

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

ESTABILIDADE DO GERADOR SÍNCRONO  
COM REGULADORES VIA MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

Dissertação submetida à Universidade Federal de  
Santa Catarina para obtenção do grau de Mestre em Ciências.

EDUARDO MORENO KOLBE

NOVEMBRO - 1980

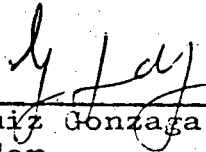
ESTABILIDADE DO GERADOR SÍNCRONO  
COM REGULADORES VIA MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

EDUARDO MORENO KOLBE

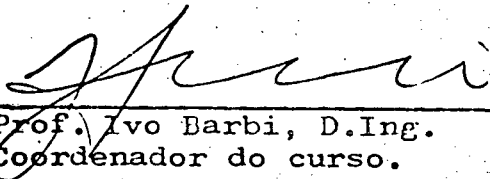
Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de:

MESTRE EM CIÊNCIAS - ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA

e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.



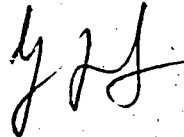
Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca  
Orientador.



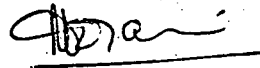
Prof. Ivo Barbi, D.Ing.  
Coordenador do curso.

Apresentada perante a banca examinadora composta dos professores:

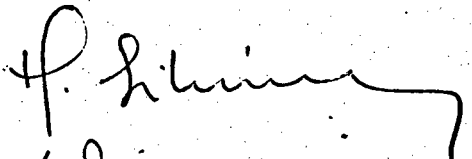
Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, DSc.



Prof. Ramajani Doraiswami, PhD.



Prof. Hamilton Medeiros Silveira, D.Et.



Prof. Sahjendra Narain Singh, PhD.



A minha Família

AGRADECIMENTOS

Ao professor Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, ao corpo docente e aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina pela ampla e constante colaboração.

Ao programa CAPES-PICD e à Universidade do Estado de Santa Catarina pelo apoio financeiro.

A minha esposa Elinor, por sua paciência e compreensão.

S U M Á R I O

SIMBOLOGIA ..... vii

RESUMO ..... x

ABSTRACT ..... xi

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO ..... 1

CAPÍTULO II - O MODELO MATEMÁTICO

    2.1 - INTRODUÇÃO ..... 6

    2.2 - O MODELO MATEMÁTICO ..... 6

        2.2.1 - A MÁQUINA SÍNCRONA ..... 6

        2.2.2 - O REGULADOR DE TENSÃO ..... 12

        2.2.3 - O REGULADOR DE VELOCIDADE ... 12

    2.3 - O MODELO MATEMÁTICO A VARIÁVEIS DE ES  
TADO ..... 14

    2.4 - CONCLUSÕES ..... 16

CAPÍTULO III - O MÉTODO DE LYAPUNOV PARA O ESTUDO DA ESTA-  
BILIDADE

    3.1 - INTRODUÇÃO ..... 18

    3.2 - O SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV ..... 18

    3.3 - O DOMÍNIO DE ESTABILIDADE ..... 21

    3.4 - CONCLUSÕES ..... 23

CAPÍTULO IV - O MÉTODO DE LYAPUNOV APLICADO A UM SISTEMA  
DE ENERGIA ELÉTRICA

    4.1 - INTRODUÇÃO ..... 25

    4.2 - A FUNÇÃO DE LYAPUNOV E A CONDIÇÃO DE

ESTABILIDADE .....	25
4.3 - DOMÍNIO DE ESTABILIDADE .....	29
4.4 - CONCLUSÕES .....	34
<b>CAPÍTULO V - <u>UM ALGORITMO PARA APLICAÇÃO DOS RESULTADOS</u></b>	
<b><u>DESTE TRABALHO E UM EXEMPLO NUMÉRICO</u></b>	
5.1 - INTRODUÇÃO .....	37
5.2 - UM ALGORITMO PARA APLICAÇÃO DOS RESULTADOS DESTE TRABALHO .....	37
5.2.1 - ANÁLISE DA ESTABILIDADE .....	37
5.2.2 - DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE .....	38
5.2.3 - VERIFICAÇÃO DA PERTINÊNCIA DE UM ESTADO $\bar{X}_p$ AO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE .....	39
5.3 - EXEMPLO NUMÉRICO .....	39
5.3.1 - ANÁLISE DA ESTABILIDADE .....	40
5.3.2 - DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE .....	41
5.3.3 - VERIFICAÇÃO DA PERTINÊNCIA DE UM ESTADO $\bar{X}_p$ AO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE .....	41
5.4 - CONCLUSÕES .....	42
<b>CAPÍTULO VI - <u>COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS</u></b>	
6.1 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES FINAIS .....	53
6.2 - SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS .....	54
<b><u>BIBLIOGRAFIA</u></b> .....	56

SIMBOLOGIA

- B - Suceptância da linha de transmissão
- x - Reatância da linha de transmissão
- D - Coeficiente de amortecimento [p.u.s./Rad.]
- M - Constante de inércia [p.u.s.<sup>2</sup>/Rad.]
- $x_d$  - Reatância síncrona do eixo direto
- $x'_d$  - Reatância transitória do eixo direto
- $x_q$  - Reatância síncrona do eixo em quadratura
- $X_d$  - Veja a equação (29)
- $X'_d$  - Veja as equações (27)
- $X_q$  - Veja as equações (27)
- $T'_{do}$  - Constante de tempo do enrolamento de campo com armadura em circuito aberto [s]
- $T'_d$  - Constante de tempo do campo com armadura em curto circuito
- A - Veja as equações (33)
- R - Veja as equações (33)
- G - Veja as equações (33)
- $\eta_2$  - Veja as equações (33)
- $T_v$  - Constante de tempo equivalente para o regulador de tensão [s]

- $g_1$  - Ganho equivalente para o regulador de velocidade p.u./Rad.  
 $g_2$  - Inverso da constante de tempo equivalente para o regulador de velocidade  $[s^{-1}]$   
 $\delta$  - Diferença de fase entre a tensão gerada e a tensão na barra infinita [Rad.]  
 $\delta_0$  -  $\delta$  no equilíbrio [Rad.]  
 $\delta'$  - Desvio de  $\delta$  em relação a  $\delta_0$  [Rad.]  
 $\omega$  - Velocidade angular [Rad./s.]  
 $\omega_0$  -  $\omega$  no equilíbrio. Velocidade síncrona [Rad./s.]  
 $\omega'$  - Desvio de  $\omega$  em relação a  $\omega_0$  [Rad./s.]  
 $P$  - Potência mecânica  
 $P_0$  - Potência mecânica no equilíbrio  
 $P'$  - Desvio de  $P$  em relação a  $P_0$   
 $P_e$  - Potência elétrica ativa  
 $N$  - Potência elétrica aparente  
 $Q$  - Potência elétrica reativa  
 $Q_0$  -  $Q$  no equilíbrio  
 $v_0$  - Tensão na barra infinita  
 $v$  - Tensão na barra do gerador  
 $v_d$  - Componente de  $v$  no eixo direto



- $v_q$  - Componente de  $v$  no eixo em quadratura  
 $v_F$  - Tensão de campo  
 $v_{FO}$  -  $v_F$  no equilíbrio  
 $v_{FR}$  - Veja a equação (28)  
 $i$  - Fasor da corrente de armadura  
 $i^*$  - Conjugado complexo de  $i$   
 $i_d$  - Componente de  $i$  no eixo direto  
 $i_q$  - Componente de  $i$  no eixo em quadratura  
 $\psi_d$  - Componente do fluxo no eixo direto  
 $\psi_q$  - Componente do fluxo no eixo em quadratura  
 $\psi_F$  - Veja a equação (8)  
 $\psi_{FO}$  -  $\psi_F$  no equilíbrio  
 $I$  - Momento de inércia  $[\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$   
 $\theta$  - Ângulo  $[\text{Rad.}]$   
 $T$  - Torque  $[\text{N}\cdot\text{m}]$   
 $s$  - Operador de Laplace  
 $t$  - Tempo

Quando não especificado, a unidade é p.u.

R E S U M O

Propõe-se uma função de Lyapunov para uma máquina síncrona conectada a uma barra infinita, considerando o decaimento de fluxo, a potência transitória devido à relutância, um regulador de velocidade e um regulador de excitação.

Mostra-se que a função proposta cumpre com os requisitos de sinal exigidos pelo segundo método de Lyapunov desde que uma certa condição, envolvendo os parâmetros do sistema, seja satisfeita. Esta condição é necessária e suficiente para que a função proposta seja uma função de Lyapunov e suficiente para a estabilidade assintótica do equilíbrio do sistema.

Mostra-se também que os pontos críticos da função proposta coincidem com os pontos de equilíbrio do sistema em estudo e o domínio de estabilidade é então determinado considerando estes pontos.

Finalmente é apresentado um algoritmo para análise da estabilidade e determinação de um domínio de estabilidade para o sistema máquina/barra infinita/reguladores. Um exemplo numérico ilustra o procedimento.

A B S T R A C T

This work presents a Lyapunov function for a synchronous machine connected to an infinite bus, including flux decay, transient saliency, voltage regulator and governor action.

It also shows that the proposed function satisfies the signal requirements of Lyapunov's theorem if a certain condition is observed. This condition is necessary and sufficient for the validity of the presented function as a Lyapunov's function and so it is sufficient for equilibrium stability.

As the function critical points coincide with the system equilibrium solutions, these are considered to determine a stability region for the trivial equilibrium.

An algorithm illustrated by a numerical example gives a suitable way for the results automatic application.

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Desde que estudos econômicos demonstraram a conveniência da interligação dos centros de produção e consumo de energia elétrica, o sistema de transmissão e distribuição de esta forma de energia vem crescendo em capacidade e complexidade.

A progressiva necessidade de energia, exige a construção de centros de geração de grande potência o que, no caso de parque hidroelétrico, geralmente implica na construção de longas linhas de transmissão. Este fator, associado à distribuição geográfica dos centros de consumo, determina que a estrutura do sistema interligado se assemelhe a uma rede de dimensões nacionais, através da qual centros de produção e consumo trocam energia continuamente.

Para a operação satisfatória de um sistema de energia elétrica interligado (em corrente alternada) é necessário que todo o sistema se mantenha em sincronismo e com frequência constante.

Faltas e outras contingências podem ocasionar desvios locais de sincronismo que se não oportunamente eliminados podem levar à separação do sistema em partes rompendo a integridade da rede. Por este motivo, o estudo das causas e condições da manutenção do sincronismo, é de vital importância para a construção, expansão e operação confiável de sistemas de energia elétrica. Uma das partes deste problema, consiste em estudar as condições de manutenção do sincronismo entre um centro de geração

(máquina) e um grande sistema de energia elétrica (barra infinita).

Quando o estado do sistema retorna ao equilíbrio após cessar o efeito de uma perturbação, diz-se que o sistema é estável.

O problema da estabilidade transitória de um gerador síncrono ligado a uma barra infinita é, geralmente, abordado através da análise de um sistema não-linear de equações diferenciais.

O método mais usual para esta análise é o da solução numérica do sistema de equações. Este método apresenta a vantagem de poder tratar modelos muito detalhados do sistema físico, sofrendo porém, desvantagens como:

1) A solução numérica descreve apenas uma solução particular, portanto, cada possível contingência deverá ser analisada separadamente.

2) A simulação de um sistema não pode ser executada durante um tempo infinito e a decisão de estabilidade ou instabilidade deve ser tomada pela observação da tendência das soluções, o que, em sistemas não-lineares não constitui uma base segura para tal decisão.

É dentro deste contexto que nas últimas duas décadas tem se realizado considerável esforço no sentido de viabilizar a aplicação dos resultados do trabalho do célebre acadêmico A.M. Lyapunov sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos, ao estudo da estabilidade transitória dos sistemas de energia elétrica [1]-[5], [10]-[12], [14]-[16], [18].

A vantagem do método direto ou segundo método de

Lyapunov, para o estudo da estabilidade, reside na possibilidade de concluir sobre o comportamento do sistema sem recorrer à solução explícita das equações diferenciais.

Os teoremas básicos do método estabelecem condições apenas suficientes para a estabilidade ou instabilidade e não se conhece uma forma geral para a aplicação dos mesmos. Estes fatores podem atualmente, ser considerados uma desvantagem.

Para o caso de duas máquinas ou uma máquina ligada a uma barra infinita, considerando o modelo clássico, onde a potência mecânica e a excitação permanecem constantes, [5] e [11] apresentam funções de Lyapunov e procedimento para a obtenção de domínios de estabilidade, baseados na determinação do ponto de equilíbrio instável associado ao mínimo valor da função em uma região em torno da origem.

Ainda considerando o modelo clássico e para o caso de n-máquinas, [1] e [4] usam a energia do sistema como função de Lyapunov e reduzem o problema de obtenção de domínios de estabilidade à determinação de pontos de tangência entre as superfícies de nível da energia potencial e a fronteira de uma região onde a energia é válida como função de Lyapunov.

Em [3] é apresentada uma função de Lyapunov para um modelo de máquina que considera o decaimento de fluxo. O domínio de estabilidade é determinado por uma superfície fechada de finida por  $V(\bar{X}) = C$ , onde  $C$  é o menor valor de  $V(\bar{X})$  calculado nos pontos de equilíbrio instáveis vizinhos da origem.

Em [16] se encontram funções de Lyapunov para modelos de sistema que levam em conta a ação dos reguladores de tensão e velocidade separadamente. O domínio de estabilidade é

definido de maneira semelhante a [3].

Em [12] se propõe uma função de Lyapunov para um modelo que considera o decaimento de fluxo, a potência transitória devida à relutância, amortecimento variável e um regulador de velocidade. A determinação do domínio de estabilidade é de maneira semelhante a [3].

Em [15] a função proposta é para um sistema máquina-barra infinita, considerando o decaimento de fluxo e o efeito de um regulador de excitação. A determinação do domínio de estabilidade, segue [3].

No presente trabalho apresenta-se uma função de Lyapunov para um gerador síncrono ligado a uma barra infinita, considerando os efeitos do decaimento de fluxo, saliência transitória, regulador de velocidade e regulador de tensão. É deduzida uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do equilíbrio do sistema e com base em [3] se apresenta um algoritmo para a determinação de um domínio de estabilidade.

No capítulo 2 se encontra o modelo matemático para o sistema, descrito por variáveis de estado.

O capítulo 3 apresenta as bases do método de Lyapunov para o estudo da estabilidade.

O capítulo 4 contém uma função de Lyapunov para o sistema, uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do equilíbrio, um método para a determinação de um domínio de estabilidade e um procedimento para a verificação da pertinência de um determinado estado ao domínio de estabilidade.

O capítulo 5 apresenta um algoritmo para aplicação dos resultados deste estudo acompanhado por um exemplo numé

rico e o capítulo 6 comentários, conclusões finais e sugestões para futuros trabalhos.



## CAPITULO II

### O MODELO MATEMÁTICO

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um modelo matemático simplificado para análise em regime transitório, de um gerador síncrono ligado a uma barra infinita através de uma linha de transmissão, considerando os efeitos dos reguladores de velocidade e tensão.

No modelo da máquina não se considera a resistência de armadura, as derivadas temporais do fluxo ( $\dot{\psi}_d ; \dot{\psi}_q$ ), a saturação e as constantes de tempo sub-transitórias. A linha de transmissão é representada a parâmetros concentrados e despreza-se a resistência em comparação com as reatâncias.

O efeito do regulador de tensão é aproximado por um sinal exponencial e o regulador de velocidade por um sistema linear de primeira ordem.

O modelo matemático aparece descrito por variáveis de estado escolhidas de tal forma, que um ponto de equilíbrio do sistema se situe na origem do espaço de estados.

#### 2.2 O MODELO MATEMÁTICO

##### 2.2.1 A MÁQUINA SÍNCRONA

Desprezando a resistência de armadura, as derivadas temporais do fluxo ( $\dot{\psi}_d ; \dot{\psi}_q$ ), as constantes de tempo sub-

transitórias e a saturação, as equações de Park se escrevem: [19]

$$v_d = -\omega \psi_q \quad (1)$$

$$v_q = \omega \psi_d \quad (2)$$

Onde:

$$\omega \psi_q = -x_q i_q \quad (3)$$

$$\omega \psi_d = v_F / (1 + sT'_{do}) - (1 + sT'_d) x_d i_d / (1 + sT'_{do}) \quad (4)$$

A equação (4) pode ser escrita na forma:

$$\omega \psi_d = v_{FR} - x_d i_d \quad (5)$$

Onde:

$$v_{FR} = (v_F + sT'_{do} (x_d - x'_d) i_d) / (1 + sT'_{do}) \quad (6)$$

que por sua vez pode ser posta na forma:

$$s\psi_F = v_F - v_{FR} \quad (7)$$

com

$$\psi_F = T'_{do} (v_{FR} - (x_d - x'_d) i_d) \quad (8)$$

Da mecânica dos corpos girantes, sabe-se que o torque é o produto da aceleração angular pelo momento de inércia. Logo:

$$T = I \ddot{\theta} \quad (9)$$

É conveniente, [8] medir a posição e velocidade angulares a partir de uma referência girante com velocidade angular  $\omega_0$  constante.

Assim:

$$\theta = \omega t = (\omega_0 + \omega')t + \delta_0 \quad (10)$$

e

$$\delta' \triangleq \omega' t \quad (11)$$

Consequentemente a eq: (9) se escreve:

$$T = I \ddot{\delta}' \quad (12)$$

T é o torque resultante da somatória dos torques que incidem na máquina, tomando-se como positivos os torques que tendem a elevar a velocidade da mesma e como negativos os torques que tendem a freiá-la.

A potência associada a um sistema girante é definida pelo produto do torque e da velocidade angular do sistema.

$$P = \omega I \ddot{\delta}' \quad (13)$$

O produto  $\omega I$  é chamado de quantidade de movimento angular e com pouco erro, nos estudos de estabilidade transitória, pode ser considerado constante e igual a  $\omega_0 I$ , [8].

A constante:

$$M = \omega_0 I \quad (14)$$

recebe o nome de: Constante de inércia da máquina.

Na equação (13) P é a resultante da somatória das potências em jogo:

$$P = P_0 - P' - D\omega' - F_e \quad (15)$$

O termo  $D\omega'$  representa o efeito do enrolamento amortecedor da máquina.

A potência elétrica  $P_e$  depende da natureza da carga. Neste estudo a carga é uma barra infinita conectada à máquina por uma linha de transmissão conforme a figura 1.

A potência elétrica entregue pela máquina é:

$$N = vi^* \quad (16)$$

Em variáveis  $d, q$ :

$$v = v_d + jv_q \quad ; \quad i^* = i_d - ji_q \quad (17)$$

$$N = v_d i_d + v_q i_q + j(v_q i_d - v_d i_q) \quad (18)$$

onde se identifica:

A potência ativa

$$P_e = v_d i_d + v_q i_q \quad (19)$$

e a potência reativa

$$Q = v_q i_d - v_d i_q \quad (20)$$

A partir da figura 1 e pelas leis de Kirchoff:

$$i = vjB + (v - v_o)/(jx) \quad (21)$$

ou em variáveis  $d, q$ :

$$i = (v_d + jv_q)jB + \left[ (v_d + jv_q) - (v_o \text{ Sen } \delta + jv_o \text{ Cos } \delta) \right] / jx \quad (22)$$

Utilizando (1), (2), (3), (5) e (8), obtém-se  $i_q, i_d,$

$v_d, v_q$ .

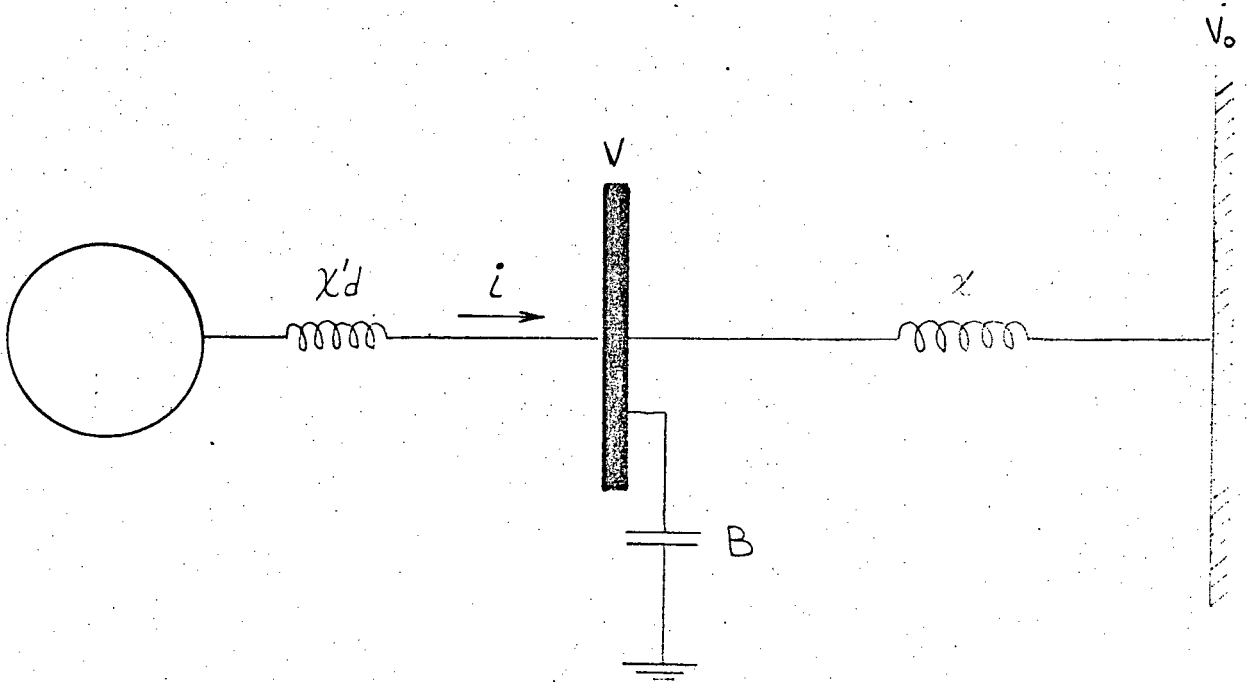


Fig. 1 - Gerador síncrono conectado a uma barra infinita.

$$i_q = v_o \text{sen} \delta / X_q \quad (23)$$

$$i_d = \psi_F (1 - Bx) / T'_{do} X'_d - v_o \text{cos} \delta / X'_d \quad (24)$$

$$v_d = x_q v_o \text{sen} \delta / X_q \quad (25)$$

$$v_q = x \psi_F / X'_d T'_{do} + x'_d v_o \text{cos} \delta / X'_d \quad (26)$$

Onde:

$$X_q = x + x_q (1 - Bx) \quad (27)$$

$$X'_d = x + x'_d (1 - Bx)$$

Introduzindo (24) em (8) e resolvendo:

$$v_{FR} = X_d \psi_F / X'_d T'_{do} - (x_d - x'_d) v_o \text{cos} \delta / X'_d \quad (28)$$

Onde:

$$X_d = x + x_d (1 - Bx) \quad (29)$$

A partir de (19) e através de (23), (24), (25) e (26) se calcula:

$$P_e = \psi_F v_o \text{sen} \delta / X'_d T'_{do} + v_o^2 (x'_d - x_q) \text{sen} \delta / 2X_q X'_d \quad (30)$$

Considerando as equações (11), (13), (14) e (15) tem-se que:

$$\dot{\omega}' = 1/M (P_o - P' - D\omega' - P_e) \quad (31)$$

Desta forma, as equações (7), (11) e (31) possibilitam escrever o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{\delta}' = \omega' \\ \dot{\omega}' = (P_o - P' - D\omega' - A\psi_F \text{sen}\delta - G \text{sen}2\delta)/M \\ \dot{\psi}_F = v_F - R\psi_F + \eta_2 \cos\delta \end{cases} \quad (32)$$

Onde:

$$\begin{aligned} A &= v_o / X_d' T_d' \\ G &= (x_d' - x_q') v_o^2 / 2X_d' X_q' \\ \eta_2 &= (x_d' - x_q') v_o / X_d' \\ R &= X_d' / X_d' T_d' \end{aligned} \quad (33)$$

e pela equação (10):  $\delta = \delta_o + \delta'$

### 2.2.2 O REGULADOR DE TENSÃO

O efeito do regulador de tensão é aproximado por um sinal exponencial de maneira que, a tensão de campo possa variar de acordo com a lei:

$$v_F = v_{Fo} + K_v v_{Fo} e^{-t/T_v} \quad (34)$$

[15], [16]

### 2.2.3 O REGULADOR DE VELOCIDADE

O regulador de velocidade é representado por um sistema linear de primeira ordem [12], [16] excitado pela variação de velocidade  $\omega'$

$$P' = -g_2 P' + g_1 \omega' \quad (35)$$

Assim, as equações (32), (34), (35) descrevem o comportamento do sistema em estudo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta}' = \omega' \\ \dot{\omega}' = (P_0 - P' - D\omega' - A\psi_F \text{sen} \delta - G \text{sen} 2\delta) / M \\ \dot{\psi}_F = v_{F0} + K_v v_{F0} e^{-t/T_v} - R\psi_F + \eta_2 \cos \delta \\ \dot{P}' = -g_2 P' + g_1 \omega' \end{array} \right. \quad (36)$$

Para poder tratar (36) como um sistema autônomo, toma-se a equação (34) sob a forma diferencial

$$\dot{v}_F = -(K_v v_{F0} e^{-t/T_v}) / T_v = -(v_F + v_{F0}) / T_v \quad (37)$$

tal que (36) se transforma em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta}' = \omega' \\ \dot{\omega}' = (P_0 - P' - D\omega' - A\psi_F \text{sen} \delta - G \text{sen} 2\delta) / M \\ \dot{\psi}_F = v_F - R\psi_F + \eta_2 \cos \delta \\ \dot{P}' = -g_2 P' + g_1 \omega' \\ \dot{v}_F = -(v_F - v_{F0}) / T_v \end{array} \right. \quad (38)$$

que é autônomo.

Os pontos de equilíbrio do sistema (38) obedecem à condição:

$$\dot{\delta}' = \dot{\omega}' = \dot{\psi}_F = \dot{P}' = \dot{v}_F = 0 \quad (39)$$

e portanto constituem solução para o sistema algébrico



$$\begin{cases}
 \omega'_0 = 0 \\
 P_0 - A\Psi_{FO} \text{Sen}\delta_0 - G\text{Sen}2\delta_0 = 0 \\
 v_{FO} - R\Psi_{FO} + \eta_2 \text{Cos}\delta_0 = 0 \\
 P' = 0 \\
 v_{FO} = v_{FO}
 \end{cases} \quad (40)$$

### 2.3 O MODELO MATEMÁTICO A VARIÁVEIS DE ESTADO

As variáveis de estado para o modelo (38) são escolhidas de tal forma que um dos pontos de equilíbrio, solução do sistema (40), se situe na origem. Isto porque, como será visto no capítulo 3, os teoremas utilizados consideram um ponto de equilíbrio na origem.

Sejam então:

$$\begin{cases}
 x_1 = \delta - \delta_0 = \delta' \\
 x_2 = \omega' \\
 x_3 = \Psi_F - \Psi_{FO} \\
 x_4 = P' \\
 x_5 = v_F - v_{FO}
 \end{cases} \quad (41)$$

as variáveis de estado.

Realizando as substituições indicadas pelas equações (41), o sistema (38) se escreve:

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = x_2 \\
 \dot{x}_2 = (P_0 - x_4 - Dx_2)/M - \\
 \quad [A(x_3 + \psi_{F0})\text{Sen}(x_1 + \delta_0) - G\text{Sen}2(x_1 + \delta_0)]/M \\
 \dot{x}_3 = x_5 + v_{F0} - R(x_3 + \psi_{F0}) + \eta_2 \text{Cos}(x_1 + \delta_0) \\
 \dot{x}_4 = -g_2 x_4 + g_1 x_2 \\
 \dot{x}_5 = -x_5/T_v
 \end{cases} \quad (42)$$

Considerando (40), as equações (42) fornecem:

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = x_2 \\
 \dot{x}_2 = \left\{ -Dx_2 - A\psi_{F0} [\text{Sen}(x_1 + \delta_0) - \text{Sen}\delta_0] - \right. \\
 \quad \left. G[\text{Sen}2(x_1 + \delta_0) - \text{Sen}2\delta_0] - Ax_3 \text{Sen}(x_1 + \delta_0) - x_4 \right\} / M \\
 \dot{x}_3 = x_5 - Rx_3 + \eta_2 [\text{Cos}(x_1 + \delta_0) - \text{Cos}\delta_0] \\
 \dot{x}_4 = g_1 x_2 - g_2 x_4 \\
 \dot{x}_5 = -x_5/T_v
 \end{cases} \quad (43)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (43) são as soluções do sistema algébrico:

$$\begin{cases}
 x_{20} = 0 \\
 A\psi_{F0} [\text{sen}(x_{10} + \delta_0) - \text{sen}\delta_0] + \\
 G[\text{sen}2(x_{10} + \delta_0) - \text{sen}2\delta_0] + Ax_{30} \text{sen}(x_{10} + \delta_0) = 0 \\
 Rx_{30} - \eta_2 \text{cos}(x_{10} + \delta_0) - \text{cos}\delta_0 = 0 \\
 x_{40} = 0 \\
 x_{50} = 0
 \end{cases} \quad (44)$$

onde se verifica que o vetor  $\bar{X} = 0$  é ponto de equilíbrio de (43)

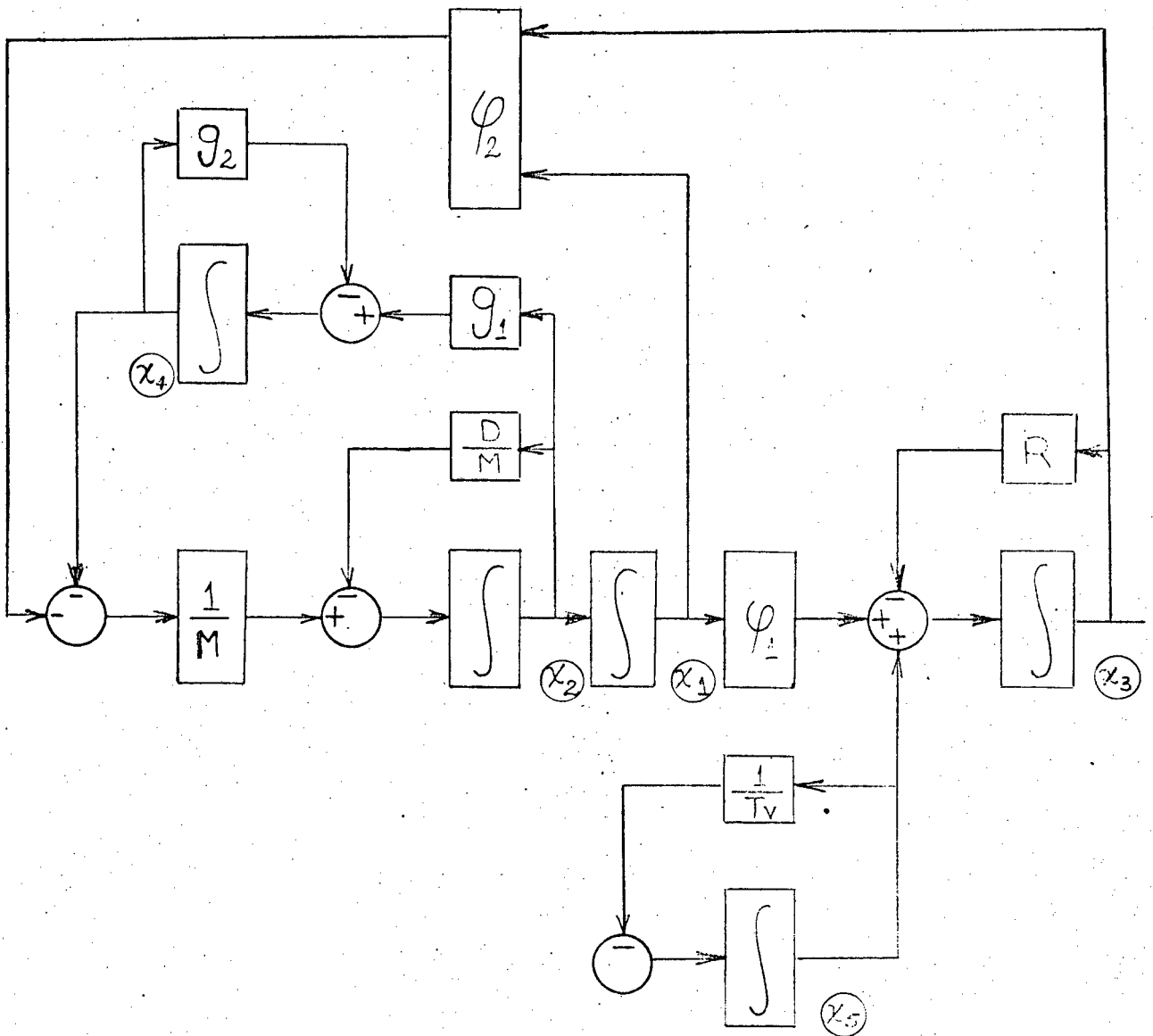
Um diagrama de blocos para o sistema (43) se encontra na figura 2.

#### 2.4 CONCLUSÕES

Apresentou-se o desenvolvimento da equação de estado para um gerador síncrono ligado a uma barra infinita, considerando os efeitos dos reguladores de velocidade e de tensão. O efeito do regulador de tensão, aproximado por um sinal exponencial, foi modelado como um sistema linear de primeira ordem a fim de obter para o sistema máquina/barra infinita/reguladores um modelo autônomo (38).

Finalmente, escolheram-se as variáveis de estado de modo que um ponto de equilíbrio se situe na origem (43).

No próximo capítulo são expostas as bases matemáticas do segundo método de Lyapunov para o estudo da estabilidade.



$$\varphi_1(x_1) = \eta_2 [\cos(x_1 + \delta_0) - \cos \delta_0]$$

$$\varphi_2(x_1, x_3) = A\psi_{F0} [\sin(x_1 + \delta_0) - \sin \delta_0] + G [\sin 2(x_1 + \delta_0) - \sin 2\delta_0] + Ax_3 \sin(x_1 + \delta_0) .$$

Fig. 2 Diagrama de blocos para o sistema (43).

### CAPÍTULO III

#### O MÉTODO DE LYAPUNOV PARA O ESTUDO DA ESTABILIDADE

##### 3.1 INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste capítulo as bases do segundo método de Lyapunov para o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema autônomo, juntamente com algumas definições importantes que servem de apoio matemático para o presente trabalho. São definidos os conceitos de ponto de equilíbrio, estabilidade e domínio de estabilidade para um ponto de equilíbrio e também é apresentado o teorema de estabilidade de Lyapunov segundo La Salle e Lefchetz [9]. Finalmente comentam-se algumas vantagens e desvantagens na aplicação do segundo método de Lyapunov ao estudo da estabilidade do equilíbrio.

##### 3.2 O SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV

O segundo método de Lyapunov estabelece condições suficientes para a estabilidade de uma solução de equilíbrio de um sistema dinâmico. O teorema de Lyapunov sobre a estabilidade se fundamenta em um conceito físico que pode ser assim descrito: "Se a derivada temporal  $\dot{E}(\bar{X})$  da energia  $E(\bar{X})$  de um sistema físico isolado é negativa para cada estado  $\bar{X}$ , exceto para um único estado  $\bar{X}_e$ , então a energia  $E(\bar{X})$  diminuirá continuamente até atingir o valor  $E(\bar{X}_e)$  que é um mínimo." [7]

Definição 1. Seja um sistema autônomo descrito pela equação diferencial vetorial:

$$\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X}) \quad (45)$$

Se existe uma única função vetorial  $\bar{\phi}(t; \bar{X}_0)$ , diferenciável em relação a  $t$ , tal que para qualquer  $\bar{X}_0$ :

$$a) \bar{\phi}(t_0; \bar{X}_0) = \bar{X}_0$$

$$b) \dot{\bar{\phi}}(t; \bar{X}_0) = f[\bar{\phi}(t; \bar{X}_0)]$$

então,  $\bar{\phi}$  é chamada: Solução para o sistema (45). [7]

Definição 2. Se a solução  $\bar{\phi}(t; \bar{X}_0)$  do sistema (45) apresenta a propriedade:

$$\bar{\phi}(t; \bar{X}_0) = \bar{X}_0 = \bar{X}_e \quad \forall t \geq t_0$$

esta solução chamar-se-á solução singular ou pontual e  $\bar{X}_e$  ponto de equilíbrio ou estado de equilíbrio. Daqui em diante assume-se que, uma das soluções singulares admissíveis pelo sistema (45) é a origem.

Definição 3. Um estado de equilíbrio  $\bar{X}_e$  é estável no sentido de Lyapunov se para cada número real  $\epsilon > 0$  existe um número real  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\|\bar{X}_0 - \bar{X}_e\| \leq \delta$  implica:

$$\|\bar{\phi}(t; \bar{X}_0) - \bar{X}_e\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

[7]

Definição 4. Um estado de equilíbrio de um sistema (45) é assintoticamente estável no sentido de Lyapunov, se:

a) O equilíbrio é estável (Definição 3)

$$b) \bar{\phi}(t; \bar{X}_0) \rightarrow \bar{\phi}(\bar{X}_e) \quad \forall \bar{X}_0 \in N_\epsilon(\bar{X}_e); t \rightarrow \infty$$

De maneira geral, um sistema autônomo (45) admite várias soluções singulares. Esta propriedade restringe as caracte-

terísticas de estabilidade ou instabilidade de cada solução singular, a uma região  $\Omega$  do espaço de estados. [7]

Teorema 1. A solução singular  $\bar{X}_e = 0$  para o sistema (45) é assintoticamente estável em uma região  $\Omega$  em torno da origem do espaço de estados, se existe uma função escalar  $V(\bar{X})$  que na região  $\Omega$  satisfaz:

a)  $V(\bar{X}) > 0; \bar{X} \neq 0; V(0) = 0$

b)  $V(\bar{X})$  admite derivadas parciais contínuas

c)  $\dot{V}(\bar{X}) \leq 0; \bar{X} \neq 0; \dot{V}(0) = 0$

d)  $\dot{V}(\bar{X})$  não é identicamente nula ao longo de qualquer outra solução que não a trivial [9]

#### Observações:

1) A função escalar  $V(\bar{X})$  que satisfaz as condições do Teorema 1, recebe o nome de: Função de Lyapunov.

2) A função escalar  $\dot{V}(\bar{X})$  é a derivada temporal de  $V(\bar{X})$  ao longo das trajetórias do sistema (45):

$$\dot{V}(\bar{X}) = \nabla V(\bar{X}) \cdot \dot{\bar{X}}$$

3) O Teorema 1 permite a verificação da estabilidade de uma solução singular do sistema (45) de forma direta "i. e.", sem recorrer à solução explícita das equações diferenciais. Esta possibilidade motivou a realização de muitos trabalhos aplicados ao estudo da estabilidade transitória dos sistemas de energia elétrica: [1] - [5], [10] - [12], [14] - [16], [18] e outros.

### 3.3 O DOMÍNIO DE ESTABILIDADE

A possível existência de mais de uma solução singular ou ponto de equilíbrio para o sistema (45), exige a definição de regiões associadas a pontos de equilíbrio estáveis ou domínios de estabilidade.

Definição 5. Um domínio de estabilidade associado a um ponto de equilíbrio estável,  $\bar{x}_e$ , é um conjunto  $\mathcal{L}$  de vetores de estado com as seguintes propriedades:

- a)  $\bar{x}_e \in \mathcal{L}$
- b)  $\dot{\bar{x}} = 0 \leftrightarrow \bar{x} = \bar{x}_e$
- c)  $\bar{x}_0 \in \mathcal{L} \rightarrow \bar{\phi}(t, \bar{x}_0) \in \mathcal{L}, \forall t \geq t_0.$

Além disso, se para  $\bar{x}_0$  pertencente a  $\mathcal{L}$ ,  $\bar{\phi}(t, \bar{x}_0)$  tende a  $\bar{x}_e$  quando o tempo tende a infinito,  $\mathcal{L}$  é o domínio de estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio em questão.

Considere no espaço de estados uma região  $F$  caracterizada pelas propriedades:

- a) Existe em  $F, V(\bar{x})$  de acordo com o Teorema 1
- b) Em  $F, V(\bar{x}_A) > V(\bar{x}_B) \leftrightarrow \|\bar{x}_A\| > \|\bar{x}_B\|$   
Com  $\bar{x}_A = \lambda \bar{x}_B, \lambda > 1$
- c) A região  $F$  é conexa e contém a origem

Proposição 1. Se  $V(x) = V = C \frac{t_e}{t}$  descreve uma hiper-superfície fechada, então, o conjunto aberto  $\mathcal{D}$ , contido em  $F$  e limitado por  $V(\bar{x}) = V$  onde:

$$V \leq \text{Min} \left\{ V(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathcal{P} \cap F \right\}$$



$$\mathcal{P} = \left\{ \bar{x} \mid \nabla v(\bar{x}) = 0, \bar{x} \neq 0 \right\}$$

é um domínio de estabilidade assintótica para o equilíbrio trivial de (45).

Demonstração. Seja  $\bar{x}_0 \neq 0$ , então:

$$\text{a) } \bar{x}_0 \in \mathcal{D} \rightarrow \dot{v}(\bar{x}_0) < 0 \rightarrow v(\bar{x}) < v(\bar{x}_0) \rightarrow \\ \|\bar{x}\| < \|\bar{x}_0\|, \forall t > t_0$$

$$\text{b) Em } \mathcal{D}, \dot{\bar{x}} = 0 \leftrightarrow \bar{x} = 0 \leftrightarrow v(\bar{x}) = 0 \leftrightarrow \dot{v}(\bar{x}) = 0 \\ \text{Consequentemente } \bar{x} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

Portanto  $\mathcal{D}$  é um domínio de estabilidade assintótica.

Assim, o segundo método de Lyapunov permite decidir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio e definir para tal um domínio de estabilidade. Existe porém uma grande dificuldade para aplicar o método e é o desconhecimento de um processo geral para obter funções de Lyapunov.

Diversas técnicas de geração destas funções foram propostas mas nenhuma delas aborda o caso geral. Um valioso guia bibliográfico para estes trabalhos se encontra em [12] ao qual pode-se acrescentar [13] e [20]. De maneira geral é possível afirmar que a solução para o problema de encontrar uma função de Lyapunov para um determinado sistema, constitui um trabalho que requer experiência e habilidade para conduzir um processo do tipo tentativa e erro.

Em contraposição, a possibilidade de decidir sobre a estabilidade e o domínio de estabilidade, sem recorrer à solução das equações diferenciais, compensa em muitos casos o esforço necessário para encontrar uma função de Lyapunov. No caso do presente trabalho, a solução analítica do sistema de equações (43)

parece complexa o suficiente como para procurar no segundo método de Lyapunov uma resposta sobre a estabilidade e o domínio de estabilidade do equilíbrio trivial.

Para enfatizar o valor do "Segundo Método" , lembrar-se-á que o problema da estabilidade de um ponto de equilíbrio está totalmente resolvido para o caso de sistemas lineares ou sistemas não-lineares, linearizados em torno do equilíbrio em estudo. Estes estudos porém não podem considerar o caso da existência de vários pontos de equilíbrio e portanto não permitem a determinação de domínios de estabilidade finitos.

O segundo método de Lyapunov não apresenta vantagem sobre as técnicas lineares de análise da estabilidade, quando se trata apenas de determinar se uma solução singular é ou não estável. O que faz deste método uma ferramenta importante no estudo da estabilidade de sistemas não-lineares, é justamente a possibilidade de determinar um domínio de estabilidade.

O conhecimento de um domínio de estabilidade permite estimar a magnitude das perturbações que um sistema pode suportar sem que o estado do mesmo abandone o referido domínio e possa retornar ao equilíbrio (estabilidade assintótica) , ou permaneça em uma região limitada em torno do equilíbrio (estabilidade).

O teorema para concluir estabilidade é o próprio Teorema 1 relaxado na restrição d) [9]

### 3.4 CONCLUSÕES

Foram apresentadas as bases do segundo método de Lyapunov para o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio do sistema (45) e uma proposição para a obtenção de domí-

nios de estabilidade a partir das funções de Lyapunov.

Finalmente, comentaram-se algumas vantagens e desvantagens na aplicação do segundo método ao estudo da estabilidade das soluções singulares dos sistemas dinâmicos.

No capítulo seguinte, são utilizados os princípios aqui descritos para desenvolver uma condição suficiente para a estabilidade assintótica da solução singular trivial do sistema (43).

## CAPÍTULO IV

### O MÉTODO DE LYAPUNOV APLICADO A UM SISTEMA DE ENERGIA ELÉTRICA

#### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo descreve-se a obtenção de uma condição suficiente para a verificação da estabilidade assintótica do equilíbrio trivial do sistema (43), com base no estudo de uma função de Lyapunov composta pelas funções apresentadas em [12] e [15].

É apresentado um método para a verificação da pertinência de um determinado estado  $\bar{X}_p$  relativa ao domínio de estabilidade definido pela função de Lyapunov proposta.

Discute-se a influência dos reguladores sobre a estabilidade do sistema (43).

#### 4.2 A FUNÇÃO DE LYAPUNOV E A CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE

Pela composição das funções apresentadas em [12] e [15], propõe-se

$$\begin{aligned}
 V(\bar{X}) = & (M/2)x_2^2 - A\Psi_{F0} \left[ \cos(x_1 + \delta_0) + x_1 \text{sen} \delta_0 - \cos \delta_0 \right] + \\
 & (G/2) \left[ \cos 2\delta_0 - 2x_1 \text{sen} 2\delta_0 - \cos 2(\delta_0 + x_1) \right] + \\
 & (AR/2\eta_2)x_3^2 + Ax_3 \left[ \cos \delta_0 - \cos(\delta_0 + x_1) \right] + \\
 & (1/2g_1)x_4^2 + (AT_V/8\eta_2)x_5^2
 \end{aligned} \tag{46}$$

como função de Lyapunov para o sistema (43).

A derivada temporal de (46) ao longo das soluções de (43) é:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\bar{X}) = & -Dx_2^2 - (A/\eta_2)\dot{x}_3^2 + (A/\eta_2)\dot{x}_3x_5 - \\
 & (A/4\eta_2)x_5^2 - (g_2/g_1)x_4^2
 \end{aligned} \tag{47}$$

De acordo com o exposto no capítulo 3, a função

(46) e sua derivada (47) devem obedecer às restrições do Teorema 1 para que (46) seja uma função de Lyapunov.

O item a) do Teorema 1 exige que a função (46) seja definida positiva. Esta condição implica que os parâmetros  $M, A, R, \eta_2, g_1, T_v$  sejam não-nulos, reais, positivos. Por razões físicas e considerando as equações (14) e (33), conclui-se que:

$$\{M, A, R, \eta_2, T_v\} \subset \mathcal{R}^+ \quad (48)$$

onde  $\mathcal{R}^+$  é o conjunto dos reais positivos.

O parâmetro  $g_1$  depende do projeto do regulador de velocidade e aqui já se encontra a primeira orientação:

$$g_1 \in \mathcal{R}^+ \quad (49)$$

Estudar a positividade de (46) apresenta certa dificuldade ocasionada pelos termos trigonométricos nela contidos. Por isto, estuda-se primeiro a positividade de uma função polinomial que coincide com (46) em uma vizinhança da origem e que não contém termos de grau superior ao segundo:

$$V'(\bar{X}) = (A\psi_{FO}/2)(\cos\delta_0 + G\cos 2\delta_0)x_1^2 + A\sin\delta_0 x_1 x_3 + (AR/2\eta_2)x_3^2 + (M/2)x_2^2 + (1/2g_1)x_4^2 + (AT_v/8\eta_2)x_5^2 \quad (50)$$

obtida a partir de (46) por expansão em série de Maclaurin desprezando os termos com grau superior ao segundo.

Pelo teorema de Sylvester [21], a condição necessária e suficiente para que uma função quadrática

$$q = X^T P X \quad (51)$$

seja definida positiva, é que os menores principais da matriz  $P$

sejam maiores que zero.

A função (50) é uma quadrática que apresenta apenas um termo cruzado nas variáveis  $x_1, x_3$ . Portanto é suficiente que as condições do teorema de Sylvester sejam verificadas para este par de variáveis.

Assim, se:

$$V(x_1, x_3) = \left[ (A\psi_{FO}/2) \cos \delta_o + G \cos 2\delta_o \right] x_1^2 + A \sin \delta_o x_1 x_3 + (AR/2\eta_2) x_3^2 \quad (52)$$

for definida positiva para o vetor  $\bar{X}^T = [x_1, x_3]$ , (50) também o será para o vetor  $\bar{X}^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$  consideradas as condições (48) e (49).

Segundo o teorema de Sylvester, (52) é definida positiva se e somente se:

$$(A\psi_{FO}/2) \cos \delta_o + G \cos 2\delta_o > 0 \quad (53)$$

e:

$$\left| \begin{bmatrix} (A\psi_{FO}/2) \cos \delta_o + G \cos 2\delta_o & (A/2) \sin \delta_o \\ (A/2) \sin \delta_o & AR/2\eta_2 \end{bmatrix} \right| > 0 \quad (54)$$

Pode-se observar que satisfazendo a desigualdade (54), satisfaz-se a desigualdade (53). Operando o determinante da desigualdade (54), se obtém:

$$(R/\eta_2) \left[ (A\psi_{FO}/2) \cos \delta_o + G \cos 2\delta_o \right] > (A/2) \sin^2 \delta_o \quad (55)$$

que é a condição necessária e suficiente para que (50) seja uma função definida positiva e para que (46) obedeça à primeira condição do Teorema 1 em uma vizinhança da origem.

O ítem (c) do Teorema 1 exige que  $\dot{V}(\bar{X})$  seja pelo menos semi-definida negativa. A equação (47) é uma forma quadrática das variáveis  $x_2, \dot{x}_3, x_4, x_5$ .

Uma forma quadrática:

$$q = \bar{X}^T P \bar{X} \quad (56)$$

é semi-definida negativa se os menores principais de P são não-positivos. [22]

A equação (47) portanto será semi-definida negativa se e somente se:

$$-A/\eta_2 \leq 0 \quad (57)$$

$$\{D, g_2\} \subset \mathcal{R}^+ \quad (58)$$

A desigualdade (57) é sempre satisfeita face à condição (48), por outro lado, o fator de amortecimento é por definição um número real positivo.

A condição (58) vem complementar a condição (49) para o projeto do sistema regulador de velocidade, indicando que este deve ser um sistema assintoticamente estável (58) e que a resposta estacionária para um sinal senoidal de uma frequência qualquer, deve apresentar um deslocamento de fase compreendido entre entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  em relação ao sinal de entrada (49). Assim, se o sistema regulador de velocidade obedecer às especificações acima e levando em conta (48), a desigualdade (55) constitui condição suficiente para a estabilidade do equilíbrio trivial do sistema (43).

Para verificar se a estabilidade é assintótica, necessário se faz estudar, se a condição (d) do Teorema 1 é sa-

tisfeita.

A função (47) se anula para:

$$x_2 = x_4 = 0 \quad \dot{x}_3 = x_5/2 \quad (59)$$

ou seja, em uma região contida no espaço  $(x_1, x_3, x_5)$

Dada uma condição inicial  $\bar{X}_0$  pertencente à região definida pelas equações (59), as trajetórias do sistema (43) evoluirão de acordo com as soluções de:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -\left\{ A\psi_{FO} \left[ \text{sen}(x_1 + \delta_0) - \text{sen} \delta_0 \right] + G \left[ \text{sen} 2(x_1 + \delta_0) + \text{sen} \delta_0 \right] + Ax_3 \text{sen}(x_1 + \delta_0) \right\} \\ \dot{x}_3 &= x_5/2 \quad (60) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = 0$$

$$\dot{x}_5 = -x_5/T_v$$

Se  $\bar{X}_0$  não é um ponto de equilíbrio do sistema (43) então,  $\dot{x}_2 \neq 0$ , e a trajetória abandonará o espaço  $(x_1, x_3, x_5)$ . Isto indica que em uma região onde a origem é o único ponto de equilíbrio, a função (47) não se anula ao longo das soluções do sistema (43).

Em síntese, observadas as condições (48), (49) e (58) a desigualdade (55) constitui uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do equilíbrio trivial do sistema (43).

#### 4.3 DOMÍNIO DE ESTABILIDADE

É incompleto falar em estabilidade sem especificar o conjunto de condições iniciais a partir das quais as so-



luções obedecem os critérios de estabilidade apresentados nas definições 3 ou 4 do capítulo 3.

Na secção 4.2 se verificou que,obedecidas certas condições,o equilíbrio trivial de (43) é assintoticamente estável para estados iniciais contidos em uma vizinhança da origem. Nesta vizinhança , vale a aproximação (50) e existe somente um ponto de equilíbrio.

De acordo com o exposto pela proposição 1 no capítulo 3,é possível,a partir de uma função de Lyapunov, definir um domínio de estabilidade para um ponto de equilíbrio estável e assim será feito para o equilíbrio trivial de (43) utilizando a função  $V(\bar{X})$  (Equação (46)).

Os elementos do conjunto  $\mathcal{P}$  do item (d) da proposição 1 são os pontos críticos de  $V(\bar{X})$ ,exceto a origem, definidos pelas soluções do sistema algébrico:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\Psi_{F0} \left[ \text{sen}(x_1 + \delta_0) - \text{sen}\delta_0 \right] + G \left[ \text{sen}2(x_1 + \delta_0) - \text{sen}2\delta_0 \right] + Ax_3 \text{sen}(x_1 + \delta_0) = 0 \\ Mx_2 = 0 \\ \eta_2 \left[ \cos\delta_0 - \cos(x_1 + \delta_0) \right] + Rx_3 = 0 \\ x_4/g_1 = 0 \\ (A/4\eta_2\eta_4)x_5 = 0 \end{array} \right. \quad (61)$$

Comparando os sistemas de equações (61) e (44) se observa que os pontos críticos da função (46) coincidem com os pontos de equilíbrio do sistema (43).

Uma inspecção da função (46) indica que esta apre

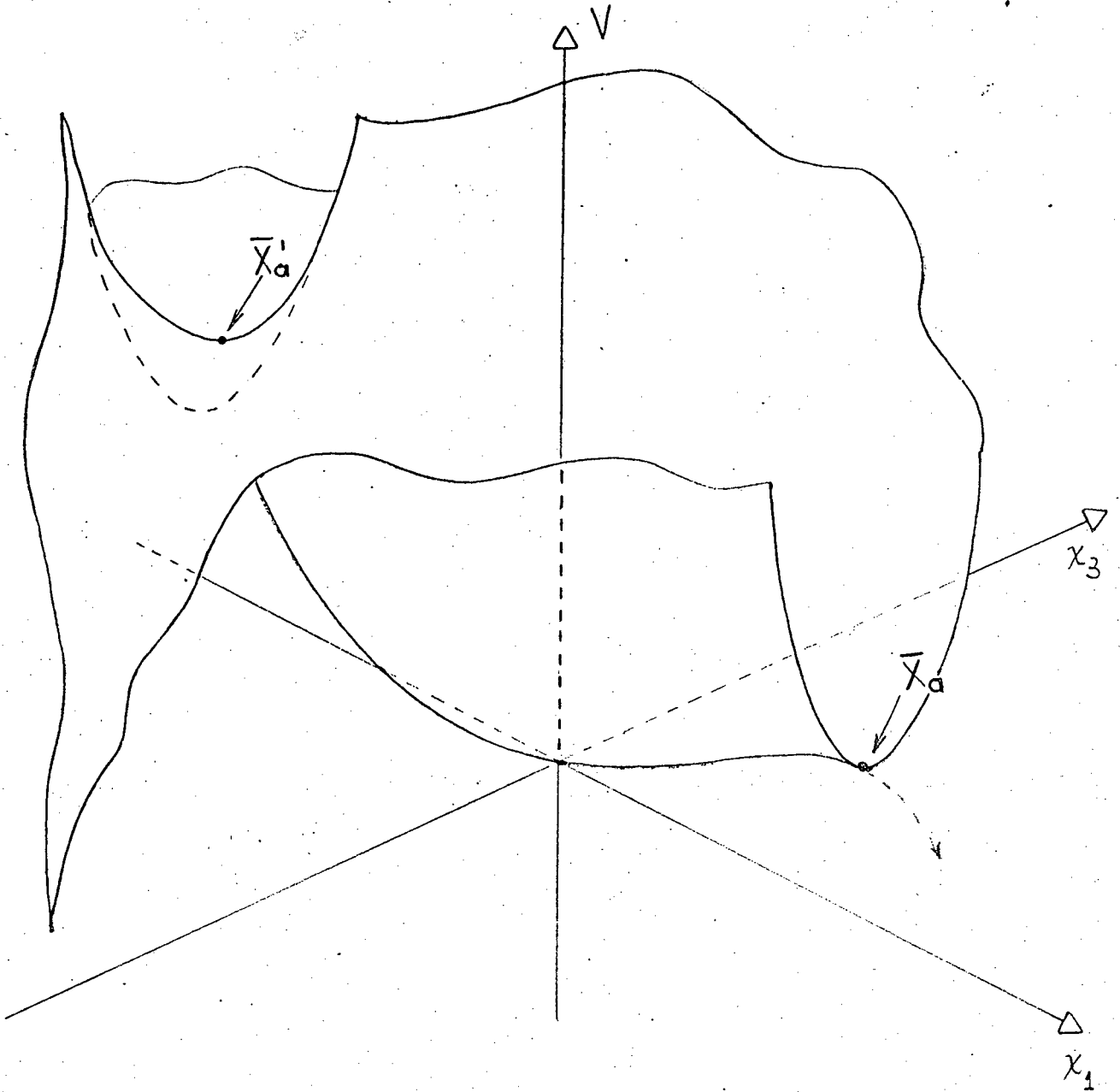


Fig. 3 A função (46) para  $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ .

senta um crescimento parabólico para as variáveis  $x_2$ ,  $x_4$  e  $x_5$  não havendo portanto limite para a região  $F$  -citada na proposição 1, capítulo 3- nestas direções. A figura 3 mostra o aspecto da equação (46) em função das variáveis  $x_1, x_3$  para  $x_2=x_4=x_5=0$ . Evidentemente os pontos críticos da função (46) designados por  $\bar{X}_a$  e  $\bar{X}'_a$ , pertencem à fronteira da região  $F$  e conseqüentemente estes são os únicos elementos da intersecção dos conjuntos  $\mathcal{P}$  e  $F$ . Assim, de acordo com o exposto na proposição 1:

$$V \leq \text{Min} \left\{ V(\bar{X}_a), V(\bar{X}'_a) \right\} \quad (62)$$

define um domínio de estabilidade.

Tomando o maior domínio:

$$V = \text{Min} \left\{ V(\bar{X}_a), V(\bar{X}'_a) \right\} \quad (63)$$

Devido às particularidades geométricas da função (46), é possível elaborar um procedimento simples para a obtenção de um domínio de estabilidade:

Passo 1. Calcule os pontos de equilíbrio do sistema (43), resolvendo as equações (44).

Passo 2. Defina  $\bar{X}_a$  como o vetor de equilíbrio, não nulo, que tem como componente na direção  $x_1$  o menor número positivo e  $\bar{X}'_a$  como aquele vetor de equilíbrio, não nulo que apresenta como componente na direção  $x_1$  o maior número negativo.

Passo 3. Calcule  $V(\bar{X}_a)$  e  $V(\bar{X}'_a)$  e determine  $V$  através da equação (63).

Desta forma o domínio de estabilidade será limitado por:

$$v(\bar{x}) = v \quad (64)$$

Definido o domínio de estabilidade, resta solucionar o problema de como saber se um determinado estado  $\bar{x}_p$  pertence ou não ao referido domínio.

Teorema 2. Se o domínio de estabilidade assintótica  $\mathcal{D}$  é um conjunto convexo, então:

$$0 \leq v(\lambda_1 \bar{x}) < v(\lambda_2 \bar{x}) < v \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1];$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leftrightarrow \bar{x} \in \mathcal{D}$$

Prova:

- a) Suficiência. Se  $0 \leq v(\lambda_1 \bar{x}) < v(\lambda_2 \bar{x}) < v \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$   
 $\lambda_1 < \lambda_2 \rightarrow \bar{x} \in \mathcal{D}$  pela definição de domínio de estabilidade assintótica (Proposição 1).
- b) Necessidade. Se  $\bar{x} \in \mathcal{D}$  e  $\mathcal{D}$  é convexo, então a semi-reta  $0\bar{x} \in \mathcal{D}$  e  $\forall \lambda \in [0, 1], \lambda \bar{x} \in \mathcal{D}$ . Da definição de domínio de estabilidade assintótica é possível concluir que:

$$0 \leq v(\lambda_1 \bar{x}) < v(\lambda_2 \bar{x}) < v \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$$

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

Portanto se o domínio de estabilidade é convexo, para saber se um determinado estado  $\bar{x}_p$  pertence a basta verificar se:

$$0 \leq v(\lambda_1 \bar{x}_p) < v(\lambda_2 \bar{x}_p) < v; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]; \lambda_1 < \lambda_2$$

Computacionalmente isto significa incrementar  $\lambda$  de 0 até 1 e verificar se  $V(\lambda \bar{X}_p)$  cresce continuamente de 0 até  $V(\bar{X}_p)$ .

Se  $\mathcal{D}$  é limitado por uma hiper-superfície não-concava, a tese do Teorema 2 é apenas suficiente e somente um subconjunto de  $\mathcal{D}$  é detetável pelo processo descrito. Veja exemplos na figura 4.

De acordo com o passo número 3 do procedimento apresentado para a determinação de um domínio de estabilidade, interessa apenas conhecer as coordenadas dos pontos de equilíbrio  $\bar{X}_a$  e  $\bar{X}'_a$  (Figura 3). Para tal é suficiente percorrer a curva:

$$x_3 = (\eta_2/R) \left[ \cos(x_1 + \delta_0) - \cos \delta_0 \right] \quad (65)$$

a partir da origem e no sentido crescente (decrescente) de  $x_1$  até encontrar o primeiro ponto de equilíbrio do sistema (43). Este ponto é  $\bar{X}_a$  ( $\bar{X}'_a$ ).

#### 4.4 CONCLUSÕES

Foi apresentada uma função de Lyapunov (46), com base na qual foram estabelecidas condições suficientes (48), (49), (55) e (58) para a estabilidade assintótica do equilíbrio trivial de sistema (43).

Observou-se que o valor numérico dos parâmetros dos sistemas que representam os reguladores de velocidade e tensão não afeta a estabilidade, bastando que estes sejam reais positivos. Por outro lado a desigualdade (55) condiciona a estabilidade a uma relação entre os parâmetros do sistema máquina/linha/barras infinita e as condições de carga.

Baseado na geometria da função (46) apresentou-se um procedimento para determinar um domínio de estabilidade

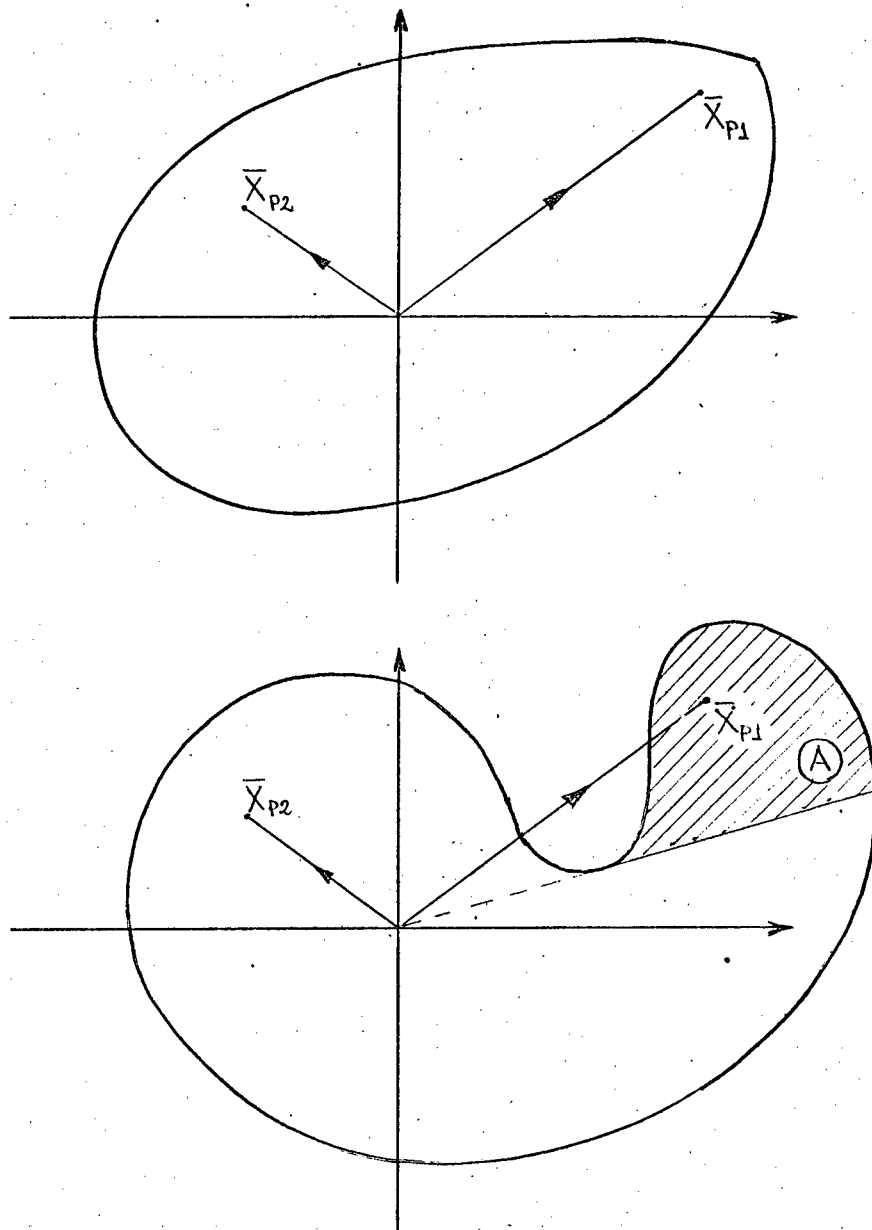


Fig. 4 Domínios de estabilidade

a) Domínio convexo.

b) Domínio não convexo.

A região  $\textcircled{A}$  não é detetável pelo Teorema 2.

e a partir de um teorema um processo para verificar se um determinado estado  $\bar{X}_p$  pertence a um domínio de estabilidade.

No próximo capítulo é apresentado um algoritmo para a aplicação dos resultados do presente capítulo, acompanhado por um exemplo numérico.

## CAPÍTULO V

### UM ALGORITMO PARA APLICAÇÃO E UM EXEMPLO NUMÉRICO

#### 5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta um algoritmo para aplicação dos resultados do capítulo 4. O algoritmo se divide em tres etapas que possibilitam determinar: A estabilidade do equilíbrio o domínio de estabilidade e a pertinência de um estado ao domínio.

Um exemplo numérico acompanhado por figuras ilustra o procedimento e seus resultados.

Tendo em vista que frequentemente as variáveis  $P_o$ ,  $Q_o$  e  $v_o$ , são mais acessíveis do que as variáveis  $\delta_o$  e  $\psi_{FO}$ , apresenta-se a relação entre estas:

$$\psi_{FO} A \text{sen} \delta_o + G \text{sen} 2\delta_o = P_o$$

$$x(1-Bx)(\psi_{FO})^2 / (T'_{do} X'_d)^2 - (A/X'_d) [x - x'_d(1-Bx)] \psi_{FO} \cos \delta_o - x'_d T'^2_{do} A^2 \cos^2 \delta_o - (x_q v_o^2 / X_q^2) \text{sen}^2 \delta_o = Q_o \quad (66)$$

#### 5.2 UM ALGORITMO PARA APLICAÇÃO DOS RESULTADOS DESTES TRABALHOS

##### 5.2.1 ANÁLISE DA ESTABILIDADE

Passo 1. Leia os dados referentes aos parâmetros do sistema:  $x, B, x'_d, x_d, x_q, T'_{do}, M, D, g_1, g_2, T_v$

Passo 2. Utilizando as equações (33) calcule  $A, R, \eta_2$ .

Passo 3. Verifique a positividade dos parâmetros



envolvidos nos passos 1 e 2. Se algum for negativo: Pare.

Passo 4. Leia os dados relativos às condições de carga  $P_0, Q_0, v_0$ .

Passo 5. Utilizando a equação (66) calcule o par  $(\delta_0, \psi_{F0})$  de interesse (equilíbrio).

Passo 6. Verifique se a desigualdade (55) é satisfeita.

Afirmativo: O equilíbrio é assintoticamente estável.

Negativo: Nada se afirma sobre a estabilidade do equilíbrio.

### 5.2.2 DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE

Passo 1. Verifique se o ponto de equilíbrio é estável.

Passo 2. Resolva o sistema de equações (44) para  $(x_{10}, x_{30})$ , percorrendo a linha descrita pela equação (65) a partir de zero, no sentido crescente de  $x_1$ , até encontrar o primeiro ponto de equilíbrio  $(\bar{X}_a)$ . Repita a operação no sentido decrescente de  $x_1$ , até encontrar o primeiro ponto de equilíbrio  $(\bar{X}'_a)$ .

Passo 3. Utilizando a função (46), calcule  $V(\bar{X}_a)$  e  $V(\bar{X}'_a)$ . Faça  $V = \text{Min}\{V(\bar{X}_a), V(\bar{X}'_a)\}$

### 5.2.3 VERIFICAÇÃO DA PERTINÊNCIA DE UM ESTADO $\bar{X}_p$ AO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE

Passo 1. Verifique se  $V(\bar{X}_p) < V$

Afirmativo: Prossiga.

Negativo:  $\bar{X}_p$  não pertence ao domínio de estabilidade.

Passo 2. Defina o vetor  $\bar{X}_T = \lambda \bar{X}_p$ ,  $\lambda \in [0, 1]$

Passo 3. Incremente  $\lambda$  de 0 até 1 e verifique se

$V(\lambda \bar{X}_p)$  cresce continuamente de 0 até  $V(\bar{X}_p)$ .

Afirmativo: O estado  $\bar{X}_p$  pertence ao domínio de estabilidade e toda trajetória que contenha este ponto evoluirá para o equilíbrio.

Negativo: Nada se afirma sobre a pertinência de  $\bar{X}_p$  ao domínio de estabilidade.

Observações. Face à geometria da função (46), existem fortes razões para acreditar, que os domínios de estabilidade definidos de acordo com o descrito no item 5.2.2., serão limitados por hiper-superfícies convexas. Portanto, de acordo com o Teorema 2, se a verificação proposta pelo passo 2 do item 5.2.3. resultar negativa, afirma-se que  $\bar{X}_p$  não pertence ao domínio de estabilidade.

### 5.3 EXEMPLO NUMÉRICO

Suponha que, inicialmente o sistema se encontre ligado a uma barra infinita através de um par de linhas de trans-

missão e que, devido a uma falta, uma das linhas haja sido removida. Suponha também, que os valores paramétricos e o estado do sistema logo após a remoção da linha, sejam:

$$\begin{aligned}
 1) \text{ Máquina síncrona: } & x_d = 1,00 \text{ p.u.} \\
 & x'_d = 0,270 \text{ p.u.} \\
 & x_q = 0,600 \text{ p.u.} \\
 & T'_{do} = 9,0 \text{ s.} \\
 & M = 0,2122 \text{ p.u.s}^2/\text{Rad.} \\
 & D = 0,00537 \text{ p.u.s./Rad.} \quad [19]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ Linha de transmissão: } & x = 0,7417 \text{ p.u.} \\
 & B = 0,1339 \text{ p.u.} \quad [19]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ Regulador de velocidade: } & g_1 = 0,212 \text{ p.u./Rad.} \\
 & g_2 = 0,2 \text{ s.}^{-1} \quad [16]
 \end{aligned}$$

$$4) \text{ Regulador de tensão: } T_v = 5 \text{ s.} \quad [16]$$

$$\begin{aligned}
 5) \text{ Condições de carga: } & P_o = 0,735 \text{ p.u.} \\
 & Q_o = 0,034 \text{ p.u.} \\
 & v_o = 1,058 \text{ p.u.} \quad [19]
 \end{aligned}$$

$$6) \text{ Estado: } \bar{X}_p^T = [0,6 \quad 0,2 \quad -2,0 \quad 0,05 \quad 0,2]$$

### 5.3.1 ANÁLISE DA ESTABILIDADE

Executando os passos do algoritmo descrito no item 5.2.1, se obtém:

Passo 1. Dados

Passo 2.  $A = 0,1193$   $R = 0,1853$   $\eta_2 = 0,7842$

Passo 3. Todas as quantidades são positivas.

Passo 4. Dados.

Passo 5.  $(\delta_0, \psi_{FO}) = (0,886 \quad 9,493)$ .

Passo 6.  $0,091 > 0,036$ .

Portanto o estado de equilíbrio considerado neste exemplo (Passo 5), é assintoticamente estável.

### 5.3.2 DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE

De acordo com o procedimento apresentado no item 5.2.2.

Passo 1. O equilíbrio é estável.

$$\begin{aligned} \text{Passo 2. } \bar{\bar{X}}_a^T &= \begin{bmatrix} 0,9408 & 0 & -3,7490 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\bar{X}}_a'^T &= \begin{bmatrix} -5,342 & 0 & -3,749 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Passo 3. } V(\bar{\bar{X}}_a) = 65,17 \cdot 10^{-3}$$

$$V(\bar{\bar{X}}_a') = 4,684$$

$$\text{Consequentemente: } V = 65,17 \cdot 10^{-3}$$

### 5.3.3 VERIFICAÇÃO DA PERTINÊNCIA DO ESTADO $\bar{\bar{X}}_p$ AO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE

$$\text{Passo 1. } \bar{\bar{X}}_p^T = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & -2,0 & 0,05 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$V(\bar{\bar{X}}_p) = 62,13 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Passo 2. } \bar{\bar{X}}_T^T = \lambda \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & -2,0 & 0,05 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Passo 3. Variando  $\lambda$  de 0 até 1,  $V(\lambda \bar{\bar{X}})$  cresce continuamente de 0 até  $62,13 \cdot 10^{-3}$ .

Logo, o estado  $\bar{X}_p$  pertence ao domínio de estabilidade e o sistema evoluirá assintoticamente até atingir as condições estáticas especificadas.

As figuras 5 a 14 mostram alguns cortes do domínio de estabilidade e projeções da trajetória do sistema.

#### 5.4 CONCLUSÕES

Foi apresentado um algoritmo que permite aplicar automaticamente os resultados do presente trabalho.

Um exemplo numérico ilustra o procedimento.

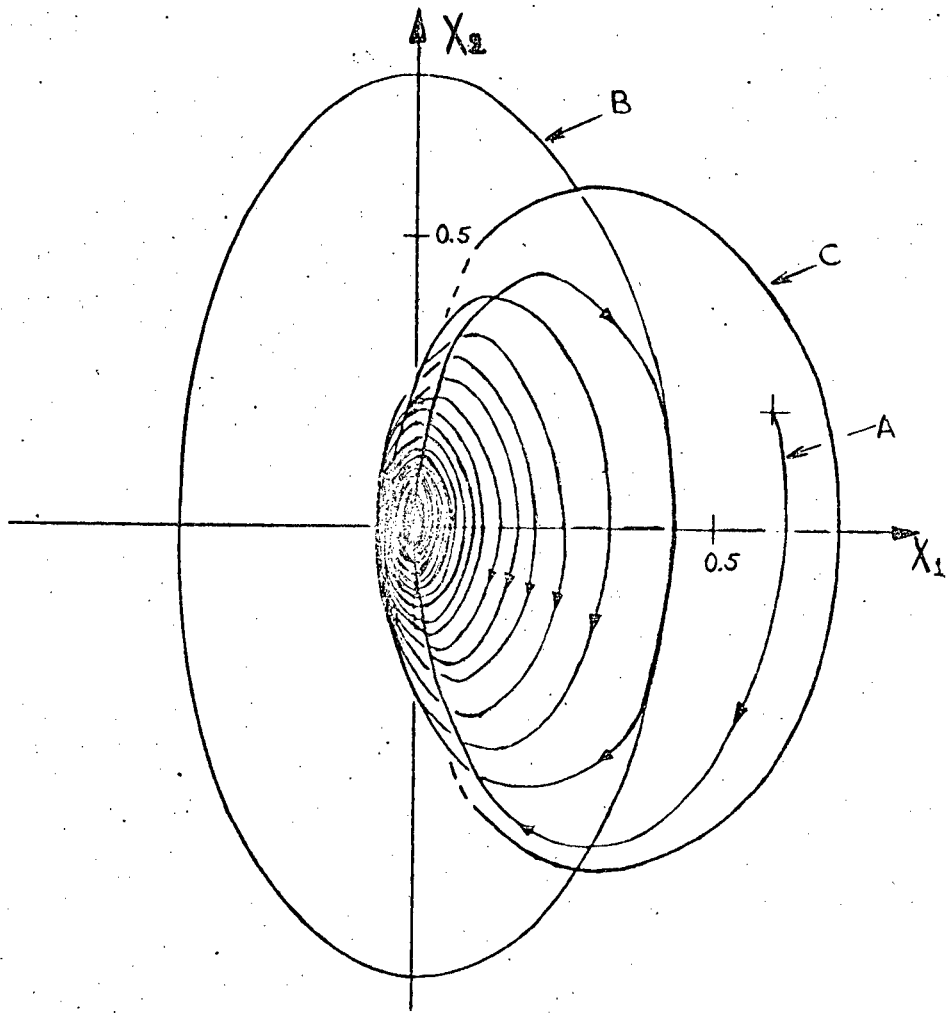


Fig. 5 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_1, x_2$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

B)  $x_3 = x_4 = x_5 = 0$

C)  $x_3 = -2$  ;  $x_4 = x_5 = 0$

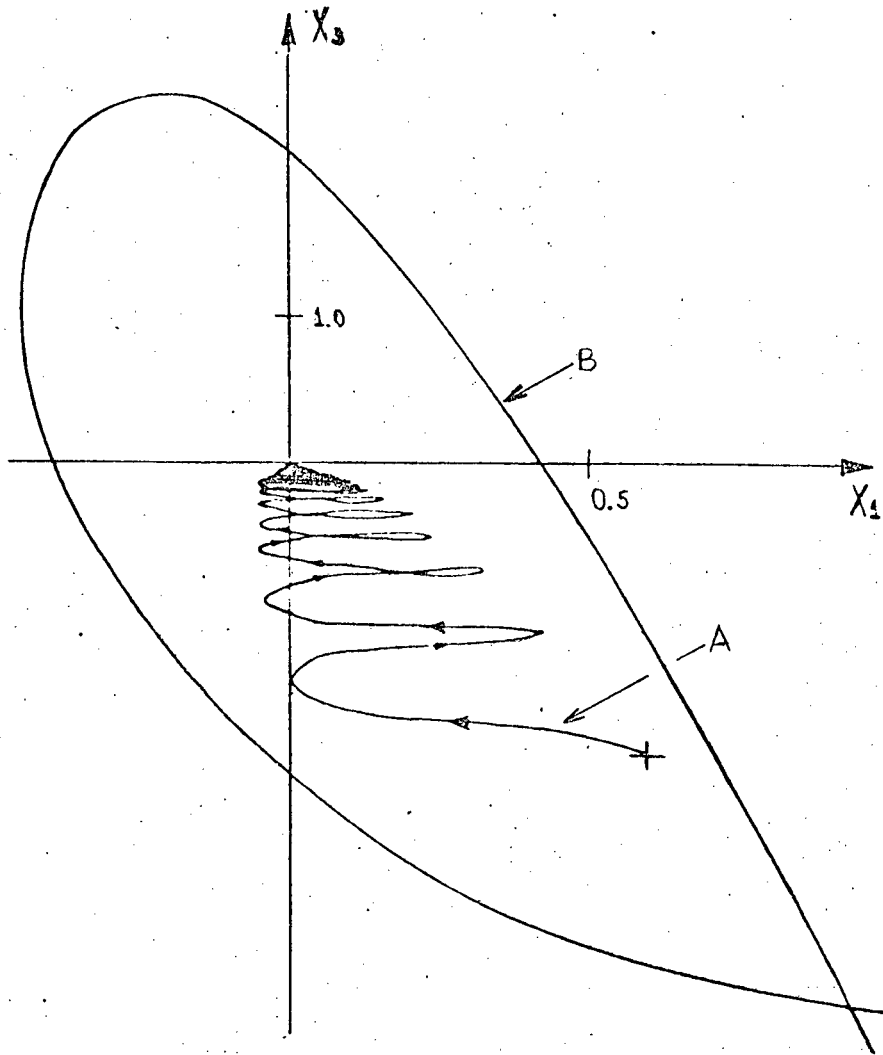


Fig. 6 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_1, x_3$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

$$B) x_2 = x_4 = x_5 = 0$$

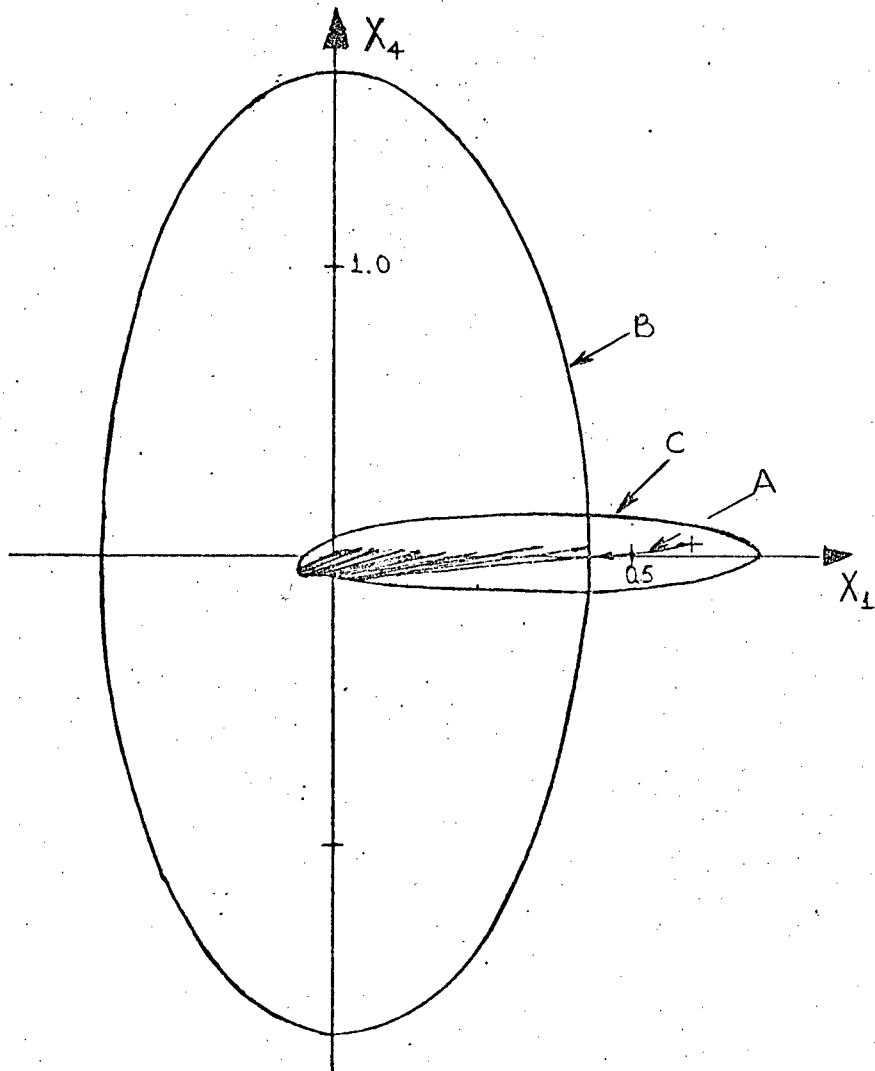


Fig. 7 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_1, x_4$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

B)  $x_2 = x_3 = x_5 = 0$

C)  $x_3 = -2 ; x_2 = x_5 = 0$



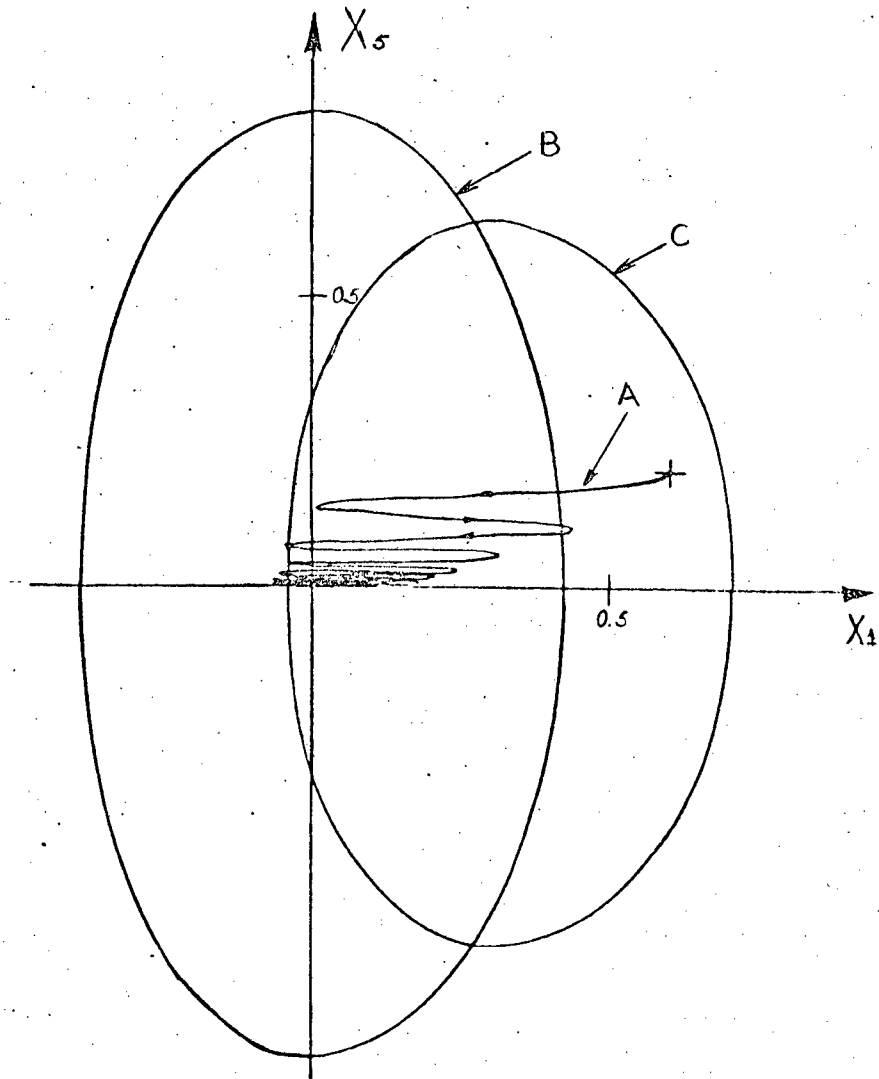


Fig. 8 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_1, x_5$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

B)  $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

C)  $x_3 = -2 ; x_2 = x_4 = 0$

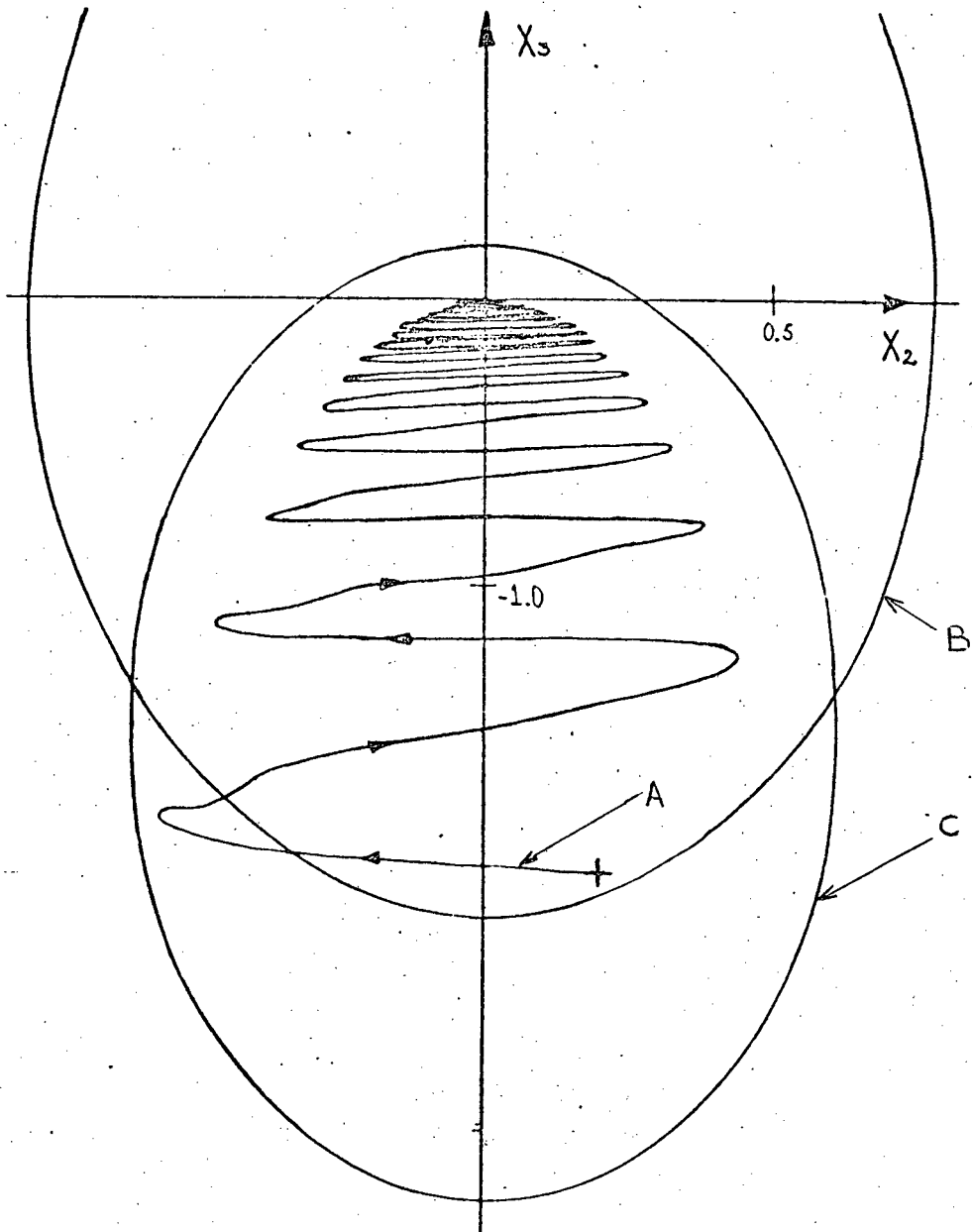


Fig. 9 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_2, x_3$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

B)  $x_1 = x_4 = x_5 = 0$

C)  $x_1 = 0,4$  ;  $x_4 = x_5 = 0$

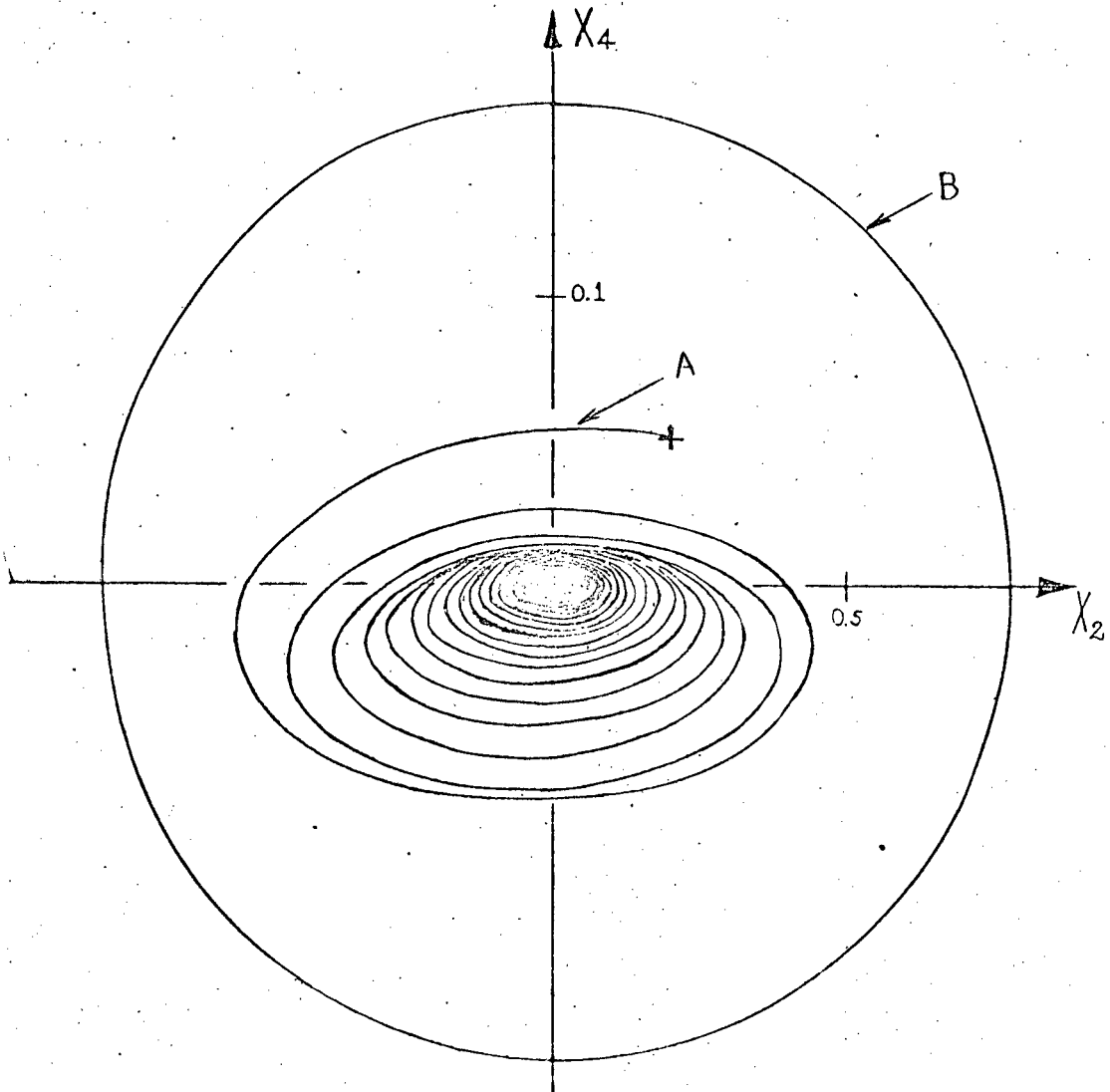


Fig.10 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_2, x_4$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

B)  $x_1 = x_3 = x_5 = 0$

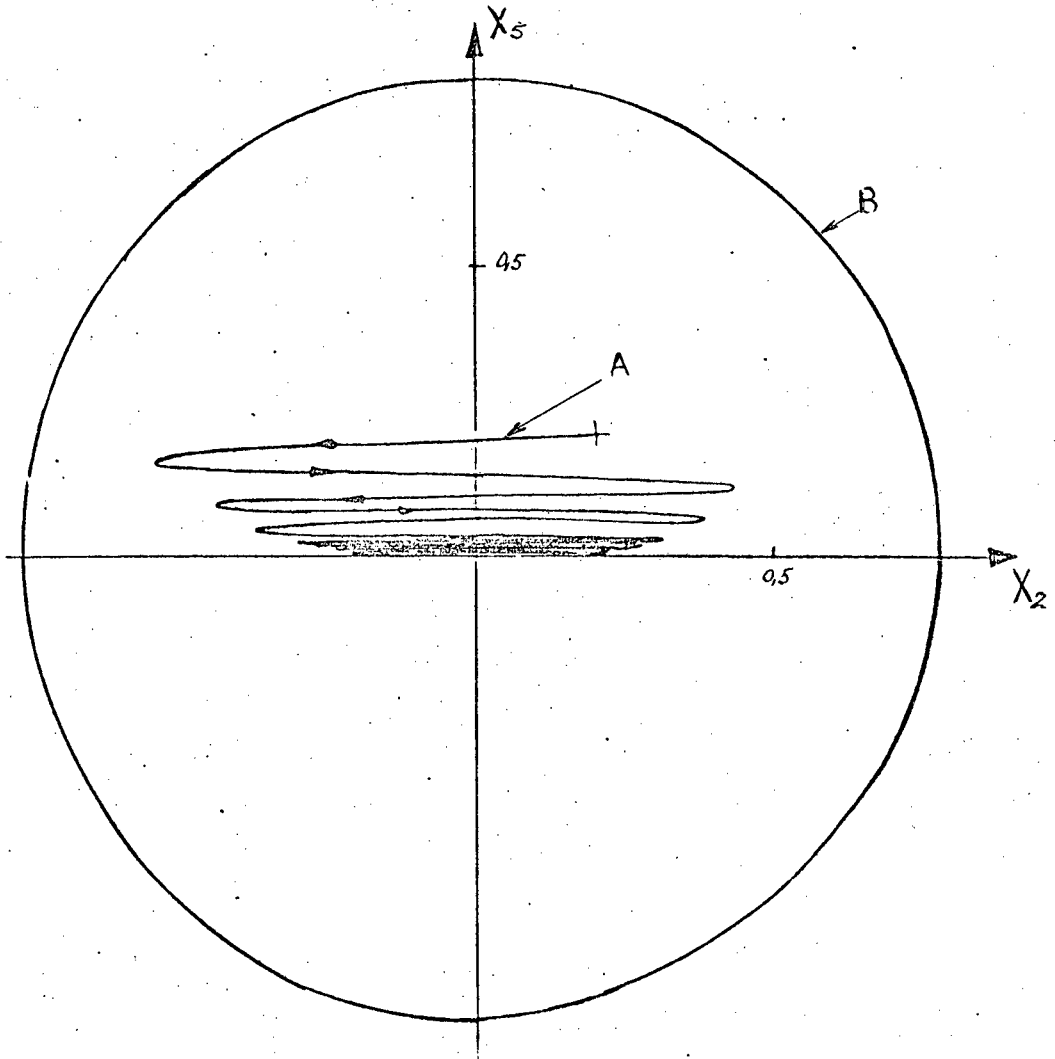


Fig.11 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_2, x_5$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

$$B) x_1 = x_3 = x_4 = 0$$

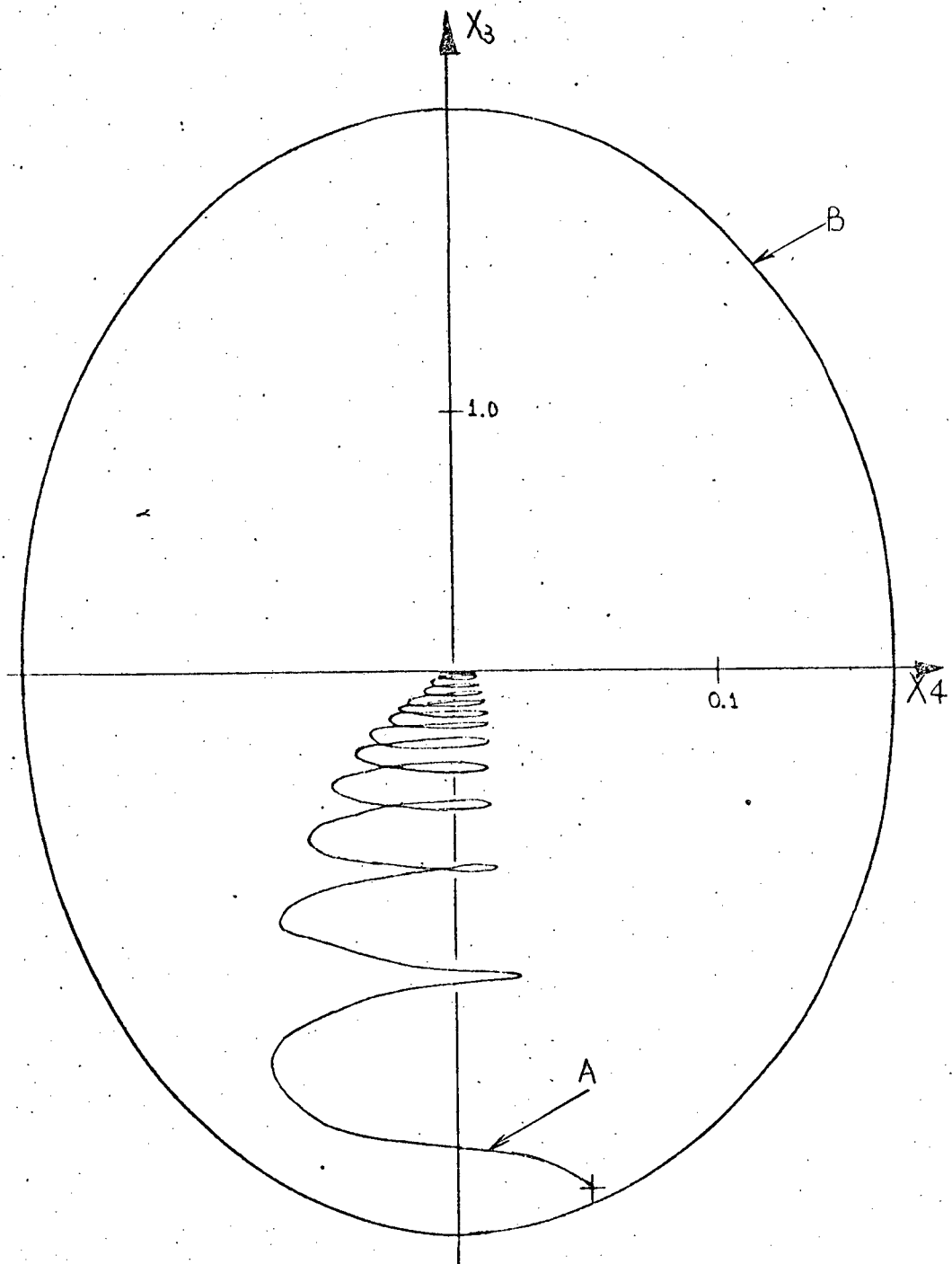


Fig.12 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_3, x_4$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

B)  $x_1 = x_2 = x_5 = 0$

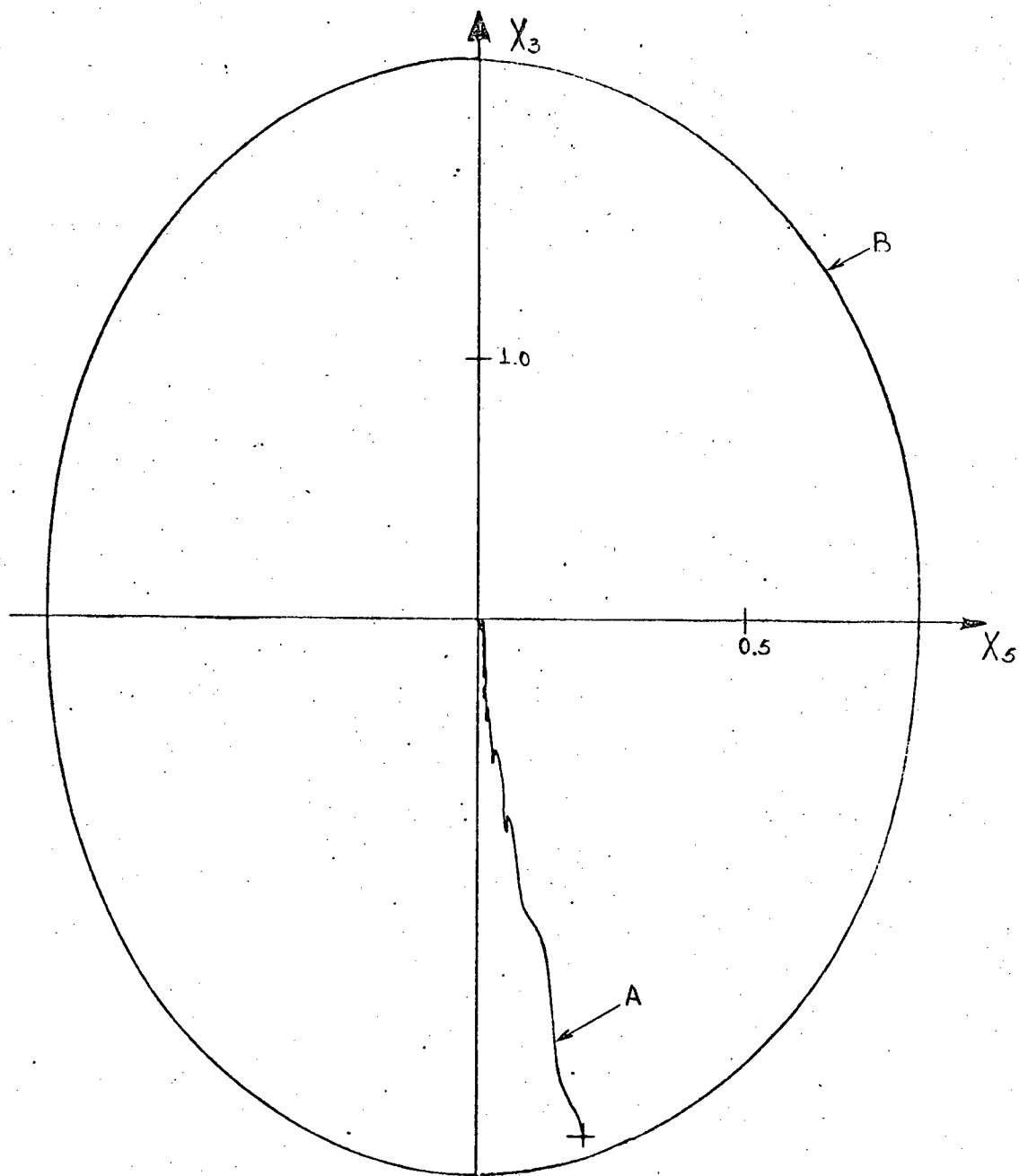


Fig.13. A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_3, x_5$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

B)  $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

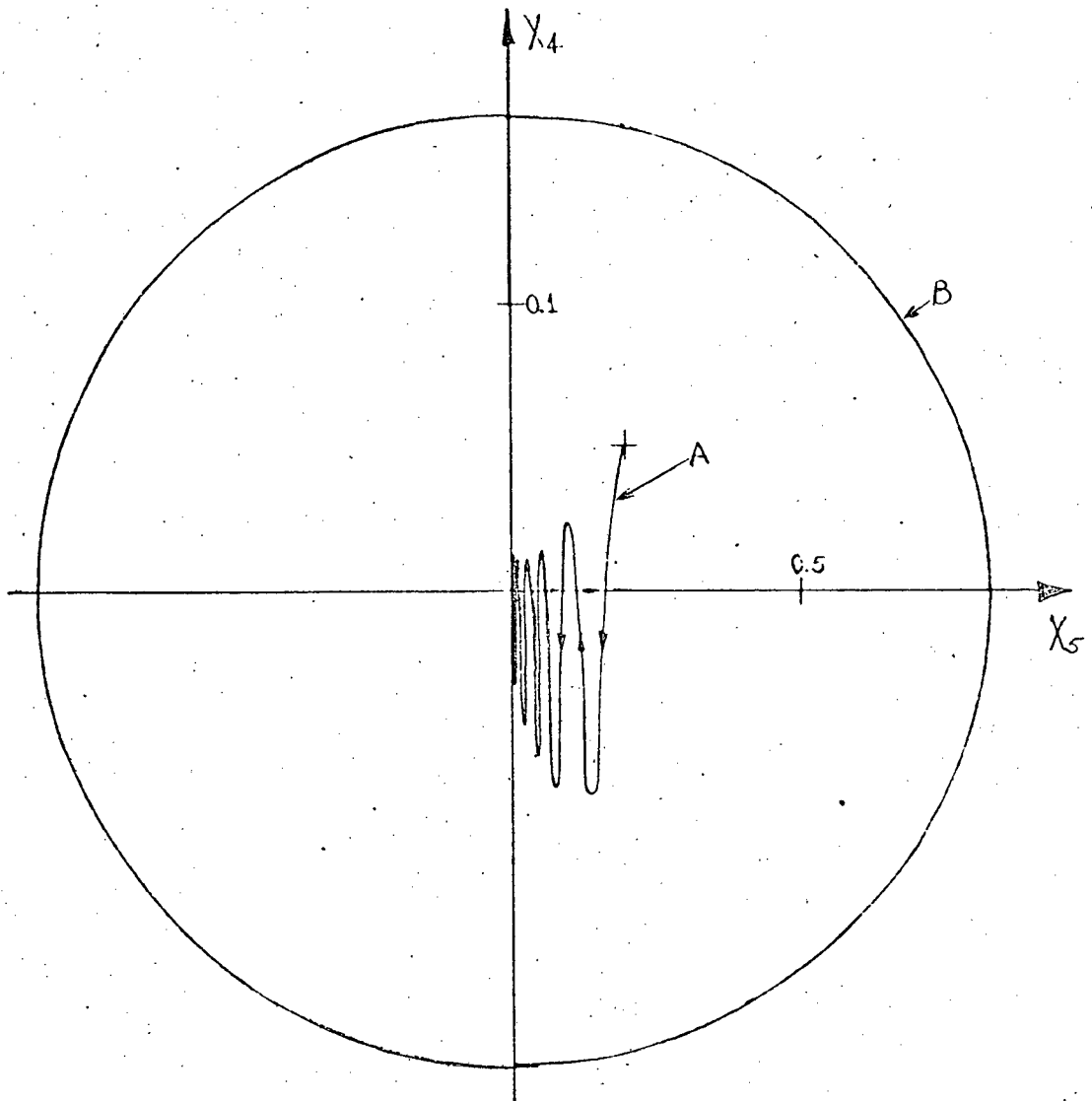


Fig.14 A) Projeção da trajetória sobre o plano  $x_4, x_5$ .

Fronteira do domínio de estabilidade para:

$$B) x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

## CAPÍTULO VI

COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS6.1 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES FINAIS

No estudo da estabilidade transitória de um gerador síncrono ligado a um grande sistema de energia elétrica (barra infinita), através do método de Lyapunov, existem muitos trabalhos. Estes trabalhos se diferenciam por apresentarem distintas funções de Lyapunov para modelos de sistema cada vez mais completos.

A partir dos estudos sobre o modelo clássico [5] [11], [18], [14], foram gradualmente sendo incluídos os efeitos dos reguladores de velocidade, do decaimento de fluxo, da potência transitória devido à relutância e dos reguladores de excitação.

Assim, em [18], [14], [11] é considerado um regulador de velocidade. Em [3] se encontra um estudo que leva em conta o decaimento de fluxo. Em [16], além do decaimento de fluxo, são incluídos os reguladores de velocidade e excitação separadamente. Em [15], aparece uma função de Lyapunov para um sistema que considera o decaimento de fluxo e o regulador de excitação e em [12] o modelo inclui o termo de relutância na expressão da potência transitória e um regulador de velocidade.

Para a determinação do domínio de estabilidade todos os trabalhos citados utilizam as idéias contidas em [3].

No presente trabalho, foi proposta uma função de Lyapunov (46) para um modelo que considera o decaimento de fluxo, a potência transitória devido à relutância, um regulador de velocidade e um regulador de excitação.



Mostrou-se que a função proposta cumpre os requisitos de sinal exigidos pelo teorema de Lyapunov desde que a desigualdade (55) seja satisfeita. Desta maneira, a desigualdade (55) constitui uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do equilíbrio.

Foi observado que a estabilidade dos reguladores é uma condição necessária para a suficiência da desigualdade (55) como condição de estabilidade. No entanto, a magnitude dos parâmetros dos reguladores, não determina a estabilidade ou instabilidade do sistema, embora afete a rapidez de evolução da trajetória.

Um algoritmo para a obtenção de um domínio de estabilidade e uma forma de determinar se uma dada condição inicial pertence ao referido domínio, são apresentados com base nas particularidades geométricas da função de Lyapunov proposta.

Finalmente, um exemplo numérico acompanhado de figuras (Figuras 4 a 13), que mostram cortes do domínio de estabilidade e projeções de uma trajetória estável, ilustra a simplicidade da aplicação dos resultados.

## 6.2 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Foram evidenciadas as potencialidades do método direto de Lyapunov para o estudo da estabilidade transitória de um sistema máquina/barra infinita/reguladores, por este motivo apresenta-se a seguir algumas sugestões para a continuação dos estudos:

- 1) Procurar uma função de Lyapunov e obter condições suficientes para a estabilidade, utilizando modelos mais completos para representar os reguladores de velocidade

de e excitação.

2) Estender os resultados deste trabalho para o caso de uma rede com  $n$ -máquinas.

3) Verificar a possibilidade de resolver o problema da estabilidade transitória dos sistemas de potência através das funções de Lyapunov vetoriais e dos estudos da estabilidade de sistemas de grande porte [6] [17].

BIBLIOGRAFÍA

- [1] DORAISWAMI, R. & FONSECA, L.G.S. - A fast and reliable determination of dominium of transient stability for multimachine power system. IEEE Pow.Wint.Meeting , Jan., 1978.
- [2] EL-ABIAD, A. H. & NAGAPPAN, K. - Transient stability regions of multimachine power systems. IEEE Trans.PAS, 89(5/6) : 795 - 801 , May/Jun., 1970.
- [3] FALLSIDE, F. & PATEL, M.R. - On the application of the Lyapunov method to synchronous machine stability. Int.J.Control 4(6):501-513, 1966.
- [4] FONSECA, L.G.S. - "Determinação de domínios de estabilidade para uso em planejamento e operação de sistemas de potência" TESE (D.Sc) COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, Abr., 1976.
- [5] GLESS, G.E. - Direct method of Lyapunov applied to transient power system stability. IEEE Trans. PAS , 85(2):159-168 Feb., 1966.
- [6] GRUJIĆ, L.T. & SILJAK, D.D. - Asymptotic stability and instability of large-scale systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 18(6) :636-645 , Dec., 1973.
- [7] KALMAN, R.E. & BERTRAM, J.E. - "Control system analysis and design via the second method of Lyapunov". In: AGGARWAL, J.K. & VIDYASAGAR, M. ed.- Nonlinear Systems Stability Analysis Stroudsburg, Pennsylvania, Dowden Hutchinson and Ross, 1977 pp. 53-80.

- [8] KIMBARK, E.W. - Power system stability. vol. I N.Y. Academic Press, 1948.
- [9] LA SALLE, J. & LEFSCHETZ, S.- Stability by Lyapunov's direct method. N.Y. Academic Press, 1961. pp.37-42,56-71.
- [10] LUDERS, G.A. - Transient stability of multimachine power systems via the direct method of Lyapunov. IEEE Trans. PAS 90(1):23-36, Feb.,1971.
- [11] MACFARLANE, A.G.J. et alii - Generalized non-linear network analysis applied to the dynamic behaviour of synchronous machine systems. Int.J.Control, 19(4):817-829, 1974.
- [12] MANSOUR, M. - "Stability analysis and control of power systems" In: HANDSCHIN, E., ed. - Real time control of electric power systems. Amsterdam, Elsevier Pub. Co. 1972.
- [13] NAGARAJA, T. & CHALAM, V.V. - Generation of Lyapunov functions - a new approach. Int.J.Control, 19(4):781-787,1974.
- [14] PAI, M.A. et alii.- Power system transient stability regions using Popov's method. IEEE Trans.PAS, 89(5/6): 788-794 May/June.,1970.
- [15] PAI, M.A. & RAI, V. - Lyapunov-Popov stability analysis of synchronous machine with flux decay and voltage regulator. Int.J.Control, 19(4):817-829, 1974.
- [16] SIDDIQEE, W.M. - Transient stability of an a.c. generator by Lyapunov's direct method. Int.J.Control,8(2): 131 - 144 1968.

- [17] WEISSENBERGER, S. - Stability regions of large-scale systems Automatica, Great Britain, vol.9:653-663, 1973.
- [18] WILLEMS, J.L. & WILLEMS, J.C. - The applications of Lyapunov methods to the computation of transient stability regions of multimachine systems. IEEE Trans. PAS, 89(5/6): 795-801 May/ Jun., 1970.
- [19] YU, Y.N. et alii. - Application of an optimal control theory to a power system. I.E.E.E. Trans. PAS, 89(1):55-61, Jan., 1970
- [20] RAVEN, F.H. - Automatic control engineering. Tokio, McGraw - Hill Kogakusha. 2 Ed., 1968. pp.402-404.
- [21] GIBSON, J.E. - Nonlinear automatic control. N.Y., McGraw Hill, 1963. pp.291-315.
- [22] DE RUSSO, R.C. - State variables for engineers. N.Y., J. Wiley & Sons, 1965. pp.265-267