UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SOLUÇÃO SUB-ÓTIMA PARA CONTROLE DE POSIÇÃO EM TEMPO MÍNIMO PARA MÁQUINA DE CORRENTE CONTÍNUA

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

ALCINDO DO PRADO JUNIOR

ABRIL - 1980

SOLUÇÃO SUB-ÓTIMA PARA CONTROLE DE POSIÇÃO EM TEMPO MÍNIMO PARA MÁQUINA DE CORRENTE CONTÍNUA

ALCINDO DO PRADO JUNIOR

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM CIÊNCIAS - ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA

e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca
Orientador

Prof. Hans Helmut Zürn, Ph.D.
Coordenador do Curso

Apresentada perante a banca examinadora composta dos professores:

Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, DSc.

Prof. Rajamani Doraiswami, PhD.

Prof. Hamilton Medeiros Silveira, D.Et.

Prof. Sahjendra Narain Singh, PhD.

A minha esposa, Marisa

A meu filho, Eliézer

S U M Á R I O

RESUMO vi

ABSTRACT vii

INTRODUÇÃO 01

CAPÍTULO I - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

INTRODUÇÃO 04

1.1. MODELO DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA 04

1.2. O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO 07

1.3. A SOLUÇÃO DO PROBLEMA 08

1.4. NÚMERO DE COMUTAÇÕES 10

1.5. CONCLUSÕES 12

CAPÍTULO II - CURVA DE COMUTAÇÃO - APROXIMAÇÃO NO PLANO DE FASE

INTRODUÇÃO 13

2.1. ACELERAÇÃO 16

2.2. DESACELERAÇÃO 17

2.3. APROXIMAÇÃO PARA i_c 18

2.4. A CURVA DE COMUTAÇÃO 23

2.5. SIMULAÇÃO DA CURVA DE COMUTAÇÃO 25

2.6. CONCLUSÕES 34

CAPÍTULO III - CURVA DE LIMITAÇÃO COM LIMITAÇÃO DE CORRENTE

INTRODUÇÃO 35

3.1. MODIFICAÇÃO NAS EQUAÇÕES DINÂMICAS 35

3.2. COMPORTAMENTO DO SISTEMA COM LIMITAÇÃO DE CORRENTE 36

3.3. A CURVA DE COMUTAÇÃO 40

3.4. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO 43

3.5. CONCLUSÕES 53

CAPÍTULO IV - APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA

INTRODUÇÃO 55
4.1. A MUDANÇA DO MODO DE OPERAÇÃO E O SISTEMA REALIMENTADO 55
4.2. PRESENÇA DE AUTO-OSCILAÇÕES 57
4.3. APROXIMAÇÃO LINEAR 64
4.4. ESTABILIDADE DO SISTEMA REALIMENTADO 66
4.5. IMPRECISÕES NO SEGUNDO MODO 67
4.6. DELIMITAÇÕES DO SEGUNDO MODO 68
4.7. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO 70
4.8. CONCLUSÕES 75

CAPÍTULO V - COMENTÁRIOS FINAIS 76

BIBLIOGRAFIA 77

RESUMO

Este trabalho apresenta o problema de posicionamento do eixo de um motor de corrente contínua em tempo mínimo, considerando a não-linearidade proveniente do atrito. Utiliza-se uma formulação por controle ótimo e é descrita a solução teórica: controle "bang-bang" com duas comutações na tensão de armadura.

Para melhorar a aproximação sub-ótima apresentada em trabalhos anteriores, que usa apenas uma comutação, é proposta uma linearização por partes na função que relaciona a corrente de armadura e a velocidade angular antes da ocorrência dessa comutação.

No sentido de atenuar os picos de corrente que aparecem devido às mudanças bruscas na tensão de armadura, é proposto um esquema de limitação de corrente.

O estado final alcançado tem uma componente de corrente não nula, o que implica num erro de posicionamento. Para reduzir o erro cometido faz-se uma mudança na estrutura de controle, que leva o estado para uma vizinhança do estado final pretendido.

São dadas condições sobre os parâmetros do sistema para que se tenha estabilidade assintótica.

Alguns exemplos numéricos ilustram a metodologia desenvolvida.

A B S T R A C T

This work presents the minimum-time position control problem of a d.c. motor shaft, regarding the non-linearity caused by static friction. The Optimal Control Theory describes the solution: the control is unique, bang-bang, and has two switches on the armature voltage.

In order to improve the near-optimal approach developed in early papers, which uses only one switching, a piecewise linearization was proposed in the funtion with relates the armature current and the angular velocity before the switching ocurrence.

Also, current limitation was proposed, aiming to attenuate the current peaks which appear because of sudden changes in the armature voltage.

The final achieved state has a non-zero current component, causing a displacement error. In order to reduce this error it is made a change in the control structure, which leads the state to a required final state neighbourhood.

Conditions are given to the system parameters to obtain asymptotic stability.

All over the work some numerical examples illustrates the developed methodology.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho consiste em estudar o posicionamento do eixo de um motor de corrente contínua no menor tempo possível. Tal propósito originou-se da necessidade de posicionamentos rápidos em máquinas-ferramentas de controle numérico, onde o tempo constitui um aspecto importante. Extensivamente, o estudo de posicionamentos rápidos interessam a muitos outros sistemas, o que torna este tema bastante atraente.

A solução exata do problema de posicionar o eixo de um motor de corrente contínua em tempo mínimo existe e pode ser manifesta quando se aplica o Princípio do Mínimo de Pontryagin [7]. Porém, surgem certas dificuldades matemáticas, que tornam um resultado de forma explicita de difícil obtenção. O que se tem feito até agora são aproximações sub-ótimas, onde o conflito precisão versus tempo de posicionamento sempre existe, [4] .

Os resultados desenvolvidos baseiam-se em dois trabalhos anteriores ([4] e [9]), onde são apresentadas as idéias básicas que serão exploradas: comutação "bang-bang" seguida de aproximação assintótica - o que em outras palavras pode ser dito como procura de rapidez e precisão.

Em [9] , o controle "bang-bang" é feito através de uma curva de comutação. A precisão do método pode ser melhorada, além da sua própria formulação, pois a corrente de armadura atinge valores excessivamente altos de pico quando ocorre a comutação.

Tenta-se solucionar ambos os problemas mencionados acima, melhorando a precisão e formulando nova curva de comutação , em abordagem que leva em conta a limitação da corrente de armadura, o que facilita o emprego do método para qualquer tipo de motor de corrente continua.

Em [4] faz-se uso de aproximação assintótica na parte final do processo, onde a realimentação é necessária para corrigir as imprecisões da comutação "bang-bang". No presente trabalho desenvolve-se um método mais adequado para o projeto desse tipo de ação de controle, inclusive levando em conta a presença de elementos não-lineares, que podem fazer todo o sistema oscilar.

A figura 1 ilustra o funcionamento pretendido do posicionador, onde podem-se visualizar a comutação e a aproximação assintótica final.

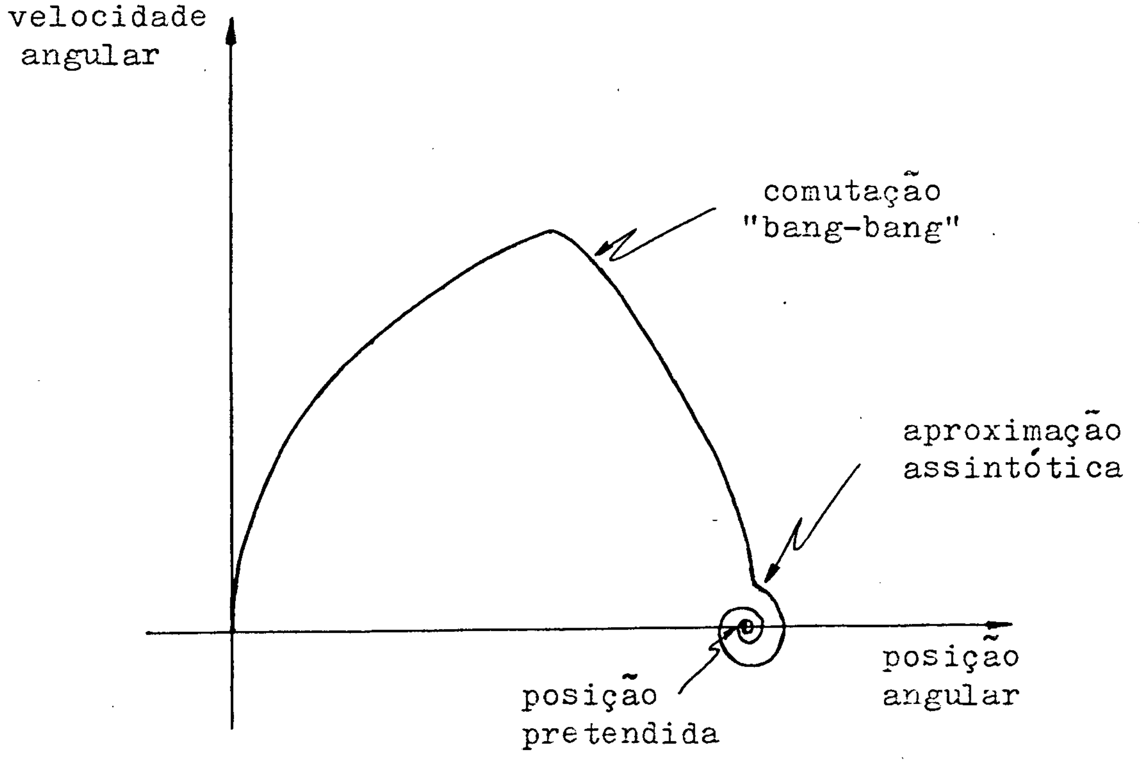

Fig. 1 - Posicionamento do eixo do motor de c.c. no plano de fase, usando comutação "bang bang" com aproximação assintótica.

O capítulo I apresenta o estudo teórico do problema de posicionamento em tempo mínimo e mostra as difuculdades matemáticas decorrentes.

O capítulo II descreve uma aproximação sub-ótima onde é deduzida uma curva de comutação que resulta em resultados mais precisos que os conseguidos anteriormente [9].

O capítulo III contém o desenvolvimento de uma nova curva de comutação, onde se considera limitação da corrente na armadura.

O capítulo IV apresenta o estudo da aproximação assintótica final, dando as condições de estabilidade e inxistência de auto-oscilações.

CAPÍTULO I
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo será descrito o modelo matemático do motor de corrente contínua usado no presente trabalho e será estudada a solução do problema do posicionamento em tempo mínimo, dada pela teoria de Controle Ótimo. Também serão apresentadas as difuculdades de se resolver o problema, que forçarão o aparecimento de soluções sub-ótimas.

1.1. MODELO DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

O modelo do motor de corrente contínua (com excitação independente ou de ímã-permanente) que será usado é o modelo linear por partes apresentado em [8] e [11], que já leva em conta certas simplificações: a indutância e a resistência de armadura são consideras constantes e é desprezada a reação de armadura.

As equações matemáticas para tal modelo (vide figura 2) serão:

$$u = K_t \Omega + R i + L \frac{di}{dt} \tag{1}$$

$$T = \bar{K}_t \, i \tag{2}$$

onde:

- u = tensão aplicada à armadura
- Ω = velocidade angular do eixo do motor
- i = corrente de armadura
- T = torque gerado
- R = resistência de armadura
- L = indutância de armadura
- K_t = cte. da força contra-eletro-motriz
- $\bar{K}_t$ = cte. motor-torque
  - K_t e $\bar{K}_t$ dependem da corrente no campo, que será feita constante.

Como em [8] e [11] , fez-se $\bar{K}_t$ numericamente igual a K_t.

Supondo que a carga mecânica (inércia mais atrito) que o eixo do motor suporta não varie, estabelece-se na armadura a seguinte equação mecânica:

$$T = J \frac{d\Omega}{dt} + T_a \qquad (3)$$

onde:

J = momento de inércia do eixo do motor mais carga

T_a = torque de atrito

O torque de atrito pode ainda ser considerado como a soma de duas parcelas, correspondentes a atrito viscoso (linear com a velocidade) e atrito estático (constante, dependendo somente do sentido do movimento). A figura 3 mostra T_a variando com a velocidade angular.

Pode-se então escrever:

$$T_a = a\Omega + b \operatorname{sgn}[\Omega] \qquad , \Omega \neq 0 \qquad (4)$$

onde:

a = coeficiente de atrito viscoso

b = coeficiente de atrito estático

$$\operatorname{sgn}[x] = \begin{cases} 1 & , \quad x \quad 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x \quad 0 \end{cases}$$

Desse modo, as equações 1 e 2 poderão ser escritas como:

$$\begin{cases} u = K_t \Omega + Ri + L \dfrac{di}{dt} \\ \\ K_t i = J \dfrac{d\Omega}{dt} + a\Omega + b \operatorname{sgn}[\Omega] \end{cases} \qquad (5)$$

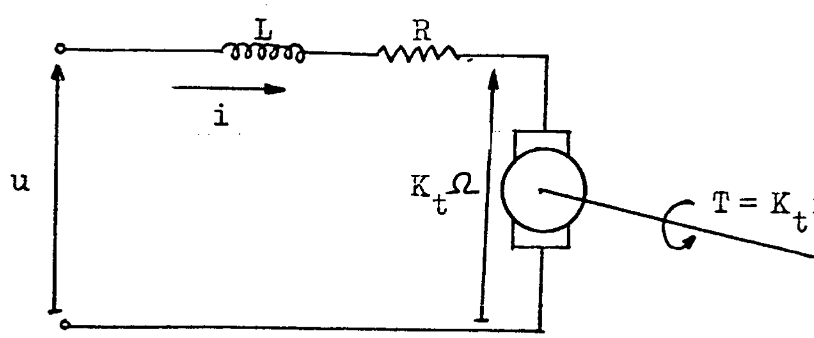

Fig. 2 - Esquematização do modelo usado para o motor de corrente contínua.

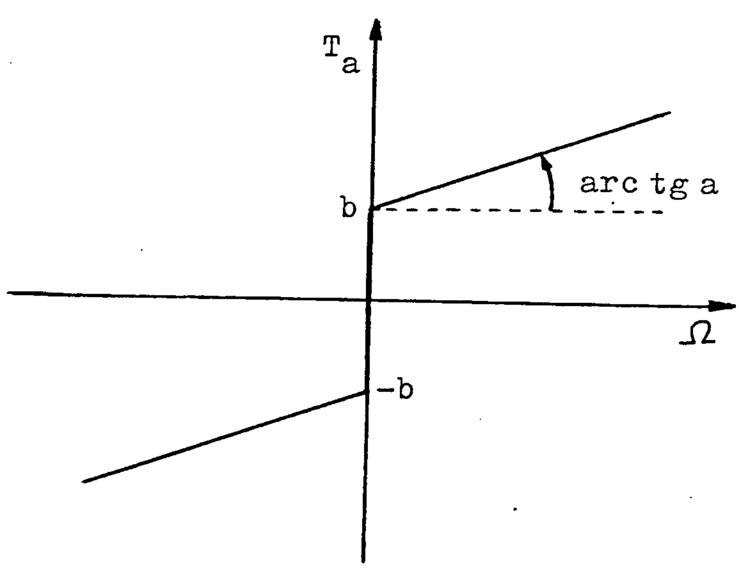

Fig. 3 - Modelo usado para o torque de atrito.

Convém ainda ressaltar que se partirmos do repouso ($\Omega = 0$ e $i = 0$), as equações 5 não serão válidas enquanto:

$$|i| \leqslant \frac{b}{K_t} \tag{6}$$

Quando a igualdade for verificada o motor começará a se mover. Nota-se portanto que sempre que a velocidade passar por zero, o motor não mais se moverá se a desigualdade 6 for satisfeita.

1.2. O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

Definindo-se como variáveis de estado:

$x_1 = \theta(t)$ = posição angular do eixo do motor

$x_2 = \frac{d\theta}{dt}$ = velocidade angular do eixo do motor $\equiv \Omega(t)$

$x_3 = i(t)$ = corrente de armadura,

e tendo-se o vetor de estado

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T ,$$

a partir das equações 5 consegue-se as seguintes equações dinâmicas para o motor:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-a}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & \frac{-K_t}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b}{J} \operatorname{sgn} x_2 \\ \frac{u}{L} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Deseja-se $\overset{*}{u}(t)$ que transfira o estado inicial

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{K_t} \end{bmatrix} \tag{8}$$

para o estado final

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} \theta_f \\ 0 \\ i_f \end{bmatrix} \tag{9}$$

em tempo mínimo, sujeito à restrição $|u(t)| \leqslant U_o$.

onde:

- θ_f = posição angular final (pretendida)
- t_f = tempo de posicionamento
- i_f = corrente final, que deve obedecer à desigualdade número 6.

1.3. A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Considerando como funcional a ser minimizado

$$JF = t_f = \int_0^{t_f} dt \tag{10}$$

aplicar-se-á o Princípio do Mínimo de Pontryagin para se determinar a lei de controle ótimo.

O Hamiltoniano [7] para o sistema será:

$$H(t) = 1 + p_1 x_2 + \frac{p_2}{J}(K_t x_3 - a x_2 - b\,\mathrm{sgn}[x_2]) + \frac{p_3}{L}(u - R x_3 - K_t x_2) \tag{11}$$

onde p_1, p_2 e p_3 são as variáveis de co-estado [7] , solução da equação diferencial

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad , \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{a + 2b\delta(x_2)}{J} & \frac{K_t}{L} \\ 0 & -\frac{K_t}{J} & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

A lei de controle ótimo é aquela que minimiza H(t), ou seja, da equação 11:

$$u^* = - U_o \operatorname{sgn} [p_3] \tag{13}$$

Obteve-se controle "bang-bang", como esperado. Para o problema ser resolvido é necessário conhecer $p_3(t)$. Portanto, o sistema de equações composto pelas equações 7 e 12 deve ser solucionado, tendo as condições de contorno 8 e 9. O valor de t_f também é desconhecido e deverá ser encontrado pela equação

$$H(t_f) = 0 \tag{14}$$

Resolver o sistema definido pelas equações 7 e 12 não é um problema fácil. Dois fatores pesam para dificultar a solução: as condições de contorno dadas em tempos diferentes e a não linearidade existente no atrito estático. Além disso, para complicar ainda mais, o valor de t_f não é conhecido.

Parte-se então para soluções sub-ótimas [9], ou para a procura da lei ótima por tentativas [4].

1.4. NÚMERO DE COMUTAÇÕES

A referência 6 apresenta uma demonstração simples e eficiente do número de comutações necessário para mover o sistema de um ponto para outro no espaço de estados, que será reproduzida aqui.

Seja n a ordem do sistema. Então o número de planos de fase necessários para descrever completamente o sistema é n-1.

Seja $\overline{p}$ o número de comutações exigidos para mover o sistema de um ponto para outro no espaço de estados. O número de equações (ou segmentos) em cada plano de fase que são necessários para descrever a trajetória é $\overline{p}+1$. Portanto, $n\overline{p}$ é o número total de incógnitas (as coordenadas de todos os pontos de comutação) e o número de equações disponíveis é $(\overline{p}+1)(n-1)$. Para que exista uma solução única é necessário que esses dois valores sejam iguais,

$$n\overline{p} = (\overline{p}+1)(n-1) \tag{15}$$

$$n\overline{p} = n\overline{p} + n - \overline{p} - 1$$

ou,

$$\overline{p} = n - 1 \tag{16}$$

No presente caso $n = 3 \Longrightarrow \overline{p} = 2$.

Ve-se então que são necessárias duas comutações na tensão de armadura. A figura 4 mostra a trajetória do sistema em dois planos de fase.

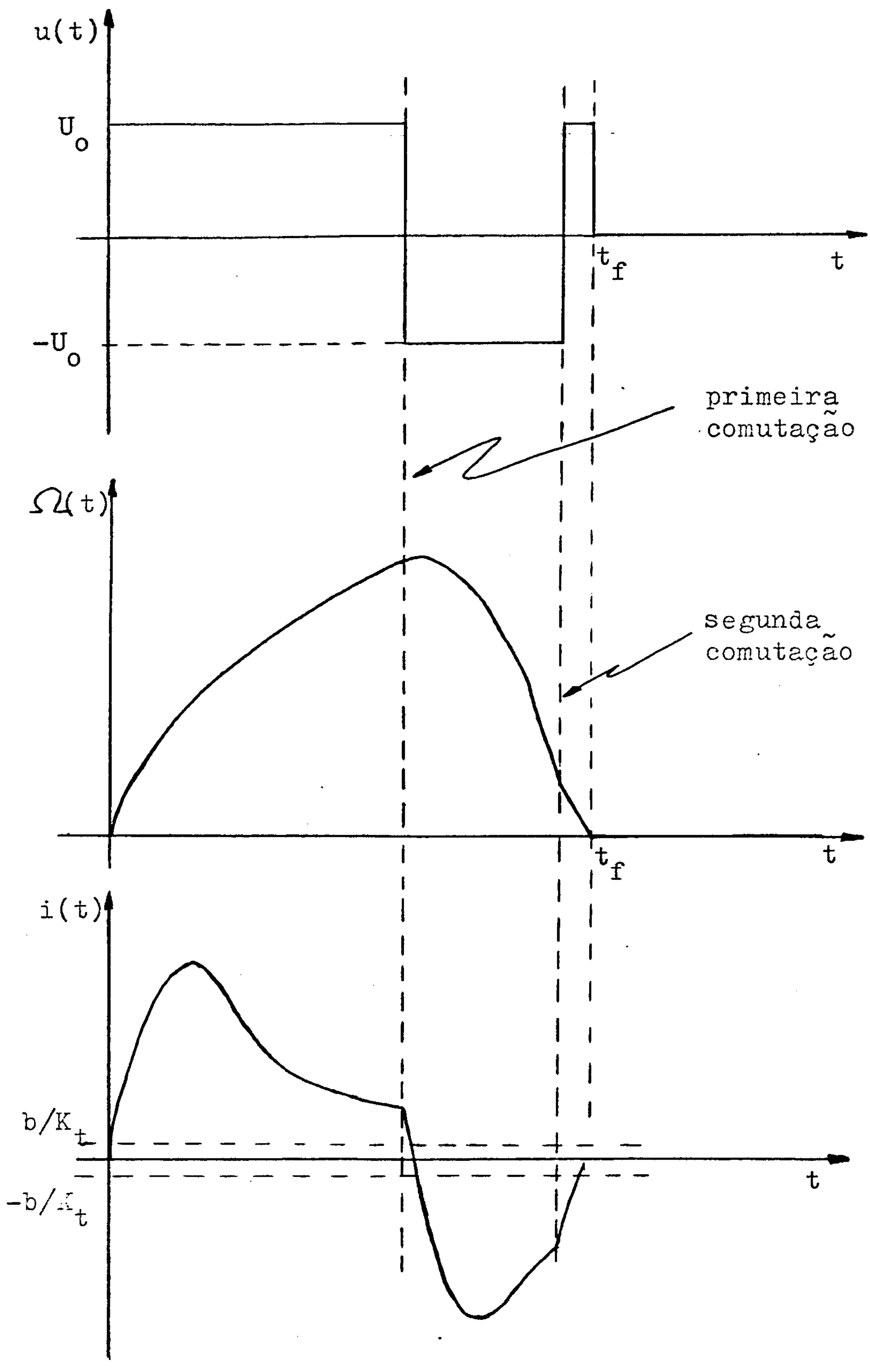

Fig. 4 - Aspectos da trajetória do posicionamento em tempo mínimo

1.5. CONCLUSÕES

Este capítulo não apresenta nenhum aspecto original , senão a formalização das equações dinâmicas 7 para o motor, onde aparece a não-linearidade sgn$[\Omega]$. Esta formalização será importante no decorrer deste trabalho. A presença de $\delta(t)$ nas equações 7 não é significativa, desde que, conforme figura 4, a velocidade angular é sempre positiva no posicionamento em tempo mínimo.

Nos próximos capítulos serão estudadas algumas aproximações sub-ótimas, que tentam contornar as dificuldades mencionadas, cujo enfoque principal é a implementação na prática. Nesse aspecto destaca-se o capítulo III, onde se possibilita o uso de qualquer motor de corrente contínua em sua máxima tensão admissível, desde que se limita as altas correntes de pico que aparecem nos trabalhos anteriores devidas às comutações na tensão de armadura.

CAPÍTULO II

CURVA DE COMUTAÇÃO - APROXIMAÇÃO NO PLANO DE FASE

INTRODUÇÃO

Devido às dificuldades matemáticas encontradas na obtensão da solução do problema de posicionar em tempo mínimo o eixo de um motor de corrente contínua, que podem ser vistas no ítem 1.3, parte-se para aproximações sub-ótimas. Este capítulo está baseado em uma dessas aproximações.

Em [9] é realizada apenas uma comutação na tensão de armadura, através de uma curva, chamada curva de comutação. Como a previsão teórica é para duas comutações (ítem 1.4), é claro que a posição final não é aquela dada pela condição de contorno 9 - a corrente final não obedecerá a inequação número 6 para todo θ_f. Porém, como a constante de tempo elétrica do motor de corrente contínua é muito menor que a constante de tempo mecânica, a corrente deverá se anular rapidamente se o sistema for desligado ($u = 0$) quando a velocidade angular passar por zero, obtendo-se um posicionamento razoável.

A figura 5 mostra uma curva de comutação no plano de fase. A figura 6 ilustra como o posicionamento é feito.

Deve-se notar de imediato que a precisão do método pode não ser muito grande, uma vez que não se conhece o valor da corrente, e portanto do estado do sistema, quando se desliga a tensão de armadura.

Este capítulo limita-se apenas em melhorar a precisão da curva de comutação sugerida em [9] , bem como modificar algumas expressões matemáticas que lá aparecem.

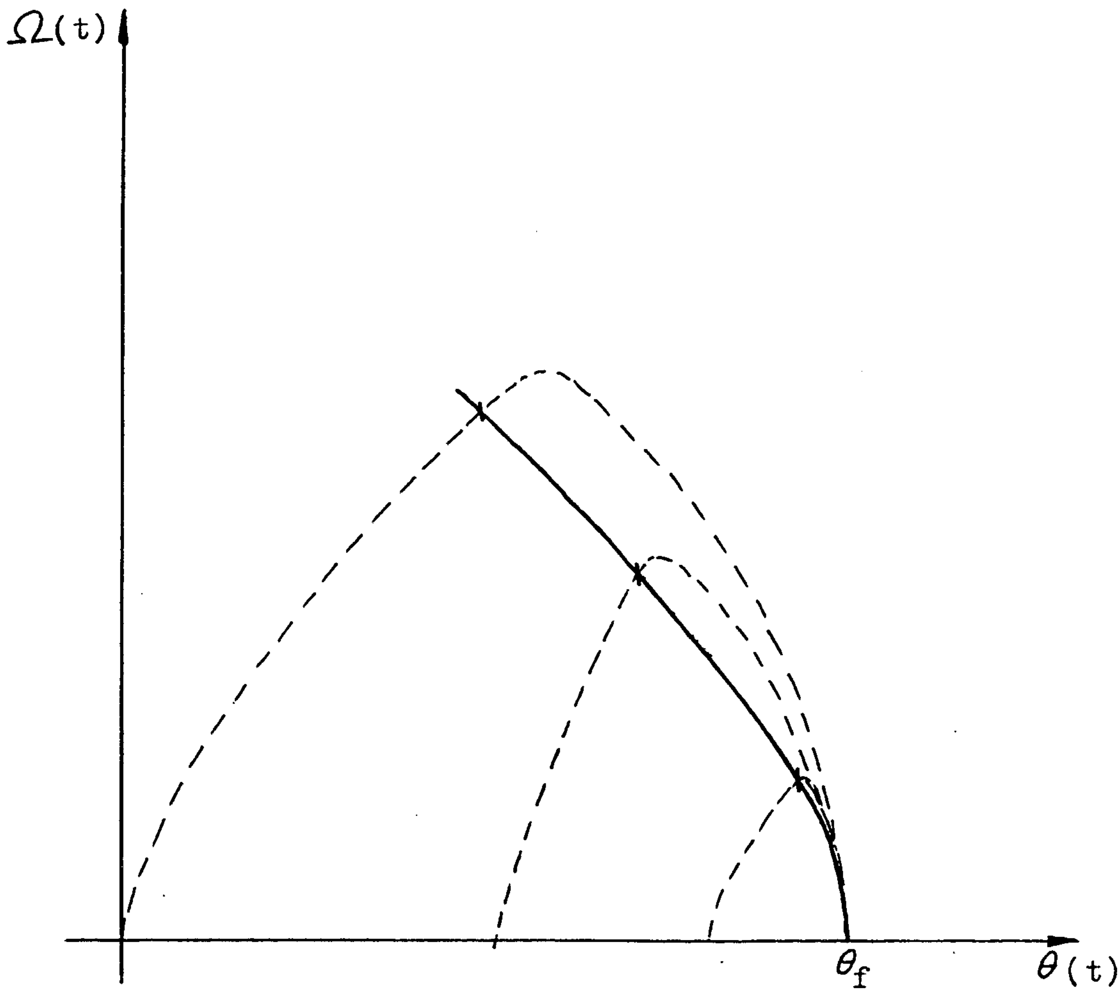

Fig. 5 - A curva de comutação e várias trajetórias vistas no plano de fase.

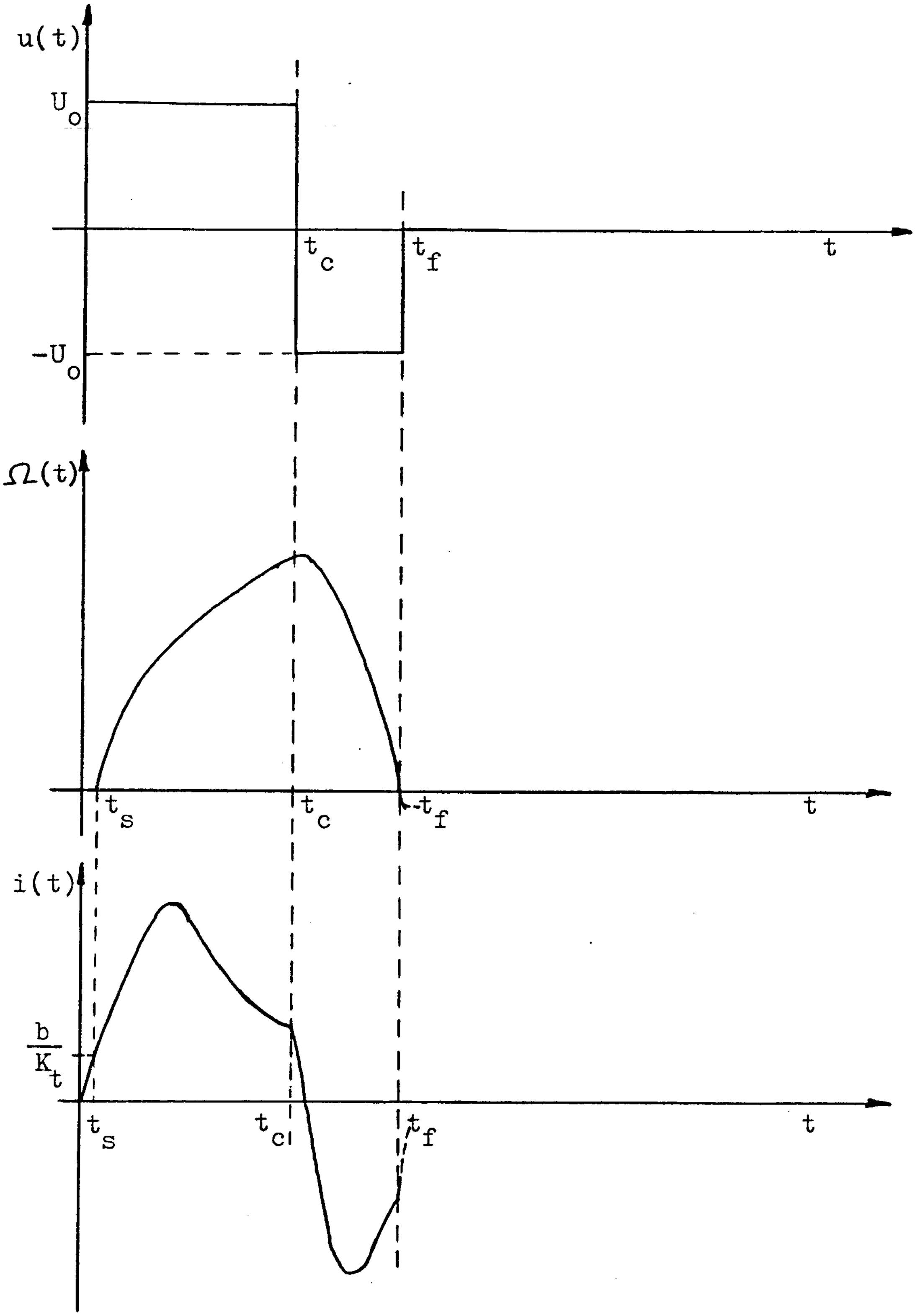

Fig. 6 - Princípio do posicionamento com apenas uma comutação na tensão de armadura.

2.1. ACELERAÇÃO

O motor somente começará a se mover quando o torque gerado se igualar ao torque de atrito,

$$T = b \quad , \quad \text{ou seja}$$

$$i = \frac{b}{K_t} \tag{17}$$

O valor de t_s que aparece na figura 6 é facilmente calculado, desde que o sistema com velocidade nula se comporta como um circuito RL,

$$t_s = \frac{L}{R} \log \frac{U_o K_t}{U_o K_t - R b} \tag{18}$$

Tomando-se a Transformada de Laplace das equações 5 e como instante inicial o instante t_s, tem-se:

$$\begin{cases} U(s) = K_t \Omega(s) + RI(s) + sLI(s) - \dfrac{bL}{K_t} \\ K_t I(s) = a\Omega(s) + \dfrac{b}{s} + sJ\Omega(s) \end{cases} \tag{19}$$

Na aceleração $U(s) = \dfrac{U_o}{s}$, o que resulta

$$\Omega(s) = \frac{\dfrac{U_o K_t}{JL} - \dfrac{bR}{JL}}{s(s - s_1)(s - s_2)} \tag{20}$$

onde:

$$s_{1,2} = \frac{-(RJ + aL) \pm \sqrt{(RJ + aL)^2 - 4\,JL(aR + K_t^2)}}{2\,JL} \tag{21}$$

Comumente s_1 e s_2 são dois números reais negativos, [9] , com

$$|s_2| \gg |s_1| \tag{22}$$

Fazendo $t' = t - t_s$ tem-se: (23)

$$\Omega(t') = \Omega_f \left[1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t'} + \frac{s_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t'} \right] \tag{24}$$

onde $$\Omega_f = \frac{U_o K_t - bR}{aR + K_t^2} \tag{25}$$

2.2. DESACELERAÇÃO

Tomando-se a Transformada de Laplace das equações 5 , e como instante inicial o instante t_c de comutação, tem-se

$$\begin{cases} U(s) = K_t \Omega(s) + RI(s) + sLI(s) - Li_c \\ K_t I(s) = a\,\Omega(s) + \dfrac{b}{s} + J\Omega(s) - J\Omega_c \end{cases} \tag{26}$$

onde:

$$U(s) = -\frac{U_o}{s}$$

$$i_c = i(t_c) \tag{27}$$

$$\Omega_c = \Omega(t_c)$$

Isso resulta:

$$\Omega(s) = \frac{s^2\Omega_c + \left[\frac{K_t}{J}\, i_c + \frac{R}{L}\,\Omega_c - \frac{b}{J}\right]s - \frac{Rb}{JL} - \frac{K_t U_o}{JL}}{s(s-s_1)(s-s_2)} \tag{28}$$

Fazendo $t" = t - t_c$ tem-se

$$\Omega(t") = A_2 + B_2 e^{s_1 t"} + C_2 e^{s_2 t"} \tag{29}$$

$$\theta(t") = A_2 t" + \frac{B_2}{s_1}\, e^{s_1 t"} + \frac{C_2}{s_2}\, e^{s_2 t"} + D_2 \tag{30}$$

onde:

$$A_2 = \frac{-Rb - K_t U_o}{JL\, s_1 s_2} = \frac{-Rb - K_t U_o}{aR + K_t^2} \tag{31}$$

$$B_2 = -\,\frac{\Omega_c(s_1 + \frac{R}{L}) + (\frac{K_t}{J}\, i_c - \frac{b}{J}) + s_2 A_2}{s_2 - s_1} \tag{32}$$

$$C_2 = \frac{\Omega_c(s_2 + \frac{R}{L}) + (\frac{K_t}{J}\, i_c - \frac{b}{J}) + s_1 A_2}{s_2 - s_1} \tag{33}$$

$$D_2 = -\frac{B_2}{s_1} - \frac{C_2}{s_2} \tag{34}$$

2.3. APROXIMAÇÃO PARA i_c

As equações 32 e 33 mostram que a curva de desacelera ção depende das condições de contorno Ω_c e i_c. Para a obtenção da curva de comutação, o autor do artigo 9 fez a corrente i_c nula, o que leva a aumentar a imprecisão do método, visto que na comutação a corrente de armadura pode atingir valores muito elevados.

Neste ítem será tentada uma aproximação, fazendo i_c como uma função de Ω_c.

Das equações 19 resulta

$$I_c(s) = \frac{\frac{b}{K_t}s^2 + \left[\frac{ab}{JK_t} + \frac{U_o}{L}\right]s + \frac{bK_t}{JL} + \frac{aU_o}{JL}}{s(s-s_1)(s-s_2)} \tag{35}$$

e portanto

$$i_c(t_c) = A + B\,e^{s_1 t_c} + C\,e^{s_2 t_c} \tag{36}$$

onde:

$$A = \frac{bK_t + aU_o}{aR + K_t^2} \tag{37}$$

$$B = \frac{\frac{b}{K_t}s_1^2 + \left[\frac{ab}{JK_t} + \frac{U_o}{L}\right]s_1 + \frac{bK_t + aU_o}{JL}}{s_1(s_1 - s_2)} \tag{38}$$

$$C = \frac{\frac{b}{K_t}s_2^2 + \left[\frac{ab}{JK_t} + \frac{U_o}{L}\right]s_2 + \frac{bK_t + aU_o}{JL}}{s_2(s_2 - s_1)} \tag{39}$$

Desde que $|s_2| \gg |s_1|$, a figura 7 abaixo representa aspectos reais de i_c e Ω_c e sugere a aproximação por retas usada nesta abordagem.

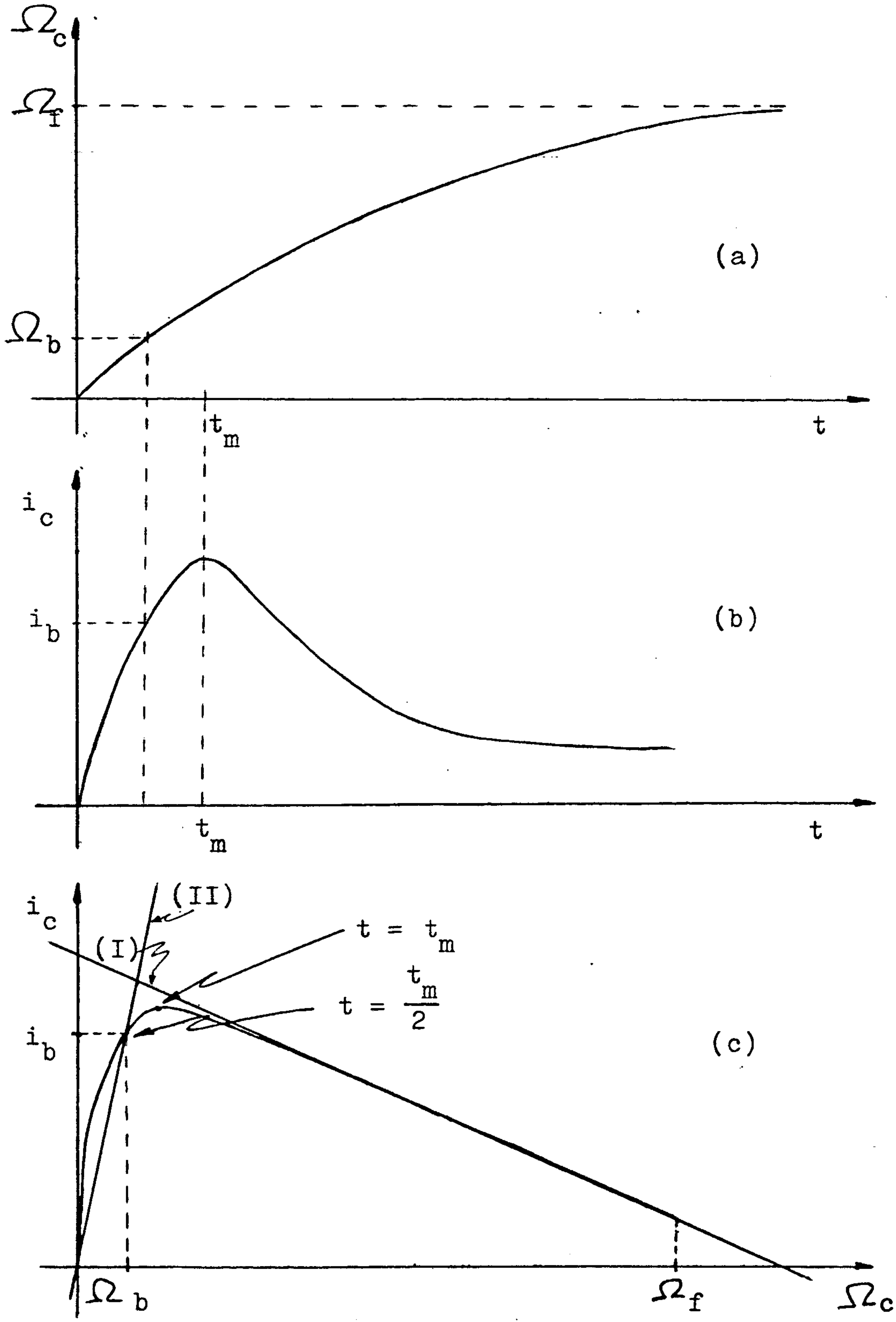

Fig. 7 - Aproximação por retas sugerida para a corrente de comutação

2.3.1. RETA I

Neste caso supõe-se que somente a influência do polo s_1 é significativa e a equação 24 pode ser aproximada por

$$\Omega_c(t'_c) \cong \Omega_f \left[1 - e^{s_1 t'_c}\right] \tag{40}$$

onde $t'_c = t_c - t_s$ (41)

Logo,

$$t'_c = \frac{1}{s_1} \log \frac{\Omega_f - \Omega_c}{\Omega_f} \tag{42}$$

A equação 36 poderá agora ser escrita como

$$i_c(t'_c) = A + B\, e^{s_1 t'_c} \tag{43}$$

Usando a equação 42 tem-se

$$i_c = (A + B) - \frac{B}{\Omega_f} \Omega_c \tag{44}$$

A equação 44 é a equação da reta I, sugerida na figura 7.c.

2.3.2. RETA II

A reta II (apresentada na figura 7.c) é a reta que passa pela origem e pelo ponto (i_b, Ω_b), onde:

t_m = instante onde a corrente passa pelo valor máximo

$$i_b = i\left(\frac{t_m}{2}\right)$$

$$\Omega_b = \Omega\left(\frac{t_m}{2}\right)$$

O valor de t_m é facilmente calculado, ao se derivar a equação 36 e igualar o resultado a zero:

$$Bs_1 e^{s_1 t_m} + Cs_2 e^{s_2 t_m} = 0 \quad ,$$

de onde,

$$t_m = \frac{\log \dfrac{-Bs_1}{Cs_2}}{s_2 - s_1} \qquad (45)$$

Aplicando $t_b = \dfrac{t_m}{2}$ nas equações 24 e 36 ter-se-á:

$$\Omega_b = \Omega_f \left[1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2}\, e^{s_1 t_b} + \frac{s_1}{s_2 - s_1}\, e^{s_2 t_b}\right] \qquad (46)$$

e

$$i_b = A + B\, e^{s_1 t_b} + C\, e^{s_2 t_b} \qquad (47)$$

A reta II pode então ser escrita como

$$i_c = \frac{i_b}{\Omega_b}\, \Omega_c \qquad (48)$$

2.3.3. MELHORA DA APROXIMAÇÃO

É claro que a aproximação sugerida pela figura 7.c, através das retas I e II pode ser melhorada, principalmente no tocante às baixas velocidades. Isso deverá ser feito, no caso de posicionamentos de curta distância, o que deverá ocorrer num processo iterativo em máquinas de controle numérico, por exemplo no corte de uma chapa em desenhos curvos.

A aproximação desenvolvida neste ítem resultou em melhora significativa dos resultados anteriores, do artigo 9. Isso deverá ser demonstrado no ítem 2.5.

2.4. A CURVA DE COMUTAÇÃO

O tempo necessário para o motor parar quando está com uma velocidade Ω_c pode ser conseguido através da equação 29.

Desprezando-se o efeito do polo s_2, dada a inequação 22, tem-se:

$$T = \frac{1}{s_1} \log \left(- \frac{A_2}{B_2}\right) \qquad (49)$$

Definindo-se como θ_{dd} a distância angular percorrida na desaceleração, tem-se

$$\theta_{dd} = \theta_f - \theta_c = \theta(t'' = T) - \theta(t'' = 0)$$

A partir da equação 30 chega-se a

$$\theta_{dd} = \frac{A_2}{s_1} \log \left(- \frac{A_2}{B_2}\right) - \frac{A_2}{s_1} - \frac{B_2}{s_1} - \frac{C_2}{s_2} \qquad (50)$$

Usando-se as aproximações dadas pelas equações 44 ou 48, a partir das equações 32 e 33 obtem-se:

$$B_2 = \alpha \Omega_c + \beta \qquad (51)$$

e $$C_2 = \gamma \Omega_c + \delta \qquad (52)$$

Se for usada a equação 44 (retaI), tem-se:

$$\alpha = \frac{s_1 + \frac{R}{L} - \frac{K_t B}{J\Omega_f}}{s_1 - s_2} \qquad (53)$$

$$\beta = \frac{\frac{K_t}{J}(A+B) - \frac{b}{J} + s_2 A_2}{s_1 - s_2} \qquad (54)$$

$$\gamma = \frac{s_2 + \frac{R}{L} - \frac{K_t B}{J\Omega_f}}{s_2 - s_1} \qquad (55)$$

$$\delta = \frac{\frac{K_t}{J}(A+B) - \frac{b}{J} + s_1 A_2}{s_2 - s_1} \qquad (56)$$

Se for usada a equação 48 (reta II - para posicionamentos de curta distância) tem-se:

$$\alpha = \frac{s_1 + \frac{R}{L} + \frac{K_t i_b}{\Omega_b J}}{s_1 - s_2} \qquad (57)$$

$$\beta = \frac{s_2 A_2 - \frac{b}{J}}{s_1 - s_2} \qquad (58)$$

$$\gamma = \frac{s_2 + \frac{R}{L} + \frac{K_t i_b}{\Omega_b J}}{s_2 - s_1} \tag{59}$$

$$\delta = \frac{s_1 A_2 - \frac{b}{J}}{s_2 - s_1} \tag{60}$$

Usando-se as equações de 50 a 60 chega-se à curva de comutação desejada:

$$\theta_{dd}(\Omega_c) = \frac{A_2}{s_1} \log\left(-\frac{A2}{\alpha\Omega_c+\beta}\right) - \frac{A_2}{s_1} - \frac{\alpha\Omega_c + \beta}{s_1} - \frac{\gamma\Omega_c + \delta}{s_2} \tag{61}$$

A curva de comutação descrita pela equação 61 difere daquela apresentada no artigo 9, seja no tocante ao acréscimo dos parâmetros γ e δ, seja no tocante ao cálculo diferente dos parâmetros α e β, devido ao fato de não se considerar nula a corrente de armadura na comutação.

2.5. SIMULAÇÃO DA CURVA DE COMUTAÇÃO

Para constatar a vantagem dessa curva de comutação sobre a anterior fez-se a simulação de ambas as abordagens, usando o motor de corrente contínua apresentado em [8], [9] e [11]. Esse motor (Peerless Electric - Porter Co.) apresenta os seguintes dados de placa:

Potência - 0,736 KW
Tensão de Armadura - 90 V
Corrente de Armadura - 9,5 A
Velocidade angular - 650 rpm

Os parâmetros para a aproximação linear por partes do motor de corrente contínua, descrita no ítem 1.1 são:

$$R = 1{,}3\,\Omega$$
$$L = 1{,}54 \text{ mH}$$
$$a = 0{,}01 \text{ W/(rad/s)}^2$$
$$b = 0{,}323 \text{ W/rad/s}$$
$$J = 0{,}019 \text{ Kg.m}^2$$
$$K_t = 1{,}13 \text{ V/rad/s}$$
$$U_o = 70 \text{ V}$$

A aproximação da corrente de comutação através das retas I e II é mostrada na figura 8 para os dados acima.

A figura 9 apresenta as curvas de comutação, tanto a desenvolvida neste capítulo quanto aquela apresentada em [9].

As figuras 10, 11, 12 e 13 apresentam várias trajetórias no plano de fase, para vários valores de θ_f, para ambas as curvas de comutação.

A figura 9-A mostra o diagrama de blocos do posicionador usado neste trabalho. Basicamente a distância do alvo é medida e alimentada no gerador da curva de comutação, dando a velocidade Ω_c quando a comutação deverá ocorrer.

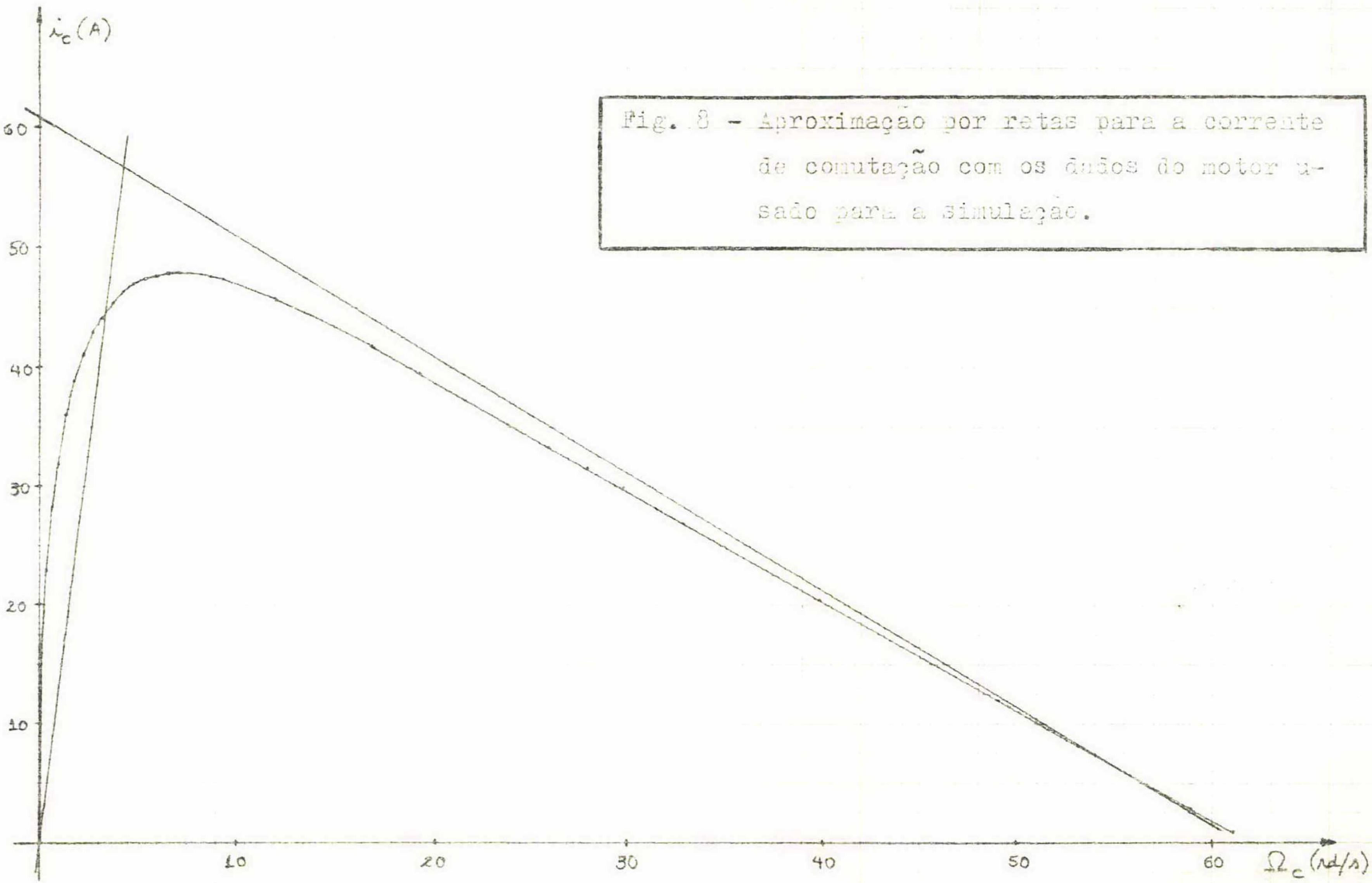

Fig. 8 - Aproximação por retas para a corrente de comutação com os dados do motor usado para a simulação.

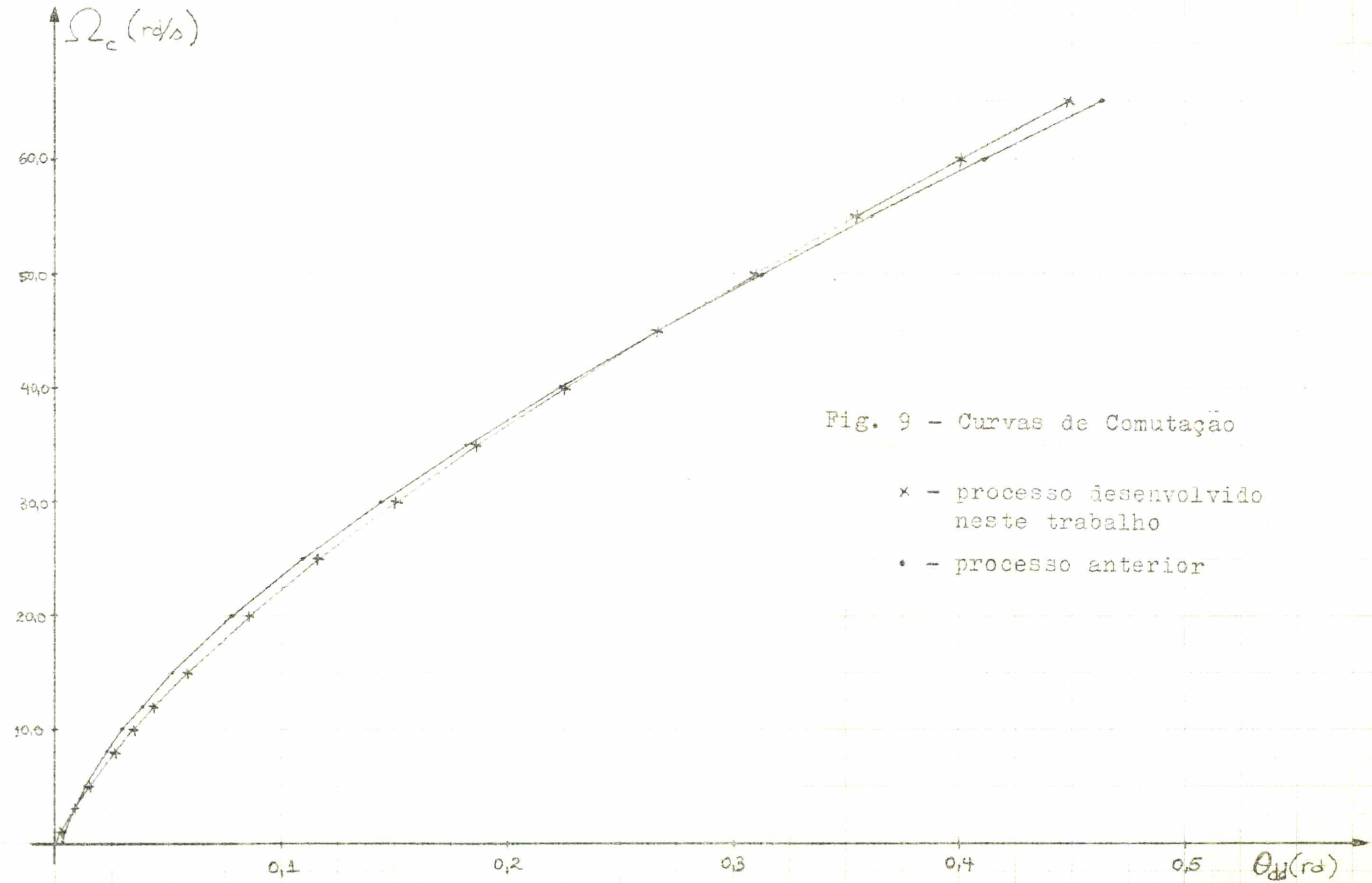

Fig. 9 – Curvas de Comutação

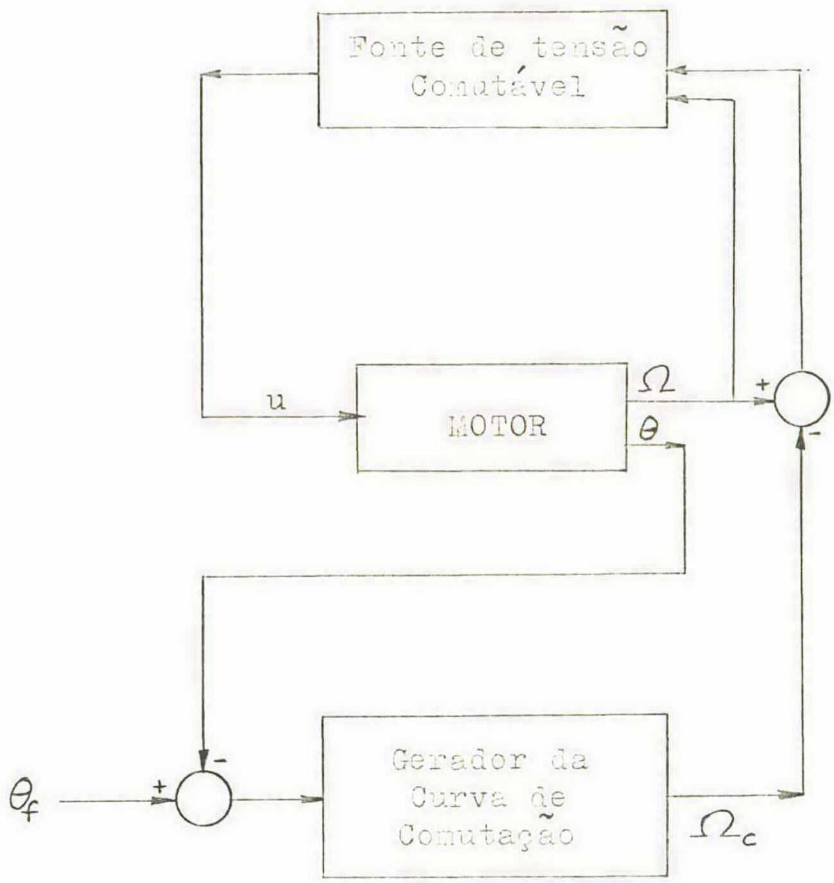

Fig. 9-A - Diagrama de blocos do posicionador usado usando a curva de comutação.

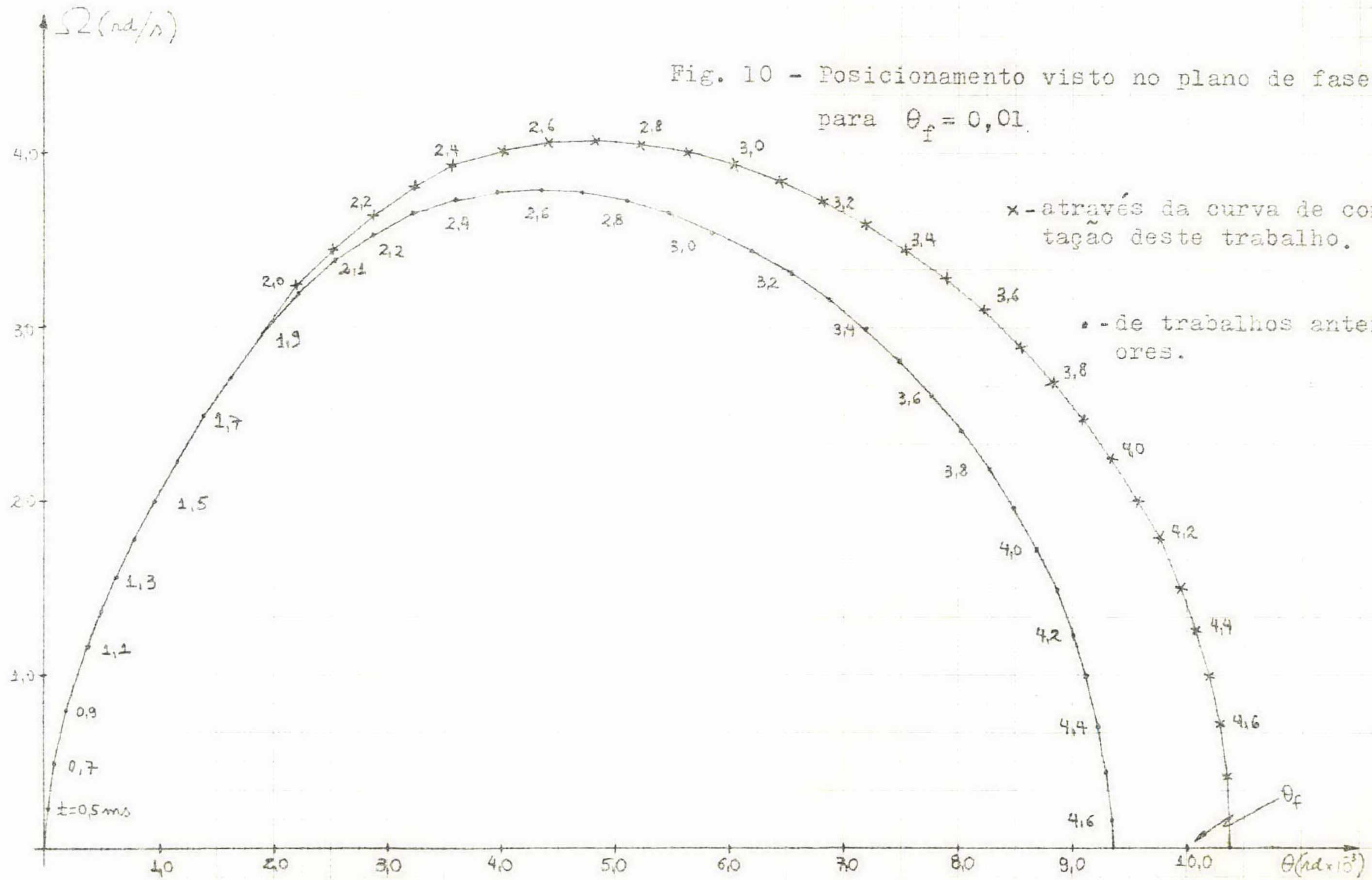

Fig. 10 - Posicionamento visto no plano de fase para $\theta_f = 0,01$

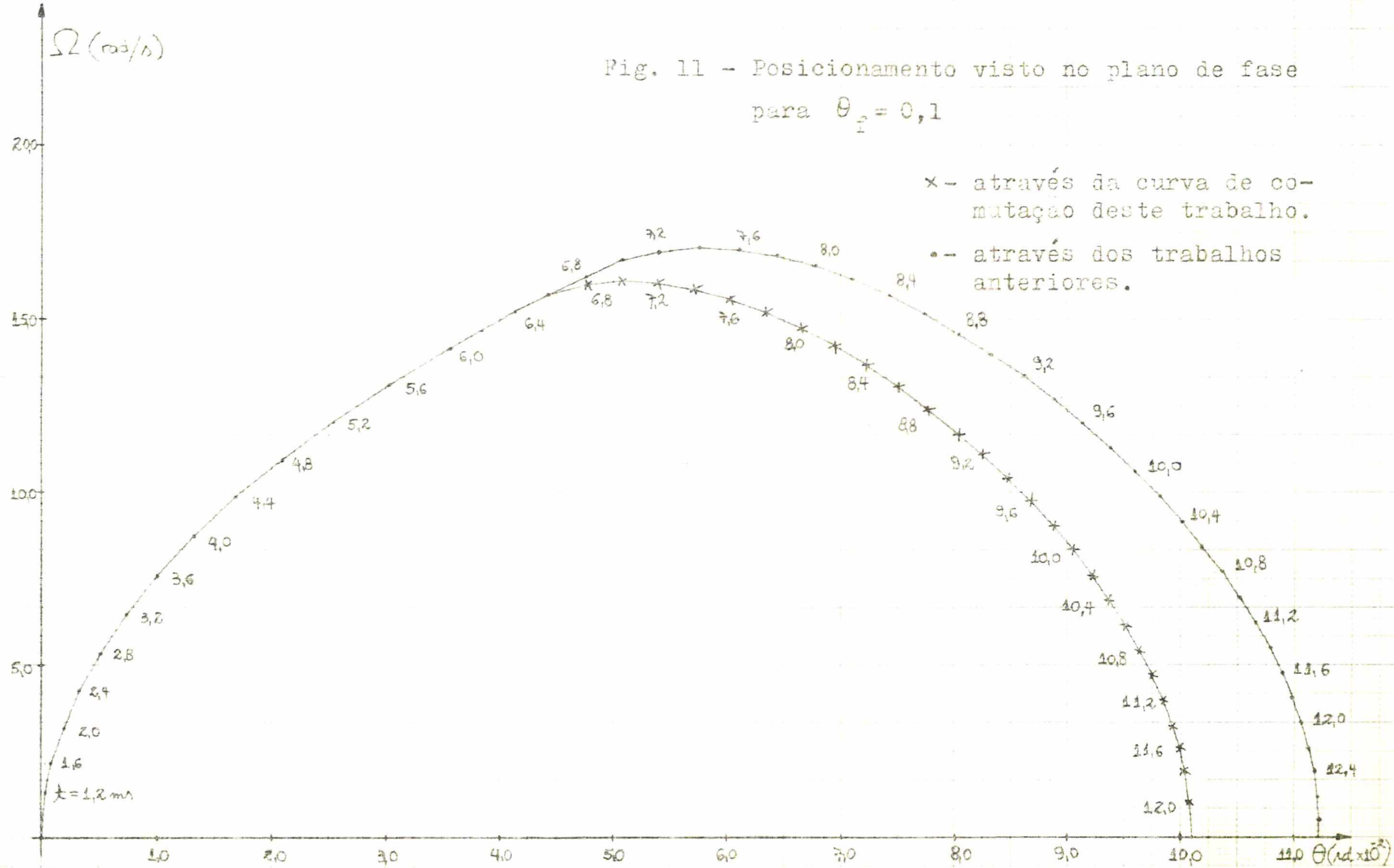

Fig. 11 - Posicionamento visto no plano de fase para $\theta_f = 0,1$

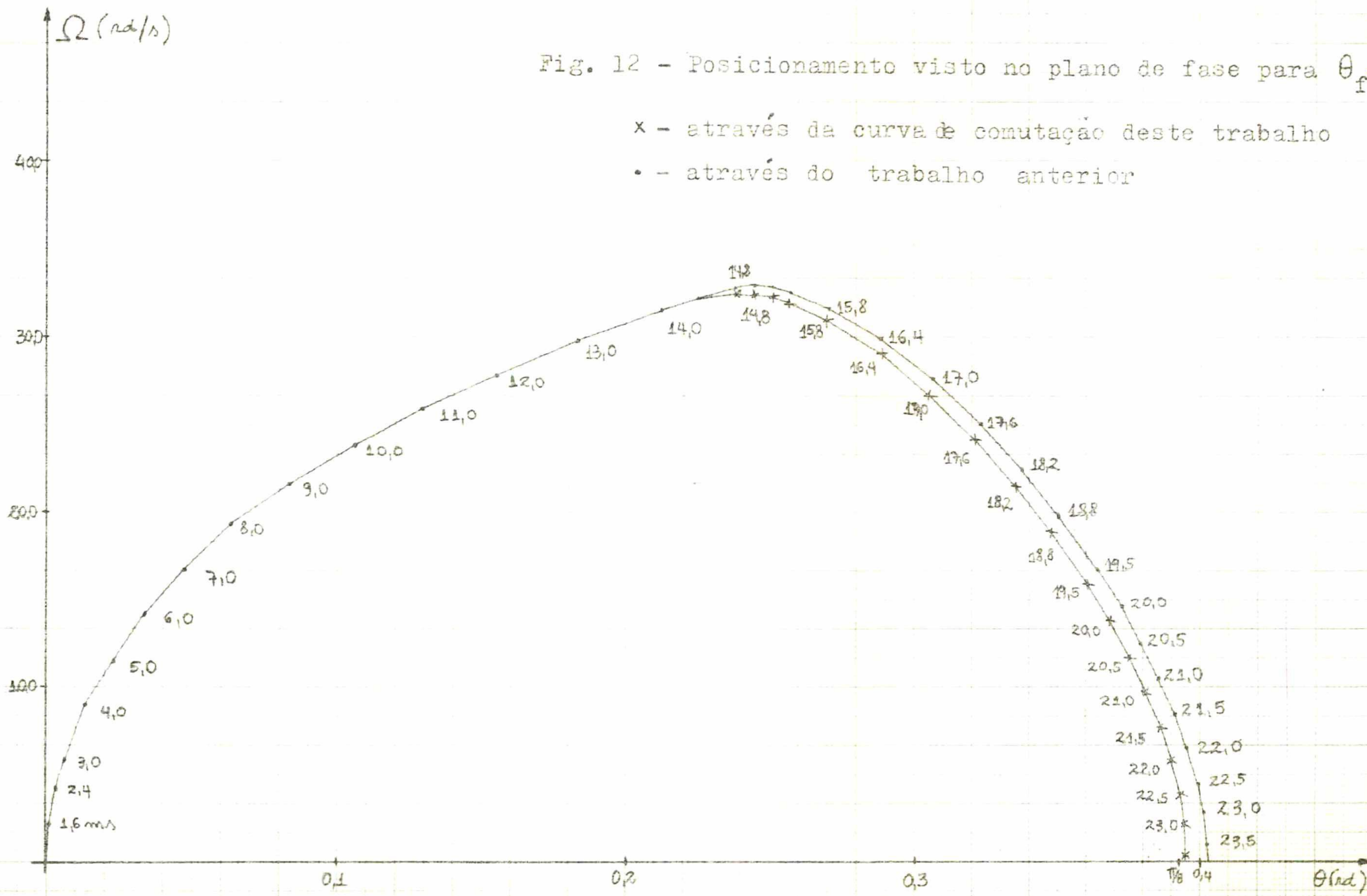

Fig. 12 - Posicionamento visto no plano de fase para $\theta_f = \frac{\pi}{8}$

x - através da curva de comutação deste trabalho

• - através do trabalho anterior

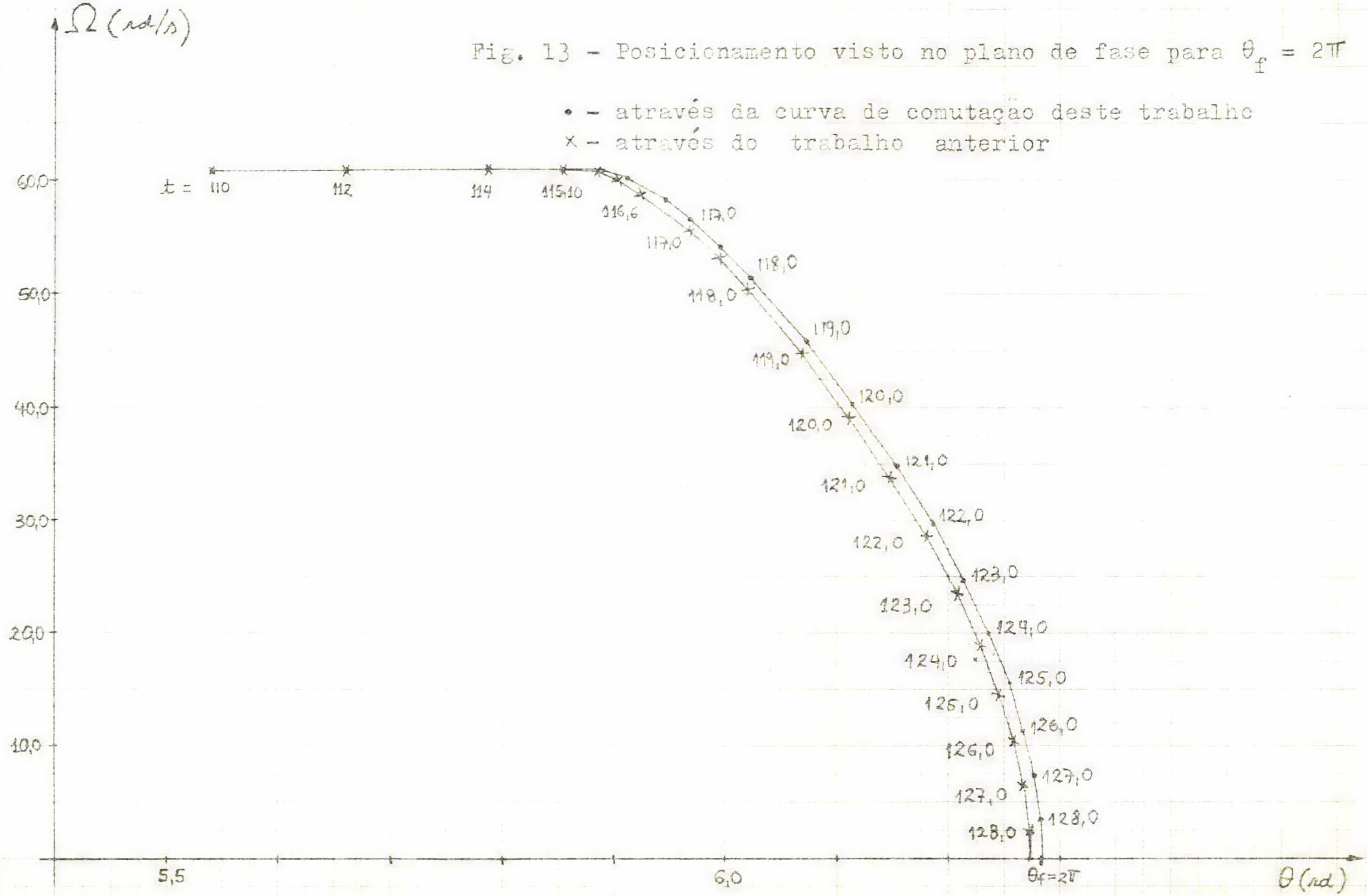

Fig. 13 - Posicionamento visto no plano de fase para $\theta_f = 2\pi$

• - através da curva de comutação deste trabalho

× - através do trabalho anterior

2.6. CONCLUSÕES

O tema central dêste capítulo são as modificações na curva de comutação deduzida em [9] , modificações estas que levaram a resultados mais precisos, o que pode ser observado pelas simulações de posicionamentos realizadas no ítem anterior.

Contudo um aspecto pôde ser notado: a comutação acarreta altos valores de pico na corrente de armadura, algo que pode ser bastante inconveniente.

No próximo capítulo deverá ser deduzida uma nova curva de comutação, onde se considerará limitação nessa corrente de armadura. É evidente que em muitos casos isso é bastante desejável.

CAPÍTULO III

CURVA DE COMUTAÇÃO COM LIMITAÇÃO DE CORRENTE

INTRODUÇÃO

Foi citado no capítulo anterior que a corrente de armadura alcança altos valores de pico, principalmente logo após a comutação. Esse fato pode ser observado através da figura 22*, onde de um motor de 1 HP - 9,5 A chega a ter perto de 95 A. Se esse motor estiver sujeito a posicionamentos repetidos numa frequência elevada, certamente haverá problemas de superaquecimento localizado. É interessante então que se limite a corrente a um determinado máximo. É claro que neste caso o posicionamento será mais lento, mas se estará trabalhando dentro da faixa normal de operação do motor, o que, além de ser mais recomendável, permite que se possa usar qualquer tipo de motor de corrente contínua, não sendo preciso projetos especiais.

3.1. MODIFICAÇÃO NAS EQUAÇÕES DINÂMICAS

Quando a corrente de armadura atingir determinado valor máximo I, a fonte de tensão u deverá mudar suas características, de modo que esse valor de corrente seja fixado. O sistema agora deverá ser alimentado por uma fonte de corrente de valor I.

Nestas condições as seguintes equações serão estabelecidas (veja-se figura 2):

$$T = K_t I = J\frac{d\Omega}{dt} + a\Omega + b\,\mathrm{sgn}[\Omega] \qquad (62)$$

$$u = K_t\Omega + RI \qquad (63)$$

* página 52

Observa-se que se a corrente é constante, o torque desenvolvido também o será, e do mesmo sinal da corrente. Também a tensão de armadura deverá variar linearmente com a velocidade.

A partir da equação 62, usando as variáveis de estado já definidas no ítem 1.2, tem-se as equações dinâmicas para o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t I - b\,\mathrm{sgn}[x_2]}{J} \end{bmatrix} \qquad (64)$$

3.2. COMPORTAMENTO DO SISTEMA COM LIMITAÇÃO DE CORRENTE

A figura 14 abaixo ilustra a idéia da limitação de corrente de uma maneira global e mostra os pontos principais que darão base à abordagem deste capítulo.

Observe-se que a tensão de armadura também deverá ser limitada (figura 14.c), o que implica que devem-se dispensar cuidados tanto para a corrente como para a tensão de armadura em seus valores máximos.

Antes do instante t_1 a corrente tem seu valor menor que I e na armadura valerá a equação:

$$U_o = K_t\Omega + Ri + L\frac{di}{dt} \qquad (65)$$

A partir do instante t_1, até o instante t_2, tem-se torque constante e positivo, o que deverá fazer com que á velocidade angular aumente, aumentando consequentemente a tensão $\underline{u}$, pois

$$u(t) = K_t\Omega + RI \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \qquad (66)$$

Observa-se que se a corrente é constante, o torque desenvolvido também o será, e do mesmo sinal da corrente. Também a tensão de armadura deverá variar linearmente com a velocidade.

A partir da equação 62, usando as variáveis de estado já definidas no ítem 1.2, tem-se as equações dinâmicas para o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K_t I - b\,\mathrm{sgn}[x_2]}{J} \end{bmatrix} \qquad (64)$$

3.2. COMPORTAMENTO DO SISTEMA COM LIMITAÇÃO DE CORRENTE

A figura 14 abaixo ilustra a idéia da limitação de corrente de uma maneira global e mostra os pontos principais que darão base à abordagem deste capítulo.

Observe-se que a tensão de armadura também deverá ser limitada (figura 14.c), o que implica que devem-se dispensar cuidados tanto para a corrente como para a tensão de armadura em seus valores máximos.

Antes do instante t_1 a corrente tem seu valor menor que I e na armadura valerá a equação:

$$U_o = K_t\Omega + Ri + L\frac{di}{dt} \qquad (65)$$

A partir do instante t_1, até o instante t_2, tem-se torque constante e positivo, o que deverá fazer com que a velocidade angular aumente, aumentando consequentemente a tensão u, pois

$$u(t) = K_t\Omega + RI \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \qquad (66)$$

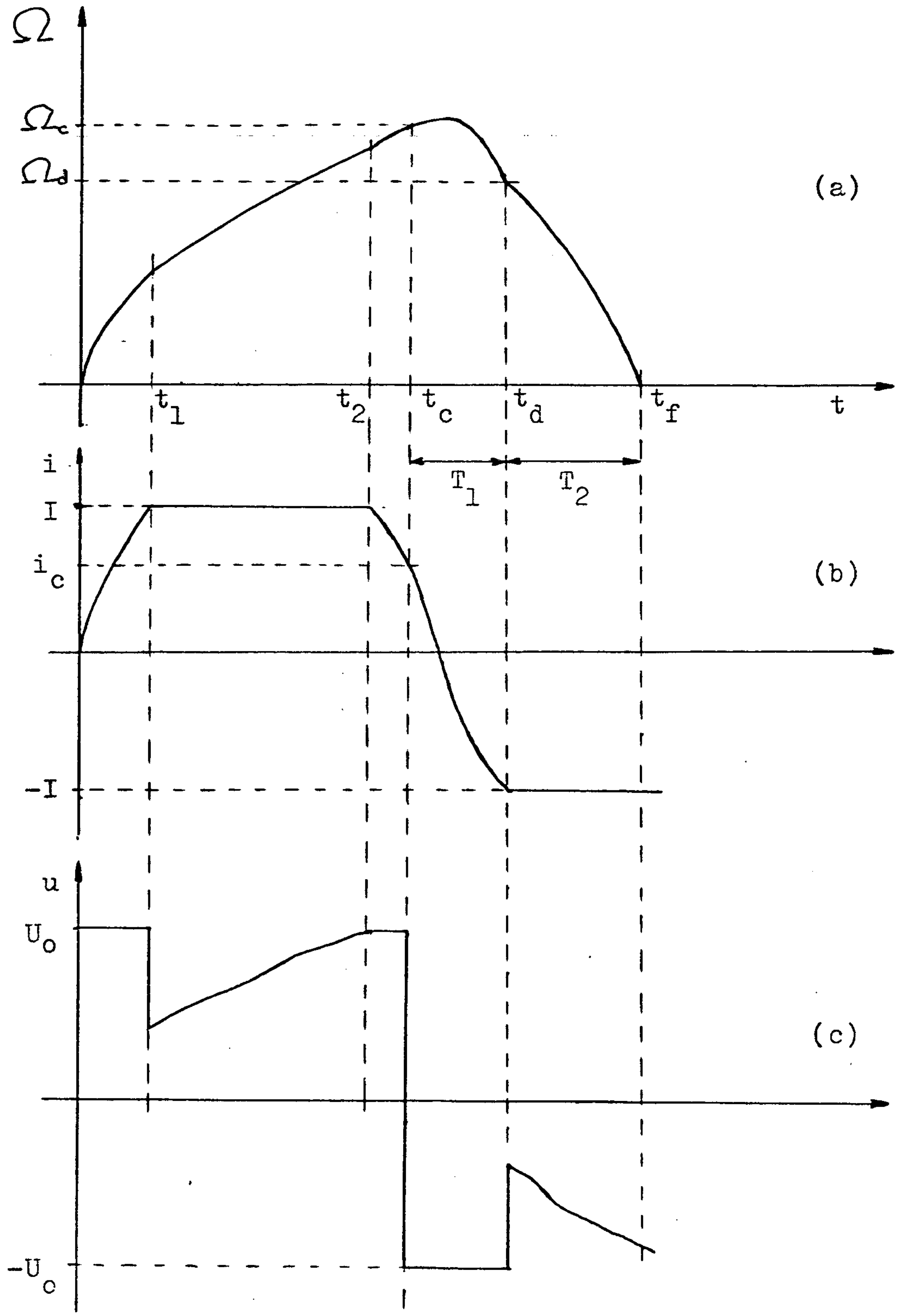

Fig. 14 - Comportamento do sistema a corrente limitada

Note que

$$u(t_1^+) = U_o - L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=t_1^-} < U_o \qquad (67)$$

Quando u(t) atingir o valor máximo U_o, no instante t_2, deve-se novamente fixá-la nesse valor, deixando a corrente flutuar. Até o instante t_c, de comutação, valerá na armadura novamente a equação 65. Essa equação mostra que a corrente nesse intervalo deverá cair, pois, se a velocidade ainda tende a aumentar (torque positivo), a tensão no indutor será negativa:

$$L\frac{di}{dt} = U_o - K_t\Omega - Ri < 0 \quad (t_2 \leqslant t \leqslant t_c) \qquad (68)$$

Na verdade esse é o caso mais geral, pois a comutação já poderia ter ocorrido, sem que ocorressem todos esses casos.

Ocorrida a comutação no instante t_c, a corrente de armadura novamente deverá crescer, desta vez por valores negativos. O mesmo ocorrerá com o torque.

Do instante t_c até o instante t_d (quando a corrente atingir o valor $-I$) valerá a equação na armadura:

$$-U_o = K_t\Omega + Ri + L\frac{di}{dt} \quad (t_c \leqslant t \leqslant t_d) \qquad (69)$$

No instante t_d^+:

$$u(t_d^+) = K_t\Omega - RI \qquad (70)$$

Comparando-se a equação 70 com a 69 ve-se que

$$u(t_d^+) = -U_o - L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=t_d^-} \qquad (71)$$

Como $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=t_d^-} < 0$, tem-se

$$u(t_d^+) > = U_o \tag{72}$$

A partir do instante t_d se estabelecerá a equação:

$$u(t) = K_t\Omega - RI \quad (t > t_d) \tag{73}$$

Nenhuma mudança nas equações dinâmicas ocorrerá até que se atinja o ponto desejado ($\theta = \theta_f$; $\Omega = 0$), como se mostrará:

Suponha-se que haja mudança nas equações dinâmicas, no instante hipotético t_h. Então, $u(t_h) = -U_o$.

A equação 73 dá então:

$$-U_o = K_t\Omega(t_h) - RI \tag{74}$$

Da equação 66:

$$U_o = K_t\Omega(t_2) + RI \tag{75}$$

Comparando as equações 74 e 75 vem:

$$\Omega(t_h) = -\Omega(t_2) < 0 \tag{76}$$

Como somente se trabalha com $\Omega(t) \geqslant 0$, conclui-se que o processo chegará ao final com a corrente constante $i = -I$, valendo a equação 73 na armadura.

3.3. CURVA DE COMUTAÇÃO

Como no capítulo anterior, deverá ser encontrada a curva que é o lugar geométrico dos pontos de comutação, no plano de fase, desta vez levando em conta a limitação da corrente de armadura.

O que se deseja é obter a distância percorrida desde o instante de comutação até o instante final, em função da velocidade angular de comutação.

Como já mostrado no ítem 2.4 essa distância pode ser escrita como

$$\theta_{dd} = \theta_f - \theta_c \tag{77}$$

Definindo-se:

$$\begin{cases} t'' = t - t_c \\ \bar{t} = t - t_d \\ T_1 = t_d - t_c \\ T_2 = t_f - t_d \end{cases} \tag{78}$$

, tem-se que

$$\theta_{dd} = \theta(t'' = T_1 + T_2) = \theta(\bar{t} = T_2) \quad , \tag{79}$$

ao se admitir $\theta\ (t''= 0) = 0$.

3.3.1. CÁLCULO DE T_2

Considerando-se o instante t_d como o instante inicial, na armadura se estabelece a equação 73, tendo como condições de contorno:

$$\begin{cases} \theta(\bar{t} = 0) = \theta(t'' = T_1) = \theta_d \\ \Omega(\bar{t} = 0) = \Omega(t'' = T_1) = \Omega_d \end{cases} \tag{80}$$

Isso resultará em

$$\Omega(\bar{t}) = \frac{-K_t I - b}{a} + (\Omega_d + \frac{K_t I + b}{a})\, e^{-\frac{a}{J}\bar{t}} \qquad (81)$$

No instante $\bar{t} = T_2$ a velocidade angular se anula e se obtem

$$T_2 = -\frac{J}{a} \log\left(\frac{K_t I + b}{a\Omega_d + K_t I + b}\right) \qquad (82)$$

Integrando-se a equação 81 e aplicando $\bar{t} = T_2$ se consegue:

$$\theta(\bar{t} = T_2) = \frac{J}{a^2}\left[(K_t I + b)\log\left(\frac{K_t + b}{a\Omega_d + K_t I + b}\right) + a\Omega_d\right] + \theta_d \qquad (83)$$

Observa-se que se Ω_d e θ_d puderem ser expressos como função de Ω_c, a curva de comutação terá sido encontrada.

3.3.2. CÁLCULO DE T_1

O primeiro passo para se obter θ_d e Ω_d é calcular o valor de T_1, como pode-se ver das expressões 80.

A partir de t_c até t_d valerão as equações 26, de onde:

$$I(s) = \frac{i_c s^2 + \left[\frac{a}{J} i_c - \frac{U_o}{L} - \frac{K_t \Omega_c}{L}\right] s + \frac{K_t b - aU_o}{JL}}{s(s - s_1)(s - s_2)} \qquad (84)$$

Portanto,

$$i(t'') = D + E\, e^{s_1 t''} + F\, e^{s_2 t''} \qquad (85)$$

onde:

$$D = \frac{K_t b - aU_o}{JLs_1 s_2} \tag{86}$$

$$E = \frac{i_c s_1^2 + \left[\frac{a}{J} i_c - \frac{U_o}{L} - \frac{K_t \Omega_c}{L}\right] s_1 + \frac{K_t b - aU_o}{JL}}{s_1(s_1 - s_2)} \tag{87}$$

$$F = \frac{i_c s_2^2 + \left[\frac{a}{J} i_c - \frac{U_o}{L} - \frac{K_t \Omega_c}{L}\right] s_2 + \frac{K_t b - aU_o}{JL}}{s_2(s_2 - s_1)} \tag{88}$$

Como o intervalo de tempo T_1 é pequeno, devido ao fato da constante de tempo elétrica do motor ser bem menor que a constante de tempo mecânica, a equação 85 pode ser aproximada por:

$$i(t") = (D + E) + F e^{s_1 t"} \tag{89}$$

Para $i(t" = T_1) = -I$ tem-se

$$T_1 = \frac{1}{s_2} \log\left(\frac{-I - D - E}{F}\right) \tag{90}$$

3.3.3. CÁLCULO DE θ_d E Ω_d

Como T_1 é pequeno, a equação 29 poderá ser escrita

$$\Omega(t" = T_1) = \Omega_d = A_2 + B_2(1 + s_1 T_1) + C_2 e^{s_2 T_1} \tag{91}$$

Note-se que apenas dois termos da série de Taylor da exponencial de $s_1 T_1$ foram tomados

Usando-se a equação 90 na 91 resulta:

$$\Omega_d = (A_2 + B_2) + C_2\left(\frac{-I - D - E}{F}\right) + \frac{B_2 s_1}{s_2} \log\left(\frac{-I - D - E}{F}\right) \quad (92)$$

Fazendo-se o mesmo tipo de aproximação para a equação 30 tem-se:

$$\theta_d = \frac{A_2 + B_2}{s_2} \log\left(\frac{-I - D - E}{F}\right) + \frac{C_2}{s_2}\left(\frac{-I - D - E}{F} - 1\right) \quad (93)$$

Como pode-se ver pelas equações 92 e 93, Ω_d e θ_d dependem somente de Ω_c e de i_c (vejam-se as expressões que definem A_2, B_2, C_2, E e F).

A corrente i_c, conforme figura 14.b e equação 36, poderá estar entre I e A. Arbitrando-se um valor intermediário,

$$i_c = \frac{I}{2} \quad , \quad (94)$$

faz-se que Ω_d e θ_d dependam unicamente de Ω_c. Reunindo-se as equações 79, 83, 92, 93 e 94 obtem-se a curva de comutação procurada:

$$\theta_{dd}(\Omega_c) = \frac{J}{a^2}\left[(K_t I + b) \log\left(\frac{K_t I + b}{a\Omega_d + K_t I + b}\right) + a\Omega_d\right] + \theta_d \quad (95)$$

A aproximação dada pela expressão 94, embora pareça grosseira resultou bastante satisfatória nas simulações efetuadas para testar a curva 95.

3.4. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

A figura 15 apresenta a curva de comutação descrita pela equação 95, para o mesmo motor usado no capítulo anterior. A corrente nesse caso foi limitada em $I = 25$ A.

As figuras 16, 18 e 20 apresentam várias trajetórias no plano de fase, para valôres diferentes de θ_f. As respectivas correntes e tensões de armadura são mostradas pelas figuras 17, 19 e 21.

A figura 22 faz uma comparação do comportamento da corrente de armadura para os casos de posicionamento com e sem limitação de corrente para $\theta_f = 2\pi$.

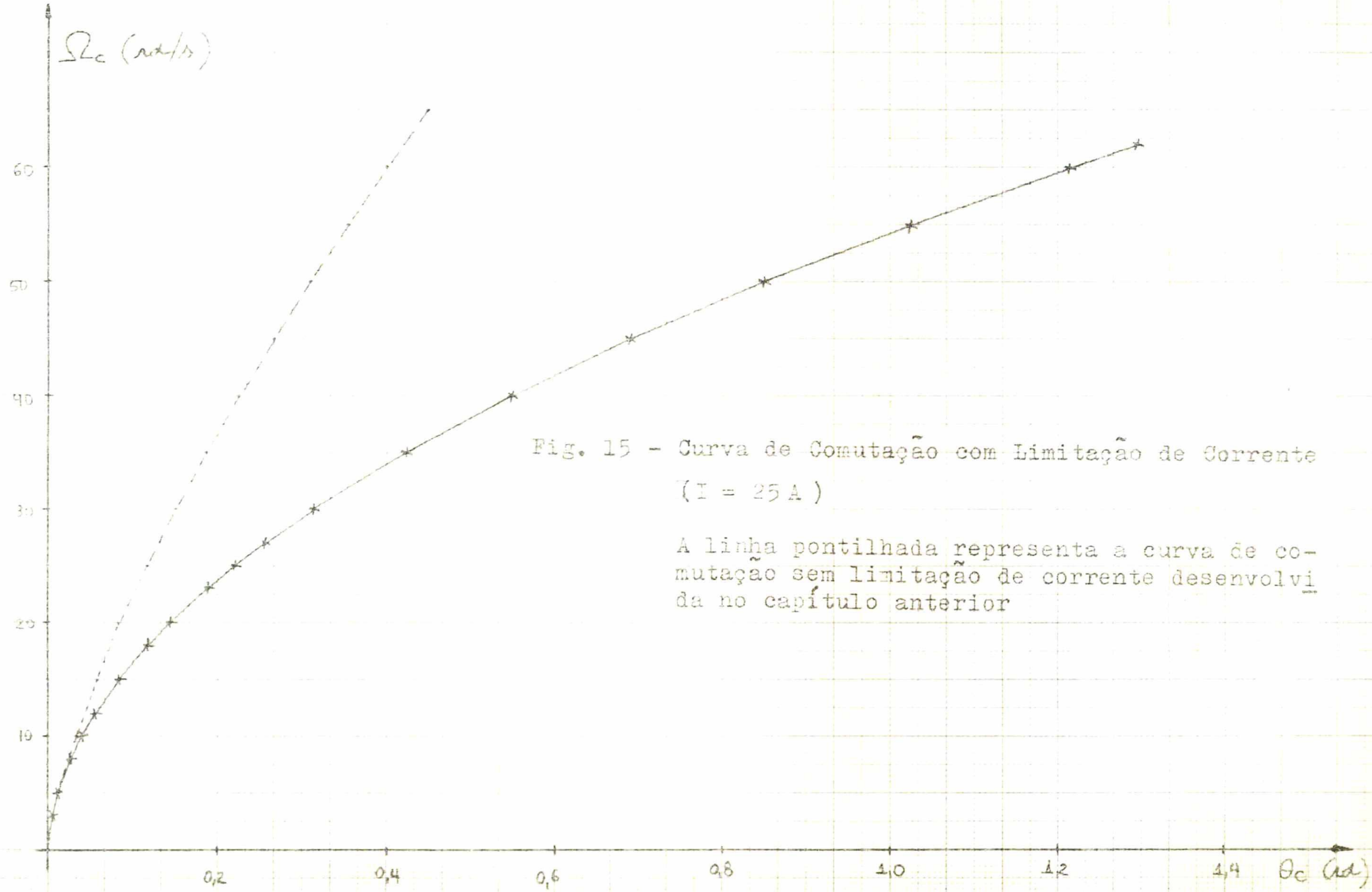

Fig. 15 - Curva de Comutação com Limitação de Corrente

(I = 25 A)

A linha pontilhada representa a curva de comutação sem limitação de corrente desenvolvida no capítulo anterior

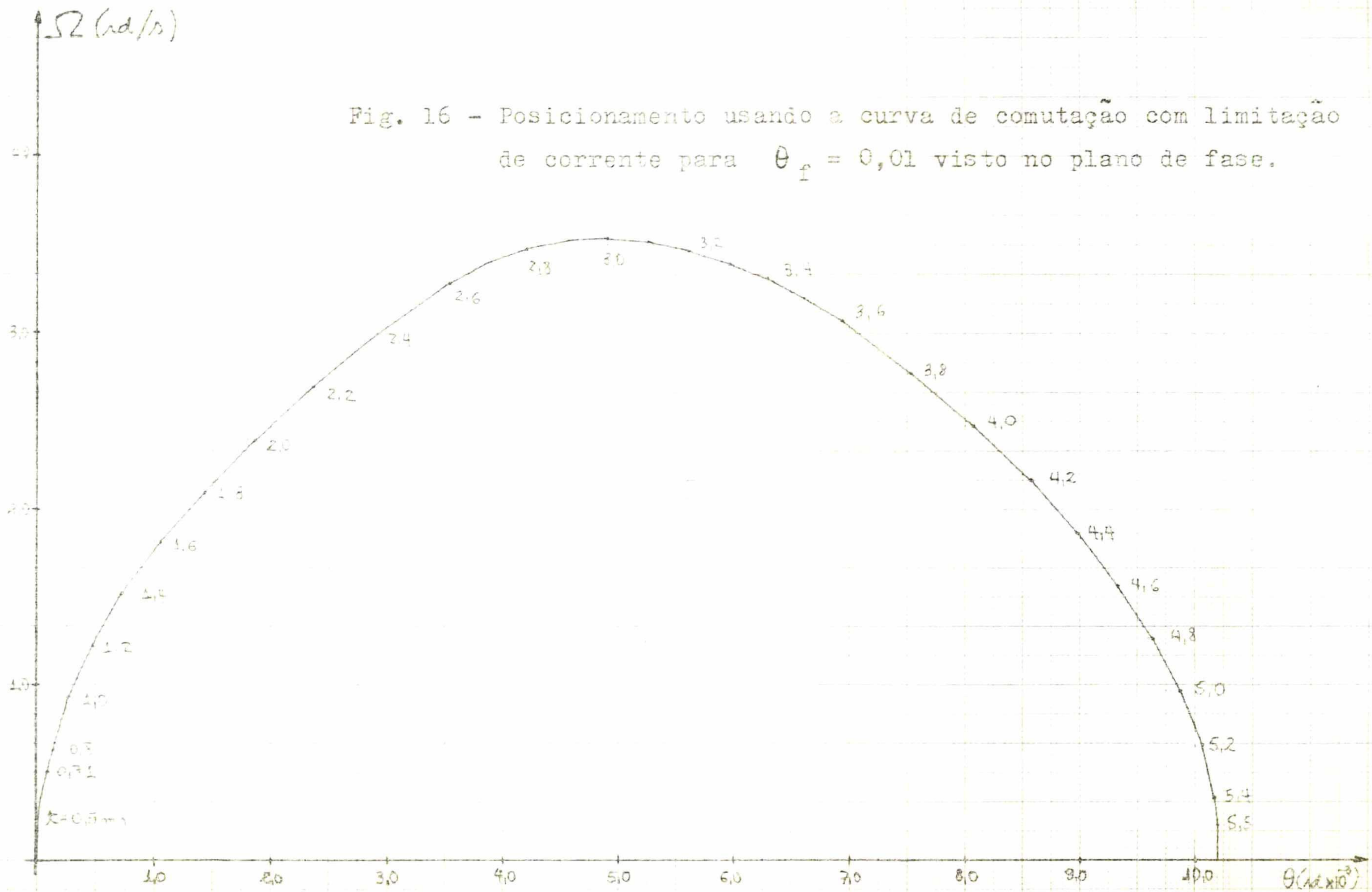

Fig. 16 - Posicionamento usando a curva de comutação com limitação de corrente para $\theta_f = 0{,}01$ visto no plano de fase.

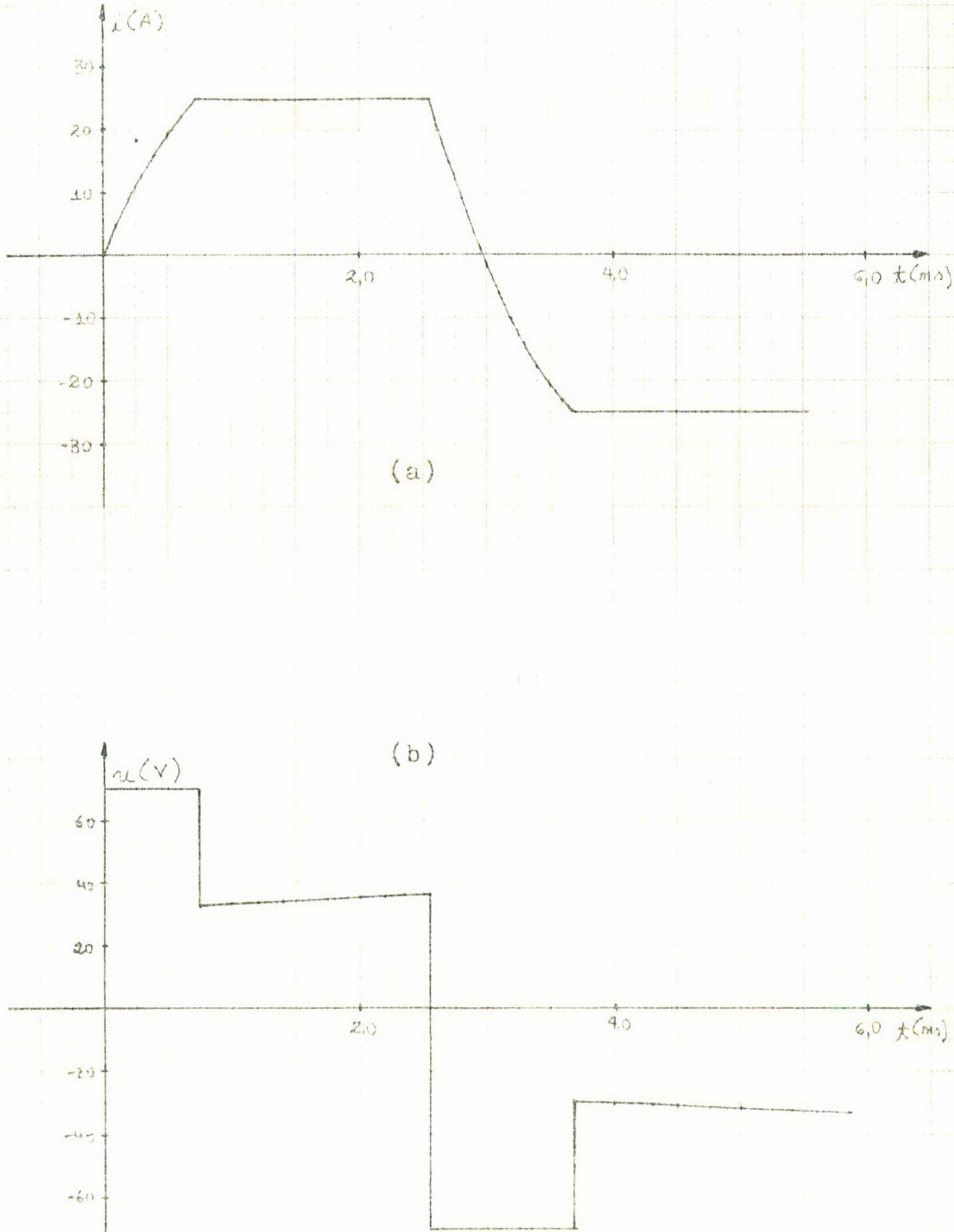

Fig. 17 - Aspectos da corrente e da tensão de armadura no posicionamento da figura 16.

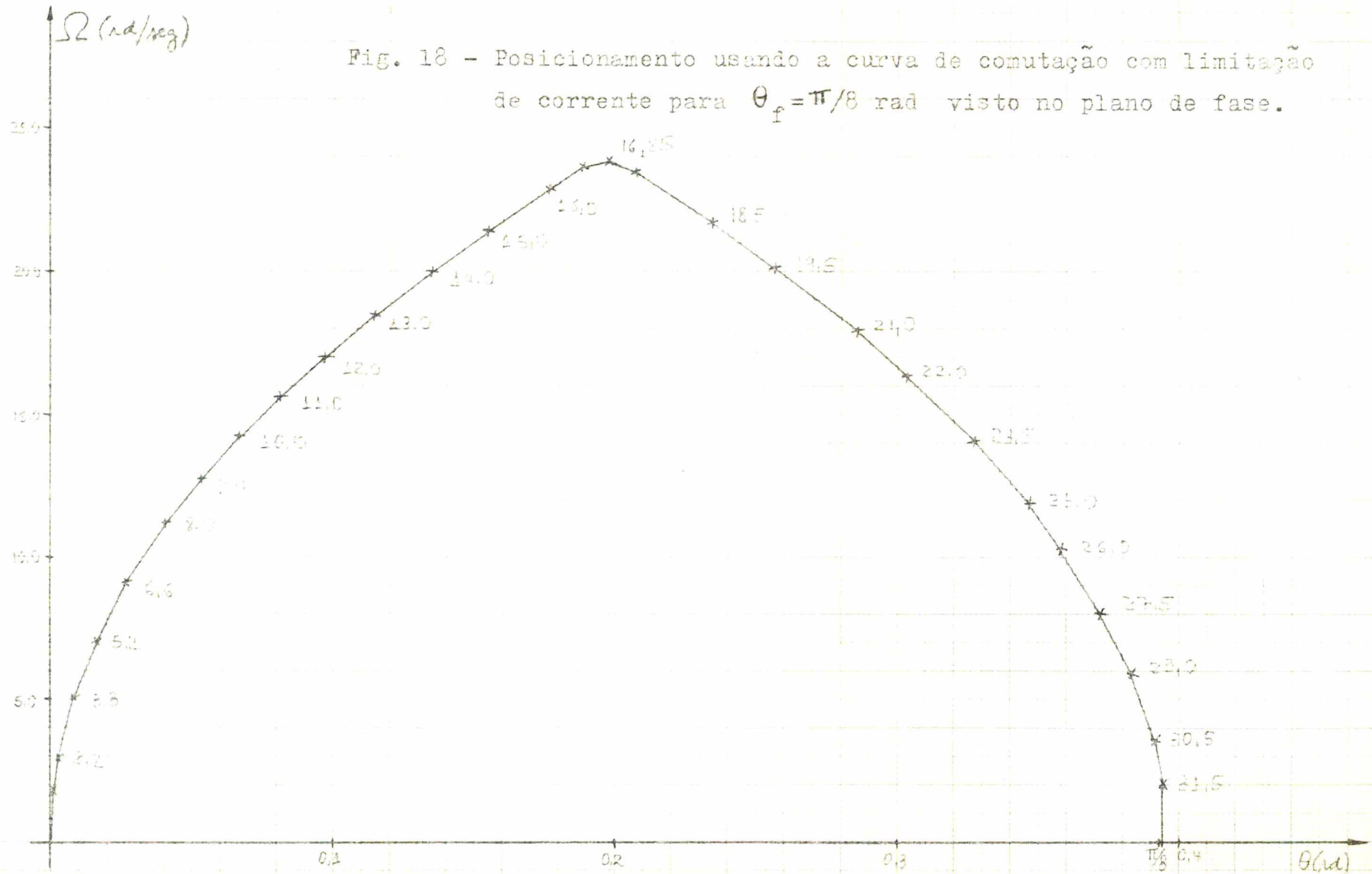

Fig. 18 - Posicionamento usando a curva de comutação com limitação de corrente para $\theta_f = \pi/8$ rad visto no plano de fase.

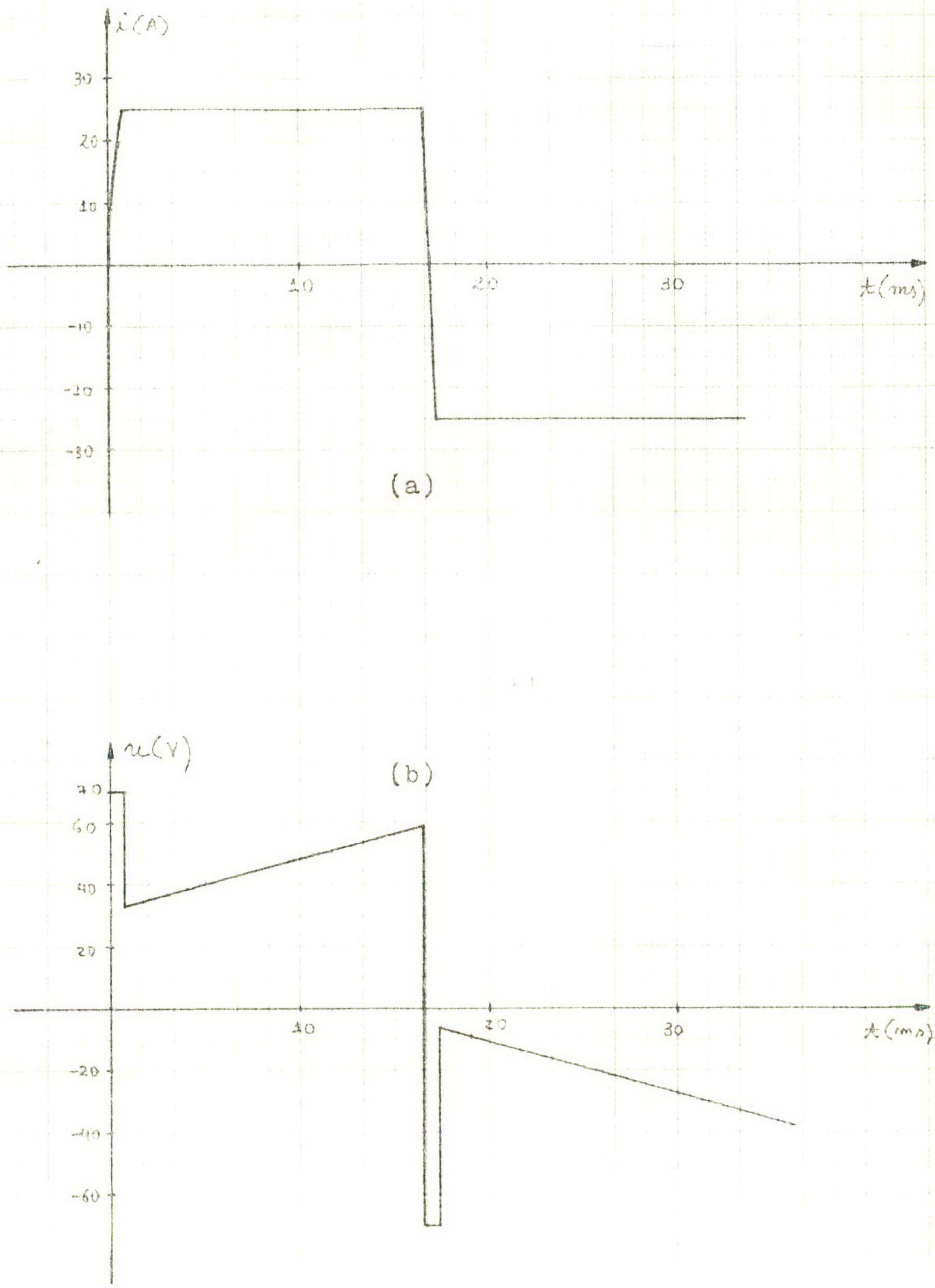

Fig. 19 - Aspectos da corrente e da tensão de armadura no posicionamento da figura 18.

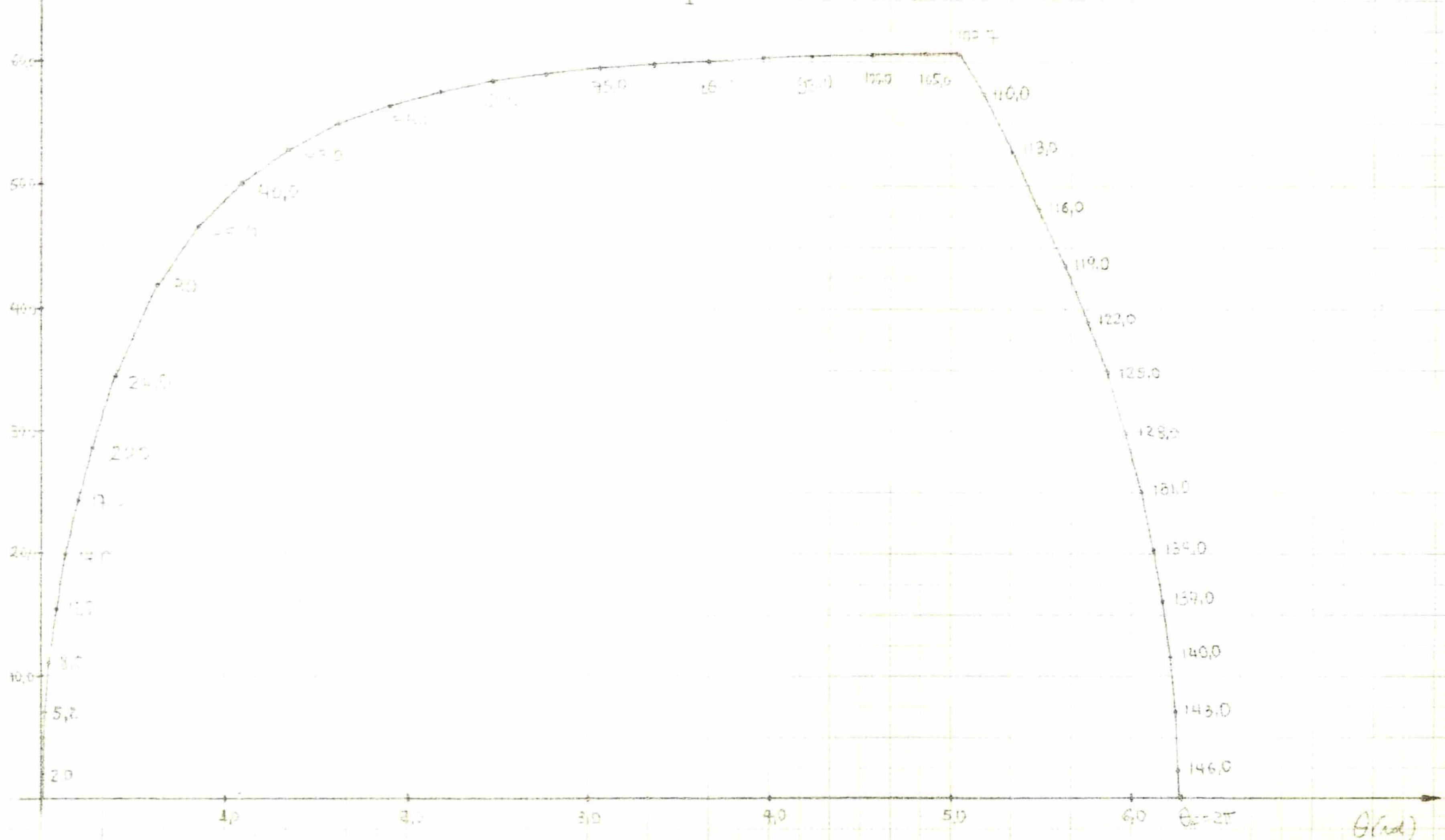

Fig. 20 - Posicionamento usando a curva de comutação com limitação de corrente para $\theta_f = 2\pi$ rad visto no plano de fase.

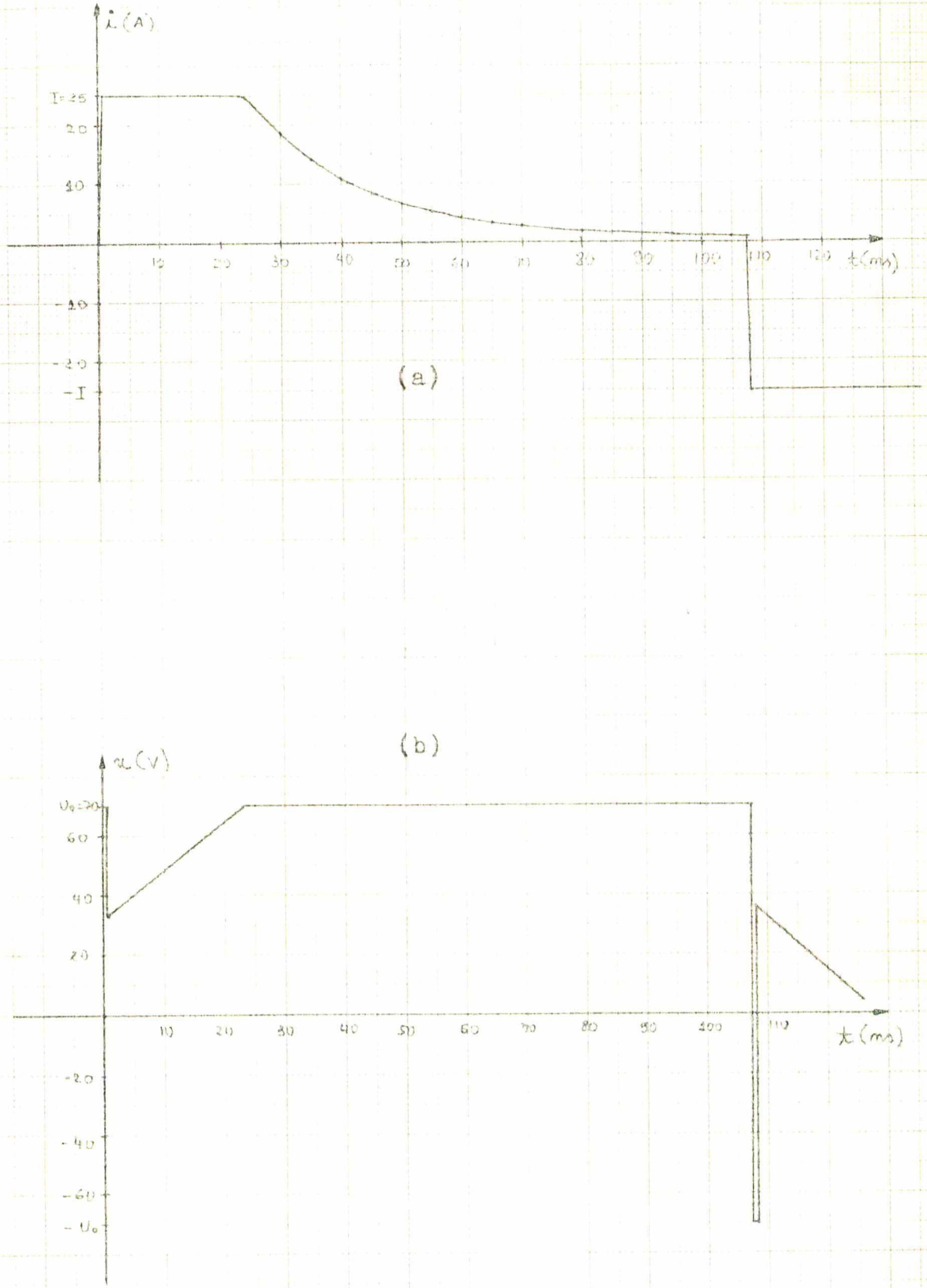

Fig. 21 - Aspectos da corrente e da tensão de armadura no posicionamento da figura 20.

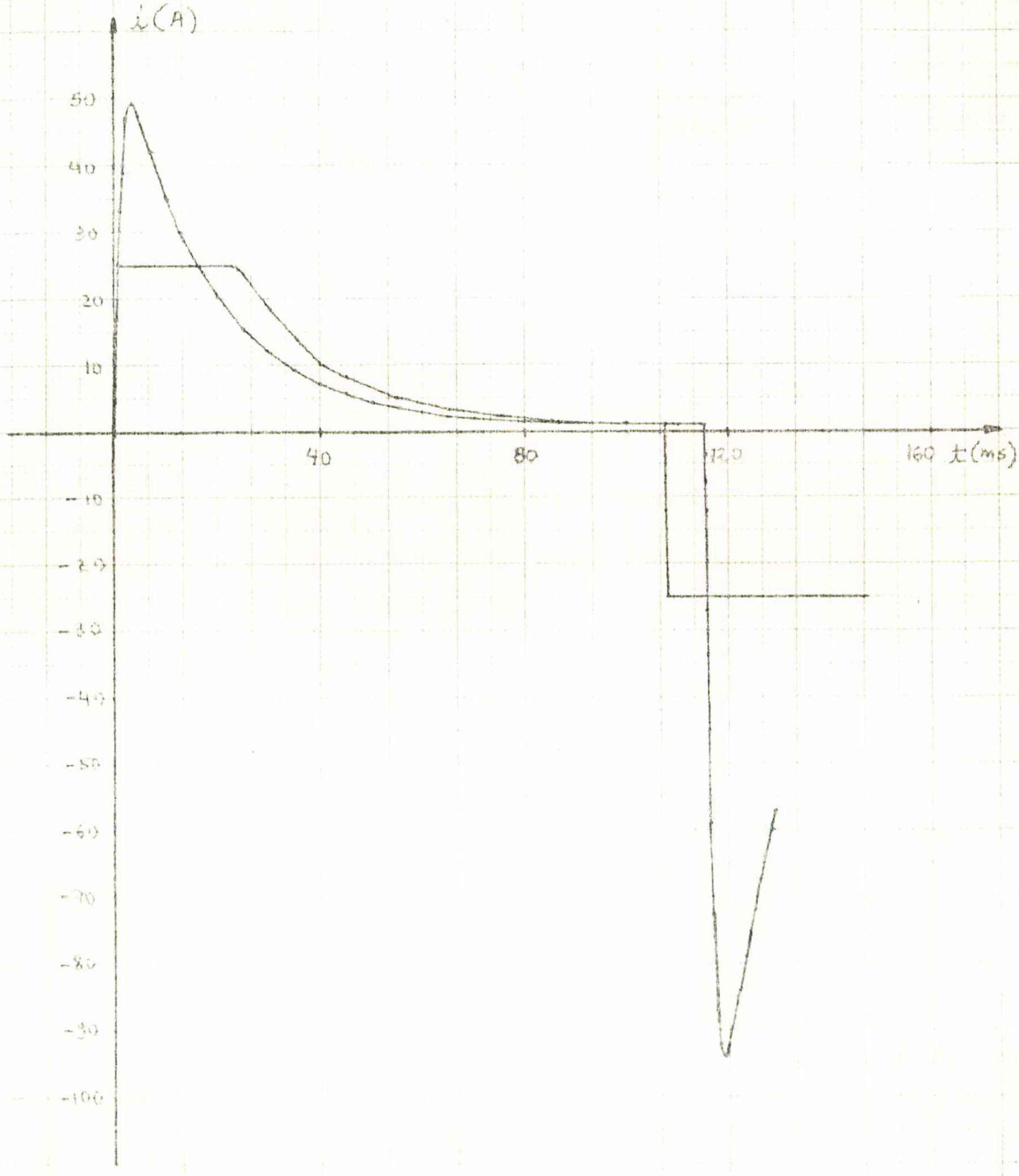

Fig. 22 - Comparação entre as correntes de armadura no posicionamento para $\theta_f = 2\pi$ rad com e sem limitação de corrente.

3.5. CONCLUSÕES

O ponto central deste capítulo é a dedução da curva de comutação onde se leva em conta a limitação da corrente de armadura. Isto vem a solucionar possíveis problemas que ocorrerão devido aos altos valores de pico que ocorrem devido à comutação "bang-bang".

A precisão desta abordagem resultou tão boa quanto a do capítulo anterior, como pode ser visto pelas simulações realizadas. Como o esperado, o tempo de posicionamento aumentou. A tabela I abaixo permite que se possa comparar os tempos de posicionamento de ambas as abordagens para os casos apresentados neste trabalho.

θ_f (rad)	tempo de posicionamento sem limitação de corrente (ms)	tempo de posicionamento com limitação de corrente (ms)	% de tempo gasto a mais (ms)
0,01	4,7	5,6	19
$\pi/8$	23,7	32,5	37
2π	129,0	147,0	14

TABELA I - Comparação entre os tempos de posicionamento com e sem limitação de corrente.

A tabela II compara as correntes finais para as duas abordagens. É interessante que se note que as correntes finais quando se usa limitação de corrente podem ser menores; isso fará com que a aproximação assintótica final seja mais rápida.

θ_f (rad)	corrente final caso sem limitação. (A)	corrente final caso com limitação. (A)
0,01	-47,2	-25,0
$\pi/8$	-56,3	-25,0
2π	-60,2	-25,0

TABELA II - Comparação entre as corrente finais com e sem limitação de corrente.

No próximo capítulo se estudará a aproximação assintótica, realizada no final do processo de posicionamento, destinada a eliminar as imprecisões decorrentes dos métodos estudados até aqui.

CAPÍTULO IV
APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA

INTRODUÇÃO

A idéia de operação com dois modos (comutação "bang - bang" seguida de aproximação assintótica), descrita pela figura 1*, surge devido às imprecisões nos posicionamentos dados pela comutação "bang-bang", que é de malha aberta. Para aumentar a precisão deve-se fazer uso de realimentação na parte final do processo.

A imprecisão do primeiro modo fica mais notória quando se visualiza os posicionamentos no espaço de estados (figura 23). Como observado nos capítulos anteriores, a corrente final não é nula e pode atingir valores elevados. Assim, a aproximação assintótica pode ser necessária para um desempenho a contento. É claro que para aumentar a precisão paga-se o preço de aumentar o tempo de posicionamento.

4.1. A MUDANÇA DE MODO DE OPERAÇÃO E O SISTEMA REALIMENTADO

Observando as variáveis de estado definidas no ítem 1.2 , considere-se o plano no espaço de estados definido por:

$$\Omega = 0 \tag{96}$$

A mudança do primeiro modo de operação para o segundo dar-se-á quando a trajetória decorrente da comutação "bang-bang" cruzar esse plano.

Esse critério tem a vantagem de ser bastante simples de ser realizado, e, como se verá, bastante eficiente. A figura 24 abaixo ilustra a mudança de modo de operação vista no plano de fase.

* página 2

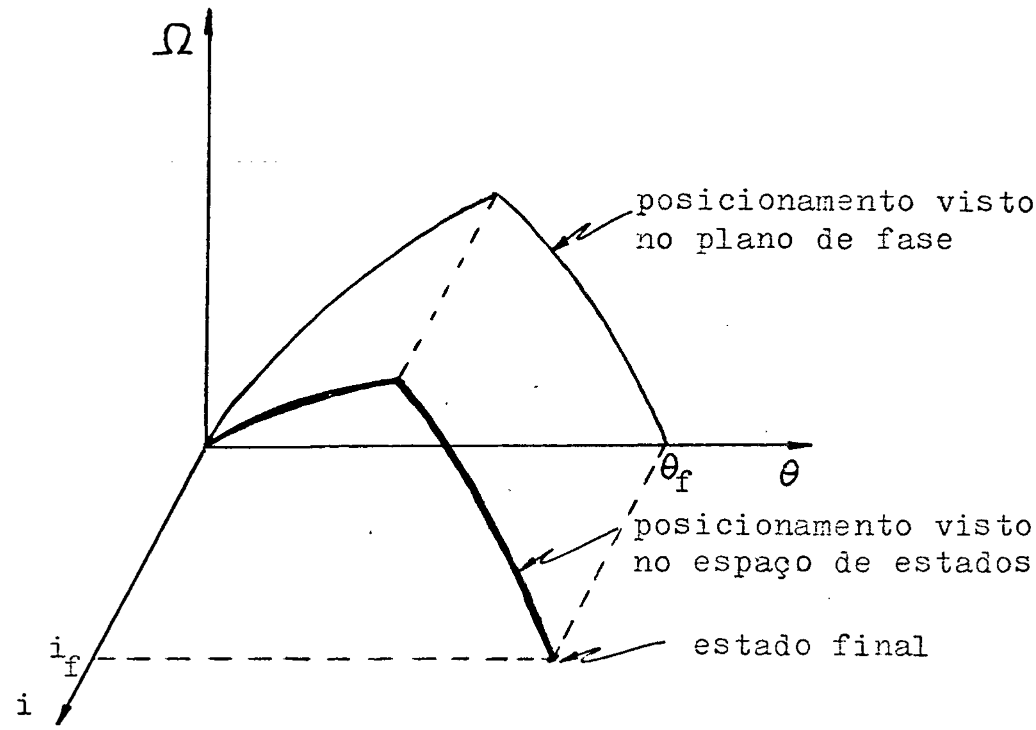

Fig. 23 - Posicionamento dado pela comutação "bang-bang" visto no espaço de estados

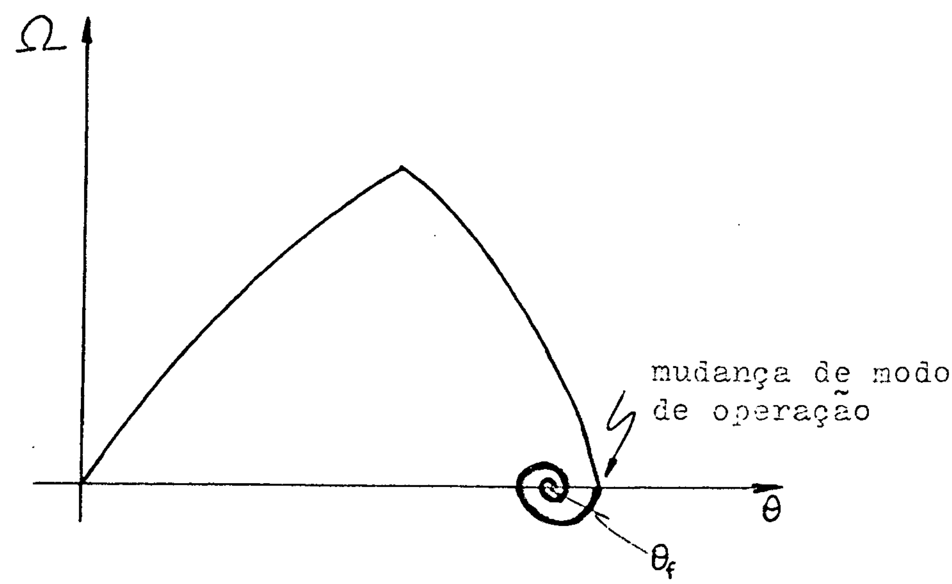

Fig. 24 - Critério para a mudança de modo de operação

O diagrama de blocos do sistema com realimentação de estados que será usado para a aproximação assintótica pode ser visto através da figura 25.

O motor de corrente contínua, cujo modelo é apresentado no ítem 1.1, pode também ser descrito em diagrama de blocos ao se observar as equações 5. A figura 26 apresenta esse diagrama de blocos, onde o bloco com traços duplos representa a não-linearidade existente no atrito estático.

A figura 27 apresenta o sistema usado para a aproximação assintótica de um modo global, onde se juntam os diagramas das figuras 25 e 26.

4.2. PRESENÇA DE AUTO-OSCILAÇÕES

Desde que o sistema realimentado descrito pela figura 27 contém uma não-linearidade, deve-se detectar a presença de auto oscilações.

Reduzindo-se o diagrama de blocos, fazendo-se $\theta_f = 0$, chega-se à configuração descrita pela figura 28, configuração esta bastante conhecida quanto à análise de presença de auto-oscilações [5].

Será usado o método da primeira harmônica, em abordagem bastante simplificada.

A função descritiva da não-linearidade [5] vale:

$$N = \frac{4\,b}{\pi X} \tag{97}$$

onde X é a amplitude da oscilação senoidal que poderá existir na velocidade angular,

$$\Omega(t) = X \operatorname{sen} \omega t \tag{98}$$

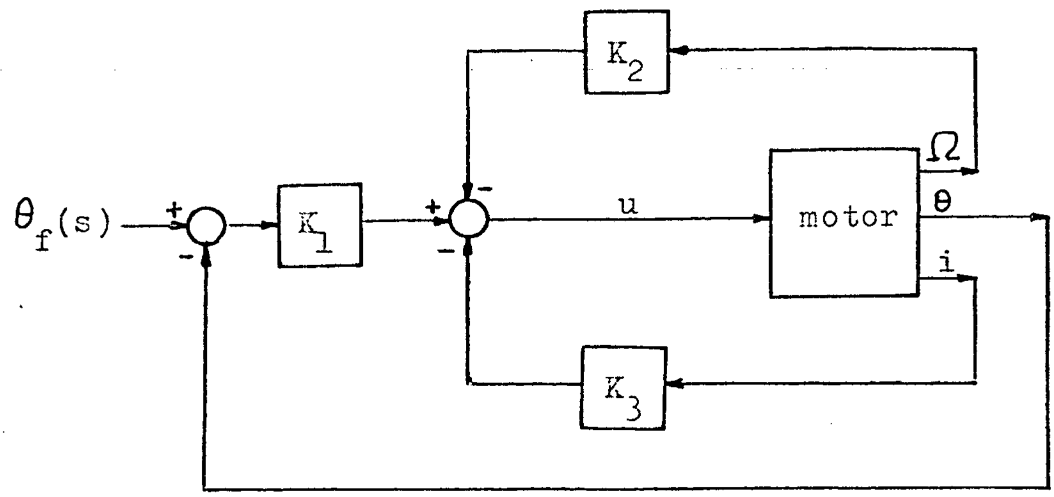

Fig. 25 - Diagrama de blocos do sistema de aproximação assintótica

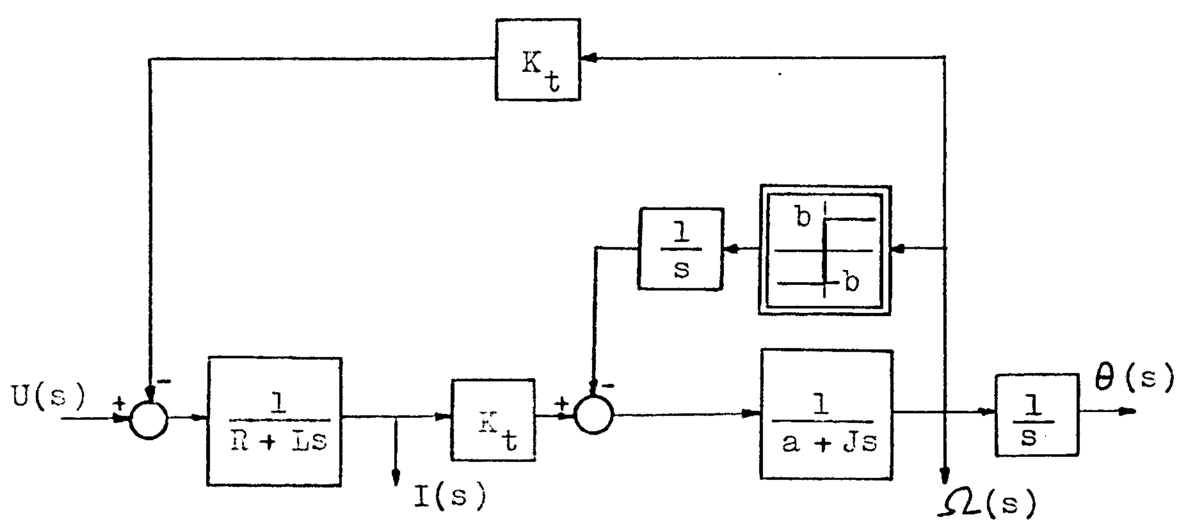

Fig. 26 - Modelo do motor de corrente contínua

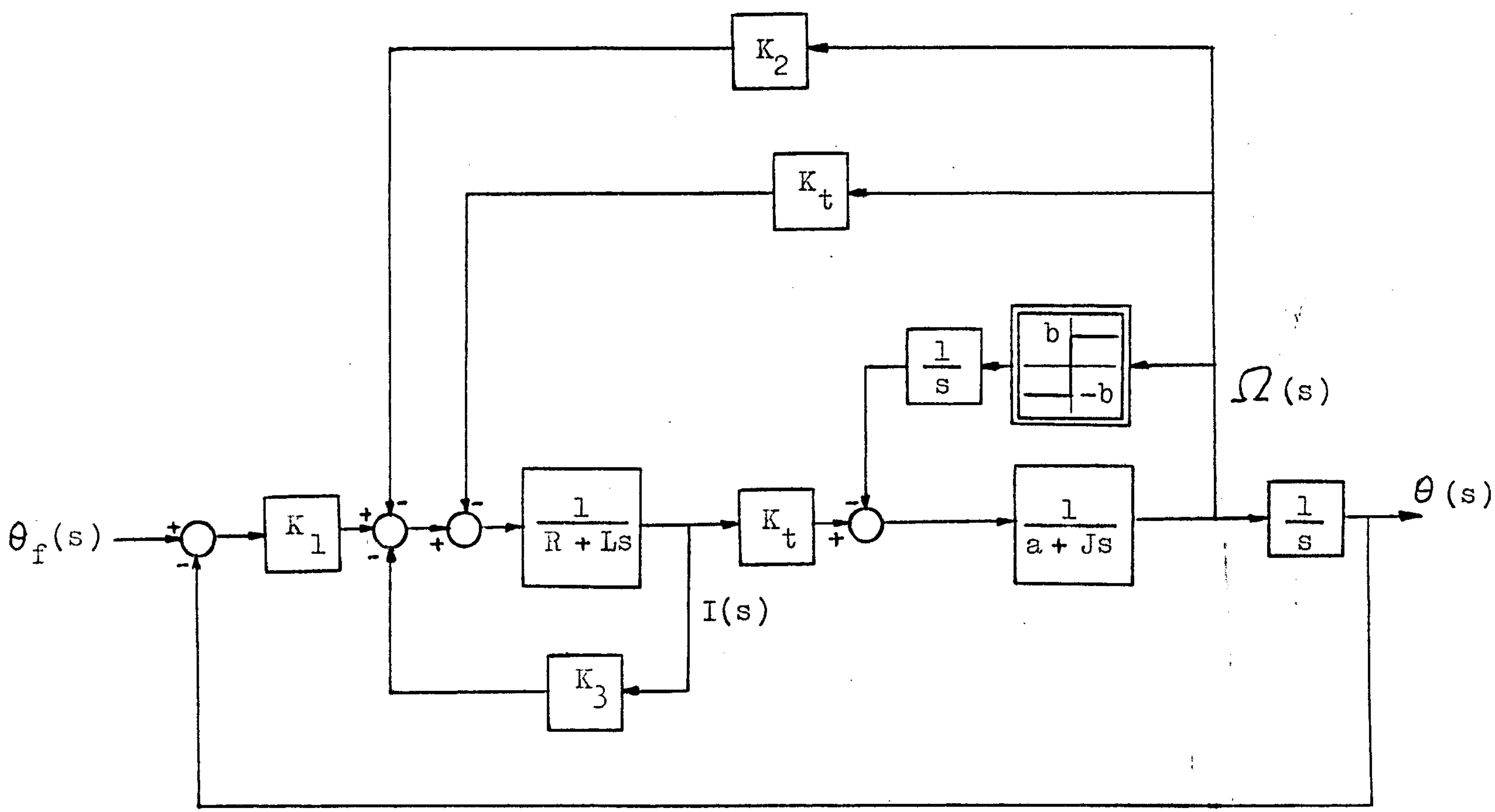

Fig. 27 - Diagrama de blocos global do sistema de aproximação assintótica

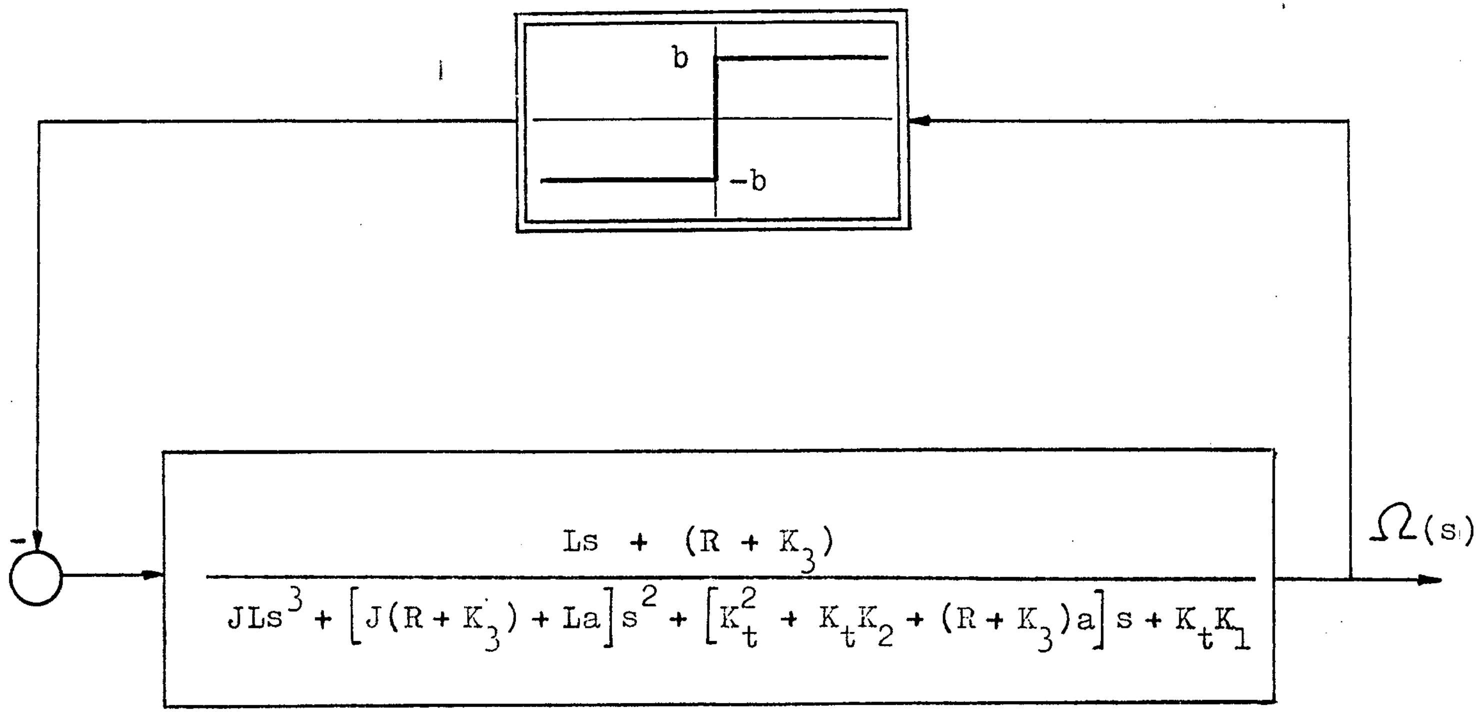

Fig. 28 - Redução do diagrama de blocos do sistema realimentado para $\theta_f = 0$

Vê-se então que:

$$- \frac{1}{N} = - \frac{X}{4b} \quad , \qquad (99)$$

que terá sempre fase igual a -180^{o}.

Chamando a parte linear do sistema descrito pela figura 28 de G(s), pode-se ter as situações apresentadas pela figura 29 quanto aos gráficos de Nyquist da parte linear e da parte não linear, desde que G(s) é de terceira ordem com um zero.

Obviamente, pelo método da primeira harmônica, [5], a figura 29.b revela o único caso em que existe auto-oscilação, caso este que deverá ser evitado. No decorrer deste ítem serão procuradas as condições para que essas auto-oscilações não ocorram.

Pela figura 29.b, ocorrerão auto-oscilações se existir tal que

$$\angle G(j\omega) = -180^{o} \quad , \qquad (100)$$

, ou seja, como

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{R + K_3}{L}}{J \left[\left[\frac{K_t K_1}{JL} - \frac{J(R + K_3) + aL}{JL} \omega^2 \right] + j \frac{\left[K_t^2 + K_t K_2 + a(R - K_3) \right] \omega - JL\omega^3}{JL} \right]}$$

(101)

$$tg^{-1} \left[\frac{\omega L}{R + K_3} \right] - tg^{-1} \left[\frac{(K_t^2 + K_t K_2 + (R - K_3)a)\omega - JL\omega^3}{K_t K_1 - (J(R + K_3) + aL)\omega^2} \right] = -180^{o}$$

(102)

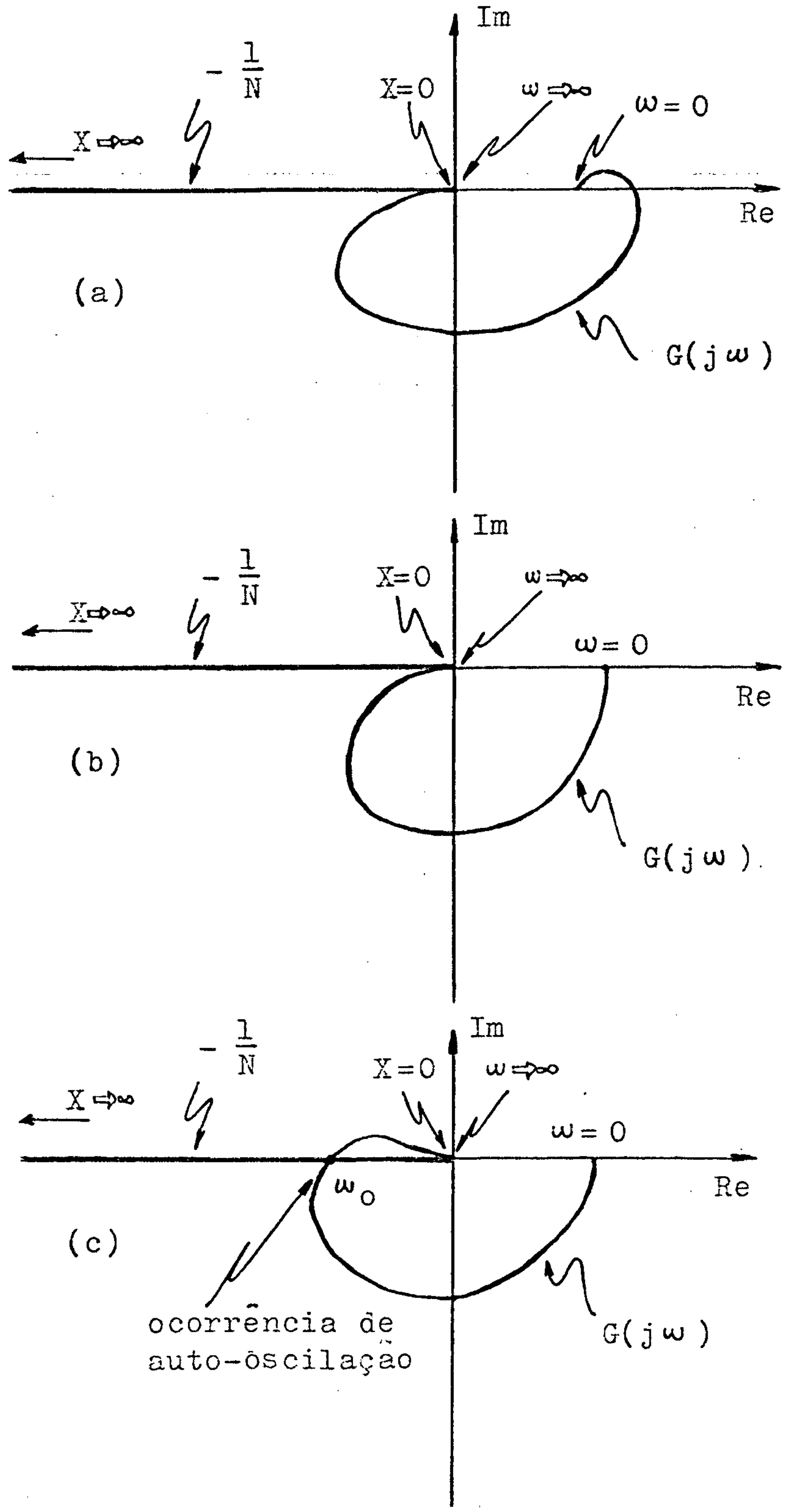

Fig. 29 - Possíveis gráficos de Nyquist para o sistema realimentado.

Usando-se a propriedade

$$tg^{-1}x \pm tg^{-1}y = tg^{-1}\frac{x \pm y}{1 \mp xy} \qquad (103)$$

na equação 102 resulta:

$$tg^{-1}\frac{\omega\left[aL^2\omega^2 - LK_tK_1 + (R+K_3)(K_t^2+K_tK_2+a(R+K_3))\right]}{JL^2\omega^4+\left[(R+K_3)(J(R+K_3)+aL)-L(K_t^2+K_tK_2+a(R+K_3))\right]\omega^2-K_tK_1(R+K_3)} = 180^o$$

(104)

As soluções para a equação 104 são:

a) $\omega_o = 0$

b) $\omega_o \to \infty$

c) $$\omega_o = \sqrt{\frac{LK_tK_1 - (R+K_3)(K_t^2+K_tK_2+a(R+K_3))}{aL^2}} \qquad (105)$$

Obviamente as soluções a e b não servem. Se existir auto-oscilação, certamente será aquela cuja frequência é a dada pela solução c.

Para que não exista ocorrência de auto-oscilação é suficiente então que o radicando da equação 105 seja negativo, ou seja:

$$LK_tK_1 - (R+K_3)(K_t^2+K_tK_2+a(R+K_3)) < 0 \quad , \text{ ou} \qquad (106)$$

$$K_2 > \frac{LK_1}{R+K_3} - K_t - a\left(\frac{R+K_3}{K_t}\right) \qquad (107)$$

4.3. APROXIMAÇÃO LINEAR

Eliminada a possibilidade de auto-oscilação, é necessário analizar a estabilidade do sistema realimentado. Para isso será feita uma aproximação linear no torque de atrito, conforme mostrado pela figura 30.

Desse modo o Torque de Atrito poderá ser escrito como

$$T_a = a'\Omega \tag{108}$$

As equações dinâmicas para o motor (compare-se com as equações 7) agora ficarão:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-a'}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & \frac{-K_t}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \tag{109}$$

Conforme a figura 25,

$$u = K_1 \theta_f - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} x \tag{110}$$

Portanto, as equações dinâmicas para o sistema realimentado serão:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a'}{J} & \frac{K_t}{J} \\ -\frac{K_1}{L} & -\frac{K_2+K_t}{L} & -\frac{K_3+R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{L} \end{bmatrix} \theta_f \tag{111}$$

Vê-se facilmente que o ponto de equilíbrio para esse sistema será o ponto

$$x_f = \begin{bmatrix} \theta_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{112}$$

e a sua equação característica será:

$$\lambda^3 + \left(\frac{R + K_3}{L} + \frac{a}{J}\right)\lambda^2 + \left(\frac{K_t^2 + K_t K_2 + a(R + K_3)}{JL}\right)\lambda + \frac{K_t K_1}{JL} = 0 \tag{113}$$

Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 os auto-valores do sistema realimentado, raízes da equação 113. Então

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda +$$

$$- \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \tag{114}$$

Comparando as equações 113 e 114 tem-se:

$$\text{a) } K_1 = -\frac{JL}{K_t}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{115}$$

$$\text{b) } K_2 = \frac{JL(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) - K_t^2 - a(R + K_3)}{K_t} \tag{116}$$

$$\text{c) } K_3 = -L\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{R}{L} + \frac{a}{J}\right) \tag{117}$$

As equações 115, 116 e 117 são muito úteis, pois possibilitam determinar os coeficientes de realimentação de estado K_1, K_2 e K_3 em função dos auto-valores. Como interessa rapidez, deseja-se auto-valores com parte real o quanto mais negativa possível.

Nota-se também que é conveniente que se tenha auto-valores reais, pois a parte imaginária irá fazer com que os valores de K_1, K_2 e K_3 aumentem, não contribuindo para reduzir o tempo de posicionamento e trazendo problemas de sobrepasso.

Para o projetista é uma questão de compromisso: arbitrar auto-valores muito negativos significa grandes valores nos coeficientes de realimentação, o que acarreta problemas de construção e de custos.

Em alguns casos pode ser conveniente fazer $K_3 = 0$, o que significa não usar a realimentação da corrente de armadura. Isso será feito em simulações posteriores.

4.4. ESTABILIDADE

Para se analizar a estabilidade do sistema realimentado aplicar-se-á o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz no sistema linearizado apresentado no ítem anterior, cuja equação característica é a equação 113. Resulta,

$$
\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & \dfrac{K_t^2 + K_t K_2 + a'(R+K_3)}{JL} \\[3ex]
s^2 & \dfrac{R+K_3}{L} + \dfrac{a}{J} & \dfrac{K_t K_1}{JL} \\[3ex]
s^1 & \dfrac{\dfrac{J(R+K_3)+aL}{JL} \cdot \dfrac{K_t^2 + K_t K_2 + a'(R+K_3)}{JL} - \dfrac{K_t K_1}{JL}}{\dfrac{J(R+K_3)+aL}{JL}} & 0 \\[3ex]
s^0 & \dfrac{K_t K_1}{JL} &
\end{array}
\qquad (118)
$$

Para haver estabilidade a primeira coluna deve ser positiva, ou seja, devem ser obedecidas as condições:

a) $K_1 > 0$ (119)

b) $K_3 > -R - \frac{La'}{J}$ (120)

c) $K_2 > \frac{LK_1}{R + K_3 + a' L/J} - K_t - a' \left(\frac{R + K_3}{K_t} \right)$ (121)

Levando-se em conta que o valor de a' é sempre maior ou igual ao de a, pode-se estipular as seguintes condições suficientes para estabilidade, desde que as tres condições acima sempre estarão obedecidas:

a) $K_1 > 0$ (122)

b) $K_3 > -R$ (123)

c) $K_2 > \frac{LK_1}{R + K_3} - K_t - a\left(\frac{R + K_3}{K_t}\right)$ (124)

Note-se que a inequação 124 é idêntica à inequação 107, o que garante também a inexistência de auto-oscilações.

4.5. IMPRECISÕES NO SEGUNDO MODO

O ponto de equilíbrio x_f dado pela expressão 112, decorrente da aproximação linear que gerou as equações de estado 111, na verdade não vai ser atingido se considerar-se a não linearidade.

As equações dinâmicas para o sistema realimentado, levando em conta a não-linearidade podem ser conseguidas através das equações 7 e 110:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{J} & \frac{K_t}{J} \\ -\frac{K_1}{L} & -\frac{K_t+K_2}{L} & -\frac{R+K_3}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b}{J}\, \mathrm{sgn}[x_2] \\ \frac{K_1\,\theta_f}{L} \end{bmatrix} \tag{125}$$

Para esse sistema os pontos de equilíbrio serão dados por

$$x'_f = \begin{bmatrix} \theta_f - \frac{R+K_3}{K_t K_1}\, b\, \mathrm{sgn}[\Omega] \\ 0 \\ \frac{b}{K_t}\, \mathrm{sgn}[\Omega] \end{bmatrix} \tag{126}$$

Note-se a existência de dois pontos de equilíbrio, dependendo do sentido da velocidade angular. Também se observa que para minimizar possíveis erros de regime é conveniente fazer o valor de K_1 o maior possível e o valor de K_3 o menor possível.

4.6. DELIMITAÇÕES DO SEGUNDO MODO

Como especificado no ítem 4.1 , o segundo modo de operação terá início quando a trajetória decorrente da comutação "bang-bang" cruzar o plano dado pela equação 96.

Se o sistema é estável, sem presença de auto-oscilações, deverá convergir assintóticamente para o estado de equilíbrio x_f. Isso deverá ocorrer em um intervalo de tempo não finito. Deve-se ter sempre em mente que sempre haverá um erro de regime com relação ao estado x_f , como mostrado no ítem anterior.

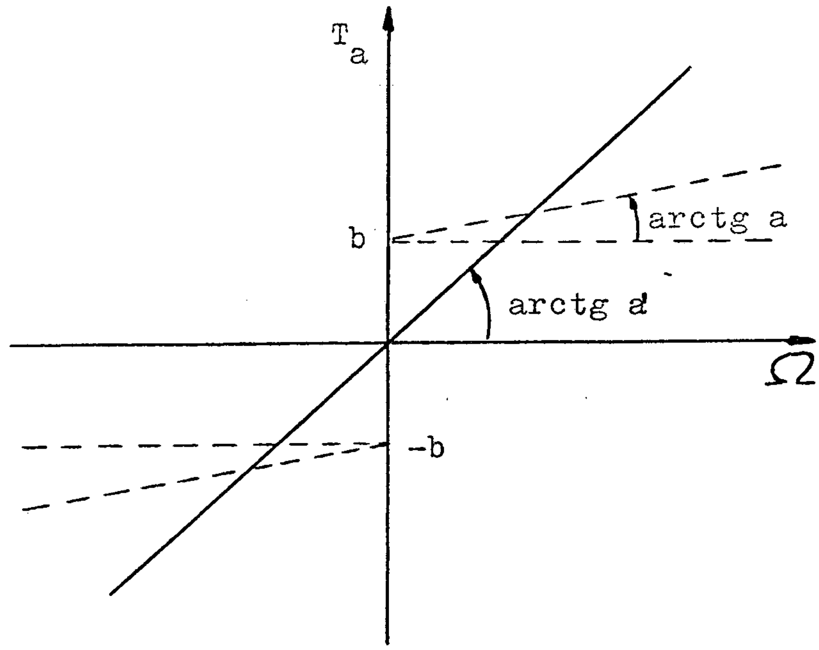

Fig. 30 - Linearização do Torque de Atrito

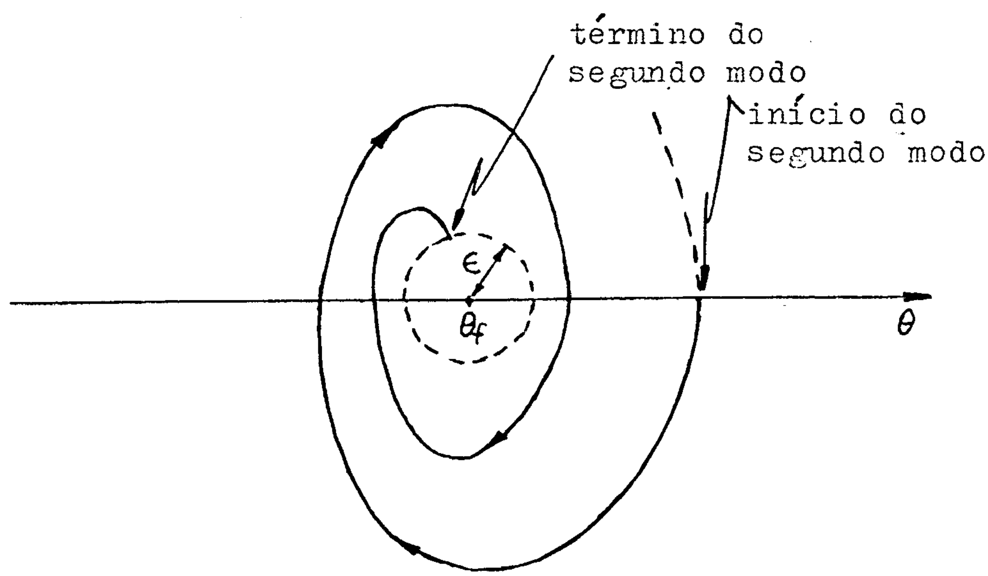

Fig. 31 - Delimitações do segundo modo de operação

Defina-se um conjunto alvo da seguinte maneira:

$$\left\{ \underline{x} \quad t.q. \quad \| \underline{x} - \underline{x}_f \| < \epsilon \right\} \quad , \quad \epsilon > 0 \tag{127}$$

Pode-se determinar o fim do segundo modo de operação assim que o conjunto alvo acima for atingido. Nesse instante faz se nula a tensão de armadura.

A figura 31 ilustra esta idéia. Desse modo garante-se que o posicionamento seja tão bom quanto o desejado.

O parâmetro ϵ deve ser bem escolhido para um desempenho satisfatório. É o parâmetro que faz o balanceamento entre rapidez e precisão no segundo modo.

4.7. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para a verificação dos estudos feitos até aqui foram feitas algumas simulações do sistema realimentado.

Para o projeto dos coeficientes de realimentação deve-se usar as equações 115, 116 e 117. Se deseja-se $K_3 = 0$, uma boa escolha dos auto-valores é

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \left(- \frac{R}{L} - \frac{a}{J}\right) / 3 \quad , \tag{128}$$

pois garante-se que eles fiquem reais e o mais negativo possível. Isso resultou, usando-se $a = a = 0,01$, em:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = - 281,56$$

$$K_1 = 578,0$$

$$K_2 = 5,0 \quad ,$$

que satisfazem as inequações 122, 123 e 124.

A figura 32 mostra as trajetórias para os valores para os valores de coeficientes de realimentação acima projetados e para diferentes condições iniciais: correntes iniciais de -57A e e de -25A, correspondendo aproximadamente aos estados finais dados pelas comutações sem e com limitação de corrente de armadura e para $\theta_f = \pi/8$.

Escolhendo-se o valor de ϵ como

$$\epsilon = 0{,}2 < \frac{b}{K_t}$$

pode-se montar a tabela III abaixo.

	tempo gasto na comutação "bang-bang"	tempo gasto aproximação assintótica $\epsilon = 0{,}2$	tempo de posicionamento para $\epsilon = 0{,}2$
Caso sem limitação de corrente	23,7 ms	25,1 ms	48,8 ms
Caso com limitação de corrente	32,5 ms	15,3 ms	47,8 ms

TABELA III - Vários tempos de posicionamento para $\theta_f = \pi/8$ e $\epsilon = 0{,}2$

Como pode-se ver nesse caso particular, o posicionamento com limitação de corrente foi mais rápido. É claro que esse não é o caso geral, mas para posicionamentos de curta distância deverá ocorrer com frequência.

Deve-se também notar pela figura 32 que o ponto de equilíbrio a ser atingido é aquele onde

$$\theta_{equilíbrio} = \theta_f - \frac{R + K_3}{K_t K_1} b = \theta_f - 0,642 \times 10^{-3} ,$$

dado pela expressão 126.

A figura 33 mostra um caso em que ocorreu auto-oscilação. Os valores usados para os coeficientes de realimentação,

$$K_1 = 964,209$$

$$K_2 = 0$$

$$K_3 = 0$$

não satisfazem a inequação 107.

A frequência de oscilação ocorrida na simulação foi de 209,5 rad/s , enquanto que aquela calculada através da expressão 105 é de 210,0 rad/s. Nota-se então que o método da primeira harmônica atuou com boa precisão.

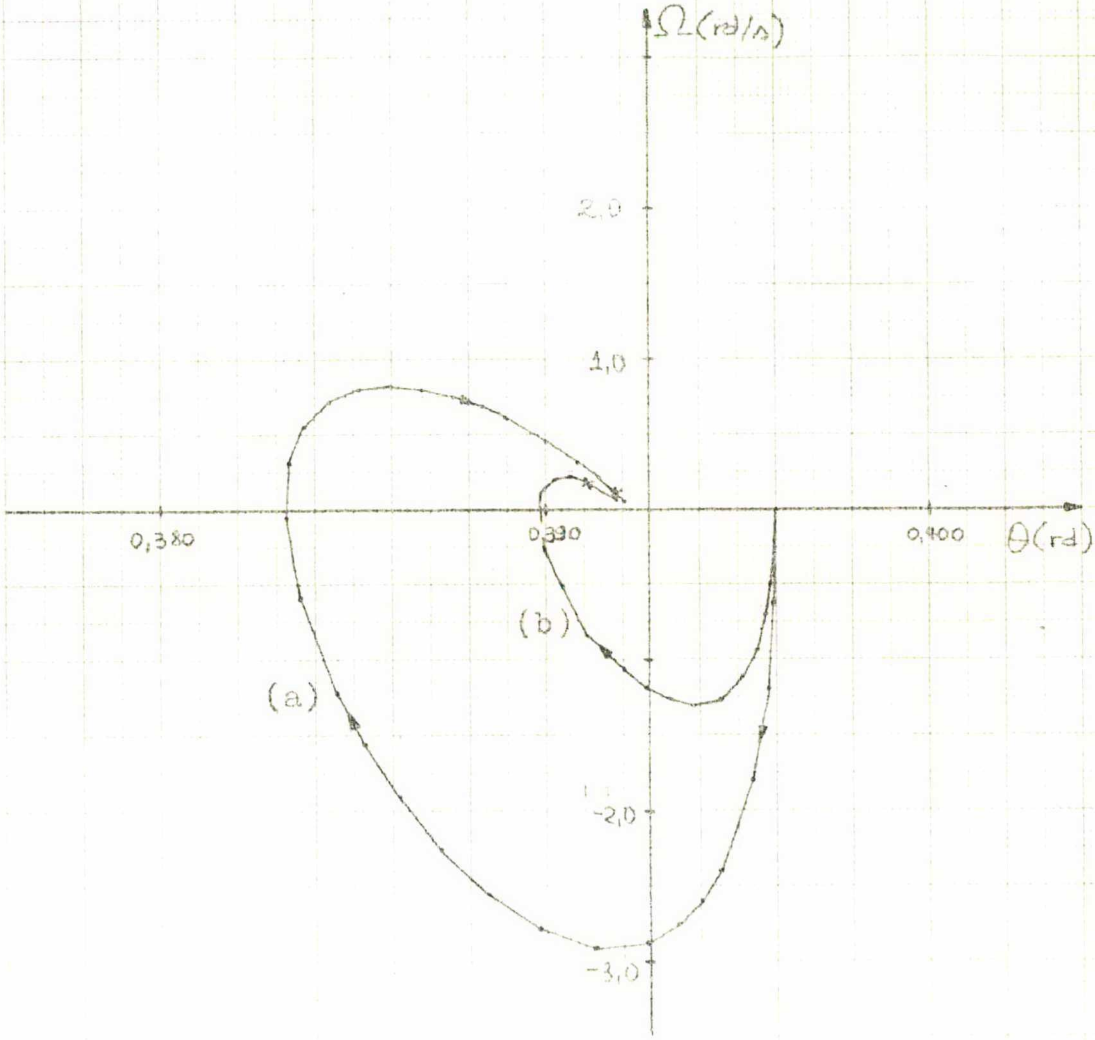

Fig. 32 - Aproximaçao assintótica para $\theta_f = \pi/3$;

$K_1 = 578,0$; $K_2 = 5,0$; $K_3 = 0$

Os pontos assinalados com x marcam

$\|x - x_f\| = \epsilon = 0,2$

Curva a - corrente inicial = -57 A

Curva b - corrente inicial = -25 A

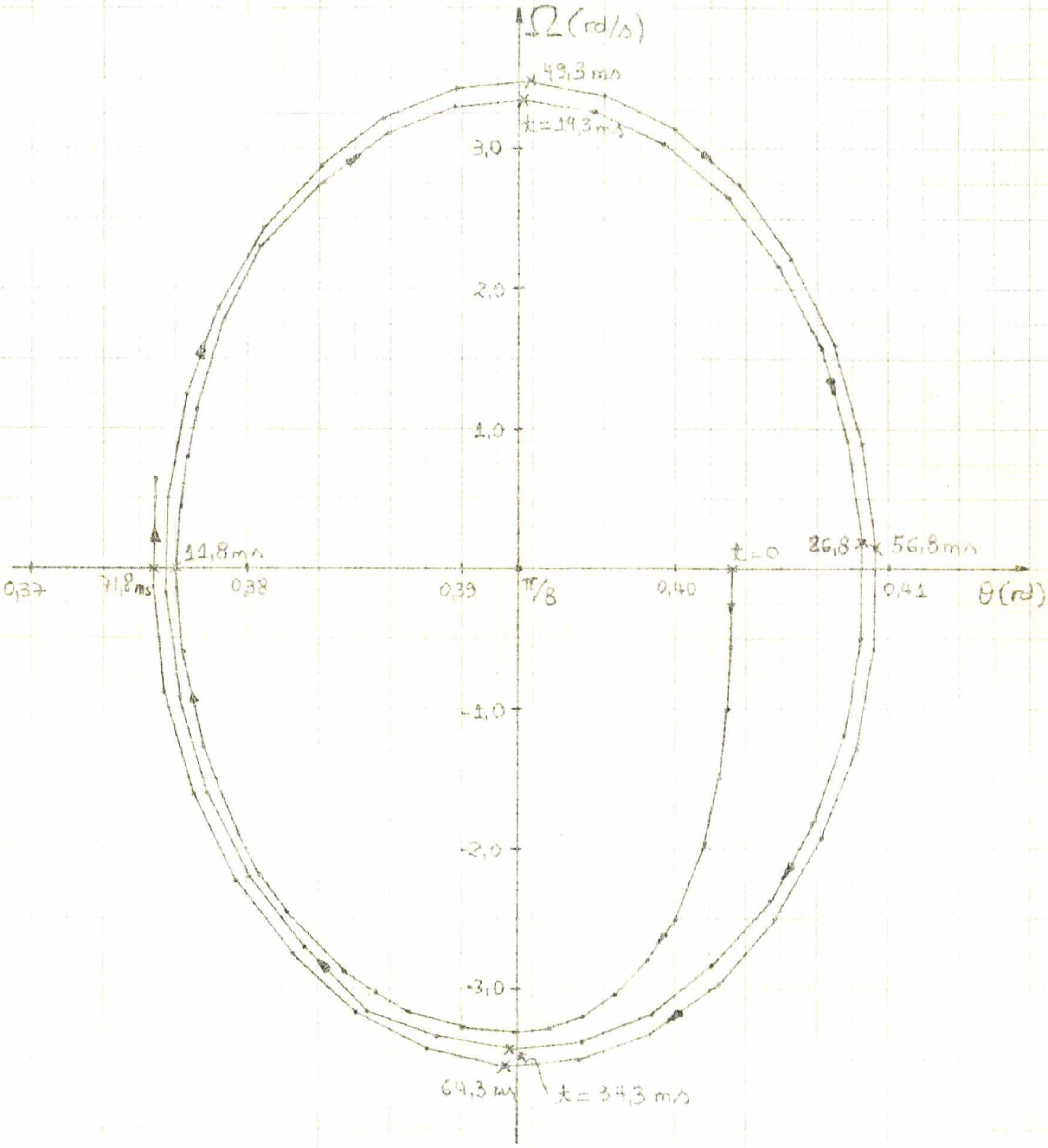

Fig. 33 - Ocorrência de auto-oscilação para

$\theta_f = \pi/8$; $K_1 = 364,209$; $K_1 = K_2 = 0$

Corrente inicial = -40 A

4.8. CONCLUSÕES

Os pontos centrais deste capítulo são o cálculo dos coeficientes de realimentação, dado pelas equações 115, 116 e 117, e as condições 122, 123 e 124, suficientes para estabilidade do sistema realimentado e inexistência de auto-oscilações.

As dificuldades principais que aparecem são o arbítrio dos valores de α e ϵ.

O valor de α pode sempre ser usado igual ao de a, desde que se estará trabalhando no pior caso para estabilidade.

Note-se ainda que para a abordagem deste capítulo ser coerente com a idéia geral do trabalho, é conveniente que a tensão de armadura u, dada pela expressão 110, tenha sempre valor absoluto menor que U_o. Nos casos simulados a tensão de armadura alcançou o seu máximo valor absoluto em 15,4 V.

CAPÍTULO V

COMENTÁRIOS FINAIS

Os pontos centrais deste trabalho podem ser evidenciados como:

a) A curva de comutação, equação 61, que é um aprimoramento daquela deduzida em [9], por não se considerar nula a corrente de armadura no instante de comutação.

b) A curva de comutação com limitação de corrente de armadura, equação 95.

c) O projeto dos coeficientes de realimentação, na aproximação assintótica, em função dos auto-valores desejáveis, dado pelas equações 115, 116 e 117.

d) As condições de estabilidade e inexistência de auto oscilações do sistema realimentado, dadas pelas expressões 122, 123 e 124.

É também conveniente listar algumas sugestões para continuação deste trabalho, bem como alguns pontos onde ele pode ser melhorado:

a) A aproximação por retas para a corrente de comutação, desenvolvida no ítem 2.3 , pode ser melhorada, principalmente no tocante às baixas correntes iniciais.

b) A aproximação da corrente de comutação, equação 94, para a comutação com limitação de corrente pode ser melhorada.

c) Se na aproximação assintótica deseja-se que a tensão de armadura seja limitada a $\pm U_o$, deve-se impor novas restrições aos coeficientes de realimentação, ou introduzir uma nova não-linearidade, por tornar u saturável em $\pm U_o$.

B I B L I O G R A F I A

1. CHEN, C.T. - Introduction to linear sistems theory. Holt, Rinehait and Winston Inc., 1970.

2. DE RUSSO, Paul M.; ROY, Rob J. & CLOSE, Charles M. - "Limite cicles". In: - State variables for engineers. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1965, p. 488-498.

3. DUBEY, G. K. & VEPA, N. Murty - A dual mode suboptimum minimum time control of higher order systems for step displacement inputs. J. Instrum. Telecom. Engrs., 16 (4) : 257 - 271 1970.

4. FERGUSON, John D. & STEPHENS, Dennis L. - Time optimal control within a dual mode constraint. IEEE Trans. Industr. Electron. Contr. Instrum., New York, 21 (2): 97 - 101, May, 1965.

5. GIBSON, John E. - "The describing-function method and on-off servomecanisms". In: - Nonlinear automatic control. Tokio, Mc Graw-Hill-Kogakusha Company, 1963, p. 342 - 438.

6. GIBSON, John E. - "Introduction to optimum switched systems". In: - Nonlinear automatic control. Tokio, McGraw-Hill-Kogakusha Company, 1963, p. 439 - 490.

7. KIRK, Donald E. - Optimal control theory. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1970.

8. SZABADOS, Barna; SINHA, Naresh K. & CENZO, Colin D. di - A realistic math model for dc motors. Control Engineering, p. 49 - 53, Mar., 1972.

9. SZABADOS, Barna; SINHA, Naresh K. & CENZO, Colin D.di - Practical switching characteristics for minimum-time position control using a permanent magnet motor. IEEE Trans. Industr. Electron. Contr. Instrum., 19 (3): 67 - 73, Aug., 1972.

10. SZABADOS, Barna; SINHA, Naresh K. & CENZO, Colin D. di - A time-optimal digital position controller using a permanent-magnet dc servomotor. IEEE Trans. Industr. Electron. Contr. Instrum., 19 (3): 74 - 77, Aug., 1972.

11. SINHA, Naresh K.; CENZO, Colin D. di & SZABADOS, Barna - Modeling of dc motors for control applications. IEEE Trans. Indust. Electron. Contr. Instrum., 21(2): 84-88, May, 1974.

12. TOACSE, George & CULPI, W. - Time-optimal control of a stepping motor. IEEE Trans. Industr. Eletron. Contr. Instrum. , 23 (3): 291 - 95, Aug., 1976.

13. TRIEU, K. L. & PIERRE, D. A. - "Multi-mode digital controler for insensitive near-time-optimal control". In: Proc. of the Nat. Electron. Conf. Chicago, Dec., 1970, v.26, p.391-395.

14. WANG, P.K.C. - Analytical Design of eletrohydraulic servomecanism with near time-optimal responses. IEEE Trans. on Autom. Control, v. 8: 15 - 27, Jan., 1963.