

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ESTUDO DE IDENTIFICADORES ADAPTATIVOS PARA  
PROCESSOS COM ESTADO ACESSÍVEL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

JOSÉ MANOEL FERNANDES

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO - 1980

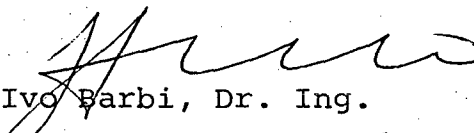
ESTUDO DE IDENTIFICADORES ADAPTATIVOS  
PARA PROCESSOS COM ESTADO ACESSÍVEL

JOSÉ MANOEL FERNANDES

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA. ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.

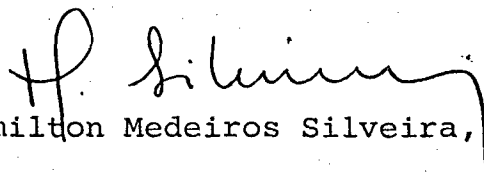


Prof. Hamilton Medeiros Silveira, D.Et.  
ORIENTADOR

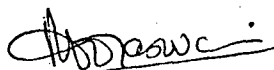


Prof. Ivo Barbi, Dr. Ing.  
Coordenador do Curso de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

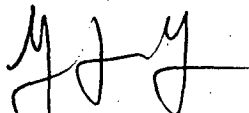
BANCA EXAMINADORA



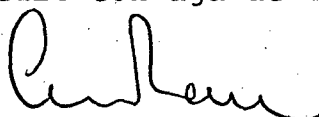
Prof. Hamilton Medeiros Silveira, D.Et.



Prof. Rajamani Doraiswami, Ph.D.



Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, D.Sc.



Prof. Ioan Dore Landau, D.Et.

Aos meus pais

Júlia e José

À minha irmã - Regina

Ao meu sobrinho - Samuel

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao CNPq, CAPES e à UFSC pelo apoio financeiro.

Ao Professor Hamilton Medeiros Silveira pela amizade e inestimável ajuda prestada na orientação deste trabalho.

A todos que colaboraram para tornar possível a realização deste trabalho e, em particular, as seguintes pessoas:

Rajamani Doraiswami

Domingos Boechat Alves

Marcia Helena Boechat Alves

Luiz Gonzaga de Souza Fonseca

Renato Carlson

Augusto Humberto Bruciapaglia

Joni da Silva Fraga

Frédèrick Bordry

Jean Loup Farges

João Pedro Quirino

Airody P. Santos

Oswaldo Kaschny Filho

A Maria da Graça Ferreira e aos funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica.

A Iara Torquato Dutra e Nazide Nilma Martins pela datilografia e José Carlos Luiz pelos desenhos.

## R E S U M O

Foram estudados seis algoritmos de identificação para processos lineares com parâmetros constantes e controláveis: os identificadores paralelo e série-paralelo de Landau, os identificadores paralelo e série-paralelo variantes e finalmente os identificadores paralelo e série-paralelo a ganho decrescente.

Realizaram-se simulações puramente digitais em presença de ruído gaussiano atuando no processo, bem como simulações híbridas.

Constatou-se que dentre os seis identificadores estudados, o identificador paralelo a ganho decrescente apresentou o melhor desempenho.

Os resultados apresentados neste trabalho poderão ser utilizados em identificação de processos reais para obtenção de esquemas de controle, quando o processo tem parâmetros desconhecidos ou mau conhecidos.

## A B S T R A C T

Six algorithms of identification of a linear constant parameter and controllable process were studied: the parallel and series parallel identification algorithms of Landau, the variants of parallel and series parallel algorithms, and finally parallel and series parallel identification algorithms using decreasing gain.

Pure digital simulations and hybrid simulations were done in the presence of Gaussian noise affecting the process.

Among the six schemes, the parallel algorithm using decreasing gain was found to give better results.

The results of this work can be utilized in identification of a real process for realizing a control scheme when the process parameters are unknown or partially unknown.

## S U M Á R I O

|   |    |
|---|----|
| CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....   | 1  |
| 1.1 - Porque identificadores adaptativos .....  | 1  |
| 1.2 - Problemas estudados neste trabalho .....  | 2  |
| 1.3 - Apresentação do conteúdo do trabalho .....  | 3  |
| CAPÍTULO 2 - IDENTIFICADORES ADAPTATIVOS DE SISTEMAS LINEARES, INVARIANTES NO TEMPO, MULTIVARIÁVEIS, DISCRETOS E COM ESTADOS ACESSÍVEIS ..... | 5  |
| 2.1 - Objetivo do capítulo .....  | 5  |
| 2.2 - Introdução .....  | 5  |
| 2.3 - Identificadores adaptativos de Landau .....   | 8  |
| 2.4 - Variante dos identificadores adaptativos de Landau ....   | 26 |
| 2.5 - Identificadores adaptativos a ganho decrescente .....   | 36 |
| 2.6 - Conclusão .....   | 49 |
| CAPÍTULO 3 - SIMULAÇÃO DIGITAL .....  | 50 |
| 3.1 - Objetivo do capítulo .....  | 50 |
| 3.2 - Introdução .....  | 50 |
| 3.3 - Descrição do PDP 11/40 .....  | 51 |
| 3.4 - Sequências binárias pseudo-aleatórias .....   | 52 |
| 3.5 - Resumos e fluxogramas dos algoritmos de identificação .   | 55 |
| 3.6 - Resultados .....  | 68 |
| 3.7 - Conclusão .....   | 87 |



|  |         |
|--|---------|
| CAPÍTULO 4 - SIMULAÇÃO HÍBRIDA .....   | 89      |
| 4.1 - Objetivo do capítulo .....   | 89      |
| 4.2 - Introdução .....   | 89      |
| 4.3 - Conversores A/D e D/A .....  | 90      |
| 4.4 - Identificação de processos simulados no computador ana-<br>lógico .....  | 94      |
| 4.5 - Conclusão .....  | 106     |
| <br>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS .....  | <br>109 |
| <br>APÊNDICE A - LISTAGEM DAS SUBROTINAS UTILIZADAS NOS PROGRA-<br>MAS DE IDENTIFICAÇÃO .....                                    | <br>111 |
| <br>- APÊNDICE B - SISTEMAS DINÂMICOS POSITIVOS LINEAR, DISCRETOS<br>E INVARIANTES NO TEMPO .....                                | <br>117 |
| <br>APÊNDICE C - HIPERESTABILIDADE .....   | <br>122 |
| <br>APÊNDICE D - DEFINIÇÕES E TEOREMA UTILIZADO NO DESENVOLVI-<br>MENTO DO TRABALHO .....  | <br>125 |
| <br>APÊNDICE E - LISTAGEM DO PROGRAMA DO IDENTIFICADOR PARALELO<br>A GANHO DECRESCENTE UTILIZADO NA SIMULAÇÃO HÍ-<br>BRIDA ..... | <br>128 |
| <br>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....   | <br>139 |

# C A P Í T U L O 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Porque identificadores adaptativos

Na maioria dos problemas práticos os parâmetros do processo são conhecidos com certa aproximação. O objetivo da identificação consiste em determinar com boa aproximação um modelo que possua as mesmas propriedades que o processo considerado, quando submetido à mesma entrada e utilizando apenas dados mensuráveis.

Processos não lineares quase sempre podem ser aproximados por modelos lineares em torno de um ponto de operação. Suponhamos agora que o ponto de operação varia com o tempo. Como para cada ponto de operação pode-se associar um modelo linear para o processo, resulta em consequência, que os parâmetros do modelo linear associado variam com o tempo. Para seguir a variação de parâmetros do modelo linear em consequência da mudança do ponto de operação, surge a necessidade de se desenvolver identificadores adaptativos que compensem as variações paramétricas. Em processos onde a variação de parâmetros é lenta em relação a dinâmica de identificação, pode-se supor que durante o período de adaptação o sistema tem aproximadamente parâmetros constantes.

Este trabalho tem a finalidade de estudar diversos tipos de identificadores adaptativos que permitem permanentemente identificar os parâmetros de um processo linear. Os identificadores

res aqui estudados referem-se a modelos lineares discretizados de processos contínuos onde se supõe que o estado e a entrada são mensuráveis. Os parâmetros contínuos de um processo discretizado poderão ser recuperados a partir dos parâmetros discretos obtidos pelos identificadores estudados e do tempo de amostragem.

## 1.2. Problemas estudados neste trabalho

Neste trabalho estuda-se seis algoritmos de identificação para processos lineares, invariantes no tempo, multivariáveis, e controláveis: identificadores paralelo e série-paralelo de Landau, identificadores paralelo e série-paralelo variantes e identificadores a ganho decrescente. O estudo destes identificadores foi feito considerando o estado e a entrada conhecidos.

O princípio dos identificadores estudados neste trabalho é baseado na teoria de Sistemas Adaptativos com Modelo de Referência [1,14]. No caso dos identificadores o processo é considerado como o modelo de referência. Define-se um modelo ajustável cujos parâmetros são adaptados continuamente por um algoritmo adequado, de tal maneira que o erro entre o estado do processo e o estado do modelo ajustável convirja assintoticamente para zero. Quando o erro de estado é nulo considera-se que a adaptação está terminada e a identificação realizada.

Tanto os identificadores de Landau como os variantes baseiam-se na construção de um sistema padrão de Popov, que consiste de um bloco linear descrevendo a equação dinâmica do erro de estado, realimentado por um sistema não linear com parâmetros variáveis com o tempo que contém o algoritmo de adaptação pa

ramétrica. A estabilidade assintótica do erro de estado fica garantida pela aplicação do Teorema de Popov.

Os identificadores a ganho decrescente são baseados também na estabilidade de um sistema linear realimentado por um sistema não linear. A parte linear descreve a equação de erro de estado e a parte não linear contém o algoritmo de adaptação. A estabilidade assintótica do erro de estado fica garantida utilizando-se a teoria de convergência de seqüências numéricas.

O primeiro identificador determinístico contínuo adaptativo baseado em teoria de estabilidade para processos com entrada e saída mensuráveis foi proposto por Parks [20]. A seguir diversos autores como Kudva e Narendra [21], Landau e etc, retomaram e desenvolveram estes estudos. Em todos os identificadores determinísticos de nosso conhecimento, não foram utilizados algoritmos a ganho decrescente que apresentam um bom desempenho como será mostrado no decorrer deste trabalho.

### 1.3. Apresentação do conteúdo do trabalho

Este trabalho está organizado em 5 capítulos. O presente capítulo possui um caráter introdutório.

O Capítulo 2 apresenta os algoritmos de identificação para sistemas lineares, invariantes no tempo, multivariáveis, discretos e com estados acessíveis, sendo estes: os identificadores paralelo e série-paralelo de Landau, os identificadores paralelo e série-paralelo variante e os identificadores paralelo e série-paralelo a ganho decrescente.

No Capítulo 3 é apresentado os resultados relativos a simulação digital dos algoritmos apresentados no capítulo anterior. Além disso, é discutido o tipo de entrada utilizada nas simulações, é feita uma pequena descrição do PDP 11/40, é fornecido os resumos e fluxogramas dos algoritmos estudados, e por fim são apresentados os resultados de simulações digitais com ruído gaussiano interferindo no processo.

No Capítulo 4 é apresentado os resultados relativos a identificação de processos lineares, invariantes no tempo, multivariáveis simulados em computador analógico. Discute-se ainda a utilização dos conversores A/D e D/A do PDP 11/40, que permitem juntamente com os programas de identificação obter, em tempo real, os parâmetros do processo.

Enfim, no Capítulo 5, procurou-se apresentar as conclusões relativas ao trabalho em questão e perspectivas para futuros trabalhos.

## C A P Í T U L O 2

### IDENTIFICADORES ADAPTATIVOS DE SISTEMAS LINEARES, INVARIANTES NO TEMPO, MULTIVARIÁVEIS, DISCRETOS E COM ESTADOS ACESSÍVEIS

#### 2.1. Objetivo do capítulo

O objetivo deste capítulo é apresentar os algoritmos de identificação para sistemas lineares, invariantes no tempo, multivariáveis, discretos e com estados acessíveis.

São mostrados primeiramente os identificadores adaptativos paralelo e série paralelo de Landau [1,14], e em seguida é mostrado uma variante destes identificadores. Prossegue-se apresentando os identificadores adaptativos paralelo e série-paralelo a ganho decrescente e finalmente discute-se os algoritmos estudados.

#### 2.2. Introdução

Este trabalho estuda somente os identificadores de processos discretos, tendo em vista que os identificadores de processos contínuos requerem um grande número de multiplicadores, integradores, somadores, etc... , tornando difícil sua implementação prática. Exemplos de identificadores contínuos podem ser encontrados em [1,4,5,6,7,10,14]. A vantagem dos identificadores discretos é que estes são facilmente implementáveis em computadores digitais, bastando para isto escrever um programa, que em muitos

casos pode-se utilizar uma linguagem de alto nível, como por exemplo FORTRAN.

Os identificadores de processos discretos podem ser utilizados também na identificação de processos contínuos. Sendo a técnica, utilizada para resolver este problema, mostrado na Figura 2.2-1. Pode-se notar pela figura que, na entrada do processo contínuo utiliza-se um amostrador-sustentador de ordem zero, e na saída um amostrador sincronizado com o da entrada.

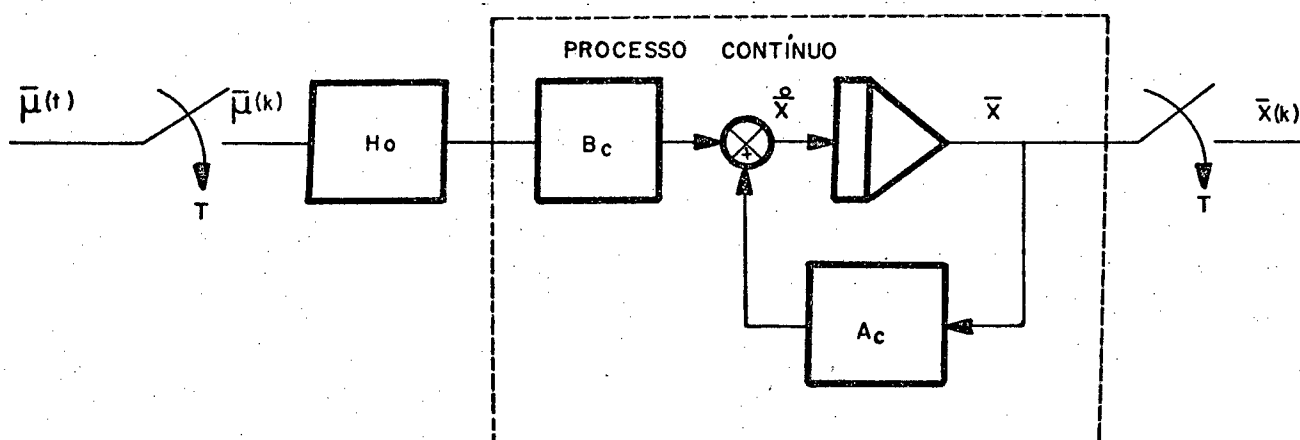


Figura 2.2-1: - Esquema da técnica para identificação de processos contínuos.

É fácil de mostrar [13] que nos instantes de amostragem os sinais  $\bar{x}(k)$  e  $\bar{u}(k)$ , obtidos nas saídas dos amostradores, estão relacionados por um sistema linear discreto do tipo:

$$\bar{x}(k+1) = A \bar{x}(k) + B \bar{u}(k) \quad (2.2-1)$$

onde

$$A = e^{A_c T} \quad (2.2-2)$$

e

$$B = A_c^{-1} [e^{A_c T} - I] B_c \quad (2.2-3)$$

Os identificadores discretos aqui tratados são capazes de identificar um processo linear discreto como o da equação (2.2-1). Uma vez obtidos os parâmetros do processo discreto pode-se determinar os parâmetros do processo contínuo, isto se o período de amostragem for conhecido, através das equações (2.2-2) e (2.2-3). A subrotina REPCON, apresentada no Apêndice A, permite encontrar os parâmetros contínuos em função dos parâmetros discretos e do período de amostragem  $T$ .

A técnica de síntese dos identificadores discretos é mostrada sucintamente na Figura 2.2-2.

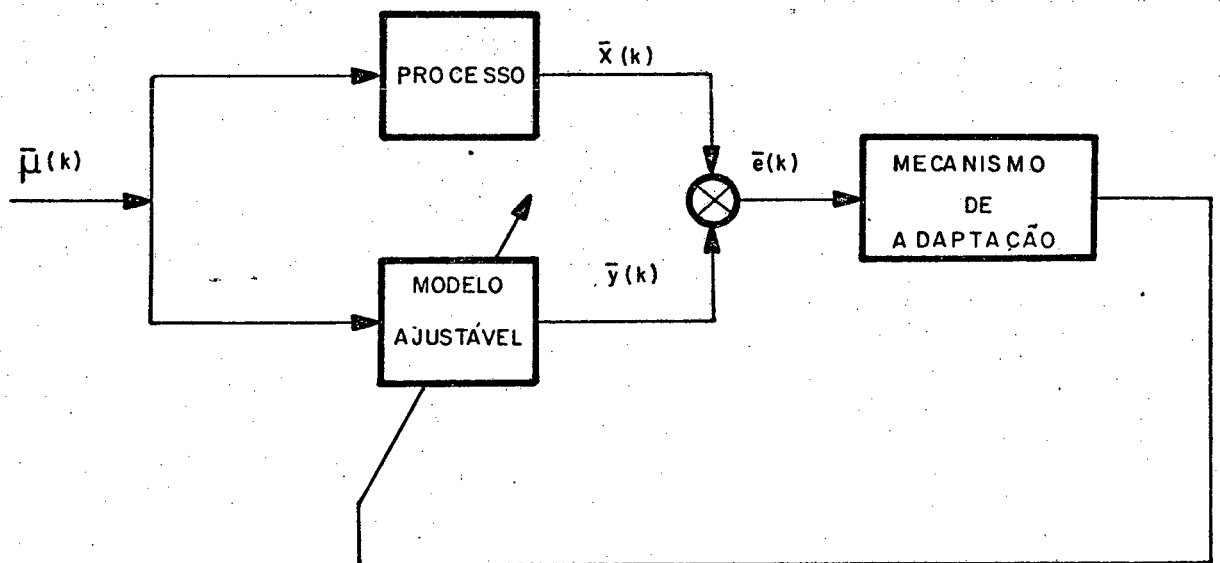


Figura 2.2-2: - Esquema da técnica de síntese de i identificadores discretos.

Define-se um modelo ajustável, cujos parâmetros de verão ser adaptados através de um mecanismo de adaptação. O processo e o modelo ajustável são excitados pela mesma entrada. Um



mecanismo de adaptação ajusta os parâmetros do modelo ajustável, de tal maneira que o erro entre o estado do processo e o estado do modelo ajustável convirja assintoticamente para zero. Quando este sinal de erro, chamado de erro de estado, for nulo, a adaptação é considerada terminada. Com isso o mecanismo de adaptação cessa de atuar, e os parâmetros do modelo ajustável permanecem constantes. Como o processo e o modelo ajustável são excitados pela mesma entrada, é natural de se esperar que, os parâmetros ajustáveis convirjam para os parâmetros do processo, obtendo-se então a identificação desejada.

### 2.3. Identificadores adaptativos de Landau [1,14].

Nesta secção apresentaremos os identificadores adaptativos paralelo e série-paralelo de Landau.

#### 2.3.1 - Identificador adaptativo paralelo de Landau [1,14] com estado acessível.

Consideremos o processo discreto estável e controlável, descrito por:

$$\bar{X}(k+1) = A \bar{X}(k) + B \bar{u}(k) \quad (2.3-1)$$

onde  $\bar{X}(k)$  é o vetor de estado do processo de dimensão  $(nx1)$ ,  $\bar{u}(k)$  é o vetor de entrada de dimensão  $(mx1)$  e as matrizes  $A$  e  $B$  são constantes de dimensão  $(nxn)$  e  $(nxm)$  respectivamente.

Consideremos o modelo ajustável definido por:

$$\bar{Y}(k+1) = \hat{A}(k+1)\bar{Y}(k) + \hat{B}(k+1)\bar{u}(k) \quad (2.3-2)$$

onde  $\bar{Y}(k)$  é o vetor de estado do modelo ajustável de dimensão  $(nx \ 1)$ , e as matrizes  $\hat{A}(k)$  e  $\hat{B}(k)$  são ajustáveis e de dimensão  $(nxn)$  e  $(nxm)$  respectivamente.

Consideremos o erro de estado definido por:

$$\bar{e}(k) = \bar{X}(k) - \bar{Y}(k) \quad (2.3-3)$$

O objetivo do identificador é encontrar uma lei de adaptação para  $\hat{A}(k)$  e  $\hat{B}(k)$ , de tal maneira que o erro de estado convirja assintoticamente para zero, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}(k) = 0 \quad (2.3-4)$$

Utilizando agora as equações (2.3-1) à (2.3-3), ob-  
tém-se então a equação do erro de estado:

$$\bar{e}(k+1) = A\bar{e}(k) - [\hat{A}(k+1)-A]\bar{Y}(k) - [\hat{B}(k+1)-B]\bar{u}(k). \quad (2.3-5)$$

Definindo,

$$\hat{W}(k+1) = -\bar{W}(k+1) = -[\hat{A}(k+1)-A]\bar{Y}(k) - [\hat{B}(k+1)-B]\bar{u}(k), \quad (2.3-6)$$

a equação (2.3-5) pode ser reescrita:

$$\bar{e}(k+1) = A \bar{e}(k) + I \hat{W}(k+1) . \quad (2.3-7)$$

Definindo,

$$\bar{V}(k+1) = D \bar{e}(k+1) \quad (2.3-8)$$

e usando a equação (2.3-7), obtém-se o seguinte sistema dinâmico:

$$\bar{e}(k+1) = A \bar{e}(k) + I \hat{W}(k+1) \quad (2.3-9a)$$

$$\bar{V}(k+1) = D A \bar{e}(k) + D \hat{W}(k+1) \quad (2.3-9b)$$

onde  $\bar{e}(k)$  é o erro de estado,  $\hat{W}(k+1)$  é a entrada e  $D$  é uma matriz de dimensão  $(n \times n)$  determinada convenientemente de tal forma que , o sistema (2.3-9) seja estritamente real positivo. A definição de sistema estritamente real positivo encontra-se no Apêndice B, e o método de determinação de  $D$  será mostrado mais adiante.

Através do teorema de Popov (Teorema C.1) vamos mostrar que o sinal  $\bar{e}(k)$  converge assintoticamente para zero. Para isto torna-se necessário realimentar o sistema (2.3-9) por um bloco que satisfaz a desigualdade de Popov (ver Apêndice C), afim de se obter um sistema padrão com um bloco linear, invariante no tempo e estritamente real positivo realimentado por um bloco que satisfaz a desigualdade de Popov. Este procedimento é mostrado na Figura 2.3-1, onde o bloco de realimentação satisfaz a desigualdade de Popov dada abaixo:

$$\eta(0, k_1) = \sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \hat{W}(k+1) \geq - \gamma_0^2 . \quad (2.3-10)$$

O Teorema de Popov (Teorema C.1) pode então ser aplicado diretamente garantindo que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}(k) = 0 . \quad (2.3-11)$$

O problema agora consiste em determinar uma estrutura conveniente para o bloco de realimentação, que assegure a verificação da desigualdade de Popov (2.3-10). A estrutura do bloco de realimentação será mostrada através do Teorema de Landau [1,14] e do Lema 2.3-1 apresentados mais adiante.

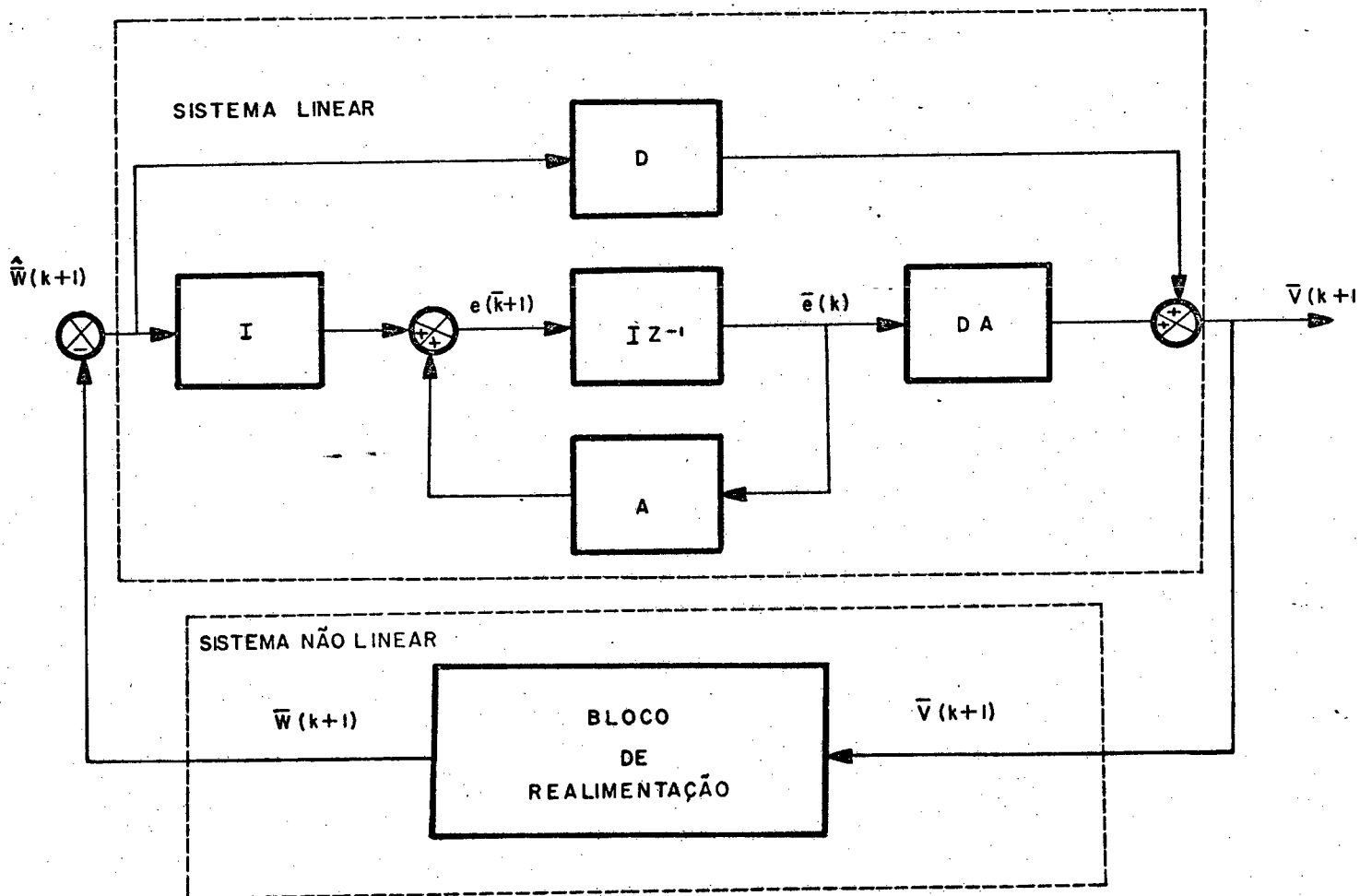


Figura 2.3-1: - Sistema linear com realimentação.

Definindo,

$$\bar{W}_1(k+1) = [\hat{A}(k+1) - A] \bar{Y}(k) \quad (2.3-12)$$

$$\bar{W}_2(k+1) = [\hat{B}(k+1) - B] \bar{u}(k) \quad (2.3-13)$$

e usando a equação (2.3-6) mostra-se que

$$\bar{W}(k+1) = \bar{W}_1(k+1) + \bar{W}_2(k+1) \quad (2.3-14)$$

Lema 2.3-1:

Se 
$$\bar{W} = \bar{W}_1 + \bar{W}_2 \quad (2.3-15)$$

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}_1(k+1) \geq -\gamma_{01}^2 \quad (2.3-16)$$

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}_2(k+1) \geq -\gamma_{02}^2 \quad (2.3-17)$$

então

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}(k+1) \geq -\gamma_0^2 \quad (2.3-18)$$

Prova:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}_1(k+1) + \sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}_2(k+1) = \\ & = \sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) [\bar{W}_1(k+1) + \bar{W}_2(k+1)] = \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}(k+1) \geq -\gamma_{01}^2 - \gamma_{02}^2 = -(\gamma_{01}^2 + \gamma_{02}^2) = -\gamma_0^2 .$$

Para que a desigualdade de Popov (2.3-10) seja satisfeita, utilizando o Lema 2.3-1, é suficiente que:

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}_1(k+1) \geq -\gamma_{01}^2 \quad (2.3-19)$$

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}_2(k+1) \geq -\gamma_{02}^2 . \quad (2.3-20)$$

O Teorema 2.1 descrito a seguir permite determinar a estrutura de  $\bar{W}_1(k)$  e  $\bar{W}_2(k)$ , afim de garantir as desigualdades (2.3-19) e (2.3-20).

Teorema 2.1 - Teorema de Landau [1,14]

Se

$$\Phi_1[\bar{V}, k, \ell] = F'_A(k-\ell) \bar{V}(\ell+1) [G_A \bar{Y}(\ell)]^T \quad (2.3-21)$$

$$\Phi_2[\bar{V}, k] = \bar{F}_A(k) \bar{V}(k+1) [\bar{G}_A(k) \bar{Y}(k)]^T \quad (2.3-22)$$

onde  $F'_A(k-\ell)$  é uma matriz Kernel definida positiva (definição B.3), cuja transformada  $Z$  é uma matriz definida positiva com um pólo em  $Z = 1$ ,  $G_A$  é uma matriz constante definida positiva,  $\bar{F}_A(k)$  e  $\bar{G}_A(k)$  são matrizes variáveis e definidas positivas ou não negativas para todo  $k \geq 0$ , então

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \left\{ \sum_{\ell=0}^k \phi_1[\bar{V}, k, \ell] + \phi_2[\bar{V}, k] + \hat{A}(0) - A \right\} \bar{Y}(k) \geq -\gamma_{01}^2. \quad (2.3-23)$$

Um caso particular interessante do Teorema 2.1 consiste em escolher,

$$\phi_1[\bar{V}, k, \ell] = F'_A \bar{V}(k+1) [G_A \bar{Y}(k)]^T \quad (2.3-24)$$

e

$$\phi_2[\bar{V}, k] = \bar{F}_A \bar{V}(k+1) [\tilde{G}_A \bar{Y}(k)]^T \quad (2.3-25)$$

onde  $F'_A$  e  $\bar{F}_A$  são matrizes constantes definidas positivas e  $G_A$  e  $\tilde{G}_A$  são matrizes constantes definidas positivas ou não negativas.

De acordo com o Teorema 2.1, se

$$\bar{W}_1(k+1) = \left\{ \sum_{\ell=0}^k \phi_1[\bar{V}, k, \ell] + \phi_2[\bar{V}, k] + \hat{A}(0) - A \right\} \bar{Y}(k) \quad (2.3-26)$$

onde  $\phi_1[\bar{V}, k, \ell]$  e  $\phi_2[\bar{V}, k]$  são definidas por (2.3-24) e (2.3-25), então a desigualdade (2.3-19) é satisfeita.

A lei de adaptação para a matriz  $\hat{A}(k)$  pode ser obtida substituindo-se (2.3-26) em (2.3-12), resultando

$$[\hat{A}(k+1) - A] \bar{Y}(k) = \left\{ \sum_{\ell=0}^k F'_A \bar{V}(k+1) [G_A \bar{Y}(k)]^T + \bar{F}_A \bar{V}(k+1) [\tilde{G}_A \bar{Y}(k)]^T + \right.$$

$$+ \hat{A}(0) - A\bar{Y}(k) \quad (2.3-27)$$

o que implica em:

$$\hat{A}(k+1) = \hat{A}_0 + \sum_{\ell=0}^k F'_A \bar{V}(k+1) [G_A \bar{Y}(k)]^T + \tilde{F}'_A \bar{V}(k+1) [\tilde{G}_A \bar{Y}(k)]^T. \quad (2.3-28)$$

A equação (2.3-28) pode ser equivalentemente descrita por:

$$\hat{A}(k+1) = \hat{A}(k) + F'_A \bar{V}(k+1) [G_A \bar{Y}(k)]^T \quad (2.3-29)$$

onde

$$F'_A = \tilde{F}'_A + F'_A$$

e

$$G_A = \tilde{G}_A.$$

De maneira similar, a lei de adaptação de  $\hat{B}(k)$  pode ser obtida definindo

$$\bar{W}_2(k+1) = \left\{ \sum_{\ell=0}^k \Psi_1[\bar{V}, k, \ell] + \Psi_2[\bar{V}, k] + \hat{B}(0) - B \right\} \bar{u}(k) \quad (2.3-30)$$

sendo

$$\Psi_1[\bar{V}, k, \ell] = F'_B \bar{V}(k+1) [G_B \bar{u}(k)]^T \quad (2.3-31)$$

e

$$\Psi_2[\bar{V}, k] = \tilde{F}'_B \bar{V}(k+1) [\tilde{G}_B \bar{u}(k)]^T \quad (2.3-32)$$



onde  $F'_B$  e  $\tilde{F}_B$  são matrizes constantes definidas positivas e  $G_B$  e  $\tilde{G}_B$  são matrizes constantes definidas positivas ou não negativas. Aplicando o Teorema 2.1 mostra-se que a desigualdade (2.3-20) é satisfeita, o que implica então, de acordo com o Lema 2.3-1, que a desigualdade de Popov (2.3-10) é verificada.

Das equações (2.3-30) à (2.3-32) e (2.3-13), segue que:

$$\hat{B}(k+1) = \hat{B}(k) + F_B \bar{V}(k+1) [G_B \bar{u}(k)]^T \quad (2.3-33)$$

onde

$$F_B = \tilde{F}_B + F'_B$$

e

$$G_B = \tilde{G}_B$$

É fácil observar que tanto  $\hat{A}(k+1)$  como  $\hat{B}(k+1)$  dependem de  $\bar{V}(k+1)$ , de acordo com as equações (2.3-29) e (2.3-33), que por sua vez depende de  $\bar{e}(k+1)$ , como é dado pela equação (2.3-8). Mas  $\bar{e}(k+1)$  depende de  $\bar{Y}(k+1)$  de acordo com a equação (2.3-3) que por sua vez depende de  $\hat{A}(k+1)$  e  $\hat{B}(k+1)$ , como pode-se notar pela equação (2.3-2). Afim de explicitar  $\bar{V}(k+1)$  em função de variáveis conhecidas, utiliza-se o procedimento descrito a seguir.

Definindo um modelo ajustável a priori por

$$\bar{Y}^0(k+1) = \hat{A}(k) \bar{Y}(k) + \hat{B}(k) \bar{u}(k), \quad (2.3-34)$$

um erro a priori por

$$\bar{e}^0(k+1) = \bar{X}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1), \quad (2.3-35)$$

$$e \quad \bar{v}^0(k+1) = D \bar{e}^0(k+1) \quad , \quad (2.3-36)$$

e subtraindo da equação (2.3-2) a equação (2.3-34) obtêm-se:

$$\bar{y}(k+1) - \bar{y}^0(k+1) = [\hat{A}(k+1) - A] \bar{y}(k) + [\hat{B}(k+1) - B] \bar{u}(k) . \quad (2.3-37)$$

Subtraindo e somando do lado esquerdo da equação (2.3-37)  $\bar{x}(k+1)$ , resulta:

$$\bar{x}(k+1) - \bar{y}^0(k+1) - [\bar{x}(k+1) - \bar{y}(k+1)] = [\hat{A}(k+1) - A] \bar{y}(k) + [\hat{B}(k+1) - B] \bar{u}(k) . \quad (2.3-38)$$

Substituindo as equações (2.3-3), (2.3-35), (2.3-29) e (2.3-33) em (2.3-38), obtêm-se que:

$$\bar{e}^0(k+1) - \bar{e}(k+1) = F_A \bar{v}(k+1) \bar{y}^T(k) G_A \bar{y}(k) + F_B \bar{v}(k+1) \bar{u}^T(k) G_B \bar{u}(k) . \quad (2.3-39)$$

Definindo  $N(k)$  como sendo

$$N(k) = F_A \bar{y}^T(k) G_A \bar{y}(k) + F_B \bar{u}^T(k) G_B \bar{u}(k) \quad (2.3-40)$$

e substituindo em (2.3-39), obtêm-se que:

$$\bar{e}^0(k+1) - \bar{e}(k+1) = N(k) \bar{v}(k+1) . \quad (2.3-41)$$

Multiplicando (2.3-41) pela direita por  $D$ , resulta que

$$D \bar{e}^0(k+1) - D \bar{e}(k+1) = DN(k) \bar{V}(k+1) \quad (2.3-42)$$

que implica em:

$$\bar{V}^0(k+1) - \bar{V}(k+1) = DN(k) \bar{V}(k+1) \quad (2.3-43)$$

De (2.3-43) obtêm-se

$$\bar{V}(k+1) = [I + DN(k)]^{-1} \bar{V}^0(k+1) \quad (2.3-44)$$

em função de variáveis conhecidas.

Para finalizar o cálculo do identificador adaptativo paralelo, basta mostrar o procedimento de determinação da matriz D.

A matriz D deve ser calculada de tal forma que o sistema (2.3-9) seja estritamente real positivo.

A matriz de transferência de (2.3-9) é dada por

$$H(Z) = DA(ZI-A)^{-1} + D \quad (2.3-45)$$

Podendo ser reescrita da seguinte maneira

$$H(Z) = H_1(Z) + \frac{1}{2} D \quad (2.3-46)$$

onde

$$H_1(Z) = DA(ZI-A)^{-1} + \frac{1}{2} D \quad (2.3-47)$$

Da definição de positividade (Definição B.2) e da equação (2.3-46), pode-se mostrar que se  $H_1(Z)$  é uma matriz estritamente real positiva e se D for uma matriz definida positiva en

tão  $H(z)$  será também uma matriz estritamente real positiva. Para provar isto, basta escolher  $D$  como sendo uma matriz definida positiva e mostrar que  $H_1(z)$  é estritamente real positiva.

O sistema (2.3-47) pode ser reescrito no domínio do tempo, ou seja:

$$\bar{\kappa}(k+1) = A \bar{\kappa}(k) + I \bar{v}(k) \quad (2.3-48 \text{ a})$$

$$\bar{g}(k) = DA \bar{\kappa}(k) + \frac{1}{2} D \bar{v}(k) \quad (2.3-48 \text{ b})$$

onde  $\bar{\kappa}(k)$  é o vetor de estado,  $\bar{g}(k)$  é o vetor de saída e  $\bar{v}(k)$  é o vetor de entrada.

De acordo com o Lema de positividade (Lema B.2), o sistema (2.3-48) é estritamente real positivo se existir matrizes definidas positivas  $P$  e  $Q$  e matrizes  $L$  e  $K$ , que satisfazem o sistema de equações:

$$A^T P A - P = -L L^T - Q \quad (2.3-49)$$

$$P A + K^T L^T = D A \quad (2.3-50)$$

$$K^T K = D - P \quad (2.3-51)$$

Este sistema de equação é verificado se

$$A^T P A - P = -Q \quad (2.3-52)$$

$$K = 0$$

$$L = 0$$

$$D = P \quad (2.3-53)$$

Sendo a equação (2.3-52) a equação de Lyapunov, e como o sistema (2.3-48) é estável, então para uma matriz definida positiva  $Q$ , existirá uma matriz definida positiva  $P$  que satisfaz a equação (2.3-52).

### 2.3.2 - Identificador adaptativo série-paralelo de Landau [1,14] com estado acessível.

Consideremos o processo discreto controlável, descrito por:

$$\bar{X}(k+1) = A \bar{X}(k) + B \bar{u}(k) \quad (2.3-54)$$

onde  $\bar{X}(k)$  é o vetor de estado do processo de dimensão  $(n \times 1)$ ,  $\bar{u}(k)$  é o vetor de entrada de dimensão  $(n \times 1)$  e as matrizes  $A$  e  $B$  são constantes de dimensão  $(n \times n)$  e  $(n \times m)$  respectivamente.

Consideremos o modelo ajustável definido por:

$$\bar{Y}(k+1) = \hat{A}(k+1) \bar{X}(k) + \hat{B}(k+1) \bar{u}(k) \quad (2.3-55)$$

onde  $\bar{Y}(k)$  é o vetor de estado do modelo ajustável de dimensão  $(n \times 1)$  e as matrizes  $\hat{A}(k)$  e  $\hat{B}(k)$  são ajustáveis e de dimensão  $(n \times n)$  e  $(n \times m)$  respectivamente.

Consideremos o erro de estado definido pela equação (2.3-3).

Da mesma forma que o identificador paralelo, objetiva-se encontrar uma lei de adaptação para  $\hat{A}(k)$  e  $\hat{B}(k)$ , de tal maneira

neira que o erro de estado convirja assintoticamente para zero.

Através das equações (2.3-54), (2.3-55) e (2.3-3), obtém-se a equação do erro de estado:

$$\bar{e}(k+1) = -[\hat{A}(k+1) - A]\bar{X}(k) - [\hat{B}(k+1) - B]\bar{u}(k). \quad (2.3-56)$$

Definindo,

$$\hat{W}(k+1) = -\bar{W}(k+1) = -[\hat{A}(k+1) - A]\bar{X}(k) - [\hat{B}(k+1) - B]\bar{u}(k), \quad (2.3-57)$$

a equação (2.3-56) pode ser reescrita:

$$\bar{e}(k+1) = I \hat{W}(k+1) \quad (2.3-58)$$

e usando a equação (2.3-8), obtém-se o seguinte sistema dinâmico:

$$\bar{e}(k+1) = I \bar{W}(k+1) \quad (2.3-59a)$$

$$\bar{V}(k+1) = D \hat{W}(k+1) \quad (2.3-59b)$$

onde  $\bar{e}(k)$  é o estado,  $\hat{W}(k+1)$  é a entrada,  $\bar{V}(k+1)$  é a saída e  $D$  é uma matriz de dimensão  $(n \times n)$  determinada de tal maneira que o sistema (2.3-59) seja estritamente real positivo.

Com o objetivo de demonstrar a convergência assintótica para zero do sinal de erro  $\bar{e}(k)$ , realimenta-se o sistema linear, invariante no tempo e estritamente real positivo (2.3-59) por um bloco que satisfaz a desigualdade de Popov (2.3-10). Na Figura 2.3-2 é mostrado este procedimento.

Semelhantemente à secção anterior, procura-se agora determinar uma estrutura conveniente para o bloco de realimentação, obtida através do Teorema 2.1 e do Lema 2.3-1, de tal modo que a desigualdade de Popov (2.3-10) seja verificada.

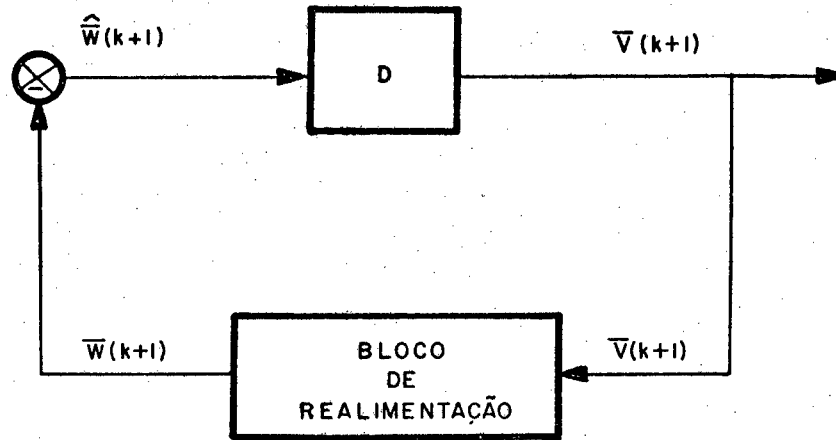


Figura 2.3-2: - Sistema linear com realimentação.

Definindo,

$$\bar{W}_1(k+1) = [\hat{A}(k+1) - A] \bar{x}(k) \quad (2.3-60)$$

$$\bar{W}_2(k+1) = [\hat{B}(k+1) - B] \bar{u}(k) \quad (2.3-61)$$

e usando a equação (2.3-57) mostra-se que

$$\bar{W}(k+1) = \bar{W}_1(k+1) + \bar{W}_2(k+1) \quad (2.3-62)$$

Agora para que a desigualdade de Popov (2.3-10) seja satisfeita, utilizando o Lema 2.3.1, é suficiente que:

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{V}^T(k+1) \bar{W}_1(k+1) \geq -\gamma_{01}^2 \quad (2.3-63)$$

$$\sum_{k=0}^k \bar{V}^T(k+1) \bar{W}_2(k+1) \geq -\gamma_{02}^2 \quad (2.3-64)$$

Da mesma maneira que para o identificador paralelo, por intermédio do Teorema de Landau, determina-se as estruturas de  $\bar{W}_1(k)$  e  $\bar{W}_2(k)$  de tal modo que as desigualdades (2.3-63) e (2.3-64) sejam garantidas,

$$\bar{W}_1(k+1) = \left\{ \sum_{\ell=0}^k \phi_1[\bar{V}, k, \ell] + \phi_2[\bar{V}, k] + \hat{A}(0) - A \right\} \bar{X}(k) \quad (2.3-65)$$

$$\bar{W}_2(k+1) = \left\{ \sum_{\ell=0}^k \psi_1[V, k, \ell] + \psi_2[\bar{V}, k] + \hat{B}(0) - B \right\} \bar{u}(k) \quad (2.3-66)$$

sendo as matrizes  $\phi_1[\bar{V}, k, \ell]$ ,  $\phi_2[\bar{V}, k, \ell]$ ,  $\psi_1[V, k, \ell]$  e  $\psi_2[V, k]$  escolhidas para um caso particular do Teorema 2.1, da seguinte forma:

$$\phi_1[\bar{V}, k, \ell] = F'_A \bar{V}(k+1) [G_A \bar{X}(k)]^T \quad (2.3-67)$$

$$\phi_2[\bar{V}, k] = \bar{F}'_A V(k+1) [\bar{G}_A \bar{X}(k)]^T \quad (2.3-68)$$

$$\psi_1[\bar{V}, k, \ell] = F'_B \bar{V}(k+1) [G_B \bar{u}(k)]^T \quad (2.3-69)$$

$$\psi_2[\bar{V}, k] = F'_B \bar{V}(k+1) [\bar{G}_B \bar{u}(k)]^T \quad (2.3-70)$$

onde  $F'_A$ ,  $\bar{F}'_A$ ,  $F'_B$  e  $\bar{F}'_B$  são matrizes constantes definidas positivas e  $G_A$ ,  $\bar{G}_A$ ,  $G_B$  e  $\bar{G}_B$  são matrizes constantes definidas positivas ou não negativas.

As leis de adaptação paramétrica, para as matrizes  $\hat{A}(k)$  e  $\hat{B}(k)$ , podem agora ser obtidas. Das equações (2.3-65), (2.3-67), (2.3-68) e (2.3-69) obtém-se  $\hat{A}(k)$  e das equações (2.3-66), (2.3-69), (2.3-70) e (2.3-68) obtém-se  $\hat{B}(k)$ , resultando que



$$\hat{A}(k+1) = \hat{A}(k) + F_A \bar{V}(k+1) [G_A \bar{x}(k)]^T \quad (2.3-71)$$

e

$$\hat{B}(k+1) = \hat{B}(k) + F_B \bar{V}(k+1) [G_B \bar{u}(k)]^T \quad (2.3-72)$$

onde

$$F_A = \tilde{F}_A + F'_A$$

$$F_B = \tilde{F}_B + F'_B$$

e

$$G_A = \tilde{G}_A$$

$$G_B = \tilde{G}_B$$

Observa-se que tanto  $\hat{A}(k+1)$  como  $\hat{B}(k+1)$  dependem de  $\bar{V}(k+1)$ , conforme as equações (2.3-71) e (2.3-72), que por sua vez depende de  $\bar{e}(k+1)$ , como é dado pela equação (2.3-8). Mas  $\bar{e}(k+1)$  depende de  $\bar{Y}(k+1)$  de acordo com a equação (2.3-3), que por sua vez depende de  $\hat{A}(k+1)$  e  $\hat{B}(k+1)$ , como pode ser visto pela equação (2.3-55). Com a finalidade de explicitar  $\bar{V}(k+1)$  em função de variáveis conhecidas, utiliza-se o seguinte procedimento.

De maneira similar ao identificador paralelo, define-se um modelo ajustável a priori por

$$\bar{Y}^0(k+1) = \hat{A}(k) \bar{x}(k) + \hat{B}(k) \bar{u}(k) \quad (2.3-73)$$

e usando as definições (2.3-35) e (2.3-36) obtém-se que:

$$\bar{Y}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) = [\hat{A}(k+1) - A] \bar{X}(k) + [\hat{B}(k+1) - B] \bar{u}(k). \quad (2.3-74)$$

Subtraindo e somando do lado esquerdo da equação (2.3-74)  $\bar{X}(k+1)$ , resulta:

$$\bar{X}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) - [\bar{X}(k+1) - \bar{Y}(k+1)] = [\hat{A}(k+1) - A] \bar{X}(k) + [\hat{B}(k+1) - B] \bar{u}(k). \quad (2.3-75)$$

Substituindo as equações (2.3-3), (2.3-35), (2.3-71) e (2.3-72) em (2.3-75), obtêm-se que:

$$\bar{e}^0(k+1) - \bar{e}(k+1) = F_A \bar{V}(k+1) \bar{X}^T(k) G_A \bar{X}(k) + F_B \bar{V}(k+1) \bar{u}^T(k) G_B \bar{u}(k). \quad (2.3-76)$$

Definindo  $N(k)$  como sendo

$$N(k) = F_A \bar{X}^T(k) G_A \bar{X}(k) + F_B \bar{u}^T(k) G_B \bar{u}(k) \quad (2.3-77)$$

e seguindo o procedimento do identificador paralelo obtêm-se

$$\bar{V}(k+1) = [I + DN(k)]^{-1} \bar{V}^0(k+1) \quad (2.3-78)$$

em função de variáveis conhecidas.

Para finalizar o cálculo do identificador série-paralelo basta mostrar o procedimento de determinação da matriz  $D$ .

Esta matriz deve ser calculada de tal maneira que o sistema (2.3-59) seja estritamente real positivo. A matriz de transferência de (2.3-59) é dada apenas pela matriz D. Usando a definição B.2, para que (2.3-59) seja estritamente real positivo, é suficiente que D seja definida positiva.

#### 2.4. Variante dos identificadores adaptativos de Landau

O identificador paralelo apresentado necessitava que o processo fosse estável, como também necessitava de uma estimativa dos parâmetros da matriz A.

Inspirado em [15,16] conseguiu-se obter um identificador onde os problemas acima mencionados são contornados.

Nesta secção será apresentado uma variante do identificador paralelo, bem como uma variante do identificador série-paralelo.

##### 2.4.1 - Variante do identificador adaptativo paralelo de Landau, com estado acessível.

Consideremos o processo discreto estável e controlável descrito pela equação (2.3-1).

Consideremos o modelo ajustável definido por:

$$\bar{Y}(k+1) = \hat{P}(k+1)\bar{R}(k) \quad (2.4-1)$$

onde

$$\hat{P}(k) = [\hat{A}(k) : \hat{B}(k) : \hat{C}(k)]$$

e

$$\bar{R}(k) = \begin{bmatrix} \bar{Y}(k) \\ \dots \\ \bar{u}(k) \\ \dots \\ \bar{e}(k) \end{bmatrix} .$$

Consideremos o erro de estado definido por:

$$\bar{e}(k) = \bar{X}(k) - \bar{Y}(k) . \quad (2.4-2)$$

Objetiva-se também para este identificador, encontrar uma lei de adaptação para  $\hat{P}(k)$ , de tal forma que o erro de estado convirja assintoticamente para zero.

Observe que quando o erro de estado é zero o modelo ajustável se superpõe ao modelo ajustável (2.3-2). A matriz  $\hat{C}(k)$  foi acrescentada para contornar o problema de se ter uma estimativa da matriz A, e garantir que o esquema funcione para processos instáveis.

Utilizando agora as equações (2.3-1), (2.4-1) e (2.4-2), obtêm-se a equação de erro de estado:

$$\bar{e}(k+1) = -[\hat{P}(k+1) - P]\bar{R}(k) \quad (2.4-3)$$

onde

$$P = [A : B : A] .$$

Definindo,

$$\hat{\bar{W}}(k+1) = -\bar{W}(k+1) = -[\hat{P}(k+1) - P]\bar{R}(k) , \quad (2.4-4)$$

a equação (2.4-3) pode ser reescrita:

$$\bar{e}(k+1) = I \hat{\bar{W}}(k+1) . \quad (2.4-5)$$

Usando a equação (2.3-8), obtêm-se o seguinte sistema dinâmico:

$$\bar{e}(k+1) = I \hat{\bar{W}}(k+1) \quad (2.4-5a)$$

$$\bar{V}(k+1) = D \hat{\bar{W}}(k+1) . \quad (2.4-5b)$$

Para atingir o objetivo já estabelecido, realimenta-se o sistema linear, invariante no tempo e estritamente real positivo (2.4-5) por um bloco que satisfaz a desigualdade de Popov (2.3-10). Este procedimento é mostrado na Figura 2.4-1.

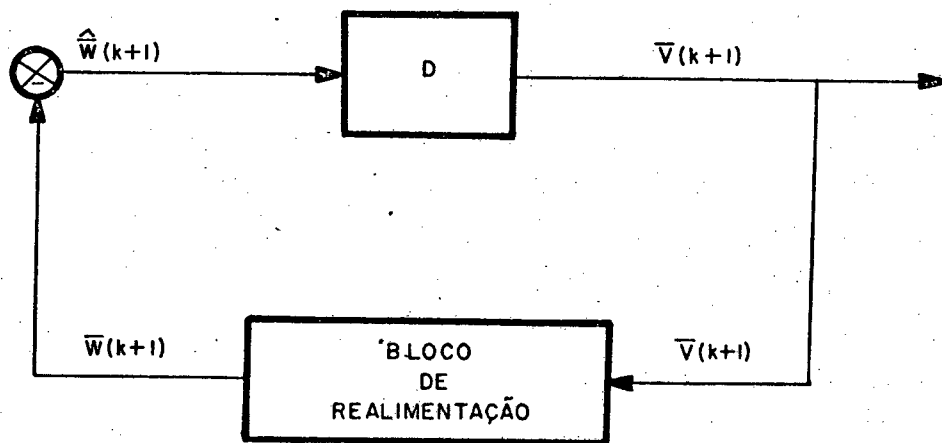


Figura 2.4-1: - Sistema linear com realimentação.

Determina-se agora uma estrutura conveniente para o bloco de realimentação, à qual é obtida através do Teorema 2.1 como foi visto nas secções anteriores, de tal modo que a desigualdade de Popov (2.3-10) seja verificada. Sendo assim tem-se que:

$$\bar{W}(k+1) = \left\{ \sum_{\ell=0}^k \Omega_1 [\bar{V}, k, \ell] + \Omega_2 [\bar{V}, k] + P(0) - P \right\} \bar{R}(k) \quad (2.4-6)$$

sendo  $\Omega_1 [\bar{V}, k, \ell]$  e  $\Omega_2 [\bar{V}, k]$ , para um caso particular do Teorema 2.1, definidos por:

$$\Omega_1 [\bar{V}, k, \ell] = F' \bar{V}(k+1) [G \bar{R}(k)]^T \quad (2.4-7)$$

$$\Omega_2 [\bar{V}, k] = \tilde{F} \bar{V}(k+1) [\tilde{G} \bar{R}(k)]^T \quad (2.4-8)$$

onde  $F'$ ,  $\tilde{F}$  são matrizes constantes definidas positivas e  $G$  e  $\tilde{G}$  são matrizes constantes definidas positivas ou não negativas.

A lei de adaptação para a matriz  $\hat{P}(k)$  é obtida das equações (2.4-6), (2.4-7), (2.4-8) e (2.4-4), resultando

$$\begin{aligned} [\hat{P}(k+1) - P] \bar{R}(k) &= \left\{ \sum_{\ell=0}^k F' \bar{V}(k+1) [G \bar{R}(k)]^T + \tilde{F} \bar{V}(k+1) [\tilde{G} \bar{R}(k)]^T + \right. \\ &\left. \hat{P}(0) - P \right\} \bar{R}(k) \end{aligned} \quad (2.4-9)$$

o que implica em

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(0) + \sum_{\ell=0}^k F' \bar{V}(k+1) [G \bar{R}(k)]^T + \tilde{F} \bar{V}(k+1) [\tilde{G} \bar{R}(k)]^T . \quad (2.4-10)$$

A equação (2.4-10) pode ser equivalentemente descrita por:

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + F \bar{V}(k+1) [G \bar{R}(k)]^T \quad (2.4-11)$$

$$F = \tilde{F} + F'$$

e

$$G = \tilde{G} .$$

Observa-se também para este identificador que,  $\hat{P}(k+1)$  depende de  $\bar{V}(k+1)$ , conforme a equação (2.4-11), que por sua vez depende de  $\bar{e}(k+1)$ , como é visto pela equação (2.3-8). Mas  $\bar{e}(k+1)$  depende de  $\bar{Y}(k+1)$  de acordo com a equação (2.4-2), que por sua vez depende de  $\hat{P}(k+1)$ , como pode ser visto pela equação (2.4-1). Com isto pode-se explicitar  $\bar{V}(k+1)$ , utilizando-se o seguinte procedimento.

De maneira similar ao identificador paralelo, define-se um modelo ajustável a priori por

$$\bar{Y}^0(k+1) = \hat{P}(k) \bar{R}(k) \quad (2.4-12)$$

e utilizando as definições (2.3-5) e (2.3-6) obtém-se que:

$$\bar{Y}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) = [\hat{P}(k+1) - \hat{P}(k)] \bar{R}(k) \quad (2.4-13)$$

Subtraindo e somando do lado esquerdo da equação (2.4-13)  $\bar{X}(k+1)$ , resulta:

$$\bar{X}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) - [\bar{X}(k+1) - \bar{Y}(k+1)] = [\hat{P}(k+1) - \hat{P}(k)] \bar{R}(k) . \quad (2.4-14)$$

Substituindo as equações (2.4-2), (2.3-35), (2.4-11) em (2.4-14), obtêm-se que:

$$\bar{e}^0(k+1) - \bar{e}(k+1) = F \bar{V}(k+1) \bar{R}^T(k) G \bar{R}(k) . \quad (2.4-15)$$

Definindo  $N(k)$  como sendo

$$N(k) = F \bar{R}^T(k) G \bar{R}(k) \quad (2.4-16)$$

e substituindo em (2.4-15), resulta

$$\bar{e}^0(k+1) - \bar{e}(k+1) = N(k) \bar{V}(k+1) . \quad (2.4-17)$$

Pós multiplicando (2.4-17) por  $D$ , obtêm-se que

$$D \bar{e}^0(k+1) - D \bar{e}(k+1) = D N(k) \bar{V}(k+1) \quad (2.4-18)$$

o que implica em

$$\bar{V}(k+1) = [I + D N(k)]^{-1} \bar{V}^0(k+1) \quad (2.4-19)$$

em função de variáveis conhecidas.

Da mesma maneira que o identificador série-paralelo de Landau, para que o sistema (2.4-5) seja estritamente real positivo, é necessário apenas que  $D$  seja uma matriz definida positiva.



### 2.4.2 - Variante do identificador adaptativo série-paralelo de Landau com estado acessível.

Consideremos o processo discreto controlável, descrito pela equação (2.3-54).

Consideremos o modelo ajustável definido por:

$$\bar{Y}(k+1) = \hat{P}(k+1)\bar{R}(k) \quad (2.4-20)$$

onde

$$\hat{P}(k) = [\hat{A}(k) : \hat{B}(k)]$$

e

$$\bar{R}(k) = \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \dots \\ \bar{u}(k) \end{bmatrix}$$

Consideremos o erro de estado definido pela equação (2.4-2).

Como foi feito para a secção anterior objetiva-se encontrar uma lei de adaptação para  $\hat{P}(k)$ , de tal forma que o erro de estado convirja assintoticamente para zero.

Utilizando agora as equações (2.3-54), (2.4-20) e (2.4-2), obtém-se a equação do erro de estado:

$$\bar{e}(k+1) = -[\hat{P}(k+1) - P]\bar{R}(k) \quad (2.4-21)$$

onde

$$P = [A : B] \quad .$$

Definindo,

$$\hat{\bar{W}}(k+1) = -\bar{W}(k+1) = -[\hat{P}(k+1) - P]\bar{R}(k) \quad , \quad (2.4-22)$$

a equação (2.4-21) pode ser reescrita

$$\bar{e}(k+1) = I \hat{\bar{W}}(k+1) \quad (2.4-23)$$

que junto com a equação (2.3-8), obtêm-se o seguinte sistema dinâmico:

$$\bar{e}(k+1) = I \hat{\bar{W}}(k+1) \quad (2.4-24a)$$

$$\bar{V}(k+1) = D \hat{\bar{W}}(k+1) \quad . \quad (2.4-24b)$$

Afim de mostrar a estabilidade assintótica do erro de estado, adotou-se o procedimento mostrado na Figura 2.4-2, com a finalidade de obter um sistema padrão com um bloco linear, invariante no tempo e estritamente real positivo, realimentado por um bloco que satisfaz a desigualdade de Popov (2.3-10).

Da mesma maneira que na secção anterior, determina-se uma estrutura conveniente para o bloco de realimentação, ou seja:

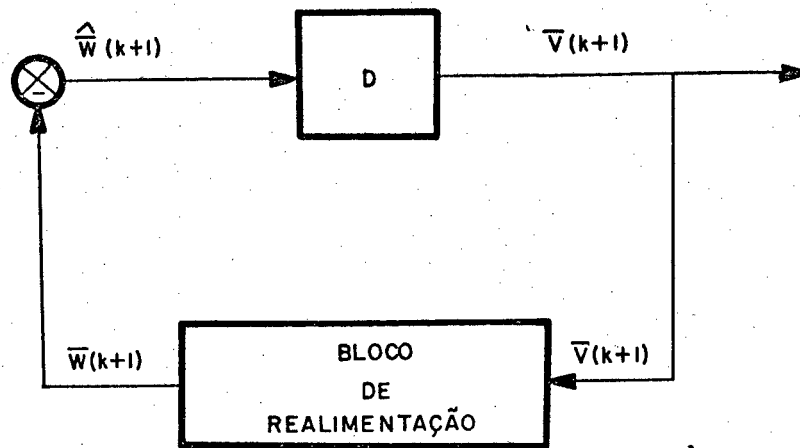


Figura 2.4-2: - Sistema linear com realimentação.

$$\bar{W}(k+1) = \left\{ \sum_{\ell=0}^k \Omega_1[\bar{V}, k, \ell] + \Omega_2[\bar{V}, k] + \hat{P}(0) - P \right\} \bar{R}(k) \quad (2.4-25)$$

sendo  $\Omega_1[\bar{V}, k, \ell]$  e  $\Omega_2[\bar{V}, k]$ , para um caso particular do Teorema 2.1, definidos por:

$$\Omega_1[\bar{V}, k, \ell] = F' \bar{V}(k+1) [G \bar{R}(k)]^T \quad (2.4-26)$$

$$\Omega_2[\bar{V}, k] = \tilde{F} \bar{V}(k+1) [\tilde{G} \bar{R}(k)]^T \quad (2.4-27)$$

onde  $F'$ ,  $\tilde{F}$  são matrizes constantes definidas positivas e  $G$  e  $\tilde{G}$  são matrizes constantes definidas positivas ou não negativas.

Pode-se então agora obter a lei de adaptação para a matriz  $\hat{P}(k)$ . Utilizando as equações (2.4-25), (2.4-26), (2.4-27) e (2.4-22), resulta que:

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + F \bar{V}(k+1) [G \bar{R}(k)]^T \quad (2.4-28)$$

onde

$$F = \tilde{F} + F'$$

e

$$G = \tilde{G} .$$

Semelhantemente ao identificador anterior, pode-se explicitar  $\bar{V}(k+1)$ , utilizando-se o seguinte procedimento.

Definindo um modelo ajustável a priori por

$$\bar{Y}^0(k+1) = \hat{P}(k)\hat{R}(k) \quad (2.4-29)$$

e considerando as definições (2.3-35) e (2.3-36), obtém-se que:

$$\bar{Y}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) = [\hat{P}(k+1) - P]\bar{R}(k) . \quad (2.4-30)$$

Utilizando-se o mesmo procedimento da secção anterior, resulta que:

$$\bar{V}(k+1) = [I + D N(k)]^{-1} \bar{V}^0(k+1) \quad (2.4-31)$$

onde

$$N(k) = F \bar{R}^T(k) G \bar{R}(k) . \quad (2.4-32)$$

E para finalizar o cálculo deste identificador é suficiente dizer que (2.4-24) será estritamente real positivo se a matriz  $D$  for definida positiva.

## 2.5. Identificadores adaptativos a ganho decrescente.

Nesta secção apresentaremos os identificadores adaptativos paralelo e série-paralelo a ganho decrescente.

### 2.5.1 - Identificador adaptativo paralelo a ganho decrescente com estado acessível.

Consideremos o processo discreto controlável, descrito por:

$$\bar{X}(k+1) = A \bar{X}(k) + B \bar{u}(k) \quad (2.5-1)$$

Consideremos o modelo ajustável definido por:

$$\bar{Y}(k+1) = \hat{P}(k+1) \bar{R}(k) \quad (2.5-2)$$

onde

$$\hat{P}(k+1) = [\hat{A}(k) \quad : \quad \hat{B}(k) \quad : \quad \hat{C}(k)]$$

e

$$\bar{R}(k) = \begin{bmatrix} \bar{Y}(k) \\ \dots \\ \bar{u}(k) \\ \dots \\ \bar{e}(k) \end{bmatrix} .$$

Consideremos o erro de estado definido por:

$$\bar{e}(k) = \bar{X}(k) - \bar{Y}(k) \quad . \quad (2.5-3)$$

Como foi estabelecido para os identificadores anteriores, o objetivo deste identificador também é o de encontrar uma lei de adaptação para  $\hat{P}(k)$  de tal maneira que o erro de estado convirja assintoticamente para zero, ou seja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}(k) = 0 \quad . \quad (2.5-4)$$

Usando as equações (2.5-1) a (2.5-3) obtém-se a equação do erro de estado

$$\bar{e}(k+1) = -[\hat{A}(k+1) - A]\bar{Y}(k) - [\hat{B}(k+1) - B]\bar{u}(k) - [\hat{C}(k+1) - A]\bar{e}(k) \quad . \quad (2.5-6)$$

A equação (2.5-6) pode ser equivalentemente reescrita

$$\bar{e}(k+1) = -[\hat{P}(k+1) - P]\bar{R}(k) \quad (2.5-7)$$

onde

$$P = [A \quad B \quad A] \quad .$$

Para provar a estabilidade assintótica do erro de estado, é necessário realimentar o sistema linear (2.5-7) convenientemente. O Teorema 2.2, ilustrado na Figura 2.5-1, permite encontrar

trar tal estrutura de realimentação estabelecendo um algoritmo de adaptação para  $\hat{P}(k)$ , do tipo "a ganho decrescente".

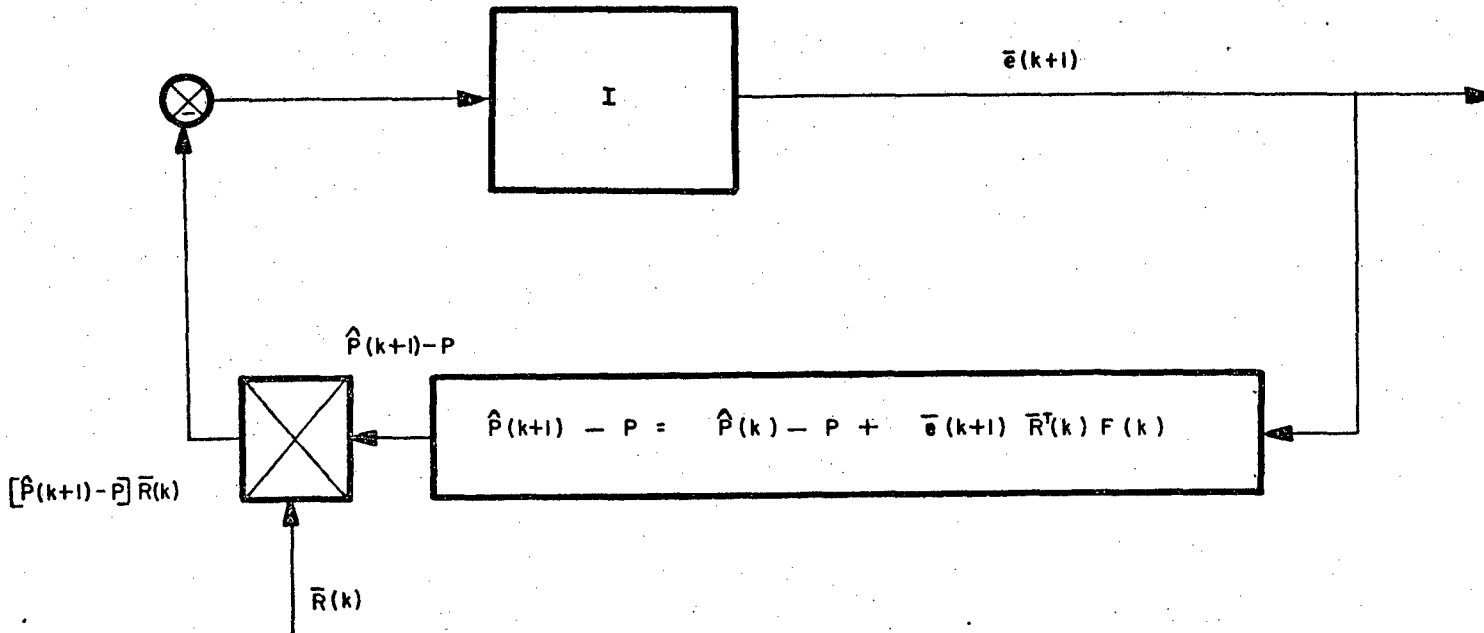


Figura 2.5-1: - Sistema linear realimentado.

Teorema 2.2: - [17]

Se

$$1. \quad \bar{e}(k+1) = -[\hat{P}(k+1) - P] \bar{R}(k) \quad (2.5-8)$$

$$2. \quad \hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + \bar{e}(k+1) \bar{R}^T(k) F(k) \quad (2.5-9)$$

$$3. \quad F(k+1) = F(k) - \frac{F(k) \bar{R}(k) \bar{R}^T(k) F(k)}{1 + \bar{R}^T(k) F(k) \bar{R}(k)} ; F(0) > 0 \quad (2.5-10)$$

então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}(k) = 0 \quad (2.5-11)$$

Prova:

Seja a matriz

$$L(k) = \theta(k) F^{-1}(k) \theta^T(k) \quad (2.5-12)$$

onde

$$\theta(k) = \hat{P}(k) - P \quad (2.5-13)$$

A variação de  $L(k)$  em relação ao tempo é:

$$\Delta L(k) = L(k+1) - L(k) = \theta(k+1) F^{-1}(k+1) \theta^T(k+1) - \theta(k) F^{-1}(k) \theta^T(k) \quad (2.5-14)$$

Aplicando o Lema da Inversão (Lema D.4) na equação (2.5-10), obtém-se a seguinte expressão:

$$F^{-1}(k+1) = F^{-1}(k) + \bar{R}(k) \bar{R}^T(k) \quad (2.5-15)$$

Substituindo (2.5-15) em (2.5-14), resulta que:

$$\Delta L(k) = \theta(k+1) F^{-1}(k) \theta^T(k+1) + \theta(k+1) \bar{R}(k) \bar{R}^T(k) \theta^T(k+1) - \theta(k) F^{-1}(k) \theta^T(k) \quad (2.5-16)$$

Como

$$\bar{e}(k+1) = -[\hat{P}(k+1) - P] \bar{R}(k)$$

e

$$\theta(k) = \hat{P}(k) - P \quad ,$$



então

$$\bar{e}(k+1) = -\theta(k+1)\bar{R}(k) \quad . \quad (2.5-17)$$

Substituindo a equação (2.5-17) na equação (2.5-16),  
obtem-se que:

$$\Delta L(k) = \bar{e}(k+1)\bar{e}^T(k+1) + \theta(k+1)F^{-1}(k)\theta^T(k+1) - \theta(k)F^{-1}(k)\theta^T(k) \quad . \quad (2.5-18)$$

Da equação (2.5-9) tira-se que

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k) \quad , \quad (2.5-19)$$

que substituída na equação (2.5-18), chega-se que:

$$\begin{aligned} \Delta L(k) &= \bar{e}(k+1)\bar{e}^T(k+1) + \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k) [\theta^T(k) + F(k)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1)] + \\ &+ \theta(k)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1) \quad . \quad (2.5-20) \end{aligned}$$

Usando novamente a equação (2.5-19) tem-se que:

$$\Delta L(k) = \bar{e}(k+1)\bar{e}^T(k+1) + \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)\theta^T(k+1) + \theta(k)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1) \quad . \quad (2.5-21)$$

Substituindo a equação (2.5-17), na equação (2.5-21),  
chega-se que:

$$\Delta L(k) = \theta(k)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1) \quad . \quad (2.5-22)$$

Somando e subtraindo na equação (2.5-22) a expressão  $\bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1)$ , resulta que

$$\Delta L(k) = [\theta(k) + \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k)]\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1) - \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1). \quad (2.5-23)$$

Substituindo a equação (2.5-19) na equação (2.5-23), obtém-se que

$$\Delta L(k) = \theta(k+1)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1) - \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1). \quad (2.5-24)$$

Substituindo a equação (2.5-17) na equação (2.5-24), chega-se que

$$\Delta L(k) = -\bar{e}(k+1)\bar{e}^T(k+1) - \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)\bar{e}^T(k+1). \quad (2.5-25)$$

Considere agora a seguinte função de Lyapunov  $\alpha$ :

$$\alpha(k) = \sum_{i=1}^n \beta_i^T L(k) \beta_i \quad (2.5-26)$$

onde

$$\beta_i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (2.5-27)$$

Utilizando (2.5-26), tem-se que:

$$\begin{aligned} \alpha(k+1) - \alpha(k) &= \sum_{i=1}^n \beta_i^T L(k+1) \beta_i - \sum_{i=1}^n \beta_i^T L(k) \beta_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i^T [L(k+1) - L(k)] \beta_i. \end{aligned} \quad (2.5-28)$$

Substituindo (2.5-25) em (2.5-28), obtêm-se a seguinte expressão

$$\Delta\alpha(k) = - \sum_{i=1}^n \beta_i^T \bar{e}(k+1) \bar{e}^T(k+1) \beta_i - \sum_{i=1}^n \beta_i^T \bar{e}(k+1) \bar{R}^T(k) F(k) \bar{R}(k) \bar{e}^T(k+1) \beta_i. \quad (2-5-29)$$

De acordo com a equação (2.5-27), verifica-se que

$$\beta_i^T \bar{e}(k+1) = e_i(k+1) \quad (2.5-30)$$

e a equação (2.5-29) pode ser reescrita do seguinte modo

$$\Delta\alpha(k) = - \sum_{i=1}^n e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^n e_i^2(k+1) \bar{R}^T(k) F(k) \bar{R}(k) \leq 0. \quad (2.5-31)$$

Como

$$\alpha(k+1) - \alpha(k) \leq 0 \quad (2.5-32)$$

então

$$\alpha(0) \geq \alpha(1) \geq \alpha(2) \geq \dots \quad (2.5-33)$$

o que implica que a sequência  $\alpha(k)$  é uma sequência monotônica não crescente (Definição D.4).

Como a sequência  $\alpha(k)$  é limitada inferiormente por definição, pelo Teorema D.1 conclui-se que ela converge e pode-se então escrever que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = \alpha \quad (2.5-34)$$

Da equação (2.5-31), obtêm-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\alpha(k+1) - \alpha(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} - [1 + \bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)] \sum_{i=1}^n e_i^2(k+1) \quad (2.5-35)$$

implicando que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} - [1 + \bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)] \sum_{i=1}^n e_i^2(k+1) = 0. \quad (2.5-36)$$

Como o termo  $[1 + \bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)]$  é maior que 1, conclui-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i = 0 \quad (2.5-37)$$

o que implica em

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}(k) = 0 \quad (2.5-38)$$

Com isso conclui-se a prova do Teorema 2.2.

Considerando a equação (2.5-7) e usando o Teorema 2.2, chega-se a seguinte lei de adaptação para  $\hat{P}(k)$ :

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k) \quad (2.5-39)$$

onde

$$F(k+1) = F(k) - \frac{F(k)\bar{R}(k)\bar{R}^T(k)F(k)}{1+\bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)} ; F(0) > 0^* \quad (2.5-40)$$

afim de garantir a estabilidade assintótica do erro de estado.

Deve-se observar agora que  $\hat{P}(k+1)$  depende de  $\bar{e}(k+1)$ , de acordo com a equação (2.5-39), que por sua vez depende  $\bar{Y}(k+1)$  de acordo com a equação (2.5-3), que por fim depende de  $\hat{P}(k+1)$  como é visto pela equação (2.5-2).

Deste modo necessita-se explicitar  $\bar{e}(k+1)$  em função de variáveis conhecidas, sendo assim utiliza-se o procedimento descrito a seguir.

Definindo um modelo ajustável a priori e um erro a priori por

$$\bar{Y}^0(k+1) = \hat{P}(k)\bar{R}(k) \quad (2.5-41)$$

$$\bar{e}^0(k+1) = \bar{X}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) , \quad (2.5-42)$$

e subtraindo da equação (2.5-2) a equação (2.5-41), obtém-se que:

$$\bar{Y}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) = [\hat{P}(k+1) - \hat{P}(k)]\bar{R}(k) . \quad (2.5-43)$$

Substituindo na equação (2.5-43) a equação (2.5-39), e no lado esquerdo da equação resultante acrescenta-se e subtrai-se o termo  $\bar{X}(k+1)$  resultando em:

---

\* A notação  $F(0) > 0$  significa que a matriz  $F(0)$  é definida positiva.

$$-\left[\bar{X}(k+1) - \bar{Y}(k+1)\right] + \left[\bar{X}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1)\right] = \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k). \quad (2.5-44)$$

Substituindo as equações (2.5-3) e (2.5-42) na equação (2.5-44), chega-se que

$$-\bar{e}(k+1) + \bar{e}^0(k+1) = \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k) \quad (2.5-45)$$

o que implica em

$$\bar{e}(k+1) = \frac{\bar{e}^0(k+1)}{1 + \bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)} \quad (2.5-46)$$

em função de variáveis conhecidas.

### 2.5.2 - Identificador adaptativo série-paralelo a ganho decrescente com estado acessível.

Consideremos o processo discreto controlável, descrito pela equação (2.5-1).

Consideremos o modelo ajustável definido por:

$$\bar{Y}(k+1) = \hat{P}(k+1)\bar{R}(k) \quad (2.5-47)$$

onde

$$\hat{P}(k) = [\hat{A}(k) \quad \hat{B}(k)]$$

e

$$\bar{R}(k) = \begin{bmatrix} \bar{X}(k) \\ \dots \\ \bar{u}(k) \end{bmatrix}$$

Consideremos o erro de estado definido pela equação (2.5-3).

Estabeleceu-se para o identificador paralelo a ganho decrescente um objeto que será o deste também, ou seja, deve-se encontrar uma lei de adaptação para  $\hat{P}(k)$  de tal forma que o erro de estado convirja assintoticamente para zero:

Usando as equações (2.5-1), (2.5-47) e (2.5-3) obtém-se a equação do erro de estado

$$\bar{e}(k+1) = -[\hat{A}(k+1) - A]\bar{x}(k) - [\hat{B}(k+1) - B]\bar{u}(k) \quad (2.5-48)$$

A equação (2.5-48) pode ser equivalentemente reescrita

$$\bar{e}(k+1) = -[\hat{P}(k+1) - P]\bar{R}(k) \quad (2.5-49)$$

onde

$$P = [A \quad B] \quad .$$

Da mesma maneira que para o identificador paralelo a ganho decrescente, para mostrar a estabilidade assintótica do erro de estado, é necessário realimentar o sistema linear (2.5-49) convenientemente. O Teorema 2.2 que permite encontrar tal estrutura de realimentação é ilustrado na Figura 2.2.

Considerando a equação (2.5-49) e usando o Teorema 2.2, chega-se a seguinte lei de adaptação para  $\hat{P}(k)$ :

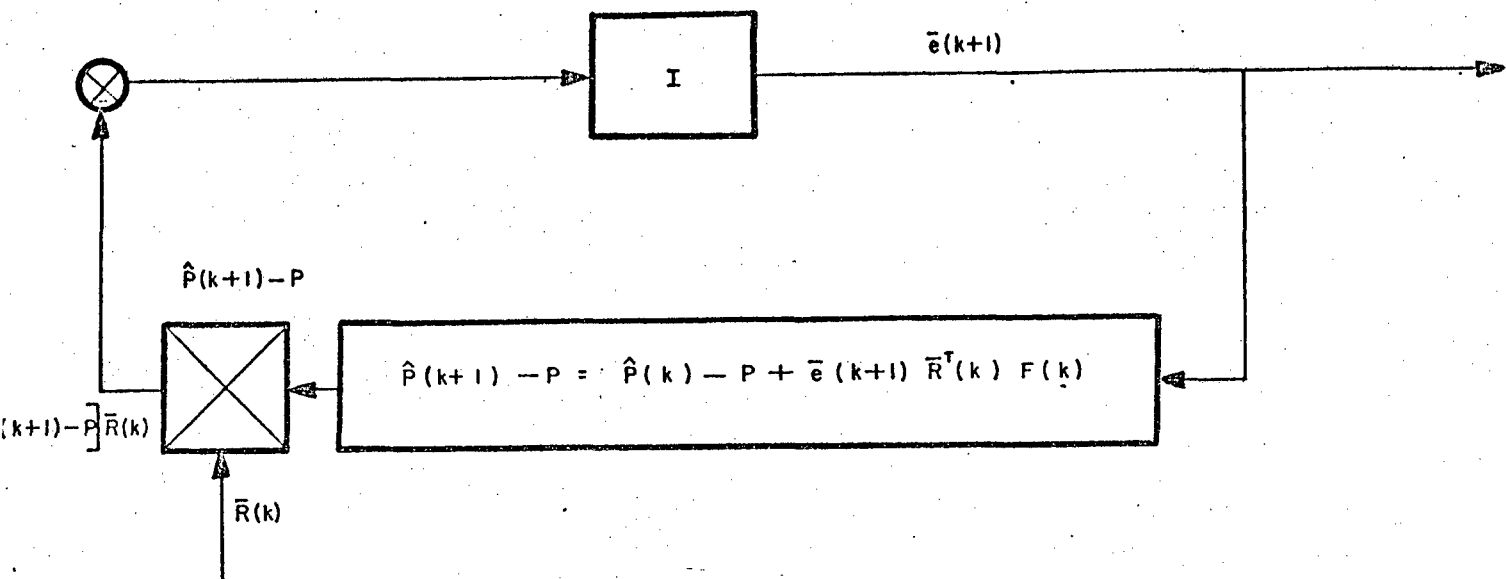


Figura 2.5-2: - Sistema linear realimentado.

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + \bar{e}(k+1) \bar{R}^T(k) F(k) \quad (2.5-50)$$

onde

$$F(k+1) = F(k) - \frac{F(k) \bar{R}(k) \bar{R}^T(k) F(k)}{1 + \bar{R}^T(k) F(k) \bar{R}(k)} ; F(0) > 0 \quad (2.5.51)$$

afim de garantir a estabilidade assintótica do erro de estado.

Deve-se observar agora que  $\hat{P}(k+1)$  depende de  $\bar{e}(k+1)$ , de acordo com a equação (2.5-50), que por sua vez depende de  $\bar{Y}(k+1)$  de acordo com a equação (2.5.3), que por fim depende de  $\hat{P}(k+1)$  como é visto pela equação (2.5-47). Deste modo necessita-se explicitar  $\bar{e}(k+1)$  em função de variáveis conhecidas, sendo assim utiliza-se o procedimento descrito a seguir.

Definindo um modelo ajustável a priori e um erro a priori por



$$\bar{Y}^0(k+1) = \hat{P}(k) \bar{R}(k) \quad (2.5-52)$$

$$\bar{e}^0(k+1) = \bar{X}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) \quad (2.5-53)$$

e subtraindo da equação (2.5-47) a equação (2.5-52), obtém-se que:

$$\bar{Y}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1) = [\hat{P}(k+1) - \hat{P}(k)] \bar{R}(k) \quad (2.5-54)$$

Substituindo na equação (2.5-54) a equação (2.5-50), e no lado esquerdo da equação resultante acrescenta-se e subtrai-se o termo  $\bar{X}(k+1)$  resultando em:

$$-[\bar{X}(k+1) - \bar{Y}(k+1)] + [\bar{X}(k+1) - \bar{Y}^0(k+1)] = \bar{e}(k+1) \bar{R}^T(k) F(k) \bar{R}(k) \quad (2.5-55)$$

Com a substituição das equações (2.5-3) e (2.5-53) na equação (2.5-55), chega-se que

$$-\bar{e}(k+1) + \bar{e}^0(k+1) = \bar{e}(k+1) \bar{R}^T(k) F(k) \bar{R}(k) \quad (2.5-56)$$

o que implica em

$$\bar{e}(k+1) = \frac{\bar{e}^0(k+1)}{1 + \bar{R}^T(k) F(k) \bar{R}(k)} \quad (2.5-57)$$

## 2.6. Conclusão

O identificador paralelo de Landau necessita de uma pré-estimativa dos parâmetros da matriz A. Além disto, este algoritmo só pode ser aplicado à sistemas estáveis.

O identificador variante paralelo bem como o "a ganho decrescente paralelo" contornam estes problemas.

Os identificadores série-paralelo não requerem pré-estimação da matriz A e o processo à ser identificado pode ser instável.

Testes de simulação, apresentados adiante, mostrarão que em presença de ruído do tipo guassiano o identificador paralelo a ganho decrescente obteve o melhor resultado.

Os capítulos a seguir mostram os resultados obtidos na implementação dos algoritmos discutidos neste capítulo.

## C A P Í T U L O 3

### SIMULAÇÃO DIGITAL

#### 3.1. Objetivo do capítulo

O objetivo deste capítulo é o de mostrar os resultados relativos à simulação digital dos algoritmos apresentados no Capítulo 2. Neste capítulo também é discutido o tipo de entrada utilizada nas simulações, e é feita uma pequena descrição do PDP 11/40. Em seguida é fornecido os resumos e fluxogramas dos métodos apresentados no capítulo anterior, bem como resultados de simulação. Ainda foram feitas simulações aplicando-se um ruído gaussiano ao processo simulado, sendo utilizado para estas simulações apenas identificadores a ganho decrescente. Finalmente são apresentadas conclusões obtidas nas simulações digitais.

#### 3.2. Introdução

Com a finalidade de ser avaliado o desempenho dos identificadores apresentados antes dos mesmos serem aplicados a um processo simulado em computador analógico, resolveu-se simular um processo discreto, linear, estável e invariante no tempo, programando-o em linguagem FORTRAN, para que o mesmo fosse utilizado diretamente pelos algoritmos, implementados no PDP 11/40.

As entradas ou excitações do processo foram geradas por uma subrotina, que fornece sequências binárias pseudo-aleató-

rias cujo comprimento pode ser ajustado.

Simulando-se então digitalmente o processo, pode-se avaliar o desempenho dos identificadores utilizando-se a distância de estado e a distância paramétrica como definidos abaixo.

Distância de estado:

$$D_E = \sum_{i=1}^n (X_i - y_i)^2 \quad (3.2-1)$$

onde  $X_i$  são os elementos do vetor de estado do processo e  $y_i$  são os elementos do vetor de estado do modelo ajustável.

E distância paramétrica:

$$D_P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\hat{p}_{ij} - p_{ij})^2 \quad (3.2-2)$$

onde  $\hat{p}_{ij}$  é o parâmetro estimado e  $p_{ij}$  é o parâmetro do processo simulado, sendo previamente conhecido.

Procurou-se avaliar também o desempenho dos identificadores a ganho decrescente quando submetido a um ruído do tipo Gaussiano de média zero e desvio variável, sendo estes inseridos na saída e nos estados do processo simulado.

### 3.3. Descrição do PDP 11/40

Neste trabalho utilizou-se o minicomputador PDP 11/40 do departamento de Engenharia Elétrica da UFSC.

O computador em questão é apropriado como dispositivo de computação em tempo real, mas também como componente de sistemas de controle e instrumentação, tais como controle de tempori-

zação e sequência lógica de operações, armazenamento, codificação de dados e geração de funções. O PDP 11/40 dispõe dos seguintes periféricos: uma leitora/perfuradora de fita de papel; um terminal LINE-PRINTER (que serve como saída); um terminal TELA (que serve como saída); um terminal DECWRITER (que serve como entrada/saída; um Laboratory Peripheral System (LPS-11), que é composto de 8 conversores analógico-digital, sendo 4 canais de  $\pm 1$  volt e 4 outros de  $\pm 5$  volts, 2 conversores digital-analógico de  $\pm 10$  volts de saída, 2 Schmitt Triggers com facilidade de interferir na operação do LPS-11, e um Real Time Clock que pode ser programado de tal modo a nos permitir selecionar frequências. A capacidade de memória deste computador é de 20k.

### 3.4. Sequências binárias pseudo-aleatórias

#### 3.4.1 - Generalidades

As sequências binárias pseudo-aleatórias, nos últimos anos, vem sendo empregadas com muito sucesso na identificação de processos [2,4,8,16,18] por estas serem ricas em frequência e conseqüentemente conduzirem a uma melhor identificação [18].

Neste trabalho obteve-se estas sequências por intermédio de um programa em FORTRAN, sendo este bastante maleável por oferecer sequências de comprimentos variáveis. Além destas sequências serem geradas por programas, estas também poderiam ser obtidas por implementação prática utilizando-se registradores de deslocamento e portas lógicas [2].

#### 3.4.2 - Geração de sequências binárias pseudo-aleatórias [4].

A sequência binária pseudo-aleatória satisfaz uma equação do tipo:

$$D^m X \oplus D^{m-1} X \oplus \dots \oplus D X \oplus X = y \quad (3.5-1)$$

onde  $D^m$  denota um atraso de  $m$  intervalos, tal que  $D^m[X(i)] = X(i-m)$  sendo " $i$ " o instante de amostragem e  $\oplus$  é a adição módulo 2 ou "ou exclusivo", de tal maneira que

$$0 \oplus 0 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0.$$

Reescrevendo a equação (3.4-1) e fazendo  $y = 0$ , obtêm-se a chamada sequência nula, sendo o número máximo ou período máximo desta sequência de ordem  $m$  igual a  $2^m - 1$ . A sequência resultante recebe o nome de sequência nula de máximo comprimento, que é representada abaixo:

$$(D^m \oplus \dots \oplus D \oplus I) X = 0 \quad (3.4-2)$$

Para que a equação polinomial (3.4-2) produza uma sequência nula de máximo comprimento é necessário que ela seja irreduzível, isto é, não pode ser um produto de duas ou mais equações polinomiais de ordem inferior, e também não pode ser um fator módulo 2 de  $D^n \oplus 1$  para  $n < 2^m - 1$ . Considerando agora uma equação

polinomial que respeite as duas restrições acima estabelecidas, obtem-se para  $m = 5$  a seguinte equação:

$$(D^6 \oplus D^5)X = X, \quad (3.4-3)$$

mostrando que a saída do 6º elemento de atraso somado com o 5º elemento de atraso produz  $X$ . Abaixo é mostrado na Figura 3.4-1 o gerador de sequência pseudo-aleatória para  $m = 5$ .

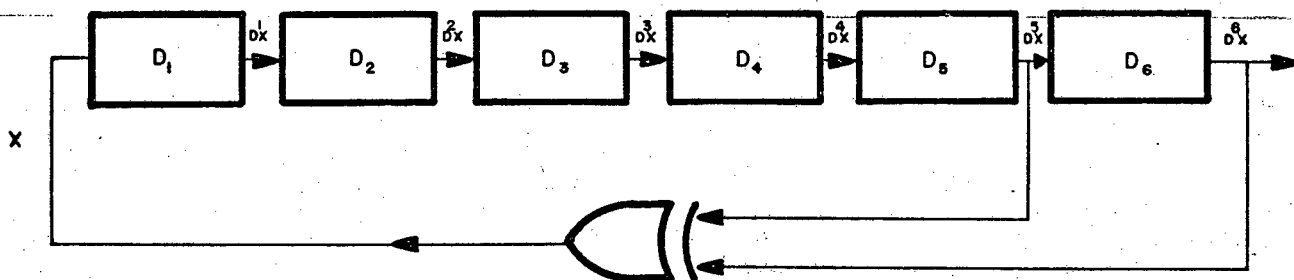


Figura 3.4-1: - Gerador de sequência pseudo-aleatória para  $m = 5$

Com a finalidade de ser obtido um valor médio das sequências pseudo-aleatórias próximo de zero, escolheu-se para o trabalho em questão os níveis binários +1 e -1, desta maneira mostra-se que:

$$\text{Valor médio da sequência} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i = \frac{1 \times 2^{m-1} + (-1)(2^{m-1} - 1)}{M} = \frac{1}{M}, \quad (3.4-4)$$

sendo verificado facilmente que o estado +1 ocorre  $2^{m-1}$  vezes e o

estado -1 ocorre  $2^{m-1}-1$  vezes.

### 3.5. Resumos e Fluxogramas dos algoritmos de identificação

Nesta secção descreve-se os resumos e fluxogramas dos algoritmos de identificação estudados no Capítulo 2.

#### 3.5.1 - Identificadores de Landau

##### 3.5.1.a - Identificador paralelo

Abaixo é descrito as equações que caracterizam o identificador paralelo de Landau, mostradas na Secção 2.3-1, que deram origem ao algoritmo do identificador em questão.

Processo:

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k) . \quad (3.5-1)$$

- Modelo ajustável:

$$\bar{y}(k+1) = \hat{A}(k+1)\bar{y}(k) + \hat{B}(k+1)\bar{u}(k) . \quad (3.5-2)$$

Erro de estado:

$$\bar{e}(k) = \bar{x}(k) - \bar{y}(k) . \quad (3.5-3)$$

Lei de adaptação:



$$\hat{A}(k+1) = \hat{A}(k) + F_A \bar{V}(k+1) \left[ G_A \bar{Y}(k) \right]^T \quad (3.5-4)$$

$$\hat{B}(k+1) = \hat{B}(k) + F_B \bar{V}(k+1) \left[ G_B \bar{u}(k) \right]^T \quad (3.5-5)$$

$$\bar{Y}^o(k+1) = \hat{A}(k) \bar{Y}(k) + \hat{B}(k) \bar{u}(k) \quad (3.5-6)$$

$$\bar{V}^o(k+1) = D \left[ \bar{X}(k+1) - \bar{Y}^o(k+1) \right] \quad (3.5-7)$$

$$N(k) = F_A \bar{Y}^T(k) G_A \bar{Y}(k) + F_B \bar{u}^T(k) G_B \bar{u}(k) \quad (3.5-8)$$

$$\bar{V}(k+1) = \left[ I + DN(k) \right]^{-1} \bar{V}^o(k+1) \quad (3.5-9)$$

Em seguida é mostrado na Figura 3.5-1 o fluxograma que gerou o programa do identificador paralelo.

### 3.5.1.b - Identificador série-paralelo de Landau.

Abaixo é descrito as equações que caracterizam o identificador série-paralelo de Landau, estudadas na Secção 2.3-2, que deram origem ao algoritmo do identificador em questão.

Processo:

$$\bar{X}(k+1) = A\bar{X}(k) + B\bar{u}(k) \quad (3.5-10)$$

Modelo ajustável:

$$\bar{y}(k+1) = \hat{A}(k+1)\bar{X}(k) + \hat{B}(k+1)\bar{u}(k) \quad (3.5-11)$$

Erro de estado:

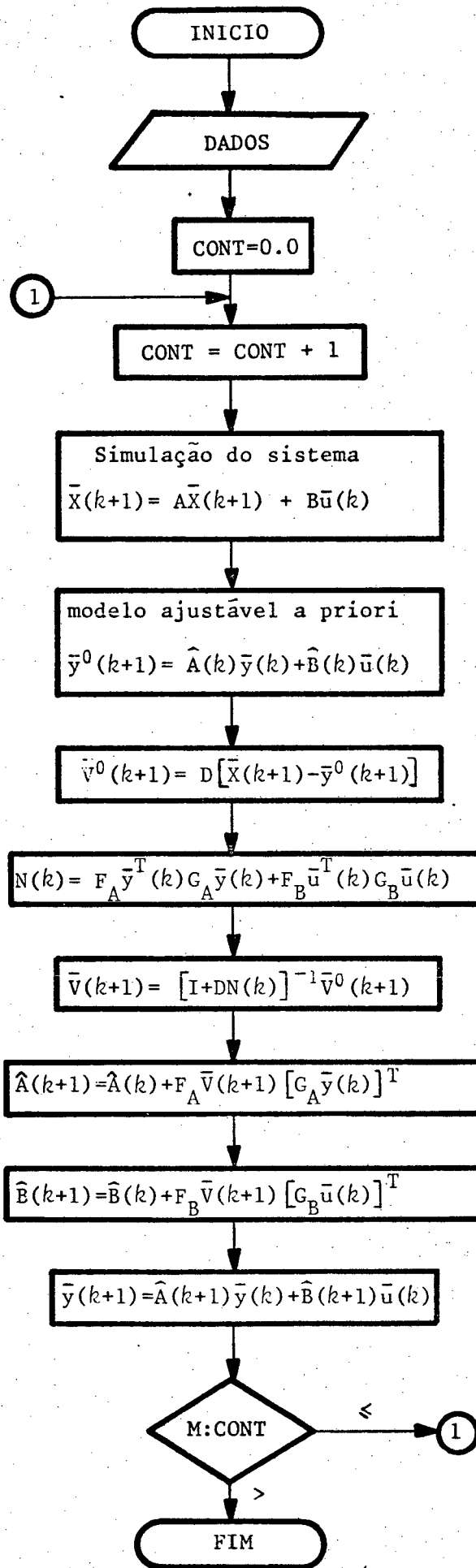


Figura 3.5-1: - Fluxograma do identificador paralelo.

$$\bar{e}(k) = \bar{X}(k) - \bar{Y}(k) . \quad (3.5-12)$$

Lei de adaptação:

$$\hat{A}(k+1) = \hat{A}(k) + F_A \bar{V}(k+1) \left[ G_A \bar{X}(k) \right]^T \quad (3.5-13)$$

$$\hat{B}(k+1) = \hat{B}(k) + F_B \bar{V}(k+1) \left[ G_B \bar{u}(k) \right]^T \quad (3.5-14)$$

$$\bar{Y}^o(k+1) = \hat{A}(k) \bar{X}(k) + \hat{B}(k) \bar{u}(k) \quad (3.5-15)$$

$$\bar{V}^o(k+1) = D \left[ \bar{X}(k+1) - \bar{Y}^o(k+1) \right] \quad (3.5-16)$$

$$N(k) = F_A \bar{X}^T(k) G_A \bar{X}(k) + F_B \bar{u}^T(k) G_B \bar{u}(k) \quad (3.5-17)$$

$$\bar{V}(k+1) = \left[ I + DN(k) \right]^{-1} \bar{V}^o(k+1) . \quad (3.5-18)$$

Em seguida é mostrada na Figura 3.5-2 o fluxograma que gerou o programa do identificador série-paralelo.

### 3.5.2 - Identificadores variante de Landau.

#### 3.5.2.a - Identificador paralelo variante.

Abaixo é descrito as equações que caracterizam o identificador paralelo variante, estudados na Secção 2.4-1, que deram origem ao algoritmo de identificador em questão.

Processo:

$$\bar{X}(k+1) = A\bar{X}(k) + B\bar{u}(k) . \quad (3.5-19)$$

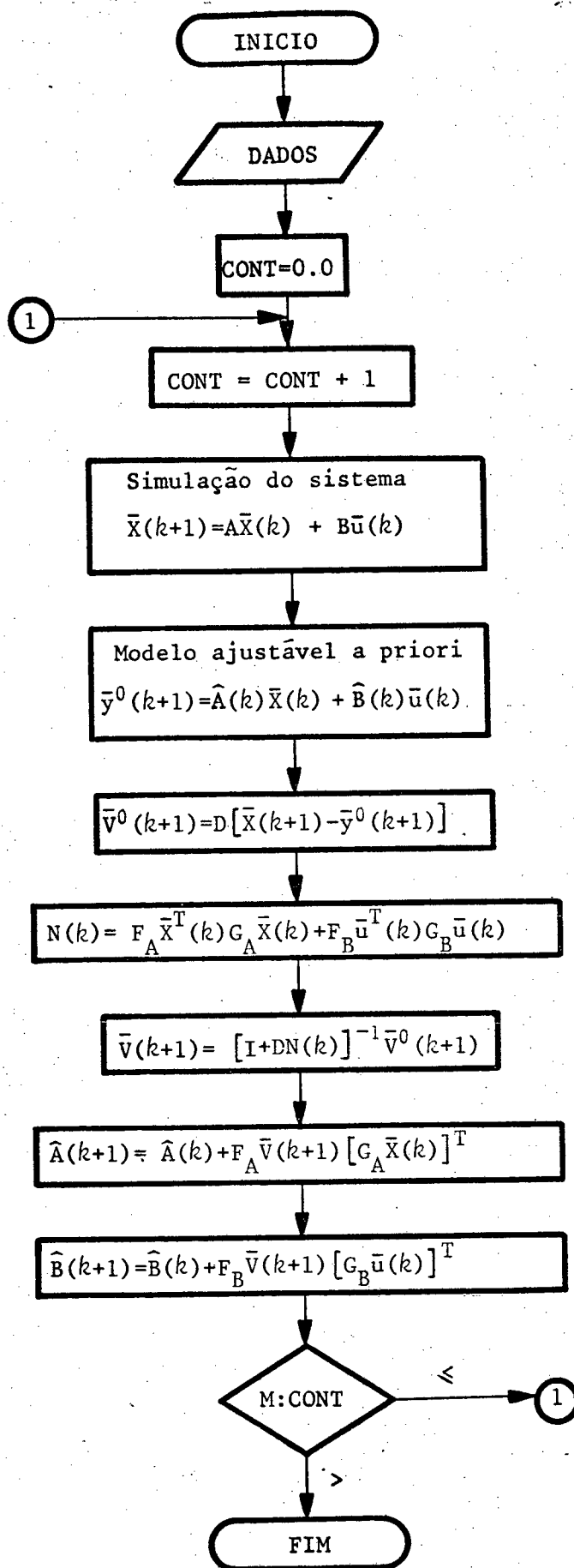


Figura 3.5-2: - Fluxograma do identificador série-paralelo.

Modelo ajustável:

$$\bar{y}(k+1) = \hat{P}(k+1)\bar{R}(k) \quad (3.5-20)$$

onde

$$\hat{P}(k) = \begin{bmatrix} \hat{A}(k) & ; & \hat{B}(k) & ; & \hat{C}(k) \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}(k) = \begin{bmatrix} \bar{y}(k) \\ \bar{u}(k) \\ \bar{e}(k) \end{bmatrix} .$$

Erro de estado:

$$\bar{e}(k) = \bar{x}(k) - \bar{y}(k) . \quad (3.5-21)$$

Lei de adaptação:

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + F\bar{V}(k+1) [G\bar{R}(k)]^T \quad (3.5-22)$$

$$\bar{y}^o(k+1) = \hat{P}(k)\bar{R}(k) \quad (3.5-23)$$

$$\bar{V}^o(k+1) = D[\bar{x}(k+1) - \bar{y}^o(k+1)] \quad (3.5-24)$$

$$N(k) = F\bar{R}^T(k) G \bar{R}(k) \quad (3.5-25)$$

para simplificar fazendo  $F = I$ , obtém-se:

$$N(k) = \bar{R}^T(k) G \bar{R}(k) . \quad (3.5-26)$$

$$\bar{V}(k+1) = [I + DN(k)]^{-1} \bar{V}^o(k+1) , \quad (3.5-27)$$

escolhendo  $D = I$  e como  $N(k)$  é um escalar, pode-se reescrever a equação (3.5-27)

$$\bar{V}(k+1) = \frac{\bar{V}^o(k+1)}{1 + \bar{R}^T(k)G\bar{R}(k)} \quad (3.5-28)$$

Em seguida é mostrado na Figura 3.5-3 o fluxograma que gerou o programa do identificador paralelo variante.

### 3.5.2.b - Identificador série-paralelo variante.

Abaixo é descrito as equações que caracterizam o identificador série-paralelo variante, estudadas na Secção 2.4-2, que deram origem ao algoritmo do identificador em questão.

Processo:

$$\bar{X}(k+1) = A\bar{X}(k) + B\bar{u}(k) \quad (3.5-29)$$

Modelo ajustável:

$$\bar{y}(k+1) = \hat{P}(k+1) \bar{R}(k) \quad (3.5-30)$$

onde

$$\hat{P}(k) = \begin{bmatrix} \bar{A}(k) & ; & \hat{B}(k) \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}(k) = \begin{bmatrix} \bar{X}(k) \\ \bar{u}(k) \end{bmatrix}$$

Erro de estado:

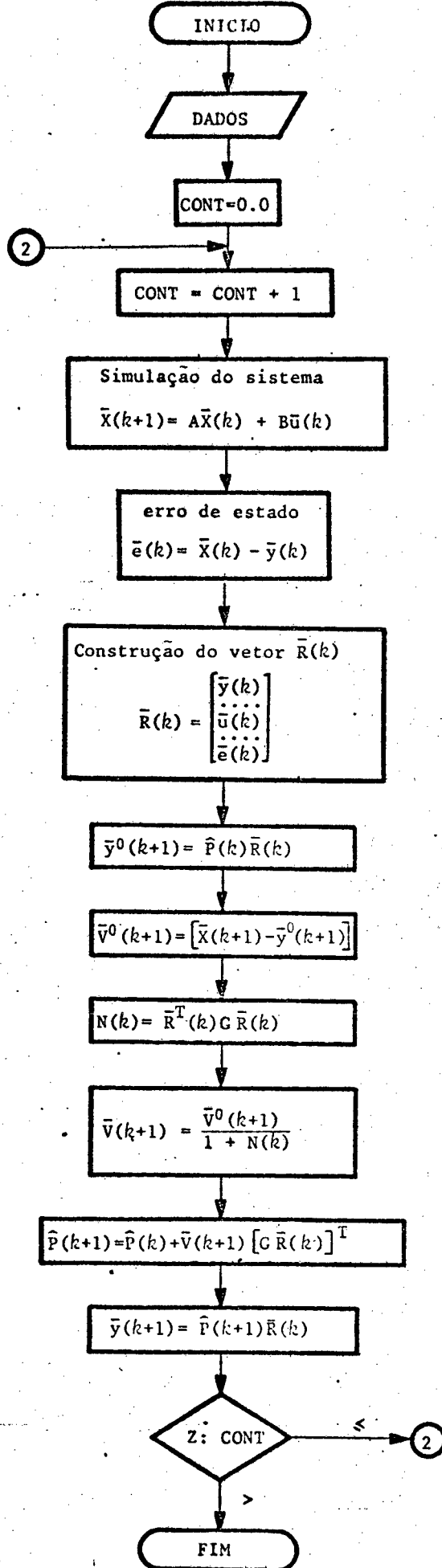


Figura 3.5-3: - Fluxograma do identificador paralelo variante.

$$\bar{e}(k) = \bar{X}(k) - \bar{Y}(k) \quad . \quad (3.5-31)$$

Lei de adaptação:

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + F\bar{V}(k+1) [G \bar{R}(k)]^T \quad (3.5-32)$$

$$\bar{y}^o(k+1) = \hat{P}(k) \bar{R}(k) \quad (3.5-33)$$

$$\bar{V}^o(k+1) = D [\bar{X}(k+1) - \bar{y}^o(k+1)] \quad (3.5-34)$$

$$N(k) = F \bar{R}^T(k) G \bar{R}(k) \quad , \quad (3.5-35)$$

para simplificar fazendo  $F = I$ , obtêm-se

$$N(k) = \bar{R}^T(k) G \bar{R}(k) \quad . \quad (3.5-36)$$

$$\bar{V}(k+1) = [I + DN(k)]^{-1} \bar{V}^o(k+1) \quad , \quad (3.5-37)$$

escolhendo  $D = I$  e como  $N(k)$  é um escalar, pode-se reescrever a equação (3.5-37)

$$\bar{V}(k+1) = \frac{\bar{V}^o(k+1)}{1 + \bar{R}^T(k) G \bar{R}(k)} \quad . \quad (3.5-38)$$

Em seguida é mostrado na Figura 3.5-4 o fluxograma que gerou o programa do identificador série-paralelo variante.

### 3.5.3 - Identificadores a ganho decrescente



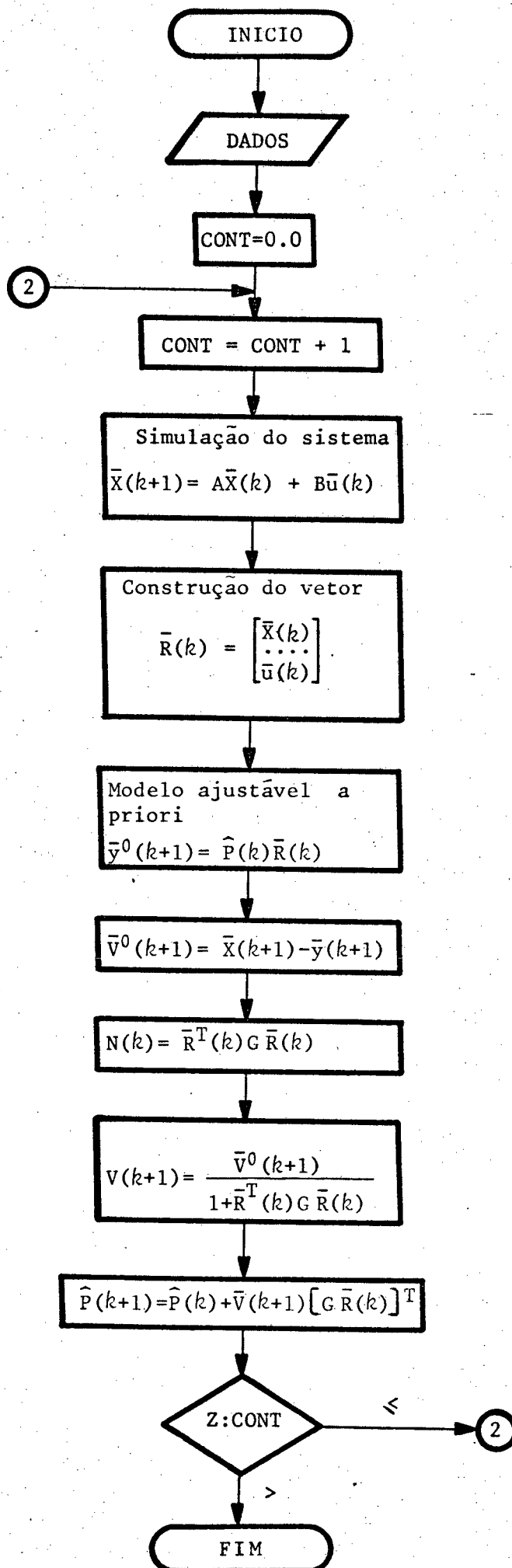


Figura 3.5-4: - Fluxograma do identificador série-paralelo variante.

### 3.5.3.a - Identificador paralelo a ganho decrescente

Abaixo é descrito as equações que caracterizam o identificador paralelo a ganho decrescente, apresentadas na Secção 2.5-1, que deram origem ao algoritmo do identificador em questão.

Processo:

$$\bar{X}(k+1) = A\bar{X}(k) + B\bar{u}(k) \quad (3.5-39)$$

Modelo ajustável:

$$\bar{y}(k+1) = \hat{P}(k+1)\bar{R}(k) \quad (3.5-40)$$

onde

$$\hat{P}(k) = \begin{bmatrix} \hat{A}(k) & : & \hat{B}(k) & : & \hat{C}(k) \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{P}(k) = \begin{bmatrix} \bar{y}(k) \\ \bar{u}(k) \\ \bar{e}(k) \end{bmatrix} .$$

Erro de estado:

$$\bar{e}(k) = \bar{X}(k) - \bar{y}(k) \quad (3.5-41)$$

Lei de adaptação:

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + \bar{e}(k+1)\bar{R}^T(k)F(k) \quad (3.5-42)$$

onde

$$F(k+1) = F(k) - \frac{F(k)\bar{R}(k)\bar{R}^T(k)F(k)}{1 + \bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)} ; F(0) > 0 \quad (3.5-43)$$

$$\bar{y}^o(k+1) = \hat{P}(k)\bar{R}(k) \quad (3.5-44)$$

$$\bar{e}^o(k+1) = \bar{X}(k+1) - \bar{y}^o(k+1) \quad (3.5-45)$$

$$\bar{e}(k+1) = \frac{\bar{e}^o(k+1)}{1 + \bar{R}^T(k)F(k)\bar{R}(k)} \quad (3.5-46)$$

Em seguida é mostrado na Figura 3.5-5 o fluxograma que gerou o programa do identificador paralelo a ganho decrescente.

### 3.5.3.b - Identificador série-paralelo a ganho decrescente

Abaixo é descrito as equações que caracterizam o identificador série-paralelo a ganho decrescente, apresentadas na Seção 2.5-2, que deram origem ao algoritmo do identificador em questão.

Processo:

$$\bar{X}(k+1) = A\bar{X}(k) + B\bar{u}(k) \quad (3.5-47)$$

Modelo ajustável:

$$\bar{y}(k+1) = \hat{P}(k+1)\bar{R}(k) \quad (3.5-48)$$

onde

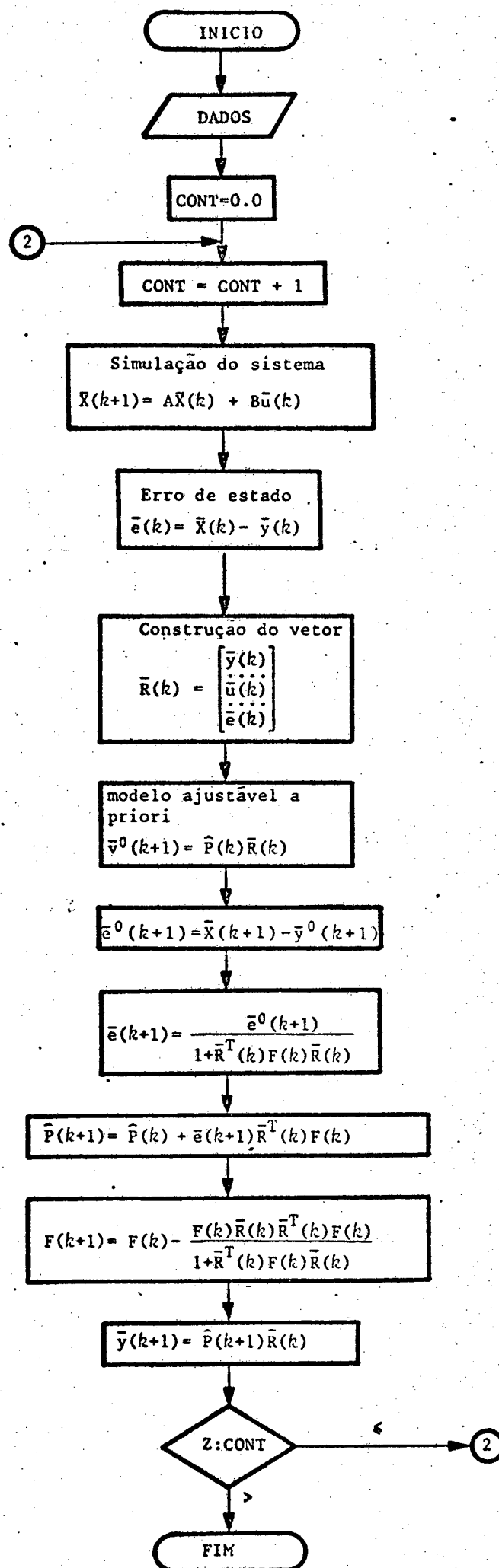


Figura 3.5-5: - Fluxograma do identificador paralelo a ganho decrescente.

$$\hat{P}(k) = \begin{bmatrix} \hat{A}(k) & \vdots & \hat{B}(k) \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{R}(k) = \begin{bmatrix} \bar{X}(k) \\ \bar{u}(k) \end{bmatrix} .$$

Erro de estado:

$$\bar{e}(k) = \bar{X}(k) - \bar{Y}(k) \quad (3.5-49)$$

Lei de adaptação:

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + \bar{e}(k+1) \bar{R}^{-T}(k) F(k) \quad (3.5-50)$$

onde

$$F(k+1) = F(k) - \frac{F(k) \bar{R}(k) \bar{R}^{-T}(k) F(k)}{1 + \bar{R}^{-T}(k) F(k) \bar{R}(k)} ; F(0) > 0 \quad (3.5-51)$$

$$\bar{Y}^o(k+1) = \hat{P}(k) \bar{R}(k) \quad (3.5-52)$$

$$\bar{e}^o(k+1) = \bar{X}(k+1) - \bar{Y}^o(k+1) \quad (3.5-53)$$

$$\bar{e}(k+1) = \frac{\bar{e}^o(k+1)}{1 + \bar{R}^{-T}(k) F(k) \bar{R}(k)} \quad (3.5-54)$$

Em seguida é mostrado na Figura 3.5-6 o fluxograma que gerou o programa do identificador série-paralelo a ganho decrescente.

### 3.6 - Resultados

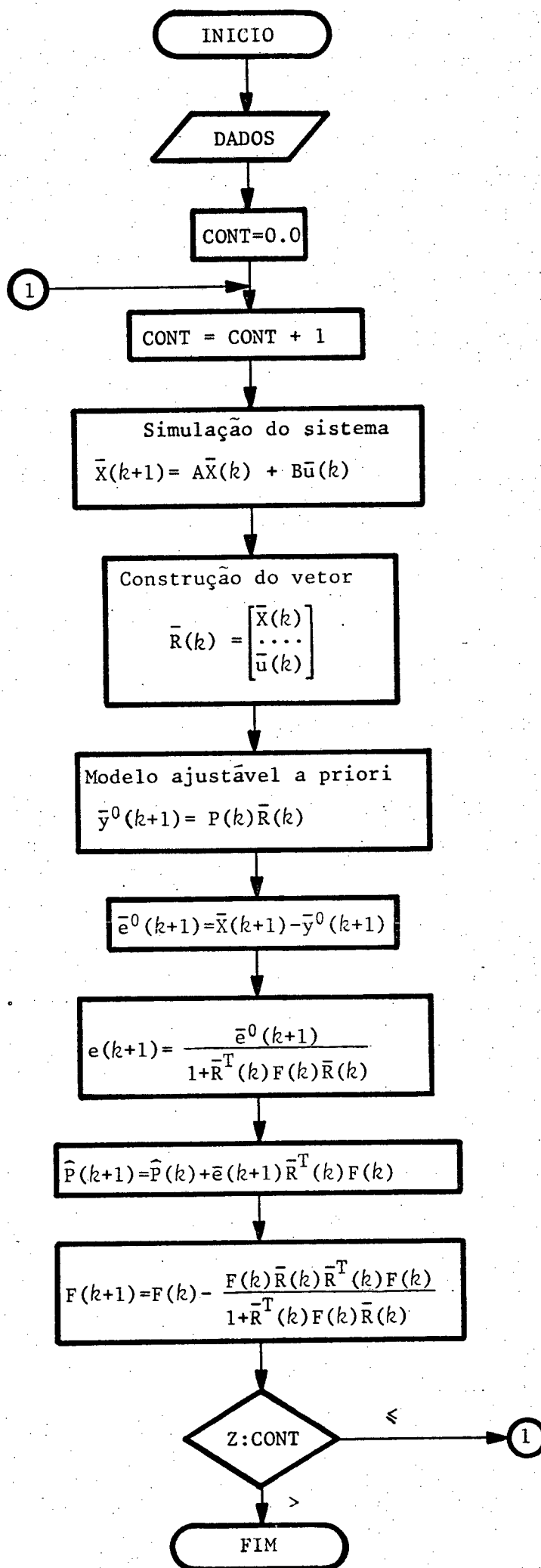


Figura 3.5-6: - Fluxograma do identificador série-paralelo a ganho decrescente.

Diversos resultados foram encontrados para vários processos simulados digitalmente, mas para efeito de ilustração escolheu-se o processo apresentado em [3]. Afim de se obter resultados comparativos utilizou-se então o processo mencionado para as simulações efetuadas, utilizando-se também o mesmo ganho de ponderização, as mesmas condições iniciais e o mesmo número de iterações.

Processo simulado é dado por [3]:

$$\bar{X}(k+1) = \begin{bmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ -0,1 & 0,65 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ 0,333 & -0,833 & -0,25 & 1,0 \end{bmatrix} \bar{X}(k) + \begin{bmatrix} 1,0 & 2,0 \\ 0,25 & 0,8 \\ 2,0 & 0,0 \\ 0,5 & 4,0 \end{bmatrix} \bar{u}(k) \quad (3.6-1)$$

Ganho de ponderação nos algoritmos a ganho constante bem como o valor inicial do ganho para os algoritmos a ganho decrescente foi escolhido ser  $10^{12}$  I.

O estado inicial do processo bem como do modelo ajustável foram supostos nulos.

As duas entradas do processo foram consideradas como sendo sinais pseudo-aleatórios de comprimentos 127 e 1023 respectivamente.

A seguir serão apresentados alguns resultados obtidos para a simulação digital.

### 3.6.1 - Resultados obtidos para os Identificadores de Landau

Os resultados obtidos para os identificadores de Landau tanto para o paralelo como para o série paralelo foram seme-

lhantes, e podem ser vistos nas Figuras 3.6-1 e 3.6-2. Na Figura 3.6-1 é mostrada a distância entre o estado do processo e o estado do modelo ajustável, enquanto que a Figura 3.6-2 mostra as distâncias paramétricas das matrizes A e B. Observe na Figura 3.6-1 que a distância do estado converge em 200 iterações. A Figura 3.6-2 mostra que a distância paramétrica de B converge em 200 iterações, enquanto que a distância paramétrica da matriz A se estabiliza em torno de 2.

Os dois identificadores foram capazes de anular o erro de estado enquanto que a identificação não foi atingida. Valores estimados de A e B na milésima iteração são apresentados abaixo:

$$\hat{A}(1000) = \begin{bmatrix} 0,168 & 0,074 & 0,052 & -0,086 \\ 0,012 & 0,033 & 0,035 & -0,057 \\ 0,014 & -0,079 & 0,004 & 0,992 \\ 0,201 & -0,108 & -0,291 & 1,067 \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{B}(1000) = \begin{bmatrix} 1,0 & 2,0 \\ 0,25 & 0,8 \\ 2,0 & 0,0 \\ 0,5 & 4,0 \end{bmatrix},$$

mostrando que a identificação não foi atingida.

### 3.6.2 - Resultados obtidos para os Identificadores variantes de Landau.

Os resultados obtidos para os identificadores varian



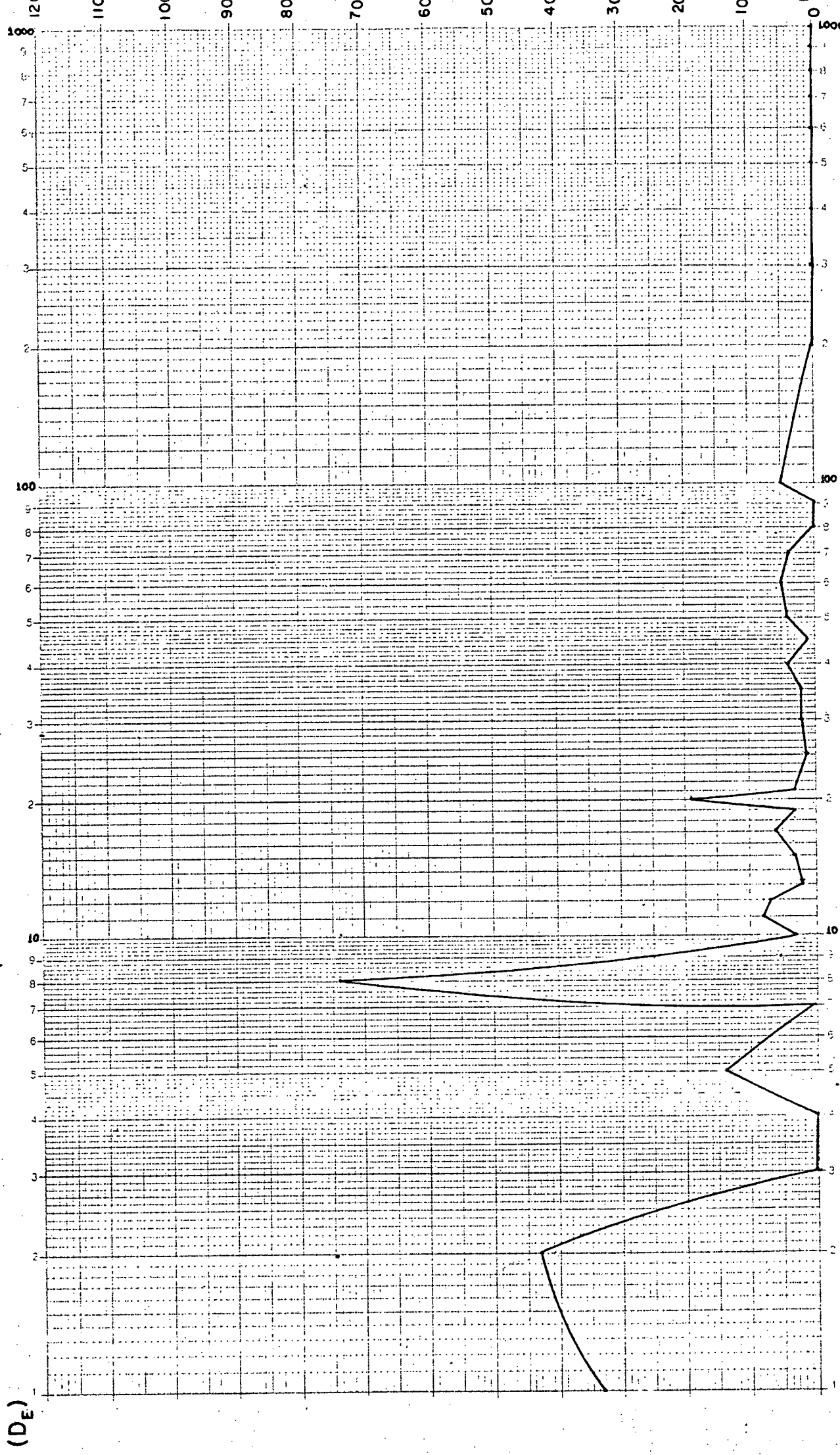


FIGURA 3.6-1:-DISTÂNCIA DE ESTADO PARA OS IDENTIFICADORES DE LANDAU.

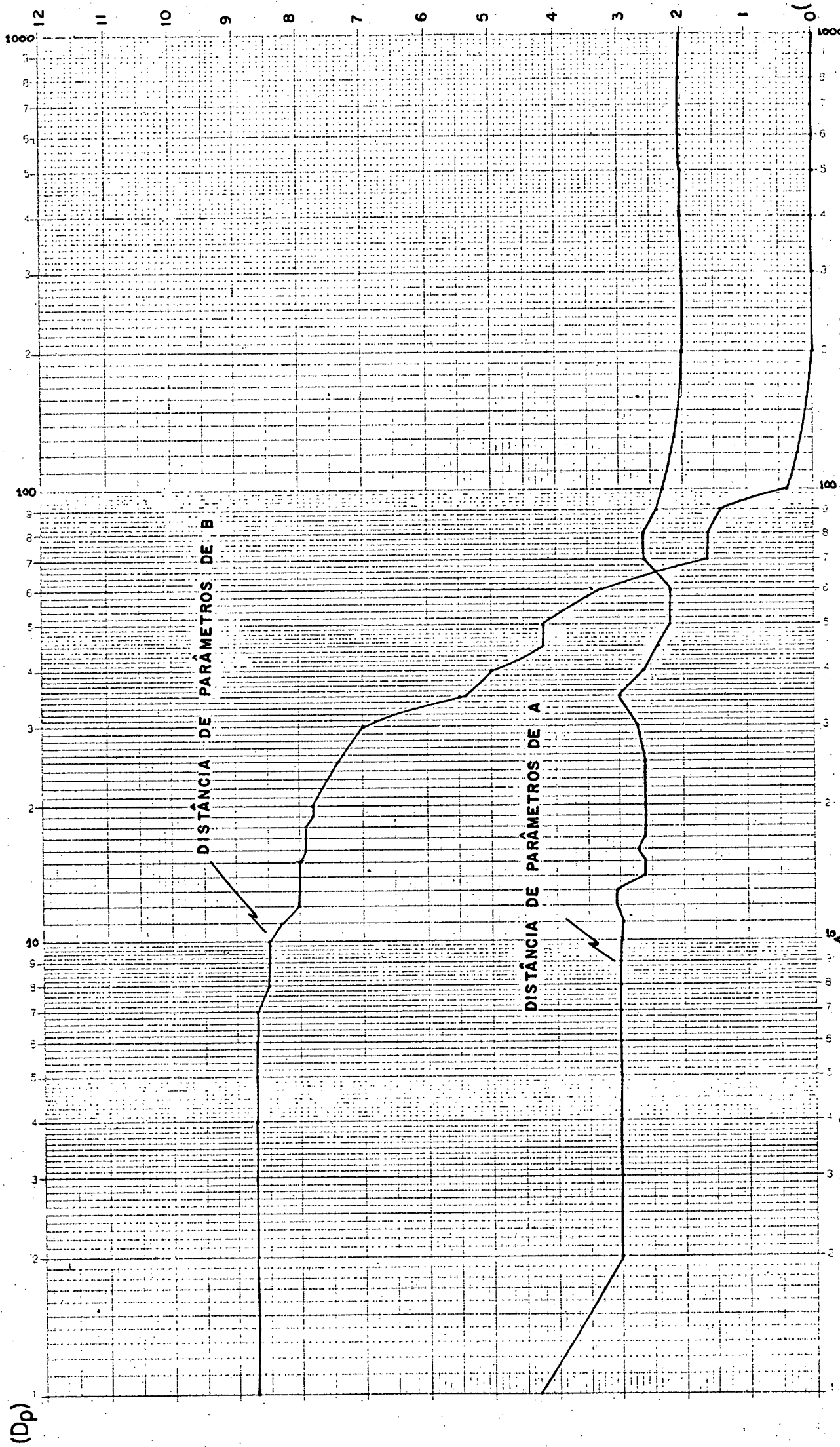


FIGURA.3.6-2: - DISTÂNCIA DE PARÂMETROS PARA OS IDENTIFICADORES DE LANDAU.

tes tanto para o paralelo como para o série-paralelo foram semelhantes, e podem ser vistos nas Figuras 3.6-3 e 3.6-4. Na Figura 3.6-3 é mostrada a distância entre os estados enquanto que a Figura 3.6-4 mostra a distância de parâmetros. É interessante observar que enquanto que na Figura 3.6-3 a distância de estado converge em 200 iterações, na Figura 3.6-4 a distância de parâmetros se estabiliza em torno de 2,25.

Da mesma forma que os identificadores de Landau, os variantes também foram capazes de anular o erro de estado enquanto que os parâmetros não foram identificados. É mostrado abaixo os parâmetros estimados na milésima iteração.

$$\hat{A}(1000) = \begin{bmatrix} 0,264 & 0,084 & -0,031 & 0,052 \\ 0,079 & 0,028 & -0,021 & 0,035 \\ -0,014 & 0,051 & 0,002 & 0,997 \\ 0,071 & 0,077 & -0,219 & 0,949 \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{B}(1000) = \begin{bmatrix} 1,0 & 2,0 \\ 0,25 & 0,8 \\ 2,0 & 0,0 \\ 0,5 & 4,0 \end{bmatrix}$$

### 3.6.3 - Resultados obtidos para os identificadores a ganho decrescente.

Os resultados obtidos para os identificadores a ganho decrescente tanto para o paralelo como para o série paralelo foram semelhantes, e são apresentados nas Figuras 3.6-5 e 3.6-6. Na Figura 3.6-5 pode ser verificado que a distância entre o esta-

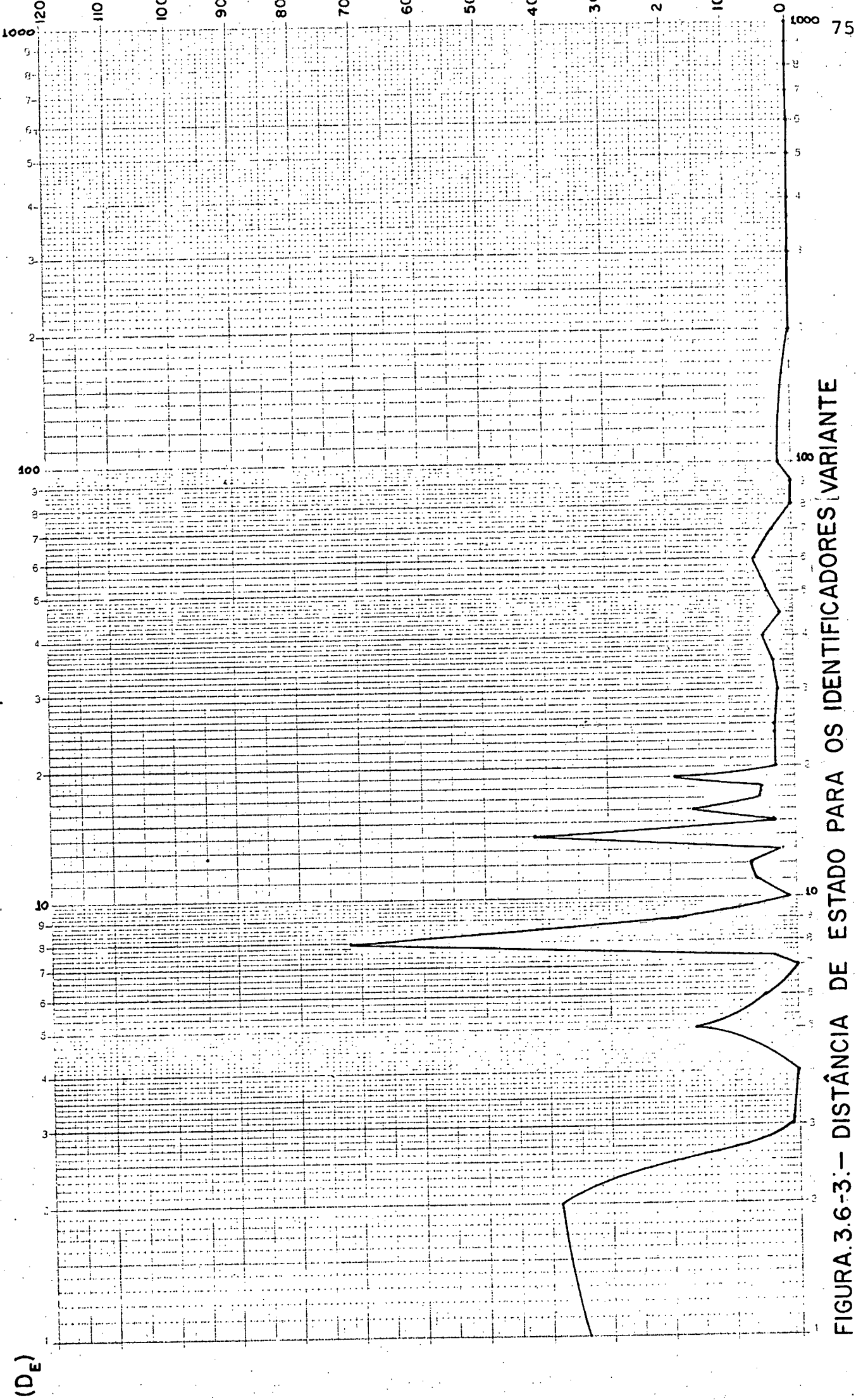


FIGURA 3.6-3:-- DISTÂNCIA DE ESTADO PARA OS IDENTIFICADORES [VARIANTE

(Dp)

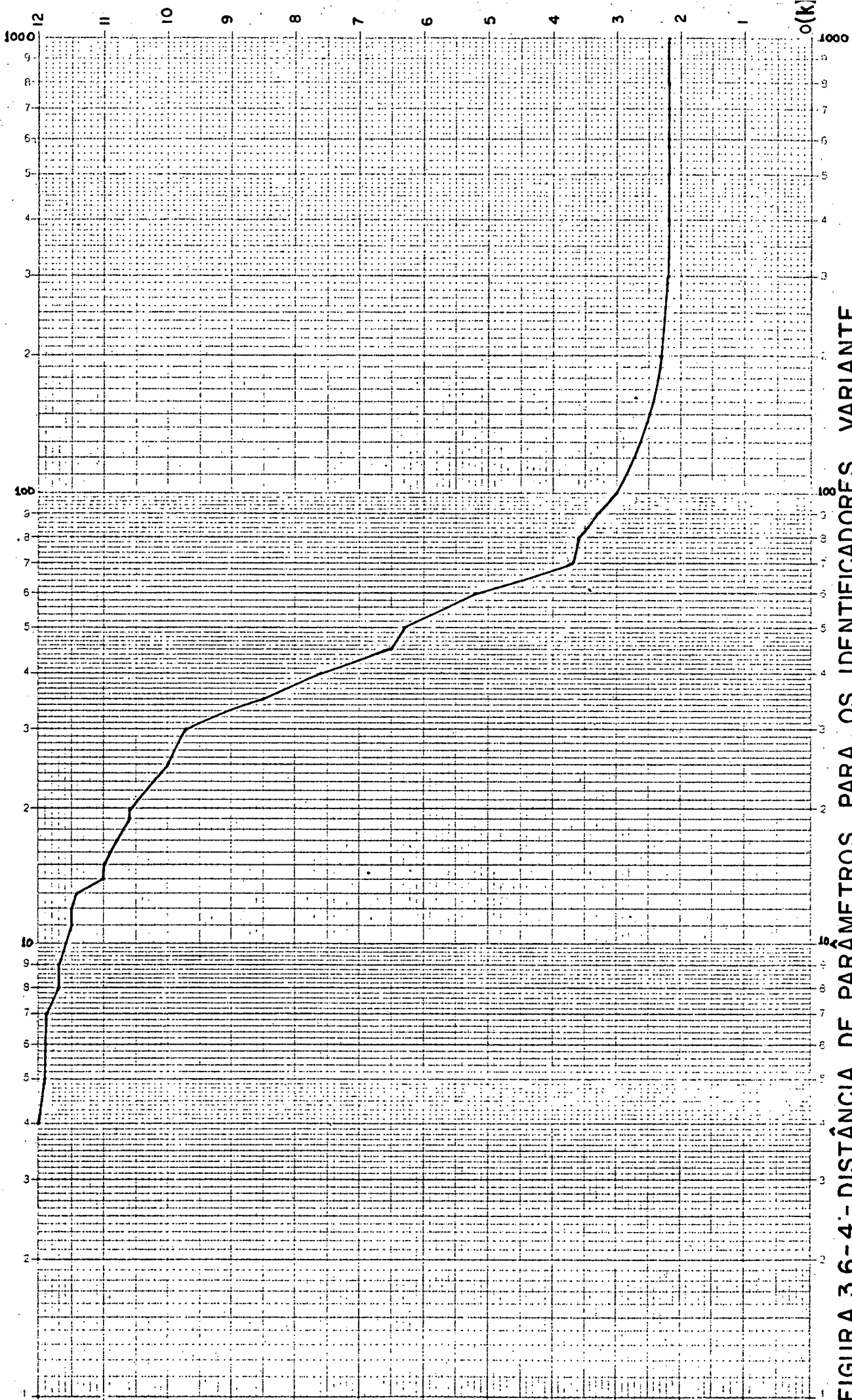


FIGURA 3.6-4:- DISTÂNCIA DE PARÂMETROS PARA OS IDENTIFICADORES VARIANTE.

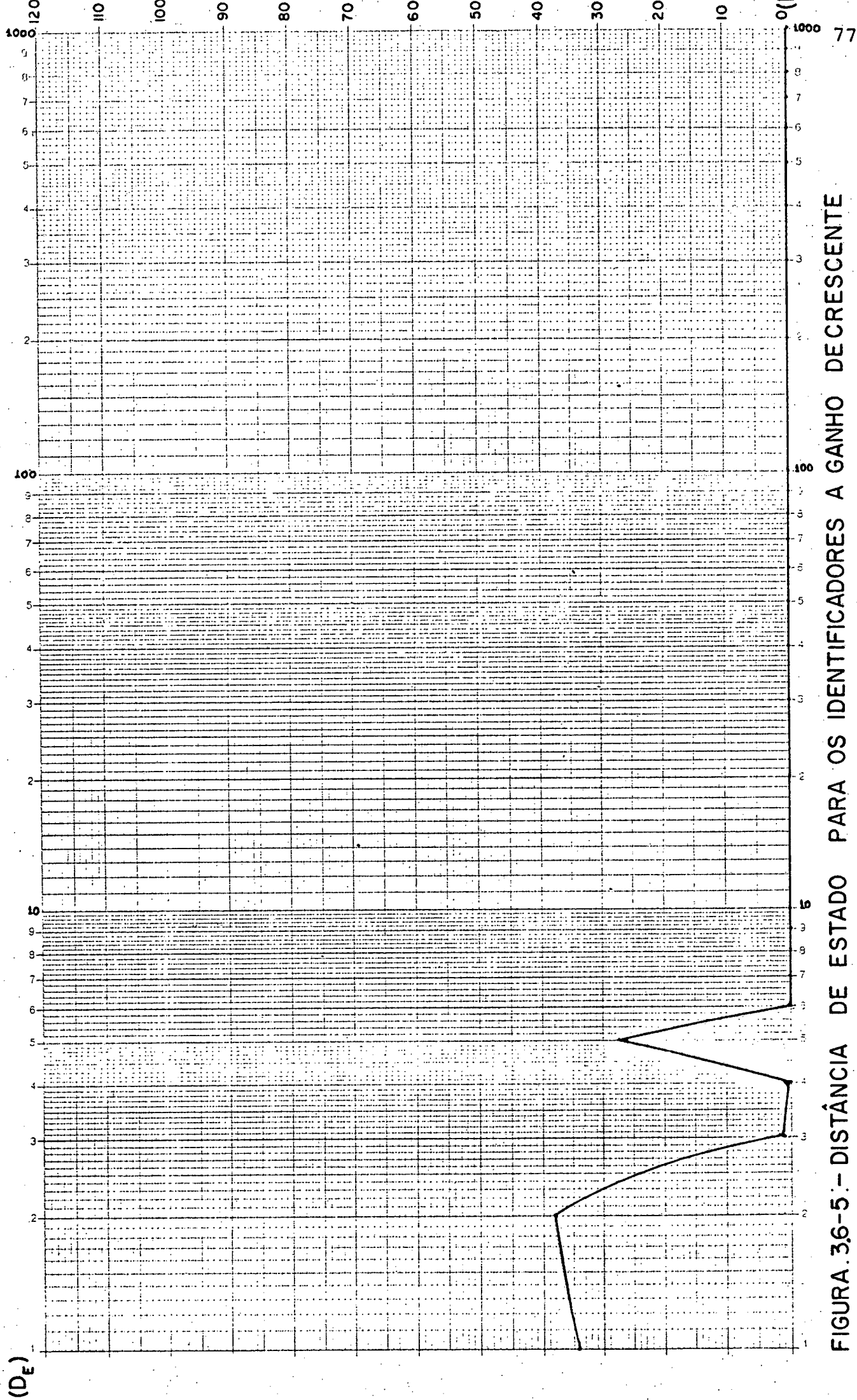


FIGURA. 36-5.- DISTÂNCIA DE ESTADO DE IDENTIFICADORES A GANHO DECRESCENTE

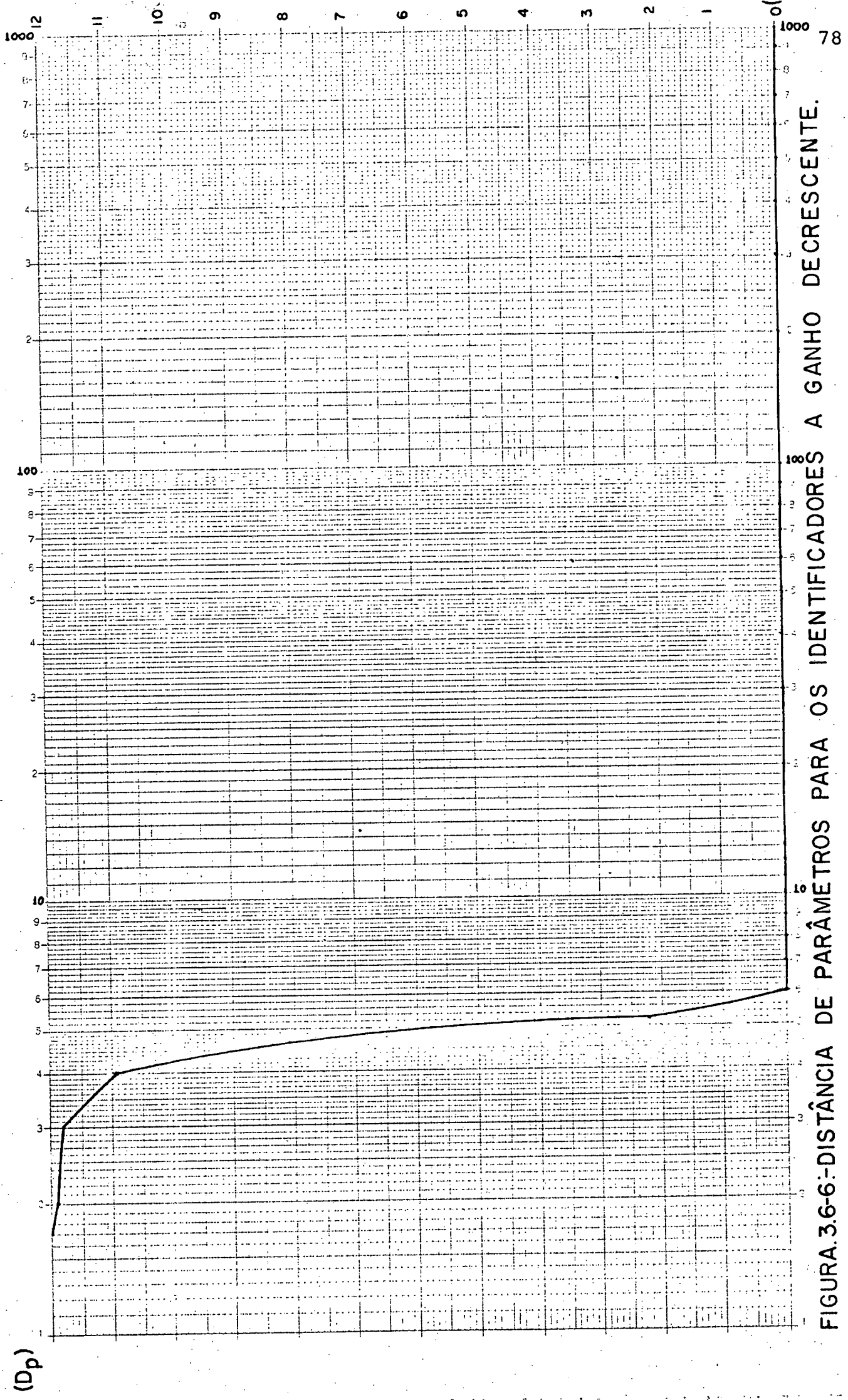


FIGURA.3.6-6:-DISTÂNCIA DE PARÂMETROS PARA OS IDENTIFICADORES A GANHO DECRESCENTE.

do do processo e o estado do modelo ajustável diminui rapidamente convergindo em seis iterações, e na Figura 3.6-6 pode ser observado também a mesma rapidez, ou seja, a distância paramétrica converge em seis iterações.

Os valores estimados de A e B na vigésima primeira iteração são apresentados abaixo:

$$\hat{A}(21) = \begin{bmatrix} 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,10 & 0,65 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \\ 0,333 & -0,833 & -0,25 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}(21) = \begin{bmatrix} 1,00 & 2,00 \\ 0,25 & 0,80 \\ 2,00 & 0,00 \\ 0,50 & 4,00 \end{bmatrix}$$

mostrando que a identificação foi atingida.

Comparando as curvas apresentadas nas Figuras 3.6-1 e 3.6-2 relativas aos identificadores de Landau, e as curvas apresentadas nas Figuras 3.6-3 e 3.6-4 relativas aos identificadores variantes, com as curvas apresentadas nas Figuras 3.6-4 e 3.6-5, observa-se que os identificadores a ganho decrescente tiveram um melhor desempenho que os de Landau e os variantes.

Tendo em vista que em ambiente não ruidoso os identificadores a ganho decrescente tiveram um bom desempenho resolveu-se estudar o seu comportamento em ambiente ruidoso.

Foi introduzido no processo simulado um ruído de tal modo que este pudesse interferir nos estados e na saída, envolven



do assim vários tipos de interferência de ruído sobre o processo. O ruído utilizado nas simulações foi um do tipo Gaussiano de média zero, sendo produzido pela subrotina Gauss (Apêndice A).

A Figura 3.6-7 mostra como foi inserido o ruído que interfere na medição da saída do processo.

Para um ruído de desvio padrão 0,5 interferindo na medição, obteve-se para os identificadores a ganho decrescente os resultados apresentados na Figura 3.6-8 para identificador paralelo e na Figura 3.6-9 para o identificador série-paralelo. Observa-se que o ruído de medição pouco interfere na identificação, isto porque tanto a distância de estado como a distância paramétrica convergem em 9 e 10 iterações respectivamente para o identificador paralelo, e 6 e 7 iterações respectivamente para o série-paralelo.

A Figura 3.6-10 mostra como foi inserido o sinal de ruído que interfere no estado do processo.

Para um ruído de desvio padrão 0,5 interferindo no estado do processo, obteve-se para os identificadores a ganho decrescente os resultados apresentados na Figura 3.6-11 para o identificador paralelo, e na Figura 3.6-12 para o identificador série-paralelo.

Para um ruído de desvio padrão 10 interferindo no estado do processo, obteve-se para o identificador paralelo a ganho decrescente o resultado mostrado na Figura 3.6-13.

Pode-se observar nas Figuras 3.6-11 e 3.6-13 que o identificador a ganho decrescente paralelo consegue identificar o processo para baixos e altos níveis de ruído interferindo no estado do processo.

A Figura 3.6-12 mostra que o identificador a ganho

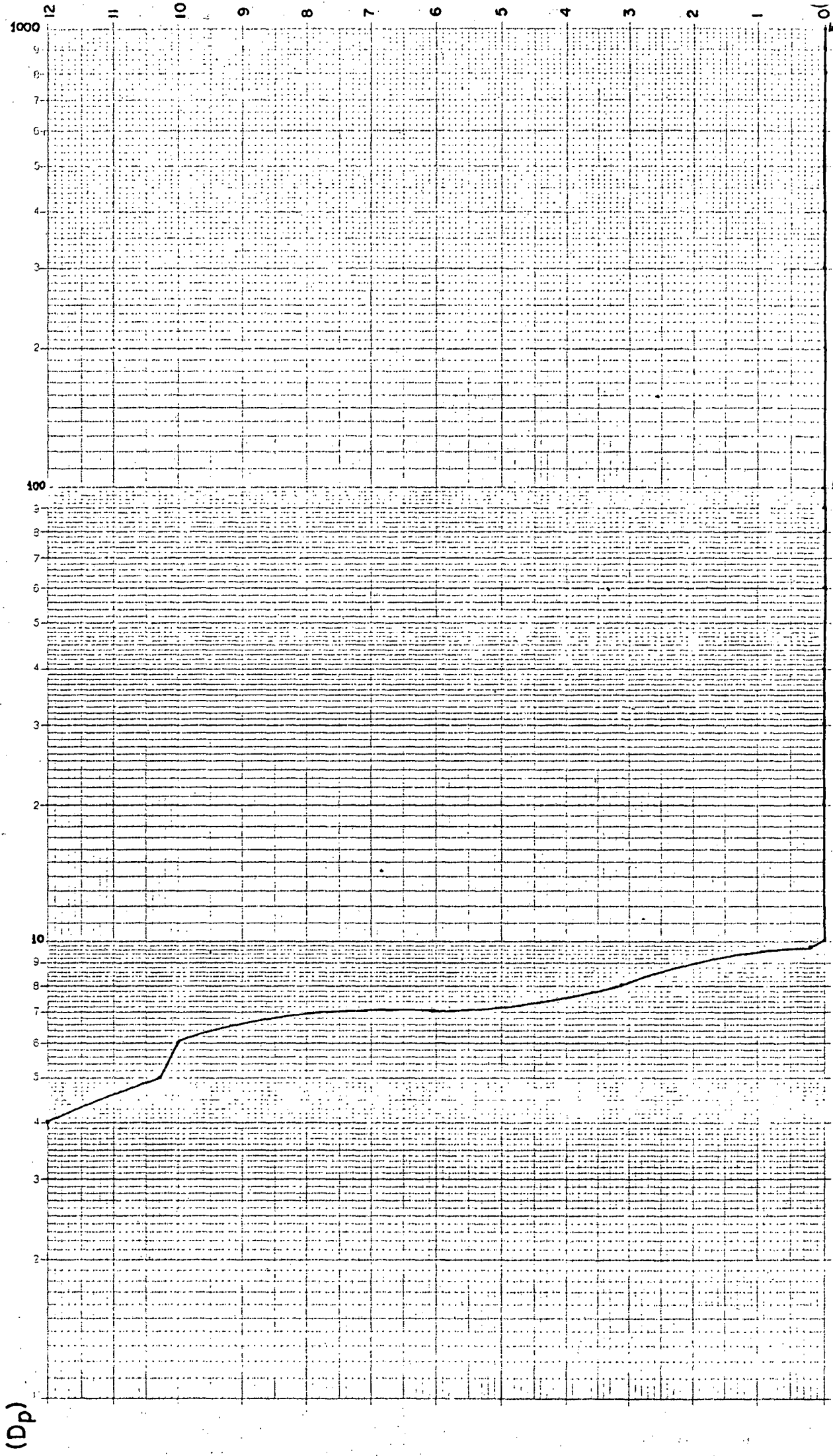


FIGURA.3.6-8:-- DISTÂNCIA DE PARÂMETROS PARA O IDENTIFICADOR PARALELO A GANHO DECRESCENTE  
 COM RUIÐO GAUSSIANO DE MÉDIA ZERO E DESVIO PADRÃO 0,5 INSERIDO NA SAIDA

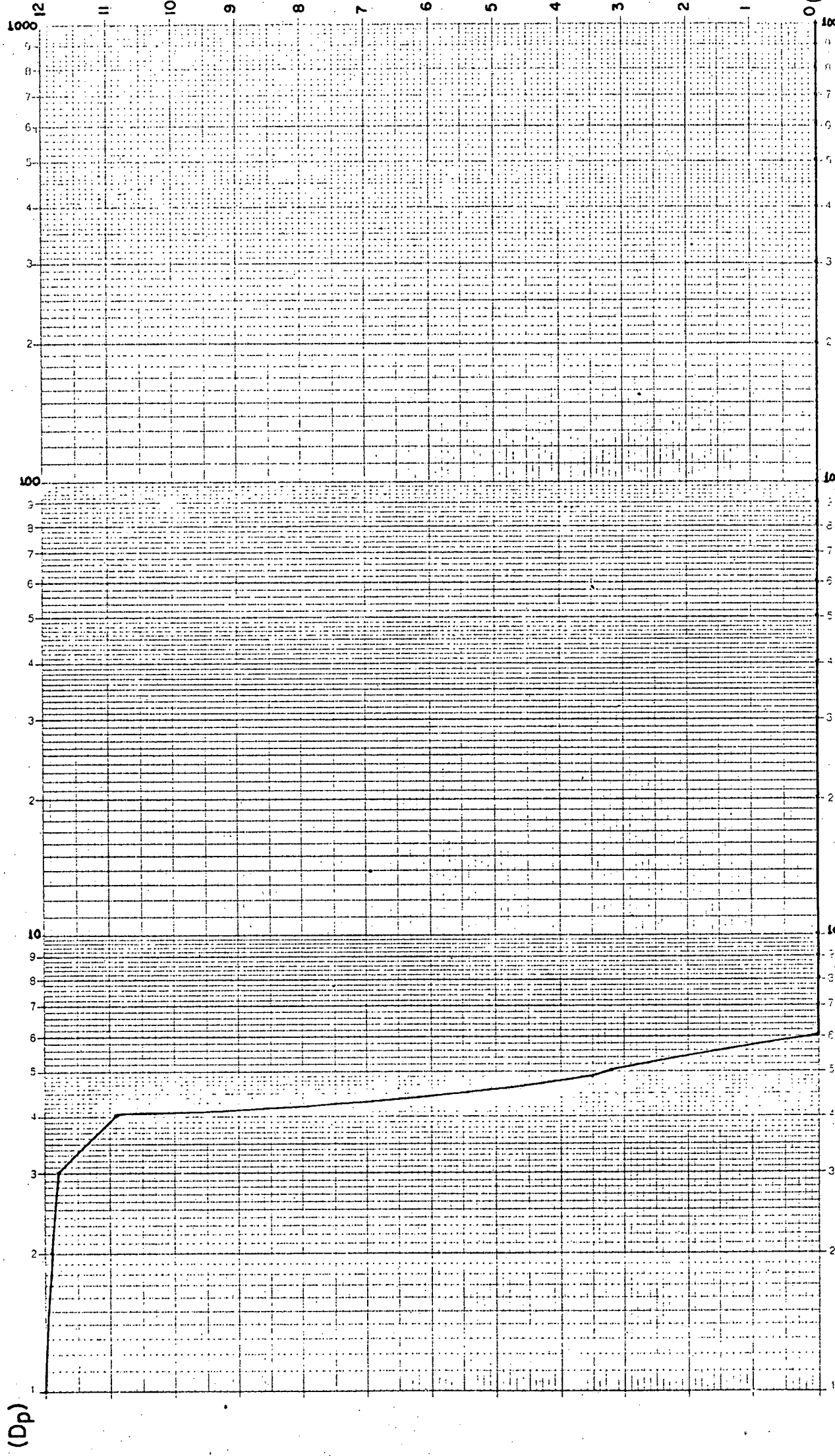
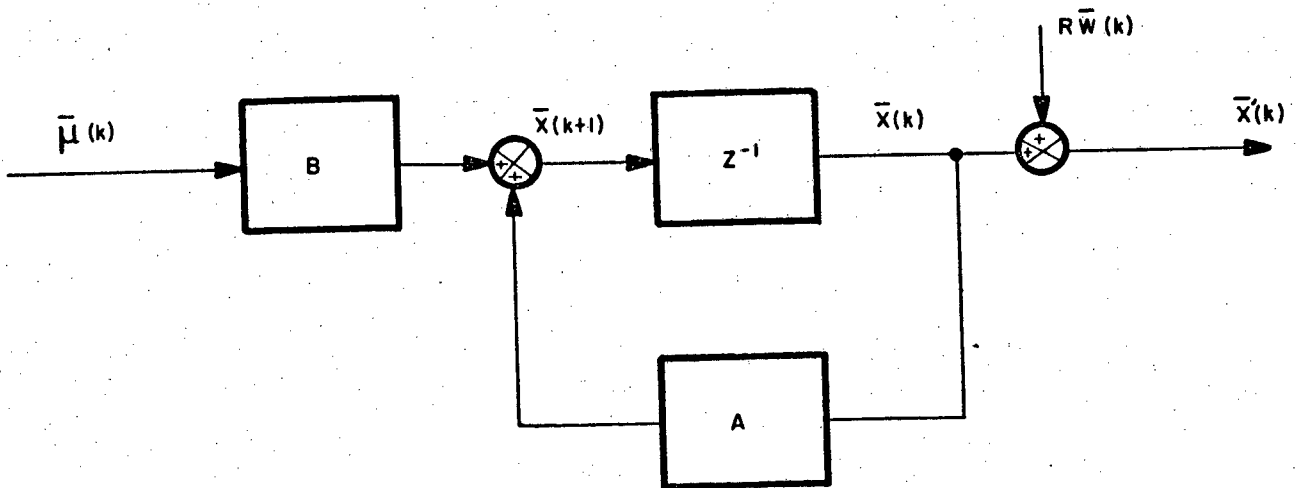


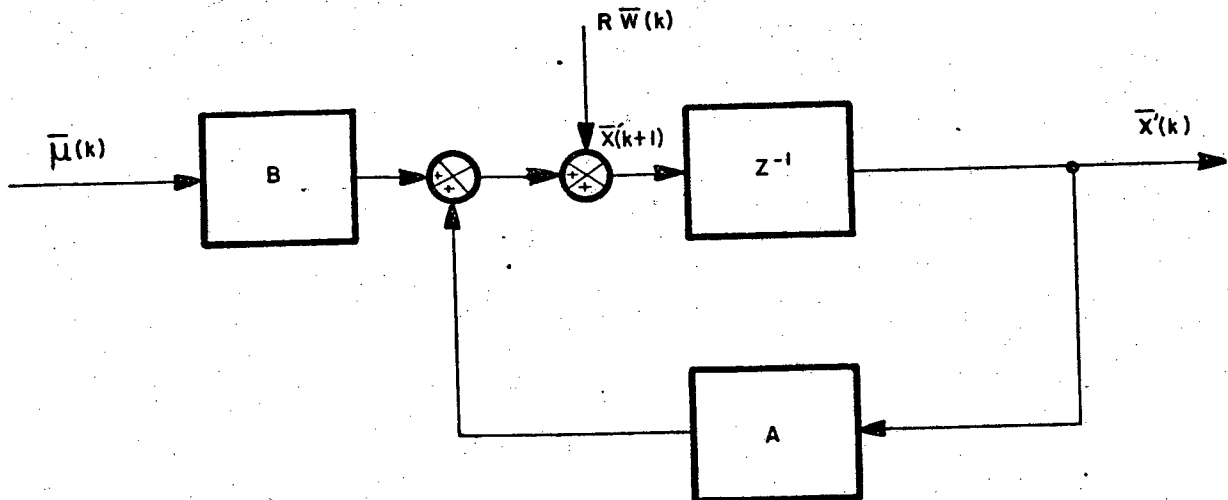
FIGURA 3.6-9: -DISTÂNCIA DE PARÂMETROS PARA O IDENTIFICADOR SÉRIE-PARALELO A GANHO DECRESCENTE  
 COM RUIDO GAUSSIANO DE MÉDIA ZERO E DESVIO PADRÃO 0,5 INSERIDO NA SAIDA.



$$\bar{X}(k+1) = A\bar{X}(k) + B\bar{u}(k)$$

$$\bar{X}'(k) = \bar{X}(k) + R\bar{W}(k)$$

Figura 3.6-7: - Ruído aplicado à saída



$$\bar{X}'(k+1) = A\bar{X}'(k) + B\bar{u}(k) + R\bar{W}(k).$$

Figura 3.6-10: - Ruído aplicado aos estados.

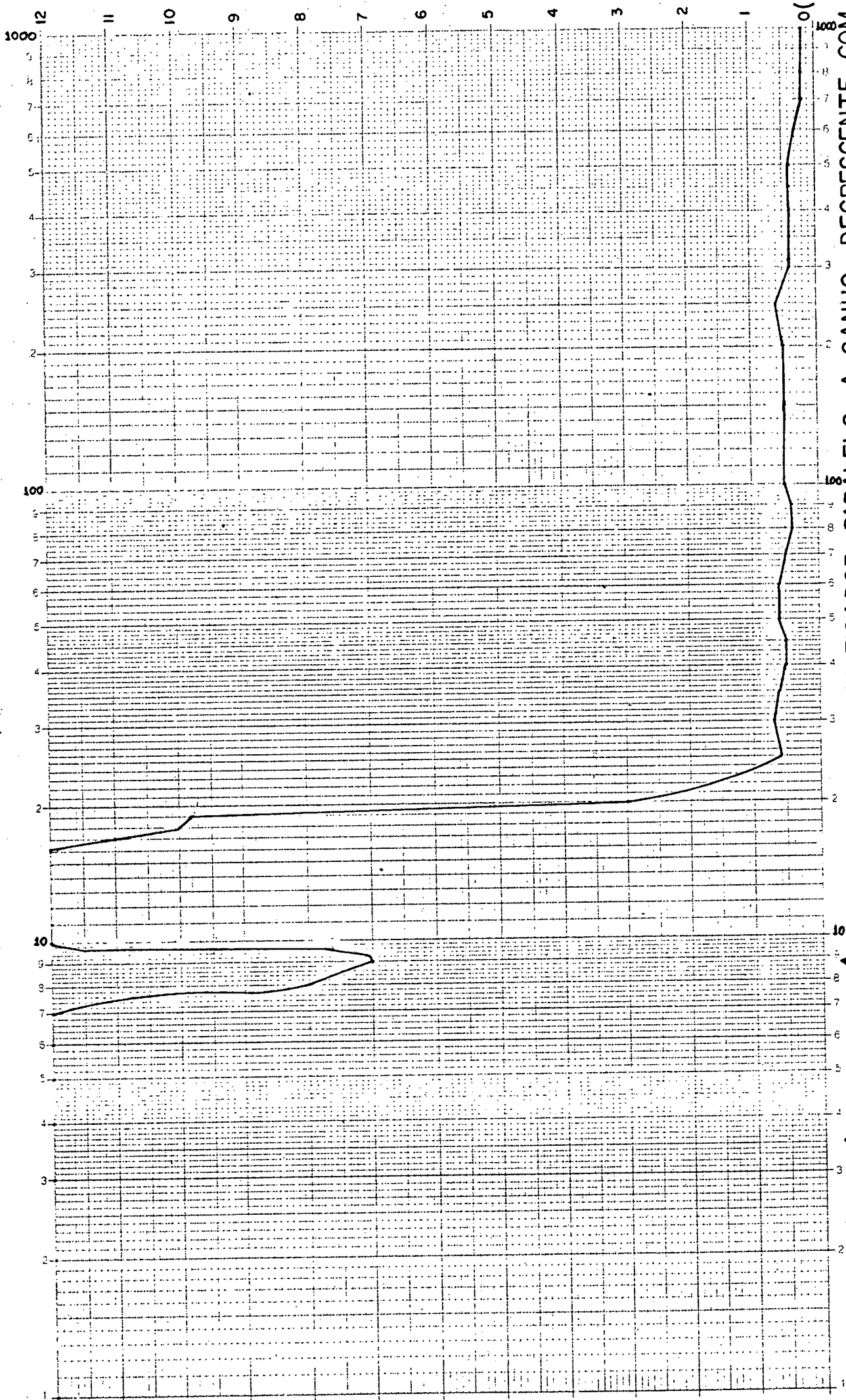


FIGURA. 3.6-11.-DISTÂNCIA DE PARÂMETROS PARA O IDENTIFICADOR PARALELO A GANHO DECRESCENTE COM RUIDO GAUSSIANO DE MÉDIA ZERO E DESVIO PADRÃO 0,5 INSERIDO NOS ESTADOS.

(Dp)

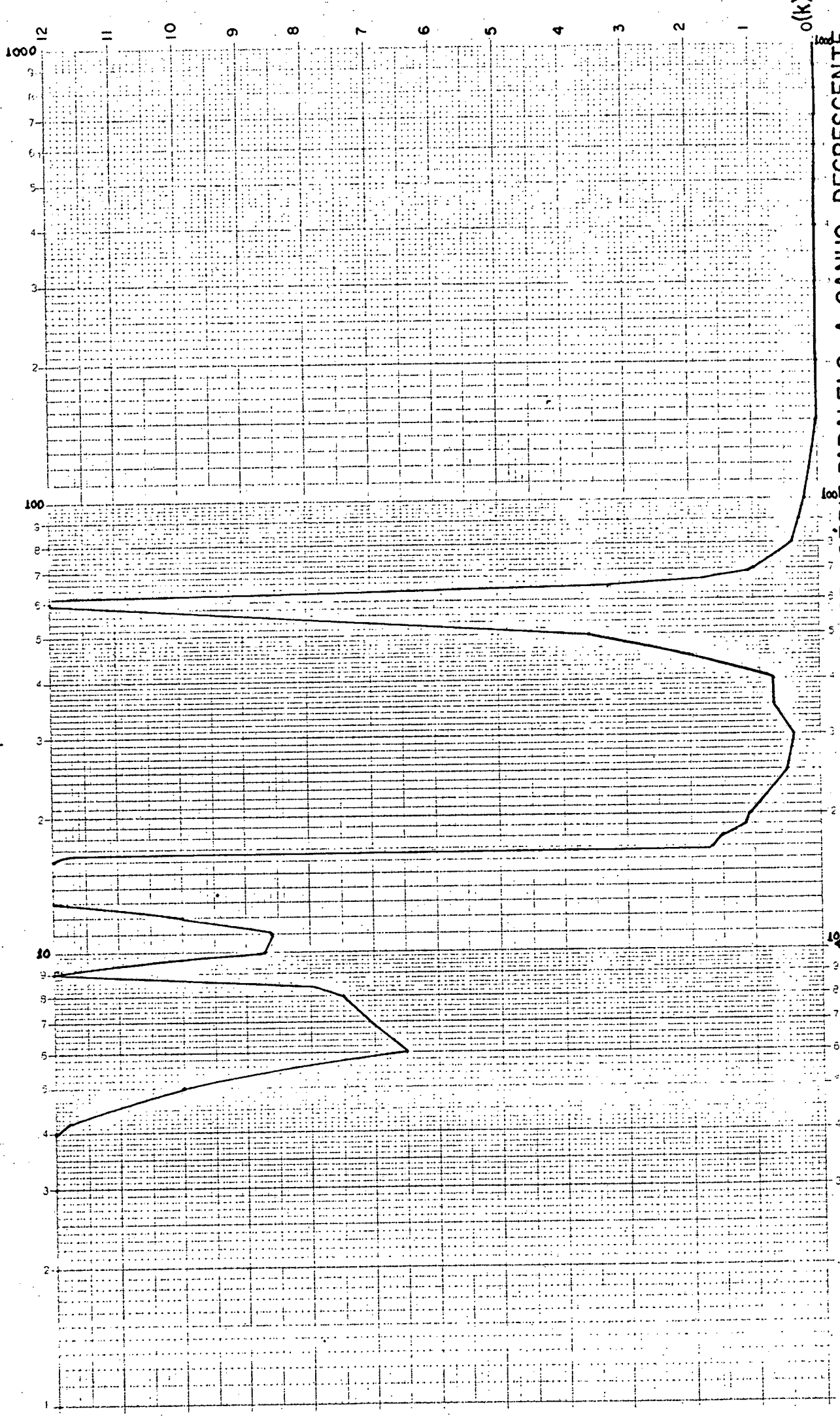
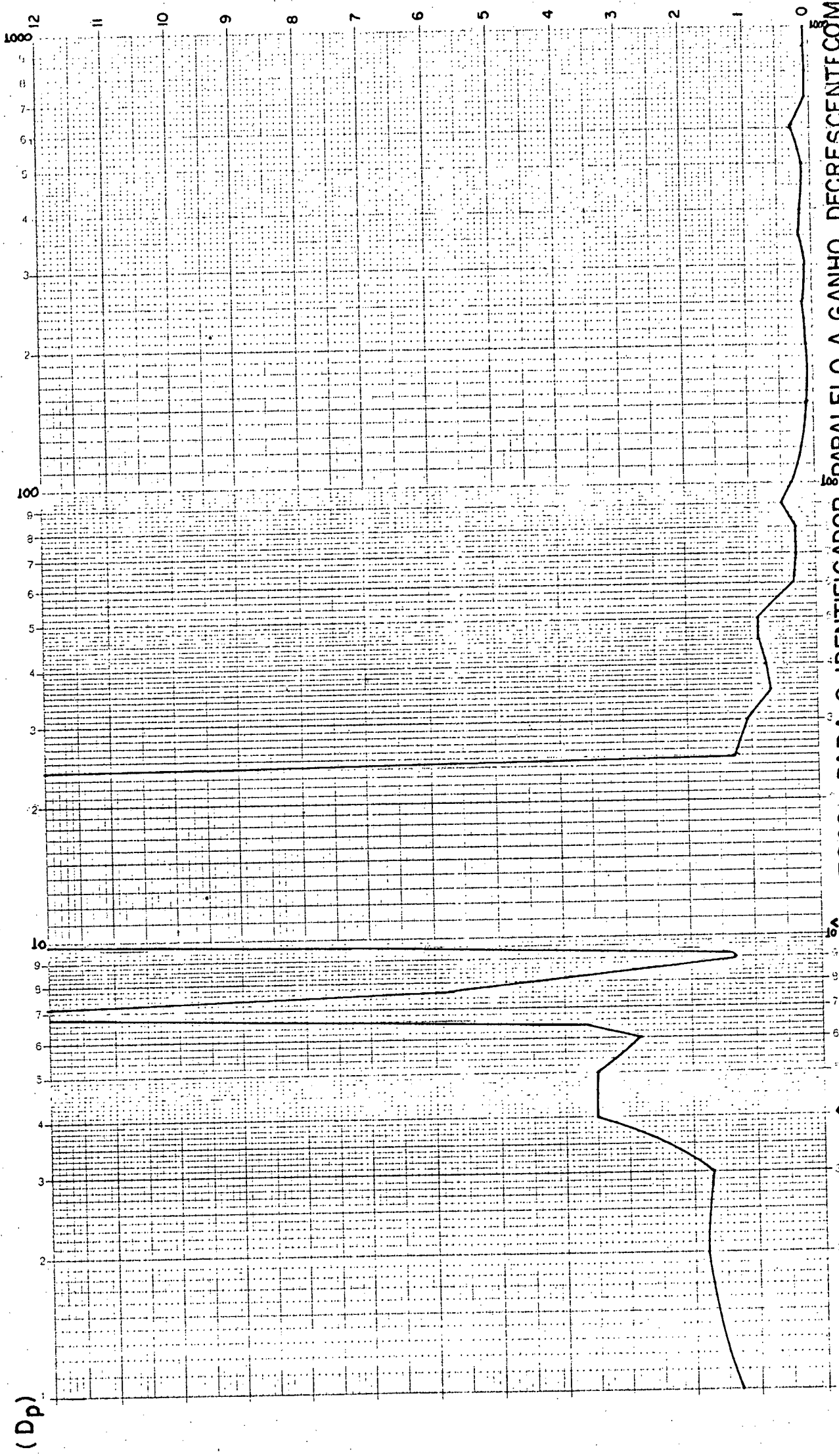


FIGURA. 3.6-12.- DISTÂNCIA DE PARÂMETROS DO IDENTIFICADOR SÉRIE-PARALELO A GANHO DECRESCENTE COM RUÍDO GAUSSIANO DE MÉDIA ZERO E DESVIO PADRÃO 0,5 INSERIDO NOS ESTADOS.



(Dp)

FIGURA.3.6-13:— DISTÂNCIA DE PARÂMETROS PARA O IDENTIFICADOR PARALELO A GANHO DECRESCENTE COM RUIDO GAUSSIANO DE MÉDIA ZERO E DESVIO PADRÃO 10 INSERIDO NOS ESTADOS

decrecente série-paralelo identifica o processo para um ruído, que interfere no estado do processo, de desvio padrão 0,5. Outros resultados de simulação não apresentados aqui, mostraram que o identificador série paralelo não converge para ruídos de alto desvio padrão, que interferem no estado do processo.

### 3.7. Conclusão

Pode-se observar pelas simulações efetuadas, sem a presença de ruído, a nítida diferença existente entre os identificadores de Landau e os variantes comparados com os a ganho decrescente. Nos identificadores a ganho decrescente as distâncias de estado e paramétrica convergem em um número bastante reduzido de iterações, quando comparado com os identificadores de Landau e os variantes.

Observou-se também que para os identificadores de Landau e os variantes sem a presença de ruído, a variação do ganho de ponderação pouca influência tem sobre o resultado de identificação, enquanto que para os identificadores a ganho decrescente, o aumento do ganho inicial de ponderação leva a uma diminuição do número de iterações para se obter distâncias de estado e paramétrica próximas de zero.

Os desempenhos dos identificadores de Landau e os variantes são praticamente os mesmos, diferenciando-se apenas no fato de que o identificador paralelo variante pode ser utilizado na identificação de processos instáveis, enquanto que o identificador paralelo de Landau isto não é possível.

O identificador série-paralelo a ganho decrescente tem um bom desempenho somente em processos submetidos a um baixo



nível de ruído.

O identificador paralelo a ganho decrescente apresenta um bom desempenho em processos submetidos a altos níveis de ruído.

Este identificador mostrou nas diversas simulações realizadas ter o melhor desempenho comparado com os demais estudados neste trabalho.

## CAPÍTULO 4

### SIMULAÇÃO HÍBRIDA

#### 4.1. Objetivo do capítulo.

O objetivo deste capítulo é o de mostrar os resultados relativos a identificação de processos lineares, invariantes no tempo, multivariáveis simulados em computador analógico.

É discutido a utilização dos conversores A/D e D/A do PDP 11/40 e é mostrado em fluxograma e em esquema de montagem como foram utilizados. É apresentado ainda os resultados obtidos para as simulações efetuadas e finalmente são expostas as conclusões.

#### 4.2. Introdução.

Depois de ser constatada a eficiência dos identificadores à ganho decrescente na simulação digital, procurou-se ainda verificar o desempenho destes na identificação de um processo linear, estável e invariante no tempo, simulado no computador analógico.

Na simulação híbrida as dificuldades aumentaram considerando que para isto necessitaríamos levar em conta vários fatores que não tinham influência alguma na simulação digital, tais como tempo de conversão, ruído provocado pelo conversor A/D e o

tempo de cálculo do programa do identificador, sendo este último o maior responsável no aumento do período de amostragem. O ruído provocado pela transmissão não foi considerado porque a transmissão foi feita através de cabos blindados, e sendo a distância de mais ou menos um metro do computador analógico para o digital.

Simulando-se o processo no computador analógico, pode-se então avaliar o desempenho dos identificadores a ganho de crescente utilizando-se apenas a distância de estado dada pela equação (3.2-1), isto porque em caso de identificação real os únicos parâmetros disponíveis para se obter uma avaliação, seriam os estados de processo e do modelo ajustável. O tempo gasto na impressão destes resultados, como foi feito para a simulação digital, contribuiria ainda mais no aumento do período de amostragem, por esta razão resolveu-se utilizar o terminal TRC (Tubo de Raios Catódico) do PDP 11/40. Deste modo pode ser observado o comportamento da distância de estado, mostrando assim quando a identificação se completava.

Procurou-se ainda avaliar o comportamento dos identificadores em questão, identificando um motor DC que se aproximasse o mais possível das condições do motor do laboratório de máquinas.

### 4.3. Conversores A/D e D/A [19]

#### 4.3.1 - Conversores A/D.

Os conversores analógicos-digitais, são em número de oito, sendo que estes possuem as seguintes faixas de tensão para a conversão:

| DECIMAL | CANAIS DE 0-3 | CANAIS DE 4-7 |
|---------|---------------|---------------|
| 4096    | 2,00 volts    | 10,00 volts   |
| 2048    | 1,00 volt     | 5,00 volt     |
| 0000    | 0,00 volt     | 0,00 volt     |

Como tanto valores positivos como negativos são emitidos pelo computador analógico ao digital, resolveu-se então a través de uma certa lógica em software modificar as faixas de tensão para:

| DECIMAL | CANAIS DE 0-3 | CANAIS DE 4-7 |
|---------|---------------|---------------|
| 2048    | +1,00 volt    | +5,00 volts   |
| 0000    | 0,00 volt     | 0,00 volt     |
| -2048   | -1,00 volt    | -5,00 volts   |

A programação destes conversores é feita através da linguagem ASSEMBLER de tal modo a utilizar o registro de estado mostrado na Figura 4.3-1. A seguir é mostrado o significado de cada bit.

| 15            | 14             | 13                  | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7            | 6             | 5                               | 4                            | 3            | 2                         | 1 | 0            |
|---------------|----------------|---------------------|----|----|----|---|---|--------------|---------------|---------------------------------|------------------------------|--------------|---------------------------|---|--------------|
| ERROR<br>FLAG | DUAL<br>ENABLE | CANAIS DE CONVERSÃO |    |    |    |   |   | DONE<br>FLAG | INT<br>ENABLE | CLOCK<br>OVER<br>FLOW<br>ENABLE | SCHMITH<br>TRIGGER<br>ENABLE | BURST<br>MOD | DMA<br>ADDRESS<br>POINTER |   | AID<br>START |

Figura 4.3-1: - Configuração de bits do registro de estado.

15 - ERROR FLAG(R) ou bit de erro:

Este bit é levado ao estado 1 quando:

a) Uma segunda conversão terminou antes que os dados da pri

meira conversão tenham sido lidos;

- b) O multiplexador é mudado durante o primeiro micro segundo de uma conversão;
- c) Uma segunda conversão é iniciada antes da primeira conversão ser completada. Este bit é zerado quando carregado.

14 - Dual mode enable.

Não utilizado.

13.8 - Canais de conversão (R/W)\*.

Define qual canal do multiplexador que está sendo amostrado.

7 - Done Flag.

É levado ao estado 1 (1-lógico) quando uma conversão A/D for completada. É zerado (0-lógico) por hardware quando uma interrupção é completada ou quando o registro de dados é lido.

6 - Interrupt Enable (R/W).

Quando este bit estiver em 1-lógico, ele fará com que o bit 7 cause uma interrupção sempre que uma conversão é completada.

5 - Overflow Enable (R/W).

Permite que o período de amostragem seja controlado pelo relógio de tempo real. Este canal permite então amostragem em intervalos de tempos precisos e independentes de software.

---

\* R = READ e W = WRITE

#### 4 - Schmitt Enable (R/W).

Permite que um evento externo dispare o schmitt trigger o qual, por sua vez inicia uma conversão analógica-digital.

#### 3 - Burst Mode.

Permite conversão contínua no máximo intervalo do conversor até overflow.

#### 2.1 - DMA Address Pointer.

Não utilizado.

#### 0 - A/D start (R/W).

Inicia uma conversão quando está no estado lógico 1. E é zerado no fim da conversão.

As subrotinas em Assembler utilizadas na conversão analógica-digital são mostradas no Apêndice A, sendo estas a PKW e PAD.

#### 4.3-2 - Conversores D/A.

Os conversores digitais-analógicos utilizados são em número de dois, possuindo uma tensão de saída de  $\pm 10$  volts, ou seja, + 2048 equivale a + 10 volts e -2048 equivale a -10 volts. Estes conversores possuem os seguintes endereços:

canal 0 - 176760

e

canal 1 - 176761 .

Da mesma maneira que para os conversores A/D, os D/A podem também ser programados, sendo assim as subrotinas em Assembler PDA e DA 1, mostradas no Apêndice A, são utilizadas para converter as entradas geradas no computador digital, para serem utilizadas pelo processo simulado.

#### 4.4. Identificação de processos simulados no computador analógico.

Modificando-se o programa utilizado na simulação digital com a utilização das subrotinas citadas anteriormente, obtém-se o fluxograma ilustrado na Figura 4.4-1. Observando o fluxograma da Figura 4.4-1, nota-se que os estados do processo simulado no computador digital é convertido para sinais binários. Em seguida é convertido as entradas geradas no computador digital para sinais contínuos que excitam o processo simulado. Com os dados de entrada e saída o identificador programado no PDP 11/40 realiza uma iteração de identificação. Novas iterações são processadas até que o contador atinja um número de iterações  $Z$  especificada previamente. Terminada a identificação é necessário obter os parâmetros contínuos, uma vez que o computador digital só é capaz de identificar processos discretos. A obtenção da representação contínua do processo é feita pela subrotina REPCON, listada no Apêndice A, que utiliza os parâmetros discretos identificados e o período de amostragem.

A identificação de processos simulados em computador analógico pode ser atingida seguindo o esquema de montagem mostrado na Figura 4.4-2. A Figura 4.4-2 mostra que o processo é

simulado no computador analógico, e que o computador digital contém o algoritmo de identificação e um programa de geração de sinais de excitação, sinais estes, que serão enviados ao processo simulado através dos conversores digitais-analógicos. Os estados do processo simulado entram no computador digital através dos conversores analógicos-digitais.

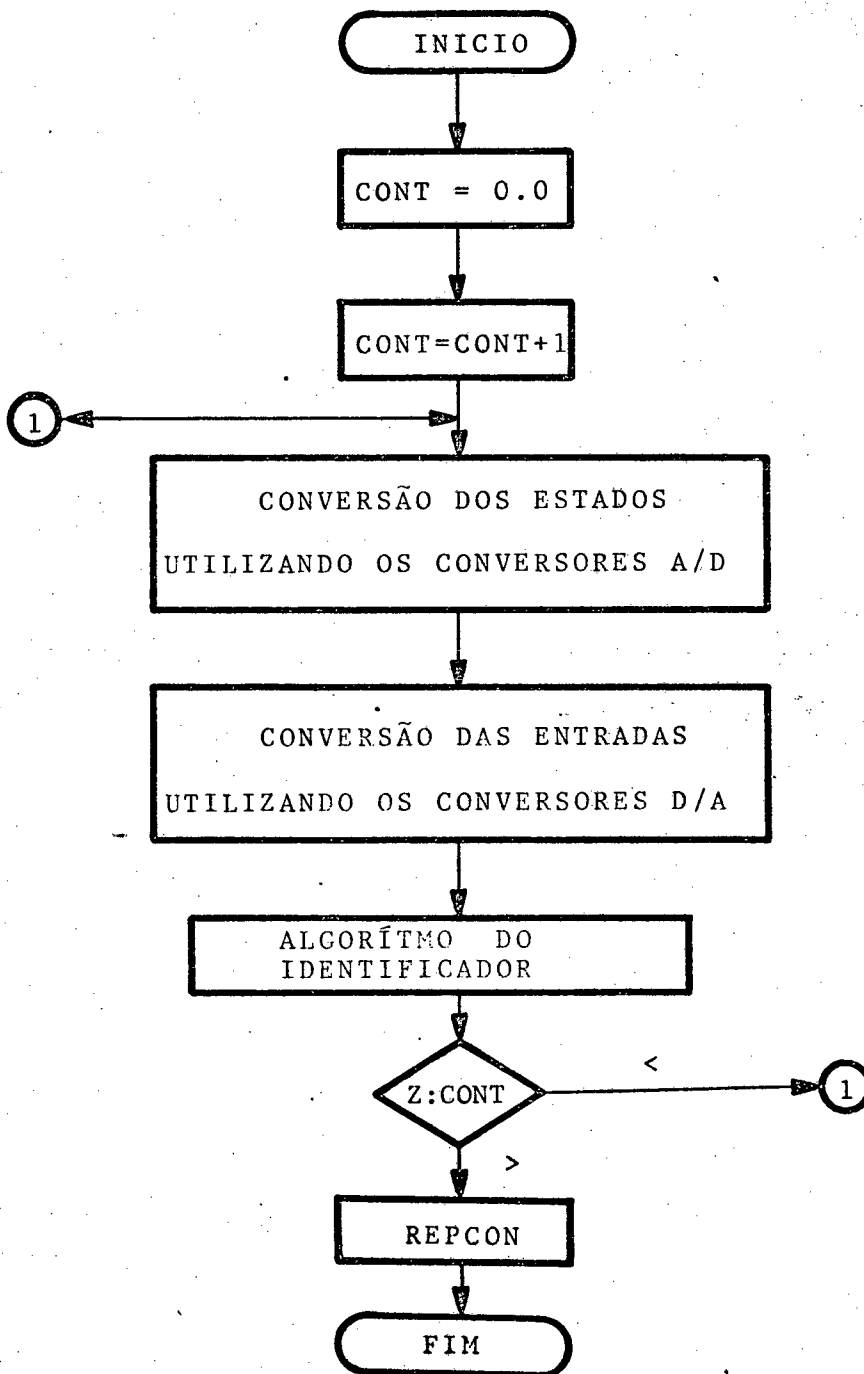


Figura 4.4-1: - Fluxograma do identificador utilizado na simulação híbrida.



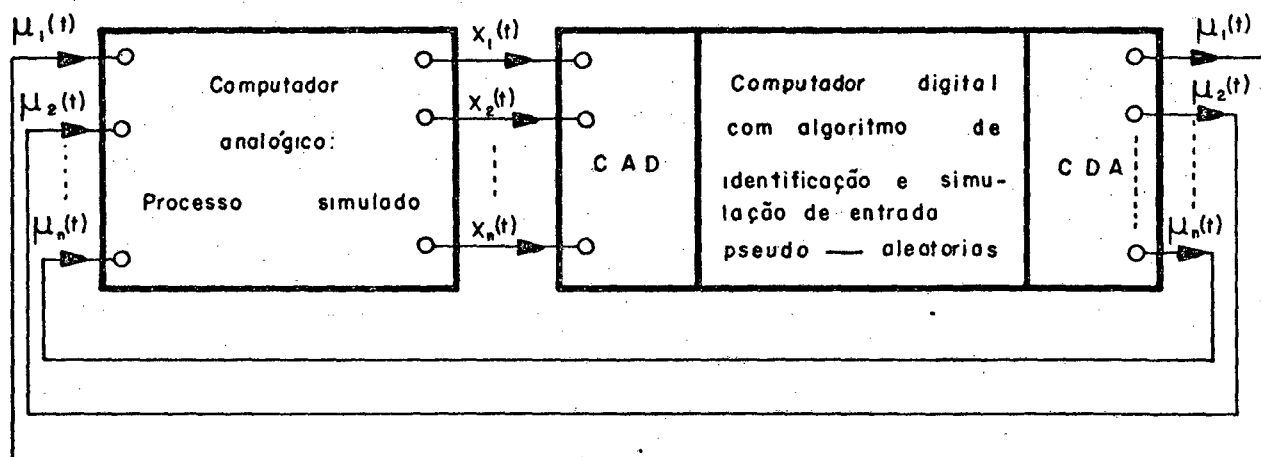


Figura 4.4-2: - Esquema de montagem utilizado na simulação híbrida.

#### 4.4.1 - Processos simulados no computador analógico e resultados da identificação.

Diversos resultados foram encontrados para vários processos simulados no computador analógico, mas para efeito de ilustração resolveu-se apresentar os resultados da simulação híbrida de dois processos estáveis apresentados na forma canônica completamente controlável, de ordem e número de entradas diferentes, e o resultado da identificação de um motor CC simulado no computador analógico alimentado por uma tensão que possui as mesmas características de uma tensão fornecida por um pulsador.

O primeiro processo simulado é mostrado abaixo na forma de equação de estado, e na Figura 4.4-3 é mostrado o esquema de montagem utilizado no computador analógico.

Processo simulado:

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} .$$

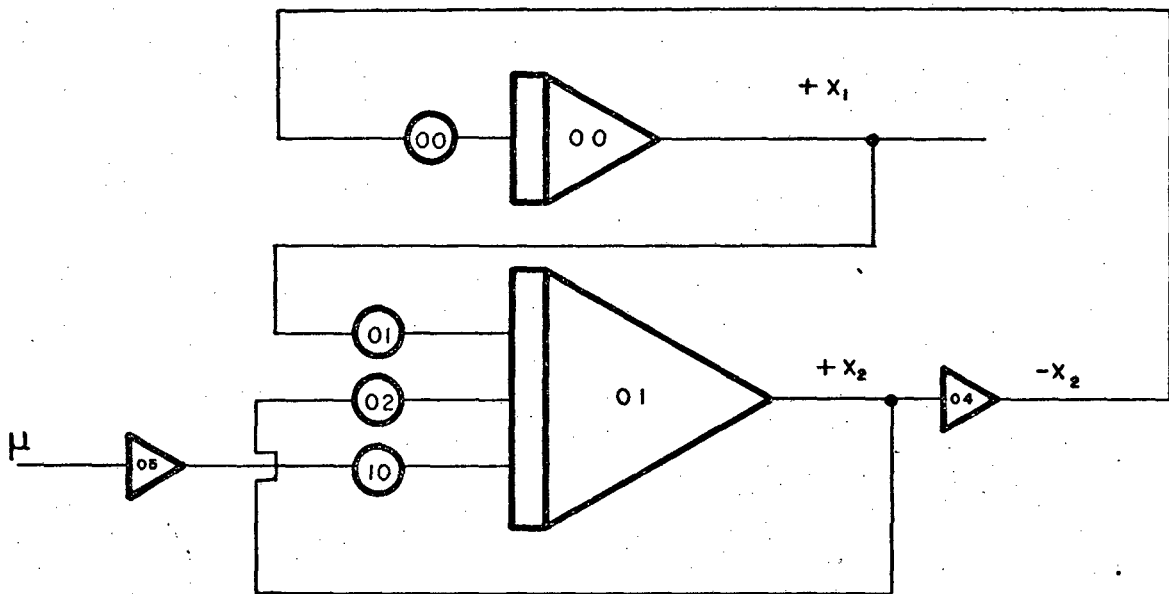


Figura 4.4-3: - Esquema de montagem utilizado para simular o processo de 2<sup>a</sup> ordem com uma entrada.

O processo identificado, utilizando-se o identificado r paralelo, foi o seguinte:

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 0,01 & 1,00 \\ -0,99 & -0,50 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,97 \end{bmatrix} \bar{u} , \text{ oferecendo um erro}$$

percentual máximo de 3% para o parâmetro  $b_2$  . O período de amostragem utilizado para efetuar tal identificação foi de 80 ms.

Utilizando-se o identificador série-paralelo, obteve-se o seguinte resultado:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -0,02 & 1,00 \\ -0,97 & -0,48 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,97 \end{bmatrix} \bar{u}, \text{ oferecendo um erro}$$

percentual máximo de 4% para o parâmetro  $a_{22}$ . O período de amostragem utilizado para efetuar tal identificação foi de 70 ms.

Depois do processo de 2<sup>a</sup> ordem com uma entrada simulou-se um processo de 3<sup>a</sup> ordem com duas entradas mostrado abaixo, e na Figura 4.4-4 é ilustrado o esquema de montagem utilizado no computador analógico.

Processo simulado:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{u}.$$

O processo identificado, utilizando-se o identificador série-paralelo, foi o seguinte:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -0,01 & 0,99 & -0,02 \\ 0,01 & 0,00 & 1,01 \\ -1,92 & -3,88 & -2,90 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0,99 & 0,00 \\ 0,00 & 0,99 \\ -0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \bar{u}, \text{ oferecendo}$$

um erro percentual máximo de 4% para o parâmetro  $a_{31}$ . O período de amostragem utilizado para se efetuar tal identificação foi de 200 ms.

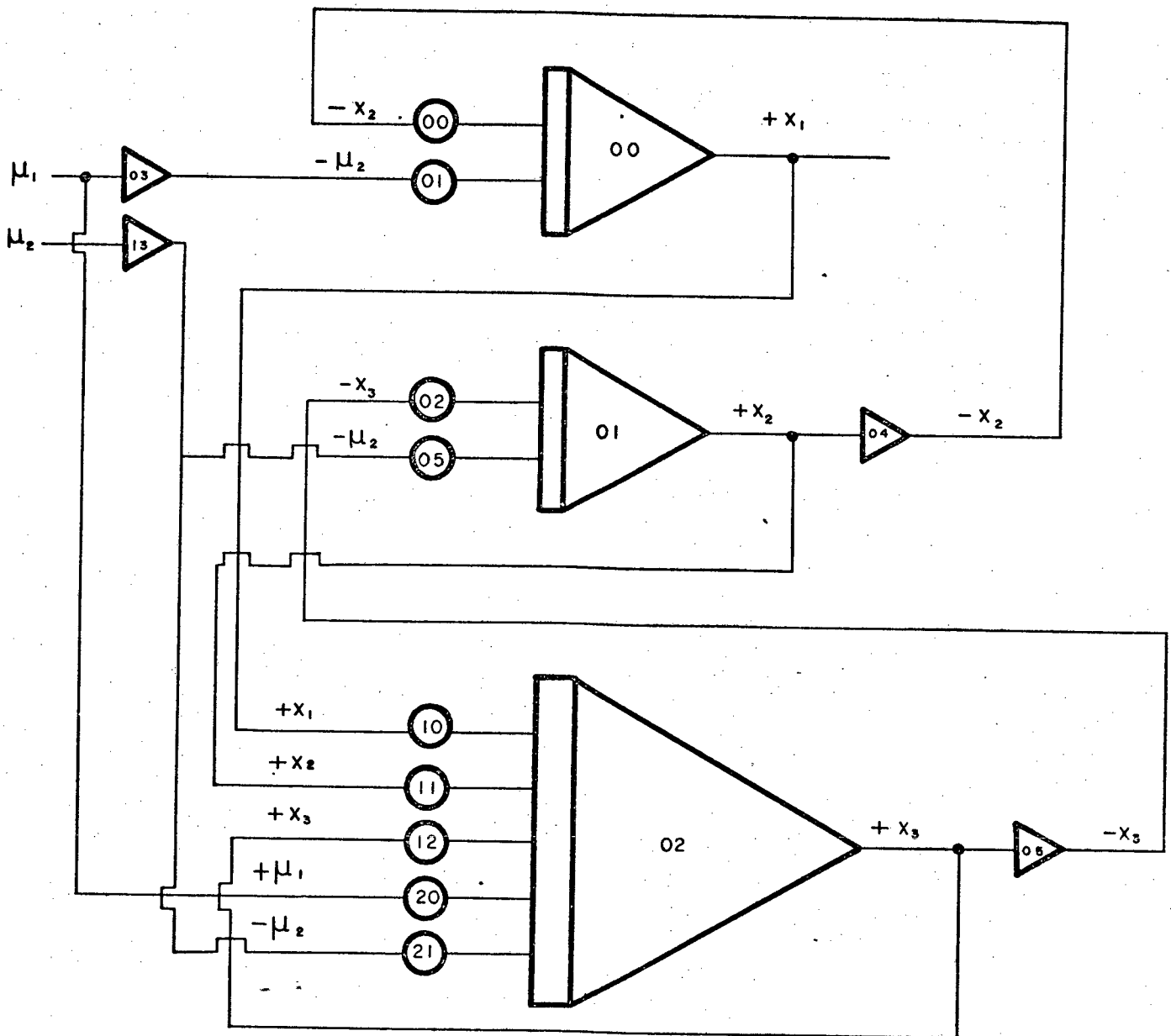


Figura 4.4-4: - Esquema de montagem utilizado para simular o processo de 3<sup>a</sup> ordem com duas entradas.

Utilizando-se o identificador série-paralelo, obt ve-se o seguinte resultado:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -0,01 & 0,99 & -0,01 \\ -0,01 & -0,01 & 0,98 \\ -1,82 & -3,80 & -2,81 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0,99 & 0,00 \\ 0,00 & 0,99 \\ -0,98 & 0,97 \end{bmatrix} \bar{u}, \text{ onde}$$

recendo um erro percentual máximo de 9% para o parâmetro  $a_{31}$ . O período de amostragem utilizado para efetuar tal identifica o foi de 170 ms.

Será apresentado a seguir a simula o do motor CC. Esquematicamente o motor CC pode ser visto na Figura 4.4-5 e na Figura 4.4-6   apresentado o diagrama em blocos do mesmo.

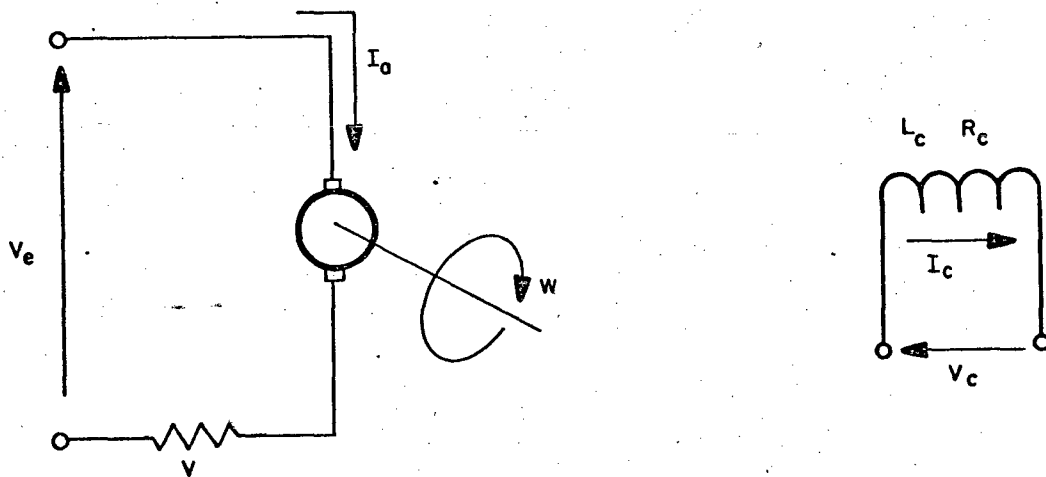
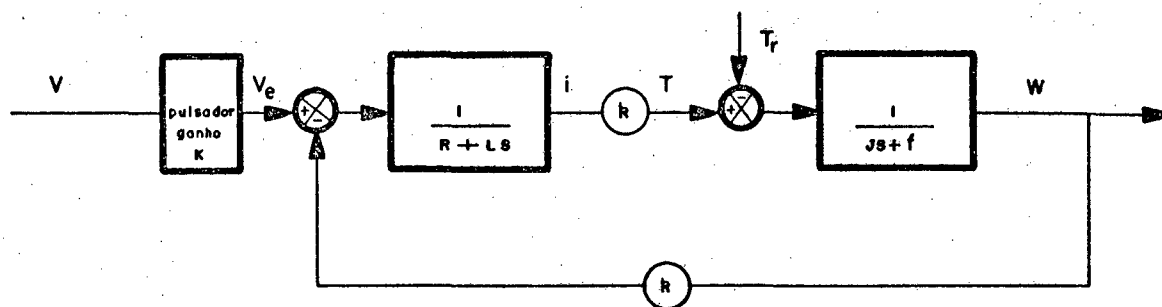


Figura 4.4-5: - Esquema simplificado do motor C.C.



onde  $\varepsilon = kw =$  força contra eletromotriz.

$R =$  resistência da armadura.

$L =$  indutância da armadura.

$J =$  momento de inércia.

$f =$  coeficiente de atrito.

$w =$  velocidade angular.

$i =$  corrente de armadura.

$T =$  torque eletromagnético.

$V_e =$  tensão de entrada depois do pulsador.

$v =$  tensão de entrada antes do pulsador.

$k =$  constante elétrica do motor.

$K =$  ganho do pulsador.

Figura 4.4-6 - Diagrama em blocos do motor CC.

Entrando com um sinal constante "v" no pulsador, os sinais de saída do pulsador e a corrente de armadura tem o aspecto mostrado na Figura 4.4-7.

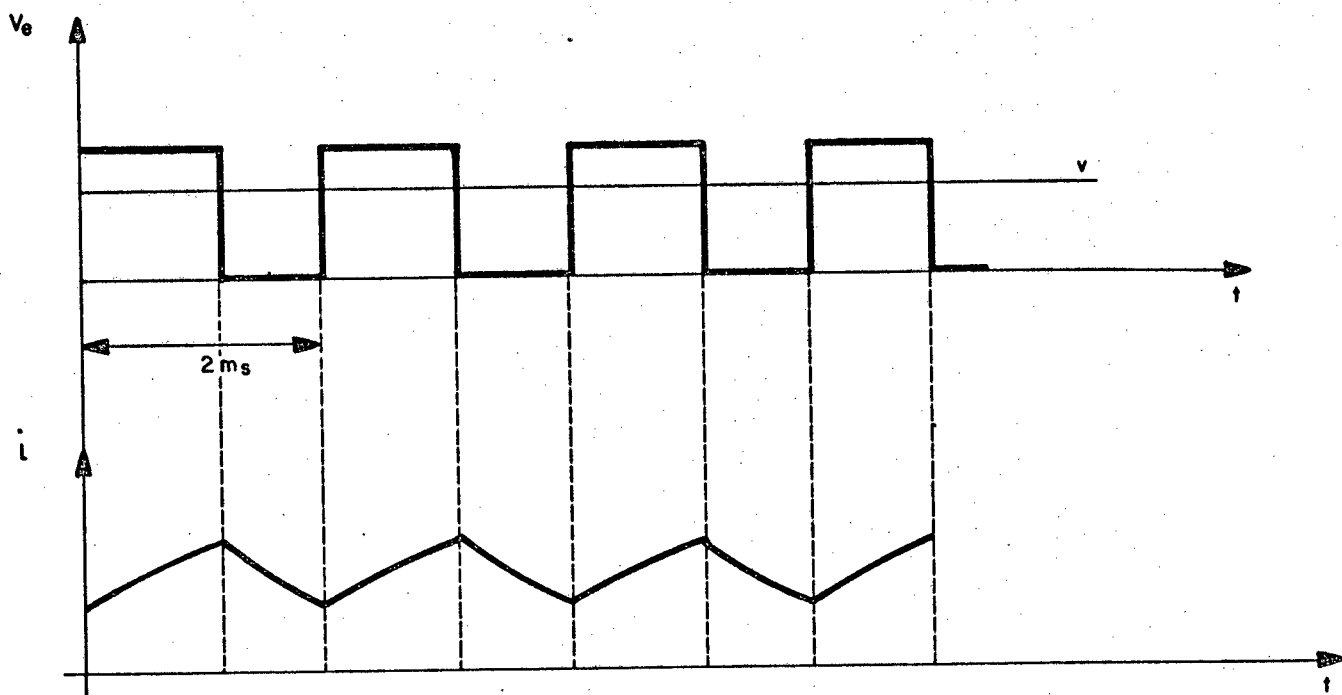


Figura 4.4-7: - Sinais de saída do pulsador e da corrente de armadura.

Com o motor suprindo apenas o atrito estático a corrente "i" varia pouco em torno de um valor médio, bem como a velocidade "w", então as medidas dos estados realizadas nos períodos de amostragem representam bem os valores médios de "i" e "w".

A Figura 4.4-7 mostra que o valor médio da tensão de saída do pulsador tem como valor o sinal "v". Este sinal é o que foi utilizado no identificador como entrada do motor. Isto pode ser feito uma vez que o período de amostragem do pulsador é de 2 ms e o período de amostragem do identificador é de 70 ms. O sinal "v" então representa bem a média de  $V_e$ .

Utilizando-se o diagrama em blocos pode-se equacionar então o processo, ou seja:

$$\begin{cases} Ve - \varepsilon = Ri + L \frac{di}{dt} ; & \varepsilon = kw \\ J \frac{dw}{dt} + fw + T_r = ki \end{cases}$$

ou então

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i - \frac{k}{L} w + \frac{1}{L} Ve \\ \frac{dw}{dt} = \frac{k}{J} i - \frac{f}{J} w - \frac{T_r}{J} \end{cases}$$

Considerando o torque resistivo ( $T_r$ ) igual a zero, ou seja motor sem carga, e o ganho  $K$  do pulsador, pode-se representar o processo aproximadamente por:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Para simular o processo em questão foi fornecido por FRÉDÉRICK BORDRY e OSWALDO KASCHNY FILHO os seguintes valores para as constantes citadas anteriormente:

$$R = 1,5 \Omega$$

$$L = 0,14 \text{ H}$$

$$J = 0,06$$

$$f = 0,007$$

$$k = 0,53$$



$$K = 12$$

$$i_{\max} = 20 \text{ A}$$

$$v_{\max} = 10 \text{ V}$$

$$w_{\max} = 188,5 \text{ rd/s}$$

Com esses valores pode-se então obter a representação em equações de estado do processo simulado. O esquema de montagem utilizado no computador analógico é mostrado na Figura 4.4-8.

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,71 & -3,786 \\ 8,833 & -0,1167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 85,714 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

É dado abaixo os resultados fornecidos pelo identificador paralelo quando submetido a identificação do motor CC simulado, utilizando-se uma entrada pseudo-aleatória de comprimento 127 acrescida de um sinal contínuo, e ganhos iniciais de ponderação  $10$ ,  $10^2$ ,  $10^3$  e  $10^9$ , com um período de amostragem de 70 ms.

Para o ganho inicial de ponderação 10:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,4270 & -35,1236 \\ +0,9481 & -0,12107 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,4745 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

apresentando um erro percentual máxima de 3,6% para o parâmetro  $a_{22}$ .

Para o ganho inicial de ponderação  $10^2$ :

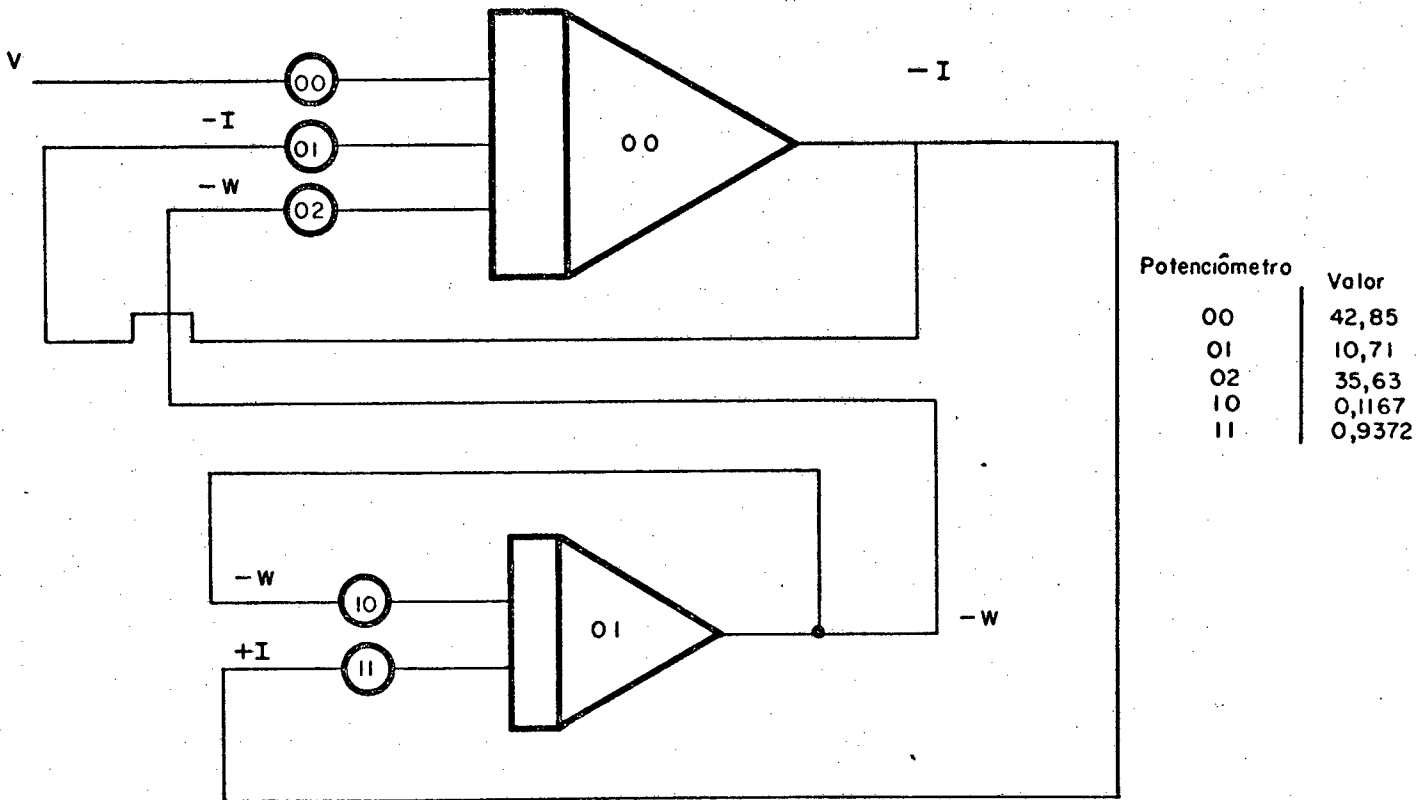


Figura 4.4-8: - Esquema de montagem utilizado para simular o motor C.C.

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,43325 & -35,35454 \\ +0,94551 & -0,12068 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,497 \\ 0 \end{bmatrix} v ,$$

apresentando um erro percentual máximo de 3,38% para o parâmetro  $a_{22}$ .

Para o ganho inicial de ponderação  $10^3$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,41085 & -35,23410 \\ +0,94680 & -0,11132 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,4968 \\ 0 \end{bmatrix} v ,$$

apresentando um erro percentual máximo de 4,6% para o parâmetro  $a_{22}$ .

Para o ganho inicial de ponderação  $10^9$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dw}{dk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,36764 & -34,84042 \\ 0,94819 & -0,09361 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,53475 \\ 0 \end{bmatrix} v ,$$

apresentando um erro percentual máximo de 19,79% para o parâmetro  $a_{22}$ .

Ao contrário da simulação digital, obtém-se melhores resultados com ganhos de ponderação pequenos.

Os resultados fornecidos pelo identificador série-paralelo quando submetido a identificação do mesmo processo, apresentou o mesmo resultado que o do paralelo com relação ao ganho inicial de ponderação, mas forneceu um erro percentual superior a esse último.

#### 4.5. Conclusão

Os identificadores a ganho decrescente paralelo e série-paralelo apresentam um bom resultado na simulação híbrida, oferecendo um erro percentual de parâmetros um pouco superior à quele encontrado para a simulação digital.

Observou-se na simulação híbrida que o erro percentual de parâmetros é um pouco superior ao erro apresentado na simulação digital, devido a tres fatores:

- Erro de medidas produzido pelos conversores analógicos-digitais e digitais-analógicos. Estes conversores produzem um erro de quantização.

- O tempo de cálculo dita o período de amostragem, isto é, o período de amostragem nunca poderá ser inferior ao tempo de cálculo sob pena de invalidar os cálculos realizados. Para processos muito rápidos devido ao tempo de cálculo é necessário um período de amostragem relativamente longo, implicando em perda de informação e conseqüentemente má identificação.

- Um terceiro fator que altera o erro percentual de parâmetros é a imprecisão do modelo do processo. No caso da identificação do motor C.C., o modelo do motor considerado foi uma aproximação da relação entrada-saída

Tanto para os identificadores paralelo como série-paralelo obtém-se uma melhor estimação paramétrica para ganhos iniciais pequenos. Observou-se que para ganhos iniciais elevados o erro de estado converge rapidamente para zero, e em consequência estabiliza a variação dos parâmetros estimados. Os erros de medida, a imprecisão do modelo do processo e o tempo de amostragem conduzem naturalmente a uma má identificação quando comparada com a simulação puramente digital. Ganhos iniciais menores conduzem a uma convergência lenta do erro de estado permitindo um maior intervalo de tempo para identificar os parâmetros, explicando uma melhor identificação. Em linguagem simples, quanto maior o tempo que o identificador tem para identificar, uma melhor filtragem é realizada e conseqüente melhor identificação.

O identificador paralelo mostrou melhores resulta

dos comparado ao identificador série-paralelo, apresentando um erro percentual dos parâmetros praticamente insignificante.

## CAPÍTULO 5

## CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Foi apresentado neste trabalho um estudo de identificadores multivariáveis para processos lineares invariantes no tempo, onde o estado e a entrada são conhecidas.

Foram vistos métodos clássicos para solução deste problema e estudados em profundidade identificadores a ganho decrescente.

Realizou-se diversas simulações puramente digitais com o processo sem perturbação e perturbado por um ruído gaussiano de média zero. Constatou-se que o identificador a ganho decrescente do tipo paralelo teve o melhor desempenho notadamente em presença de ruído.

Estudou-se também o problema de identificação de processos contínuos. Para tal estudo simulou-se o processo em um computador analógico, e implantou-se o algoritmo de identificação no computador digital PDP 11/40. Observou-se que o identificador de melhor desempenho foi o paralelo a ganho decrescente.

Os ganhos iniciais da matriz de ponderação na simulação puramente digital podem ser elevados (da ordem de  $10^9$ ), enquanto que na simulação híbrida estes ganhos devem ser pequenos (da ordem de  $10^2$ ).

Devido ao desempenho apresentado nas diversas simulações realizadas, os identificadores a ganho decrescente podem

ser utilizados na identificação de processos reais.

Como perspectivas para futuros trabalhos pensa-se que os identificadores a ganho decrescente podem ser utilizados em identificação de processos reais, com a finalidade de os parâmetros identificados serem utilizados em esquemas de controle. Além do mais, a estrutura a ganho decrescente pode ser utilizada diretamente em esquemas de controle adaptativo do tipo modelo de referência [1].

A P Ê N D I C E A

## LISTAGEM DAS SUBROTINAS UTILIZADAS NOS PROGRAMAS DE IDENTIFICAÇÃO

A.1 - Introdução

Apresenta-se neste apêndice as subrotinas utilizadas nos programas de identificação.

A.2 - Subrotinas

PKW - Subrotina em ASSEMBLER utilizada para iniciar a conversão em intervalos de tempos pré-estabelecidos. A conversão ocorre em cada overflow do relógio em tempo real.

PDA - Subrotina em ASSEMBLER utilizada para promover a conversão DIGITAL-ANALÓGICA de dois canais.

PAD - Subrotina em ASSEMBLER utilizada para promover a conversão ANALÓGICO-DIGITAL de 4 canais.

DAL - Subrotina em ASSEMBLER utilizada para promover a conversão DIGITAL-ANALÓGICA de um canal.

SBN6, SBN7, SBN8, SBN9, SBN10 e SBN11 - Subrotinas em FORTRAN que geram sequências binárias de comprimento 63, 127, 255, 511, 1023 e 2047 respectivamente.

GAUSS - Subrotina em FORTRAN que gera um ruído gaussiano.

REPCON - Subrotina em FORTRAN que encontra as matrizes F e G representações contínuas a partir das representações discretas A e B.



```

      .GLOBL PAD
      .TITLE PAD
      R5=%5
      PC=%7
      STATAD=170400
      ADBUF=170402
PAD:   TSTR @*STATAD           ;TESTAR STATUS DE A/D

      BPL PAD
      MOV @*ADBUF,@2(R5)      ;SI ESTA A/D4-->I

      MOV #2401,@*STATAD     ;INICIAR NOVA CONVERSAO

PAD1:  TSTB @*STATAD

      BPL PAD1
      MOV @*ADBUF,@4(R5)      ;5-->J

      MOV #3001,@*STATAD     ;INICIAR NOVA

PAD2:  TSTB @*STATAD

      BPL PAD2
      MOV @*ADBUF,@6(R5)      ;6-->K

      MOV #3401,@*STATAD     ;INICIAR NOVA

PAD3:  TSTB @*STATAD

      BPL PAD3
      MOV @*ADBUF,@10(R5)     ;7-->L

      MOV #2040,@*STATAD     ;PROXIMO NO OVERFLOW

      RTS PC
      .END

```

```

      .TITLE DA1
      .GLOBL DA1
      R5=%5
      PC=%7
      DAB=176760
DA1:  MOV@2(R5),@*DAB

      RTS PC
      .END

```

```

.GLOBAL PKW
.TITLE PKW
R5=%5
PC=%7
PREBUF=170406
SPKW=170404
STATAD=170400
PKW:  MOV @2(R5),@#PREBUF      ;IT CARREGADO NO PRESET/BUFFER

      MOV @4(R5),@#SPKW       ;IF CARREGADO NO STATUS

      MOV #2040,@#STATAD     ;CARREGAR STATUS DE A/D

      RTS PC                  ;VOLTAR
      .END

```

```

.GLOBAL PDA
.TITLE PDA
R5=%5
PC=%7
DA1=176760
DA2=176762
PDA:  MOV@2(R5),@#DA1

      MOV@4(R5),@#DA2

      RTS PC
      .END

```

```

SUBROUTINE SBN6(H)
DIMENSION H(12)
IF(H(5).EQ.H(6)) GO TO 50
X=1.0
GO TO 200
50  X=-1.0
200 DO 100 K=1,5
    L=6-K
    H(L+1)=H(L)
100 CONTINUE
    H(L)=X
    RETURN
    END

```

```

SUBROUTINE SBN7(HA)
DIMENSION HA(12)
IF(HA(4).EQ.HA(7)) GO TO 10
SX=1.0
GO TO 15
10  SX=-1.0
15  DO 20 K=1,6
    L=7-K
    HA(L+1)=HA(L)
20  CONTINUE
    HA(L)=SX
    RETURN
    END

```

```

SUBROUTINE SBN8(H)
DIMENSION H(12)
IF(H(2).NE.H(3)) GO TO 51
IF(H(3).NE.H(4)) GO TO 51
IF(H(4).EQ.H(8)) GO TO 50
51 X=1.0
GO TO 15
50 X=-1.0
15 DO 100 K=1,7
L=8-K
H(L+1)=H(L)
100 CONTINUE
H(L)=X
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SBN9(H)
DIMENSION H(12)
IF(H(5).EQ.H(9)) GO TO 50
X=1.0
GO TO 200
50 X=-1.0
200 DO 100 K=1,8
L=9-K
H(L+1)=H(L)
100 CONTINUE
H(L)=X
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SBN10(HB)
DIMENSION HB(12)
IF(HB(7).EQ.HB(10)) GO TO 10
SX=1.0
GO TO 15
10 SX=-1.0
15 DO 20 K=1,9
L=10-K
HB(L+1)=HB(L)
20 CONTINUE
HB(L)=SX
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SBN11(H)
DIMENSION H(12)
IF(H(9).EQ.H(11)) GO TO 50
X=1.0
GO TO 200
50 X=-1.0
200 DO 100 K=1,10
L=11-K
H(L+1)=H(L)
100 CONTINUE
H(L)=X
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GAUSS(W1,AM,AV)
1  RN=RAN(L1,L2)
   IF(RN)2,1,2
2  RM=RAN(L1,L2)
   AL=-2.*ALOG(RN)*AV
   W1=SQRT(AL)*COS(6.2832*RM)+AM
   RETURN
   END

```

```

C
C ENCONTRA AS MATRIZES F E G REPRESENTACOES CONTINUAS A PARTIR
C DAS REPRESENTACOES DISCRETAS A E B.
C

```

```

C A-MATRIZ DISCRETA (AD)
C B-MATRIZ DISCRETA (BD)
C F-MATRIZ CONTINUA (AC)
C G-MATRIZ CONTINUA (BC)
C T=TEMPO DE DISCRETIZACAO
C N=ORDEM DO PROCESSO
C L=NUMERO DE ENTRADAS
C

```

```

SUBROUTINE REPCON(A,B,T,N,L)
DIMENSION A(5,10),B(5,5),F(5,5),E(5,5),ALF(5,5),TEMP(5)
DIMENSION AII(5,10),AF(5,5),G(5,5),E1(5,5),R1(5,5)
DO 700 I=1,N
DO 705 J=1,L
R1(I,J)=B(I,J)
705 CONTINUE
700 CONTINUE
WRITE(6,70)N
70  FORMAT(1X,'ORDEM DO PROCESSO=',I5)
WRITE(6,75)L
75  FORMAT(1X,'NUMERO DE ENTRADAS=',I5)
WRITE(6,80)T
80  FORMAT(1X,'PERIODO DE AMOSTRAGEM=',F7.4)
DO 85 I=1,N
WRITE(6,90)(I,J,A(I,J),J=1,N)
85  CONTINUE
90  FORMAT(4(1X,'A(',I2,',',',I2,')=',F11.7),/)
DO 95 I=1,N
WRITE(6,101)(I,J,B(I,J),J=1,L)
95  CONTINUE
101 FORMAT(4(1X,'B(',I2,',',',I2,')=',F11.7),/)
DO 100 I=1,N
A(I,I)=A(I,I)-1.
DO 100 J=1,N
F(I,J)=A(I,J)
100 E(I,J)=A(I,J)
DO 400 K=2,100
XK=K
X=(-1.)**(K+1)
XK=X*XK

```

```

DO 505 I=1,N
DO 510 K1=1,N
E1(I,K1)=0.0
DO 515 J=1,N
E1(I,K1)=E1(I,K1)+E(I,J)*A(J,K1)
515 CONTINUE
510 CONTINUE
505 CONTINUE
DO 300 I=1,N
DO 300 J=1,N
IF(ABS(E1(I,J)).LT.1E-20) E1(I,J)=0.0

```

N IV V01C-03A SAT 13-SEP-80 17:23:02

PAGE 002

```

F(I,J)=F(I,J)+E1(I,J)/XK
300 E(I,J)=E1(I,J)
400 CONTINUE
DO 500 I=1,N
DO 500 J=1,N
500 F(I,J)=F(I,J)/T
NA=2*N
NF1=N+1
DO 11 I=1,N
DO 20 J=1,N
20 ALF(I,J)=A(I,J)
DO 25 J=NF1,NA
A(I,J)=0.0
IF(J-N-I)25,30,25
30 A(I,J)=1.0
25 CONTINUE
11 CONTINUE
DO 35 K=1,N
PIVOT=A(K,K)
DO 40 J=1,N
40 TEMP(J)=A(J,K)
DO 45 I=K,NA
A(K,I)=A(K,I)/PIVOT
DO 45 J=1,N
IF(J-K)51,45,51
51 A(J,I)=A(J,I)-TEMP(J)*A(K,I)
45 CONTINUE
35 CONTINUE
N1=N+1
DO 56 I=1,N
DO 56 J=N1,NA
AII(I,J-N)=A(I,J)
56 CONTINUE
CALL MULTIQ(AII,F,AF,N,N,N)
CALL MULTIQ(AF,B1,G,N,N,L)
WRITE(6,15)
15 FORMAT(1X,'REPRESENTACAO CONTINUA DO PROCESSO IDENTIFICADO')
DO 50 I=1,N
WRITE(6,55)(I,J,F(I,J),J=1,N)
50 CONTINUE
DO 60 I=1,N
WRITE(6,65)(I,J,G(I,J),J=1,L)
60 CONTINUE
55 FORMAT(4(1X,'F(',I2,',',',I2,')=',F11.5),/)
65 FORMAT(4(1X,'G(',I2,',',',I2,')=',F11.5),/)
RETURN
END

```

A P Ê N D I C E B

SISTEMAS DINÂMICOS POSITIVOS LINEAR, DISCRETOS E INVARIANTES NO TEMPO [14].

B.1 - Introdução

Apresenta-se neste apêndice algumas definições e teoremas relacionados com sistemas dinâmicos positivos linear, discretos e invariantes no tempo.

B.2 - Definições

Considere o sistema linear, discreto, invariante no tempo, completamente controlável e observável

$$\bar{X}(k + 1) = A \bar{X}(k) + B \bar{u}(k) \quad (B.1)$$

$$\bar{V}(k) = C \bar{X}(k) + J \bar{u}(k) \quad (B.2)$$

onde  $\bar{X}$  é o vetor de estado de dimensão  $(n \times 1)$ ,  $\bar{u}$  é o vetor de entrada de dimensão  $(m \times 1)$ ,  $\bar{V}$  é o vetor de saída de dimensão  $(m \times 1)$  e  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $J$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas.

O sistema de equações (B.1) e (B.2) é também caracterizado pela matriz de transferência discreta

$$H(Z) = J + C(Z I - A)^{-1} B \quad (B.3)$$

Definição B.1: - Uma matriz discreta de dimensão  $H(Z)$  de uma função racional real é "real positiva" se

1. Todos os elementos de  $H(Z)$  são analíticos fora do círculo unitário (isto é, eles não possuem pólos em  $|Z| > 1$ ).

2. Os eventuais pólos de qualquer elemento de  $H(Z)$  no círculo unitário  $|Z| = 1$  são simples, e a matriz residual associada é uma matriz Hermitiana semi-definida positiva.

3. A matriz

$$H(Z) + H^T(Z^*) = H(e^{jw}) + H^T(e^{-jw})$$

é uma matriz Hermitiana (definição D.1) semi-definida positiva para todos valores reais de  $w$  ao qual não são pólo de qualquer elemento de  $H(e^{jw})$  [isto é para todo  $Z$  no círculo unitário  $|Z| = 1$  ao qual não são pólos de  $H(Z)$ ].

Definição B.2: - Uma matriz discreta  $H(Z)$  de dimensão  $(m \times m)$  de funções racionais reais é "estritamente real positiva" se

1. Todos os elementos de  $H(Z)$  são analíticos em  $|Z| > 1$ .

2. A matriz

$$H(Z) + H^T(Z^*) = H(e^{jw}) + H^T(e^{-jw})$$

é uma matriz Hermitiana definida positiva para todo  $w$  (isto é, para todo  $Z$  no círculo unitário  $|Z| = 1$ ).

Definição B.3: - A matriz Kernel discreta  $C(k, \ell)$  é denominada definida positiva se, para cada intervalo  $[k_0, k_1]$  e para todos os vetores discretos  $\bar{F}(k)$  limitados em  $[k_0, k_1]$ , a seguinte desigualdade é considerada

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} \bar{F}^T(k) \left[ \sum_{\ell=k_0}^k C(k, \ell) \bar{F}(\ell) \right] \geq 0 \text{ para todo } k_1 \geq k_0. \quad (\text{B.4})$$

Lema B.1: - Para a classe de Kernels discretos  $C(k-\ell)$  para o qual a transformada Z existe, a condição necessária e suficiente para  $C(k-\ell)$  ser uma matriz Kernel discreta definida positiva, é que sua transformada Z seja uma matriz de transferência discreta real positiva.

### B.3 - Teorema

Teorema B.1: - As seguintes proposições referentes ao sistema de equações (B.1) e (B.2) são equivalentes:

1. O sistema de equações (B.1) e (B.2) possui uma matriz de transferência (B.3) real positiva.
2. Existe uma matriz definida positiva simétrica P, uma matriz semidefinida positiva Q, e matrizes S e R tal que

$$A^T P A - P = - Q \quad (\text{B.5})$$

$$B^T P A + S^T = C \quad (\text{B.6})$$

$$J + J^T - B^T P B = R \quad (\text{B.7})$$



$$\begin{vmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{vmatrix} > 0 . \quad (\text{B.8})$$

3. Toda a solução  $\bar{X}[\bar{X}(0), \bar{u}(k)]$  das equações (B.1) e (B.2) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\sum_{k=0}^{k_1} \bar{v}^T(k) \bar{u}(k) = \frac{1}{2} \bar{X}^T(k_1+1) P \bar{X}(k_1+1) - \frac{1}{2} \bar{X}^T(0) P \bar{X}(0) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_1} \left[ \bar{X}^T(k) Q \bar{X}(k) + 2 \bar{u}^T(k) S^T \bar{X}(k) + \bar{u}^T(k) R \bar{u}(k) \right] \quad (\text{B.9})$$

onde  $P$  é uma matriz definida positiva e as matrizes  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  e  $R$  satisfazem as equações (B.5) à (B.8).

4. A matriz Kernel discreta (matriz resposta impulso)

$$C(k-l) = J \delta(k-l) + C A^{-(l-1)} B \Gamma(k-l) \quad (\text{B.10})$$

é uma matriz Kernel discreta definida positiva. Sendo  $\Gamma(k-l)$  uma função unitária degrau que é definida do seguinte modo

$$\Gamma(k-l) \begin{cases} \Gamma(k-l) = 0 & \text{para } (k-l) < 0 \\ \Gamma(k-l) = 1 & \text{para } (k-l) > 0 \end{cases} .$$

Lema B.2: - A matriz de transferência discreta  $H(z)$  dada pela equação (B.3) é estritamente real positiva se existe uma matriz  $P$  simétrica definida positiva, uma matriz  $Q$  simétrica definida positiva, e matrizes  $K$  e  $L$  tal que

$$A^T P A - P = - L L^T - Q = - Q' \quad (B.11)$$

$$B^T P A + K^T L^T = C \quad (B.12)$$

$$K^T K = J + J^T - B^T P B \quad (B.13)$$

Nota:  $Q'$  na equação (B.11) é uma matriz definida positiva ao qual implica que os autovalores de  $A$  possuem um valor absoluto menor do que 1 e que portanto os elementos de  $H(z)$  serão analíticos em  $|z| \geq 1$ .

A P Ê N D I C E C

HIPERESTABILIDADE [14]

C.1 - Introdução

Neste apêndice apresenta-se algumas definições e teoremas relacionados com o problema de Hiperestabilidade.

C.2 - Definições

Considere o sistema linear invariante

$$\bar{X}(k+1) = A \bar{X}(k) + B \bar{u}(k) = A \bar{X}(k) - B \bar{W}(k) \quad (C.1)$$

$$\bar{V}(k) = C \bar{X}(k) + J \bar{u}(k) = C \bar{X}(k) - J \bar{W}(k) \quad (C.2)$$

onde  $\bar{X}(k)$  é o vetor de estado de dimensão  $(n \times 1)$ ,  $\bar{u}(k)$  é a entrada de dimensão  $(m \times 1)$  e  $\bar{V}(k)$  é a saída de dimensão  $(m \times 1)$  e  $A, B, C$  e  $J$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas.

realimentado pelo bloco (ver Figura C.1)

$$\bar{W}(k) = f(\bar{V}, k, l) \quad , \quad l \leq k \quad (C.3)$$

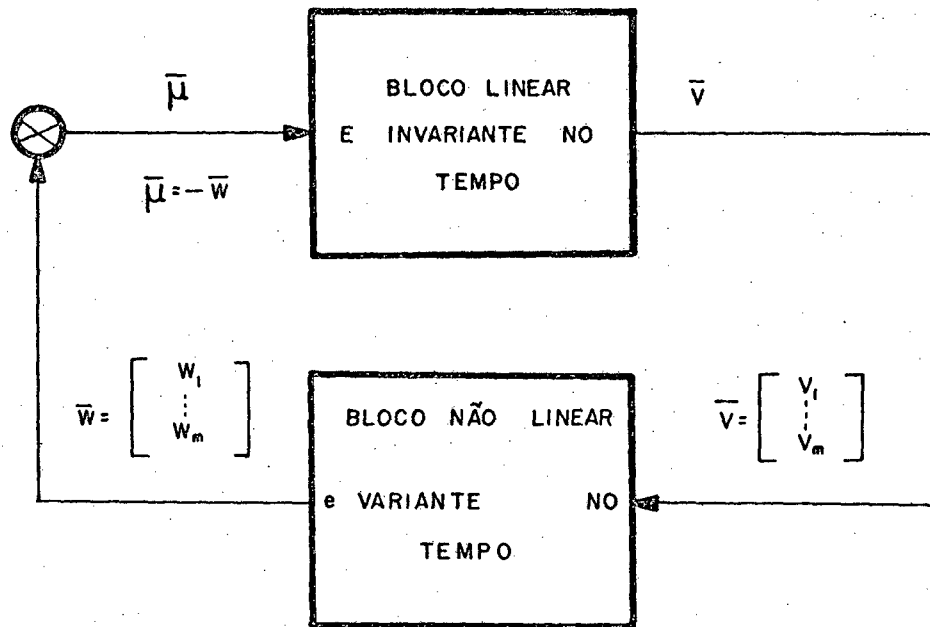


Figura C.1: - Sistema padrão multivariável com realimentação não linear e variante no tempo.

Definição C.1: - O sistema de malha fechada dado pelas equações (C.1), (C.2) e (C.3) é hiperestável [ou o bloco de alimentação direta definido pelas equações (C.1) e (C.2) é hiperestável] se existir uma constante  $\delta > 0$  e uma constante positiva  $\gamma_0 > 0$ , tais que todas as soluções  $\bar{x}[\bar{x}(0), k]$  das equações (C.1) e (C.2) verifiquem a desigualdade

$$\|\bar{x}(k)\| < \delta [\|\bar{x}(0)\| + \gamma_0] \text{ para todo } k > 0 \quad (\text{C.4})$$

para qualquer bloco de realimentação  $\bar{w} = f(\bar{v}, k, l)$ , que satisfaça a desigualdade de Popov

$$\eta(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} \bar{w}^T(k) \bar{v}(k) > -\gamma_0^2, \quad \forall k_1 > k_0. \quad (\text{C.5})$$

Definição C.2: - O sistema de malha fechada, dado pelas equações (C.1), (C.2) e (C.3), é assintoticamente hiperestável se

1. Ele é hiperestável.
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}(k) = 0$  para todo funcional (ou bloco de realimentação)  $\bar{w}(k) = f(\bar{v}, k, l)$  que satisfaz a desigualdade da equação (C.5).

A definição C.2 pode também ser reafirmada ou definida da seguinte forma:

Definição C.3: - O sistema de malha fechada, descrito por (C.1), (C.2) e (C.3), é assintoticamente hiperestável se ele é assintoticamente estável globalmente, para todos os blocos de realimentação (C.3), ao qual verificam a desigualdade (C.5).

### C.3 - Teorema de Popov

Teorema C.1: - A condição necessária e suficiente para que o sistema realimentado, descrito pelas equações (C.1), (C.2), (C.3) e (C.5), seja assintoticamente hiperestável [ou o bloco definido pelas equações (C.1) e (C.2) seja assintoticamente hiperestável] é que a matriz de transferência

$$H(z) = J + C(zI - A)^{-1}B \quad (C.6)$$

seja estritamente real positiva.

A P Ê N D I C E D

DEFINIÇÕES E TEOREMA UTILIZADO NO DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

D.1 - Introdução

Neste apêndice serão dadas algumas definições, um teorema e um Lema da Inversão necessário à compreensão do desenvolvimento teórico aqui apresentado.

D.2 - Definições

Definição D.1: - Matriz Hermitiana [22].

Uma matriz  $A = a_{ij}$  é hermitiana se, e somente se,  $A = A^*$ , isto é, se, e somente se,  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ .

Definição D.2: - Função analítica [13].

Consideremos "D" ser um intervalo aberto em  $\mathbb{R}$  e consideremos  $f(\cdot)$  ser uma função definida em D, que para cada ponto de D corresponde um único número em  $\mathbb{R}$ .

Uma função de uma variável real,  $f(\cdot)$ , é dita ser analítica em D se  $f$  é um elemento de  $C^\infty$  e se para cada  $t_0$  em D existe um número real positivo  $\epsilon_0$  tal que, para todo  $t$  em  $(t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0)$ ,  $f(t)$  é representada por uma série de Taylor no ponto  $t_0$ ,

ou seja:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) \quad . \quad (D.2-1)$$

Obs:  $C^{\infty}$  é a classe de funções que possui derivadas de todas as or  
dens.

Definição D.3: - Diz-se que uma seqüência de números reais  $\{a_k\}$  "converge" para o número "a" se, dado  $\epsilon > 0$  qualquer, existir um número K (em geral dependente de  $\epsilon$ ), tal que

$$|a_k - a| < \epsilon$$

para todo  $k > K$ . Quando tal acontece, dizemos que a é o limi  
te de  $\{a_k\}$ , e escrevemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a, \quad \text{ou} \quad \{a_k\} \rightarrow 0,$$

se por outro lado não existe tal número, diz-se que  $\{a_k\}$  diverge  
[11] .

Definição D.4: - Sequências monotonicamente não decrescente e  
não crescente [11] .

Se diz que  $\{a_k\}$  é monotonicamente não decrescente  
se  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$  e monotonicamente não crescente se  $a_1 \geq$   
 $a_2 \geq \dots$  .

D.3 - Teorema [11].

Teorema D.1: - Uma seqüência monotônica não decrescente converge se, e somente se, for limitada superiormente, enquanto que uma seqüência monotônica não crescente converge se, e somente se, for limitada inferiormente.

D.4 - Lema da Inversão [1]

Lema D.1: - Se para uma matriz regular arbitrária A de dimensão (nxn) e duas matrizes B e C de dimensão (nxm), sendo as matrizes  $(A+BC^T)$  e  $(I+C^T A^{-1} B)$  regulares, então a seguinte desigualdade é válida

$$(A+BC^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (I+C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1} \quad (D.4-1)$$

Caso particular:

$$(P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} = P - P H^T (R + H P H^T)^{-1} H P \quad (D.4-2)$$



A P Ê N D I C E E

LISTAGEM DO PROGRAMA DO IDENTIFICADOR PARALELO A GANHO DECRESCENTE  
UTILIZADO NA SIMULAÇÃO HÍBRIDA

```

C*****
C* IDENTIFICACAO DE UM PROCESSO UTILIZANDO IDENTIFICADOR DO TIPO *
C* PARALELO A GANHO DECRESCENTE , COM ESTADOS ACESSIVEIS. *
C* PROCESSO:- *
C*  $X(K+1)=A*X(K)+B*U(K)$  *
C* MODELO AJUSTAVEL:- *
C*  $Y(K+1)=A(K+1)*Y(K)+B(K+1)*U(K)+C(K+1)*E(K)$  *
C* ENTRADAS:- *
C* PSEUDO-ALEATORIA *
C* LEI DE ADAPTACAO:- *
C*  $F(K+1)=F(K)+E(K+1)*VT(K)*F(K)$  *
C* EQUACAO DO GANHO DECRESCENTE:- *
C*  $F(K+1)=F(K)-F(K)*V(K)*VT(K)*F(K)$  ;  $F(0)>0$  *
C*  $1+VT(K)*F(K)*V(K)$  *
C* EQUACAO DO ERRO:- *
C*  $E(K+1)=$   $EO(K+1)$  *
C*  $1 + VT(K)*F(K)*V(K)$  *
C* SIMULACAO HIBRIDA COM GERACAO DE SEQUENCIA BINARIA. *
C*****
DIMENSION X(5),U(5),HA(12),HB(12),FM(15,15),CE(5,5)
DIMENSION X1(5),Y(5),E(5),V(15),Y01(5),E01(5),PMA(5,15)
DIMENSION E1(5),F(15,15),FV(15),F(5,15),U1(5),AMA(5,5)
DIMENSION E1V(5,15),E1VF(5,15),P1(5,15),Y1(5),BMA(5,5)
DIMENSION UTF(15),FF(15,15),F1(15,15),A(5,5),B(5,5)
WRITE(7,1014)
1014 FORMAT(6X,'IDENTIFICACAO DE UM PROCESSO UTILIZANDO',/,
26X,'IDENTIFICADOR DO TIPO PARALELO A GANHO DECRESCENTE',/,
26X,'COM ESTADOS ACESSIVEIS.')
```

WRITE(7,5)

5 FORMAT(6X,'QUAL A ORDEM DO PROCESSO?FORMAT I5')

READ(5,10)N

WRITE(7,25)

25 FORMAT(6X,'QUAL O NUMERO DE ENTRADAS ?FORMAT I5')

READ(5,10)L

959 WRITE(7,900)

900 FORMAT(6X,'QUAL O VALOR DA CTE QUE CANCELA O POT. DO ANA.?F5.2')

READ(5,905)CTE

905 FORMAT(F5.2)

WRITE(7,580)

580 FORMAT(6X,'QUAL A AMPLIACAO DA AMPLITUDE,QUE VOCE DESEJA?I3')

READ(5,10)KA

WRITE(7,585)

585 FORMAT(6X,'QUAL O DESLOCAMENTO DO VALOR INICIAL DA AMPLITUDE?I3'

2)

READ(5,10)KB

WRITE(7,590)

590 FORMAT(6X,'QUAL A AMPLIACAO DA ABSCISSA? I3')

READ(5,10)KC

WRITE(7,595)

595 FORMAT(6X,'QUAL O DESLOCAMENTO DO VALOR INICIAL DA ABSCISSA?I3')

READ(5,10)KD

WRITE(7,1500)

1500 FORMAT(6X,'QUAL O SINAL CONTINUD QUE VOCE QUER SOMAR A ',/,

26X,'ENTRADA PSEUDO-ALEATORIA ? F7.3')

READ(5,1501)SCONT

WRITE(7,1502)

1502 FORMAT(6X,'QUAL O VALOR DA CTE QUE VOCE QUER MULTIPLICAR',/,

26X,'PELA ENTRADA PSEUDO-ALEATORIA ? F7.3')

READ(5,1501)BETA

1501 FORMAT(F7.3)

```

WRITE(7,15)
15  FORMAT(6X,'QUANTAS INTERACOES VOCE DESEJA?,ENTRAR COM O FORMAT
    2F6.0.')
```

READ(5,20)Z

```

10  FORMAT(I5)
20  FORMAT(F6.0)
    WRITE(7,1511)
1511 FORMAT(6X,'EM QUANTAS ULTIMAS INTERACOES VOCE DESEJA',/,
    26X,'OBTER A MEDIA ARITMETICA DOS PARAMETROS IDENTIFICADOS')
    READ(5,1512)UIFOM
1512 FORMAT(F4.0)
    N1=N+N+L
    ZUI=Z-UIFOM
    DO 1506 I=1,N
    DO 1507 J=1,N1
    PMA(I,J)=0.0
1507 CONTINUE
1506 CONTINUE
    WRITE(7,50)
50  FORMAT(6X,'QUAIS AS CONDICOES INICIAIS DO ESTADO X?ENTRE COM
    2AS C.I.S DESEJADAS SEPARADAS POR VIRGULA.FORMAT4F4.2')
    READ(5,55)(X(I),I=1,N)
    WRITE(7,51)
51  FORMAT(6X,'QUAIS AS CONDICOES INICIAIS DO ESTADO Y?IDEM AO
    2CASO ANTERIOR.')
```

READ(5,55)(Y(I),I=1,N)

```

55  FORMAT(4F4.2)
    N2=N+L
    NM1=N+1
    NML1=N+L+1
    N2M1=N2+1
    WRITE(7,60)
60  FORMAT(6X,'QUAIS AS CONDICOES INICIAIS PARA OS PARAMETROS DE
    2P?ENTRE COM AS C.I.S DESEJADAS SEPARADAS POR VIRGULA.5F5.2')
    DO 620 I=1,N
    READ(5,65)(P(I,J),J=1,N1)
620  CONTINUE
65  FORMAT(5F5.2)
    WRITE(7,1200)
1200 FORMAT(6X,'QUAL O NUMERO DE FLIP-FLOPS QUE VOCE QUER PARA',/,
    26X,'A ENTRADA U(1)? OS NUMEROS LOGICOS PODEM SER OS SEGUINTE:',/,
    26X,'6 FLIP-FLOPS COM COMPRIMENTO 63',/,
    26X,'7 FLIP-FLOPS COM COMPRIMENTO 127',/,
    26X,'8 FLIP FLOPS COM COMPRIMENTO 255',/,
    26X,'9 FLIP-FLOPS COM COMPRIMENTO 511',/,
    26X,'10 FLIP-FLOPS COM COMPRIMENTO 1024',/,
    26X,'11 FLIP-FLOPS COM COMPRIMENTO 2047')
    READ(5,1205)NLSBN1

1205 FORMAT(I2)
    IF(L.EQ.1) GO TO 1210
    WRITE(7,1215)
1215 FORMAT(6X,'QUAL O NUMERO DE FLIP-FLOPS QUE VOCE QUER PARA',/,
    26X,'A ENTRADA U(2)? NUMERO LOGICO IDEM A U(1)')
```

READ(5,1220)NLSBN2

```

1220 FORMAT(I2)
1210 CONTINUE
    WRITE(7,80)
80  FORMAT(6X,'QUAL O GANHO DE PONDERACAO DESEJADO?F16.3')
```

```

85 READ(5,85)GF
   FORMAT(F16.3)
   DO 96 I=1,N1
   DO 97 J=1,N1
   F(I,J)=0.0
97 CONTINUE
96 CONTINUE
   DO 98 I=1,N1
   F(I,I)=GF
98 CONTINUE
   WRITE(7,1010)
1010 FORMAT(6X,'SE VOCE QUISE UTILIZAR O MESMO GANHO DE',/,
26X,'PONDERACAO ATE O FIM DA IDENTIFICACAO, PRESSIONE 1',/,
26X,'AGORA CASO VOCE QUISE MODIFICAR O GANHO DURANTE A',/,
26X,'IDENTIFICACAO PRESSIONE 2')
   READ(5,1011)NLGPM
1011 FORMAT(I2)
   IF(NLGPM.EQ.1) GO TO 1012
   IF(NLGPM.EQ.2) GO TO 1013
1013 WRITE(7,925)
925  FORMAT(6X,'DE QUANTAS EM QUANTAS INTERACOES VOCE DESEJA',/,
26X,'MULTIPLICAR A MATRIZ GANHO DE PONDERACAO RESIDUAL POR',/,
26X,'UMA CTE, OU REPETIR O MESMO GANHO INICIAL?F6.0')
   READ(5,20)XMGD
   WRITE(7,930)
930  FORMAT(6X,'SE VOCE QUISE REPETIR O MESMO GANHO A CADA',/,
26X,'NUM.DE INTERACOES ESTABELECIDAS ANTERIORMENTE,PRESSIONE2',/,
26X,'AGORA SE VOCE PREFERIR UTILIZAR O GANHO RESIDUAL',/,
26X,'PRESSIONE3')
   READ(5,935)IGN
935  FORMAT(I2)
   IF(IGN.EQ.2) GO TO 936
   WRITE(7,937)
937  FORMAT(6X,'ENTAO POR QUANTO VOCE QUER MULTIPLICAR A MATRIZ',/,
26X,'GANHO DE PONDERACAO RESIDUAL? F16.3')
   READ(5,85)XCTE
1012 CONTINUE
936  DO 95 I=1,NLSBN1
   HA(I)=1.0
95  CONTINUE
   IF(L.EQ.1) GO TO 1225
   DO 100 I=1,NLSBN2
   HB(I)=1.0
100 CONTINUE

1225 CONTINUE
   XA=0.0
   K=0
   CONT=0.0
   WRITE(6,471)
471  FORMAT(6X,'DADOS INICIAIS PARA O IDENTIFICADOR PARALELO')
   DO 485 I=1,N
   WRITE(6,490)(I,X(I))
485 CONTINUE
490  FORMAT(/,1(1X,'X(',I2,')=' ,F11.7))
   DO 495 I=1,N
   WRITE(6,500)(I,Y(I))
495 CONTINUE
500  FORMAT(/,1(1X,'Y(',I2,')=' ,F11.7))
   DO 505 I=1,N

```

```

WRITE(6,510)(I,J,P(I,J),J=1,N1)
505 CONTINUE
510 FORMAT(/,5(1X,'P(',I2,',',I2,')=' ,F11.7))
DO 525 I=1,N1
WRITE(6,530)(I,J,F(I,J),J=1,N1)
525 CONTINUE
530 FORMAT(/,5(1X,'F(',I2,',',I2,')=' ,F16.3))
942 WRITE(7,1)
1 FORMAT(6X,'QUAL E O PERIODO DE AMOSTRAGEM T?',/,
26X,'T=A*(10 NA POTENCIA B) EM SEGUNDOS.A(I7),B(I2)',/,
26X,'A=' )
READ(5,2)IT
2 FORMAT(I7)
WRITE(7,3)
3 FORMAT(6X,'B=' )
READ(5,940)IF
940 FORMAT(I2)
IT=-IT
IF=2*IF+271
IF(IF-267)8,8,941
8 IF(IF-259)941,9,9
941 GO TO 942
9 CALL PKW(IT,IF)
DO 1005 I=1,L
U(I)=1.0
1005 CONTINUE
115 XA=XA+1
K=K+1

C
C ENTRADA DOS ESTADOS DO PROCESSO A SER IDENTIFICADO, ATRAVEZ
C DOS CONVERSORES A/D.
C
IF(NLSBN1.EQ.6) CALL SBN6(HA)
IF(NLSBN1.EQ.7) CALL SBN7(HA)
IF(NLSBN1.EQ.8) CALL SBN8(HA)
IF(NLSBN1.EQ.9) CALL SBN9(HA)
IF(NLSBN1.EQ.10) CALL SBN10(HA)
IF(NLSBN1.EQ.11) CALL SBN11(HA)
HA(1)=SCONT+BETA*HA(1)

U1(1)=HA(1)
HA(1)=204.7*HA(1)
I1=IFIX(HA(1))
IF(L.EQ.1) GO TO 1230
IF(NLSBN2.EQ.6) CALL SBN6(HB)
IF(NLSBN2.EQ.7) CALL SBN7(HB)
IF(NLSBN2.EQ.8) CALL SBN8(HB)
IF(NLSBN2.EQ.9) CALL SBN9(HB)
IF(NLSBN2.EQ.10) CALL SBN10(HB)
IF(NLSBN2.EQ.11) CALL SBN11(HB)
HB(1)=SCONT+BETA*HB(1)
U1(2)=HB(1)
HB(1)=204.7*HB(1)
I2=IFIX(HB(1))
1230 CONTINUE

```

CALL PAD(IE,JE,KE,LE)

IE=IE-2048

JE=JE-2048

KE=KE-2048

LE=LE-2048

X1(1)=FLOAT(IE)

X1(2)=FLOAT(JE)

X1(3)=FLOAT(KE)

X1(4)=FLOAT(LE)

X1(1)=X1(1)/409.6

X1(2)=X1(2)/409.6

X1(3)=X1(3)/409.6

X1(4)=X1(4)/409.6

X1(1)=CTE\*X1(1)

X1(2)=CTE\*X1(2)

X1(3)=CTE\*X1(3)

X1(4)=CTE\*X1(4)

IF(L.EQ.1) CALL DA1(I1)

IF(L.EQ.2) CALL FDA(I1,I2)

C  
C  
C

ERRO DE ESTADO

DO 4 I=1,N

E(I)=X(I)-Y(I)

CONTINUE

4  
C  
C  
C

CONSTRUCAO DO VETOR V(K)

DO 120 I=1,N

V(I)=Y(I)

120

CONTINUE

DO 125 IA=NM1,N2

V(IA)=U(IA-N)

125

CONTINUE

DO 130 IB=NML1,N1

V(IB)=E(IB-N2)

130

CONTINUE

C  
C

CALCULO DE Y01(K+1)

C

DO 301 I=1,N

Y01(I)=0.0

DO 302 J=1,N1

Y01(I)=Y01(I)+P(I,J)\*V(J)

302

CONTINUE

301

CONTINUE

C  
C  
C

CALCULO DO ERRO DE ESTADO EEX(1)

EEX=0.0

DO 135 IA=1,N

EEX=EEX+(X1(IA)-Y01(IA))\*\*2.

135

CONTINUE

```

EEX=1000.*FEX
IF(EEX.GT.4000.) FEX=4000.
IE=IFIX(FEX)
L1=KA*IE+KB
IF(L1.LT.4000) GO TO 1000
L1=4000
1000 M1=KC*K+KD
CALL TELA(M1,L1)
C
C   CALCULO DO ERRO A PRIORI E01(K+1)
C
DO 6 I=1,N
E01(I)=X1(I)-Y01(I)
6   CONTINUE
C
C   CALCULO DO ERRO E1(K+1)
C
DO 331 I=1,N1
FV(I)=0.0
DO 332 J=1,N1
FV(J)=FV(I)+F(I,J)*V(J)
332 CONTINUE
331 CONTINUE
VFV=0.0
DO 140 IA=1,N1
VFV=VFV+V(IA)*FV(IA)
140 CONTINUE
DEN=1.+VFV
DUM=1./DEN
DO 145 IA=1,N
E1(IA)=DUM*E01(IA)
145 CONTINUE
C
C   CALCULO DE P(K+1)
C
DO 361 I=1,N
DO 362 J=1,N1
E1V(I,J)=E1(I)*V(J)
362 CONTINUE
361 CONTINUE

DO 371 I=1,N
DO 372 J=1,N1
E1VF(I,J)=0.0
DO 373 K1=1,N1
E1VF(I,J)=E1VF(I,J)+E1V(I,K1)*F(K1,J)
373 CONTINUE
372 CONTINUE
371 CONTINUE
DO 150 IA=1,N
DO 155 J=1,N1
F1(IA,J)=P(IA,J)+E1VF(IA,J)
155 CONTINUE
150 CONTINUE
C
C   CALCULO DO GANHO DECRESCENTE

```

```

C
DO 160 IA=1,N1
VTF(IA)=0.0
DO 165 J=1,N1
VTF(IA)=VTF(IA)+V(J)*F(J,IA)
165 CONTINUE
160 CONTINUE
DO 396 I=1,N1
DO 397 J=1,N1
FF(I,J)=FV(I)*VTF(J)
397 CONTINUE
396 CONTINUE
DO 171 I=1,N1
DO 172 J=1,N1
FM(I,J)=DUM*FF(I,J)
172 CONTINUE
171 CONTINUE
DO 170 IA=1,N1
DO 175 J=1,N1
F1(IA,J)=F(IA,J)-FM(IA,J)
175 CONTINUE
170 CONTINUE
C
C   CALCULO DE Y(K+1)
C
DO 416 I=1,N
Y1(I)=0.0
DO 417 J=1,N1
Y1(I)=Y1(I)+F1(I,J)*V(J)
417 CONTINUE
416 CONTINUE
C
C   FIM DOS CALCULOS E REINICIALIZACAO DE UMA NOVA INTERACAO SE
C   O NUMERO DE INTERACOES COMPLETADAS FOR IGUAL AO NUMERO DE
C   INTERACOES DESEJADAS.
C
DO 1006 I=1,L
U(I)=U1(I)
1006 CONTINUE

DO 205 I=1,N
X(I)=X1(I)
205 CONTINUE
DO 206 I=1,N
DO 210 J=1,N1
F(I,J)=P1(I,J)
210 CONTINUE
206 CONTINUE
DO 215 IA=1,N1
DO 220 JA=1,N1
F(IA,JA)=F1(IA,JA)
220 CONTINUE
215 CONTINUE
DO 1001 I=1,N
Y(I)=Y1(I)
1001 CONTINUE
IF(XA,LE,ZUI) GO TO 1503

```



```

DO 1504 I=1,N
DO 1505 J=1,N1
PMA(I,J)=P1(I,J)+PMA(I,J)
1505 CONTINUE
1504 CONTINUE
1503 CONT=CONT+1.
IF(CONT.NE.XMGD) GO TO 943
IF(IGN.EQ.2) GO TO 944
IF(IGN.EQ.3) GO TO 945
944 DO 946 I=1,N1
DO 947 J=1,N1
F(I,J)=0.0
947 CONTINUE
946 CONTINUE
DO 948 I=1,N1
F(I,I)=GF
948 CONTINUE
CONT=0.0
GO TO 943
945 DO 949 I=1,N1
DO 950 J=1,N1
F(I,J)=XCTE*F(I,J)
950 CONTINUE
949 CONTINUE
CONT=0.0
943 IF(Z-XA)180,180,115
C
C FIM DO PROGRAMA
C
180 WRITE(6,951)Z
951 FORMAT(1X,'NUMERO DE INTERACOES=',F6.0)
WRITE(6,952)CTE
952 FORMAT(1X,'CONSTANTE DO COMP. ANA.',F5.2)
WRITE(6,1020)NLGPM
1020 FORMAT(1X,'NUMERO LOGICO DEFINIDO DO SEGUINTE MODO',/,
21X,'1=0 MESMO GANHO DURANTE A IDENTIFICACAO TODA',/,
21X,'2=MODIFICA O GANHO DURANTE A IDENTIFICACAO',/,

21X,'PARA ESTE CASO NLGPM=',I2,')
IF(NLGPM.EQ.1) GO TO 1025
WRITE(6,960)IGN,XMGD
960 FORMAT(1X,'NUMERO LOGICO DEFINIDO DO SEGUINTE MODO',/,
21X,'2=REFETE O GANHO,3=MULTIPLICA O GANHO RESIDUAL POR CTE',/,
21X,'PARA ESTE CASO IGN=',I2,/,
21X,'E ESTA MUDANCA OCORRE A CADA=',F6.0,'INTERACOES')
1025 CONTINUE
WRITE(6,1235)NLSBN1
1235 FORMAT(1X,'NUMERO LOGICO QUE DEFINE O NUMERO DE FLIP=FLOPS',/,
21X,'PARA A ENTRADA U(1),PARA ESTE CASO U(1) E PRODUZIDO',/,
21X,'POR ',I2,'FLIP-FLOPS')
IF(L.EQ.1) GO TO 1240
WRITE(6,1245)NLSBN2
1245 FORMAT(1X,'U(2) E PRODUZIDO POR ',I2,'FLIP-FLOPS')
1240 CONTINUE
WRITE(6,953)
953 FORMAT(1X,'MATRIZ GANHO DE PONDERACAO FINAL')
DO 954 I=1,N1
WRITE(6,955)(I,J,F(I,J),J=1,N1)

```

```

954 CONTINUE
955 FORMAT(/,6(1X,'F(',I2,',',',I2,')=' ,F10.3))
WRITE(6,956)
956 FORMAT(1X,'REPRESENTACAO DISCRETA DO PROCESSO IDENTIFICADO')
DO 232 I=1,N
DO 233 J=1,N
A(I,J)=F1(I,J)
233 CONTINUE
232 CONTINUE
DO 237 I=1,N
DO 238 J=NM1,N2
B(I,J-N)=F1(I,J)
238 CONTINUE
237 CONTINUE
DO 1002 I=1,N
DO 1003 J=N2M1,N1
CE(I,J-N2)=F1(I,J)
1003 CONTINUE
1002 CONTINUE
IT=-IT
IF=IF-271
IF=IF*0.5
RIT=FLOAT(IT)
RIF=FLOAT(IF)
EXPD=10.**RIF
T=RIT*EXPD
CALL REPCON(A,B,T,N,L)
DO 1513 I=1,N
DO 1514 J=1,N
AMA(I,J)=FMA(I,J)
1514 CONTINUE
1513 CONTINUE
DO 1515 I=1,N
DO 1516 J=NM1,N2

BMA(I,J-N)=FMA(I,J)
1516 CONTINUE
1515 CONTINUE
DO 1509 I=1,N
DO 1510 J=1,N
AMA(I,J)=AMA(I,J)/UIPOM
1510 CONTINUE
1509 CONTINUE
DO 1531 I=1,N
DO 1532 J=1,L
BMA(I,J)=BMA(I,J)/UIPOM
1532 CONTINUE
1531 CONTINUE
WRITE(6,1508)UIPOM
1508 FORMAT(1X,'ESTA REPRESENTACAO EA MEDIA ARITMETICA DAS',/,
21X,'ULTIMAS ',F4.0,' INTERACOES')
CALL REPCON(AMA,BMA,T,N,L)
CALL CLOSE(6)
WRITE(7,957)
957 FORMAT(6X,'DESEJA FAZER UMA NOVA IDENTIFICACAO?',/,
26X,'SE AFIRMATIVO PRESSIONE 1,SE NEGATIVO 0')
READ(5,1004)INOV
1004 FORMAT(I2)
IF(INOV.EQ.0) GO TO 958

```

958 IF(INOV.EQ.1) GO TO 959  
STOP  
END

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - LANDAU, I.D. "Sur une Methode de Synthese des Systems Adaptatifs, avec Modèle Utilises pour la Commande et l'Identification d'une Classe de Procèdes Physiques". Thèse de Docteur Es-Sciences Physiques - Grenoble - 1973.
- [2] - CARDOSO FILHO, M. "Identificação em Tempo Real de Sistemas Lineares pelo Método da Correlação". Dissertação de Mestrado - UFSC - 1979.
- [3] - EL-Sherief, H. & SINHA, N.K. "Choice of Models for the Identification of Linear Multivariable Discrete-Time Systems", IEE, vol. 126, 1979 pp. 1326-1330.
- [4] - GRAUPE, D. "Identification of Systems" New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- [5] - EYKHOFF, P. "System Identification: Parameter and State Estimation". London: John Wiley & Sons, 1974.
- [6] - MEHRA, R.M. & LAINIOTIS, D.G. "System Identification: Advances and Case Studies". New York: Academic Press, Inc, 1976.

- [7] - EYKHOFF, P. "Identification and System Parameter Estimation" - Part 2. London: North-Holland Publishing Company, 1973.
- [8] - MENENDEZ MARTINEZ, A. "Identification de la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélacion au moyen de séquences binaires pseudo-aléatoires". Tese de Doutorado - Grenoble - 1970.
- [9] - WESTLAKE, JOAN, R. "A handbook of numerical matrix inversion an solution of linear equations". New York John Wiley & Sons, Inc, 1968.
- [10] - RICHALET, J. & RAULT, A. & POULIQUEN, R. "Identification des Processus par la methodo du modèle". Paris, GORDON & BREACH, 1971.
- [11] - KREIDER, D. & KULLER, R.C. & OSTBERG, D.R. & PERKINS, F.W. "An Introduction to Linear Analysis". Massachusetts, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, Inc., 1966.
- [12] - KALMAN, R.E. & BERTRAM. J.E. "Control System Analysis and Design via the second method of Lyapunov". Parts I and II, Trans. ASME, J. Basic Eng., 82, pp. 371 - 400 (1960).

- [13] - CHEN, CHI-TSONG. "Introduction to Linear System Theory".  
New York. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.
- [14] - LANDAU, I.D. "Adaptive Control: The Model Reference Approach". New York and Basel, MARCEL DEKKER, Inc., 1979.
- [15] - LANDAU, I.D. "An Addendum to Unbiased Recursive Identification Using Model Reference Adaptive Techniques". IEEE Trans. Automatic Control, T-AC vol. 23, pp. 97-99, Feb., 1979.
- [16] - LANDAU, I.D. "Elimination of the Real Positivity Condition in the Design of Parallel MRAS". IEEE Trans. Automatic Control, T-AC vol. 23, pp. 1015-1020 DEC., 1978.
- [17] - Silveira, H.M. "Comunicação Pessoal".
- [18] - Silveira, H.M. "Contributions a la Synthese des Systemes Adaptatifs avec Modèle sans Acces aux Variables D'Etat". Thèse de Docteur Es-Sciences Physiques - Grenoble - 1978.
- [19] - PDP 11 - Laboratory Peripherals Systems LPS 11 -  
Maintenance Manual, Dec., 1973.

- [20] - PARKS, P.C. "Lyapunov redesign of model reference adaptative control systems". IEEE Trans. Automatic Control , vol. AC-11, pp. 362-367, July 1966.
- [21] - KUDVA P. & NARENDRA K.S. "An Identification Procedure for Discrete Multivariable Systems". IEEE Trans. Automatic Control, T-AC pp. 549-552, October 1974.
- [22] - BOECHAT ALVES, D. "Algebra Linear e Matrizes". Centro Tecnológico - UFSC.