

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL  
ADAPTATIVA DE COMPONENTES MECÂNICOS  
UTILIZANDO ANÁLISE DE SENSIBILIDADE**

**Dissertação**

**Engº. Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior**

**1998**

**Universidade Federal de Santa Catarina**  
**Curso de Pós Graduação em Engenharia Mecânica**

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL  
ADAPTATIVA DE COMPONENTES MECÂNICOS  
UTILIZANDO ANÁLISE DE SENSIBILIDADE**

Dissertação Submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para  
Obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica

**Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior**

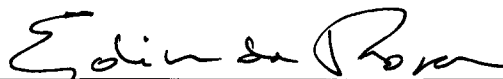
**Florianópolis, abril de 1998.**

Análise de Confiabilidade Estrutural Adaptativa de Componentes  
Mecânicos Utilizando Análise de Sensibilidade

**Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior**

Esta Dissertação foi Julgada Adequada para a Obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Especialidade de Engenharia Mecânica, Área de Concentração Projeto e  
Análise de Componentes Mecânicos, e Aprovada na sua Forma Final pelo  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica



Edison da Rosa, Dr. Eng.  
Orientador

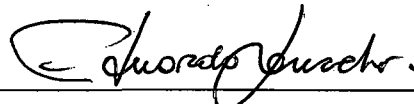


Abelardo Alves de Queiroz  
Coordenador da pós-graduação

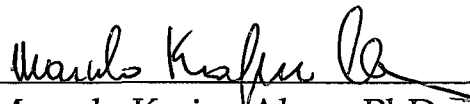
**Banca Examinadora**



Acires Dias, Dr. Eng.  
Presidente



Eduardo Alberto Fancello, Dr. Sc.  
Membro



Marcelo Krajnc Alves, PhD.  
Membro

## DEDICATÓRIA

à minha avó Delfina, uma boa alma

## AGRADECIMENTOS

ao professor Edison da Rosa, pela orientação deste trabalho;

aos professores Marcelo Alves, Acires Dias, Eduardo Fancello pelo voto de confiança dado num momento decisivo;

aos amigos Jackson Barp, José Foggiatto Mauro Marconcin, Milton Polli, Marco A de Carvalho e a Cristine Mutti, que consegui conquistar nesta jornada;

ao Sr. Davi, Sra Cleia a Claudinha e o Dani pela confiança depositada e torcida pela conclusão deste trabalho;

Jucélio Tomas, Tiça, Isadora e o San pelo apoio logístico e a palavra num momento difícil, muito obrigado;

ao TaeKwonDo e aos amigos que lá conquistei Adão Wendt, aos maninhos Marquinhos e Gabriel, Alexandre Maciel, Cida, Tadeu, Frankão e a todo o pessoal da época de mestrado, turma muito legal dos quais compartilhei muitas alegrias dos meus dias bem vividos nesta terra abençoada;

aos amigos do NuPEM, em especial aos professores Marco A. Luersen, Jorge L. Erthal e Raul H. Erthal;

aos meus pais, Claudio e Dinamar que me apoiaram nesta empreitada e que sempre estavam quando precisei, sem eles isto não teria acontecido, muito obrigado;

aos meus tios Francisco e Zeila pelas palavras, fé deposita e torcida;

e finalmente um recado ao meu pai “... olha no que se transformaram aqueles oito dias ”,

valeu !!!

## RESUMO

O trabalho proposto trata da análise de confiabilidade estrutural de componentes mecânicos. Na análise consideram-se as incertezas associadas ao sistema físico, atribuindo às variáveis de projeto modelos probabilísticos. A performance dos componentes é avaliada segundo critérios de falha relacionados ao comportamento estrutural. Desta forma quantifica-se a probabilidade de falha do componente em análise, obtendo-se suas configurações críticas.

A avaliação da confiabilidade é determinada para modos de falha independentes do tempo. A escolha do critério de falha define a superfície de estado limite separando os campos de falha e segurança. O nível de segurança do sistema mecânico em observação será avaliado em função de uma propriedade que caracterize a falha estrutural. Para definição da função de falha nas aplicações propostas, foi implementado no programa computacional desenvolvido para análise de confiabilidade estrutural, um interpretador simbólico, para leitura da função de falha.

Na determinação da probabilidade de falha emprega-se o método dos momentos, com aproximação de primeira ordem aliado às técnicas de superfície de resposta. É realizada uma avaliação, por intermédio da análise de sensibilidade, do comportamento da superfície de falha e a medida de confiabilidade em relação às variáveis de projeto. As implementações citadas permitiram a realização de uma análise de confiabilidade adaptativa pela utilização das informações geradas nas iterações anteriores, reduzindo o esforço computacional para obtenção da solução.

## ABSTRACT

The proposed work deals with structural reliability of mechanical components. In this analysis the uncertainty associated with the physical system are taken into account, conferring probabilistic modes to the design variables. The performance of the components is estimated by failure criterion related to structural behavior. In this manner the failure probability of the component analyzed is quantified, obtaining its critical configurations.

The evaluation of the reliability is determinate by time independent failure modes. The choice of the failure criterion defines the limit state surface, detaching the fields of failure and safety. The safe level of the mechanical system observed will be evaluated being function of a property that characterize the structural failure. To the definition of the failure function in the proposed applications, a symbolic interpreter to read it was implemented in the computational code developed to structural reliability.

The moment's method with first order approximation is used in the determination of the failure probability, together to response surface technique. An evaluation is done, by means of sensibility analysis, the failure surface behavior, and the measure of reliability related to design variables. The implementations quoted allowed the realization of an adaptive reliability analysis using the information produced in the precedents iterations, decreasing the computational effort in the obtainment of the solution.



## NOTAÇÃO

$a_i, b_i, c_i$	Parâmetros da função de estado limite aproximada.
$A$	Matriz simétrica positiva definida.
$A$	Vetor randômico unitário.
$c$	Constante.
$C$	Matriz de correlação.
$C$	Confiabilidade.
$D_i$	Subregião.
$D_f$	Domínio de falha.
$D_s$	Domínio de segurança.
$E(.)$	Valor esperado ou momento de primeira ordem.
$E_i$	$i$ -ésimo evento individual de falha.
$f_A(.)$	Função densidade de probabilidade da variável aleatória $A$ .
$f_i(.)$	Função densidade de probabilidade marginal da $i$ -ésima variável de projeto.
$f_X(.)$	Função densidade de probabilidade conjunta do vetor de projeto.
$F$	Fator $F$ .
$F(. .)$	Função de probabilidade acumulada condicional.
$F_i(.)$	Função de probabilidade acumulada marginal da $i$ -ésima variável de projeto.
$F_X(.)$	Função de probabilidade acumulada conjunta do vetor de projeto.

F.D.P.	Função densidade de probabilidade.
$g(.)$	Variável margem de segurança.
$\bar{g}(.)$	Variável margem de segurança aproximada.
$h_c(.)$	Probabilidade de ocorrência associada ao evento.
$h_X(.)$	Função densidade de amostragem por importância.
$h_{Xop}(.)$	Função densidade de amostragem por importância ótima.
$I(.)$	Função indicadora.
<b>L</b>	Matriz triangular inferior não singular.
$m(.)$	Função mérito.
$n$	Número de variáveis.
$n_I$	Número de iterações.
$n_s$	Número de simulações.
$N$	Número de intervalos de cada variável.
$p$	Tamanho do passo.
$P_f$	Probabilidade de falha.
$\hat{P}_f$	Valor estimado da probabilidade de falha
$P_{ki}$	Probabilidade de falha da sub-região $D_i$ .
$R$	Variável resistência.
$R$	Variável randômica com uma função densidade de probabilidade chi-quadrado com $n$ -graus de liberdade.
$s$	Variável solicitação.

$t, v$	Variáveis mudas de integração.
$T(.)$	Transformação aplicada ao vetor de projeto.
$u$	Vetor de projeto no espaço normal padrão assumindo um determinado valor.
$u^*$	Ponto de projeto no espaço normal padrão.
$u^{*(k)}$	$k$ -ésimo ponto de projeto no espaço normal padrão.
$U$	Vetor de projeto no espaço normal padrão.
$x$	Vetor de projeto assumindo um determinado valor.
$x^*$	Ponto de projeto no espaço das variáveis de projeto.
$X$	Vetor de projeto.
$w, y$	Vetores unitários.
$\alpha$	Vetor dos fatores de sensibilidade.
$\eta, \iota, \theta, \nu$	Parâmetros da função densidade de probabilidade.
$\beta_G$	Índice generalizado de confiabilidade.
$\beta_{HL}$	Índice de confiabilidade de Hasofer-Lind.
$\nabla g(.)$	Vetor gradiente da função margem de segurança.
$\delta$	Vetor dos coeficientes de variação das variáveis de projeto.
$\Delta x_i$	Incremento sobre a $i$ -ésima variável de projeto.
$\varepsilon(.)$	Medida de erro.
$\mu_g$	Média da variável margem de segurança.
$\mu_x$	Vetor média das variáveis de projeto.

$\mu^{NE_X}$	Vetor média equivalente.
$\sigma_g$	Desvio padrão da variável margem de segurança.
$\sigma_X$	Vetor desvio padrão das variáveis de projeto.
$\sigma^{NE_X}$	Vetor desvio padrão equivalente.
$\sigma_r$	Desvio padrão da variável resistência.
$\sigma_s$	Desvio padrão da variável solicitação.
$\Phi(\cdot)$	Função de probabilidade acumulada gaussiana.
$\phi(\cdot)$	Função densidade de probabilidade gaussiana.
$\gamma_j$	Fator de omissão de sensibilidade da $j$ -ésima variável de projeto.
$\Gamma_0$	Matriz da decomposição de Choleski da matriz de correlação.
$\rho$	Medida de confiabilidade logarítmica.
$\rho_{ij}$	Coefficiente de correlação entre as variáveis $X_i$ e $X_j$ .
$\rho_{0,ij}$	Coefficiente de correlação equivalente entre as variáveis $X_i$ e $X_j$ .
$\kappa_i$	Curvatura principal da superfície de estado limite em relação a $i$ -ésima variável de projeto.
$\xi$	Resíduo.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	Comentários Introdutórios .....	1
1.2	Descrição do Escopo do Trabalho .....	4
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</b> .....	<b>7</b>
2.1	Conceitos Fundamentais .....	7
2.1.1	Vetor Randômico de Projeto .....	7
2.1.2	Margem de Segurança .....	7
2.1.3	Conceito de Confiabilidade Estrutural .....	9
2.1.4	Medida de Confiabilidade .....	11
2.1.5	Modelamento e Análise de Incerteza .....	15
2.2	Modo de Falha .....	17
2.3	Critério de Falha .....	18
2.4	Componente e Sistema .....	19
<b>3</b>	<b>MÉTODOS PARA A ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</b> .....	<b>21</b>
3.1	Introdução .....	21
3.2	Métodos Exatos .....	21
3.2.1	Introdução .....	21
3.2.2	Integração Direta .....	22

3.2.3	Integração da Função de Densidade de Probabilidade da Variável Margem de Segurança .....	23
3.2.4	Integração Condicional .....	23
3.2.5	Simulação de Monte Carlo .....	24
3.2.6	Simulação Direcional .....	26
3.2.7	Amostragem por Importância .....	28
3.2.8	Amostragem Estratificada .....	29
3.2.9	Amostragem Adaptativa .....	30
3.2.10	Latin Hipercubo .....	31
3.2.11	Partição do Domínio .....	32
3.3	Métodos Aproximados .....	34
3.3.1	Introdução .....	34
3.3.2	Superfície de Resposta .....	35
3.3.3	Método dos Momentos .....	37
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS MOMENTOS .....</b>	<b>43</b>
4.1	Introdução .....	43
4.2	Transformação das Variáveis de Projeto .....	44
4.2.1	Introdução .....	44
4.2.2	Princípio da Aproximação Normal .....	46
4.2.3	Transformação de Rosenblatt .....	47
4.2.4	Tratamento das Variáveis de Projeto .....	49

4.3	Processo de Busca do Ponto de Projeto .....	55
4.3.1	Introdução .....	55
4.3.2	Técnicas de Busca do Ponto de Projeto .....	56
4.3.3	Critérios de Convergência .....	59
4.4	Análise de Sensibilidade .....	60
4.4.1	Introdução .....	60
4.4.2	Medidas de Sensibilidade .....	61
4.5	Determinação da Probabilidade de Falha .....	63
4.6	Análise de Confiabilidade Adaptativa .....	64
4.6.1	Introdução .....	64
4.6.2	Técnica de Superfície de Resposta Adaptativa .....	65
<b>5</b>	<b>PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL .....</b>	<b>68</b>
5.1	Introdução .....	68
5.2	Estrutura do Programa Computacional para Análise de Confiabilidade Estrutural .....	70
5.2.1	Módulo 1 - Estrutura Principal .....	70
5.2.2	Módulo 2 - Transformação das Variáveis de Projeto .....	72
5.2.3	Módulo 3 - Modo de Falha .....	74
5.2.4	Módulo 4 - Método de Busca do Ponto de Projeto .....	75
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>77</b>
6.1	Introdução .....	77

6.2	Exemplo 1 .....	78
6.3	Exemplo 2 .....	81
6.4	Exemplo 3 .....	84
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>93</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>97</b>
	<b>APÊNDICES</b>	
<b>A</b>	<b>TEORIA PROBABILÍSTICA FUNDAMENTAL .....</b>	<b>105</b>
A.1	Função Densidade de Probabilidade .....	105
A.2	Funções Densidade e Probabilidade Acumulada Conjunta .....	105
A.3	Funções Densidade e Probabilidade Acumulada Marginal .....	107
A.4	Funções Densidade de Probabilidade Marginal Utilizadas .....	108
A.4.1	Função Densidade de Probabilidade Gaussiana .....	108
A.4.2	Função Densidade de Probabilidade Uniforme .....	109
A.4.3	Função Densidade de Probabilidade Exponencial .....	109
A.4.4	Função Densidade de Probabilidade Weibull .....	110
A.4.5	Função Densidade de Probabilidade Rayleigh .....	111
A.5	Momentos da Função Densidade de Probabilidade .....	111
<b>B</b>	<b>DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKI .....</b>	<b>113</b>
<b>C</b>	<b>DETERMINAÇÃO DO FATOR <math>F</math> .....</b>	<b>115</b>



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Domínios de falha e de segurança .....	8
2.2	Representação dos domínios de falha e segurança em termos das variáveis de projeto, para o caso bidimensional .....	9
2.3	Interpretação geométrica do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind no espaço normal padrão, para o caso bidimensional .....	15
2.4	Região multicritério de falha .....	19
3.1	Técnica de simulação direcional .....	26
3.2	Função densidade de amostragem por importância ótima .....	28
3.3	Procedimento iterativo para obtenção da função de amostragem por importância, para o caso unidimensional .....	30
3.4	Domínios disjuntos .....	32
3.5	Representação do erro na aproximação da superfície de estado limite .....	35
3.6	Representação da simetria rotacional do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind .....	39
4.1	Espaço normal padrão .....	45
4.2	Rotação do sistema de coordenadas .....	54
4.3	Fator de omissão de sensibilidade .....	63
4.4	Análise de confiabilidade adaptativa .....	66
5.1	Estrutura do programa para a análise de confiabilidade (CRA) .....	68
5.2	Entrada de dados do módulo 1 .....	71
5.3	Fluxograma esquematizando o tratamento dado as variáveis de projeto .....	72

5.4	Estrutura do módulo 2 em termos de classes e funções membros .....	73
5.5	Estrutura do módulo 3 em termos de classes e funções membros .....	74
5.6	Estrutura do módulo 4 em termos do seu protótipo MBPP.H, classe e funções membros .....	76
6.1	Viga engastada, com carga distribuída .....	78
6.2	História da convergência .....	80
6.3	Haste submetida a esforço de tração .....	81
6.4	Comportamento do fator de sensibilidade da variável, $\alpha_1$ .....	82
6.5	Comportamento do fator de sensibilidade da variável, $\alpha_2$ .....	82
6.6	Fator de omissão de sensibilidade .....	83
6.7	Comportamento do fator de sensibilidade, $\alpha_1$ , para o caso n° 1, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo .....	85
6.8	Comportamento do fator de sensibilidade, $\alpha_2$ , para o caso n° 1, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo .....	86
6.9	Comportamento do fator de sensibilidade, $\alpha_3$ , para o caso n° 1, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo .....	87
6.10	Comportamento do índice de confiabilidade, $\beta_{HL}$ , para o caso n° 1, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo .....	88
6.11	Comportamento do fator de sensibilidade, $\alpha_1$ , para o caso n° 2, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo .....	89
6.12	Comportamento do fator de sensibilidade, $\alpha_2$ , para o caso n° 2, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo .....	90

6.13	Comportamento do fator de sensibilidade, $\alpha_3$ , para o caso n° 2, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo .....	90
6.14	Comportamento do índice de confiabilidade, $\beta_{HL}$ , para o caso n° 2, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo .....	91

## LISTA DE TABELAS

6.1	Variáveis randômicas e seus parâmetros estatísticos .....	79
6.2	Resumo dos resultados .....	79
6.3	Dados probabilísticos das variáveis de projeto e resultados .....	81
6.4	Resultados para o caso n° 1 em termos de ponto de projeto e índice de confiabilidade .....	85
6.5	Resultados para o caso n° 2 em termos do ponto de projeto e índice de confiabilidade de Hasofer-Lind .....	88
C.1	Fator $F$ , para a variável $X_i$ normal e $X_j$ com funções densidade de probabilidade marginal pertencendo ao grupo 2 .....	115
C.2	Fator $F$ , para as variáveis $X_i$ e $X_j$ ambas com funções densidade de probabilidade marginal pertencendo ao grupo 1 .....	115
C.3	Fórmulas para o fator $F$ para $X_i$ pertencendo ao grupo 1 e $X_j$ ao grupo 2 de funções densidade de probabilidade marginal .....	102

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Comentários Introdutórios

No desenvolvimento de um produto, busca-se conceber um sistema capaz de atender aos requisitos exigidos. Pode-se obter várias soluções de projeto, a escolhida será aquela que satisfaça da melhor forma às necessidades exigidas, com relação a um conjunto de requisitos de projeto. A concepção escolhida deve apresentar maior viabilidade segundo os aspectos de desempenho, custo, segurança, confiabilidade, funcionalidade, manufaturabilidade, manutenibilidade e outros. No desenvolvimento de um projeto, encontram-se uma infinidade de variáveis, que influenciam diferenciadamente sobre o desempenho do sistema ou componente.

Na tarefa de projeto existem incertezas intrínsecas nos modelos de simulação, nas propriedades dos materiais empregados e na solicitação. As dispersões nestas variáveis podem ser tratadas para representar realisticamente a resposta do sistema e a variabilidade de natureza aleatória. Na metodologia clássica de projeto não faz parte dos procedimentos convencionais a avaliação rigorosa das incertezas pertinentes às variáveis de projeto. A utilização de uma margem de segurança através do emprego de fatores e coeficientes de segurança ameniza o efeito das aleatoriedades que não foram consideradas. Tal aplicação insere um grau elevado de empirismo no estabelecimento de uma medida da confiabilidade [58].

Nas últimas décadas as linhas de pesquisa que investigam a análise de confiabilidade estrutural receberam um novo impulso, em virtude do desenvolvimento

de técnicas novas, suportadas pelo aumento da capacidade computacional. Esforços estão sendo feitos no desenvolvimento de novas formulações para tratar de forma consistente as dificuldades na implementação de ferramentas para a análise probabilística nos códigos convencionais de projeto e avaliação de sistemas mecânicos.

O cerne da estrutura da confiabilidade estrutural apoia-se no enfoque probabilístico dado à atividade de análise de projeto. Conforme a natureza das dispersões observadas nas variáveis de projeto, estas podem ser tratadas pelo uso de diferentes modelos probabilísticos. A performance da estrutura é avaliada através de um parâmetro, em geral a margem de segurança, que dependerá, na maioria dos casos, implicitamente das variáveis associadas às características do fenômeno físico, em questão. A probabilidade de falha é uma função das dispersões apresentadas e da avaliação do desempenho do sistema, frente aos modos de falha relevantes. A análise de confiabilidade busca determinar a situação, em termos do vetor de projeto, em que ocorre a máxima probabilidade de falha.

A análise de confiabilidade pode ser estendida a um sistema existente, para realizar o monitoramento do nível de segurança, quando se possui informações sobre o seu comportamento e as dispersões envolvidas. Tal abordagem é de aplicação imprescindível em sistemas oriundos da indústria aeroespacial, plataformas offshore [53], estruturas sujeitas a um carregamento aleatório e, genericamente, em sistemas que operam com risco elevado.

As principais questões da teoria de confiabilidade estrutural, estão na seleção do modo de falha pertinente, na identificação das variáveis físicas relevantes, na escolha do

comportamento probabilístico adequado às variáveis e na determinação da probabilidade de falha, baseada no modelo apresentado. Algumas dessas atividades são relacionadas influenciando na escolha do método a ser utilizado. Em virtude da análise de confiabilidade estrutural ser uma ferramenta relativamente nova e pouco difundida na atividade de análise de projeto, percebe-se uma carência de informações probabilísticas com relação à descrição do comportamento das dispersões envolvidas. O estabelecimento de uma medida de confiabilidade está incondicionalmente relacionado com a quantidade e a qualidade das informações sobre a qual é determinada [11]. Evidentemente quanto maior for a quantidade de informações mais confiáveis serão os resultados obtidos, em contra partida, tal aspecto dependerá do compromisso exigido no problema em questão.

O objetivo dessa dissertação é a determinação da confiabilidade em termos da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind [26] para componentes mecânicos avaliados segundo um modo de falha. O desenvolvimento de uma formulação específica para tratar o problema de confiabilidade estrutural foi necessário através da utilização do método dos momentos [52], com aproximações de primeira ordem da superfície de estado limite e da probabilidade de falha. Utilizou-se uma metodologia, para tratamento probabilístico do vetor de projeto [12], baseada nos momentos de primeira e segunda ordem das variáveis de projeto. A análise de sensibilidade foi aplicada com o objetivo de indicar as direções viáveis de pesquisa na determinação da solução [20], diminuindo o esforço computacional. No estabelecimento da solução empregaram-se algoritmos de busca [13] onde utilizou-se um mecanismo de

ajuste automático do tamanho do passo. Foram aplicadas técnicas de ajuste da superfície de estado limite, a partir das informações geradas pelo processo de estabelecimento da solução, com a finalidade de se realizar uma análise de confiabilidade adaptativa [42]. Nessa técnica a solução é obtida a partir de uma aproximação das informações da superfície de estado limite original. Um programa computacional foi desenvolvido através da implementação dos métodos e técnicas mencionadas para a solução dos problemas propostos para avaliação da formulação e metodologias utilizadas.

Pretende-se difundir a análise de confiabilidade estrutural, mostrando as suas aplicações e potencialidades, tornando a sua prática um procedimento dentro da linha de análise de projetos. Através do exame dos desenvolvimentos realizados em confiabilidade estrutural, pode-se perceber a relação com a linha de análise estrutural, porém os progressos foram realizados isoladamente entre áreas que tratam, em essência, de problemas físicos semelhantes, porém com objetivos diferentes. A tendência atual mostra que os avanços obtidos nos métodos de confiabilidade estrutural empregam formulações clássicas observadas nos métodos de análise estrutural. Citam-se os desenvolvimentos realizados em elementos finitos estocásticos [36], no qual está incorporado, na sua formulação, o modelamento das incertezas envolvidas no processo.

## **1.2 Descrição do Escopo do Trabalho**

O capítulo 1 descreve sucintamente o conteúdo desse trabalho, buscando apresentar e justificar a abordagem probabilística ao problema de análise de componentes mecânicos. É feita uma breve explanação sobre os desenvolvimentos



realizados, fazendo-se comentários sobre os métodos e técnicas empregados na solução do problema de confiabilidade estrutural.

A formulação geral do problema de confiabilidade estrutural, através de definições fundamentais é apresentada no capítulo 2. Alguns conceitos básicos são apresentados com a finalidade de estabelecer uma linguagem e apresentar questões essenciais sobre o assunto tratado nesse trabalho.

No capítulo 3, a partir da definição do problema de confiabilidade estrutural feita no capítulo anterior, apresentam-se os métodos tradicionais e os mais utilizados para solução do problema de confiabilidade estrutural. São mostradas as idéias principais e estratégias utilizadas nos diversos métodos de análise, comentando-se sobre as suas características em termos de eficiência numérica, a quantidade e a qualidade de informações exigidas. O método dos momentos, formulação utilizada no presente trabalho é apresentado, mostrando os seus aspectos essenciais.

No capítulo 4 é realizada a formulação particularizada do problema de confiabilidade segundo o método dos momentos. São apresentadas as etapas essenciais exigidas pelo método, como o tratamento das variáveis de projetos, aproximação da superfície de estado limite, método de busca do ponto de projeto, determinação da probabilidade de falha, análise de sensibilidade e análise de confiabilidade adaptativa.

Um programa computacional para análise de confiabilidade estrutural de componentes mecânicos submetidos a avaliação por um critério de falha é apresentado no capítulo 5. São fornecidas informações sobre o fluxograma, linguagem de

programação e algoritmos implementados. Os módulos que compõem o programa são descritos, apresentando as suas funções.

No capítulo 6 exemplos numéricos são resolvidos utilizando o programa computacional desenvolvido para análise de confiabilidade estrutural. A solução dos exemplos apresentados tem como objetivo avaliar as técnicas e métodos implementados. São realizados comentários dos exemplos resolvidos com relação à eficiência numérica, comportamento das medidas de sensibilidade durante o processo de obtenção da solução, algoritmos de busca do ponto de projeto e a estratégia da análise de confiabilidade adaptativa

Finalizando este trabalho de dissertação, no capítulo 7 são apresentadas as conclusões relativas aos principais conteúdos desenvolvidos. São sugeridos para trabalhos futuros alguns aspectos relativos ao método dos momentos, a natureza das soluções do problema de confiabilidade, ajuste da superfície de estado limite e do tamanho do passo.

## 2 FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

### 2.1 Conceitos Fundamentais

#### 2.1.1 Vetor Randômico de Projeto

As variáveis associadas à geometria, à solicitação atuante e às propriedades mecânicas dos materiais utilizados, num sistema estrutural estão sujeitas a variações de natureza aleatória [57]. Essas dispersões são caracterizadas estatisticamente através de modelos de incerteza, apêndice A. As variáveis que definem o sistema podem ser representadas num vetor de projeto,

$$\mathbf{X} = \{ X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n \} \quad (2.1)$$

A este vetor está associado um comportamento randômico representado pela função densidade de probabilidade, apêndice A. Embora o vetor de projeto seja caracterizado completamente por sua função densidade de probabilidade, é importante ressaltar que essas informações normalmente não estão disponíveis. Nas aplicações de engenharia são utilizadas as funções densidade de probabilidade marginal das componentes do vetor de projeto e os momentos de primeira e segunda ordem.

#### 2.1.2 Margem de Segurança

Devido à característica randômica do vetor de projeto o nível de segurança, e conseqüentemente a confiabilidade estrutural, são representadas realisticamente em função da probabilidade da estrutura em resistir à solicitação imposta. Geralmente as

formulações do problema de confiabilidade iniciam pelo estabelecimento de uma variável, função escalar do vetor de projeto definida como margem de segurança,

$$g(\mathbf{X}) = r(\mathbf{X}) - s(\mathbf{X}) \quad (2.2)$$

onde  $r(\mathbf{X})$  e  $s(\mathbf{X})$  representam a resistência e a solitação, respectivamente, em termos do vetor de projeto.

Os domínios de falha e de segurança,  $D_f$  e  $D_s$ , respectivamente, são definidos por,

$$D_f = \{ \mathbf{X} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, g(\mathbf{x}) \leq 0 \} \quad (2.3)$$

e

$$D_s = \{ \mathbf{X} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, g(\mathbf{x}) > 0 \} \quad (2.4)$$

estão representados na figura 2.1

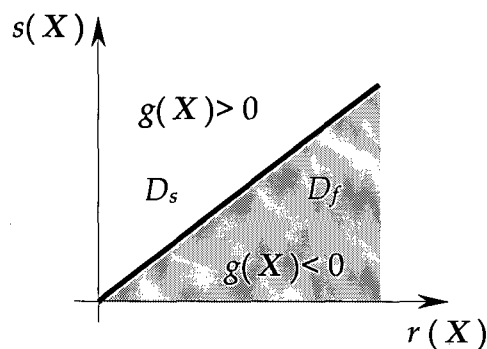


Figura 2.1 - Domínios de falha e segurança.

A falha num componente mecânico pode ser caracterizada através de vários tipos de condições limites. O estado de segurança ou falha de um componente ou sistema, pode ser indicado pela margem de segurança, como visto anteriormente na equação (2.2), podendo assumir as seguintes situações:

1) Estado de segurança.

$$\{ g(\mathbf{x}) > 0 \mid \mathbf{x} \in D_s \} \quad (2.5)$$

2) Estado de falha.

$$\{g(x) < 0 \mid x \in D_f\} \quad (2.6)$$

3) Estado limite.

$$\{g(x) = 0 \mid x \in D_f\} \quad (2.7)$$

Os domínios de falha e segurança são separados pela superfície de estado limite que está representada na figura 2.2, para um problema envolvendo duas variáveis randômicas,  $X_1$  e  $X_2$ .

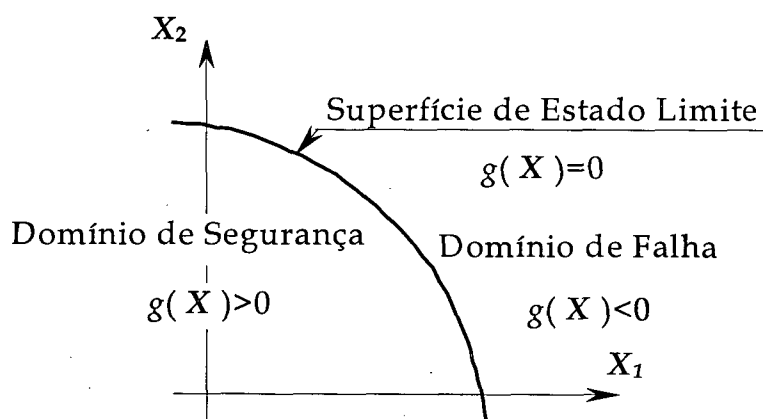


Figura 2.2 - Representação dos domínios de falha e segurança em termos das variáveis de projeto, para o caso bidimensional.

### 2.1.3 Conceito de Confiabilidade Estrutural

A confiabilidade estrutural de um sistema ou componente é definida como,

$$C = 1 - P[g(x) \leq 0] \quad (2.8)$$

ou seja, é a probabilidade do sistema ou componente não falhe nas condições previstas de utilização. Complementarmente a probabilidade de falha, é definida por

$$P_f = P[g(x) \leq 0] \quad (2.9)$$

sendo expressa,

$$P_f = \int_{D_f} f_X(t) dt \quad (2.10)$$

onde  $f_X(\cdot)$  é a função densidade de probabilidade do vetor de projeto. A partir das definições apresentadas a relação entre confiabilidade e probabilidade de falha é estabelecida como,

$$C = 1 - P_f \quad (2.11)$$

A integração multidimensional da função densidade de probabilidade do vetor de projeto determina a probabilidade de falha. Uma interpretação geométrica pode ser dada a equação ( 2.10 ), o valor da probabilidade de falha é dado pela medida do volume confinado pela função densidade de probabilidade do vetor de projeto no domínio de falha. Outra possibilidade para estabelecer a probabilidade de falha é a partir da integração da função densidade de probabilidade da variável margem de segurança no domínio de falha. Consequentemente, a probabilidade de falha é expressa como,

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_g(g) dg = F_g(0) \quad (2.12)$$

onde  $F_g(\cdot)$  é a função de probabilidade acumulada da variável margem de segurança.

A solicitação e a resistência estrutural de um sistema mecânico estão sujeitos a variações com relação ao tempo, devido ao desgaste, ação do ambiente e a perda de algumas propriedades mecânicas dos materiais empregados dessa forma a

confiabilidade passa a ser uma função do tempo. Porém, para certos problemas de engenharia, o processo de solicitação é representado por uma distribuição de valores máximos, considerando-se as propriedades estruturais constantes com relação ao tempo, nesses casos os problemas são tratados como invariantes no tempo. Neste trabalho as variabilidades existentes foram consideradas independentes do tempo.

#### **2.1.4 Medida de Confiabilidade**

Um modelo adequado para análise de confiabilidade deve estar apoiado numa estrutura formal de análise, fornecendo um indicativo sobre o nível de segurança que o sistema opera. A avaliação é realizada a partir da definição do problema físico, estabelecendo uma estrutura geral para análise de confiabilidade, possibilitando tratar uma diversidade de problemas. O modelo deve ser consistente com uma medida de confiabilidade e com o nível de incerteza do projeto, buscando-se relacionar com algum parâmetro indicador da performance do sistema.

A medida de confiabilidade está associada com o nível de performance do sistema, e conseqüentemente, com o vetor de projeto. Esse parâmetro deve desempenhar as seguintes funções:

- Informar ao projetista, sobre o nível de confiabilidade do sistema.
- Providenciar uma ferramenta, para codificar os níveis de confiabilidade.
- Diferenciar os elementos, conforme sua importância funcional, no contexto do projeto.
- Determinar e associar a confiabilidade, de acordo com os modos de falha.
- Servir como base para os parâmetros de controle de qualidade.

O enfoque probabilístico é atribuído a partir da informação sobre as dispersões existentes, nas variáveis de projeto. Geralmente, nas aplicações de confiabilidade estrutural, a probabilidade de falha é pequena [29]. Tal aspecto traz problemas na verificação empírica, exigindo um tratamento refinado na determinação da confiabilidade. Quando os valores da confiabilidade estrutural são elevados, a obtenção da solução, em termos da probabilidade de falha pode exigir muitas avaliações da superfície de estado limite. Em virtude disso a solução poderá apresentar sensibilidade significativa, com relação às funções densidade de probabilidade adotadas para as dispersões das variáveis de projeto, da resistência e da solicitação do sistema.

Uma das dificuldades inerentes da análise de confiabilidade está na definição da medida de confiabilidade, ou seja, deve conter as informações necessárias para considerar de forma menos empírica possível, as incertezas associadas ao vetor de projeto.

O coeficiente de segurança foi uma das primeiras tentativas realizadas para considerar as incertezas de projeto, sendo empregado até hoje nas normas e procedimentos de projeto. Essa quantidade é sensível em relação a sua definição apresentando resultados razoáveis somente para sistemas similares, em vista do grau de empirismo envolvido. Quando utilizado, genericamente, pode conduzir a discrepâncias grandes no projeto.

Uma aproximação tradicional utilizada para ponderar as incertezas inerentes das variáveis de projeto é o emprego dos fatores de resistência e solicitação [19]. Estão baseados na redução e no aumento das variáveis que influenciam na resistência e na



solicitação do sistema, respectivamente. Os fatores são selecionados ou ajustados com base na experiência em estruturas existentes e na intuição do analista. Essas incertezas podem conduzir a desvios desfavoráveis, na de resistência e na solicitação da estrutura.

Outra proposta é a medida de confiabilidade,  $\rho$  baseada numa transformação logarítmica da probabilidade de falha [56],

$$\rho = -\log P_f \quad (2.13)$$

apoiada no argumento de que muitos fenômenos apresentam um comportamento semelhante a essa lei.

Nos desenvolvimentos realizados na última década o índice de confiabilidade é uma das medidas mais utilizadas no trato das incertezas de projeto [53]. O índice generalizado de confiabilidade estrutural, apresentado por Ditlevsen [16], é definido como,

$$\beta_G = \Phi^{-1} \left[ \int_{g(u)>0} \phi(t_1)\phi(t_2)\dots\phi(t_i)\dots\phi(t_n)dt \right] \quad (2.14)$$

onde  $\phi(\cdot)$  e  $\Phi[\cdot]$ , são as funções densidade de probabilidade e probabilidade acumulada de uma variável normal padrão, a variável  $u_i$  é obtida a partir da transformação aplicada a variável  $x_i$ , no espaço de projeto de tal forma que o modelo probabilístico proposto é representado por uma função densidade de probabilidade padrão, sendo definida como

$$\phi(u_i) = \frac{e^{-\frac{u_i^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.15)$$

onde

$$\Phi(u_i) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{t_i^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt, \quad \text{onde} \quad \mu_{u_i} = 0, \sigma_{u_i} = 1 \quad (2.16)$$

A integração fornece o conteúdo de probabilidade sobre o domínio de segurança num espaço onde o comportamento probabilístico das variáveis de projeto é representado por uma função densidade de probabilidade normal padrão  $n$ -dimensional.

O índice de confiabilidade utilizado no método dos momentos é definido em termos dos momentos de primeira e segunda ordem da variável margem de segurança [26],

$$\beta_{HL} = \frac{\mu_g^*}{\sigma_g^*} \quad (2.17)$$

sendo  $\mu_g^*$  e  $\sigma_g^*$  o valor esperado e desvio padrão, respectivamente, da variável margem de segurança no ponto de projeto. Esta medida é conhecida como índice de confiabilidade de Hasofer-Lind,  $\beta_{HL}$ , sendo interpretada geometricamente como a menor distância euclidiana da origem a um ponto sobre a superfície de estado limite no espaço normal padrão, conforme representa a figura 2.3. A esse ponto está associado, segundo o método dos momentos a maior probabilidade de falha, sendo conhecido como ponto de projeto.

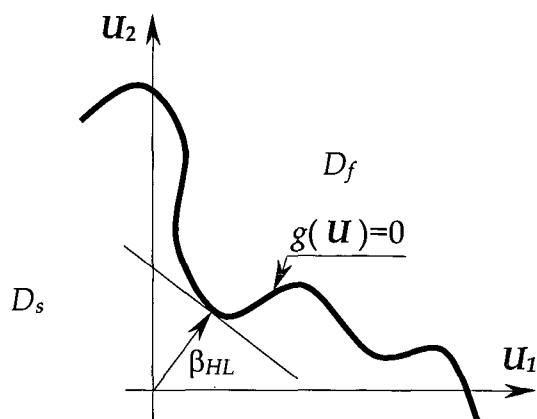


Figura 2.3 - Interpretação geométrica do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind, no espaço normal padrão, para o caso bidimensional.

Baseando-se nesses conceitos e definições de fácil entendimento, o seu emprego torna-se atraente em normas de projetos que consideram requisitos de confiabilidade. Além disso, quando utilizado, apresenta-se altamente eficiente, em relação ao esforço computacional.

### 2.1.5 Modelamento e Análise de Incerteza

O modelamento da situação real é sempre necessário no projeto de qualquer sistema. Tais modelos, entretanto, são imperfeitos em virtude das simplificações adotadas na descrição do comportamento esperado e da variabilidade presente nos parâmetros que regem o fenômeno analisado [16]. As fontes de incerteza que são relevantes na determinação da confiabilidade são classificadas como:

**Incertezas Físicas:** São inerentes às propriedades físicas do sistema e do dispositivo de medida. Ambos admitem um modelo probabilístico na frequência relativa de experimentos, passíveis de ajuste para os modelos probabilísticos conhecidos.

**Incertezas Estatísticas:** Originam-se da falta de amostras suficientemente grandes para o estabelecimento empírico de uma função densidade de probabilidade representativa do comportamento das variáveis randômicas em questão. Os métodos estatísticos clássicos tratam com este tipo de incerteza, admitindo hipóteses condicionadas com a frequência relativa e interpretação dos requisitos probabilísticos.

**Incertezas associadas ao conhecimento sobre o fenômeno:** Podem ser modeladas em termos probabilísticos. Este tipo de modelo descreve as propriedades referentes ao conhecimento sobre o fenômeno.

**Modelo de Incerteza:** O estabelecimento dos modelos de incerteza deve satisfazer a requisitos de simplicidade, com a finalidade de propiciar ferramentas operacionais na determinação da confiabilidade. O modelo de incerteza é, por exemplo, o estabelecimento de uma função densidade de probabilidade para cada componente do vetor de projeto. Em muitas situações a falta de informações probabilísticas é fator limitante para o emprego de modelos mais sofisticados. Os erros existentes em modelos mais elaborados poderão ser conhecidos, porém para crescentes níveis de detalhamento existem erros relativos à alguma realidade desconhecida.

A discussão das diversas fontes de incerteza, relevantes na determinação da confiabilidade estrutural, mostra que filosoficamente é mais satisfatório considerar como caráter qualitativo os modelos probabilísticos atribuídos às variáveis de projeto na

análise de confiabilidade. Apoiando-se no conhecimento das fontes de incerteza e nas informações probabilísticas disponíveis, deve haver uma ponderação do analista de confiabilidade estrutural na tomada de decisão com relação ao tipo de modelo de incerteza a ser utilizado.

## 2.2 Modo de Falha

A falha é definida como a *“perda da habilidade do sistema em análise para executar a função requerida”* [62]. Um componente ou sistema é dito estar em falha quando não consegue executar a função para qual foi destinado. Dessa forma é necessário possuir um indicador que esteja relacionado com a performance do componente ou sistema. Num sistema constituído por várias partes, a análise de falhas pode-se tornar muito extensa, caso não seja estabelecida uma estratégia para tratar as falhas relevantes. Em muitas situações uma análise mais depurada do comportamento mecânico de um determinado componente é desnecessária.

A análise de confiabilidade de sistemas começa no estabelecimento do sistema, a partir das suas partes componentes, juntamente com critérios de falha, a fim de relacionar o seu comportamento com os modelos de incerteza. Através disso pode-se avaliar os agentes potenciais que conduzem à falha. A função do modo de falha é qualificar a falha da entidade observada, sugerindo uma forma direta para as avaliações que serão submetidos os elementos. A falha de um sistema pode se configurar através de uma combinação das falhas parciais de seus componentes. A falha é constatada com o surgimento dos seguintes elementos:

- Agentes.
- Manifestação.
- Localização.

A ocorrência de um ou mais modos de falha é percebida pela manifestação e localização da falha, oriundas da combinação dos agentes causadores. As informações sobre as falhas de uma população podem ser representados por vários modos de falha. Há necessidade da determinação da região de ocorrência de cada modo de falha. Tais evidências podem conduzir a aperfeiçoamentos específicos, visando o aumento da confiabilidade do projeto.

### **2.3 Critério de Falha**

O critério de falha tem como objetivo quantificar a falha de um componente, ou sistema sendo associado diretamente com o modo de falha. A utilização do critério de falha confere um caráter quantitativo à análise, ou seja, consegue-se avaliar a proximidade do sistema pertencer ao domínio de falha. Indiretamente se estabelece uma análise limite, onde os estados críticos definem uma relação funcional, a fim de separar os domínios de falha e segurança. Muitas vezes os componentes de um determinado sistema podem vir a falhar por mais de uma razão. Além disso, ao estabelecer um modo de falha pode-se associar um conjunto de critérios de falha, onde dependendo do critério em avaliação, pode-se ter respostas diferentes, para o vetor de projeto em questão.

## 2.4 Componente e Sistema

Um sistema compreende uma coleção de elementos integrados física e funcionalmente. Conforme a definição, um sistema é composto por componentes integrados, e não simplesmente a soma de subsistemas ou componentes. A natureza física do subsistema ou componentes é alterada como resultado da falha, modificando o sistema. Um sistema que possua componentes em situação de falha pode ser considerado um novo sistema, diferindo do anterior. Percebe-se que os conceitos de sistema e componentes estão fundamentados no aspecto funcional do projeto.

Observando-se a partir do ponto de vista da confiabilidade estrutural, as definições de sistema e componente poderão se confundir, e o tratamento dispendido dependerá da definição da superfície de estado limite. O tratamento probabilístico empregado num componente, quando avaliado segundo vários critérios de falha, é análogo a situação de um sistema constituído por um conjunto de componentes submetidos a diferentes modos de falha. Em ambos os casos os domínios de segurança e de falha são separados por uma superfície de estado limite multicritério de falha, conforme representado na figura 2.4.

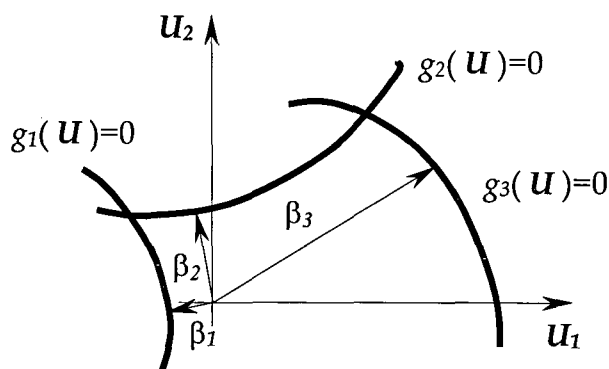


Figura 2.4 - Região multicritério de falha.

Os diferentes modos de falha serão avaliados segundo seus critérios de falha relevantes, supondo-se que os diferentes critérios de falha podem ser representados como,

$$g_i(X) = g_i(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) \quad (2.18)$$

tal que os eventos individuais de falha são,

$$E_i = [g_i(X) < 0] \quad (2.19)$$

o evento que configura a falha de um sistema composto por  $n$ -componentes avaliados por critérios de falha individuais, ou um componente submetido por  $n$ -critérios de falha,

$$E_f = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_i \cup \dots \cup E_n \quad (2.20)$$

Pode-se constatar que a abordagem do problema de confiabilidade estrutural para um componente avaliado segundo vários critérios de falha é semelhante quando se avalia um sistema constituído de vários componentes, onde cada um destes é submetido a um critério de falha.



## **3 MÉTODOS PARA A ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

### **3.1 Introdução**

A teoria de confiabilidade estrutural foi originalmente apresentada por Freudenthal [2], tendo atualmente um grande número de métodos desenvolvidos e aplicados em problemas de engenharia. Os métodos para análise de confiabilidade estrutural são classificados em métodos exatos e aproximados. A escolha do método a ser utilizado na solução de um problema nem sempre é uma tarefa simples [53]. A seleção deve observar requisitos relativos à precisão, ao esforço computacional necessário e às classes dos problemas que poderão ser tratados.

### **3.2 Métodos Exatos**

#### **3.2.1 Introdução**

Nos métodos exatos encontram-se as técnicas de integração analítica e numérica e as técnicas de amostragem. Estes métodos exigem muita informação probabilística, fator que dependendo da situação é decisivo na escolha da técnica a ser empregada. A avaliação dos resultados obtidos por outras formulações está apoiada nesses métodos, porém demandam de um esforço computacional considerável, podendo ser reduzido com a utilização de técnicas de redução de variância [49]. Entre estas encontram-se a amostragem por importância sendo freqüentemente aplicada com alta eficiência computacional.

### 3.2.2 Integração Direta

Considerando a definição da margem de segurança, dada pela equação ( 2.2 ) e admitindo-se que a resistência e a sollicitação do sistema são variáveis normais e não correlacionadas, o comportamento probabilístico da variável margem de segurança é modelado por uma função densidade de probabilidade normal. Os parâmetros estatísticos são determinados diretamente das propriedades estatísticas das variáveis resistência e a sollicitação,

$$\mu_g = \mu_r - \mu_s \quad (3.1)$$

e

$$\sigma_g^2 = \sigma_r^2 + \sigma_s^2 \quad (3.2)$$

conforme a equação ( 2.10 ) pode-se mostrar,

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t - \mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] dt \quad (3.3)$$

Em muitas situações, as variáveis de projeto podem ser correlacionadas e possuírem um comportamento probabilístico, não gaussiano. Essa situação pode ser contornada aplicando-se uma transformação apropriada para obter a resistência e a sollicitação como variáveis normais estatisticamente independentes. A correlação entre estas grandezas poderá existir, em virtude de ambas serem uma função das componentes do vetor de projeto.

As limitações oriundas do método estão na obtenção da função densidade de probabilidade do vetor de projeto, visto que as suas componentes podem possuir um

comportamento probabilístico diferenciado, conduzindo a não linearidade da variável margem de segurança.

### 3.2.3 Integração da Função Densidade de Probabilidade da Variável Margem de Segurança

Dentro das técnicas desenvolvidas para integração analítica, a integração da função densidade de probabilidade da variável margem de segurança, expressa pela equação (2.12), possibilita reduzir um problema multidimensional para unidimensional. O método desenvolve-se a partir do comportamento probabilístico da variável margem de segurança. Tal aspecto, em muitas situações, é o fator limitante para a sua utilização, devido a falta de informações probabilísticas sobre a variável margem de segurança. Embora este método possa ser aplicado a uma pequena classe de problemas, o seu conceito é a base do desenvolvimento de alguns métodos aproximados.

### 3.2.4 Integração Condicional

A eficiência numérica desse método depende do valor absoluto da probabilidade de falha. Tal aspecto pode ser melhorado significativamente se os pontos de amostragem forem determinados condicionalmente, através de uma função que os defina dentro do domínio de falha,

$$P_f = \int_{\forall c} \int_{\forall X \in c} I(g(t)) \frac{f_X(t)}{h_c(t)} dt] h_c(v) dv \quad (3.4)$$

onde  $I(\cdot)$  é a função indicadora da margem de segurança definida como

$$I(g(\mathbf{x})) = 1; \text{ para } \mathbf{x} \in D_f \quad (3.5)$$

$$I(g(\mathbf{x})) = 0; \text{ para } \mathbf{x} \notin D_f \quad (3.6)$$

onde  $h_c(\cdot)$  é a probabilidade de ocorrência associada ao evento,

$$g(\mathbf{x}) = c \quad (3.7)$$

o integrando da equação ( 3.4 ) representa a probabilidade de falha condicional sobre a superfície de estado limite.

A eficiência numérica da equação ( 3.4 ) depende da escolha da função de estado limite e da função densidade de probabilidade do vetor de projeto. Na integral interna da equação ( 3.4 ) os valores selecionados para as componentes do vetor de projeto são escolhidas de tal maneira que este ponto fique sobre a superfície de estado limite. Neste caso pode-se obter uma eficiência numérica elevada, se alguma das componentes selecionadas influencie significativamente na probabilidade de falha. Esta variável pode ser escolhida com auxílio da análise de sensibilidade.

### 3.2.5 Simulação de Monte Carlo

Para problemas de confiabilidade estrutural a probabilidade de falha é determinada pela equação ( 2.10 ), que representa a integração da função densidade de probabilidade do vetor de projeto no domínio de falha. O domínio de integração possui, muitas vezes, uma forma irregular e a função densidade de probabilidade quando disponível é complexa, tornando as soluções analíticas intratáveis para integração. Normalmente a integração numérica é eficiente para problemas em que o número de variáveis de projeto é pequeno, ou domínio de integração analítica é regular. Em virtude

dessas características, os métodos baseados na integração analítica, ou numérica, são aplicados em poucas situações.

Na estimativa da probabilidade de falha de um sistema, a simulação de Monte Carlo é freqüentemente aplicada, particularmente quando a integração direta, analítica ou numérica, torna-se impraticável. Basicamente consiste em gerar, em cada simulação, um grupo de valores para as variáveis de projeto conforme a função densidade de probabilidade da variável correspondente e verificar para este ponto de projeto se a variável margem de segurança configura uma situação de falha ou segurança. De acordo com a simulação de Monte Carlo a probabilidade de falha pode ser estimada por,

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} I(g(x_i)) \quad (3.8)$$

onde  $\hat{P}_f$  é um valor estimado da probabilidade de falha,  $x_i$  é o  $i$ -ésimo vetor de projeto obtido do processo de simulação e  $n_s$  o número de simulações. O vetor de projeto obtido do processo de simulação é determinado diretamente pela transformação inversa de números randômicos uniformes, ou pelas funções densidade de probabilidade marginal das variáveis de projeto.

Teoricamente os resultados obtidos com esse método são considerados exatos, se o número de simulações é suficientemente grande. O vetor de projeto estabelecido numa simulação de Monte Carlo é similar a uma amostra experimental. Os processos de simulação podem ser aplicados em sistemas com alto nível de complexidade, ou seja, o modelo de simulação pode ser mais realístico sem muitas idealizações e simplificações.

Considerada uma técnica de amostragem, a simulação de Monte Carlo compartilha dos problemas oriundos à essas técnicas. Os resultados estão sujeitos a erros de amostragem, tendendo a diminuir a medida que a amostra aumenta. A restrição imposta no tamanho da amostra está intimamente ligada à eficiência computacional do processo.

### 3.2.6 Simulação Direcional

Dentro da teoria de confiabilidade estrutural, a simulação direcional é utilizada, em particular, para os casos que apresentam solicitação combinada [6]. O vetor gaussiano  $n$ -dimensional  $U = RA$  ( $R \geq 0$ ) onde  $R^2$  é uma variável randômica com uma função densidade de probabilidade chi-quadrado com  $n$ -graus de liberdade, independente do vetor randômico unitário  $A$ , o qual é distribuído uniformemente sobre uma hipersfera unitária  $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ , figura 3.1.

Condicionando  $A = a$ , a probabilidade de falha é escrita como,

$$P_f = \int_{a \in \Omega_n} P\{g(RA) \leq 0 | A = a\} f_A(a) da \quad (3.9)$$

onde  $f_A(a)$  é a função densidade de probabilidade de  $A$  sobre a esfera unitária.

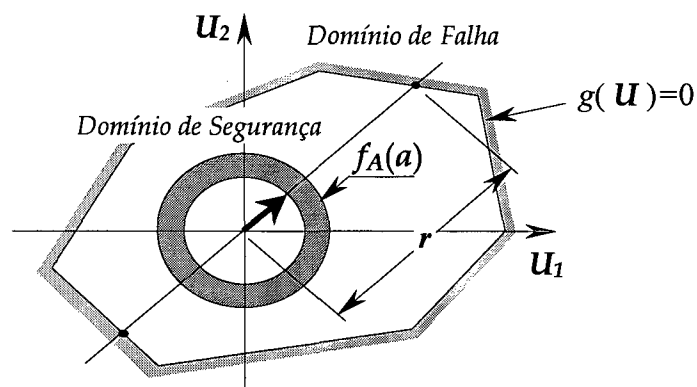


Figura 3.1 - Técnica de simulação direcional.

A partir dos valores amostrados,

$$P_i = P \{ g(Ra_i) < 0 \} \quad (3.10)$$

uma estimativa da probabilidade de falha, é obtida pela execução de simulações do vetor  $A$ ,

$$\hat{E}[P_f] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \quad (3.11)$$

o desvio padrão do estimador é dado por,

$$\hat{D}[P_f]^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (p_i - \hat{E}[P_f])^2 \quad (3.12)$$

o coeficiente de variação, para um tamanho de amostra aumenta a medida que a superfície afasta-se da forma esférica e com o crescimento do número de variáveis de projeto. Para uma superfície de falha esférica, no espaço normal padrão, é necessária apenas uma simulação, para determinação exata da probabilidade de falha. Esse método é particularmente eficiente para problemas com a superfície de falha aproximadamente esférica.

A eficiência do método pode aumentar significativamente com a utilização de uma função de amostragem por importância direcional. Os resultados obtidos anteriormente poderão conduzir a escolha da função densidade de amostragem por importância. As funções de amostragem são utilizadas para um número de superfícies importantes, tais como hiperplanos, hiperesferas, superfícies rotacionalmente simétricas e definidas por um conjunto convexo.

Com relação a técnica convencional de simulação de Monte Carlo, o método de simulação direcional apresenta variâncias menores, até mesmo para superfícies de falha

não esféricas. Apesar disso, o método apresenta dificuldades, para problemas com comportamento moderado e um número grande de simulações.

### 3.2.7 Amostragem por Importância

O processo de amostragem consiste basicamente, em concentrar os pontos de amostragem dentro da região mais importante, aquela que apresenta maior contribuição para a probabilidade de falha [54]. Os pontos de amostragem não são distribuídos uniformemente sobre o domínio definido pelas componentes do vetor de projeto. O método incorpora uma função densidade de amostragem por importância,  $h_X(\cdot)$

$$P_f = \int_{v_x} I(g(t)) \frac{f_X(t)}{h_X(t)} h_X(t) dt \quad (3.13)$$

a eficiência dessa técnica está na escolha da função de amostragem por importância. A função deverá extrair muita informação dos pontos amostrados. As amostras serão tomadas na vizinhança dos pontos de máxima probabilidade da função densidade de probabilidade do vetor de projeto, sobre a superfície de estado limite.

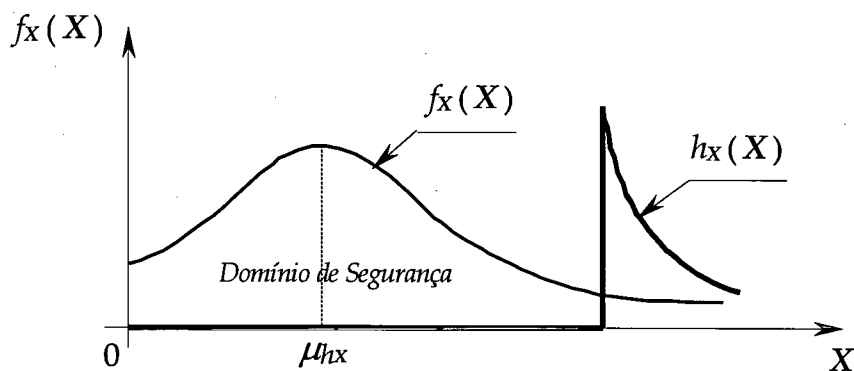


Figura 3.2 - Função densidade de amostragem por importância ótima.



Geralmente é interessante para fins de automatização que o processo de seleção da função densidade de amostragem por importância esteja relacionado com o comportamento da superfície de estado limite. Um procedimento bastante adotado na seleção da função de amostragem por importância é impor que a sua média esteja sobre o ponto de máxima probabilidade da função densidade de probabilidade do vetor de projeto, conforme mostrado na figura 3.2.

### 3.2.8 Amostragem Estratificada

Semelhante a técnica de amostragem por importância, ao invés de buscar o ponto ótimo de uma função de amostragem, toma-se uma quantidade maior de amostras das sub-regiões  $D_i$ , consideradas de maior importância. Supondo-se que uma determinada região, possa ser composta por  $m$ -subregiões disjuntas, a probabilidade de falha pode ser estimada por,

$$P_f = \sum_{i=1}^m P_i \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} I(g(x_j)) \quad (3.14)$$

onde  $P_i$  e  $N_i$  são a probabilidade e o número de simulações sobre  $D_j$  respectivamente. Esse método é particularmente eficiente [52] para casos onde poucas variáveis participam com a maior contribuição para a probabilidade de falha. Nesse caso a amostragem estratificada é executada somente para as variáveis mais importantes, sendo que o resto das variáveis são amostradas através de outras técnicas. O método apresenta falhas quando a concentração das amostras está fora da sub-região.

### 3.2.9 Amostragem Adaptativa

As propriedades estatísticas das funções de amostragem por importância podem ser bastantes diferentes da função ótima de amostragem por importância, uma vez que nestes casos são consideradas somente informações qualitativas do domínio de falhas. Funções de amostragem por importância eficientes são obtidas por procedimentos iterativos [8]. Uma função de amostragem por importância torna o método altamente eficiente quando as informações dos momentos de primeira e segunda ordem são idênticas as da função ótima de amostragem por importância isto é,

$$E_{h_x}(x) = E_{h_{xop}}(x|x \in D_f) \quad (3.15)$$

$$E_{h_x}(xx^T) = E_{h_{xop}}(xx^T|x \in D_f) \quad (3.16)$$

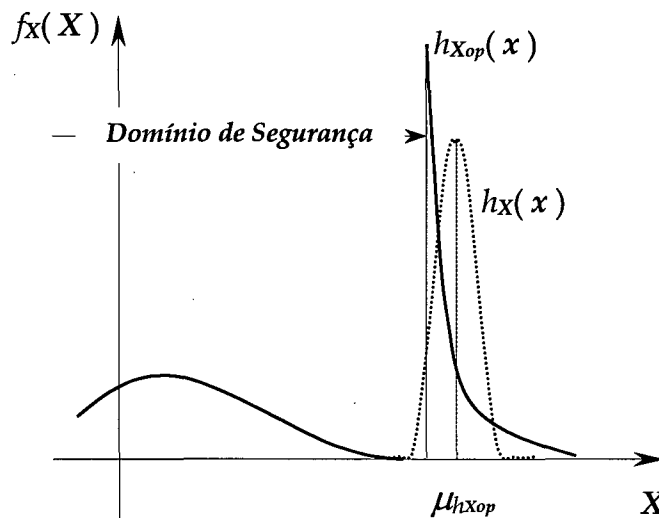


Figura 3.3 - Procedimento iterativo para obtenção da função de amostragem por importância, para o caso unidimensional.

Uma vez que o vetor média e variância das variáveis de projeto definem univocamente uma função densidade de probabilidade multinormal, esta função é admitida para estabelecer a função de amostragem por importância, conforme mostrado na figura 3.3. O procedimento de amostragem requer somente a função característica do domínio de falha.

### 3.2.10 Latin Hipercubo

As variáveis dominantes para problemas dependentes no tempo usualmente não são conhecidas, pois estão sujeitas a modificações. Em muitos casos a variável dominante dentro de um período particular poderá não ser dominante em outros períodos. A idéia fundamental na qual se desenvolve este método [45] é que a probabilidade de falha será obtida de um determinado número de amostras, de tal forma que o intervalo inteiro de cada variável é amostrado. O domínio é dividido em intervalos e sub-regiões selecionadas, tal que o intervalo de cada variável é ajustado, individualmente, com o intervalo de cada uma das variáveis remanescentes. Em aplicações práticas o domínio de cada variável é dividido em  $k$ -intervalos de igual probabilidade e uma observação é amostrada dentro do intervalo. A probabilidade de falha é estimada pela equação,

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N^n P_{k_i} I(g(\mathbf{x}_i)) \quad (3.17)$$

onde  $P_{k_i}$  denota a probabilidade de falha da sub-região  $D_i$ ,  $N$  o número de intervalos de cada variável, que é o número de simulações e  $n$  representa o número de variáveis.

Comparando-se com a técnica de amostragem estratificada mostra-se mais eficiente para amostras de mesmo tamanho.

### 3.2.11 Partição do Domínio

Essa técnica considera que o espaço de projeto seja composto de duas regiões disjuntas  $D_1$  e  $D_2$ , conforme indicado na figura 3.4.

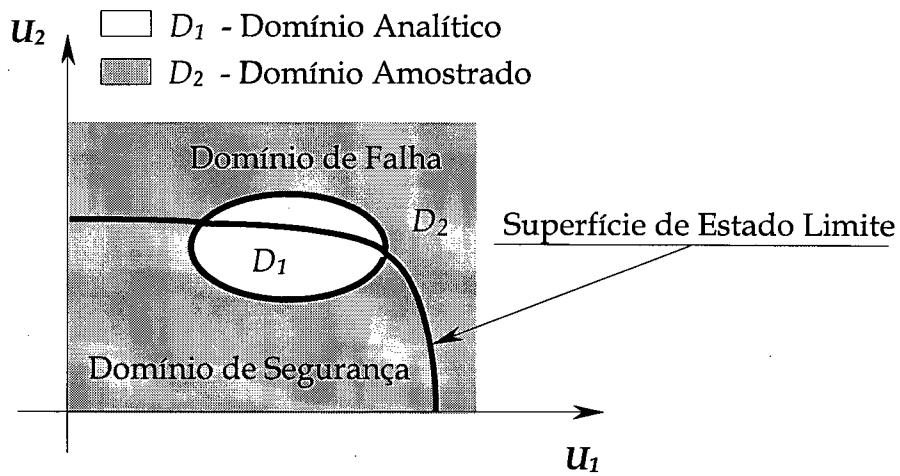


Figura 3.4 - Domínios disjuntos.

Supondo que a integração sobre a região  $D_1$  possa ser calculada analiticamente, e seja selecionada de tal forma que nenhuma falha ocorra nessa região, a probabilidade de falha é obtida através da integração sobre a região  $D_2$ ,

$$P_f = \int_{D_2} I(g(t)) \frac{f_X(t)}{h_{X_p}(t)} h_{X_p}(t) dt \quad (3.18)$$

sendo que  $h_{x_p}(\cdot)$  é a função densidade de amostragem por importância, truncada e definida como,

$$h_{x_p}(\mathbf{x}) = \frac{h_x(\mathbf{x})}{1 - P} ; \text{ se } \mathbf{x} \in D_2 \quad (3.19)$$

$$h_{x_p} = 0 ; \text{ se } \mathbf{x} \notin D_2 \quad (3.20)$$

$h_x(\cdot)$  é a função densidade de amostragem por importância,

$$P = \int_{D_1} h_x(t) dt \quad (3.21)$$

Portanto a equação (3.17) pode ser escrita como,

$$P_f = (1 - P) E \left( \frac{I(g(\mathbf{x})) f_x(\mathbf{x})}{h_x(\mathbf{x})} \right) \quad (3.22)$$

onde  $E(\cdot)$  é o valor esperado da função.

Dessa forma, a probabilidade de falha pode ser estimada por,

$$P_f = \frac{(1 - P)}{N} \sum_{j=1}^N I(g(\mathbf{x}_j)) \frac{f_x(\mathbf{x}_j)}{h_x(\mathbf{x}_j)} \quad (3.23)$$

a equação (3.18) sugere que a vantagem computacional pode ser obtida se o domínio inteiro de segurança é selecionado e todas as amostras são simuladas somente dentro do domínio de falha. A probabilidade associada a amostra que está fora de domínio  $D_1$  depende da função de amostragem por importância utilizada. Quando comparado com a técnica de amostragem por importância a variância da probabilidade falha é menor [53].

### 3.3 Métodos Aproximados

#### 3.3.1 Introdução

Os métodos aproximados podem ainda serem subdivididos em dois grupos que diferem nas aproximações das equações ( 2.2 ) e ( 2.10 ) respectivamente. No primeiro encontram-se os métodos dos momentos e superfície de resposta. Estes métodos estabelecem a solução do problema através da substituição da superfície de estado limite real por aproximações. No segundo grupo os métodos estão baseados na aproximação da função densidade de probabilidade da margem de segurança. Em geral as formulações desenvolvidas nos métodos aproximados são recentes e apresentam menor esforço computacional, porém perdem na precisão dos resultados, em relação às técnicas pertencentes aos métodos exatos. Percebe-se uma forte tendência na utilização das técnicas pertencentes ao grupo dos métodos aproximados, por utilizarem uma quantidade menor de informações sobre as incertezas nas variáveis de projeto, conduzindo a resultados satisfatórios. Outra vantagem oferecida é que devido à simplicidade dos conceitos utilizados, os métodos permitem serem empregados com ferramentas conhecidas da análise estrutural. Esse aspecto é atraente pela possibilidade de se realizar a análise de confiabilidade estrutural a partir de um aplicativo específico, atuando em conjunto com aplicativos disponíveis de *MDF*, *FEM* e *BEM*, tornando esse tipo de análise mais acessível ao usuário.

### 3.3.2 Superfície de Resposta

Geralmente nos problemas de confiabilidade estrutural a superfície de estado limite possui uma forma complexa, sendo em muitas situações impossível de ser expressa em termos do vetor de projeto. As funções de estado limite aproximadas são obtidas pela seguinte relação funcional,

$$g(\mathbf{X}) = \bar{g}(\mathbf{X}, q) + \varepsilon(\mathbf{X}) \quad (3.24)$$

onde  $f(\cdot)$  é uma função das variáveis de projeto,  $q$  representa os parâmetros desconhecidos e  $\varepsilon$  a medida de erro, conforme mostrado na figura 3.5. A função de estado limite, é obtida através de uma expansão em série de Taylor, interpolação polinomial, ou genericamente pela técnica de mínimos quadrados.

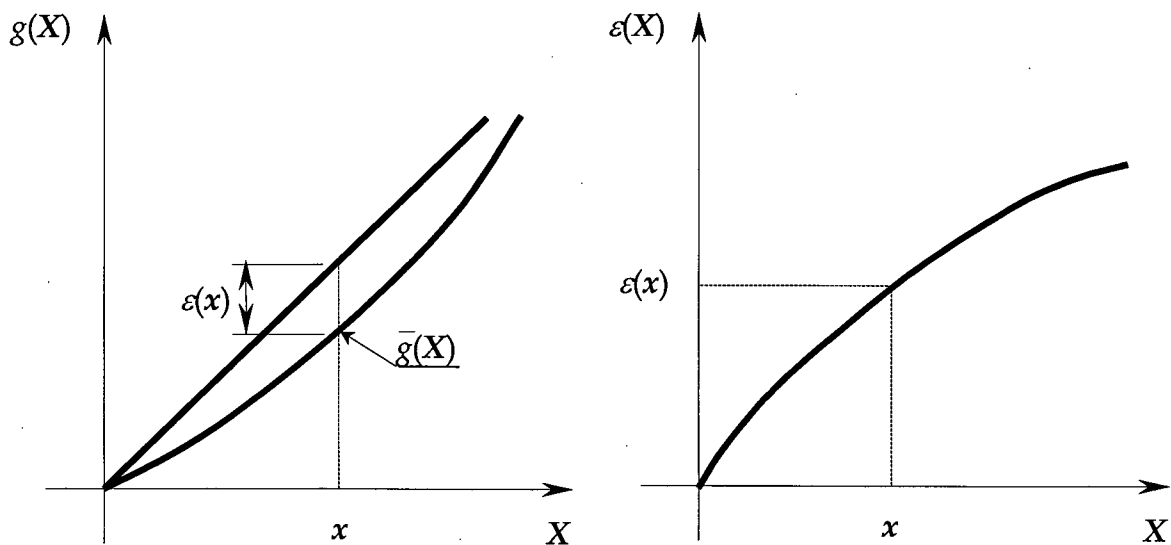


Figura 3.5 - Representação do erro na aproximação da superfície de estado limite.

Os métodos de superfície de resposta envolvem a realização de experimentos randômicos. Uma análise completa é necessária para cada conjunto de parâmetros, que representam a resistência e a sollicitação dos materiais. Quando a superfície de estado

limite não é conhecida o processo de simulação torna-se proibitivo, porquê as informações necessárias seriam gerados a partir de algum método numérico, o que acarretaria a avaliação da superfície de estado limite algumas centenas de vezes, resultando num esforço computacional significativo.

Os métodos baseados na aproximação da superfície de estado limite são considerados como métodos de superfície de resposta [21]. Existem métodos, em que a superfície de estado limite aproximada é obtida a partir das informações estabelecidas no ponto de projeto, satisfazendo além dos valores de média e desvio padrão, outras propriedades estatísticas, tais como o grau de correlação entre as variáveis de projeto e os tipos de funções densidade de probabilidade das variáveis de projeto. Na maioria dos problemas práticos não encontram-se disponíveis outras propriedades estatísticas, além da média e do desvio padrão. Portanto, somente valores médios e desvios padrão são incluídos no esquema computacional para a determinação da resposta da função. Esse conceito conduz a um procedimento de identificação de uma função de transferência, relacionada com os parâmetros que definem as variáveis resistência e solicitação do sistema. A idéia principal do método de superfície de resposta é substituir a superfície de estado limite por uma superfície aproximada, a partir de um esquema de interpolação [9], dos pontos amostrados durante a simulação do comportamento da superfície de estado limite

$$\bar{g}(\mathbf{X}) = a_0 + b_i X_i + c_i X_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.25)$$



$a_0, b_i, c_i$  são parâmetros da superfície de estado limite aproximada. A superfície não apresenta termos mistos, representando a superfície real ao longo dos eixos coordenados. Isso significa, que o espaço amostral entre os eixos não está suficientemente coberto. A situação pode ser melhorada sensivelmente se a informação estatística é considerada no processo de obtenção da superfície de estado limite aproximada. Os pontos de interpolação são escolhidos, estabelecendo-se uma relação com a informação disponível,

$$x_i = \mu_{x_i} \pm f\sigma_{x_i} \quad (3.26)$$

sendo  $\mu_{x_i}$  a média, desvio padrão  $\sigma_{x_i}$  e  $f$  é um fator arbitrário [9]. Usando  $2n + 1$  valores da função de falha nesses pontos, os parâmetros da equação ( 3.25 ) são a solução de um conjunto de equações lineares. A inserção da análise de sensibilidade e um esquema de interpolação adaptativa no contexto do método de superfície de resposta tende a diminuir o esforço computacional.

### 3.3.3 Método dos Momentos

No projeto com enfoque probabilístico, o objetivo é estabelecer as condições críticas em termos da probabilidade associada aos eventos, que caracterizam a falha. A solução desse problema, implica na determinação das configurações do vetor de projeto, que estão associadas a uma probabilidade de falha significativa. O método dos momentos serve para descrever o fenômeno de interesse, quando a quantidade de informações probabilísticas é pequena, tornando altamente atraente a sua aplicação em

problemas de engenharia. Além da medida de confiabilidade este método fornece informações relativas a sensibilidade das variáveis de projeto, possibilitando diminuir o esforço computacional durante o processo solução.

A proposta principal é caracterizar as variáveis e processos pelos momentos de primeira e segunda ordem, uma forma compreensiva, senão completa, para descrever a incerteza e o comportamento probabilístico conjunto das variáveis. Uma variedade de suposições, motivam o emprego dessa formulação, para análise de confiabilidade:

- 1) O modelo físico e as informações probabilísticas são insuficientes, para estabelecer a lei completa de probabilidade do fenômeno e predizer confiavelmente as probabilidades absolutas, nas caudas das funções densidade de probabilidade.
- 2) Nas proximidades do valor esperado do vetor de projeto, a probabilidade de falha é insensível aos tipos de funções densidade de probabilidade admitidas.
- 3) Muitos problemas de engenharia utilizam modelos mais realísticos, para representar o fenômeno, porém apresentam dificuldade no modelamento da incerteza, implicando em não se justificar, globalmente no problema, refinamentos adicionais.
- 4) Uma análise simplificada da incerteza, em algumas situações, pode ser fator motivador ao seu uso amplo, por usuários sem formação específica.
- 5) Quando são empregadas técnicas de otimização, o método dos momentos, na maioria das aplicações apresenta eficiência computacional grande, em relação aos métodos tradicionais para análise de confiabilidade. Normalmente, num projeto de engenharia, os custos são insensíveis as mudanças em níveis baixos da probabilidade de falha.

A teoria de probabilidade utilizada no método dos momentos, é operacionalmente eficaz no desenvolvimento de normas a serem adotadas em problemas de engenharia. O método estabelece uma interpretação racional e realística, com uma estrutura profissional.

Nas aproximações de primeira ou segunda ordem a transformação das variáveis de projeto é necessária, garantindo que a solução do problema de confiabilidade, ocorra num espaço onde as variáveis sejam estatisticamente independentes e com a função densidade de probabilidade normal padrão. A necessidade desse procedimento, deve-se ao desenvolvimento probabilístico do método estar apoiado na propriedade de simetria, que relaciona o conteúdo de probabilidade com o ponto de projeto sobre a superfície de falha para uma função densidade de probabilidade normal padrão.

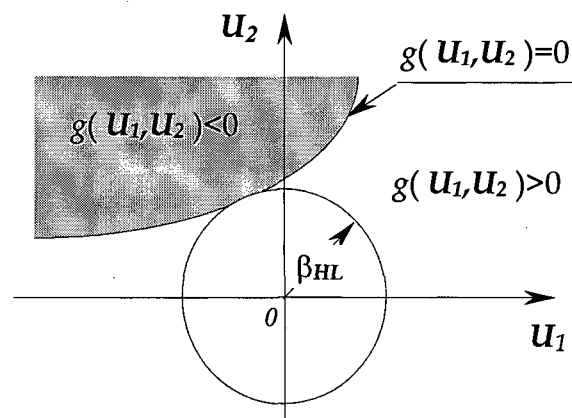


Figura 3.6 - Representação da simetria rotacional do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind.

As variáveis utilizadas devem apresentar alguma variabilidade, a fim de associar um comportamento probabilístico, sendo caracterizadas como randômicas. Não existe restrição quanto à escolha das funções densidade de probabilidade assumidas para as

variáveis de projeto, porém o índice de confiabilidade depende das variáveis utilizadas. O grau de dependência é inerente à transformação das variáveis de projeto e à sensibilidade sobre a resposta na superfície de falha. As funções densidade de probabilidade assumidas para as variáveis de projeto deverão modelar o comportamento das dispersões. Uma variável pode ser considerada determinística quando as dispersões presentes forem baixas [26]. A realização de uma análise de sensibilidade [43] durante a evolução do processo solução pode mostrar que para determinadas direções de pesquisa, uma ou um conjunto de variáveis poderão ser tratadas como determinísticas caso influenciem pouco na resposta, em termos de probabilidade de falha.

No espaço onde o problema é tratado o índice de confiabilidade de Hasofer-Lind é rotacionalmente simétrico em relação a origem [12]. Admitindo-se como uma medida razoável de confiabilidade, em vistas das informações disponíveis, distúrbios percebidos na simetria rotacional que serão tratados na transformação das variáveis de projeto. O mapeamento do domínio inteiro no espaço de projeto permite restaurar a propriedade de simetria. Os intervalos onde são encontradas as perturbações geralmente estão distantes dos pontos prováveis de falha, apresentando influência desprezível no resultado.

O critério de falha adotado na análise define a superfície de falha que pode ser interpretada como a região dos estados limites formada por uma sucessão de pontos definidos em termos das componentes do vetor de projeto. A informação requerida é somente o contorno da região de falha, além das informações dos momentos de

primeira e segunda ordem. O método é flexível na escolha dos algoritmos de busca que irão estabelecer o conjunto de pontos, que conduzem a condição de falha. Deve-se mencionar que nos métodos convencionais de projeto, onde são desconsideradas as incertezas pertinentes às variáveis de projeto, os resultados encontrados em muitas situações não são esperados. Tal aspecto não elimina os métodos convencionais dos protocolos de análise de projetos, a condição necessária para tal, é que os valores estejam dentro de um intervalo em que a probabilidade de falha seja baixa. O ponto de projeto é normalmente definido nas proximidades da origem do espaço normal padrão. A esse ponto está associado ao maior conteúdo de probabilidade de falha, visto que está numa região onde a densidade de probabilidade atinge seus valores máximos.

As aproximações de primeira e segunda ordem referem-se à ordem das informações requeridas sobre a superfície de falha, no ponto de projeto, na determinação da probabilidade de falha. Na aproximação primeira de ordem do método dos momentos ( **FORM - First Order Reliability Method** ) assume-se que a regularidade da imagem da superfície de falha será substituída por hiperplanos tangentes nos pontos de projeto. A experiência tem mostrado [17] que em casos onde estão envolvidas pequenas probabilidades a avaliação é realizada apenas por um modo de falha. A escolha de uma aproximação de primeira ordem é razoável, fornecendo resultados aceitáveis para aplicações de engenharia.

Na aproximação de segunda ordem ( **SORM - Second Order Reliability Method** ) as curvaturas [11] no ponto de projeção da superfície de falha no espaço imagem são significativas, em alguns casos, influenciando no resultado da probabilidade de falha.

Existem vários tipos de aproximações envolvendo suposições sobre a geometria da superfície de falha como ajustes por hiperparabolóides, hiperesferas ou hipercones [48]. Quando a probabilidade de falha é determinada por uma aproximação de segunda ordem da superfície de falha o custo computacional é maior, em virtude da quantidade adicional de informações que deverão ser geradas.

A escolha entre o tipo de aproximação a ser adotada está vinculada ao número de variáveis e à relação entre custo computacional e qualidade dos resultados. Em situações nas quais a análise de confiabilidade é de suma importância, como em estruturas complexas ou de alto risco [53], deve-se optar pela aproximação que seja a favor da qualidade dos resultados, provavelmente conduzindo a um custo computacional maior, do que em avaliações preliminares ou de sistemas simples.

# 4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS MOMENTOS

## 4.1 Introdução

Na solução do problema de confiabilidade estrutural foram empregados o método dos momentos, técnica de superfície de resposta e análise de sensibilidade. A proposta central desse desenvolvimento está na determinação da probabilidade de falha de componentes mecânicos através da realização de uma análise de confiabilidade adaptativa, onde são empregadas as técnicas de superfície de resposta para modelar o comportamento da superfície de estado limite. Sabe-se que apesar do método dos momentos possuir um esforço computacional menor do que as técnicas de simulação e amostragem, pode-se melhorar este aspecto através da utilização das informações geradas nas avaliações anteriores.

A análise de trabalhos anteriores [3, 7, 9, 11, 12, 16, 17, 19, 24, 53, 55] pode-se concluir que a abordagem empregada na solução de problemas através do método dos momentos apresenta procedimentos que ao longo da evolução dessa técnica tornaram-se etapas necessárias. Com a finalidade de estabelecer uma metodologia para a resolução do problema de confiabilidade estrutural, segundo o método dos momentos, identificou-se cinco etapas essenciais na formulação:

- Tratamento das variáveis de projeto.
- Processo de busca do ponto de projeto.

- Análise de sensibilidade.
- Determinação da probabilidade de falha.
- Análise de confiabilidade adaptativa.

Inicialmente são estabelecidos os modos de falha, atribuindo-se os critérios que servirão para definir, em termos das variáveis de projeto, a superfície de estado limite. Para as situações propostas os critérios de falha utilizados estabelecerão a superfície de estado limite, em função do parâmetro de avaliação da performance do componente. Este parâmetro pode representar um valor local de um campo de tensões ou deslocamentos.

## **4.2 Transformação das Variáveis de Projeto**

### **4.2.1 Introdução**

As variáveis de projeto representam as características geométricas do componente, propriedades mecânicas dos materiais utilizados e a intensidade do carregamento, sendo que o comportamento probabilístico desses parâmetros pode ser caracterizado por funções densidade de probabilidade, objetivando melhorar a representação das dispersões inerentes, ao vetor de projeto. O processo de solução é estabelecido num espaço onde o comportamento probabilístico das variáveis de projeto é caracterizado por uma função densidade de probabilidade normal padrão conjunta. Essa imposição possibilita a utilização da propriedade de simetria rotacional mostrada na figura 4.1, estabelecendo que para todos os hiperplanos de igual distância à origem, o conteúdo de probabilidade permanece constante, dentro



da representação dos momentos de segunda ordem [12]. A estrutura do método dos momentos desenvolveu-se a partir dessa propriedade.

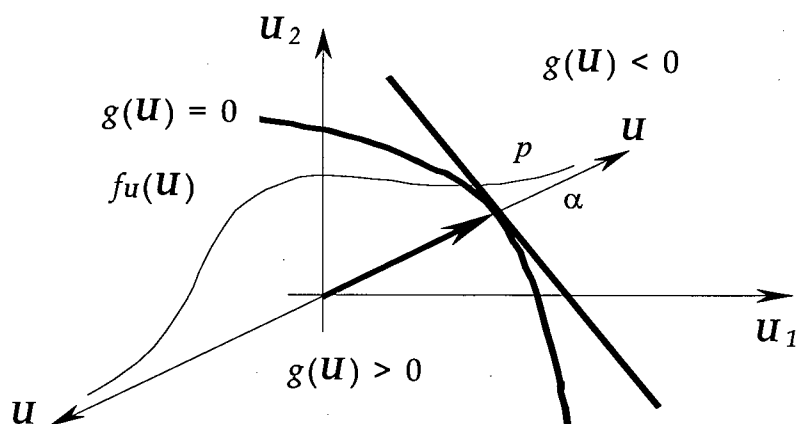


Figura 4.1 - Espaço normal padrão.

A propriedade de simetria é utilizada, satisfatoriamente, quando a informação é restrita ao vetor de média e à matriz de covariância do vetor de projeto. Geralmente, qualquer informação probabilística adicional, tal como limites de confiabilidade, momentos de alta ordem, podem causar distúrbios na simetria, tornando a medida de confiabilidade inoperante, caso seja aplicado o método dos momentos. Este contexto implica, essencialmente, na seleção formal de uma função densidade de probabilidade e uma transformação adequada para o vetor de projeto.

O presente trabalho estabelece uma estrutura consistente para tratar problemas de confiabilidade estrutural de componentes, com informação probabilística incompleta. Uma metodologia para o tratamento das variáveis de projeto é empregada, para viabilizar a análise de confiabilidade estrutural, em problemas com informação probabilística incompleta.

### 4.2.2 Princípio da Aproximação Normal

O princípio da aproximação normal define uma transformação simples do espaço de projeto para o espaço solução. Em síntese a transformação se propõe a determinar os parâmetros de uma função densidade de probabilidade equivalente, que possua o mesmo valor das funções densidade e probabilidade acumulada, admitidas para representar o comportamento probabilístico da variável de projeto. Aplica-se quando as componentes do vetor de projeto são mutuamente independentes com comportamento randômico caracterizado por funções densidade de probabilidade marginal. A transformação é definida pela identidade

$$\Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Com a diferenciação chega-se

$$\phi(u_i) \delta_{ij} = f_{X_j}(x_j) \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \quad (4.2)$$

Sabendo-se que  $u$  é um vetor normal padrão com componentes estatisticamente independentes, são estabelecidas as seguintes relações,

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu^{NE}_{X_i}}{\sigma^{NE}_{X_i}}\right) = F_{X_i}(x_i^*) \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\sigma^{NE}_{X_i}} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu^{NE}_{X_i}}{\sigma^{NE}_{X_i}}\right) = f_{X_i}(x_i^*) \quad (4.4)$$

Os parâmetros estatísticos da  $i$ -ésima componente do vetor de projeto no espaço normal padrão, são definidos como,

$$\sigma^{NE}_{X_i} = \frac{\phi(u_j^*)}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (4.5)$$

$$\mu^{NE}_{x_i} = x_i^* - \sigma^{NE}_{x_i} u_i^* \quad (4.6)$$

determinando-se os parâmetros da função densidade de probabilidade normal equivalente.

A solução é obtida através de um processo iterativo recursivo, no qual o ponto de projeto converge numa seqüência de pontos. Os parâmetros da função densidade de probabilidade normal equivalente mudam a medida que ocorre a atualização dos vetores de projeto, durante o processo de estabelecimento da solução.

### 4.2.3 Transformação de Rosenblatt

Geralmente as componentes do vetor de projeto são correlacionadas e apresentam modelos probabilísticos diferenciados. A transformação de Rosenblatt, quando aplicada a um vetor com característica probabilística qualquer, retorna um vetor cujo o comportamento probabilístico é representado por uma função densidade de probabilidade normal padrão, onde as suas componentes são estatisticamente independentes.

As componentes do vetor de projeto de comportamento probabilístico normal padrão são obtidas a partir da transformação aplicada de forma condicional, nas componentes do vetor de projeto.

$$u_i = T(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1) \quad (4.7)$$

Admite-se a correspondência entre as componentes dos vetores no espaço normal padrão e de projeto, estando condicionadas com o restante das componentes do

vetor de projeto. Esse procedimento possibilita a eliminação do grau de correlação, atribuindo um comportamento normal padrão às componentes do vetor de projeto.

Supõe-se um conjunto de variáveis randômicas, com uma função densidade de probabilidade conjunta. Um vetor com componentes não correlacionadas e comportamento probabilístico modelado por uma função densidade de probabilidade normal padrão pode ser obtido da seguinte equação,

$$\Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) \quad (4.8)$$

Aplicando-se a transformação inversa, obtém-se

$$u_i = \Phi^{-1} [F_{X_i}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1})] \quad (4.9)$$

A função densidade de probabilidade condicional conjunta é obtida da função densidade de probabilidade conjunta das componentes do vetor de projeto,

$$f_{X_i}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_i)}{f_X(x_1, \dots, x_{i-1})} \quad (4.10)$$

e a função de probabilidade acumulada condicional como

$$F_{X_i}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t_i) dt_i}{f(x_1, \dots, x_{i-1})} \quad (4.11)$$

A solução é estabelecida no espaço normal padrão, sendo assim faz-se necessário a transformação inversa,

$$x_i = F_{X_i}^{-1} [\Phi(u_i)] \quad (4.12)$$

conduzindo o vetor solução ao espaço de projeto.

A transformação de Rosenblatt apresenta algumas dificuldades, no que concerne a avaliação da função densidade de probabilidade condicional, das componentes do vetor de projeto. Em muitos casos, as funções condicionais são determinadas numericamente devido a natureza probabilística do vetor de projeto, ou falta de informação. É importante salientar que para um vetor de projeto, que possua componentes mutuamente independentes, com comportamento probabilístico diversificado, a transformação reduz-se ao princípio da aproximação normal.

#### **4.2.4 Tratamento das Variáveis de Projeto**

Busca-se um modelo probabilístico para o vetor de projeto e uma transformação, que seja consistente com a informação probabilística disponível no espaço onde é obtida a medida de confiabilidade. A seleção do modelo probabilístico e da transformação das variáveis de projeto são avaliadas pelos seguintes requisitos:

- 1) **Consistência:** Deve satisfazer as regras probabilísticas, sendo consistente com a informação disponível.
- 2) **Invariância:** O índice de confiabilidade estrutural deve ser invariante com relação a todas formulações para o modelo probabilístico ou transformação.
- 3) **Operabilidade:** Pode ser aplicado para um número arbitrário de variáveis de projeto, incorporando a informação disponível.

4) Simplicidade: Ponderar o esforço necessário para computar a medida de confiabilidade estrutural, com a qualidade da informação disponível. Avaliar a aplicação de computações sofisticadas e extensas, quando a informação disponível é de baixa qualidade.

A metodologia adotada é aplicada sobre funções densidade de probabilidade marginal de dois parâmetros. A transformação resultante depende da natureza probabilística e do grau de correlação das componentes do vetor de projeto. Admite-se uma função densidade de probabilidade normal equivalente para o espaço solução, relacionando-se com os modelos probabilísticos assumidos para as variáveis de projeto, por intermédio de uma transformação apropriada.

No trabalho proposto a informação disponível sobre o vetor de projeto consiste do vetor de média, da matriz de covariância e o conjunto de funções densidade de probabilidade marginal. Tal situação ocorre quando o número de observações são suficientes para selecionar, qualitativamente, as funções densidade de probabilidade marginal, mas insuficiente para determinar as distribuições conjuntas das variáveis de projeto. Existem algumas situações em que as funções densidade de probabilidade marginal apropriadas podem ser prescritas através de considerações físicas, apêndice A.

Segundo o requisito de consistência aplicado, isoladamente, a escolha entre os modelos é inteiramente arbitrária, portanto a seleção deverá ser orientada por outros requisitos. Interpretando-se a transformação das variáveis de projeto como o mapeamento dentro do espaço normal, é natural buscar-se um modelo baseado

numa função densidade de probabilidade normal. O modelo para o comportamento probabilístico da função densidade de probabilidade admitida deve satisfazer as seguintes condições:

- O mapeamento deve ser unívoco.
- As funções de probabilidade acumulada são contínuas.
- A matriz de correlação deve ser positiva definida e os coeficientes de correlação equivalente a uma função densidade de probabilidade normal deverão encontrar-se no intervalo  $[-1, +1]$ .

O modelo generalizado de Nataf [44], assume uma variável normal padrão  $\mathbf{U}$ , obtida da função densidade de probabilidade do vetor de projeto,

$$f_X(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{u}, \mathbf{C}_0) \prod_{i=1}^n \left( \frac{f_{X_i}(x_i)}{\phi(u_i)} \right) \quad (4.13)$$

no qual  $\phi_n(\mathbf{u}, \mathbf{C}_0)$  é a função densidade de probabilidade normal padrão e  $\mathbf{C}_0$  a matriz de correlação equivalente, definida como

$$\mathbf{C}_0 = [\rho_{0ij}]_{n \times n} \quad (4.14)$$

os elementos dessa matriz são determinados com a equação ( 4.15 ) a partir das funções densidade de probabilidade marginal e os coeficientes de correlação das variáveis de projeto.

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right) \left( \frac{t_j - \mu_{X_j}}{\sigma_{X_j}} \right) \phi_j(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \rho_{0ij}) \frac{f_{X_i}(t_i) f_{X_j}(t_j)}{\phi(u_i) \phi(u_j)} dt_i dt_j \quad (4.15)$$

essa equação pode ser resolvida iterativamente, estabelecendo o coeficiente de correlação equivalente. Para evitar o processo de integração foi introduzido um fator,

$$F = \frac{\rho_{0ij}}{\rho_{ij}} \quad (4.16)$$

que estabelece a relação entre os coeficientes de correlação. O fator  $F$  possui as seguintes propriedades:

- Geralmente a razão é dependente dos parâmetros das funções densidade de probabilidade marginal.
- Independe do coeficiente de correlação, caso alguma das variáveis seja normal.
- Possui a propriedade de invariância em relação a transformações lineares das variáveis de projeto.
- O fator é independente dos parâmetros para funções densidade de probabilidade marginal de dois parâmetros, caso seja irreduzível para a forma normal padrão através de uma transformação linear.

Uma metodologia para o tratamento das variáveis de projeto é restrita a qualidade da informação probabilística disponível para as variáveis de projeto. A caracterização probabilística das componentes do vetor de projeto, dentre os modelos probabilísticos disponíveis, dependerá efetivamente do comportamento das aleatoriedades presentes. Na literatura existem indicativos que podem ser utilizados, quando não se dispõe de informações necessárias, para a identificação da tendência das dispersões inerentes à variável de projeto. Foram utilizadas as



funções densidade de probabilidade marginal, normal, uniforme, exponencial, Weibull e Rayleigh. No apêndice B encontram-se as funções densidade e probabilidade acumulada dos modelos citados e as fórmulas que estabelecem o fator  $F$ , em relação ao comportamento probabilístico das variáveis envolvidas.

A transformação que leva às variáveis do espaço de projeto para o espaço normal padrão é representada da seguinte forma,

$$\mathbf{U} = \Gamma_0 \left( \Sigma^E_X \right)^{-1} \left\{ \mathbf{X} - \mu^E_X \right\} \quad (4.17)$$

onde  $\{ \mathbf{X} - \mu^E_X \}$  é o vetor que representa a translação no espaço normal padrão,  $\mu^E_X$  é o vetor média equivalente cuja as componentes são obtidas pelo o emprego da equação (4.6) e  $\Sigma^E_X$  é a matriz diagonal definida por

$$\Sigma^{NE}_X = [\sigma_{ij}]_{n \times n} \quad (4.18)$$

onde

$$\sigma_{ij} = \sigma^{NE}_{X_i} \delta_{ij} \quad (4.19)$$

elementos dessa matriz são determinados pela equação (4.6),  $\Gamma_0 = \mathbf{L}^{-1}$  é uma matriz triangular inferior, obtida da decomposição de Choleski da matriz de correlação equivalente  $\mathbf{C}_0$ ,

$$[\Gamma_0]^{-1} [\Gamma_0^T]^{-1} = \mathbf{C}_0 \quad (4.20)$$

tem a função de tornar as variáveis de projeto não correlacionadas, pela rotação dos seus eixos conforme indicado figura 4.3.

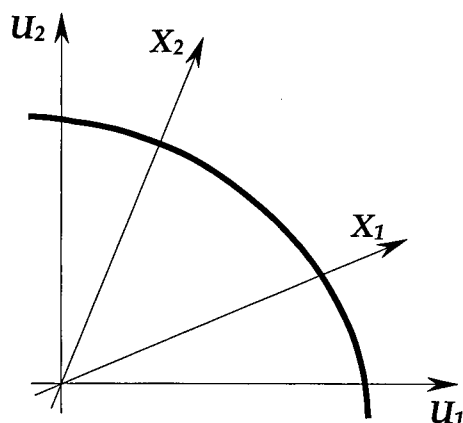


Figura 4.2 - Rotação do sistema de coordenadas.

Defini-se o jacobiano da transformação das variáveis de projeto, como

$$\mathbf{J} = \Gamma_0 (\Sigma^E_X)^{-1} \quad (4.21)$$

ou genericamente por

$$\mathbf{J} = [\varphi_{ij}]_{n \times n} \quad (4.22)$$

Admitindo-se uma nova matriz  $\mathbf{V}$  definida por,

$$\mathbf{V} = [v_{ij}]_{n \times n} \quad (4.23)$$

onde

$$\mathbf{V} = \Gamma_0 \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{L}^{-1} \quad (4.24)$$

sendo assim os elementos da matriz jacobiano são definidos por

$$\varphi_{ij} = v_{ik} \sigma_{kk}^{-1}, \text{ para } i \geq j \quad (4.25)$$

$$\varphi_{ij} = 0, \text{ para } i < j \quad (4.26)$$

a partir das definições anteriores a equação (4.17) pode ser escrita

$$\mathbf{U} = \mathbf{J} \{ \mathbf{X} - \mu_X^E \} \quad (4.27)$$

É importante ressaltar que a modificação dos parâmetros das funções densidade de probabilidade normal equivalente, e conseqüentemente a transformação, é realizada a cada iteração originada do processo de busca do ponto solução. As transformações aplicadas nas variáveis de projeto permitem operar com um vetor randômico de projeto não gaussiano e componentes correlacionadas.

Normalmente as informações probabilísticas referentes ao vetor de projeto são escassas, o tratamento aplicado às variáveis envolvidas é uma combinação do princípio da transformação normal e dos fatores de correlação equivalente[12].

A consistência das suposições relativas à transformação assumida para as variáveis de projeto, tem sido justificada através da sua utilização em diversos trabalhos desenvolvidos na abordagem segundo o método dos momentos, em problemas de confiabilidade estrutural.

### 4.3 Processo de Busca do Ponto de Projeto

#### 4.3.1 Introdução

O estabelecimento do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind pode ser formulado como um problema de otimização, cuja a função objetivo

$$\min \|\beta_{HL}\| \quad (4.28)$$

sujeito a

$$g(\mathbf{u}^*) = 0 \quad (4.29)$$

do ponto de vista empregado nas técnicas de otimização, o problema de confiabilidade estrutural resume-se em minimizar a distância entre o ponto de

projeto sobre a superfície de estado limite e a origem do espaço normal padrão, conforme figura 3.6.

### 4.3.2 Técnicas de Busca do Ponto de Projeto

Existem várias técnicas de otimização que poderiam ser utilizadas para a solução do problema proposto. Os algoritmos de otimização diferem, basicamente, pelas regras de busca do ponto solução e ajuste do tamanho do passo. A escolha entre as técnicas de otimização disponíveis dependerá de critérios baseados nas propriedades de convergência local e global, na capacidade de resolver problemas não convexos e da taxa de convergência.

O número de avaliações da função de falha é um dos fatores diferenciadores, entre os métodos exatos e aproximados. Procura-se um algoritmo que minimize o número de avaliações necessárias da superfície de estado limite, para determinação do ponto de projeto. O algoritmo HL-RF ( Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler ), proposto inicialmente por, Hasofer e Lind, tem mostrado-se eficiente em relação aos critérios de seleção, além de comportar na sua estrutura informações sobre a função densidade de probabilidade das variáveis de projeto. A seqüência de pontos é estabelecida por,

$$\mathbf{u}^{k+1} = \frac{[\nabla g(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^k - g(\mathbf{u}^k)]}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \nabla g(\mathbf{u}^k)^T \quad (4.30)$$

onde

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{u}) \quad (4.31)$$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla g(\mathbf{u}) \quad (4.32)$$

Com a finalidade de aumentar a convergência global do algoritmo se introduziu uma função mérito para monitorar a seqüência de convergência do método, passando a ser conhecido como HL-RF modificado [13]. A função mérito possui mínimo global no ponto solução do problema principal, decrescendo ao longo do processo iterativo,

$$m(\mathbf{u}^{k+1}) = \frac{1}{2} \left| \mathbf{u}^{k+1} - \frac{\nabla g(\mathbf{u}^k) \mathbf{u}^k}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \right|^2 + \frac{1}{2} c g(\mathbf{u}^k)^2 \quad (4.33)$$

onde  $c$  é uma constante positiva. No HL-RFM, a atualização do vetor de projeto, é dada pela seguinte expressão

$$\mathbf{u}_f^{k+1} = \mathbf{u}^{k+1} + p \mathbf{d}^k \quad (4.34)$$

onde,  $p$  é o parâmetro que determina o tamanho do passo

$$p = \{ p \in \mathbf{R}^n; 0 \leq p \leq 1 \} \quad (4.35)$$

e  $\mathbf{d}^k$  é um vetor que determina a direção de pesquisa sendo definido por,

$$\mathbf{d}^k = \frac{[\nabla g(\mathbf{u}^k) \mathbf{u}^k - g(\mathbf{u}^k)]}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \nabla g(\mathbf{u}^k)^T - \mathbf{u}^k \quad (4.36)$$

a solução é estabelecida a partir das informações geradas através de simulações da superfície de estado limite e do vetor gradiente.

No programa desenvolvido para análise de confiabilidade, quando utiliza-se o algoritmo HL-RFM, o passo é ajustado automaticamente. A regra de ajuste do

tamanho do passo é estabelecida a partir do comportamento parcial da função de mérito e das restrições impostas pelo seu domínio de existência,

$$p = 1 - \frac{1}{\exp\left(\left|\frac{-g(\mathbf{u}^k)}{\nabla g(\mathbf{u}^k)}\right|\right)} \quad (4.37)$$

a medida que se diminui o resíduo ocorre o aumento da eficiência em relação ao método HL-RF. Essas conclusões foram obtidas através da experimentação numérica, realizada em alguns exemplos resolvidos no capítulo de resultados numéricos.

A informação fornecida pelo vetor gradiente da superfície de estado limite no ponto de projeto define as direções viáveis de pesquisa. No estabelecimento das componentes do vetor gradiente foi utilizado o método das diferenças finitas centrais [36], por não necessitar da definição das componentes do vetor gradiente para sua determinação. Assim,

$$g_{,i}(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \approx \frac{g(x + \Delta x_i) - g(x - \Delta x_i)}{2\Delta x_i} \quad (4.38)$$

onde  $\Delta x_i$  é o incremento dado na  $i$ -ésima variável de projeto  $x_i$ . Uma das deficiências do método está no estabelecimento do tamanho do passo  $\Delta x_i$ . Dependendo da perturbação na variável de projeto, chega-se a erros de truncamento ou condicionamento [1]. Apesar disso, essa técnica é bastante empregada, pois permite a obtenção dos gradientes da função de falha, sem inferir na formulação do aplicativo de elementos finitos, responsável por simular o comportamento da superfície de estado limite. A viabilidade da análise de

confiabilidade está associada, diretamente, com a capacidade de convergência do algoritmo. A qualidade dos resultados dependerá da ordem exigida para aproximação da superfície de estado limite.

### 4.3.3 Critérios de Convergência

Para os procedimentos anteriormente citados a convergência é alcançada quando são satisfeitos os seguintes critérios simultaneamente [53]:

1) A diferença entre os pontos de projeto no espaço normal padrão obtidos na iteração anterior e na atual é menor que uma quantidade especificada.

$$\left| \mathbf{u}^{*(k)} - \mathbf{u}^{*(k-1)} \right| < \xi \quad (4.39)$$

2) Defini-se um vetor unitário,  $w$ , tangente à superfície de estado limite pelos dois últimos pontos de projeto obtidos nas iterações atual e anterior respectivamente. Um outro vetor unitário,  $y$ , é definido da origem ao ponto médio dos dois últimos pontos de projeto obtidos. O vetor pode ser entendido como uma aproximação da direção tangente no pontos de projeto e o gradiente sendo ortogonais,

$$\left| w \bullet y \right| < \xi \quad (4.40)$$

Quando estes critérios não são atingidos para um determinado número de iterações admite-se que o processo solução divergiu. Alternativamente pode-se reiniciar a análise estipulando como ponto de partida para o processo solução o último ponto de projeto estabelecido no processo anterior.

## 4.4 Análise de Sensibilidade

### 4.4.1 Introdução

A análise de sensibilidade é uma ferramenta de aplicação crescente no desenvolvimento e avaliação de sistemas. Na análise de sensibilidade clássica as medidas de sensibilidade estão baseadas no comportamento do sistema em relação a uma variação dos parâmetros, em torno de seus valores nominais. Esse enfoque poderá inserir erros nas avaliações de sensibilidade, visto que a metodologia convencional não comporta o modelamento das dispersões inerentes dos parâmetros de projeto. Propõe-se que a análise de sensibilidade considere a resposta do sistema, quando as componentes do vetor de projeto apresentarem variabilidade.

A análise de sensibilidade realizada opera com informações correntes, obtidas durante o processo solução, ou seja, não há um aumento do custo computacional devido a sua execução. Normalmente os indicadores mais utilizados procedem dos gradientes da superfície de estado limite, dentre os quais estão os fatores de omissão de sensibilidade e de sensibilidade paramétrica [41].

Geralmente nos problemas de confiabilidade estrutural somente algumas variáveis tem influência sobre o valor da probabilidade de falha. Como a eficiência numérica decresce, com o aumento do número de variáveis, é interessante diminuir esse número, sem causar perda significativa na qualidade dos resultados.



#### 4.4.2 Medidas de Sensibilidade

A análise de sensibilidade aplicada ao problema de confiabilidade estrutural serve para indicar as variáveis mais significativas ou verificar a influência da variação dos parâmetros no modelo probabilístico [20], em relação à medida de confiabilidade. A eficiência computacional na solução do problema de confiabilidade é relacionada com a dimensão do vetor de projeto e a técnica de otimização empregada. Os métodos de busca do vetor de projeto estão centrados nas informações de primeira ordem da superfície de estado limite. Como os gradientes são obtidos numericamente, sua definição dependerá das avaliações realizadas sobre a superfície de estado limite. O esforço computacional será proporcional ao número de componentes do vetor de projeto, sendo interessante diminuir o número de variáveis, sem que ocorra perda significativa na qualidade dos resultados.

Geralmente, somente algumas variáveis influenciam significativamente sobre o valor total da probabilidade de falha. Pode-se perceber que em determinadas regiões da superfície de estado limite um conjunto de variáveis influi pouco nas mudanças de direção, realizadas durante o processo de busca. Os parâmetros indicadores do comportamento são as medidas de sensibilidade e exprimem a importância das variáveis para as regiões investigadas, durante o processo solução. As medidas de sensibilidade são obtidas utilizando as informações dos gradientes da superfície de estado limite, possibilitando a redução do número de variáveis. As

medidas de sensibilidade não trazem ônus computacional, pois são estabelecidas, a partir das informações geradas anteriormente.

Os fatores de sensibilidade representam a derivada do índice de confiabilidade, em relação às variáveis de projeto no espaço normal padrão,

$$\alpha_i = \frac{\partial \beta}{\partial u_i} \quad (4.41)$$

são muito utilizados quando o nível de confiabilidade é especificado.

O fator de omissão de sensibilidade proporciona a informação adicional na determinação da probabilidade de falha. Fornece o erro relativo no índice de confiabilidade de Hasofer-Lind, quando admite-se que uma ou um conjunto de variáveis de projeto modifica o seu comportamento de randômico para determinístico, na figura 4.3 apresenta-se a definição do fator de omissão de sensibilidade. Defini-se como a razão entre os índices de confiabilidade de Hasofer-Lind,

$$\gamma_i = \frac{\beta_{HL}(u_i = k)}{\beta_{HL}} \quad (4.42)$$

considerando-se que a variável de interesse possua comportamentos determinístico e randômico respectivamente.

Impondo-se uma tolerância para o erro no índice de confiabilidade Hasofer-Lind o número de variáveis no modelo probabilístico e o esforço computacional podem ser significativamente reduzidos. Em problemas de confiabilidade

estrutural, envolvendo muitas variáveis, tais como problemas de elementos finitos estocásticos, essas reduções são essenciais para realização da análise.

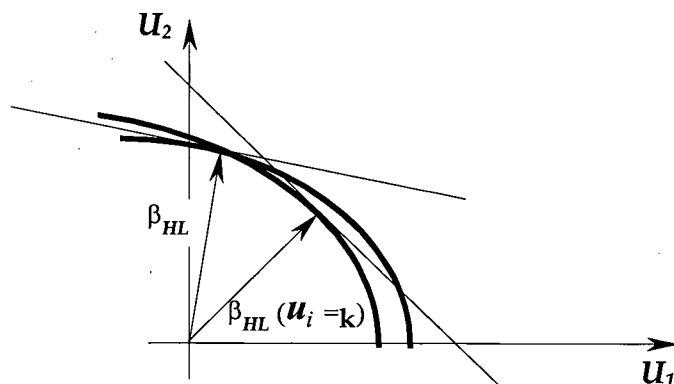


Figura 4.3 - Fator de omissão de sensibilidade.

Pretende-se impor certas condições sobre a evolução dos gradientes das variáveis menos significativas, porém isso dependerá da região dentro do espaço de projeto onde se realiza a busca.

#### 4.5 Determinação da Probabilidade de Falha

As aproximações de primeira e segunda ordem diferem no grau do ajuste da superfície de estado limite e das relações funcionais para determinação da probabilidade de falha. Na aproximação de primeira ordem a superfície de estado limite é aproximada por hiperplanos, sendo que a probabilidade de falha depende apenas da norma do vetor de projeto no ponto solução [16],

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (4.43)$$

Essa aproximação fornece resultados satisfatórios quando a superfície de estado limite é topologicamente regular nas vizinhanças do ponto de projeto. Nas

aproximações de segunda ordem são necessárias informações adicionais sobre a topologia da superfície de estado limite [11],

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta \kappa_i)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.44)$$

onde  $\kappa_i$  são as curvaturas principais, da superfície de estado limite, no ponto de projeto. As curvaturas são determinadas através da solução do problema de autovalores, da matriz contendo as informações de segunda ordem da superfície de estado limite no ponto de projeto. Em virtude das informações necessárias para determinação das curvaturas serem geradas numericamente, o esforço computacional aumenta exponencialmente com a ordem da aproximação. Além do esforço computacional ser demasiado, caso seja utilizada uma superfície de estado limite aproximada obtida das curvaturas principais será sensível a erros inerentes na computação das informações de segunda ordem.

## 4.6 Análise de Confiabilidade Adaptativa

### 4.6.1 Introdução

O desenvolvimento apoiou-se no método dos momentos, que consta em determinar a probabilidade de falha, a partir de suposições realizadas sobre o espaço das variáveis de projeto, e a relação funcional que estabelece o limite entre as regiões de falha e segurança. Quando a superfície de estado limite é conhecida em termos das variáveis de projeto o ponto de projeto é determinado com eficiência considerável. Na maioria das aplicações de engenharia não é possível estabelecer

pelos processos analíticos conhecidos o comportamento estrutural em relação as componentes do vetor de projeto. As informações referentes à superfície de estado limite são geradas através de simulações, encarecendo o processo solução. Como o método de busca do ponto de projeto baseia-se nas informações obtidas pelos gradientes de uma função implícita, serão necessárias algumas simulações da superfície de estado limite, para definição do vetor gradiente. Uma das propostas do trabalho é a utilização das informações obtidas nas simulações anteriores, para realizar uma aproximação do comportamento da superfície de estado limite.

Estabelecido o processo adaptativo, as informações adicionais para a análise proposta são provenientes da superfície de estado limite aproximada. Esse procedimento caracteriza a análise de confiabilidade adaptativa, com o objetivo de ponderar a relação entre a esforço computacional e a qualidade dos resultados obtidos, durante a evolução do processo. Como um dos objetivos é aumentar a viabilidade na execução da análise de confiabilidade, um aumento da ordem das informações sobre a superfície de estado limite, em muitas situações, torna-se proibitivo.

#### **4.6.2 Técnica de Superfície de Resposta Adaptativa**

Na análise de confiabilidade adaptativa realizada neste trabalho foram utilizadas as técnicas de superfície de resposta para modelar os comportamentos da superfície de estado limite e do vetor gradiente, conforme mostrado na figura 4.4. O modelo utilizado para aproximar o comportamento da superfície de estado limite

foi representado por uma polinomial de segundo grau sem termos cruzados, conforme a equação ( 3.25 ).

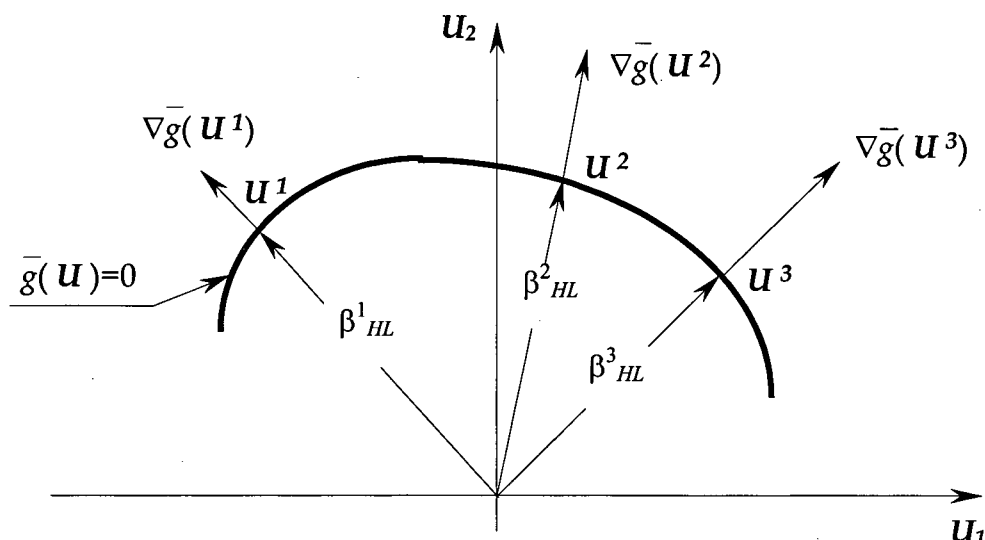


Figura 4.4 - Análise de confiabilidade adaptativa.

A aproximação das componentes do vetor gradiente na superfície de estado limite no ponto de projeto é modelada por

$$\bar{g}_{,j}(X) = a_{0j} + b_{ij}X_i + c_{ij}X_i^2 \quad (4.45)$$

foi utilizada a técnica dos mínimos quadrados [10] para estabelecer os parâmetros das aproximações propostas.

No programa computacional para análise de confiabilidade o esquema adaptativo é de uso facultativo, porém o processo é totalmente automatizado, dado que utiliza as informações obtidas nas avaliações anteriores, estabelecendo assim, os parâmetros da superfície aproximada. A partir do comportamento aproximado, tanto para superfície de estado limite quanto para o vetor gradiente, são geradas as informações para o estabelecimento do ponto de projeto pela equação ( 4.30 ). A medida que novos pontos de projeto são determinados ocorre a atualização do

comportamento das aproximações pelo estabelecimento dos parâmetros das equações ( 3.24 e 4.45 ) a cada iteração. Os pontos de projeto estabelecidos inicialmente não são descartados, pois são aqueles que apresentam as informações mais confiáveis em virtude de terem sido obtidos pela superfície de estado limite real. Dessa forma as soluções obtidas dependerão muito dos comportamentos assumido e real da superfície de estado limite, dependendo do desvio observado no comportamento que está sendo modelado pode tornar-se necessário às avaliações sobre a superfície de estado limite real ao longo do processo adaptativo.

# 5 PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

## 5.1 Introdução

Um programa para análise de confiabilidade foi desenvolvido ( **CRA** – Components Reliability Analysis ) com objetivo de aplicar as técnicas de análise implementadas na solução dos problemas propostos na avaliação da formulação utilizada. Os algoritmos foram implementados num compilador **BORLAND C** <sup>®</sup>++ versão 4.51. O programa incorpora a filosofia de orientação à objetos, estando estruturado em quatro módulos, representados na figura 5.1.

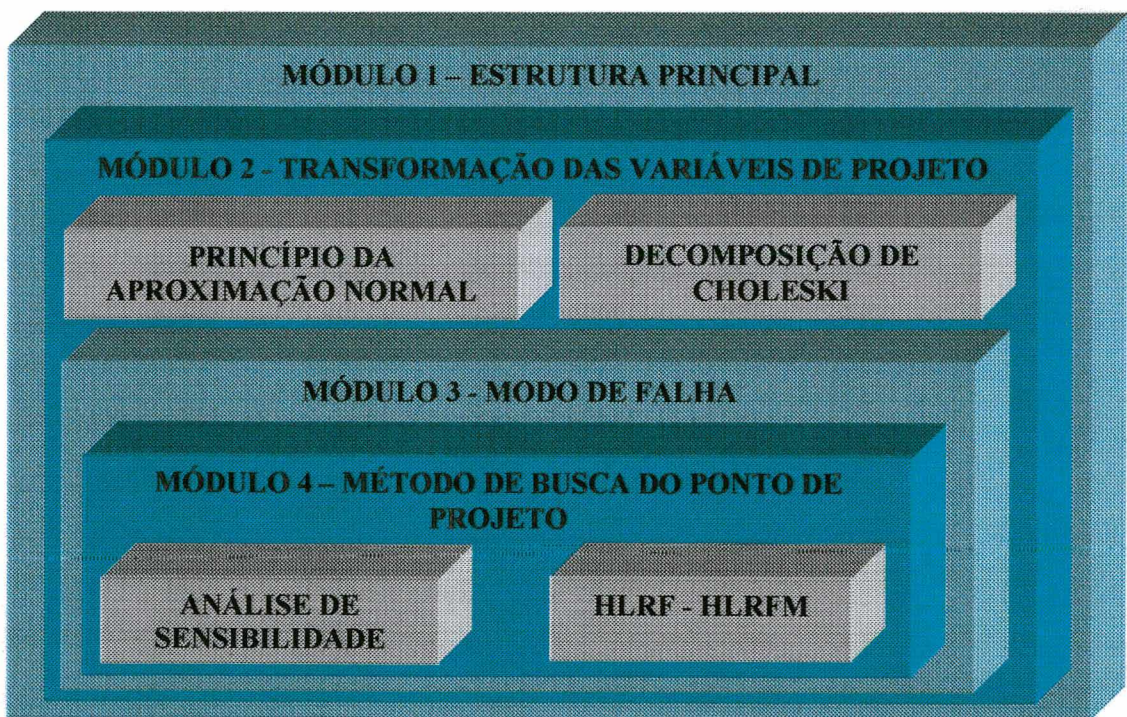


Figura 5.1 – Estrutura do programa para análise de confiabilidade ( **CRA** ).

No programa computacional desenvolvido é possível realizar a análise de confiabilidade pelo método dos momentos com aproximação de primeira ordem da superfície de estado limite e



No programa computacional desenvolvido é possível realizar a análise de confiabilidade pelo método dos momentos com aproximação de primeira ordem da superfície de estado limite e da probabilidade de falha. O modelo probabilístico para as variáveis de projeto pode ser representado por cinco funções densidade de probabilidade marginal sendo que os parâmetros das funções serão definidos pelo usuário:

- 1) Normal
- 2) Uniforme
- 3) Weibull
- 4) Rayleigh
- 5) Exponencial

O algoritmo de um interpretador simbólico foi desenvolvido e implementado, permitindo a definição da superfície de estado limite, pelo usuário, em termos das variáveis de projeto. A implementação desta ferramenta possibilitou que todas as informações necessárias para o estabelecimento do ponto de projeto fossem geradas no próprio ambiente do programa aumentando a sua flexibilidade e versatilidade.

Os métodos de busca utilizados foram o HL-RF convencional e modificado sendo que neste último implementou-se o ajuste automático do passo que determina a variação que deverá ser observada no ponto de projeto ao longo da direção de pesquisa.

A análise de confiabilidade adaptativa está a disposição do usuário, sendo realizada através do emprego das técnicas de superfície de resposta adaptativa. Permite a definição do tipo de aproximação realizada sobre a superfície de estado limite. A família de funções utilizadas na representação da superfície de estado limite foi uma polinomial de

segundo grau sem termos cruzados, o processo para estabelecer a aproximação é realizado automaticamente, em função da quantidade de informações disponíveis.

Os resultados fornecidos pelo programa para uma determinada superfície de estado limite são os seguintes:

- Índice de confiabilidade de Hasofer Lind,  $\beta_{HL}$ .
- Determinação da probabilidade de falha através do método dos momentos.
- Pontos de projeto nos espaços de projeto e normal padrão ( $X^*$ ,  $U^*$ ).
- Medidas de sensibilidade: fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade ( $\alpha_i$ ,  $\gamma_i$ ).
- Parâmetros de uma função densidade de probabilidade equivalente, através do princípio da aproximação normal ( $\mu^{NE_X}$ ,  $\sigma^{NE_X}$ ).
- Valor da função de monitoramento no ponto de projeto.

O programa para análise de confiabilidade estrutural foi desenvolvido e instalado num computador pessoal PC-586/200MHz.

## 5.2 ESTRUTURA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

### 5.2.1 Módulo 1 - Estrutura Principal

No primeiro módulo encontra-se a estrutura principal do programa, possuindo os seguintes elementos:

**Entrada de Dados:** Nesta encontram-se a entrada das informações necessárias na caracterização do modelo probabilístico das componentes do vetor de projeto, definição

do método de busca a ser utilizado no estabelecimento do ponto de projeto, critério de falha, análise de sensibilidade, definição do resíduo, análise de confiabilidade adaptativa através da escolha do tipo de função para modelar o comportamento da superfície de estado limite. Na figura 5.2 estão representadas as informações utilizadas no módulo 1.

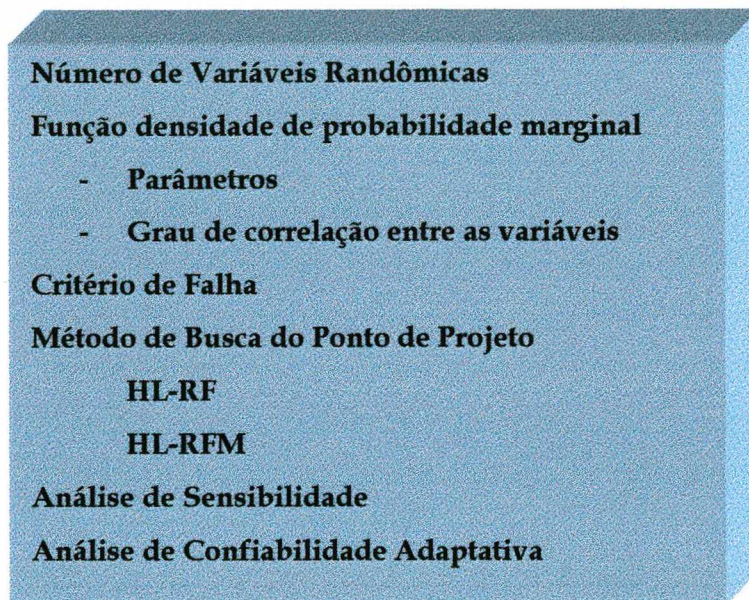


Figura 5.2 - Entrada de dados do módulo 1.

**Objetos:** Constam dos objetos que desempenham as funções pertencentes aos módulos subsequentes. Neste módulo estão os objetos responsáveis pela transformação das variáveis de projeto, o interpretador simbólico do critério de falha, algoritmo de busca do ponto de projeto e o estabelecimento da função utilizada na aproximação da superfície de estado limite.

## 5.2.2 Módulo 2 - Transformação das Variáveis de Projeto

No segundo módulo é executado a transformação das variáveis de projeto que dependerá da natureza do vetor de projeto. O comportamento probabilístico das variáveis de projeto pode ser representado, individualmente, pelas funções densidade de probabilidade marginal, possibilitando tratar com variáveis estatisticamente dependentes e independentes. O fluxograma mostrado na figura 5.3 estabelece as transformações aplicadas às variáveis de projeto conforme as informações probabilísticas disponíveis.

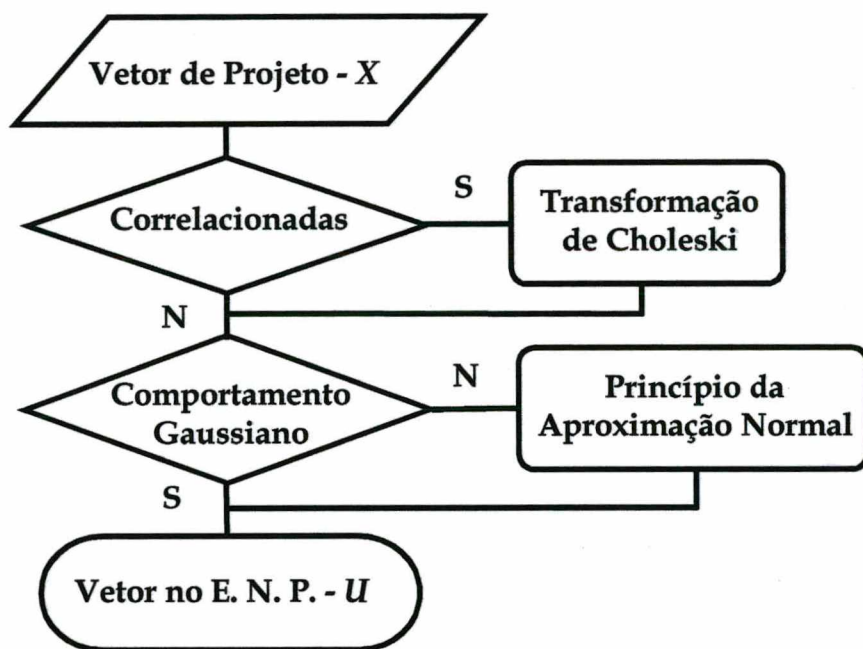


Figura 5.3 - Fluxograma esquematizando o tratamento dado as variáveis de projeto.

O segundo módulo é composto dos protótipos CHOLESKI.H, JACOB.H e NORMAL.H. Nestes encontram-se as suas classes e funções membros, conforme mostrado na figura 5.4.

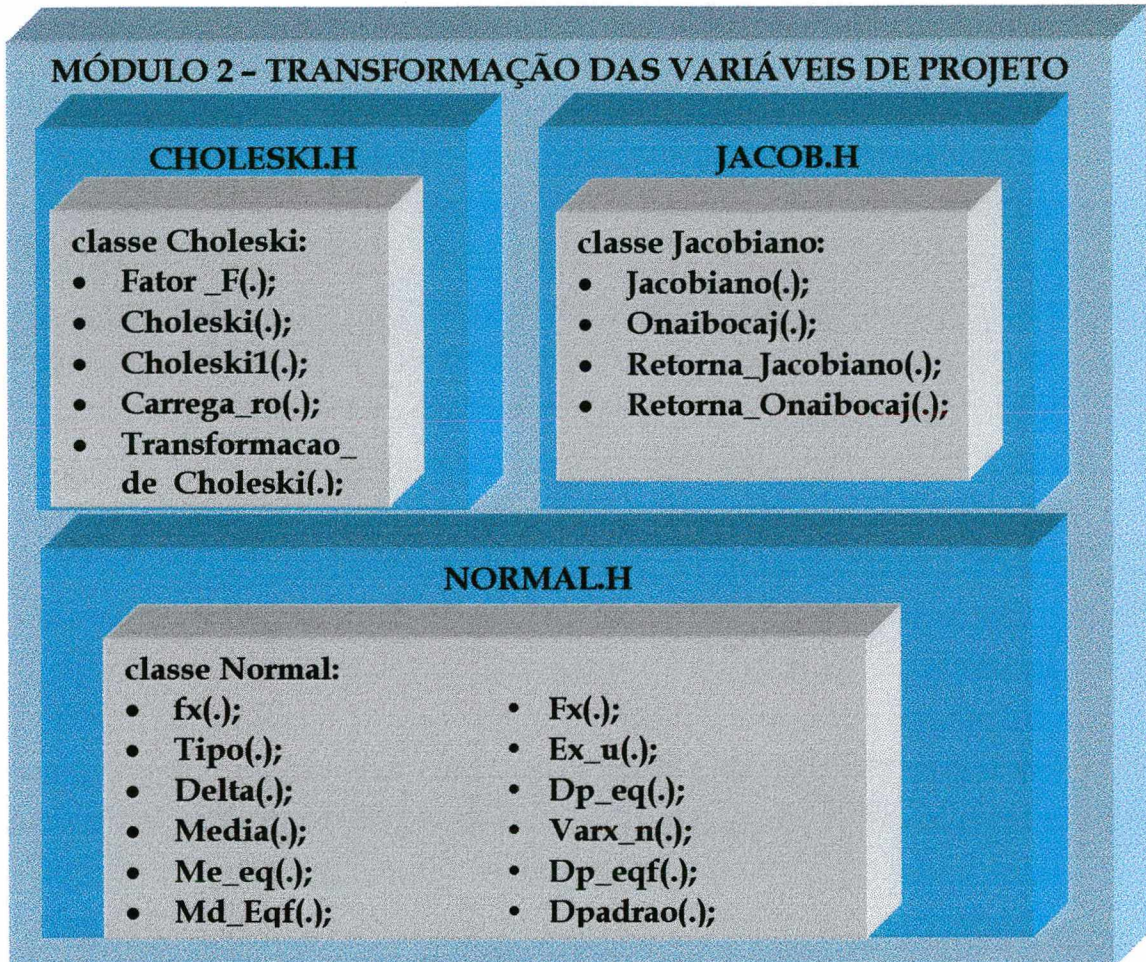


Figura 5.4 - Estrutura do módulo 2 em termos de classes e funções membros.

CHOLESKI.H: Neste protótipo encontra-se a classe Choleski onde são determinados:

- O fator  $F$ .
- A matriz  $\Gamma_0$  da decomposição de Choleski da matriz de correlação equivalente.

NORMAL.H: Neste é estabelecido parte da transformação das variáveis de projeto pela determinação dos parâmetros de uma função densidade de probabilidade normal equivalente, sendo

- Valores das funções densidade e probabilidade acumulada das variáveis de projeto.
- Momentos de primeira e segunda ordem das variáveis de projeto.

- Determinação do coeficiente de variação.
- Parâmetros da função densidade de probabilidade normal equivalente.

JACOB.H: A partir das informações anteriores é montado o jacobiano que representa a transformação que deverá ser aplicada às variáveis de projeto.

### 5.2.3 Módulo 3 - Modo de Falha

No terceiro módulo foi implementado um interpretador simbólico, que utiliza as informações da função de falha, definida pelo usuário na entrada de dados, na determinação dos valores da função e as componentes do vetor gradiente da superfície de estado limite, no ponto de projeto. A sua estrutura com as classes e funções membros está representado na figura 5.5.

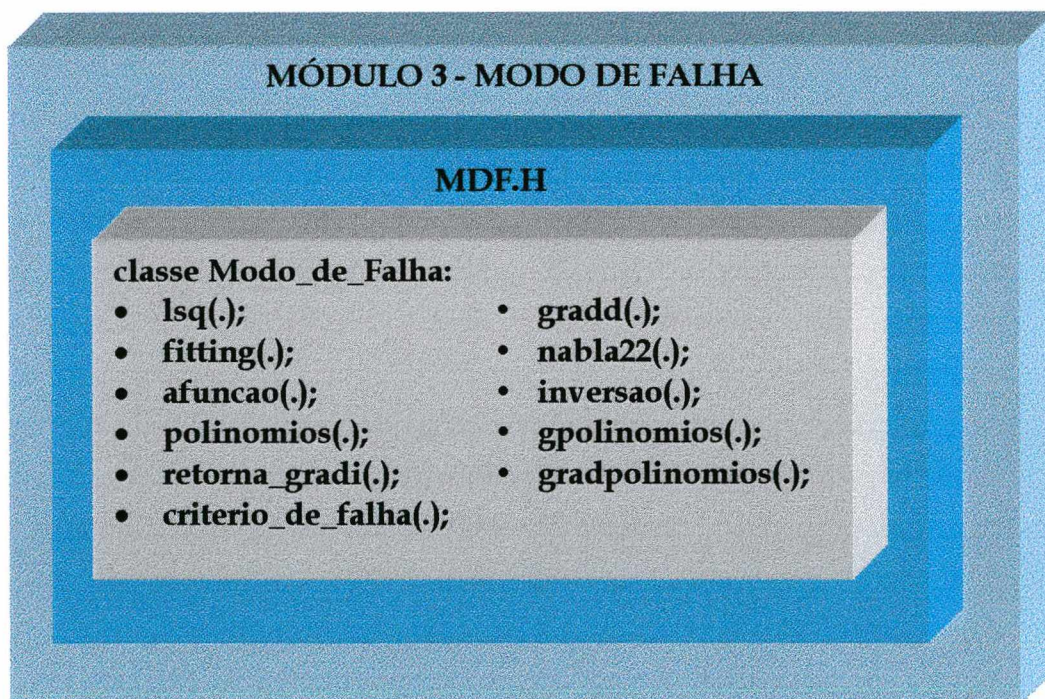


Figura 5.5 - Estrutura do módulo 3 em termos de classes e funções membros.

Neste módulo estão as ferramentas computacionais para o estabelecimento da análise de confiabilidade adaptativa, pelo uso das técnicas de superfície de resposta adaptativa. Esse módulo é constituído do protótipo MDF.H, que é utilizado recursivamente ao longo do processo solução. Neste protótipo são realizados as seguintes funções:

- Estabelecimento do valor da variável margem de segurança através da leitura e manipulação do critério de falha pelo interpretador simbólico.
- Determinação das componentes do vetor gradiente, no espaço de projeto utilizando diferenças finitas centrais.
- Aproximação dos comportamentos da superfície de estado limite e vetor gradiente pelo emprego da técnica de mínimos quadrados.

#### **5.2.4 Módulo 4 - Método de Busca do Ponto de Projeto**

No quarto módulo são determinados o ponto de projeto pelos métodos de busca disponíveis e a probabilidade de falha, conforme indicado na figura 5.6. Na opção pelo HL-RFM é realizado o ajuste do parâmetro que determina o tamanho do passo, baseado nas informações da superfície de estado limite e do seu vetor gradiente no ponto de projeto. A análise de sensibilidade é outra ferramenta a disposição do usuário, sendo realizada através dos fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade.

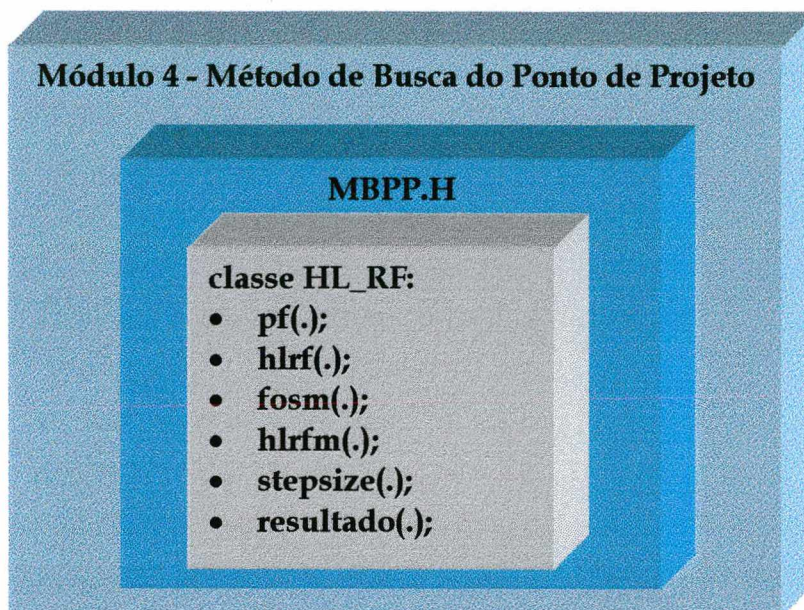


Figura 5.6 – Estrutura do módulo 4 em termos do seu protótipo MBPP.H, classe e funções membros.

O programa incorpora as vantagens de uma linguagem estruturada, pois os módulos são flexíveis e independentes possibilitando implementações futuras. Tornando possível a implementação, dentro da estrutura proposta neste programa, de outros métodos de busca do ponto de projeto, superfície de resposta, novos modelos probabilísticos e transformação para variáveis de projeto.



## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 6.1 Introdução

Com o objetivo de verificar, comprovar e avaliar a eficiência da formulação apresentada no capítulo 4, propõe-se a resolução de quatro exemplos, utilizando o programa computacional desenvolvido. Como fonte de pesquisa foram adotados artigos e publicações da área, em que as soluções admitidas como exatas foram obtidas a partir do método de simulação de Monte Carlo.

A seleção dos exemplos foi baseada nos requisitos principais a serem observados, esquema de busca do vetor de projeto, ajuste automático do tamanho do passo, análise de sensibilidade através da aplicação dos fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade e análise de confiabilidade adaptativa. A seguir é feita uma breve explanação dos exemplos resolvidos, associando aos objetivos a serem alcançados.

O primeiro exemplo consiste de uma viga engastada, sendo consideradas cinco variáveis randômicas no vetor de projeto [45]. A solução é dada em termos da probabilidade de falha e índice de confiabilidade, avaliada por diferentes métodos. O objetivo a ser alcançado é a determinação da solução, aplicando os métodos convencional e modificado do algoritmo HL-RF. O ajuste do passo é aplicado, sendo feitas observações sobre a relação entre a precisão admitida para a solução e o número de iterações.

No segundo exemplo uma situação clássica é analisada, que consiste de uma haste tracionada, onde são consideradas duas variáveis randômicas [22]. A solução é

dada em termos de probabilidade de falha e índice de confiabilidade, avaliada por diferentes formulações. A análise de sensibilidade é aplicada através dos fatores de omissão de sensibilidade. O estabelecimento da solução é realizado pelos métodos convencional e modificado do algoritmo de busca.

No terceiro exemplo proposto consiste de uma haste, com duas variáveis randômicas [46]. A solução é estabelecida aplicando o esquema adaptativo para o comportamento da superfície de estado limite, com uso dos métodos de busca disponíveis, para o estabelecimento do ponto de projeto.

## 6.2 EXEMPLO 1

A viga engastada de comprimento  $L$ , seção transversal retangular com largura  $b$  e altura  $h$ , é solicitada por uma carga distribuída  $q$ .

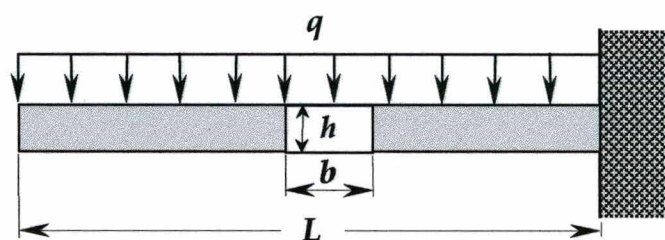


Figura 6.1 - Viga engastada, com carga distribuída.

A falha é caracterizada pelo escoamento na extremidade engastada. O critério de falha é dado pela seguinte relação,

$$g(\mathbf{X}) = r(\mathbf{X}) - s(\mathbf{X}) = \sigma_{ESC} \frac{3qL^2}{bh^2} - X_5 \frac{3X_1X_2^2}{X_3X_4^2} \quad (6.1)$$

Tabela 6.1 - Variáveis randômicas e seus parâmetros estatísticos.

$X_i$	Variável	F.D.P.	$\mu_{X_i}$	$\sigma_{X_i}$
$X_1$	$q$ ( kg/cm )	Normal	1,15	0,0333
$X_2$	$L$ ( cm )	Normal	60	0,6000
$X_3$	$b$ ( cm )	Normal	4	0,1200
$X_4$	$h$ ( cm )	Normal	1	0,0300
$X_5$	$S_y$ ( kg/cm <sup>2</sup> )	Normal	3600	300,00

Tabela 6.2 - Resumo dos resultados.

Aplicativo	Método	$\beta_{HL}$	$P_f$
Formulação analítica, multiplicadores de Lagrange [45].	FORM	1,3212923	0,093202
PROBAN [45]	FORM	1,2796330	0,100337
	SORM	1,2594190	0,103940
	MC ( 1000 )	1,3350000	0,091000
	MC ( 5000 )	1,3000000	0,096800
CRA	FORM - HLRF	1,2796300	0,100339
	FORM - HLRFM	1,2796300	0,100339

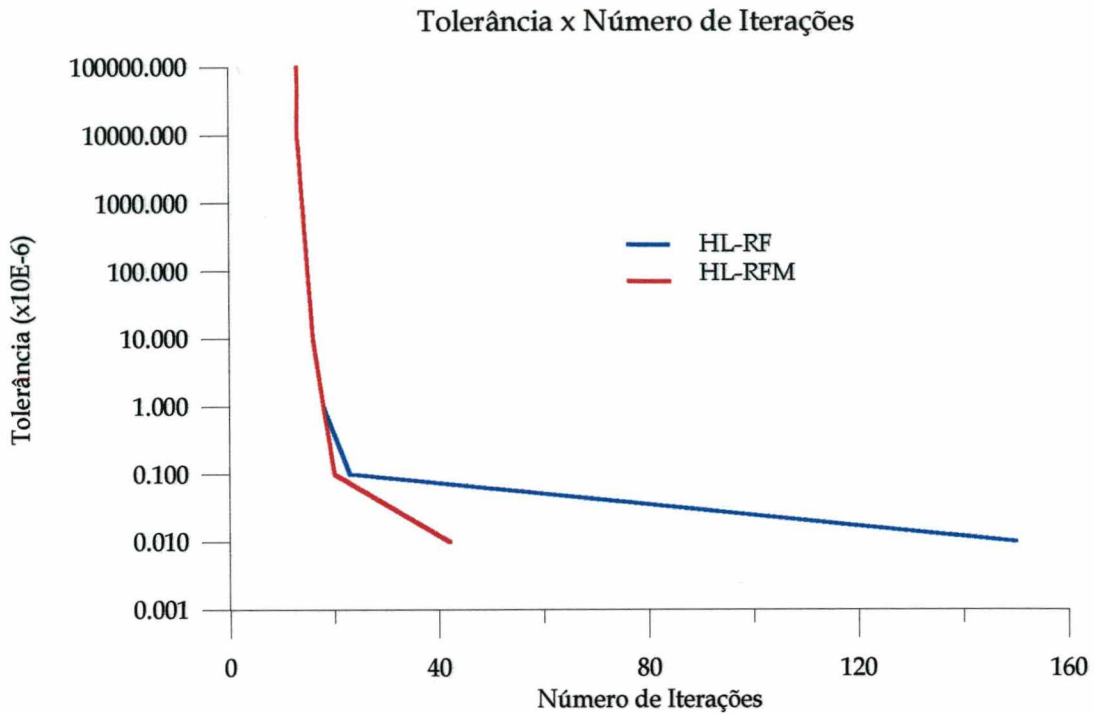


Figura 6.2 - História da convergência.

A utilização dos métodos convencional e modificado conduziram aos mesmos resultados, porém observações foram feitas com relação à precisão e ao esforço computacional. A medida que aumenta-se a precisão o número de iterações para o algoritmo convencional de busca do ponto de projeto aumenta, enquanto para o modificado diminui, conforme pode ser visto no gráfico da figura 6.2. Percebe-se que em determinadas regiões do gráfico a eficiência dos algoritmos se alternam um pouco em função do grau de não linearidade da função de estado limite e conseqüentemente a oscilação do tamanho do passo.

### 6.3 EXEMPLO 2

Uma haste de seção transversal circular é tracionada por uma carga conhecida  $T = 5 \text{ kN}$ , tendo como variáveis randômicas o diâmetro ( $X_1$ ) e a tensão de escoamento ( $X_2$ ),

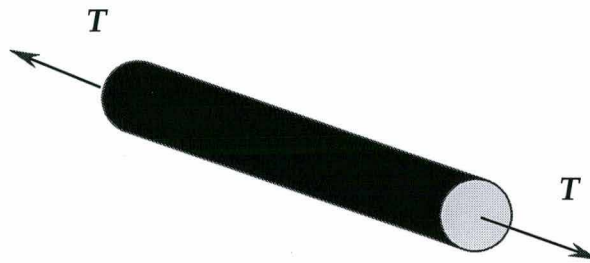


Figura 6.3 - Haste submetida a esforço de tração.

as variáveis normais possuem comportamento probabilístico, gaussiano e não são correlacionadas. Admite-se que a falha, para caso estático, ocorra quando a tensão axial atinge a tensão de escoamento do material da haste. Adota-se o critério de Rankine.

$$g(X) = \frac{\pi X_1^2 X_2}{4} - T \quad (6.2)$$

Tabela 6.3 - Dados probabilísticos das variáveis de projeto e resultados.

$X_i$	$\mu_{X_i}$	$\sigma_{X_i}$	$X_i^* [20]$	$X_i^* (CRA)$
$X_1$ (mm)	29	3	28,0500	27,5881
$X_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	170	25	8,0900	8,3647

A primeira conclusão é que o processo solução, independente do algoritmo de busca do ponto de projeto, percorreu o mesmo caminho, ou seja, os fatores de

sensibilidade das variáveis de projeto compartilharam o mesmo domínio, as técnicas de busca do ponto de projeto mostraram mesma eficiência.

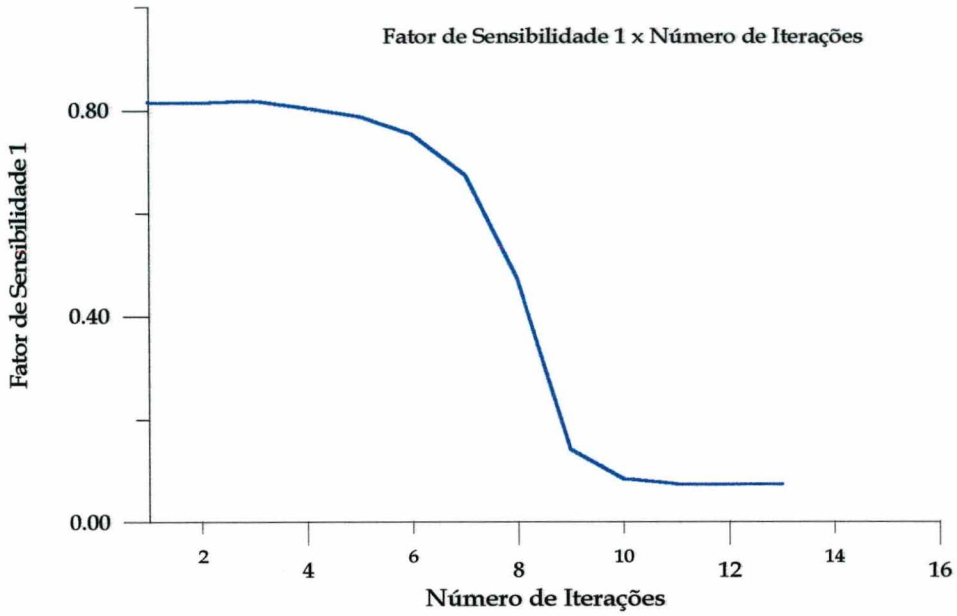


Figura 6.4 - Comportamento do fator de sensibilidade,  $\alpha_1$ .

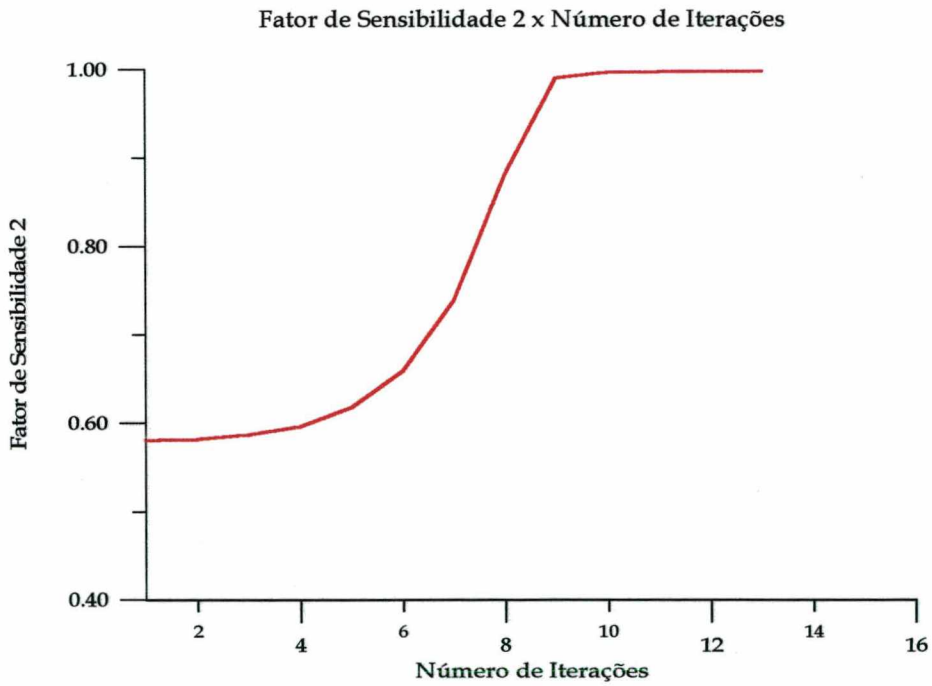


Figura 6.5 - Comportamento do fator de sensibilidade,  $\alpha_2$ .

A análise de confiabilidade adaptativa foi empregada na solução deste problema, porém não convergiu para o resíduo estabelecido, em virtude do grau de não linearidade do problema. O processo adaptativo do comportamento da superfície de estado limite utilizou informações de regiões distantes do ponto de projeto. A aproximação não comporta o desvio de comportamento da superfície de estado limite real, por não modelar satisfatoriamente o grau de não linearidade para regiões além daquelas que foram inicialmente simuladas.

Observa-se que a partir de um determinado número de iterações, as medidas de sensibilidade das variáveis de projeto estabilizam, permanecendo com esse comportamento até a convergência, conforme indicado nas figuras 6.4 e 6.5. Este comportamento evidencia as questões comentadas anteriormente salientando que os algoritmos de busca utilizam tais informações.

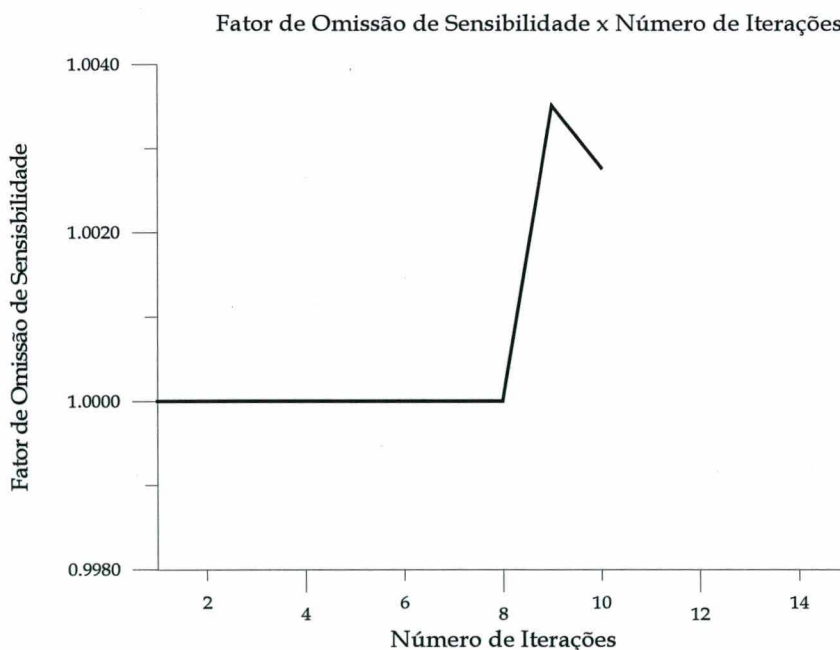


Figura 6.6 – Fator de omissão de sensibilidade.

Os fatores de omissão de sensibilidade utilizados nesse exemplo possibilitaram estabelecer a solução com um número de iterações menor, comparando-se com as soluções obtidas pelos outros métodos de busca. Isto implica na diminuição do número de avaliações da superfície de estado limite e do esforço computacional. Porém a medida que aumenta-se o resíduo, o algoritmo modificado converge com um número maior de iterações que no algoritmo de busca convencional. Tal aspecto está relacionado ao grau de não linearidade da superfície de estado limite que dependendo da perturbação dada no tamanho do passo pode-se provocar oscilações em torno do ponto de projeto conduzindo a um número maior de iterações.

#### 6.4 EXEMPLO 3

Uma haste de seção transversal  $X_2$  é solicitada por uma carga axial  $X_1$ . Assume-se que a falha é caracterizada quando a tensão axial é maior que a tensão de escoamento  $X_3$ . São resolvidos dois casos que diferem basicamente no grau de correlação das variáveis de projeto,

$$g(\mathbf{X}) = X_3 - \frac{X_1}{X_2} \quad (6.3)$$

1º Caso - Variáveis normais e não correlacionadas,  $\mu_{\mathbf{X}} = \{ 1000; 2; 600 \}$  e  $\sigma_{\mathbf{X}} = \{ 33; 0,1; 30 \}$ .



Tabela 6.4 – Resultados para o caso n° 1 em termos de ponto de projeto e índice de confiabilidade.

Tipo de Análise	$X_1^*$	$X_2^*$	$X_3^*$	$\beta_{HL}$	$P_f$	$n_I$
Adaptativa (CRA)	1029,00	1,85203	555,609	2,26970	0,011613	16
Não Adaptativa (CRA)	1028,86	1,84772	556,900	2,26886	0,011638	10
Referência [46]	1028,85	1,85282	555,343	2,26966	0,011614	19

Neste problema é estabelecida solução utilizando o método dos momentos a partir de informações geradas pela superfície de estado limite real e aproximada.

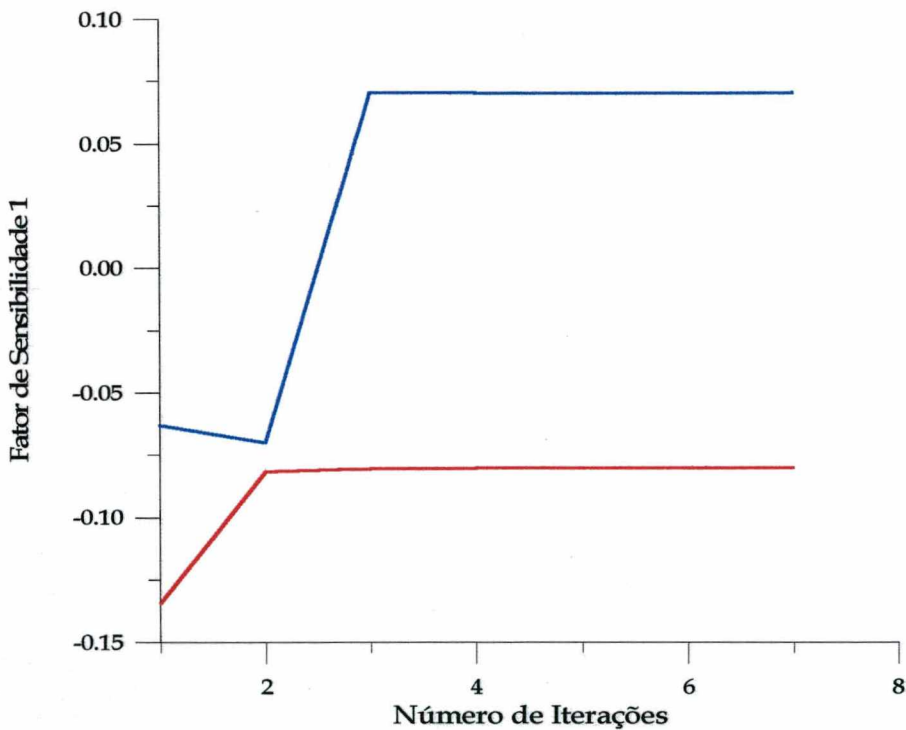


Figura 6.7 – Comportamento do fator de sensibilidade,  $\alpha_1$ , para o caso n° 1, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.

São comparados através dos gráficos nas figuras 6.7, 6.8 e 6.9, os comportamentos aproximado e real dos fatores de sensibilidade das variáveis de projeto em relação ao número de iterações realizadas no estabelecimento do ponto de projeto.

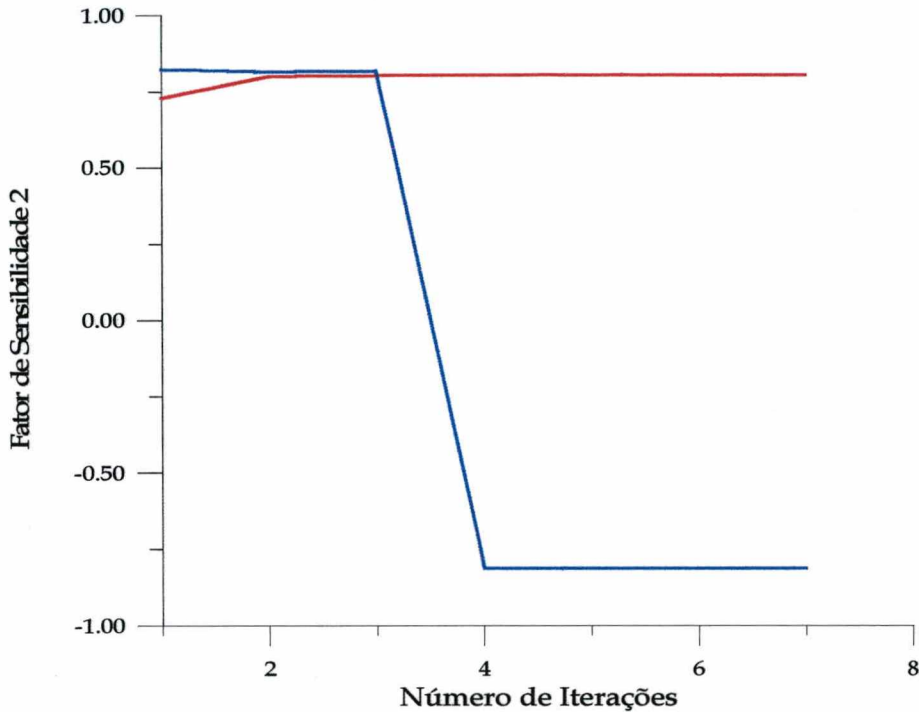


Figura 6.8 - Comportamento do fator de sensibilidade,  $\alpha_2$ , para o caso n° 1, aplicando-se os esquemas **adaptativo** e **não adaptativo**.

O comportamento mostrado pela superfície de estado limite aproximada apresenta um grande desvio em relação ao comportamento real, apesar disso os resultados obtidos foram satisfatórios. Comparando-se as superfícies real e aproximada constata-se que a função que define o comportamento da superfície de estado limite real é uma função polinomial de segundo grau de com termos cruzados, enquanto a superfície aproximada é uma função polinomial de segundo grau sem termos cruzados. A região entre os domínios das variáveis de projeto não estão corretamente cobertas

conduzindo a desvios no comportamento das informações de primeira ordem da superfície de estado limite aproximada.

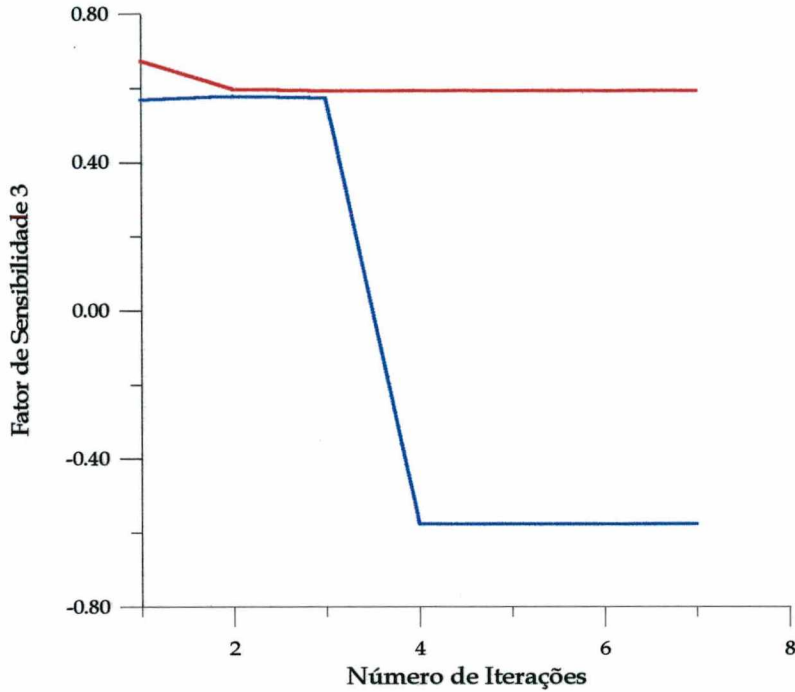


Figura 6.9 – Comportamento do fator de sensibilidade,  $\alpha_3$ , para o caso n° 1, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.

Na figura 6.10 está representado o comportamento do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind em relação ao número de iterações. Diferente do das medidas de sensibilidade o índice de confiabilidade os comportamentos apresentados pelos esquemas adaptativo e não adaptativo, não diferiram significativamente estabilizando nas iterações iniciais.

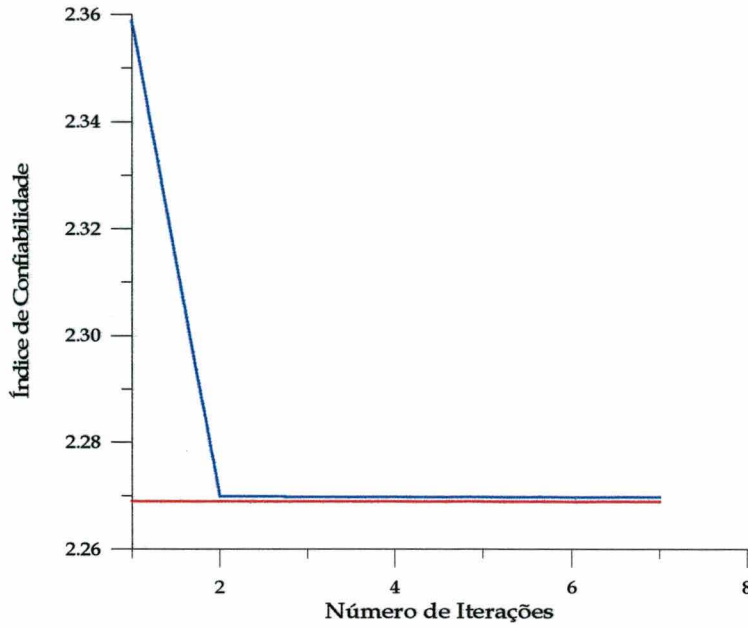


Figura 6.10 – Comportamento do índice de confiabilidade,  $\beta_{HL}$ , para o caso n° 1, aplicando-se os esquemas **adaptativo** e **não adaptativo**.

2° Caso - Variáveis normais e correlacionadas,  $\mu_X = \{ 1000; 2; 600 \}$  e  $\sigma_X = \{ 33; 0,1; 20 \}$  cuja matriz de correlação é dada por,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tabela 6.5 – Resultados para o caso n° 2 em termos do ponto de projeto e índice de confiabilidade de Hasofer-Lind.

Tipo de Análise	$X_1^*$	$X_2^*$	$X_3^*$	$\beta_{HL}$	$P_f$	$n_I$
Adaptativa (CRA)	1007,33	1,78771	563,515	3,16670	0,0007780	16
Não Adaptativa (CRA)	1008,39	1,79246	562,573	3,16776	0,0007682	10
Referência [46]	1008,01	1,79354	562,014	3,16804	0,0007674	16

A diferença deste caso para o anterior encontra-se na natureza probabilística do vetor de projeto. Em virtude das variáveis serem correlacionadas a transformação aplicada, realiza a rotação dos eixos eliminando a correlação inicialmente presente. Apesar deste aspecto o desvio no comportamento apresentado pelas medidas de sensibilidade e do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind quando utilizado os esquemas adaptativo e não adaptativo foi semelhante. As figuras 6.11, 6.12, 6.13 e 6.14 representam o comportamento das medidas citadas anteriormente ao longo do processo de estabelecimento do ponto de projeto.

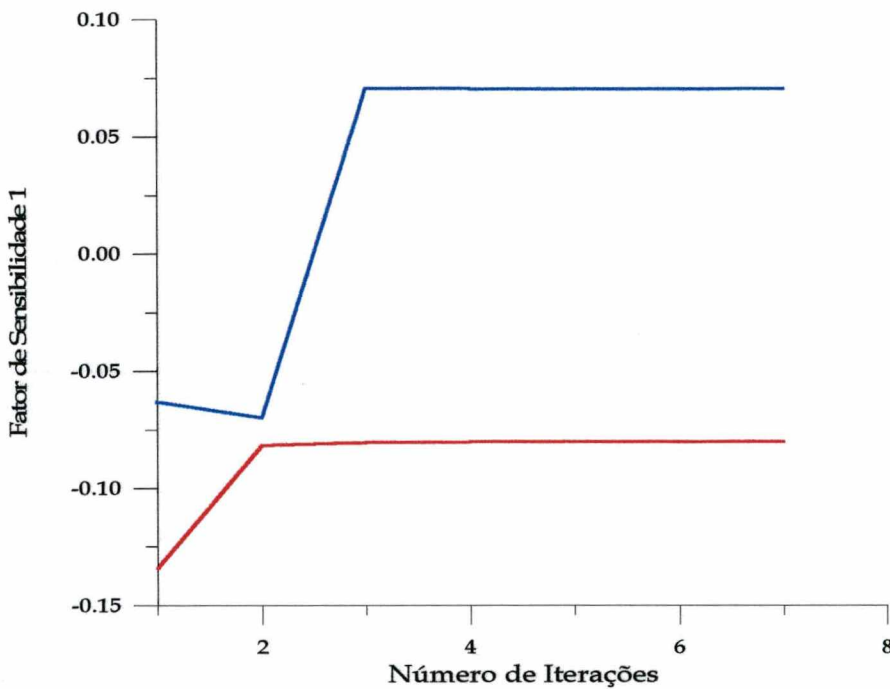


Figura 6.11 - Comportamento do fator de sensibilidade,  $\alpha_1$ , para o caso n° 2, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.

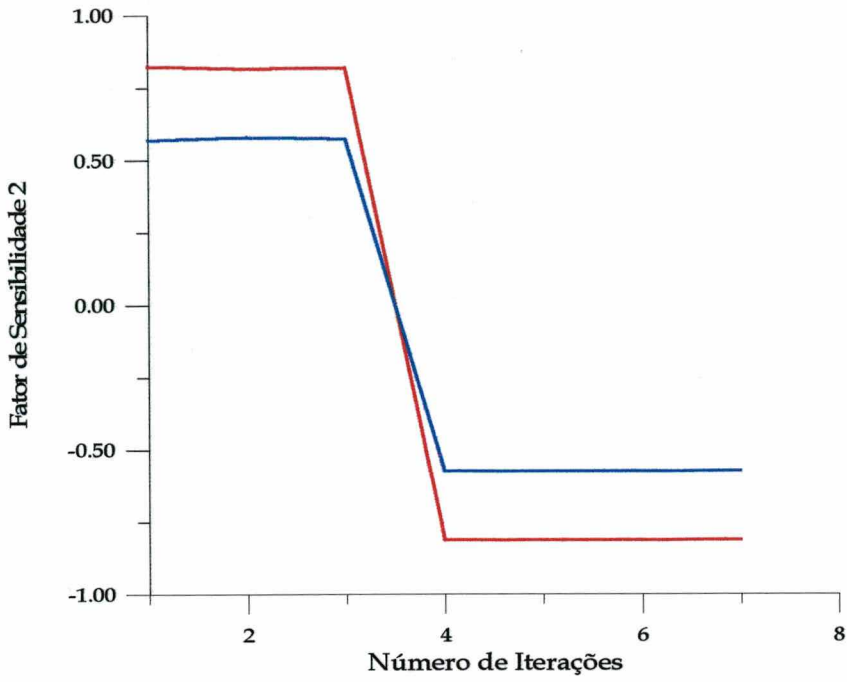


Figura 6.12 – Comportamento do fator de sensibilidade,  $\alpha_2$ , para o caso n° 2, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.

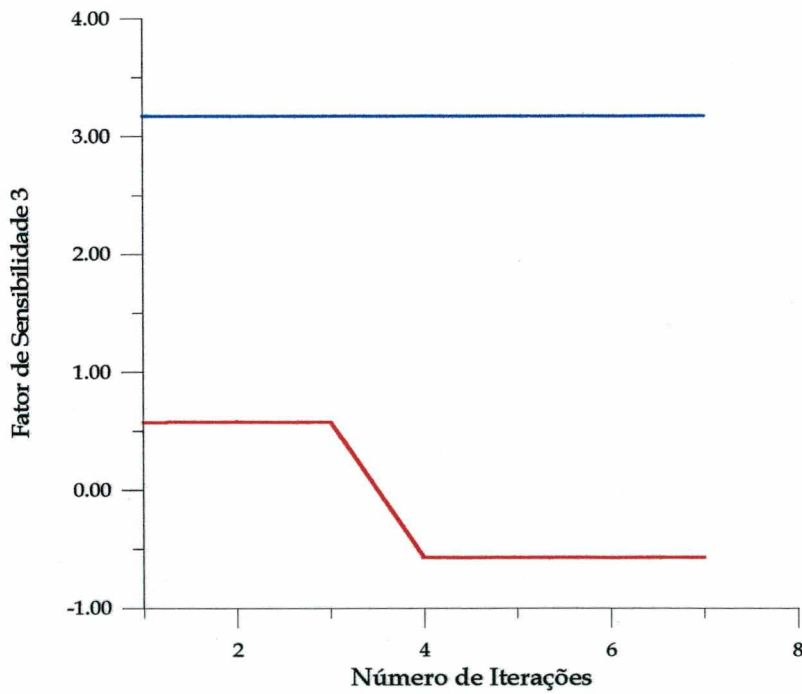


Figura 6.13 – Comportamento do fator de sensibilidade,  $\alpha_3$ , para o caso n° 2, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.

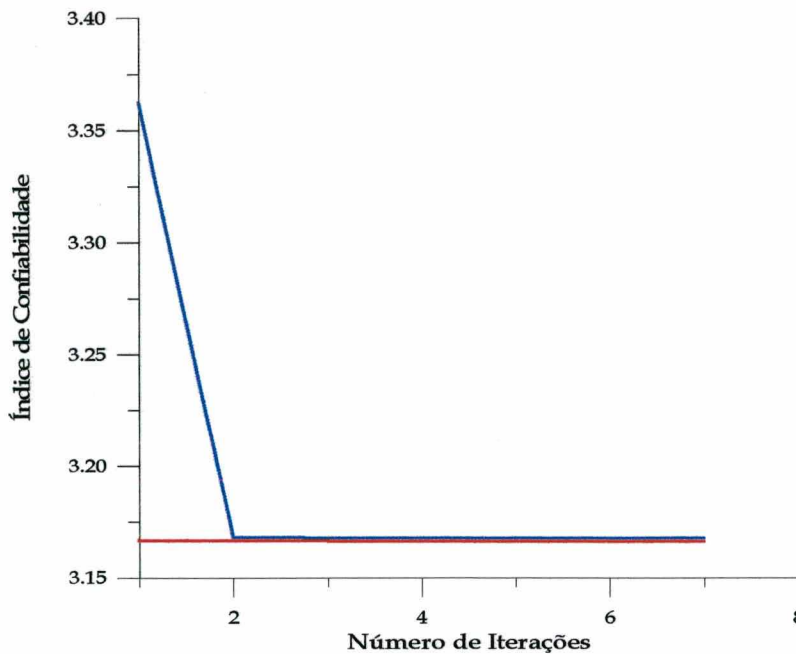


Figura 6.14 – Comportamento do índice de confiabilidade,  $\beta_{HL}$ , para o caso n° 2, aplicando-se os esquemas **adaptativo** e **não adaptativo**.

Na análise de confiabilidade realizada para os casos citados utilizou-se o algoritmo HL-RF sem o emprego da análise de sensibilidade. As componentes do gradiente da superfície de estado limite não apresentam o mesmo comportamento para os esquemas adaptativo e não adaptativo, porém a resposta em termos de índice de confiabilidade apresenta resultados satisfatórios. O número de iterações foi maior para o esquema adaptativo, mas é importante mencionar que o número de iterações utilizando as informações geradas pela superfície de estado limite foi inferior ao esquema não adaptativo. Nas iterações restantes as informações foram geradas por uma superfície de estado limite aproximada, conduzindo às seguintes conclusões:

1) A eficiência dessa metodologia está relacionada com o grau de não linearidade do problema em questão.

- 2) Para problemas de primeira ordem mostrou-se eficiente, porém observa-se que as avaliações baseadas nas informações das componentes do gradiente da superfície de estado limite no ponto de projeto, apresentam desvio significativo com relação ao comportamento das informações obtidas da superfície de estado limite real.
- 3) Baseado nos erros observados nas informações de primeira ordem, obtidas da superfície de estado limite aproximada, qualquer informação de ordem superior obtida dessa superfície não será confiável em termos de resultados.
- 4) Empregou-se a análise de sensibilidade nos casos propostos porém sem resultados relevantes. A análise de sensibilidade aplicada a uma superfície de estado limite aproximada possui emprego questionável, pois o ajuste conduz a resultados que podem apresentar um desvio significativo em função do grau de não linearidade do problema ou da região em que esteja se realizando a busca do ponto de projeto. Deve-se ressaltar que ao utilizar os fatores de omissão de sensibilidade, independente do uso de qualquer esquema de superfície de reposta adaptativa estabelecido a qualidade dos resultados será sempre menor.



## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O principal resultado desse estudo foi difundir a análise de confiabilidade estrutural, visto que tal tipo de análise é atual e relevante dentro das avaliações necessárias, em decorrência das exigências impostas pelo mercado.

A análise de confiabilidade estrutural foi uma área que emergiu em virtude do surgimento de novas direções, no que concerne a formulações do problema e aumento da capacidade computacional disponível. O enfoque dado ao problema de confiabilidade através do método dos momentos é semelhante à formulação do problema de otimização fornecendo mais robustez e versatilidade, favorecendo o emprego de outras ferramentas para estabelecimento do ponto de projeto.

O objetivo principal dessa dissertação foi atingido através da determinação do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind para componentes mecânicos avaliados segundo um modo de falha. Além do estabelecimento da medida de confiabilidade para os problemas propostos procurou-se investigar a redução do custo computacional pelo emprego da técnica de superfície de resposta adaptativa e da análise de sensibilidade, através dos fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade.

O método dos momentos através de sua estrutura modular propicia realizar desenvolvimentos individuais nos procedimentos necessários para obtenção da solução. Sugere-se para estudos futuros a utilização e avaliação de outros algoritmos de busca do ponto de projeto, transformação das variáveis de projeto e o desenvolvimento de um sistema especialista para a orientação e seleção do comportamento probabilístico das variáveis de projeto.

O ajuste automático do passo utilizado no estabelecimento do ponto de projeto se mostrou eficiente nos problemas em que foi empregado, pelo uso de informações disponíveis durante o processo solução. Influenciou diretamente sobre a taxa de convergência do algoritmo. Isto é uma característica importante, por ser independente do tipo de algoritmo utilizado no estabelecimento do ponto de projeto. O ajuste automático do passo fornece uma ferramenta adicional, na determinação da probabilidade de falha.

A análise de confiabilidade adaptativa mostrou-se uma estratégia atraente pela redução do esforço computacional. A eficiência dependerá da técnica de superfície de resposta utilizada e da família de funções para modelar o comportamento da superfície de estado limite. As aplicações foram sobre uma superfície de estado limite previamente definida, o esquema adaptativo aplicou-se efetivamente, após uma determinada quantidade de informações, para simular o comportamento do problema físico. A análise de confiabilidade adaptativa traz vantagens sensíveis, quando a superfície de estado limite não está definida em termos das variáveis de projeto. Quando as informações utilizadas no modelamento são geradas experimentalmente, ou numericamente, o esforço computacional é significativo, em virtude de não se utilizar a superfície de estado limite durante o processo solução, para gerar as informações necessárias. Sugere-se uma investigação criteriosa, na seleção da família de funções em termos do tipo de problema. Propõe-se que o esquema adaptativo não esteja vinculado somente aos pontos ou informações obtidas durante o processo, mas ao grau de não

linearidade dos problemas. Uma sugestão seria a implementação de um mecanismo de ajuste na ordem das funções de interpolação.

A análise de sensibilidade realizada através dos fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade possibilitou indicar as direções viáveis de pesquisa e diminuir o esforço computacional, respectivamente. É importante salientar que o emprego das medidas de sensibilidade juntamente com o esquema de superfície de resposta adaptativa não conduziu a resultados relevantes, desta forma tal procedimento não é recomendado no estabelecimento da solução do problema de confiabilidade. Tal comportamento está relacionado com a perda da qualidade das informações ao longo do processo solução. O fator de omissão de sensibilidade induz uma determinada quantidade de erro, devido a sua própria definição e quando estabelecido a partir de uma superfície de estado limite aproximada o erro resultante na solução é maior. Com relação a um desenvolvimento futuro, propõe-se a utilização dos fatores de sensibilidade paramétrica [43], com a finalidade de estabelecer a influência dos parâmetros das funções densidade de probabilidade utilizadas. A partir do fator de sensibilidade paramétrica pode-se estabelecer o problema inverso de confiabilidade que consta em determinar os parâmetros a serem utilizados para definirem um modelo probabilístico admitindo-se um determinado nível de confiabilidade.

A probabilidade de falha sobre a superfície de estado limite pode apresentar variação significativa, em função do conteúdo de probabilidade das regiões prováveis de falha. Essas variações estão associadas às irregularidades da superfície de estado limite, à função densidade de probabilidade admitida para o vetor de projeto e à

influência de algumas variáveis significativas no espaço de projeto. Torna-se necessária a elaboração de um algoritmo que comporte a aproximação com as informações referentes à topologia da superfície de estado limite e ao conteúdo de probabilidade, em determinadas regiões do espaço de projeto.

Uma proposta para trabalho futuro seria a modificação dos métodos de solução com natureza semi analítica para numérica, através da formulação de um elemento finito estocástico [36, 38, 39, 40, 41, 61]. Essa abordagem é uma tentativa de modelar mais realisticamente o problema, possibilitando tratar como campos randômicos as dispersões das variáveis de projeto. Além disso, o método dos elementos finitos é uma ferramenta para tratar problemas no contínuo que encontra-se bastante difundida nos meios acadêmicos e comerciais, fator positivo para o fortalecimento do emprego da análise de confiabilidade estrutural na avaliação de componentes e ou sistemas mecânicos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adelman H. M. and Haftka R. T. - **Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems**, *AIAA Journal*, Vol. 24, NO. 5, MAY 1986.
- [2] A. M. Freudenthal - **Safety and the Probability of Structural Failure**, Trans. ASCE, 121 (1956) 1337-1397.
- [3] Ang A. H-S. and Tang W. H. - **Probability Concepts in Engineering Planning and Design Volume II Decision, Risk And Reliability**, John Wiley & Sons.
- [4] Arora J. S. and Haug E. J. - **Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization**, *AIAA Journal*, Vol.17, Sept. 1976, pp 970-974.
- [5] Berry, J. T. - **Programando em C++**, Makron Books do Brasil Editora Ltda, São Paulo.
- [6] Bjerager P. - **Probability Integration by Directional Simulation**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 114, No. 8, pp. 1285 - 1301, August, 1988.
- [7] Bjerager P. - **On Computation Methods For Structural Reliability Analysis**, *Structural Safety*, Vol. 9, pp 79 - 96, 1990.
- [8] Bucher C. G. - **Adaptive Sampling: An Iterative Fast Monte-Carlo Procedure**, *Structural Safety*, Vol. 5, pp 119 - 126, 1988.
- [9] Bucher C. G. and Bourgund U. - **A Fast And Efficient Response Surface Approach For Structural Reliability Problems**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 115, No. 3, pp. 447 - 463, March, 1989.
- [10] Dahlquist, Germund and Björck, Ake - **Numerical Methods**, 1974 by Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.

- [11] Der Kiureghian, Lin H. Z. and Hwang S. J. - **Second - Order Reliability Approximations**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 113, No. 8, pp 1208 - 1225, August, 1987.
- [12] Der Kiureghian A. and Liu P. L. - **Structural Reliability Under Incomplete Probability Information**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. , No. 1, pp 85 - 103, January, 1986.
- [13] Der Kiureghian A. and Liu P. L. - **Optimization Algorithms For Structural Reliability**, *Structural Safety*, Vol. 9, pp 161 - 177, 1991.
- [14] Der Kiureghian A., Zhang Y. and Li C. C. - **Inverse Reliability Problem**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 120, No. 5, pp 1154 - 1159, May, 1994.
- [15] Ditlevsen O. - **Principle of Normal Tail Aproximation**, *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, Vol. 107, No EM6, pp 1191 - 1207, December, 1981.
- [16] Ditlevsen O. and Bjerager P. - **Methods Of Structural Systems Reliability**, *Structural Safety*, Vol. 3, pp 195 - 229, 1986.
- [17] Dolinski K. - **First - Order Second - Moment Approximation In Reliability Of Structural Systems: Critical Review And Alternative Approach**, *Structural Safety*, 1(1983) 211 - 231.
- [18] Egeland T. - **Two Trends In Reliability**, *Structural Safety*, 9 (1991) 261-268.
- [19] Ellingwood B. and Galambos T. V. - **Probability - Based Criteria For Structural Design**, *Structural Safety*, 1 (1982), 15 - 26.

- [20] Enevoldsen I. - **Sensitivity Analysis of Reliability - Based Optimal Solution**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 120, No. 1, pp 198 - 205, January, 1994.
- [21] Faravelli L. - **Response - Surface Approach for Reliability Analysis**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 115, No.12, pp. 2763 - 2781, December, 1989.
- [22] Fiessler B., Neumann H. J. and Rackwitz R. - **Quadratic Limit States in Structural Reliability**, *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, Vol. 105, No. EM4, pp. 661 - 676, August, 1979.
- [23] Galambos T. V. - **Systems Reliability And Structural Design**, *Structural Safety*, 7 (1990) 101-108.
- [24] Grigoriu M. - **Methods For Approximate Reliability Analysis**, *Structural Safety*, Vol. 1, pp 155 - 165, 1982/1983.
- [25] Haftka R. T. - **Sensitivity Calculations For Iteratively Solved Problems**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp 1535 - 1546 (1985).
- [26] Hasofer A. M. and Lind N. C. - **Exact and Invariant Second - Moment Code Format**, *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, Vol. 100, No EM1, pp 111 -121, February, 1974.
- [27] Hohenbichler M., Gollwitzer S., Kruse W. and Rackwitz R. - **New Light On First- And Second-Order Reliability Methods**, *Structural Safety*, 4(1987), pp 267 - 284.

- [28] Hohenbichler M. and Rackwitz R. - **Non - Normal Dependet Vectors in Strutural Safety**, *Journal of the Engineering Mechanics Division ( ASCE )*, Vol. 107, No EM6, pp 1227 - 1237, December, 1981.
- [29] Ibrahim Y. - **General Strategy for Structural Systems Reliability Analysis**, *Journal of Engineering Mechanics ( ASCE )*, Vol. 117, No. 3, pp. 789 - 807, March, 1991.
- [30] Ishii K. and Suzuki M. - **Stochastic Finite Element Method for Slope Stability Analysis**, *Structural Safety*, 4 (1987), 111 - 129.
- [31] Jensen H. A. - **Un Metodo De Sensibilidad Probabilistico Para El Diseño Mecanico**, VI Congreso Nacional De Ingenieria Mecanica, 1994, pp 185 - 190.
- [32] Kapur K. C. and Lamberson L. R. - **Reliability In Engineering Design**, by John Wiley & Sons, Inc. 1977.
- [33] Karamchandani A., Dalane J. I. and Bjerager P. - **Systems Reliability Approach to Fatigue of Structures**, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, No 3, March, 1992.
- [34] Kececioglu D. - **Reliability Engineering Handbook**, Vol.1, by PTR Prentice Hall, Inc. 1991.
- [35] Kirsch, U. - **Structural Optimization - Fundamentals and Aplications**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [36] Kleiber M. and Hien T. D. - **The Stochastic Finite Element Method: Basic Pertubation Technique and Computer Implementation**, John Wiley & Sons.
- [37] Kreuzer H. and Bury K. V. - **Reliability Analysis of Mohr Failure Criterion**, *Journal of Engineering Mechanics ( ASCE )*, Vol. 115, No. 3, pp. 447 - 463, March, 1989.



- [38] Lawrence M. A. - **Basis Randon Variables In Finite Element Analysis**, *International Journal for Methods in Engineering*, Vol. 24, pp 1849 - 1863, (1987).
- [39] Liaw D. G. and Yang H. T. Y. - **Reliability of Randomly Imperfect Beam - Columns**, *Journal of Engineerig Mechanics (ASCE)*, Vol. 115, No. 10, pp 2251 - 2270, October, 1989.
- [40] Liu P-L. and Der Kiureghian A. - **Finite Element Reliability of Geometrically Nonlinear Uncertain Structures**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 117, No. 8, pp. 1806 - 1825, August, 1991.
- [41] Liu P-L. and Liu K-G. - **Selection of Random Field Mesh in Finite Element Reliability Analysis**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 119, No. 4, pp. 667 - 680, April, 1993.
- [42] Lumb P. and Li S. K. - **Reliability Analysis By Numerical Integration And Curve Fitting**, *Structural Safety*, 3 (1985), pp. 29 -36.
- [43] Madsen O. H. - **Omission Sensitivity Factors**, *Structural Safety*, Vol. 5, pp 35 - 45, 1988.
- [44] Mahadevan S. and Haldar A. - **Practical Random Field Discretization In Stochastic Finite Element Analysis**, *Structural Safety*, 9 (1991), 283 - 304.
- [45] Maymon G. - **Probability of Failure of Structures Without a Closed - Form Failure Function**, *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 2, pp. 301 - 313, 1993.
- [46] Maymon G. - **Direct Computation of the Design Point of a Stochastic Structure Using a Finite Element Code**, *Structural Safety*, Vol. 14, pp 185 - 202, 1994.

- [47] Mckay, M. D., W. J. Canover and R. J. Beckman - **A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code**, *Techonometrics*, Vol. 21, May, 1979, pp. 239 - 245.
- [48] Mebarki A., Lorrain M. and Bertin J. - **Structural Reliability Analysis By A New Level-2 Method: Hypercone Method**, *Structural Safety*, 9 (1990) 31 - 40.
- [49] Melchers R. E. - **Importance Sampling In Structural Systems**, *Structural Safety*, 6 ( 1989 ), pp. 3 - 10.
- [50] Racwitz R. and Fiessler B. - **Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences**, *Computers & Structures*, Vol. 9, pp. 489 - 494, 1978.
- [51] Rajagopalan H. S. and Grandhi R. V. - **Reliability Based Structural Analysis And Optimization In X Window Environment**, *Computers & Structures*, Vol. 60, No 1, pp 1-10, 1996.
- [52] Rubinstein, R. Y. - **Simulation and the Monte-Carlo Method**, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [53] Sagrilo, L. V. Sudati - **Análise de Confiabilidade Estrutural Utilizando Métodos Analíticos FORM e SORM**, Thesis, COPPE/UFRJ, Dr. Sc., Engenharia Civil, 1994.
- [54] Schuëller G. I. and Stix R. - **A Critical Appraisal Of Methods To Determine Failure Probabilities**, *Structural Safety*, 4 (1987) 293 - 309.
- [55] Shinozuka M. - **Basic Analysis of Structural Safety**, *Journal of Structural Engineering ( ASCE )*, Vol. 109, No 3, pp.700 - 740, March, 1983.
- [56] Soltani M. and Corotis R. B. - **Failure Cost Design Of Structural Systems**, *Structural Safety*, 5 (1988) 239 - 252.

- [57] Stark, Henry and Woods, John W. - **Probability, random processes, and estimation theory for engineers**, 1986 by Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [58] Tichý M. - **On The Reliability Measure**, *Structural Safety*, 5 (1988) 227 - 232.
- [59] Tobias, P. A. and Trindade D. - **Applied Reliability**, A Van Nostrand Reinhold Book, 1986.
- [60] Torng T. Y. and Wirsching P. H. - **Fatigue and Fracture Reliability and Maintainability Process**, *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, Vol. 117, No. 12, pp. 3804 - 3822, December, 1991.
- [61] Vanmarcke E. and Grigoriu M. - **Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 109, No. 5, pp 1203 - 1214, October, 1983.
- [62] Villemeur, Alain - **Reliability, Availability, Maintainability And Safety - Methods and Techiques**, Vol. 1, 1992, John Wiley & Sons.
- [63] Xiao Q. and Mahadevan S. - **Second-Order Upper Bounds on Probability of Intersection of Failure Events**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 120, No. 3, pp 670 - 678, March, 1994.
- [64] Wirsching P. H. and Ortiz K. - **Optimal Economic Strategies With Considerations Of Reliability Of Fatigue - Sensitive Structural Systems**, *Structural Safety*, 7 (1990), 199 - 206.
- [65] Wu Y. T. and Wirsching P. H. - **Advanced Reliability Method for Fatigue Analysis**, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, No. 4, pp 536 - 553, April, 1984.

- [66] Wunderlich W. O. - **Probabilistic Methods for Maintenance**, *Journal of Engineering Mechanics* ( ASCE ), Vol. 117, No. 9, pp. 2065 - 2077, September, 1991.

## APÊNDICES

### A TEORIA PROBABILÍSTICA FUNDAMENTAL

#### A.1 Função Densidade de Probabilidade

O comportamento de uma variável aleatória é descrito através da sua lei de probabilidade, serão tratadas nesse trabalho, variáveis aleatórias contínuas em virtude dos fenômenos analisados possuírem esse caráter.

A função densidade de probabilidade representa a probabilidade de ocorrência relacionada a variável aleatória, possuindo as seguintes propriedades,

$$f_x(x) \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t) dt = 1 \quad (\text{A.2})$$

O valor correspondente ao ponto de máximo da função densidade de probabilidade é chamado modo. As funções densidade de probabilidade multimodais são, usualmente, geradas por efeitos combinados de distribuições unimodais.

#### A.2 Funções Densidade e Probabilidade Acumulada Conjunta

Normalmente os problemas onde a análise de confiabilidade estrutural é realizada envolvem um número significativo de variáveis, agregando uma quantidade considerável de informação probabilística. Uma forma de encapsular esse conjunto de informações é considerar, simultaneamente, o comportamento probabilístico conjunto das componentes do vetor de projeto. A função densidade de probabilidade conjunta

permite encapsular uma quantidade considerável de informações probabilísticas sobre as variáveis de projeto, possuindo as seguintes propriedades:

$$f_X(\mathbf{x}) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = 1 \quad (\text{A.4})$$

A probabilidade de ocorrência do vetor de projeto, numa determinada região do espaço amostral, é realizada através da integração da função densidade de probabilidade conjunta,

$$F_X(\mathbf{x}) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_i \leq x_i, \dots, X_n \leq x_n] \quad (\text{A.5})$$

$$F_X(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (\text{A.6})$$

as funções densidade e probabilidade acumulada conjuntas, relacionam-se através,

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_X(\mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

A função de probabilidade acumulada pode ser interpretada geometricamente, como o volume confinado sobre a região definida através dos limites impostos as variáveis de projeto. Desta forma a probabilidade de falha é a integral da função de densidade de probabilidade, sobre o domínio estabelecido pelas variáveis de projeto que definem o evento falha.

### A.3 Funções Densidade e Probabilidade Acumulada Marginal

A função densidade de probabilidade marginal expressa o comportamento probabilístico individual, da variável de projeto. A lei de comportamento é determinada a partir da integração da função densidade de probabilidade conjunta, ao longo do domínio da variável,

$$f_X(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t_i) dt_i \quad (\text{A.8})$$

sendo a função densidade e probabilidade acumulada marginal

$$F_X(x_i) = P[X_i \leq x_i] = \int_{-\infty}^{x_i} f_X(t_i) dt_i \quad (\text{A.9})$$

Normalmente, considera-se uma situação prática, como um problema com informação probabilística completa, quando apresenta as informações relativas ao comportamento probabilístico das variáveis de projeto, através da função densidade de probabilidade conjunta. Tal condição, raramente ocorre, haja visto que a quantidade de informações necessárias num projeto, demandam de pesquisa e conhecimentos específicos. Um procedimento padrão é atribuir o comportamento randômico às variáveis em função de regras heurísticas, experiência com fenômenos análogos, ou dependendo do nível de responsabilidade exigido, confrontar resultados de natureza experimental com aqueles obtidos teoricamente. Foram utilizadas sete funções densidade de probabilidade, sendo descritas na seqüência, para representar o comportamento das variáveis de projeto.

## A.4 Funções Densidade de Probabilidade Marginal Utilizadas

Neste trabalho utilizou-se cinco funções densidade de probabilidade marginal, a escolha do tipo do modelo probabilístico a ser utilizado e a definição dos parâmetros das funções densidade de probabilidade é realizada pelo usuário baseado nas informações relativas ao comportamento das dispersões presentes nas variáveis de projeto.

### A.4.1 Função Densidade de Probabilidade Gaussiana

A densidade de probabilidade Gaussiana, ou Normal, é a mais utilizada, pois pelo teorema do limite central as variáveis com natureza randômica tendem ao comportamento gaussiano [34], a sua função densidade de probabilidade é dada por,

$$f_x(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \quad (\text{A.10})$$

Pode ser utilizada para modelar a falha, baseada em tensão de elementos estruturais, deterioração de partes mecânicas com propriedades homogêneas, determinação da taxa de falhas devido a efeitos cumulativos. Aplica-se para o caso em que as variáveis randômicas necessitam representar uma tendência central, sendo inadequada quando uma ou ambas caudas da função densidade de probabilidade real é conhecida.



#### A.4.2 Função Densidade de Probabilidade Uniforme

A função densidade de probabilidade uniforme é utilizada para modelar variáveis, em que a probabilidade de ocorrência, é uniformemente distribuída, no seu intervalo de existência, com função densidade de probabilidade,

$$f_x(x) = \frac{1}{v-u} , \quad u \leq x \leq v \quad (\text{A.11})$$

Essa função densidade de probabilidade é utilizada no método de simulação de Monte Carlo, na geração de amostras randômicas [34].

#### A.4.3 Função Densidade de Probabilidade Exponencial

Essa função densidade de probabilidade é uma das mais utilizadas na análise de confiabilidade aplicada à engenharia, por representar fenomenologicamente e empiricamente a taxa de falhas, a função densidade de probabilidade dos componentes e sistemas de natureza complexa, com diferentes funções densidade de probabilidade [34],

$$f_x(x) = \nu e^{-\nu(x-u)} \quad \nu > 0, x \geq u \quad (\text{A.12})$$

Quando as incidências de falha, ocorrem numa taxa constante admite-se um comportamento exponencial. Pode ser útil caracterizar as variáveis para eventos, que não apresentam dependência física, significando que o sistema, não apresenta efeitos de desgaste. Num sistema, a substituição de algum componente, antes da falha devido a

manutenção preventiva, e aos diferentes modelos de falha dos outros membros, tendem a contribuir para o modelo de falha do sistema.

#### A.4.4 Função Densidade de Probabilidade de Weibull

A função densidade de probabilidade de Weibull é bastante utilizada, para representar as dispersões ocorridas nas propriedades relacionadas a vida em fadiga, de sólidos submetidos a tensões cíclicas [34],

$$f_x(x) = \frac{\theta}{\eta} \left( \frac{x-\iota}{\eta} \right)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{x-\iota}{\eta}\right)^\theta} \quad (\text{A.13})$$

$$\theta > 0, \eta > \theta, -\infty < \iota < \infty$$

Em testes de fadiga, evidencia-se que o nível de tensões alternantes para falha depende, diretamente, da capacidade de resistência de muitos elementos num dado material. A função densidade de probabilidade de Weibull prediz o comportamento desses parâmetros, devido a mudança do tamanho da amostra. Conseguindo modelar as aleatoriedades inerentes na previsão das falhas, devido a concentração de tensões, causado por defeitos do material.

Representa a função densidade de probabilidade dos elementos fracos da amostra, mediante ao emprego de uma função densidade de probabilidade limitada a esquerda, para o mínimo de valores. Enquanto a função densidade de probabilidade exponencial representa satisfatoriamente características de vida de sistemas, a função densidade de probabilidade de Weibull representa as partes componentes.

#### A.4.5 Função Densidade de Probabilidade de Rayleigh

A função densidade de probabilidade de Rayleigh pode ser utilizada, para indicar os desvios médios quadráticos, das fontes de erros. Investigando-se o

$$f_x(x) = \frac{x}{\eta^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\eta}\right)^2}, \eta > 0 \quad \dots \quad (\text{A.14})$$

comportamento do carregamento de estruturas automotivas e aeronáuticas, supõe-se uma banda estreita, segundo um processo gaussiano [34].

Os valores instantâneos, em qualquer tempo arbitrário são normalmente distribuídos, representando-se os valores máximos pela função densidade de probabilidade de Rayleigh. Nesse tipo a função que define a falha é não linear, em relação ao parâmetro que identifica o evento.

### A.5 Momentos da Função Densidade de Probabilidade

Devido à natureza randômica das variáveis não é possível prever o valor exato num experimento particular, porém uma descrição completa do seu comportamento é encontrado, através da sua lei de probabilidade. Em muitas aplicações uma informação completa não é necessária, ou até mesmo disponível, deixando sob carga de certos parâmetros, a representação do comportamento da variável randômica. Tais valores provêm das médias ponderadas das funções de probabilidade. Frequentemente é desejado conhecer outras informações, que descrevam a simetria, o tipo de função densidade de probabilidade e valores máximos.

O conceito de momentos, ou esperança de uma variável randômica contínua são utilizados para proporcionar essas medidas. O momento de  $k$ -ésima ordem, sobre a origem é definido como,

$$E(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) dt \quad (\text{A.15})$$

O desenvolvimento deste trabalho está baseado nos momentos de primeira e segunda ordem. O momento de primeira ordem é representado pela média, onde a informação da função densidade de probabilidade, é condensada num único número. É uma medida da tendência central da variável, sendo acompanhada de uma informação, sobre a dispersão de valores, que servirão para indicar as o comportamento de natureza randômica das variáveis. Essa medida está relacionada com os desvios possíveis, e a probabilidade de ocorrência dos mesmos de forma ponderada. Normalmente, uma das formas mais comuns para indicar a dispersão das variáveis randômicas é a variância, sendo definida como a média ponderada dos desvios quadráticos médios.

Na análise de confiabilidade aplicada engenharia, essas medidas são utilizadas com vantagem, pois conseguem encapsular informações probabilísticas de qualidade razoável, para aplicações realizadas e apresentarem alto grau de operacionalidade, em vista do desenvolvimento das técnicas de análise.

## B DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKI

Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz simétrica positiva definida, então existe uma matriz triangular inferior não singular  $\mathbf{L}$ , tal que

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{A} \quad (\text{B.1})$$

Portanto se os elementos da diagonal de  $\mathbf{L}$  são tomados como positivos, a decomposição é única.

Os elementos da matriz triangular inferior são determinados através das linhas ou colunas pela equação (A.1). Na determinação por linhas, para a  $i$ -ésima linha

$$l_{ik}l_{jk} = a_{ij} \quad (\text{B.2})$$

sendo que

$$l_{ij} = \frac{(a_{ij} - l_{ik}l_{jk})}{l_{jj}} \quad k = 1, \dots, j-1 \text{ e } j = 1, \dots, i-1 \quad (\text{B.3})$$

os elementos da diagonal principal são dados por

$$l_{ik}l_{ik} = a_{ii} \quad (\text{B.4})$$

conduzindo a

$$l_{ii} = \sqrt{(a_{ii} - l_{ik}l_{il})} \quad (\text{B.5})$$

existe portanto  $n$  raízes e aproximadamente  $\frac{1}{6}n^3$  multiplicações.

A decomposição de Choleski [10] pode ser usada somente para matrizes positiva definidas, como é esperado quando aplica-se o método sobre a matriz de covariância das componentes do vetor de projeto.

Como a solução no espaço das variáveis é obtida no espaço normal padrão deve-se determinar a transformação inversa. Os termos da matriz inversa foram determinados analogamente como os termos da matriz  $L$ .

## C DETERMINAÇÃO DO FATOR $F$

Baseados na definição do fator  $F$  e na natureza probabilística das componentes do vetor de projeto, são desenvolvidas cinco categorias de fórmulas [12],

1 -  $F = \text{constante}$  para  $X_i$  e  $X_j$  pertencendo ao grupo 1.

2 -  $F = F(\delta_j)$  sendo  $X_i$  normal e  $X_j$  pertencendo ao grupo 2.

3 -  $F = F(\rho_{ij})$  para  $X_i$  e  $X_j$  pertencendo ao grupo 1.

4 -  $F = F(\rho_{ij}, \delta)$  para  $X_i$  pertencendo ao grupo 1 e  $X_j$  pertencendo ao grupo 2.

5 -  $F = F(\rho_{ij}, \delta_i, \delta_j)$  para  $X_i$  e  $X_j$  pertencendo ao grupo 2.

Tabela C.1 - Fator  $F$ , para a variável  $X_i$  normal e  $X_j$  com funções densidade de probabilidade marginal pertencendo ao grupo 2, [12].

$X_j$	$F$
Weibull	$1,031 - 0,195\delta_j + 0,328\delta_j^2$

Tabela C.2 - Fator  $F$ , para as variáveis  $X_i$  e  $X_j$  ambas com funções densidade de probabilidade marginal pertencendo ao grupo 1, [12].

$X_j$	Uniforme	Rayleigh	Exponencial	Weibull
Exponencial	$1.133 + 0.029\rho_{ij}^2$	$1.229 - 0.367\rho_{ij} + 0.153\rho_{ij}^2$		
Rayleigh	$1,038 - 0,008\rho_{ij}^2$	$1.123 - 0.100\rho_{ij} + 0.021\rho_{ij}^2$	$1,028 - 0,029\rho_{ij}$	$1,064 - 0,069\rho_{ij} + 0,005\rho_{ij}^2$
Weibull	$1,055 + 0,015\rho_{ij}^2$	$1.142 - 0.154\rho_{ij} + 0.031\rho_{ij}^2$	$1,046 + 0,045\rho_{ij} + 0,006\rho_{ij}^2$	$1,064 - 0,069\rho_{ij} + 0,005\rho_{ij}^2$

Tabela C.3 - Fórmulas para o fator  $F$  para  $X_i$  pertencendo ao grupo 1 e  $X_j$  ao grupo 2 de funções densidade de probabilidade marginal, [12].

$X_j \backslash X_i$	Uniforme	Rayleigh
Weibull	$1,061 - 0,237\delta_j - 0,005\rho_{ij}^2$ $+ 0,379\delta_j^2$	$1,047 + 0,042\rho_{ij} - 0,212\delta_j$ $+ 0,353\delta_j^2 - 0,136\rho_{ij}\delta_j$