

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DA GEOMETRIA E GERAÇÃO DAS ENGRENAGENS CILÍNDRICAS  
COM DENTES EM ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia

CÍCERO VENICIUS DOS SANTOS CHIANCA

FLORIANÓPOLIS, 15 de Setembro de 1981

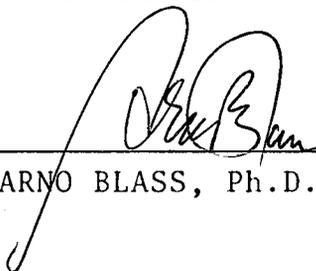
ANÁLISE DA GEOMETRIA E GERAÇÃO DAS ENGENHAGENS CILÍNDRICAS  
COM DENTES EM ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

CÍCERO VENICIUS DOS SANTOS CHIANCA

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do título de  
Mestre em Engenharia - Especialidade Mecânica e aprovada  
em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. AUREO CAMPOS FERREIRA, Ph.D. - ORIENTADOR

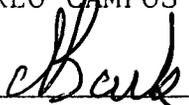


Prof. ARNO BLASS, Ph.D. - COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA



Prof. AUREO CAMPOS FERREIRA, Ph.D.



Prof. NELSON BACK, Ph.D.



Prof. RENAN ROBERTO BRAZZALLE, M.Sc.

## AGRADECIMENTOS

À coordenação do Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior ( CAPES ), como entidade mantenedora do Curso de Pós-Graduação.

Ao Plano Institucional de Capacitação de Docentes (PICD) pelo apoio financeiro prestado.

À Universidade Federal da Paraíba (UFPb), pela concessão do afastamento.

Ao Prof. Áureo Campos Ferreira, pela orientação e incentivos prestados ao trabalho.

Ao pessoal do laboratório de Máquinas Operatrizes da UFSC, pelo trabalho e dedicação que tiveram na montagem da parte experimental.

A todos que de alguma forma, prestaram sua colaboração à realização deste trabalho.

Meus Sinceros agradecimentos.

## SUMÁRIO

Simbologia.....	i
Resumo.....	vi
Abstract.....	vii
Capítulo 1 - INTRODUÇÃO.....	01
1.1- O problema e sua importância.....	01
1.2- Descrição da tese.....	03
Capítulo 2 - ESTUDO GEOMÉTRICO DA GERAÇÃO DE DENTEADOS NÃO RE TILÍNEOS, EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS PARALELAS..	05
2.1- Generalidades.....	05
2.1.1- Método das envoltórias.....	06
2.1.2- Método das curvas de rolamento.....	07
2.2- Geração de denteados em rodas cilíndricas, a partir de cremalheiras geratrizes, dotadas de flancos cônicos de revolução.....	10
2.2.1- Generalidades.....	10
2.2.2- Geração dos flancos conjugados de um par de engrenagens.....	12
2.2.3- Geração prática dos flancos, em pa- res de engrenagens.....	14
2.3- Geração de denteados em rodas cilíndricas, a partir de cremalheiras geratrizes dotadas de flancos cilíndricos de revolução.....	20
2.3.1- Generalidades.....	20
2.3.2- Geração preliminar considerando a cre- malheira geratriz.....	23
2.3.3- Geração dos flancos conjugados em um par de engrenagens.....	28
2.3.4- Geração prática dos flancos, em pa- res de engrenagens.....	33
Capítulo 3 - ESTUDO ANALÍTICO DA GERAÇÃO DAS ENGRENAGENS CI- LÍNDRICAS DE DENTES CURVOS.....	38

3.1-	Generalidades.....	38
3.2-	Determinação analítica da cremalheira geratriz.....	38
3.3-	Trajetoária do ponto de contato, em uma seção transversal qualquer.....	42
3.3.1-	Trajetoária, $l_{ti}$ , do ponto de contato entre $s_{c0}$ e o perfil conjugado da engrenagem.....	42
3.3.2-	Trajetoária, $l_{te}$ , do ponto de contato entre $s_{v0}$ e o perfil conjugado da engrenagem.....	44
3.4-	Determinação analítica dos perfis de engrenagens.....	45
3.4.1-	Determinação do perfil $s_v$ , conjugado ao perfil $s_{c0}$ .....	45
3.4.2-	Determinação do perfil $s_c$ , conjugado ao perfil $s_{v0}$ .....	46
3.5-	Traçado de perfis.....	46
3.5.1-	Generalidades.....	47
3.5.2-	Apresentação de resultados.....	50
Capítulo 4 -	CONTINUIDADE DO ENGRENAMENTO DE ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES CURVOS.....	59
4.1-	Generalidades.....	59
4.2-	Determinação da razão de recobrimento, para um par de engrenagens, gerado segundo 2.3.3.	59
4.3-	Estudo da variação do grau de recobrimento e comparação com o das engrenagens helicoidais.....	62
Capítulo 5 -	PROCEDIMENTOS PARA USINAGEM DE ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES CURVOS.....	67
5.1-	Generalidades.....	67
5.2-	Síntese dos movimentos.....	68
5.3-	Montagem do equipamento.....	73
5.3.1-	Generalidades.....	73
5.3.2-	Seleção das engrenagens do trem para geração .....	74

5.3.2.1-	Determinação da relação de transmissão do trem de engrenagens para geração.....	74
5.3.2.2-	Propagação do erro na relação de transmissão selecionada.....	76
5.3.2.3-	Apresentação e discussão de resultados.....	79
5.3.3-	Fresa frontal.....	84
Capítulo 6 -	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS...	86
6.1-	Conclusões.....	86
6.2-	Sugestões para futuros trabalhos.....	87
BIBLIOGRAFIA.	.....	88
APÊNDICES.....	.....	90
A1-	Definições gerais em ECDAC.....	91
A2-	Expressão analítica da seção transversal , da superfície geratriz tronco-cônica.....	93
A3-	Dedução das equações paramétricas dos perfis .....	95
A4-	Determinação das coordenadas dos perfis de ECDAC.....	105
A5-	Determinação das engrenagens do trem para geração.....	112

## SIMBOLOGIA

$b$	- largura do denteado	mm
$C_1, C_2$	- cilindro primitivo	
$c_1, c_2$	- circunferências primitivas	
$C_{b1}, C_{b2}$	- cilindros de base	
$c_{b1}, c_{b2}$	- circunferências de base	
$d_1, d_2$	- diâmetros primitivos	mm
$d_{a1}, d_{a2}$	- diâmetros de cabeça	mm
$d_{b1}, d_{b2}$	- diâmetros de base	mm
$g_{\beta 2}, g_{\beta 2}$	- comprimento de recobrimento	mm
$h_0$	- altura do dente da cremalheira geratriz	mm
$L$	- linha do contato entre dentes	
$I, I'$	- pontos primitivos	
$l_{b1}, l_{b2}$	- interseção do flanco da ECDAC, com o cilindro de base	
$l_{t1}, l_{t2}$	- trajetoria do ponto de contato, entre os perfis da cremalheira geratriz e da ECDAC	
$M$	- ponto de contato de perfis conjugados	
$m_0$	- módulo da ferramenta	mm
$m_t$	- módulo da seção transversal da ECDAC	mm
$N$	- flanco da engrenagem geratriz	
$n$	- perfil da engrenagem geratriz	
$N_e$	- superfície geratriz do flanco côncavo da ECDAC	
$N_i$	- superfície geratriz do flanco convexo da ECDAC	
$0_1 X_1, 0_2 X_2, 0_1 Y_1,$ $0_2 Y_2, 0_1 Z_1, 0_2 Z_2$	- eixos de coordenadas	

${}^0_1Z_1, {}^0_2Z_2$	- eixos das ECDAC	
$P$	- superfície primitiva da engrenagem geratriz	
$P_m$	- plano que contem a seção meridiana da ECDAC	
$P_t$	- plano que contem a seção transversal da ECDAC	
$p, p'$	- linhas primitivas da engrenagem geratriz	
$P_f$	- passo do fuso da fresadora universal	mm
$R$	- relação do cabeçote divisor	
$R_{co,ci}$	- relações de transmissão necessárias, do trem de engrenagens para geração	
$R_{co,ci}^{ef}$	- relações de transmissão efetivas, do trem de engrenagens para geração	
$r'_{Ke}$	- raio polar de um ponto K, sobre o perfil do flanco côncavo da ECDAC	mm
$r'_{Ki}$	- raio polar de um ponto K, sobre o perfil do flanco convexo da ECDAC	mm
$S_1, S_2$	- superfícies conjugadas	
$S_{c1}, S_{c2}$	- flancos côncavos das ECDAC	
$S_{v1}, S_{v2}$	- flancos convexos das ECDAC	
$s_1, s_2$	- perfis conjugados	
$s_{m1}, s_{m2}$	- perfis meridianos conjugados, das ECDAC	
$s_{mc1}, s_{mc2}$	- perfis meridianos contidos nos flancos côncavos das ECDAC	
$s_{mv1}, s_{mv2}$	- perfis meridianos contidos nos flancos convexos das ECDAC	
$ \vec{V}_0 ,  \vec{V}_1 ,  \vec{V}_2 $	- intensidades de velocidades lineares	mm/s
$w_f$	- velocidade angular do fuso da fresadora	nd/s
$\lambda_{c0}, \lambda_{v0}$	- abscissas relacionadas ao perfil da cremalheira geratriz	mm

$X_{te}, X_{ti}$	- abscissas relacionadas à trajetória do ponto de contato, entre os perfis da cremalheira geratriz e da ECDAC	mm
$Y_0$	- ordenada relacionada aos perfis, da cremalheira e da ECDAC	mm
$Y_{c0}, Y_{v0}$	- Ordenadas relacionadas aos perfis da cremalheira geratriz	mm
$Z_{t1}, Z_{t2}, Z_{t3}, Z_{t4}$	- números de dentes das engrenagens do trem para geração	
$\alpha_0$	- ângulo de pressão da ferramenta	°
$\alpha, \alpha_1, \alpha_2$	- ângulo de pressão das ECDAC	°
$\alpha_A, \alpha_K$	- ângulos de incidência	
$\alpha'_t$	- ângulo de pressão transversal de funcionamento	°
$\beta$	- ângulo central que subentende o arco de evolvente compreendido entre as circunferências primitiva e de base	rd
$\Delta$	- geratriz de contato, entre dois cilindros primitivos	
$\delta, \delta_1, \delta_2$	- centros instantâneos de rotação	
$\epsilon_{co, ci}$	- erro absoluto, na relação do trem de engrenagens para geração	
$\epsilon_p$	- erro máximo, no perfil da ECDAC	mm
$\epsilon_\beta$	- razão de recobrimento	
$\theta'_{Ke}$	- ângulo polar de um ponto K, sobre um perfil do flanco côncavo da ECDAC	rd
$\theta'_{Ki}$	- ângulo polar de um ponto K, sobre um perfil do flanco convexo da ECDAC	rd
$\lambda$	- parâmetro angular	rd

$\xi$	- ângulo central que subentende a semi-espessura do dente, medida na circunferencia primitiva, considerando-se a seção transversal meridiana	rd
$\rho_{1f}$	- raio de curvatura da linha de flanco	mm
$\rho_{1fe}$	- raio de curvatura da linha de flanco, da superfície que gera o flanco côncavo da ECDAC	mm
$\rho_{1fi}$	- raio de curvatura da linha de flanco, da superfície que gera o flanco convexo da ECDAC	mm
$\tau_1, \tau_2$	- passos angulares	rd
$\phi_{\beta 1}, \phi_{\beta 2}$	- ângulos de recobrimento	rd

## INDICES:

A	- relacionado a um ponto sobre o perfil da ECDAC, situado no cilindro primitivo
b	- relacionado à superfície de base da ECDAC
c	- relacionado ao flanco côncavo da ECDAC
e	- relacionado ao flanco convexo da cremalheira geratriz
ef	- relacionado a efetivo
f	- relacionado ao fuso da fresadora universal
i	- relacionado ao flanco côncavo da cremalheira geratriz
K	- relacionado a um ponto qualquer sobre o perfil da ECDAC
LF	- relacionado à linha de flancos
m	- relacionado à seção meridiana
p	- relacionado ao perfil da ECDAC

- t - relacionado a uma seção transversal
- v - relacionado ao perfil convexo da ECDAC
- $\beta$  - relacionado ao recobrimento dos dentes da ECDAC
- 0 - relacionado à cremalheira geratriz, ou à ferramenta
- 1,2,3,4 - relacionados a diversas engrenagens

## RESUMO

Um retrospecto dos métodos gerais existentes, de análise da geometria e da geração de engrenagens, leva à definição de características de um tipo de engrenagem cilíndrica, pouco conhecido até o presente, denominado neste trabalho, de ECDAC (Engrenagem Cilíndrica com Dentes em Arco de Circunferencia).

Chega-se à conclusão, que se pode gerar quatro tipos de ECDACs, dependendo da (ou das) ferramenta (s) utilizadas na usinagem; estes não são distinguíveis à primeira vista, em virtude da grande semelhança existente entre eles, porém apresentam peculiaridades particulares.

Verifica-se que em dois desses tipos, os perfis transversais variam, apresentando no entanto, em uma posição particular, a forma evolvental; define-se analiticamente, a forma de um perfil genérico. Para os outros dois tipos, os diversos perfis transversais, são evolventais, conforme se prova.

Baseado nos métodos citados, demonstra-se a praticabilidade de da usinagem de ECDACs, em fresadoras universais. Para este fim, preocupa-se, entre outros aspectos, com o erro que resulta no perfil, em virtude da aproximação que se faz, ao selecionar-se as engrenagens do trem para geração. Testa-se a praticabilidade, levando-se a efeito, a usinagem de uma engrenagem.

Tendo-se em vista, verificar a possibilidade da ECDAC tornar-se uma nova opção, em certas aplicações, faz-se uma comparação da sua razão (ou grãu) de recobrimento, com o da engrenagem helicoidal dupla.

Faz-se uma verificação metrológica, de forma a enquadrar a engrenagem obtida, em uma das qualidades conhecidas, segundo a norma ISO.

## ABSTRACT

In order to establish the characteristics of a certain kind of cylindrical gear, little known until recently, called ECDAC (Circular-Arc-Toothed Cylindrical Gear), it was necessary to review the existent general methods of gear generation.

It was concluded that it is possible to generate four different types of ECDAC depending upon the form of the gear cutter (s) that is (are) used. As a result of the similarities amongst them, they aren't distinguishable at first sight. However, each has its own peculiarities.

It was verified that two of these types of ECDAC present a variable transverse profile that assumes the involute form in a particular position. An analytical definition was made for a transversal generic profile. For the other two types it was proven that the different transversal profiles have an involute form.

Based on the mentioned methods, the practicability of cutting ECDACs was demonstrated. Besides this, it was considered the resulting profile error that one encounters in approaching the choice of gear for the generation train. This was verified in the process of cutting a gear.

In the process of verifying the possibilities of certain applications of an ECDAC through the substitution of a double helical gear, their crowning was compared.

And finally, a metrological control was made in order to specify the ISO quality of the obtained gear.

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 - O problema e sua importância

As engrenagens cilíndricas com dentes em arco de circunferência (ECDAC) (ver fig. 01), foram produzidas pela primeira vez em 1958, no Japão [1]. Constituem, basicamente, um tipo particular de engrenagens cônicas com dentes espirais, que apresentam um ângulo entre os eixos, de zero graus (eixos paralelos), e que podem ser geradas, conforme descreve a literatura consultada, em uma máquina especialmente projetada e construída para essa finalidade, ou em fresadoras universais, utilizando como ferramenta, a mesma fresa empregada na geração, por máquinas Gleason [2], de engrenagens cônicas de dentes espirais.

As ECDAC apresentam como características principais [1]:

- a - Perfil evolvental, apenas na seção transversal meridiana, e diferente do evolvental, a medida que a seção considerada se afasta axialmente da meridiana, em direção às extremidades dos dentes.
- b - Ação conjugada entre os dentes, mesmo possuindo a característica acima citada.
- c - Podem ser usinadas e retificadas, para qualquer abaulamento desejado, com relativa facilidade.
- d - Não apresentam contato, na extremidade do dente, mesmo que o desvio no paralelismo entre os eixos, não seja desprezível, em virtude de erros de fabricação, ou de deformações elásticas analogamente ao que ocorre nos rolamentos auto-compensadores.

Apesar de divulgar amplamente, as vantagens das ECDAC, a bibliografia [1], não entra em detalhes, a respeito de pontos tais como:

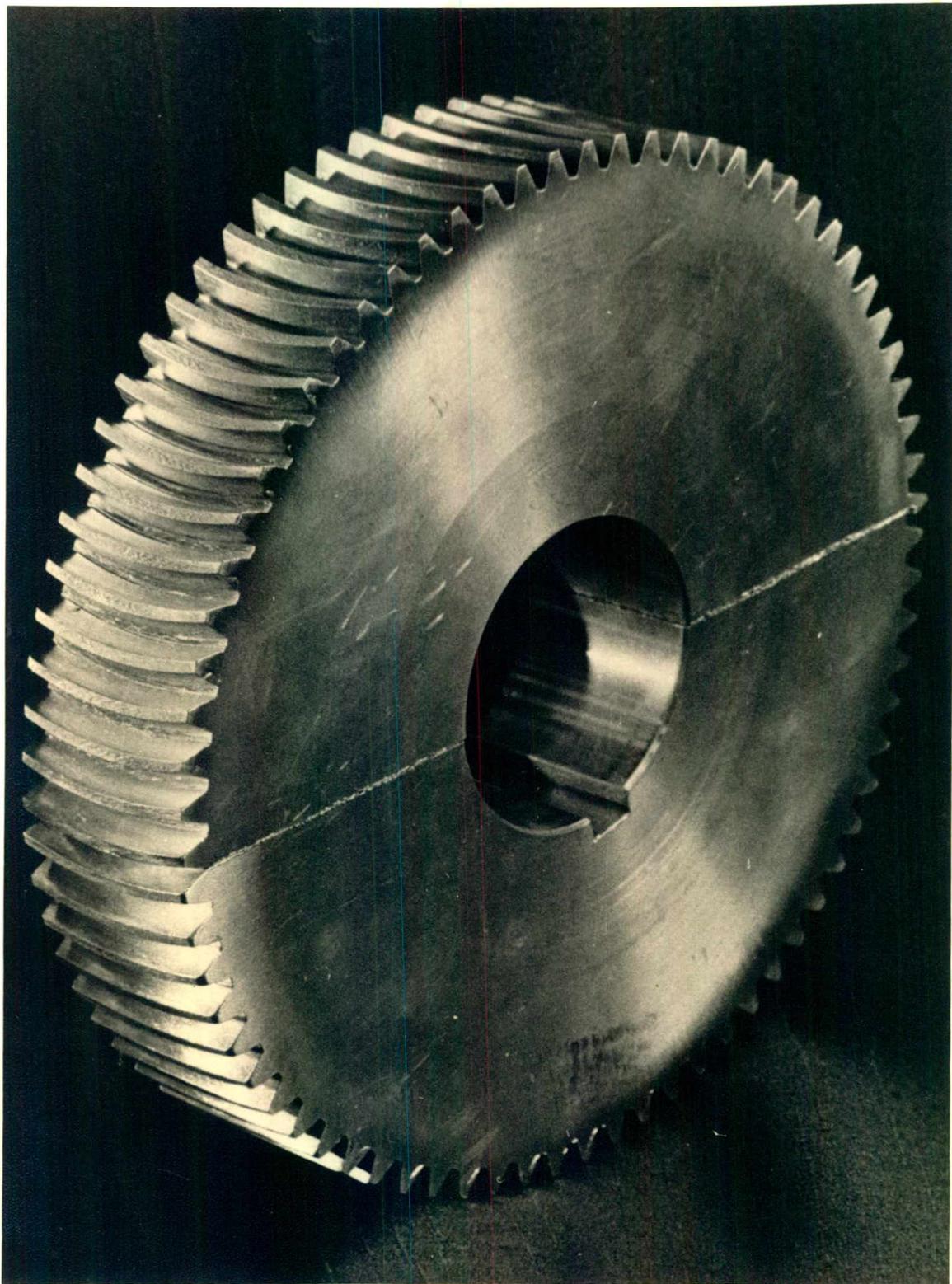


Fig. 01 - Engrenagem cilíndrica com dentes em arco de circunferência (ECDAC).

- a - Natureza da forma do perfil do dente fora da seção, onde ele não é evolvental.
- b - Método de geração de ECDAC, para obter perfil evolvental, em uma seção transversal qualquer, ou seja ao longo de toda a largura do dente.
- c - Cálculo da razão de recobrimento.
- d - Escolha do trem de engrenagens para geração, em uma fresadora universal, e cálculo do erro resultante no perfil, em virtude da aproximação feita, na citada escolha.

Reconhecendo as reais vantagens das ECDAC, e baseando no que acima foi exposto, procura-se com este trabalho:

- a - Definir, tão detalhadamente quanto possível, a geometria das ECDAC.
- b - Dar um tratamento mais profundo aos pontos totalmente ignorados ou apenas superficialmente analisados por outros autores.
- c - Ir em busca de uma solução que permita gerar uma variante deste tipo de engrenagem, que apresente perfil evolvental, ao longo de toda a largura do dente, visando com isto, um bom funcionamento da transmissão, mesmo na ocorrência de certos desalinhamentos de montagem.

## 1.2 - Descrição da dissertação

Tendo-se em vista, especificar as características das ECDAC, faz-se no capítulo 2, um estudo geométrico da geração, analisando os métodos gerais para determinação de flancos conjugados.

Baseando-se nos resultados do capítulo 2, determina-se no capítulo 3, analiticamente, a forma dos flancos dos dentes das ECDAC. Neste capítulo, apenas considera-se, uma certa variedade de ECDAC, originada de uma cremalheira geratriz, tendo dentes com flancos cônicos. Este procedimento foi adotado, em virtude de ha-

ver-se observado no capítulo 2 que, para os métodos lá seguidos, obtêm-se uma definição incompleta da forma dos flancos dessa variedade de ECDAC. Ainda, no capítulo 3, apresenta-se alguns resultados, que exprimem a forma do flanco da ECDAC, e faz-se uma comparação entre dois perfis transversais, sendo um deles, evolvental, e o outro qualquer.

Com o objetivo de estabelecer um paralelo de comparação entre as ECDAC e as engrenagens convencionais, no que se refere a continuidade do engrenamento, determina-se, no capítulo 4, a razão de recobrimento das ECDAC. A partir da expressão obtida, faz-se um estudo da influência dos parâmetros envolvidos, sobre a variação da razão de recobrimento da ECDAC, e estabelece-se uma comparação entre as razões de recobrimento das ECDAC, e das engrenagens helicoidais duplas.

No capítulo 5, trata-se dos problemas, diretamente ligados à geração das ECDAC, em fresadoras universais. Faz-se uma síntese dos movimentos e descreve-se a preparação da fresadora, para a geração. Consideram-se duas das variedades de ECDAC, caracterizadas no capítulo 2, mostrando-se o método de cálculo das relações de transmissão do trem de engrenagens para a geração. Verifica-se que estas relações, não podem ser exatamente satisfeitas, e faz-se um estudo da propagação do erro

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugere-se alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos futuramente com o objetivo de ampliar e aprofundar o conhecimento sobre as ECDAC.

## 2. ESTUDO GEOMÉTRICO DA GERAÇÃO DE DENTEADOS NÃO RETILÍNEOS, EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS PARALELAS

### 2.1 - Generalidades

A bibliografia [3] apresenta basicamente, dois métodos gerais, que permitem determinar flancos conjugados de engrenagens:

I - Método das envoltórias.

II- Método das "curvas de rolamento"\*.

O método das envoltórias, serve de base ao método das curvas de rolamento, além de indicar um roteiro para o tratamento analítico, ao determinar-se um perfil conjugado a outro.

O método das curvas de rolamento, dá uma visão global da geometria dos flancos conjugados.

Tendo-se em vista, definir uma engrenagem cilíndrica paralela, de dentes não retilíneos, pode-se utilizar sua engrenagem geratriz [4]. Neste trabalho, se considerará que seu diâmetro seja infinito, ou seja a cremalheira geratriz\*\*.

Julga-se muito complexo, considerar-se em um trabalho como este, uma forma curva genérica para as linhas de flanco da referida cremalheira; considerando-se as eventuais facilidades de usinagem, se adotará para estas, a forma circular [1]. Assim se

---

\*Tradução [5] do termo "roulettes", de origem francesa.

\*\* ou denteado plano [6].

adotará cremalheiras geratrizes, cujo flancos sejam, ora cilíndricos, ora tronco-cônicos, ambos de revolução.

É interessante salientar, que a bibliografia [3] trata apenas da geração de engrenagens, cujas cremalheiras geratrizes, têm flancos planos, e portanto linhas de flanco retilíneas, nenhuma referência fazendo ao caso das engrenagens de dentes curvos.

### 2.1.1 - Método das envoltórias

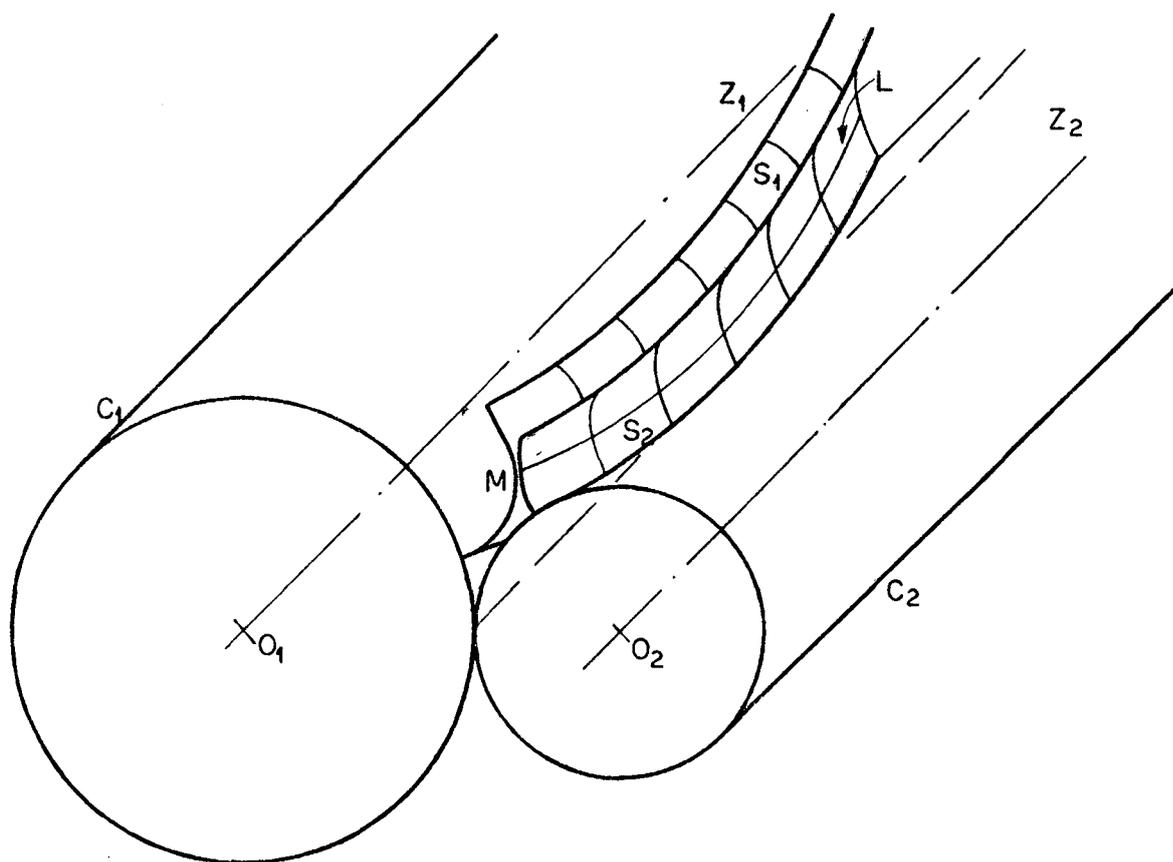


Fig. 02 - método das envoltórias, para geração de perfis conjugados.

Por este método, considerando-se na figura 02, os dois cilindros primitivos ( $C_1$  e  $C_2$ ) em contato segundo uma geratriz comum, e admitindo-se o rolamento puro de um sobre o outro, a uma certa superfície  $S_1$ , solidária a  $C_1$ , corresponderá uma outra superfície  $S_2$ , tangente a  $S_1$  em cada Instante\* e solidária a  $C_2$ . Assim, a cada perfil transversal ( $s_1$ ) contido em  $S_1$ , corresponde um outro perfil transversal ( $s_2$ ) tangente em M, porém contido em  $S_2$ . Dessa forma, diz-se que  $S_1$  e  $S_2$ , são superfícies conjugadas, assim como  $s_1$  e  $s_2$ , são perfis conjugados.

Considerando-se o conjunto dos pontos de contato de diversos pares de perfis, tais como  $s_1$  e  $s_2$ , se terá a linha de contato (L) das superfícies  $S_1$  e  $S_2$ .

Conhecendo-se uma das superfícies, por exemplo  $S_1$  o método permite determinar  $S_2$ , perfil por perfil, através de traçado gráfico [3].

O método, não faz restrição quanto à forma da superfície conhecida.

### 2.1.2 - Método das curvas de rolamento

Este método, aplicado a um par de engrenagens paralelas, geradas a partir de uma engrenagem geratriz genérica, pode ser apresentado como segue.

Considere-se na figura 03:

$C_1$  - cilindro primitivo de eixo  $O_1Z_1$ , correspondente à menor engrenagem de um par de engrenagens paralelas.

---

\*durante o processo de rolamento, sendo portanto, envoltório de  $S_1$ ,

- $C_2$  - cilindro primitivo de eixo  $O_2Z_2$ , correspondente à maior engrenagem de um par de engrenagens paralelas,
- $\Delta$  - geratriz de contato entre os cilindros  $C_1$  e  $C_2$ ,
- $P$  - superfície, tangente simultaneamente a  $C_1$  e  $C_2$ , segundo  $\Delta$ , e que representa a superfície primitiva da engrenagem geratriz,
- $N$  - superfície solidária a  $P$ , representando o flanco da engrenagem geratriz,

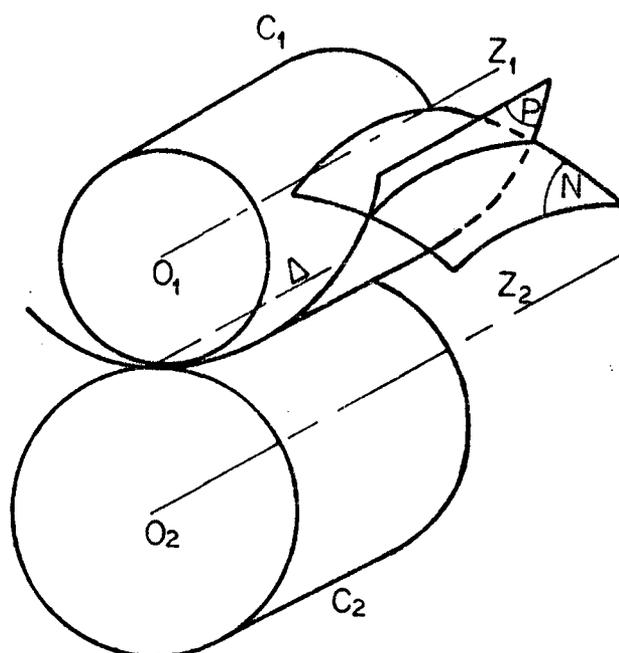


Fig. 03 - método das curvas de rolamento para geração de perfis conjugados.

Ao fazer-se rolar sem deslizar,  $P$  sobre  $C_1$  (ou  $C_2$ ), faz-se gerar uma superfície  $S_1$  (ou  $S_2$ ) envoltória de  $N$  e solidária a  $C_1$  (ou  $C_2$ ).

Tendo em vista demonstrar que  $S_1$  e  $S_2$  são tangentes em cada instante ou seja, são conjugadas, a bibliografia [3] segue os seguintes passos:

1) determina os eixos instantâneos de rotação dos seguintes movimentos.

- rolamento de P sobre  $C_1$
- rolamento de P sobre  $C_2$
- rolamento de  $C_1$  sobre  $C_2$

que, confundem-se todos com  $\Delta$  ;

II) considera a interseção, representada na figura 04, do conjunto mostrado na figura 03, por um plano qualquer  $P_t$ , normal aos eixos  $Z_1$  e  $Z_2$  ;

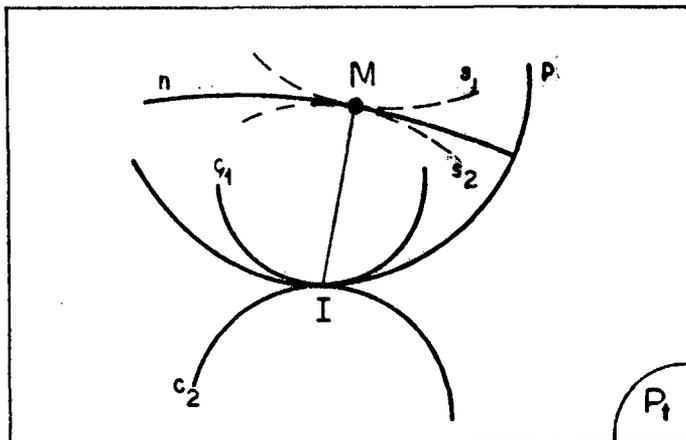


Fig. 04 - geração dos perfis conjugados,  $s_1$  e  $s_2$ , envoltórios da curva de rolamento,  $n$

entendendo-se na figura 04, que:

$c_1$ (ou $c_2$ )	é a interseção de $C_1$ (ou $C_2$ )	por $P_t$
$s_1$ (ou $s_2$ )	é a interseção de $S_1$ (ou $S_2$ )	por $P_t$
$I$	é a interseção de $\Delta$	por $P_t$
$p$	é a interseção de $P$	por $P_t$
$n$	é a interseção de $N$	por $P_t$

III) prova que os perfis  $s_1$  e  $s_2$ , são tangentes, em virtude de admitirem normais colineares no seu ponto de contacto (M); neste caso as ditas normais se confundem com MI, lembrando que I, é o centro instantâneo de rotação dos seguintes movimentos:

- rolamento de p sobre  $c_1$ ,
- rolamento de p sobre  $c_2$ ,
- rolamento de  $c_1$  sobre  $c_2$ ,

observa-se, pelo exposto que o método não faz restrição quanto à forma da superfície N,

2.2 - Geração de denteados em rodas cilíndricas, a partir de cremalheiras geratrizes, dotadas de flancos cônicos de revolução

### 2.2.1 - Generalidades

A bibliografia, pelo que se notou, não trata do assunto em questão e, se procurará desenvolvê-lo, seguindo um roteiro semelhante ao adotado, pela bibliografia [3], ao tratar das engrenagens helicoidais.

Adotando-se a orientação seguida pela bibliografia [3] ao tratar das engrenagens cônicas especiais, pode-se caracterizar a cremalheira geratriz por (figura 05):

1) seu plano primitivo P: podendo sofrer translação sobre ele mesmo na direção do eixo  $O_1X_1$  e limitado pelas retas S e S', II' representando a largura do denteado; tem-se,

$$II' = b \quad (1)$$

II ) a superfície geratriz  $N$  determinada como segue:

- a) por sua interseção  $AB$  com o plano primitivo;  $AB$  é um arco de circunferência de centro  $O_0$  e raio  $\rho_{LF}$ ; o ponto  $O_0$  está contido no plano meridiano  $P_m$  e  $AB$  representa a linha de flancos de um dente da cremalheira geratriz.
- b) pela forma como é gerada, a partir de um segmento retilíneo,  $(CD)$  que apoia no arco  $AB$ , mantendo-se inclinado de  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  em relação ao plano primitivo. É pois uma porção da superfície lateral de um cone, de vértice  $Y_0$  situado sobre a normal ao plano primitivo em  $O_0$  e de semi-ângulo no vértice igual a  $\alpha$ .

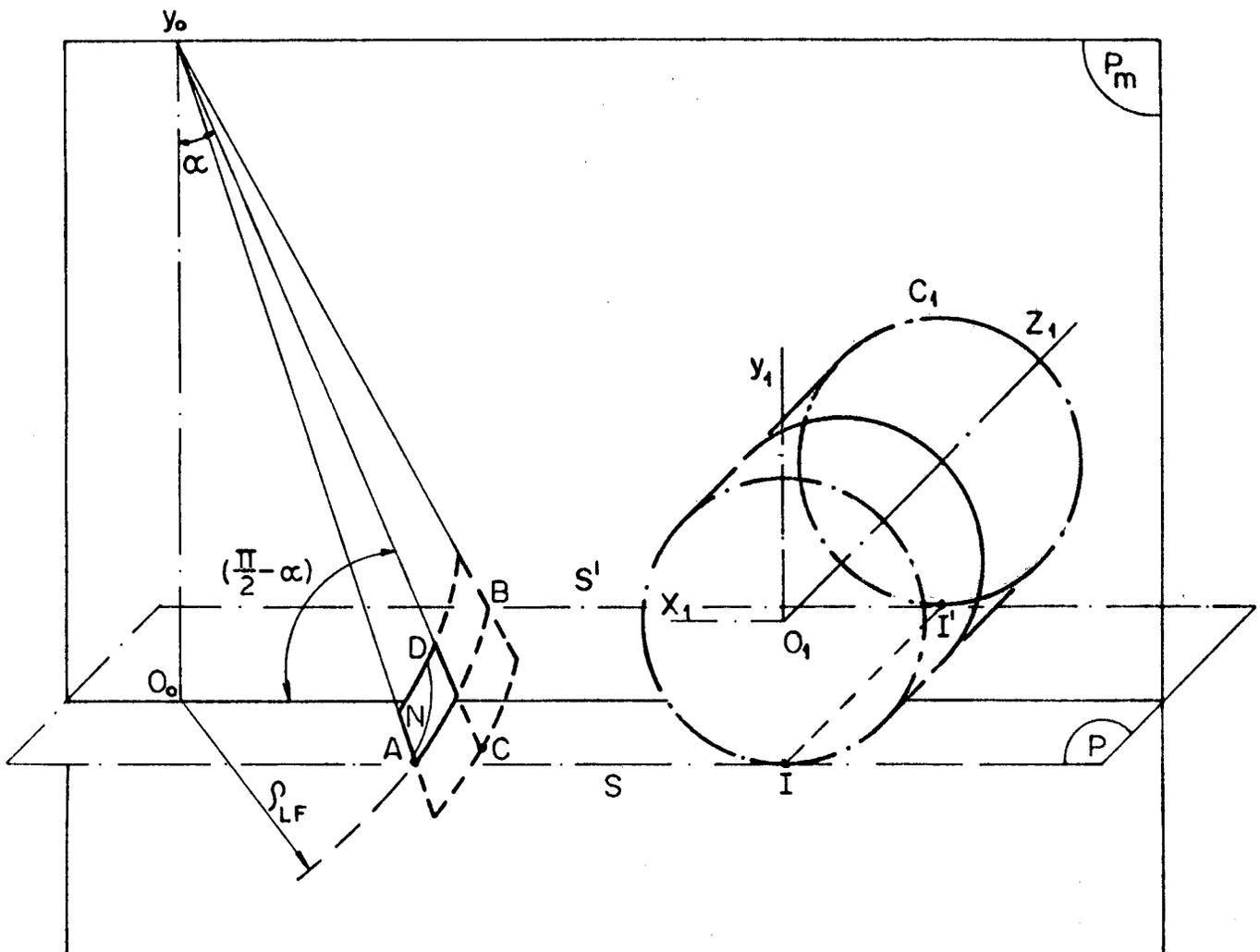


Fig. 05 - cremalheira geratriz.

### 2.2.2 - Geração dos flancos conjugados de um par de engrenagens

Considere-se na figura 06,

$C_1$  e  $C_2$  - cilindros primitivos de um par de engrenagens, tangentes entre si segundo a reta  $\Delta$ ,

P - plano primitivo da cremalheira geratriz, tangente simultaneamente a  $C_1$  e  $C_2$ , segundo a reta  $\Delta$ ,

N - superfície geratriz, definida em 2.2.1- , solidária a P.

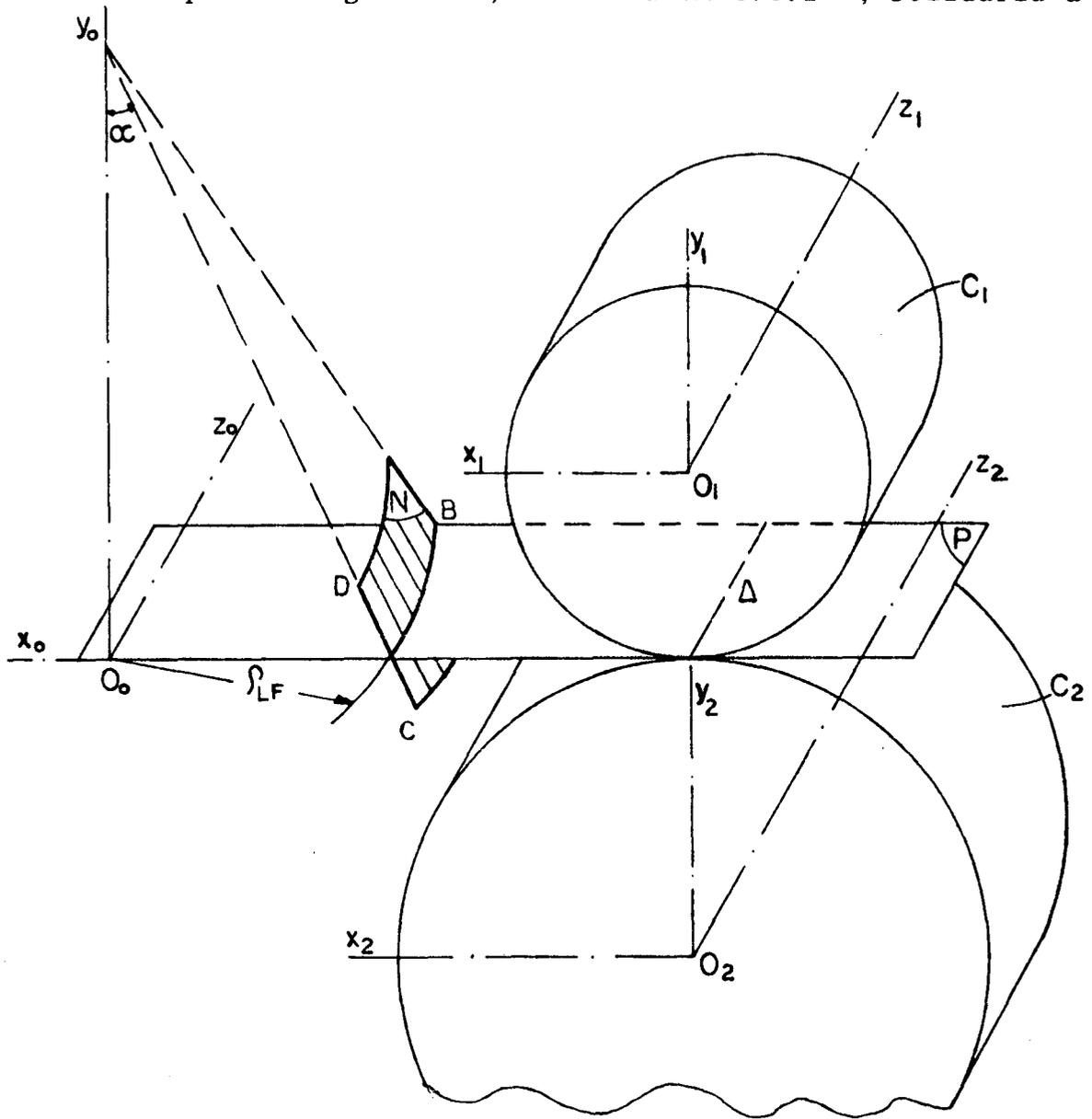


Fig. 06 - geração dos flancos conjugados.

Admitindo-se o rolamento puro de P sobre  $C_1$  e  $C_2$ , mantendo-se estas três superfícies tangentes segundo  $\Delta$ , N terá por envoltórias,

$S_1$  - superfície solidária a  $C_1$ .  
 $S_2$  - superfície solidária a  $C_2$ .

$S_1$  e  $S_2$ , são superfícies conjugadas, conforme demonstração análoga a 2.1.2. Considerando-se suas interseções por um plano transversal (normal a  $OZ_1$  e  $OZ_2$ , e diferente do meridiano), nota-se que os perfis resultantes são conjugados entre si em virtude de serem envoltórios de um mesmo arco de hipérbole\*. Em particular, na seção meridiana, os perfis transversais meridianos, são envoltórios de um segmento de reta\*\*.

Do exposto conclui-se, que aqui talvez não sejam deduzíveis, por considerações geométricas simples, como se faz por exemplo para as engrenagens helicoidais, os elementos seguintes:

- I ) forma do cilindro de base de cada engrenagem
- II ) forma de  $S_1$  ou  $S_2$ ,
- III) forma dos perfis transversais, salvo a do perfil transversal meridiano, que é um arco de evolvente,
- IV ) forma da aresta de transição de  $S_1$  ou de  $S_2$ , contida na superfície do cilindro de base,
- V ) forma da superfície de ação
- VI ) forma da linha que representa a interseção do flanco do dente, pela superfície de ação,

---

\*interseção da superfície N, pelo plano transversal, paralelo ao seu eixo de revolução.

\*\*interseção de N, pelo plano  $P_m$ , o qual contém seu eixo de revolução

Vale ressaltar, no entanto que as superfícies conjugadas,  $S_1$  e  $S_2$ , são caracterizadas pela configuração convexo-côncava.

### 2.2.3 - Geração prática dos flancos, em pares de engrenagens

Em 2.2.2-, admitiu-se que tanto o flanco convexo, como o flanco côncavo, fôssem gerados por uma mesma superfície geratriz. Esta é uma condição básica, para obter-se flancos conjugados. No entanto, uma das maneiras simples de usinar engrenagens do tipo citado em 2.2 -, consiste em adotar-se uma fresa frontal com dentes tendo arestas cortantes retilíneas, conforme esquematizado na figura 07. E ainda, levando-se em conta que estas arestas e seus movimentos, simulam os flancos da cremalheira geratriz, nota-se haver interesse em tratar-se da geração dos flancos de um par de engrenagens, considerando-se simultaneamente duas superfícies geratrizes,  $N_e$  e  $N_i$ , definidas de forma análoga à superfície  $N$  da figura 05, sendo ainda:

$N_e$  - superfície geratriz, conforme figura 08 a, aplicada na geração dos flancos côncavos, da engrenagem 1.

$N_i$  - superfície geratriz, conforme figura 08 b, aplicada na geração dos flancos convexos, da mesma engrenagem 1.

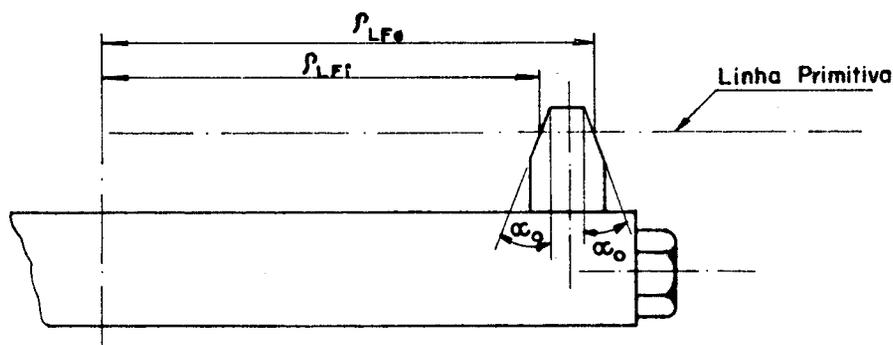


Fig. 07 - esboço de uma fresa frontal, aplicável na usinagem de engrenagens cilíndricas de dentes curvos

Neste subcapítulo, se considerará que o ângulo de pressão  $\alpha_0$  da ferramenta, seja idêntico\* ao correspondente ângulo dos perfis meridianos da engrenagem, ou seja:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad (2)$$

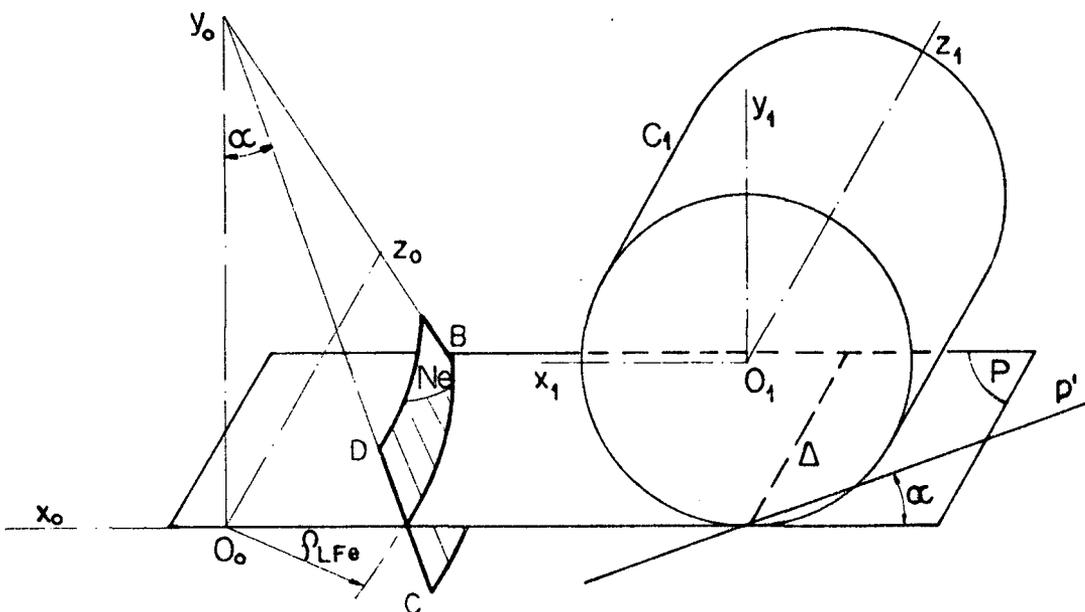


fig. 08 a - geração do flanco côncavo da engrenagem 1.

---

\*lembrando, que existe uma técnica [ 7 ], que permite gerar-se engrenagens, de tal forma que por exemplo:

$$\alpha_0 \neq \alpha_1 ,$$



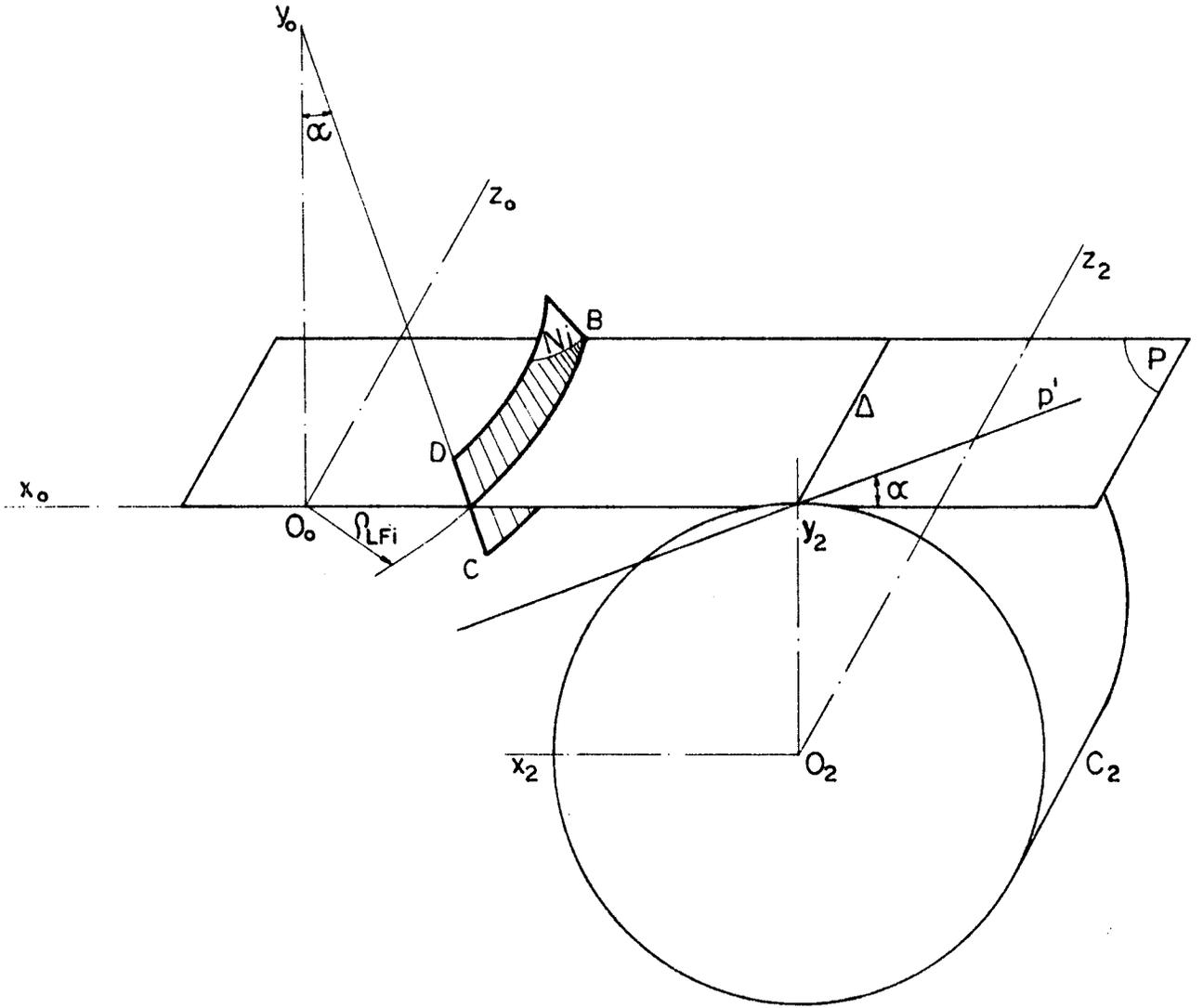


fig. 09 a - geração do flanco convexo da engrenagem 2.

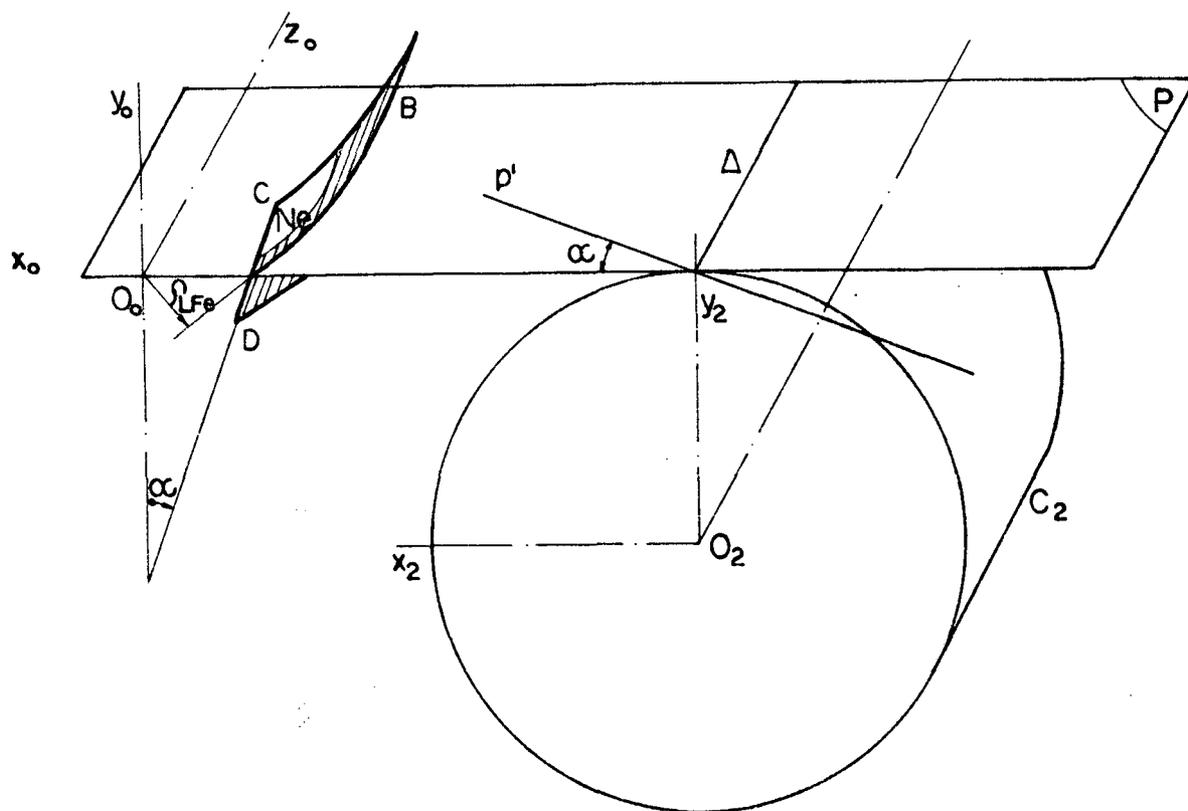


fig. 09 b - geração do flanco côncavo da engrenagem 2.

Considerando-se por exemplo, o contato côncavo - convexo entre a engrenagem 1 e a engrenagem 2, verifica-se:

- I ) que o flanco côncavo da engrenagem 1 é parcialmente conjugado do flanco convexo da engrenagem 2, em virtude de ambos serem gerados por porções de superfícies que se tangenciam segundo o segmento de reta\* CD, (ver figura 10).

---

\* o que equivale a dizer-se, que considerando-se uma seção transversal genérica qualquer (diferente da meridiana), os perfis correspondentes aos flancos, côncavo e convexo, são envoltórios de distintos arcos de hipérbole

- II) que o contato entre os flancos citados em I reduz-se ao contato entre os perfis meridianos\*\*, sendo portanto pontual.
- III) que a superfície de ação, reduz-se à reta  $p$ , contida no plano meridiano (ver figuras 08 a e 09 a)

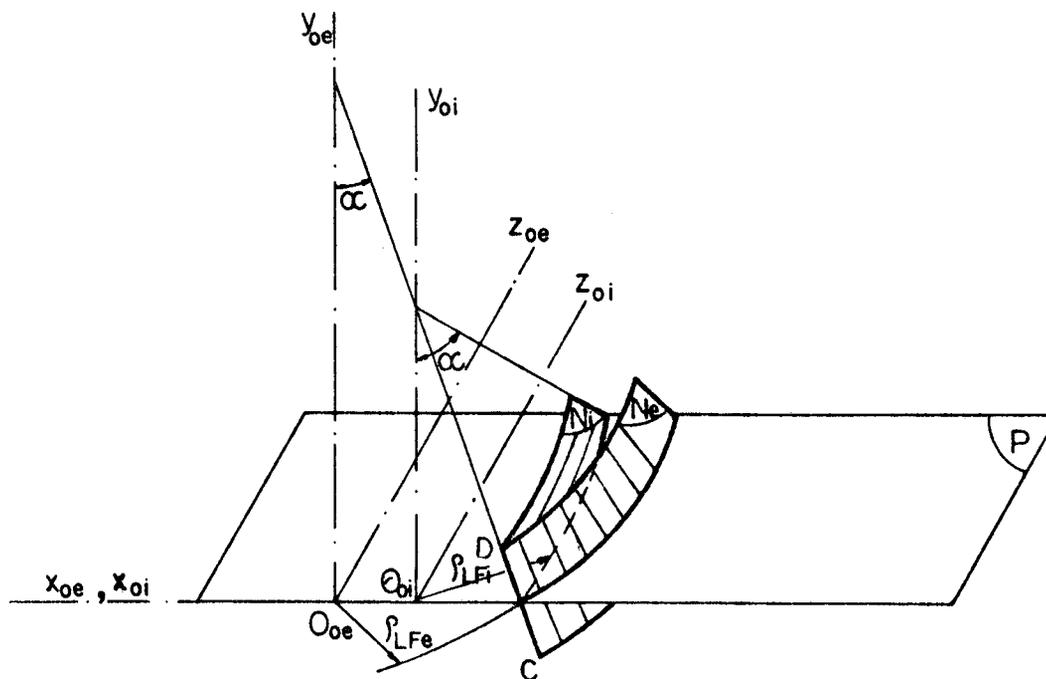


fig. 10 - comparação entre as superfícies geratrizes  $N_i$  e  $N_e$ .

Tendo-se em vista analisar, de uma outra maneira, o que se passa com as engrenagens 1 e 2, quando elas estiverem em contato, considere-se:

---

\*\* tendo em vista que estes perfis, são envoltórios de um mesmo segmento de reta,  $CD$ , ao superpor-se as figuras 08 a e 09 a.

- $S_1$  - superfície solidária a  $C_1$ , gerada conforme sugere a figura 08 a.
- $S_2$  - superfície solidária a  $C_2$ , gerada a partir de  $S_1$ , pelo método das envoltórias, considerando-se  $C_1$  e  $C_2$  tangentes segundo a geratriz  $\Delta$ .
- L - linha de contato entre  $S_1$  e  $S_2$ , em um determinado instante.
- $S'_2$  - superfície solidária a  $C_2$ , gerada conforme sugere a figura 09 a, tangente a  $S_2$ , segundo o perfil meridiano da engrenagem 2,  $p_{m2}$ , em virtude do que sugere a figura 10.

Assim, substituindo-se  $S_2$  por  $S'_2$ , o contato entre  $S_1$  e  $S'_2$  será o ponto de intersecção entre L e  $p_{m2}$ , reduzindo-se a superfície de ação, à linha de ação de  $p_{m1}/p_{m2}$ .

Também superpondo-se as figuras 08 b e 09 b, ao considerar-se o contato convexo-côncavo entre as engrenagens 1 e 2, chega-se a conclusões semelhantes.

2.3. - Geração de denteados em rodas cilíndricas, a partir de cremalheiras geratrizes dotadas de flancos cilíndricos de revolução

### 2.3.1 - Generalidades

A cremalheira geratriz pode ser caracterizada por (figura 11):

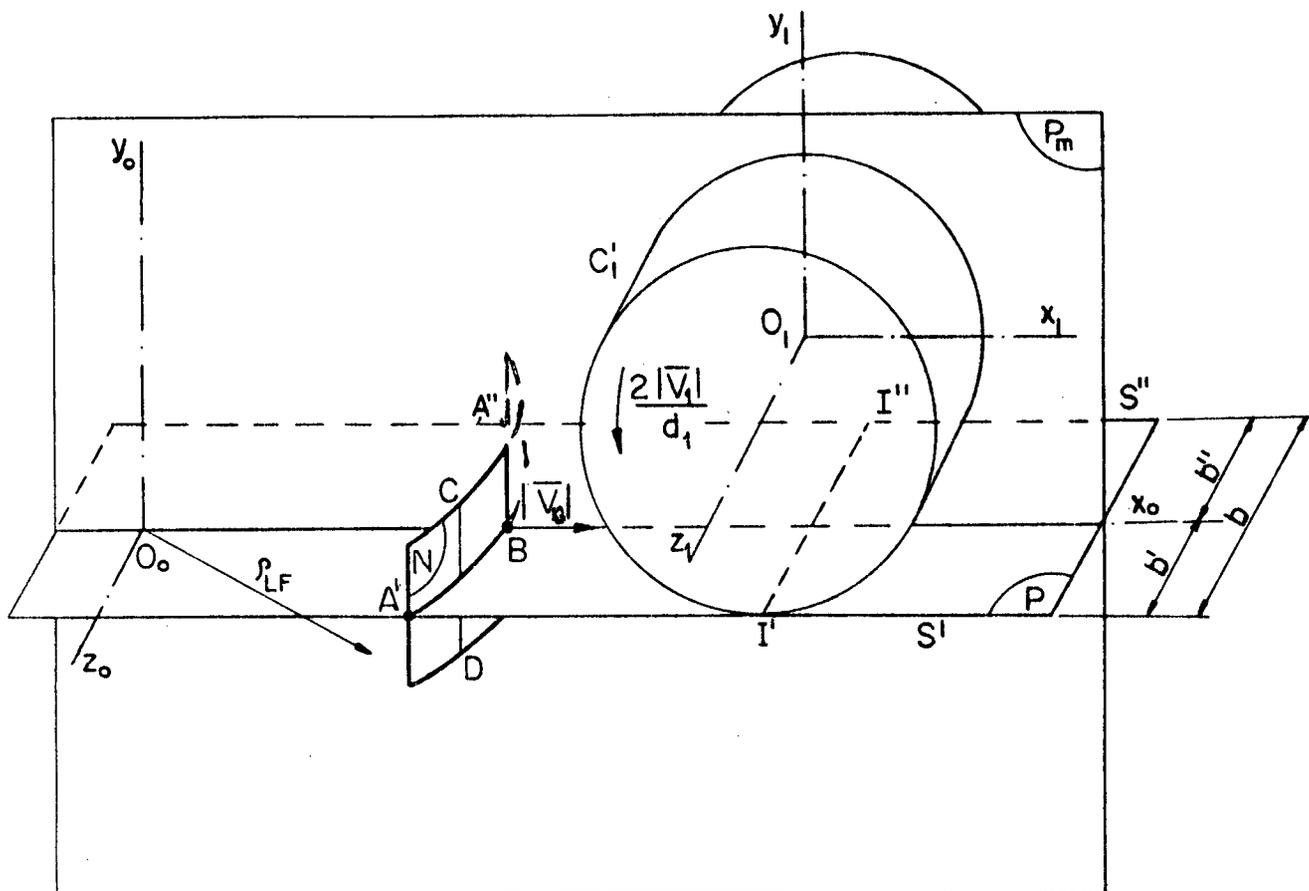


fig.11 - cremalheira geratriz

I ) seu plano primitivo de geração\* P, podendo o mesmo, sofrer translação sobre ele mesmo, na direção do eixo  $0_0X_0$  e limitado pelas retas  $S'$  e  $S''$ ,  $\overline{I'I''}$  representando o segmento de contato de P com a superfície cilíndrica\*\* de eixo  $0_1Z_1$  da engrenagem a ser gerada; tem-se:

$$\overline{I'I''} = b' + b'' = b \quad (3)$$

\* ver apêndice 01

\*\*  $C'_1$  a ser definida posteriormente.

II ) sua superfície geratriz (N), solidária a P, e determina da como segue:

- a) pela sua interseção A'BA'' com P; esta é um arco de circunferência de centro  $O_0$  e de raio  $\rho_{LF} = \overline{O_0B}$ , e representa a linha de flanco de um dente da cremalheira geratriz; os pontos  $O_0$ , B e  $O_1$  estão situados no plano meridiano  $P_m$ .
- b) pela forma como é gerada, a partir de um segmento retilíneo CD, o qual se desloca, apoiando-se em A'BA'', mantendo - se normal a P; é pois, uma porção da superfície lateral de um cilindro, tendo eixo  $O_0Y_0$ , normal a P; tem-se:

$$\overline{CD} = h_0 \text{ ( altura do dente da cremalheira geratriz).} \quad (4)$$

O ângulo de pressão da cremalheira definida na figura 11 é:

$$\alpha_0 = 0 \quad (5)$$

A bibliografia | 7| desenvolve uma teoria, que permite gerar uma engrenagem, tendo ângulo de pressão  $\alpha_1$ , em que:

$$\alpha_1 \neq \alpha_0 \quad (6)$$

e apresenta a expressão:

$$|\vec{V}_0| = |\vec{V}_1| |\cos(\alpha_0 - \alpha_1) + \text{sen}(\alpha_0 - \alpha_1) \text{tg } \alpha_0| \quad (7)$$

na qual (ver figura 11).

- $|\vec{V}_0|$  - velocidade de translação da superfície geratriz N, na direção "X<sub>0</sub>".
- $|\vec{V}_1|$  - velocidade tangencial do cilindro primitivo da engrenagem semi-acabada, devida à rotação da mesma, no sentido positivo.
- $\alpha_0$  - ângulo de pressão da ferramenta\*.
- $\alpha_1$  - ângulo de pressão da engrenagem a ser gerada. No que segue, se o denominará simplesmente de  $\alpha$ .

Considerando-se a expressão (5), a expressão (7) transforma-se em:

$$|\vec{V}_0| = |\vec{V}_1| \cos \alpha. \quad (8)$$

### 2.3.2 - Geração preliminar, considerando a cremalheira geratriz

Considerando-se a expressão (8), afim de que a superfície cilíndrica C'<sub>1</sub> (ver figura 11) role sobre o plano P, deve-se ter:

$$d'_1 = d_1 \cos \alpha \quad (9)$$

Considere-se na figura 12:

---

\* ou da cremalheira geratriz, pois esta é simulada pela ferramenta e seus movimentos.



A interseção do conjunto representado na figura 12, por um plano qualquer, normal a  $O_1Z_1$ , distante  $z_1$  de  $P_m$  é reproduzida na figura 13, sejam na mesma figura:

- $c'_1$  - circunferência de diâmetro  $d'_1$ .
- $p$  - reta primitiva de geração, tangente a  $c'_1$ .
- $s_1$  - perfil transversal, solidário a  $c'_1$ .
- $n$  - reta geratriz, normal a  $p$  no ponto  $M$ .

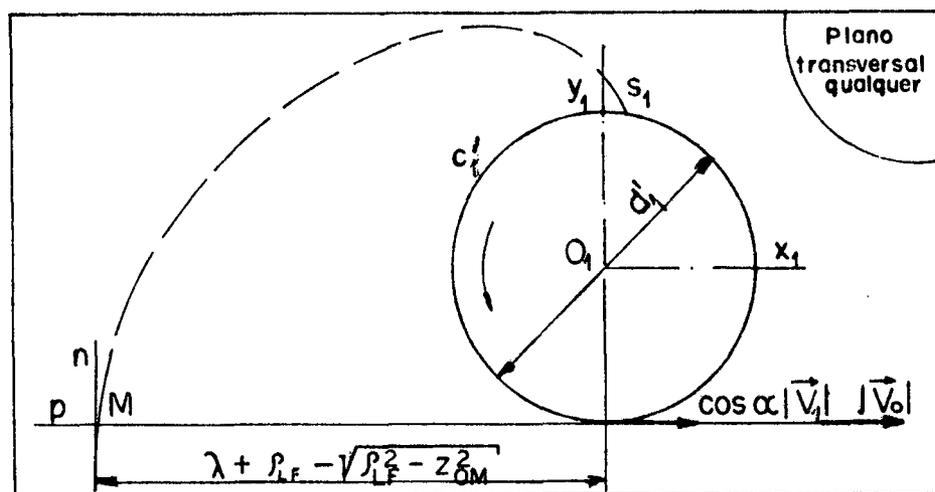


Fig. 13 - seção transversal da figura 12.

Observa-se na figura 13, que  $s_1$  é o lugar geométrico do ponto  $M$ , quando a reta  $p$ , rola sem deslizar sobre  $c'_1$ . Assim,  $s_1$  é um perfil evolvente bem como qualquer um outro perfil transversal de  $S_1$ . A circunferência  $c'_1$  é assim, a circunferência de base da engrenagem 1, e tem-se:

$$d_{b1} = d'_1, \quad (10)$$

sendo,  $d_{b1}$ , o diâmetro da circunferência de base,  $c_{b1}$ .

Tendo-se em vista determinar a interseção de  $S_1$  com  $C'_1$ , considere-se na figura 14a

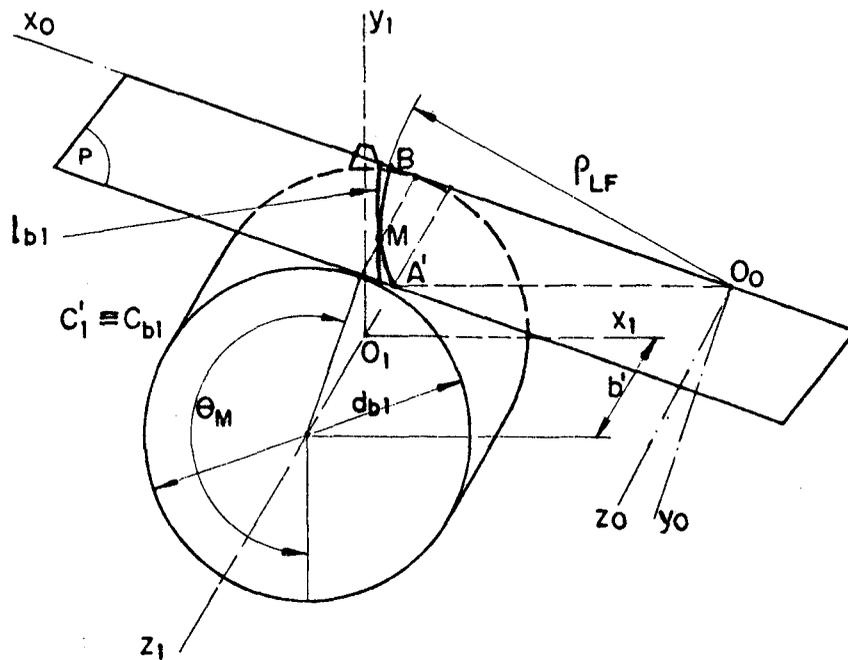


Fig. 14a- envoltória  $l_{b1}$  do arco de circunferência A'B.

- $C_{b1}$  - cilindro de base da engrenagem 1, idêntico ao cilindro  $C'_1$ , tendo diâmetro igual a  $d_{b1}$ . Nesta figura representou-se apenas parte do mesmo, tendo largura  $b'$ .
- $l_{b1}$  - interseção de  $S_1$  com  $C'_1$ .
- $P$  - plano primitivo de geração, tangente a  $C_{b1}$  e deslocado em relação à posição indicada na figura 12, de um ângulo  $\theta_M$ .

O arco de circunferência A'B, tangencia  $l_{b1}$  em cada instante, em um ponto genérico M. Assim,  $l_{b1}$  é a envoltória de A'B.

Na figura 12, o parâmetro  $\lambda$ , pode ser fixado de tal forma, que no plano  $P_m$ , resulte a configuração mostrada na figura 14b. Sejam na mesma figura:

- $\xi$  - ângulo central, em radianos, que subtende a semi - espessura do dente, medida na circunferência primitiva, considerando-se a seção transversal meridiana.
- $\beta$  - ângulo central, em radianos, que subtende o arco de evolvente, compreendido entre as circunferências, primitiva e de base.

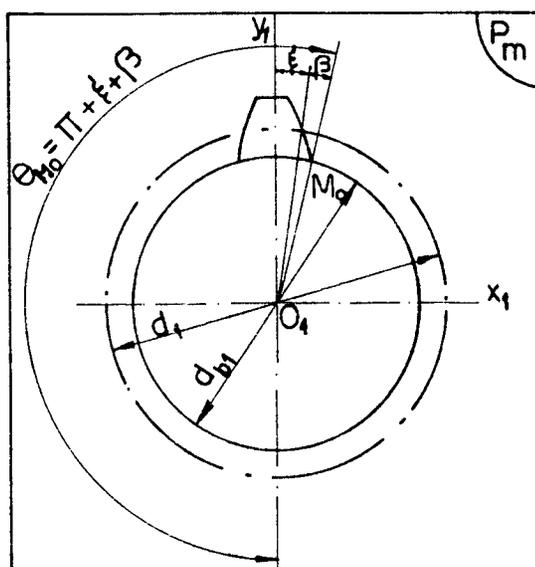


Fig. 14b - seção transversal meridiana, da engrenagem representada na figura 14a

Considerando-se as figuras 12 e 14b, tem-se [9] as expressões (11a) e (11b).

$$\beta = E\nu\alpha \quad (11a)$$

$$\lambda = \frac{d'_1}{2} (\pi + \xi + E\nu\alpha) \quad (11b)$$

Considerando-se a figura 14a, as coordenadas de M, relativas ao sistema  $0_1 X_1 Y_1 Z_1$ , serão:

$$x_{1M} = \frac{d_{b1}}{2} \operatorname{sen} \left( \xi + E\nu\alpha + \frac{\rho_{LF} - \sqrt{\rho_{LF}^2 - z_{0M}^2}}{d_{b1}/2} \right) \quad (12)$$

$$y_{1M} = \frac{d_{b1}}{2} \operatorname{cos} \left( \xi + E\nu\alpha + \frac{\rho_{LF} - \sqrt{\rho_{LF}^2 - z_{0M}^2}}{d_{b1}/2} \right) \quad (13)$$

$$z_{1M} = z_{0M} \quad (14)$$

Em virtude dos resultados encontrados, pode-se escrever a seguinte definição:

" $S_1$  é a superfície gerada por um perfil evolvental que se desloca, mantendo-se paralelo a si mesmo, ao longo da linha  $l_{b1}$ ".

### 2.3.3 - Geração dos flancos conjugados em um par de engrenagens

Considerando-se na figura 15 :

- $P_m$  - plano meridiano de um par de engrenagens de dentes curvos.
- $C_1, C_2$  - superfícies cilíndricas primitivas, de diâmetro respectivamente,  $d_1$  e  $d_2$ , do mesmo par de engrenagens, tangentes entre si, segundo a geratriz  $\Delta$ , e de eixos respectivamente  $0_1 Z_1$  e  $0_2 Z_2$ .
- $C_{b1}, C_{b2}$  - superfícies cilíndricas de base, de diâmetros respectivamente,  $d_{b1}$  e  $d_{b2}$ , do mesmo par de engrenagens.
- $P$  - plano primitivo de geração, tangente a  $C_{b1}$  e  $C_{b2}$ , se-

gundo  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , respectivamente.

- N - superfície geratriz, solidária a P, definida em 2.3.1.  
 $|\vec{V}_1|, |\vec{V}_2|$  - velocidades tangenciais periféricas, respectivamente dos cilindros  $C_1$  e  $C_2$ .

Sendo,  $C'_2$ , uma superfície cilíndrica de eixo  $0_2Z_2$  e de diâmetro  $d'_2$ , semelhante a  $C'_1$  definida em 2.3.2- , então em virtude das expressões (9) e (10), pode-se escrever:

$$d'_2 = d_2 \cos \alpha \quad (15)$$

$$d_{b2} = d'_2 \quad (16)$$

Em virtude das expressões (9), (10), (15) e (16) conclui-se que P contém  $\Delta$ .

Analogamente à expressão (8), pode-se escrever, considerando-se agora a engrenagem 2:

$$|\vec{V}_0| = |\vec{V}_2| \cos \alpha \quad (17)$$

comparando-se as expressões (8) e (17), vem:

$$|\vec{V}_0| = |\vec{V}_1| \cos \alpha = |\vec{V}_2| \cos \alpha \quad (18)$$

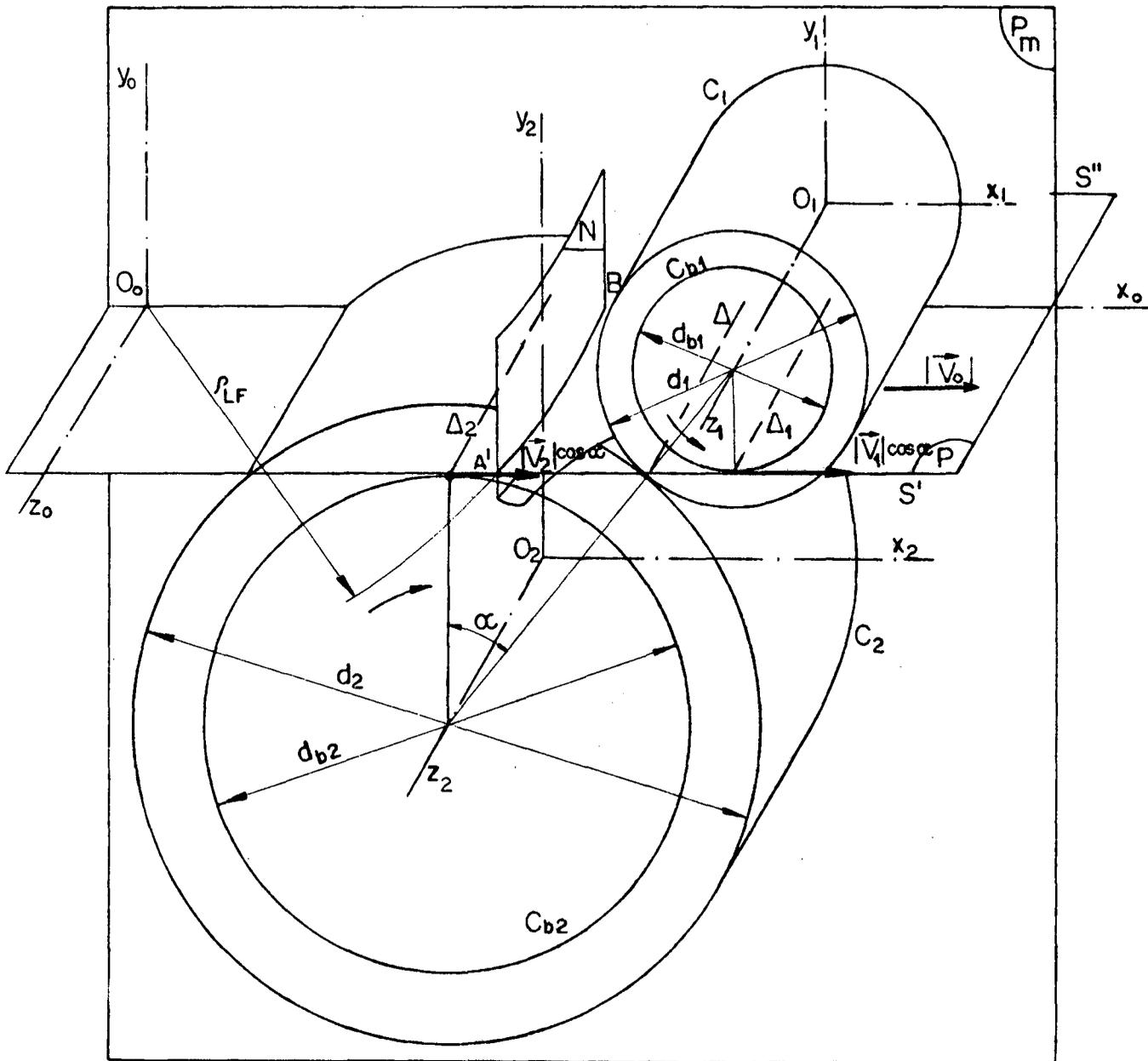


Fig. 15 - geração dos flancos conjugados,  $S_1$  e  $S_2$ .

Fazendo-se  $P$  rolar sem deslizar, simultaneamente sobre  $C_{b1}$  e  $C_{b2}$ \*, se originam\*\* duas superfícies\*\*\*,  $S_1$  e  $S_2$ , envoltórias-

\*  $C_1$  e  $C_2$  se manterão em contato, em virtude da expressão (18).

\*\* em virtude do "método das envoltórias".

\*\*\* análogas à superfície  $S_1$ , definida em 2.3.2 -.

rias de  $N$  solidárias respectivamente a  $C_{b1}$  e  $C_{b2}$  e conjugadas cônica-convexa, em virtude do método das curvas de rolamento [3].

Tendo-se em vista maior clareza, considere-se na figura 16. uma seção transversal \* qualquer da representação contida na figura 15. e sejam:

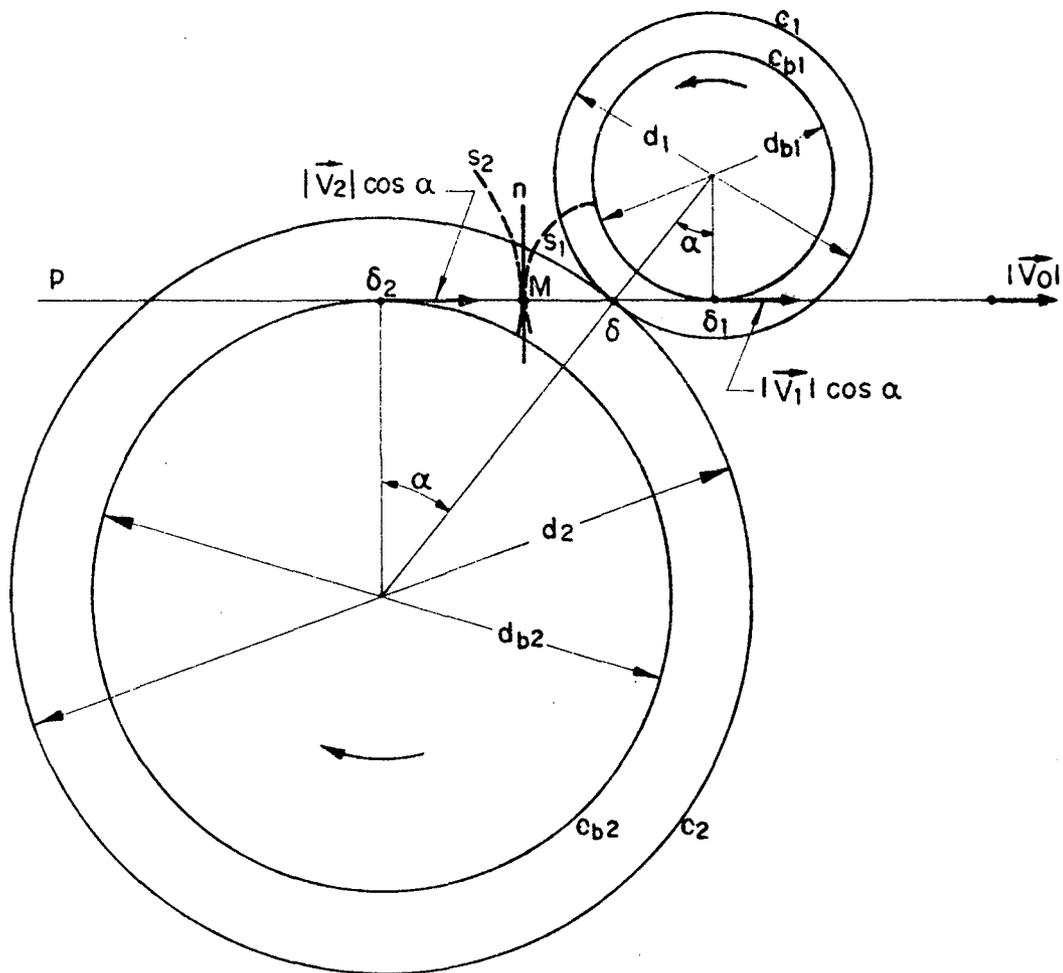


Fig. 16 - perfis transversais conjugados,  $s_1$  e  $s_2$ .

\* contida em um plano normal qualquer, aos eixos  $0_1Z_1$  e  $0_2Z_2$ .

- $C_1, C_2$  - circunferências primitivas, das engrenagens 1 e 2, tangentes no ponto  $\delta$ .  
 $c_{b1}, c_{b2}$  - circunferências de base, das mesmas engrenagens.  
 $p$  - reta primitiva de geração, tangente a  $c_{b1}$  e  $c_{b2}$ , se gundo  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , respectivamente, e contendo  $\delta$ .  
 $n$  - reta geratriz, solidária a  $p$  e normal a esta em virtude do exposto em 2.3.1 - .  
 $s_1, s_2$  - perfis transversais\*, solidários respectivamente a  $c_{b1}$  e  $c_{b2}$ , envoltórios de  $n$  e conjugados entre si.

Considerando-se na figura 16, que:

- I )  $\delta_1$  é o centro instantâneo de rotação, no movimento de  $p$  em relação a  $c_{b1}$ , então a normal ao perfil  $s_1$ , no ponto  $M$ , devendo ser normal a  $n$ , tem direção  $M\delta_1$ .  
 II )  $\delta_2$  é o centro instantâneo de rotação, no movimento de  $p$  em relação a  $c_{b2}$ , então a normal ao perfil  $s_2$ , no ponto  $M$ , devendo ser normal a  $n$ , tem direção  $M\delta_2$ .  
 III )  $\delta$  é o centro instantâneo de rotação, no movimento de  $c_{b1}$  em relação a  $c_{b2}$ , então a normal comum aos perfis  $s_1$  e  $s_2$ , tem direção  $M\delta$ .

Conclui-se que o ponto de tangência  $M$ , comum a  $s_1, s_2$  e  $n$ , deve estar contida em  $p$ , em cada instante, durante o processo de rolamento.

A reta  $p$  é o lugar geométrico dos pontos de contato entre os perfis  $s_1$  e  $s_2$  e coincide com a normal comum a estes perfis. Ao considerar-se a transmissão de movimento entre as engrenagens 1 e 2, conclui-se que:

---

\* utilizáveis

- I ) P é também o "plano de ação".
- II ) o contato entre os flancos  $S_1$  e  $S_2$ , se dá segundo o arco " de circunferência A'BA" (ver figura 15).
- III) o contato entre os mesmos flancos, é caracterizado pela forma convexa-côncava.

Neste subcapítulo definiu-se assim por considerações geométricas, os elementos relacionados em 2.2.2 - de I a VI.

#### 2.3.4 - Geração prática dos flancos, em pares de engrenagens

Em 2.3.3-, admitiu-se que tanto o flanco convexo, como o flanco côncavo, fossem gerados por uma mesma superfície geratriz, N. Esta é uma condição básica, para obter-se flancos conjugados. No entanto, uma das maneiras simples de se usinar engrenagens do tipo referido em 2.3 -, consiste em adotar-se uma fresa frontal, com dentes tendo arestas cortantes retilíneas\*, conforme esquematiza-se na figura 17. Ainda, levando-se em conta que estas arestas e seus movimentos, simulam os flancos da cremalheira geratriz, nota-se haver interesse em tratar-se da geração dos flancos de um par de engrenagens, considerando-se simultaneamente, duas superfícies geratrizes,  $N_e$  e  $N_i$ , definidas de forma análoga à superfície N da figura 11, sendo :

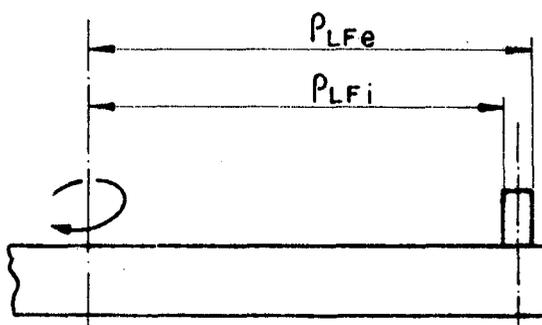


Fig. 17 - esboço de uma fresa, adotada na usinagem de engrenagens do tipo referido em 2.3- .

\* tendo ângulo de pressão  $\alpha_0 = 0^\circ$ .

$N_e$  - superfície geratriz, conforme figura 18a adotada na geração dos flancos côncavos, por exemplo, da engrenagem 1.

$N_i$  - superfície geratriz, conforme figura 18b adotada na geração dos flancos convexos, por exemplo, da mesma engrenagem 1.

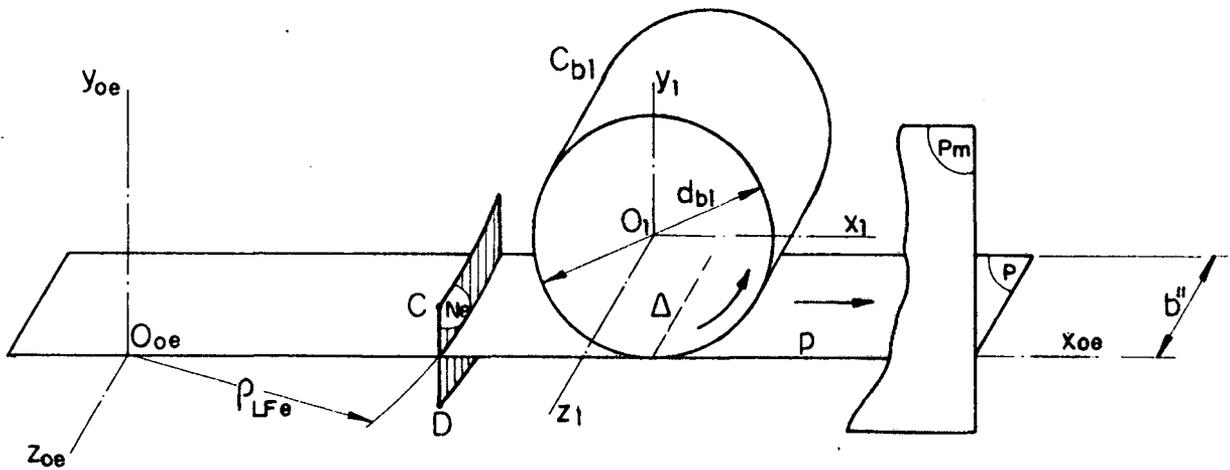


Fig. 18a - geração dos flancos côncavos, da engrenagem 1.

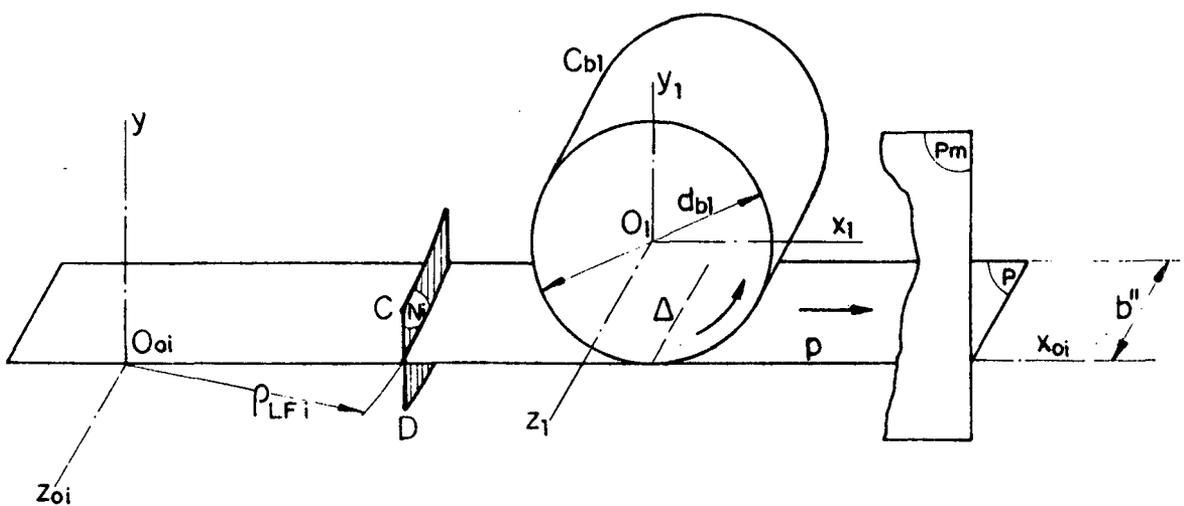


Fig. 18b - geração dos flancos convexos, da engrenagem 1.

Nas figuras 19a e 19b, esquematiza-se respectivamente a geração dos flancos convexos e dos flancos côncavos da engrenagem 2.

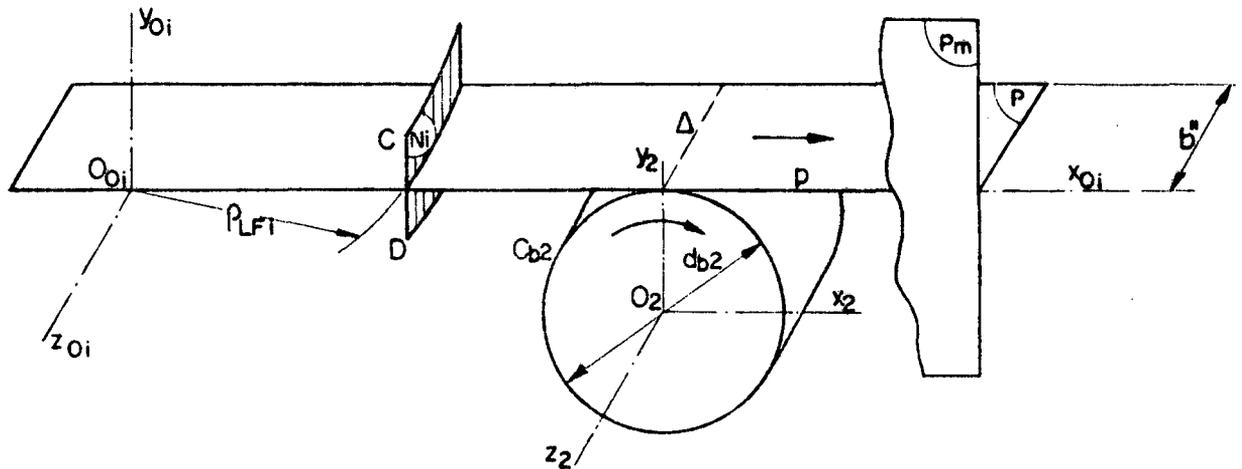


Fig. 19a - geração dos flancos convexos, da engrenagem 2.

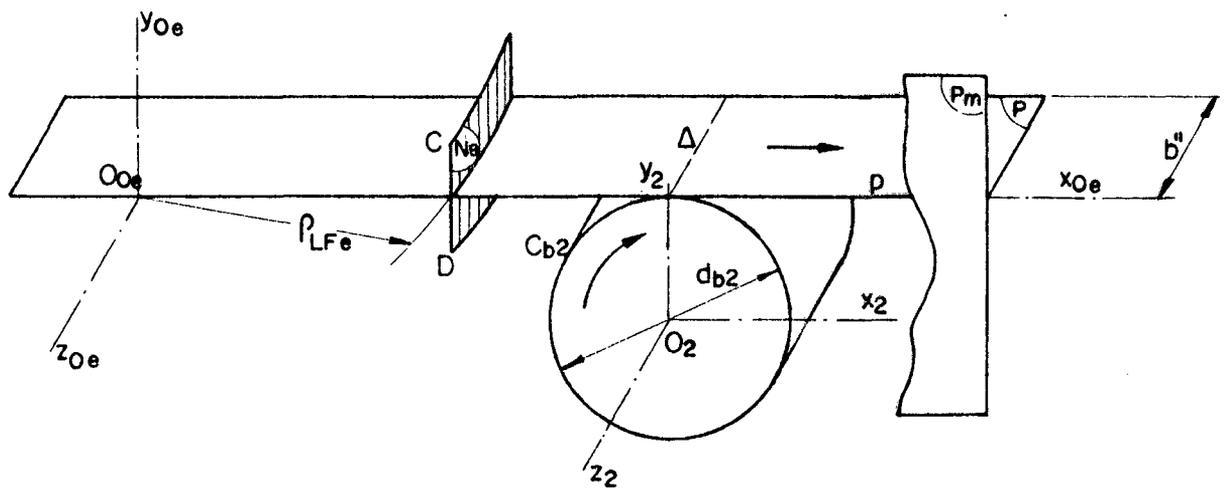


Fig. 19b - geração dos flancos côncavos, da engrenagem 2.

Tendo-se em vista analisar, o que ocorre com as engrenagens 1 e 2, quando em contato, suponha-se inicialmente:

$S_{c1}$  - flanco côncavo, solidário a  $C_{b1}$ , gerado conforme sugere a figura 18a.

$S_{v2}$  - flanco convexo, solidário a  $C_{b2}$ , gerado\* por  $S_{c1}$ , supondo-se  $C_1$  e  $C_2$ , tangentes segundo a geratriz  $\Delta$ .

Os flancos  $S_{c1}$  e  $S_{v2}$ , são conjugados e o contato entre os mesmos se dá segundo um arco de circunferência\*\* A'BA''.

Considere-se agora, que se substitua  $S_{v2}$  por  $S'_{v2}$ , sendo:

$S'_{v2}$  - flanco convexo, solidário a  $C_{b2}$ , gerado conforme sugere a figura 19a.

Os flancos  $S'_{v2}$  e  $S_{v2}$ , não são congruentes, tangenciando-se segundo o perfil meridiano\*\*\*,  $p_{m2}$ . O contato entre  $S_{c1}$  e  $S'_{v2}$ , em cada instante \*\*\*\*, se dá no ponto de interseção das linhas A'BA'' e  $p_{m2}$ . A superfície de ação reduz-se portanto, à reta  $p$  (ver figuras, 18a e 19a), contida no plano meridiano.

Chega-se a conclusões semelhantes, considerando-se o contato entre os flancos anti-homólogos,  $S_{v1}$  e  $S'_{c2}$ , das engrenagens 1 e 2.

\* pelo método das envoltórias.

\*\* conforme foi mostrado em 2.3.3-.

\*\*\* em virtude de poderem ser considerados como gerados respectivamente por  $N_i$  e  $N_e$ , que são superfícies não congruentes, tangentes segundo a geratriz CD (ver figura 20) contida na seção meridiana  $P_m$ .

\*\*\*\* durante o engrenamento destes flancos.

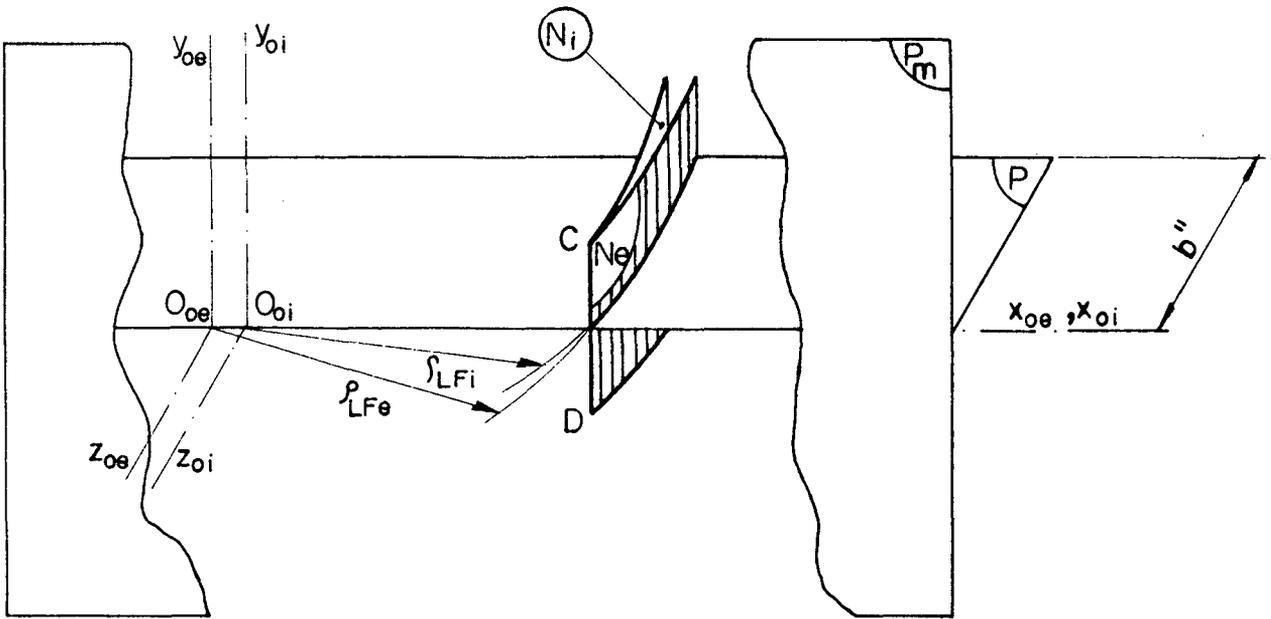


Fig. 20 - as superfícies geratrizes,  $N_e$  e  $N_i$  se tangenciam segundo  $CD$

### 3 - ESTUDO ANALÍTICO DA GERAÇÃO DAS ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES CURVOS

#### 3.1 - Generalidades

Em 2.2-, tratou-se da geração de engrenagens cilíndricas\*, baseando-se em considerações puramente geométricas. Em 2.2.2. conclui-se que as formas enumeradas, de (I) a (VI) não são deduzíveis, apenas com aquelas considerações. Dessa forma neste capítulo se deduzirá analiticamente algumas das formas citadas em 2.2.2-.

#### 3.2 - Determinação analítica da cremalheira geratriz.

Na figura 21, representa-se um dente da cremalheira geratriz, simulado pelos gumes da ferramenta\*\*.

Tendo-se em vista, distinguir os elementos pertencentes a cada um dos flancos (convexo ou côncavo), considere-se:

v- sub-índice adicional, relativo ao flanco convexo.

c- sub-índice adicional, relativo ao flanco côncavo.

---

\* adotando-se uma cremalheira básica, dotada de flancos tronco-cônicos, de revolução.

\*\*ilustrada esquematicamente na figura 07 e, suposta em movimento de rotação, em torno do eixo  $0_0Y_0$ .

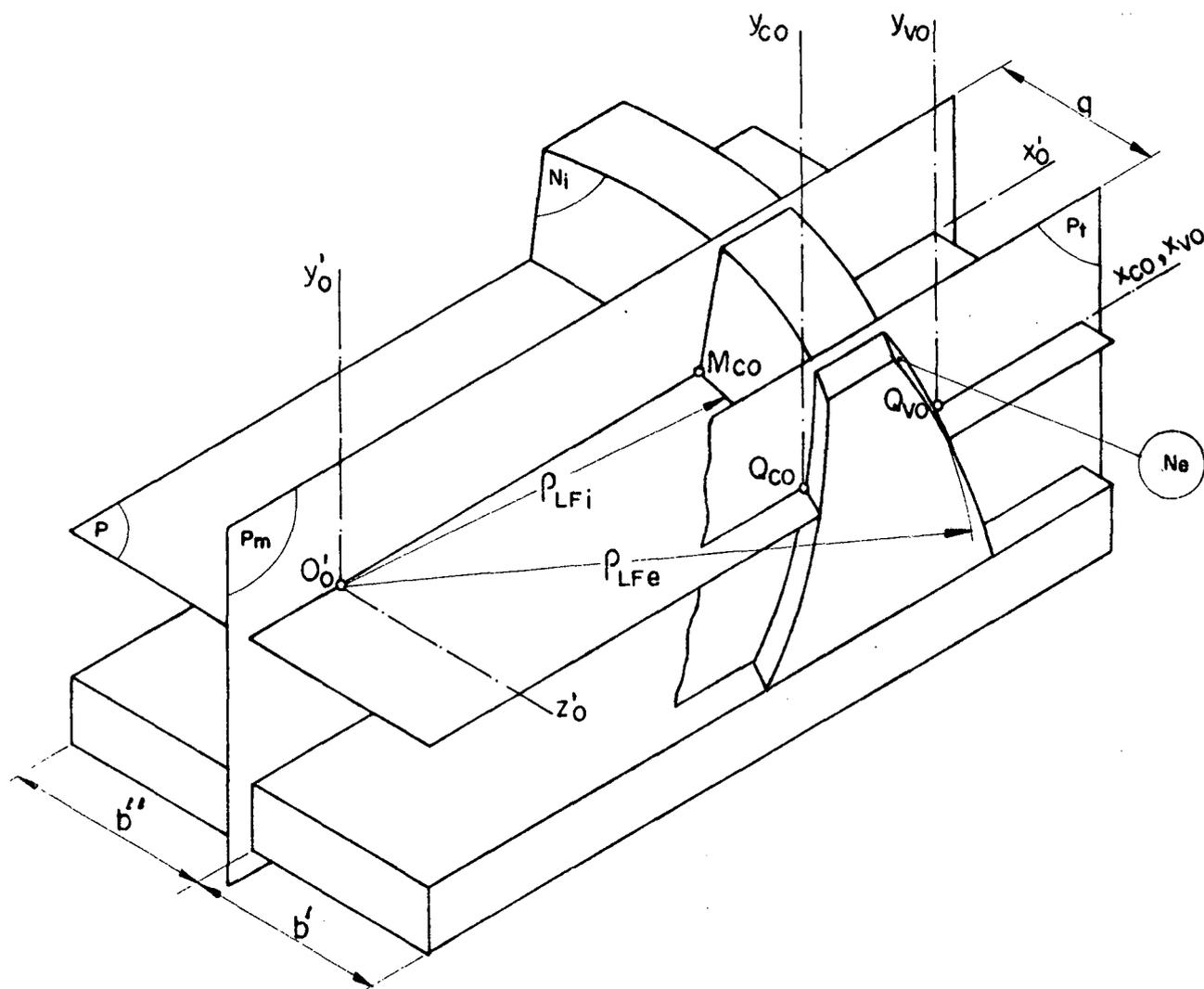


Fig. 21 - dente da cremalheira geratriz e superfícies secantes.

Sejam, na figura 21:

- $P$  - superfície primitiva da cremalheira geratriz.
- $P_m$  - superfície transversal meridiana.
- $P_t$  - superfície transversal qualquer.
- $N_i$  - superfície geratriz côncava, semelhante a das figuras 08b e 09a.
- $N_e$  - superfície geratriz convexa, semelhante às das figuras 08a e 09b.
- $M_{co}$  e  $M_{vo}$  - pontos contidos simultaneamente em  $P_m$  e  $P$ , respectiva-

mente nos flancos, côncavo e convexo.

$Q_C$  e  $Q_V$  - pontos contidos simultaneamente em  $P_t$  e  $P$ , respectivamente nos flancos, côncavo e convexo.

A figura 22, define |3| os elementos geométricos contido na seção  $P_m$ , da cremalheira geratriz.

Sejam, na figura 22:

$\alpha_0$  - ângulo de pressão da ferramenta e, da cremalheira geratriz.

$m_0$  - módulo da ferramenta e da cremalheira geratriz.

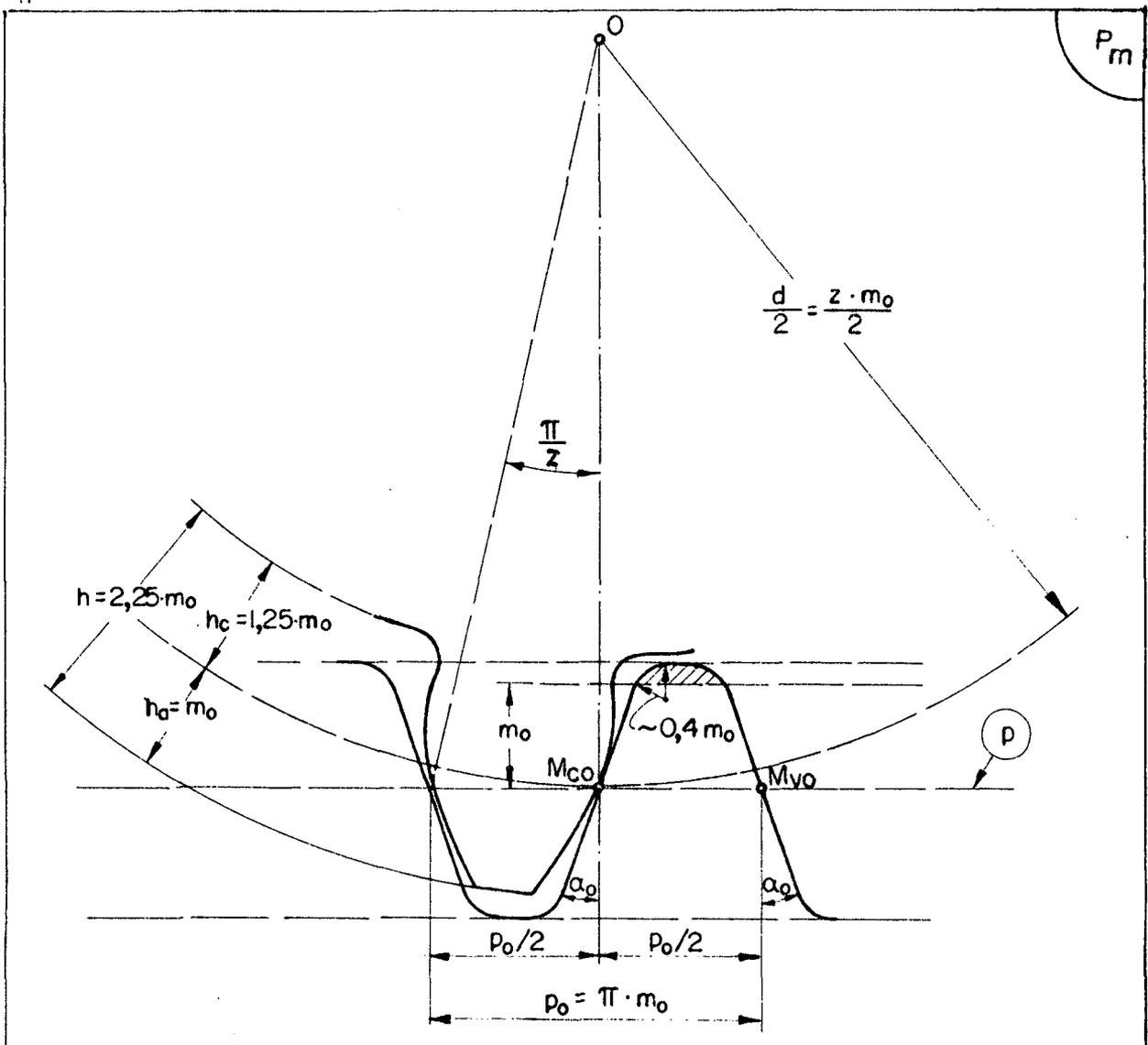


Fig. 22 - seção transversal meridiana da cremalheira geratriz e da engrenagem por ela gerada.

Suponha-se representada na figura 23, uma seção contida em  $P_t$ , do dente da cremalheira geratriz.

Sejam, na figura 23:

- $s_{c0}$  - perfil utilizável AB, contido no flanco côncavo ( $N_i$ ) da cremalheira geratriz, e, na superfície P.
- $s_{v0}$  - perfil utilizável GH, contido no flanco convexo ( $N_e$ ) da cremalheira geratriz, e na superfície  $P_t$ .

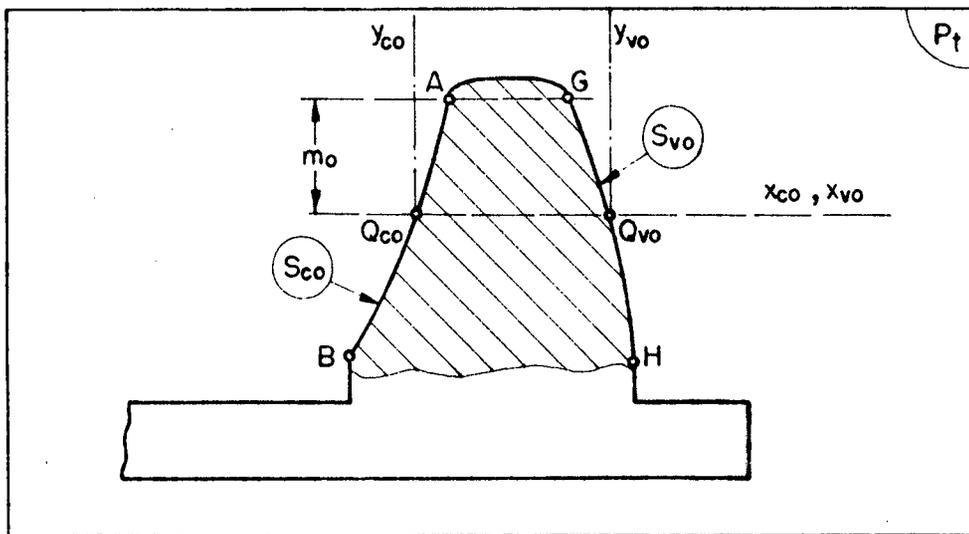


Fig. 23 - seção transversal qualquer da cremalheira geratriz.

Demonstra-se no apêndice 02, que as equações explícitas de  $s_{c0}$  e  $s_{v0}$ , referidas respectivamente aos sistemas de eixos  $Q_{c0}x_{c0}y_{c0}$  e  $Q_{v0}x_{v0}y_{v0}$ , são:

$$x_{c0} = \sqrt{(\rho_{LFi} + y_0 \cdot \text{tg } \alpha_0)^2 - q^2} - \sqrt{\rho_{LFi}^2 - q^2} \quad (19)$$

$$X_{v0} = \sqrt{(\rho_{LFe} - Y_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2 - q^2} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2} \quad (20)$$

Ficam assim definidas as diversas seções transversais da cremalheira geratriz, salvo no que diz respeito às concordâncias na raiz e na cabeça dos dentes, que não se considerarão neste trabalho.

3.3 - Trajetória do ponto de contato, em uma seção transversal qualquer

3.3.1 - Trajetória,  $l_{ti}$ , do ponto de contato entre  $S_{c0}$  e o perfil conjugado da engrenagem.

Na figura 24, considere-se na superfície  $P_t$ , o contato entre os perfis conjugados,  $s_{c0}$  e  $s_v$ .

Sejam, na figura 24:

- $\overline{Q_{c0}K}$  - linha de ação.
- $\alpha_K$  - ângulo de incidência, em um ponto qualquer de contato K.
- $s_v$  - perfil transversal, contido no flanco convexo,  $S_v$  de uma engrenagem gerada conforme sugerem as figuras, 08b e 09a.

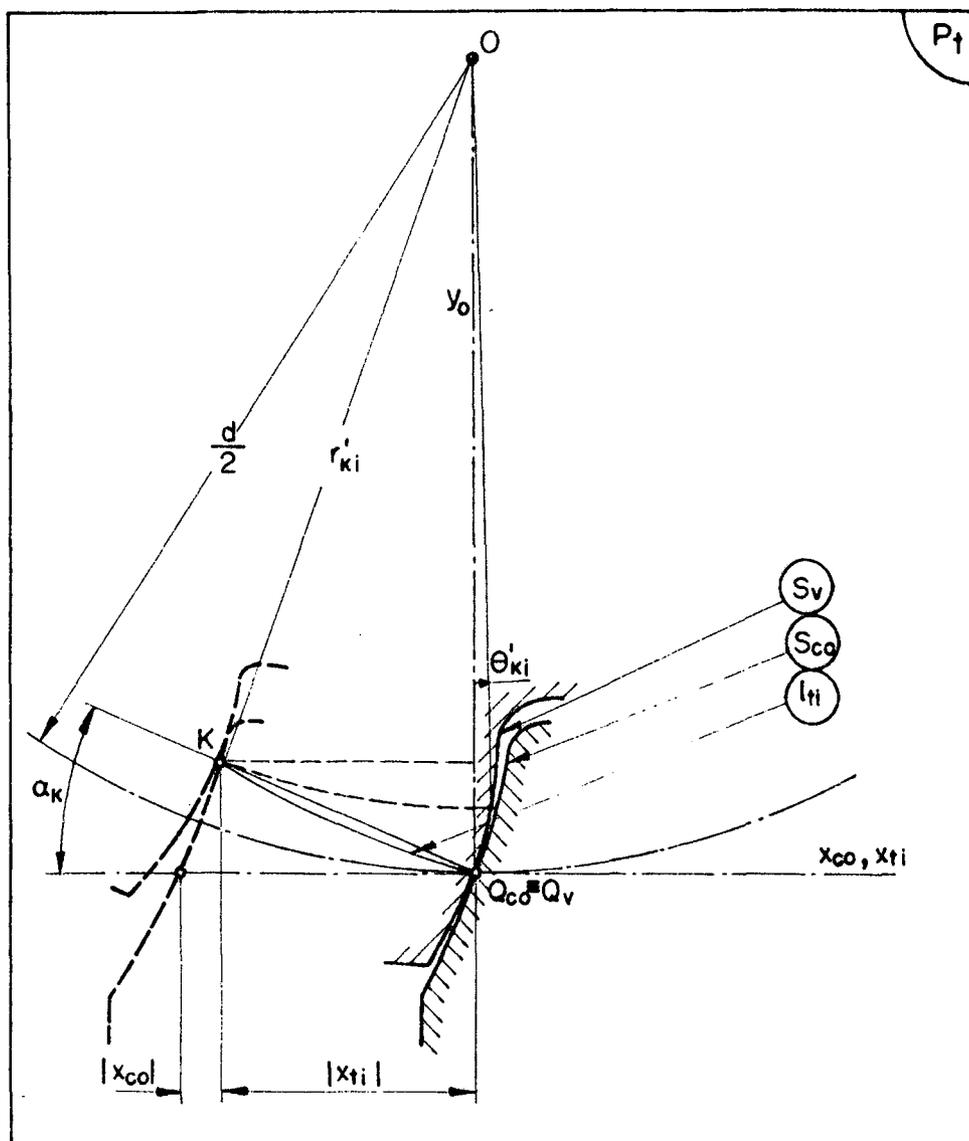


Fig. 24 - trajetória do contato,  $s_{c0}/s_v$ .

Tendo-se em vista, determinar analiticamente, a linha  $l_{ti}$ , pode-se escrever [8] as expressões (21) e (22), pela observação da figura 24.

$$\operatorname{tg} \alpha_K = \frac{Y_0}{-X_{ti}} \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_K = \frac{dx_{co}}{dY_o} \quad (22)$$

Derivando-se a expressão (19), em relação a  $Y_o$ , vem:

$$\frac{dx_{co}}{dY_o} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_0 \cdot (\rho_{Lfi} + Y_o \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)}{\sqrt{(\rho_{Lfi} + Y_o \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2 - q^2}} \quad (23)$$

Comparando-se as expressões (21), (22), obtêm-se a expressão (24), que é a equação explícita da trajetória do ponto de contato,  $l_{ti}$ .

$$x_{ti} = - \frac{Y_o \cdot \sqrt{(\rho_{Lfi} + Y_o \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2 - q^2}}{\operatorname{tg} \alpha_0 \cdot (\rho_{Lfi} + Y_o \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)} \quad (24)$$

### 3.3.2 - Trajetória, $l_{te}$ , do contato entre $s_{v0}$ e o perfil conjugado da engrenagem

Na figura 25, considere-se na superfície  $P_t$ , o contato entre os perfis conjugados,  $s_{v0}$  e  $s_c$ .

Sejam, na figura 25:

- $\overline{Q_{v0}K}$  - linha de ação.
- $\alpha_K$  - ângulo de incidência, em um ponto qualquer de contato, K.
- $s_c$  - perfil transversal, contido no flanco côncavo,  $S_c$ , de uma engrenagem gerada conforme sugerem as figuras, 08a e 09b.

Seguindo-se raciocínio análogo ao de 3.3.1-, obtêm-se a expressão (25), para a equação explícita da trajetória do ponto de contato,  $l_{te}$ .

$$x_{te} = \frac{Y_0 \cdot \sqrt{(\rho_{LFe} - Y_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2 - q^2}}{\operatorname{tg} \alpha_0 \cdot (\rho_{LFe} - Y_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)} \quad (25)$$

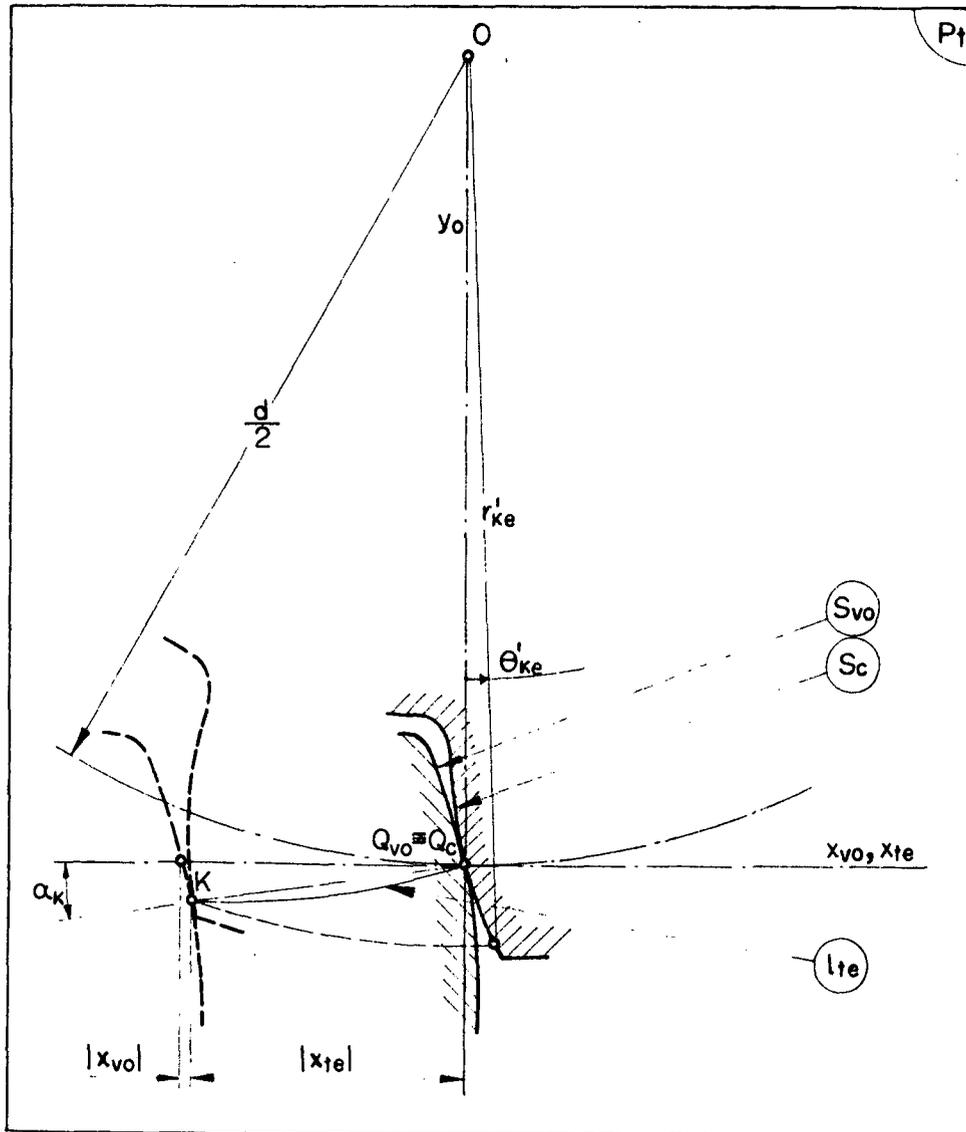


Fig. 25 - trajetória do contato,  $s_{v0}/s_c$ .

### 3.4 - Determinação analítica dos perfis de engrenagens

#### 3.4.1 - Determinação do perfil $s_v$ , conjugado ao perfil $s_{co}$

Seja, na figura 24:

$d$  - diâmetro primitivo de uma engrenagem, gerada pela cremalheira da figura 21.

Na figura 24, considerando-se coordenadas polares ( $r'_{Ki}$ ,  $\theta'_{Ki}$ ), pode-se escrever as expressões (26) e (27), que definem o perfil  $s_v$ .

$$r'_{Ki} = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - Y_0\right)^2 + X_{ti}^2} \quad (26)$$

$$\theta'_{Ki} = \frac{X_{c0} - X_{ti}}{\frac{d}{2}} + \text{arc tg} \frac{X_{ti}}{\frac{d}{2} - Y_0} \quad (27)$$

### 3.4.2 - Determinação do perfil $s_c$ , conjugado ao perfil $s_{v0}$

Seja  $d$  na figura 25, definido como em 3.4.1-.

Na figura 25, considerando-se coordenadas polares ( $r'_{Ke}$ ,  $\theta'_{Ke}$ ), pode-se escrever as expressões (28) e (29), que definem o perfil  $s_c$ .

$$r'_{Ke} = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - Y_0\right)^2 + X_{te}^2} \quad (28)$$

$$\theta'_{Ke} = \frac{X_{v0} - X_{te}}{\frac{d}{2}} + \text{arc tg} \frac{X_{te}}{\frac{d}{2} - Y_0} \quad (29)$$

### 3.5 - Traçado de perfis

### 3.5.1 - Generalidades

Tendo-se em vista, traçar os perfis transversais de um par de engrenagens em contato, suponha-se na figura 26, a sua seção segundo  $P_m$ .

Sejam, na figura 26:

- $s_{mc1}$  e  $s_{mc2}$  - perfis, respectivamente das engrenagens 1 e 2, contidos na seção  $P_m$  e nos flancos côncavos.
- $s_{mv1}$  e  $s_{mv2}$  - perfis, respectivamente das engrenagens 1 e 2, contidos na seção  $P_m$  e nos flancos convexos.
- $\xi_1, \xi_2$  - ângulo central em radianos, que subentende a semi-espessura do dente da engrenagem, (ou do semi-espaço entre-dentes).

Tem-se, admitindo que os perfis não sejam deslocados |3|:

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2 \cdot z_1} \quad (30)$$

$$\xi_2 = \frac{\pi}{2 \cdot z_2} \quad (31)$$

Considerando-se o sistema de coordenadas cartesianas OXYZ (ver figura 26) e, o parâmetro  $Y_0$ , tem-se respectivamente para as equações paramétricas dos perfis  $s_{v1}, s_{v2}, s_{c1}, s_{c2}$ , as expressões de (32) a (43), deduzidas no apêndice 03:

1) perfil  $s_{v1}$ :

$$X = r'_{Kil} \cdot \cos \left( \theta'_{Kil} - \frac{\rho_{Lfi} - \sqrt{\rho_{Lfi}^2 - z^2}}{d_1/2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot z_1} \right) \quad (32)$$

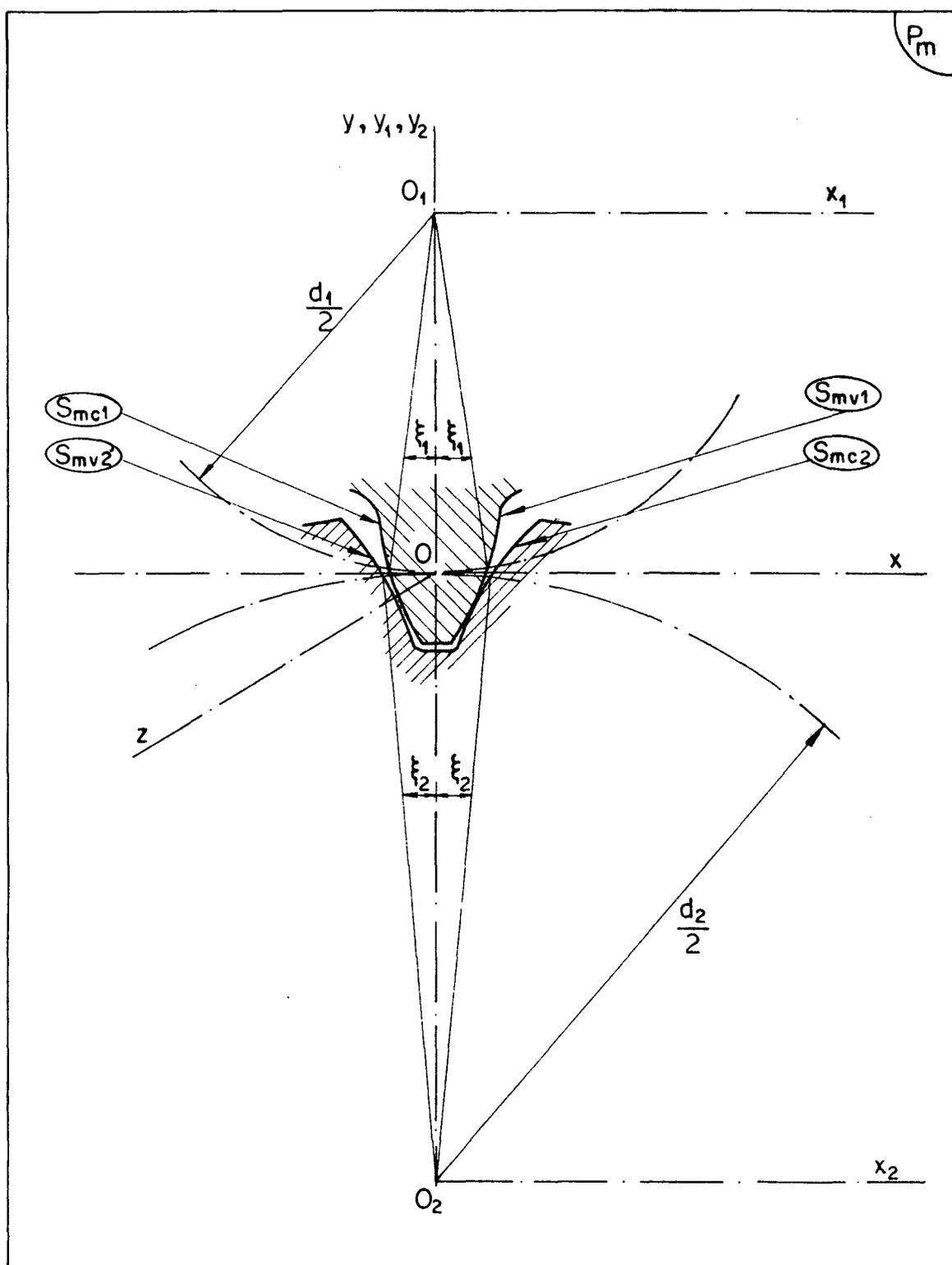


Fig. 26 - seção transversal meridiana de um par de engrenagens em contato.

$$Y = r'_{Ki1} \cdot \text{sen} \left( \theta'_{Ki1} - \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - z^2}}{d_1/2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot z_1} \right) + \frac{d_1}{2} \quad (33)$$

$$z = q \quad (34)$$

II ) perfil  $s_{v2}$ :

$$X = r'_{Ki2} \cdot \cos \left( -\theta'_{Ki2} + \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - z^2}}{d_2/2} - \frac{3 \cdot \pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot z_2} \right) \quad (35)$$

$$Y = r'_{Ki2} \cdot \text{sen} \left( -\theta'_{Ki2} + \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - z^2}}{d_2/2} - \frac{3 \cdot \pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot z_2} \right) - \frac{d_2}{2} \quad (36)$$

$$z = q \quad (37)$$

III) perfil  $s_{c1}$ :

$$X = r'_{Kel} \cdot \cos \left( \theta'_{Kel} - \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - z^2}}{d_1/2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cdot z_1} \right) \quad (38)$$

$$Y = r'_{Kel} \cdot \text{sen} \left( \theta'_{Kel} - \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - z^2}}{d_1/2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cdot z_1} \right) + \frac{d_1}{2} \quad (39)$$

$$z = q \quad (40)$$

IV ) perfil  $s_{c2}$ :

$$X = r'_{Ke2} \cdot \cos \left( -\theta'_{Ke2} + \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - z^2}}{d_2/2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cdot z_2} \right) \quad (41)$$

$$Y = r'_{Ke2} \cdot \sin \left( -\theta'_{Ke2} + \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - z^2}}{d_2/2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cdot z_2} \right) - \frac{d_2}{2} \quad (42)$$

$$z = q \quad (43)$$

O apêndice 5, mostra o programa apropriado a uma calculadora manual, que permite calcular os valores das expressões, de (32) a (43).

### 3.5.2 - Apresentação de resultados

Nas figuras, 27 a 30, se apresenta a traçagem de alguns perfis, para os dados indicados nas mesmas.

Observa-se na figura 27, o contato entre os dentes, na seção meridiana. Já, na figura 28, verifica-se que os dentes, encontram-se afastados, em uma seção transversal qualquer.

Nas figuras 29 e 30, faz-se a comparação entre um perfil evolvental\* ( $s_{mc2}$  ou  $s_{mv2}$ ) e um outro perfil não evolvental ( $s_{c2}$  ou  $s_{v2}$ ), verificando-se a grande semelhança entre os mesmos.

---

\* contido na seção meridiana e traçado deslocado angularmente, de tal forma que a projeção ortogonal do ponto  $Q_{c2}$  (ou  $Q_{v2}$ ) sobre a superfície plana  $P_m$ , se confunda com o ponto  $M_{c2}$  (ou  $M_{v2}$ ), (ver figura 46a).

Y0	perfil $s_{v1}$		perfil $s_{v2}$		perfil $s_{c1}$		perfil $s_{c2}$	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-6	-5,482	-8,301	-10,155	6,763	-1,439	-8,605	3,961	7,204
-5	-3,976	-6,695	-9,264	5,465	-2,718	-6,800	3,150	5,851
-4	-2,719	-5,144	-8,465	4,216	-3,754	-5,084	2,429	4,554
-3	-1,696	-3,676	-7,753	3,021	-4,568	-3,484	1,792	3,316
-2	-0,887	-2,314	-7,126	1,884	-5,184	-2,021	1,236	2,141
-1	-0,271	-1,082	-6,577	0,810	-5,625	-0,715	0,755	1,035
0	0,176	0,000	-6,103	-0,198	-5,919	0,419	0,345	-0,001
1	0,478	0,916	-5,698	-1,136	-6,092	1,367	-0,000	-0,961
2	0,663	1,650	-5,558	-2,000	-6,174	2,118	-0,285	-1,844
3	0,759	2,192	-5,078	-2,789	-6,194	2,666	-0,516	-2,647
4	0,794	2,532	-4,851	-3,497	-6,182	3,006	-0,697	-3,366
5	0,799	2,667	-4,673	-4,123	-6,168	3,139	-0,836	-3,999
6	0,804	2,594	-4,557	-4,664	-6,183	-3,068	-0,936	-4,546

Tab. 02 - coordenadas de alguns pontos dos perfis,  $s_{v1}$ ,  $s_{v2}$ ,  $s_{c1}$ ,  $s_{c2}$ , para os dados indicados na figura 27.

Y <sub>0</sub>	perfil s <sub>mv1</sub>		perfil s <sub>mv2</sub>		perfil s <sub>mc1</sub>		perfil s <sub>mc2</sub>	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-6	-1,973	-8,714	-6,952	7,111	1,973	-8,714	6,952	7,111
-5	-0,551	-6,963	-6,097	5,762	0,551	-6,963	6,097	5,762
-4	0,614	-5,291	-5,337	4,470	-0,614	-5,291	5,337	4,470
-3	1,542	-3,723	-4,666	3,238	-1,542	-3,723	4,666	3,238
-2	2,255	-2,284	-4,080	2,071	-2,255	-2,284	4,080	2,071
-1	2,778	-0,998	-3,574	0,973	-2,778	-0,998	3,574	0,973
0	3,139	0,117	-3,141	-0,053	-3,139	0,117	3,141	-0,053
1	3,365	1,046	-2,777	-1,001	-3,365	1,046	2,777	-1,001
2	3,486	1,775	-2,477	-1,869	-3,486	1,775	2,477	-1,869
3	3,534	2,296	-2,234	-2,655	-3,534	2,296	2,234	-2,655
4	3,540	2,601	-2,042	-3,355	-3,540	2,601	2,042	-3,355
5	3,536	2,691	-1,897	-3,966	-3,536	2,691	1,897	-3,966
6	3,554	2,565	-1,791	-4,487	-3,554	2,565	1,791	-4,487

Tab. 03 - coordenadas de alguns pontos dos perfis s<sub>mv1</sub>, s<sub>mv2</sub>, s<sub>mc1</sub>, s<sub>mc2</sub>, para os dados indicados na figura 28.

$Y_0$	perfil $s_{mc2}$		perfil $s_{c2}$	
	X	Y	X	Y
-6	3,941	7,273	3,961	7,204
-5	3,127	5,900	3,150	5,851
-4	2,406	4,585	2,429	4,554
-3	1,772	3,333	1,792	3,316
-2	1,221	2,149	1,236	2,141
-1	0,747	1,037	0,755	1,035
0	0,345	-0,001	0,345	-0,001
1	0,010	-0,959	-0,000	-0,961
2	-0,265	-1,836	-0,285	-1,844
3	-0,485	-2,629	-0,516	-2,647
4	-0,655	-3,334	-0,697	-3,366
5	-0,782	-3,949	-0,836	-3,999
6	-0,873	-4,474	-0,936	-4,546

Tab. 04 - coordenadas de alguns pontos dos perfis  $s_{mc2}$  e  $s_{c2}$ , sendo que o perfil  $s_{mc2}$ , foi deslocado angularmente de tal forma que a projeção ortogonal de  $M_{c2}$  sobre  $P_t$ , se confunda com  $Q_{c2}$  (ver figura 46a ); adotou-se os dados indicados na figura 27, porém para obtenção das coordenadas do perfil  $s_{mc2}$ , alterou-se os registros  $R_1$  e  $R_4$ , fazendo-os respectivamente iguais a "zero" e  $\rho_{LFe}$ .

$Y_0$	perfil $s_{mv2}$		perfil $s_{v2}$	
	X	Y	X	Y
-6	-10,138	6,841	-10,155	6,763
-5	-9,241	5,520	-9,264	5,465
-4	-8,441	4,252	-8,465	4,216
-3	-7,731	3,042	-7,753	3,021
-2	-7,109	1,894	-7,126	1,884
-1	-6,567	0,813	-6,577	0,810
0	-6,103	-0,198	-6,103	-0,198
1	-5,709	-1,135	-5,698	-1,136
2	-5,382	-1,993	-5,358	-2,000
3	-5,114	-2,771	-5,078	-2,789
4	-4,901	-3,464	-4,851	-3,497
5	-4,736	-4,071	-4,673	-4,123
6	-4,613	-4,588	-4,537	-4,664

Tab. 05 - coordenadas de alguns pontos dos perfis  $s_{mv2}$  e  $s_{v2}$ , sendo que o perfil  $s_{mv2}$ , foi deslocado angularmente, de tal forma, que a projeção ortogonal de  $M_{v2}$  sobre  $P_t$ , se confunda com  $Q_{v2}$  (ver figura 46a ); adotou-se os dados indicados na figura 27, porém para obtenção das coordenadas do perfil  $s_{mv2}$ , alterou-se os registros  $R_1$  e  $R_4$ , fazendo-os respectivamente iguais a "zero e  $\rho_{Lfi}$ ".

Dados:

$\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $q = 0$  mm,  $\rho_{LFi} = 106,86$  mm,  $\rho_{LFe} = 113,14$  mm,  $d_1 = 84$  mm  
 $d_2 = 188$  mm,  $m_0 = 4$  mm.

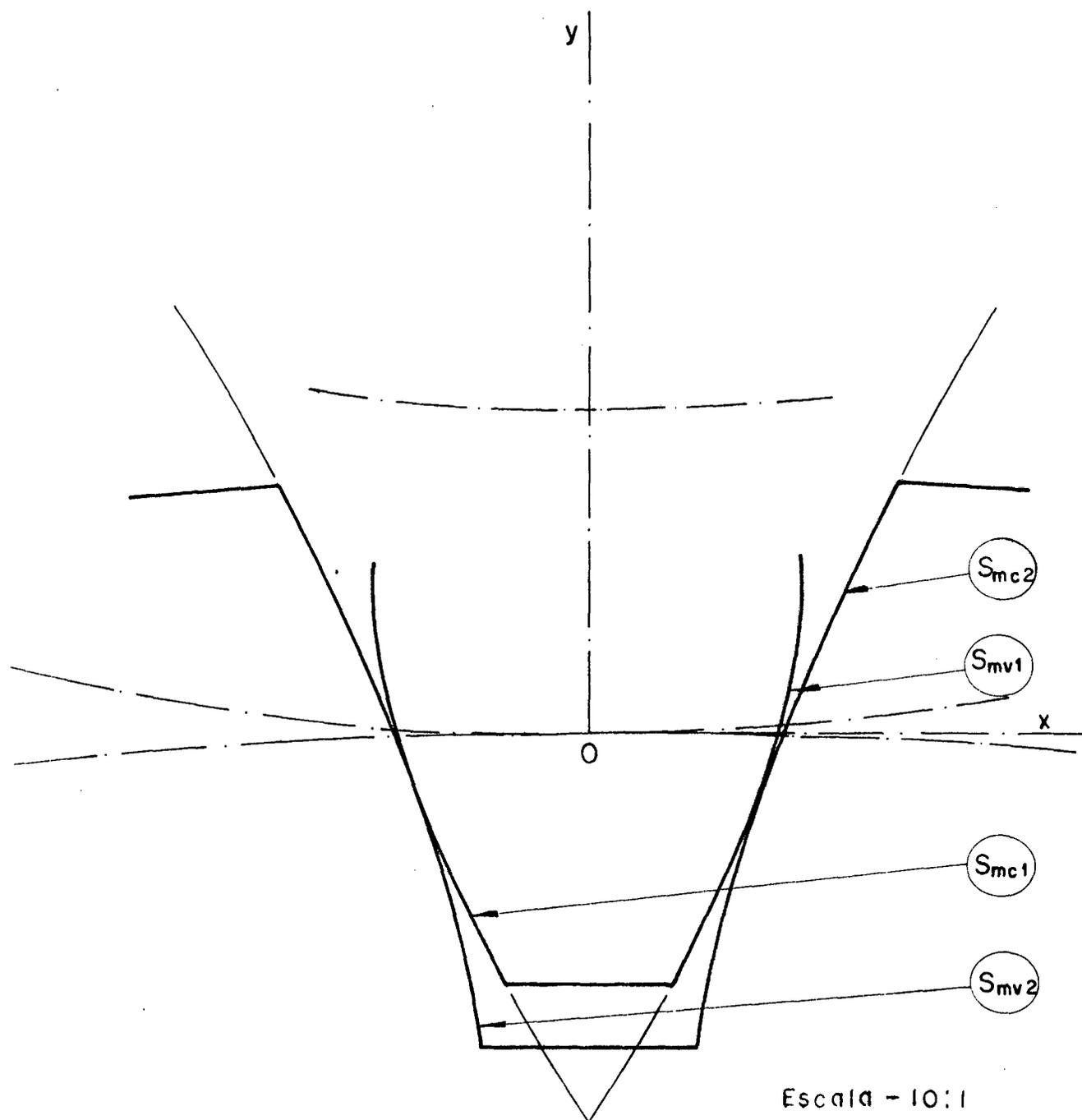


Fig. 27 - Traçado de perfis, na seção meridiana.

Dados:

$\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $q = 25\text{mm}$ ,  $\rho_{L\text{Fi}} = 106,86\text{ mm}$ ,  $\rho_{L\text{Fe}} = 113,14$ ,  $d_1 = 84\text{ mm}$ ,  
 $d_2 = 188\text{ mm}$ ,  $m_0 = 4\text{ mm}$

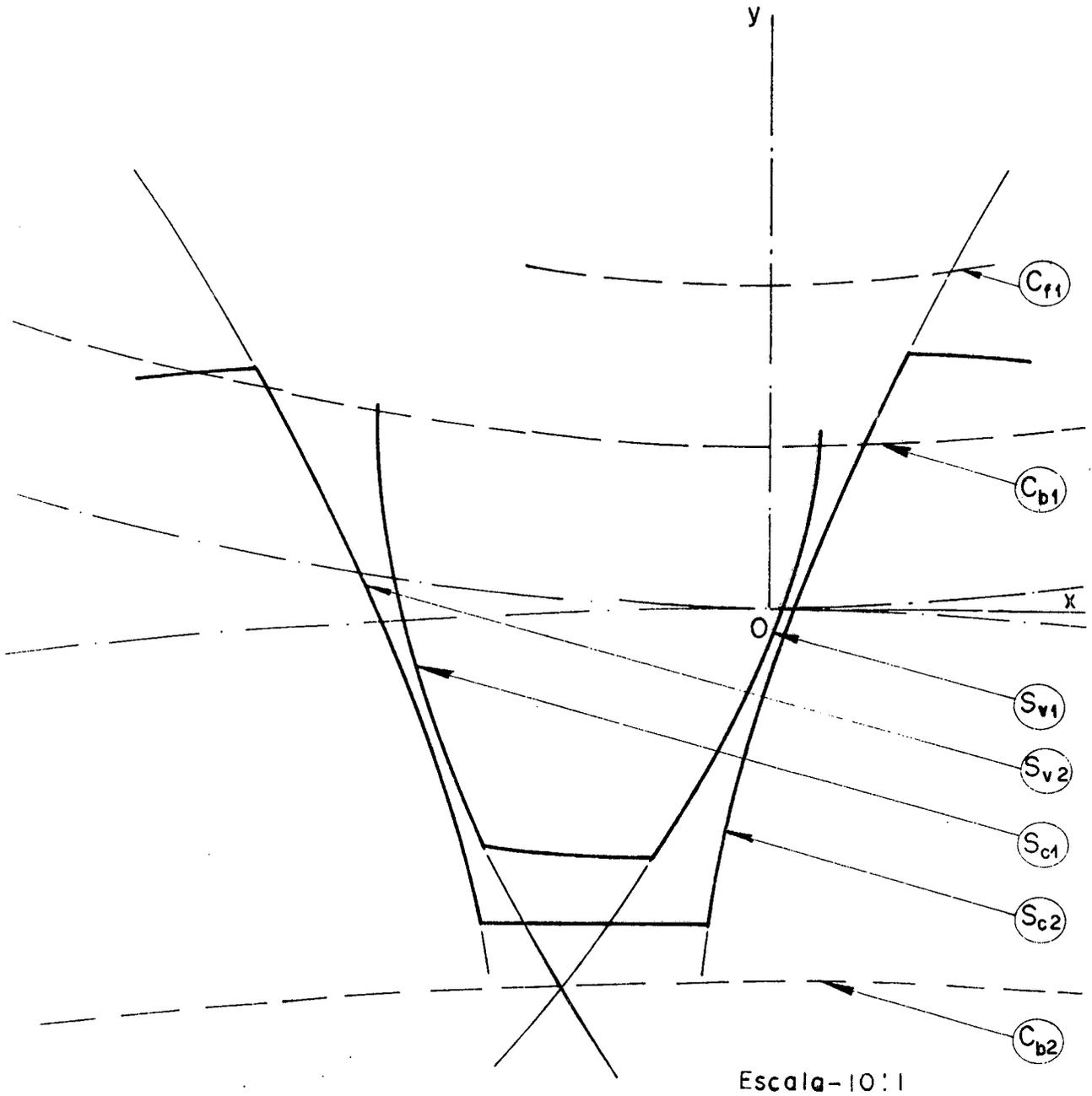


Fig. 28 - Traçado de perfis, em uma seção transversal qualquer.

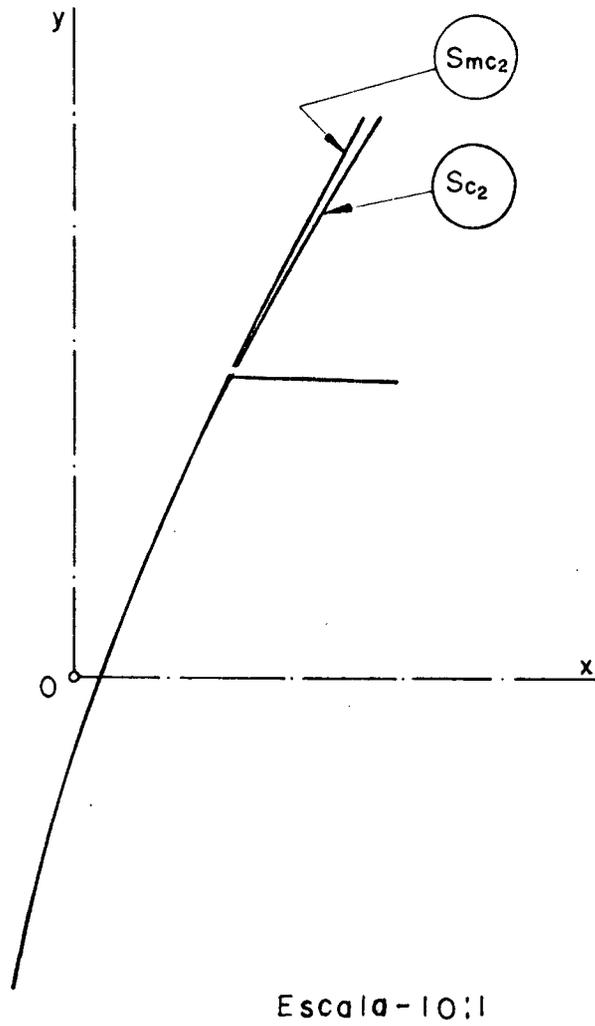


Fig. 29 - Comparação entre os perfis,  $S_{mc2}$  e  $S_{c2}$ .

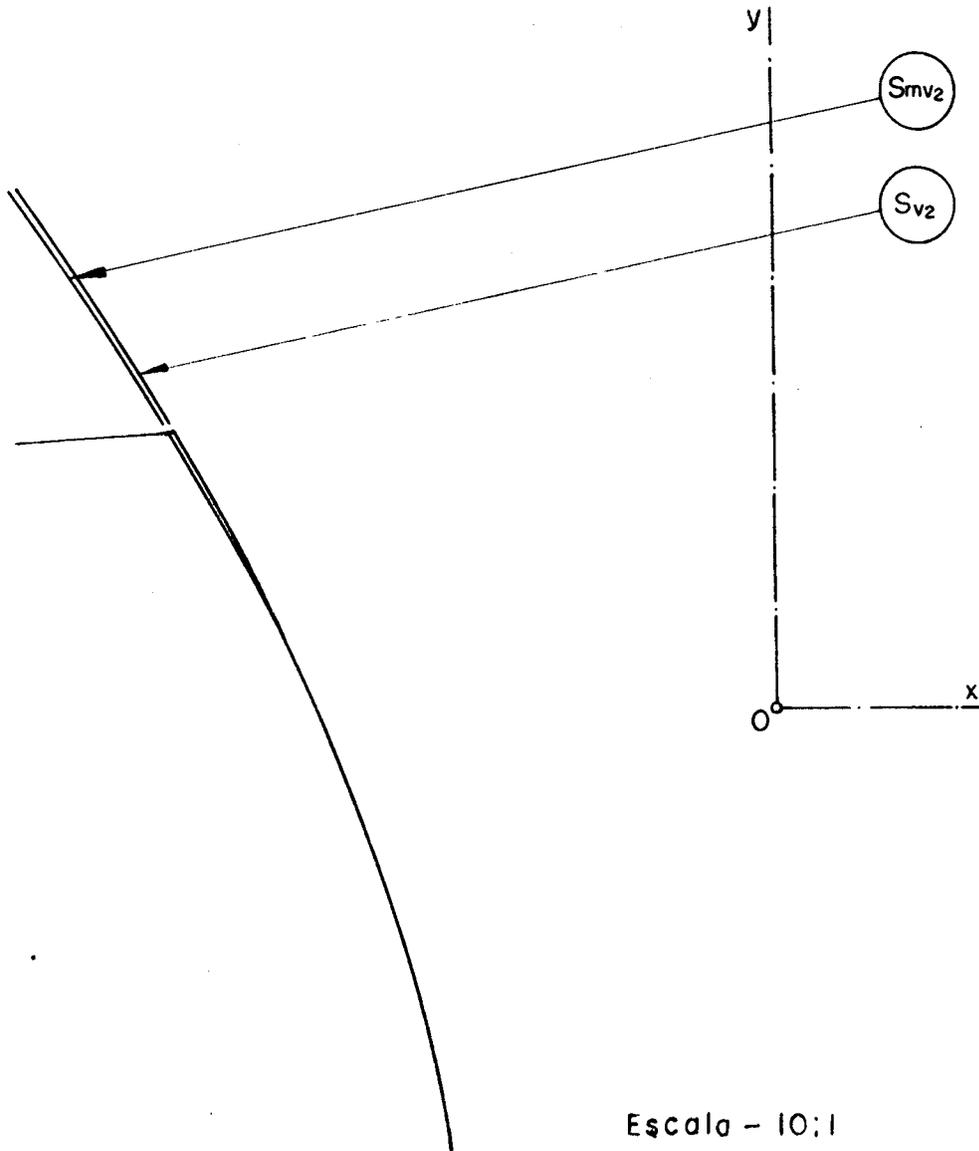


Fig. 30 - Comparação entre os perfis,  $S_{mv2}$  e  $S_{v2}$ .

#### 4 - CONTINUIDADE DO ENGRENAMENTO DE ENGRENAGENS CILINDRICAS DE DENTES CURVOS

##### 4.1 - Generalidades

Se considerará, aqui, apenas a razão (ou grau) de recobrimento, para as engrenagens cuja geração foi abordada em 2.3-. A razão (ou grau) frontal de transmissão, para as mesmas, pode ser determinada, usando-se as expressões\* que a bibliografia [3] aplica às engrenagens cilíndricas externas retas.

Para um par de engrenagens, geradas segundo 2.3.4-, a ação conjugada reduz-se a uma reta, contida no plano transversal meridiano ( $P_m$ ). Neste caso, a razão de recobrimento é nula, em virtude do contato ser puntiforme.

##### 4.2 - Determinação da razão de recobrimento, para um par de engrenagens, gerado segundo 2.3.3-.

Supõe-se que o plano transversal meridiano, se constitua também em um plano de simetria da engrenagem. Assim sendo, se analisará apenas, o que se passa em uma das metades desta, supondo-se na figura 11, que:

$$b' = b'' = \frac{b}{2} \quad (44)$$

Considerando-se os sentidos de rotação indicados na figura 31, e supondo-se a engrenagem  $0_2$ , como sendo a condutora, o engrenamento de um par de dentes, começa no ponto A, onde o perfil  $s'_2$  encontra o perfil conjugado  $s'_1$ . Ele termina no ponto B', onde

---

\* não apresentadas neste trabalho

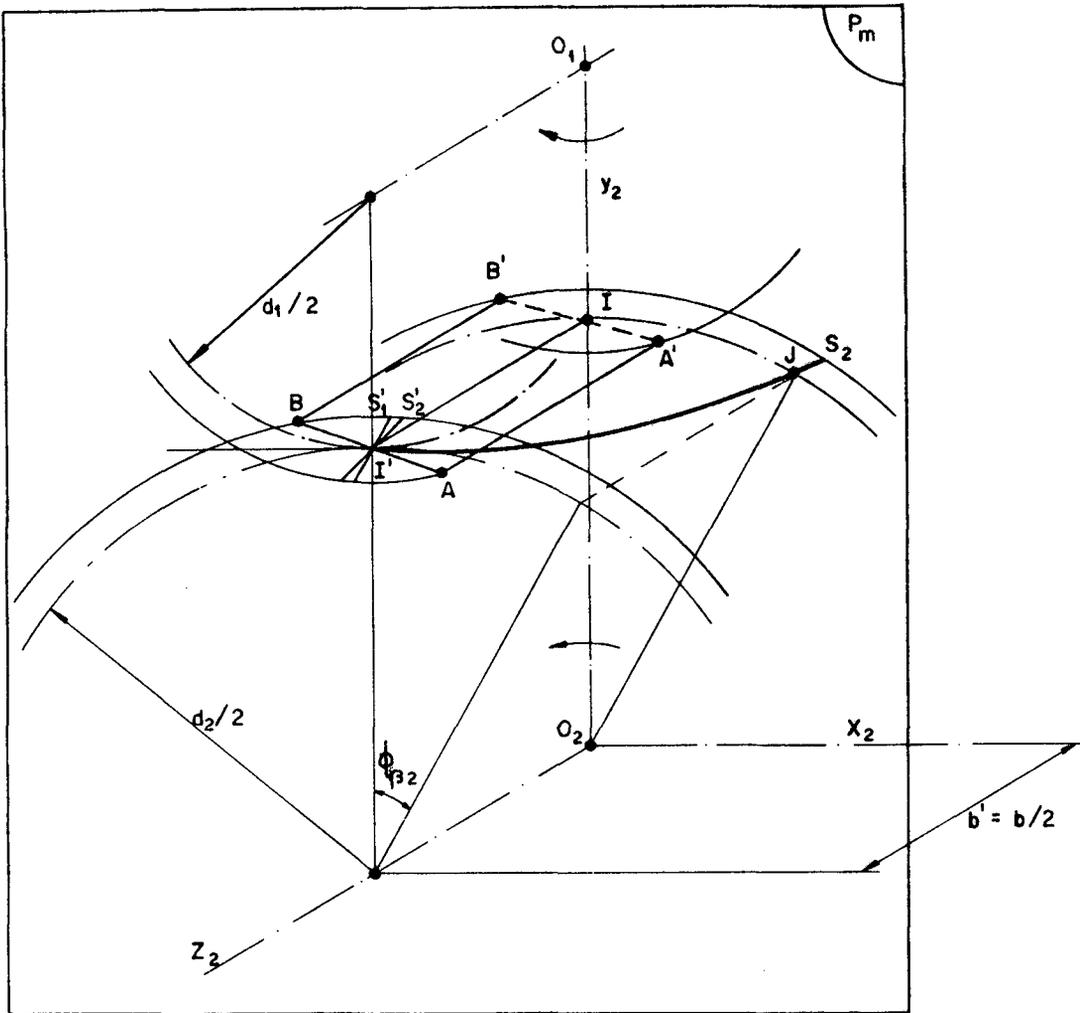


Fig. 31 - par de engrenagens cilíndricas de dentes curvos, sem correção, com jogo primitivo nulo.

o par de perfis conjugados  $s_2-s_1$  interrompe o contato respectivo.

O arco I'J, é semi-linha de flancos\* da engrenagem  $O_2$ .

Os perfis  $s_2$  e  $s'_2$ , apresentam, um deslocamento angular ( $\phi_{\beta 2}$ ), denominado ângulo de recobrimento; tem-se:

$$\phi_{\beta 2} = \widehat{IO_2J} \quad (45)$$

\* supondo-se que a superfície primitiva de referência, se confunda com a superfície primitiva de funcionamento.

Tem-se para o comprimento de recobrimento

$$g_{\beta 2} = \widehat{IJ} \quad (46)$$

Pode-se determinar [3] a razão de recobrimento\* ( $\epsilon_{\beta}$ ), como a relação entre  $\phi_{\beta 2}$  e o passo angular ( $\tau_2$ ), correspondentes à mesma engrenagem  $0_2$ ; vem:

$$\epsilon_{\beta} = \frac{\phi_{\beta 2}}{\tau_2} \quad (47)$$

Tendo-se em vista, determinar  $\phi_{\beta 2}$  e  $\tau_2$ , considere-se:

- $\alpha'_t$  - ângulo de pressão transversal de funcionamento.
- $m_t$  - módulo transversal.
- $d_2, d_{b2}$  - diâmetros primitivo e de base, da engrenagem  $0_2$
- $\rho_{LF}$  - raio de curvatura da linha de flancos da cremalheira geratriz.

Obtem-se:

$$\tau_2 = \frac{\pi \cdot m_t}{d_2/2} \quad (48)$$

Considerando-se a interseção do flanco do dente da engrenagem  $0_2$ , com a superfície cilíndrica de base, e imaginando-se um traçado idêntico ao da figura 14a, aplicado à engrenagem  $0_2$ , obtém-se:

---

\* considerando-se qualquer uma das duas engrenagens, obtendo-se o mesmo valor.

$$\phi_{\beta 2} = \frac{\rho_{LF} - \sqrt{\rho_{LF}^2 - b'^2}}{d_{b2}/2} \quad (49)$$

Comparando-se as expressões (46), (47), (48) e considerando-se a relação existente entre  $d_2$  e  $d_{b2}$ , vem para a razão de recobrimento:

$$\epsilon_{\beta} = \frac{\frac{\rho_{LF}}{m_t} - \sqrt{\left(\frac{\rho_{LF}}{m_t}\right)^2 - \left(\frac{b'}{m_t}\right)^2}}{\pi \cdot \cos \alpha'_t} \quad (50)$$

#### 4.3 - Estudo da variação do grau de recobrimento e comparação com o das engrenagens helicoidais

A partir da expressão (50), montou-se as tabelas 06 e 07 correspondentes aos valores  $17^{\circ}30'$  e  $20^{\circ}$ , respectivamente, do ângulo de pressão ( $\alpha'_t$ ).

$\rho_{LF}/m_t \backslash \epsilon_{\beta}$	0,1	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	2,0
10	2,4	3,8	5,3	6,3	7,1	7,8	8,4	9,2
20	3,5	5,4	7,6	9,2	10,5	11,7	12,6	14,3
30	4,2	6,7	9,4	11,4	13,1	14,5	15,8	18,0
40	4,9	7,7	10,8	13,2	15,2	16,9	18,4	21,1
50	5,5	8,6	12,2	14,8	17,1	19,0	20,7	23,7
75	6,7	10,6	15,0	18,2	21,0	23,4	25,6	29,4
100	7,7	12,2	17,2	21,1	24,3	27,1	29,6	34,1
150	9,5	15,0	21,2	25,9	29,8	33,3	36,4	42,0

Tab. 06 - Valores de  $b'/m_t$ , para  $\alpha'_t = 17^{\circ}30'$ .

$\rho_{LF}/m_t \backslash \epsilon_\beta$	0,1	0,25	0,5	1,0	1,25	1,5	2,0
10	2,4	3,8	5,2	7,1	7,8	8,3	9,1
20	3,4	5,4	7,5	10,5	11,6	12,6	14,2
30	4,2	6,6	9,3	13,0	14,4	15,7	17,9
40	4,9	7,7	10,8	15,1	16,8	18,3	21,0
50	5,4	8,6	12,1	16,9	18,9	20,6	23,6
75	6,7	10,5	14,8	20,8	23,2	25,4	29,2
100	7,7	12,1	17,1	24,1	26,9	29,4	33,9
150	9,4	14,9	21,0	29,6	33,1	36,2	41,7

Tab. 07 - Valores de  $b'/m_t$ , para  $\alpha'_t = 20^\circ$ .

Tendo-se em vista, calcular rapidamente a razão de recobrimento, apresenta-se os diagramas das figuras 32 e 33, correspondentes respectivamente aos valores  $17^\circ 30'$  e  $20^\circ$ , do ângulo de pressão.

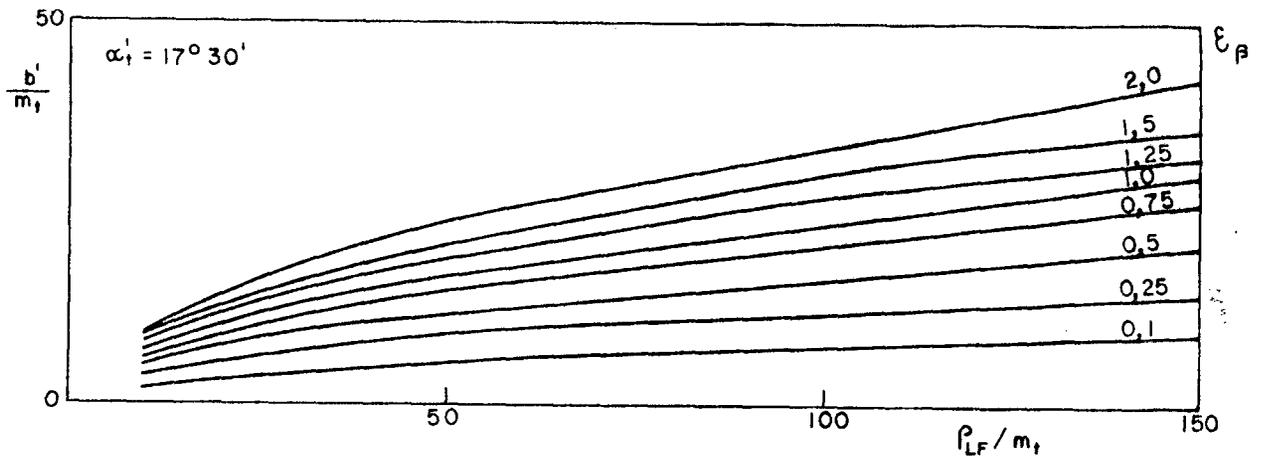


Fig. 32 - Razão de recobrimento,  $\epsilon_\beta$ , para  $\alpha'_t = 17^\circ 30'$ .

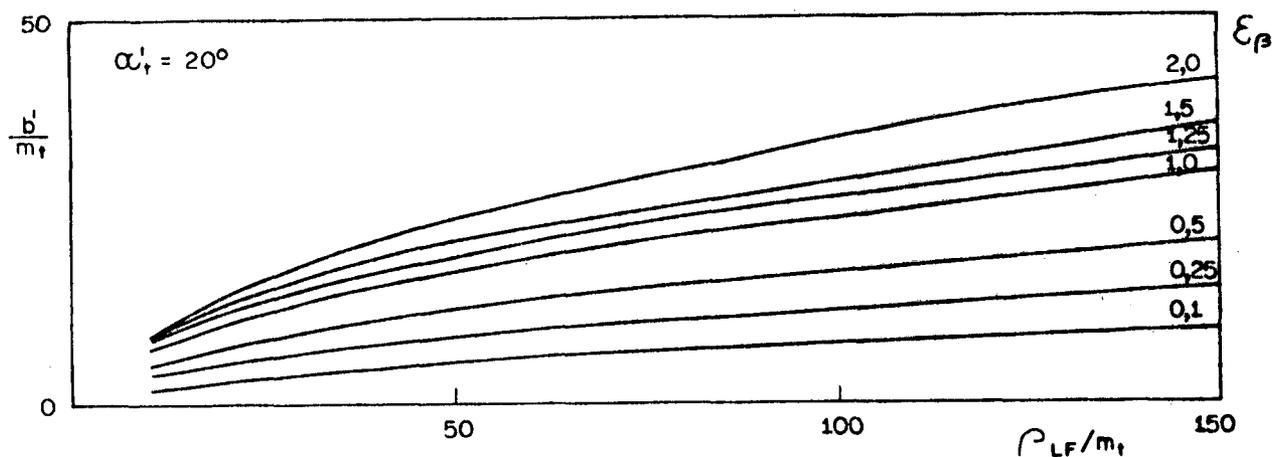


Fig. 33 - Razão de recobrimento,  $\epsilon_\beta$ , para  $\alpha'_t = 20^\circ$ .

Comparando-se as tabelas 06 e 07, verifica-se que há uma influência muito pouco pronunciada, do ângulo de pressão  $\alpha'_t$ .

As engrenagens cilíndricas de dentes curvos, constituem uma opção nas aplicações onde se especificava normalmente, engrenagens helicoidais duplas.

A bibliografia [3], indica que um valor mínimo\*, para o grau de recobrimento, no caso de engrenagens helicoidais, é a unidade. A bibliografia [9], aconselha\* o valor dois, para o grau de recobrimento das mesmas.

Não se encontrou na bibliografia consultada, qualquer indicação para o grau de recobrimento, que se deva adotar, no dimensionamento de um par de engrenagens cilíndricas de dentes curvos. É interessante, verificar-se a possibilidade de adotar para estas engrenagens, os valores usuais em engrenagens helicoidais.

\* tendo em vista uma utilização proveitosa do recobrimento.

Nas figuras 34 e 35, faz-se a comparação entre os valores assumidos pela relação  $b'/m_t$ , considerando-se os dois tipos de engrenagens citados\*, correspondentes respectivamente a  $\epsilon_\beta = 1$  e  $\epsilon_\beta = 2$ , para  $\alpha'_t = 20^\circ$ .

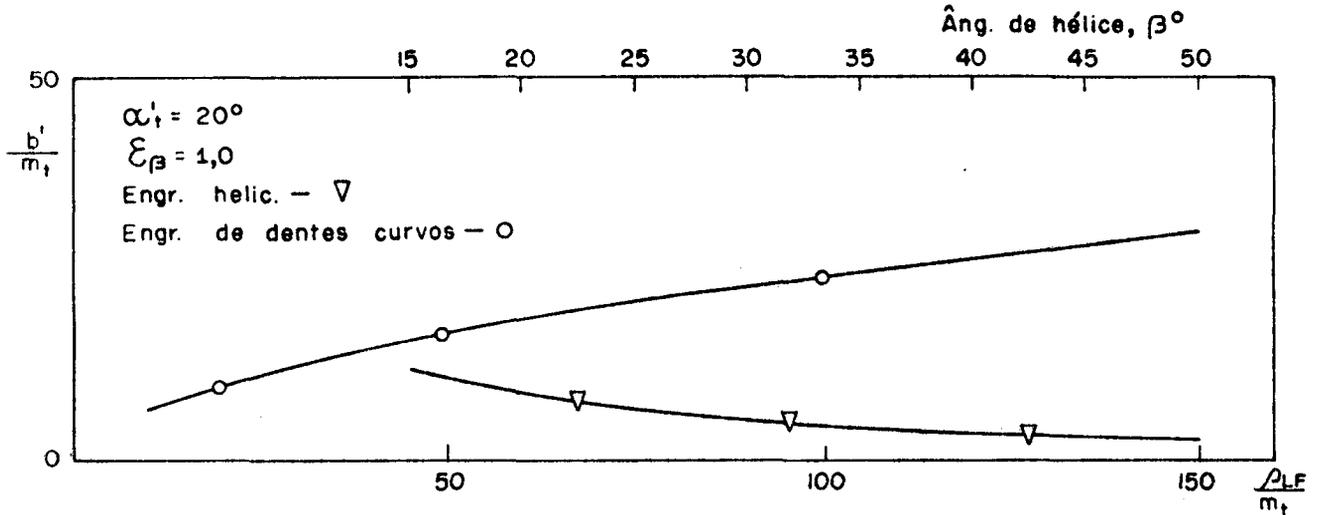


Fig. 34 - Comparação entre valores de  $b'/m_t$ .

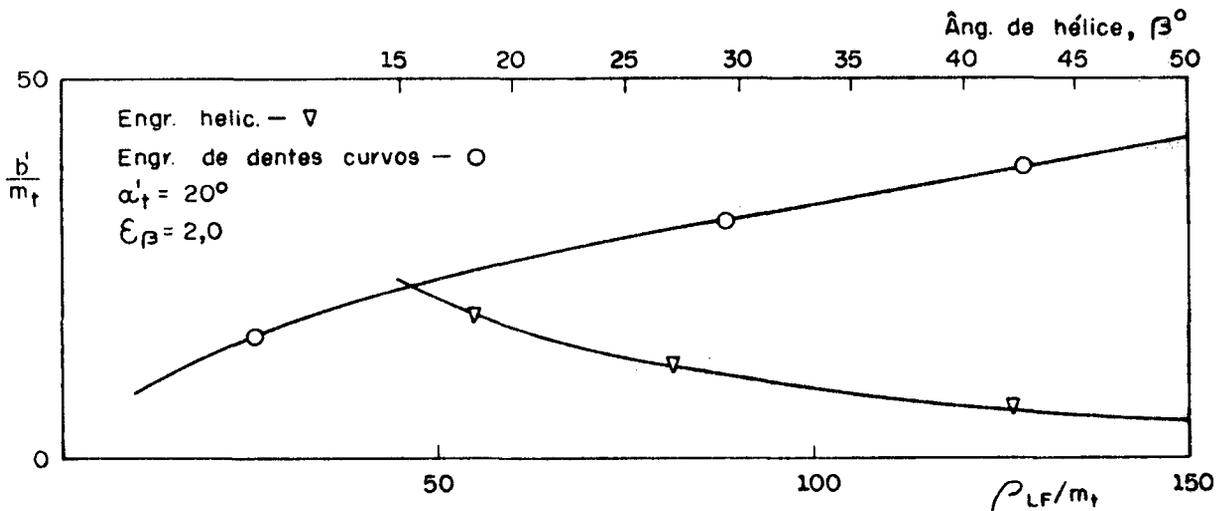


Fig. 35 - Comparação entre valores de  $b'/m_t$ .

\* sendo que para as engrenagens helicoidais, traçou-se a partir de resultados fornecidos pela bibliografia [3],

Para as engrenagens helicoidais duplas, a bibliografia [6], indica que o ângulo de hélice, se situa usualmente no intervalo  $|30^\circ, 45^\circ|$ .

Verifica-se através das figuras 34 e 35, que para um desejado grau de recobrimento, resultam engrenagens de dentes curvos sempre menos compactas\*, comparadas com engrenagens helicoidais duplas.

---

\* com relação à largura do denteado.

## 5 - PROCEDIMENTO PARA USINAGEM DE ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES CURVOS

### 5.1 - Generalidades

Se tratará de usinagem das engrenagens, cuja geração foi caracterizada em 2.2- e 2.3-. Pode-se chamá-las de engrenagens cilíndricas com dentes em arco de circunferência ou pela sigla "ECDAC".

Demonstra-se neste capítulo, que é possível usar-se ECDAC por geração em fresadoras universais. Comprova-se ao usar-se engrenagens conforme 2.2.3-. Adota-se como fundamental\*, o princípio |1| enunciado a seguir:

"Dotar a engrenagem semi-acabada, de um movimento de rolamento teórico, e fazê-la aproximar-se de um dente em arco de circunferência, pertencente a uma cremalheira\*\*, usinando-se ou ge-

---

\* ver capítulo 2.

\*\* materializado em consequência do movimento de rotação de uma fresa frontal, tendo dentes afiados conforme perfil de cremalheira (ver figura 07 e 17).

rando-se assim, um vão de dentes".

Este movimento de rolamento teórico, efetua-se segundo a superfície primitiva de geração, a qual coincide:

- I ) com o cilindro primitivo de referência, para as engrenagens conforme 2.2-.
- II) com o cilindro de base, para as engrenagens conforme 2.3 -.

Não se considera a usinagem em máquina controlada numericamente.

## 5.2 - Síntese dos movimentos

Tendo-se em vista representar de uma forma esquemática a mais simplificada possível, e daí atestar-se a possibilidade de produzir ECDACs em fresadoras convencionais, aborda-se a seguir, as etapas de "I a V", conforme sugere a bibliografia [10]

- I ) conforme 5.1-, mostra-se na figura 36, os movimentos básicos necessários, ao usinar-se ECDACs, adotando-se fresa frontal. Estes movimentos são:

- a - movimento de rotação da fresa.
- b - movimento de rotação da engrenagem semi-acabada, o qual produz na superfície primitiva de geração, uma velocidade tangencial de módulo  $|\vec{V}_1|$ .
- c - movimento de avanço longitudinal da engrenagem semi-acabada, cuja velocidade, tem módulo  $|\vec{V}_0|$ .

Considere-se na figura 36, que  $\alpha_0$  seja nulo para as engrenagens geradas a partir de cremalheiras geratrizes, dotadas de flancos cilíndricos de revolução.

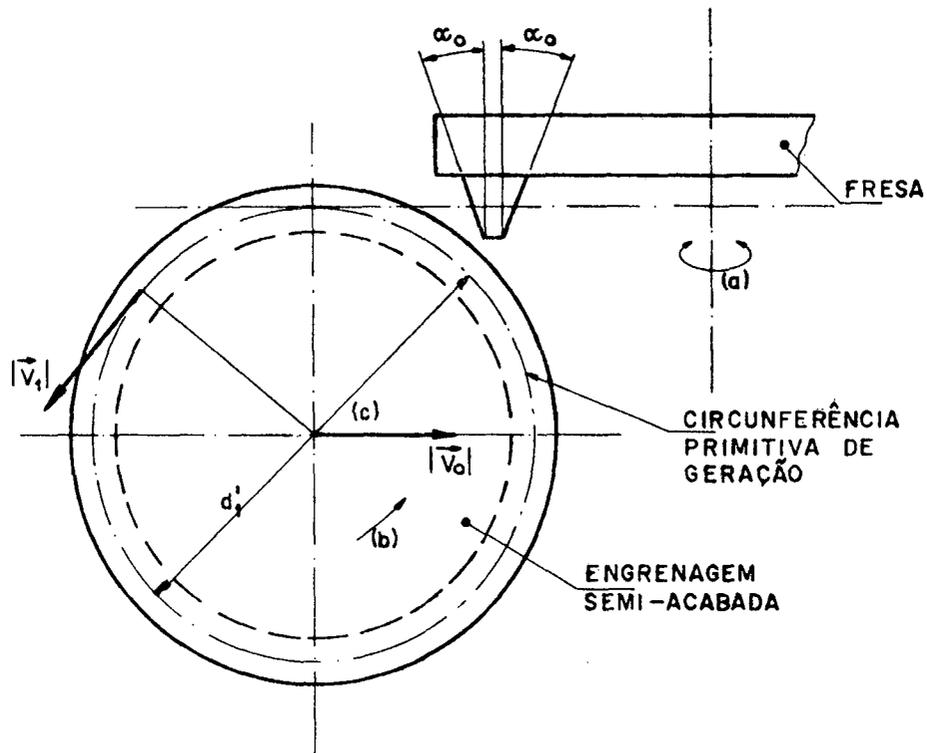


Fig. 36 - Usinagem de ECDAC: por geração.

II ) Na figura 37, refere-se a engrenagem semi-acabada e a fresa, a um sistema de eixos cartesianos, acrescentando-se ainda os movimentos:

- d - movimento de aproximação (ou afastamento) da engrenagem semi-acabada, em relação à fresa.
- e - movimento de posicionamento do plano meridiano da engrenagem, fazendo-o conter o eixo da fresa.
- f - movimento do divisor, ao fim de cada ciclo.

III) Tendo-se em vista, a simplicidade dos movimentos mencionados em "I e II", julga-se desnecessária, a execução de um modelo.

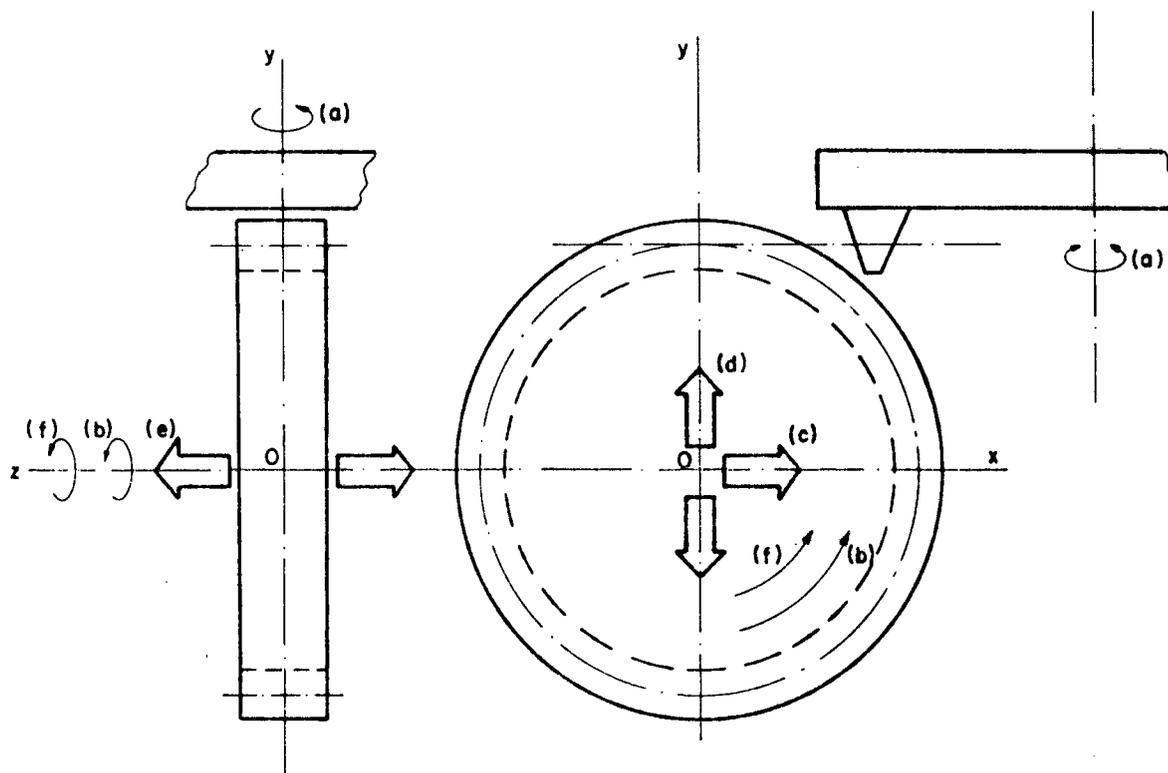


Fig. 37 - Movimentos de geração e de posicionamento, na usinagem de ECDAC com fresa frontal, referidos a um sistema cartesiano OXYZ.

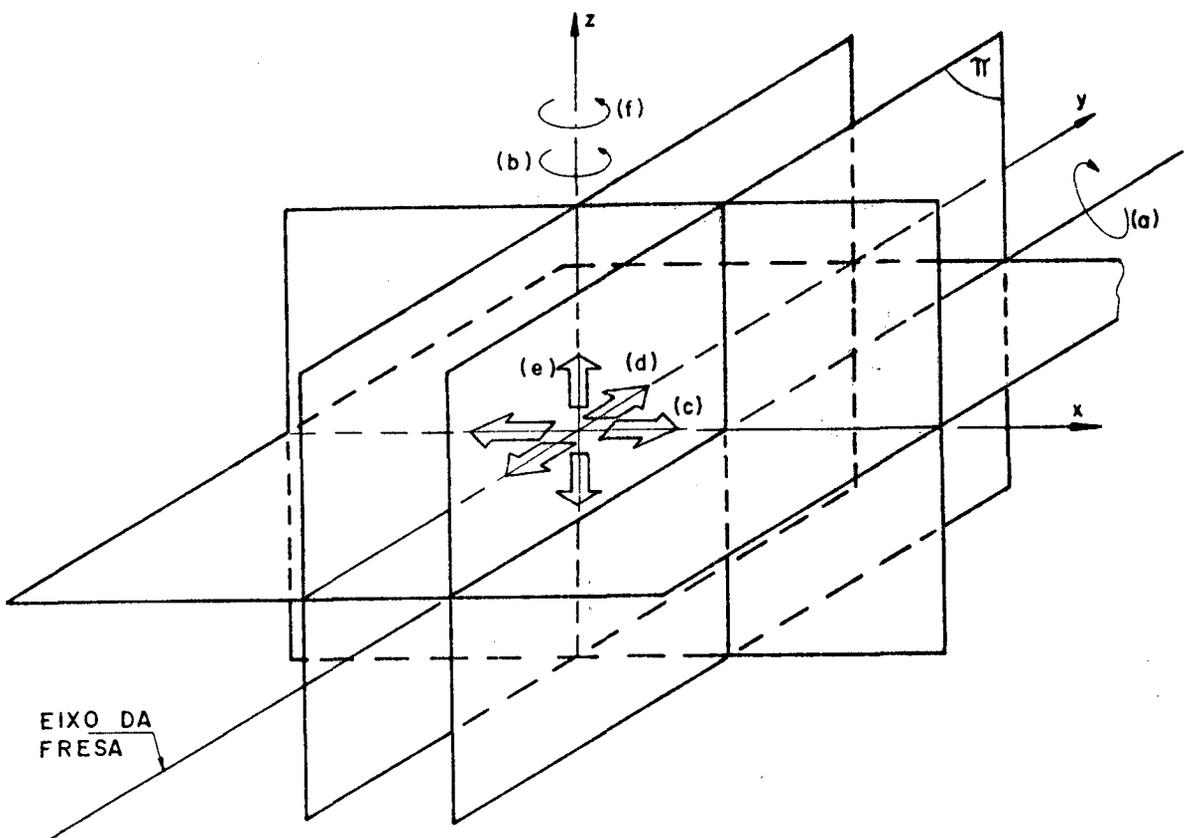


Fig. 38 - Perspectiva dos movimentos necessários à usinagem de ECDACs.

IV ) Na figura 38, representa-se em perspectiva, o sistema cartesiano\* com as setas indicativas dos movimentos.

O plano  $\pi$ , é paralelo ao plano YZ, e contém o eixo da fresa, bem como o movimento (a).

V ) Na figura 39, representa-se a síntese dos movimentos necessários à usinagem de ECDACs por geração com fresa frontal.

---

\* constituído pelos três planos: XY contendo os eixos 0X e 0Y, XZ contendo os eixos 0X e 0Z, YZ contendo os eixos 0Y e 0Z.

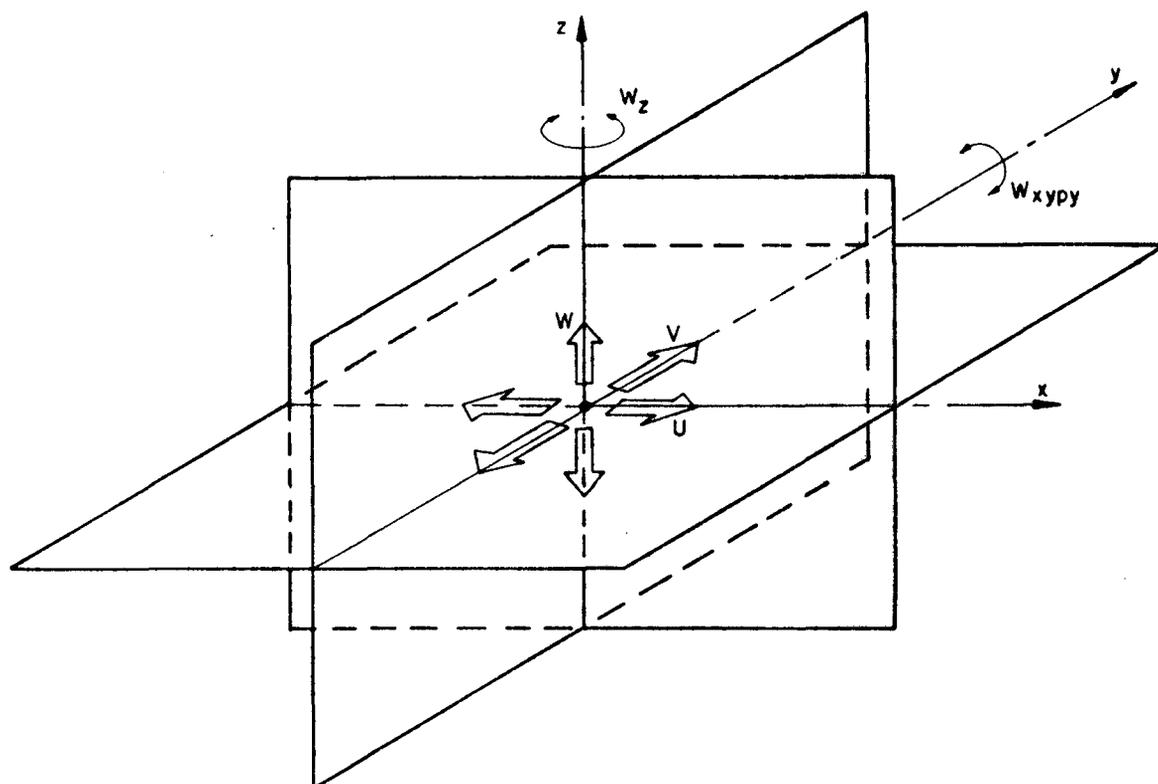


Fig. 39 - Síntese dos movimentos necessários à usinagem de ECDAC: por geração com fresa frontal.

Os movimentos  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , foram definidos anteriormente; o movimento  $w_z$  é a composição dos movimentos  $b$ , e  $f$ ; o movimento de rotação  $w_{xypy}$ , efetua-se em torno do eixo da fresa, e localiza-se no plano  $XY$ . O eixo da fresa, que na figura 39, tem direção coincidente com a do eixo  $OY$ , move-se\* paralelamente ao eixo  $OY$ , no plano  $XY$ , no decorrer de cada ciclo.

Verifica-se pelo exposto neste subcapítulo, que é possível\*\* realizar-se a usinagem de ECDACs por geração com fresa fron-

\* devido ao movimento representado por  $V$ .

\*\* pelo menos no que se refere a movimentos.

tal, em fresadoras universais.

### 5.3 - Montagem do equipamento

#### 5.3.1 - Generalidades

Utilizou-se como máquina ferramenta, uma fresadora universal da "CSEPEL, Machine Tool Factory Budapest" modelo UF 24, instalada no "Laboratório de Máquinas Ferramentas" da UFSC.

Na figura 40, apresenta-se um esquema de montagem da engrenagem semi-acabada, na fresadora. Este esquema é válido, tanto para a geração conforme 2.2-, como para a geração conforme 2.3-.

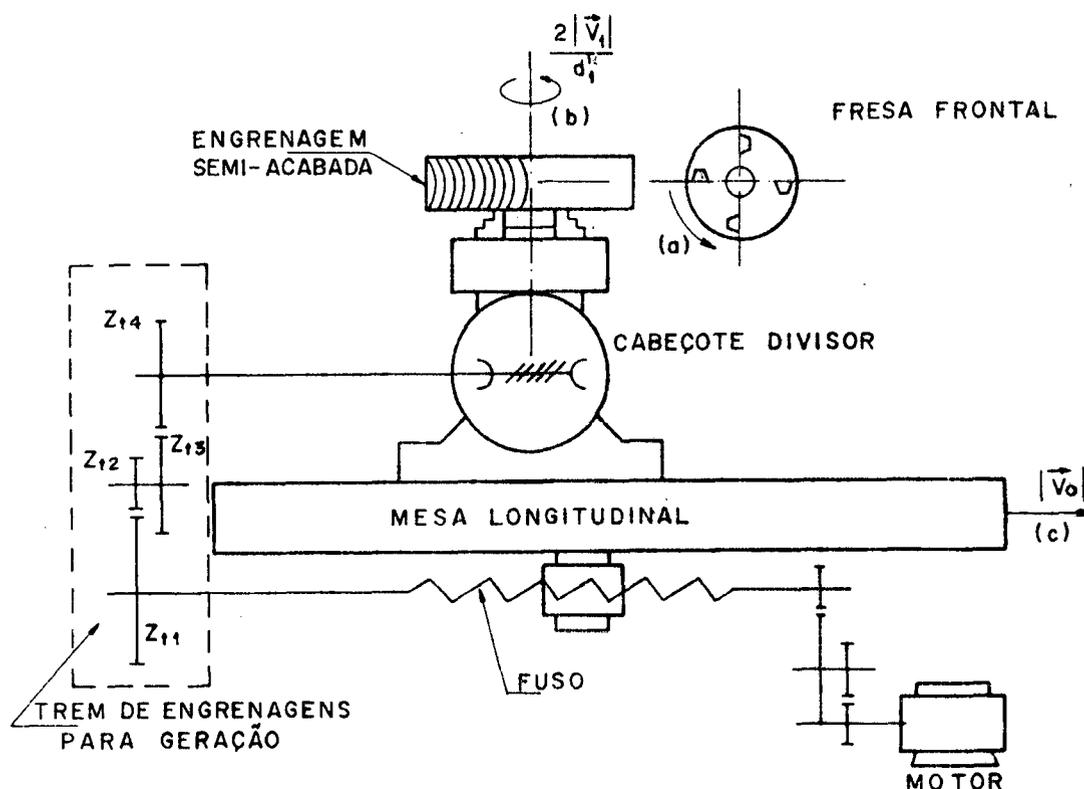


Fig. 40 - Montagem para geração de ECDAC: em fresadoras universais.

Na figura 40, observa-se que:

- I ) A fresa frontal encontra-se montada na árvore principal da fresadora e está dotada do movimento (a), definido em 5.2-.
- II ) A engrenagem semi-acabada encontra-se montada no cabeçote divisor universal.
- III) A árvore do cabeçote divisor, está posicionada segundo a direção perpendicular, à mesa longitudinal e possui movimento (b) definido em 5.2-.
- IV ) A mesa longitudinal, está animada do movimento (c), definido, em 5.2-.
- V ) O movimento de rolamento teórico da engrenagem semi-acabada, resulta da ação simultânea de (b) e (c).
- VI ) A relação de transmissão do trem de engrenagens para geração, deve ser adequadamente calculada, tendo em vista "v" anterior.

### 5.3.2 - Seleção das engrenagens do trem para geração

#### 5.3.2.1 - Determinação da relação de transmissão do trem de engrenagens para geração

Sejam na figura 40:

- $R_{co}$  (ou  $R_{ci}$ ) - Relação de transmissão do trem de engrenagens para geração conforme 2.2-, (ou 2.3- ).
- $R$  - Relação de transmissão do cabeçote divisor.
- $p_f$  - Passo do fuso de acionamento da mesa longitudinal.
- $d_1, d'_1, d_{b1}$  - Diâmetros primitivo, de geração e de base, da engrenagem que se vai usar.
- $z_{t1}, z_{t2}, z_{t3}, z_{t4}$  - número de dentes das engrenagens do trem.

Tendo-se em vista a figura 40, pode-se escrever:

$$R_{co,ci} = \frac{z_{t1} \cdot z_{t3}}{z_{t2} \cdot z_{t4}} \quad (51)$$

Na figura 36, levando-se em conta "v" do subcapítulo 5.3 vem:

$$|\vec{V}_0| = |\vec{V}_1| \quad (52)$$

Na figura 40, supondo-se que o fuso esteja animado de uma velocidade angular " $w_f$ ", resultam:

$$|\vec{V}_0| = \frac{1}{2\pi} \cdot w_f \cdot p_f \quad (53)$$

$$|\vec{V}_1| = \frac{d'_1}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot w_f \cdot R_{co,ci} \quad (54)$$

Comparando-se as expressões (52), (53) e (54), vem:

$$R_{co,ci} = \frac{p_f \cdot R}{\pi \cdot d'_1} \quad (55)$$

Conforme foi lembrado em 5.1-, tem-se:

I ) para as engrenagens conforme 2.2-.

$$d'_1 = d_1 \quad (56)$$

II) para as engrenagens conforme 2.3-, e considerando-se a expressão (9).

$$d'_1 = d_{b1} = d_1 \cdot \cos \alpha \quad (57)$$

Comparando-se as expressões (55), (56) e (57), resultam:

$$R_{co} = \frac{p_f \cdot R}{\pi \cdot d_1} \quad (58)$$

$$R_{ci} = \frac{p_f \cdot R}{\pi \cdot d_1 \cdot \cos \alpha} \quad (59)$$

5.3.2.2 - Propagação do erro cometido, na relação de transmissão selecionada

Os segundos membros das expressões (58) e (59) são irracionais, assim, tendo-se em vista a expressão (51), se deverá selecionar uma aproximação ao valor teórico de  $R_{co,ci}$ , calculado por (58) e (59). Tendo-se em vista, determinar o erro de perfil que resulta desta aproximação, considere-se nas figuras 41a e 41b:

$\widehat{QA}$  - perfil evolvental.

$\widehat{QA}'$  - perfil obtido, em virtude da aproximação feita ao  $R_{co,ci}$ .

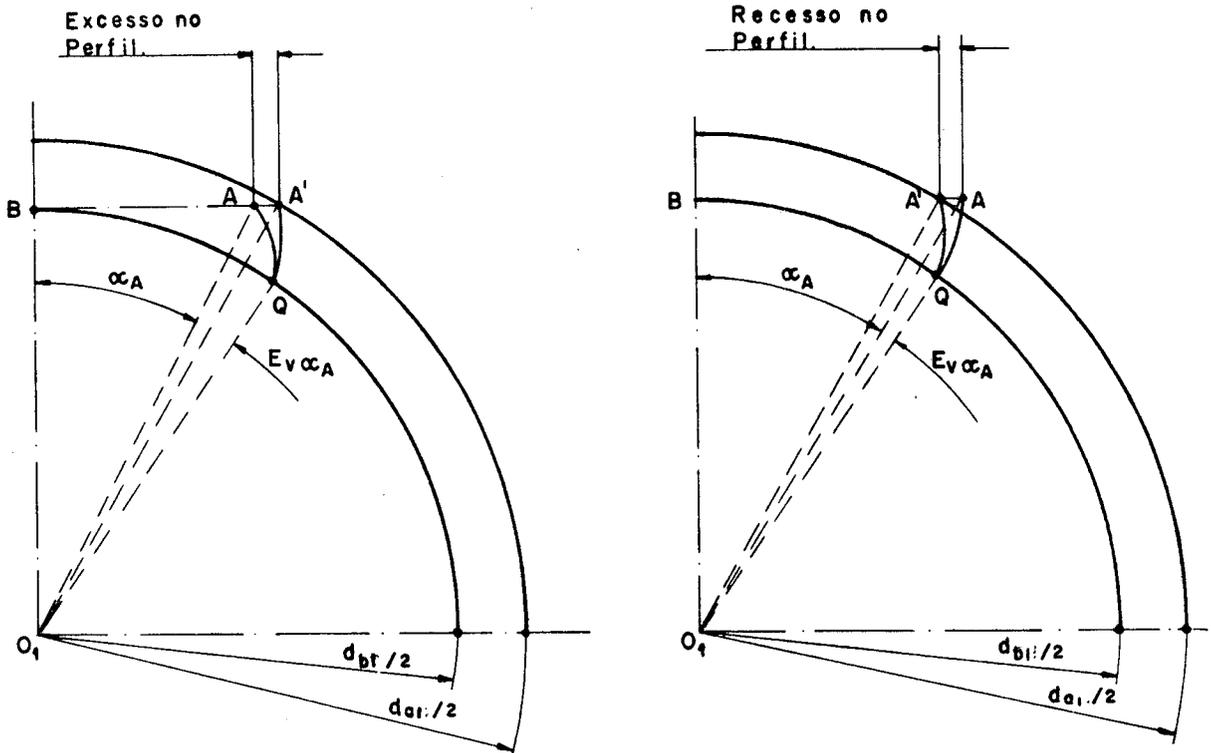
$d_{b1}$  - diâmetro de base da engrenagem.

$d_{a1}$  - diâmetro de cabeça da engrenagem.

$\alpha_A$  - ângulo de incidência no ponto A.

Suponha-se ainda:

$d'_1$  - diâmetro primitivo de geração da engrenagem (ver fig. 36).



Figs. 41a, 41b - Erro de perfil resultante de uma aproximação ao valor do  $R_{co,ci}^{ef}$ .

- $R_{co,ci}^{ef}$  - valores efetivamente selecionados, da relação de transmissão, considerando-se engrenagens conforme 2.2-, e conforme 2.3-.
- $|\vec{V}_1|_{ef}$  - módulo da velocidade tangencial, na circunferência primitiva de geração, da engrenagem, ao supor-se  $R_{co,ci}^{ef}$  (ver figura 40).
- $|\vec{V}_1|$  - ídem, ao supor-se  $R_{co,ci}$  (ver figura 40).
- $\epsilon_{co,ci}$  - erro\* na relação de transmissão.
- $\epsilon_p$  - erro\* máximo no perfil.
- $|\vec{V}_0|$  - módulo da velocidade de avanço da mesa longitudinal da fresadora (ver figura 40).

Com as suposições feitas, e considerando-se as figuras 36, 41a e 41b, pode-se escrever as relações abaixo, válidas tanto para as engrenagens conforme 2.2-, como para as engrenagens confor

\* Absoluto

me 2.3-.

$$\frac{\overline{BA'}}{\widehat{BQ}} = \frac{|\vec{V}_0|}{|\vec{V}_1|_{ef}} \quad (60)$$

$$\frac{|\vec{V}_1|}{|\vec{V}_1|_{ef}} = \frac{R_{co,ci}^{ef}}{R_{co,ci}} \quad (61)$$

$$\frac{\overline{BA}}{\widehat{BQ}} = 1 \quad (62)$$

Comparando-se as expressões (52), (60), (61) e (62), vem:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BA}} = \frac{R_{co,ci}^{ef}}{R_{co,ci}} \quad (63)$$

Das figuras 41a e 41b, vem:

$$\overline{BA} = \sqrt{(\overline{O_1A})^2 - (d_{b1}/2)^2} \quad (64)$$

Aplicando-se uma das propriedades das proporções, a expressão (63) e comparando-se a expressão resultante, com a expressão (64), vem:

$$\epsilon_p = \epsilon_{co,ci} \cdot \frac{\sqrt{(\overline{O_1A})^2 - (d_{b1}/2)^2}}{R_{co,ci}} \quad (65)$$

Baseando-se na expressão (63) e observando as figuras 41a e 41b, pode-se montar a tabela 08.

$R_{co,ci}^{ref} - R_{co,ci}$	Observação
$> 0$	excesso no perfil
$< 0$	recesso no perfil

Tab. 08 - Comparação entre a relação de transmissão selecionada e a forma do perfil.

Verifica-se nas figuras 41a e 41b, que:

$$\overline{0_1^A} \equiv \frac{d_{a1}}{2} \quad (66)$$

Com a aproximação sugerida pela expressão (66) a expressão (65), torna-se:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{co,ci} \cdot \frac{\sqrt{(d_{a1}/2)^2 - (d_{b1}/2)^2}}{R_{co,ci}} \quad (67)$$

É conveniente lembrar, que é mais seguro avaliar-se  $\varepsilon_p$ , pela expressão (67), quando ocorre "excesso no perfil".

### 5.3.2.3 - Apresentação e discussão de resultados

Considerando-se a expressão (67), e fazendo-se as substituições sugeridas pelas expressões (57), (58), e (59), vem:

$$\frac{\epsilon_p}{\epsilon_{co}} = \frac{R \cdot p_f}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{2}{z_1}\right)^2 - \cos^2 \alpha} \quad (68)$$

$$\frac{\epsilon_p}{\epsilon_{ci}} = \frac{R \cdot p_f}{2 \cdot \pi \cdot \cos \alpha} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{2}{z_1}\right)^2 - \cos^2 \alpha} \quad (69)$$

Para os dados indicados na figura 40, montou-se as tabelas 09 e 10, bem como traçou-se os diagramas das figuras 42 e 43, que indicam a variação de  $\epsilon_p/\epsilon_{co}$  e  $\epsilon_p/\epsilon_{ci}$  respectivamente, com o número de dentes ( $z_1$ ), e com ângulo de pressão ( $\alpha$ ).

$z_1 \backslash \alpha$	14°30'	17°30'	20°
16	18,24	18,99	19,69
20	16,62	17,45	18,20
25	15,24	16,13	16,95
32	13,93	14,91	15,78
40	12,94	13,98	14,91
50	12,09	13,20	14,19
62	11,40	12,57	13,60
80	10,72	11,96	13,03
100	10,22	11,51	12,63
124	9,82	11,16	12,31
160	9,43	10,82	12,00
200	9,16	10,58	11,79
248	8,94	10,39	11,62

Tab. 09 - Valores de  $\epsilon_p/\epsilon_{co}$ .

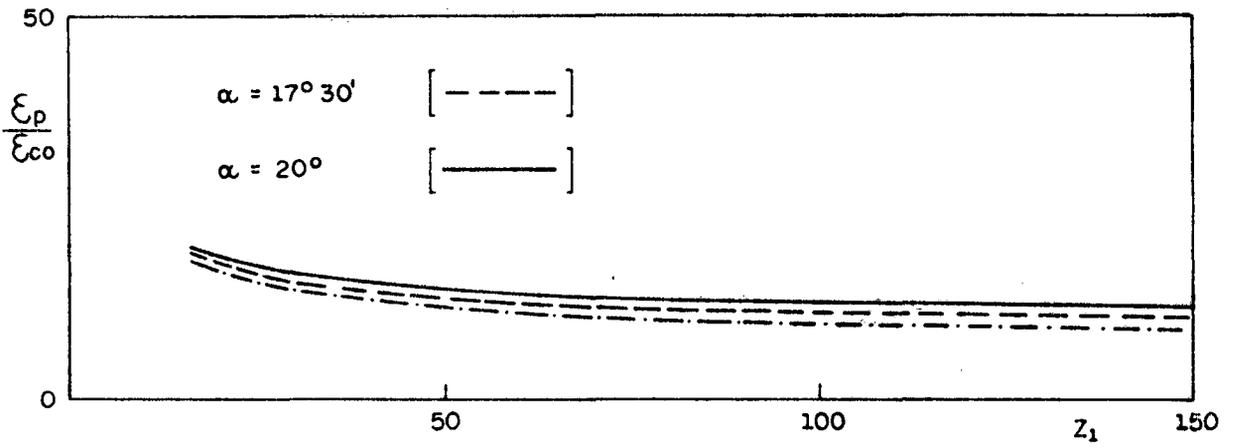


Fig. 42 - Valores de  $\epsilon_p / \epsilon_{co}$

$z_1 \backslash \alpha$	$14^\circ 30'$	$17^\circ 30'$	$20^\circ$
16	18,84	19,92	20,95
20	17,17	18,29	19,35
25	15,74	16,91	18,03
32	14,39	15,63	16,80
40	13,36	14,66	15,87
50	12,49	13,84	15,10
62	11,77	13,18	14,47
80	11,07	12,54	13,87
100	10,56	12,07	13,44
124	10,15	11,70	13,10
160	9,75	11,35	12,77
200	9,46	11,10	12,54
240	9,23	10,90	12,36

Tab. 10 - Valores de  $\epsilon_p / \epsilon_{ci}$ .

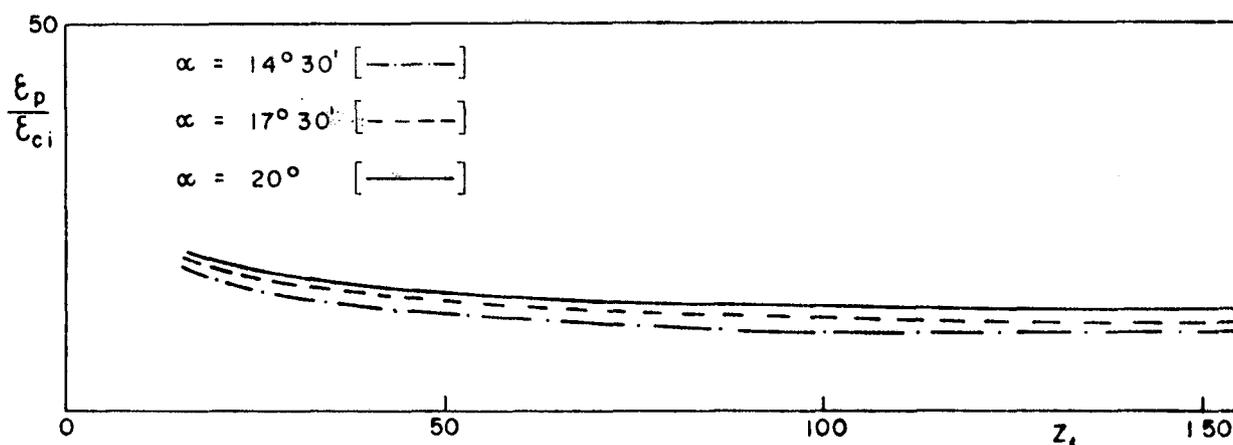


Fig. 43 - Valores de  $\epsilon_p/\epsilon_{ci}$ .

Nas tabelas 09 e 10, escalonou-se os números de dentes ( $z_1$ ), basicamente, segundo a série R10 de "Renard".

É interessante determinar-se a ordem de grandeza de  $\epsilon_p$ , principalmente para as engrenagens de pequeno número de dentes, tendo o ângulo de pressão igual a  $20^{\circ}$  (ver figura 42 e 43).

Na tabela 11, apresenta-se, para as engrenagens geradas conforme 2.2-, em correspondência a cada valor considerado para  $z_1$ , uma solução\* para:

- I ) Engrenagens do trem para geração ( $z_{t1}, z_{t2}, z_{t3}, z_{t4}$ ).
- II ) Erro relativo da relação de transmissão ( $R_{co}^{ef} - R_{co}$ ).
- III) Erro absoluto do perfil ( $\epsilon_p$ ).

---

\* Escolhendo-se arbitrariamente, o módulo  $m=4$  mm e utilizando-se o programa apresentado no apêndice 5.

$z_1$	$m$	$d_1$	$z_{t1}$	$z_{t2}$	$z_{t3}$	$z_{t4}$	$R_{CO}^{ref} - R_{CO}$	$\epsilon_p$ (mm)	Observação
16	4	64	40	45	47	42	$0,95 \times 10^{-5}$	$0,19 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
20	4	80	40	119	116	49	$4,40 \times 10^{-5}$	$0,80 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
25	4	100	40	29	30	65	$3,70 \times 10^{-5}$	$0,63 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
32	4	128	40	45	47	84	$1,90 \times 10^{-5}$	$0,30 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
40	4	160	40	119	58	49	$8,79 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
50	4	200	40	58	30	65	$7,40 \times 10^{-5}$	$1,05 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
62	4	248	40	111	52	73	$9,82 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
80	4	320	40	105	47	90	$4,75 \times 10^{-5}$	$0,62 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
100	4	400	40	116	30	65	$14,80 \times 10^{-5}$	$1,87 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
124	4	496	40	111	26	73	$19,64 \times 10^{-5}$	$2,42 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
160	4	640	40	105	47	180	$9,50 \times 10^{-5}$	$1,14 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
200	4	800	40	116	30	130	$29,60 \times 10^{-5}$	$3,49 \times 10^{-3}$	excesso no perfil
248	4	992	40	111	26	146	$39,28 \times 10^{-5}$	$4,84 \times 10^{-3}$	excesso no perfil

Tab. 11 - Valores de  $\epsilon_p$ , para engrenagens geradas conforme 2.2.-, tendo  $\alpha=20^\circ$ .

Na tabela 12, apresenta-se [9] as tolerâncias para o perfil de engrenagens usinadas por geração.

Qualidade	AGMA	Tolerância para o perfil
	nº	(mm)
	10	$40,6 \times 10^{-3}$
	11	$29,2 \times 10^{-3}$
	12	$21,0 \times 10^{-3}$
	13	$15,2 \times 10^{-3}$

Tab. 12 - Tolerâncias para o perfil de engrenagens.

Verifica-se que os valores calculados para  $\epsilon_p$ , são razoavelmente aceitáveis, sobretudo quando se trata de engrenagens de menor diâmetro (ver tabela 11), ao comparar-se com as tolerâncias da tabela 12.

### 5.3.3 - Fresa frontal

Para maior simplicidade, adotou-se na usinagem efetuada como ferramenta de corte, uma fresa frontal mono-dente, conforme se vê na figura 44. Seu dente foi afiado conforme o perfil de crema lheira, mostrada na figura 22, considerando-se o módulo,  $m=4$  mm.

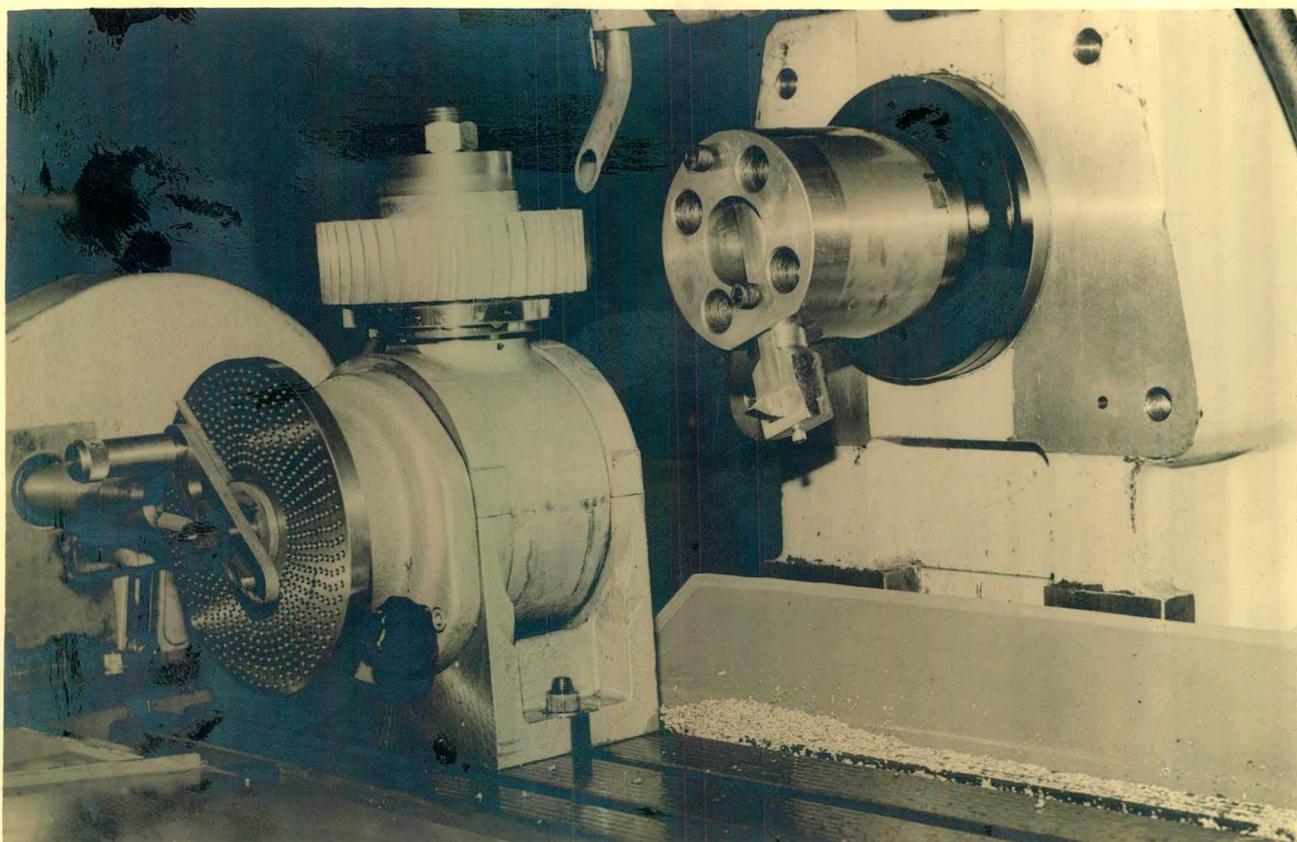


Fig. 44 - Fresa frontal mono-dente, montada na árvore da fresadora universal.

Esta simplificação no entanto, deu origem a alguns inconvenientes tais como: desgaste rápido da ferramenta, vibrações excessivas, mau acabamento na usinagem.

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

### 6.1 - Conclusões

O estudo teórico da geração revelou a existência de quatro tipos diferentes de ECDAC, a saber:

- I ) Com perfil em forma de evolvente apenas na seção meridiana e curvatura diferente dos flancos em contato.
- II ) Com perfil em forma de evolvente apenas na seção meridiana e mesma curvatura dos flancos em contato.
- III) Com perfil em forma de evolvente em qualquer seção transversal e curvatura diferente dos flancos em contato.
- IV ) Com perfil em forma de evolvente em qualquer seção transversal e mesma curvatura dos flancos em contato.

Esse mesmo estudo teórico da geração demonstrou que as ECDAC tipos I e III possuem flancos conjugados apenas na seção meridiana, apresentando contato puntiforme no engrenamento, enquanto que as ECDAC tipos II e IV possuem flancos conjugados em qualquer seção transversal, apresentando contato linear no engrenamento.

Ainda no estudo da geometria verificou-se que as ECDAC tipos I e III exigem uma única fresa para usinar cada vão entre dentes, enquanto que as ECDAC tipos II e IV exigem duas fresas (uma para cada flanco). Isto leva a uma troca de ferramenta de corte, operação esta mais indicada quando se utiliza uma máquina numericamente comandada.

Uma análise detalhada da geometria das ECDAC tipo I permitiu definir a forma de um perfil transversal qualquer, através das suas equações paramétricas, deduzidas a partir da forma da cremalheira geratriz. Estas equações permitem comparar a forma de um perfil qualquer (fora da seção meridiana) com a evolvente de circunferência.

Um estudo da continuidade do engrenamento indicou que as ECDAC tipos II e IV com mesma curvatura dos flancos em contato, apresentam a vantagem de possuir uma razão de recobrimento diferente de zero, porém apresentam como desvantagem a possibilidade de contato na extremidade do dente. Deduziu-se uma expressão para a razão de recobrimento das ECDAC tipo IV e utilizou-se esta expressão ao comparar as engrenagens helicoidais duplas com as ECDAC tipo IV. Verificou-se que estas exigem maior largura do que aquelas, para um mesmo valor da razão de recobrimento.

No estudo da geração das ECDAC em fresadoras universais deduziram-se expressões que levam à determinação de trens de engrenagens que sincronizam a translação da mesa com a rotação da engrenagem a ser gerada. Desta forma consegue-se usinar os perfis das ECDAC dentro das tolerâncias especificadas pela AGMA.

Foram criadas as novas ECDAC tipos III e IV apresentando a vantagem de terem perfis em forma de evolvente de circunferência ao longo de toda a largura do dente, o mesmo não ocorrendo com os tipos I e II, nos quais tal perfil restringe-se às seções meridianas.

## 6.2 - Sugestões para futuros trabalhos

É evidente que nem todas as idéias surgidas no decorrer deste trabalho puderam ser desenvolvidas, por isso fazem-se aqui algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Análise das tensões superficiais de contato entre os dentes das ECDAC.
- Análise das tensões de flexão e de cisalhamento nos dentes das ECDAC.
- Estudo das condições de lubrificação das ECDAC.
- Estudo da geração das ECDAC em máquinas numericamente comandadas.
- Estudo do deslocamento do perfil das ECDAC.

## BIBLIOGRAFIA

1. ISHIBASHI, Akira. The characteristics of circular-arc-toothed cylindrical gears. Bulletin of JSME. Tokyo, Fevereiro, 1966, v.9 n°33, p. 200-208.
2. GLEASON WORKS. Gear cutting notes. N.Y.
3. HENRIOT, G. Traité théorique et pratique des engrenages. 3.ed. Paris, Dunod, 1960. v.1. p.11-68, 109-27.
4. ABNT P-TB-59. Definições gerais de engrenagens. Rio de Janeiro, 1977.
5. BUECKEN, Francisco J. Dicionário de termos técnicos. 5<sup>a</sup>ed. S. Paulo, Edições Melhoramentos, 1977. p.489.
6. DIN. Normas fundamentales para la técnica mecânica. Bilbao, Editorial Balzola, 1970. p.314.
7. FERREIRA, A. & FRENCH, D. Control of the tooth contact pattern in the generation of spiral bevel gears by C.N.C. Florianópolis, Anais do IV COBEM, 1977. Paper n° C-15, p. 1079-93.
8. BUCKINGHAM, E. Analytical mechanics of gears. 1.ed. NY, Dover Publications, 1963. p. 1-6.
9. DUDLEY, D. W. Gear handbook. 1.ed. N.Y., McGraw-Hill book company, 1962. p.7-9.
10. FERREIRA, A.C. Gear generation by computer aided manufacturing technics. Ontario, Ph.D. thesis-Mechanical Engineering Department- University of Waterloo, 1977.

11. THOMAS, G. B. Calculus and analytic geometry. 3.ed. Reading, Addison-Wesley Publishing, 1960. p 498-500 .
12. HENRIOT, G. Traité théorique et pratique des engrenages. 3.ed. Paris, Dunod, 1961. v.2. p. 380-99, 417-20.
13. ABNT P-TB-81. Engrenagens cilíndricas (terminologia). Rio de Janeiro, 1971.
14. ABNT P-SB-21. Símbolos de engrenagens. Rio de Janeiro, 1970.
15. DAREING, D. W. & CHEN, C. Kinematics and evaluation of flat-toothed hypoid gears N.Y. Transactions of the ASME. Journal of Engineering for Industry, novembro 1973, v.95, série B , n.4, p. 1171-77.

A P Ê N D I C E S

## A1. DEFINIÇÕES GERAIS EM ECDAC

### A1.1 Aresta de transição:

Interseção do flanco utilizável (ou prolongamento) do dente, com o cilindro de base.

### A1.2. Engrenagens curvas [4]:

Engrenagens cujas linhas de flanco são linhas curvas diferentes de hélices.

### A1.3. Cremalheira geratriz (de uma ECDAC):

Cremalheira real ou imaginária, utilizada para definir a ECDAC considerada. Os flancos da ECDAC, são envoltórios dos de sua cremalheira geratriz, nas condições definidas de posição relativa e de movimento.

### A.1.4. Plano primitivo de geração:

Plano gerado pelo eixo instantâneo de rotação, no movimento relativo da ECDAC, que está sendo gerada, em relação à cremalheira geratriz.

### A.1.5. Seção meridiana:

Seção transversal da ECDAC que contem o eixo de revolução da superfície geratriz (ou eixo de rotação da ferramenta) (ver fig. 05).

#### A.1.6. Trem de engrenagens para geração:

Trem compreendido entre o fuso de acionamento da mesa, em uma fresadora universal, e o cabeçote divisor, adotado na geração da ECDAC.

A2 - EXPRESSÃO ANALÍTICA DA SEÇÃO TRANSVERSAL, DA SUPERFÍCIE GERATRIZ TRONCO-CÔNICA.

Das figuras 21 e 22, deduz-se as equações do perfil\*  $s_{c0}$  referidas aos eixos cartesianos  $0_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$ ; sejam as expressões (70.) e (71).

$$X'_0{}^2 + Z'_0{}^2 = (\rho_{LFi} + Y'_0{}^2 \cdot \text{Tg } \alpha_0)^2 \quad (70)$$

$$Z'_0 = q \quad (71)$$

Com uma translação de eixos, a equação de  $s_{c0}$ , referida ao sistema  $Q_{c0} X_{c0} Y_{c0}$ , é a expressão (72).

$$(X_{c0} + \sqrt{\rho_{LFi}^2 - q^2})^2 + q^2 = (\rho_{LFi} + Y_{c0} \cdot \text{tg } \alpha_0)^2. \quad (72)$$

E analogamente, se tem em (73), a equação implícita do perfil\*  $s_{v0}$ , referida aos eixos  $Q_{v0} X_{v0} Y_{v0}$ .

$$(X_{v0} + \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2})^2 + q^2 = (\rho_{LFe} - Y_{v0} \cdot \text{tg } \alpha_0)^2. \quad (73)$$

---

\* hiperbólico, tendo em vista ser uma seção cônica de excentricidade nula |11| .

Explicitando-se  $X_{c0}$  e  $X_{v0}$ , respectivamente nas expressões (72) e (73), obtém-se as expressões\* (75) e (76), nas quais considerou-se.

$$Y_{c0} = Y_{v0} = Y_0 \quad (74)$$

$$X_{c0} = \sqrt{(\rho_{LFe} + Y_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2 - q^2} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2} \quad (75)$$

$$X_{v0} = \sqrt{(\rho_{LFe} - Y_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2 - q^2} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2} \quad (76)$$

---

\* escolhendo-se o sinal +, para a raiz quadrada, tendo-se em vista, os trechos de hipérbole, AB e GH, ilustrados na fig. 23.

### A3 - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DOS PERFIS

Se considerará sucessivamente a seguir, cada um dos quatro perfis,  $s_{v1}$ ,  $s_{v2}$ ,  $s_{c1}$ ,  $s_{c2}$ , definidos em 3.3.1-, e 3.3.2-.

1 ) Equações paramétricas, do perfil  $s_{v1}$ .

Considere-se na figura 45, a seção contida em  $P_m$ , de um dente da engrenagem 1, ilustrada na figura 27.

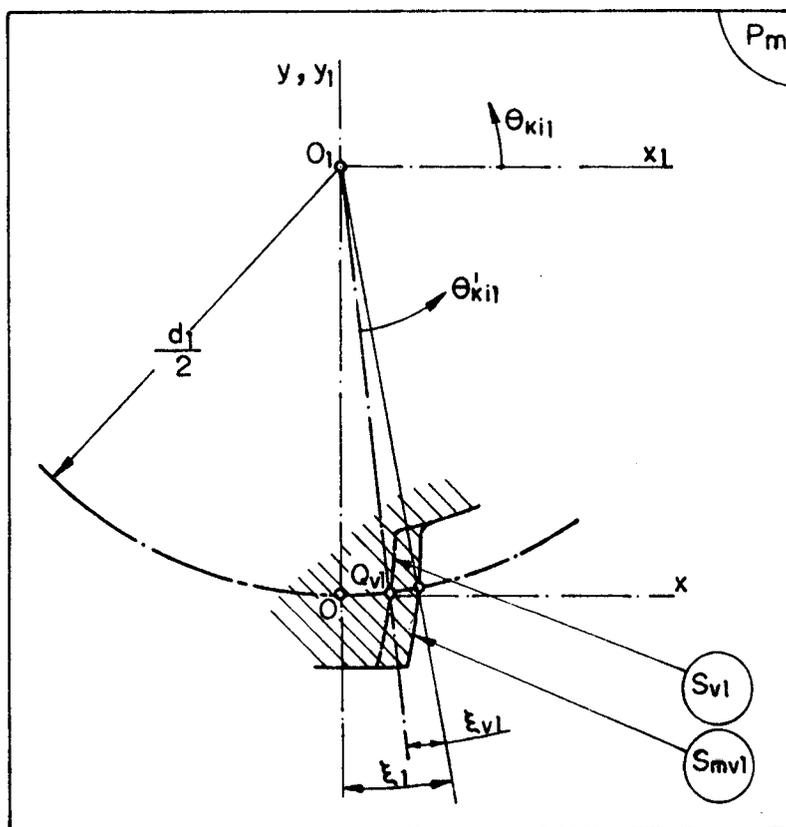


Fig. 45 - Seção parcial meridiana, da engrenagem 1.

As equações paramétricas\*, em coordenadas polares ( $r'_{Kil}$ ,  $\theta'_{Kil}$ ), de um perfil\*\*  $s_v$ , foram indicadas nas expressões (26) e (27). Reescrevenso-as, tem-se para o perfil  $s_{v1}$ :

$$r'_{Kil} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2} - Y_0\right)^2 + X_{ti}^2} \quad (77)$$

$$\theta'_{Kil} = \frac{X_{c0} - X_{ti}}{d_1/2} + \text{arc tg} \frac{X_{ti}}{\frac{d_1}{2} - Y_0} \quad (78)$$

Com uma rotação do eixo polar, considerando-se o novo sistema ( $r_{Kil}$ ,  $\theta_{Kil}$ ), vem para as equações de transformação:

$$r_{Kil} = r'_{Kil} \quad (79)$$

$$\theta_{Kil} = \theta'_{Kil} - \left(\frac{\pi}{2} - \xi_1 + \xi_{v1}\right) \quad (80)$$

Tendo-se em vista, determinar o ângulo  $\xi_{v1}$ , considere-se a figura 46a. Na mesma, vê-se que  $\xi_{v1}$ , mede o valor absoluto do deslocamento angular entre os pontos\*\*\*  $Q_{v1}$  e  $M_{v1}$ .

Na figura 46.b, considerando-se a superfície primitiva

\* O parâmetro  $Y_0$ , é medido no eixo  $Q_{v1}O_1$ , orientado, conforme se vê nas figuras 25 e 45.

\*\* Contido no plano,  $Z = q$ .

\*\*\* Contidos nas superfície primitiva da engrenagem e também em perfis transversais, respectivamente qualquer e meridiano.

(P) e, tendo-se em vista que em algum instante\*,  $M_{v1}$  se superpõe a  $M_{c0}$ , o mesmo ocorrendo entre  $Q_{v1}$  e  $Q_{c0}$ , vem:

$$\xi_{v1} = \frac{\rho_{LFi} - \sqrt{\rho_{LFi}^2 - q^2}}{d_1/2} \quad (81)$$

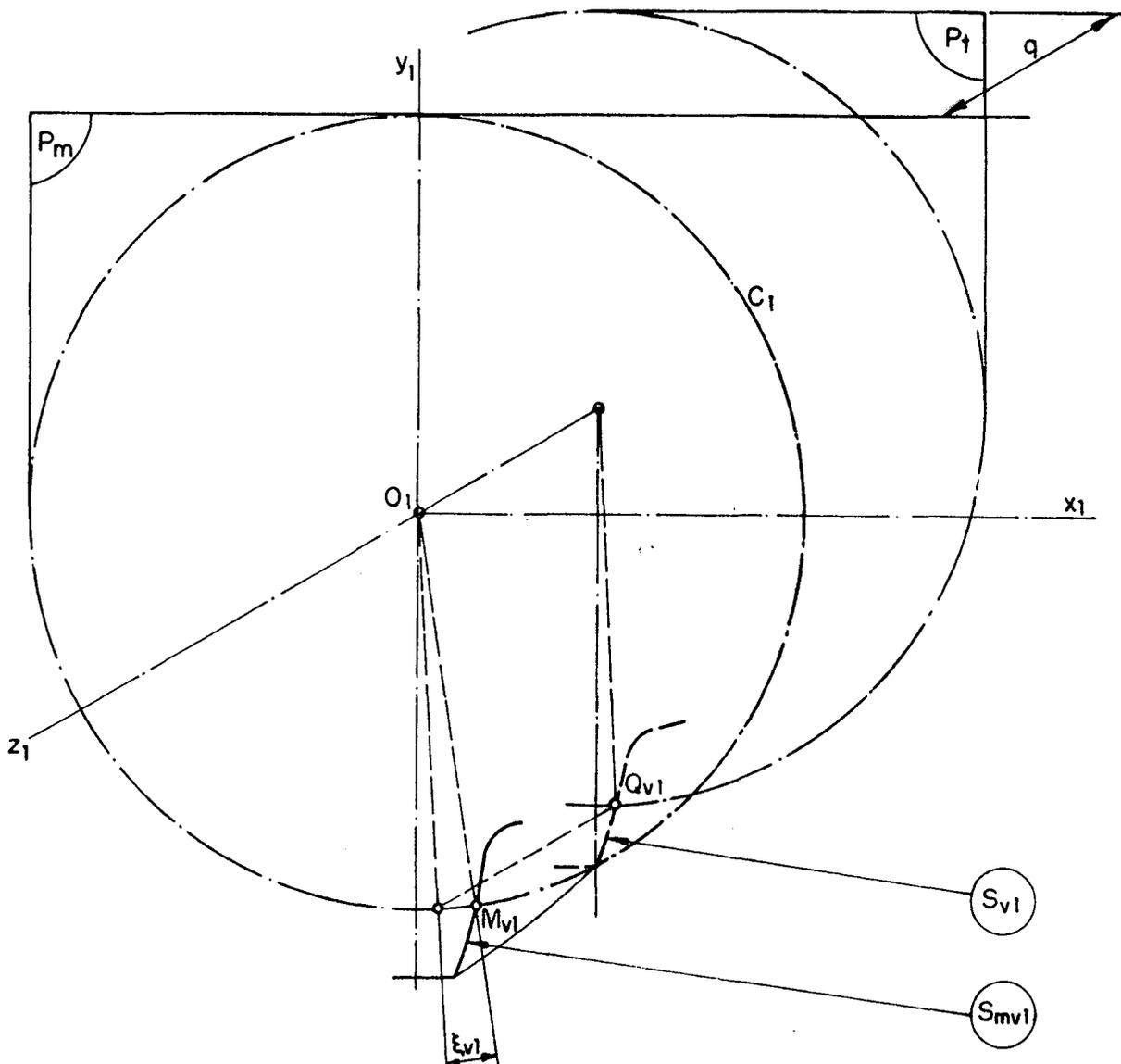


Fig. 46a - Deslocamento angular, entre  $M_{v1}$  e  $Q_{v1}$

\* Durante o processo de geração, considerando-se o rolamento (sem deslizamento), do cilindro  $C_1$  sobre o plano P.

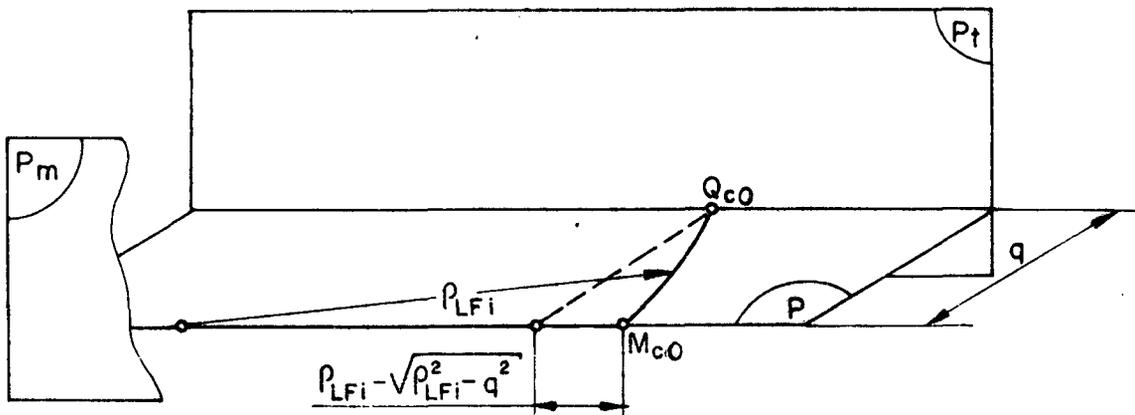


Fig.46b - Deslocamento linear, entre  $M_{c0}$  e  $Q_{c0}$ .

Comparando-se as expressões (30), (78), (80) e (81) vem:

$$\theta_{Kil} = \theta'_{Kil} - \frac{\rho_{Lfi} - \sqrt{\rho_{Lfi}^2 - q^2}}{d_1/2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot z_1} \quad (82)$$

Considerando-se a transformação de coordenadas, para o sistema cartesiano OXY da figura 45, Vem:

$$X = r_{Kil} \cdot \cos \theta_{Kil} \quad (83)$$

$$Y = r_{Kil} \cdot \sin \theta_{Kil} + \frac{d_1}{2} \quad (84)$$

II ) Equações paramétricas do perfil  $s_{v2}$ .

Considere-se na figura 47, a seção contida na superfície

$P_m$ , de um dente da engrenagem 2, ilustrada na figura 27.

Por raciocínio análogo ao seguido em I, obtem-se\* sucessivamente:

$$r'_{Ki2} = \sqrt{\left(\frac{d_2}{2} - Y_0\right)^2 + X_{ti}^2} \quad (85)$$

$$\theta'_{Ki2} = -\left(\frac{X_{c0} - X_{ti}}{d_2/2} + \arctg \frac{X_{ti}}{\frac{d_2}{2} - Y_0}\right) \quad (86)$$

$$r_{Ki2} = r'_{Ki2} \quad (87)$$

$$\theta_{Ki2} = \theta'_{Ki2} - \left(3 \cdot \frac{\pi}{2} - \xi_{v2} - \xi_2\right) \quad (88)$$

$$\xi_{v2} = \frac{\rho_{Lfi} - \sqrt{\rho_{Lfi}^2 - q^2}}{d_2/2} \quad (89)$$

Comparando-se as expressões, (31), (86), (88) e (89), vem:

$$\theta_{Ki2} = \theta'_{Ki2} + \frac{\rho_{Lfi} - \sqrt{\rho_{Lfi}^2 - q^2}}{d_2/2} - 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot z_2} \quad (90)$$

---

\* Considerando-se que  $s_{v2}$ , está posicionado relativamente ao raio  $0_2Q_{v2}$ , em posição oposta ao perfil  $s_v$ , da figura 24.

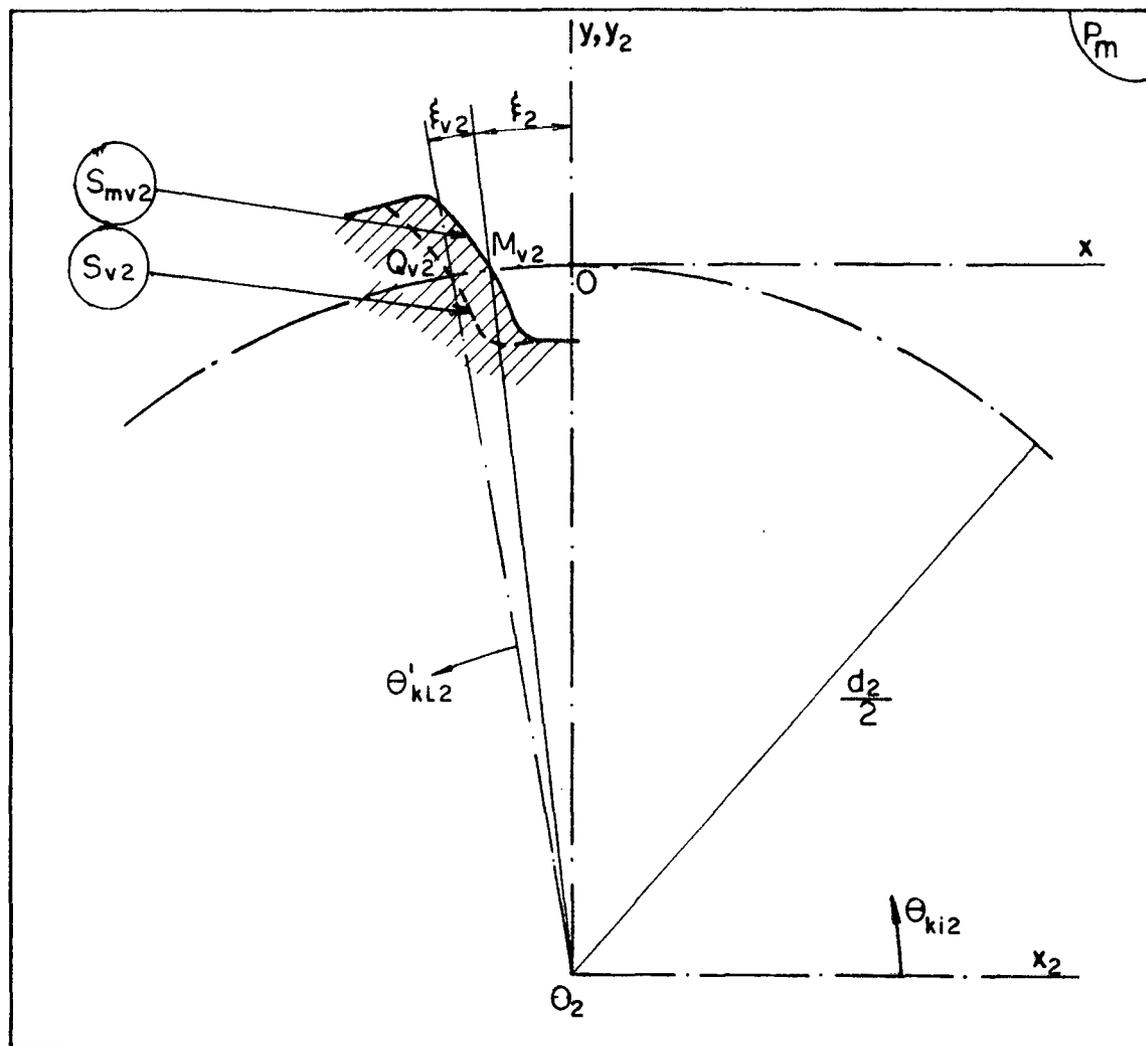


Fig. 47 - Seção parcial meridiana, da engrenagem 2.

As equações paramétricas, em coordenadas cartesianas, do perfil  $s_{v2}$ , referidas ao sistema de eixos  $0XY$  (ver figura 47) são:

$$X = r_{Ki2} \cdot \cos \theta_{Ki2} \quad (91)$$

$$Y = r_{Ki2} \cdot \sin \theta_{Ki2} - \frac{d_2}{2} \quad (92)$$

### III) Equações paramétricas do perfil $s_{c1}$

Considere-se na figura 48, a seção contida na superfície  $P_m$ , de um dente da engrenagem 1, ilustrada na figura 27.

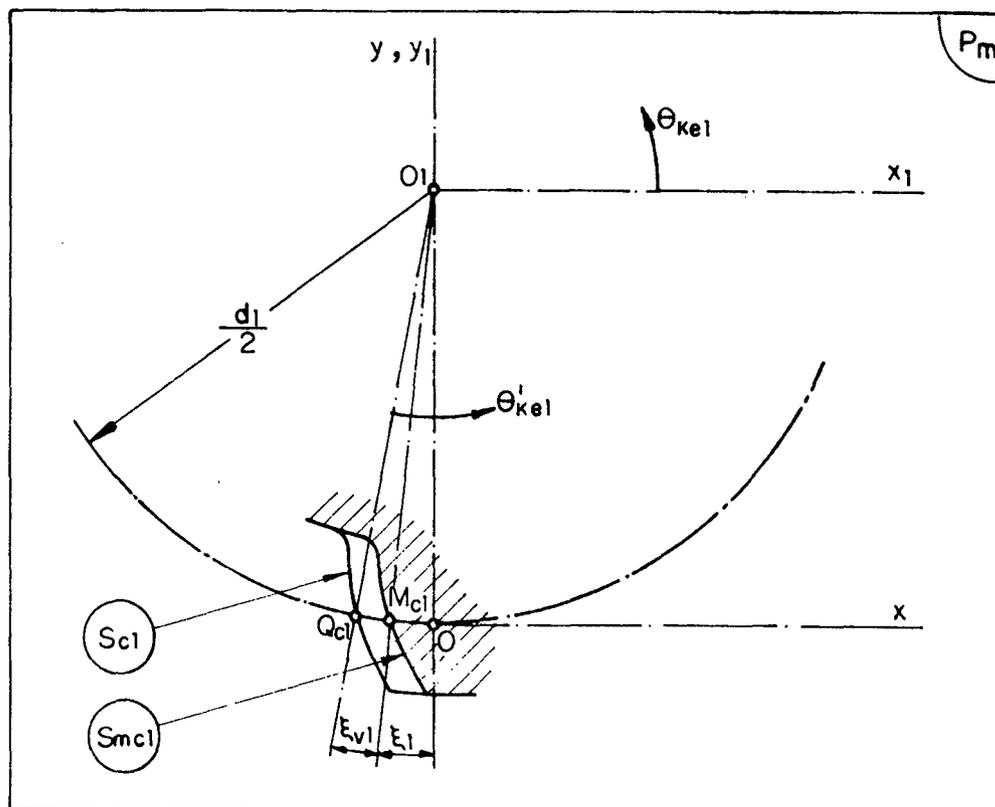


Fig. 48 - Seção parcial meridiana da engrenagem 1

Em virtude das expressões (28) e (29), pode-se escrever:

$$r'_{kel} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2} - Y_0\right)^2 + x_{te}^2} \quad (93)$$

$$\theta'_{Kel} = \frac{X_{v0} - X_{te}}{d_1/2} + \text{arc tg} \frac{X_{te}}{\frac{d_1}{2} - Y_0} \quad (94)$$

Seguindo-se raciocínio análogo ao do item I, obtêm-se sucessivamente:

$$r_{Kel} = r'_{Kel} \quad (95)$$

$$\theta_{Kel} = \theta'_{Kel} - \left( \frac{\pi}{2} + \xi_1 + \xi_{c1} \right) \quad (96)$$

$$\xi_{c1} = \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2}}{d_1/2} \quad (97)$$

Comparando-se as expressões, (30), (94), (96) e (97), vem:

$$\theta_{Kel} = \theta'_{Kel} - \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2}}{d_1/2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cdot z_1} \quad (98)$$

As equações paramétricas, em coordenadas cartesianas, do perfil  $s_{c1}$ , referidas aos eixos OXY (ver figura 48), são:

$$X = r_{Kel} \cdot \cos \theta_{Kel} \quad (99)$$

$$Y = r_{Kel} \cdot \text{sen} \theta_{Kel} + \frac{d_1}{2} \quad (100)$$

IV ) Equações paramétricas do perfil  $s_{c2}$

Considere-se na figura 49 , a seção contida na superfície  $P_m$ , de um dente da engrenagem 2, ilustrada na figura 27.

Seguindo-se raciocínio análogo ao do item I, pode-se escrever\* sucessivamente:

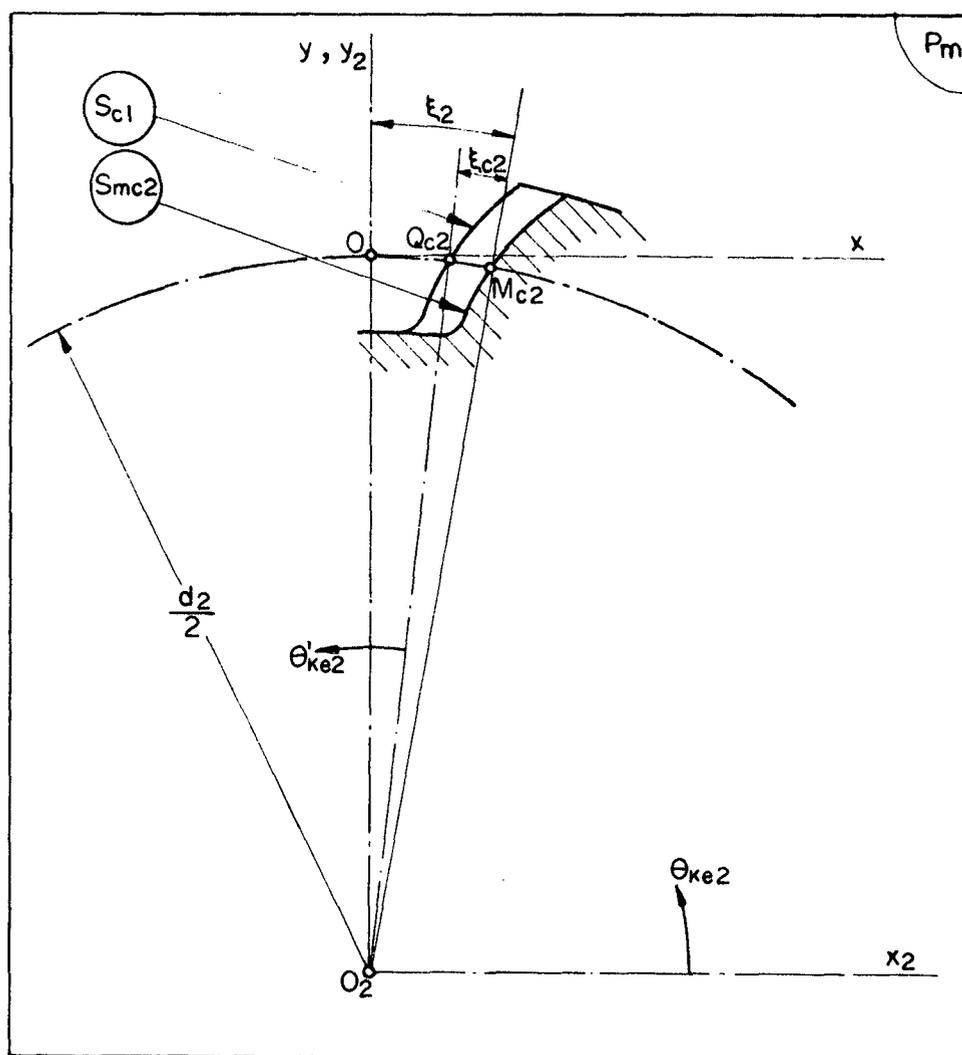


Fig. 49 - Seção parcial meridiana, da engrenagem 2

\* Considerando-se que  $s_{c2}$ , está posicionado relativamente ao raio  $O_2Q_{c2}$ , em posição oposta ao perfil  $s_c$ , da figura 25.

$$r'_{Ke2} = \sqrt{\left(\frac{d_2}{2} - Y_0\right)^2 + X_{te}^2} \quad (101)$$

$$\theta'_{Ke2} = - \left( \frac{X_{v0} - X_{te}}{d_2/2} + \arctan \frac{X_{te}}{\frac{d_2}{2} - Y_0} \right) \quad (102)$$

$$r_{Ke2} = r'_{Ke2} \quad (103)$$

$$\theta_{Ke2} = \theta'_{Ke2} + \frac{\pi}{2} - (\xi_2 - \xi_{c2}) \quad (104)$$

$$\xi_{c2} = \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2}}{d_2/2} \quad (105)$$

Comparando-se as expressões, (31), (102), (104) e (105), vem:

$$\theta_{Ke2} = \theta'_{Ke2} + \frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2}}{d_2/2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cdot z_2} \quad (106)$$

As equações paramétricas em coordenadas cartesianas, do perfil  $s_{c2}$ , referidas aos eixos OXY (ver figura 49), são:

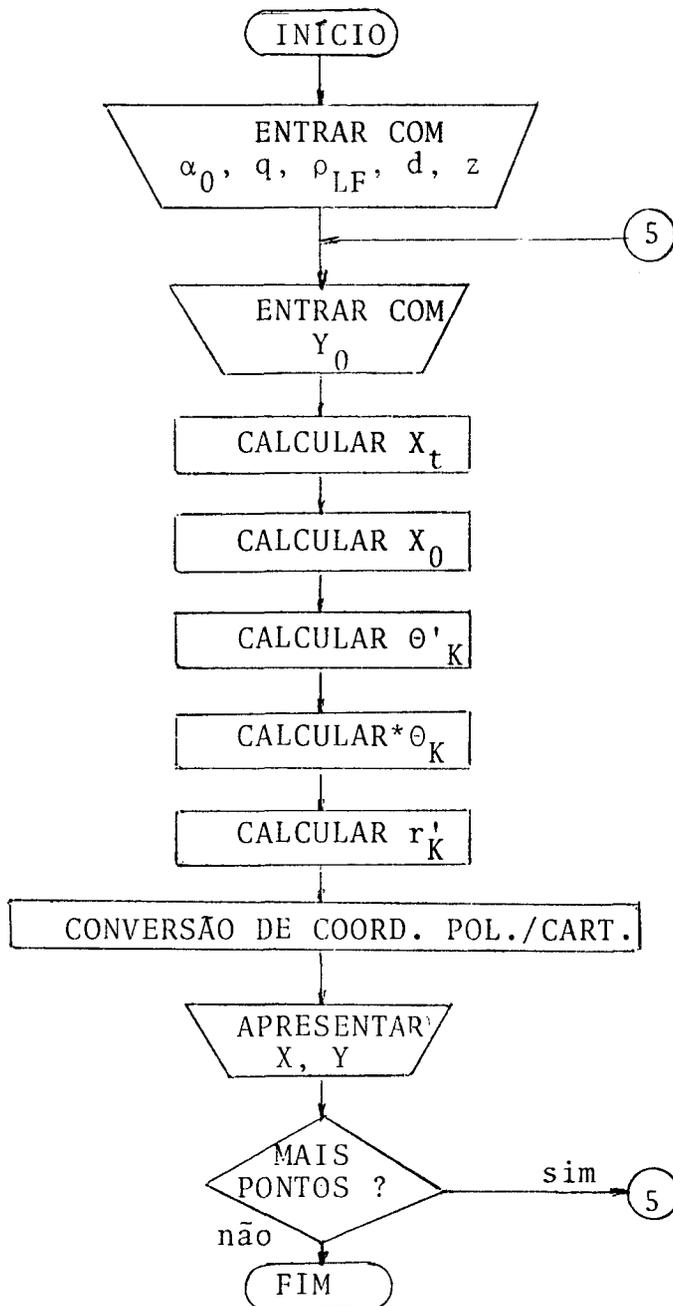
$$X = r_{Ke2} \cdot \cos \theta_{Ke2} \quad (107)$$

$$Y = r_{Ke2} \cdot \sin \theta_{Ke2} - \frac{d_2}{2} \quad (108)$$

## A4 DETERMINAÇÃO DAS COORDENADAS DOS PERFIS DE ECDAC

Apresenta-se a seguir, um programa aplicável a calculadoras manuais, com a finalidade de determinar as coordenadas dos perfis de ECDAC.

## I ) Fluxograma



\* Ver apêndice 3.

## II ) Formulário simplificado de programação

Visor		Introdução
Linha	Código	
01	74	R/S
02	24 05	RCL 5
03	24 00	RCL 0
04	71	÷
05*	32	CHS
05**	15 74	g NOP
06	24 02	RCL 2
07	24 05	RCL 5
08	24 00	RCL 0
09	61	x
10*	51	+
10**	41	-
11	71	÷
12	14 73	f LASTx
13	15 02	g $x^2$
14	24 01	RCL 1
15	41	-
16	14 02	f $\sqrt{x}$
17	61	x

---

\* Ao tratar-se de perfis  $s_v$ .

\*\* Ao tratar-se de perfis  $s_c$ .

Visor		Intro- dução
Linha	Código	
18	23 07	STO 7
19	14 73	f LASTx
20	24 04	RCL 4
21	41	-
22	24 07	RCL 7
23	41	-
24	24 03	RCL 3
25	71	÷
26	24 07	RCL 7
27	24 03	RCL 3
28	24 05	RCL 5
29	41	-
30	71	÷
31	15 06	g tan <sup>-1</sup>
32	51	+
33*	32	CHS
33**	15 74	g NOP
34	24 06	RCL 6
35	51	+
36	24 03	RCL 3
37	24 05	RCL 5

---

\* Ao tratar-se de perfis da engrenagem 2.

\*\* Ao tratar-se de perfis da engrenagem 1.

Visor		Intro- dução
Linha	Código	
38	41	-
39	15 02	$g x^2$
40	24 07	RCL 7
41	15 02	$g x^2$
42	51	+
43	14 02	$f \sqrt{x}$
44	74	R/S
45	14 09	$f \rightarrow R$
46	21	$x \underset{\zeta}{\geq} y$
47	24 03	RCL 3
48*	41	-
48**	51	+
49	13 01	GTO 01

---

\* Ao tratar-se de perfis de engrenagem 2.

\*\* Ao tratar-se de perfis da engrenagem 1.

## III) Registros

- para o perfil  $s_{v1}$ :

$R_0$	$\text{tg } \alpha_0$
$R_1$	$q^2$
$R_2$	$\rho_{LFi}$
$R_3$	$d_1/2$
$R_4$	$\sqrt{\rho_{LFi}^2 - q^2}$
$R_5$	$Y_0$
$R_6$	$-\frac{\rho_{LFi} - \sqrt{\rho_{LFi}^2 - q^2}}{d_1/2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot z_1}$

- para o perfil  $s_{v2}$ 

$R_0$	$\text{tg } \alpha_0$
$R_1$	$q^2$
$R_2$	$\rho_{LFi}$
$R_3$	$d_2/2$
$R_4$	$\sqrt{\rho_{LFi}^2 - q^2}$
$R_5$	$Y_0$
$R_6$	$\frac{\rho_{LFi} - \sqrt{\rho_{LFi}^2 - q^2}}{d_2/2} - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot z_2}$

- para o perfil  $s_{c1}$

$R_0$	$\operatorname{tg} \alpha_0$
$R_1$	$q^2$
$R_2$	$\rho_{LFe}$
$R_3$	$d_1/2$
$R_4$	$\sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2}$
$R_5$	$Y_0$
$R_6$	$-\frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2}}{d_1/2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cdot z_1}$

- para o perfil  $s_{c2}$

$R_0$	$\operatorname{tg} \alpha_0$
$R_1$	$q^2$
$R_2$	$\rho_{LFe}$
$R_3$	$d_2/2$
$R_4$	$\sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2}$
$R_5$	$Y_0$
$R_6$	$\frac{\rho_{LFe} - \sqrt{\rho_{LFe}^2 - q^2}}{d_2/2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cdot z_2}$

## IV ) Operação do programa

- por no modo PRGM
- introduzir: f PRGM
- introduzir o programa
- por no modo RUN
- fazer os registros, de  $R_0$  a  $R_4$  e  $R_6$
- introduzir: g RAD
- fazer o registro  $R_5$
- introduzir: R/S
- ler:  $r_K$
- introduzir: R/S
- ler: Y
- introduzir:  $x \geq y$
- ler: X
- retornar ao ítem 07, até obter todos os pontos desejados.

## A5 DETERMINAÇÃO DAS ENGRENAGENS DO TREM PARA GERAÇÃO

Apresenta-se a seguir, um programa aplicável a calculadoras manuais, com a finalidade de determinar os números de dentes que devem ter as engrenagens do trem para geração.

## I ) Definição das variáveis.

$$IZT 1 = Z_{t1} = 40$$

$$IZT 2 = Z_{t2}$$

$$IZT 3 = Z_{t3}$$

$$IZT 4 = Z_{t4}$$

$$IZT21 = (Z_{t2})_{inicial} = 21$$

$$IZT31 = (Z_{t3})_{inicial} = 21$$

$$IZT41 = (Z_{t4})_{inicial} = \frac{\pi \cdot d_1 \cdot Z_{t1}}{R \cdot P_f} - 1$$

$$IZM = (Z_t)_{m\acute{a}ximo}$$

$$RT 23 = Z_{t2}/Z_{t3}$$

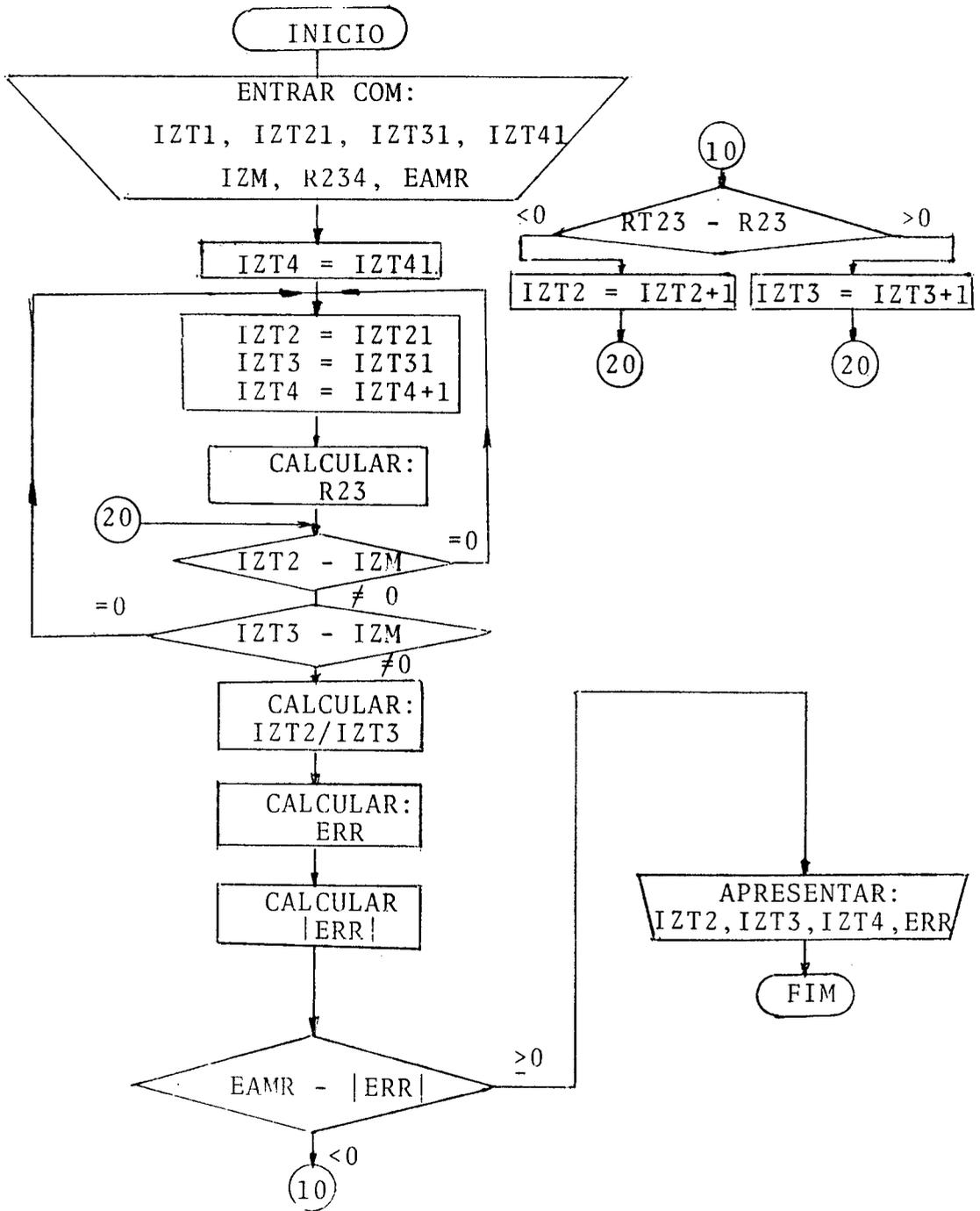
$$R 234 = \pi \cdot d_1 Z_{t1}/R \cdot P_f$$

$$R 23 = \pi \cdot d_1 \cdot Z_{t1}/R \cdot P_f \cdot Z_{t4}$$

$$ERR = R_{co,ci}^{ef} - R_{co,ci} = \frac{Z_{t2} \cdot Z_{t4}}{Z_{t1} \cdot Z_{t3}} - \frac{\pi \cdot d_1}{R \cdot P_f}$$

$$EAMR = (\epsilon_{co,ci})_{m\acute{a}ximo}$$

II ) FLUXOGRAMA



## III) Formulário simplificado de programação.

Visor		Intro- dução
Linha	Código	
00	//////////	//////////
01	01	1
02	23 51 02	ST0+2
03	02	2
04	01	1
05	23 01	ST0 1
06	23 00	ST0 0
07	24 04	RCL 4
08	24 02	RCL 2
09	71	÷
10	23 06	ST0 6
11	24 01	RCL 1
12	24 00	RCL 0
13	01	1
14	02	2
15	07	7
16	24 01	RCL 1
17	14 71	f(x=y)
18	13 01	GT0 01
19	22	R↓
20	14 71	f(x=y)

Visor		Intro- dução
Linha	Código	
00	//////////	//////////
21	13 01	GTO 01
22	22	R↓
23	71	÷
24	23 07	ST0 7
25	24 06	RCL 6
26	41	-
27	04	4
28	00	0
29	71	÷
30	24 02	RCL 2
31	61	x
32	23 05	ST0 5
33	15 03	g ABS
34	24 03	RCL 3
35	14 51	f(x>y)
36	13 48	GTO 48
37	24 06	RCL 6
38	24 07	RCL 7
39	14 41	f(x<y)
40	13 42	GTO 42
41	13 45	GTO 45
42	01	1
43	23 51 01	ST0+1

Visor		Intro- dução	Registros	
Linha	Código		R0	IZT3
00	//////////	//////////	R1	IZT2
44	13 11	GT0 11	R2	IZT4
45	01	1	R3	EAMR
46	23 51 00	ST0+0	R4	R234
47	13 11	GT0 11	R5	ERR
48	74	R/S	R6	R 23
			R7	RT23

## V ) Formulário de instruções.

Etapa	Instruções	Entrada	Teclas	Saida
1	Gravar o programa			
2	Armazenar EAMR	$(\epsilon_{co,ci})_{m\acute{a}x.}$	<u>ST0, 3</u>	
3	Armazenar IZT41	$(z_{t4})_{inicial}$	<u>ST0, 2</u>	
4	Armazenar a constante R234	$\pi \cdot d_1 \cdot z_{t1} / R \cdot p_f$	<u>ST0, 4</u>	
5	Iniciar		<u>f, PRGM, R/S</u>	
6	Apresentar IZT2, IZT3, IZT4		<u>RCL, 1</u> <u>RCL, 0</u> <u>RCL, 2</u>	$z_{t2}$ $z_{t3}$ $z_{t4}$
7	Apresentar ERR		<u>RCL, 5</u>	$R_{co,ci}^{ef} - R_{co,ci}$
8	Outras soluções		<u>GT0, 37</u>	