$$

onde $\lambda = 1/\gamma$ e $k_1 = 1,0498$ $k_2 = 1,276$ $k_3 = -0,050$.

O tempo de viagem dentro da zona Z_{ij} pode ser estimado pela seguinte expressão:

$$E(T_{ij}) = \alpha \sqrt{A_{ij} n_{ij}} \quad (3.8)$$

onde α é um valor médio que representa $1/V_z$ (V_z é a velocidade média do veículo dentro da zona de entrega), determinado através de simulações. Usamos $\alpha = 2.59$ para a aplicação do modelo ao exemplo no capítulo 5, obtido através de experimentos sobre a área de estudo, A dado em km^2 e T_{ij} em minutos (NOVAES E GRACIOLLI, 1997)

3.2 Características do Ciclo dos Veículos

O veículo inicia a viagem no depósito, desloca-se até a zona a ele associada, faz as entregas e retorna ao depósito quando todos os pontos da zona foram visitados ou quando o tempo que falta para atingir o tempo máximo permitido numa jornada de trabalho for igual ao tempo necessário para retornar ao depósito. Esta seqüência determina o ciclo do veículo. O comprimento total do ciclo, D_{ij} , é a soma dos deslocamentos direto entre depósito e zona, D_L , e a distância percorrida dentro da zona, L_{ij} :

$$D_{ij} = 2D_L + L_{ij} = 2r_i + k\sqrt{A_{ij}n_{ij}} \quad (3.9)$$

O tempo total do ciclo, por outro lado, é a soma dos tempos dos deslocamentos entre depósito e zona e o tempo total dentro da zona. O tempo

total dentro da zona é a soma dos tempos de parada, para efetivar a visita, e o tempo no deslocamento entre visitas:

$$T_{ij} = t_{LH_{ij}}^{(1)} + t_{LH_{ij}}^{(2)} + t_{ij} + pn_{ij}t_{S_{ij}} \quad (3.10)$$

onde:

- T_{ij} = tempo total do ciclo para a zona Z_{ij} ;
- $t_{LH_{ij}}^{(1)}$ = tempo para o deslocamento entre depósito e zona Z_{ij} ;
- $t_{LH_{ij}}^{(2)}$ = tempo para o deslocamento entre zona Z_{ij} e depósito;
- t_{ij} = tempo total para os deslocamentos dentro da zona Z_{ij} ;
- p = probabilidade de cliente ser visitado;
- $t_{S_{ij}}$ = tempo médio de parada em uma entrega.

O tempo dos deslocamentos entre depósito e a zona foram estimados através de simulações sobre a área de estudo ($E(t_{LH}) = E(t_{LH}^{(1)}) = E(t_{LH}^{(2)}) = \bar{\beta} D_L$). Então, o valor esperado de T_{ij} é aproximado por:

$$E(T_{ij}) = 2\beta D_L + \alpha \sqrt{A_{ij} n_{ij}} + n_{ij} t p_{ij} \quad (3.11)$$

onde β é um valor médio que representa $\frac{1}{V_L}$ (V_L é a velocidade média do veículo entre o depósito e a zona de entrega, determinado através de simulações. Usaremos $\beta = 1,74$ para a aplicação do modelo ao exemplo do capítulo 5, obtido através de experimentos sobre a área de estudo (NOVAES E GRACIOLLI, 1997).

Assumindo independência estatística entre os elementos da expressão (3.10), a variância de T é dada pela soma das variâncias de cada um dos elementos. Pelo Teorema do Limite Central, T pode ser representado por uma distribuição normal $T \sim N(T, \sigma_T)$.

Admitimos também que, uma jornada diária de trabalho está limitada a H_0 (em nosso exemplo adotamos 8 horas). Quando o tempo de trabalho numa jornada ultrapassar H_0 , então a tripulação recebe uma bonificação, além da remuneração normal, relativa às horas extras, H_{EX} .

3.3 Restrições do Problema

As restrições do problema referem-se ao tempo ciclo, ou seja, tempo de deslocamento do depósito até a zona, mais o tempo necessário para visitar os pontos de demanda mais o tempo de retorno ao depósito, não pode exceder um tempo máximo pré-estabelecido. E, a carga do veículo para ser entregue num ciclo, não pode exceder a capacidade máxima de carga do veículo, dada em peso ou volume.

Admitimos que o tempo de ciclo não pode exceder a um máximo H_1 , de horas de trabalho por dia, imposto pela legislação trabalhista, políticas de empresas, etc. Dado $x \sim N(0,1)$, a normal unitária e T representado por $T \sim N(T, \sigma_T)$. Adotando um percentual de 98, ou $x = 2.06$, então:

$$\hat{T}_{ij} = E(T_{ij}) + 2,06\sigma_{T_{ij}} \leq H_1 \quad \text{Restrição de Tempo} \quad (3.12)$$

é uma restrição que sempre deve ser respeitada.

Dado $E(u)$ e σ_u como sendo respectivamente a média e desvio padrão da quantidade de produto u entregue por ponto de visita. Então, admitindo independência estatística das demandas dos clientes, o valor esperado e a variância da carga total do veículo U em uma rota são dados por:

$$E(U_{ij}) = n_{ij}E(u) \quad \text{e} \quad \sigma_{U_{ij}}^2 = n_{ij}\sigma_u^2 \quad (3.13)$$

Pelo Teorema do Limite Central, U pode ser representado pela distribuição normal $U \sim N(U, \sigma_U)$. Se W é a capacidade do veículo e adotando um percentual de 98, então temos mais uma restrição a ser respeitada:

$$\hat{U}_{ij} = E(U_{ij}) + 2,06\sigma_{U_{ij}} \leq W \quad \text{Restrição de Capacidade} \quad (3.14)$$

Um outro fator importante pode ser considerado no resultado final da divisão da região em zonas. A homogeneização das zonas, ou seja, a busca da configuração ótima deve determinar as fronteiras das zonas de maneira à deixá-las semelhantes sob um determinado critério, tempo, carga ou custo, por exemplo. Buscamos a homogeneização das zonas considerando o tempo como parâmetro de forma à determinar que o esforço relativo ao tempo de trabalho de cada tripulação associada a um veículo, esteja o mais próximo possível das outras tripulações.

A homogeneização das zonas é feita dentro de cada setor e segue a seguinte forma:

Soma-se uma penalidade, à função custo, que depende do desvio do esforço da zona em relação ao esforço médio das zonas dentro de cada setor.

Adotamos a penalidade da zona Z_{ij} como:

$$P_{ij} = \left(\frac{E_{Z_{ij}} - \bar{E}_{S_i}}{\bar{E}_{S_i}} \right)^2$$

onde :

$E_{Z_{ij}}$ = esforço da zona j do setor i

$$\bar{E}_{S_i} = \text{esforço médio do setor } i = \sum_{j=1}^n \frac{E_{Z_{ij}}}{n}$$

O Esforço de distribuição de uma zona restrita por tempo é calculado pela seguinte expressão (NOVAES E GRACIOLLI, 1997):

$$E = \frac{\lambda(t_p + \tau)}{f}$$

onde

λ = densidade de pontos da zona

τ = intervalo de tempo médio entre paradas dado por

$$\tau = \frac{0,765 \cdot k \cdot \lambda^{-1/2}}{V_{c2}}$$

onde

k = coeficiente de correção de distância;

V_{c2} = velocidade média do veículo na zona

f = fração do tempo H_0 disponível para a distribuição dentro da zona dado por:

$$f = 1 - \frac{2d/V_{c1}}{H_0}$$

onde

d = distância da zona ao depósito;

V_{cl} = velocidade média do veículo entre o depósito e zona.

3.4 Função Custo

Buscamos os valores ótimos dos raios e dos ângulos que satisfazem as restrições (3.12) e (3.14) e minimizem o custo de distribuição da região dado pela seguinte expressão:

$$C = \sum_i \sum_j \left[C_{km} E(D_{ij}) + C_{Hr} E(T_{ij}) + C_{Ex} H_{Ex_{ij}} + g_{T_{ij}} + g_{U_{ij}} + P_{ij} \right] \quad (3.15)$$

onde:

C = custo total de distribuição para a região;

C_{km} = custo do veículo por quilômetro rodado;

$E(D_{ij})$ = valor esperado da distância para atender ao zona Z_{ij} , dado por:

$$D_{ij} = 2r_i + k\sqrt{A_{ij}n_{ij}}$$

C_{Hr} = custo horário da tripulação do veículo;

$E(T_{ij})$ = valor esperado do tempo de ciclo para atender ao zona Z_{ij} , dado por:

$$E(T_{ij}) = 2\beta D_L + \alpha\sqrt{A_{ij}n_{ij}} + n_{ij}tp_{ij}$$

C_{Ex} = custo da hora extra;

$H_{Ex_{ij}}$ = quantidade de horas extra para a zona Z_{ij} ;

$g_{T_{ij}}$ = penalização, relativa ao excesso de tempo de ciclo, para atender a zona Z_{ij} , dado por:

$$g_{T_{ij}} = R \left(\hat{T}_{ij} - H_1 \right)^C$$

onde R e C são constantes positivas ($R = 1000$ e $C = 4$ no nosso modelo)

$g_{U_{ij}}$ = penalização, relativa ao excesso de carga, para atender a zona Z_{ij} , dado por:

$$g_{U_{ij}} = R \left(\hat{U}_{ij} - W \right)^C$$

onde R e C são constantes positivas ($R = 1000$ e $C = 4$ no nosso modelo)

P_{ij} = penalização, relativa a homogeneização, da zona Z_{ij} ;

Definidas as variáveis, as restrições e a função custo a ser minimizada para o problema de dividir uma região em zonas de entrega, descreveremos no capítulo seguinte o algoritmo genético híbrido utilizado para resolver o problema de minimização.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA

4. METODOLOGIA

Nesse capítulo, apresentamos uma metodologia para o dimensionamento e otimização de um sistema de distribuição física de produtos definido matematicamente no capítulo anterior. Primeiro, apresentamos uma descrição do algoritmo genético híbrido utilizado para minimizar a função custo. E em seguida, a metodologia para a solução do problema de dimensionamento e otimização como um todo.

4.1 Perturbações Aleatórias

A minimização da expressão (3.15) pode ser abordada numericamente por métodos de descida tendo a forma geral $x_{n+1} = Q(x_n)$. No entanto, em geral, a convergência desses métodos só pode ser assegurada com hipóteses de convexidade da função custo que não são, a priori, verificadas por (3.15). Resultados recentes mostram que a adição de perturbações aleatórias adequadas pode garantir a convergência independentemente do ponto inicial, das iterações e da convexidade da função custo (POGU E SOUZA DE CURSI, 1994).

O método consiste em gerar uma seqüência $\{x_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$\forall n \geq 1 \quad x_{n+1} = Q(x_n) + P_n \quad (4.1)$$

onde P_n é uma perturbação aleatória que decresce de maneira suficientemente lenta de forma a evitar a convergência para um mínimo local.

4.2. Algoritmos Genéticos

Um algoritmo genético é um método de procura baseado na genética, isto é, um mecanismo de seleção natural. Novas gerações são criadas através de sobrevivência dos mais aptos e a troca de informações aleatórias. Embora esses mecanismos gerem alguns elementos de forma aleatória, os algoritmos genéticos não realizam pesquisa aleatória: eles buscam explorar eficientemente a informação histórica, procurando novos pontos para melhorar seu desempenho (GOLDBERG, 1989).

Um algoritmo genético (AG), em geral, consiste de: uma população inicial S_0 , uma regra de casamento C , uma regra de mutação M e uma regra de seleção S .

Mais especificadamente, um AG consiste de:

1. Dar uma população inicial S_0 .
2. No passo n , $n \geq 0$, obter uma população S_{n+1} a partir de S_n , como segue:
 - Gerar os filhos de S_n , $F_n = C(S_n)$;
 - Obter as mutações de S_n , $M_n = M(S_n)$;
 - Aplicar a regra de seleção para obter:

$$S_{n+1} = S(A_n), \quad \text{onde } A_n = S_n \cup F_n \cup M_n$$

4.3. Detalhamento dos Algoritmos Utilizados

Para a minimização da função custo (3.15), implementamos formas específicas dos métodos gerais apresentados acima, cuja fundamentação teórica pode ser encontrada em POGU E SOUZA DE CURSI (1994) e SOUZA DE CURSI E CORTES (1995).

4.3.1. Algoritmo GR-PA (*Método do Gradiente com Perturbações Aleatórias*)

Da expressão (4.1), $x_{n+1} = Q(x_n) + P_n$, tomamos $Q(x)$, como o método do gradiente dado por:

$$Q(x) = x - \mu \nabla F(x)$$

onde $\nabla F(x)$ é o gradiente de F e μ é um parâmetro.

Escolhemos um número inteiro positivo, NR , que representa o número de tiragens (sorteios) a serem realizados, e no passo n , x_{n+1} é obtido através de:

$$x_{n+1} = \text{Argmin} \left\{ F(Q(x_n) + P_n^r) \quad ; \quad 0 \leq r \leq NR \right\}$$

onde $P_n^0 = 0$ e P_n^1, \dots, P_n^{NR} são NR valores aleatórios de P_n . Portanto, serão gerados, $(Q(x_n) + P_n^r)$, e avaliados, $(F(Q(x_n) + P_n^r))$, NR indivíduos para compor a nova população, x_{n+1} , mas sobreviverá somente o mais apto, aquele que apresentar melhor solução na avaliação da função custo. $P_n^0 = 0$, garante

que sempre sobreviverá o indivíduo mais apto, pois pode ocorrer, nesse mecanismo de geração, que todos os indivíduos gerados sejam menos aptos que os indivíduos da população anterior.

Para cada r , $1 \leq r \leq NR$, o vetor P_n^r é dado por:

$$P_n^r = \lambda_n Z_n^r$$

onde:

$(\lambda_n)_{n \geq 1}$ é uma seqüência de números reais convergindo para zero. Usamos neste trabalho λ_n como sendo:

$$\lambda_n = a \sqrt{\frac{c}{\log(n+d)}} \quad a, c, d = \text{constantes positivas, e}$$

(Z_n^r) um vetor gerado através da distribuição gaussiana padronizada N-dimensional $N(0, Id)$.

4.3.2. Algoritmo GE-GR-PA (*Algoritmo Genético Híbrido, inserindo o método do gradiente com perturbações aleatórias GR-PA*)

O algoritmo GE-GR-PA usado para a minimização de (3.15), é um AG onde o método GR-PA é inserido na regra de mutação. Ele consiste de:

I a) selecionar números inteiros positivos:

NP (tamanho da população);

NF (tamanho da população de filhos);

NR (número de tiragens);

b) gerar uma população inicial de tamanho NP , $S_0 = \{x_0^1, \dots, x_0^{NP}\}$ e

c) selecionar um número real $H > 0$;

II No passo n , (número de iterações, $n \geq 0$), obter uma população S_{n+1} a partir de S_n , $S_n = \{x_n^1, \dots, x_n^{NP}\}$, por AG da seguinte forma:

- **Gerar os filhos de S_n** , $F_n = C(S_n)$, é combinação linear entre dois pais, dado pela seguinte expressão:

$$F_n = \{\alpha_n^{j,k} x_n^j + \beta_n^{j,k} x_n^k + \gamma_n^{j,k} \quad ; \quad k = 1, \dots, NF\}$$

onde $\alpha_n^{j,k}, \beta_n^{j,k}, \gamma_n^{j,k}$ são valores aleatórios gerados através da distribuição uniforme sobre $[-H, H]$, $H > 0$;

- **Obter as mutações de S_n** , $M_n = M(S_n)$, são gerados pelo método do gradiente com perturbações aleatórias, GR-PA, dado pela seguinte expressão:

$$M_n = \{Q(x_n^j) + P_n^{j,i} \quad ; \quad i = 0, \dots, NR \quad j = 1, \dots, NP\}$$

sendo $P_n^{j,0} = 0$ e $P_n^{j,1}, \dots, P_n^{j,NR}$, NR valores aleatórios de P_n , e $Q(x)$ tomado como no algoritmo GR-PA

- **Aplicar a regra de seleção sobre as populações S_n , F_n e M_n** para obter a nova geração S_{n+1} , (população de tamanho NP), dada pela seguinte expressão:

$$S_{n+1} = S(A_n) = \{x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^{NP}\}$$

onde:

$$A_n = S_n \cup F_n \cup M_n \text{ e}$$

$$x_{n+1}^j = \underset{A_n^j}{\text{Arg min } F}$$

$$A_n^j = A_n - \{x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^{j-1}\} \quad ; \quad A_n^1 = A_n$$

4.4. METODOLOGIA

O método para a divisão da região em zonas de entrega, utilizando o algoritmo genético híbrido descrito anteriormente, está representado no fluxograma da Figura 4.1.

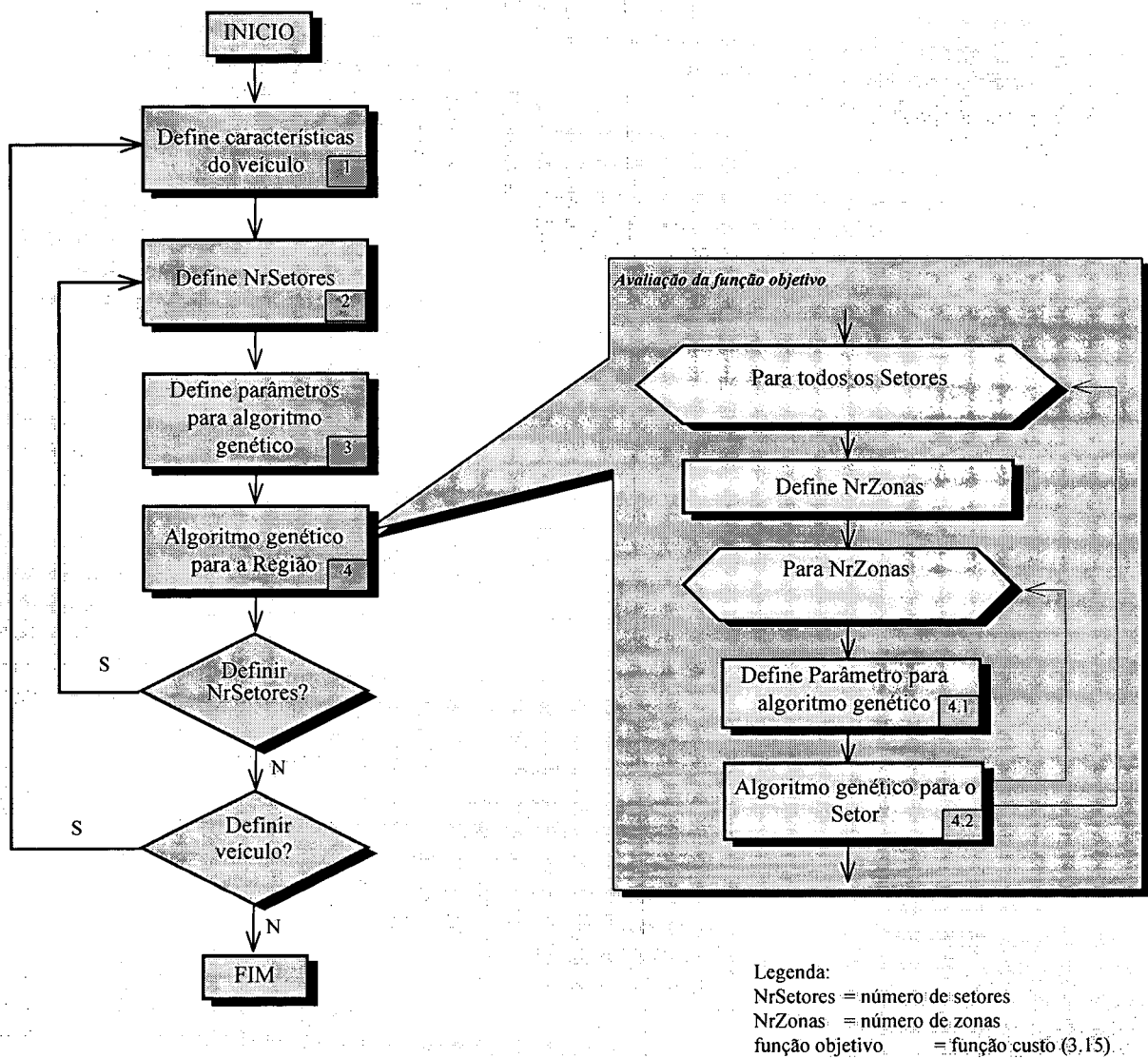


Figura 4.1 - Fluxograma do Método

A seguir, uma descrição do funcionamento para cada módulo do fluxograma (Figura 4.1):

módulo 1: nesse módulo são definidas as características físicas do veículo, como por exemplo, capacidade de carga, custo por quilômetro rodado e custo horário, geralmente de veículos disponíveis comercialmente;

módulo 2: nesse módulo se define o número de setores em que a região será dividida, faz-se uma busca exaustiva dentro de uma faixa de variação, de um número mínimo até um número máximo de setores, definida empiricamente;

módulo 3: são definidos os parâmetros do algoritmo genético referentes a região, como por exemplo, tamanho da população de raios, número de tiragens, número iterações e população inicial de raios;

A população inicial de raios é definida da seguinte forma:

são conhecidos:

- n = número de setores em que a região será dividida
- R = distância do ponto mais afastado do depósito

De uma forma simples, os indivíduos da população inicial de raios podem ser determinados gerando $n-1$ números aleatórios no intervalo $[0, R]$ para definir cada um dos raios, r_1, r_2, \dots, r_{n-1} , sendo que o raio $r_n = R$. Entretanto, poderiam existir setores sobrepostos, ou seja, a intersecção entre os setores não ser um conjunto vazio. Na verdade, teoricamente não há problemas para o modelo, pode haver pontos que pertencem a mais de um setor, conseqüentemente a mais de uma zona. Mas, isso eleva o custo dessa

configuração e esse indivíduo da população, provavelmente, será eliminado pelo método. Portanto, não é conveniente gerar e avaliar esses indivíduos.

Para eliminar a possibilidade de superposição, que pode aumentar excessivamente o tempo de execução do modelo, procedemos da seguinte forma: para cada indivíduos da população inicial de setores, são gerados n número aleatórios, Δr_i , que representam a largura de cada setor, $(\Delta r_1, \Delta r_2, \dots, \Delta r_n)$,

$$\text{onde} \quad \sum_1^n \Delta r_i = R \quad (4.2)$$

Para que a equação (4.2) seja satisfeita, seguimos os passos descritos a seguir:

Gerar $\Delta' r_i$, valores aleatórios no intervalo $[0, 1]$, $i = 1, \dots, n$;

Calcular os Δr_i , da seguinte forma:

$$(\Delta r_1, \Delta r_2, \dots, \Delta r_n) = (\Delta' r_1, \Delta' r_2, \dots, \Delta' r_n) + \gamma(1, 1, \dots, 1) \quad (4.3)$$

Então a expressão (4.2) fica:

$$\sum_1^n \Delta' r_i + n\gamma = R \quad (4.4)$$

E isolando a variável de interesse em (4.4), γ , resulta na expressão:

$$\gamma = \frac{R - \sum_1^n \Delta' r_i}{n} \quad (4.5)$$

Então a expressão para determinar os Δr_i (largura de cada setor), conhecendo n , R e os $\Delta' r_i$ é:

$$(\Delta r_1, \Delta r_2, \dots, \Delta r_n) = (\Delta' r_1, \Delta' r_2, \dots, \Delta' r_n) + \frac{R - \sum_{i=1}^n \Delta' r_i}{n} (1, 1, \dots, 1) \quad (4.6)$$

Finalmente podemos identificar cada um dos raios, r_i , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r_1 &= \Delta r_1 \\ r_i &= r_{i-1} + \Delta r_i \quad i = 2, \dots, n \quad (r_n = R) \end{aligned}$$

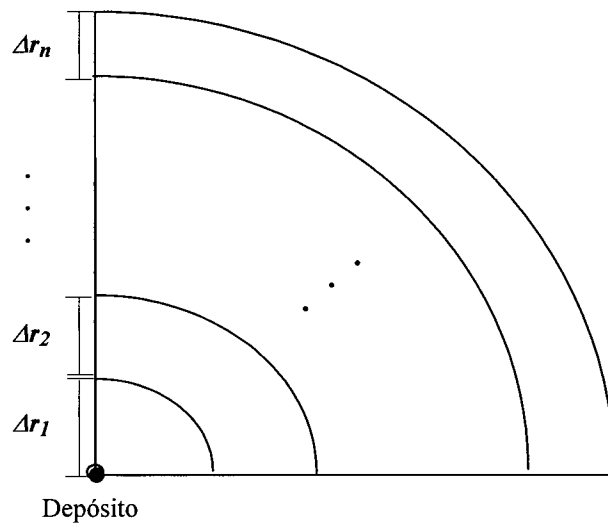


Figura 4.2 - Divisão da Região em sub-regiões (Setores) através de raios

Por exemplo, para uma região onde $n = 3$ e $R = 6$, uma população inicial de tamanho 3 é ilustrada na Figura 4.3.

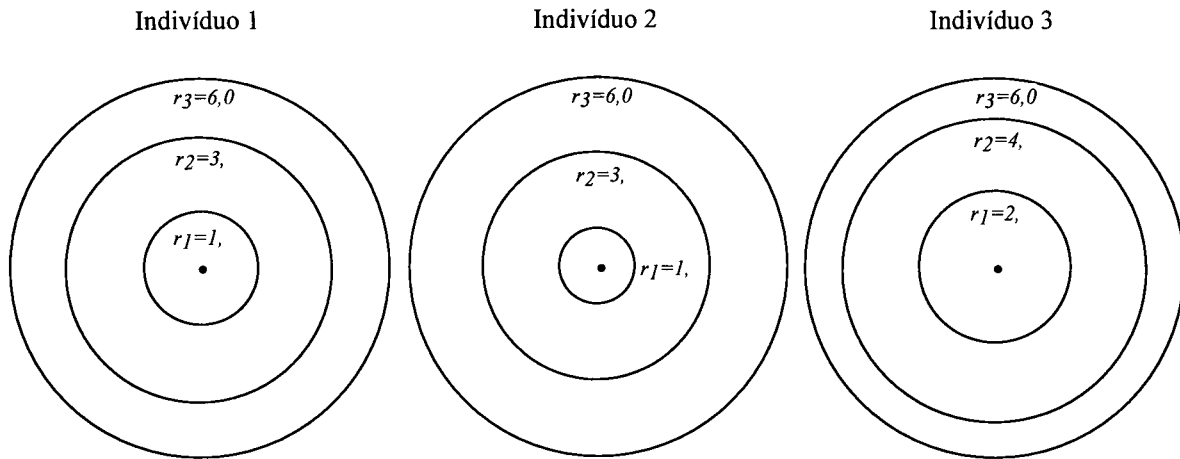


Figura 4.3 - Exemplos de uma população de setores de tamanho 3

No modelo, definimos metade dos indivíduos da população gerados pela forma descrita acima. A outra metade, é gerada da seguinte forma: a região é dividida em n setores onde a largura de cada setor, Δr_i , é igual para todos os setores. Dessa forma, são conhecidos os raios que compõem o que chamamos de indivíduo base. Os indivíduos seguintes da população são gerados fazendo-se uma perturbação aleatória, dentro de uma faixa de valores mínimos e máximos, sobre os raios do indivíduo base (Figura 4.4).

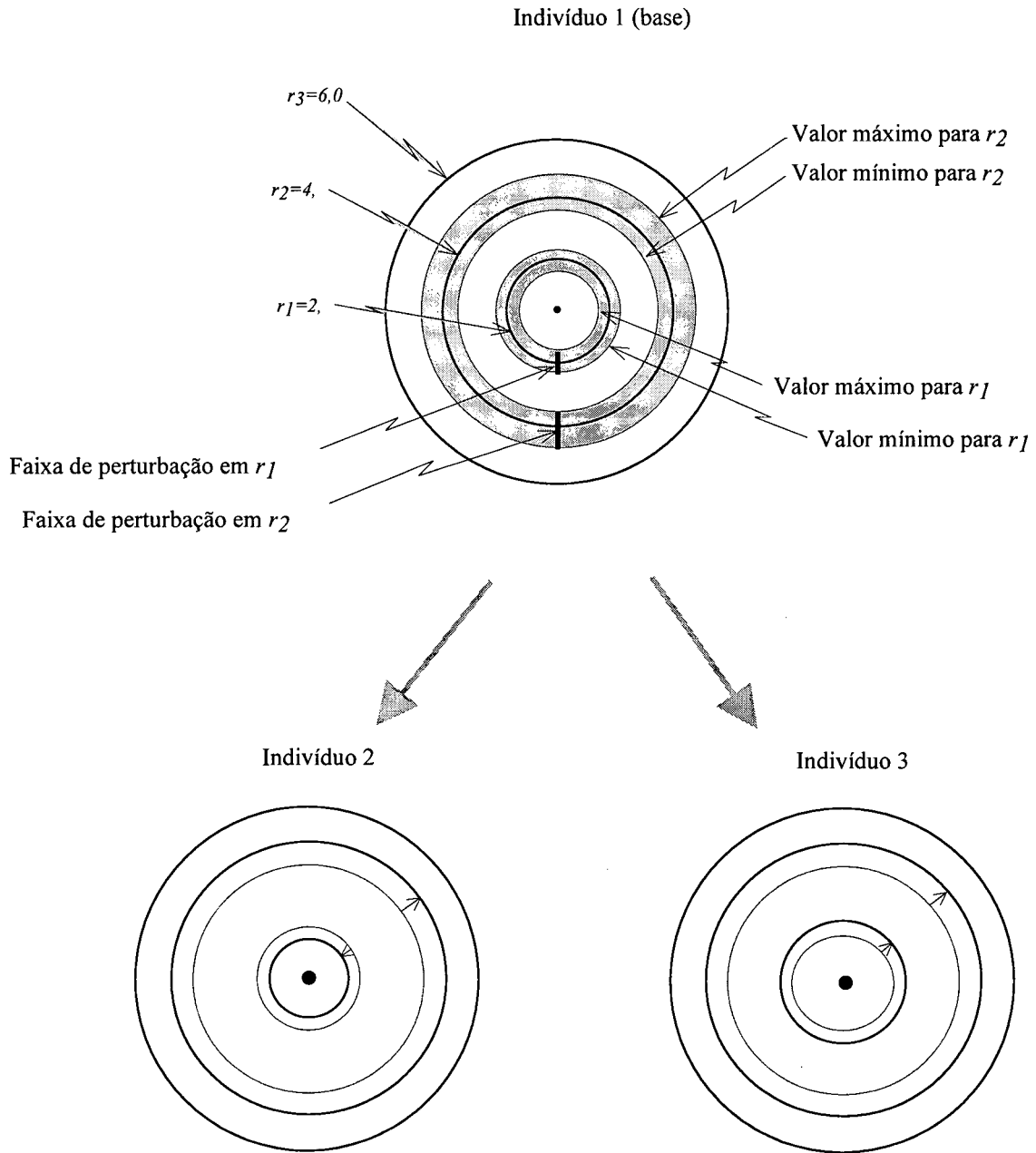


Figura 4.4 - Exemplo de uma população de setores gerada a partir de um indivíduo base

módulo 4: faz as iterações do algoritmo genético para a região. Isto é, a partir da população inicial de setores, são gerados filhos e mutantes. Esse conjunto de indivíduos, população inicial, filhos e mutantes, representam configurações diferentes da divisão da região. A regra de seleção dos indivíduos desse conjunto é a avaliação da função custo (ver Figura 4.1), os que possuem os menores valores da função são os selecionados para fazer uma nova iteração. Ao final das iterações, o módulo retorna a melhor solução encontrada. Portanto, esse módulo determina a melhor configuração, raios e ângulos, para a divisão da região em zonas;

módulo 4.1: são definidos os parâmetros do algoritmo genético referente aos setores, como por exemplo, tamanho da população de ângulos, número de tiragens, número de iterações e população inicial de ângulos;

Aplica-se o mesmo raciocínio utilizado para gerar a população de raios. Conhecendo-se o número de zonas em que cada setor será dividido (n), de uma forma simples, os indivíduos da população inicial de ângulos em cada setor podem ser determinados gerando $n-1$ números aleatórios no intervalo $[0, 360]$ para definir cada um dos ângulos, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$, sendo que o ângulo $\theta_n = 360$. Assim, podem existir zonas sobrepostas, ou seja, a intersecção entre as zonas não ser um conjunto vazio. Na verdade, não há teoricamente problemas para o modelo, podem haver pontos pertencendo a mais de uma zona. Mas, isso elevaria o custo dessa configuração e esse indivíduo da população, provavelmente, será eliminado pelo método. Portanto, não é conveniente gerar e avaliar esses indivíduos.

Para eliminar essa possibilidade de superposição, que pode aumentar excessivamente o tempo de execução do modelo, procedemos da seguinte forma: para determinar cada indivíduo da população inicial de ângulos dentro de cada setor, são gerados n número aleatórios, $\Delta\theta_i$, que representam a largura (arco) de cada zona, $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n)$,

$$\text{onde} \quad \sum_1^n \Delta\theta_i = 360 \quad (4.7)$$

Para que a equação (4.7) seja satisfeita, nós definimos os seguintes passos:

Gerar $\Delta'\theta_i$, valores aleatórios no intervalo $[0, 1]$;

Calcular os $\Delta\theta_i$, da seguinte forma:

$$(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n) = (\Delta'\theta_1, \Delta'\theta_2, \dots, \Delta'\theta_n) + \gamma(1, 1, \dots, 1) \quad (4.8)$$

Então a expressão (4.7) fica:

$$\sum_1^n \Delta'\theta_i + n\gamma = 360 \quad (4.9)$$

E isolando a variável de interesse em (4.9), γ , resulta na expressão:

$$\gamma = \frac{360 - \sum_1^n \Delta'\theta_i}{n} \quad (4.10)$$

Então a expressão para determinar os $\Delta\theta_i$, conhecendo n e os $\Delta' \theta_i$ é:

$$(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n) = (\Delta' \theta_1, \Delta' \theta_2, \dots, \Delta' \theta_n) + \frac{360 - \sum_1^n \Delta' \theta_i}{n} (1, 1, \dots, 1) \quad (4.11)$$

Finalmente podemos identificar cada um dos ângulos, θ_i , da seguinte forma:

$$\theta_1 = \Delta\theta_1$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta_i \quad i = 2, \dots, n \quad (\theta_n = 360)$$

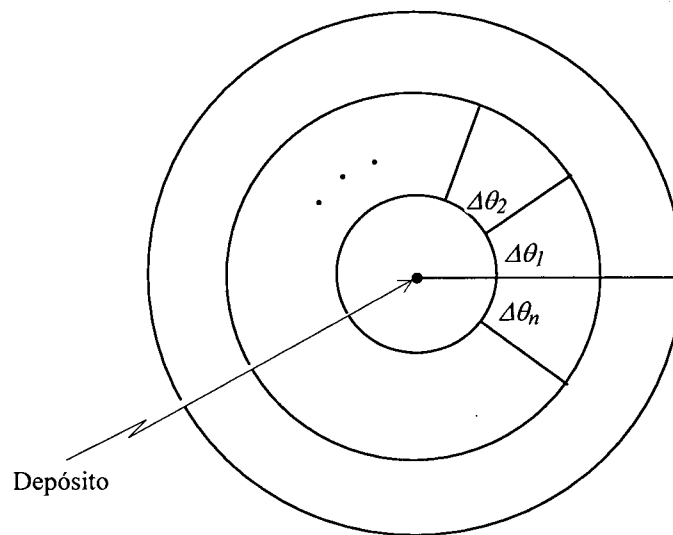


Figura 4.5 - Sub-divisão de um setor em zonas

Por exemplo, para o setor 2 de uma região onde o número de zonas é igual a 5, uma população inicial de ângulos de tamanho 3 pode ser como mostra a Figura 4.6.

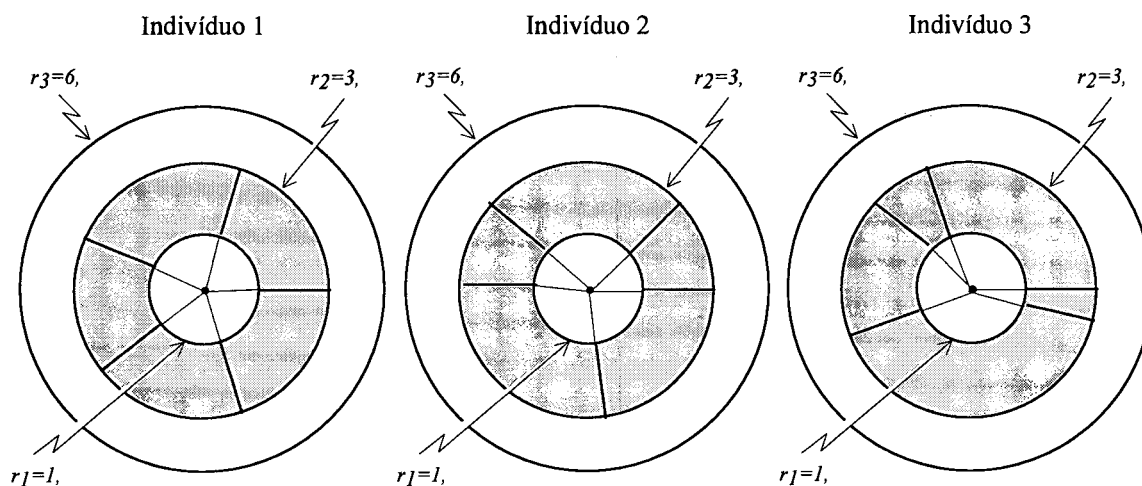


Figura 4.6 - Exemplo de uma população de zonas (ângulos) de um setor

No modelo definimos $1/3$ dos indivíduos da população de ângulos gerados pela forma descrita acima. Os outros $2/3$, são gerados da seguinte forma: iniciando num ângulo α , definido aleatoriamente, com uma semi-reta com um extremo fixado no depósito e fazendo-se então uma varredura com a outra extremidade num sentido qualquer dentro do setor, as zonas serão definidas incluindo ponto a ponto até que uma restrição seja violada e assim sucessivamente até que todos os pontos do setor tenham sido varridos (ver Figura 4.7). Dessa forma, podemos identificar o número necessário de zonas em cada setor, utilizado na descrição feita anteriormente do módulo 4.1.

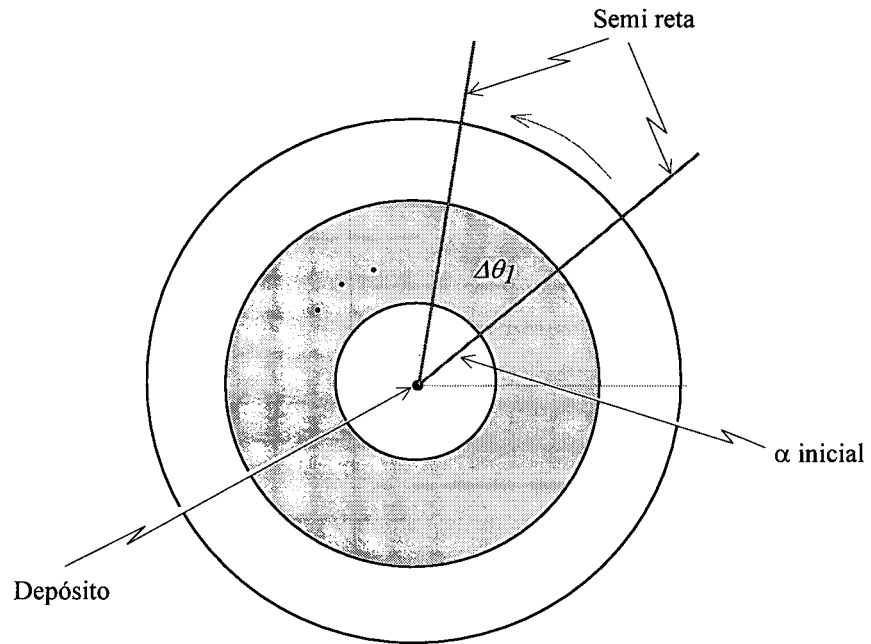


Figura 4.7 - Forma de geração de zonas (ângulos) usando uma semi-reta

módulo 4.2: faz as iterações do algoritmo genético para um setor. Segue a mesma filosofia do algoritmo genético para a região. Isto é, para cada setor, a partir da população inicial de ângulos, são gerados filhos e mutantes. Esse conjunto de indivíduos, população inicial, filhos e mutantes, representam configurações diferentes de zonas dentro de cada setor. A regra de seleção dos indivíduos desse conjunto é a avaliação da função custo (ver seção 4.3 e Figura 4.1), os que possuem os menores valores da função são os selecionados para fazer uma nova iteração. Ao final das iterações, o módulo retorna a melhor solução encontrada. Portanto, esse módulo determina a melhor divisão do setor em ângulos formando os contornos das zonas.

Nesse capítulo, foram definidos os módulos que compõem o modelo. Para cada módulo, foi detalhado *o que fazer* e *o como fazer*. No próximo capítulo, apresentamos e comentamos os resultados obtidos pela aplicação do modelo à um problema exemplo extraído do trabalho de NOVAES E GRACIOLLI (1997).

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DO MODELO

5. APLICAÇÃO DO MODELO

A metodologia descrita no capítulo anterior foi aplicada ao mesmo problema exemplo, e com os mesmos parâmetros, do trabalho de NOVAES E GRACIOLLI (1997), extraído de um caso de entrega de carga parcelada na cidade de São Paulo, Brasil. A Região compreende 6.385 pontos de serviço numa área de aproximadamente 700 km² (Figura 5.1). Para cada ponto de demanda são conhecidos os seguintes dados: (a) as coordenadas (x,y), (b) quantidade média e desvio padrão da carga entregue por visita, (c) tempo médio e desvio padrão por parada numa visita, (d) probabilidade $p = 1$ (todos os pontos de serviço serão visitados).

O depósito está localizado na coordenada (10, 6). A velocidade média de deslocamento entre depósito e zona é 35 km/h. Enquanto que a velocidade média de deslocamento dentro da zona é 24 km/h. Usamos o fator de correção da distância devido a rede viária $k = 1,35$ (ver capítulo 2). A jornada normal de trabalho é $H_0 = 8$ horas e a jornada máxima $H_1 = 10$ horas. Custo da hora extra é de \$ 8,00. A capacidade de carga do veículo é limitada por peso.

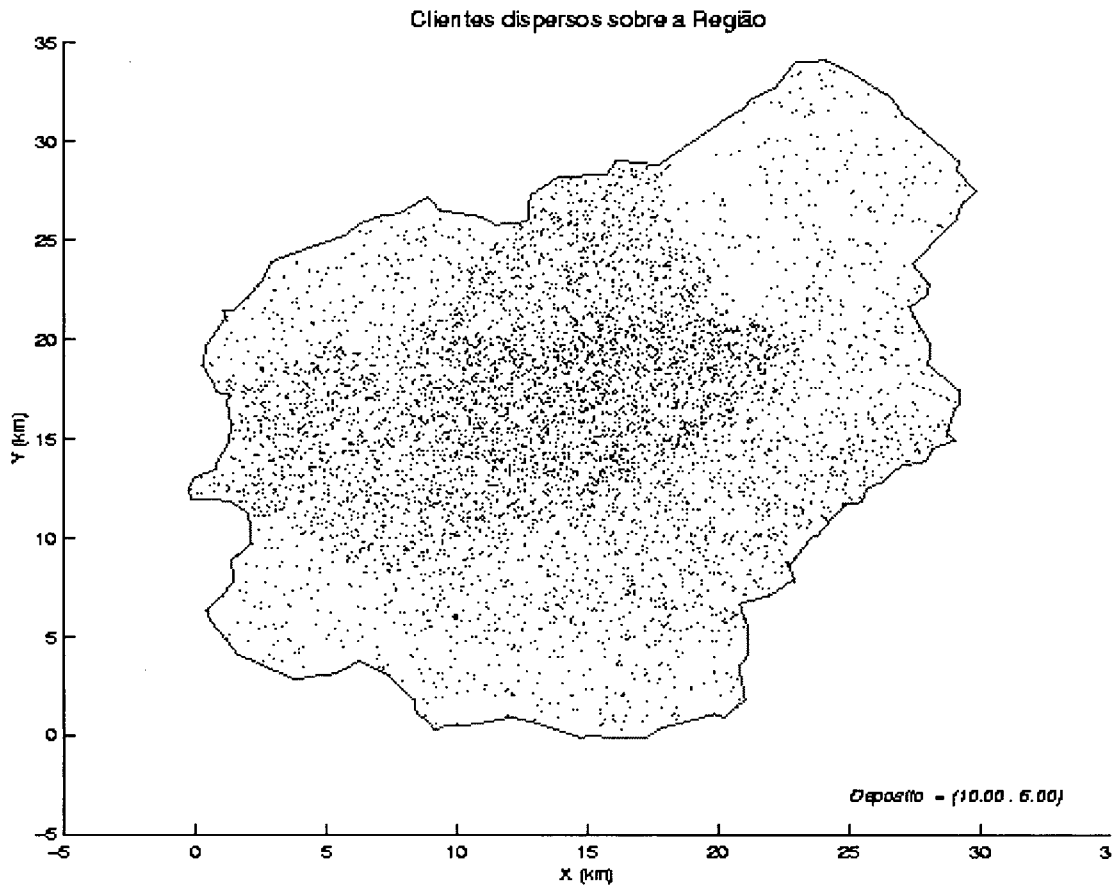


Figura 5.1 - Pontos sobre a região exemplo

O modelo pode facilmente ser ajustado para determinar qual a capacidade de carga ótima do veículo para um dado problema, considerando-se a capacidade como uma variável real contínua. Entretanto, o esforço computacional pode ser muito elevado e na prática a capacidade do veículo abrange poucos valores discretos, então a capacidade ótima provavelmente não estaria disponível comercialmente. Portanto, fizemos simulações considerando alguns veículos com capacidade diferentes, que podem estar disponíveis comercialmente, para identificar qual veículo apresenta a melhor solução.

Nosso modelo determina qual o melhor veículo, dentre um conjunto de opções, para compor uma frota homogênea, isto é, um tipo de veículo para

servir toda a região. Da mesma forma, pode-se facilmente ajustá-lo para determinar uma frota heterogênea para atender a região. Entretanto, o tempo de busca pode tornar-se impraticável. Uma alternativa que pode ser adotada, sem elevar excessivamente o tempo de busca da melhor configuração, é a determinação de veículos diferentes para cada um dos setores. Quer dizer, a frota seria homogênea dentro de cada setor, e poderia ser heterogênea para toda a região. Essa alternativa pode ser interessante para situações onde setores da periferia da região, onde a distância até o depósito é maior e em geral a densidade de pontos é menor, pode ser mais econômico utilizar um veículo de capacidade maior do que a capacidade dos veículos para os setores com maior densidade de pontos ou setores próximos ou intermediários ao depósito (Figura 5.2).

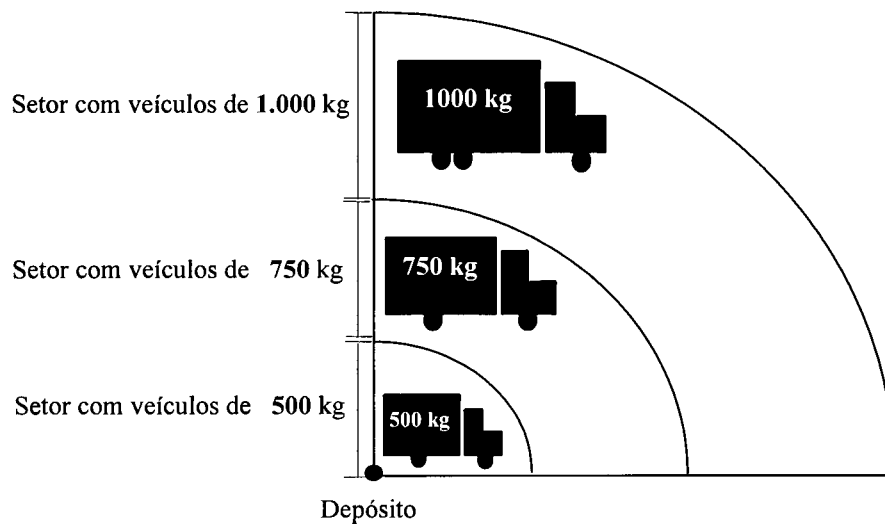


Figura 5.2 - Configuração com frota heterogênea

Fizemos simulações com o modelo sobre os dados descritos acima. Os resultados de 32 exemplos simulados, estão resumidos em tabelas que serão comentadas a seguir. Cada tabela apresenta um enfoque diferente para análise de soluções e da performance do modelo.

5.1 Identificação da Capacidade do Veículo

Primeiro, pesquisamos o melhor veículo dentre um conjunto de veículos disponíveis com capacidade de carga diferente. Introduzimos um custo fixo, arbitrário, para cada um dos veículos. As diferentes configurações resultantes das aplicações do modelo são apresentadas na figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 para capacidade do veículo igual a 500, 750, 1.000 e 1.500 kg respectivamente.

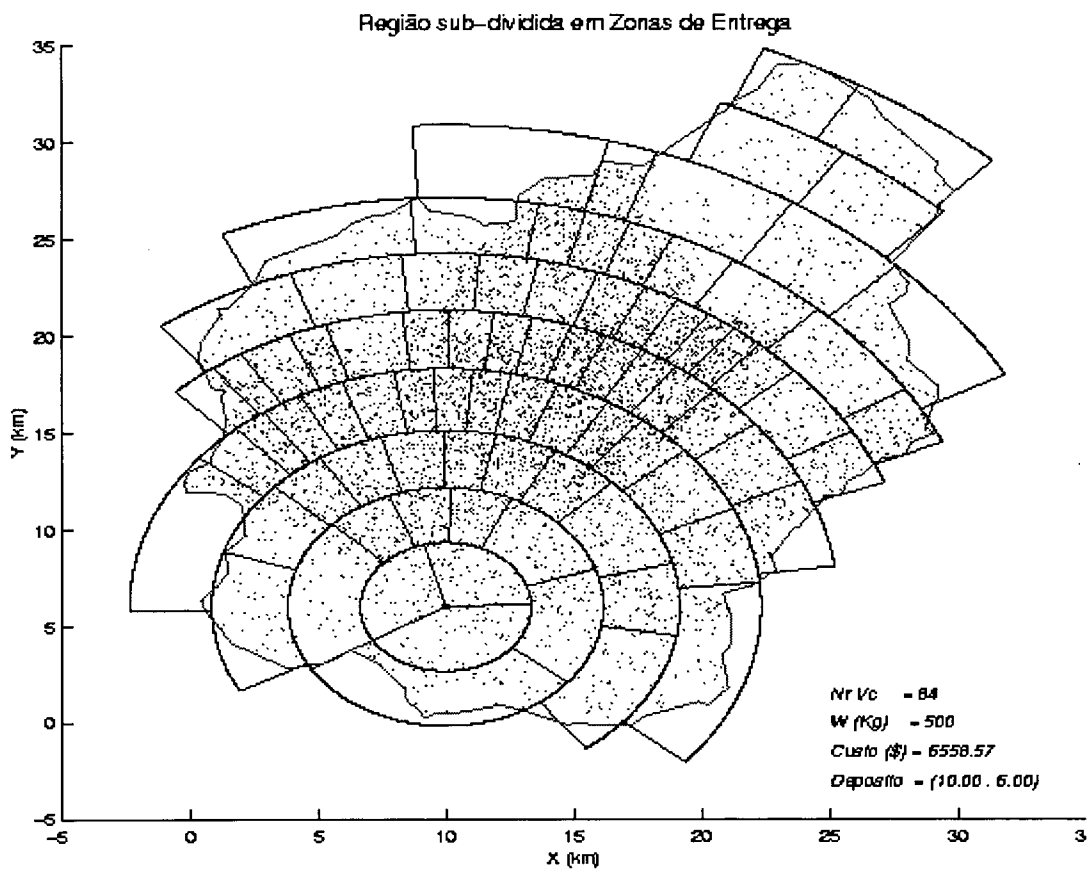


Figura 5.3 - Divisão da região considerando um veículo de 500 kg

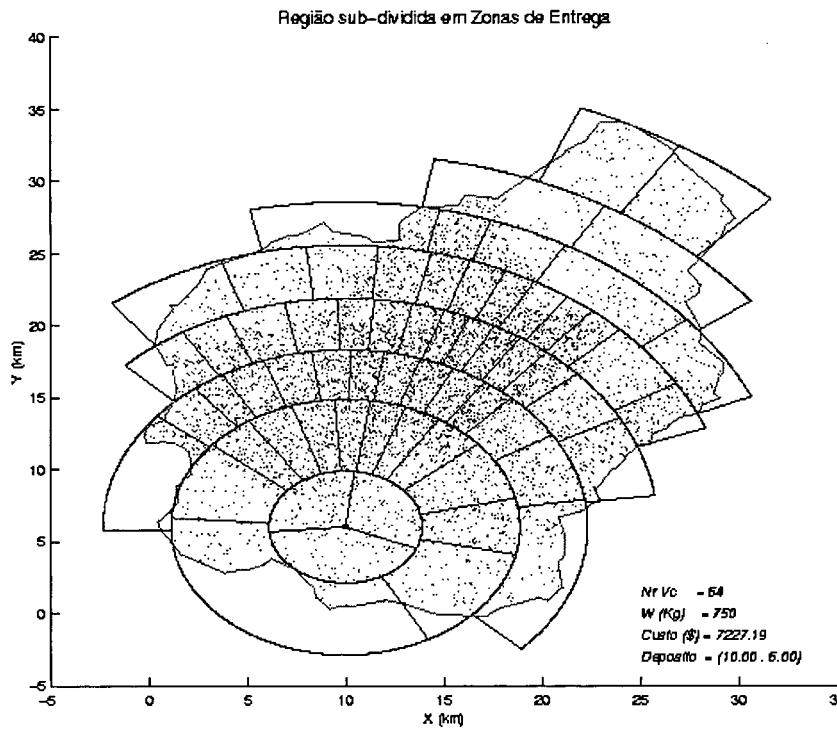


Figura 5.4 - Divisão da região considerando um veículo de 750 kg

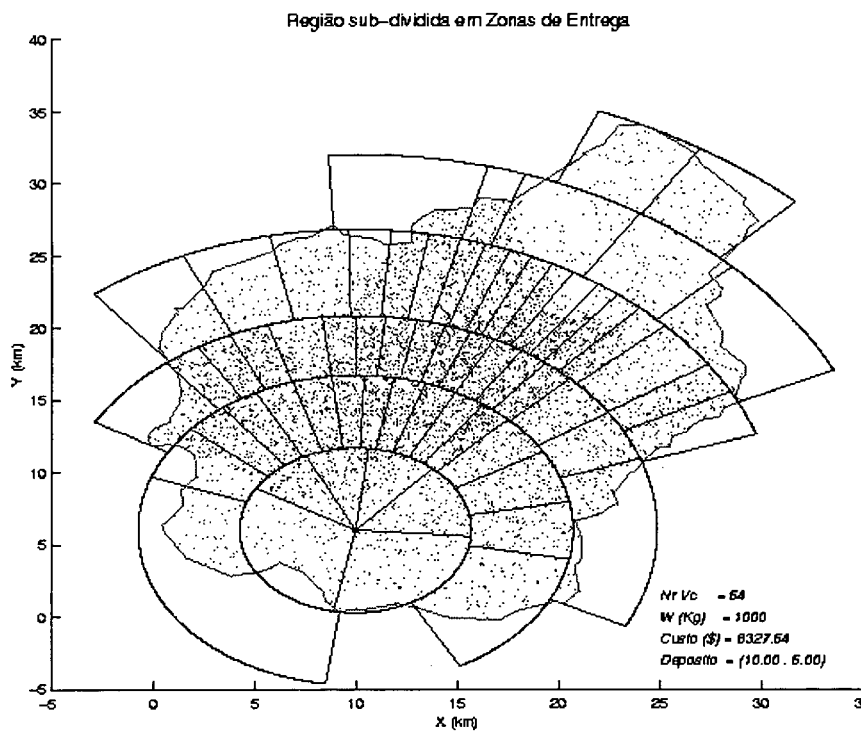


Figura 5.5 - Divisão da região considerando um veículo de 1.000 kg

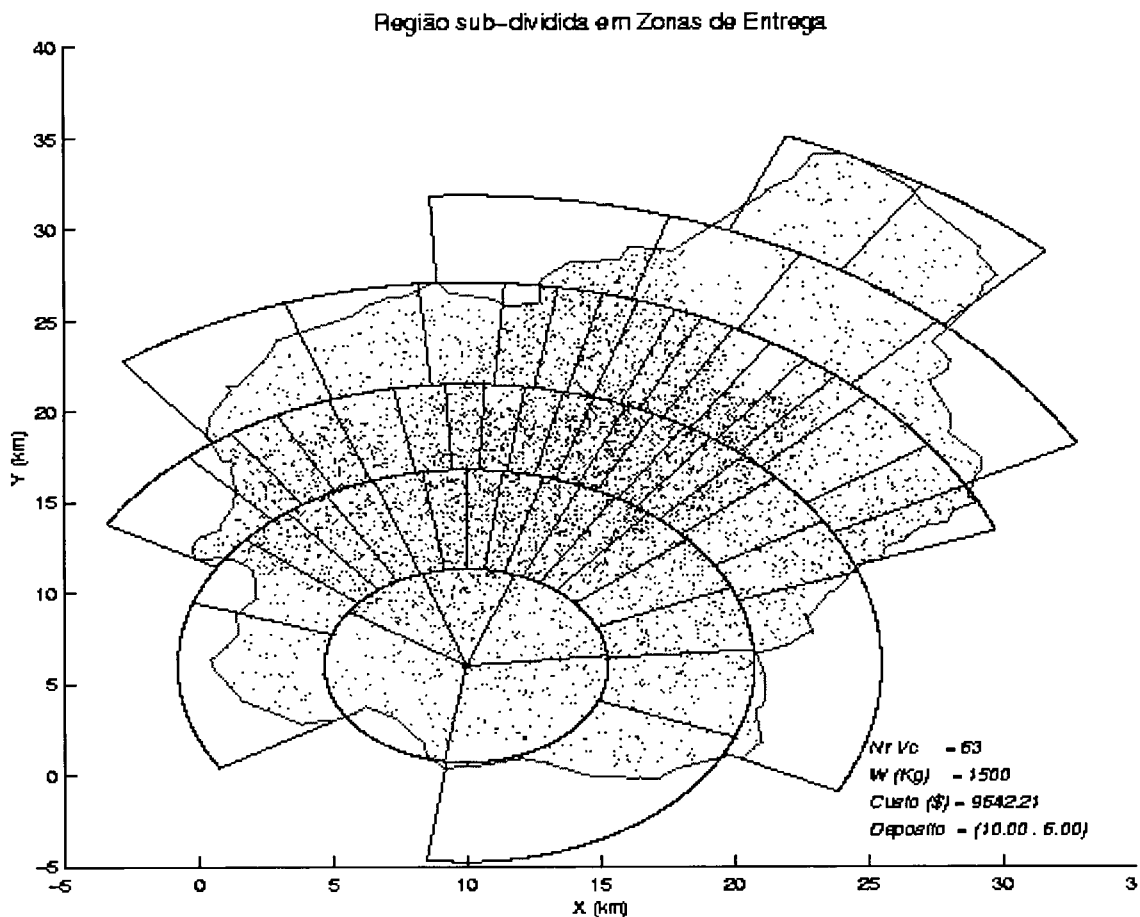


Figura 5.6 - Divisão da região considerando um veículo de 1.500 kg

A Tabela 5.1 apresenta o resumo dos resultados obtidos através de simulações do modelo para veículos com capacidades (W) diferentes. A faixa de busca (exaustiva) para o número de setores variou de 3 à 15. Os resultados dessas simulações mostram que o veículo que apresenta a configuração de menor custo, \$ 6.558, possui uma capacidade de carga de 500 kg, divide a região em 10 setores totalizando 84 veículos (Exemplo 01 - Ex. 1).

Tabela 5.1 - Simulações para veículos de diferentes capacidade

Ex.	W (Kg)	Custo Fixo/Vc	Nr. Setores	Nr. Veículos	Custo		
					Fixo	Variável	Total
01	500	30	10	84	2.520	4.038	6.558
02	750	35	8	64	2.240	4.987	7.227
03	1.000	40	6	64	2.560	5.767	8.327
04	1.500	45	6	63	2.835	6.807	9.642

Ex. = exemplo

W é um valor de entrada

Custo Fixo/Vc = custo fixo por veículo, é dado de entrada

NrSetores = número de setores que o modelo apresentou como melhor solução para a divisão da região , variou de 3 à 15

Nr. Veículos = número de veículos para atender a região

O gráfico 5.1, mostra a relação da capacidade do veículo pelos custos. Nota-se que, mesmo aumentando a capacidade de carga do veículo, isso não representa necessariamente visitar mais pontos de demanda pois pode não haver tempo para essas visitas, o custo global aumenta devido ao custo fixo do veículo. Portanto, o problema exemplo estudado é restrito por tempo.

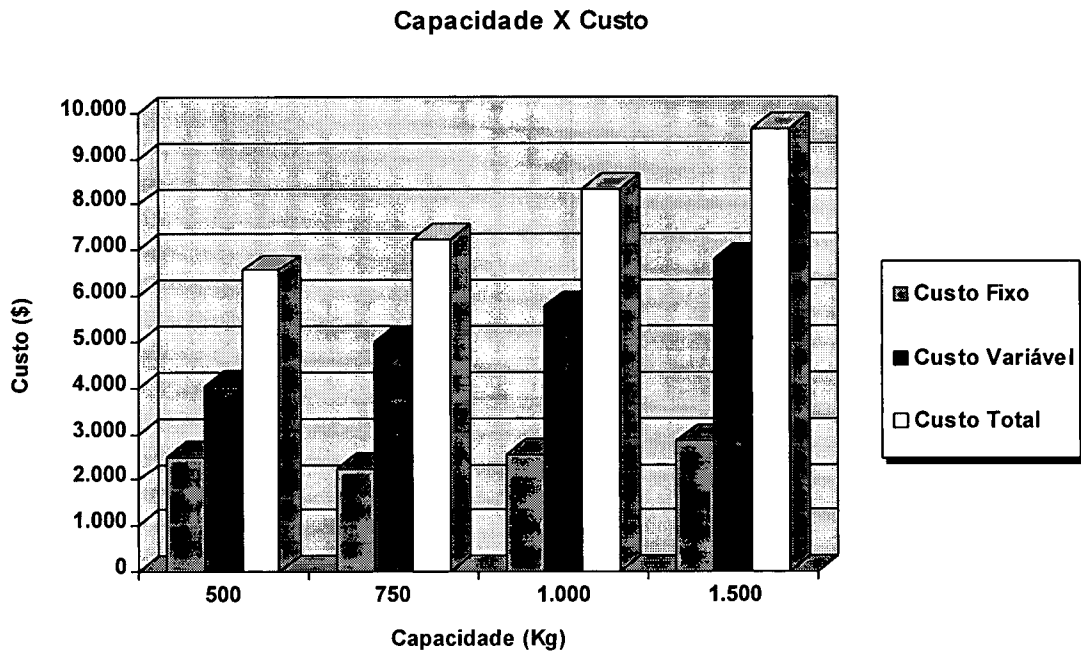


Gráfico 5.1 - Capacidade de Carga (W) X Custo

Definido então, a capacidade de carga do veículo que apresentou o melhor desempenho, $W = 500$, agora vamos refinar a solução, usando $W = 500$, para verificar se existe uma divisão melhor dos setores. Nesse refinamento, o número de iterações, tamanho da população, número de tiragens são maiores, em comparação aos exemplos simulados anteriormente (Exemplos de 01 a 04). Isso não aumenta excessivamente o tempo de simulação dos exemplos uma vez que, trabalharemos somente com uma capacidade de carga do veículo, $W = 500$.

5.2 Identificação do Número de Setores

Realizamos testes, aumentando o número de iterações, tamanho da população e número de tiragens e, variando o número de setores, de 5 até 13, para investigar melhor a divisão da região, considerando a capacidade do veículo $W = 500$. As figuras 5.7 a 5.11 mostram alguns dos resultados.

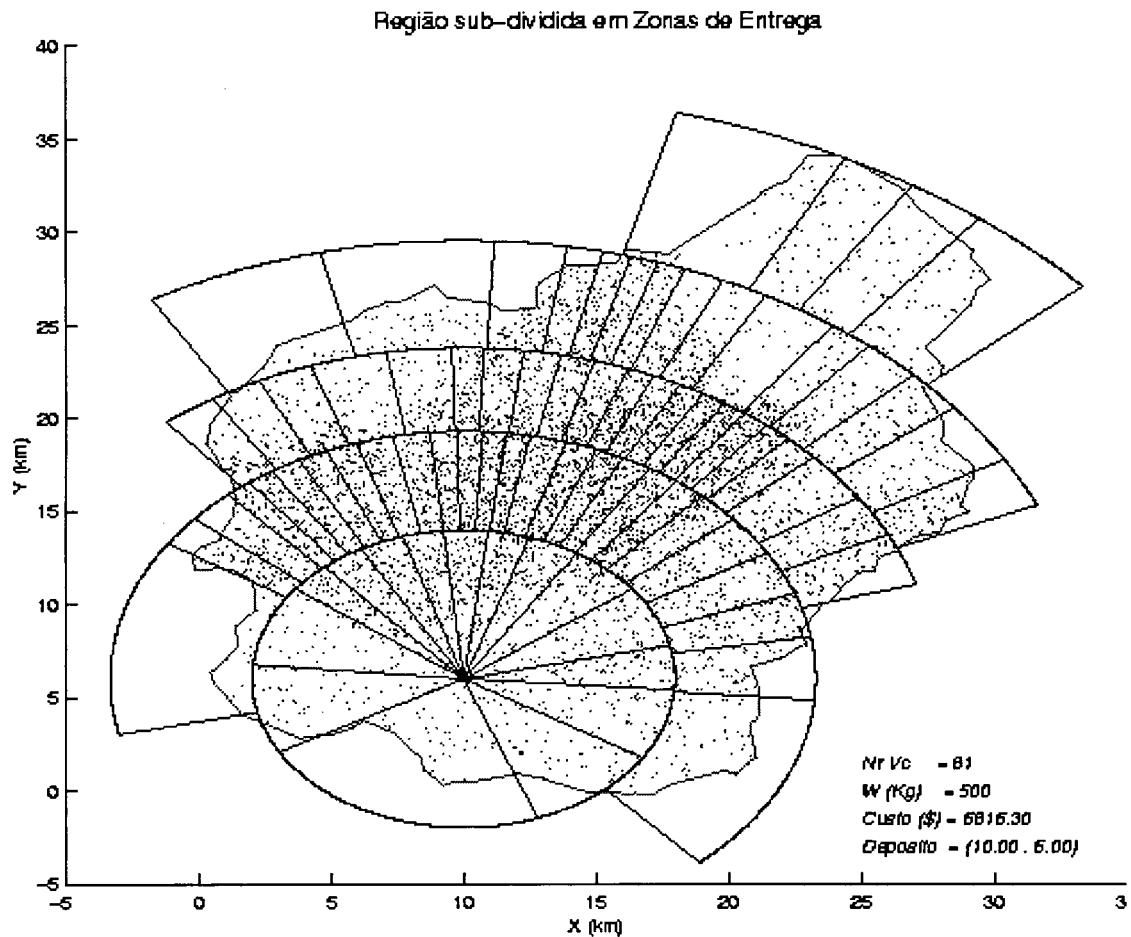


Figura 5.7 - Divisão da região considerando 5 setores

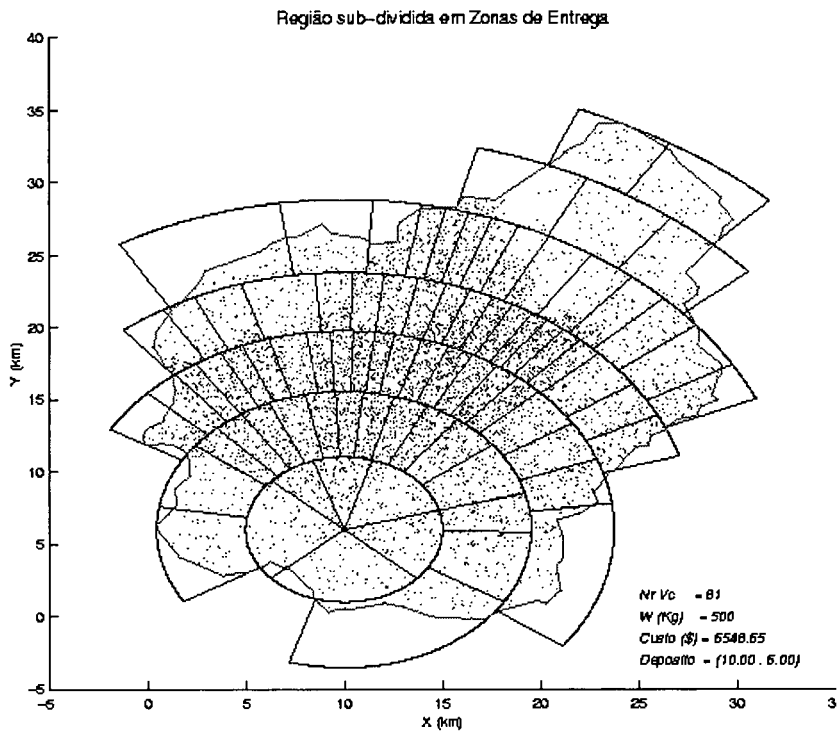


Figura 5.8 - Divisão da região considerando 7 setores

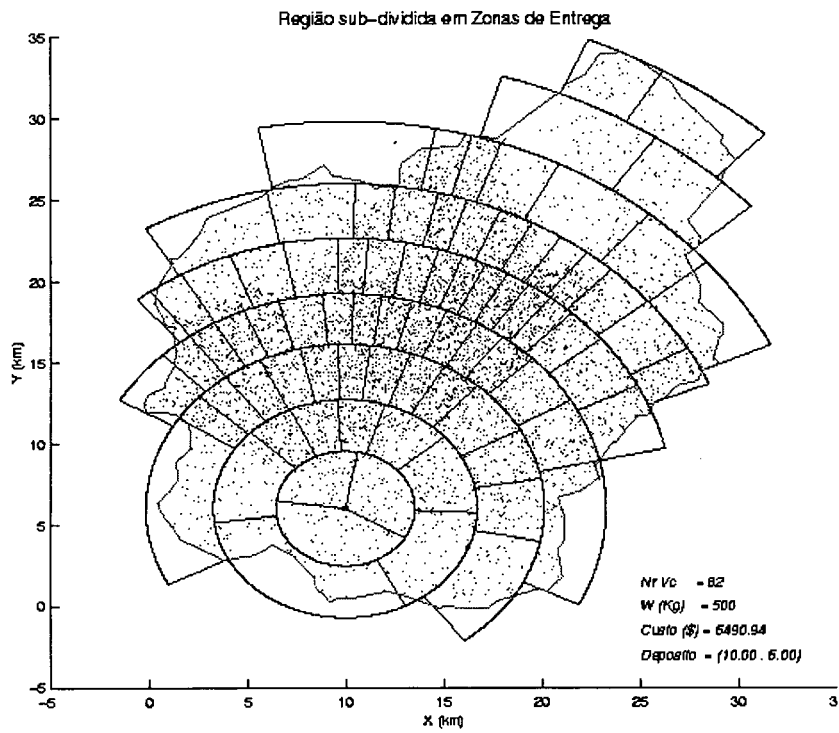


Figura 5.9 - Divisão da região considerando 9 setores

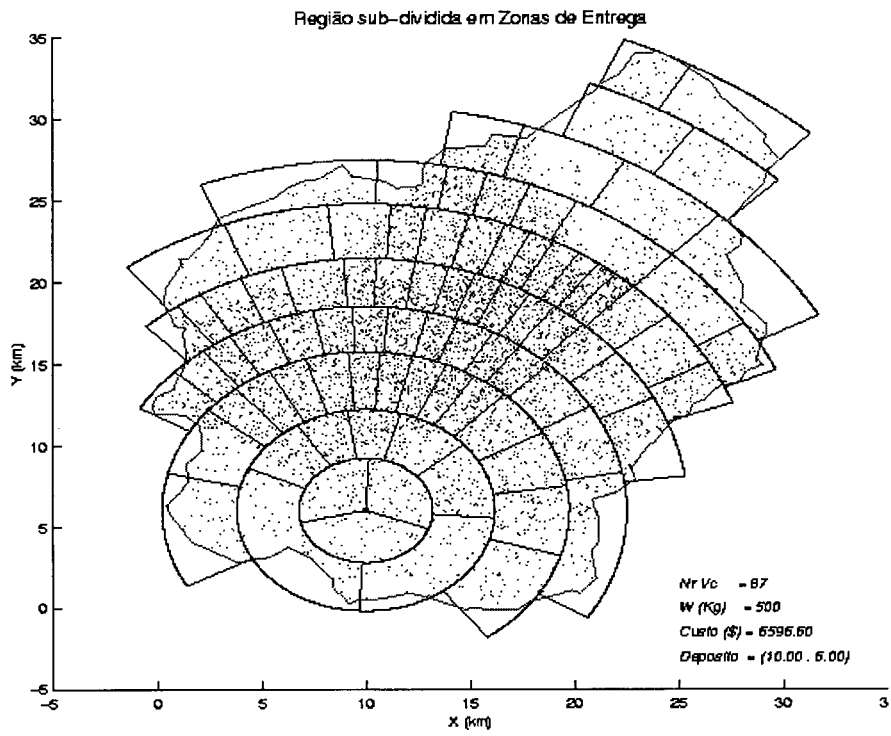


Figura 5.10 - Divisão da região considerando 10 setores

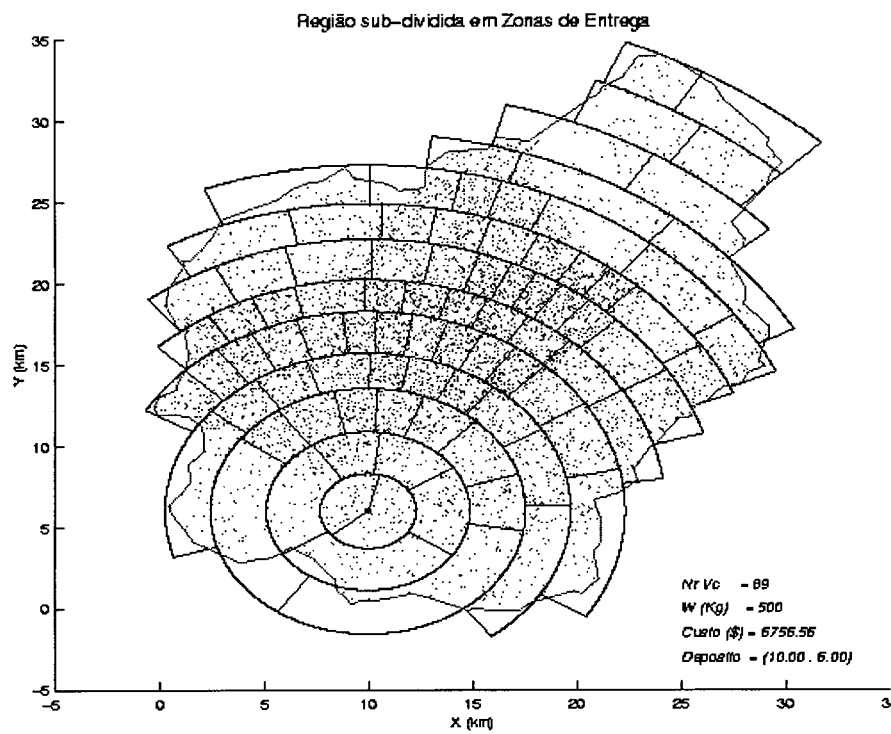


Figura 5.11 - Divisão da região considerando 13 setores

A Tabela 5.2 mostra o resumo dos resultados das simulações variando o número de setores em que a região é dividida, considerando-se a capacidade de carga do veículo igual a 500 kg e o custo fixo por veículo igual a 30. A configuração de mínimo custo divide a região em 9 setores com um custo de \$ 6.490 e 88 veículos (Exemplo 09).

Tabela 5.2 - Exemplos para número diferente de setores

Ex.	Nr. Setores	Nr. Veículos	Custo Total
05	5	81	6.816
06	6	82	6.666
07	7	81	6.548
08	8	82	6.532
09	9	82	6.490
10	10	87	6.596
11	11	88	6.664
12	12	88	6.714
13	13	88	6.756

Ex. = exemplo

W = 500

Custo Fixo/Vc = 30

NrSetores = número de setores

Nr. Veículos = número de veículos para atender a região

O Gráfico 5.2 mostra nitidamente que a melhor configuração correspondente à divisão da região em 9 setores.

Nr. Setores X Custo Total

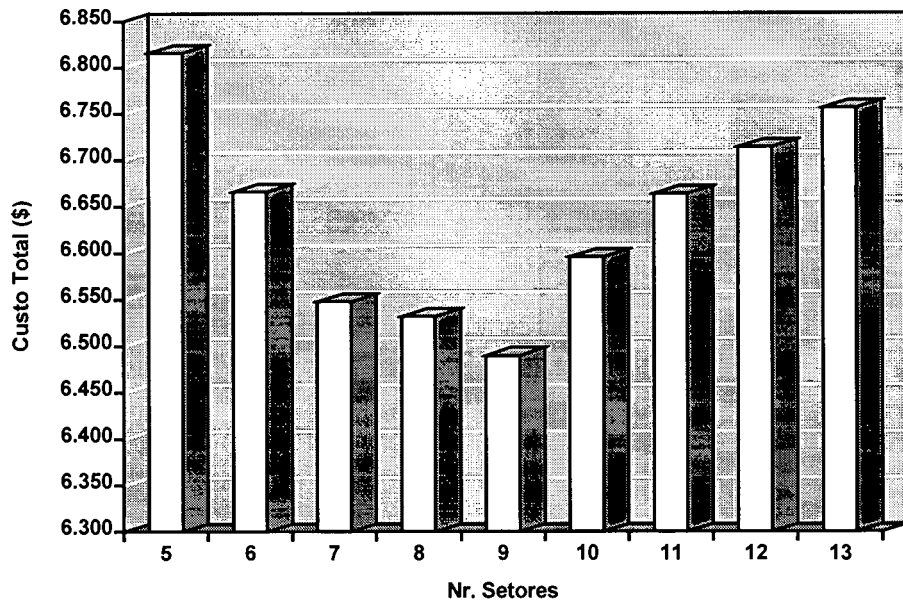


Gráfico 5.2 - Número de Setores X Custo Total

5.3 Localização de um Depósito

Nosso modelo pode ser aplicado para identificar também a melhor localização para o depósito. Fizemos testes localizando o depósito em seis pontos distintos dentro e fora da região de distribuição. Essas simulações foram feitas para veículos de 500 kg e a região foi dividida em 10 setores. As configurações resultantes são apresentadas nas figuras 5.12 a 5.17.

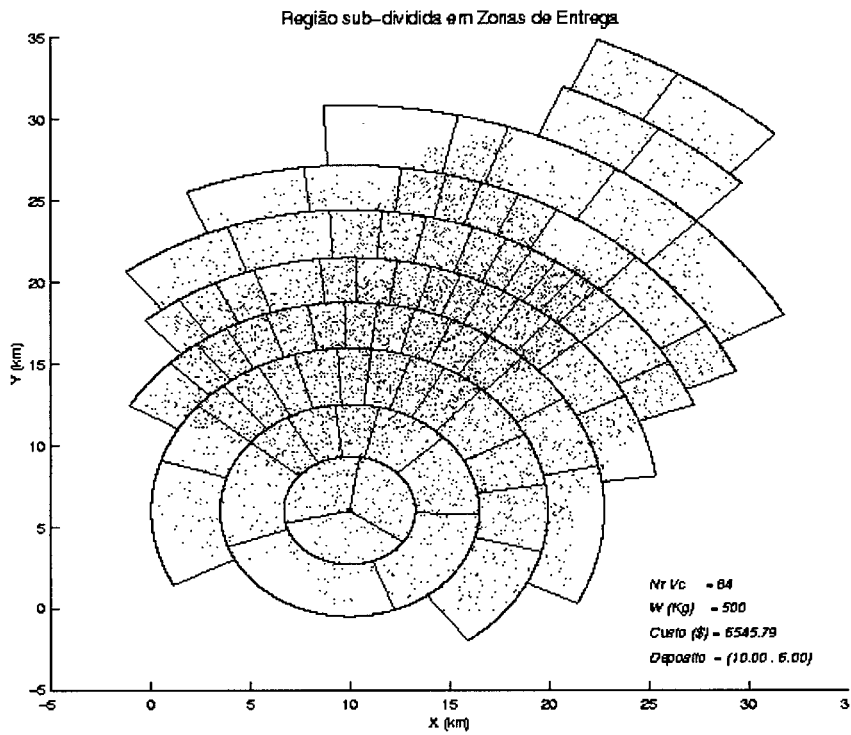


Figura 5.12 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (10, 06)

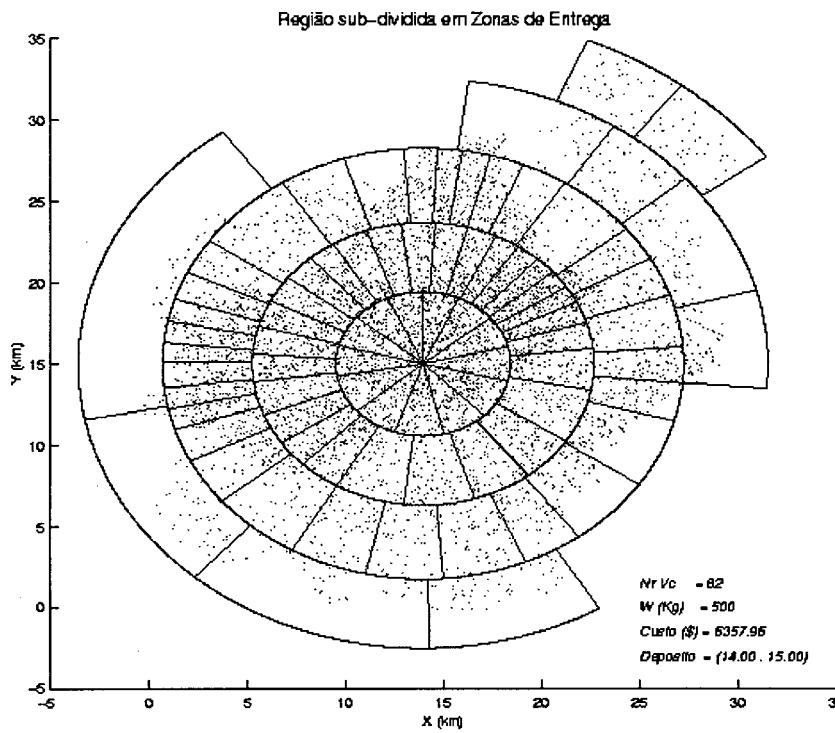


Figura 5.13 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (14, 15)

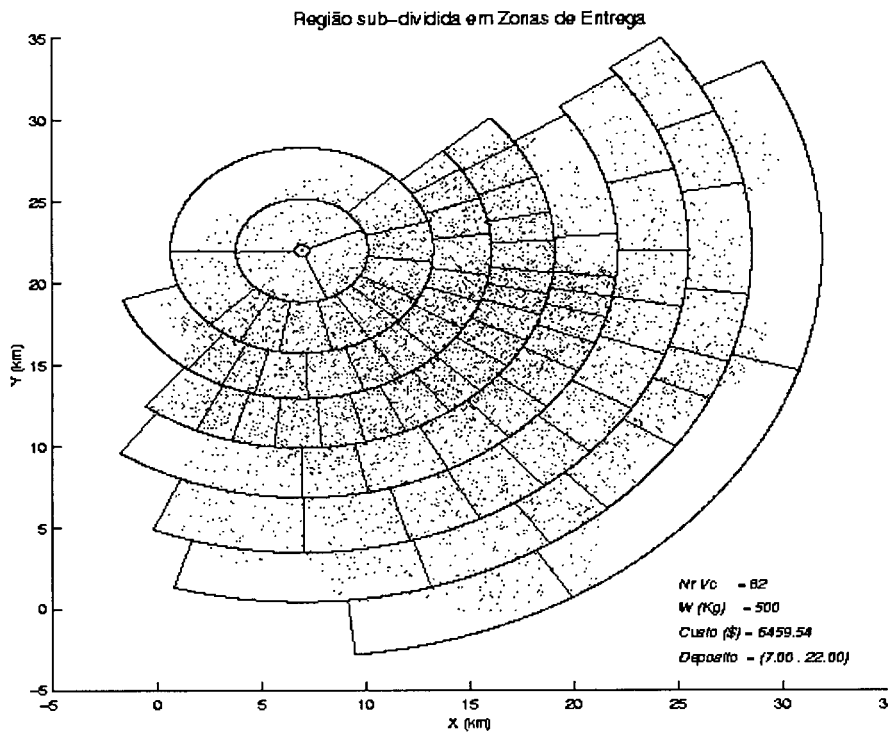


Figura 5.14 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (07, 22)

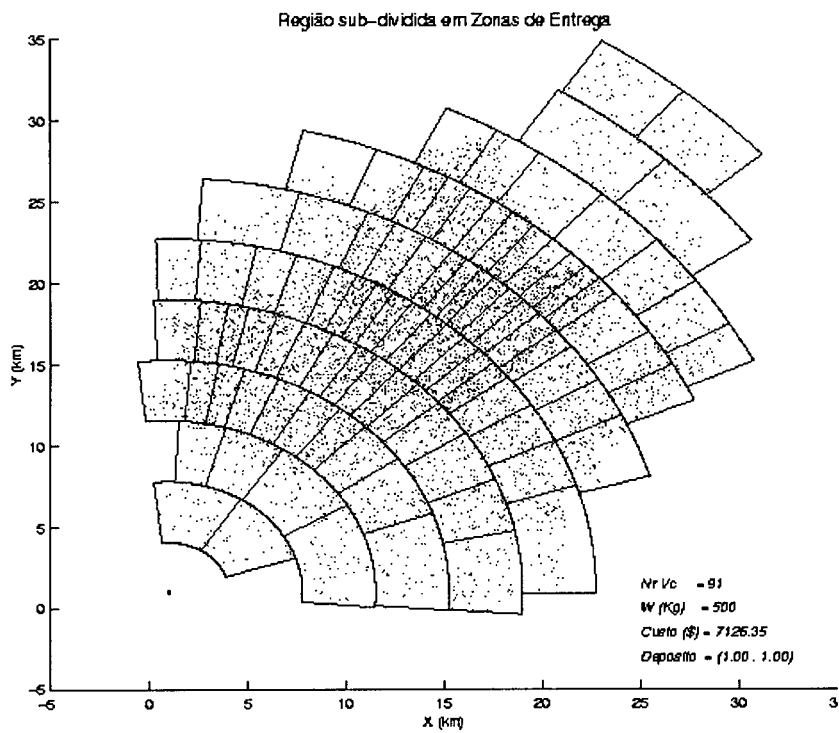


Figura 5.15 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (01, 01)

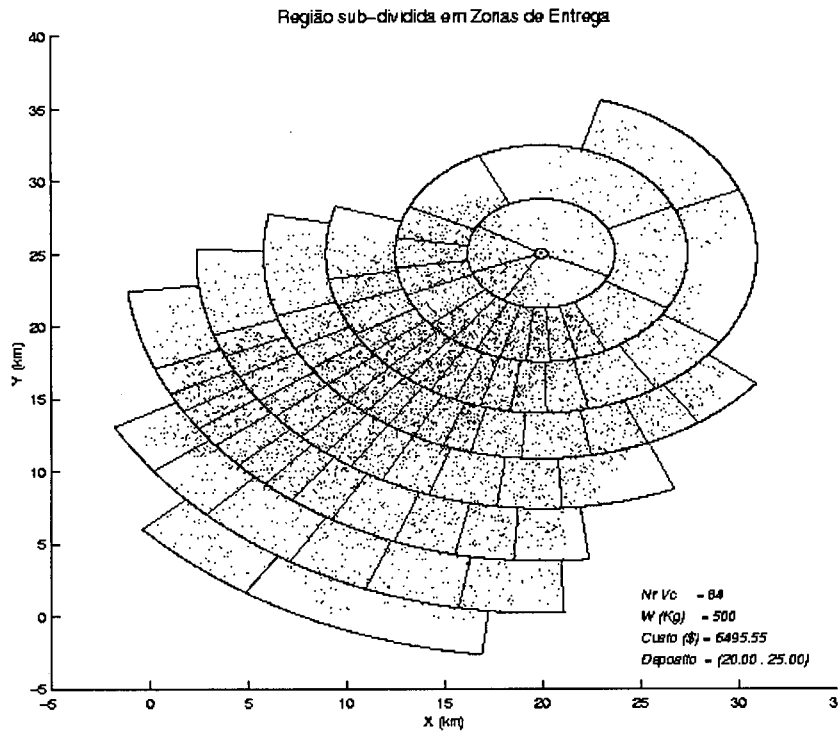


Figura 5.16 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (20, 25)

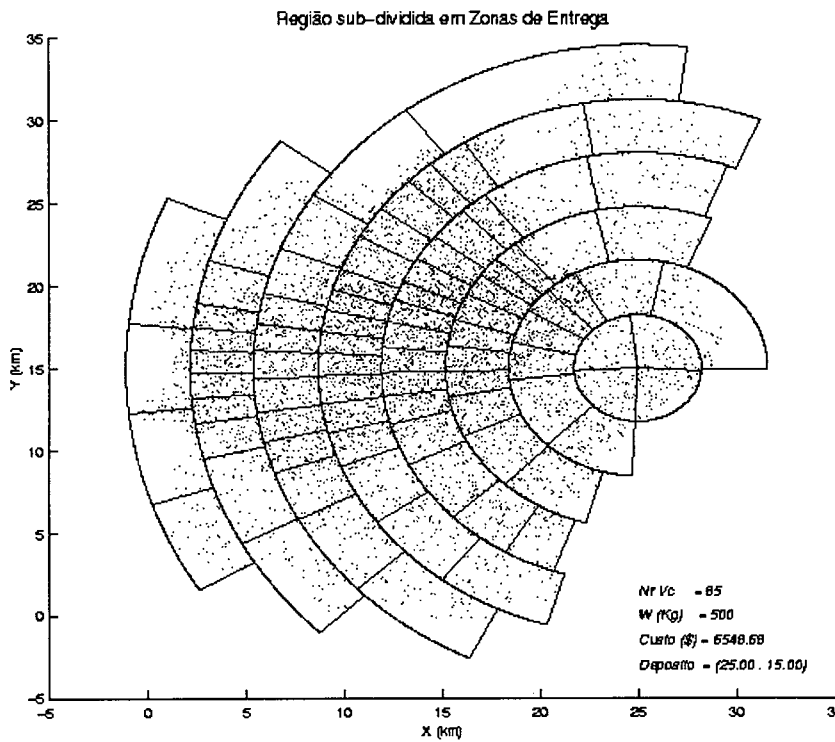


Figura 5.17 - Divisão da região com o depósito nas coordenadas (25, 15)

A Tabela 5.3 mostra o resultado de simulações para depósitos localizados em pontos diferentes. A solução de menor custo, para as alternativas simuladas, é a de localizar o depósito nas coordenadas (14, 15), (Exemplo 15). É claro que numa análise mais detalhada, se consideram além dos custos de distribuição, a disponibilidade de terrenos e instalações, os aspectos urbanísticos e os custos de instalação do depósito.

Tabela 5.3 - Exemplos para diferentes localizações do depósito

Ex.	Coordenadas (x , y)	Nr. Veículos	Custo Total
14	(10 , 06)	84	6.545
15	(14 , 15)	82	6.357
16	(07 , 22)	82	6.459
17	(01 , 01)	91	7.126
18	(20 , 25)	84	6.495
19	(25 , 15)	85	6.548

5.4 Comparação de Objetivos

Para analisar comparativamente os nossos resultados com os do trabalho de NOVAES E GRACIOLLI (1997), fizemos simulações considerando veículos de capacidade $W = 500$ kg, a região dividida em 9 e 10 setores e combinando o custo fixo igual a zero ou igual a 30. No trabalho de Novaes e Graciolli a capacidade também é $W = 500$ kg e o custo fixo considerado igual a zero.

A Tabela 5.4 apresenta as simulações para a divisão da região em 9 e 10 setores, combinando o custo fixo por veículo igual a zero ou igual a 30 e um critério para a geração de parte da população inicial dos ângulos dentro de cada setor (ver seção 4.4 - módulo 4.1 e figura 4.7). Parte da população de ângulos é gerada da seguinte forma: iniciando num ângulo α , definido aleatoriamente, e com uma semi-reta com um extremo fixado no depósito e fazendo-se então uma varredura com a outra extremidade num sentido qualquer dentro do setor, as zonas serão definidas incluindo ponto a ponto até que uma restrição seja violada e assim sucessivamente até que todos os pontos do setor tenham sido varridos (ver Figura 4.7). O critério mencionado acima, refere-se a restrição de tempo, jornada de trabalho máxima permitida, que consideramos duas situações: jornada máxima de trabalho igual a H_0 (não se utiliza horas extras) e jornada máxima de trabalho igual a H_1 . A restrição de capacidade permanece a mesma, veículo com capacidade máxima igual a 500 kg.

Tabela 5.4 - Exemplos variando o custo fixo

Ex.	Custo Fixo/Vc	Nr. Setores	Critério Inicial	Nr. Veículos	Custo		
					Fixo	Variável	Total
20	0	9	H_0	90	0	3.997	3.997
21	0	9	H_1	84	0	4.008	4.008
22	0	10	H_0	89	0	3.971	3.971
23	0	10	H_1	85	0	4.009	4.009
24	30	9	H_0	85	2.550	4.004	6.554
25	30	9	H_1	81	2.430	4.052	6.482
26	30	10	H_0	86	2.580	4.000	6.580
27	30	10	H_1	83	2.490	4.029	6.519

Essas simulações também evidenciam que a otimização pode contemplar alternativamente o custo total o número total de veículos. Se o objetivo é buscar o menor custo variável, então a solução é a configuração do exemplo 22 (Figura 5.18), com um custo de \$ 3.971 e 89 veículos. Por outro lado, se o objetivo é a configuração que apresente o menor número de veículos, então a solução tem um custo de \$ 4.052 e 81 veículos, exemplo 25 (Figura 5.19). No primeiro caso o objetivo é a redução no custo operacional, enquanto que, no segundo, procura-se minimizar o investimento.

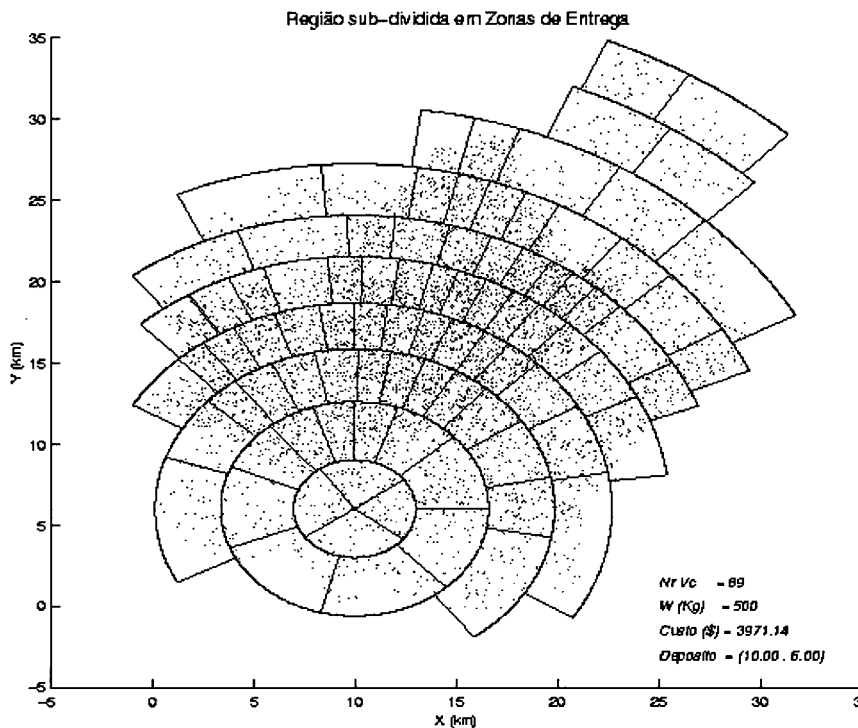


Figura 5.18 - Configuração que apresenta o menor custo

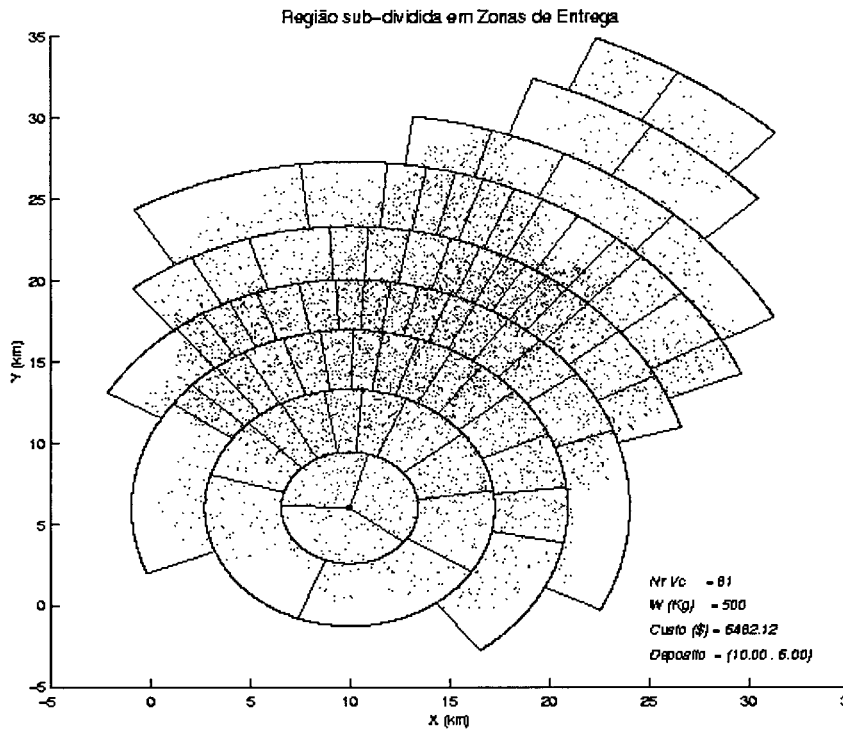


Figura 5.19 - Configuração que apresenta o menor número de veículos

Alguns dos parâmetros que definem o tempo de execução do modelo são: número de iterações, tamanho da população e número de tiragens. Esses parâmetros estão definidos em dois níveis, primeiro na divisão da região em setores, definindo-se os raios e segundo na divisão de cada setor em zonas, definindo-se então os ângulos. Nos exemplos da Tabela 5.4, foram usados os seguintes parâmetros:

Tabela 5.5 - Parâmetros do Algoritmo para os exemplo da Tabela 5.4

Parâmetros do Algoritmo	Algoritmo Genético para em:	
	Setores	Zonas
Número de Iterações	20	20
Tamanho da população	6	6
Número de tiragens	6	6

O tempo médio para determinar a solução para cada exemplo da Tabela 5.4 é de aproximadamente 350 minutos de tempo de CPU (configuração de hardware descrita a seguir). Uma análise mais detalhada sobre a performance do modelo é descrita na seção seguinte.

5.5 Avaliação da Performance

Apresentamos os resultados das simulações que avaliam o tempo de execução do modelo (tempo de CPU) e a qualidade dos resultados. As simulações que avaliam o tempo de execução do modelo são apresentadas na Tabela 5.6 e Figuras 5.20 à 5.24. Esses testes foram feitos para a divisão da região em 10 setores, com custo fixo por veículo igual a zero e capacidade do veículo de 500 kg. A configuração do hardware está descrita a seguir.

Tabela 5.6 - Avaliação do tempo de execução (CPU)

Ex.	Região			Setor			Vc	Tempo (hh:mm:ss)	Custo
	Iter	Pop	Tir	Iter	Pop	Tir			
28	4	4	4	20	4	4	90	00:10:22	3.979,71
29	10	4	4	20	4	4	90	00:55:48	3.971,12
30	10	10	10	20	4	4	90	04:07:06	3.963,61
31	30	10	10	20	4	4	88	12:03:13	3.959,44
32	30	10	10	30	8	8	89	46:48:36	3.957,14

Ex. = exemplo

Região = parâmetros do algoritmo para dividir a região em setores (ver seção 4.4)

Setor = parâmetros do algoritmo para dividir cada setor em zonas (ver seção 4.4)

Iter = número de iterações

Pop = tamanho da população

Tir = número de tiragens

Vc = número de veículos

Configuração do Hardware

WorkStation (mtpserv)
4 194 MHZ IP25 Processors
CPU: MIPS R10000 Processor Chip Revision: 2.5
FPU: MIPS R10010 Floating Point Chip Revision: 0.0
Secondary unified instruction/data cache size: 1 Mbyte
Data cache size: 32 Kbytes
Instruction cache size: 32 Kbytes
Main memory size: 512 Mbytes, 2-way interleaved

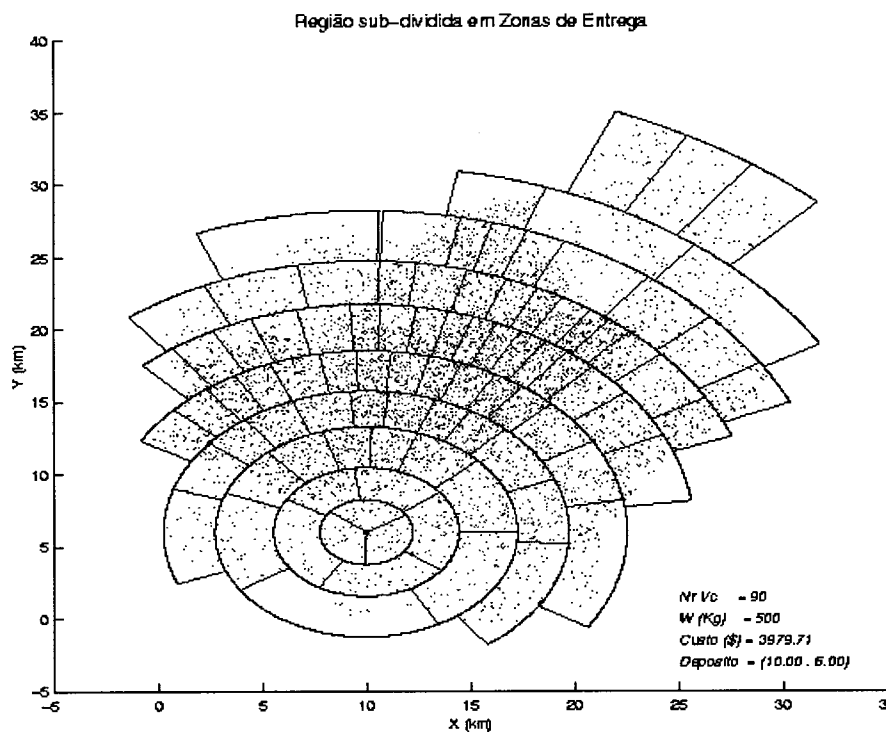


Figura 5.20 - Configuração do exemplo 28

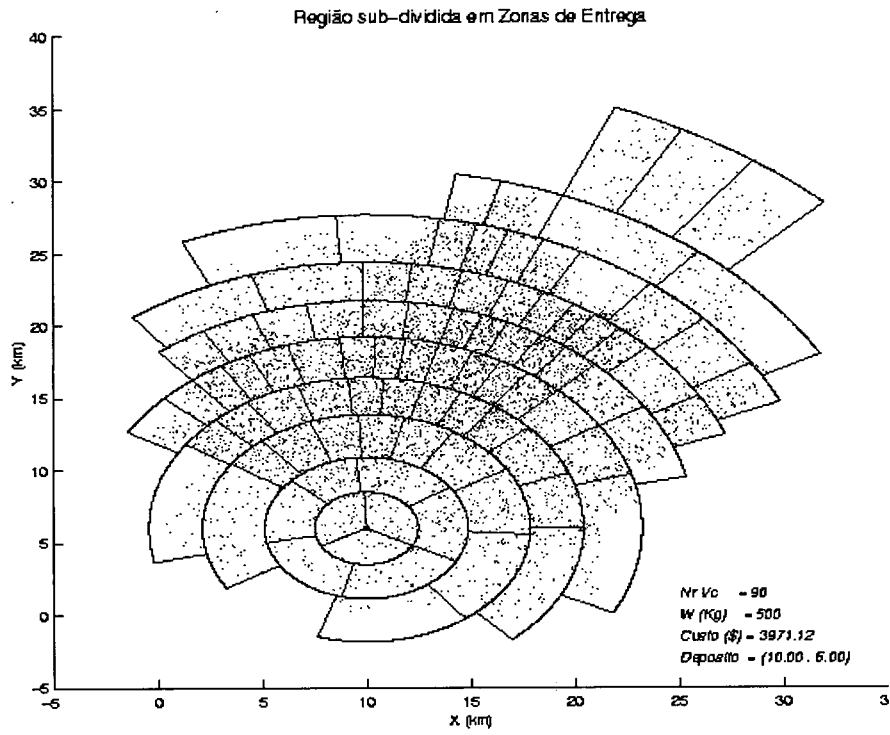


Figura 5.21 - Configuração do exemplo 29

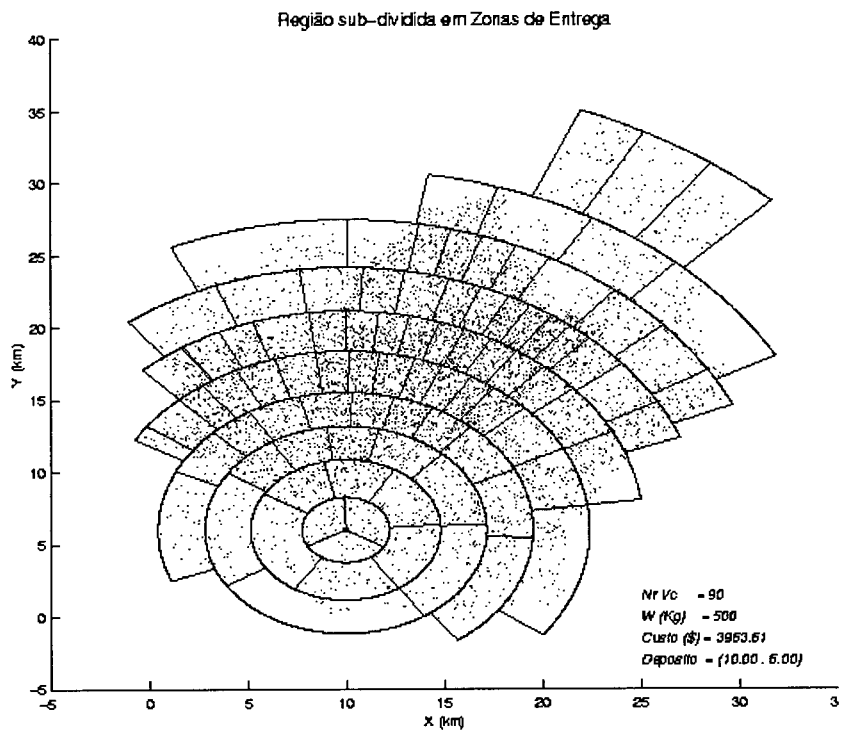


Figura 5.22 - Configuração do exemplo 30

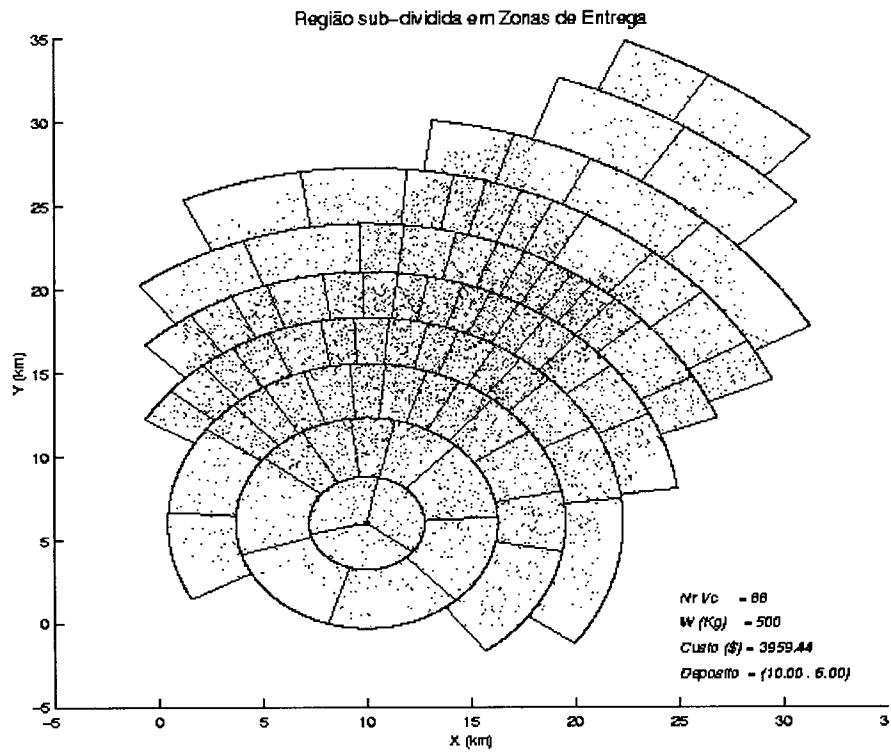


Figura 5.23 - Configuração do exemplo 31

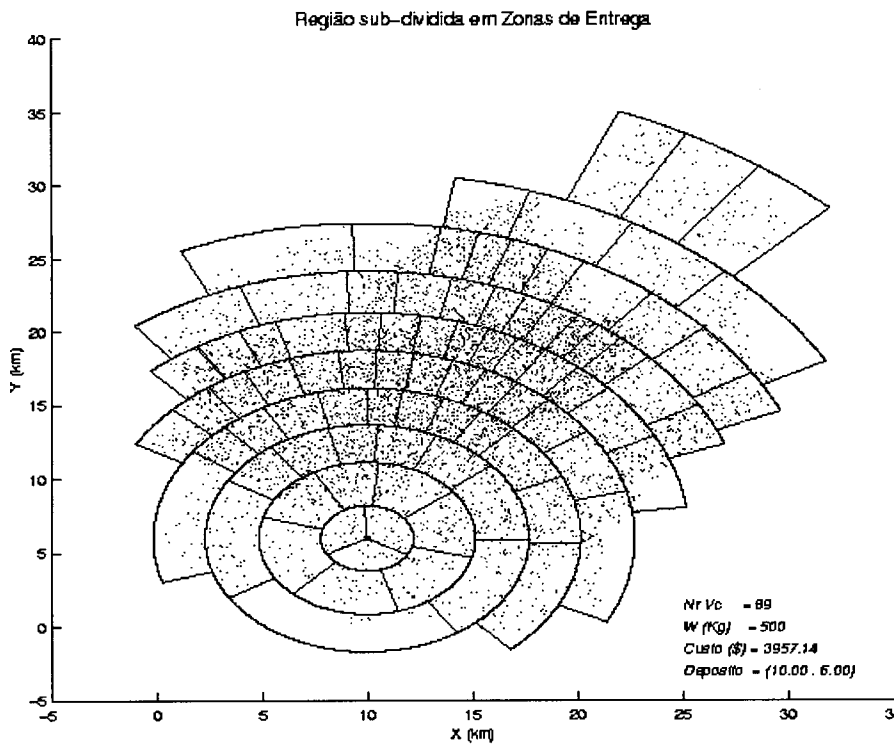


Figura 5.24 - Configuração do exemplo 32

5.6 Conclusões

São apresentadas agora algumas conclusões sobre este capítulo. A otimização pode buscar a configuração de menor custo para o sistema assim como pode-se buscar a configuração que minimize o número de veículos (investimento).

A homogeneização das zonas pode ser feita considerando carga, tempo de atendimento, esforço, ou uma combinação deles. Fizemos as simulações buscando a homogeneização das zonas considerando o tempo de atendimento, isto é, buscamos uma configuração onde cada tripulação do veículo execute as entregas em uma zona com um tempo próximo ao tempo médio para todas as zonas. Dessa forma, reduz-se a diferença de horas trabalhadas entre as tripulações (equalização do esforço de trabalho).

Pela aplicação do modelo foi possível observar que o problema é limitado por tempo e o veículo ideal determinado apresenta capacidade de carga $W=500$ kg. A região foi dividida em 10 setores radiais onde cada setor radial é dividido em diferentes números de ângulos, totalizando 89 zonas de entrega, sendo cada uma associada a um veículo com o custo total de distribuição igual a \$ 3.957 (Exemplo 32). Reduzimos o custo total de 4.145 no trabalho anterior para 3.957, redução de 4,5%, além da definição exata das fronteiras das zonas.

No capítulo seguinte, apresentamos as conclusões finais relativas ao trabalho e perspectivas futuras.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Descrevemos neste trabalho um modelo aproximado para a divisão de uma região em zonas de entrega de produtos, cada uma associada a um veículo. As variáveis são tratadas de modo probabilístico, permitindo melhor representação da realidade. O algoritmo genético usado no modelo, combina um método clássico de otimização, método do gradiente, com perturbações aleatórias, gerando um método híbrido que combina as vantagens específicas de cada um: de um lado, a convergência para mínimos locais é evitada e de outro, a velocidade de convergência cresce.

O modelo pode ser usado em planejamento de serviços de distribuição, possibilitando ao tomador de decisões determinar uma configuração do serviço sobre uma região e obter um custo aproximado sem conhecer detalhes da região. Além disso, pode determinar configurações para diferentes localizações do depósito e/ou da capacidade de cargas de veículos para analisar os *trade-offs*.

Embora os resultados obtidos sejam significativos e o modelo seja fácil de implementar e relativamente rápido de aplicar em problemas reais de Logística, alguns melhoramentos podem ser feitos. Primeiro, usar uma função de densidade de pontos, abordando o modelo de forma completamente contínua, sendo necessário ainda menos informações e tornando-o mais rápido computacionalmente. Segundo, é necessário investigar novas formas, talvez mais adequadas, para a divisão da região, quer seja por raios e ângulos mas de

maneira mais flexível (Figura 6.1), quer seja por outras abordagens que apresentam a forma das zonas totalmente livre (Figura 6.2).

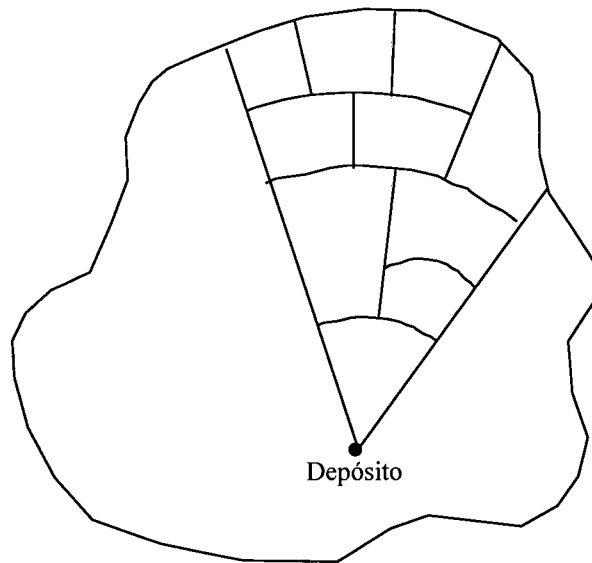


Figura 6.1 - Divisão da região em sub-regiões através de raios e ângulos

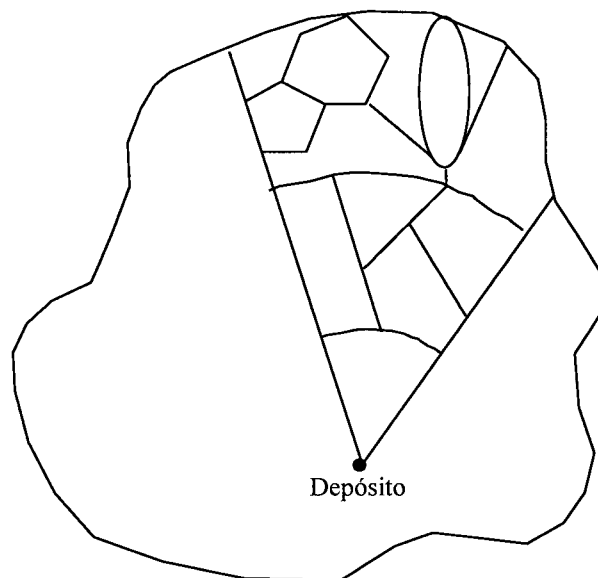


Figura 6.2 - Divisão da região em sub-regiões através de formas livres

Melhoramentos podem ser feitos também em relação ao cálculo das áreas das zonas nas extremidades utilizando o contorno da região para o cálculo da área (ver Figuras 6.3 e 6.4).

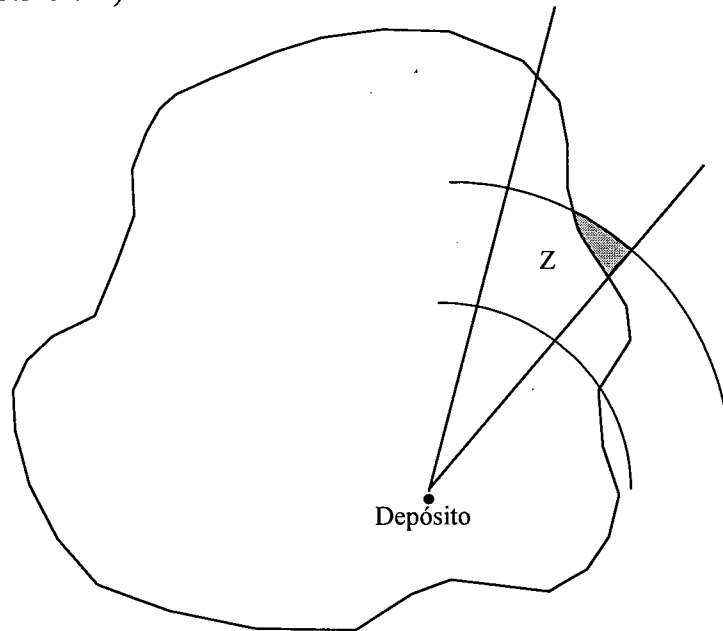


Figura 6.3 - Cálculo da área de zonas nos limites da região

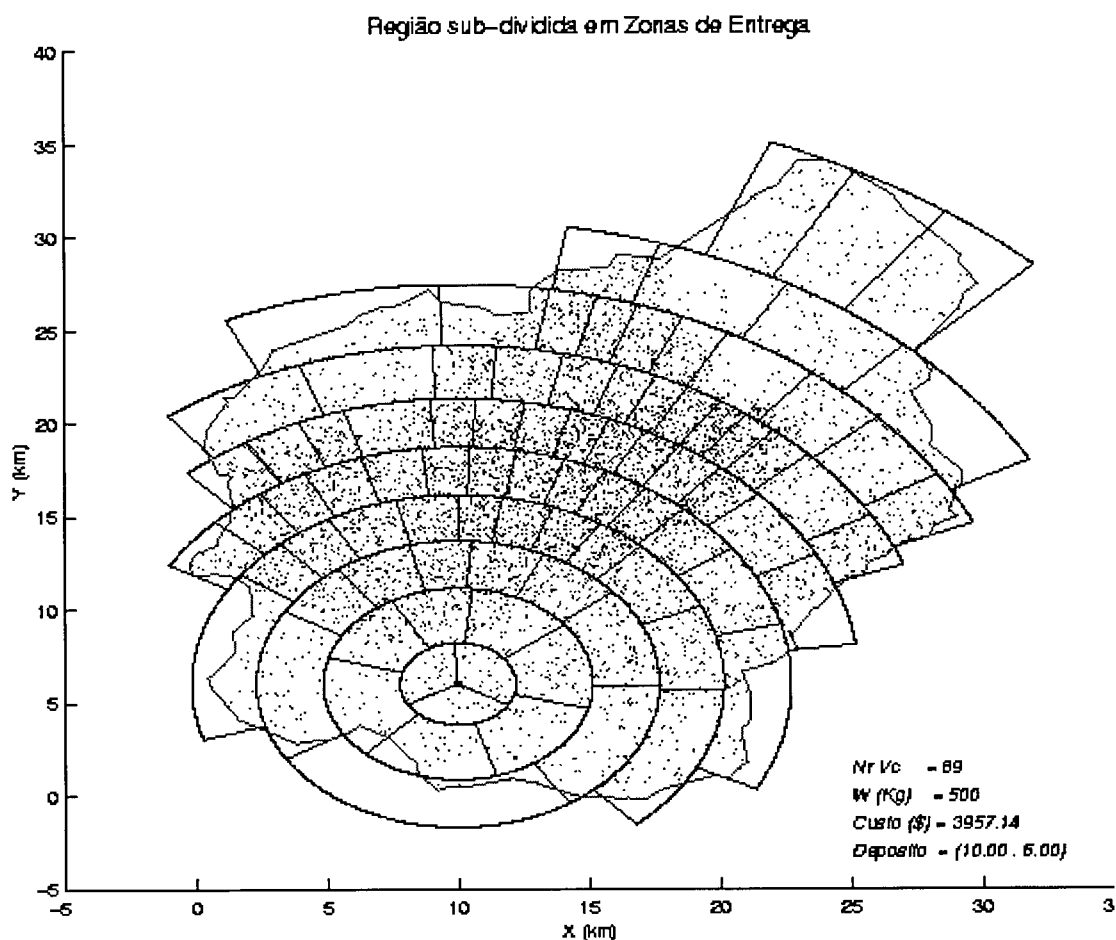


Figura 6.4 - Configuração resultante do exemplo 32 com o contorno da região

No modelo, para zonas que estão nos limites da região, calculamos a área da zona incluindo uma parcela dessa zona que não faz parte nem mesmo da região de distribuição (área achurreada na figura acima). Dessa forma, o custo real é menor que o calculado no modelo. Esse problema pode ser resolvido utilizando-se o contorno da região para o cálculo da área.

Outra proposição é a utilização de linguagens com boa interface com o usuário, tipo Delphi ou Visual Basic, que possibilitam a visualização dos resultados e a interação homem-máquina num ambiente amigável.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- ASSAD, A. (1988) *Modeling and Implementation Issues in Vehicle Routing*, in B.L. Golden and A.A. Assad (Editors) *Vehicle Routing: Methods and Studies*, Elsevier.
- BALLOU, R. H. (1993), *Logística empresarial: transportes, administração de materiais e distribuição física*, Atlas, São Paulo, 389 p.
- BARTHOLDI, J.J. AND PLATZMAN, L.K. (1988), *Heuristics Based on Spacefilling Curves for Combinatorial Problems in Euclidean Space*, Manage. Sci, Vol. 34, N° 3, pp 291-305.
- BEARDWOOD, J., HALTON, J.H., and HAMMERSLEY, J.M. (1959), *The shortest path through many points*, Proceedings Cambridge Philosophical Society, Vol. 55, pp 299-327.
- BODIN, L., GOLDEN, B. ASSAD, A. e BALL, M., (1983), *Routing and scheduling of vehicles and crews: the state of the art*, Computers and Operations Research, Vol.10, N°2.
- BURNS, L.D., HALL, R.W., BLUMENFELD, D.E., AND DAGANZO, C.F. (1985) *Distribution Strategies that Minimize Transportation and Inventory Costs*, Operations Research, Vol. 33, N° 3, pp 469-490.
- CHIEN, T.W. (1992) *Operational Estimators for the Length of a Traveling Salesman Tour*, Computers Ops. Res., Vol. 19, N° 6, pp 469-478.
- CUNHA, DA C. B. (1991), *Algoritmos para roteamento e programação de veículos no contexto da distribuição física*, Dissertação mestrado Engenharia Transporte da USP, 185 p
- DAGANZO, C.F. (1984a) *The Length of Tours in Zones of Different Shapes*, Transp. Research B, Vol. 18B, N° 2, pp 135-145.
- DAGANZO, C.F. (1984b) *The Distance Traveled to Visit N Points with a Maximum of C Stops per Vehicle: An Analytic Model and an Application*, Transp. Science, Vol. 18, pp 331-350.

- DAGANZO, C.F. (1985) *Supplying a Single Location from Heterogeneous Sources*, Transp. Research B, Vol. 19B, pp 409-419.
- DAGANZO C.F. (1988) *A comparison of In-Vehicle and Out-Of-Vehicle Freight Consolidation Strategies*, Transp. Research B, Vol. 22B, pp 173-180.
- DAGANZO C.F. (1996) *Logistics Systems Analysis*, 2nd Edition, Springer, 341p.
- DASKIN, M. S. (1985) *Logistics: An overview of the state of the art and perspectives on future research*, Transportation research A, Vol.19A, N°.5/6, p. 383-398.
- DIAZ, A. E KIKUCHI, N. (1992) *Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37. pp 1323-1350.
- EILON, S.; WATSON-GANDY, CHRISTOFIDES (1971) ***Distribution Management: Mathematical Modelling and Practical Analysis***, Griffin, London.
- GOLDBERG, D.E. (1989), ***Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning***, New York, Addison-Wesley, 412 p.
- GUYON, F. (199?) *Interpolation diffuse Champs d'Atténuation constants*, 15 p.
- HABER, C.S., JOG, C.S., BENDSOE, M.P. (1994) *Topology Design with Optimized, Self-adaptive materials*, International Journal for numerical methods in Engineering, vol. 37. pp 1323-1350.
- HALL, R. (1985) *Determining Vehicle Dispatch Frequency when Shipping Frequency Differs Among Suppliers*, Transp. Research B, Vol. 19B, pp 421-431.
- HALL, R.(1987) *Direct Versus Terminal Freight Routing on a Network with Concave Costs*, Transp. Research B, Vol. 21B, pp 287-298.
- HAN, F. AND DAGANZO, C.F. (1986) *Distributing Nonstorable Items without Transshipments*, TRT, TRB (Nr 1061).
- HIGGINSON, J.K. (1993) *Modeling Shipper Costs in Physical Distribution Analysis*, Transp. Research A, Vol. 27A, pp 113-124.

- JAILLET, P., AND ODoni, A. (1988) *The probabilistic vehicle routing problem*, in: B.L. Golden and A.A. Assad (eds.) ***Vehicle Routing: Methods and Studies***, North-Holland, Amsterdam.
- KWON, O, GOLDEN, B. AND WASIL E. (1995), *Estimating the Length of the Optimal TSP Tour: An Empirical Study Using Regression and Neural Networks*, *Computers Ops. Res.* Vol. 22, N° 10, pp 1039-1046
- LANGEVIN, A. E SOUMIS, F. (1989) *Design of Multiple-Vehicle Delivery Tours Satisfying Time Constraints*, *Transp Research B*, Vol. 23B, pp 123-138.
- LANGEVIN, A. MBARAGA, P. AND CAMPBELL, J. F., (1996) *Continuous Approximation Models in Freight Distribution: An Overview*, *Transpn. Res-B*, Vol. 30, N° 3, pp. 163-188.
- LARSON AND ODoni (1981) ***Urban Operations Research***, Prentice-Hall. Englewood Cliffs.
- MARIH M. (1995) *Approximation Difuse Éléments Diffus Application à la Résolution des Problèmes Mécaniques*, These Docteur de L'UTC, Université de Technologie de Compiègne, 160 p.
- MOREAU, G AND CAILLERIE, D (1995) *Continuum Modeling of Lattice Structures in Large Displacement Framework*, *Developments in Computational Techniques for Estrutural Engeneering*, B.H.V. Topping (Editor), Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, pp 245-252.
- NEWELL (1973) *Scheduling, Location, Transportation and Continuous Mechanics*, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 25, N° 3, pp 346-360.
- NEWELL AND DAGANZO (1986) *Design of Multiple-Vehicle Delvery Tours - II Other Metrics*, *Transp. Research B*, Vol. 20B, pp 365-376.
- NOVAES, A.G.(1988) *Conaisderações sobre o Processo de Zoneamento na Distribuição Física de Produtos*, XXI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro.
- NOVAES, A.G. (1989) ***Sistemas Logísticos: Transporte, Armazenamento e Distribuição Física de Produtos***, Ed. Edgard Blucher, São Paulo.

- NOVAES, A.G. (1991) *Dimensionamento de Sistemas de Distribuição Física de Produtos com Restrições de Tempo e de Capacidade*, trabalho apresentado ao concurso de professor titular, Depto Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC.
- NOVAES, A.G. (1992) *Routing Strategies for high-Density Urban Distribution Services*, paper presented to EURO XII - TIMS XXXI joint International Conference, Helsinki, Finland (june-July).
- NOVAES, A. G; E GRACIOLLI, O. D. (1997) *Designing Multi-Vehicle Delivery Tours in a Grid-Cell Format*, em fase de publicação no European Journal of Operational Research.
- POGU, M. E SOUZA DE CURSI, J. E. (1994), *Global Optimization by Random Perturbation of the Gradient Method with a Fixed Parameter*, Journal of Global Optimization, Vol. 5, pp.159-180.
- ROBUSTÉ, F., DAGANSO, C.F. AND SOULEYRETTE, R.R. (1990), *Implementing Vehicle Models*, Transp. Res.-B, Vol. 24B, N°. 4, pp. 263-286.
- SAMET, H (1980) *Region Representation: Quadtree from Boundary Codes*, Gra, Im, Pro, Vol. 23, pp 163-170.
- SAMET, H (1982) *Neighbor Finding Techniques for Images Represented by Quadtrees*. Comp, Graph, Ima, Proc, Vol. 18, pp 37-57.
- SOUZA DE CURSI, J.E. (1985), *Mécanique des Milieux Continus*, C.R.Acad. Sc. Paris, t. 301, Série II, N°. 19 pp 1319-1322.
- SOUZA DE CURSI, J.E. (1987) *Statique des Fils Sans Raideur à comportement Unilatéral*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée. Vol. 6, N°. 6, pp 789-825.
- SOUZA DE CURSI, J.E. (1990) *Un Problème issu de l'étude numérique d'un fil sans raideur soumis au frottement sec*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. XI, n. 2, pp 137-186.
- SOUZA DE CURSI, J.E. (1991) *Amarrage par des Fils sans Raideur a Comportement Unilateral*, These de Docteur d'Etat, Universite Montpellier II, pp 21-33.

- SOUZA DE CURSI, J.E. (1992) *Stress Unilateral Analysis of Mooring Cables*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 34, pp 279-302.
- SOUZA DE CURSI, J.E. (1994) *Allegement d'une Piece Elastique Homogene Soumise a des Contraintes Planes*, Institut de Mecanique de ROUEN, Rapport de Recherche N° 1, 63 p.
- SOUZA DE CURSI, E.J. and CORTES, M.B.S (1995) *General Genetic Algorithms and Simulated Annealing Perturbation of the Gradient Method with a Fixed Parameter*, Developments in Computational Techniques for Estrutural Engeneering, pp. 189-198.
- STEIN, D.M.(1978) *An Asynptotic, Probabilistic Analysis of a Routing Problem*, Math. of Operations Research, Vol. 3, N° 2, pp 89-101.

ANEXO

NOVAES, A. G. AND GRACIOLLI O. D. (1997) Designing Multi-Vehicle Delivery Tours In A Grid-Cell Format, to appear in *European Journal Of Operational Research*

EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH

Editors: Alan Mercer

The Management School
Lancaster University
Lancaster, LA1 4YX
England
Telephone +44-1524-593864
Fax +44-1524-844-885

C. Bernhard Tilanus

Eindhoven University of Technology
P.O. Box 513
5600 MB Eindhoven, Netherlands
Telephone +31-40-2473735
Fax +31-40-2467497
Email C.B. Tilanus@tm.tue.nl

Hans-Jurgen Zimmermann

RWTH Aachen
Templergraben 64
52062 Aachen, Germany
Telephone +49-241-806182
Fax +49-241-8888-168
Email Zi@Buggi.OR.RWTH-Aachen.de

22 August, 1998

Professor Antonio G N Novaes
Head - Transport and Logistics Group
Dept of Industrial Engineering
Federal University of Santa Caterina
Caixa Postal 476
88040-900, Florianopolis
SC, Brazil

Dear Professor Novaes

I am pleased to inform you that your paper, reference number M836, has been accepted for publication in the EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH. The procedure from now on is as follows.

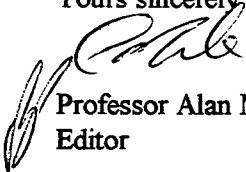
Enclosed you will find an Acceptance form which you must send **immediately** to North-Holland at the address given. You must enclose a copy of the accepted version of your paper, which is obviously the last you sent to me, and the original figures, if there are any. You may also enclose a disk containing an electronic version of your final manuscript, which must be in accordance with the details given in Instructions to Authors.

Proofs will be sent to you by North-Holland. I suggest you read them carefully and check them once more against the original; you are the only one responsible for doing this. Together with the proofs you will receive an order form for reprints (25 reprints are complimentary). Three months before publication North-Holland will inform you in which issue your paper will appear.

Editorial policy is to publish all papers quickly but authors will appreciate that the desire to have issues with balanced contents implies that papers will not simply appear in the order of their acceptance. That and the need to publish at a uniform monthly rate when the supply is variable will occasionally delay a paper's appearance longer than the Editors would wish, but if this should be the case with your paper, we trust that we can count on your understanding.

From now on, any queries should be addressed to the EJOR desk editor at North-Holland and not to the Editors. His email address is: L.HOLLA@ELSEVIER.NL.

Yours sincerely,



Professor Alan Mercer
Editor

P.S. IMPORTANT NOTICE OF EDITORIAL CHANGES

From 1 January 1999, the new Editors will be Roman Slowinski (Poznan University of Technology, Poland), Jacques Teghem (Faculté Polytechnique de Mons, Belgium) and Jyrki Wallenius (Helsinki School of Economics, Finland). All new papers for refereeing, which will reach the editors after 1 January 1999, should be sent to one of the editors named above (see EJOR for details). The present Editors will handle all papers received before end of 1998.

DESIGNING MULTI-VEHICLE DELIVERY TOURS IN A GRID-CELL FORMAT

Antonio G.N. Novaes, Odacir D. Gracioli

Department of Industrial Engineering

Federal University of Santa Catarina

Caixa Postal 476

88040-900 - Florianópolis, SC, Brazil

email: novaes@eps.ufsc.br

Abstract

This paper presents a methodology to be used in the design of multi-delivery tours associated with the servicing of a heterogeneous region, where the density of visiting points and the amount of cargo vary over the served area. Both vehicle cycle time and vehicle load are treated probabilistically. The region under analysis is partitioned into a number of sectors, rings, and districts, with the polar coordinates centered at the depot. We assume a rectangular grid structure for the representation of the spatial variables. This division is intended to attain a quasi-homogeneous distribution effort (approximate equal number of vehicles) in each partition. The optimization model seeks the best fleet of vehicles that minimizes total daily transport costs. As an example, the model is applied to a parcel delivery problem in the city of São Paulo, Brazil.

Keywords: Distribution, Vehicle Tours, Districting

1. INTRODUCTION

The *vehicle routing problem* (VRP) is the problem of designing a set of routes from a central depot to various demand points, each having service requirements, in order to minimize the total distance covered (Bastian and Rinnooy Kan, 1992). The total distance travelled is often substituted by a cost function. The *stochastic vehicle routing problem* (SVRP) is a generalization of the VRP, in which part of the variables are incorporated in the model as random variables. Jaillet and Odoni (1988) studied the case where a point i is visited in a tour with probability p_i . The *m-travelling salesman problem with stochastic travel times*, on the other hand, with all m routes (vehicles) starting and ending at a common depot, was treated by Lambert, Laporte and Louveaux (1993) with a mathematical programming formulation. Laporte, Louveaux and Mercure (1992) considered *stochastic service times* at the servicing points as well. When customer demands are random variables, we have the *vehicle routing problem with stochastic demands* (Stewart and Golden, 1983; Bertsimas, 1992). The primary objective of such models is to find

optimal tours, i.e. the best sequence of visits in order to minimize the total travelled distance or the total transport cost, respecting, at the same time, service requirements.

Other authors (Daganzo, 1984b; Han and Daganzo, 1986; Langevin and Soumis, 1989) focussed the problem of partitioning a region into delivery districts in a near-optimal way. Here one is not interested in directly finding the best sequence of visiting points for each tour. Approximate formulas are used to estimate the travelled distances, and the effort is concentrated in seeking a near optimal partition of the region supplied by the depot into districts (Han and Daganzo, 1986). In most applications, the density of points over the region and the demand at each point are assumed constant. In other cases, the region is assumed to be circular, with the depot located at the centre (Han and Daganzo, 1986) and with the density of points varying with the radius (Langevin and Soumis, 1989).

In this paper we consider an urban region \mathcal{R} of irregular shape, with the density of servicing points varying over \mathcal{R} , but being nearly constant and Poisson distributed over distances comparable with a district size (Newell and Daganzo, 1986b). The customer demands and service times also vary over the region and are random variables. Each route is assigned to a vehicle, being both restricted by time and capacity constraints in a stochastic way. We also assume that any one of the n points of a random tour will require a visit with a probability p (Jaillet, 1988). The partition of the region into districts is done considering an *equal-effort criterion* in order to guarantee a minimum of homogeneity among districts. First, we divide the region into *sectors*, with a polar coordinate system centred at the depot (Fig. 1). Then, each sector is further partitioned into *rings*. Finally, each ring is partitioned into *districts*. The latter are associated with the individual vehicle tours. The term *partition* is used indifferently in the text to indicate sectors, rings or districts. In parallel, the model searches for the best number of lorries and their cargo capacity, respecting the service requirements. In our model we are not interested in finding the optimal sequence of visits in each tour. This is usually done in the operating phase. Our model is intended to be used mostly in the planning phase, in which a more general framework of the system is sought.

The methodology developed in our research to solve this type of problem is compatible with the utilization of Geographic Information System (GIS) software. This would allow the analyst, apart from the cartographic representation of the results, to check the district boundaries against traffic and geographical constraints, such as access-controlled highways, rivers, lakes, and other relevant factors.

The paper is organized as follows: Section 2 presents the methodology to estimate travel

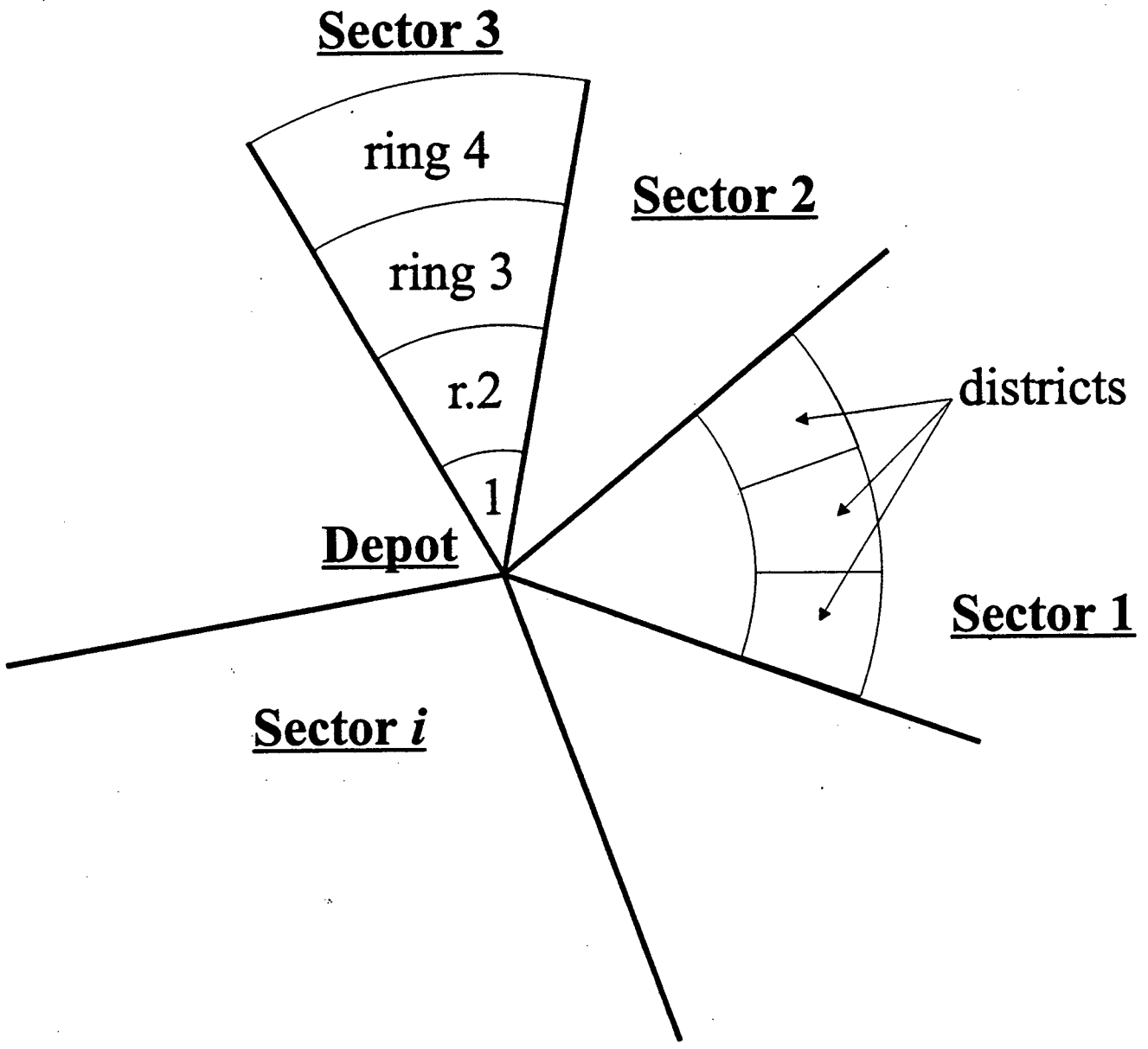


Figure 1 - Partition of region \mathcal{R} into sectors, rings and districts

time and distance from the depot to and within the districts. Section 3 discusses the stochastic nature of the problem. Section 4 analyses the vehicle daily cycle from a probabilistic point of view, leading to the cycle times and vehicle loading restrictions that will be incorporated later into the optimization model. Section 5 describes the first stage of the partitioning process. A *distribution effort function* is defined in order to partition the region into quasi-homogeneous sectors and rings. Section 6 analyses the cost function to be minimized in order to get the optimum vehicle size. Section 7 describes the first stage of the fleet optimization model. Then, a final optimization tuning is performed (Section 8), where we adjust the partitioning process into sectors and rings in order to decrease the cost function further. Section 9 analyses the effects of the district shape in the local travel distance, leading to a process to evaluate alternative district arrangements within a given ring. Section 10 describes an application of the model to an urban distribution example. The final section of the paper is a brief discussion of the advantages and shortcomings of the proposed methodology.

2. LOCAL TRAVEL TIME AND DISTANCE

The local travel comprises the sum of vehicle displacements between consecutive delivery points in a specific district. Given n points uniformly and independently scattered over a fairly compact and fairly convex district Z of area A (Larson and Odoni, 1981), the expected length $E(D_Z)$ of the optimal deterministic travelling salesman tour can be approximated (Beardwood, Halton and Hammersley, 1959) as

$$E(D_Z) \approx k \sqrt{A n} \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (1)$$

where k is a constant. Expression (1) can be applied to both Euclidean and rectangular metrics and gives reasonable results for $n > 15$, holding quite well for different district shapes (Larson and Odoni, 1981; Daganzo, 1984a). The value of k is approximately 0.765 for the Euclidean metric (Larson and Odoni, 1981). Let δ be the density of points per unit area in Z and let $E(\ell_Z) = E(D_Z)/n$ be the expected traveled distance per visited point. Departing from (1) produces

$$E(\ell_Z) \approx k \delta^{-1/2}. \quad (2)$$

Another routing strategy is due to Daganzo (1984a): the district is divided into a number of strips, in a swath pattern, with the vehicle following a zig-zag path along the strip, and visiting the points without backtracking. Daganzo's strategy is suboptimal but, according to the author, it can be used to build tours in districts of irregular shape without the help of a computer. For this

routing strategy, the average travelled distance per visited point can also be expressed by (2), with $k = 0.9$ for the Euclidean metric (Daganzo, 1984a).

Suppose now that there is a probability p that any of the n points of the tour will require a visit on a random day (Jaillet, 1988). Thus, the number k of visiting points on any day is a random variable. One strategy is to search for an optimized route that can be followed every day. The vehicle visits all the customers in the same fixed order, but skipping the points that do not require service that day. Another strategy is to redesign the route every day, considering only the points requiring a visit. This re-optimization strategy is usually less attractive because it is time consuming, requires large computer settings, and leads to less regular services (Bertsimas, 1992).

Adopting the first strategy, the question is how to choose an appropriate a priori sequence, including all the n points, to be followed every day in order to minimize the long run expected travelled distance. This routing sequence is different from the classical n -point TSP solution (Jaillet, 1988; Bertsimas, 1992). Nevertheless, approximation formulas similar to the ones derived by Beardwood, Halton and Hammersley (1959) for the classical TSP, were also derived for the PTSP. For the latter, relation (1) also holds, with $E(D_Z) \approx k_0 \sqrt{A n}$ such that

$$k\sqrt{p} \leq k_0 \leq \min(k, 0.9204\sqrt{p}) \quad \text{with } 0 \leq p \leq 1 \quad (3)$$

(Jaillet, 1988), where k is the TSP constant defined above.

In general, relations (1) or (2) can be used to approximate the average travelled distance per visited point for a number of different strategies and metrics. Each case will be related to a different value of k in relations (1) or (2). In particular, the effects of the road network impedance (network topology, one-way streets, left turns, intersection restrictions) can also be taken into account through the introduction of another coefficient in (1) or (2). Thus, the expected distance travelled within the district can be expressed as

$$\bar{D}_Z = E(D_Z) \approx k n \delta^{-1/2} = k' k'' n \delta^{-1/2} = k' k'' \sqrt{A n}, \quad (4)$$

where k' is the theoretical coefficient, whose value will depend solely on the adopted metric and routing strategy, and k'' is a corrective coefficient (*route factor*) reflecting the road network impedance ($k'' > 1$, usually 1.35, or greater). The value of k'' will depend on the case under study.

No known expression to estimate the standard deviation of D_Z for ready use is available. We assume that the coefficient of variation of D_Z (i.e., the ratio of the standard deviation by the mean) does not vary significantly with the zone shape, the adopted metric, and the routing strategy. A Monte Carlo experiment over a square was performed, assuming an Euclidean metric,

and generating for each simulation run a set of n points uniformly and independently distributed over the square. A sample of 30 optimized travelling salesman tours was generated for each value of n , using a sequence of farthest insertion, 2-opt, and 3-opt heuristics (Laporte, 1992). The coefficient of variation CV of D_Z was then calculated for each experiment, leading to the results shown in Table 1. The following least-square equation was fitted to the data ($R^2 = 0.995$)

$$CV = 0.49 (n-1)^{-0.59} \quad (n \geq 2). \quad (5)$$

From the results shown in Table 1 it can be seen that the dispersion of the random variable D_Z is quite small for large n . Goodness of fit tests on the data obtained via simulation indicated that D_Z can be described by a normal distribution, for n relatively large ($n > 15$). Fig. 2 shows the fitting results for $n = 30$. Therefore, we use the normal approximation $D_Z \sim N(\bar{D}_Z, \sigma_{DZ})$ in the model.

The problem of estimating travel times is more difficult to solve in statistical terms. We can express the local travel time t_Z as the division of the local travel distance by the local speed v_Z as

$$t_Z = \frac{D_Z}{v_Z}. \quad (6)$$

Assuming after Larson (1972) that D_Z and $\frac{1}{v_Z}$ are uncorrelated

$$E(t_Z) = E(D_Z) E\left(\frac{1}{v_Z}\right). \quad (7)$$

The problem of finding the probability density function of the product of independent random variables is not an easy task (Lomnicki, 1967). Furthermore, while D_Z and v_Z can be represented by a normal distribution, the random variable $\frac{1}{v_Z}$ cannot. In fact, the distribution of $\frac{1}{v_Z}$ is not symmetric around the mean, to start with. Since the objective of our work is to give support to the solution of practical problems, it is reasonable to adopt an approximate solution. One practical way to do this is to collect samples of observed travel times in districts with different areas and different values of n . Adopting the same functional expression as in (4) provides

$$t_Z = \frac{E(D_Z)}{v_Z} = \frac{k\sqrt{A}n}{v_Z} = \alpha k\sqrt{A}n. \quad (8)$$

Computing the mean $\bar{\alpha}$ and the standard deviation σ_α of α from a reasonable sample of t_Z values, the variable t_Z is approximated by a normal distribution $t_Z \sim N(\bar{t}_Z, \sigma_{t_Z})$ wherein

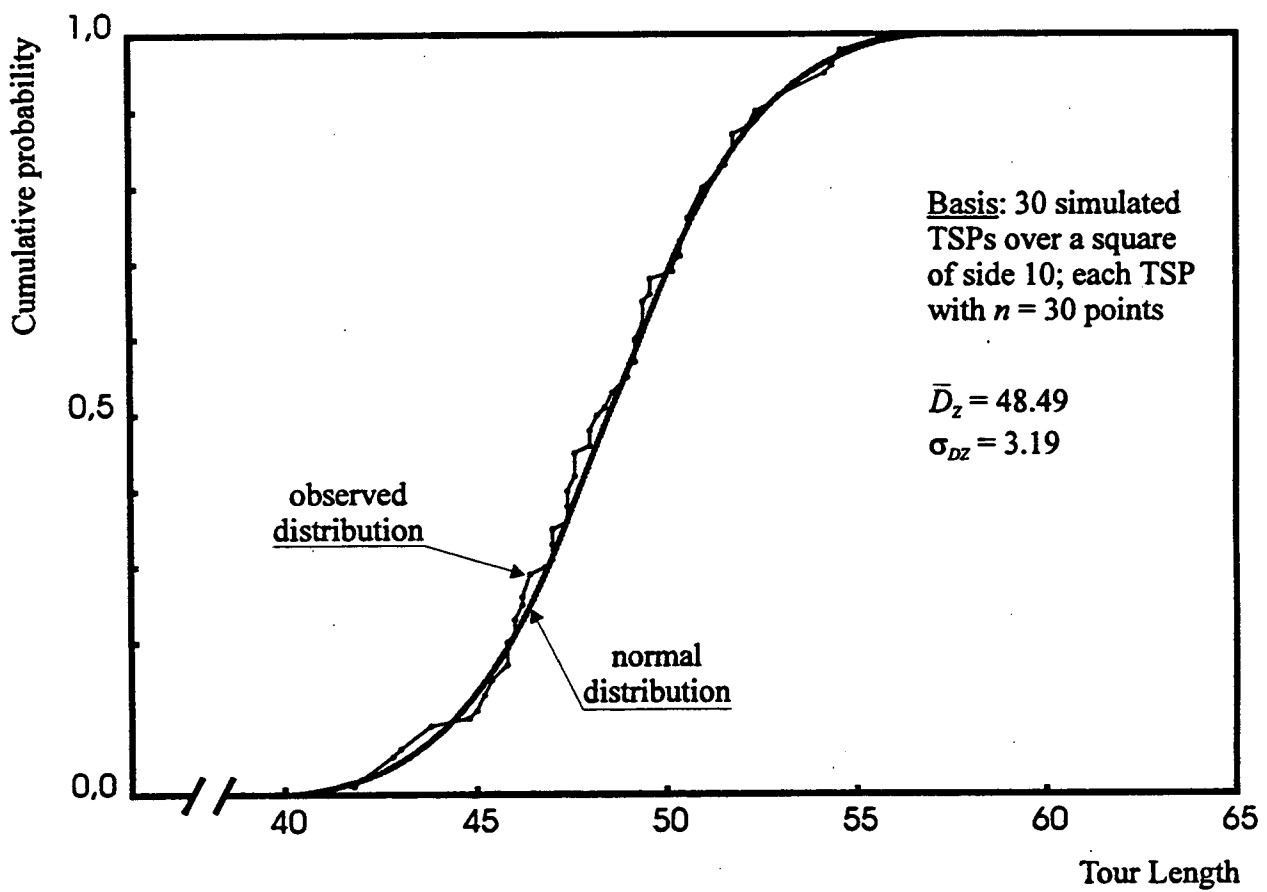


Figure 2 - Tour length distribution - Monte Carlo results of TSPs on a square of side 10

$$\bar{t}_z = E(t_z) = \bar{\alpha} k \sqrt{An} \quad \text{and} \quad \sigma_{t_z} = \sigma_{\alpha} k \sqrt{An}. \quad (9)$$

From a sample of 40 values of t_z , taken from local travel tours in the city of São Paulo, Brazil, with zones areas varying from 3.0 to 9.8 sq.km, $k = 0.765$ (i.e., $p = 1$), and $25 \leq n \leq 45$, we obtained $\alpha = 3.385$ (A in sq.km and t_z in minutes) and $\sigma_{\alpha} = 1.046$. Thus, relation (9) is used in the model to estimate local travel times.

Table 1

Values of the coefficient of variation of D_z obtained through a Monte Carlo experiment

n	coefficient of variation	n	coefficient of variation
2	0.500	45	0.049
3	0.340	60	0.049
6	0.178	75	0.042
15	0.101	90	0.031
30	0.066		

3. STOCHASTIC ASPECTS OF THE PROBLEM

The *vehicle routing problem* (VRP) has been studied by many authors, in various instances. Comparatively little research has been conducted on the *stochastic vehicle routing problem* (SVRP). A recent review of the literature on the SVRP is provided by Gendreau, Laporte and Séguin (1996). This type of problem arises whenever some of its elements are random. Common examples are stochastic demands and stochastic travel times. In addition, as discussed in section 2, sometimes the set of customers to be visited is not known with certainty.

According to Gendreau *et al* (1996), a typical SVRP is usually modelled either as a *chance constrained program* (CCP) or as a *stochastic program with recourse* (SPR). In CCPs, one seeks a solution for which the probability of failure is constrained to be below a certain threshold. A CCP solution does not take into account the cost of corrective actions in case of failure. In SPRs, the objective is to determine a first solution that minimizes the expected cost of the second stage

solution. This cost is made up of the cost of the first stage solution, plus the expected net cost of recourse. In fact, depending on the problem under analysis, there are different possible recourse strategies that can be investigated. For example, with regard to the problem studied in this paper, whenever the load assigned to a specific route exceeds the lorry capacity, one can assign an extra vehicle to carry the excess cargo. Another recourse strategy, which is more time consuming and requires more computing effort, is to redefine the district boundaries every day in order to accommodate a part of the exceeding load. With regard to the time restrictions, the penalties are generally greater. In fact, if a delivery vehicle fails to make some of the planned deliveries and returns to the depot with part of its cargo, the merchandise will stay at the depot overnight. This may have adverse consequences in terms of company image and customer satisfaction. However, mitigating measures can be taken. For example, a non-fleet vehicle could be assigned to deliver the excess cargo as soon as the foreseen situation is detected.

The model described in this paper is intended to be used in the planning process stage, in which a clear definition of the operational rules is still nonexistent. Thus, a CCP approach seems more appropriate, permitting the inclusion of possible recourses to a later stage. In fact, the present model can be used as a general framework for further extensions, including SPR features and other related real-world applications.

In our model we deal with two kinds of failure. First, there is a *vehicle capacity constraint*, in which the probability that the cargo load of a lorry exceeds its capacity is limited to a fixed level. Second, there is a *time constraint*, in which the probability that the daily cycle-time of a vehicle exceeds an upper bound is limited to a pre-defined level.

4. VEHICLE CYCLE CHARACTERISTICS

The vehicle starts from the depot, goes to the assigned district, does the delivery, and comes back to the depot when all the visits are completed, or when the maximum allowed working time per day is reached, whichever occurs first. This complete sequence makes up the vehicle cycle. In some practical circumstances more than one tour per day can be assigned to the same lorry. This implies extra line-haul costs, but depending on the cargo characteristics, vehicle size restrictions, and other factors, multiple daily tours per vehicle might sometimes be appropriate. For the sake of simplicity, we assume that the vehicles perform just one cycle per day. The model can be easily modified to take into account multiple daily cycles.

The total cycle length is the sum of the line-haul distance D_L (either way) and the local travel distance

$$L = 2 D_L + D_z = 2 D_L + k n \delta^{-1/2}. \quad (10)$$

The total cycle time, on the other hand, is the sum of the line-haul time, the local travel and the total handling time. The latter is the sum of the times spent in delivering the cargo at the customer's locations. This evaluates to

$$T = t_{LH}^{(1)} + t_{LH}^{(2)} + t_z + p n t_s, \quad (11)$$

where $t_{LH}^{(1)}$ is the line-haul time from the depot to the district, $t_{LH}^{(2)}$ is the reverse line-haul time, t_z is the local travel time, p is probability that a customer be visited, and t_s is stop time spent in one delivery. The line-haul travel times can be estimated from a sample of field data, considering varying distances from the depot, different traffic conditions, and so on. A least-square linear regression of $t_{LH}^{(1)}$ and $t_{LH}^{(2)}$ on D_L will furnish the expected value and the standard deviation σ_{LH} of the line-haul time

$$E(t_{LH}) = E(t_{LH}^{(1)}) = E(t_{LH}^{(2)}) = \bar{\beta} D_L. \quad (12)$$

A sample of 40 values of t_{LH} , taken from line-haul runs in the city of São Paulo, Brazil, together with their respective Euclidean distances D_L , led to $\bar{\beta} = 1.74$ (D_L in km and t_{LH} in minutes) and a coefficient of variation $CV_{\beta} = 0.273$.

The expected value of T is

$$\bar{T} = E(T) = 2 \bar{\beta} D_L + E(t_z) + p n E(t_s) = 2 \bar{\beta} D_L + \bar{\alpha} k \sqrt{A n} + p n E(t_s). \quad (13)$$

Assuming statistical independence of the time elements of (11), the variance of T is given by

$$\sigma_T^2 = \text{var}(T) = 2 \left[CV_{\beta} E(t_{LH}) \right]^2 + \sigma_z^2 + p n \sigma_s^2 \quad (14)$$

and using the central limit theorem, T can be represented by the normal distribution $T \sim N(\bar{T}, \sigma_T)$. We assume that the cycle time cannot exceed a maximum of H_1 working hours per day, imposed by labour restrictions, and company policies. Let $x \sim N(0,1)$ be the unit normal variate. Adopting a 98 percentile (monotail distribution), $x = 2.06$, and then

$$g_1(n) = \bar{T} + 2.06 \sigma_T \leq H_1 \quad (15)$$

is a restriction that must be always respected. In fact, whenever the lorry driver returns to the depot with non-delivered products at the end of the day, the delivery would be postponed to the next day. As a consequence, the level of service to the clients would be impaired.

We also assume that the vehicle crew are paid normal wages up to the limit of H_0 working hours per day (8 hours). Above this level the crew is entitled to receive an overtime payment. Let H_{OV} be the expected daily overtime of a crew. The expected value of T , given $T > H_0$, is expressed by (Kendall, 1956) as

$$E(T | T > H_0) = \bar{T} + \sigma_T \left(\frac{\phi(H_0)}{1 - \Phi(H_0)} \right) \quad (16)$$

where $\phi(H_0)$ is the normal density function of $T \sim N(\bar{T}, \sigma_T)$ at $T = H_0$, and $\Phi(H_0)$ is the corresponding normal cumulative probability function. Then

$$H_{OV} = [E(T | T > H_0) - H_0] [1 - \Phi(H_0)] = (\bar{T} - H_0) [1 - \Phi(H_0)] + \sigma_T \phi(H_0). \quad (17)$$

Let $E(u)$ and σ_u be respectively the mean and the standard deviation of the quantity u of product delivered per visiting point. Then, assuming statistical independence of the customer's demands, the expected value and the variance of the total vehicle load U in one tour is given by

$$\bar{U} = E(U) = p n E(u) \quad \text{and} \quad \sigma_U^2 = Var(U) = p n \sigma_u^2. \quad (18)$$

According to the central limit theorem, U can be represented by the normal distribution $U \sim N(\bar{U}, \sigma_U)$. If W is the lorry capacity, and adopting a 98 monotail percentile, one additional restriction that must be respected is

$$g_2(n) = \bar{U} + 2.06 \sigma_U \leq W. \quad (19)$$

Given a specific servicing district and a vehicle of capacity W , the maximum number n^* of visiting points to be assigned to a district will be given by

$$n^* = \max n \quad \text{s.t.} \quad g_1(n) \leq H_1 \quad \text{and} \quad g_2(n) \leq W. \quad (20)$$

5. SPACE DIVISION INTO SECTORS AND RINGS

Since the distribution effort over the region \mathcal{R} is not homogeneous, our objective is to divide the space into quasi-homogeneous partitions, with approximately the same number of vehicles assigned to each subset. At the beginning of the analysis we do not have much information on the general characteristics of the system, and therefore we use approximate criteria to divide the region \mathcal{R} into sectors and rings. In particular, we relax the probabilistic representation of the variables, approximating them by their expected values.

Let m_i be the number of vehicles assigned to a partition i . Since at least one vehicle is assigned to each district, the partition i is also composed of m_i districts. Suppose that the distribution effort is time restricted, i.e. constraint (15) is binding. Let d_i be the average distance from the depot to the partition i , v_{LH} the line-haul speed, and H_1 the daily maximum working time. The time spent by the lorry in the line-haul (both ways), per tour, is given by $2d_i/v_{LH}$. With regard to the distribution effort, the line-haul time is wasted. Then, the fraction f of H_1 that is effectively used for the distribution effort in partition i is

$$f_i = 1 - \frac{2d_i/v_{LH}}{H_1} . \quad (21)$$

Let τ_i be the average vehicle travelling time between two successive servicing points in one of the districts of the subregion i (all the districts of a same subregion assumed to be equal). Dividing (2) by v_z , we approximate τ_i by

$$\tau_i = \frac{k \delta_i^{-1/2}}{v_z} , \quad (22)$$

where v_z is the vehicle speed within the district. Each delivery visit will consume a time $\tau_i + t_{s,i}$ on average, where $t_{s,i}$ is the mean stop time per visit in partition i . Thus, the vehicle will be able to visit at most n_i points (customers) per tour. This is given by

$$n_i = \frac{f_i H_1}{\tau_i + t_{s,i}} . \quad (23)$$

Suppose the partition i has y_i points, from which $p y_i$ will be visited in the tour. Then the required number of vehicles for partition i is

$$m_i = \frac{p y_i}{n_i} = \frac{p \delta_i A_z (\tau_i + t_{s,i})}{f_i H_1} = \frac{p \delta_i A_z \left(\frac{k \delta_i^{-1/2}}{v_z} + t_{s,i} \right)}{f_i H_1} \quad (\text{time restricted}), \quad (24)$$

where A_z is the district area.

Suppose now that the distribution effort is capacity restricted. If W is the lorry capacity and u_i is the mean quantity of cargo delivered at a servicing point in the partition i , then the number of points to be visited in one tour is

$$n_i = \frac{W}{u_i} \quad (\text{capacity restricted}), \quad (25)$$

and the required number of lorries for partition i is

$$m_i = \frac{p y_i}{n_i} = \frac{p \delta_i A_z u_i}{W} \quad (26)$$

Since vehicles are of a uniform type, the distribution effort can be measured by the number of required lorries in each district, given by relations (24) or (26), depending on the type of restriction. In order to divide the region \mathcal{R} into quasi-homogeneous partitions we adopt a rectangular raster or grid-cell spatial structure (Star and Estes, 1990) for the representation of the spatially-varying variables. In accordance with the raster data model, the region \mathcal{R} under analysis is cut into elementary square cells of 0.5-km side. A record contains the x, y ground coordinates of the corresponding cell center (the origin was taken conveniently on the city's map), its Euclidean distance from the depot, the number of points to be visited, the mean stopping time $t_s(x, y)$ spent in one visit, and the mean quantity of cargo $u(x, y)$ delivered per client, per visit. The empty cells located within the region \mathcal{R} are also recorded, assigning zero values wherever appropriate. The cells are to be ordered in different ways, depending on the adopted spatial division criteria, which will be discussed later in this section.

Taking the depot as reference, let us order the cells of the grid according to a certain rule. Let $j = 1, 2, \dots, M$ represent the sequence of cells in the ordered fashion, where M is the total number of cells in the grid. Let Q_j be the cumulative distribution effort, given by summing up (24) and (26)

$$Q_j = \sum_{i=1}^j \left(\frac{k \delta_i^{-1/2}}{v_z} + t_{s,i} \right) \frac{p \delta_i a}{f_i H_1} \quad (\text{time restricted}), \quad (27)$$

or

$$Q_j = \sum_{i=1}^j \frac{p \delta_i u_i a}{W} \quad (\text{capacity restricted}), \quad (28)$$

where a is the area of an unit cell. Taking out constants, equations (27) and (28) reduce respectively to

$$Q_j = k' \sum_{i=1}^j \left(\frac{k \delta_i^{-1/2}}{v_z} + t_{s,i} \right) \frac{p \delta_i}{f_i} \quad (\text{time restricted}), \quad (29)$$

or

$$Q_j = k'' \sum_{i=1}^j p \delta_i u_i \quad (\text{capacity restricted}), \quad (30)$$

where k' and k'' are constants.

Next we divide the region \mathfrak{R} into a number S of sectors of equal distribution effort. For that, we order the cells $j = 1, 2, \dots$ of the lattice according to the increasing values of Q_j , along the angle θ formed by the x axis and the line linking the centre of the cell to the depot. In order to do this, we adopt one of the models above (time or capacity restricted) to get the values of Q_j . At this stage we may assume either one of the indicated restrictions. In most cases, previous experience will indicate the appropriate choice. If the final results of the model do not agree with the hypothesis, the model can iterate assuming the other type of restriction.

Let Q_M be the total distribution effort obtained by setting $j = M$ in equation (29) or (30). Now we split the cell set into S subsets such that each of them will have a distribution effort equal to Q_M / S . Fig. 3a describes the process. Let j_1, j_2, \dots, j_{S-1} be the breaking points, i.e. the transition points separating one subset from the next. These breaking points are determined such that

$$Q_{j_1} = Q_{j_2} - Q_{j_1} = \dots = Q_{j_{S-1}} - Q_{j_{S-2}} = Q_M - Q_{j_{S-1}} = \frac{Q_M}{S}. \quad (31)$$

Now we use the same process to split each sector into R rings. For this, we order all the cells contained in one sector according to the distance from the depot (Fig 3b). The total distribution effort Q_M is calculated, and an analogous process is used to obtain the R equal-effort subsets. The combined sector and ring divisions lead to $S \times R$ subregions. The values of S and R are chosen empirically, depending on the size and heterogeneity of the region \mathfrak{R} under study. It is assumed that each partition can be analysed as a homogeneous entity, meaning that the density δ , the distance d from the depot, as well as the other point variables are approximately constant over each partition (Newell and Daganzo, 1986b).

6. THE COST FUNCTION

One of the objectives of our model is to define the best vehicle size for the distribution problem under analysis. Although the supply of lorries in the automotive market is restricted to discrete options, we adopt a continuous representation for the capacity W , letting it vary in the interval $W_{MIN} \leq W \leq W_{MAX}$, whose limits are imposed by operational factors. A set of 12 lorries of varying capacity available in the Brazilian market was analysed. The model can be applied separately to each available lorry type, or else, in a continuous search over W as shown next.

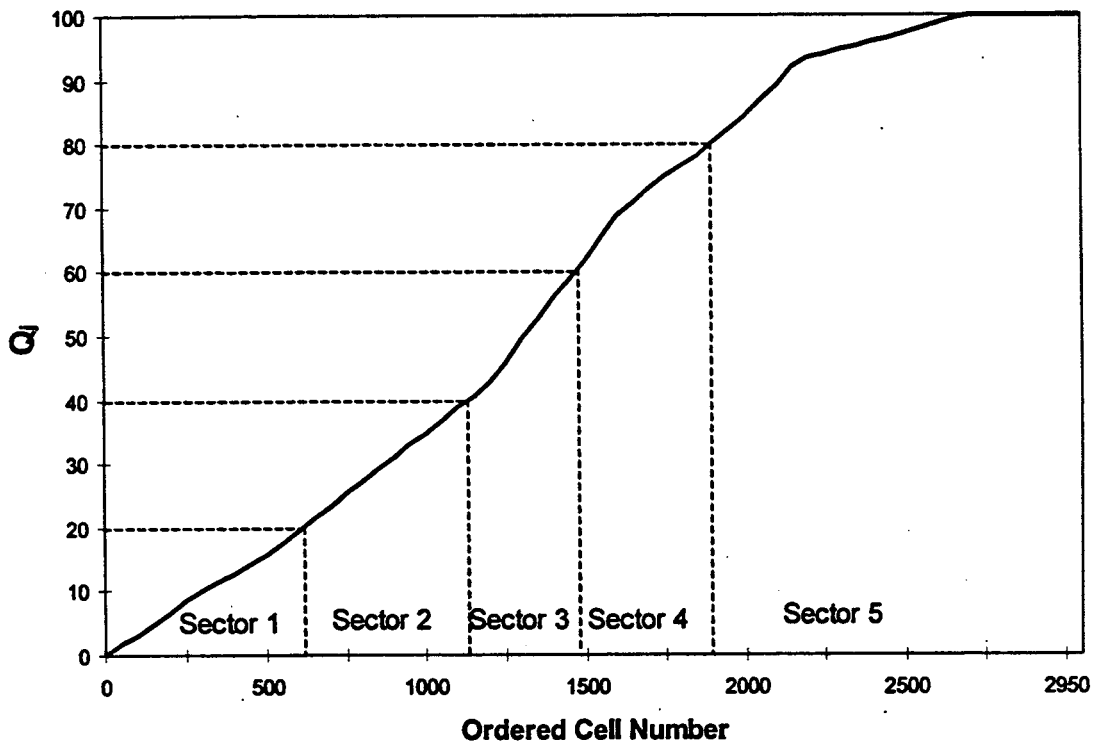


Figure 3a - Division of region \mathcal{R} into 5 sectors

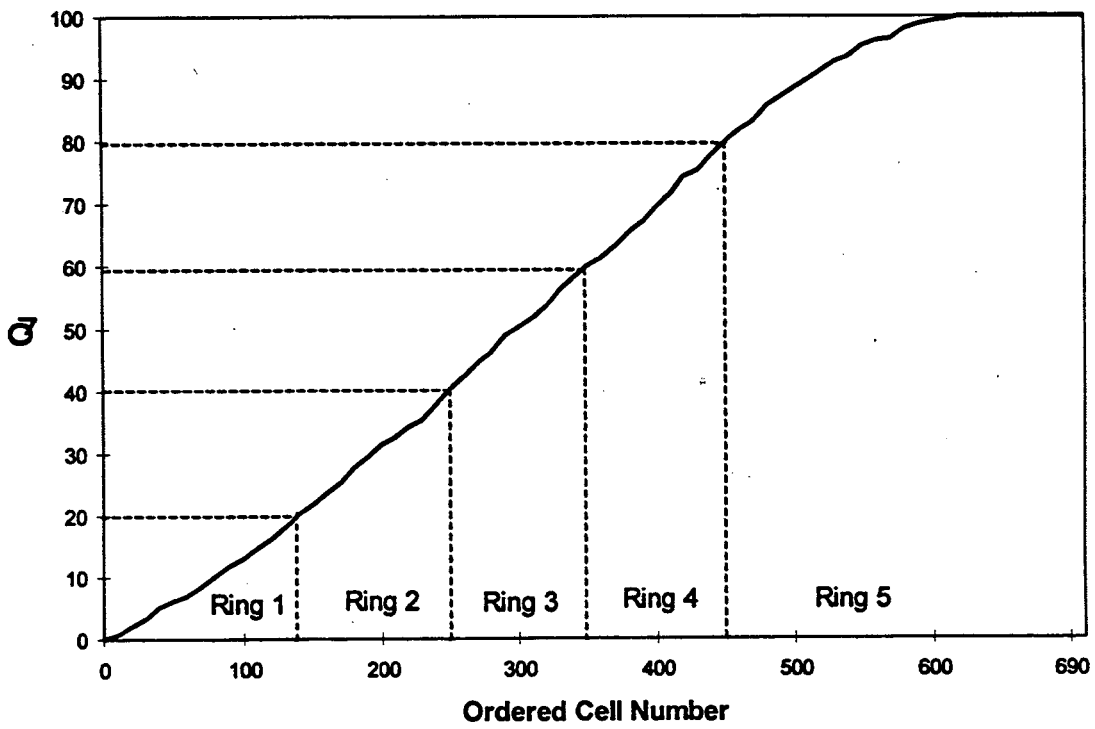


Figure 3b - Division of sector 1 into 5 rings

Operating expenses are grouped into mileage costs (fuel, tires, maintenance) and hourly costs (crew wages, lorry depreciation, insurance). The following expressions were fitted to the data

$$C_{EM} = a_0 W^{a_1} \quad (\text{US\$/vehicle/km}) \quad (32)$$

$$C_{HR} = b_0 W^{b_1} \quad (\text{US\$/vehicle/hour}), \quad (33)$$

with $a_0 = 4.08 \times 10^{-3}$, $a_1 = 0.5$, $b_0 = 0.480$, and $b_1 = 0.4$, and W measured in kg. In addition to these operating costs, a marginal overtime cost $C_{EX} = \text{US\$ } 8.00/\text{hr}$ is incorporated to the cost function whenever the daily vehicle cycle time exceeds H_0 . Total shipment-handling and warehousing costs (Higginson, 1993) are assumed to be independent of vehicle size, and were not incorporated in the objective function. Inventory costs of items in transit to customers (Burns et al., 1985) were not considered as well, since they are constant. We seek the (uniform) fleet of lorries, represented by the number m of vehicles and capacity W , that minimizes the total daily distribution cost.

Let i be a generic ring. Typically, when one varies W , there is a point $W = \hat{W}_i$ in the interval $W_{MIN} \leq W \leq W_{MAX}$ where the transition from the capacity-restricted situation to the time-restricted situation will occur. Clearly the capacity-restricted phase will correspond to the interval $W_{MIN} \leq W \leq \hat{W}_i$, and the time-restricted phase to the interval $\hat{W}_i \leq W \leq W_{MAX}$. Depending on the characteristics of the problem, it may occur that $\hat{W}_i \equiv W_{MIN}$ or $\hat{W}_i \equiv W_{MAX}$, which are particular situations of the more general case under analysis.

Let us first analyse the cost function for the capacity-restricted interval $W_{MIN} \leq W \leq \hat{W}_i$. The average cycle length L_i for ring i is given by (10), where the number n_i of visited points per tour is given by (25). Then

$$L_i = 2 D_{Li} + \frac{k W \delta_i^{-1/2}}{u_i} \quad (34)$$

The cycle time, on the other hand, is given by (13), where we substitute $p n$ by (25)

$$T_i = 2 \bar{\beta} D_{Li} + \bar{\alpha} k \sqrt{\frac{A_z W}{u_i}} + \frac{W t_{st}}{u_i}, \quad (35)$$

but the area A_z of a district in the ring i is approximately equal to A_i / m_i , where A_i is the area of the ring i . Putting $A_z = A_i / m_i$ into (26) produces

$$m_i = \sqrt{\frac{p \delta_i A_i u_i}{W}} \quad (36)$$

leading to
$$A_z = \sqrt{\frac{A_i W}{p \delta_i u_i}} \quad (37)$$

Substituting (37) in (35)

$$T_i = 2 \bar{\beta} D_{L_i} + \bar{\alpha} k \left(\frac{A_i W^3}{p \delta_i u_i^3} \right)^{1/4} + \frac{W t_{\pi}}{u_i} \quad (38)$$

The daily total distribution cost C_i associated with the ring i is

$$C_i = m_i (C_{KM} L_i + C_{HR} T_i + C_{EX} H_{OV}) \quad (39)$$

We substitute m_i by (36) in expression (39), L_i by (34), C_{KM} by (32), C_{HR} by (33), and T_i by (38). A closed form expression for the expected overtime H_{OV} as a function of W is not available. We can express C_i in a simplified additive form

$$C_i = \beta_1 W^{-1/2+a_1} + \beta_2 W^{-1/2+b_1} + \beta_3 W^{1/2+a_1} + \beta_4 W^{1/4+b_1} + \beta_5 W^{1/2+b_1} + \beta_6 g_C(W), \quad (40)$$

where $g_C(W)$ represents the product $m_i H_{OV}$ as a function of W , for the capacity constrained situation.

Let us now analyse the cost function within the time-restricted interval $\hat{W}_i \leq W \leq W_{MAX}$.

Both the cycle length and the cycle time do not depend on W in this case. The number m_i of vehicles assigned to the ring i , given by equation (24), does not also depend on W . Substituting C_{KM} and C_{HR} respectively by (32) and (33) in (39), we can express C_i as a function of W only

$$C_i = \gamma_1 W^{a_1} + \gamma_2 W^{b_1} + \gamma_3 g_T(W) \quad \text{with } \gamma_1, \gamma_2 > 0, \quad (41)$$

where $g_T(W)$ represents the product $m_i H_{OV}$ as a function of W , for the time constrained situation. The total cost function is obtained by adding up all the costs in the ring. For any W within the interval $[W_{MIN}, W_{MAX}]$ there will be: (a) rings $i = 1, 2, \dots$ with $W \leq \hat{W}_i$, i.e. capacity-restricted subregions; (b) rings $j = 1, 2, \dots$ with $W \geq \hat{W}_j$, i.e. time-restricted subregions. Then, the total cost function will be of the type

$$C = \sum_i \left[\beta_{1i} W^{-1/2+a_1} + \beta_{2i} W^{-1/2+b_1} + \beta_{3i} W^{1/2+a_1} + \beta_{4i} W^{1/4+b_1} + \beta_{5i} W^{1/2+b_1} + \beta_{6i} g_C(W) \right] + \sum_j \left[\gamma_{1j} W^{a_1} + \gamma_{2j} W^{b_1} + \gamma_{3j} g_T(W) \right] \quad (42)$$

A Fibonacci search heuristic (Converse, 1970) is used in our model to get the value of W that minimizes (42). This optimization method is very efficient for convex functions of one variable constrained to a previously defined interval. The convexity of expression (42), however, will depend on the specific conditions of each application problem. Although we have not encountered local optima problems in our applications, we are presently testing more sophisticated optimization techniques, in particular a hybrid process involving genetic algorithm and simulated annealing, associated with the gradient method (De Cursi et al., 1995).

7. FLEET OPTIMIZATION

Let W be a given value of the vehicle capacity at a certain stage of the search process (section 6). Every cell of the grid has been assigned to a ring as described in section 5. For each ring i we now compute the area A_i , the number of visiting points y_i , the density of points δ_i , the mean distance from the depot \bar{d}_i , the mean \bar{u}_i and the standard variation σ_{u_i} of the quantity of product delivered per visiting point, and the mean \bar{t}_{si} and the standard variation σ_{tsi} of the time spent in one visit. We vary now m_i , the number of vehicles or districts to be assigned to the ring i . Given m_i , the expected number n_i of points per district in the ring i is

$$n_i = y_i / m_i. \quad (43)$$

Expression (15) gives the upper bound \hat{T}_i of the total daily working time for ring i

$$\hat{T}_i = \bar{T}_i + 2.06 \sigma_{T_i} \leq H_1, \quad (44)$$

where \bar{T}_i is given by (13), σ_{T_i} by (14), and n_i by (43), leading to

$$\begin{aligned} \hat{T}_i = & 2 \bar{\beta} \bar{d}_i + \bar{\alpha} k \left(\frac{A_i y_i}{m_i} \right)^{1/2} + \frac{p y_i}{m_i} t_{si} + \\ & + 2.06 \left[2 (CV_{\beta} \bar{\beta} \bar{d}_i)^2 + (\sigma_{\alpha}^2 k^2 A_i + p \sigma_{tsi}^2) \frac{y_i}{m_i} \right]^{1/2} \leq H_1. \end{aligned} \quad (45)$$

On the other hand, expression (19) gives the upper bound \hat{U}_i of the vehicle load \bar{U}_i for one tour in the ring i

$$\hat{U}_i = \bar{U}_i + 2.06 \sigma_{U_i} \leq W, \quad (46)$$

where \bar{U}_i and σ_{U_i} are given by (18), and n_i by (43), leading to

$$\hat{U}_i = \frac{p y_i}{m_i} \bar{u}_i + 2.06 \left(\frac{p y_i}{m_i} \right)^{1/2} \sigma_{u_i} \leq W. \quad (47)$$

We search now for the optimal value of m_i (integer) that satisfies both constraints (45) and (47) and minimizes the cost function for ring i . In order to do this we define an objective function that includes two penalty terms, as follows

$$\Psi_i = m_i (C_{KM} \bar{L}_i + C_{HR} \bar{T}_i + C_{EX} H_{OV}) + g_T + g_U, \quad (48)$$

with \bar{L}_i taken from (10)

$$\bar{L}_i = 2 \bar{d}_i + k \frac{y_i}{m_i} \delta_i^{-1/2}, \quad (49)$$

and \bar{T}_i from (13)

$$\bar{T}_i = 2\beta \bar{d}_i + \bar{\alpha} k A_i^{1/2} \left(\frac{y_i}{m_i} \right)^{1/2} + \frac{p y_i}{m_i} t_{xi}, \quad (50)$$

and with

$$g_T = R (\hat{T}_i - H_1)^C \quad \text{and} \quad g_U = R (\hat{U}_i - W)^C, \quad (51)$$

where R is a positive constant and C is a positive even number ($C = 4$ in our model).

Applying this search process to all rings, we get the sub-optimal values m_i^* of m_i . These values will be further checked, as explained in the following section.

8. FLEET LOAD BALANCE

Since m_i is an integer, its optimum value so obtained does not guarantee that at least one of the constraints (45) or (47) be active. In the general case there will be a non-used distribution capacity in almost every ring, due to the rounding off in m_i . If, for each sector, we relax the boundary limits of the neighbouring rings within a same sector, letting them vary within certain limits, a better solution may be attained in terms of reduced costs. This is due to a better load balance among the vehicles assigned to the sector. We admit that the sector boundaries already obtained will remain unchanged. Of course, if the sector contours are also relaxed, a further improvement in the solution might be obtained. Nevertheless, as will be seen in the application example, the marginal effect of this second approximation in the optimal solution is usually small, not justifying the additional effort.

Let us consider a sector j , which contains R_j rings. Let $i = 1, 2, \dots$ represent the rings that compose sector j . First, all the cells contained in sector j are ordered according to their increasing distance from the depot, forming a sequence $\ell = 1, 2, \dots$ where ℓ is the order of the cell. Whenever two cells present the same distance from the depot, the model does not distinguish between them,

just taking the cells as they appear in the sequence. Since the rings have been formed according to the increasing distance of the cells from the depot (see section 4), there will be $R_j - 1$ transition points in the ordered sequence. These transition points, represented by $x_1, x_2, \dots, x_{R_j-1}$, correspond to a change of pertinence of the cells from one ring to the next. The sub-optimal number of vehicles for each ring, m_1, m_2, \dots, m_{R_j} , are also available from the first approximation run of the model.

A Hooke and Jeeves search technique (Hooke and Jeeves, 1962) is used to obtain the optimal boundaries of the rings in sector j , represented by $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{R_j-1}^*$. For each stage of the search method a feasible solution, given by the vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_{R_j-1})$, is under evaluation. The number of vehicles in each ring is allowed to vary slightly now, in order to accommodate a final refinement of the solution. It is not advisable to let the number of vehicles in each ring vary too much because it may disrupt the balance of the distribution effort attained with the space division described in section 4. Since m_1, m_2, \dots, m_{R_j} are discrete variables and since they are allowed to vary over a narrow interval, given a tentative solution $x = (x_1, x_2, \dots, x_{R_j-1})$, an exhaustive evaluation is performed for each ring i over the interval $m_i^{(min)} \leq m_i \leq m_i^{(max)}$, where $m_i^{(min)}$ and $m_i^{(max)}$ are the predefined extremes of the interval. With respect to the time restriction (45) and the vehicle capacity restriction (47), the value m_i^* of m_i that minimizes the cost function (48) is selected. This is done separately for each ring of sector j .

At the end of this balancing routine the boundaries of the rings in each sector will be slightly adjusted. Also, the number of vehicles assigned to each ring may have changed a little in order to accommodate for such balancing.

9. DELIVERY DISTRICTS

At this stage the ring boundaries have been defined. Also, for each ring i the number m_i of districts is already known. The question now is how to partition a ring i into m_i districts.

9.1 District slenderness

Daganzo (1984 a,b), Han and Daganzo (1986), and Newell and Daganzo (1986a) analysed the influence of the district dimensions and shapes on the transportation costs associated with the vehicle tour. A rectangular district of sides ℓ and ℓ' ($\ell \leq \ell'$), is normally used as a reference in the literature because minor variations in the shapes of zones do not greatly affect the length of the TSP tours within them (Daganzo, 1984b; Larson and Odoni, 1981). If the rectangular district is placed with the long side in the direction of the depot, there is a trade-off between the line-haul distance and the local travel distance (Daganzo, 1984b). In fact, it may be advantageous to elongate the rectangle toward the depot, because in that case the distance to reach the district is smaller. But, in doing so the rectangle tends to be slender and, beyond certain limits, this deformation can lead to a substantial increase in the travel distance within the district. The results obtained by Daganzo (1984a,b), Han and Daganzo (1986) and Newell and Daganzo (1986a) are based on a specific routing strategy (see section 2). In our research, however, we have assumed that the individual vehicle tours follow the more general TSP routing strategy. In accordance, a similar investigation of the effects of district proportions on local travel distance was deemed necessary.

Let $\gamma = \ell / \ell'$ be the slenderness factor of the rectangle. Suppose initially a square district ($\gamma = 1$) with a relatively large number n of servicing points ($n \geq 15$) randomly and independently dispersed over it (Larson and Odoni, 1981). For this situation one can estimate the local travel distance per visiting point as indicated in section 2. Now, for $0 \leq \gamma \leq 1$, we introduce an empirical corrective coefficient ρ ($\rho \geq 1$) to be applied on $E(D_z)$ given by relation (1)

$$E(D_z) = \rho k \sqrt{A n}. \quad (52)$$

Taking a hypothetical rectangular district of constant area, we developed a total of 1068 TSP problems, in a Monte Carlo experiment. The slenderness factor γ assumed values varying from 0.02 to 1.00, with n varying from 30 to 100. The visiting points were randomly generated according to a uniform distribution over the rectangular area. The corresponding TSPs were solved using a sequence of farthest insertion, 2-opt, and 3-opt heuristics (Laporte, 1992). After that, we applied the Hooke and Jeeves (1962) search method to the simulated results in order to calibrate the following empirical formula

$$\rho(n, \gamma) = \frac{k_1}{2} \left[1 + k_2^{\lambda-1} n^{(\lambda-1)k_3} \right] \quad \text{with} \quad \lambda = 1/\gamma, \quad (53)$$

and with $R^2 = 0.78$, leading to $k_1 = 1.0498$, $k_2 = 1.276$, and $k_3 = -0.050$. Fig. 4 shows the curves of ρ as a function of n and γ . The coefficient k_1 reflects the fact that the combination of

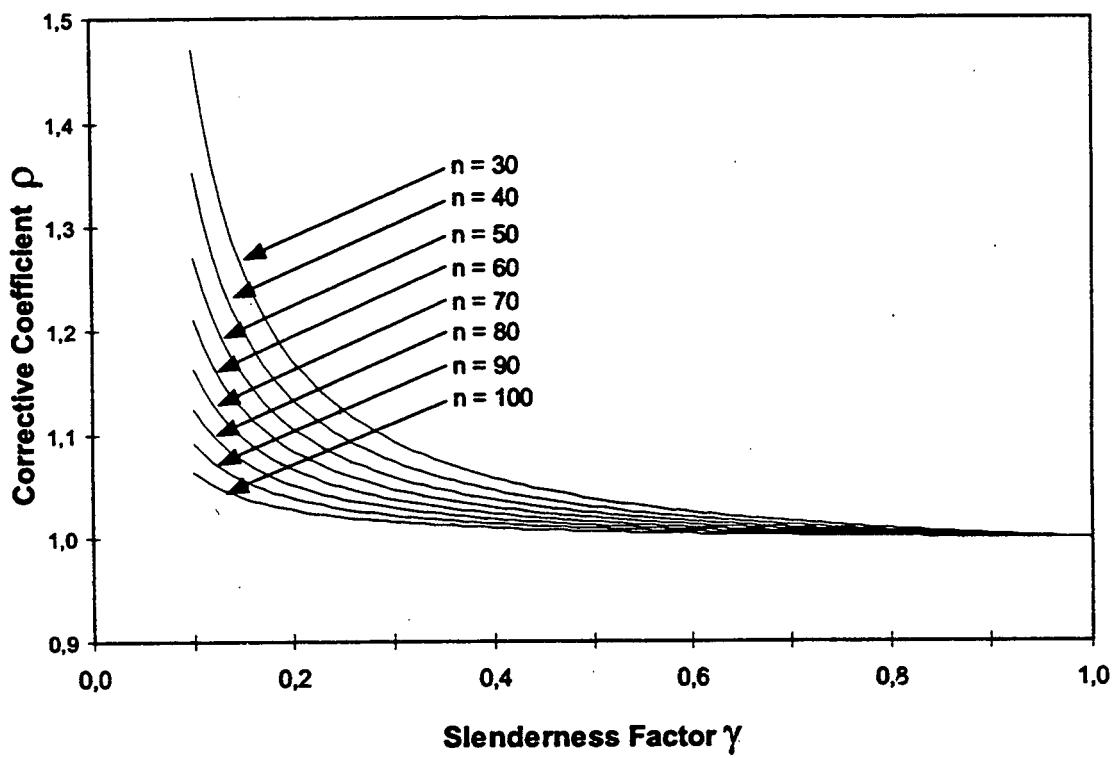


Figure 4 - Effect of district slenderness in the local travel distance.

heuristics that were used in our study to solve the TSPs is not accurate enough to reproduce Stein (1978) results. On average, it generated lengths about 5% longer than the results reported by Stein. Since our model is based on the Beardwood-Stein formulation, we have assumed $k_1 = 1$ in our analysis. Further, since the districts next to the depot are not rectangular but approximately triangular (Newell and Daganzo, 1986a), we performed a similar Monte Carlo experiment for this situation. The resulting values of k_1 , k_2 , and k_3 did not significantly change, confirming that, for relatively large values of n , relation (52) provides a good approximation to the expected length of the optimal TSP tour, being adequate for squares, as well as for triangles and rectangles (Larson and Odoni, 1981).

9.2 Partition of a ring into districts

Two arrangement patterns are considered when partitioning a ring into districts. The simplest way is to set all the districts in only one concentric ring around the depot (Fig 5). The other pattern is a two-layer scheme, with the districts distributed in two concentric rings (Fig. 6). Since the number of districts per ring is supposed to be small in order to attain a minimum degree of homogeneity in each partition, other possible district arrangements were not considered in our analysis. Nevertheless, the methodology can be easily extended to other cases. The choice of the appropriate partition scheme depends basically on the slenderness factor associated with the districts. Districts with the shorter dimension in the direction of the depot are to be avoided (Daganzo, 1984b). On the other hand, one should prefer among the possible patterns the arrangement with γ , the slenderness factor, closest to one.

First, let us analyse the one-layer arrangement pattern shown in Fig. 5. We assume, for this preliminary analysis, that the partition in question is assimilated to a perfect ring. This hypothesis is acceptable for the internal rings, but might be a bit strong for the external ones, as can be seen in Fig. 7 and 8. Nevertheless, one can get an approximate result by taking the equivalent ring with area equal to the area A_i of the partition under analysis. Since the internal radius, the angle, and the ring area are known, the external radius of the equivalent ring is mathematically defined. We also assume in this preliminary analysis that the points are uniformly and independently scattered over the ring. From Fig. 5 we have

$$\ell' = r_2 - r_1, \quad (54)$$

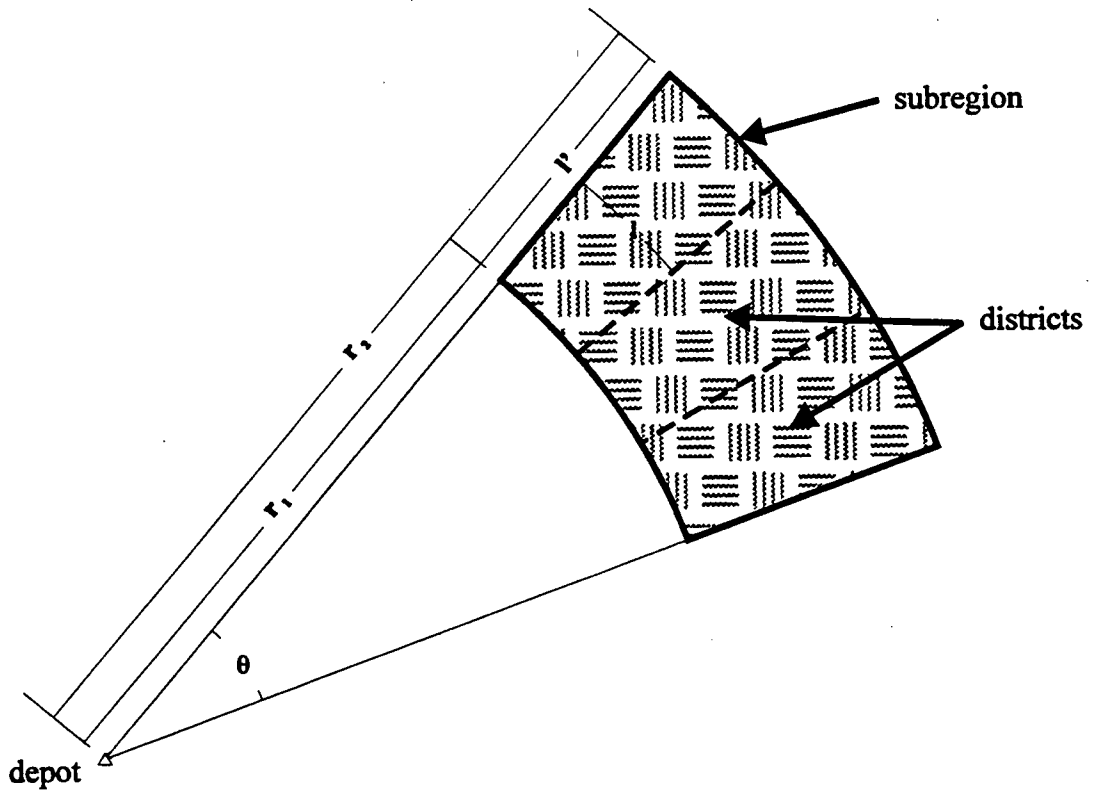


Figure 5 - Districts arranged in one layer

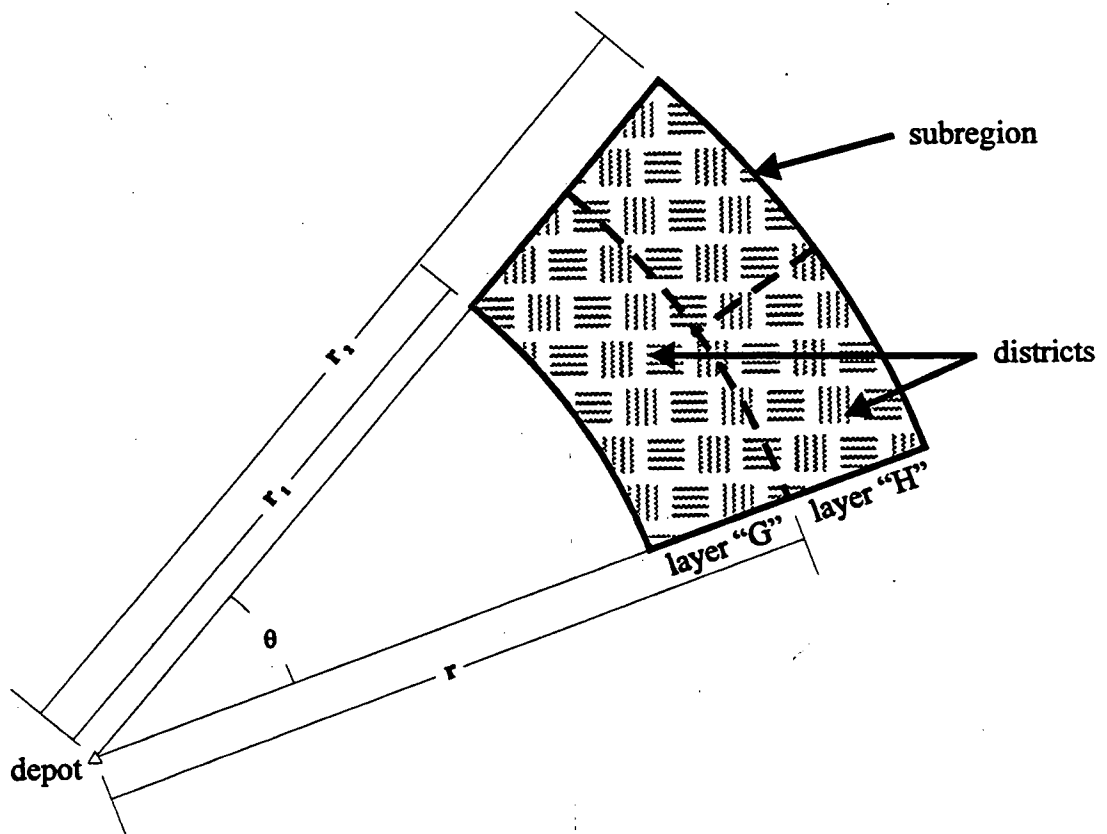


Figure 6 - Districts arranged in two layers

where r_1 and r_2 are the internal and the external radius of the ring respectively. Each district is approximated to a rectangle (Daganzo, 1984b; 1986). Assuming that the area of the rectangle is equal to the area of the district, the other side ℓ of the rectangle is given by

$$\ell = \frac{r_2 + r_1}{2} \frac{\theta}{m_i}, \quad (55)$$

where m_i is the number of districts in the ring and θ is expressed in radians. The slenderness factor is

$$\gamma = \frac{\ell}{\ell'} = \frac{1}{2} \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \frac{\theta}{m_i}. \quad (56)$$

Next, let us investigate the two-layer pattern (Fig. 5). According to the methodology described in section 5, two alternative criteria can be adopted when partitioning a region, one for time-restricted problems, and the other for capacity restricted problems. For the time-restricted case we assume equal cycle-time for all vehicles serving the ring. Let m_G and m_H be the number of districts in layers G and H respectively (with $m_G + m_H = m_i$). Let r be the radius dividing layers G and H (Fig. 5). The expected cycle-time \bar{T}_G associated with a district in layer G is given by relation (13), with $D_L = r_1$. On the other hand, A_G and n_G are the area and the number of points of a G -type district respectively. The coefficient ρ_G was introduced to take into account the slenderness effect. Then

$$\bar{T}_G = 2 \bar{\beta} r_1 + \rho_G \bar{\alpha} \sqrt{n_G A_G} + p n_G E(t_s). \quad (57)$$

The density of points in the ring i is given by

$$\delta_i = \frac{n_i}{A_i} = \frac{2 n_i}{\theta (r_2^2 - r_1^2)}, \quad (58)$$

where n_i and A_i are respectively the number of points and the area of ring i . The areas for a G -type and for a H -type district are respectively

$$A_G = (r^2 - r_1^2) \frac{\theta}{2 m_G} \quad \text{and} \quad A_H = (r_2^2 - r^2) \frac{\theta}{2 m_H}. \quad (59)$$

Hence,

$$n_G = \delta_i A_G = \frac{n_i}{m_G} \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{and} \quad n_H = \delta_i A_H = \frac{n_i}{m_H} \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (60)$$

Substituting A_G , given by (59), and n_G , given by (60), into (57) one has

$$\bar{T}_G = 2 \bar{\beta} r_1 + \rho_G \bar{\alpha} \left(\frac{r^2 - r_1^2}{m_G} \right) \sqrt{\frac{\theta n_i}{2 (r_2^2 - r_1^2)}} + \frac{p n_i}{m_G} \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) E(t_s). \quad (61)$$

Similarly, the cycle-time for a H -type district is

$$\bar{T}_H = 2 \bar{\beta} r + \rho_H \bar{\alpha} \left(\frac{r_2^2 - r^2}{m_H} \right) \sqrt{\frac{\theta n_i}{2 (r_2^2 - r_1^2)}} + \frac{p n_i}{m_H} \left(\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) E(t_s). \quad (62)$$

The slenderness factors for the G -type and H -type districts, necessary to compute ρ_G and ρ_H , are respectively

$$\gamma_G = \frac{1}{2} \frac{r + r_1}{r - r_1} \frac{\theta}{m_G} \quad \text{and} \quad \gamma_H = \frac{1}{2} \frac{r_2 + r}{r_2 - r} \frac{\theta}{m_H}. \quad (63)$$

A Fibonacci search is now applied varying r in the interval $r_1 \leq r \leq r_2$, and seeking the equality $\bar{T}_G = \bar{T}_H$. In our problem, if m_i is even we take $m_G = m_H = m_i / 2$. Because m_i is small, we take $m_G = (m_i - 1) / 2$ and $m_H = (m_i + 1) / 2$, whenever m_i is odd.

For the capacity-restricted problem, since we have assumed the servicing points uniformly and independently scattered over the ring, the equal-load criterium is attained by imposing that all districts have equal area. Setting $A_G = A_H$, substituting A_G and A_H by their values given by (59) and simplifying, we obtain

$$r = \sqrt{\frac{m_H r_1^2 + m_G r_2^2}{m_i}}. \quad (64)$$

As an example, define a ring next to the depot with $\theta = 30^\circ$, $r_1 = 0$, $r_2 = 8.51$ km, $m_i = 3$, $n_i = 274$, and $p = 1$. Suppose the service is time-restricted. Then, applying the described methodology, we get a slenderness factor of 0.087 for the one-layer partition pattern. For the two-

layer arrangement, we get $\gamma_G = 0.262$ and $\gamma_H = 0.499$, with $r = 4.97$ km. The districts, in the first scheme, are too slender. On the other hand, $\gamma_G < 1$ and $\gamma_H < 1$. Thus, the two-layer arrangement is the best choice.

Define next a ring with $\theta = 30^\circ$, $r_1 = 8.51$, $r_2 = 11.51$ km, $m_i = 3$, $n_i = 266$, and $p = 1$. The service is time-restricted. We obtain a slenderness factor of 0.582 for the one-layer partition pattern. For the two-layer arrangement, we get $\gamma_G = 4.285$ and $\gamma_H = 1.461$, with $r = 9.62$ km. The two-layer scheme leads to districts oriented with the short side in the direction of the depot ($\gamma_G > 1$ and $\gamma_H > 1$), a situation to be avoided (Daganzo, 1984b; 1986). Thus, the one-layer arrangement is the best choice.

After the partition strategy has been defined, the methodology described in section 5 is further applied to divide the ring into districts. If the one-layer scheme is chosen, we order the ring cells according to their angles, split the set into equal-effort subsets, each one corresponding to a district. If the two-layer pattern is selected, we first order the cells according to the radii, split the set into two rings, then treat each ring separately, as in the one-layer case.

10. AN EXAMPLE

The described methodology is applied to an example extracted from a parcel delivery problem in the city of São Paulo, Brazil. A rectangular raster structure (Star and Estes, 1990) is assumed for the representation of the spatially-varying variables. The region \mathcal{R} , with an area of 666 sq. km, was divided into 2,664 elementary square cells of $\frac{1}{2}$ -km side. The region comprises a total of 6385 servicing points. For each cell the following data are recorded: (a) the x,y ground coordinates of the its centre, (b) the Euclidean distance from the depot, (c) the number of servicing points in the cell, (d) the mean stopping time spent for one visit (e) the mean quantity of cargo delivered per visit, (f) the location of the cell represented by a two-level hierarchical structure (Star and Estes, 1990): the first level comprising the sector and the ring numbers to which the cell belongs, and the second level formed by the district number. This latter information is established by the model. The empty cells located within the region \mathcal{R} are also recorded, assigning zero values wherever appropriate. In this case $p = 1$, meaning that every cell with non-zero demand is visited daily. The depot location is shown in Fig. 7. Line haul average speed is 35 km/hr. Local average speed is around 24 km/hr. We have used a route factor $k_1 = 1.35$ (see section 2) throughout in the model. The normal daily crew working time is $H_0 = 8$ hrs, with a maximum of $H_1 = 10$ hrs.

Vehicle costs are computed putting $a_0 = 4.08 \times 10^{-3}$, $a_1 = 0.5$, $b_0 = 0.480$, and $b_1 = 0.4$ in equations (32) and (33). Overtime work has an additional cost of US\$ 8.00 per hour. The vehicle cargo load is measured in kilograms. Vehicles in the capacity range $500 \leq W \leq 3,500$ kg were analysed, the smallest being Chevrolet or Ford converted pick ups, and the largest being a Mercedes Benz van.

The region \mathcal{R} was first divided into 5 sectors, with each sector subdivided into 5 rings (see Section 5), leading to 25 quasi-homogeneous subregions. The delivery service is time limited (parcel cargo). The partitioning result is shown in Fig. 7. It can be noticed in Fig. 7 that rings 2,3, and 4 of sector 5, are unconnected. Some parts of such rings are located west of the depot, while the remaining parts are to the east. This spatial rupture suggests, in fact, a further partition of the rings. We partitioned sector 5 into two equal-effort sectors with the methodology explained in Section 5. Since the northwest part of the served region shows more concentration of points and cargo, the resulting division still presented unconnected rings. In order to cope with this problem we had to try other partition criteria as, for example, assigning a 2/3 effort to the northwest sector, and a 1/3 effort to the remaining part. Of course, this must be done experimentally, suggesting a future association of the described methodology with a GIS package.

A satisfactory partition was obtained with a $4/5 \times 1/5$ effort-splitting criterion, as shown in Fig. 8. Since the covered areas of the new sectors are relatively small, we have assigned 3 rings to the new sector 5, and 2 rings to sector 6. Thus, the new partitioning scheme has a total of 6 sectors and 25 rings. Fig. 9 shows the resulting partition scheme plotted on the city's map. The detailed partition of the rings into districts is not shown in Fig. 9 due to scale restrictions. The partition of the rings into districts is performed using the process described in Section 9. The boundaries of the partitions obtained with the model require further adjustment to the geographic characteristics of the region (lakes, forests). This can be done by integrating the model with a GIS software, and iterating the process until a satisfactory solution is obtained.

The first stage of the fleet optimization produced the results shown in Table 2. The minimum cost fleet comprised 90 lorries, with 500 kg capacity each, and total daily cost of US\$ 4,151.17. Although results are computed individually for each ring, Table 2 shows only three cases, formed by rings with different distances from the depot. The global solution is also shown in Table 2. The model assigned three or four districts to the rings in sectors 1 to 4 (each district being assigned to a vehicle). This reflects the quasi-homogeneity of the partitioning process. With regard to sectors 5 and 6, however, the number of districts assigned to the rings vary from 2 to 6. This

is due, as explained, to the need to partition one of the sectors, thus breaking the homogeneity of the process.

Next we applied the fleet load balance for each of the six sectors (see Section 8). The results are shown in Table 3. Although the number of cells assigned to each ring have changed, the number of lorries in each ring have stayed constant. The new partition has lead to a small 0.14% reduction on the total daily cost, now reduced to US\$ 4,145.41.

11. CONCLUSIONS

This paper presented an approximate method for the definition of districts associated with the urban distribution of goods. The best vehicle size is also investigated by the model. The variables are treated in a probabilistic way, allowing for a better modelling of reality. It is known that the vehicle cycle time and the cargo load, in physical distribution problems, present strong random variations. This justifies the probabilistic treatment of the main variables of the problem. On the other hand, the segmentation of the region \mathcal{R} into quasi-homogeneous partitions leads to a more robust model, because the optimal assignment of visiting points to the vehicles, in the case of large urban regions, is far from the uniform allocation criterion adopted in other models. This is confirmed in the results presented in Table 3. Due to the differences in the distribution effort over the region \mathcal{R} , some vehicles are assigned a number of delivery points in the bracket 50-52 per tour. Other rings, on the other hand, show a number of visiting points in the range 92-96 per tour. Accordingly, the unit cost values (\$/point) change dramatically, the smallest value being \$ 0.52 /stop, and the largest being \$ 1.00 /stop, a relative increase of 92 %.

Although the results obtained so far seem quite promising and relatively easy to apply to real problems, some improvements are necessary. We intend to develop a continuous formulation to the problem, taking the sector angles and the ring radii as continuous variables. This will reduce the data acquisition effort and speed-up the computations. Another improvement is the usage of more efficient optimization algorithms, avoiding possible local extreme points. The ring connectivity problem is another question to be solved. The solution of this problem is under investigation now. A combination of a commercial GIS software with a continuous approach to define sectors and rings, seems to be a promising way to address this problem. Finally, it is intended to use software resources in order to establish a more formal relationship between the computer modelling and spatial discontinuities (rivers, lakes, high mountains). For instance, by

assigning a penalty function to such discontinuities, the model could avoid the generation of districts cut across by such elements.

ACKNOWLEDGMENT

The authors gratefully acknowledge the financial support of the Brazilian National Scientific and Technological Council (CNPq), grant n° 520474/96-1.

REFERENCES

- Bastian, C., and Rinnooy Kan, A.K. (1992), "The stochastic vehicle routing problem revisited", *European Journal of Operational Research*, vol 56, pp. 407-412.
- Beardwood, J., Halton, J.H., and Hammersley, J.M. (1959), "The shortest path through many points", *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, vol 55, pp 299-327.
- Bertsimas, D. J. (1992), "A vehicle routing problem with stochastic demand", *Operations Research*, 40, pp. 574-585.
- Bertsimas, D. J., and Howell, L. H. (1993), "Further results on the probabilistic traveling salesman problem", *European Journal of Operational Research*, 65, pp 68-95.
- Burns, L.D., Hall, R.W., Blumenfeld, D.E., and Daganzo, C.F. (1985), "Distribution strategies that minimize transportation and inventory costs", *Operations Research*, Vol 33, N° 3, pp. 469-490.
- Converse, A.O. (1970), *Optimization*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Daganzo, C.F. (1984a), "The length of tours in zones of different shapes", *Transportation Research -B*, vol 18B, pp 135-146.
- Daganzo, C.F. (1984b), "The distance traveled to visit N points with a maximum of C stops per vehicle: an analytic model and an application", *Transportation Science*, vol. 18, 4, pp 331-350.
- Daganzo, C.F. (1985), "Supplying a single location from heterogeneous sources", *Transportation Research -B*, vol 19B, pp 409-419.
- De Cursi, J.E., and Cortes, M.B. (1995), "General genetic algorithms and simulated annealing perturbation of the gradient method with a fixed parameter", in: Topping, B.H.V. (ed.) *Developments in Neural Networks and Evolutionary Computing for Civil and Structural Engineering*, Civil Comp Press, pp 189-198.

- Gendreau, M., Laporte, G., and Séguin, R. (1996), "Stochastic Vehicle Routing", *European Journal of Operational Research*, vol 88, pp. 3-12.
- Han, A.F.W, and Daganzo, C.F. (1986), "Distributing nonstorable items without transshipments", *Transportation Research Record* 1061, TRB, 32-41, Washington, DC.
- Higginson, J. K. (1993), "Modeling shipper costs in physical distribution analysis", *Transportation Research- A*, vol. 27A, 113-124.
- Hooke, R., and Jeeves, T.A. (1962), "Direct search solution of numerical and statistical problems", *Journal of the Association of Computing Machinery.*, 8, No. 2, pp. 212-229.
- Jaillet, P., and Odoni, A. (1988), "The probabilistic vehicle routing problem", in: B.L. Golden and A.A. Assad (eds.) *Vehicle Routing: Methods and Studies*, North-Holland, Amsterdam.
- Kendall, M.G. (1956), *Exercises in Theoretical Statistics*, Charles Griffin, London.
- Lambert, V., Laporte, G. and Louveax, F.V. (1993), "Designing collection routes through bank branches", *Computers & Operations Research* 20, 783-791.
- Langevin, A., and Soumis, F. (1989), "Design of multiple-vehicle delivery tours satisfying time constraints", *Transportation Research -B* , vol 23B, pp 123-138.
- Laporte, G. (1992), "The traveling salesman problem: an overview of exact and approximate algorithms", *European Journal of Operational Research*, vol 59, pp. 231-247.
- Laporte, G., Louveax, F.V. and Mercure, H. (1989), "Models and exact solutions for a class of stochastic location-routing problems", *European Journal of Operations Research* 39, 71-78.
- Larson, R.C. (1972), *Urban Police Patrol Analysis*, The MIT Press, Cambridge, Mass.
- Larson R.C., and Odoni, A.R. (1981), *Urban Operations Research*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Lomnicki, Z.A. (1967), "On the distribution of products of random variables", *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 29B, pp 513-524.
- Newell, G.F., and Daganzo, C.F. (1986a), "Design of multiple-vehicle tours - I A ring-radial network", *Transportation Research -B*, Vol. 20, 5, pp.345-363.
- Newell, G.F., and Daganzo, C.F. (1986b), "Design of multiple-vehicle tours - II other metrics", *Transportation Research -B*, Vol. 20, 5, pp.365-376.
- Novaes, A.G. (1989), *Logistics Systems: Transport, Storage and Physical Distribution of Products* (in Portuguese), Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, Brazil.

- Pogu, M., and De Cursi, J.E.S. (1994), "Global optimization by random perturbation of the gradient method with a fixed parameter", *Journal of Global Optimization*, Vol. 5, pp. 159-180.
- Samet, H. (1995), *Applications of Spatial Data Structures*, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Stein, D. M. (1978), "An asymptotic probabilistic analysis of a routing problem", *Mathematics of Operations Research*, vol 3, pp 89-101.
- Stewart, W.R., Jr., and Golden, B.L. (1983), "Stochastic vehicle routing: A comprehensive approach", *European Journal of Operations Research* 14, 371-385.

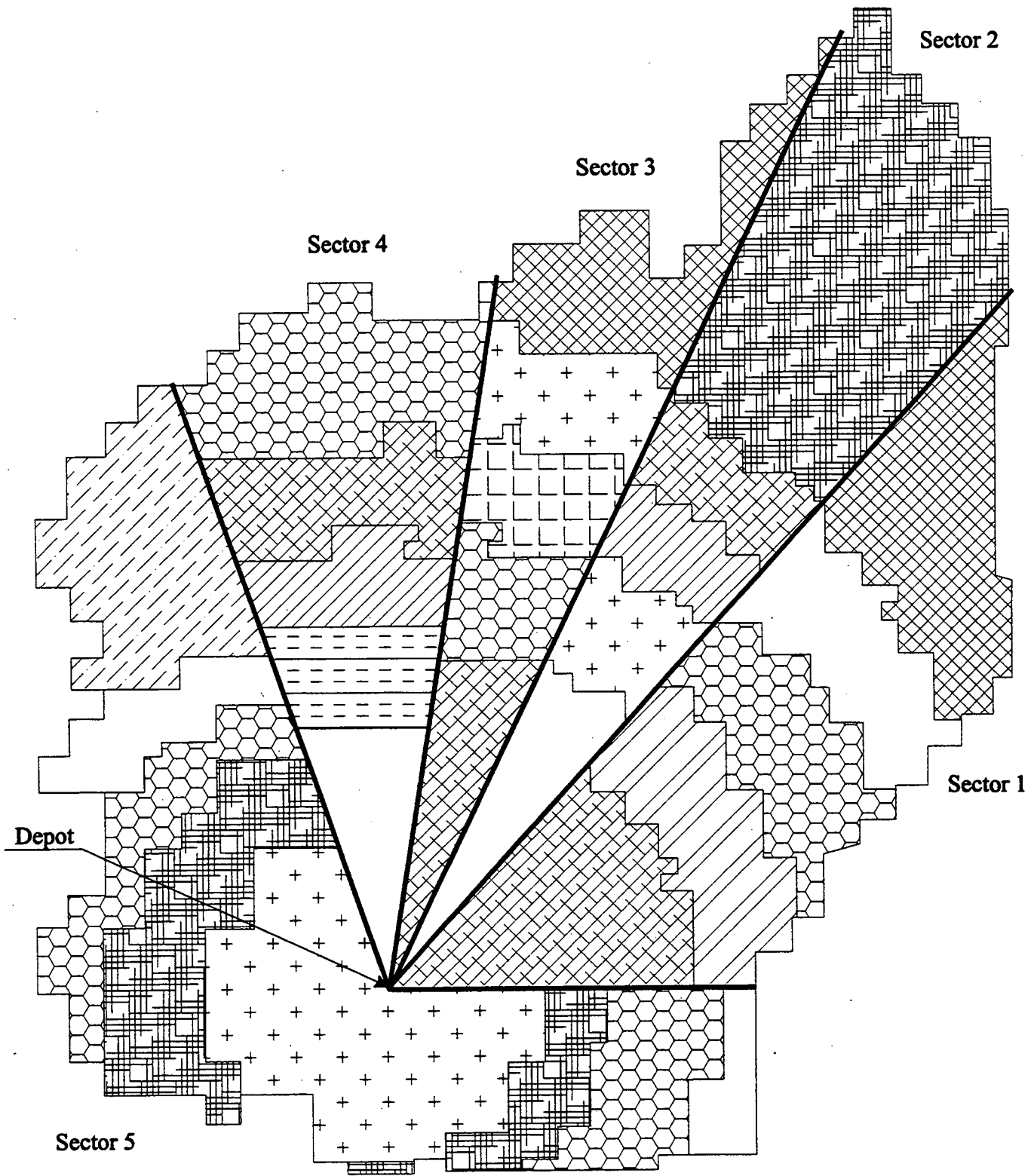


Figure 7 - Partitioning region \mathcal{R} into 5 sectors and 25 rings

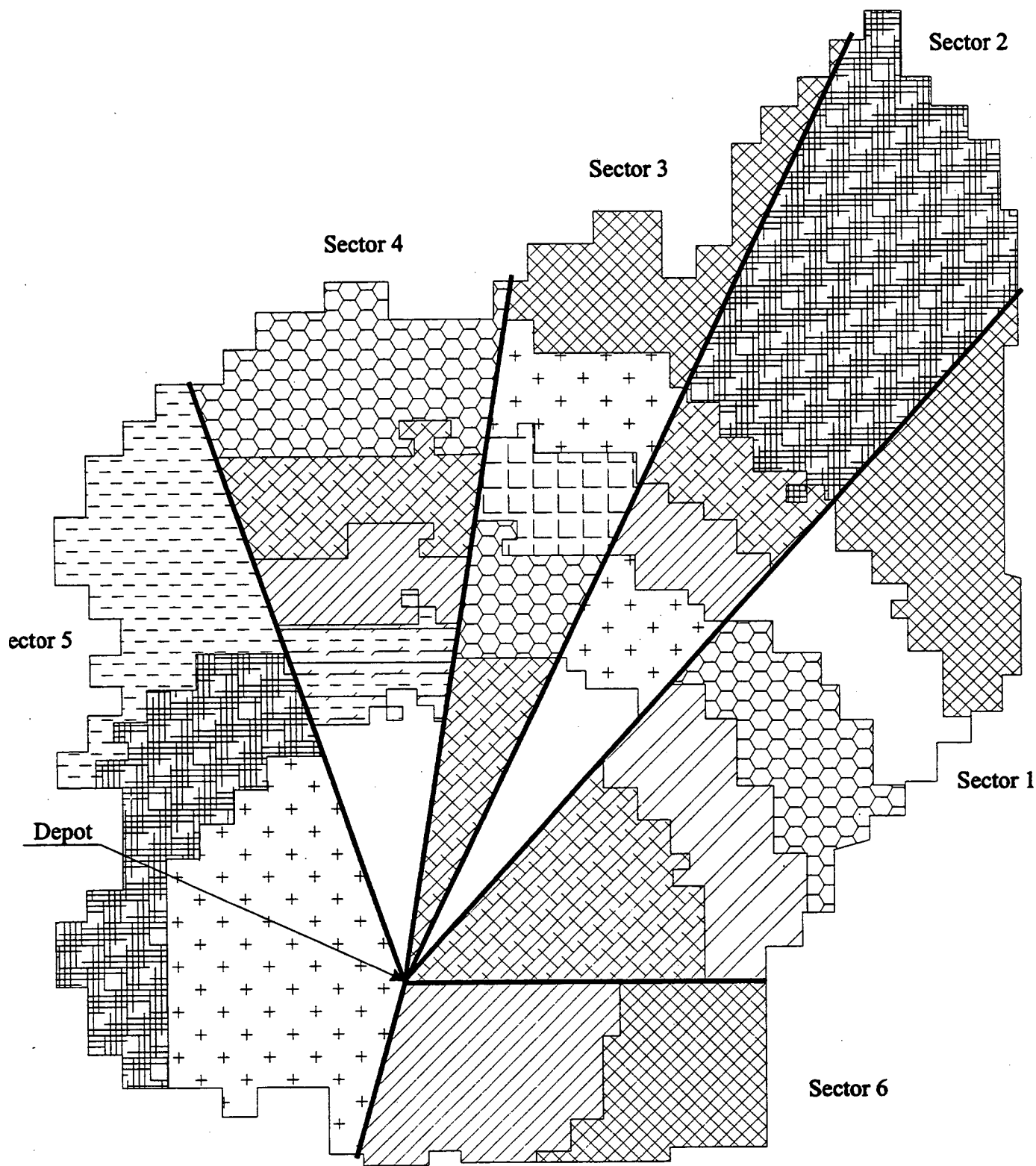


Figure 8 - Splitting sector 5 into 2 sectors

Table 2 - Fleet Operational Characteristics – First Approximation

Optimal Vehicle Capacity: 500 kg

	Partition 16	Partition 13	Partition 10	Region 9᠙
Sector/ring	4/1	3/3	2/5	All
Area (sq. km)	18.5	13.5	74.3	666
Number of visiting points	268	258	210	6385
Density (points/sq. km)	14.5	19.1	2.8	9.6
Average distance from the depot (km)	5.6	15.5	25.9	12.9
Number of districts	3	3	4	90
Average load per delivery (kg)	5.3	5.2	8.4	5.8
Average number of stops per tour	89	86	52	71
Average operating cost per stop (US\$)	0.55	0.61	1.00	0.65
Average mileage per stop (km)	0.40	0.60	1.60	0.70
Average working hours per day	7.8	8.0	7.5	7.1
Expected max. working hours per day	9.0	9.1	9.4	9.7
Average vehicle load factor (%)	94.6	88.8	88.2	81.7
Expected max. load factor (%)	99.8	93.9	95.7	99.8
Average overtime per day (min)	9	13	10	4

Table 3 - Fleet Operational Characteristics – Refined Solution

Optimal Vehicle Capacity: 500 kg

	Partition 16	Partition 13	Partition 10	Region 9᠙
Sector/ring	4/1	3/3	2/5	All
Area (sq. km)	18.5	13.0	73.3	666
Number of visiting points	268	253	201	6385
Density (points/sq. km)	14.5	19.5	2.7	9.6
Average distance from the depot (km)	5.6	15.6	26.0	12.9
Number of districts	3	3	4	90
Average load per delivery (kg)	5.3	5.2	8.5	5.8
Average number of stops per tour	89	84	50	71
Average operating cost per stop (US\$)	0.55	0.61	1.01	0.65
Average mileage per stop (km)	0.40	0.60	1.66	0.70
Average working hours per day	7.8	7.8	7.3	7.1
Expected max. working hours per day	9.0	9.0	9.1	9.3
Average vehicle load factor (%)	94.6	86.9	85.3	81.7
Expected max. load factor (%)	99.8	91.9	92.7	99.8
Average overtime per day (min)	9	9	7	4