

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Física

Equação de Estado para a Matéria de Nêutrons Super-Densa

Dissertação

Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Física

da Universidade Federal de Santa Catarina

para obtenção do grau de

MESTRE EM FÍSICA

Sérgio Souto Rocha

Florianópolis, Dezembro 1997

Equação de Estado para a Matéria de Nêutrons Super-Densa

Sérgio Souto Rocha

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

especialidade Física Teórica e aprovada em sua forma final pelo Curso de

Pós-Graduação.

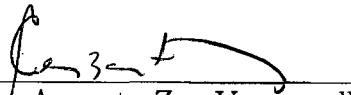


Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto - UFSC
(Orientador)



Prof. Dr. José Ricardo Marinelli - UFSC
(Coordenador)

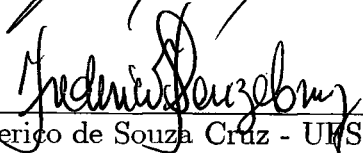
Banca examinadora



Prof. Dr. César Augusto Zen Vasconcellos - UFRGS



Prof. Dr. José Ricardo Marinelli - UFSC



Prof. Dr. Frederico de Souza Cruz - UFSC - (suplente)

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 O Modelo de Walecka	4
2 Métodos Não Perturbativos	8
2.1 Expansão δ	17
2.2 O Método de Hartree (RHA)	25
3 Expansão δ Otimizada Aplicada ao Modelo de Walecka	43
3.1 Cálculo da Auto-Energia no Meio	46

3.2	<i>Cálculo da Auto-Energia no Vácuo</i>	47
3.2.1	Renormalização da Auto-Energia Bariônica	51
3.3	<i>O Tensor Energia-Momento para a Expansão δ</i>	54
3.4	<i>Cálculo da Densidade de Energia</i>	56
3.4.2	Renormalização da Densidade de Energia	64
3.5	<i>Cálculo da Pressão</i>	71
3.6	<i>Análise Numérica</i>	74
4	<i>Estrelas de Nêutrons</i>	84
4.1	<i>Histórico do Descobrimento das Estrelas de Nêutrons</i>	84
4.2	<i>As Estrelas de Nêutrons no Processo de Evolução Estelar</i>	89
4.3	<i>Equação de Estado</i>	98
4.4	<i>Estrutura da Estrela de Nêutrons</i>	101
	Conclusões e Perspectivas	106
A	<i>Integração das Equações de OVT</i>	109
B	<i>Integrais em 2ω Dimensões, Métrica e Definições</i>	114
B1	<i>Integrais em 2ω Dimensões</i>	114
B2	<i>Métrica e Definições</i>	115
	Referências Bibliográficas	120

Aos meus pais, Moacir Sérgio
e Maria Zeny ("*in memoriam* ")

Agradecimentos

Gostaria de agradecer,

ao meu orientador, Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto, por ter me apresentado ao problema, e à colega de pesquisa e amiga Andréa por tê-lo dividido comigo;

ao pesquisador visitante Dr. Philippe Garcia pelas discussões e integração da OVT;

aos professores do departamento Frederico F. de S. Cruz, Marcelo H. R. Tragtemberg e Nilton da Silva Branco, por minha formação e pelo exemplo que me foram;

ao Luiz pela amizade, discussões e auxílio no manuseio do SW20;

aos amigos da graduação e da pós-graduação, pelo companheirismo;

à Lúcia, pela constante presença que me traz muita felicidade;

e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, a equação de estado para a matéria de nêutrons é estudada no contexto da aproximação não perturbativa expansão δ , e comparada a aproximação relativística de Hartree. Esta expansão é uma aproximação não perturbativa para modelos de teoria de campo, que combina técnicas de teoria de perturbação e cálculo variacional. Utilizando este método para o modelo de Walecka, encontramos um novo ponto de saturação para a matéria de nêutrons em uma densidade 30 vezes superior a usual, além do resultado conhecido de saturação em 1.42 fm^{-1} . Do ponto de vista astrofísico analisamos a equação de estado para as duas soluções e integramos a equação de Oppenheimer-Volkoff-Tolman.

Abstract

In this work we use an alternative nonperturbative method known as the linear δ expansion to obtain the equation of state for neutron matter. This technique, which was developed to investigate nonperturbative phenomena in quantum field theory, combines perturbation theory and a variational procedure. Applying the δ expansion to the Walecka model we reproduce the usual relativistic Hartree approximation results and find a new saturation point for neutron matter at a density of about 30 times that of nuclear matter. Then, we analyse the equations of state generated by both solutions and integrate the OVT equation. All our results are compared to the ones given by the relativistic Hartree approximation.

Introdução

O estado físico e a constituição interna das estrelas de nêutrons dependem principalmente da natureza das interações fortes. A composição e a equação de estado das estrelas de nêutrons não são conhecidas com certeza e grandes avanços tem sido feitos utilizando-se lagrangeanas efetivas baseadas em Cromodinâmica Quântica (QCD).

Por outro lado, o fato dessas lagrangeanas efetivas descreverem a matéria nuclear no limite de baixas energias, as sujeita ao fenômeno conhecido como liberdade assintótica. Este fenômeno, faz com que a constante de acoplamento não seja realmente constante, e tenha valores elevados em baixas energias, o que invalida uma abordagem perturbativa usual. Diante disso métodos não perturbativos como a aproximação relativística de Hartree (RHA), o método de Hartree-Fock (HF) e a expansão $1/N$, são a solução para o tratamento do problema.

Apesar da larga utilização destes métodos, estes apresentam algumas dificuldades no que se refere a renormalização não perturbativa de contribuições de densidade zero (contribuições do vácuo). Um novo método, chamado expansão δ , foi proposto com o objetivo de tratar esses fenômenos de natureza não perturbativa. Este método

se utiliza de procedimentos variacionais e teoria de perturbação, e tem como principal vantagem a seleção perturbativa dos diagramas que constituem a ordem da aproximação, o que facilita substancialmente o trabalho de renormalização.

Neste trabalho, utilizamos a lagrangeana efetiva proposta por Walecka, tratando-a através da expansão δ , para obtenção da equação de estado para a matéria de nêutrons. Do ponto de vista astrofísico, integramos a equação de OVT para os resultados fornecidos por esta aproximação.

No primeiro capítulo apresentamos uma descrição do modelo de Walecka, o qual utilizamos para descrever a matéria de nêutrons. No capítulo seguinte discutimos a necessidade e a motivação dos métodos não perturbativos, descrevendo o funcionamento da expansão δ , através de uma aplicação ao oscilador anarmônico. Ainda nesse capítulo revisamos de maneira sucinta o método de RHA calculando a auto-energia e a densidade de energia, para efeito de comparação com os cálculos que seguem, com a expansão δ .

O terceiro capítulo compreende a efetiva aplicação da expansão δ ao modelo, bem como os cálculos da auto-energia bariônica, densidade de energia e pressão. Estes cálculos são feitos levando-se em conta as contribuições de densidade zero e o procedimento de renormalização utilizado é apresentado. Ainda nesse ponto, apresentamos os resultados obtidos com a expansão δ comparando-os aos fornecidos pela aproximação relativística de Hartree. O método utilizado, além de reproduzir o resultado de RHA, prevê um novo estado altamente denso para a matéria de nêutrons.

O quarto capítulo compreende em uma revisão qualitativa, do ponto de vista de evolução estelar, sobre estrelas de nêutrons e uma análise da equação de estado para os dois resultados obtidos através da expansão δ . Considerando apenas o resultado usual, integramos a equação de Oppenheimer-Volkoff-Tolman para obtenção da relação massa raio.

Finalmente, apresentamos as conclusões gerais do trabalho e perspectivas.

Capítulo 1

O Modelo de Walecka

Para avaliar as características de objetos estelares altamente densos, como estrelas de nêutrons [veja Ref. (1)], necessitamos de uma equação de estado que descreva a matéria nuclear em qualquer densidade, desde a comumente observada nos elementos conhecidos até densidades nucleares muito superiores. Os cálculos convencionais não relativísticos para problemas de muitos corpos, que descrevem a interação nucleon-nucleon em termos de um potencial estático, eliminando assim os graus de liberdade mesônicos, são de validade duvidosa para densidades ainda pouco maiores do que a nuclear. Uma descrição feita em termos de um potencial deste tipo não leva em consideração fatores relevantes em altas energias, como a cinemática relativística e efeitos de retardamento. Também é inadequada na previsão de possíveis estados com dependência explícita nos campos mesônicos [veja Ref. (2) e (3)].

Em 1974, J. D. Walecka propôs um modelo para descrever o comportamento relativístico da matéria em altas densidades. Este modelo, conhecido como

Modelo de Walecka, propõem a interação bariônica como mediada pela troca de mésons ρ (escalares) e ω (vetoriais), possibilitando uma melhor compreensão do comportamento relativístico da matéria em altas densidades, maiores do que a da matéria nuclear, como por exemplo, em estrelas de nêutrons.

Para isto, a matéria nuclear foi definida como sendo uma substância onde o número total de nucleons (A) é tomado como sendo infinito. Além disto desliga-se a interação eletromagnética obtendo-se, que esta matéria nuclear, tem energia por partícula constante, $E/A \approx -15.7 \text{ MeV}$. Pode-se ainda mostrar [veja Ref. (4)] que a matéria nuclear é um sistema fermiônico degenerado, o qual pode ser caracterizado por um momento de fermi (k_F) da ordem de $k_F = 1.42 \text{ fm}^{-1}$. Uma revisão completa do modelo pode ser encontrada na Ref. [5].

O Modelo de Walecka é descrito pela seguinte densidade lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (m - g_s\phi)]\psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2V^\mu + \mathcal{L}_{ct}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde ψ é a amplitude do campo do nucleon, ϕ e V_μ são as amplitudes dos campos dos mésons escalar e vetorial, com suas respectivas massas m_s e m_v , m é a massa nua do nucleon. Em uma análise mais detalhada, notemos que os termos cinéticos são, para o méson escalar $\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2)$ e para o méson vetorial $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2V^\mu$, onde

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. Nos termos potenciais o méson vetorial se acopla com a corrente bariônica $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ através da constante de acoplamento g_v , enquanto que o méson escalar se acopla com a densidade escalar $\bar{\psi}\psi$ através da constante g_s .

Este modelo, também conhecido como Modelo Hadrônico Quântico-I (QHD-I), é uma das formas mais simples de representar interações entre nucleons e tem respaldo em massas e constantes de acoplamento fenomenológicas. Os mésons escalares são responsáveis pelo caráter atrativo da força nuclear a longas distâncias, os vetoriais pelo caráter repulsivo a curtas distâncias. A troca de píons não é considerada, pois a forte dependência do potencial do pión com o spin e o iso-spin implica que essa contribuição às propriedades da matéria nuclear como um todo, na média, tende a zero.

Podemos nos perguntar sobre a importância do tratamento relativístico para a matéria nuclear. Essa importância deve ser julgada, comparando o momento de fermi k_F com a massa do nucleon. A densidade é

$$\rho = \frac{2k_F^3}{3\pi^2}, \quad (1.2)$$

na densidade nuclear normal $k_F = 263 \text{ MeV}$, e em 4 vezes a densidade nuclear normal $k_F = 417 \text{ MeV}$. Isto pode ser comparado com a massa do nucleon sem interação $m = 939 \text{ MeV}$.

A energia cinética de Fermi é,

$$m \left[(1 - v_F^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] = \frac{1}{2} m v_F^2 + \frac{3}{8} m v_F^4 + \dots \quad (1.3)$$

Embora possamos achar que a correção relativística em densidade nuclear normal, sendo da ordem de v_F^4 e numericamente cerca de $(2MeV)$, portanto pequena, ainda assim é significativa se comparável com a energia de ligação $(16MeV)$. É claro que para densidades ainda maiores, como no caso das estrelas de nêutrons, a relatividade certamente não pode ser ignorada.

Ao tratarmos a matéria de nêutrons levando-se em conta a relatividade fazemos uso das teorias quânticas de campos, as quais, para a interação nucleon-nucleon, no limite de baixas energias, não admitem o uso de teoria de perturbação usual. O desenvolvimento de métodos não perturbativos então é altamente importante, para a compreensão destes fenômenos, tendo em conta os dados experimentais que dispomos.

Capítulo 2

Métodos Não Perturbativos

Uma densidade lagrangeana qualquer pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_i, \quad (2.1)$$

onde a parte \mathcal{L}_0 representa o termo livre de interações contendo apenas termos quadráticos nos campos que são responsáveis pela propagação e pela massa destes campos. Em geral, esta parte pode ser resolvida exatamente. O termo \mathcal{L}_i contém as possíveis interações entre os diferentes campos presentes. Estas interações são descritas por termos não quadráticos e, geralmente, a solução exata de uma teoria onde $\mathcal{L}_i \neq 0$, não é possível.

Sendo assim, as alternativas restantes são o cálculo numérico se utilizando de algum algoritmo computacional ou o cálculo de maneira analítica fazendo uso de alguma aproximação para efetuar predições.

Para entendermos como essa aproximação é feita vamos revisar de

maneira informal a estrutura da teoria com a qual estamos trabalhando.

Da união da teoria especial da relatividade e da mecânica quântica, no sentido de se estudar fenômenos que se passam à altas energias e em pequenas escalas, surgiram as teorias quântica de campos (QFT)

Um dos trunfos da QFT é a eletrodinâmica quântica (QED). Essa teoria, desenvolvida nos anos 50, descreve a interação entre partículas eletricamente carregadas, como o elétron ou o múon, através da emissão e absorção de quantas do campo eletromagnético chamados fótons. Os fótons não possuem carga elétrica e portanto não interagem entre si, eles não têm massa e se propagam com a velocidade da luz, a interação é dita de longo alcance.

Fótons pertencem a uma classe de partículas chamadas bósons de calibre (ou de *gauge*) os quais são quanta de um determinado campo produzido por uma das diferentes interações fundamentais. Estas partículas são chamadas assim porque sua existência é ditada à partir do chamado princípio de simetria de calibre. Este princípio requer que qualquer teoria que descreva interações fundamentais seja invariante frente a um certo tipo de transformação realizada em cada ponto do espaço tempo. Teorias de testes e ou efetivas, que não têm a ambição de descrever completamente uma interação fundamental como a eletromagnética, estão isentas deste requerimento, podendo ser invariantes frente a transformação realizada apenas de maneira global.

Pode-se mostrar, a partir de uma densidade lagrangeana escrita somente em termos de campos livres (que não interagem entre si), que a estrita observância da invariância de calibre impõem a introdução de outro tipo de campo (bóson de calibre), e a densidade ganha um termo de interação. Esta nova densidade contém então, além dos termos cinéticos, um vértice trilinear representando um bóson de calibre e duas partículas carregadas (o tipo de carga depende do tipo de interação em questão).

A ótima concordância dos resultados da QED com as medidas experimentais, se deve a uma aproximação fiável para tratar a interação eletromagnética. A aproximação fiável a que nos referimos, na QED, é da seguinte forma; o termo \mathcal{L}_i , é o que contém os acoplamentos entre os campos, esses acoplamentos são proporcionais a constantes de acoplamento (que dão a intensidade da interação que acopla os campos), essa constante de acoplamento no caso da QED é pequena ($\alpha = 1/137$) e por isso pode ser utilizada como parâmetro de uma expansão perturbativa (realizada em potências de α), que quando truncada em baixa ordem de α fornece resultados muito bons, demonstrando que os primeiros termos dessa expansão são os mais importantes.

Uma densidade lagrangeana em QFT está descrevendo um sistema físico, dessa descrição retiramos todos os processos físicos que podem ocorrer nesse sistema, existindo uma engenhosa linguagem simbólica criada por R. P. Feynman que associa esses processos a diagramas. Para cada teoria existe um conjunto de regras de Feynman que

possibilita calcular os processos descritos por esses diagramas.

Os diagramas são compostos basicamente por propagadores (relacionados com a parte cinética da densidade lagrangeana) e por vértices (relacionados com as interações). As regras de Feynman para os vértices são proporcionais à constante de acoplamento. Assim, quanto mais complexo um processo e o diagrama associado a ele, contendo muitas interações (vértices), maior é sua dependência na constante de acoplamento. Portanto, em linguagem diagramática, o que acontece na QED é que os diagramas mais simples (aqueles que correspondem aos primeiros termos de uma expansão em potências da constante de acoplamento) são os mais importantes e logo em ordens mais baixas o resultado obtido converge para o resultado empírico.

A interação eletromagnética então pode ser tratada por um método puramente perturbativo, já a interação chamada nuclear forte que é reponsável pela coesão nucleônica em seu aspecto mais fundamental e é o objeto da QCD (Cromodinâmica Quântica), possui uma diferença fundamental em relação à pródiga QED, o glúon que é o bóson de calibre dessa teoria carrega carga (no caso da Cromodinâmica o número quântico fundamental dessa teoria chama-se carga de cor), e por carregar carga, os glúons interagem entre si, diferentemente dos fótons.

Assim, se tomarmos uma densidade lagrangeana só com termos livres e exigirmos a invariância de calibre, além do vértice do bóson de calibre com duas partículas

carregadas, a nova densidade terá vértices adicionais referentes a interação entre glúons. A interação entre os glúons é responsável pelo fenômeno da liberdade assintótica, grande descoberta da QCD.

Ocorre que nesta teoria a “constante ” de acoplamento (α_s) não é constante mas varia com a distância. Ela é pequena para pequenas distâncias (menores que o tamanho de um nêutron) mas grande para grandes distâncias (distâncias características da física nuclear). Isto quer dizer que no regime de pequenas distâncias (altas energias) podemos reutilizar teoria de perturbação usando α_s como parâmetro perturbativo. Em grandes distâncias temos $\alpha_s > 1$ e a magnitude deste número implica em que uma expansão perturbativa em potências da constante de acoplamento falhará. Portanto, devemos buscar outra solução.

A solução está na utilização de métodos ditos não perturbativos, como por exemplo, a aproximação relativística de Hartree, de Hartree-Fock e a expansão $1/N$.

Estes métodos não perturbativos selecionam um subconjunto infinito do conjunto infinito de diagramas que a densidade lagrangeana de uma teoria pode gerar. Apesar de muito utilizados, estes métodos apresentam algumas dificuldades, principalmente no que se refere à renormalização não perturbativa de termos divergentes provenientes do vácuo. Por isso nessas aproximações, os cálculos que envolvem termos do vácuo são simplificados.

Os componentes da estrutura diagramática para os campos ϕ , V^μ , ψ , do modelo de Walecka são os vértices que acoplam os mésons ao bárion e seus propagadores [veja Fig. (1)]

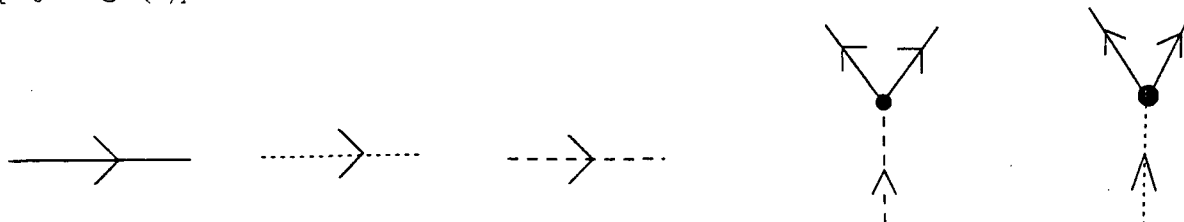


Figura 1: Respectivamente, o propagador bariônico, escalar e vetorial, que se acoplam compondo o vértice escalar e o vértice vetorial.

Os componentes diagramáticos são combinados de maneira a produzir todos os diagramas topologicamente diferentes à cada ordem das constantes de acoplamento, ou o equivalente número de vértices envolvidos no processo.

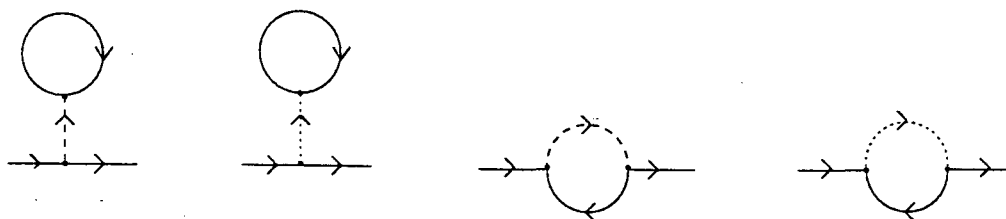


Figura 2: Os diagramas do tipo direto e de troca, escalar e vetorial respectivamente, representam todos os processos possíveis, em $O(g_s^2)$ e $O(g_v^2)$, para o barião.

Analicamente, para o modelo de Walecka, os propagadores não interagentes são dados por

$$\Delta^0(k) = \frac{1}{k^2 - m_s^2 + i\epsilon}, \quad (2.2)$$

$$D_{\mu\nu}^0(k) = \left[-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_v^2} \right] \frac{1}{k^2 - m_v^2 + i\epsilon}, \quad (2.3)$$

e

$$S^0(k) = S_F^0(k) + S_D^0(k),$$

onde

$$\begin{aligned} S_F^0(k) &= \frac{(k + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ S_D^0(k) &= (k + m) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|). \end{aligned} \quad (2.4)$$

tal que $E^0(k) = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ e k_F é o momento de Fermi. Note que, no caso do propagador vetorial ($D_{\mu\nu}$), o termo $k_\mu k_\nu$ não contribui para quantidades físicas, pois o méson vetorial se acopla à corrente bariônica conservada. Este termo portanto não será escrito explicitamente de agora em diante.

Observe também que o propagador do nucleon (S) possui dois termos, $S_F(k)$ e $S_D(k)$. O termo $S_F(k)$ descreve a propagação de nucleons e anti-nucleons virtuais, e está portanto relacionado com a contribuição do vácuo. É chamado propagador de

Feynman. Já o termo $S_D(k)$ descreve a propagação de nucleons reais no mar de Dirac (contribuição do meio), e é chamado de propagador de Dirac.

As Regras de Feynman, [veja Ref. (6) e (7)], que possibilitam calcular os processos descritos pela linguagem diagramática, são

- A cada linha associamos um fator (i) vezes um dos propagadores $\Delta^0, D_{\mu\nu}^0$ ou S^0 ;
- Ao vértice escalar associamos um fator ig_s , e ao vetorial um fator $-ig_v\gamma_\mu$;
- A cada *loop* fermiônico associamos um fator $-tr \int d^4q / (2\pi)^4$, onde q é o momento interno do *loop*.

É importante observar que os *loops* dos diagrama de Feynman são descritos por integrais, que podem divergir ao serem calculadas utilizando-se o propagador no vácuo, e o programa de renormalização, que é um conjunto de técnicas para eliminar sistematicamente estas divergências dos resultados, pode ser utilizado. Esta mesmas integrais, avaliadas com o uso do propagador no meio, serão sempre finitas devido à presença da função degrau θ . Dadas as dificuldades impostas pelas divergências provenientes de termos do vácuo, várias aproximações eliminam de seus cálculos essas contribuições.

Em RHA, por exemplo, as contribuições provenientes tanto do vácuo quanto do meio são consideradas, mas somente para os termos diretos, os termos de troca

são desprezados. Já a aproximação de HF leva em conta termos diretos e de troca em seus cálculos, mas elimina deles as contribuições provenientes do vácuo.

No procedimento de renormalização que executaremos vamos adotar o método dos contra-termos. neste método o termo \mathcal{L}_{ct} contém todos os contra-termos necessários para tornar finitos os resultados finais. Os contra-termos têm a mesma forma dos termos originais, mas diferem destes por uma constante multiplicativa. Cada contra-termo é dividido em duas partes, uma que diverge e é ajustada de modo a eliminar completamente eventuais divergências, e outra que é finita e arbitrária. Existem diferentes prescrições na literatura [veja Ref. (6) e (7)] para fixar a parte finita, cada prescrição correspondendo a um tipo diferente de *esquema de renormalização*. Como exemplo, podemos citar o esquema da *Camada de Massa* e o esquema da *Subtração Mínima*. Todas as diferentes prescrições prevêm o completo cancelamento das divergências, mas interpretam os parâmetros originais de maneira diversa. No esquema da camada de massa, as partes finitas dos contra-termos são fixadas de tal maneira que as massas e as constantes de acoplamento presentes na lagrangeana tenham o valor das quantidades físicas que representam, e que são efetivamente medidas, a princípio. Diferentemente, o esquema da subtração mínima propõe que as partes finitas dos contra-termos sejam nulas, ou seja, esse método remove apenas os pólos. Assim, os parâmetros originais são interpretados simplesmente como parâmetros, não representando quantidades físicas, porém são ajustados

de maneira que reproduzam resultados físicos.

Estas considerações serão extendidas nos capítulos que se seguem, quando tratarmos da renormalização da auto-energia, da densidade de energia e da pressão para a matéria de nêutrons.

2.1 Expansão δ

A expansão δ , é uma aproximação não perturbativa para modelos de teoria de campos que combina técnicas de teoria de perturbação e cálculo variacional. Essa expansão [veja Ref. (8)-(10)] foi proposta com o objetivo de tratar fenômenos de natureza não perturbativa, como por exemplo quebra e restauração de simetrias, que se manifestam em teorias de campos. Existem duas versões da expansão δ , a linear e a logarítmica, neste trabalho estaremos usando a expansão δ linear. Diversas formulações da expansão δ foram aplicadas com sucesso a diferentes problemas em mecânica quântica [veja Ref. (11) e (12)], física estatística Ref. [13], teoria de campos [veja Ref. (10), (11),(15)] e física de hádrons [veja Ref. (13) e (14)]. As muitas aplicações mostram que é possível obter os mesmos resultados conseguidos através de métodos não perturbativos tradicionais ainda em ordens mais baixas de δ .

A idéia básica do método é reescrever uma lagrangeana \mathcal{L} qualquer na forma

$$\mathcal{L}^\delta \equiv \delta \mathcal{L} + (1 - \delta) \mathcal{L}_0, \quad (2.5)$$

onde \mathcal{L}_0 representa uma teoria livre (quadrática nos campos). Note que quando $\delta = 1$ reobtemos a teoria original e quando $\delta = 0$ temos uma teoria cuja solução exata é possível. Assim, \mathcal{L}^δ que é chamada de lagrangeana interpolada, interpola-se entre uma solução conhecida e uma que queremos conhecer. Para equilibrar as dimensões o termo \mathcal{L}_0 que introduzimos certamente deverá conter parâmetros arbitrários com dimensões de massa. Tomemos como exemplo o oscilador anarmônico (OA) [veja Ref (26)].

O OA é descrito pela densidade lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4, \quad (2.6)$$

o oscilador é o equivalente a teoria ϕ^4 , só que em $0 + 1$ dimensões. Em QFT, a densidade de energia (ε) pode ser obtida através de uma expansão perturbativa em potências da constante de acoplamento λ . Para (2.6) obtemos o propagador no espaço dos momentos,

$$G_0(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}. \quad (2.7)$$

Então, calculando os diagramas de Feynman irreduzíveis de uma partícula sem pernas externas para $O(\lambda)$ obtemos o estado fundamental de energia;

$$\varepsilon_0(m, \lambda) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \ln [p^2 - m^2] - \frac{3\lambda}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{i}{p^2 - m^2} \right)^2 + O(\lambda^2), \quad (2.8)$$

que após a integração adquire a forma

$$\varepsilon_0(m, \lambda) = \frac{1}{2}m + \frac{3}{16} \frac{\lambda}{m^2} + O(\lambda^2). \quad (2.9)$$

No entanto, no caso do oscilador anarmônico puro ($m = 0$) não podemos desenvolver a (ε) em uma série de potências porque aparecem divergências infravermelhas (IR) em $p = 0$ no propagador,

$$G_0^{(m=0)} = \frac{i}{p^2}. \quad (2.10)$$

Portanto, os cálculos tornam-se não perturbativos e todo o maquinário da expansão δ otimizada pode ser usado. Para implementação deste método consideremos uma densidade lagrangeana escalar livre \mathcal{L}_0 com o termo gaussiano $\mu^2\phi^2$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2, \quad (2.11)$$

onde μ é um parâmetro arbitrário de massa. Recorrendo então a equação (2.5) temos a lagrangeana interpolada:

$$\mathcal{L}^\delta = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \delta \left(\frac{\lambda}{4} \phi^4 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \right). \quad (2.12)$$

À lagrangeana interpolada foi somado e subtraído o mesmo termo gaussiano sem alterá-la portanto, de maneira que um dos termos gaussianos foi tratado como interação, e a outro como um termo de massa.

As regras de Feynman geradas pela lagrangeana interpolada ficam ligeiramente modificadas em relação as regras de Feynman da teoria original, essas modificações ficarão claras ao longo do desenvolvimento podendo até ser lidas de (2.12), obviamente, as novas regras de Feynman, envolvem os parâmetros δ e μ introduzidos pelo método.

A primeira modificação que pode ser notada em \mathcal{L}^δ é que a regra de Feynman $-i3\lambda$ modifica-se para $-i3\delta\lambda$. É sobre esse parâmetro artificial δ , que será interpolado de 0 a 1, que está a fundamentação perturbativa do método. Agora, qualquer processo físico pode ser calculado em termos dos diagramas de Feynman usando-se uma expansão de caráter perturbativo em potências de δ .

É fundamental notar que a principal modificação está relacionada com o parâmetro μ que aparece no propagador de maneira não perturbativa.

O propagador, que agora é uma função de μ , adquire a forma;

$$\begin{aligned}
G_0(p^2) &= \frac{i}{p^2 - \mu^2} \\
&= \frac{i}{p^2} \left[1 - \frac{(-i\mu^2)i}{p^2} \right]^{-1}, \tag{2.13}
\end{aligned}$$

ou

$$G_0(p^2) = \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-i\mu^2) \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-i\mu^2) \frac{i}{p^2} (-i\mu^2) \frac{i}{p^2} + \dots \tag{2.14}$$

Outro aspecto é que a parte proporcional a $\delta\mu^2\phi^2$ está somente sendo tratado perturbativamente como um vértice quadrático (de peso $i\delta\mu^2$). Desde que somente um cálculo em ordem infinita em δ pode compensar o número infinito de inserções contidas em (2.14), sempre haverá dependência no parâmetro μ ao final do cálculo de qualquer quantidade, para ordens finitas em δ .

O valor da densidade de energia para o estado fundamental em $O(\delta^2)$

é dado por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0^{(2)}(\mu, \delta) &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \ln [p^2 - \mu^2] - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{\mu^2}{p^2 - \mu^2} \\
&\quad - \delta \frac{3}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{p^2 - \mu^2} \right)^2 + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \left[\frac{\mu^2}{p^2 - \mu^2} \right]^2 \\
&\quad + \delta \frac{3}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{p^2 - \mu^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{\mu^2}{(p^2 - \mu^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\delta^2 \frac{9}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{p^2 - \mu^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{(p^2 - \mu^2)^2} \\
& -i\delta^2 \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{2\pi} \left[\frac{1}{(p^2 - \mu^2)(q^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)} \right. \\
& \left. \times \frac{1}{(p+q+l)^2 - \mu^2} \right] + O(\delta^3). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Calculando as integrais e fazendo $\delta = 1$ obtemos respectivamente em $O(\delta^1)$, $O(\delta^2)$

$$\varepsilon_0^{(1)}(\mu) = \frac{3}{16}\mu + \frac{3\lambda}{8\mu^2} \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_0^{(2)}(\mu) = \frac{3}{16}\mu + \frac{3\lambda}{8\mu^2} - \frac{21\lambda^2}{128\mu^5}. \tag{2.17}$$

Porém temos aqui uma função do parâmetro arbitrário μ . Para eliminarmos essa dependência recorreremos ao Princípio da Sensibilidade Mínima (PMS), Ref. [15]. Este princípio consiste em obter o valor de uma quantidade Φ em um ponto estacionário $\bar{\mu}$ que satisfaz:

$$\frac{\partial \Phi(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\bar{\mu}} = 0 \tag{2.18}$$

Assim, o valor $\bar{\mu}$ é aquele que faz com que a quantidade física Φ seja menos sensível às pequenas variações de μ . Nossa quantidade Φ é a densidade de energia (ε).

Os valores de (ε) em $O(\delta^1)$, $O(\delta^2)$, correspondentes a solução da Eq. (2.18) são,

$$\varepsilon_0^{(1)} = 0.4464\lambda^{\frac{1}{3}} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_0^{(2)} = 0.4210\lambda^{\frac{1}{3}} \quad (2.20)$$

A obtenção do resultado de (2.19) em $O(\delta^1)$ é trivial, já para (2.20) em $O(\delta^2)$ obtemos seis raízes imaginárias, isso é contornado selecionando efetivamente o ponto de menor sensibilidade, correspondente à parte real da raiz da região mais estável.

O resultado exato, Ref. [16], para o estado fundamental de um OA puro é:

$$\varepsilon_0^{exato}(m = 0) = 0.4208\lambda^{\frac{1}{3}} \quad (2.21)$$

Assim, através do exemplo do oscilador anarmônico pudemos verificar a maneira de implementação do método e seus bons resultados numéricos.

Em resumo, o que fizemos foi adicionar um termo nulo na lagrangeana original sem alterá-la, tratamos parte deste termo como interação e parte como um termo de massa, o termo de massa contém o parâmetro μ que modifica o propagador original (sem

massa). Essa lagrangeana livre (\mathcal{L}_0) que introduzimos, interpolamo-a com o parâmetro δ que varia de 0 a 1, e multiplicamos a lagrangeana original por esse novo parâmetro, obtendo a lagrangeana interpolada. A fim de calcular a quantidade de interesse (ε), a expandimos em ordem do parâmetro δ que fez o papel de uma constante de acoplamento do tipo perturbativa. É importante ressaltar que esse procedimento nos possibilita calcular qualquer quantidade de interesse de maneira perturbativa. Nesse estágio nossos resultados dependem dos parâmetros artificiais introduzidos pelo método, δ e μ . A dependência em δ desaparece ao fazermos $\delta = 1$ e a dependência em μ é retirada com um procedimento variacional (PMS).

No decorrer de nossos cálculos, verificaremos que com o auxílio da expansão δ , é possível ir além dos métodos não perturbativos convencionais. Nesta aproximação, a seleção dos diagramas de Feynman é feita de maneira essencialmente perturbativa, e pelo fato de lidarmos com poucos diagramas, podemos incluir em nossos cálculos contribuições provenientes de termos diretos e de troca tanto do meio quanto do vácuo, pois o trabalho de renormalização fica simplificado. Voltaremos às características da expansão δ , ressaltando-as muitas vezes ao longo do texto.

Nesse estágio se faz interessante uma breve revisão de RHA.

2.2 O Método de Hartree (RHA)

Nesta seção, apresentaremos uma revisão sucinta dos cálculos referentes à auto-energia bariônica e à densidade de energia, com o uso da aproximação relativística de Hartree (RHA). O objetivo neste caso é mostrar, em linhas gerais, a implementação deste método no cálculo de uma quantidade física, comparando-o no capítulo seguinte com a expansão δ .

No centro de qualquer problema que envolva muitos corpos está o cálculo da densidade de energia ou da equação de estado que descreva o sistema. Para obtenção destas quantidades, utilizamos o tensor energia-momento, cujos elementos de matriz determinam a densidade de energia, pressão e outras quantidades termodinâmicas. Neste caso, por estarmos lidando com quantidades observáveis, é necessário fazer uso dos propagadores interagentes. O operador tensor energia momento, é definido por,

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q_i}{\partial x^\mu} \right)} \quad (2.22)$$

que pode ser dividido em três partes para o presente modelo:

$$T^{\mu\nu} = T_b^{\mu\nu} + T_s^{\mu\nu} + T_v^{\mu\nu} \quad (2.23)$$

onde

$$T_b^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \quad (2.24)$$

$$T_s^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi - m_s^2\phi^2] g^{\mu\nu} + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi, \quad (2.25)$$

e

$$T_v^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\sigma V_\lambda\partial^\sigma V^\lambda - m_v^2 V_\sigma V^\sigma] g^{\mu\nu} - \partial^\mu V_\lambda\partial^\nu V^\lambda. \quad (2.26)$$

Na derivação da Eq. (2.24), utilizamos a equação de movimento do bárion, e na obtenção de (2.26) usamos o fato de que a corrente bariônica se conserva, o que implica que $\partial_\mu V^\mu = 0$.

Os valores esperados de $T_b^{\mu\nu}$, $T_s^{\mu\nu}$ e $T_v^{\mu\nu}$ no estado fundamental da matéria bariônica interagente ($|\psi\rangle$) podem agora ser expressos em termos dos propagadores exatos da teoria, e assim,

$$\langle\psi|T_b^{\mu\nu}|\psi\rangle = -itr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\gamma^\mu S(k)] k^\nu, \quad (2.27)$$

$$\langle \psi | T_s^{\mu\nu} | \psi \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} (k^2 - m_s^2) g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right] \Delta(k) , \quad (2.28)$$

e

$$\langle \psi | T_v^{\mu\nu} | \psi \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} (k^2 - m_v^2) g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right] D_{\mu\nu}(k) , \quad (2.29)$$

onde $S(k)$, $\Delta(k)$ e $D_{\mu\nu}(k)$ estão definidos em (2.2), (2.4) e (2.4).

Aqui, vale ressaltar que, por estarmos tratando de uma teoria quântica de campos relativística, as expressões acima podem divergir. Por isso, para obtermos resultados físicos (finitos), necessitamos fazer uso de um processo de renormalização, que consiste nas seguintes etapas:

- Primeiro, renormalizamos os propagadores interagentes no vácuo ($k_F = 0$) através da inclusão de contra-termos adequados à densidade lagrangeana original, gerando assim \mathcal{L}_{ct} , que por sua vez determina um grupo correspondente de contra-termos no tensor energia-momento ($T_{ct}^{\mu\nu}$).

- Quando $k_F \neq 0$, contribuições adicionais ao valor esperado do tensor energia-momento são geradas por estes contra-termos (CTC).

$$CTC = \langle \psi | T_{ct}^{\mu\nu} | \psi \rangle . \quad (2.30)$$

Estas contribuições devem ser incluídas às Eqs. (2.27)-(2.29).

• Definimos então o tensor *físico* $T^{\mu\nu}$ subtraindo o valor esperado no vácuo (VEV) do tensor total $T^{\mu\nu} + T_{ct}^{\mu\nu}$:

$$VEV = \lim_{k_F \rightarrow 0} \langle \psi | T^{\mu\nu} + T_{ct}^{\mu\nu} | \psi \rangle . \quad (2.31)$$

Assim,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \langle \psi | T^{\mu\nu} + T_{ct}^{\mu\nu} | \psi \rangle - \lim_{k_F \rightarrow 0} \langle \psi | T^{\mu\nu} + T_{ct}^{\mu\nu} | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | T^{\mu\nu} | \psi \rangle + CTC - VEV . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nosso ponto de partida é o cálculo da contribuição dos diagramas diretos de segunda ordem ao propagador bariônico. Na aproximação de RHA somente termos diretos são considerados.

Com o auxílio das regras de Feynman, podemos escrever,

$$iS^{(2)}(q) = iS^0(q) \Sigma^{(2)} S^0(q) , \quad (2.33)$$

que diagramaticamente é representado por

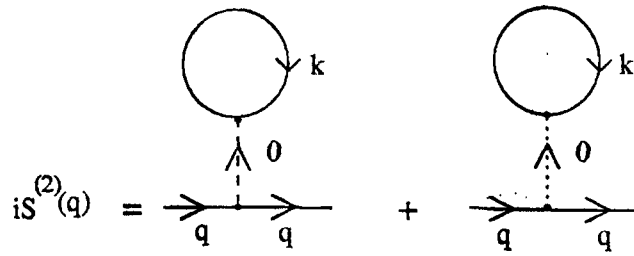


Figura 3: Contribuições de diagramas diretos de segunda ordem ao propagador bariônico.

onde

$$\Sigma^{(2)} = \Sigma_s^{(2)} - \gamma_\mu \Sigma_v^{(2)\mu} \quad (2.34)$$

é auto-energia em segunda ordem, tal que:

$$\Sigma_s^{(2)} = -ig_s^2 \Delta^0(0) \text{tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S^0(q) + \Sigma_{ct}^s \quad (2.35)$$

e

$$\Sigma_v^{(2)\mu} = ig_v^2 D_{\mu\nu}^0(0) \text{tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\nu S^0(q) . \quad (2.36)$$

Incluimos também as contribuições de diagramas diretos aos propagadores mesônicos, mostrados na Fig. (4):

$$\begin{aligned}
i\Delta^{(2)}(q) &= i\Delta^0(q) \left\{ i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q) \left[g_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S^0(k) \right]^2 \right\} \Delta^0(q) \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q) [\Sigma_s^{(2)}]^2 / g_s^2
\end{aligned} \tag{2.37}$$

e

$$iD_{\mu\nu}^{(2)}(q) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q) [\Sigma_v^{(2)\mu} \Sigma_v^{(2)\mu}]^2 / g_v^2 . \tag{2.38}$$

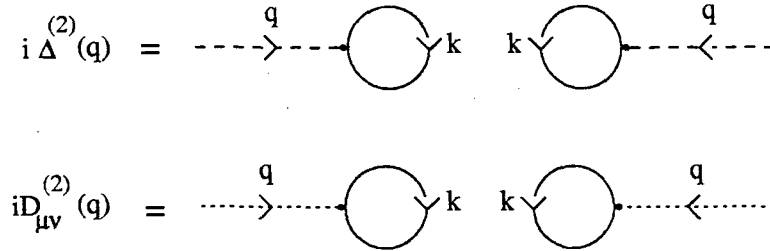


Figura 4: Contribuições de diagramas diretos de segunda ordem aos propagadores mesônicos.

Lembre que $S^0(k) = S_F^0(k) + S_D^0(k)$, e as integrais acima, calculadas com o uso do propagador no vácuo (S_F^0), divergem. Para contornar este problema e eliminar a divergência em Σ_s , adicionamos à densidade lagrangeana original um contra-termo $\mathcal{L}_{ct} = \alpha_1 \phi$ com α_1 definido da seguinte maneira:

que serve para manter a estabilidade do vácuo.

Com a introdução do contra-termo, Σ_s é agora dada por

$$\begin{aligned}\Sigma_s &= -i \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} S_D^0(k) \\ &= -\frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{m}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\quad (2.42)$$

e pode ser representada através da figura abaixo:

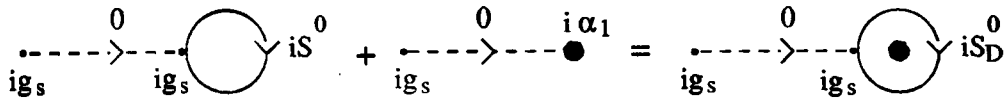


Figura 6: Auto-energia escalar renormalizada.

Para o caso da auto-energia vetorial obtemos, por integração simétrica, um resultado nulo para o diagrama direto vetorial calculado no vácuo, e portanto não há necessidade de renormalização.

Assim, Σ_v^μ se reduz a

$$\begin{aligned}\Sigma_v^\mu &= i \frac{g_v^2}{m_v^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S_D^0(k) \\ &= -\frac{g_v^2}{m_v^2} \frac{k_F}{3\pi^2} \delta^{\mu 0}\end{aligned}\quad (2.43)$$

Os resultados em segunda ordem para Σ podem agora ser somados em todas as ordens auto-consistentemente com o auxílio da equação de Dyson

$$S^H(k) = S^0(k) + S^0(k) \Sigma^H S^H(k) , \quad (2.44)$$

onde também a auto-energia é calculada utilizando-se os propagadores interagentes.

Esta expressão é representada diagramaticamente por

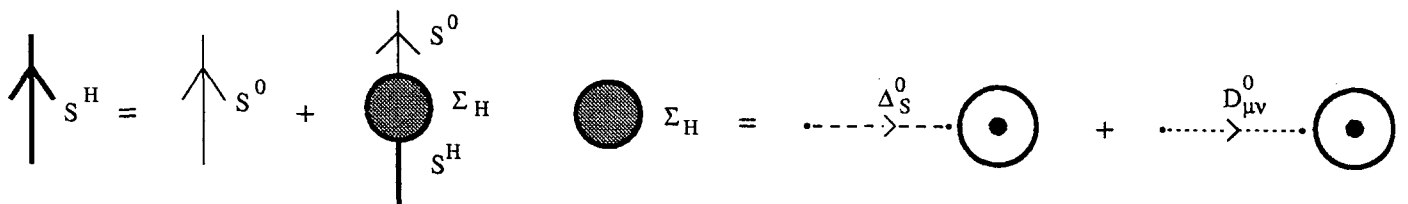


Figura 7: Representação gráfica do propagador bariônico vestido, obtido através de RHA. As linhas mais escuras representam o propagador bariônico de Hartree.

A Eq. (2.23) pode ser resolvida formalmente, dando como resultado

$$[S^H(k)]^{-1} = [S^0(k)]^{-1} - \Sigma^H = \not{k} - m - \Sigma^H , \quad (2.45)$$

e obtemos então para o propagador bariônico

$$S^H(k) = S_F^H(k) + S_D^H(k) \quad (2.46)$$

onde

$$S_F^H(k) = \frac{k^* + m^*}{k^{*2} - m^{*2} + i\epsilon}, \quad (2.47)$$

$$S_D^H(k) = (k^* + m^*) \frac{i\pi}{E^*(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}^*|). \quad (2.48)$$

sendo

$$k^{\mu*} = k^\mu + \Sigma_v^{H\mu}, \quad m^* = m + \Sigma_s^H \quad (2.49)$$

e

$$E^*(k) = (k^{*2} + m^{*2})^{\frac{1}{2}}, \quad E(k) = E^*(k) - \Sigma_v^{0H\mu}. \quad (2.50)$$

Os propagadores mesônicos também devem ser calculados usando-se

S^H , e temos então

$$\Delta^H = \Delta^0 - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) (\Sigma_s^H)^2 / g_s^2 \quad (2.51)$$

e

$$D_{\mu\nu}^H = D_{\mu\nu}^0(k) - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) (\Sigma_v^{H\mu} \Sigma_v^{H\nu}) / g_v^2 \quad (2.52)$$

Estes resultados que serão utilizados no cálculo de $T^{\mu\nu}$, e tem suas representações diagramáticas na Fig. (8).

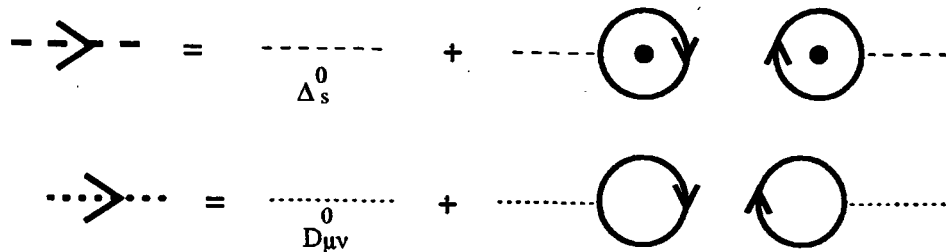


Figura 8: Representação dos propagadores mesônicos vestidos, obtidos através de RHA.

A auto-consistência é assegurada calculando-se novamente a auto-energia com a utilização do propagador de Hartree $S^H(k)$ e reobtendo Σ_s e Σ_y^μ .

Para Σ_y^μ , este procedimento é dado por

$$\Sigma_v^{H\mu} = i \frac{g_v^2}{m_v^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S^H(k). \quad (2.53)$$

Novamente, o termo proveniente do vácuo desaparece por integração simétrica, e a auto-energia vetorial se reduz a

$$\begin{aligned} \Sigma_v^{H\mu} &= i \frac{g_v^2}{m_v^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S_D^H(k) \\ &= -\frac{g_v^2}{m_v^2} \frac{k_F}{3\pi^2} \delta^{\mu 0}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

O resultado acima é análogo ao obtido com o uso do propagador nu

Eq. (2.43), e assim Σ_v^H não é afetada, satisfazendo a condição de auto-consistência de Hartree automaticamente.

No caso escalar,

$$\Sigma_s^H = i \frac{g_s^2}{m_s^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S^H(k) + \Sigma_s^{ct} , \quad (2.55)$$

e utilizando o propagador no meio, obtemos

$$\Sigma_s^H = - \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^3 k}{4\pi^3} \frac{m^*}{E^*(k)} . \quad (2.56)$$

Para o cálculo de Σ_s no vácuo, inicialmente somamos as contribuições dos diagramas diretos vetoriais em todas as ordens na Eq. (2.44):

$$S^H(k) = S^0(k^*) + S^0(k^*) \Sigma_s^H S^H(k) . \quad (2.57)$$

Agora, S^H é expandido em uma série de potências em função de Σ_s^H renormalizada resolvendo-se a Eq. (2.57) iterativamente, obtemos

$$S^H(k) = \sum_{m=0}^{\infty} [S^0(k^*)]^{m+1} [\Sigma_s^H]^m . \quad (2.58)$$

A inserção desta expressão na Eq. (2.55) dá como resultado a seguinte equação implícita para a auto-energia escalar:

$$\begin{aligned} \Sigma_s^H &= i \frac{g_s^2}{m_s^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \sum_{m=0}^{\infty} [S_F^0(k^*)]^{m+1} [\Sigma_s^H]^m \\ &\quad + \Sigma_s^{ct} + \text{termos finitos} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Os termos finitos são os termos provenientes do meio, que se anulam em densidade zero e por isso são irrelevantes no trabalho de renormalização.

Fica claro, por contagem de potências, que os termos com $0 \leq m \leq 4$ na Eq. (2.59) são divergentes. Os diagramas de Feynman relacionados a Eq. (2.60) podem ser vistos na Fig. (9). Estas divergências devem ser removidas incluindo-se a densidade lagrangeana de contra-termos

$$\mathcal{L}_{ct} = \alpha_1 \phi + \frac{1}{2!} \alpha_2 \phi^2 + \frac{1}{3!} \alpha_3 \phi^3 + \frac{1}{4!} \alpha_4 \phi^4 \quad (2.60)$$

Na densidade lagrangeana (1.1) e incorporando estas novas contribuições em Σ_s^{ct} . Estes diagramas contribuem para a auto-energia escalar, gerando os contra-termos mostrados na Fig. (10) e descritos analiticamente por

$$\Sigma_s^{ct} = \sum_{m=0}^3 \frac{1}{m!} \left(-\frac{g_s}{m_s^2} \right) \left(-\frac{\Sigma_s^H}{g_s} \right)^m \alpha_{m+1}. \quad (2.61)$$

Note que o lado direito da equação acima envolve a *auto-energia escalar renormalizada* Σ_s^H , pois os contra-termos devem ser incluídos em todas as ordens.

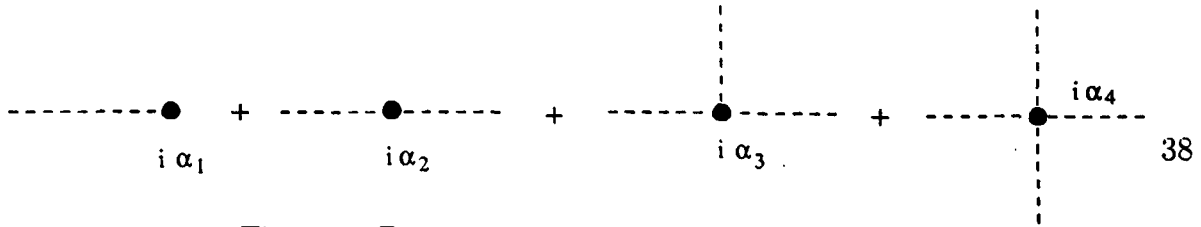


Figura 9: Diagramas de Feynman referentes à \mathcal{L}_{ct} .

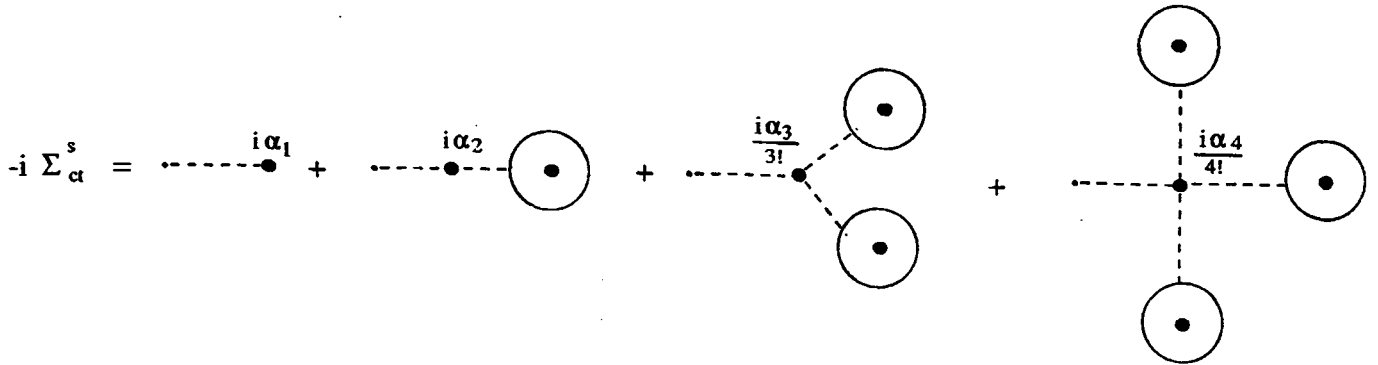


Figura 10: Auto-energia escalar de contra-termos.

Para determinar os coeficientes α_m , inicialmente reescrevermos a Eq.

(2.59) usando a identidade $\partial S_F^0(k)/\partial m = [S_F^0(k)]^2$, obtendo assim

$$\begin{aligned} \Sigma_s^H = & i \frac{g_s^2}{m_s^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!} (\Sigma_s^H)^m \left[\frac{\partial^m}{\partial m^m} S_F^0(k) \right] \right\} \\ & + \Sigma_s^{ct} + \text{termos finitos} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Comparando agora a equação acima com a Eq.(2.61), podemos cancelar os 4 termos divergentes nesta expressão definindo

$$\alpha_m = -i (-g_s)^m \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial m^{m-1}} S_F^0(k) \right], \quad (2.63)$$

onde $1 \leq m \leq 4$. O resultado final (finito) para a auto-energia escalar renormalizada escrito em termos do propagador de Hartree $S^H(k)$ adquire a forma

$$\Sigma_s^H = i \frac{g_s^2}{m_s^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} S^H(k) + \sum_{m=0}^3 \frac{(-1)^{m-1} g_s^{1-m}}{m! m_s^2} \alpha_{m+1} + (\Sigma_s^H)^m . \quad (2.64)$$

Para computar a equação acima explicitamente, calculamos os contra-termos definidos na Eq. (2.63) e a integral definida acima com o auxílio de técnicas de regularização dimensional, obtendo como resultado a seguinte condição de auto-consistência para a auto energia escalar renormalizada na aproximação relativística de Hartree:

$$\Sigma_s^H = m^* - m = -\frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{4\pi^3} \frac{m^*}{E^*(k)} + \Delta m^* , \quad (2.65)$$

onde

$$\Delta m^* = \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{1}{2\pi^2} \left[m^{*3} \ln \left(\frac{m^*}{m} \right) - m^2 (m^* - m) - \frac{5}{2} m (m^* - m)^2 - \frac{11}{6} (m^* - m)^3 \right] . \quad (2.66)$$

Conhecendo-se Σ_v e Σ_s (ou m^*), o propagador S^H fica completamente determinado. Podemos então partir para o cálculo da densidade de energia. Para este fim, calcularemos inicialmente as contribuições provenientes dos mésons, utilizando as Eqs. (2.28) e (2.29). Os propagadores mesônicos são dados pelas Eqs (2.51) e (2.52), e as auto-energias são representadas pelas Eqs. (2.54) e (2.55). As contribuições à densidade

de energia mesônica provenientes de $D_{\mu\nu}^0(k)$ e $\Delta^0(k)$ são independentes da densidade, e podem ser eliminadas através da subtração do valor esperado do vácuo [veja Eq. (2.22)].

Assim, temos como resultado

$$\varepsilon_s = \langle \Psi | T_s^{00} | \Psi \rangle - \varepsilon_s^{vev} \quad (2.67)$$

$$= -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} (k^2 - m_s^2) g^{00} - k_0^2 \right] \Delta(k) - \varepsilon_s^{vev} \quad (2.68)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} \Sigma_s^2 \quad (2.69)$$

e

$$\varepsilon_v = \langle \Psi | T_v^{00} | \Psi \rangle - \varepsilon_v^{vev} \quad (2.70)$$

$$= -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} (k^2 - m_v^2) g^{00} - k_0^2 \right] D_{\mu\nu}(k) - \varepsilon_v^{vev} \quad (2.71)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left(\frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 \quad (2.72)$$

Para o cálculo da contribuição bariônica, cuja expressão é dada pela

Eq (2.27), temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \langle \Psi | T_b^{00} | \Psi \rangle = -itr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\gamma^0 S^H(k) \right] k^0 - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k E^*(k) + \frac{g_v^2}{m_v^2} \left(\frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$-4i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^0 - g_v V_0) k^0}{(k^0 - g_v V_0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^{*2} + i\epsilon} - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} \quad (2.73)$$

onde,

$$V_0 = \frac{g_v^2}{m_v^2} \left(\frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2. \quad (2.74)$$

A última integral na Eq. (2.69) representa a soma sobre os nucleons no mar de Dirac, e contém divergências. Para isolá-las, resolvemos a integral utilizando técnicas de regularização dimensional, e obtemos

$$\begin{aligned} & -4i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^0 - g_v V_0) k^0}{(k^0 - g_v V_0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^{*2} + i\epsilon} \\ &= -\frac{2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{m^{*2}} \right)^\epsilon m^{*4} \Gamma(\epsilon - 2) (3 - 2\epsilon). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, vemos que cinco termos apresentam pólos em $\epsilon = 0$. O primeiro termo, que é completamente independente da densidade, é cancelado pela subtração do valor esperado no vácuo, indicado na Eq. (2.69). Os quatro pólos restantes são eliminados pelos contra-termos definidos previamente, dados pela Eq. (2.60). Neste caso, a contribuição dos contra-termos (*CTC*) é o valor esperado do tensor energia-momento gerado por \mathcal{L}_{ct}

$$CTC = \langle T_{ct}^{\mu\nu} \rangle = \alpha_1 \langle \phi \rangle + \frac{1}{2!} \alpha_2 \langle \phi^2 \rangle + \frac{1}{3!} \alpha_3 \langle \phi^3 \rangle + \frac{1}{4!} \alpha_4 \langle \phi^4 \rangle. \quad (2.76)$$

Assim, a correção finita devido à flutuação do vácuo, à densidade de energia, adquire a forma

$$\begin{aligned}
 \Delta\varepsilon_{VF} &= \varepsilon_{vac}(m^*) - \varepsilon_{vac}(m) - \varepsilon_{ct} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \left[-m^{*4} \ln\left(\frac{m^*}{m}\right) + m^3(m^* - m) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7}{2}m^2(m^* - m)^2 + \frac{13}{3}m(m^* - m)^3 - \frac{25}{12}(m^* - m)^4 \right], \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

e a densidade de energia na aproximação relativística de Hartree é dada por

$$\varepsilon_{RHA} = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left(\frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} (m^* - m)^2 \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathbf{k}^2 + m^*)^{\frac{1}{2}} + \Delta\varepsilon_{VF} \quad (2.78)$$

Capítulo 3

Expansão δ Otimizada Aplicada ao Modelo de Walecka

Utilizando-se do procedimento descrito na seção 2.1, podemos então, adicionando termos livres, e interpolando somente o propagador bariônico [veja Ref. (13) e (14)], reescrever a lagrangeana de Walecka definida na Eq. (1.1) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w^\delta = & \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - \Omega) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu \\ & + \delta \bar{\psi} (g_s \phi - g_v \gamma^\mu V_\mu + \mu) \psi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Uma breve descrição do procedimento que adotaremos para esses cálculos se faz interessante neste ponto.

Expandindo a auto-energia até $O(\delta^2)$ calcularemos somente os diagramas diretos referentes aos vértices trilineares propostos pela densidade lagrangeana,

faremos esse cálculo no meio, onde o intervalo permitido para o momento das partículas é $[0; k_F]$, e no vácuo, onde as partículas tem acesso a qualquer valor de momento de $[-\infty; +\infty]$. O cálculo no vácuo resultará em divergências que através de um procedimento de renormalização serão eliminadas. As auto-energias que calculamos vestirão o propagador do bárion, e este propagador vestido será usado para o cálculo da densidade de energia e da pressão. Durante o cálculo da densidade de energia e da pressão surgirão novas divergências que serão contornadas pelo mesmo método de renormalização utilizado na auto-energia.

A auto-energia é a primeira grandeza a ser calculada, sendo que a contribuição destes diagramas é calculada montando a expressão através das regras de Feynman para a lagrangeana interpolada de Walecka (3.3).

As Regras de Feynman para a lagrangeana interpolada [veja Ref. (18)]

são:

Para o propagadores:

- A cada méson escalar carregando momento p associamos um fator

$i\Delta(p)$:

- A cada férmion carregando momento p associamos um fator $iS(p)$:
- A cada méson vetorial carregando momento p associamos um fator

$iD_{\mu\nu}(p)$

Para os vértices:

- A cada vértice escalar associamos um fator $i\delta g_s$:
- A cada vértice vetorial associamos um fator $i\delta g_v \gamma^\mu$:
- A cada vértice bilinear fermiônico associamos um fator $i\delta\mu$:

Como a exemplo do cálculo da auto-energia e densidade de energia se utilizando de RHA, na integração sobre o loop, usando o propagador de Feynman, poderão ocorrer divergências. Nos utilizaremos do método de contra-termos, regularizando as integrais divergentes através da regularização dimensional fixando a parte finita arbitrária no esquema de renormalização da camada de massa.

Em $O(\delta)$, somente o termo $\delta\bar{\psi}\mu\psi$ (vértice bilinear) contribui para a auto-energia,

$$\Sigma^{(1)} = -\delta\mu \quad (3.2)$$

Em $O(\delta^2)$, temos a contribuição de diagramas diretos e de troca, sendo que em nossos cálculos utilizaremos somente as contribuições referentes aos diagramas diretos, na Ref. [18] a auto-energia total é calculada, incluindo o termo de troca.

Para maior clareza, calcularemos a contribuição para a auto-energia proveniente destes diagramas usando inicialmente o propagador no meio (S_D), e posteriormente no vácuo. Diagramaticamente,

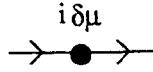


Figura 11: Auto-energia em $O(\delta^1)$.

3.1 Cálculo da Auto-Energia no Meio

O propagador bariônico no meio denso é dado por

$$S_D(k) = (\not{k} + \Omega) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|), \quad (3.3)$$

onde $E^0(k) = (\mathbf{k}^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}$.

Assim, para o diagrama direto escalar, com auxílio das regras de Feynman, temos

$$-i\Sigma_s = -(i\delta g_s)^2 \frac{i}{l^2 - m_s^2 + i\epsilon} \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i(\not{k} + \Omega) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|), \quad (3.4)$$

integrando a componente 0 e executando a função degrau obtemos,

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_s &= -\left(\frac{\delta g_s}{m_s}\right)^2 \frac{\Omega}{4\pi^3} \int dk^0 \int d^3k \frac{\delta(k^0 - E^0(k))}{E^0(k)} \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \\
&= -\left(\frac{\delta g_s}{m_s}\right)^2 \frac{\Omega}{\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Para o diagrama vetorial, temos

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_v^\mu &= -(-i\delta g_v \gamma^\mu) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{l^2 - m_v^2 + i\epsilon} \right) \\
&\quad \times \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-i\delta g_v \gamma^\nu) i(\not{k} + \Omega) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \\
&= -\left(\frac{\delta g_v}{m_v}\right)^2 \frac{1}{4\pi^3} \int dk^0 \int dk^3 \frac{(\gamma_0 k^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}) \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k)}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto, a auto-energia vetorial no meio denso é dada por

$$\Sigma_v^\mu = -\frac{(\delta g_v)^2 \gamma^0 k_F^3}{\pi^2 m_v^2 3}. \tag{3.7}$$

3.2 Cálculo da Auto-Energia no Vácuo

O propagador bariônico no vácuo é dado por

$$S_F(k) = \frac{\not{k} + \Omega}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon}, \tag{3.8}$$

e, para o diagrama direto escalar, temos

$$-i\Sigma_s = -(i\delta g_s)^2 \frac{i}{l^2 - m_s^2 + i\epsilon} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + \Omega)}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon}. \quad (3.9)$$

Por conservação de momento, l (o momento do méson) é nulo. Tomando o traço da equação acima, obtemos

$$-i\Sigma_s = 4\Omega \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon}. \quad (3.10)$$

Através de uma rotação de Wick passamos a Eq. (3.12) do espaço de Minkowski para o espaço Euclideano, fazendo $k^0 = ik_E^0$ e $\mathbf{k}=\mathbf{k}_E$,

$$\Sigma_s = \left(\frac{\delta g_s}{m_s}\right)^2 4\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + \Omega^2} \quad (3.11)$$

A auto-energia escrita desta forma diverge, e é preciso então renormalizá-la.

Neste ponto faz-se interessante abordarmos o procedimento de regularização que estamos utilizando. Regularizar a integral divergente, constitui-se em um conjunto de procedimentos para isolar a divergência, para que a possamos manipular formalmente. Existem diferentes métodos de regularização, tais como o *Método do Cut-off*, em que o limite divergente da integral é substituído por um cut-off (Λ) que simboliza a divergência, desta maneira podemos manipular esta divergência e utilizar métodos sis-

temáticos para removê-la do resultado final, fazendo com que as previsões tenham valores finitos de acordo com os valores experimentais. Outro método, que vem sendo utilizado neste trabalho, é o método da regularização dimensional, proposto em 1972 por t'Hooft e Veltman, Bollini e Giambiagi entre outros [veja Ref. (19) e (20)]. Neste método, ao invés de 4, trabalhamos em 2ω dimensões, onde $2\omega = 4 - 2\epsilon$. Desta maneira, o resultado da integral fica expresso em termos de Funções Gama, que são expandidas em função de ϵ , apresentando pólos quando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado. Para que a equação fique dimensionalmente correta, esse método introduz um novo parâmetro (η), característico da regularização dimensional, que possui dimensão de massa. Assim, a constante de acoplamento em 2ω dimensões escrita em termos da constante original fica

$$\widehat{\delta g_s} = \delta g_s (\eta)^{2-\omega}$$

Aqui, vale salientar que, se neste trabalho utilizássemos como esquema de renormalização o método da Subtração Mínima, que simplesmente remove os pólos, o parâmetro η estaria presente no resultado final, e seria fixado de maneira que os resultados físicos fossem reproduzidos. Diferentemente, o esquema de renormalização na Camada de Massa (método que estamos utilizando), remove da teoria tanto os pólos quanto as contribuições finitas provenientes da renormalização, incluindo o parâmetro η . Por isto omitimos η no decorrer do trabalho.

Reescrevendo então a auto-energia em 2ω dimensões, obtemos

$$\Sigma_s = \frac{(\delta g_s)^2}{m_s^2} 4\Omega \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{k_E^2 + \Omega^2} \quad (3.12)$$

Substituindo a Eq. (B.1) na Eq. (3.14) e resolvendo a integral resultante com o auxílio da Eq. (B.5), temos

$$\Sigma_s = -\frac{4(\delta g_s)^2 \Omega^3}{m_s^2 (4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^2} \right) + (1 - \gamma) \right\} \quad (3.13)$$

Para o diagrama direto vetorial:

$$\begin{aligned} -i\Sigma_v^\mu &= -(-i\delta g_v \gamma^\mu) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{l^2 - m_v^2 + i\epsilon} \right) \\ &\quad \times \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i\delta g_v \gamma^\nu) \frac{i(\not{k} + \Omega)}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sabendo que $l = 0$ e tomando o traço da Eq.(acima), obtemos

$$-i\Sigma_v^\mu = -4 \left(\frac{\delta g_v}{m_v} \right)^2 \gamma_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \quad (3.15)$$

Fazendo uma rotação de Wick e passando de 4 para 2ω dimensões, resolvemos a integral com o auxílio da Eq. (B.3), obtendo um resultado nulo para a contribuição do vácuo referente ao diagrama vetorial.

3.2.1 Renormalização da Auto-Energia Bariônica

A Eq. (3.15) é a contribuição do vácuo à auto-energia bariônica referente aos termos diretos, a divergência no termo $1/\epsilon$ no limite $\epsilon \rightarrow 0$ foi convenientemente isolada através da regularização dimensional e este resultado será sujeito ao processo de renormalização.

A Lagrangeana completa de contra-termos é escrita como

$$\mathcal{L}_{ct} = -\frac{1}{2}\zeta_s\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi + \sum_{n=1}^4 \frac{\alpha_n}{n!}\phi^n + m_c\bar{\psi}\psi - \zeta_b\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \gamma_s\phi\bar{\psi}\psi, \quad (3.16)$$

sendo que o contra-termo necessário para renormalização do diagrama direto escalar é

$$\alpha_1\phi. \quad (3.17)$$

Calculando a contribuição para a auto-energia proveniente deste contra-termo, obtemos

$$\Sigma_{ct} = -\alpha_1 \left(\frac{\delta g_s}{m_s} \right). \quad (3.18)$$

que diagramaticamente é representado pela Fig (12)

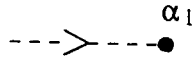


Figura 12: Contra-termo necessário para renormalizar Σ .

Cada contra-termo, é composto por uma parte infinita (que elimina totalmente a divergência) e por uma parte finita arbitrária, que é ajustada posteriormente conforme o método de renormalização utilizado. Neste trabalho estaremos utilizando o método da camada de massa, no qual os contra-termos removem tanto as contribuições divergentes as contribuições finitas, devido às correções do *loop* às amplitudes mensuráveis. Portanto, para este método, os parâmetros originais da teoria (g_s, g_v, m_s, m_v, m) são tratados como as massas e constantes de acoplamento *físicas*.

$$\alpha_1 = -\frac{\delta g_s \Omega^3}{4\pi^2 \epsilon} + F_1 . \quad (3.19)$$

Para fixar o termo finito arbitrário F_1 usamos as condições de renormalização ditadas pelo método.

$$S_{FR}^{-1} |_{q=m} = 0 \quad (3.20)$$

e

$$\frac{\partial S^{-1}}{\partial \not{A}} \Big|_{q=m} = 1, \quad (3.21)$$

onde m é a massa física do bárion. A expressão para o propagador bariônico vestido e renormalizado (S_{FR}) é obtida fazendo-se uso do inverso da Equação de Dyson [veja Eq. (2.45)], de modo que:

$$S_{FR}^{-1} = \not{A} - \Omega - (\Sigma + \Sigma_{ct}), \quad (3.22)$$

onde $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$.

Para conservar a estabilidade do vácuo, o diagrama direto escalar deve ser nulo, portanto F_1 é escrito de tal maneira que elimine *completamente* qualquer contribuição proveniente deste diagrama. Logo,

$$F_1 = -\frac{\delta g_s}{4\pi^2} \Omega^3 \left\{ \Psi(2) + \ln \left(\frac{4\pi\eta^2}{\Omega^2} \right) \right\}. \quad (3.23)$$

Utilizando as condições de renormalização dadas pela Eqs. (3.22), (3.23), no inverso do propagador definido pela Eq. (3.24), e voltando para o espaço de Minkowsky ($q_E^2 \rightarrow q^2 = -m^2$), obtemos a expressão final para o inverso do propagador vestido e renormalizado:

$$S_{F\tau}^{-1} = \not{q} - m \quad (3.24)$$

3.3 O Tensor Energia-Momento para a Expansão δ

Existem diferentes maneiras de abordar um mesmo problema usando a expansão δ . O procedimento padrão diz respeito a expandir a quantidade física de interesse em ordens de δ a partir da densidade lagrangeana interpolada (3.3). Por exemplo, se a quantidade física a ser calculada for a densidade de energia, usamos (3.3) para obter esta densidade, e utilizando o propagador nu, calculamos a densidade ordem a ordem perturbativamente. Alternativamente, podemos partir de uma expressão exata para a densidade, derivando o tensor energia-momento ($T^{\mu\nu}$) a partir da densidade lagrangeana original. Quando optamos por este procedimento, como no caso deste trabalho, a expansão δ é introduzida no problema através dos propagadores e vértices vestidos, isto é, que levam em conta as auto-interações.

O tensor energia-momento definido na Eq. (2.6) aplicado à lagrangeana de Walecka original (1.1);

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + \partial^\nu V_\lambda F^{\lambda\mu} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_w . \quad (3.25)$$

Note que quando não usamos a equação de movimento do nucleon,

temos

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \langle \psi | T^{\mu\nu} | \psi \rangle - VEV + CTC . \quad (3.26)$$

de tal forma [veja Ref. (13) e (14)]

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ S(k) \left[\gamma^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} (\gamma^\lambda k_\lambda - m) \right] \right\} \\ &- i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta_s(k) \left[\frac{1}{2} (k^2 - m_s^2) g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right] \\ &+ i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_v^\mu(k) \left[\frac{1}{2} (k^2 - m_v^2) g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right] \\ &+ i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^{\mu\nu} [\Sigma_s(k) \Delta_s(k) + \Sigma_v^\mu(k) D_v^\mu(k)] \\ &- VEV + CTC , \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $S(k)$, $\Delta_s(k)$ e $D_v^\mu(k)$ são respectivamente os propagadores totais, a auto-energia escalar $\Sigma_s(k)$ e a auto-energia vetorial $\Sigma_v^\mu(k)$ foram calculadas e renormalizadas na seção anterior.

O tensor energia-momento dado por (3.29) leva em conta contribuições referentes aos termos direto, de troca, bem como correções ao vértice, independente da $O(\delta)$ considerada.

Quando nos utilizamos somente os termos diretos, temos

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_b = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \{ \text{tr} [\gamma^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} (k - m)] S(k) \} - VEV + CTC, \quad (3.28)$$

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_s = \frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) \right]^2 g^{\mu\nu} - VEV + CTC, \quad (3.29)$$

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_v = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(k) \right] \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\nu S(k) \right] g^{\mu\nu} - VEV + CTC, \quad (3.30)$$

sendo que, para obtermos a equação de estado para a matéria de nêutrons necessitamos calcular a densidade de energia (ε) e a pressão (P), onde

$$\varepsilon = \langle T^{00} \rangle, \quad P = \frac{1}{3} \langle T^{ii} \rangle. \quad (3.31)$$

3.4 Cálculo da Densidade de Energia

Para o cálculo da densidade de energia, precisamos inicialmente definir o propagador bariônico vestido. Para isso reescrevemos a auto-energia na forma

$$\Sigma(k) = \Sigma_s^{(2)}(k) - \gamma_\mu \Sigma_v^{(2)\mu}(k), \quad (3.32)$$

onde agora $\Sigma_s^{(2)}$ e $\Sigma_v^{(2)\mu}$ são as contribuições ao propagador bariônico provenientes de termos diretos até $O(\delta^2)$ calculadas na seção anterior com o uso da expansão δ [veja Eqs. (3.4), (3.7) e (3.9)].

$$\Omega^*(k) = \Omega + \Sigma_s(k) , \quad (3.33)$$

$$E^*(k) = [\mathbf{k}^{*2} + \Omega^{*2}(k)]^{1/2} , \quad (3.34)$$

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{k} , \quad (3.35)$$

$$k^{\mu*} = k^\mu + \Sigma^\mu(k) = [k^0 + \Sigma^0(k), \mathbf{k}^*] . \quad (3.36)$$

Substituindo estes resultados na Eq. (2.45) no propagador do nucleon, obtemos o propagador bariônico interagente (propagador vestido),

$$S^*(k) = S_F^*(k) + S_D^*(k) , \quad (3.37)$$

onde

$$S_F^*(k) = \frac{1}{k^* - \Omega^*(k) + i\epsilon} , \quad (3.38)$$

e

$$S_D^*(k) = i\pi \frac{k^* + \Omega^*(k)}{E^*(k)} \delta(k^0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) . \quad (3.39)$$

Sendo $E(k)$ a energia da partícula que satisfaz $E(k) = [E^*(k) - \Sigma^0(k)]_{k^0=E(k)}$.

As quantidades auxiliares definidas nas Eqs. (2.49) e (2.50) são agora descritas da seguinte maneira:

$$\Omega^* = \Omega - \delta\mu - \left(\frac{\delta g_s}{m_s}\right)^2 \frac{\Omega}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{1}{E_\mu^0(k)} , \quad (3.40)$$

$$k^{0*} = k^0 - \left(\frac{\delta g_v}{m_v}\right)^2 \frac{k_F^3}{3\pi^2} , \quad (3.41)$$

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{k} . \quad (3.42)$$

E o propagador vestido que será utilizado no cálculo da densidade de energia, fica completamente determinado.

A expressão para a densidade de energia bariônica, obtida através do tensor $T^{\mu\nu}$,

é dada por

$$\varepsilon_b = -itr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\gamma^0 k^0 - (\not{k} - m)] S^*(k) - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct}. \quad (3.43)$$

Calculando primeiramente a densidade de energia usando o propagador no vácuo, temos

$$\varepsilon_b^{vac} = -itr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\gamma \cdot \mathbf{k} + m) \frac{\not{k} + \Omega^*}{k^{*2} - \Omega^{*2}(k) + i\epsilon}. \quad (3.44)$$

Tomando o traço da equação acima:

$$\varepsilon_b^{vac} = -4i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{k^{*2} - \Omega^*(k) + i\epsilon} + \frac{m\Omega^*}{k^{*2} - \Omega^*(k) + i\epsilon} \right). \quad (3.45)$$

Resolvendo cada integral separadamente, após fazermos uma rotação de Wick e passar de 4 para 2ω dimensões, a primeira integral fica

$$I_1 = -4 \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_i k_j}{k_E^{*2} + \Omega^{*2}}, \quad (3.46)$$

cuja solução pode ser obtida como auxílio da Eq. (B.4), e assim

$$I_1 = -\frac{2(2\omega - 1)}{(4\pi)^\omega (\Omega^{*2})^{-\omega}}. \quad (3.47)$$

Reescrevendo a equação com $\omega = 2 - \epsilon$, obtemos

$$I_1 = -\frac{2}{(4\pi)^2} \exp \left[\epsilon \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] \Omega^{*4} \Gamma(\epsilon - 2) (3 - 2\epsilon) . \quad (3.48)$$

Substituindo a Eq. (B.26) na expressão acima e expandido a exponencial até $O(2)$, obtemos a expressão final para I_1 , dada por

$$I_1 = -\frac{3\Omega^{*4}}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(3) + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] + \frac{\Omega^{*4}}{8\pi^2} . \quad (3.49)$$

A segunda integral pode ser escrita como

$$I_2 = -4 \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m\Omega^*}{(k_E^{*2} + \Omega^{*2})} , \quad (3.50)$$

onde já foram realizadas a rotação de Wick e a alteração nas dimensões.

Com o auxílio da Eq. (B.1) e (B.5), obtemos

$$I_2 = -\frac{4m\Omega^* \Gamma(1 - \omega)}{(4\pi)^\omega (\Omega^{*2})^{1-\omega}} . \quad (3.51)$$

Reescrevendo I_2 com $\omega = 2 - \epsilon$,

$$I_2 = -\frac{4m\Omega^{*3}}{(4\pi)^2} \exp \left[\epsilon \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] \Gamma(\epsilon - 1) , \quad (3.52)$$

e expandindo a exponencial até $O(\epsilon)$, obtemos a expressão final para a segunda integral:

$$I_2 = \frac{m\Omega^{*3}}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right\}. \quad (3.53)$$

Calculando agora ϵ_b utilizando o propagador no meio, temos

$$\epsilon_b^{meio} = tr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\gamma \cdot \mathbf{k} + m) \pi \frac{(k^* + \Omega^*)}{E^*(k)} \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad (3.54)$$

$$= \frac{1}{16\pi^3} \int d^4k \left(\frac{4\mathbf{k}^2 + 4m\Omega^*}{E^*(k)} \right) \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad (3.55)$$

$$= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3k \left(\frac{\mathbf{k}^2 + m\Omega^*}{E^*(k)} \right). \quad (3.56)$$

A expressão final para a densidade de energia bariônica pode ser então

escrita como

$$\begin{aligned} \epsilon_b &= \epsilon_b^{vac} + \epsilon_b^{meio} - \epsilon_b^{vev} + \epsilon_b^{ct} \\ &= -\frac{3\Omega^{*4}}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(3) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] + \frac{m\Omega^{*3}}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3k \left(\frac{\mathbf{k}^2 + m\Omega^*}{E^*(k)} \right) + \frac{\Omega^{*4}}{8\pi^2} - \epsilon_b^{vev} + \epsilon_b^{ct}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Para a densidade de energia escalar, temos

$$\epsilon_s = \frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[tr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S^*(k) \right]^2 - \epsilon_s^{vev} + \epsilon_s^{ct}. \quad (3.58)$$

Inicialmente usando o propagador no vácuo,

$$\varepsilon_s^{vac} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[i \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^* + \Omega^*}{k^{*2} - \Omega^{*2} + i\epsilon} \right]^2. \quad (3.59)$$

Tomando o traço e fazendo uma rotação de Wick,

$$\varepsilon_s^{vac} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[- \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{4\Omega^*}{k_E^{*2} + \Omega^{*2}} \right]^2. \quad (3.60)$$

Para solução da Eq. (3.62), procedemos de maneira similar a resolução da Eq.(3.53), e o resultado final é escrito como

$$\varepsilon_s^{vac} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left\{ \frac{\Omega^{*3}}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] \right\}^2. \quad (3.61)$$

Utilizando agora o propagador, temos

$$\varepsilon_s^{meio} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[\text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^* + \Omega^*}{E^*(k)} \delta(k_0 - E(k)) (k_F - |\mathbf{k}|) \right]^2. \quad (3.62)$$

Tomando o traço e resolvendo a integral em k_0 , obtemos

$$\varepsilon_s^{meio} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[\frac{\Omega^*}{4\pi^2} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{1}{E^*(k)} \right]^2, \quad (3.63)$$

e a expressão final para ε_s , é então dada por

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s &= \varepsilon_s^{meio} + \varepsilon_s^{vac} - \varepsilon_s^{vev} + \varepsilon_s^{ct} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{g_s}{m_s} \right)^2 \left\{ \left[\frac{\Omega^{*3}}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\Omega^*}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{1}{E^*(k)} \right]^2 \right\} - \varepsilon_s^{vev} + \varepsilon_s^{ct} .
\end{aligned} \tag{3.64}$$

A densidade de energia vetorial pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\varepsilon_v = -\frac{1}{2} \left(\frac{g_v}{m_v} \right)^2 \left[tr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^0 i S^*(k) \right]^2 . \tag{3.65}$$

Utilizando o propagador no vácuo, temos

$$\varepsilon_v^{vac} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_v}{m_v} \right)^2 \left[tr \int \frac{d^4k^*}{(2\pi)^4} \gamma^0 i \left(\frac{k^* + \Omega^*}{k^{*2} - \Omega^{*2}} \right) \right]^2 . \tag{3.66}$$

Tomando o traço e resolvendo a integral, obtemos

$$\varepsilon_v^{vac} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_v}{m_v} \right)^2 \left[i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k^0}{k^{*2} - \Omega^{*2}} \right]^2 = 0 . \tag{3.67}$$

Calculando agora ε_v usando o propagador no meio:

$$\varepsilon_v^{meio} = -\frac{1}{2} \left(\frac{g_v}{m_v} \right)^2 \left[\text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^0 \left(i\pi \frac{k^* + \Omega^*}{E^*(k)} \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \right) \right]^2. \quad (3.68)$$

Tomando o traço e resolvendo a integral em k_0 , a expressão fica

$$\varepsilon_v^{meio} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_v}{m_v} \right)^2 \left[\frac{1}{4\pi^3} \int d^3 k \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \right]^2. \quad (3.69)$$

Resolvendo então a integral em coordenadas esféricas, obtemos para

ε_v^{meio}

$$\varepsilon_v^{meio} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_v}{m_v} \right)^2 \left(\frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2. \quad (3.70)$$

3.4.2 Renormalização da Densidade de Energia

Notemos que novas divergências resultam do cálculo utilizando o propagador no vácuo Eqs. (3.51), (3.55) e (3.63), e, para que os resultados finais sejam finitos, precisamos renormalizar estes termos.

A Eq. (3.59) é do tipo

$$\varepsilon_b = a\Omega^{*4} + b\Omega^{*3} + \text{termo finito} - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct}. \quad (3.71)$$

Desenvolvendo Ω^{*4} e Ω^{*3} [veja Eq. (3.42)], e substituindo na Eq. (3.56),

temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b = & \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \frac{m^4}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{2} - \gamma \right] + m^3 \Sigma_s - 3m^2 \Sigma_s^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{1}{2} - \gamma \right] \right. \\ & \left. - 4m \Sigma_s^3 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{4} - \gamma \right] + \Sigma_s^4 \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{2} - \gamma \right) \right] \right\} \\ & + \text{termos finito} - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Este resultado pode ser representado diagramaticamente da seguinte

maneira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b = & \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} + \text{Diagrama 4} + \text{Diagrama 5} \\ & + \text{ termo finito} - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} \end{aligned}$$

Figura 13: Diagramas de Feynman para a densidade de energia bariônica.

Neste ponto, dois detalhes importantes devem ser enfatizados: note que, aqui, retomamos a teoria original, fixando o valor de δ em 1. Note também que a densidade de energia deve ser nula no vácuo ($k_F = 0$), e, para satisfazer esta condição, eliminamos o primeiro termo do lado direito da equação através do termo de subtração do valor esperado do vácuo, pois não existe nenhum contra-termo na lagrangeana que

elimine um termo deste tipo. Assim

$$\varepsilon_b^{vev} = \frac{m^4}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) - \gamma \right] \right\}, \quad (3.73)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_b - \varepsilon_b^{vev} = & \left\{ +m^3 \Sigma_s - 3m^2 \Sigma_s^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{1}{2} - \gamma \right] \right. \\ & \left. - 4m \Sigma_s^3 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{4} - \gamma \right] + \Sigma_s^4 \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{2} - \gamma \right) \right] \right\} \\ & + \text{termos finito} + \varepsilon_b^{ct}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Para renormalizar os termos restantes, utilizamos os seguintes contra-

termos:

$$\varepsilon_b^{ct} = \frac{\alpha_2}{2} \phi^2 + \frac{\alpha_3}{3!} \phi^3 + \frac{\alpha_4}{4!} \phi^4, \quad (3.75)$$

que podem ser descritos diagramaticamente por

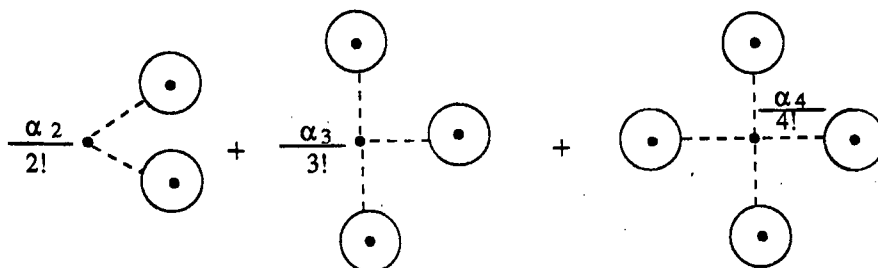


Figura 14: Diagramas dos contra-termos de ε_b^{ct} .

Para escrever α_n explicitamente, partimos da expressão dada pela Eq.

(2.40) e obtemos

$$\alpha_n = -g_s \frac{d\alpha_{(n-1)}}{dm}. \quad (3.76)$$

O valor esperado de ϕ pode ser escrito em termos do diagrama direto escalar - lembre que Σ_s deve ser nula para manter a estabilidade do vácuo. Assim:

$$\langle \phi \rangle \equiv -\frac{1}{g_s} \Sigma_s. \quad (3.77)$$

Na renormalização do 2º termo do lado direito da Eq. (3.76), utilizamos o contra-termo $\alpha_2 \phi^2$, dado por

$$\frac{\alpha_2}{2!}\phi^2 = \frac{3}{8\pi^2}m^2\Sigma_s^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right) + \frac{1}{3} + \gamma \right], \quad (3.78)$$

onde , para a derivação de α_2 , utilizamos a expressão para α_1 [veja Eqs. (3.21) e (3.23)]

Assim, somando a expressão encontrada para o contra-termo ao termo a ser renormalizado, obtemos

$$-\frac{3}{8\pi^2}m^2\Sigma_s^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) + \frac{1}{2} - \gamma \right] + \frac{\alpha_2}{2!}\phi^2 = \frac{3}{8\pi^2}m^2\Sigma_s^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) + \frac{1}{6} + \gamma \right]. \quad (3.79)$$

Para renormalizar o termo proporcional a Σ_s^3 da Eq. (3.76) utilizamos o segundo contra-termo da Eq. (3.77), descrito por

$$\frac{\alpha_3}{2!}\phi^3 = \frac{1}{4\pi^2}m\Sigma_s^3 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right) - \frac{2}{3} + \gamma \right], \quad (3.80)$$

e então

$$-\frac{1}{2\pi^2}m\Sigma_s^3 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) + \frac{3}{4} - \gamma \right] + 2\frac{\alpha_3}{3!}\phi^3 = -\frac{1}{2\pi^2}m\Sigma_s^3 \left[\frac{17}{12} - 2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right]. \quad (3.81)$$

Na renormalização do último termo da Eq. (3.76), utilizamos o terceiro contra-termo da Eq. (3.77), dado por

$$\frac{\alpha_4}{4!} \phi^4 = \frac{1}{16\pi^2} \Sigma_s^4 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{m^2} \right) - \frac{8}{3} + \gamma \right]. \quad (3.82)$$

Logo,

$$-\frac{3}{16\pi^2} \Sigma_s^4 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{5}{6} - \gamma \right] + 3 \frac{\alpha_4}{4!} \phi^4 = -\frac{3}{16\pi^2} \Sigma_s^4 \left[\frac{21}{6} - 2 \ln \left(\frac{\Omega^*}{m} \right) \right]. \quad (3.83)$$

Substituindo então as expressões renormalizadas acima na Eq. (3.76)

obtemos para a densidade de energia bariônica

$$\begin{aligned} \varepsilon_b = & \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{\Omega^*}{m} \right) (3\Omega^{*4} - 4m\Omega^{*3}) + m^3 (\Omega^* - m) - \frac{1}{2} m^2 (\Omega^* - m)^2 \right. \\ & \left. - \frac{17}{3} m (\Omega^* - m)^3 - \frac{21}{4} (\Omega^* - m)^4 \right\} + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_F} d^3k \frac{\mathbf{k}^2 + m\Omega^*}{E^*(k)}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Para o caso da densidade de energia escalar, temos

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2m_s^2} \left\{ -\frac{\Omega^{*3}}{4\pi^2} g_s \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] \right\}^2 + \text{termos finito} - \varepsilon_s^{vev} + \varepsilon_s^{ct}. \quad (3.85)$$

Substituindo a expressão para Ω^{*3} de (3.73),

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2m_s^2} \left\{ -\frac{1}{4\pi^2} g_s m^3 \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] - \frac{3}{4\pi^2} g_s m^2 \Sigma_s \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4\pi^2}g_s m \Sigma_s^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] - \frac{1}{4\pi^2}g_s \Sigma_s^3 \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] \Big\} \\
& -\epsilon_s^{vev} + \epsilon_s^{ct} .
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Os contra-termos necessários para renormalizar ϵ_s são análogos aos utilizados anteriormente, com uma das pernas externas (campo ϕ) amputada. Logo

$$\begin{aligned}
\epsilon_s^{ct} &= \frac{d}{d\phi}(\alpha_1 \phi) + \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha_2}{2!}\phi^2\right) + \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha_3}{3!}\phi^3\right) + \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha_4}{4!}\phi^4\right) \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 \phi + \frac{\alpha_3}{2!}\phi^2 + \frac{\alpha_4}{3!}\phi^3 .
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Subtraindo então os contra-termos das expressões divergentes de ϵ_s , obtemos

$$-\frac{1}{4\pi^2}g_s m^3 \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right) \right] - \alpha_1 = -\frac{1}{4\pi^2}g_s m^3 \left[-2 \ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right] , \tag{3.88}$$

$$-\frac{3}{4\pi^2}g_s m^2 \Sigma_s \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right) \right] - \alpha_2 \phi = -\frac{3}{4\pi^2}g_s m^2 \Sigma_s \left[\frac{2}{3} - 2 \ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right] , \tag{3.89}$$

$$-\frac{3}{4\pi^2}g_s m \Sigma_s^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right) \right] - \frac{\alpha_3}{2!}\phi^2 = -\frac{3}{4\pi^2}g_s m \Sigma_s^2 \left[\frac{5}{3} - 2 \ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right] , \tag{3.90}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}g_s\Sigma_s^3\left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right)\right] - \frac{\alpha_4}{3!}\phi^3 = -\frac{1}{4\pi^2}g_s\Sigma_s^3\left[\frac{11}{3} - 2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right)\right], \quad (3.91)$$

Assim, a densidade de energia escalar pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon_s = & \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{g_s}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{g_s}{m_s}\right)^2 \left[\Omega^{*3} \ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) - m^2(\Omega^* - m) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{5}{2}m(\Omega^* - m)^2 - \frac{11}{6}(\Omega^* - m)^3 \right] - \frac{1}{4\pi^3}\Omega^{*3}\left(\frac{g_s}{m_s}\right)^2 \int_0^{k_F} d^3k \frac{1}{E^*(k)} \right\}^2 \quad (3.92) \end{aligned}$$

Note que a estrutura das equações encontradas para a densidade de energia através de RHA, e as obtidas com a expansão δ , são diversas.

A seguir calcularemos a pressão para caracterizar a equação de estado.

3.5 Cálculo da Pressão

Como a densidade de energia a pressão é componente do tensor energia-momento dada por (3.33), tal que

$$P = P_b + P_s + P_v \quad (3.93)$$

onde,

$$\begin{aligned}
\langle T^{ii} \rangle_b &= -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \text{tr} \left[\gamma^i k^i - g^{ii} (\not{k} - m) \right] S(k) \right\} - VEV + CTC, \\
\langle T^{ii} \rangle_s &= \frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) \right]^2 g^{ii} - VEV + CTC, \\
\langle T^{ii} \rangle_v &= \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^i S(k) \right] \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^i S(k) \right] g^{ii} - VEV + CTC \quad (3.94)
\end{aligned}$$

A pressão bariônica tem a seguinte forma no meio

$$P_b^{meio} = -i \frac{1}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \text{tr} \left[\gamma^i k^i - g^{ii} (\not{k} - m) \right] S_D^*(k) \right\}, \quad (3.95)$$

tirando o traço e utilizando $S_D^*(k)$ definido em (3.41),

$$P_b^{meio} = -i \frac{4}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[3(k_0^2 - m\Omega^*) - 2\mathbf{k}^2 \right] \frac{i\pi}{E^*(k)} \delta(k^0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \right\}, \quad (3.96)$$

integrando em k^0 , obtemos

$$P_b^{meio} = + \frac{g_v^2}{m_v^2} \left(\frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 + 2 \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[E^*(k) - \frac{(\frac{2}{3}\mathbf{k}^2 + m\Omega^*)}{E^*(k)} \right]. \quad (3.97)$$

A pressão bariônica no vácuo é dada por

$$P_b^{vac} = -i \frac{1}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \text{tr} \left[\gamma^i k^i - g^{ii} (\not{k} - m) \right] S_F^*(k) \right\}, \quad (3.98)$$

usando $S_F^*(k)$ definido em (3.40), tirando o traço

$$P_b^{vac} = -i\frac{4}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [3(k_0^2 - m\Omega^*) - 2\mathbf{k}^2] \frac{1}{k^{*2} - \Omega^{*2}(k) + i\epsilon} \right\} \quad (3.99)$$

Fazendo uma rotação de Wick e passando para 2ω dimensões,

$$P_b^{vac} = -i4 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \left[\frac{k_0^2}{k^{*2} - \Omega^{*2}(k) + i\epsilon} - \frac{m\Omega^*}{k^{*2} - \Omega^{*2}(k) + i\epsilon} - \frac{2}{3} \frac{\mathbf{k}^2}{k^{*2} - \Omega^{*2}(k) + i\epsilon} \right] \quad (3.100)$$

À menos de constantes, as integrais acima foram calculadas e renormalizadas durante o cálculo da densidade de energia na seção precedente. O primeiro e terceiro termos são como a integral I_1 em (3.48), o segundo termos é como a integral I_2 em (3.52). Portanto a pressão bariônica no vácuo renormalizada e fixada, como I_1 e I_2 , em conjunto com (3.100), resultam na pressão bariônica total

$$P_b^{total} = 2 \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E^*(k) - 2 \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(\frac{2}{3}\mathbf{k}^2 + m\Omega^*)}{E^*(k)} + \frac{g_v^2}{m_v^2} \left(\frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 - \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{\Omega^*}{m} \right) (3\Omega^{*4} - 4m\Omega^{*3}) + m^3 (\Omega^* - m) - \frac{1}{2} m^2 (\Omega^* - m)^2 - \frac{17}{3} m (\Omega^* - m)^3 - \frac{21}{4} (\Omega^* - m)^4 \right\} \quad (3.101)$$

Com o auxílio de (B.18) verificamos que

$$P_v = \varepsilon_v , \quad (3.102)$$

e

$$P_s = -\varepsilon_s . \quad (3.103)$$

3.6 Análise Numérica

Nesta seção, aplicaremos o Princípio da Mínima Sensibilidade à densidade de energia e pressão calculadas na seção anterior anterior, gerando resultados cujo caráter é não perturbativo.

O caminho de renormalização escolhido foi o da camada de massa, sendo assim as constantes de acoplamento g_s e g_v , bem como massas m , m_s e m_v presentes na densidade lagrangeana original possuem seus valores físicos. Portanto, os parâmetros utilizados são os mesmos de RHA, dados na Ref. [5]: $g_s^2 = 62.89$, $g_v^2 = 79.78$, $m_s = 550$ MeV, $m_v = 783$ MeV e $m = 939$ MeV.

Para fixar o parâmetro μ introduzido na teoria pela expansão δ , utilizamos a condição dada pelo PMS (2.18)

$$\frac{d\varepsilon}{d\mu} = \frac{d\varepsilon}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\mu} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{d\Omega^*} = 0, \quad (3.104)$$

pois,

$$\frac{d\Omega^*}{d\mu} \neq 0 \quad (3.105)$$

A diferenciação da densidade de energia com relação a Ω^* leva à seguinte equação auto-consistente para a massa efetiva do nucleon:

$$\left[(m - \Omega^*) - 2 \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Omega^*}{E^*(k)} - \Delta_s \right] \left[2 \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{E^*(k)} - \frac{d\Delta_s}{d\Omega^*} \right] = 0, \quad (3.106)$$

onde

$$\Delta_s = \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{1}{2\pi^2} \left[\Omega^{*3} \ln \left(\frac{\Omega^*}{m} \right) - m^2 (\Omega^* - m) - \frac{5}{2} m (\Omega^* - m)^2 - \frac{11}{6} (\Omega^* - m)^3 \right]. \quad (3.107)$$

Para chegarmos a este resultado [veja Ref (14)], usamos a seguinte identidade:

$$\frac{d\Delta_b}{d\Omega^*} = (\Omega^* - m) \frac{m_s^2}{g_s^2} \frac{d\Delta_s}{d\Omega^*}. \quad (3.108)$$

A Eq. (3.109) apresenta duas soluções. O primeiro termo entre colchetes quando substituído nas equações da densidade de energia (3.87) e (3.95), escrevendo então a densidade de energia total, adquire a forma

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[\frac{k_F}{3\pi^2} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} (m^* - m)^2 + \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (k^2 + m^*)^{\frac{1}{2}} + \Delta\varepsilon_{VF}, \quad (3.109)$$

onde

$$\Delta\varepsilon_{VF} = \frac{1}{4\pi^2} \left[-m^{*4} \ln \left(\frac{m^*}{m} \right) + m^3 (m^* - m) + \frac{7}{2} m^2 (m^* - m)^2 + \frac{13}{3} m (m^* - m)^3 + \frac{25}{12} (m^* - m)^4 \right]. \quad (3.110)$$

Que é o mesmo resultado obtido com uso da RHA (2.74) para a densidade de energia no capítulo 2.

Utilizando os parâmetros apresentados anteriormente, encontramos uma energia de ligação para a matéria de nêutrons da ordem de 0.4 MeV, em torno de $k_F = 1.63 \text{ fm}^{-1}$.

A segunda solução para (3.109) é dada por

$$\frac{d\Delta_s}{d\Omega^*} = 2 \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{E^{*3}}(k). \quad (3.111)$$

Note que resultados desta equação são independentes dos parâmetros do modelo - a massa efetiva do nucleon Ω^* depende somente de m e k_F . A solução numérica da expressão acima dá como resultado uma massa efetiva *crescente* com relação à densidade nuclear. Além disso, se substituirmos este resultado na equação para a densidade de energia com os mesmos parâmetros utilizados em RHA, encontraremos um novo ponto de saturação para a matéria de nêutrons em torno de $k_F = 5 \text{ fm}^{-1}$.

Este resultado corresponde a uma densidade aproximadamente 30 vezes maior do que a densidade normal da matéria de nêutrons, com uma energia de ligação da ordem de 153 MeV por nucleon. Em primeira análise portanto são valores muito elevados, fora dos limites do modelo, mas temos que ter em conta que os termos de troca não foram considerados, e investigações preliminares feitas por Chin [veja Ref. (22)] mostram que a inclusão de termos de troca podem baixar a densidade de saturação da matéria. Contudo, nesse trabalho as contribuições dos termos de troca não foram calculadas de uma maneira completamente consistente.

Plotamos as duas soluções.

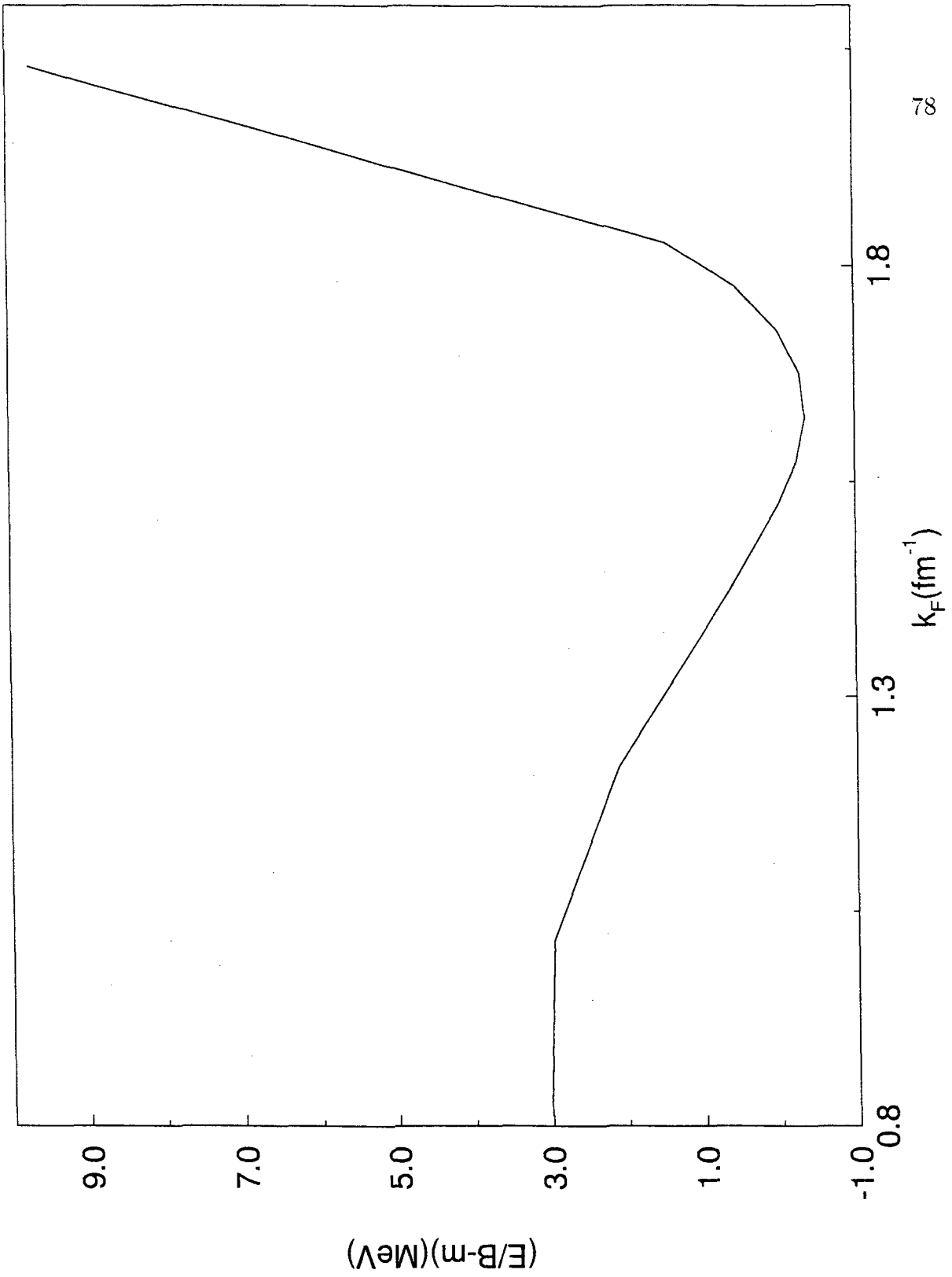


Figura 15: Curva de saturação para a primeira solução.

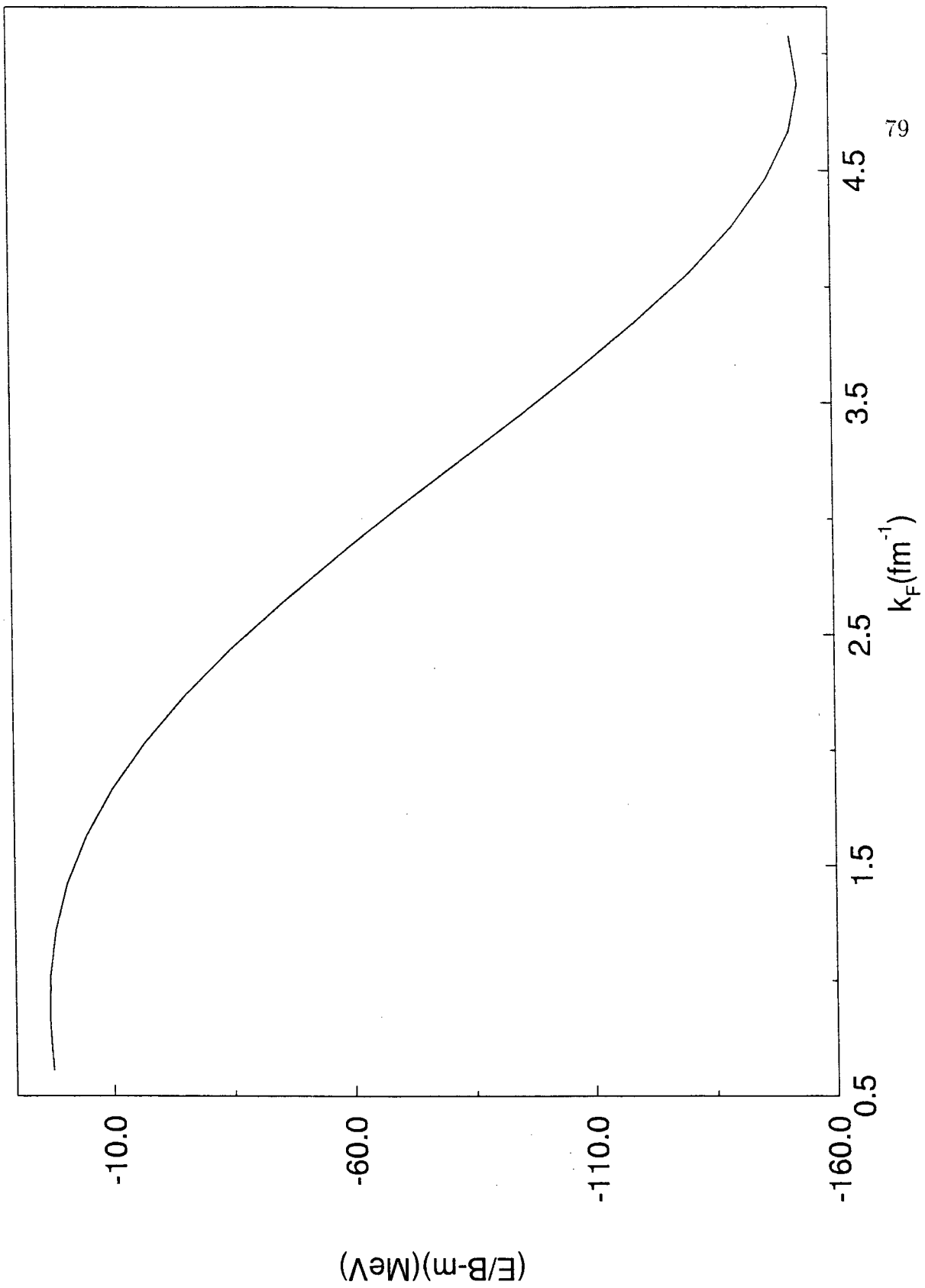


Figura 16: Curva de saturação para a segunda solução.

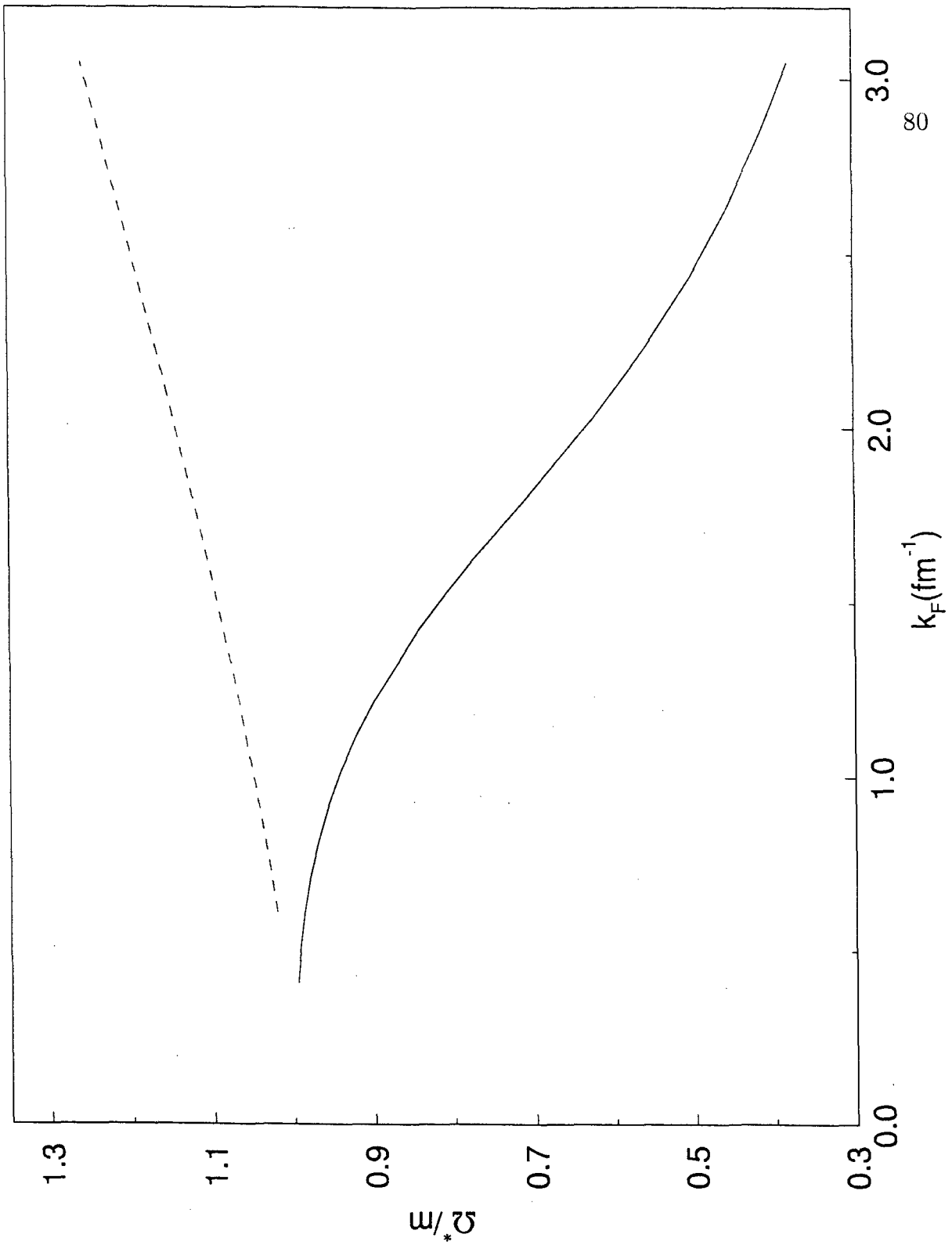


Figura 17: Curva de massa. A linha cheia representa o resultado obtido para a primeira solução, e a linha tracejada pra a segunda.

Podemos notar que os valores obtidos para a primeira solução reproduzem os mesmos valores encontrados com o uso da RHA [21], ou seja, encontramos um ponto de saturação para a matéria de nêutrons em torno de $k_F \sim 1.63 fm^{-1}$, com uma energia de ligação de aproximadamente $0.4 MeV$ por nucleon.

A primeira solução reproduz também a curva de massa obtida através de RHA na Fig. (15).

O resultado encontrado com a segunda solução para a massa efetiva do nêutron também apresenta um caráter diverso do obtido para a matéria em densidades normais. Para a primeira solução a massa efetiva tende rapidamente a 0, fornecendo-nos indicações de uma transição de fase, que deve acontecer, visto que uma simetria quebrada em densidade ou temperatura nula deve ser restaurada. O comportamento da segunda solução, por sua vez, é monotonicamente crescente e não dá indicações de uma transição de fase, o que também é indesejado, visto que à partir de um certo valor de densidade a matéria necessita de uma descrição em termos de quarks e glúons, através da QCD.

Embora tenhamos tomado a densidade de energia como a grandeza física de (2.18) a ser minimizada para fixação do parâmetro μ , a pressão é igualmente derivada do tensor energia-momento, portanto ambas possuem o mesmo status, sendo que ao usarmos a pressão como quantidade a ser minimizada obtemos,

$$\frac{dP}{d\mu} = \frac{dP}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\mu} \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega^*} = 0, \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} & \left[(m - \Omega^*) - 2 \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Omega^*}{E^*(k)} - \Delta_s \right] \left[2 \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{E^*(k)} - \frac{d\Delta_s}{d\Omega^*} \right] \\ &= -\frac{2}{3} \frac{k_F^3 \Omega^*}{\sqrt{k_F^2 + \Omega^*}}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

A Eq. (3.116) tem a mesma estrutura da Eq. (3.109) com um termo adicional. Verificaremos graficamente a relevância deste termo, comparando as inflexões de P e ε em função de Ω^* .

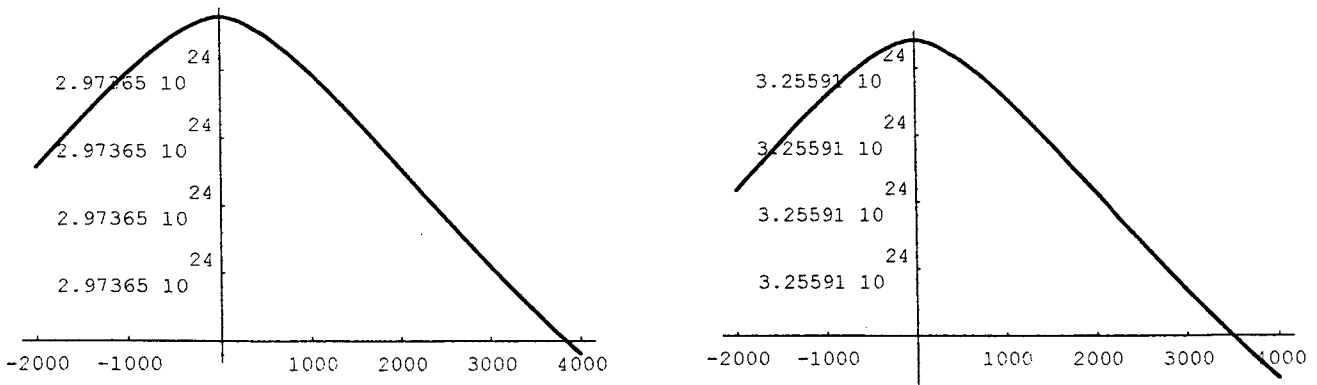


Figura 18: Densidade de energia e pressão, respectivamente, parametrizadas conforme o apêndice A para $k_F = 200 \text{ Mev}$.

Graficamente verificamos que a influência do termo adicional em (3.116)

é irrelevante, o PMS seleciona o mesmo valor do parâmetro μ para o qual as duas quantidades tem a menor dependência, isto indica a consistência do método.

Capítulo 4

Estrelas de Nêutrons

4.1 Histórico do Descobrimento das Estrelas de Nêutrons

A proposição e a posterior comprovação das estrelas de nêutrons é um capítulo curioso da história científica deste século.

Em julho de 1967, um grupo de astrônomos ingleses, liderados pelo físico inglês Anthony Hewsh e a estudante Jocelyn Bell, ao testar o novo radiotelescópio da Universidade de Cambridge, descobriu alguns sinais de rádio de uma regularidade extraordinária. Em virtude da grande precisão na periodicidade das emissões, os radioastrônomos pensaram, maravilhados, que talvez estivessem diante de sinais codificados emitidos por seres altamente inteligentes. Durante algumas semanas, esses sinais foram denominados, informalmente, de LGM - *Little Green Men*, os pequenos homens verdes. Prosseguindo em suas pesquisas, o grupo de Cambridge encontrou outras fontes

semelhantes que emitiam breves e regulares sinais de rádio mas cada um deles possuía periodicidade própria. Estes estudos, de início sigilosos, afastavam as possibilidades de sinais artificiais de uma civilização extraterrena. Realmente, estava-se diante de um novo objeto celeste. Um ano mais tarde, a descoberta se tornou pública.

O aparecimento dos pulsares, como ficaram conhecidos estes novos corpos celestes, estimulou as mais diversas hipóteses. Assim, em dois anos, haviam mais de 20 propostas. Delas, 75% propunham um modelo no qual se admitia a hipótese de uma estrela de nêutrons.

Os principais motivos para se acreditar que os pulsares fossem estrelas de nêutrons basearam-se na periodicidade exata com que cada pulsar irradiava a sua energia. Com efeito, tal regularidade só poderia ser produzida por três propriedades fundamentais da fonte emissora: as oscilações da fonte em conjunto; o seu possível movimento orbital, à semelhança do que ocorre nos sistemas binários; ou ainda o próprio movimento de rotação da fonte. A primeira possibilidade deve ser desconsiderada, pois o período de rotação de uma massa gravitante decresce à medida que a sua densidade aumenta. Por outro lado, as anãs brancas não parecem densas para oscilar por um período inferior a um segundo. Ora, os períodos de alguns pulsares são bastante curtos.

Para satisfazer a segunda hipótese, a de um sistema binário, é necessário que as componentes devam estar muito próximas entre si e o sistema deve ser constituído

de duas estrelas extremamente densas. No entanto, tal sistema perderia sua energia muito rapidamente, em forma de energia gravitacional, o que estaria em oposição às observações registradas na maior parte dos pulsares.

Para que a rotação de uma estrela comum ou mesmo de uma anã branca fornecesse o período típico de um pulsar, seria necessário que a velocidade equatorial na superfície destas estrelas, fosse superior à velocidade da luz. Como isso não é possível, tal possibilidade foi logo eliminada.

Diante desta situação, sobraram duas alternativas aos astrofísicos: a oscilação ou a rotação de uma estrela de nêutrons. Como entretanto, os períodos de oscilação seriam diversas vezes mais curtos que os períodos observados, em geral, nos pulsares, convencionou-se aceitar a hipótese da rotação de uma estrela de nêutrons, pois nenhum argumento ainda foi encontrado que eliminasse tal possibilidade.

Assim, vários modelos de pulsares, que recorriam a uma estrela de nêutrons em rotação foram elaborados pelos astrofísicos que deste modo obtiveram resultados em excelente concordância com dados observados nos pulsares.

Foi nos fins de 1967 que o físico e astrônomo norte-americano de origem austríaca, Thomas Gold, da Cornell University, e outros diversos teóricos, propuseram o modelo dos pulsares como sendo uma estrela de nêutrons em rotação muito rápida, envolta por nuvens de plasmas muito pouco densos provenientes dos gases remanescentes

da explosão de uma supernova.

A descoberta visual e fotográfica de um pulsar, em 1969, na Nebulosa do Caranguejo, restos de uma supernova que explodiu no ano de 1054, foi mais um ponto a favor da teoria de Gold. Constatou-se ainda, que as pulsações ópticas estavam sincronizadas com os impulsos emitidos em ondas de rádio, como estava previsto no modelo elaborado previamente. Hoje, tal hipótese é aceita quase universalmente, sobretudo depois das descobertas de emissões de raios X em alguns pulsares.

Embora os radioastrônomos já tenham descoberto mais de 150 pulsares, o único observado opticamente era o pulsar central da Nebulosa do Caranguejo. Como este pulsar parece ser o mais jovem conhecido e, também, o mais rápido, tendo em vista o seu período de 33 *ms*, imaginou-se que só os pulsares jovens e de curto período emitissem impulsos ópticos.

Desde então, começou-se uma pesquisa sistemática para detectar emissões luminosas nest^e tipo de pulsares. As observações se concentraram inicialmente no melhor candidato: o pulsar Vela, assim denominado por estar situado na constelação austral de Vela, que, além de estar relativamente próximo, possui uma idade de cerca de 10^4 anos e um período de 80 *ms*. Todos os resultados foram negativos, até que recentemente uma equipe de astrônomos ópticos ingleses e australianos conseguiu, com auxílio do novo telescópio anglo-australiano de quatro metros situado em Siding Spring (400 km a

noroeste de Sidney), detectar impulsos ópticos de mesmo período que os impulsos de rádio observados simultaneamente com os radioteléscópios de Fleurs et Mill Cross. Tal simultaneidade de observação era indispensável, tendo em vista que o período do pulsar Vela não é estável e comporta variações de longo período e sobressaltos aleatórios. O pulsar de Vela assim como o da Nebulosa do Caranguejo emitem no domínio dos raios gama, mas, na região dos raios X, nenhum impulso foi registrado no pulsar recentemente descoberto, enquanto o pulsar do Caranguejo emite impulsos X muito nítidos. Tal comportamento parece atualmente inexplicável.

Este segundo pulsar óptico possui uma magnitude de 25.2, de modo que podemos considerá-lo o objeto mais fraco jamais observado. Tal resultado deixa pouca esperança no registro futuro de novos pulsares ópticos.

Convém lembrar que, em 1934, o célebre astrônomo norte-americano de origem suíça, Fritz Zwicky, pioneiro no estudo das supernovas, havia escrito ao seu colega norte-americano de origem alemã, Walter Baade, sugerindo que as supernovas parecem representar a transição que deve existir entre as estrelas comuns e as estrelas de nêutrons. Cinco anos mais tarde, em 1939, o físico J. Robert Oppenheimer, conjuntamente com seu discípulo George M. Volkoff, concluíram que as estrelas de nêutrons deveriam realmente existir. Elas seriam consequência da própria evolução estelar quando o interior de uma estrela muito velha e maciça entra em colapso gravitacional, ou seja, quando as

forças de gravitação superam as outras forças fazendo com que uma massa solar fique compactada numa esfera de algumas dezenas de quilômetros de diâmetro, em um estado extremamente denso.

Quando uma estrela atinge o fim da sua vida, ela pode transformar-se numa anã branca, numa estrela de nêutrons ou num buraco negro. Estas três soluções vão depender da massa final que a estrela atingiu no último estágio da sua evolução. As estrelas com massa da ordem de $1.5 M_{\odot}$ se transformariam em anãs brancas; as estrelas com cerca de 2 ou $2.5 M_{\odot}$ dariam origem às estrelas de nêutrons, e as estrelas com mais de $3 M_{\odot}$ deveriam se transformar nos célebres buracos negros. Descobertas, teoricamente, há quase 50 anos, foi a radioastronomia moderna que veio a confirmar a existência da estrelas de nêutrons.

4.2 As Estrelas de Nêutrons no Processo de Evolução Estelar

Como objeto de nosso estudo, em uma descrição sucinta, as estrelas de nêutrons se encaixam no processo da evolução estelar da seguinte maneira.

A formação de estrelas parece ser um fenômeno geral, ocorrendo em nossa galáxia e em braços espirais de galáxias de mesmo tipo, do ponto de vista morfológico, a nossa galáxia tem uma massa de $1.8 \times 10^{11} M_{\odot}$ distribuída, de maneira se-

melhante a outras galáxias espirais, em um disco achatado em rotação. com uma massa central de $0.07 \times 10^{11} M_{\odot}$ e uma distribuição esferoidal de $0.82 \times 10^{11} M_{\odot}$ interiormente à órbita do sol e $0.93 \times 10^{11} M_{\odot}$ além da órbita do sol.

Aproximadamente 90% desta massa está contida em estrelas. A matéria difusa existente entre as estrelas é chamada meio interestelar (m.i.). Sua composição química é, a grosso modo, a de estrelas jovens em formação: átomos de H, moléculas H_2 (em nuvens frias), He, íons de C, N, O, grãos, e moléculas compostas primariamente de H, C, N, O. Existem nuvens de hidrogênio neutro, de hidrogênio ionizado e outras contêm grande número de moléculas (nuvens moleculares).

Relacionadas à formação de estrelas estão as nuvens moleculares, ou seja, os complexos densos onde ocorre a formação de estrelas apresentam hidrogênio sob forma de H_2 . Observações indicam que as estrelas massivas formam-se preferencialmente nos bordos das nuvens moleculares, e estrelas de massa pequena formam-se ao longo de toda a nuvem.

Essa formação dá-se quando parte dessa nuvem entra em colapso, formando uma condensação central que libera a energia gravitacional em forma de radiação. Para que esse processo de colapso se inicie é necessário que a energia cinética seja menor que a energia potencial de ligação entre as partículas, e é claro isso se dá em determinadas condições de temperatura e densidade.

Na medida em que mais H é adicionado ao novo corpo, este se torna opaco, compensando a rápida perda de energia por irradiação. Tal contração provoca uma alta na temperatura dos gases. Sua densidade vai aumentando até que o equilíbrio seja atingido.

Deste momento em diante, a adição de novos átomos de H na região de contração é interrompida. Este núcleo inicial, que se denomina de proto-estrela, vai continuar a se contrair, durante alguns bilhões de anos, até o seu próximo estágio quando, então, a temperatura no seu centro deve alcançar alguns milhões de graus centígrados. Ao atingir essa temperatura têm início as reações termonucleares, nas quais o H é transformado em He com uma liberação de energia na forma de radiação. Tal reação, que só ocorre no interior da estrela já formada, consiste na fusão de dois prótons ou dois núcleos de H para formar um isótopo pesado de H, que por sua vez se junta a outro próton para constituir um núcleo de He e um fóton. Os fótons são irradiados e a quantidade de energia então produzida sob forma luminosa obedece a relação energia massa de Einstein.

A partir desse instante na vida da estrela, diz-se que ela começou a queimar H. A quantidade de energia produzida vai depender da porção inicial de átomos de hidrogênio existente no instante em que a estrela foi formada. No início do século XX, o astrônomo dinamarquês Ejnar Hertzsprung e o norte-americano Henry Norris Russel elaboraram uma representação da distribuição das estrelas segundo seus tipos espectrais

e sua magnitude absoluta. Neste gráfico, que ficou conhecido como diagrama Hertzsprung-Russel [veja Fig. (17)], a maior parte das estrelas agrupa-se numa sequência principal, o que permite distinguir as estrelas anãs e gigantes das demais.

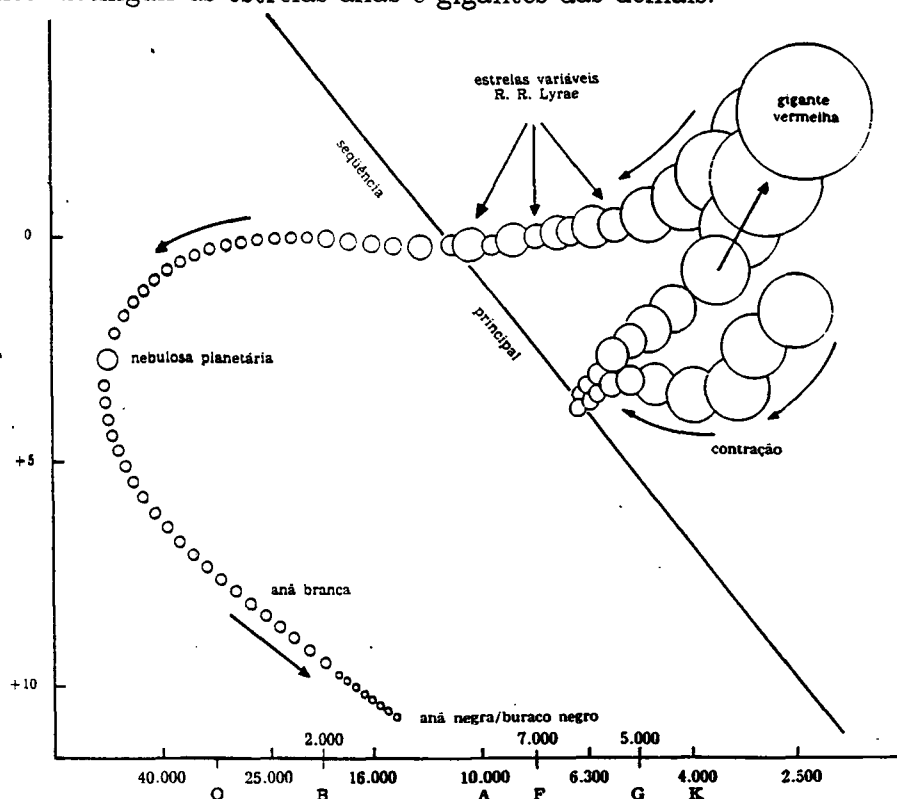


Figura 17: Diagrama HR.

A grande vantagem dessa representação foi a de que as estrelas reúnem-se, neste diagrama, em zonas de certas propriedades características, ligadas à estrutura interna das estrelas e principalmente, à sua idade, o que permitiu o desenvolvimento das modernas teorias sobre evolução estelar.

Todas as estrelas da sequência principal convertem H em He. Há,

entretanto, um momento no qual as estrelas já converteram todo o H disponível. Tal fase evolutiva ocorre primeiro nas estrelas do tipo O e B em seguida nas estrelas do tipo G, e muito mais tarde, nas do tipo M. Em virtude dos enormes gastos de H nas gigantes azuis, esses tipos de estrelas não permanecem durante muito tempo na sequência principal; o que significa, em termos de vida estelar, o equivalente a alguns milhões de anos. Já as anãs vermelhas, menos maciças, convertem o seu H com mais parcimônia, permanecendo mais de 15×10^9 anos na sequência principal.

Ao tempo de permanência na sequência principal, alguns astrônomos denominam impropriamente de tempo de vida das estrelas.

Quando o He alcança cerca de 12% da massa total da estrela as suas camadas se contraem, provocando aumento de densidade, pressão e temperatura. A luminosidade da estrela também aumenta, de modo que uma maior área de superfície se torna necessária para irradiar energia no espaço. Atinge-se, então, uma fase de rápida expansão com desenvolvimento para um estágio de gigante vermelha.

Nas gigantes vermelhas inicia-se a síntese dos elementos pesados. Uma vez que a temperatura tenha alcançado a ordem dos $10^8 K$, que é suficiente para converter o núcleo de He em C, a estrela passa a queimar C, He e H em estágios sucessivos, nos quais C é sintetizado em O, Ne e Mg, com cada elemento criando a sua própria esfera concêntrica de diferentes temperaturas. A estrela finalmente produz um núcleo de ferro.

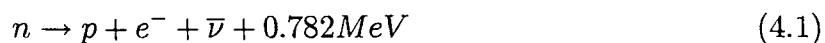
Esse é o elemento mais pesado que permanece estável numa temperatura de alguns milhões de graus. Durante este período de nucleossíntese, a estrela se desloca no diagrama de Hertzsprung-Russell horizontalmente, da esquerda para a direita, onde se localizam os diversos estágios de gigante vermelha.

O envelhecimento de uma estrela está ligado intimamente ao esgotamento do seu combustível nuclear. Não havendo mais energia para contrabalançar as forças gravitacionais, tem início o processo de contração das estrelas, isso se dá após os sucessivos estágios de gigante vermelha. Tal retraimento fornece a energia que alimenta o último período da sua vida, antes do seu escurecimento. O fim da existência de uma estrela está na dependência de sua maior ou menor massa.

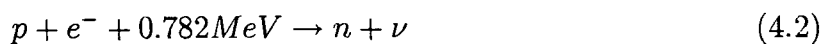
Se a massa da estrela é inferior a $1.5 M_{\odot}$, ela se tornará uma anã branca, estrela muito densa de dimensões comparáveis às da terra. O que acontece é que o próximo ponto de ignição nuclear seria a $6 \times 10^8 K$ e a estrela não alcançará esta temperatura. A estrela não consegue mais queimar H, simplesmente estagna, perdendo calor, esfriando cada vez mais. Dado que esta não mais se contrai e sua densidade sendo aproximadamente constante, anãs brancas de uma dada massa terão um raio constante, que não varia com o tempo. A luminosidade da estrela é baixa, e ela pode irradiar durante um longo tempo. Vai-se tornando mais e mais fria e menos brilhante. Este resfriamento pode durar muito mesmo, e em muitos casos mais do que a idade do Universo.

Nesse caso, a matéria está no estado degenerado, pois ela se reduz a um gás de núcleos e elétrons. Sabemos que a pressão de um gás degenerado não relativístico é $P \propto \rho^{5/3}$, enquanto que se os férmions tornam-se relativístico $P \propto \rho^{4/3}$ [veja Ref. (1)], onde ρ é a densidade. O fato da dependência mudar com a densidade ρ , impõem um limite superior à massa de qualquer objeto que possa ser suportado por essa pressão. Esta massa limite é chamada massa de Chandrasekhar.

Vejamos agora o que acontece com uma estrela com um núcleo de ferro maior do que $1.44 M_{\odot}$. À medida em que o núcleo colapsa, tentando achar um novo ponto de equilíbrio, este ponto de equilíbrio não é encontrado, e a densidade cresce mais e mais. Os elétrons tornam-se mais e mais energéticos. Eventualmente um tipo interessante de reação nuclear ocorre:



Em física de partículas, podemos fazer o seguinte;



Obviamente, a reação acima chamada de captura de elétron, tem pouca chance de ocorrer, a não ser que o próton e o elétron se choquem com grande energia. O problema aqui não é a barreira elétrica, ao contrário, p e e^{-} se atraem, mas

esta reação requer muita energia. 0.782MeV para ocorrer, isto porque a massa do nêutron é maior que a do $(p + e^-)$. A energia requerida é $E = (\Delta m)c^2$ onde Δm é a diferença de massa entre $(p + e^-)$ e n .

De qualquer maneira, uma vez que a densidade da estrela em colapso atinge $10^{11}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, os elétrons relativísticos têm energia suficiente para capturar prótons e formar nêutrons. Não importa muito se os prótons estão livres ou em núcleos pesados como ^{12}C , ^{16}O , ^{56}Fe , etc.

Esta é a explicação sobre o seguinte aspecto da composição das estrelas de nêutrons: vimos que o nêutron é uma partícula instável, o tempo de meia vida é $\tau_{1/2} = 10\text{ min}$ e decai através de (4.1). Se o nêutron decai em aproximadamente 10 min , como pode ser estável a estrela de nêutrons? A resposta é que a estrela de nêutrons não é constituída só de nêutrons, há ainda um número suficiente de elétrons livres, tal que a equação (4.1) é balanceada por (4.2).

O processo da Eq. (4.2) ocorre até a seguinte situação praticamente não haver mais elétrons no gás. Isto faz decrescer a temperatura, e a estrela colapsa ainda mais rápido. Qualquer que seja a constituição da estrela, tudo se transforma em nêutrons.

Assim temos as estrelas de nêutrons.

Por serem férmions os nêutrons vão gerar o mesmo tipo de pressão que foi comentada anteriormente para as anãs brancas, a pressão de degenerescência. Os

nêutrons então formados, não serão relativísticos inicialmente (porque a massa em repouso do nêutron é 1837 vezes maior do que a do elétron).

Assim como existia uma pressão de degenerescência não relativística para anãs brancas com $m < m_{\text{Chandrasekhar}}$, há aqui também uma configuração estável de nêutrons suportada por nêutrons degenerados, e haverá aqui também um limite superior para a massa, à partir do qual os nêutrons tornam-se relativísticos e o material colapsa totalmente.

Quanto a saber qual seria a massa crítica para estrelas de nêutrons os diferentes autores divergem; em geral obtém-se valores entre 1 e $2 M_{\odot}$, a depender do modelo que se considera para a força nuclear. Além disto o uso de lagrangeanas efetivas tratadas com aproximações não perturbativas, como o que estamos fazendo neste trabalho, é uma das maneiras de se estimar esse valor.

Seria interessante saber se o limite aqui é maior ou menor do que o $1.44 M_{\odot}$ que é a região limítrofe entre as estrelas de nêutrons e anãs brancas ou se superior a $2 M_{\odot}$, quando então a estrela colapsa completamente até virar um buraco negro. Se, ao contrário, parece inevitável ter-se estrelas de nêutrons.

Se a massa da estrela é superior a $2 M_{\odot}$ não existe mais estado da matéria capaz de interromper a contração. Ela continuará até que a energia não possa mais sair do seu interior. Temos então os colapsares ou buracos negros.

Para continuar sua evolução, as estrelas devem perder a sua massa excessiva. Tal perda se dá pela transformação numa nebulosa planetária, quando suas camadas exteriores são lançadas no espaço. Algumas têm processos mais violentos, como no caso das novas e supernovas. Os elementos pesados, como o ferro, então criados, são lançados no espaço pela explosão. Mais tarde esses elementos pesados se misturam com o hidrogênio primitivo para formar uma segunda geração de estrelas análogas ao Sol. Os elementos só podem ser produzidos no interior das estrelas, se estabelecendo assim um processo cíclico, ou seja a própria destruição da matéria existente vai dar origem aos gases de uma nova nuvem molecular, agora enriquecida de átomos pesados, que se transformarão em sistemas planetários.

4.3 Equação de Estado

Para a densidade de energia total e pressão total, para a matéria de nêutrons, calculadas no capítulo anterior, geradas pelo tensor energia-momento com a utilização da expansão δ , tendo como parâmetros o conjunto citado na seção (3.6) reproduzimos o resultado da Ref. [5]. Além desse resultado, já conhecido, o método não perturbativo que utilizamos produz uma segunda equação de estado referente a segunda solução. Plotamos as duas soluções no intervalo mais interessante.

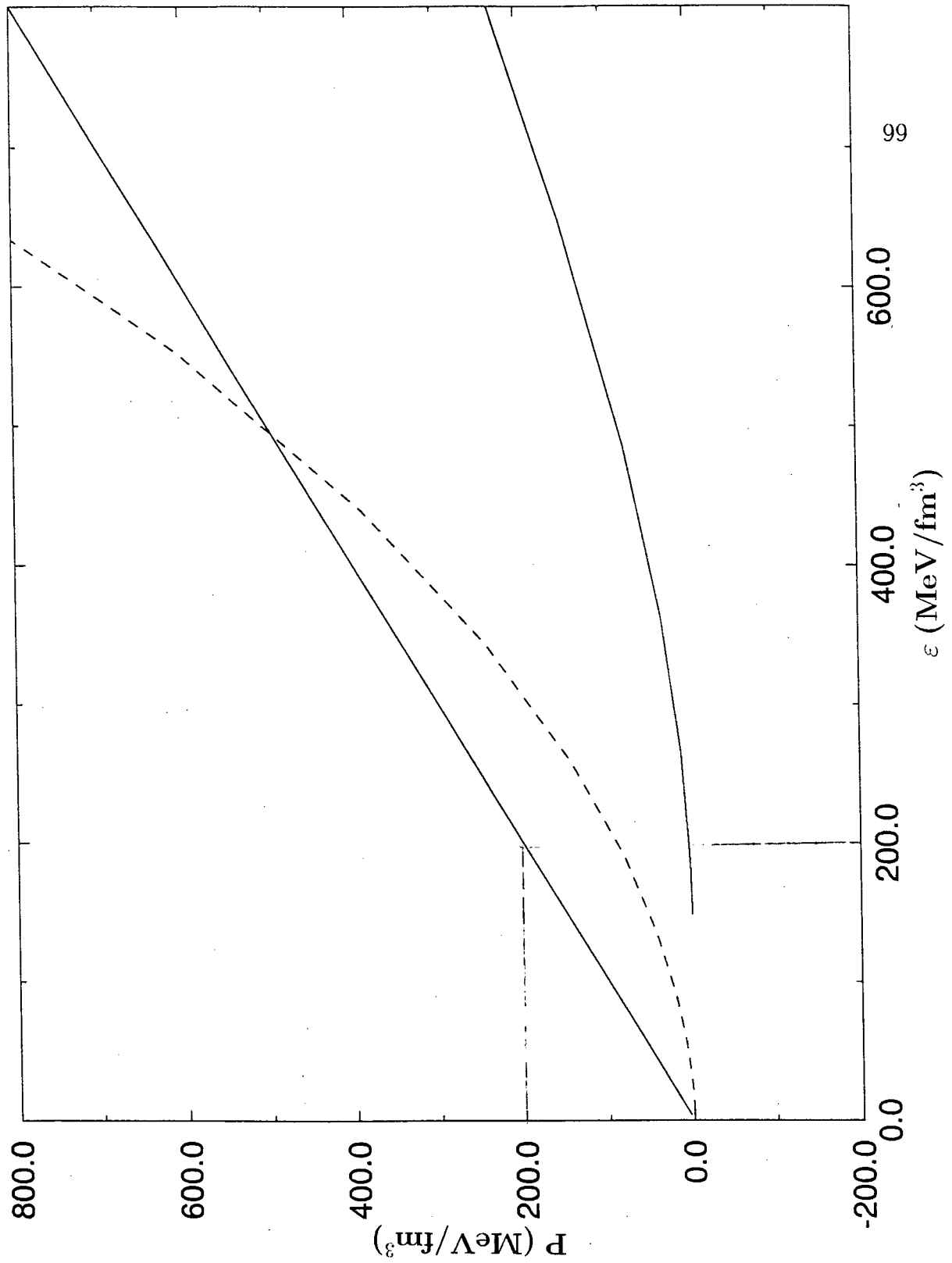


Figura 20: A primeira solução (linha cheia) e a segunda solução (linha tracejada) no limite ($P = \epsilon$)

O comportamento da equação de estado referente a matéria neste estado de alta densidade é monotonicamente crescente extrapolando o limite de máxima densidade ($P = \varepsilon$) permitido. Esse limite representa a mais dura equação de estado possível e deve ser respeitado por todas as teorias relativísticas, em contraste com as teorias da matéria descrita pela aproximação de Schroedinger.

O gráfico mostra em detalhe o comportamento da matéria densa nesse limite de rigidez se comparada ao comportamento do resultado já conhecido da aproximação de RHA reproduzido com a expansão δ . Em altas densidades de energia, a interação forte faz a equação de estado endurecer. Para a matéria de nêutrons pura com interações, como no caso que estamos tratando ($P \simeq \varepsilon$), e para matéria não interagente ($P \simeq \frac{1}{3}\varepsilon$). A presença de prótons e elétrons amolecem a equação de estado.

A dureza da equação de estado indica a resistência do modelo usado para descrever a estrela, ao colapso gravitacional e na consequente massa máxima suportada pela equação. A massa máxima é um conceito que será tratado na seção seguinte.

Podemos notar ainda que, à despeito da segunda solução extrapolar o limite de dureza permissível, sua equação de estado não dá indicações de uma transição de fase, reflexo do comportamento avaliado na Fig. (15), enquanto que a primeira solução que reproduz os resultados de RHA tem seu equilíbrio determinado pela construção de

Maxwell durante a transição de fase, embora essa construção não se evidencie na escala utilizada.

4.4 Estrutura da Estrela de Nêutrons

Dada uma equação de estado, como a discutida na seção anterior, para uma estrela estática, fria e esfericamente simétrica, as equações de Einstein adquirem uma forma especial conhecida como equação de Oppenheimer-Volkoff-Tolman (OVT) [veja Ref. (22)].

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\varepsilon}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\varepsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M}\right) \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (4.3)$$

onde,

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \varepsilon(r') dr'. \quad (4.4)$$

Aqui M é a massa contida em uma esfera de raio r , e P e ε são funções de r . A princípio para resolver a equação de OVT precisamos conhecer a equação de estado $P = P(\varepsilon)$.

A densidade central de energia, é um parâmetro adequado para caracterizar a família de estrelas, gerada pela solução de OVT, à partir de uma particular

equação de estado, sendo que para esta equação, a solução encontrada determina o caminho que a matéria toma para se organizar.

Tomando a solução que reproduz, o resultado de RHA, obtemos a massa da estrela de nêutrons em função da densidade central. Detalhes da integração da equação de OVT estão no apêndice A.

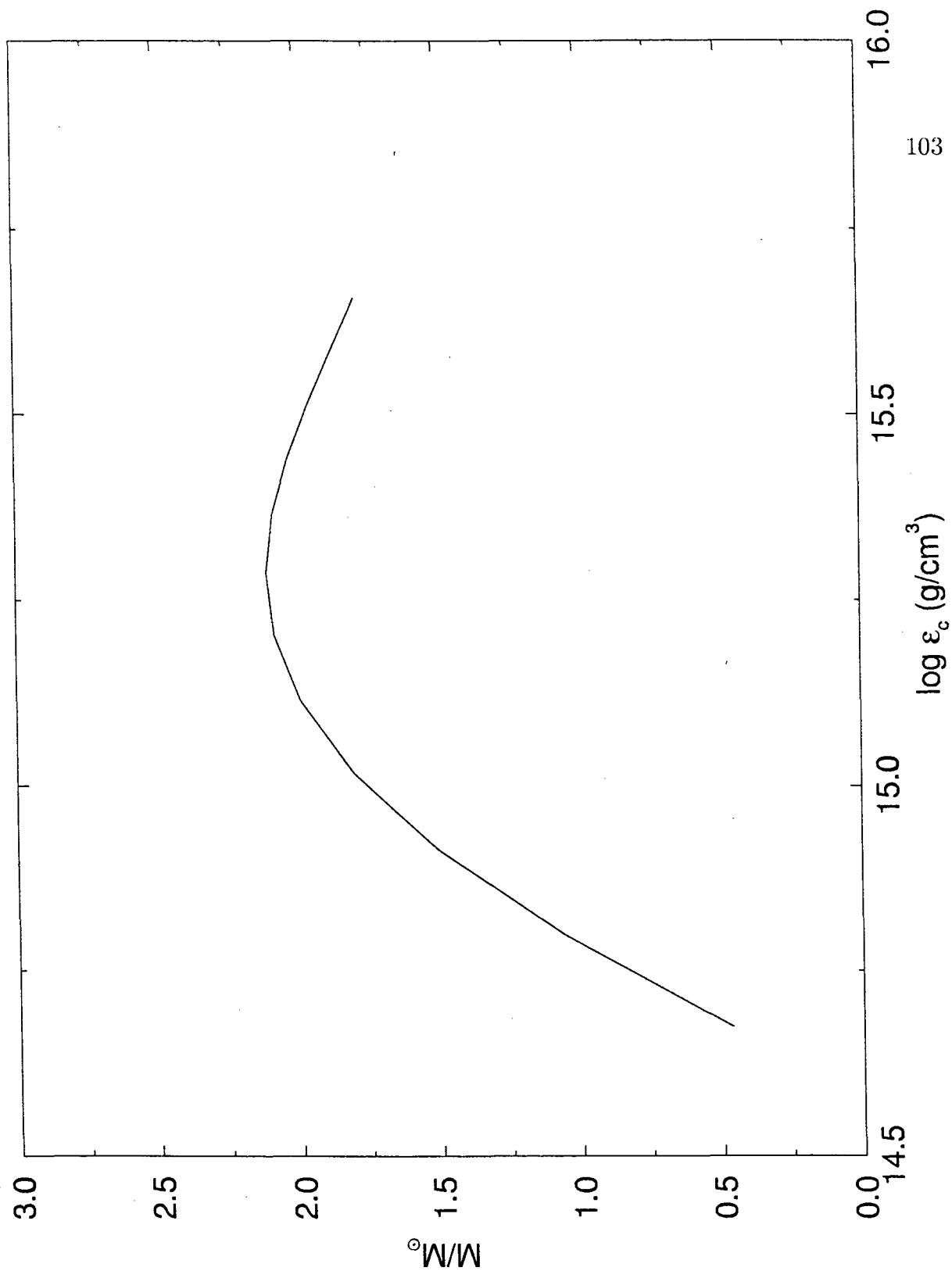


Figura 21: Massa da estrela de nêutrons em função da densidade central com o modelo de Walecka tratado com a expansão δ .

Uma característica geral para cada família de estrelas, é que, para estruturas estáveis, a massa é uma função monotonicamente crescente da densidade central, até que uma massa máxima é atingida, à partir da qual $\frac{\partial M}{\partial \epsilon(0)} < 0$ que caracteriza uma região de instabilidade na qual a matéria colapsa para um buraco negro.

A massa máxima, conhecida como massa limite ou massa de Chandrasekhar, é um limite interessante porque deve exceder a mais massiva estrela observada. Até aqui, existem poucas medidas de massa, porque estas só podem ser feitas em sistemas binários, e com precisão somente sobre circunstâncias especiais. A medida mais massiva é para $4U0900 - 40$, com $M = 1.85^{+0.35}_{-0.30} M_{\odot}$, e a medida mais precisa é para $PSR1913 + 16$, com $M = 1.451 \pm 0.007 M_{\odot}$, [veja Ref. (23)].

Cálculos comparativos já foram feitos, no sentido de estimar a importância do vácuo nas massas de estrelas de nêutrons usando RHA Ref. [25], o efeito do vácuo é considerado como sendo negligenciável, não porque a energia de polarização do vácuo seja negligenciável, mas porque as constantes de acoplamento em ambos os casos são ajustadas de maneira a reproduzir as mesmas cinco propriedades de saturação da matéria nuclear, já conhecidas. Consequentemente todas as investigações anteriores da estrutura das estrelas de nêutrons, e em particular desses limites que encontramos quando impomos uma equação de estado para a massa limite da estrela, permanece inalterado.

Note que a segunda solução não produz uma equação de estado física, pelo menos até na aproximação que considera só termos diretos, e não foi plotada. Embora esta solução esteja fora do limite físico, ela é a primeira indicação que se tem da inclusão de efeitos do vácuo poderem produzir uma alteração significativa na equação de estado, e ao que tudo indica esta alteração é no sentido de uma equação de estado extremamente rígida e portanto um conseqüente aumento da massa limite.

Conclusões e Perspectivas

Comparativamente a expansão δ demonstrou vantagens indiscutíveis em relação ao procedimento adotado por outros métodos não perturbativos, em especial o propagador interagente utilizado pelo método de RHA, que trabalha só com os diagramas diretos. O método de RHA leva em conta um subgrupo infinito do conjunto infinito de diagramas com duas pernas externas do tipo direto, somando todas as contribuições destes diagramas de uma maneira astuciosa, e renormalizando os quatro diagramas divergentes desse conjunto. Já o propagador bariônico interagente utilizado pela expansão δ , em ordem mais baixa, quando só termos diretos são considerados, leva em conta apenas um diagrama.

Mesmo assim os resultados de RHA foram rapidamente reproduzidos através da aplicação do PMS à densidade de energia do modelo de Walecka, a qual foi obtida sem a utilização das equações de movimento do nucleon. Isto evidencia as vantagens do método com relação ao problema da renormalização não perturbativa pertinente aos métodos de RHA e HF. Por tratar com um número reduzido de diagramas, dado seu caráter perturbativo, e ainda reproduzir resultados não perturbativos, o método descrito

neste trabalho é bastante precursor para investigações que envolvam contribuições mais complexas (troca, correções aos vértices, etc...).

Além disto, o método não envolve procedimentos auto-consistentes, reproduzimos os resultados de RHA usando unicamente o PMS. A expansão δ , portanto, é um método que oferece menor esforço computacional, por que não inclui procedimentos auto-consistentes.

Duas equações de estado foram geradas pela aproximação, a primeira reproduzindo RHA, e uma segunda solução prevendo um estado com densidade 30 vezes superior. É importante enfatizar que a segunda solução, que dá origem ao estado altamente denso, só aparece ao levarmos em conta as contribuições do vácuo [veja Ref. (16)].

A primeira equação de estado consta na literatura através da aproximação de RHA [veja [veja Ref. (7)], a segunda equação de estado tem um comportamento não físico extrapolando a rigidez permissível para teorias relativísticas, esta solução descreve a matéria com 30 vezes a densidade normal, uma região em que o modelo efetivo perde sua validade e os graus de liberdade relevantes são quarks e glúons, e a motivação para a nosso trabalho sobre esta solução se deve ao fato de Chin [veja Ref. (22)] mostra em uma análise preliminar, que a inclusão de termos de troca devem baixar a densidade em que a saturação é alcançada.

Integramos a equação de OVT sugerindo uma maneira alternativa para isso levando em conta somente a primeira solução.

Dando continuidade a esse trabalho de investigação da segunda solução que a aproximação resulta, o próximo passo seria a inclusão dos termos de troca, na densidade de energia e pressão onde o cálculo e renormalização desse diagrama tem se apresentado como tarefa complicada, mas ainda sim factível, se comparado ao método de Hartree-Fock, que leva em conta os termos direto e de troca somente no meio, e para o qual a inclusão do vácuo é extremamente difícil.

A expectativa na continuidade do estudo da segunda solução é que a inclusão destes termos baixe o ponto de saturação para cerca de 10 vezes a densidade normal, sendo que neste caso, esta segunda solução com termos de troca, teria um comportamento previsto como intermediário entre a descrição por RHA e a segunda solução calculada somente com termos diretos. Este comportamento produziria uma equação de estado capaz de elevar o limite de Chandrasekhar, já nesta modelagem à princípio simples, e apareceria como candidata a explicação de conhecidos objetos estelares estáveis, compostos por nêutrons, com densidades muito superiores as encontradas ordinariamente em estrelas de nêutrons.

Apêndice A

Integração das Equações de OVT

O seguinte sistema de equações determina a estrutura de uma estrela esférica, estática à temperatura nula.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\frac{GM\varepsilon}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\varepsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M}\right) \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \\ \frac{dM}{dr} &= 4\pi r^2 \varepsilon, \\ P &= P(\varepsilon).\end{aligned}\tag{A.1}$$

A integração é feita do centro da estrela em $r = 0$ com uma dada densidade central $\varepsilon(0)$ como *input*, até que a pressão $P(r)$ desapareça na superfície. A dificuldade na integração se deve ao fato de não termos uma forma explícita para a equação de estado ($P = P(\varepsilon)$) é necessário uma forma contínua de variação desta equação para a integração de (A.1) pois numericamente as flutuações que ocorrem ao tentarmos introduzir pares (P, ε) são de difícil controle, portanto, em primeira análise, o sistema

acima é inconsistente.

Uma maneira de contornar este problema é fazer uma regressão no conjunto de pontos (P, ε) , mas vamos procurar resolver o sistema sem esta aproximação.

Para resolver tal problema nos utilizaremos do seguinte método inspirado na Ref. [24], dada as equações (pressão) (energia) que são do tipo,

$$\begin{aligned} P &= P(k_F, \Omega^*(k_F, m)) , \\ \varepsilon &= \varepsilon(k_F, \Omega^*(k_F, m)) , \\ M &= M(\varepsilon(k_F, \Omega^*(k_F, m))) . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Lembrando que o PMS já foi aplicado e selecionou duas soluções para $\Omega^*(k_F, m)$ e estamos somente interessados na solução que reproduz os resultados de RHA. Vamos reescrever o sistema da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} P &= P(x, \Omega^*(x)) , \\ \varepsilon &= \varepsilon(x, \Omega^*(x)) , \\ M &= M(\varepsilon(x, \Omega^*(x))) , \end{aligned} \tag{A.3}$$

onde $x = \frac{k_F}{m}$ é o fator que parametrizará nossas equações, explicitamente temos,

$$P(x) = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \frac{m^6}{9\pi^4} x^6 - \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} (m - \Omega^*)^2 + \frac{1}{3\pi^2} m^4 \int_0^x dy \frac{y^4}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{\Omega^*}{m}\right)^2}} - \Delta\varepsilon, \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \frac{m^6}{9\pi^4} x^6 + \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} (m - \Omega^*)^2 + \frac{1}{\pi^2} m^4 \int_0^x dy \left(y^2 \sqrt{y^2 + \left(\frac{\Omega^*}{m}\right)^2} \right) + \Delta\varepsilon \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\Delta\varepsilon = -\frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \Omega^{*4} \ln \left(\frac{\Omega^*}{m} \right) + m^3 (m - \Omega^*) - \frac{7}{4} m^2 (m - \Omega^*)^2 + \frac{13}{6} m (m - \Omega^*)^3 - \frac{25}{24} (m - \Omega^*)^4 \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Sendo que a função Ω^* é determinada por:

$$\Omega^* = m - \frac{g_s^2}{m_s^2} m^2 \frac{\Omega^*}{\pi^2} \int_0^x dy \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{\Omega^*}{m}\right)^2}} + \Delta\Omega^*, \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\Delta\Omega^* = \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{2}{4\pi^2} \left\{ \Omega^{*3} \ln \left(\frac{\Omega^*}{m} \right) + m^2 (m - \Omega^*) - \frac{5}{2} m (m - \Omega^*)^2 + \frac{11}{6} (m - \Omega^*)^3 \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Definimos por conveniência $\frac{\Omega^*}{m} = \Omega$ que em função do novo parâmetro

x fica,

$$\Omega(x) = 1 - \frac{g_s^2 m^2}{m_s^2} \frac{1}{\pi^2} \left\{ \Omega \int_0^x dy \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + \Omega^2}} - \frac{1}{2} \left[\Omega^3 \ln \Omega + (1 - \Omega) - \frac{5}{2} (1 - \Omega)^2 + \frac{11}{6} (1 - \Omega)^3 \right] \right\}. \quad (\text{A.9})$$

A intenção, para tal procedimento, é fazer com que o sistema adquira a seguinte forma:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r), \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{dx}{dr} = \frac{dP}{dr} \left(\frac{dP}{dx} \right)^{-1}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d\Omega^*}{dr} = \frac{d\Omega^*}{dx} \frac{dx}{dr}. \quad (\text{A.12})$$

A Eq. (10) permanece inalterada, na Eq. (11) o termo $\frac{dP}{dr}$ é dado pela equação de OVT, o termo $\frac{dP}{dx}$ pode ser derivado à partir da Eq. (A.4), sendo que este termo possui implícito $\frac{d\Omega^*}{dr}$ que pode ser calculado pela Eq. (12) onde $\frac{d\Omega^*}{dx}$ pode ser derivado à partir da Eq. (A.9) para a massa efetiva. Explicitamente, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{dP(x)}{dx} = & \frac{1}{3} \frac{g_v^2}{m_s^2} \frac{m^6}{\pi^4} x^5 - \frac{m_s^2}{g_s^2} (\Omega^* - m) \frac{d\Omega^*}{dx} + \frac{1}{3\pi^2} m^4 \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{\Omega^*}{m}\right)^2}} \\
& - \frac{1}{3\pi^2} m^2 \Omega^* \frac{d\Omega^*}{dx} \int_0^x dy \frac{y^4}{\left(y^2 + \left(\frac{\Omega^*}{m}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\pi^2} \frac{d\Omega^*}{dx} \left\{ 2\Omega^{*3} \ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{3}\Omega^{*3} - \frac{1}{3}m^3 - \frac{7}{2}m^2(\Omega^* - m) - \frac{13}{2}m(\Omega^* - m)^2 - \frac{25}{6}(\Omega^* - m)^3 \right\} \text{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega^*}{dx} = & \left(-\frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{m^2}{\pi^2} \frac{\Omega^* x^2}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{\Omega^*}{m}\right)^2}} \right) \\
& \times \left\{ 1 + \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left(m^2 \int_0^x dy \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{\Omega^*}{m}\right)^2}} - \frac{1}{2} \Omega^{*2} \int_0^x dy \frac{y^2}{\left(y^2 + \left(\frac{\Omega^*}{m}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right. \right. \\
& \left. \left. - 3\Omega^{*2} - m^2 + 5m(\Omega^* - m) + \frac{11}{2}(\Omega^* - m)^{2-1} \right) \right\}. \quad \text{A.14}
\end{aligned}$$

O novo sistema de equações acopladas, pode ser calculado em poucas linhas usando o programa de cálculo algébrico *MapleV*, por exemplo, ou outro equivalente. A diferença em relação ao sistema original de OVT é que através da parametrização feita em x substituímos a necessidade de termos uma forma explícita para a equação de estado pelas Eqs. (A.11) e (A.12), que estão plenamente determinadas.

Apêndice B

Integrais em 2ω Dimensões, Métrica e Definições

B.1 Integrais em 2ω Dimensões

$$d^{2\omega}k_E = 2\omega \frac{\pi^\omega}{\Gamma(\omega + 1)} |k_E|^{2\omega-1} d|k_E| \quad (\text{B.1})$$

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2 + 2l \cdot p)^A} = \frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{1}{(m^2 - p^2)^{A-\omega}} \quad (\text{B.2})$$

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu}{(l^2 + m^2 + 2l \cdot p)^A} = -\frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{p_\mu}{(m^2 - p^2)^{A-\omega}} \quad (\text{B.3})$$

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\nu l_\mu}{(l^2 + m^2 + 2l \cdot p)^A} = \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \left\{ p_\mu p_\nu \frac{\Gamma(A - \omega)}{(m^2 - p^2)^{A-\omega}} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(A - 1 - \omega)}{(m^2 - p^2)^{A-1-\omega}} \right\} \quad (\text{B.4})$$

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{m-1}}{(t + a^2)^n} = \frac{1}{(a^2)^{m+n}} \frac{\Gamma(m) \Gamma(n - m)}{\Gamma(n)} \quad (\text{B.5})$$

B.2 Métrica e Definições

Tensor Métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Coordenadas contravariantes:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}). \quad (\text{B.7})$$

Coordenadas covariantes:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{x}). \quad (\text{B.8})$$

Produto escalar:

$$A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{B.9})$$

Derivadas:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (\text{B.11})$$

onde

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{B.12})$$

Quadri-divergência:

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{B.13})$$

Para as matrizes de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I, \quad (\text{B.14})$$

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu. \quad (\text{B.15})$$

Onde I é a matriz identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}) \\ \gamma_\mu &= (\gamma^0, -\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= 1 \\ (\gamma^k)^2 &= -1 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Representação de Dirac

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Matrizes de Pauli

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) , \\
 \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \\
 \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \\
 \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

Definições e relações úteis,

$$\not{k} = \gamma_\mu k = \gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \tag{B.21}$$

$$\omega \Gamma(\omega) = \Gamma(\omega + 1) \tag{B.22}$$

$$\hbar = c = 1 \tag{B.23}$$

$$\Gamma(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) \tag{B.24}$$

onde $\gamma = 0,577$ é a constante de Euler-Mascheroni.

$$\Gamma(\epsilon - 1) \sim -(1 + \epsilon) \Gamma(\epsilon) , \quad (\text{B.25})$$

$$\Gamma(\epsilon - 2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(3) \right] , \quad (\text{B.26})$$

onde

$$\Psi(n + 1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma . \quad (\text{B.27})$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. L. Shapiro and Saul Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Wiley, New York.
- [2] T. D. Lee and G. C. Wick. *Phys. Rev. D*, **9**:2291, 1974.
- [3] S. A. Chin and J. D. Walecka. *Phys. Lett. B*, **52**:24, 1974.
- [4] J. D. Walecka. *A Theory of Highly Condensed Matter. Annals of Physics*, **83**:491-529, 1974.
- [5] B. D. Serot e J. D. Walecka. *Adv. Nucl. Phys.*, **16**, 1985.
- [6] C. Bailin and A. Love. *Introduction to Gauge Field Theory*. Institute of Physics Publishing. London, 1993.
- [7] P. Ramond. *Field Theory: A Moderns Primer*, **74** of *Lecture Note Series*. Allan M. Wylde, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1981.
- [8] C. M. Bender, K. A. Milton, M. Moshe, S. S. Pinsky, and L. M. Simmons Jr. *Phys. Rev. Letters*, **58**:2615, 1987.
- [9] A. Okopinska. *Phys. Rev. D*, **35**:1835, 1987.
- [10] A. Duncan and M. Moshe. *Phys. Letters B*, **215**:352, 1988.

- [11] S. K. Gandhi, H. F. Jones, and M. B. Pinto. *Nucl. Phys. B*, **359**:429, 1991.
- [12] F. Cooper and P. Roy. *Phys. Letters A*, **143**:202, 1990.
- [13] G. Krein, R. S. Marques de Carvalho, D. P. Menezes, M. Nielsen, and M. B. Pinto. *Z. für Phys. A*, 1997.
- [14] G. Krein, D. P. Menezes, and M. B. Pinto. *Phys. Letters B*, **370**:5, 1996.
- [15] P. M. Stevenson. *Phys. Rev. D*, **23**:2916, 1981.
- [16] C. M. Bender, K. Olausson and P. S. Wang, *Phys. Rev. D*, **16**:1780, 1977.
- [17] P. Breitenlohner and D. Maison, *Commun math. Phys.* **52**:11, 1977.
- [18] Andréa F. Giacomet, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1997.
- [19] G. t 'Hooft and M. J. G. Veltman. *Nucl. Phys B*, **44**:189, 1972.
- [20] Bollini and Gambiagi. *Phys. Letters B*, **40**:566, 1972.
- [21] S. S. Chin. *Ann. Phys.* **108**:301, 1977.
- [22] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York.
- [23] J. M. Weisenberg and J. H. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **52**:1348, 1984.
- [24] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. *Physical Review*, **55**, 1939.
- [25] N. K Glendenning, *Nucl. Phys. A*, **493**:521, 1989.
- [26] B. Bellet and P. Garcia, *Int. J. of Modern Phys.* **11**:31, 1996.