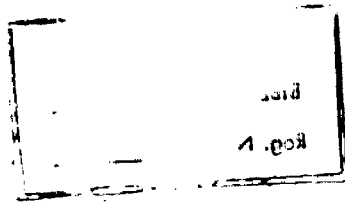


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

ALOCÇÃO ÓTIMA DO ORÇAMENTO DE PROPAGANDA ENTRE OS
VEÍCULOS DISPONÍVEIS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
COMO REQUISITO PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
"MESTRE EM ENGENHARIA"



MARIELA BARRETO DE VILLAMIZAR

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
ABRIL DE 1980

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.



PROF. LEONARDO ENSSLIN, Ph.D.
Coordenador

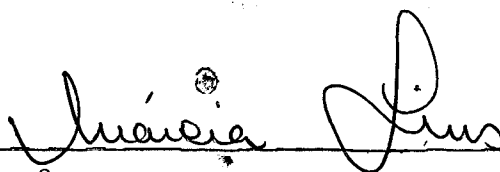
BANCA EXAMINADORA:



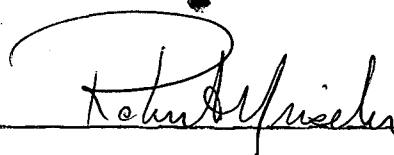
PROF. WILHELM RODDER, Ph.D.
Presidente da Banca



PROF. MARCOS BLAUTH, M.Sc.
Co-Orientador



PROF.^a MARCIA LIGOCKI LINS, M.Sc.



PROF. ROBERTO F. KRISCHER, M.Sc.



0.249.217-6

UFSC-BU

À meus pais, sogros e
Especialmente ao meu marido e filho

Julio César

e

Julio José,

que pacientemente esperaram e colabor
raram nas horas de convivência consum
midas pelo Curso de Pós-Graduação.

AGRADECIMENTOS

Inúmeras pessoas e instituições tornaram-se dignas do reconhecimento do Autor, por terem proporcionado condições para a realização deste trabalho.

À CAPES e ao CNPq por terem proporcionado condições financeiras para a realização deste trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

À Fundación "Gran Mariscal de Ayacucho" (Venezuela).

Aos professores Wilhelm Rödder e Marcos Blauth pela orientação e incentivo dados durante a execução deste trabalho.

Aos professores Leonardo Ensslin, Marcia Ligocki Lins e Roberto F. Krischer, pelo auxílio e colaboração prestados.

À Carlos Duarte, pelo paciente trabalho de datilografia.

É impraticável a elaboração de uma relação exaustiva das pessoas merecedoras de gratidão pelo que fizeram em favor deste estudo, porém, a todos, o Autor consigna os seus melhores agradecimentos.

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido para elaborar um sistema matemático que selecione a melhor distribuição de recursos entre os diversos veículos de comunicação e propaganda. Assim a idéia fundamental do trabalho é a de considerar a propaganda como um investimento e não como uma despesa, de maneira que seja possível quantificar seu retorno.

Nos capítulos 1 e 2 aborda-se resumidamente os modelos matemáticos, já existentes, que tratam deste aspecto da economia.

No capítulo seguinte está desenvolvido o método proposto para encontrar a solução ótima para o problema com multiplicador de Lagrange através de um método de pesquisa binária. O método proposto aplicado ao problema de distribuir da melhor forma possível recursos escassos entre os veículos de propaganda, resulta na montagem de dois problemas matemáticos distintos. O primeiro busca a maximização da penetração da propaganda entre os clientes atendendo-se as restrições orçamentárias. O segundo busca a minimização dos custos de propaganda atendendo-se um nível mínimo de penetração da propaganda entre os clientes.

Finalmente são apresentadas duas ilustrações da aplicação do modelo.

ABSTRACT

This thesis was developed in order to work out a mathematical system which selects the best distribution of resources among the various media. Thus, the basic idea of the thesis is that of considering advertisement as an investment and not as an expense, so that it is possible to quantify its return.

Chapters 1 and 2 treat concisely the already existing mathematical models that deal with this aspect of the economy.

The following chapter develops the method proposed to find the optimum solution for the problem with Lagrange multiplier through a method of binary research. The proposed method, applied to the problem of distributing in the best way possible the limited resources among the media, results in the assembling of two distinct mathematical problems. The first seeks the maximization of the penetration of advertisement among the clients attending budgetary restrictions. The second seeks the minimization of the advertisement costs attending a minimum level of penetration of the advertisement among the clients.

Lastly, two illustrations of the model's application are presented.

S U M Á R I O

| | |
|---|------|
| RESUMO | viii |
| ABSTRACT | ix |
| CAPÍTULO I | 1 |
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Propósito | 2 |
| 1.2 Importância | 3 |
| 1.3 Limitações | 4 |
| 1.4 Organização do trabalho | 4 |
| CAPÍTULO II | 6 |
| 2. RETROSPECTO | 6 |
| 2.1 Histórico | 6 |
| 2.2 Modelo de Programação Linear | 9 |
| 2.3 Modelo de Programação Dinâmica | 12 |
| CAPÍTULO III | 17 |
| 3. MODELO PROPOSTO | 17 |
| 3.1 Concepção e desenvolvimento | 17 |
| 3.2 A solução estável | 25 |
| 3.3 Conseqüências da solução estável nos proble mas P1N e P2N | 28 |
| CAPÍTULO IV | 31 |
| 4. TÉCNICA DE RESOLUÇÃO | 31 |
| 4.1 Análise do Problema P1N | 31 |
| 4.2 Solução do Problema P1N, através dos multi- plicadores de Lagrange | 32 |
| 4.3 Análise do Problema P2N | 39 |
| 4.4 Solução do Problema P2N através dos multi - plicadores de Lagrange | 40 |
| 4.5 Algoritmo | 44 |

| | |
|---|----|
| CAPÍTULO V | 47 |
| 5. ILUSTRAÇÕES..... | 47 |
| 5.1 Enunciados | 47 |
| 5.2 Soluções | 50 |
| 5.3 Interpretação econômica dos resultados | 52 |
| CAPÍTULO VI | 55 |
| 6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES | 55 |
| BIBLIOGRAFIA | 58 |

A N E X O S

| | |
|---|----|
| ANEXO 1 - Análise qualitativa das funções-objetivo dos problemas P1N e P2N | 59 |
| ANEXO 2 - Determinação do limite inferior do intervalo de pesquisa do λ ótimo | 63 |
| ANEXO 3 - Documentação do programa computacional | 67 |
| ANEXO 4 - Algoritmo heurístico para a solução inteira | 74 |

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento econômico, as mudanças sociais, a aceleração do progresso tecnológico, o desenvolvimento de novos produtos e serviços, bem como seu aperfeiçoamento, a busca de novas aplicações para produtos convencionais, a incorporação de novos consumidores ao mercado ativo, as alterações de hábitos e padrões de comportamento, a mundialização do mercado, a obsolescência programada de certos produtos de reposição, as pressões de uma competição virulenta, todas essas mudanças no mundo atual influenciam na propaganda.

A propaganda é um instrumento poderoso que as organizações possuem, através do qual transmitem informações persuasivas aos compradores.

O propósito da propaganda é fazer com que o comprador em potencial reaja mais favoravelmente às ofertas da empresa; ela procura fazer isto fornecendo informações aos clientes, tentando modificar seus interesses e fornecendo razões para que os clientes prefiram os produtos da organização.

Em outras palavras, as empresas preocupam-se em aumentar o volume de vendas e os lucros. Os administradores no entanto, reconhecem que o produto, o preço e a distribuição sozinhos não são suficientes para criar vendas e lucros, é necessário um plano eficiente de comunicação e promoção.

Através da propaganda numerosas empresas tem superado etapas críticas, tem aumentado o mercado para os produtos da

empresa, ou tem mantido por períodos de tempo elevadas vendas, superando os problemas da concorrência.

É importante ressaltar que a propaganda não é a única força agindo sobre o comprador, já que existem outros fatores (qualidade do produto, preço, embalagem, etc.) que influenciam na compra do produto. Porém, fazendo propaganda, pode-se obter um aumento nas vendas e lucros, em relação ao que seria obtido sem ela.

Para a maioria dos administradores o problema não é se promover ou não, mas de que modo distribuir a propaganda para obter o máximo impacto no segmento de mercado especificado.

Esta decisão importante do plano promocional será abordada no presente trabalho.

1.1 Propósito

O propósito fundamental deste trabalho de pesquisa consiste na concepção, desenvolvimento e implementação em computador de um modelo matemático, que atenda o processo decisório na definição da melhor estratégia de investimentos para transmitir a mensagem da propaganda para um segmento de mercado específico.

Para alcançar os objetivos propostos, tendo em vista a magnitude do trabalho, tornou-se necessário:

- Fazer um estudo do estágio atual de desenvolvimento dos modelos de seleção de veículos de comunicação
- Definir e caracterizar o sistema em estudo
- Criar um novo modelo matemático que incorporasse as informações relevantes do sistema considerado

- Escolher um método para a solução do problema
- Implementar no computador o modelo proposto
- Analisar os resultados.

1.2 Importância do Estudo

Na tomada de decisões importantes para a empresa, o administrador de marketing tem que enfrentar o problema de escolher uma alternativa ou um conjunto delas entre as muitas alternativas existentes.

Uma das decisões mais importantes na definição, de um plano de propaganda é decidir que parcela dos recursos disponíveis deve ser alocada a cada um dos veículos ou meios para transmitir a mensagem da propaganda.

Em cada empresa são encontrados alguns executivos que favorecem fortemente um veículo de comunicação como o melhor para determinado produto, e gostariam de ver os fundos da empresa distribuídos nele. Há outros executivos que não tem convicções sobre veículos de comunicação e favorecem a distribuição dos fundos por todos eles. Ambas as abordagens podem ser causadoras de prejuízos. Tanto é errado colocar todos os fundos em um veículo de comunicação de segunda categoria^{*}, quanto colocar parte dos

* Os diversos veículos de comunicação se diferenciam um do outro, de acordo com a eficiência para transmitir a mensagem de propaganda.

fundos em veículos de comunicação de terceira e quarta categoria. As distribuições dos fundos melhorarão à medida em que melhorarem os dados e teorias de veículos de comunicação.

A grande importância do presente trabalho é proporcionar ao administrador um instrumento que o ajude na escolha do melhor meio de distribuição de sua propaganda, dando a melhor utilização dos recursos disponíveis.

1.3 Limitações

Para a caracterização do ambiente no qual o modelo proposto pode ser aplicado, são necessárias algumas suposições:

- O modelo proposto aplica-se a produtos que sejam renováveis no intervalo do período de planejamento.
- O modelo considera um segmento de mercado único, ao qual é dirigida a propaganda.
- Não é considerada a dependência existente entre os veículos de comunicação.

No capítulo 3, será justificada cada uma das suposições restritivas do modelo.

1.4 Organização do Trabalho

No capítulo 2 serão apresentados alguns dos modelos matemáticos mais usados na seleção de veículos de comunicação. O novo modelo proposto é apresentado no capítulo 3.

No capítulo 4 é estudado e apresentado o método de solução do modelo matemático, utilizando a teoria de 'Lagrange'.

No capítulo 5 é apresentado um exemplo de aplicação do modelo. Um algoritmo computacional é desenvolvido, para encontrar a solução para o problema.

O capítulo final apresenta as conclusões e recomendações para a aplicação do modelo e algumas considerações sobre futuras pesquisas.

CAPÍTULO II

2. RETROSPECTO

2.1 Histórico

A seleção de veículos de comunicação é uma área da propaganda onde os métodos matemáticos avançados têm recebido publicidade, pelos avanços práticos.

As agências de propaganda que iniciara o estudo do problema de seleção de veículos de comunicação foram a Young e Rubican (Y & R) e Batten, Barton, Durstine e Osborn (BBD & O) (8). Mais tarde a Batten, Barton, Durstine e Osborn, Inc. (12) patrocinaram anúncios de página inteira de jornal e revista afirmando: "A programação linear mostrou a um cliente da B.B.D.O. como conseguiu 1.67 \$ de retorno eficaz para cada \$ 1.00 de seu orçamento".

Outras agências de propaganda tem aceito o desafio e estão certamente experimentando diversos modelos diferentes.

W. Moran, da empresa Young e Rubican relata em (8) que sua empresa dispendeu dois anos tentando uma abordagem de programação linear e finalmente desistiu desta abordagem porque encontrara um modelo mais simples, baseado num processo sequencial adaptativo, e não simultâneo para a seleção da melhor distribuição de recursos entre os diversos veículos. A idéia básica deste modelo é começar com o veículo de comunicação disponível na primeira semana e alocar todo o orçamento disponível em um único veículo.

Feita esta seleção, todas as outras alternativas de distribuição de recursos entre os diversos veículos de comunicação são reavaliadas, para levar em consideração a expansão da população e os possíveis descontos nos custos dos diversos veículos. Faz-se então, uma segunda seleção, para a mesma semana se a penetração da propaganda estiver abaixo dos níveis desejados. O processo continua até que a penetração semanal desejada seja alcançada, quando são consideradas as seleções de veículos.

As vantagens deste modelo são:

- Leva em conta a expansão da população.
- Leva em conta a possibilidade de obter descontos de preço de grandes investimentos no mesmo veículo.

Diversos outros modelos foram propostos para ajudar na seleção de veículos de comunicação. Os modelos matemáticos existentes que se mostraram mais importantes para o desenvolvimento deste trabalho serão abordados nas seções 2.3 e 2.4 .

A seguir serão definidos alguns conceitos úteis e necessários para a melhor compreensão deste trabalho.

2.2 Definições Básicas

Veículo de Comunicação: Chama-se veículo de comunicação ao meio utilizado para transmitir as mensagens da propaganda. Existem diversos tipos de veículos de comunicação: televisão, rádio, jornal, revistas, etc.

Segmento de mercado: Grupos da população aos quais é

dirigida a propaganda.

Para agrupar a população em segmentos de mercado, diversos critérios podem ser usados: nível de educação, idade, sexo, renda, etc.

Retenção da mensagem: Fração das pessoas que "lembram" do produto, devido à propaganda feita no período anterior.

Penetração da Propaganda: Chama-se penetração da propaganda, a quantidade de pessoas que são atingidas * pela propaganda feita mediante algum veículo de comunicação.

Unidades de exposição ou anúncios: Número de unidades de espaço ou tempo a expor em algum veículo de comunicação.

Exemplos: 60 segundos de televisão no programa A. 1/2 página central, a cores da revista LIFE.

* As pessoas que se tornam conscientes do produto através da propaganda formam o conjunto de pessoas atingidas pela propaganda.

2.3 Modelo de programação linear

O modelo de programação linear patrocinado por Batten, Barton, Durstine e Osborn (BBDO) (12) é o primeiro modelo que abordou o assunto do planejamento de veículos de comunicação.

O objetivo do modelo é maximizar a penetração total da propaganda, ou seja maximizar a quantidade total de pessoas atingidas pela propaganda para um segmento de mercado considerado.

A penetração total pode ser expressa como uma função do número de unidades de exposição apresentadas, em cada um dos veículos de comunicação disponível.

As restrições neste modelo podem ser classificadas em

- i) restrição orçamentária
- ii) restrição quanto ao uso de algum veículo de comunicação individual
- iii) restrição ao uso de alguma(s) categoria(s) de veículos de comunicação.

De forma geral o modelo matemático é

$$\text{MAX } E = \sum_{j=1}^N e_j X_j$$

sujeito a:

(i) Limitação orçamentária.

$$\sum_{j=1}^N C_j X_j \leq B$$

(ii) Limitação ao uso de alguns veículos de comunicação individuais.

$$L_j \leq X_j \leq U_j \quad \text{para alguns } j$$

(iii) Limitação ao uso da categoria de veículo de comunicação.

$$\sum_{j \in J_k} C_j X_j \leq B_k \quad \text{para alguns } k$$

- Onde:
- $j = 1, \dots, N$. O índice do veículo de propaganda.
 - E = penetração total.
 - e_j = penetração de um anúncio no veículo j .
 - X_j = número de anúncios colocados no veículo j .
 - C_j = custo de um anúncio no veículo j .
 - B = orçamento total de propaganda.
 - L_j = número mínimo de unidades a expor no veículo j .
 - U_j = número máximo de unidades a expor no veículo j .
 - B_k = k -ésima parcela do orçamento total, a ser alocada nos veículos de propaganda do sub-conjunto J_k , onde $J_k \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$.

O modelo de programação linear apresenta basicamente as seguintes limitações:

- A função objetiva é uma função linear da quantidade de anúncios colocados em cada veículo de comunicação. Em outras palavras a quantidade de pessoas atingidas pela propaganda feita no veículo j é diretamente proporcional ao número de anúncios colocados no veículo j . Isto não é razoável, particularmente quando o número de anúncios for muito elevado, caso em que os últimos anúncios podem ter uma influência muito menor que os primeiros na população.
- Uma outra limitação deste modelo é que os custos dos diversos veículos de comunicação permanecem constantes no tempo.

Apesar das limitações anteriores o modelo de programação linear é considerado uma aproximação viável para o problema de seleção de veículos de comunicação.

Tem surgido novos modelos que envolvem aspectos adicionais que não foram considerados no modelo de programação linear.

Evidentemente, tais informações adicionais nos modelos tendem a deixá-los mais complexos. Este é o caso do modelo de programação dinâmica, que será apresentado a seguir.

2.3 Modelo de programação dinâmica.

J. Little e L. Lodish (6) desenvolveram um modelo matemático para alocar recursos disponíveis entre diversos veículos de comunicação.

No modelo, a população é dividida em segmentos de mercado. Cada segmento de mercado tem suas próprias vendas potenciais e diferentes preferências quanto aos veículos de comunicação.

O objetivo do modelo é maximizar as vendas potenciais no segmento de mercado definido.

As restrições do modelo são:

- (i) - Limitações orçamentárias.
- (ii) - Limitações ao uso de veículo individual.
- (iii) - Limitações de penetração da propaganda.

A formulação matemática do modelo é:

$$\text{Encontrar } X = (X_{jt}) \text{ e } Y = (Y_{it})$$

Maximizando

$$\sum_{i=1}^S \sum_{t=1}^T n_i \cdot P_{it} \cdot F(Y_{it})$$

Sujeito a:

(i) Limitação orçamentária:

$$\sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T C_{jt} X_{jt} \leq B$$

(ii) Limitação ao uso de um Veículo de Comunicação Individual.

$$L_{jt} \leq X_{jt} \leq U_{jt} \quad , \quad \text{para alguns } j \\ t = 1, \dots, T.$$

(iii) Limitação da penetração da propaganda.

$$Y_{it} = \alpha Y_{i,t-1} + \sum_{j=1}^M K_{ij} e_j X_{jt} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, S \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

(iv) Limitação de Não Negatividade.

$$X_{jt} \geq 0, \quad Y_{it} \geq 0 \quad ; \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, M \\ t = 1, \dots, T \\ i = 1, \dots, S \end{matrix}$$

Onde:

X_{jt} = número de anúncios colocados no veículo de comunicação j no tempo t .

Y_{it} = penetração da propaganda no segmento de mercado i no tempo t .

M = número de veículos de comunicação disponíveis.

- T = número de períodos de tempo no horizonte de planejamento.
- S = número de segmentos de mercado a considerar.
- U_{jt} = número máximo de anúncios a expor no veículo j no tempo t .
- L_{jt} = número mínimo de anúncios a expor no veículo j no tempo t .
- α = constante de retenção da mensagem.
- K_{ijt} = número esperado da penetração da propaganda para o segmento de mercado i , no veículo j no tempo t .
- e_j = penetração da propaganda atingida por um anúncio colocado no veículo j .
- P_{it} = vendas esperadas no segmento de mercado i , no tempo t . São expressas em valores monetários.
- $P_{it} F(Y_{it})$ = vendas antecipadas no segmento de mercado i , no tempo t , quando a penetração é Y_{it} .
- n_i = número de pessoas no segmento de mercado i .
- $\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^S n_i P_{it} F(Y_{it})$ = vendas totais sobre o período de planejamento, expressas em unidades monetárias.
- C_{jt} = custo do anúncio no veículo j no tempo t .
- B = orçamento total de propaganda disponível para o período de planejamento.

Trata-se de um modelo não linear com restrições lineares.

As principais desvantagens do modelo de programação dinâmica são:

- número elevado de variáveis. O tempo e memória necessária para sua execução computacional aumenta rapidamente com o número de segmentos de mercados, veículos de comunicação e períodos de tempo, portanto torna-se inviável a implementação do modelo para problemas de médio e grande porte * .
- Apesar de ser introduzida a constante de esquecimento no modelo, ainda é considerada que a relação existente entre a quantidade investida e a penetração da propaganda é uma função linear.

Uma variedade de técnicas podem ser utilizadas na resolução deste modelo, a técnica utilizada por Little e Lodish foi a técnica de programação dinâmica.

Charnes, Cooper, DeVoe, Learner and Reinecke (1) desenvolveram um modelo, no qual levaram em consideração o tempo, porém não consideraram a constante de esquecimento, nem a relação existente entre os diversos veículos de comunicação. A técnica de implementação utilizada foi a programação por objetivos.

Zangwill (13) sugeriu utilizar a técnica de programação inteira na implementação do problema, porém o estágio atual

* Especificamente, um modelo com n variáveis requer $O(2^n)$ posições de memória; (leia-se "da ordem de 2^n "); por exemplo, para 4 veículos, 4 períodos de tempo e 3 segmentos de mercado $\{|X_{ij}| = 48$, ocupando $O(2^{48})$ posições de memória.

da tecnologia, não permite aplicar a técnica para problema de grande porte, como é o problema de alocação de recursos entre veículos de comunicação.

A empresa Simulmatics Corporation (10) desenvolveu um modelo de simulação que não pretende encontrar a melhor estratégia de alocação de recursos entre veículos de comunicação, mas estimar o valor da penetração de alguma estratégia.

O modelo proposto que será apresentado no próximo capítulo, além de quantificar as pessoas que lembram da propaganda, feita em períodos anteriores, estabelece que a penetração da propaganda é uma função exponencial negativa da quantidade de exposições feitas em um veículo. Assim, funções do tipo $P_j(X_j) = (1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}})$ serão usadas para representar a relação existente entre a penetração e a quantidade de exposições.

Por outro lado, espera-se que sistemas deste tipo atinjam assintoticamente um determinado nível de penetração constante no tempo, isto é, que o sistema atinja um estágio estacionário.

Na vida real a empresa estará interessada em encontrar uma demanda constante do produto, ou seja, na solução que estabiliza seu sistema. O modelo proposto introduz o conceito de solução estável.

Uma inovação técnica do modelo é o método usado para a sua solução, qual seja, através de um simples método de pesquisa binária em uma variável, se encontra uma solução ótima para o problema utilizando multiplicador de Lagrange.

No capítulo seguinte será apresentado o modelo proposto.

CAPÍTULO III

3. MODELO PROPOSTO

No presente capítulo está apresentado inicialmente um modelo matemático para a alocação de recursos entre os veículos de comunicação de propaganda. Dois enfoques diferentes são dados para o modelo matemático. O primeiro enfoque é a maximização da penetração da propaganda, com recursos escassos, e o segundo enfoque é a minimização dos custos, com um nível mínimo de penetração exigido.

Ao final do capítulo é analisada a situação de estabilidade do modelo.

3.1 Concepção e desenvolvimento

A característica básica da propaganda é o ciclo de vida. Comumente, o impacto da propaganda declina no tempo e a eficiência da propaganda diminui.

Evidências empíricas (11) aceitam a relação existente entre o esforço promocional e as vendas. Existe um nível mínimo requerido antes do esforço promocional ter algum efeito nas vendas, e um nível máximo ou nível de saturação onde um acréscimo de propaganda não mais surte efeitos em termos de penetração. O nível mínimo somente existe quando a empresa introduz um novo produto no mercado. A estratégia de propaganda utilizada no lançamento de um produto é diferente da estratégia promocional utilizada quando o produto

já existe no mercado.

O modelo proposto neste trabalho adapta-se melhor a produtos de consumo, que já existam no mercado.

Para o caso de novos produtos a função de eficiência da penetração deve assumir outra forma. Este aspecto será abordado nas conclusões.

Será considerado que os produtos aos quais é feita a propaganda tem um período de vida útil limitado, menor que o período de planejamento. Estes produtos poderão ser readquiridos pelos clientes que foram atingidos pela propaganda, mais de uma vez durante o período de planejamento.

O efeito da propaganda é acumulativo, e ele tende a declinar no tempo, a menos que o esforço da propaganda seja continuado. No modelo são quantificadas as pessoas que lembram do produto devido a propaganda feita nos períodos anteriores em cada veículo, através do que chama-se a "constante de retenção da mensagem".

A penetração da propaganda $P_j(X_j)$ é uma função exponencial negativa da quantidade de exposições X_j .

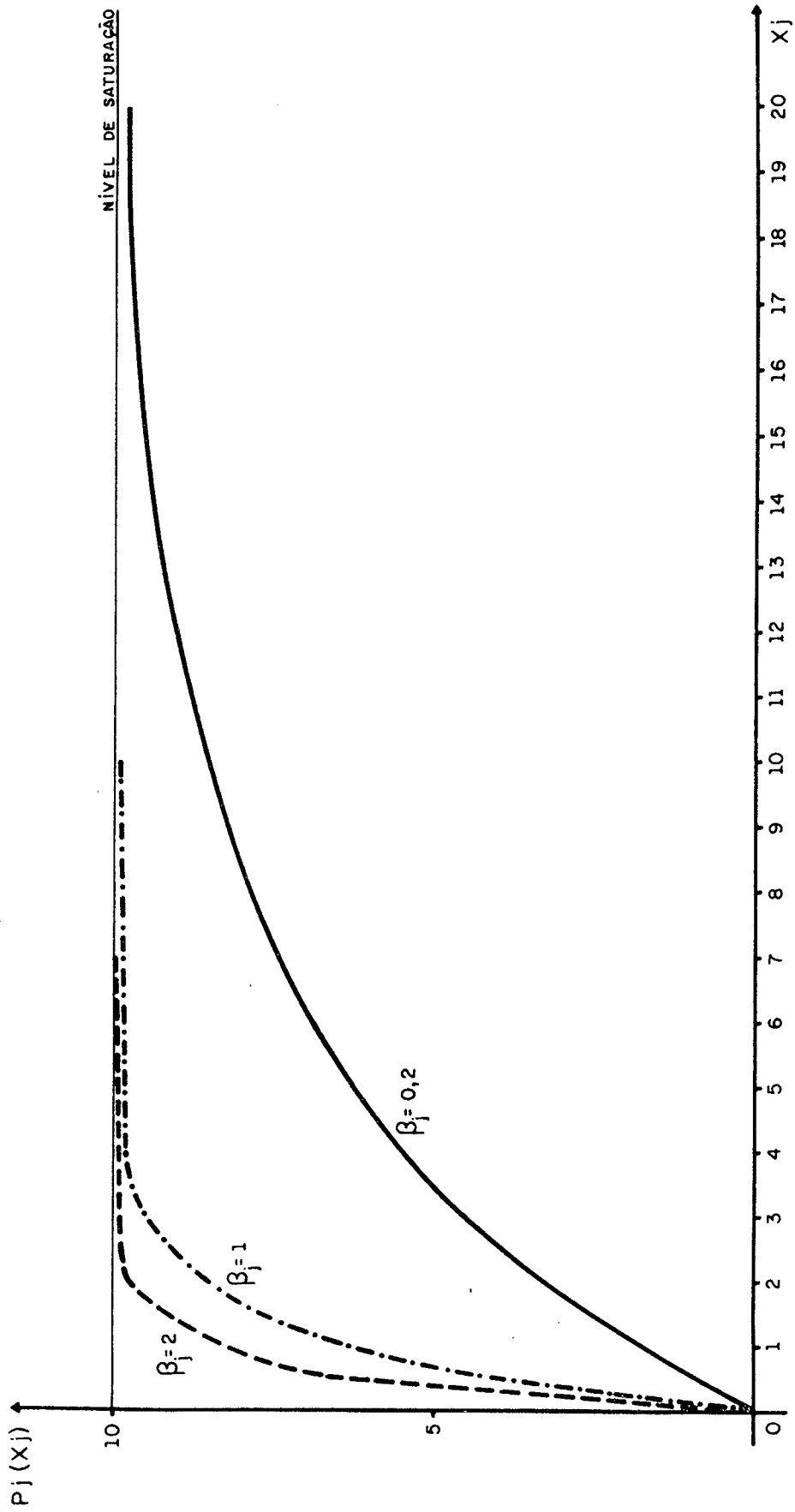
A equação que representa esta relação é

$$P_j(X_j) = 1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}$$

O parâmetro β_j mede a eficiência do veículo j para transmitir a mensagem da propaganda. O veículo que tenha o valor de β_j mais elevado precisará um número menor de exposições para atingir uma determinada população; no caso em que o β_j seja mais baixo será necessário um número maior de exposições para atingir a mesma população.

Na figura 1, observa-se que para atingir a 50% da população como um $\beta_j = 0.2$ são necessárias 3,4 exposições. Por outro lado com um $\beta_j = 1$ são necessárias 0.70 exposições para atingir a mesma população.

FIG.1- FAMÍLIA DE CURVAS DA EFICIÊNCIA DA PENETRAÇÃO



Como o efeito da propaganda é acumulativo no tempo, a penetração da propaganda aumenta até atingir o nível de saturação.

O modelo apresentado por Rødder e Blauth (9), se adapta perfeitamente à discussão qualitativa que acaba-se de descrever. Neste modelo, a equação que descreve o comportamento do sistema é:

$$U_{jt} = \alpha_j U_{j,t-1} + (V_j - \alpha_j U_{j,t-1}) \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_{j,t-1}}}\right) \quad (1)$$

onde:

- $t = 1, 2, \dots, T$ o índice dos períodos considerados.
- $j = 1, 2, \dots, N$ o índice do veículo de propaganda.
- X_{jt} a variável decisória. Representa o número de unidades de propaganda no veículo j no tempo t .
- U_{jt} quantidade de pessoas que tem conhecimento do produto via veículo j ao final do período t .
- V_j quantidade máxima de pessoas que podem ser atingidas pela propaganda feita no veículo j .
- α_j constante de retenção da mensagem do veículo de um período de tempo para o período de tempo seguinte

$$(\alpha_j < 1) \forall j.$$

β_j Parâmetro da eficiência da função de penetração de propaganda, $\beta_j > 0 \forall j$.

O fator $1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_{jt}}}$ é a função de penetração $P_j(X_{jt})$ do veículo j , no período t , apresentado anteriormente.

No fim de cada período de planejamento será feita uma campanha de propaganda (X_{jt}), a qual atinge uma quantidade de pessoas, em cada veículo, dada por:

$$\sum_{j=1}^N (V_j - \alpha_j U_{j,t-1}) \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_{jt}}}\right)$$

onde $(V_j - \alpha_j U_{j,t-1})$ representa a quantidade de pessoas que podem receber a propaganda de veículo j no tempo t , e $\left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_{jt}}}\right)$ representa a fração (%) de pessoas que será atingida pela propaganda X_{jt} .

Supõe-se pela equação (1), que os diversos veículos de comunicação são independentes, o que é um pressuposto forte, porém conveniente para tornar o modelo mais "tratável" algebricamente.

A empresa tem que decidir sobre a melhor estratégia de alocação de recursos entre veículos de comunicação, podendo dois critérios básicos serem definidos: A empresa pode objetivar atingir a quantidade máxima de pessoas, através da propaganda. Nesta situação o critério definido pode ser:

"Maximizar a penetração da mensagem da propaganda feita pelos diferentes veículos durante o horizonte de planejamento sujeito a restrição de orçamento disponível".

Por outro lado, a empresa pode objetivar uma situação "inversa" da situação anterior, isto é, a empresa pode estar interessada em minimizar os custos decorrentes da propaganda. O critério utilizado nesta situação é:

"Minimizar os custos da propaganda, feita nos diferentes veículos, durante o horizonte de planejamento, mantendo um nível mínimo desejado de penetração da propaganda".

Baseando-se nos critérios citados pode-se formular matematicamente o problema 1 e o problema 2 como segue:

Problema 1:

$$(P1) \quad \text{MAX} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N U_{jt} (X_{jt}, U_{j,t-1})$$

s.a.

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N C_{jt} X_{jt} \leq B$$

$$X_{jt} \geq 0 \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

onde:

B = orçamento disponível para o horizonte T .

C_{jt} = custo unitário por unidade de propaganda feita no veículo j no tempo t .

As demais variáveis permanecem com as definições fei-

tas anteriormente.

O critério utilizado para a avaliação de uma estratégia $X = (X_{jt})$, é maximizar a quantidade total de pessoas que têm conhecimento do produto sobre todos os períodos do horizonte de planejamento.

A única restrição significa a limitação dos gastos sobre todos os períodos do horizonte de planejamento a serem menor ou igual ao orçamento total B.

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N C_{jt} X_{jt}$$

O problema P1 é um problema não linear na função objetivo e com restrição linear.

Problema 2:

(P2) MINIMIZAR

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N C_{jt} X_{jt}$$

s.a.:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N U_{jt} (X_{jt}, U_{j,t-1}) \geq R$$

$$X_{jt} \geq 0 \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

onde:

R = nível mínimo de penetração exigido.

As demais variáveis permanecem com as definições originais.

O critério utilizado para a avaliação de uma estratégia $X = (X_{jt})$ é minimizar as despesas decorrentes da propaganda, sobre todos os períodos do horizonte de planejamento.

A restrição significa que a quantidade de pessoas que são atingidas pela propaganda sobre todo o horizonte de planejamento $\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N U_{jt} (X_{jt}, U_{j,t-1})$ deve ser maior ou igual a quantidade mínima desejada de pessoas R .

O problema P2 é um problema linear com restrição não linear.

É conveniente frisar que ambos os problemas tem a mesma finalidade, isto é, "Selecionar a melhor estratégia de comunicação via propaganda", porém a seleção em si pode ser feita utilizando critérios diferentes.

Nos problemas P1 e P2 as variáveis U_{jt} e X_{jt} podem assumir quaisquer valores viáveis, isto é, valores positivos.

Considerando a situação real, normalmente a empresa estará interessada em encontrar uma demanda constante do produto.

Em termos do modelo proposto neste capítulo, as empresas costumam preferir soluções com U_{jt} constante no tempo. Desta maneira, o campo das possíveis soluções pode ser reduzido para aquelas soluções em que os X_{jt} também são constantes em t .

Na próxima seção, demonstra-se que é suficiente considerar apenas as soluções estáveis, isto é, aquelas em que

$$X_{jt} = X_j \quad \forall t.$$

3.2 A solução estável

Lema 1:

Para cada sequência constante $U_{jt} = \bar{U}_j$, $t = 1, \dots, T$, existe uma e somente uma sequência constante $X_{jt} = \bar{X}_j$, $t = 1, \dots, T$, de modo que $X_{jt} = \bar{X}_j$ e $U_{jt} = \bar{U}_j$ satisfazem a equação (1).

Prova:

Se \bar{U}_j é uma sequência constante então verifica-se a condição (1):

$$\bar{U}_j = \alpha_j \bar{U}_j + (V_j - \alpha_j \bar{U}_j) \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_{jt}}}\right) \quad (2)$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$j = 1, \dots, N$$

Então, resolvendo (2) para X_{jt} , encontra-se um e somente um valor de $X_{jt} = \bar{X}_j$ c.q.d.

Definição:

Denota-se uma sequência $X_{jt} = \bar{X}_j$, $t = 1, \dots, T$ uma decisão estável.

Definição:

Denota-se uma sequência $X^* = (X_j^*)$ por uma "solução ótima" se é estável e otimiza o problema P1 ou P2, conforme o caso.

Normalmente, no início da aplicação do modelo, P1 e P2,

o sistema não está no estado estacionário, ou seja, os U_{j0} podem ser qualquer valor, $0 \leq U_{j0} \leq V_j$ e não necessariamente $U_{j0} = \bar{U}_j$.

O teorema abaixo mostra que, independente do estado inicial, usando a decisão estável (\bar{X}_j) , o sistema convergirá para o limite $\bar{U}_j = U_j(\bar{X}_j)$ correspondente.

Teorema

Sejam \bar{X}_j e \bar{U}_j uma solução estável de (2). $\forall U_{j0}$, $0 \leq U_{j0} \leq V_j$, com $\alpha_j < 1$, a sequência definida por:

$$U_{jt} = \alpha_j U_{j,t-1} + (V_j - \alpha_j U_{j,t-1}) \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j \bar{X}_j}}\right) \quad (3)$$

converge para o limite $\bar{U}_j = U_j(\bar{X}_j)$.

Prova

A equação (3) pode ser escrita como uma equação linear em t , de diferenças não homogênea de primeira ordem.

$$U_{jt} - U_{j,t-1} \left(\frac{\alpha_j}{e^{\beta_j \bar{X}_j}}\right) = V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j \bar{X}_j}}\right) \quad (4)$$

A solução para esta equação é encontrada em duas etapas:

1. Solução da equação homogênea:

A equação

$$U_{jt} - U_{j,t-1} \left(\frac{\alpha_j}{e^{\beta_j \bar{X}_j}} \right) = 0 \quad \text{tem uma única solução}$$

$$U_{jt} = \frac{\alpha_j}{e^{t\beta_j \bar{X}_j}} U_{j0} \quad \text{a qual converge para zero, por-}$$

$$\text{que } e^{\beta_j \bar{X}_j} \geq 1 \quad \text{e } \alpha_j < 1. \quad \forall j.$$

2. Solução para a equação não homogênea:

A solução da equação não homogênea é encontrada através de tentativas.

Seja $U_{jt} = \text{constante } \forall t$

Substituindo U_{jt} na equação (4) se tem:

$$\text{constante} - \text{constante} \left(\frac{\alpha_j}{e^{\beta_j \bar{X}_j}} \right) = \bar{U}_j \left(1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j \bar{X}_j}} \right) \quad (5)$$

ou

$$\text{constante} \left(1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j \bar{X}_j}} \right) = \bar{U}_j \left(1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j \bar{X}_j}} \right) \quad (6)$$

Simplificando $\left(1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j \bar{X}_j}} \right)$ em (6) se tem:

$$\text{constante} = \bar{U}_j.$$

A solução de (3) é então:

$$U_{jt} = \bar{U}_j + U_{j0} \cdot \frac{\alpha_j^t}{e^{t\beta_j \bar{X}_j}}$$

Como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha_j^t}{e^{t\beta_j \bar{X}_j}} = 0$$

então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_{jt} = \bar{U}_j \quad \text{c.q.d.}$$

Evidentemente, a solução ótima do modelo está contida no conjunto de soluções estáveis, portanto o teorema anterior é válido para soluções ótimas.

3.3 Conseqüências da solução estável nos problemas P1 e P2

Como foi demonstrado na seção anterior somente serão consideradas soluções estáveis, isto é, onde $X_{jt} = X_j$ e $U_{jt} = U_j$.*

A equação recursiva (3), na solução estacionária torna-se:

$$U_j = \alpha_j U_j + (V_j - \alpha_j U_j) \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right) \quad (7)$$

* Por simplicidade de notação, será escrito X_j e U_j em lugar de \bar{X}_j e \bar{U}_j , respectivamente.

Resolvendo para U_j temos:

$$U_j = \frac{V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j X_j}}\right)} \quad (8)$$

Levando (8) na função objetivo de P1 se obtém:

$$(P1): \quad \text{MAX} \quad \sum_{j=1}^N U_j = \sum_{j=1}^N \frac{\left(V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right)\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j X_j}}\right)}$$

Na restrição de P1, é válida a seguinte simplificação:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N C_{jt} X_{jt} = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{t=1}^T C_{jt}\right) X_j = \sum_{j=1}^N C_j X_j$$

O problema novo de P1 então fica

$$(P1N): \quad \text{MAX} \quad \sum_{j=1}^N U_j = \sum_{j=1}^N \frac{V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j X_j}}\right)}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N C_j X_j \leq B.$$

$$X_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N$$

e o novo problema P2 associado fica:

$$(P2N): \text{MIN } \sum_{j=1}^N C_j X_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N U_j(X_j) \geq R.$$

$$X_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N$$

todas as variáveis permanecem com as definições anteriores.

No próximo capítulo serão analisados detalhadamente os problemas P1N e P2N, no que se refere à solução matemática e algorítmica dos mesmos.

CAPÍTULO IV

4. TÉCNICA DE RESOLUÇÃO

Neste capítulo será feita uma análise qualitativa dos problemas P1N e P2N, e suas soluções.

A técnica matemática de Multiplicadores de Lagrange, é utilizada para encontrar a solução de ambos os problemas.

4.1 Análise do problema P1N.

Neste item será analisado inicialmente a função objetivo, e depois a restrição, do problema P1N.

Análise da Função Objetivo:

1) A função $U_j(X_j)$ é uma função estritamente crescente (anexo 1).

2) A função $U_j(X_j)$ é uma função estritamente côncava (anexo 1).

3) U é uma função estritamente côncava nas variáveis (X_1, X_2, \dots, X_n) (consequência imediata de 2).

Análise qualitativa da restrição

4) A função $C = \sum_{j=1}^N C_j X_j$ é uma função linear em cada variável X_j , $j = 1, \dots, N$.

5) A função $C = \sum_{j=1}^N C_j X_j$ é uma função estritamente crescente em cada variável X_j , $j = 1, \dots, N$, como $C_j > 0$.

Em consequência de 1 e 5 pode ser considerada igualda de na restrição $\sum_{j=1}^N C_j X_j = B$, isto é, todo o orçamento disponível será alocado entre os diversos veículos de comunicação considerados.

4.2 Solução do problema P1N, através dos Multiplicadores de Lagrange.

$$L(X_1, \dots, X_n, \lambda) = \sum_{j=1}^N U_j(X_j) + \lambda \left(\sum_{j=1}^N C_j X_j - B \right)$$

é a função de Lagrange do Problema P1N.

No caso presente de maximizar uma função côncava sob restrições lineares, relaxando a restrição de não negatividade, a teoria de Lagrange (7, pp. 94-105 Teorema 2.1 - Teorema 7) afirma que:

"A condição necessária e suficiente para que um $X^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$ seja uma solução ótima de P1N, é a existência de um λ^0 tal que satisfaça as seguintes condições de Kuhn-Tucker:

$$(C1) \quad \left. \frac{\delta L}{\delta X_j} \right|_{X^0, \lambda^0} = 0 \quad j = 1, \dots, N$$

$$(C2) \quad \left. \frac{\delta L}{\delta \lambda} \right|_{X^0, \lambda^0} = 0$$

$$(C3) \quad \lambda^0 \text{ qualquer número real, não-positivo.}$$

As condições C1, C2 e C3 no problema em estudo ficam:

$$(C1') \quad \frac{\delta L(X_j)}{\beta X_j} = \frac{V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j} (1-\alpha_j)}{(1-\alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2} + \lambda C_j = 0$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$(C2') \quad \frac{\delta L}{\delta \lambda} = \sum_{j=1}^N C_j X_j - B = 0$$

$$(C3') \quad \lambda \text{ qualquer número real não positivo}$$

As condições C1' e C2' constituem um sistema de $n + 1$ equações com $n + 1$ incógnitas (λ e X_j , $j = 1, \dots, N$). Este sistema é um sistema não linear, de difícil solução, no entanto, em (9) Rødder e Blauth demonstraram que é possível tirar proveito de algumas condições específicas do problema. Todas as incógnitas X_j podem ser expressas como função da variável λ .

Outra grande vantagem deste sistema, é que as equações C1' e C2' são funções monótonas, então a resolução do sistema fica reduzida, a encontrar os $X_j(\lambda)$, que satisfaçam a condição C2'.

Mais adiante, serão feitas algumas transformações matemáticas nas condições C1', de maneira a transformá-las em uma

equação quadrática de fácil solução, e será demonstrado que as funções $C1'$ são funções monótonas.

Na condição C3, o λ ótimo pode ser qualquer número não positivo; também, as condições $C1'$ restringem o valor do λ ótimo ao intervalo $(-\infty, 0]$, uma vez que os custos $C_j > 0$, e as frações

$$\frac{V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j} (1 - \alpha_j)}{(1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2}$$

são sempre maior que zero.

No anexo (2) será mostrado que o valor do λ ótimo pode ser buscado apenas no intervalo

$$\left[\text{MAX}_j \left\{ - \frac{V_j \beta_j}{(1 - \alpha_j) C_j} \right\}, 0 \right]$$

Os passos seguintes tem por finalidade transformar as condições ($C1'$) em equações quadráticas.

As condições $C1'$ podem ser escritas como:

$$\frac{V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j} (1 - \alpha_j)}{(1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2} = - \lambda C_j \quad (9)$$

$$j = 1, \dots, N$$

Multiplicando (9) membro a membro por

$$\frac{(1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2}{-\lambda C_j} \quad \text{obtem-se}$$

$$\frac{V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j} (1 - \alpha_j)}{-\lambda C_j} = 1 - 2\alpha_j e^{-\beta_j X_j} + \alpha_j^2 e^{-2\beta_j X_j} \quad (10)$$

Chamando $W_j = \frac{V_j \beta_j (1 - \alpha_j)}{-\lambda C_j}$, então,

$$W_j e^{-\beta_j X_j} = 1 - 2\alpha_j e^{-\beta_j X_j} + \alpha_j^2 e^{-2\beta_j X_j} \quad (11)$$

Dividindo (11) membro a membro por $e^{-\beta_j X_j}$ e somando $2\alpha_j$ obtém-se:

$$W_j + 2\alpha_j = \frac{1}{e^{-\beta_j X_j}} + \alpha_j^2 e^{-\beta_j X_j} \quad (12)$$

Dividindo (12) membro a membro por α_j obtém-se:

$$\frac{W_j + 2\alpha_j}{\alpha_j} = \frac{1}{\alpha_j e^{-\beta_j X_j}} + \alpha_j e^{-\beta_j X_j} \quad (13)$$

Chamando $K_j = \frac{W_j}{\alpha_j} + 2$ então (13) fica: (14)

$$K_j = \frac{1}{\alpha_j e^{-\beta_j X_j}} + \alpha_j e^{-\beta_j X_j} \quad (15)$$

chamando $Z_j = \alpha_j e^{-\beta_j X_j}$ então (15) torna-se:

$$K_j = \frac{1}{Z_j} + Z_j \quad (16)$$

Como K_j e Z_j são maiores que zero, então, pode-se transformar (16) em uma equação quadrática:

$$Z_j^2 - K_j Z_j + 1 = 0 \quad (17)$$

com a solução

$$Z_j^{\pm} = \frac{1}{2} K_j \pm \sqrt{-1 + \frac{1}{4} K_j^2} \quad (18)$$

ou em termos das variáveis originais.

$$Z_j^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_j \beta_j (1 - \alpha_j)}{-\lambda C_j \alpha_j} + 2 \right) \pm \sqrt{-1 + \frac{1}{4} \left(\frac{V_j \beta_j (1 - \alpha_j) + 2}{-\lambda C_j \alpha_j} \right)^2} \quad (19)$$

$$j = 1, \dots, N$$

A seguir será analisada qualitativamente a função Z_j^{\pm} .

Primeiramente será mostrado, que através da raiz Z_j^+ só se tem soluções inviáveis. Depois, nos lemas 2, 3 e 4, será mostrado que $C1'$ e $C2'$ são funções monótonas em todo o intervalo definido.

Lema 2

$$X_j (Z_j^+) < 0$$

Prova

Lembrando que $Z_j = \alpha_j e^{-\beta_j X_j}$ pode-se escrever

$$X_j (Z_j^+) = \frac{-L_n Z_j^+ + L_n \alpha_j}{\beta_j} \quad (20)$$

Como $-L_n Z_j^+ \leq 0$, $L_n \alpha_j \leq 0$ e $\beta_j > 0$ segue-se que

$$X_j (Z_j^+) < 0 \quad \text{c.q.d.}$$

Então somente serão considerados os Z_j^- .

Lema 3

Z_j^- como Função de K_j é uma função decrescente para K_j no intervalo $(2, \infty)$

Prova

$$\frac{\delta (Z_j^-)}{\delta (K_j)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} K_j}{2 \sqrt{-1 + \frac{1}{4} K_j^2}} < 0$$

$$\forall K_j > 2$$

Lema 4

A função K_j em λ é uma função crescente para $\lambda < 0$.

Prova

$$\frac{\delta(K_j)}{\delta(\lambda)} = \frac{V_j \beta_j (1 - \alpha_j)}{C_j \alpha_j \lambda^2} > 0 \quad \forall \lambda < 0$$

Dos lemas 3 e 4, pode-se enunciar o

Lema 5

A função Z_j^- em λ é uma função decrescente para $\lambda < 0$

Prova

$$\frac{\delta(Z_j^-)}{\delta(\lambda)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{V_j \beta_j (1 - \alpha_j)}{-\lambda C_j \alpha_j} + 2 \right)}{2 \sqrt{-1 + \frac{1}{4} \left(\frac{V_j \beta_j (1 - \alpha_j)}{-\lambda C_j \alpha_j} + 2 \right)^2}} < 0$$

$$\forall \lambda < 0$$

Agora, será analisada a única restrição

$$\sum_{j=1}^N C_j X_j(\lambda) = B \quad (21)$$

Cada $X_j(\lambda)$ é uma função crescente e contínua, e

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} X_j(\lambda) = \frac{\ln \alpha_j}{\beta_j} < 0, \quad (22)$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} X_j(\lambda) = \infty. \quad (23)$$

Devido a (22) e (23) $g(\lambda) = \sum_{j=1}^N C_j X_j(\lambda)$ é uma função crescente e contínua com valores compreendidos no intervalo $\sum_{j=1}^N \frac{C_j \ln \alpha_j}{\beta_j} < g(\lambda) < \infty$, para λ no intervalo $(-\infty, 0)$.

Assim, existe um e somente um λ , tal que satisfaça a equação (21).

Pode-se concluir o seguinte: como a função objetivo é côncava e a restrição é linear, para encontrar uma solução do problema P1N, basta encontrar um λ ótimo que satisfaça a equação (21) e, das equações (20), obter diretamente os valores ótimos das variáveis decisórias.

Na secção seguinte será feita a análise qualitativa do problema P2N.

4.3 Análise do Problema P2N

Neste item será analisada inicialmente a função objetivo, e depois a restrição do problema P2N.

Análise da função objetivo

1) A função $C = \sum_{j=1}^N C_j X_j$ é uma função linear, estritamente crescente.

Análise qualitativa da restrição

2) A função $U_j(X_j)$ é uma função estritamente crescente.

- 3) A função $U_j(X_j)$ é uma função estritamente côncava.
- 4) A função $U = \sum_{j=1}^N U_j(X_j)$ é uma função estritamente côncava nas variáveis X_j $j = 1, \dots, N$.

Em consequência de 1 e 2 pode ser considerada igualdade na restrição

$$\sum_{j=1}^N \frac{V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right)}{1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j X_j}}} = R.$$

isto é, a penetração da propaganda será igual a um nível mínimo requerido.

4.4 Solução do Problema P2N através dos multiplicadores de Lagrange.

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, \gamma) = \sum_{j=1}^N C_j X_j + \gamma \left(\sum_{j=1}^N \frac{V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right)}{1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j X_j}}} - R \right)$$

é a função de Lagrange do problema P2N.

No caso presente de minimizar uma função linear sob restrições côncavas, relaxando a restrição de não-negatividade, a teoria de Lagrange (2, pp. 90-92) afirma:

"Sob a condição de Slater, o problema P2N tem uma solu

ção ótima $X^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_N^0)$ sse existe um γ^0 tal que X^0 e γ^0 satisfaçam as condições de Kuhn-Tucker.

A condição de Slater é: a existencia de um $X^1 = (X_1^1, \dots, X_N^1)$ de maneira que $U(X)$ seja estritamente maior que R . Como a soma de todos os V_j sempre é maior que R a condição de Slater é satisfeita".

As condições C1, C2 e C3 no problema P2N ficam:

$$(C1'') \quad \frac{\delta L(X_j)}{\delta(X_j)} = C_j + \gamma \left(\frac{V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j} (1 - \alpha_j)}{(1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2} \right) = 0$$

$$j = 1, \dots, N.$$

$$(C2'') \quad \frac{\delta L}{\delta \gamma} = \sum_{j=1}^N \frac{V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right)}{1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j X_j}}} - R = 0$$

$$(C3'') \quad \gamma \text{ qualquer número real, não positivo.}$$

Este sistema é um sistema com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas (γ e X_j , $j = 1, \dots, N$). Todas as incógnitas podem ser expressas como função da variável γ . Devido a que as equações C1'' e C2'' são funções monótonas, a resolução do sistema fica reduzida a encontrar os $X_j(\gamma)$ que satisfaçam a condição C2''.

Segundo as condições C1'' o valor de γ ótimo se encontra no intervalo $(-\infty, 0]$, uma vez que os custos $C_j > 0$ e as frações

$\frac{V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j} (1 - \alpha_j)}{(1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2}$ são maiores que zero.

Através de uma série de operações matemáticas análogas que foram feitas para deduzir Z_j^{+-} obtém-se:

$$\hat{Z}_j^{+-} = \frac{1}{2} \left(\frac{-\gamma V_j \beta_j (1 - \alpha_j)}{C_j \alpha_j} + 2 \right) \pm \sqrt{-1 + \frac{1}{4} \left(\frac{-\gamma V_j \beta_j (1 - \alpha_j)}{C_j \alpha_j} + 2 \right)^2} \quad (24)$$

$$\hat{K}_j = \frac{-\gamma V_j \beta_j (1 - \alpha_j)}{C_j \alpha_j} + 2 \quad (25)$$

$$\hat{X}_j = \frac{\text{Ln } \alpha_j - \text{Ln } \hat{Z}_j(\gamma)}{\beta_j} \quad (26)$$

As funções Z_j^{+-} e \hat{Z}_j^{+-} são muito semelhantes, portanto as conclusões obtidas na análise qualitativa da função Z_j^- , se adaptam a função \hat{Z}_j^- como segue:

1. A função $\hat{Z}_j(\hat{K})$ é decrescente para \hat{K}_j no intervalo $[2, \infty)$.
2. A função $\hat{K}_j(\gamma)$ é decrescente para $\gamma \leq 0$.
3. A função $\hat{Z}_j(\gamma)$ é uma função crescente para $\gamma \leq 0$.

Através de 1, 2, 3 ficou demonstrado que a função \hat{Z}_j^- é monótona em todo o intervalo $(-\infty; 0]$ e portanto o mesmo algoritmo de resolução utilizado no problema P1N pode ser utilizado neste caso.

A seguir será analisada a restrição do problema P2N.

$$\sum_{j=1}^N \frac{V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right)}{1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j X_j}}} = R \quad (27)$$

Substituindo X_j na equação (27) pela equação (20) ob-
têm-se:

$$\sum_{j=1}^N \frac{V_j \left(1 - \frac{1}{e^{L_n \alpha_j - L_n \hat{Z}_j^-(\gamma)}}\right)}{1 - \frac{\alpha_j}{e^{L_n \alpha_j - L_n \hat{Z}_j^-(\gamma)}}} = R \quad (28)$$

Depois de uma série de simplificações matemáticas a
equação (28) fica:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j - \hat{Z}_j^-(\gamma)}{1 - \hat{Z}_j^-(\gamma)} = R \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{V_j} \quad (29)$$

Como cada $X_j(\gamma)$ é uma função crescente e contínua, e

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} X_j(\gamma) = \frac{-L_n \alpha_j}{\beta_j} > 0. \quad (30)$$

e

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} X_j(\gamma) = -\infty \quad (31)$$

Devido a (30) e (31), $\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j - \hat{z}_j^-(\gamma)}{1 - \hat{z}_j^-(\gamma)}$ é uma função

crescente e contínua com valores compreendidos no intervalo $(0, \infty)$, para γ no intervalo $(-\infty, 0]$.

Assim existe um e somente um γ , tal que satisfaça a equação (27).

Pode-se concluir o seguinte:

Como a função objetivo é linear e a restrição é côncava para encontrar uma solução do problema P2N, basta encontrar um γ ótimo que satisfaça a equação (27) e das restrições (20), obter diretamente os valores ótimos das variáveis decisórias.

A seguir será apresentado o algoritmo computacional para encontrar a solução do problema P1N. Neste trabalho não é apresentado o algoritmo correspondente ao problema P2N, devido à semelhança existente entre este e o algoritmo do problema P1N.

No capítulo 6 são feitas recomendações para desenvolver o algoritmo que encontre a solução do problema P2N, em pesquisas posteriores.

4.5 Algoritmo

Diversos métodos de pesquisa direta existem para encontrar o ponto máximo de uma função. Entre as técnicas mais conhecidas se encontram a) Pesquisa binária; b) Pesquisa de Fibonacci c) Pesquisa da secção áurea.

Neste trabalho foi escolhido o método de pesquisa binária, devido a sua simplicidade e facilidade de implantação no computador.

Este modelo encontra através de tentativas um valor de λ que satisfaça a condição (21).

O método inicia a pesquisa em um intervalo previamente definido $[LI, LS]$, onde LI representa o limite inferior, calculado por $\text{MAX}_j \left\{ \frac{-V_j \beta_j}{(1-\alpha_j)C_j} \right\}$ e LS representa o limite superior,

igual a zero.

Calcula-se um novo ponto $\lambda = \left(\frac{LI + LS}{2} \right)$.

Com este novo ponto é testada a condição (21), se for satisfeita, então foi encontrado o valor de λ ótimo, isto é, um λ^0 tal que $\sum_{j=1}^N C_j X_j(\lambda^0) = B$, e procede-se o cálculo dos valores das variáveis de decisão $X_j(\lambda^0)$ pelas equações (20).

Se $\sum_{j=1}^N C_j X_j(\lambda)$ for maior (menor) que B, define-se um novo sub-intervalo, fazendo $LS = \lambda$ ($LI = \lambda$). Faz-se uma nova tentativa para calcular outro λ , $\lambda = \frac{LI + LS}{2}$, e assim repete-se este processo até que for encontrado o λ ótimo que satisfaça (21) com um erro menor ou igual a algum ϵ dado, $\epsilon > 0$.

O fluxograma detalhado deste algoritmo é mostrado na figura (3).

No próximo capítulo é feita uma ilustração prática do modelo.

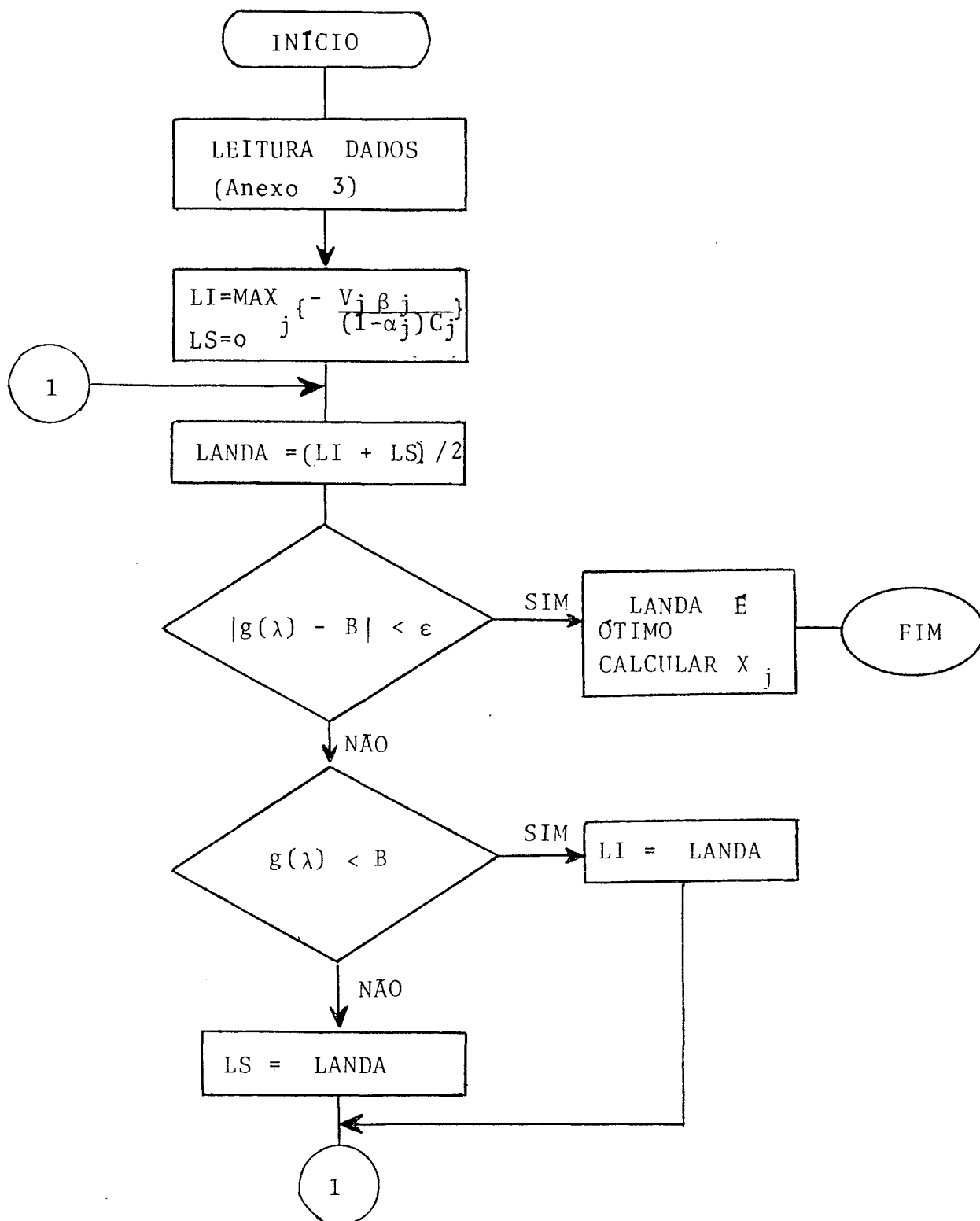


Figura 3 - Algoritmo de pesquisa binária para solução de LPN.

CAPÍTULO V

5. ILUSTRAÇÕES

5.1 Enunciados

Para ilustrar a aplicação do problema PIN, serão apresentados dois exemplos, com a mesma estrutura que um problema real, e com dados extraídos em Florianópolis, Santa Catarina, em fevereiro de 1980.

Os veículos de comunicação escolhidos são: televisão A, televisão B, rádio e jornal.

Os dados correspondentes a população máxima que pode ser atingida por um veículo de comunicação, e os custos da propaganda em cada um dos mesmos foram coletados no mercado real.

Os dados referentes a retenção da propaganda, eficiência do veículo de comunicação e orçamento são dados fictícios. Na prática, para a determinação real da retenção e eficiência será necessário um trabalho estatístico de razoável envergadura.

No quadro 1 apresenta-se os valores correspondentes a população máxima e os custos de propaganda para os diversos veículos de comunicação. Estes valores são os mesmos em ambos exemplos.

Nos quadros 2-A e 2-B apresenta-se os parâmetros α_j e β_j , utilizados respectivamente nos exemplos 1 e 2.

O orçamento total disponível para a propaganda é de Cr\$ 50.000,00 por período. Este valor é o mesmo para ambos exemplos.

QUADRO 1 - CUSTOS E POPULAÇÃO EM CADA VEÍCULO
DE COMUNICAÇÃO

| VEÍCULOS | CUSTO (Cr\$) | (Audiência, publico leitor) |
|---------------------------------------|--------------|-----------------------------|
| Televisão A | | |
| Horário 19:50/20:20 (X ₁) | 10.740 | 308.148 |
| Frequência: seg/sab. | | |
| Duração: 30" | | |
| Televisão B | | |
| Horário 18:00/19:00 (X ₂) | 7.480 | 157.794 |
| Frequência: domingo | | |
| Duração: 30" | | |
| Rádio (X ₃) | 200 | 8.123 |
| Duração: 30" | | |
| Frequência: seg/sab | | |
| Jornal (X ₄) | 400 | 600 |
| Espaço: 5cm, 2 colunas | | |
| Frequência: 1 vez | | |
| | ΣV_j | 474.665 |

QUADRO 2-A = Constante de retenção da propaganda (α_j) e eficiência do veículo (β_j), no exemplo 1.

| Veículos X_j | Retenção α_j | Eficiência de penetração β_j |
|----------------|---------------------|------------------------------------|
| X_1 | 0,40 | 1,00 |
| X_2 | 0,90 | 1,90 |
| X_3 | 0,80 | 1,20 |
| X_4 | 0,90 | 1,50 |

QUADRO 2-B = Constante de retenção da propaganda (α_j) e eficiência do veículo (β_j), do exemplo 2.

| Veículos X_j | Retenção α_j | Eficiência de penetração β_j |
|----------------|---------------------|------------------------------------|
| X_1 | 0,50 | 1,94 |
| X_2 | 0,60 | 1,13 |
| X_3 | 0,98 | 1,85 |
| X_4 | 0,57 | 1,36 |

5.2 Soluções

Para implementar o modelo proposto, um programa computacional foi desenvolvido na linguagem Fortran. O tempo de execução do programa foi de 0,40 segundos, e foi executado no computador IBM 360/40 da Universidade Federal de Santa Catarina.

Nos quadros 3-A e 3-B, observa-se que as soluções não são inteiras, o que seria desejável, uma vez que as variáveis X_j se interpretam como o número de exposições a fazer no veículo j . Este inconveniente pode ser contornado basicamente de duas maneiras:

- a. Multiplicando, ao final do algoritmo, cada resultado X_j^* pelo correspondente custo unitário C_j , os resultados assim obtidos constituem parcelas do orçamento total, a serem alocadas entre os veículos, nas quantidades $C_j X_j^*$, $j = 1, \dots, N$.
- b. Caso uma solução inteira seja imprescindível, uma alternativa poderia ser um algoritmo heurístico, como o proposto no anexo 4. No entanto, este algoritmo não garante a otimalidade. Esta teria que ser buscada através de métodos de programa inteira (3), como programação dinâmica, "branch and bound" ou cortes de Gomory. Neste trabalho, não serão abordados tais métodos.

Os formatos de entrada e saída de dados e a listagem do programa computacional constam no anexo 3.

Na secção seguinte serão interpretados os resultados obtidos pelo programa.

QUADRO 3-A = Resultados do exemplo 1

| Variável | Resultado |
|-----------------------------------|-----------|
| X_1^* | 3,709 |
| X_2^* | 1,265 |
| X_3^* | 2,657 |
| X_4^* | 0,427 |
| Penetração total = 468408 pessoas | |

QUADRO 3-B = Resultados do exemplo 2

| Variável | Resultado |
|-----------------------------------|-----------|
| X_1^* | 2,391 |
| X_2^* | 3,165 |
| X_3^* | 1,049 |
| X_4^* | 1,073 |
| Penetração total = 471291 pessoas | |

5.3 Interpretação econômica dos resultados.

Antes de iniciar a interpretação econômica dos resultados, é conveniente ressaltar os critérios que são utilizados pelo programa na distribuição do orçamento entre os diversos veículos de comunicação.

Estes critérios são:

1. População
2. Custos
3. Parâmetro de eficiência da penetração
4. Constante de retenção da mensagem.

Todas as constantes V_j , C_j , α_j e β_j influenciam na alocação.

Assim, o veículo que tiver a melhor combinação de população, custo, retenção e eficiência da penetração, terá, consequentemente, uma quantidade maior do orçamento alocada a ele.

No entanto, pode ocorrer que alguma das constantes tenha maior relevância sobre as outras, o que efetivamente ocorreu no exemplo 1.

A seguir, serão analisados os resultados emitidos pelo computador para os exemplos 1 e 2.

Em termos qualitativos, um veículo terá alocada uma parcela de orçamento tão maior quanto maiores forem a população e a eficiência, e quanto menores forem o preço unitário e a retenção.

Inicialmente serão analisados os resultados do exemplo 1.

Os recursos disponíveis foram alocados da seguinte maneira:

- Na televisão A, variável X_1 , foram alocadas 3,709 exposições, o que representa 80% do orçamento total disponível.
- Na televisão B, variável X_2 , foram alocados 1,265 exposições, o que representa 18.5% do orçamento total.
- No rádio, variável X_3 , foi alocado 2,657 exposições ou 1.0% do orçamento disponível.
- No último veículo considerado, variável X_4 , o jornal, foram alocados 0,427 exposições ou 0.5% do orçamento disponível.

Como observa-se, no veículo X_1 , foi alocado a maior parte do orçamento (80%). Este fato pode ser justificado pela observação de que, a população deste veículo é muito maior que a dos demais.

O segundo veículo escolhido pelo programa, para alocar 18.5% do orçamento, foi a televisão B (X_2). Comparando-se este com os outros dois veículos restantes, observa-se que este veículo é o mais eficiente.

O restante do orçamento foi alocado aos veículos X_3 e X_4 , tendo o veículo X_3 recebido uma parcela maior porque tem um preço de exposição muito baixo.

A penetração total atingida pela propaganda foi de 468.408 pessoas, o que corresponde a 98,68% da população total.

A seguir serão analisados os resultados do exemplo 2.

Neste exemplo, os dados referentes a população e custos, são os mesmos usados no exemplo 1, somente variam as constantes de retenção e eficiência.

Os recursos disponíveis foram alocados da maneira se-

guinte:

- Na televisão B, variável X_2 , foram alocadas 3,165 exposições, o que representa 47.34% do orçamento total disponível.
- Na televisão A, variável X_1 , foram alocadas 2,391 exposições, o que representa 51.35% do orçamento total disponível.
- Ao jornal, variável X_4 , foram alocadas 1,073 exposições, ou 0.89% do orçamento disponível.
- Por último, na variável X_3 , ao rádio foram alocadas 1,049 exposições, ou 0.42% do orçamento total.

Observa-se que com mudanças nos parâmetro de retenção e eficiência a alocação de recursos foi diferente àquela feita no exemplo 1.

Observa-se, por exemplo, uma quantidade de exposições maiores alocada para o veículo X_2 , isto foi devido a variação da constante de retenção de 90% no exemplo 1 para 60% no exemplo 2.

A penetração total atingida pela propaganda foi de 471291 pessoas, o que corresponde a 99.28% da população total.

Em ambos os exemplos, a população atingida foi elevada devido a existência de um orçamento elevado.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O modelo desenvolvido neste trabalho aloca recursos monetários entre os diversos veículos de comunicação. Este modelo utiliza conceitos e informações adicionais que não tinham sido anteriormente utilizados pelos outros modelos matemáticos pertinentes a esta área.

Estes conceitos e informações adicionais são:

- a penetração da propaganda é uma função exponencial negativa da quantidade de exposições.
- a solução estável, ou seja, é considerada a penetração da propaganda constante no tempo.
- a técnica de resolução utilizada, isto é, através de um método de pesquisa binária, se encontra a solução para o problema de multiplicadores de Lagrange.

Uma situação não prevista no modelo, mas que pode ser incorporada a ele, é quando se deseja alocar recursos orçamentários para vários segmentos de mercado. Isto facilmente pode ser incorporado, basta agregar a cada variável um sub-índice que representa o segmento de mercado considerado.

Como possíveis extensões deste trabalho pode-se enunciar:

- i) desenvolver um algoritmo para encontrar a solução inteira da variável decisória X_j . Isto pode ser feito utilizando a técnica de cortes de Gomory (3) ou Branch and Bound (3) ou através de um método heurístico como o apresentado no anexo 4.

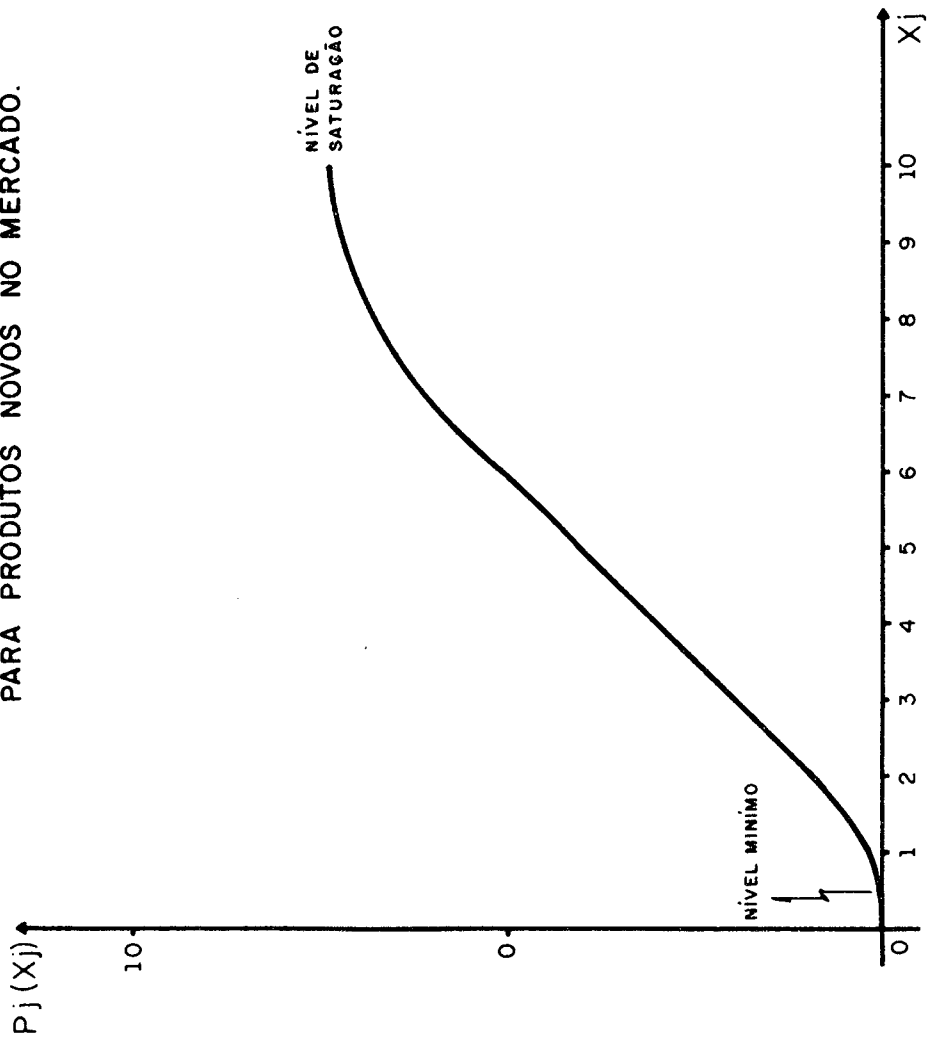
ii) Adaptar o modelo para produtos novos no mercado, onde a função de penetração poderá ser como na figura 2. Neste caso a metodologia de resolução utilizada pode ser semelhante a metodologia utilizada neste trabalho.

iii) Pode-se considerar novas restrições além da restrição orçamentária, como por exemplo restrições quanto ao uso de um veículo de comunicação ou algum grupo de veículos.

Isto pode ser feito incorporando novos multiplicadores de Lagrange. Uma nova metodologia de resolução deverá ser utilizada, devido a que o algoritmo de pesquisa binária não se adapta a esta nova situação.

iv) Desenvolver um algoritmo para encontrar a solução do problema P2N. Este algoritmo é muito semelhante ao algoritmo utilizado no problema P1N.

FIG. 2 - CURVA DA PENETRAÇÃO DA PROPAGANDA PARA PRODUTOS NOVOS NO MERCADO.



BIBLIOGRAFIA

1. CHARNES, A.; COOPER, W.; DEVOE, J.K.; LEARNER, D.B.; REINECKE, W., "A goal Programming Model for Media Planning". Management Sciences Research Report, nº 96, 1967.
2. COLLATZ, L.; WETTERLING, W., "Optimierungsaufgaben", Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1966.
3. GARFINKEL, R.S. & NEMHAUSER, G.L., "Integer Programming", J. Wiley, N. York, 1972.
4. HADLEY, G., "Nonlinear and dynamic programming", Addison Wesley, 1964.
5. KOTLER, P., "Administração de Marketing Análise, Planejamento e Controle". Atlas, 1974.
6. LITTLE, J. and LODISH, L. "A Media Selection Model and its Optimization by dynamic programming". Industrial Management Review, Vol. 8, nº 1, 1966.
7. MANGASARIAN, O. "Nonlinear Programming". McGraw-Hill Book Company, 1969.
8. MORAN, W., "Practical Média Decisions and the computer journal of Marketing", 1963.
9. RÖDDER, W., & BLAUTH, M., "Um Modelo de equações de Diferenças não homogênea, e aplicações". (a ser publicado no Boletim de Prod. e Sistemas, vol. 2, nº 1).
10. SIMULATICS CORPORATION "Simulaties media-mix technical description". The simulaties corporation, 1962.
11. TUIITE, Matthew. "Merging Marketing Strategy Selection and Production Scheduling A Higher Order Optimum". Journal of Industrial Engineering, Vol. 19, 1968.
12. WILSON, C.L., "Use of Linear Programming of Optimize Media Schedule in Advertising". Harward Business School.
13. ZANGWILL, W., "Media Selection by Decision Programming". Journal Advertising Research, Vol. 5, 1965.

A N E X O 1

ANEXO 1

Neste anexo está contida a análise qualitativa da função objetivo do problema PIN.

Nos teoremas seguintes será demonstrado que a função $U_j(X_j)$ é estritamente crescente, estritamente côncava e assintótica.

Teorema

A função $U_j(X_j)$ é estritamente crescente.

Prova:

$$1. \quad \frac{\delta(U)}{\delta(X_j)} = \frac{1 - \alpha_j V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j}}{(1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2} \geq 0. \quad \forall j$$

Portanto a função $U_j(X_j)$ é estritamente crescente no intervalo $[0, \infty)$.

Teorema

A função $U_j(X_j)$ é estritamente côncava.

Prova:

$$\frac{\delta U}{\delta X_j} = \frac{1 - \alpha_j V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j}}{(1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2}$$

$$\frac{\delta}{\delta X_j} \frac{(1 - \alpha_j V_j \beta_j e^{-\beta_j X_j})}{(1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j})^2} =$$

$$= \frac{-V_j \beta_j^2 (1 - \alpha_j) e^{-\beta_j X_j} + (-V_j + 2)(1 - \alpha_j) \beta_j^2 \alpha_j^2 e^{-3\beta_j X_j}}{1 - \alpha_j e^{-\beta_j X_j}}$$
(32)

Para $X_j = 0$ a expressão (32) é menor do que zero.

Para $X_j \rightarrow \infty$ a expressão (32) é menor do que zero.

∴ o gráfico da função é estritamente côncavo.

Teorema:

A função $U_j(X_j)$ é assintótica.

Prova:

$$\lim_{X_j \rightarrow \infty} \frac{V_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta_j X_j}}\right)}{1 - \frac{\alpha_j}{e^{\beta_j X_j}}} = V_j$$

A reta V_j é a assíntota horizontal da curva U .

A N E X O 2

ANEXO 2

No presente anexo será deduzida a fórmula para calcular o valor do limite inferior do λ .

No modelo proposto, a variável decisória X_j pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, \infty)$.

O mínimo valor que X_j pode ter é zero, neste caso a equação (20) fica

$$X_j = \frac{\text{Ln } \alpha_j - \text{Ln } Z_j^{-1}(\lambda)}{\beta_j} = 0 \quad j = 1, \dots, N$$

então:

$$\alpha_j = Z_j^{-1}(\lambda) \quad (33)$$

Levando (18) em (33) obtêm-se

$$\alpha_j = \frac{1}{2} K_j - \sqrt{-1 + \frac{1}{4} K_j^2} \quad j = 1, \dots, N,$$

a qual constitui a raiz negativa da equação (18)

$$K_j = \frac{1}{\alpha_j} + \alpha_j \quad (34)$$

Levando (13) em (34) obtêm-se

$$\frac{V_j \beta_j (1 + \alpha_j)}{-\lambda C_j \alpha_j} + 2 = \frac{1}{\alpha_j} + \alpha_j \quad (35)$$

Resolvendo para λ obtém-se

$$\lambda = - \frac{V_j \beta_j}{(1 - \alpha_j) C_j} \quad (36)$$

O limite inferior do intervalo de pesquisa é então o máximo valor entre todos os veículos, isto é,

$$\max_j \left\{ - \frac{V_j \beta_j}{(1 - \alpha_j) C_j} \right\} < \lambda^0 < 0.$$

ANEXO 3

ANEXO 3

Neste anexo estão contidos os formatos de entrada
saída, e listagem do programa computacional.

ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

A seguir é descrita a forma como devem ser colocados os dados do problema.

| CARTÃO | VAR. | DESCRIÇÃO | COLUNAS | FORMATO | |
|--------|----------|---|---------|----------------|----------------|
| 1 | N | Nº veículos | 1-2 | I ₂ | |
| | E | Interv. de aprox. | 3-10 | F7.4 | |
| | B | Orçamento | 10-18 | F8.4 | |
| 2 | V | População nos veículos (até 10) | 1-6 | 7-12 | I ₆ |
| | | | 13-18 | 19-24 | |
| | | | 25-30 | 31-36 | |
| | | | 37-42 | 43-48 | |
| | | | 49-54 | 55-60 | |
| 3 | C | Custos unitários das exposições nos veículos (até 10) | 1-8 | 9-16 | F8.2 |
| | | | 17-24 | 25-32 | |
| | | | 33-40 | 41-48 | |
| | | | 49-56 | 57-64 | |
| | | | 65-72 | 73-80 | |
| 4 | α | Constante de eficiência da penetração | 1-4 | 5-8 | F4.2 |
| | | | 9-12 | 13-16 | |
| | | | 17-20 | 21-24 | |
| | | | 25-28 | 29-32 | |
| | | | 33-36 | 37-40 | |
| 5 | β | Constante de retenção de mensagem | 1-4 | 5-8 | F4.2 |
| | | | 9-12 | 13-16 | |
| | | | 17-20 | 21-24 | |
| | | | 25-28 | 29-32 | |
| | | | 33-36 | 37-40 | |

RELATÓRIO DE SAIDA EMITIDO PELO COMPUTADOR (contendo os resultados do problema)

| 1 | 0 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 2 | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | 4 | | | | | | | | | | 5 | | | | | | | | | | 6 | | | | | | | | | | 7 | | | | | | | | | | 8 | | | | | | | | | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 31 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

RESULTADOS

LAMBDA OTIMIZADO = XXXX.XXXX

X(7)

XXX.XXX
XXX.XXX

DEMETRACAO TOTAL = XXXXX.XXX

LISTAGEM DO PROGRAMA

```

C*****
C***** P R O G R A M A   P R I N C I P A L
C*****
C*****
C*****
C***** MAXIMIZAR A PENETRACAO DA PROPAGANDA
C***** COM LIMITACAO ORCAMENTARIA
C*****
COMMON LNZ(99),LNALF(99),LNZAL,LANDA,GLAN
INTEGER V
REAL*8 LNZ,LNALF,LNZAL,LANDA,LA2,LS,LI,GLAN
COMMON X(99),U(99),BEX(99),BETA(99),ALFA(99),C(99),Z(99),V(99),N
10 FORMAT (I2,F7.4,F8.2)
11 FORMAT(13I6)
12 FORMAT(4F4.2)
13 FORMAT(10F8.2)
100 FCRMAT(1H1,58X,'DADOS DO PROBLEMA')
101 FORMAT('0',19X,'N =',I2,14X,'LANDA I =',F9.4,5X,'EPSILON =',F7.4,
15X,'ORCAMENTO DISPONIVEL =',F9.2)
102 FORMAT('0',21X,'VIJ)',17X,'C(J)',14X,'BETA(J)',13X,'ALFA(J)')
103 FORMAT(1H1,31X,'RESULTADOS')
104 FORMAT('0',23X,'LANDA OTIMO =',F9.4,14X,'XI(J)')
200 FORMAT(' ',20X,16,14X,F8.2,11X,F6.2,17X,F3.2)
201 FORMAT(' ',58X,F7.3)
202 FORMAT('0',20X,'PENETRACAO TOTAL =',F20 )
300 FORMAT('TEMPO',20X,F7.5)
C*****
C*****
C***** LEITURA DE DADOS
C
C
L=1
M=3
READ(L,10) N,E,B
READ(L,11) (V(J),J=1,N)
READ(L,13) (C(J),J=1,N)
READ(L,12) (BETA(J),J=1,N)
READ(L,12) (ALFA(J),J=1,N)
D=-999.0000
C*****
C*****
C***** CALCULAR O LANDA INICIAL
C
CALL TIM300(I1)
DO 22 J=1,N
LANDA=-1((V(J)*BETA(J))/(1-ALFA(J))*C(J))
IF (LANDA.GT.D) D=LANDA
22 CONTINUE
LANDA=D
XLANDA=LANDA
C
C***** CALCULAR O LANDA OTIMO
C
21 LI=LANDA
LS=0.
23 LANDA=(LI+LS)/2
CALL GLANDA
IF ((GLAN.LE.(B+E)).AND.(GLAN.GT.(B-E))) GO TO 20
IF (GLAN.GT.B) GO TO 24

```



```

      LI=LANDA
      GO TO 23
C*****
      24 LS=LANDA
      GO TO 23
C*****
C*****
C*****
C***** CALCULAR X(J)
C
C*****
      20 DO 51 J=1, N
          X(J)=(LNALF(J) - LNZ(J))/BETA(J)
          BEX(J) = BETA(J) * X(J)
          EBEX  = 2.71828 ** BEX(J)
          U2   = (V(J)*(1-1/EBEX)) / (1-(ALFA(J)/EBEX))
      51 U1    = U1 + U2
          CALL TIM300(I2)
          TEMPO=FLOAT(I2-I1)/300.

          WRITE(M,300) TEMPO
C*****
C*****
C***** SAIDA DO PROGRAMA
C
C***** IMPRIMIR RESULTADOS
C
C      DADOS DE ENTRADA
      WRITE(M,100)
      WRITE(M,101) N,XLANDA,E,B
      WRITE(M,102)
      DO 60 J=1,N
      60 WRITE(M,200) V(J),C(J),BETA(J),ALFA(J)
      WRITE(M,103)
      WRITE(M,104) LANDA
      DO 70 J=1,N
      70 WRITE(M,201) X(J)
      WRITE(M,202) U1
      STOP
      END

```

```

C *****
C *****
C
C ***** SUBROTINA PARA CALCULAR Z(J) E G(Y)
C
SUBROUTINE GLANDA
REAL*8 LNZ, LNALF, LNZAL, LANDA, LA2, LS, LI, GLAN
INTEGER V
COMMON LNZ(99), LNALF(99), LNZAL, LANDA, GLAN
COMMON X(99), J(99), BEX(99), BETA(99), ALFA(99), C(99), Z(99), V(99), N
GLAN=0.
DO 50 J=1, N
P1 = -(V(J)*BETA(J)*(1-ALFA(J))) / (C(J)*ALFA(J)*LANDA) + 2
P11 = 0.5 * P1
P22 = P1 ** 2
P21= (0.25 * P22 ) - 1
P21=ABS(P21)
P23 = SQRT(P21)
C ***** CALCULAR Z(J) EM LANDA OTIMO
C
Z(J) = P11 - P23
Z(J)=ABS(Z(J))
LNZ(J) =ALOG (Z(J))
ALFA(J)=ABS(ALFA(J))
LNALF(J)=ALOG (ALFA(J))
LNZAL= ((LNALF(J)- LNZ(J)) / BETA(J)) * C(J)
50 GLAN = GLAN +LNZAL
RETURN
END

```

ANEXO 4

ANEXO 4

Antes de fazer o fluxograma detalhado será esboçado a idéia geral do algoritmo:

1. Escolha entre os veículos disponíveis o veículo de máxima penetração.
2. Se existe orçamento disponível - aloque uma unidade de propaganda no veículo escolhido.

Vá para (1) .

3. Imprima resultado

FIM

O Fluxograma detalhado é mostrado na figura 4.

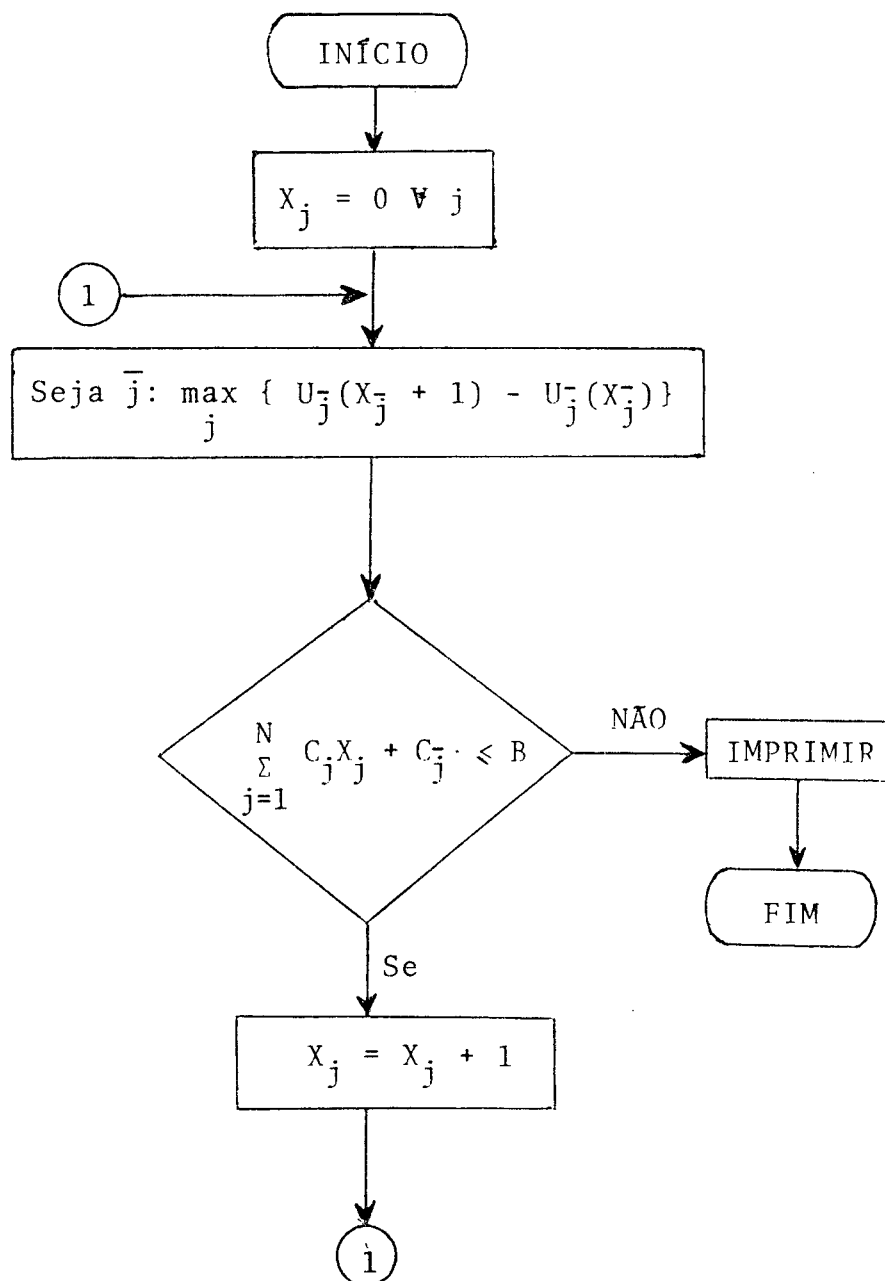


Fig 4. Algoritmo heurístico para encontrar a solução inteira do problema.