

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APLICAÇÃO DO MÉTODO VARIACIONAL  
À SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE GRAETZ GENERALIZADO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

RUBEM GROFF

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 1980

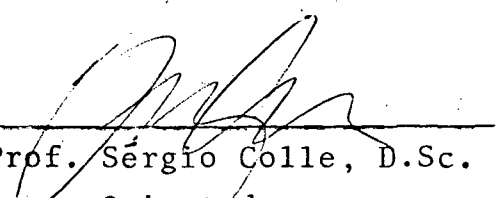
APLICAÇÃO DO MÉTODO VARIACIONAL  
À SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE GRAETZ GENERALIZADO

RUBEM GROFF

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE

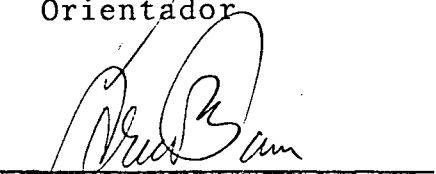
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO TERMO  
DINÂMICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-  
GRADUAÇÃO.



---

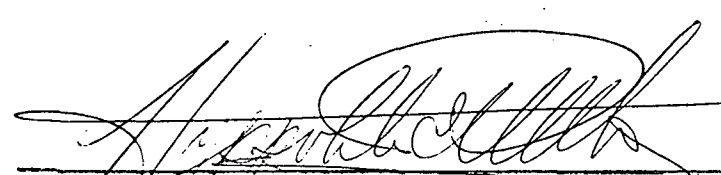
Prof. Sérgio Colle, D.Sc.  
Orientador



---


Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



---

Prof. Hyppólito do Vale Pereira Filho, Ph.D.



---

Prof. Sidney Stuckenbruck, Ph.D.

A meus pais  
À Simone

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sérgio Colle pela orientação eficaz;

À CNEN pelo suporte financeiro;

Ao corpo docente do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC pelo seu apoio;

Ao DCC da UFSC pelo serviço de computação;

Aos colegas Walter Antônio Bazzo e Álvaro Toubes Prata pelo acompanhamento;

A todos que, de alguma maneira, colaboraram na realização deste trabalho.

## ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	3
3. PROBLEMA DE GRAETZ - TEMPERATURA PRESCRITA .....	6
3.1 - Formulação do problema .....	6
3.2 - Equação do movimento .....	8
3.3 - Equação da energia .....	10
3.4 - Solução variacional - Método direto .....	13
3.5 - Número de Nusselt .....	24
3.6 - Aplicação .....	25
3.7 - Discussão dos resultados .....	30
4. PROBLEMA DE GRAETZ - FLUXO PRESCRITO .....	37
4.1 - Formulação do problema .....	37
4.2 - Equação da energia .....	37
4.3 - Solução variacional - Método direto .....	39
4.4 - Número de Nusselt .....	50
4.5 - Aplicação .....	51
4.6 - Resultados .....	56
5. CONCLUSÃO .....	63
BIBLIOGRAFIA .....	65
APÊNDICE A - PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA	68
APÊNDICE B - INTEGRAIS DOS PROBLEMAS DE APLICAÇÃO .....	75

## SIMBOLOGIA

$A$	- área da região $D$
$a(z)$	- funções incógnitas
$C_v$	- calor específico do fluido
$\{C^+\}$	- auto-vetores para $z > 0$
$\{C^-\}$	- auto-vetores para $z < 0$
$D$	- região regular bidimensional
$Dh^*$	- diâmetro hidráulico da região $D$
$h$	- coeficiente de transferência de calor por convecção
$K$	- condutibilidade térmica
$L(\partial D)$	- comprimento de $\partial D$
$N_{pe}$	- número de Péclét
$N_{pr}$	- número de Prandtl
$N_{re}$	- número de Reynolds
$Nu$	- número de Nusselt
$P^*$	- pressão
$Q$	- taxa de calor por unidade de área
$R_1$	- raio interno dimensional
$R_2$	- raio externo dimensional
$r_i$	- raio interno adimensional
$r_e$	- raio externo adimensional
$r^*, \theta, z^*$	- sistema de coordenadas cilíndricas
$T^*, T$	- temperatura e correspondente adimensional
$T^+$	- temperatura em $z > 0$
$T^-$	- temperatura em $z < 0$
$T_m$	- temperatura média
$T_b$	- temperatura média de mistura
$T_s$	- temperatura da superfície
$T_{sm}$	- temperatura média da superfície
$v^*, v$	- velocidade e correspondente adimensional
$v_m^*$	- velocidade média
$x^*, y^*, z^*$	- sistema de coordenadas cartesianas
$\partial D$	- contorno da região $D$
$\epsilon$	- constante arbitrária
$\Psi(x, y)$	- funções de uma sequência completa

$\lambda^+$	- auto-valores para $z > 0$
$\lambda^-$	- auto-valores para $z < 0$
$\mu$	- viscosidade absoluta
$\eta(z)$	- funções-variação
$\rho$	- massa específica do fluido
$\sigma$	- relação de raios = $R1/R2$
$\nabla$	- operador gradiente
{ }	- notação de vetor-coluna
[ ]	- notação de matriz

## RESUMO

O presente trabalho apresenta o método variacional aplicado à solução do problema de Graetz com condução axial, isto é, com pequeno número de Péclet em dutos com secção transversal de geometria arbitrária. São admitidas condições de contorno também arbitrárias na temperatura, bem como no fluxo térmico.

O método de Ritz-Galerkin é utilizado na minimização dos funcionais relativos à equação da energia e às condições de contorno associadas.

São apresentados dois exemplos numéricos correspondentes aos casos de temperatura e de fluxo térmico prescritos para a geometria de um duplo-tubo. Resultados como distribuições de temperatura, números de Nusselt e auto-valores são comparados com da dos disponíveis na literatura pertinente.



## ABSTRACT

The present work deals with the application of a variational principle, to solve the Graetz problem for laminar small Péclet number flow in ducts with both arbitrary cross sectional area and boundary conditions.

The direct method of Ritz-Galerkin is used to approximate the minimum of the functional related to the boundary value problem of the energy equation.

Two applications have been analysed. In the first one, the boundary of a double-tube is maintained at a uniform distribution of temperature; in the second one, a constant heat flux is prescribed in the core of the double-tube. Numerical results evaluated in the computer were compared with published data.

## I - INTRODUÇÃO

Fluidos escoando em dutos são comumente utilizados em equipamentos termo-mecânicos para troca, cessão ou retirada de calor de sistemas. O estudo destes escoamentos pode ser, em geral, dividido em duas partes: uma primeira, já amplamente pesquisada, onde se trata da região na qual se admite que os perfis de velocidade e temperatura são plenamente desenvolvidos; e uma segunda, que passa a tomar importância cada vez maior, onde se trata da região de entrada, objetivo maior do presente trabalho.

O problema da troca de calor na região de entrada de dutos sujeitos a condições de contorno de fluxo térmico ou temperatura prescritos é tradicionalmente conhecido como problema de Graetz. Isto se deve ao fato de ter sido L. Graetz o primeiro pesquisador a propor e resolver um problema de região de entrada. Em seu trabalho pioneiro, Graetz estudou o caso de um fluido em escoamento laminar entrando num duto circular mantido a temperatura constante, com condução axial desprezível. Desde então, o problema de Graetz sofreu várias generalizações e foi estendido a dutos de várias geometrias, várias condições de temperatura e fluxo térmico e levando ou não em consideração a condução axial.

Estas generalizações foram feitas sempre no intuito de possibilitar a análise de casos práticos. Como exemplos podem ser citados os dutos de arrefecimento de reatores nucleares, que podem ser simulados pelo problema de Graetz com fluxo prescrito, e os dutos de condensadores, que podem ser simulados pelo problema de Graetz com temperatura prescrita.

O problema da condução axial também depende do caso prático a ser estudado. O parâmetro que quantifica a importância da condução axial é o número de Péclet. Definido como sendo a relação entre o calor transmitido por convecção e o calor transmitido por condução, este número quando grande, maior que 100 segundo a referência [27], permite que se despreze os efeitos da condução axial. Esta condição, no entanto, não é a mais corriqueira, uma vez que para escoamentos laminares tem-se baixo número de Reynolds, o que, na maioria dos casos, resulta em baixo número de

Péclét. Também em escoamentos de fluidos com pequeno número de Prandtl, como no caso de metais líquidos, a condução axial é de grande importância.

O principal efeito da condução axial é o pré-aquecimento do fluido entrante, que traz como consequência uma alteração nos parâmetros de troca de calor como, por exemplo, o número de Nusselt. E este número, como se sabe, é de capital importância em termos de projeto.

Por tudo que foi dito, o presente trabalho generaliza o problema de Graetz com condução axial para dutos de secção arbitrária e para prescrições também arbitrárias de temperatura e fluxo térmico. Para obtenção deste grau de generalidade, é utilizado o método variacional, que se mostra bastante conveniente para estudos desta natureza [26].

Os métodos e técnicas variacionais têm sofrido uma série de desenvolvimentos e vêm se tornando uma ferramenta cada vez mais eficiente na resolução de problemas a valores de contorno [7]. Em certas situações apresentam vantagens sobre outros métodos numéricos como, por exemplo, o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos. Dentre estas vantagens tem-se o fato do método variacional resultar expressões analíticas, e a consequente diminuição na dimensão das matrizes envolvidas.

Os resultados apresentados neste trabalho são basicamente comparativos, uma vez que o maior interesse está na verificação da confiabilidade e precisão do método proposto e não a obtenção de dados para casos reais ou práticos. Este fato foi determinante na escolha dos problemas de aplicação.

## II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O problema da troca de calor para um fluido, em escoamento laminar, na região de entrada de um tubo mantido a temperatura constante, foi resolvido matematicamente por L. Graetz em 1885. Nesta ocasião, Graetz desprezou a condução axial e mostrou que o problema podia ser formulado como um problema de auto-valores [28]. Vinte e cinco anos mais tarde, esta solução foi redescoberta por W. Nusselt [16]. Desde então, este problema passou a ser conhecido como problema de Graetz e sofreu, ao longo dos anos, as mais variadas generalizações e abordagens.

Dennis et al. [9] estenderam o problema de Graetz com temperatura constante a dutos retangulares com desenvolvimento simultâneo dos perfis de temperatura e de velocidade. Brown [4] estudou o caso de placas planas e dutos circulares, tendo obtido os onze primeiros auto-valores e auto-funções através de método numérico. Agrawal [1] resolveu analiticamente o problema em placas apresentando salto de temperatura, levando em consideração a condução axial e a dissipação viscosa.

Para analisar o efeito da condução axial na troca de calor, Schneider [27] estudou o problema de Graetz em placas planas e tubos, e mostrou que a condução axial não apresenta influência quando o número de Péclet for maior que 100.

Deavours [8] apresentou uma solução exata para o caso de placas com condução axial, mas não apresentou, em seus resultados, os números de Nusselt. A influência do número de Péclet em dutos circulares sujeitos a um salto de temperatura foi analisada por Jones [17].

O problema de Graetz com fluxo térmico prescrito e levando em consideração a dissipação viscosa foi resolvido analiticamente por Ou e Cheng [29]. Outro autor que estudou o caso de fluxo térmico prescrito foi Hsu [14]. Em seu trabalho Hsu resolveu analiticamente o problema num duplo-tubo recebendo calor pelo tubo interno ou pelo tubo externo, levando em conta a condução axial.

Sparrow e Siegel [28] apresentaram uma abordagem variacional para solução das auto-funções associadas ao problema de

Graetz com temperatura prescrita. As geometrias por eles estudadas foram o círculo e o retângulo, para mostrar um caso unidimensional e um caso bi-dimensional respectivamente. Outros autores que utilizaram métodos variacionais foram Tay e De Vahl Davis [29] e Savkar [26]. Sobre estes dois estudos é interessante fazer uma discussão mais criteriosa, pois eles apresentam íntima relação com o presente trabalho.

Em seu trabalho, Savkar estudou os problemas de Graetz de fluxo e temperatura prescritos em dutos de secção arbitrária, sem levar em consideração a condução axial. Para tanto, aplicou uma transformação de Laplace dupla à equação da energia e mostrou que a equação resultante era uma equação de Euler de um determinado funcional. A este funcional ele aplicou o método de Ritz-Galerkin e obteve a distribuição de temperatura e os demais parâmetros de interesse.

Tay e De Vahl Davis montaram um programa de elementos finitos sobre o funcional associado à equação da energia, e resolveram os problemas de Graetz com fluxo e temperatura prescritos em placas planas. Embora o funcional por eles utilizado apresentasse o termo relativo à condução axial, o principal efeito desta condução, qual seja, o pré-aquecimento do fluido entrante, não foi considerado, pois admitiram, como condição de contorno, uma distribuição constante de temperatura na entrada.

Em 1977, Colle [7] estendeu o princípio variacional para condução do calor apresentado por Hays [13], obteve o funcional relativo à equação da energia aplicável a problemas de convecção.

Em [7] foi aplicado o método de Ritz-Galerkin para a aproximação variacional da solução da equação da energia para número de Péclét arbitrário, considerando a condição de contorno de temperatura prescrita em dutos de secção transversal de geometria arbitrária. Apesar de toda a teoria ter sido desenvolvida o método só foi testado para placas paralelas sem considerar a condução axial. Neste trabalho, as equações desenvolvidas em [7] são aplicadas para o cálculo da solução do problema de Graetz com temperatura prescrita num duplo-tubo com condução axial. Adicionalmente, este trabalho utilizou-se do mesmo procedimento de [7], para a ob

tenção do funcional apropriado para o caso de fluxo térmico prescrito no contorno, considerando a condução axial do calor, isto é, para valores arbitrários do número de Péclét.

### III - PROBLEMA DE GRAETZ - TEMPERATURA PRESCRITA

#### 3.1 - Formulação do problema

O problema de Graetz com temperatura prescrita, de acordo com o grau de generalidade admitido neste trabalho, pode ser enunciado como segue:

Seja um duto cujo eixo é a direção de  $z^*$  do sistema de coordenadas cartesianas  $(x^*, y^*, z^*)$ , e cuja secção transversal é uma região regular  $D$ , com contorno  $\partial D$  formado por segmentos de curva diferenciáveis que não formam cúspides nas intersecções, conforme a figura 1.

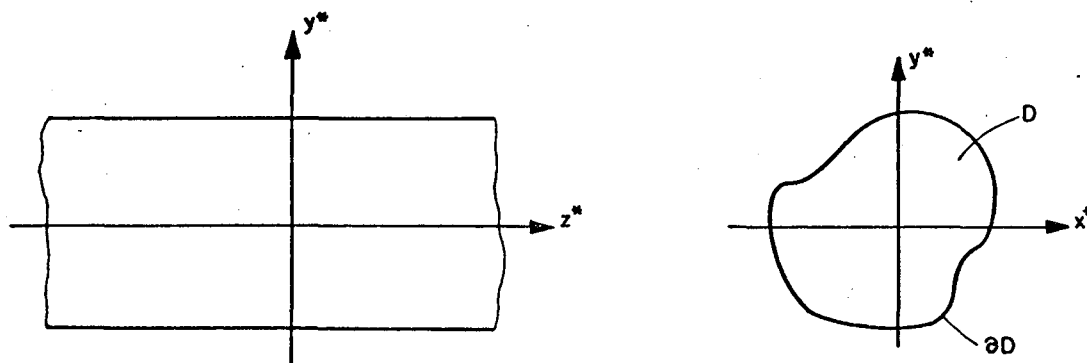


Figura 1

No interior do duto escoia um fluido em regime permanente com perfil de velocidade plenamente desenvolvido. A superfície do duto é mantida a uma distribuição de temperatura  $T_0^* = f^*(\partial D)$ , quando  $z^* < 0$ , e a uma outra distribuição de temperatura  $T_1^* = g^*(\partial D)$ , quando  $z^* > 0$ , de tal modo que haja uma descontinuidade na temperatura de  $\partial D$  em  $z^* = 0$ . A figura 2 mostra, de modo esquemático, tais distribuições de temperatura.

Deseja-se encontrar o campo de temperatura no interior do duto e os parâmetros de troca de calor. Para tanto, deve-se solucionar o sistema de equações diferenciais parciais, formado pela equação do movimento e pela equação da energia, submetidas às condições de contorno prescritas em  $\partial D$ .

As hipóteses simplificativas adotadas, tradicionalmente utilizadas em estudos desta natureza na literatura especializada,

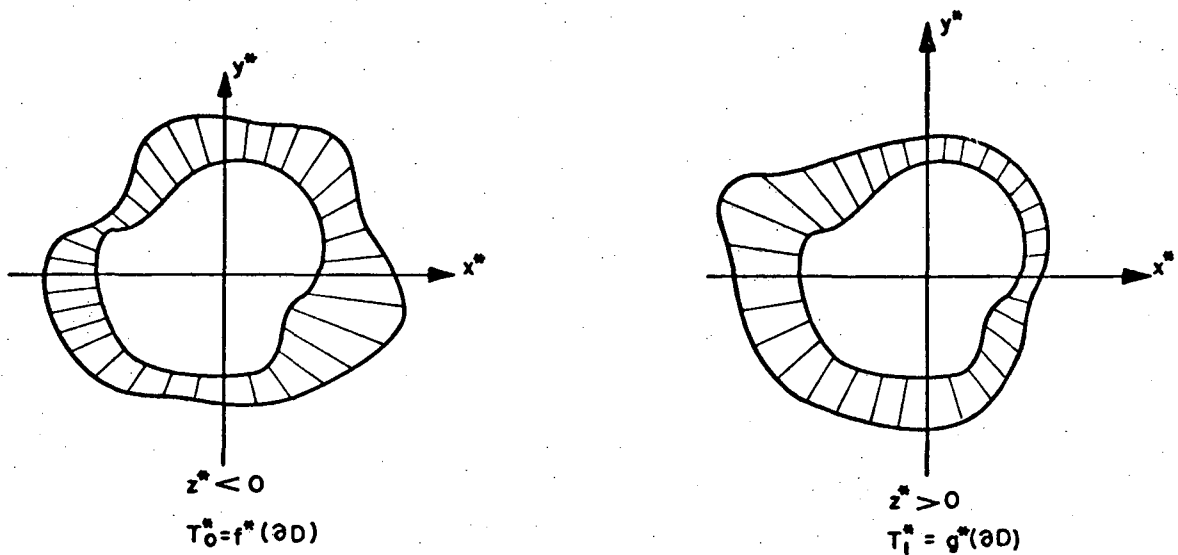


Figura 2

são:

- a) O escoamento é incompressível.
- b) As propriedades termofísicas do fluido são independentes da temperatura.
- c) O escoamento é laminar, unidirecional e estacionário.
- d) Os efeitos da dissipação viscosa são desprezíveis.
- e) O fluido é newtoniano.

Dentre as hipóteses acima, a mais restritiva é a segunda, pois, como se sabe, as propriedades físicas dos fluidos reais normalmente dependem da temperatura. Esta hipótese, no entanto, garante a linearidade das equações envolvidas no problema, simplificando a solução matemática das mesmas.

A hipótese de escoamento laminar restringe o estudo para escoamentos de baixa velocidade, de fluidos de alta viscosidade ou de metais líquidos.



### 3.2 - Equação do movimento

Para que o problema proposto possa ser resolvido, impõe-se, primeiramente, encontrar a distribuição de velocidade do fluido no interior do duto. A equação diferencial que rege o escoamento é a equação de Navier-Stokes, que, de acordo com as hipóteses simplificativas, pode ser escrita da seguinte maneira [3 ]:

$$\nabla^2 v^* = \frac{1}{\mu} \frac{dP^*}{dz^*} \quad (3.1)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}$$

$\mu$  - viscosidade cinemática do fluido

$\frac{dP^*}{dz^*}$  = gradiente de pressão;  $P^* = P^*(z)$

$v^*$  - velocidade dimensional

As condições de contorno que  $v^*(x^*, y^*)$  deve satisfazer são:

$$v^*(x^*, y^*) = 0 \quad \text{para todo ponto } (x^*, y^*) \text{ em } \partial D$$

A equação (3.1) pode ser adimensionalizada, com a utilização das seguintes quantidades adimensionais:

$$v = \frac{v^* \mu}{Dh^{*2}} \frac{dP^*}{dz^*} \quad y = \frac{y^*}{Dh^*} \quad \text{e} \quad x = \frac{x^*}{Dh^*}$$

onde

$$Dh^* = \frac{4(\text{área de } D)}{\text{comprimento de } \partial D}$$

Em consequência, a equação (3.1) adquire a seguinte forma:

$$\nabla^2 v = 1 \quad (3.2)$$

A equação acima é uma equação de Poisson, para a qual existem vários métodos de solução. Para que se tenha conformidade com o formalismo do trabalho, escolheu-se o método variacional.

De acordo com a referência [6], a equação (3.2) pode ser associado o seguinte funcional a ser minimizado:

$$J(v) = \int_D \left[ v + \frac{1}{2} (\nabla v \cdot \nabla v) \right] dA \quad (3.3)$$

Utilizando o método de Ritz [6], pode-se propor a seguinte aproximação de ordem  $n$  para a solução de  $v(x,y)$ :

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x,y) \quad (3.4)$$

onde as funções  $\psi_i(x,y)$  formam uma sequência completa de funções linearmente independentes, uma vez diferenciáveis e se anulam na fronteira  $\partial D$ , isto é:

$$\psi_i(x,y) = 0 \quad \text{quando } (x,y) \text{ pertence a } \partial D \text{ e } i = 1, 2, \dots, n$$

A sequência de funções deve ser completa, pois esta é a condição suficiente para garantir que a solução aproximada, dada por (3.4), resulte aproximações cada vez melhores do mínimo do funcional (3.3), à medida que  $n$  cresce. Assim sendo, as aproximações de ordem  $n$  vão tendendo à solução exata do (3.2), quando  $n \rightarrow \infty$ , [26, 11].

Aplicando (3.4) ao funcional (3.3), resulta:

$$J(v) = \int_D \left[ \sum_{i=1}^n a_i \psi_i + \frac{1}{2} (\nabla(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i) \cdot \nabla(\sum_{j=1}^n a_j \psi_j)) \right] dA \quad (3.5)$$

Para minimizar o funcional (3.5), basta encará-lo como sendo uma função das variáveis  $a_i$  e igualar a zero suas derivadas parciais em relação a estas variáveis. Deste modo,

$$\frac{\partial J}{\partial a_i}(v) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ou, explicitamente,

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} (v) = \int_D (\psi_i + \sum_{j=1}^n a_j \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j) dA = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots(3.6)$$

Como as funções  $\psi_i(x,y)$  são funções diferenciáveis, pode-se alternar o sinal de somatório com o sinal de integração [23], e as equações (3.6) podem ser postas na forma matricial abaixo:

$$[A] \{a\} = -\{b\} \quad (3.7)$$

onde

$$A_{ij} = \int_D \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dA \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$e \quad b_i = \int_D \psi_i dA \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Resolvendo o sistema de equações lineares (3.7), obtêm-se as constantes  $a_i$  e, pela equação (3.4), a distribuição de velocidade  $v(x,y)$ .

### 3.3 - Equação da energia

A equação diferencial que rege o problema proposto na seção 3.1 é a equação da energia, que, com as hipóteses admitidas, adquire a seguinte forma:

$$K \nabla^2 T^* = \rho C_v v^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (3.8)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}$$

K - condutibilidade térmica do fluido

- $\rho$  - peso específico do fluido  
 $C_v$  - calor específico a volume constante do fluido  
 e  $T^*$  - temperatura dimensional

As condições de contorno associadas à equação (3.8) são:

$$T^*(x^*, y^*, z^*) = f^*(x^*, y^*) \quad \text{quando } z < 0 \quad \text{e } (x^*, y^*) \quad \text{em } \partial D$$

$$\text{e } T^*(x^*, y^*, z^*) = g^*(x^*, y^*) \quad \text{quando } z > 0 \quad \text{e } (x^*, y^*) \quad \text{em } \partial D$$

Conforme as referências [7,29] e o apêndice deste trabalho, onde estão apresentados funcionais para a equação da energia, à equação (3.8) e suas condições de contorno, está associado o seguinte funcional:

$$J(T, \hat{T}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_D \left[ \rho \cdot C_v \cdot v^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \hat{T}^* + \frac{K}{2} (\nabla \hat{T}^*)^2 \right] dA dz^* \quad (3.9)$$

onde  $T^*$  é a distribuição de temperatura procurada,  $\hat{T}^* = T^* + \delta \hat{T}^*$ ,  $\delta \hat{T}^*$  é a variação de  $\hat{T}^*$  e  $v^*$  é a distribuição de velocidade previamente conhecida.

As equações (3.8) e (3.9) podem ser adimensionalizadas, escolhendo-se as seguintes quantidades adimensionais:

$$z = \frac{z^*}{Dh^* N_{pe}}, \quad x = \frac{x^*}{Dh^*}, \quad y = \frac{y^*}{Dh^*}$$

$$v = \frac{v^*}{v_m} \quad \text{e} \quad T = \frac{T^* - T_1}{T_0^* - T_1^*}$$

onde

$$T_0^* = \frac{1}{L^*(\partial D)} \int_{\partial D} f^*(x^*, y^*) ds^*$$

$$T_1^* = \frac{1}{L^*(\partial D)} \int_{\partial D} g^*(x^*, y^*) ds^*$$

$L^*(\partial D)$  = comprimento de  $\partial D$

$v_m^*$  = velocidade média do fluido em D

$$e \quad N_{pe} = \frac{v_m^* Dh^* \rho C_v}{K} = N_{re} N_{pr}$$

Fisicamente o número de Péclet é a relação entre a quantidade de calor transmitida por convecção e a quantidade de calor transmitida por condução. Assim sendo, quando o número de Péclet for grande, maior do que 100 segundo Schneider [27], os efeitos de condução axial podem ser desprezados e o problema se torna mais simples, uma vez que o termo  $\partial^2 T^* / \partial z^{*2}$  pode ser desprezado. Nos trabalhos pioneiros sobre os problemas de Graetz, esta hipótese era adotada e os resultados obtidos eram aplicáveis a um número muito restrito de casos, uma vez que é muito difícil um escoamento ter número de Péclet elevado e ser laminar.

As expressões da equação da energia e do funcional associado, após a adimensionalização, adquirem a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{N_{pe}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = v \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.10)$$

$$e \quad J(T, \hat{T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_D \left[ v \frac{\partial T}{\partial z} \hat{T} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{N_{pe}^2} \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right)^2 \right) \right] dA dz \quad \dots (3.11)$$

onde  $T(x,y,z)$  satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$T(x,y,z) = f(x,y) \quad \text{para } z < 0 \quad \text{e } (x,y) \text{ em } \partial D \quad (3.12)$$

$$e \quad T(x,y,z) = g(x,y) \quad \text{para } z > 0 \quad \text{e } (x,y) \text{ em } \partial D$$

A descontinuidade nas condições de contorno em  $z = 0$  não permite que se obtenha a solução de (3.10) pela aplicação direta de (3.11). Contudo, é possível contornar esta dificuldade, dividindo-se o problema a valores de contorno (3.10) com (3.12) em dois problemas distintos - um para  $z > 0$  e outro para  $z < 0$ . Assim sendo, podem ser propostas duas distribuições de temperatura:  $T^+(x,y,z)$  para  $z > 0$  e  $T^-(x,y,z)$  para  $z < 0$ , que devem satisfazer

as seguintes condições de contorno:

$$T^+(x,y,z) = g(x,y) \quad \text{quando } (x,y) \text{ pertence a } \partial D \quad (3.13a)$$

$$T^-(x,y,z) = f(x,y) \quad \text{quando } (x,y) \text{ pertence a } \partial D \quad (3.13b)$$

Fazendo um balanço térmico em  $z = 0$  e lembrando que uma superfície não acumula calor, obtêm-se facilmente as seguintes igualdades para todo ponto  $(x,y)$  interno a  $D$ :

$$T^+(x,y,0) = T^-(x,y,0) \quad (3.13c)$$

$$e \quad \frac{\partial T^+}{\partial z}(x,y,0) = \frac{\partial T^-}{\partial z}(x,y,0) \quad (3.13d)$$

Estas condições são comumente conhecidas como condições de encontro, e juntamente com as (3.13a) e (3.13b) formam o conjunto de condições de contorno que as distribuições de temperatura  $T^+(x,y,z)$  e  $T^-(x,y,z)$  devem satisfazer.

#### 3.4 - Solução variacional - Método direto.

Utilizando o método de Ritz-Galerkin [7,26] podem ser propostas as seguintes aproximações de ordem  $n$  para  $T^+(x,y,z)$  e  $T^-(x,y,z)$ :

$$T^+(x,y,z) = g(x,y) + \sum_{i=1}^n a_i^+(z) \psi_i(x,y) \quad (3.14)$$

$$e \quad T^-(x,y,z) = f(x,y) + \sum_{i=1}^n a_i^-(z) \psi_i(x,y)$$

onde as funções  $a_i^+(z)$  e  $a_i^-(z)$  são funções incôgnitas, a determinar, e as funções  $\psi_i(x,y)$  formam uma sequência completa e linearmente independente, satisfazendo as condições de contorno homogêneas. Estas condições são:

$$\psi_i(x,y) = 0 \quad \text{para } (x,y) \text{ em } \partial D \quad i = 1, 2, \dots, n$$

As funções admissíveis (3.14) variadas são da forma,

$$\hat{T}^+(x,y,z) = g(x,y) + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i^+(z) \psi_i(x,y) \quad (3.15)$$

e

$$\hat{T}^-(x,y,z) = f(x,y) + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i^-(z) \psi_i(x,y)$$

onde

$$\hat{a}_i(z) = a_i(z) + \varepsilon \eta_i(z) \quad (3.16)$$

onde  $\varepsilon$  é um escalar e  $\eta_i(z)$  são variações admissíveis [12] com derivadas contínuas e satisfazem condições homogêneas nos limites de integração em  $z$  do funcional (3.11), quais sejam:

$$\eta_i(-\infty) = \eta_i(0) = \eta_i(\infty) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

O funcional (3.11) pode ser aplicado a cada uma das regiões separadamente, uma vez que o problema original foi decomposto. Deste modo, as expressões (3.14) e (3.15) aplicadas ao funcional primeiramente na região de  $z > 0$ , resultam na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} J(T^+, \hat{T}^+) = & \int_0^{+\infty} \int_D \left[ v \sum_{i=1}^n \dot{\hat{a}}_i^+ \psi_i \left( \sum_{j=1}^n \hat{a}_j^+ \psi_j + g \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \nabla \left( \sum_{i=1}^n \hat{a}_i^+ \psi_i + g \right) \cdot \nabla \left( \sum_{j=1}^n \hat{a}_j^+ \psi_j + g \right) \right) \right] dA dz \quad (3.18) \end{aligned}$$

onde o ponto sobre as funções  $\hat{a}_i^+(z)$  representa a derivação em relação a  $z$ .

Lembrando (3.16) e operando os gradientes, a equação (3.18) pode ser transformada no que segue:

$$\begin{aligned}
J(T^+, \hat{T}^+) = & \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_D [2v \sum_{i,j=1}^n \ddot{a}_i^+ (a_j^+ + \epsilon \eta_j) \psi_i \psi_j + \\
& + 2v \sum_{i=1}^n \ddot{a}_i^+ \psi_i g + \sum_{i,j=1}^n (a_i^+ + \epsilon \eta_i) (a_j^+ + \epsilon \eta_j) \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + \\
& + \sum_{i=1}^n (a_i^+ + \epsilon \eta_i) \nabla \psi_i \cdot \nabla g + \nabla g \cdot \nabla g + \\
& + \frac{1}{N_{pe}^2} \sum_{i,j=1}^n (\dot{a}_i^+ + \epsilon \dot{\eta}_i) (\dot{a}_j^+ + \epsilon \dot{\eta}_j) \psi_i \psi_j] dA dz \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas primeira e segunda do funcional (3.19) em relação a  $\epsilon$  resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon} J(T^+, \hat{T}^+) = & \int_0^\infty \int_D [v \sum_{i,j=1}^n \ddot{a}_i^+ \eta_j \psi_i \psi_j + \frac{1}{N_{pe}^2} \sum_{i,j=1}^n \dot{a}_i^+ \dot{\eta}_j \psi_i \psi_j + \\
& + \sum_{j=1}^n \eta_j \nabla \psi_j \cdot \nabla g + \sum_{i,j=1}^n a_i^+ \eta_j \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + \\
& + \sum_{j=1}^n \epsilon \eta_j^2 (\nabla \psi_j)^2 + \frac{1}{N_{pe}^2} \sum_{j=1}^n \epsilon \eta_j^2 \psi_j^2] dA dz \quad (3.20)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{d^2}{d\epsilon^2} J(T^+, \hat{T}^+) = \int_0^\infty \int_D [\sum_{i=1}^n \eta_i^2 (\nabla \psi_i)^2 + \frac{1}{N_{pe}^2} \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i^2 \psi_i^2] dA dz \quad (3.21)$$

A equação (3.21) mostra claramente que o funcional é minimizado para o extremal aqui considerado, pois o integrando de (3.21) é uma forma quadrática positiva definida em  $\epsilon = 0$ .

Para se encontrar a melhor aproximação da solução dada por (3.14), isto é, aquela que minimiza o funcional, basta igualar a primeira variação do funcional a zero em  $\epsilon = 0$ , ou seja:



$$\frac{d}{d\epsilon} J(T^+, \hat{T}^+) \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad (3.22)$$

Lembrando a expressão (3.16), a equação assume a forma abaixo:

$$\int_0^\infty \int_D \left[ v \sum_{i,j=1}^n \dot{a}_i^+ \eta_j \psi_i \psi_j + \frac{1}{N_{pe}^2} \sum_{i,j=1}^n \dot{a}_i^+ \dot{\eta}_j \psi_i \psi_j + \sum_{j=1}^n \eta_j \nabla \psi_j \cdot \nabla g + \sum_{i,j=1}^n a_i^+ \eta_j \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \right] dA dz = 0 \quad (3.23)$$

Considerando que as funções de (3.23) são integráveis, os sinais de somatório e integração podem ser alternados e a expressão acima adquire a seguinte forma:

$$\int_0^\infty \left[ \sum_{i,j=1}^n \dot{a}_i^+ \eta_j \int_D v \psi_i \psi_j dA + \sum_{i,j=1}^n \dot{a}_i^+ \dot{\eta}_j \int \frac{1}{N_{pe}^2} \psi_i \psi_j dA + \sum_{i,j=1}^n a_i^+ \eta_j \int_D \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dA + \sum_{j=1}^n \eta_j \int_D \nabla \psi_j \cdot \nabla g dA \right] dz = 0 \quad (3.24)$$

Nesta expressão, apenas o segundo termo não apresenta a função  $\eta_j(z)$ , mas sim a sua derivada. Para eliminar este termo, basta lembrar o esquema de integração por partes, qual seja:

$$\int_0^\infty \dot{a}_i^+ \dot{\eta}_j dz = \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dz} (\dot{a}_i^+ \eta_j) - \ddot{a}_i^+ \eta_j \right] dz \quad (3.25)$$

$$\text{ou} \quad \int_0^\infty \dot{a}_i^+ \dot{\eta}_j dz = \dot{a}_i^+ \eta_j \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \ddot{a}_i^+ \eta_j dz \quad (3.26)$$

Como as funções  $\eta_j(z)$  são funções admissíveis, elas são nulas em  $z = 0$  e  $z = \infty$ , ao que sucede o seguinte:

$$\int_0^\infty \dot{a}_i^+ \dot{\eta}_j dz = - \int_0^\infty \ddot{a}_i^+ \eta_j dz \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.24) e trocando o sinal, vem:

$$\int_0^{\infty} \left[ \sum_{i,j=1}^n \ddot{a}_i^+ H_{ij} \eta_j - \sum_{i,j=1}^n \dot{a}_i^+ A_{ij} \eta_j - \sum_{i,j=1}^n a_i^+ B_{ij} \eta_j - \sum_{j=1}^n d_j \eta_j \right] dz = 0 \quad (3.28)$$

onde

$$H_{ij} = \frac{1}{N_{pe}^2} \int_D \psi_i \psi_j \, dA \quad A_{ij} = \int_D v \psi_i \psi_j \, dA$$

$$B_{ij} = \int_D \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dA \quad d_j = \int_D \nabla \psi_j \cdot \nabla g \, dA$$

É interessante notar que as matrizes H, A e B são matrizes gramianas, uma vez que seus termos constituem produtos internos de vetores linearmente independentes e, portanto, são positivas definidas.

Pelo lema fundamental do cálculo variacional [12], dado que as funções  $\eta_j(z)$  são arbitrárias, para que a expressão (3.28) seja satisfeita, a seguinte igualdade deve ser satisfeita:

$$\sum_{i=1}^n \ddot{a}_i^+ H_{ij} - \sum_{i=1}^n \dot{a}_i^+ A_{ij} - \sum_{i=1}^n a_i^+ B_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \dots(3.29)$$

que é equivalente à forma matricial abaixo:

$$[H] \{\ddot{a}^+\} - [A] \{\dot{a}^+\} - [B] \{a^+\} = \{d\} \quad (3.30)$$

A expressão (3.30) é um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneo. A solução geral deste sistema é composta pela solução do sistema homogêneo correspondente, mais uma solução particular, que no caso pode ser facilmente encontrada. Dado que os coeficientes de (3.30) são constantes, também a solução particular será um vetor constante. A solução particular, em consequência, pode ser calculada a partir da equação seguinte:

$$-[B] \{b^+\} = \{d\} \quad (3.31)$$

onde  $\{b^+\}$  é a solução particular.

Para se encontrar a solução particular, basta multiplicar (3.31) pela matriz inversa de B, resultando então:

$$\{b^+\} = -[B]^{-1} \{d\} \quad (3.32)$$

Para se obter a solução homogênea, pode ser utilizado o procedimento proposto em [22]. Para tanto, toma-se a seguinte expressão para solução do sistema homogêneo [15]:

$$\{a^+\} = \{C^+\} e^{\lambda z} \quad (3.33)$$

Colocando (3.33) no equivalente homogêneo de (3.30), obtêm-se o seguinte problema espectral no  $R^n$ :

$$\lambda^2 [H] \{C^+\} - \lambda [A] \{C^+\} - [B] \{C^+\} = \{0\} \quad (3.34)$$

Conforme pode ser visto na referência [22], este problema é equivalente ao problema espectral no  $R^{2n}$  abaixo:

$$\lambda [R] \{Y^+\} - [S] \{Y^+\} = \{0\} \quad (3.35)$$

onde

$$[R] = \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [0] \end{bmatrix}$$

e

$$\{Y^+\} = \begin{Bmatrix} \lambda \{C^+\} \\ \{C^+\} \end{Bmatrix}$$

A matriz R, conforme pode ser facilmente provado, é uma matriz positiva definida uma vez que é composta em blocos, na diagonal, pelas matrizes gramianas H e B. Assim sendo, o problema de autovalores (3.35) pode ser posto na forma canônica, pois é possível encontrar uma matriz Q ortogonal no espaço  $R^{2n}$ , tal que:

$$[Q]^T [R] [Q] = [I] \quad (3.36)$$

e

$$[Q]^T = [Q]^{-1}$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade e  $Q^T$  é a transposta de  $Q$ .

Aplicando as matrizes  $Q$  e  $Q^T$  na expressão (3.31), vem

$$[\lambda[I] - [Q]^T [S] [Q]] [Q]^T \{Y^+\} = \{0\} \quad (3.37)$$

Para que este problema de auto-valores não apresente apenas a solução trivial, a seguinte igualdade deve se verificar:

$$\det [\lambda[I] - [Q]^T [S] [Q]] = 0 \quad (3.38)$$

A equação (3.38) pode ser resolvida pelos métodos convencionais [5] e apresenta  $2n$  autovalores e  $2n$  auto-vetores reais, uma vez que a matriz do problema é real e simétrica. Se estes auto-vetores forem denotados de  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , então os vetores  $Y_i^+$  são obtidos da expressão seguinte:

$$\{Y_i^+\} = [Q] \{X_i\} \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.39)$$

O problema espectral (3.38) tem  $2n$  auto-valores,  $n$  dos quais são positivos e  $n$  são negativos, dado que a matriz envolvida é real e simétrica.

Como a solução de (3.30) deve ser finita em  $z = \infty$ , somente os auto-valores negativos com os correspondentes auto-vetores podem ser admitidos na solução.

Lembrando que,

$$\{Y_i^+\} = \begin{Bmatrix} \lambda \{C_i^+\} \\ \{C_i^+\} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.40)$$

os auto-vetores do problema (3.34) podem ser obtidos e a solução homogênea de (3.30) será uma combinação linear destes auto-vetores, aplicados às funções  $e^{\lambda_i z}$ . Desta forma tem-se que,

$$\{a^+\} = \sum_{i=1}^n A_i^+ \{C_i^+\} e^{\lambda_i^+ z} \quad (3.41)$$

onde os  $\lambda_i^+$  são os auto-valores negativos.

Somando a solução particular (3.32) com a solução homogênea (3.41), obtêm-se a solução completa de (3.30), qual seja:

$$\{a^+\} = \sum_{i=1}^n A_i^+ \{C_i^+\} e^{\lambda_i^+ z} + \{b_i\} \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.14), obtêm-se a distribuição de temperatura  $T^+(x,y,z)$ , que adquire a seguinte forma explícita:

$$T^+(x,y,z) = g(x,y) + \sum_{j=1}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+ z} \sum_{i=1}^n C_{ij}^+ \psi_i(x,y) + \sum_{i=1}^n b_i^+ \psi_i(x,y) \quad \dots(3.43)$$

onde  $C_{ij}^+$  é elemento da matriz  $C^+$ , constituída pelas colunas correspondentes aos auto-vetores  $\{C^+\}$  e os coeficientes  $A_j^+$  são desconhecidos.

Procedendo de maneira análoga a partir de (3.18), pode ser obtida a expressão de  $T^-(x,y,z)$ , que toma a seguinte forma:

$$T^-(x,y,z) = f(x,y) + \sum_{j=1}^n A_j^- e^{\lambda_j^- z} \sum_{i=1}^n C_{ij}^- \psi_i(x,y) + \sum_{i=1}^n b_i^- \psi_i(x,y) \quad \dots(3.44)$$

onde, neste caso, os auto-valores são os auto-valores positivos do problema (3.34) e  $C_{ij}^-$  é elemento da matriz  $C^-$  que possui, nas colunas, os auto-vetores correspondentes aos auto-valores positivos.

Para completar a solução, resta encontrar os valores dos coeficientes  $A_j^+$  e  $A_j^-$ . Para tanto, devem ser utilizadas as condições de encontro (3.13c) e (3.13d). Substituindo as expressões de  $T^+(x,y,z)$  e  $T^-(x,y,z)$ , dadas por (3.43) e (3.44) respectivamente, nestas condições, vem,

$$g + \sum_{i=1}^n b_i^+ \psi_i + \sum_{j=1}^n A_j^+ \sum_{i=1}^n C_{ij}^+ \psi_i = f + \sum_{i=1}^n b_i^- \psi_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^n A_j^- \sum_{i=1}^n C_{ij}^- \psi_i \quad (3.45)$$

$$e \quad \sum_{j=1}^n A_j^+ \lambda_j^+ \sum_{i=1}^n C_{ij}^+ \psi_i = \sum_{j=1}^n A_j \lambda_j \sum_{i=1}^n C_{ij} \psi_i$$

As funções  $g(x,y)$  e  $f(x,y)$  podem ser expandidas, em termos das funções  $\psi_i(x,y)$ , pelo método dos resíduos ponderados [7]. Para tanto, admite-se que,

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^n \ell_i^+ \psi_i(x,y) \quad (3.46)$$

Multiplicando esta expressão por  $-\nabla^2 \psi_j$ , vem:

$$-g \nabla^2 \psi_j = - \sum_{i=1}^n \ell_i^+ \psi_i \nabla^2 \psi_j \quad (3.47)$$

Integrando (3.47) em D, resulta

$$- \int_D g \nabla^2 \psi_j \, dA = \sum_{i=1}^n \ell_i^+ \int_D -\psi_i \nabla^2 \psi_j \, dA \quad (3.48)$$

Lembrando que

$$- \int \psi_i \nabla^2 \psi_j \, dA = \int \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dA = B_{ij} \quad (3.49)$$

vem

$$f_j = \sum_{i=1}^n \ell_i^+ B_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.50)$$

onde

$$f_j = - \int_D g \nabla^2 \psi_j \, dA$$

A expressão (3.47), colocada na forma matricial,

resulta

$$\{f\} = [B] \{\ell^+\} \quad (3.51)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, os coeficientes  $\ell_i^+$  podem ser obtidos e, de maneira análoga, os coeficientes  $\ell_i^-$ .

Desta forma, as expressões (3.45) são equivalentes ao que segue:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \ell_i^+ \psi_i + \sum_{i=1}^n b_i^+ \psi_i + \sum_{j=1}^n A_j^+ \sum_{i=1}^n C_{ij}^+ \psi_i = \sum_{i=1}^n \ell_i^- \psi_i + \\ + \sum_{i=1}^n b_i^- \psi_i + \sum_{j=1}^n A_j^- \sum_{i=1}^n C_{ij}^- \psi_i \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$e \quad \sum_{j=1}^n A_j^+ \lambda_j^+ \sum_{i=1}^n C_{ij}^+ \psi_i = \sum_{j=1}^n A_j^- \lambda_j^- \sum_{i=1}^n C_{ij}^- \psi_i$$

Como as funções  $\psi_i(x,y)$  são linearmente independentes, os coeficientes de (3.52) devem ser iguais. Então, tem-se:

$$\ell_i^+ + b_i^+ + \sum_{j=1}^n A_j^+ C_{ij}^+ = \ell_i^- + b_i^- + \sum_{j=1}^n A_j^- C_{ij}^- \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.53)$$

$$e \quad \sum_{j=1}^n A_j^+ \lambda_j^+ C_{ij}^+ = \sum_{j=1}^n A_j^- \lambda_j^- C_{ij}^- \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ou, na forma vetorial,

$$\{\ell^+\} + \{b^+\} + \sum_{j=1}^n A_j^+ \{C_j^+\} = \{\ell^-\} + \{b^-\} + \sum_{j=1}^n A_j^- \{C_j^-\} \quad (3.54)$$

$$e \quad \sum_{j=1}^n A_j^+ \lambda_j^+ \{C_j^+\} = \sum_{j=1}^n A_j^- \lambda_j^- \{C_j^-\}$$

As equações (3.54) podem ser reunidas numa única equação no espaço  $2n$ -dimensional [7]. Para tanto basta fazer

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\ell^-\} + \{b^-\} - \{\ell^+\} - \{b^+\} \end{Bmatrix}$$

$$e \quad \{Y_j^\pm\} = \begin{Bmatrix} \lambda_j \{C_j^\pm\} \\ \{C_j^\pm\} \end{Bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

e, então, as expressões (3.54) são equivalentes ao que segue:

$$\sum_{j=1}^n A_j^+ \{Y_j^+\} = \{v\} + \sum_{j=1}^n A_j^- \{Y_j^-\} \quad (3.55)$$

Os vetores  $Y_j^\pm$ , sendo soluções do problema de auto-valores (3.35), são ortonormais em relação à matriz R, uma vez que as matrizes deste problema são simétricas. Portanto, multiplicando (3.35) por R e por  $Y_j^+$  e  $Y_j^-$ , vem

$$A_j^- = -\{v\}^T [R] \{Y_j^-\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.56)$$

$$e \quad A_j^+ = \{v\}^T [R] \{Y_j^+\} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Substituindo as expressões de R e  $Y_j^+$  na equação de  $A_j^+$ , resulta a seguinte expressão:

$$A_j^+ = \{v\}^T [R] \{Y_j^+\} = \{v\}^T \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_j^+ \{C_j^+\} \\ \{C_j^+\} \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

ou

$$A_j^+ = \{v\}^T \begin{Bmatrix} \lambda_j^+ [H] \{C_j^+\} \\ [B] \{C_j^+\} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Fazendo os produtos matriciais, obtêm-se o seguinte:



$$A_j^+ = \sum_{i,k=1}^n (\ell_i^- + b_i^- - \ell_i^+ - b_i^+) B_{ik} C_{kj}^+ \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.59)$$

De maneira análoga, é possível obter a seguinte expressão para os coeficientes  $A_j^-$ :

$$A_j^- = -\sum_{i,k=1}^n (\ell_i^- + b_i^- - \ell_i^+ - b_i^+) B_{ik} C_{kj}^- \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.60)$$

Desta forma, todos os coeficientes das equações (3.43) e (3.44) são conhecidos e conseqüentemente também as distribuições de temperatura.

### 3.5 - Número de Nusselt

Do ponto de vista de aplicação, mais importante que a distribuição de temperatura, é a distribuição do número de Nusselt ao longo do duto. O número de Nusselt, fisicamente, é interpretado como sendo a relação entre o gradiente térmico próximo à parede do sólido e diferença entre as temperaturas de superfície e de mistura. Como o calor trocado é proporcional ao gradiente térmico próximo à parede, quando maior o número de Nusselt, maior é o calor trocado, para uma mesma diferença entre as temperaturas de superfície e de mistura [26].

Por definição, o número de Nusselt é definido pela seguinte equação:

$$Nu = \frac{h Dh^*}{K} \quad (3.61)$$

onde  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção. Desse modo, com o conhecimento do número de Nusselt, é possível obter o coeficiente  $h$ , que é o fator mais importante em termos de projeto.

De um balanço de calor para um certo ponto do duto, vem

$$h(T_{sm}^* - T_b^*) = K \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \quad (3.62)$$

onde  $T_s^*(x, y, z)$  é a temperatura da superfície do duto e  $T_b^*(z)$  é a temperatura média de mistura, definida por

$$T_b^*(z) = \frac{\int_D v^*(x^*, y^*) T^*(x^*, y^*, z^*) dA}{\int_D v^*(x^*, y^*) dA} \quad (3.63)$$

Aplicando em (3.61) a adimensionalização utilizada anteriormente, vem,

$$h(T_{sm} - T_b) = \frac{K}{Dh^*} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (3.64)$$

ou, rearranjando e lembrando (3.61),

$$Nu = \frac{\partial T / \partial n}{T_{sm} - T_b} \quad (3.65)$$

Integrando (3.65) em  $\partial D$ , pode-se obter o número de Nusselt médio, função de  $z$ , como segue:

$$Nu(z) = \frac{1}{L(\partial D)} \int_{\partial D} \frac{\partial T / \partial n}{T_{sm} - T_b} ds \quad (3.66)$$

### 3.6 - Aplicação

Para aplicação do método proposto, foi escolhido o problema de Graetz de temperatura prescrita num duplo-tubo mantido a uma temperatura  $T_0$  em  $z < 0$  e a uma outra temperatura  $T_1$  em  $z > 0$ . A figura 3 mostra esquematicamente este problema.

Esta geometria foi escolhida por várias razões. A primeira delas é que ela é muito utilizada em trocadores de calor e condensadores. Outra razão é a comparação de resultados. Para relações de raio próximas da unidade, o duplo tubo comporta-se como placas planas, para as quais existem soluções e dados disponíveis

na literatura.

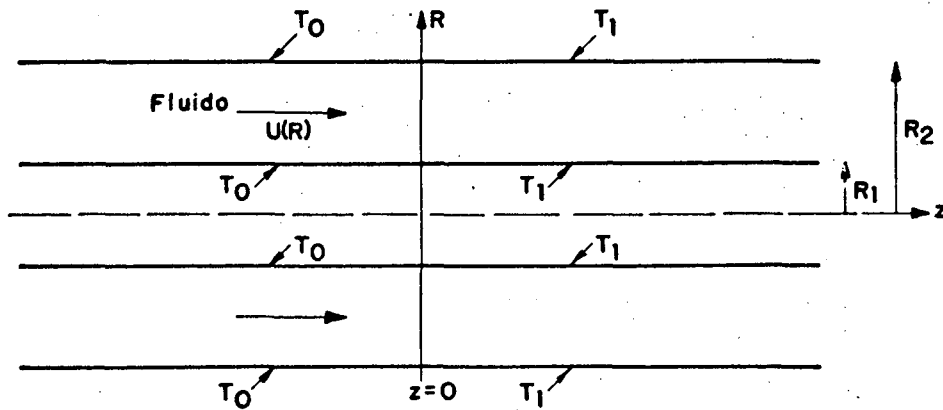


Figura 3

Outra conveniência desta geometria é que o problema pode ser analisado em coordenadas cilíndricas. Assim sendo, as equações do movimento e da energia se transformam no que segue:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) = \frac{1}{\mu^*} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \quad (3.67)$$

$$e \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} = \frac{\rho C_V}{K} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} v^* \quad (3.68)$$

Utilizando a adimensionalização proposta anteriormente, qual seja,

$$r = \frac{r^*}{Dh^*}, \quad z = \frac{z^*}{Dh^* N_{pe}}, \quad v = \frac{v^*}{v_m^*}$$

$$e \quad T = \frac{T^* - T_1}{T_0 - T_1} \quad \text{onde } Dh = 2(R_2 - R_1)$$

a equação (3.68) adquire a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{N_{pe}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = v \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.69)$$

com as condições de contorno

$$T(r_i, z) = T(r_e, z) = 1 \quad \text{para } z < 0$$

e

$$T(r_i, z) = T(r_e, z) = 0 \quad \text{para } z > 0$$

onde

$$r_i = \frac{R1}{Dh^*} \quad \text{e} \quad r_e = \frac{R2}{Dh^*}$$

Para a equação (3.67) aplicada ao problema do duplo-tubo, tem-se disponível a solução analítica [3], que apresenta a seguinte forma adimensional:

$$v(r) = \frac{2}{C2} \{1 - (2(1 - \sigma)r)^2 + C1 \ln (2(1 - \sigma)r)\} \quad (3.70)$$

onde

$$\sigma = R1/R2$$

$$C1 = (1 - \sigma^2)/\ln (1/\sigma) \quad \text{e} \quad C2 = (1 - \sigma^4)/(1 - \sigma^2) - C1$$

As aproximações de ordem n para as distribuições de temperatura são as seguintes:

$$T^+(r, z) = \sum_{i=1}^n a_i^+(z) \psi_i(r)$$

e

$$T^-(r, z) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^-(z) \psi_i(r)$$

onde a sequência de funções que satisfaz as condições de contorno, escolhida neste trabalho, é:

$$\{\psi_i(r) \mid \psi_i(r) = \text{sen} \left( \frac{i\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

pois é fácil de ver que as funções  $\psi_i(r)$  se anulam em  $r = r_i$  e  $r = r_e$ .

Neste caso o sistema de equações diferenciais (3.30) se transforma no sistema homogêneo abaixo:

$$[H] \{\ddot{a}^+\} - [A] \{\dot{a}^+\} - [B] \{a^+\} = \{0\} \quad (3.71)$$

onde

$$H_{ij} = \int_{r_i}^r e^{\dots} \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) r \, dr$$

$$A_{ij} = \int_{r_i}^r e^{\dots} v(r) \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) r \, dr$$

$$e \quad B_{ij} = \frac{ij\pi^2}{(\ln(1/\sigma))^2} \int_{r_i}^r e^{\dots} \cos \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) \cos \left( \frac{j\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) \frac{dr}{r}$$

Sistema idêntico ao (3.71) é válido para a região de  $z < 0$ . Conforme visto anteriormente, a estes sistemas está associado o seguinte problema de auto-valores:

$$\det \left[ \lambda [I] - [Q]^T [S] [Q] \right] = 0 \quad (3.72)$$

onde

$$[S] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [0] \end{bmatrix}$$

e  $Q$  é uma matriz cujas colunas constituem uma base de vetores ortogonais em relação à matriz  $R$ , sendo que

$$[R] = \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix}$$

Neste trabalho utilizou-se o método de Gram-Schmith para a obtenção da matriz  $Q$ , enquanto que o método de Jacobi foi utilizado para a determinação simultânea dos auto-valores e auto-vetores.

res de (3.72), a exemplo de [7].

Pelas equações (3.39) e (3.40) são obtidos os auto-vetores de (3.71), que, aplicados nas expressões das constantes  $A_j^+$  e  $A_j^-$ , resultam:

$$A_j^+ = \sum_{i,k=1}^n \ell_i^- B_{ik} C_{kj}^+ \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.73)$$

$$e \quad A_j^- = - \sum_{i,k=1}^n \ell_i^- B_{ik} C_{kj}^- \quad j = 1, 2, \dots, n$$

onde

$$\{\ell^-\} = [B]^{-1} \{f\}$$

$$e \quad f_i = \int_{r_i}^r e^{\left(\frac{i\pi}{\ln(1/\sigma)}\right)^2 \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)}} \frac{dr}{r}$$

Neste caso particular, as equações das distribuições de temperatura adquirem as seguintes formas:

$$T^+(r, z) = \sum_{j=1}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+ z} \sum_{i=1}^n C_{ij}^+ \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) \quad (3.74)$$

$$e \quad T^-(r, z) = 1 + \sum_{j=1}^n A_j^- e^{\lambda_j^- z} \sum_{i=1}^n C_{ij}^- \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right)$$

A expressão do número de Nusselt, dada por (3.66), adquire a forma abaixo:

$$\text{Nu} = \frac{\sigma \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_i} - \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e}}{(1 + \sigma)(T_b - T_s)}$$

onde  $T(r, z)$  é dado por (3.74),  $T_s = 1$  em  $z < 0$  e  $T_s = 0$  em  $z > 0$ .

### 3.7 - Discussão de resultados

Um fator importante na precisão dos resultados do problema é o número  $n$  de funções da sequência, utilizadas na expansão da solução. É claro que, à medida que  $n$  cresce, melhora a precisão da solução, mas também aumenta o tempo de computação para resolução do problema. Portanto, é necessário tomar um compromisso entre precisão e tempo de computação. Para grandezas médias, como temperatura de mistura e temperatura média, um pequeno número de funções, quatro ou cinco, por exemplo, é suficiente para se obter bons resultados. Já para grandezas locais, como número de Nusselt e temperatura, é necessário um número maior de funções.

Neste trabalho, foram utilizadas dez funções na expansão para obtenção dos números de Nusselt e temperatura de mistura. Para o campo de temperatura foram utilizadas doze funções.

O número de Nusselt em função de  $z$  para vários números de Péclet em duplo-tubos com relações de raio de  $\sigma = 0,2$ ,  $\sigma = 0,5$  e  $\sigma = 0,8$  são mostrados nas figuras 4, 5 e 6, respectivamente.

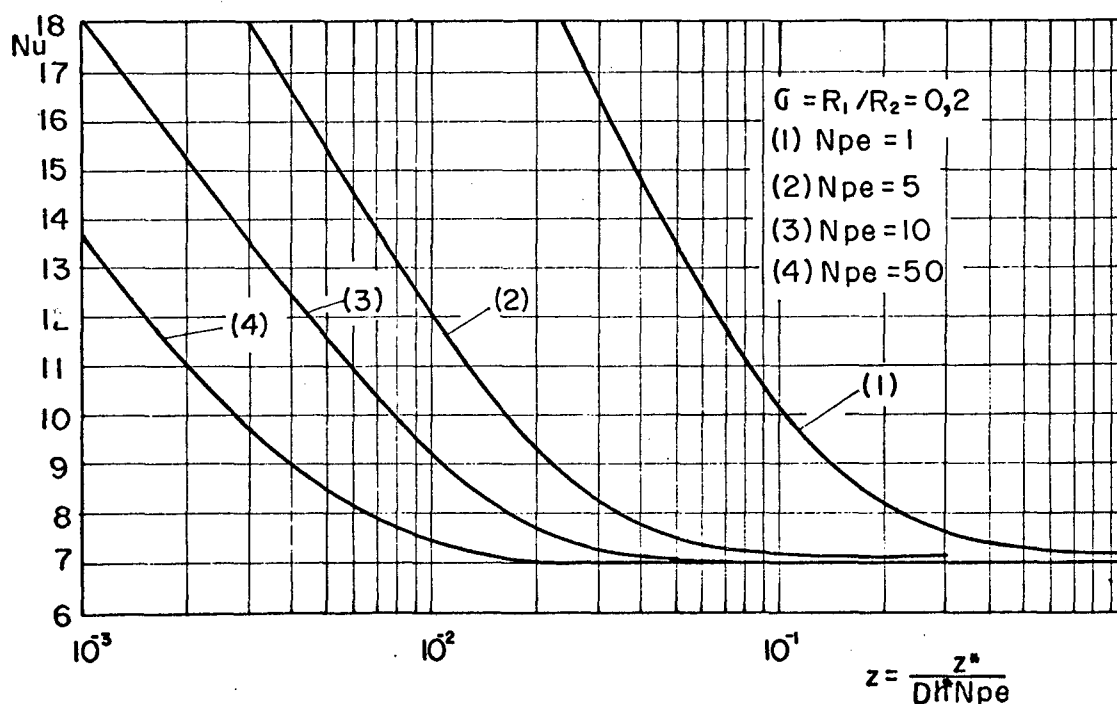


Fig. 4 - Números de Nusselt para duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,2$  e vários  $N_{pe}$ .

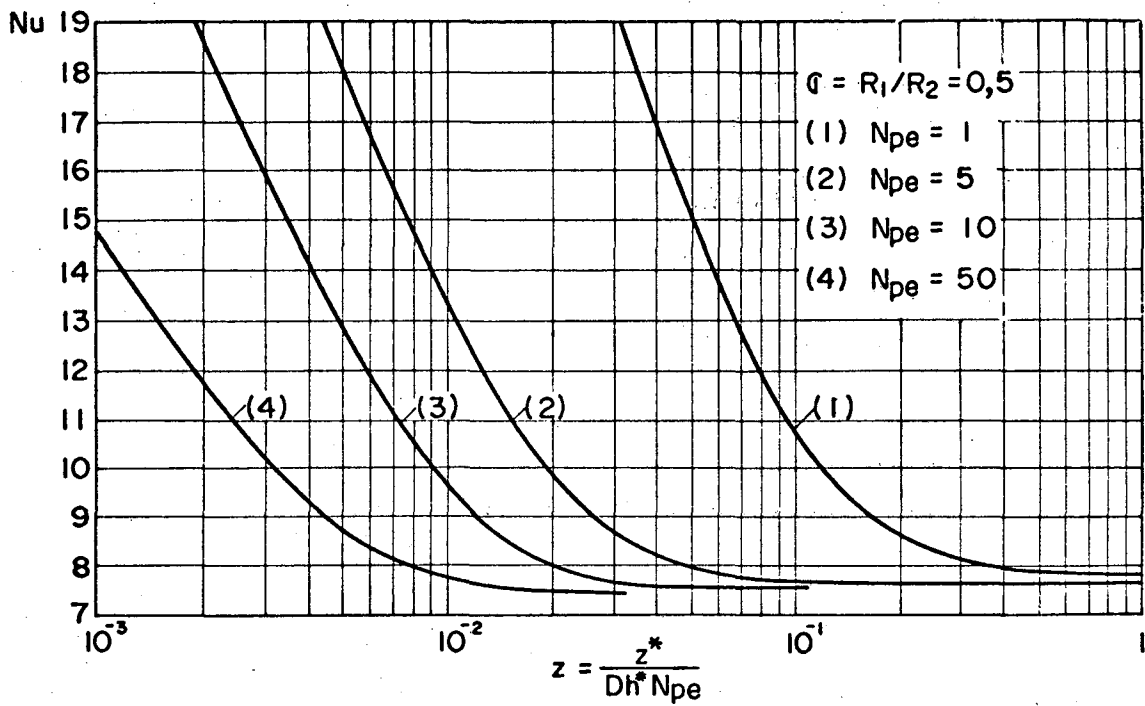


Fig. 5 - Números de Nusselt para duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,5$  e vários  $N_{pe}$ .

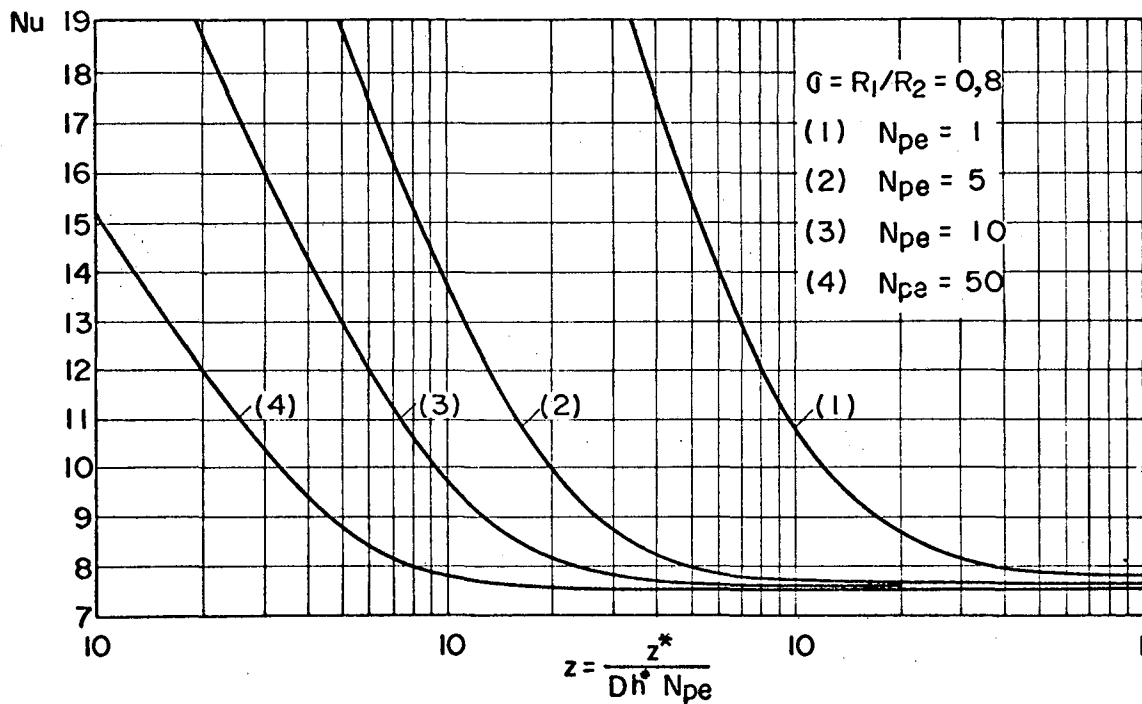


Fig. 6 - Números de Nusselt para duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,8$  e vários  $N_{pe}$ .



A figura 7 mostra a distribuição da temperatura de mistura ao longo de um duplo-tubo com  $\sigma = 0,5$ , para vários números de Péclet. Pode-se notar que, à medida que  $N_{pe}$  diminui, as curvas ficam menos inclinadas, caracterizando um aumento na penetração da temperatura do lado de  $z > 0$  contra o fluxo do fluido, devido ao efeito crescente da condução axial.

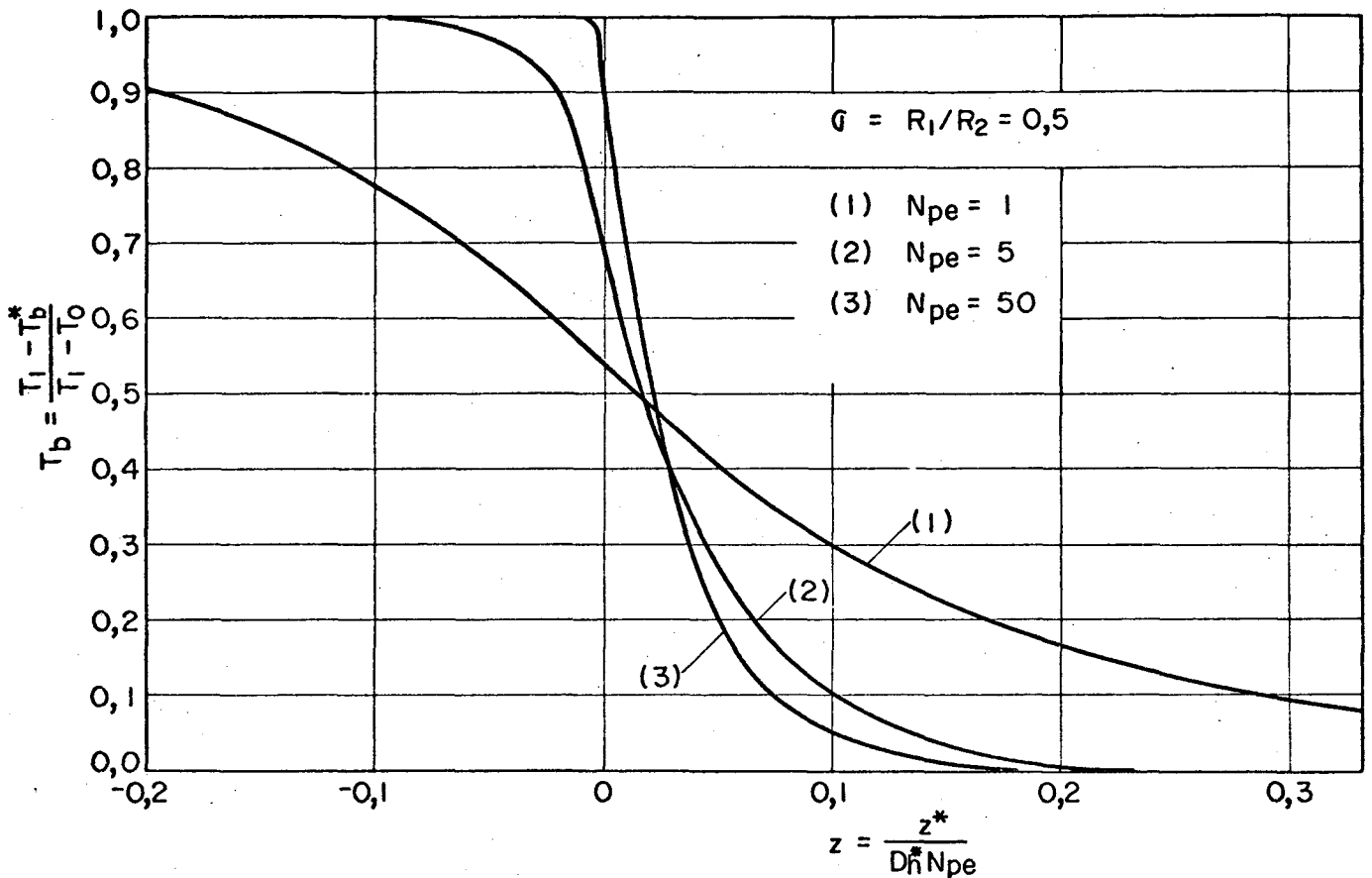


Fig. 7 - Temperatura média de mistura para duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,5$  e vários  $N_{pe}$ .

A figura 8 mostra um campo de isotermas num duplo-tubo com  $\sigma = 0,5$  e  $N_{pe} = 3,0$ . Pode-se observar o efeito do fluxo do fluido, "empurrando" as isotermas na direção do movimento, de maneira diferenciada, de acordo com a velocidade, causando inflexões nas isotermas maiores que 0,5. Também é interessante notar o crescimento dos gradientes térmicos, à medida que  $z$  se aproxima de zero. Este efeito é devido à descontinuidade nas paredes do duplo-tubo em  $z = 0$ .

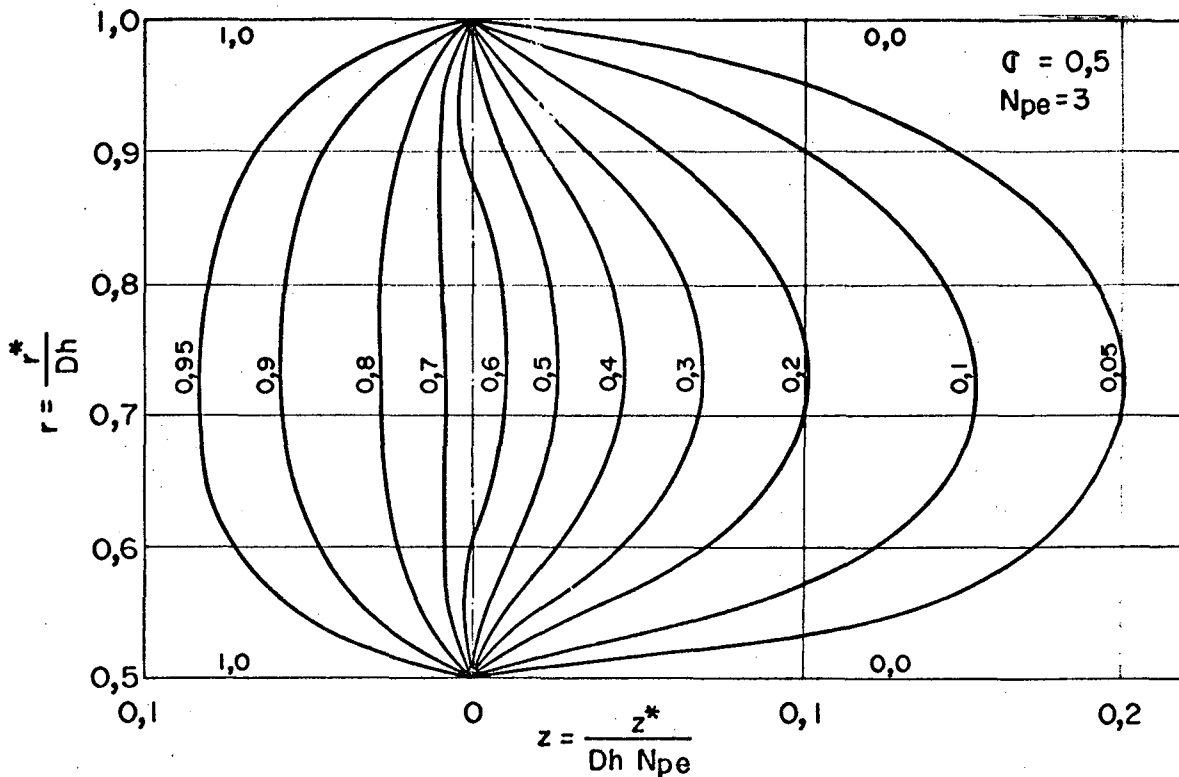


Fig. 8 - Campo de isothermas em duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,5$  e  $N_{pe} = 3,0$ .

Conforme foi dito anteriormente, um duplo-tubo com relação próxima da unidade poderia se aproximar ao caso de placas planas. Isto foi feito na obtenção de dados para comparação com outros trabalhos. Admitiu-se que uma relação de raios  $\sigma = 0,95$  daria uma boa aproximação de placas-planas.

Agrawal [ 1 ] resolveu analiticamente o problema de Graetz com condução axial, isto é, com pequenos números de Péclet, entre placas paralelas. Os resultados aqui obtidos se aproximam razoavelmente dos dados de [ 1 ]. As tabelas 1 e 2 mostram a comparação entre os auto-valores apresentados em [ 1 ] e os obtidos no presente trabalho.

As tabelas 3 e 4 mostram as comparações das temperaturas médias de mistura para vários valores de  $z$  e  $N_{pe} = 4,0$ . Os valores numéricos apresentados nessa tabela foram interpolados graficamente a partir de dados de [ 1 ].

n	Auto-valores	
	Variacional	Agrawal
1	37,57119	37,5776
3	84,15573	84,1552
5	134,06384	134,0656
7	184,19751	184,1984
9	234,40035	234,5120

Tabela 1 - Comparação entre os auto-valores para  $N_{pe} = 4,0$  e  $z < 0$ .

n	Auto-valores	
	Variacional	Agrawal
1	-16,76546	-16,7664
3	-67,59085	-67,5856
5	-117,85724	-117,8576
7	-168,09144	-168,0928
9	-218,33280	-218,4320

Tabela 2 - Comparação entre os auto-valores para  $N_{pe} = 4,0$  e  $z > 0$ .

z	Temperatura média de mistura	
	Variacional	Agrawal
-0,01	0,7725	0,774
-0,05	0,949	0,944
-0,1	0,9922	0,9902
$-\infty$	1	1

Tabela 3 - Comparação das temperaturas médias de mistura para  $N_{pe} = 4,0$  e  $z < 0$ .

z	Temperatura média de mistura	
	Variacional	Agrawal
0,01	0,560	0,564
0,05	0,2831	0,285
0,1	0,1222	0,12
$\infty$	0,0	0,0

Tabela 4 - Comparação das temperaturas médias de mistura para  $N_{pe} = 4,0$  e  $z > 0$ .

As tabelas 5 e 6 mostram comparações entre os números de Nusselt para  $N_{pe} = 4,0$  e vários valores de  $z$ . Também nestes casos, os valores apresentados foram obtidos por interpolação gráfica.

z	Números de Nusselt	
	Variacional	Agrawal
-0,01	26,275	26,96
-0,05	10,167	10,167
-0,1	9,016	9,35
$-\infty$	8,902	8,8

Tabela 5 - Comparação entre números de Nusselt para  $N_{pe} = 4,0$  e  $z < 0$ .

z	Números de Nusselt	
	Variacional	Agrawal
0,01	16,264	15,944
0,05	8,308	8,552
0,1	7,829	7,896
$\infty$	7,792	7,796

Tabela 6 - Comparação entre números de Nusselt para  $N_{pe} = 4,0$  e  $z > 0$ .

Como se pode notar nas tabelas de 1 a 6, houve uma boa concordância entre os valores obtidos no presente trabalho e os valores obtidos em [11]. As pequenas diferenças observadas parecem ser devidas ao fato de que Agrawal só utilizou os primeiros 5 auto-valores ímpares na expansão da solução. A admissão de que  $\sigma = 0,95$  aproxima as placas planas e as diferenças intrínsecas dos métodos utilizados, também são responsáveis por estas diferenças.

#### IV - PROBLEMA DE GRAETZ - FLUXO PRESCRITO

##### 4.1 - Formulação do problema

O problema de Graetz com fluxo prescrito, à semelhança do problema anterior, também trata de um escoamento sujeito à descontinuidade nas condições de contorno. Desta vez, porém, a descontinuidade ocorre na distribuição do fluxo térmico e não na distribuição da temperatura. Este problema pode ser enunciado como segue:

Seja o mesmo escoamento proposto na seção 3.1 sujeito às seguintes condições de contorno:

$$T^*(x^*, y^*, -\infty) = T_0^*$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right|_{\partial D} = 0 \quad \text{para } z^* < 0$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right|_{\partial D} = f^*(x^*, y^*) \quad \text{para } z^* > 0 \quad (4.1)$$

Deseja-se encontrar a distribuição de temperatura e os parâmetros de troca de calor. As hipóteses admitidas são as mesmas de 3.1, e a solução do escoamento é a mesma de 3.2.

##### 4.2 - Equação da energia

A equação da energia para o problema proposto, de acordo com as hipóteses adotadas, toma a seguinte forma:

$$K \nabla^2 T^* = \rho C_V v^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (4.2)$$

onde  $T^*(x^*, y^*, z^*)$  satisfaz as condições de contorno (4.1).

Conforme pode ser visto no apêndice e nas referências [7, 29], a equação (4.2) e suas condições de contorno está associada

do o seguinte funcional:

$$\begin{aligned}
 J(T^*, \hat{T}^*) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial D} \left[ \rho C_V v^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \hat{T}^* + \frac{K}{2} (\nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \hat{T}^*) \right] dA dz^* - \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial D} K \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \hat{T}^* ds^* dz^* \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Utilizando as adimensionalizações usuais para problemas de fluxo prescrito [14, 2], quais sejam

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{z^*}{Dh^* N_{pe}}, & x &= \frac{x^*}{Dh^*}, & y &= \frac{y^*}{Dh^*} \\
 v &= \frac{v^*}{v_m^*} \quad e & T &= \frac{(T^* - T_0^*)K}{Dh^* Q}
 \end{aligned}$$

onde

$$Q = \frac{1}{L^*(\partial D)} \int_{\partial D} K f^*(x^*, y^*) ds^* \quad (4.4)$$

as expressões (4.2) e (4.3) adquirem as seguintes formas, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{N_{pe}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = v \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned}
 J(T, \hat{T}) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial D} \left[ v \frac{\partial T}{\partial z} \hat{T} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{1}{N_{pe}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right)^2 \right) \right] dA dz - \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial D} \frac{\partial T}{\partial n} \hat{T} ds dz \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

As condições de contorno também se alteram com a adimensionalização como segue:

$$T(x, y, -\infty) = 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0 \quad \text{para } z < 0$$

$$\text{e} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial D} = f(x, y) \quad \text{para } z > 0 \quad (4.7)$$

Devido à descontinuidade nas condições de contorno, o problema pode ser considerado como equivalente a dois problemas a valores de contorno distintos. Deste modo, podem ser admitidas duas distribuições de temperatura,  $T^+(x, y, z)$  para  $z > 0$  e  $T^-(x, y, z)$  para  $z < 0$ . Estas distribuições devem satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$T^-(x, y, -\infty) = 0$$

$$\left. \frac{\partial T^-}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad \left. \frac{\partial T^+}{\partial n} \right|_{\partial D} = f(x, y)$$

$$T^+(x, y, 0) = T^-(x, y, 0)$$

$$\text{e} \quad \left. \frac{\partial T^+}{\partial z} \right|_{(x, y, 0)} = \left. \frac{\partial T^-}{\partial z} \right|_{(x, y, 0)}$$

#### 4.3 - Solução variacional - Método direto.

Em analogia ao caso anterior, utilizando o método de Ritz-Galerkin, podem ser propostas as seguintes aproximações de ordem  $n$  para  $T^+(x, y, z)$  e  $T^-(x, y, z)$ :

$$T^-(x, y, z) = \sum_{i=0}^n a_i^-(z) \psi_i(x, y)$$

(4.8)

$$\text{e} \quad T^+(x, y, z) = Cz + g(x, y) + \sum_{i=0}^n a_i^+(z) \psi_i(x, y)$$



onde  $a_i^+(z)$  e  $a_i^-(z)$  são funções incógnitas a determinar e as funções  $\psi_i(x,y)$  formam uma sequência completa de funções linearmente independentes. As condições de contorno que estas funções devem satisfazer são as seguintes:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial n} (x,y) \Big|_{\partial D} = 0 \quad i = 0,1,2,\dots,n$$

Uma das funções desta sequência é a função constante, que pode, sem perda de generalidade, ser admitida unitária. No presente trabalho, esta função unitária é denominada  $\psi_0(x,y)$ .

A função  $g(x,y)$ , que aparece na expressão de  $T^+(x,y,z)$ , serve para garantir a condição de fluxo prescrito e deve ser tal que

$$\frac{\partial g}{\partial n} (x,y) \Big|_{\partial D} = f(x,y) \quad (4.9)$$

e a presença da função  $Cz$  é justificada pelo fato de que o calor que entra ou sai do duto o faz a um valor constante com  $z$ , portanto é esperada uma variação assintoticamente linear da temperatura ao longo do duto [14].

O valor da constante  $C$  pode ser obtido a partir da equação diferencial do problema, equação (4.5), como segue:

Tem-se que

$$v \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{N_{pe}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.10)$$

Integrando (4.8) na área do duto, vem

$$A \frac{dT_b}{dz} = \frac{A}{N_{pe}^2} \frac{d^2 T_m}{dz^2} + \int_D \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dA \quad (4.11)$$

Dividindo (4.11) pela área  $A$  e aplicando o teorema da divergência de Gauss ao último termo do lado direito da equação, resulta a seguinte expressão:

$$\frac{dT_b}{dz} = \frac{1}{N_{pe}^2} \frac{d^2 T_m}{dz^2} + \frac{1}{A} \int_{\partial D} \frac{\partial T}{\partial n} ds \quad (4.12)$$

Quando  $z$  cresce, os efeitos de entrada vão desaparecendo e para o limite quando  $z \rightarrow \infty$ , tem-se que:

$$\frac{d^2 T_b}{dz^2} = \frac{d^2 T_m}{dz^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

e então

$$\frac{dT_b}{dz} = \frac{dT_m}{dz} = \frac{\partial T}{\partial z} = C$$

Portanto, das equações (4.12) e (4.7) vem

$$C = \frac{1}{A} \int_{\partial D} f(x,y) ds \quad (4.13)$$

Em consequência do que foi exposto, as distribuições de temperatura admissíveis deverão ser da seguinte forma:

$$\hat{T}^+(x,y,z) = Cz + g(x,y) + \sum_{i=0}^n \hat{a}_i^+(z) \psi_i(x,y) \quad (4.14)$$

e

$$\hat{T}^-(x,y,z) = \sum_{i=0}^n a_i^-(z) \psi_i(x,y)$$

onde

$$\hat{a}_i(z) = a_i(z) + \epsilon \eta_i(z) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

com  $\epsilon$  sendo um escalar e  $\eta_i(z)$  sendo variações admissíveis, satisfazendo (3.17) e sendo tais que  $\dot{\eta}_i(\infty) = 0$ .

Substituindo a função admissível dada por (4.14) no funcional (4.6) para a região de  $z > 0$ , resulta a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
J(T^+, \hat{T}^+) &= \int_0^\infty \int_D \left[ v \left( \sum_{i=0}^n \dot{\hat{a}}_i^+ \psi_i + C \right) \left( \sum_{j=0}^n \hat{a}_j^+ \psi_j + g + Cz \right) + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left( \nabla \left( \sum_{i=0}^n \hat{a}_i^+ \psi_i + g + Cz \right) \cdot \nabla \left( \sum_{j=0}^n \hat{a}_j^+ \psi_j + g + Cz \right) \right) \Big] dA dz - \\
&- \int_0^\infty \int_{\partial D} f \left( \sum_{i=1}^n \hat{a}_i^+ \psi_i + g + Cz \right) ds dz \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Efetuada as operações indicadas acima vem,

$$\begin{aligned}
J(T^+, \hat{T}^+) &= \int_0^\infty \int_D \left[ v \left( \sum_{i,j=0}^n \dot{\hat{a}}_i^+ \hat{a}_j^+ \psi_i \psi_j + g \sum_{i=0}^n \dot{\hat{a}}_i^+ \psi_i + \right. \right. \\
&+ Cz \sum_{i=0}^n \dot{\hat{a}}_i^+ \psi_i + C \sum_{j=0}^n \hat{a}_j^+ \psi_j + Cg + C^2 z) + \\
&+ \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=0}^n \hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + 2 \sum_{i=0}^n \hat{a}_i^+ \nabla \psi_i \cdot \nabla g + \right. \\
&+ \nabla g \cdot \nabla g + \frac{1}{N_{pe}^2} C^2 + \frac{1}{N_{pe}^2} \sum_{i,j=0}^n \dot{\hat{a}}_i^+ \dot{\hat{a}}_j^+ \psi_j \psi_i \Big) \Big] dA dz - \\
&- \int_0^\infty \int_{\partial D} \left( f \sum_{i=0}^n \hat{a}_i^+ \psi_i + fg + fCz \right) ds dz \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Sendo

$$\hat{a}_i^+(z) = \dot{a}_i^+(z) + \varepsilon \eta_i(z) \quad (4.17)$$

$$e \quad \dot{\hat{a}}_i^+(z) = \dot{a}_i^+(z) + \varepsilon \dot{\eta}_i(z)$$

onde as funções  $\eta_i(z)$  satisfazem (3.17). As expressões (4.17) podem ser substituídas em (4.16). Impondo a condição de extremo em (4.16) resulta o que segue:

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{d\varepsilon} (T^+, \hat{T}^+) \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^\infty \int_D \left[ v \sum_{i,j=0}^n \ddot{a}_i^+ \eta_j \psi_i \psi_j + \frac{1}{N_{pe}^2} \sum_{i,j=0}^n \ddot{a}_i^+ \dot{\eta}_j \psi_i \psi_j \right. \\
&+ v C \sum_{j=0}^n \eta_j \psi_j + \sum_{i,j=0}^n a_i^+ \eta_j \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + \\
&+ \left. \sum_{j=0}^n \eta_j \nabla \psi_j \cdot \nabla g \right] dA dz - \\
&- \int_0^\infty \int_{\partial D} \sum_{j=0}^n \eta_j \psi_j f ds dz = 0 \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.27) em (4.18) e alterando o sinal de somatório com o de integração, vem

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{d\varepsilon} (T^+, \hat{T}^+) \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^\infty \left[ \sum_{i,j=0}^n \ddot{a}_i^+ \eta_j \int_D v \psi_i \psi_j dA - \right. \\
&- \frac{1}{N_{pe}^2} \sum_{i,j=0}^n \ddot{a}_i^+ \eta_j \int_D \psi_i \psi_j dA + \\
&+ \sum_{j=0}^n \eta_j \int_D C v \psi_j dA + \\
&+ \sum_{i,j=0}^n a_i^+ \eta_j \int_D \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dA + \\
&+ \left. \sum_{j=0}^n \eta_j \int_D \nabla g \cdot \nabla \psi_j dA \right] dz - \\
&- \int_0^\infty \left( \sum_{j=0}^n \eta_j \int_{\partial D} f \psi_j ds \right) dz \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\int_D \nabla g \cdot \nabla \psi_j dA = \int_D \operatorname{div} (\nabla g \psi_j) dA - \int_D \nabla^2 g \psi_j dA \tag{4.20}$$

e utilizando o teorema da divergência e (4.7), vem,

$$\int_D \nabla g \cdot \nabla \psi_j \, dA = \int_{\partial D} f \psi_j \, ds - \int_D \nabla^2 g \psi_j \, dA \quad (4.21)$$

Substituindo (4.21) em (4.19) e trocando o sinal, resulta o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\varepsilon} (T^+, \hat{T}^+) \Big|_{\varepsilon=0} = & \int_0^\infty \left[ \sum_{i,j=0}^n \ddot{a}_i^+ H_{ij} \eta_j - \sum_{i,j=0}^n \ddot{a}_i^+ A_{ij} \eta_j - \right. \\ & \left. - \sum_{i,j=0}^n a_i^+ B_{ij} \eta_j - \sum_{j=0}^n t_j \eta_j \right] dz = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \frac{1}{N_{pe}^2} \int_D \psi_i \psi_j \, dA, & A_{ij} &= \int_D v \psi_i \psi_j \, dA \\ B_{ij} &= \int_D \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dA & e \quad t_j &= \int_D (C v - \nabla^2 g) \psi_j \, dA \end{aligned}$$

Como as funções  $\eta_i(z)$  são arbitrárias, pelo lema fundamental do cálculo variacional, deve-se ter o que segue:

$$\sum_{i=0}^n \ddot{a}_i^+ H_{ij} - \sum_{i=0}^n \ddot{a}_i^+ A_{ij} - \sum_{i=0}^n a_i^+ B_{ij} = t_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \dots (4.23)$$

ou, na forma matricial,

$$[H] \{\ddot{a}^+\} - [A] \{\dot{a}^+\} - [B] \{a^+\} = \{t\} \quad (4.24)$$

Procedendo de maneira análoga para a região de  $z < 0$ , pode-se obter,

$$[H] \{\ddot{a}^-\} - [A] \{\dot{a}^-\} - [B] \{a^-\} = \{0\} \quad (4.25)$$

O sistema de equações diferenciais (4.24) pode ser resol

vido como em 3.4, a menos de uma característica especial da matriz B. Dada como,

$$B_{ij} = \int_D \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dA \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.26)$$

e sendo  $\psi_0(x, y) = 1$ , a matriz B apresenta a primeira linha e a primeira coluna nulas. Sendo assim, a solução particular de (4.24) conforme a equação (3.31), qual seja

$$-[B] \{b\} = \{t\} \quad (4.27)$$

não pode ser univocamente obtida, pois o elemento  $b_0$  pode ser arbitrário. Este coeficiente no entanto, pode ser determinado.

Para obter  $b_0$ , deve-se lembrar que a solução de (4.24) se reduz à solução particular, quando  $z$  assume valores grandes, pois a solução homogênea é assintótica em  $z$ . Tem-se, então, que

$$T^+(x, y, z) = Cz + g(x, y) + b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(x, y) \quad (4.28)$$

Das equações (4.12) e (4.13), vem

$$\frac{dT_b}{dz} = \frac{1}{N_{pe}^2} \frac{d^2 T_m}{dz^2} + C \quad (4.29)$$

e integrando a equação acima em relação a  $z$  entre  $-\infty$  e  $z$  resulta,

$$T_b(z) = \frac{C}{N_{pe}^2} + Cz \quad (4.30)$$

Por outro lado,  $T_b(z)$  calculado a partir de (4.28), resulta na forma seguinte:

$$T_b(z) = E + Cz + b_0 \quad (4.31)$$

onde

$$E = \frac{\int_D (g + \sum_{i=1}^n b_i \psi_i) v \, dA}{\int_D v \, dA}$$

Finalmente, igualando (4.31) com (4.30), resulta

$$b_0 = \frac{C}{N_{pe}^2} - E \quad (4.32)$$

A constante  $b_0$  pode ser entendida fisicamente como sendo um aumento da temperatura, devido ao efeito da condução axial, dada pelo termo  $C/N_{pe}^2$ , mais uma compensação pela escolha arbitrária da função  $g(x,y)$ , dada pelo termo  $E$ .

A obtenção da solução homogênea de (4.24) também é afetada pela singularidade da matriz  $B$ . Analogamente a seção 3.4, o problema de auto-valores associado às equações (4.24) e (4.25) pode ser posto na forma seguinte:

$$[\lambda [R] \{Y^+\} - [S]] \{Y^+\} = \{0\} \quad (4.33)$$

onde

$$[R] = \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [0] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \{Y^+\} = \begin{Bmatrix} \lambda \{C^+\} \\ \{C^+\} \end{Bmatrix}$$

É fácil de ver que, pela montagem em blocos, as matrizes  $R$  e  $S$  apresentam a  $(n+2)$ -ésima coluna e a  $(n+2)$ -ésima linha nulas. Como consequência, um dos auto-vetores que satisfaz o problema é o vetor

$$\{Y^+\}^T = (0, 0, \dots, 0, c, 0, \dots, 0) \quad (4.34)$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária, que está associada ao auto-va-

lor  $\lambda = 0$ . Resta, portanto, encontrar os  $2n+1$  auto-valores e auto-vetores restantes. Devido às singularidades das matrizes  $R$  e  $S$ , estes auto-vetores não podem ser obtidos pelos métodos habituais, pois os determinantes destas matrizes são nulos. Contudo, é possível desacoplar as linhas e colunas nulas destas matrizes, reduzindo de um a dimensão dos vetores e matrizes envolvidas. Para tanto, basta desprezar as linhas e as colunas nulas do problema e proceder como em 3.4. Deste modo, o problema é abordado no espaço vetorial ortogonal ao auto-vetor dado por (4.34). Com a supressão das  $(n+2)$ -ésima linha e coluna das matrizes do problema (4.33), os auto-vetores não são obtidos completamente, restando determinar justamente o  $(n+2)$ -ésimo elemento de cada auto-vetor. Este elemento pode ser encontrado, lembrando que

$$(Y_1^+, Y_2^+, \dots, Y_{2n+2}^+) = (\lambda C_0^+, \lambda C_1^+, \dots, \lambda C_n^+, C_0^+, C_1^+, \dots, C_n^+)$$

então

$$Y_{n+2}^+ = Y_1^+ / \lambda$$

Desta forma, todos os auto-valores e auto-vetores do problema (4.33) estão disponíveis. Destes  $2n+2$  auto-valores,  $n+1$  são positivos,  $n$  são negativos e um é nulo. Isto é garantido pelo fato de que, conforme a referência [28], o auto-valor nulo está associado à região de  $z > 0$ , juntamente com mais  $n$  auto-valores negativos.

De posse destes auto-vetores, pode-se obter os auto-vetores do problema espectral associado a (4.24), que, combinados linearmente e aplicados às funções  $e^{\lambda_j z}$ , dão as soluções homogêneas de (4.24) e (4.25). Estas soluções são:

$$\{a^+\} = \sum_{j=0}^n A_j^+ \{C_j^+\} e^{\lambda_j^+ z} \quad (4.35)$$

e

$$\{a^-\} = \sum_{j=0}^n A_j^- \{C_j^-\} e^{\lambda_j^- z}$$

onde  $A_j^+$  e  $A_j^-$  são constantes a determinar,  $\lambda_j^+$  são os auto-valores



negativos incluindo o nulo e  $\lambda_j^-$  são os auto-valores positivos.

Substituindo as expressões (4.35) em (4.6) e somando a solução particular, resulta:

$$T^+(x,y,z) = Cz + g(x,y) + \sum_{j=0}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+ z} \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \psi_i(x,y) + \sum_{i=0}^n b_i \psi_i(x,y) \quad (4.36)$$

$$e \quad T^-(x,y,z) = \sum_{j=0}^n A_j^- e^{\lambda_j^- z} \sum_{i=0}^n C_{ij}^- \psi_i(x,y)$$

Para se encontrar os valores das constantes  $A_j^+$  e  $A_j^-$ , devem ser usadas as condições de encontro entre  $T^+(x,y,z)$  e  $T^-(x,y,z)$  em  $z = 0$  que são:

$$T^-(x,y,0) = T^+(x,y,0) \quad (4.37)$$

$$e \quad \frac{\partial T^-}{\partial z}(x,y,0) = \frac{\partial T^+}{\partial z}(x,y,0)$$

Aplicando (4.36) a (4.37), resulta

$$\sum_{j=0}^n A_j^- \sum_{i=0}^n C_{ij}^- \psi_i(x,y) = g(x,y) + \sum_{j=0}^n A_j^+ \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \psi_i(x,y) + \sum_{i=0}^n b_i \psi_i(x,y) \quad (4.38)$$

$$e \quad \sum_{j=0}^n A_j^- \lambda_j^- \sum_{i=0}^n C_{ij}^- \psi_i(x,y) = C + \sum_{j=0}^n A_j^+ \lambda_j^+ \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \psi_i(x,y)$$

Lembrando que as funções  $\psi_i(x,y)$  são linearmente independentes e fazendo

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^n \ell_i \psi_i(x,y) \quad (4.39)$$

e  $C = C \psi_0(x,y)$

onde  $\{\ell\}$  pode ser obtido pelo método dos resíduos ponderados, como em 3.4, vem

$$\sum_{j=0}^n A_j^- C_{ij}^- = \ell_i + b_i + \sum_{j=0}^n A_j^+ C_{ij}^+ \quad i = 0,1,2,\dots,n \quad (4.40)$$

$$e \sum_{j=0}^n A_j^- \lambda_j^- C_{ij}^- = C \delta_{1i} + \sum_{j=0}^n A_j^+ \lambda_j^+ C_{ij}^+ \quad i = 0,1,2,\dots,n$$

onde  $\delta_{ij}$  é o "Delta de Kronecker".

Colocadas na forma vetorial, as expressões acima adquirem as seguintes formas:

$$\sum_{j=0}^n A_j^- \{C_j^-\} = \{\ell\} + \{b\} + \sum_{j=0}^n A_j^+ \{C_j^+\} \quad (4.41)$$

$$e \sum_{j=0}^n A_j^- \lambda_j^- \{C_j^-\} = \begin{Bmatrix} C \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{j=0}^n A_j^+ \lambda_j^+ \{C_j^+\}$$

Os coeficientes  $A_j^+$  e  $A_j^-$ ,  $j = 0,1,\dots,n$ , podem ser obtidos pela utilização da ortogonalidade dos auto-vetores de (4.33) em relação à matriz  $R$  no espaço de dimensão  $2n+2$ . Com efeito, fazendo

$$\{v\}^T = (1, 0, 0, \dots, 0, \ell_0 + b_0, \ell_1 + b_1, \dots, \ell_n + b_n)$$

$$e \{Y_j\} = (\lambda_j C_{0j}, \lambda_j C_{1j}, \dots, \lambda_j C_{nj}, C_{0j}, C_{1j}, \dots, C_{nj})$$

As expressões (4.41) podem ser acopladas numa única equação no espaço de dimensão  $2n+2$ , que é a seguinte:

$$\sum_{j=0}^n A_j^+ \{Y_j^+\} + \{v\} = \sum_{j=0}^n A_j^- \{Y_j^-\} \quad (4.42)$$

Devido à ortogonalidade dos vetores  $Y_j$  em relação à matriz  $R$ , podem ser obtidos os coeficientes  $A_j^-$  e  $A_j^+$ , multiplicando-se (4.42) por  $R$  e por  $Y_j$ . Deste modo, tem-se

$$A_j^+ = -\{v\}^T [R] \{Y_j^+\} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.43)$$

$$e \quad A_j^- = \{v\}^T [R] \{Y_j^-\} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Aplicando a (4.43) as operações da seção 3.4, resultam:

$$A_j^+ = -\lambda_j^+ C \sum_{i=0}^n H_{1i} C_{ij}^+ - \sum_{i,k=0}^n (\ell_i + b_i) B_{ik} C_{kj}^+ \quad (4.44)$$

$$e \quad A_j^- = \lambda_j^- C \sum_{i=0}^n H_{1i} C_{ij}^- + \sum_{i,k=0}^n (\ell_i + b_i) B_{ik} C_{kj}^-$$

Finalmente, substituindo (4.44) em (4.36), obtêm-se as distribuições de temperatura  $T^+(x,y,z)$  e  $T^-(x,y,z)$ .

#### 4.4 - Número de Nusselt

Um balanço de calor, num certo ponto da fronteira do du to em questão, fornece a seguinte expressão:

$$h(T_s^* - T_b^*) = K \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \quad (4.45)$$

mas, como  $\partial T^*/\partial n^* = f^*$ , vem

$$h(T_s^* - T_b^*) = K f^* \quad (4.46)$$

Aplicando a (4.8) a mesma adimensionalização utilizada em (4.6) e (4.5) e colocando numa forma conveniente, vem

$$\frac{h Dh^*}{K} = \frac{f}{T_{sm} - T_b} \quad (4.47)$$

Lembrando a definição do número de Nusselt, resulta

$$Nu = \frac{f}{T_{sm} - T_b} \quad (4.48)$$

Integrando (4.48) em  $\partial D$  resulta a expressão do número de Nusselt médio em função de  $z$ , que adquire a seguinte equação:

$$Nu = \frac{1}{(T_{sm} - T_b)L(\partial D)} \int_{\partial D} f ds \quad (4.49)$$

onde

$$T_{sm} = \frac{1}{L(\partial D)} \int_{\partial D} T_s ds$$

#### 4.5 - Aplicação

Para aplicação do método foi novamente escolhido o problema de Graetz associado ao duplo-tubo, desta vez isolado em  $z < 0$  e recebendo uma taxa constante de calor  $Q$  pelo tubo interno em  $z > 0$ . Este problema foi escolhido, basicamente, por duas razões: a primeira delas é que ele apresenta grande importância prática, uma vez que muitos sistemas de arrefecimento de reatores nucleares utilizam duplos-tubos; a segunda razão é a comparação de resultados com a solução analítica desenvolvida por Hsu [14].

A figura 9 mostra esquematicamente a configuração do problema.

Como em 3.6, as equações de movimento e da energia podem ser tomadas em coordenadas cilíndricas, devido a axissimetria do problema. Tem-se então as seguintes expressões:

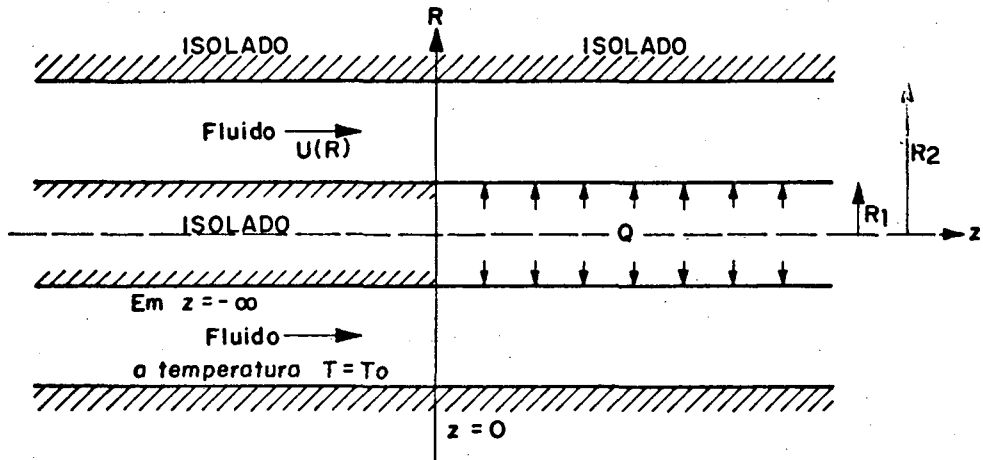


Figura 9

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \quad (4.50)$$

$$e \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} = \frac{\rho C_v}{K} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (4.51)$$

As condições de contorno que  $T^*(r^*, z^*)$  deve satisfazer são:

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{R1} = \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{R2} = 0 \quad \text{para } z < 0$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{R2} = 0 \quad e \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{R1} = -\frac{Q}{K} \quad \text{para } z > 0$$

$$e \quad T^*(r^*, -\infty) = T_o^*$$

Utilizando a adimensionalização proposta anteriormente, qual seja,

$$z = \frac{z^*}{Dh^* N_{pe}}, \quad r = \frac{r^*}{Dh^*}, \quad v = \frac{v^*}{v_m^*}, \quad r_i = \frac{R1}{Dh^*}$$

$$r_e = \frac{R2}{Dh^*} \quad e \quad T = \frac{(T^* - T_o^*) K}{Dh^* Q}$$

a equação (4.51) adquire a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{N_{pe}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = v \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.52)$$

com as condições de contorno

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_i} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e} = 0 \quad \text{para } z < 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_i} = -1 \quad \text{para } z > 0$$

e  $T(r, -\infty) = 0$

Para a equação (4.50) pode ser utilizada a solução analítica dada por (3.70).

As seguintes aproximações de ordem  $n$  podem ser propostas como distribuições de temperatura do problema:

$$T^-(r, z) = \sum_{i=0}^n a_i^-(z) \psi_i(r) \quad (4.53)$$

e  $T^+(r, z) = Cz + g(r) + \sum_{i=0}^n a_i^+(z) \psi_i(r)$

onde a sequência de funções escolhida é a seguinte:

$$\psi_i(r) = \cos \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

É fácil notar que as funções  $\psi_i(r)$  satisfazem as condições de contorno homogêneas na derivada em  $r = r_i$  e  $r = r_e$ .

A função  $g(r)$  pode ser obtida com a utilização das condições de contorno, as quais ela deve satisfazer. Estas condições são:

$$\left. \frac{dg(r)}{dr} \right|_{r_e} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dg(r)}{dr} \right|_{r_1} = -1$$

Sendo assim, a seguinte parábola pode ser utilizada:

$$g(r) = r^2 + \frac{\dot{r}}{(1 - \sigma)} \quad (4.54)$$

A constante C, calculada pela equação (4.13), resulta na seguinte expressão:

$$C = \frac{4 \sigma}{1 + \sigma} \quad (4.55)$$

Lembrando os sistemas de equação diferenciais (4.24) e (4.25), têm-se o seguinte:

$$[H] \{\ddot{a}^+\} - [A] \{\dot{a}^+\} - [B] \{a^+\} = \{t\} \quad (4.56)$$

$$\text{e} \quad [H] \{\ddot{a}^-\} - [A] \{\dot{a}^-\} - [B] \{a^-\} = \{0\} \quad (4.57)$$

onde

$$H_{ij} = \int_{r_i}^{r_e} \cos \left( \frac{i\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right) \cos \left( \frac{j\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right) r \, dr$$

$$A_{ij} = \int_{r_i}^{r_e} v(r) \cos \left( \frac{i\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right) \cos \left( \frac{j\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right) r \, dr$$

$$B_{ij} = \frac{ij\pi^2}{(\ln (1/\sigma))^2} \int_{r_i}^{r_e} \text{sen} \left( \frac{i\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right) \text{sen} \left( \frac{j\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right) \frac{dr}{r}$$

$$t_j = \int_{r_i}^{r_e} (C v(r) - 2) \cos \left( \frac{j\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right) r \, dr$$

O sistema de equações diferenciais (4.56) pode ser resolvido pelo procedimento usado em (3.71), levando-se em consideração a redução da dimensão do problema pela supressão da singularidade devida à matriz B.

A solução particular de (4.56) pode ser obtida pela equação

$$b_i = - \frac{t_i}{B_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

pois a matriz B é diagonal, uma vez que as derivadas das funções  $\psi_i(r)$  são ortogonais com relação à integral que define os elementos de B.

O elemento  $b_0$  da solução particular (4.56), calculado pela equação (4.32), adquire a seguinte forma:

$$b_0 = \frac{4}{(1 + \sigma) N_{pe}^2} + E \quad (4.58)$$

onde

$$E = \frac{\int_{r_i}^{r_e} v(r) \left( r^2 - \frac{r}{1 - \sigma} + \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(r) \right) r \, dr}{\int_{r_i}^{r_e} v(r) r \, dr}$$

Finalmente, para as distribuições de temperatura, resultam as expressões abaixo:

$$T^-(r, z) = \sum_{j=0}^n A_j^- e^{\lambda_j^- z} \sum_{i=0}^n C_{ij}^- \cos \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) \quad (4.59)$$

$$e \quad T^+(r, z) = \frac{4\sigma}{1 + \sigma} z + r^2 - \frac{r}{1 - \sigma} + \sum_{i=0}^n b_i \cos \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) + \sum_{j=0}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+ z} \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \cos \left( \frac{i\pi \ln(r/r_i)}{\ln(1/\sigma)} \right) \quad (4.60)$$



onde os coeficientes  $A_j^+$  e  $A_j^-$  são obtidos a partir de (4.44).

O número de Nusselt, obtido através da equação (4.49), resulta

$$\text{Nu}(z) = \frac{1}{T_s(z) - T_b(z)} \quad (4.61)$$

onde  $T_s(z)$  é a temperatura da superfície do tubo interno.

#### 4.6 - Resultados

De modo análogo ao problema de Graetz no duplo-tubo com temperatura prescrita, neste caso foram utilizadas dez funções na expansão da solução para obtenção dos números de Nusselt e doze na obtenção dos campos de temperatura.

As figuras 10, 11 e 12 mostram os valores dos números de Nusselt para vários números de Péclet em duplos-tubos com relações de raio  $\sigma = 0,2$ ,  $\sigma = 0,5$  e  $\sigma = 0,8$  respectivamente.

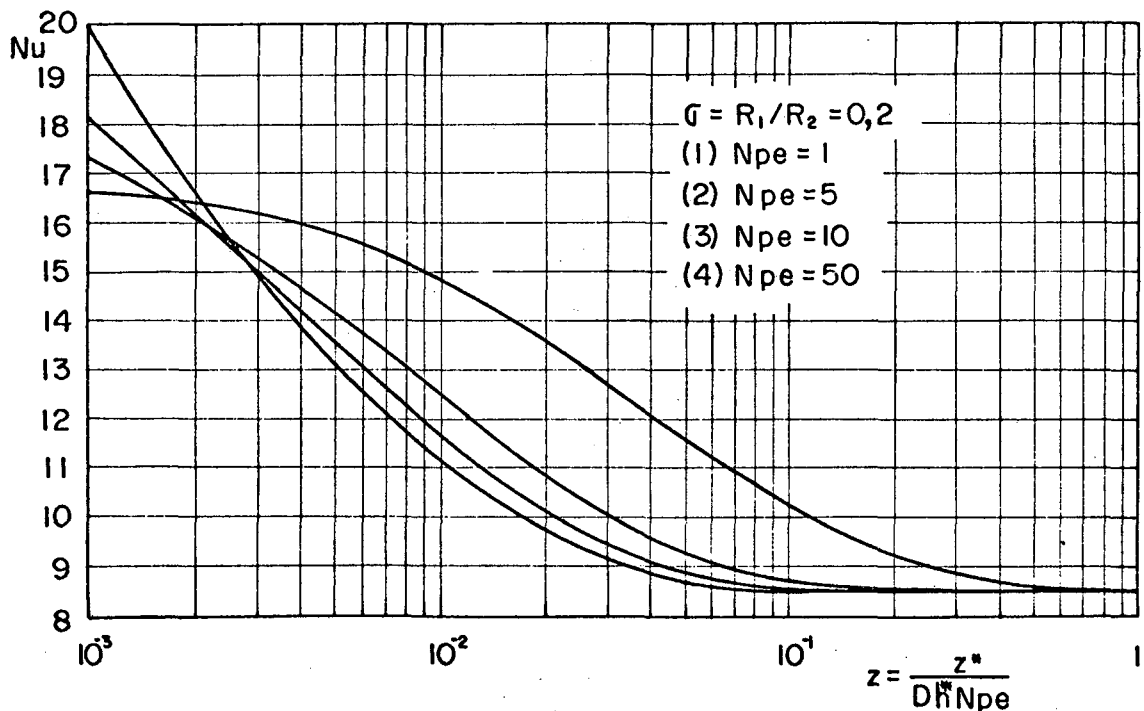


Fig. 10 - Números de Nusselt para duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,2$  e vários  $N_{pe}$ .

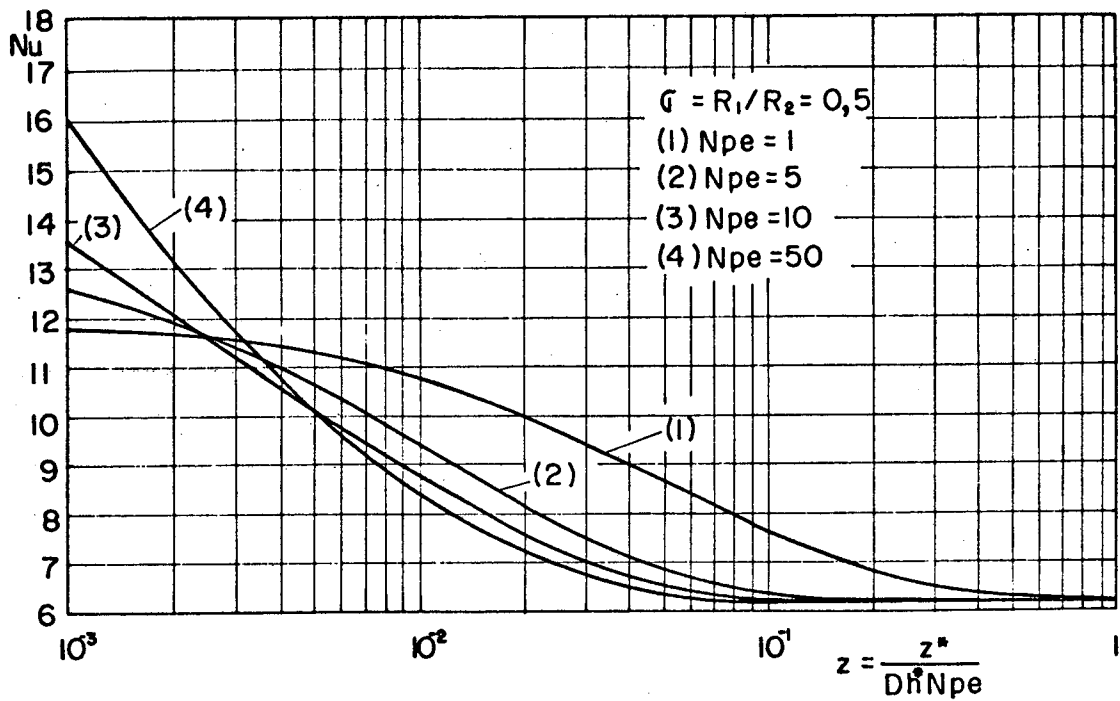


Fig. 11 - Números de Nusselt para duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,5$  e vários  $N_{pe}$ .

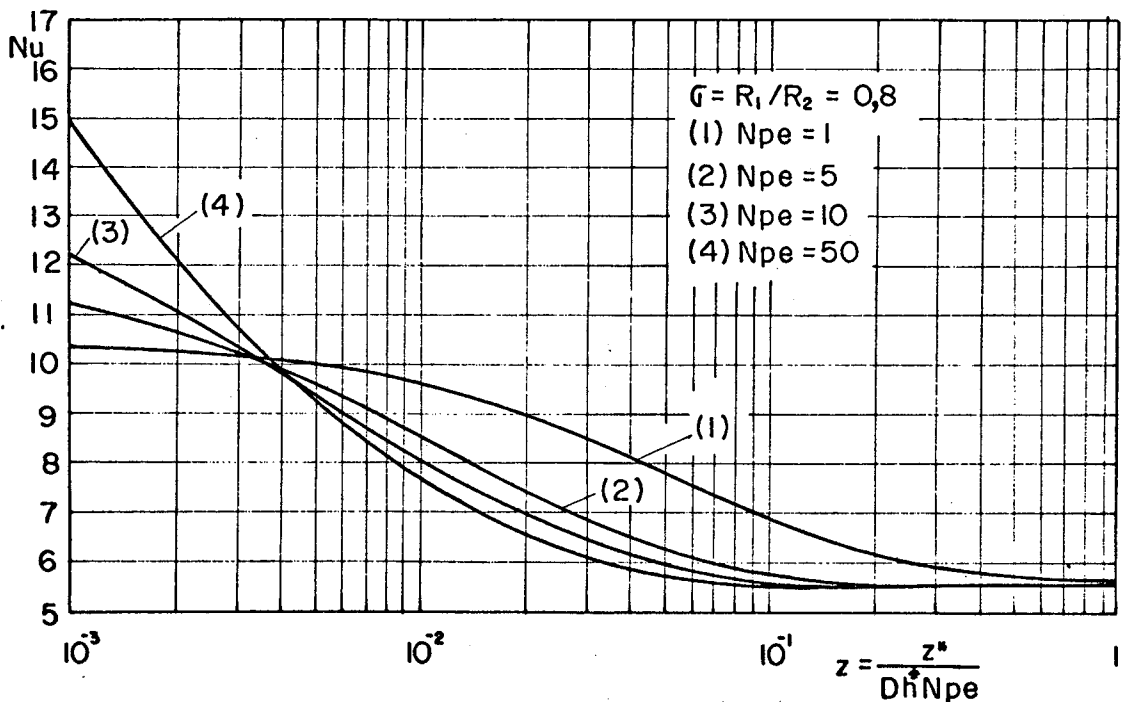


Fig. 12 - Números de Nusselt para duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,8$  e vários  $N_{pe}$ .

A figura 13 mostra a comparação das curvas dos números de Nusselt obtidas neste trabalho com os valores encontrados por Hsu [14], que analisou o mesmo problema. Pode ser notada a boa precisão do presente método, pela proximidade dos pontos às curvas. Convém salientar, ainda, que a curva foi obtida utilizando-se uma expansão com dez funções, enquanto Hsu utilizou vinte auto-funções.

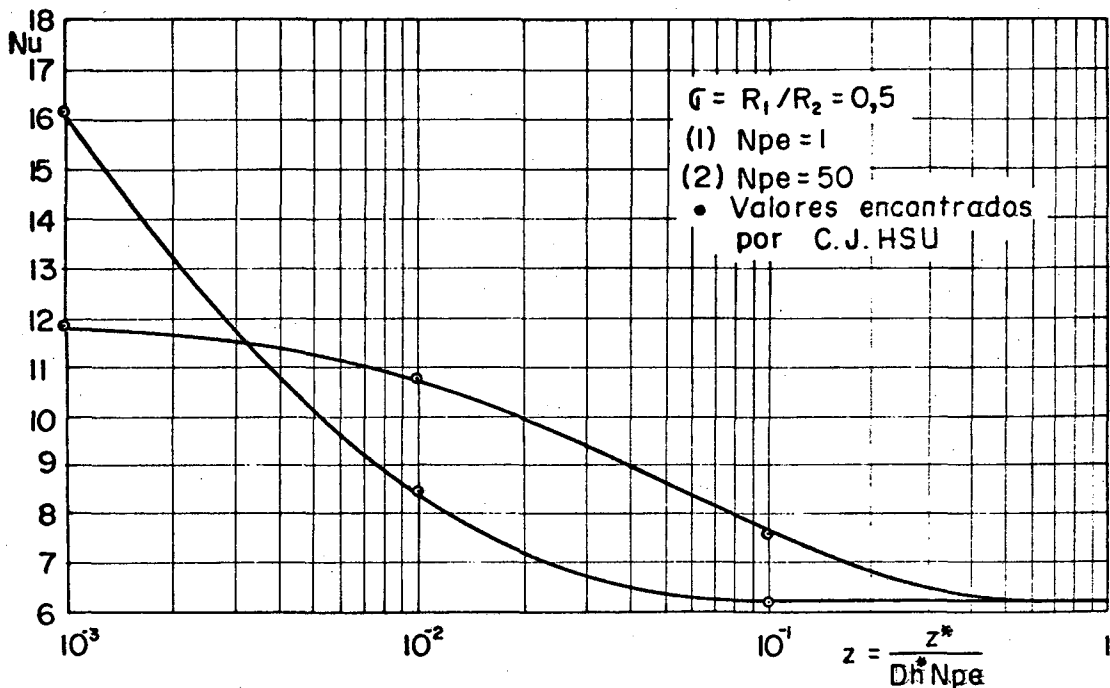


Fig. 13 - Comparação entre números de Nusselt para duplo-tubo com  $\sigma = 0,5$ ,  $N_{pe} = 1,0$  e  $N_{pe} = 50$ .

As tabelas 7 e 8 mostram a comparação entre os auto-valores obtidos neste trabalho e os encontrados por Hsu, para o caso de  $N_{pe} = 1,0$  e  $\sigma = 0,5$ .

Conforme pode ser notado nas tabelas 7 e 8, existe uma boa concordância entre os auto-valores encontrados por Hsu e os obtidos pelo método variacional, exceto nos auto-valores maiores. As diferenças nestes auto-valores não são devidas ao método variacional, mas sim ao método de Jacobi, que foi utilizado no problema espectral (4.33). Este método, como se sabe [5], é numérico e acumula os erros nos auto-valores de maiores módulos. Estes erros, no entanto, não chegam a afetar de maneira decisiva os resultados, pois, devido à característica assintótica da função exponencial,

os auto-valores de módulo grande são influenciados numa região bem próxima da origem.

n	Auto-valores $\lambda^-$	
	Variacional	Hsu
1	0,998620	0,998620
2	6,764998	6,764993
3	13,102907	13,102879
4	19,383733	19,383503
5	25,663486	25,662329
6	31,949939	31,941938
7	38,274861	38,222317
8	44,833638	44,503308
9	52,607027	50,784721
10	64,570680	57,066541

Tabela 7 - Comparação entre auto-valores para  $\sigma = 0,5$ ,  $N_{pe} = 1,0$  e  $z < 0$ .

n	Auto-valores $\lambda^+$	
	Variacional	Hsu
1	0,0	0,0
2	-6,040327	-6,040338
3	-12,174596	-12,174586
4	-18,412352	-18,412251
5	-24,675773	-24,675310
6	-30,951580	-30,947636
7	-37,257273	-37,223909
8	-43,821381	-43,502467
9	-51,540855	-49,782196
10	-63,779985	-56,062950

Tabela 8 - Comparação entre auto-valores para  $\sigma = 0,5$ ,  $N_{pe} = 1,0$  e  $z > 0$ .

A figura 14 mostra a distribuição da temperatura  $T_b$  para um duplo-tubo com relação de raios  $\sigma = 0,5$  e vários números de Péclet. Nesta figura, a ordenada foi transladada do valor  $4\sigma/(1+\sigma) N_{pe}^2$ , que é o aumento na temperatura devido ao efeito da condução axial, conforme foi observado anteriormente quando da obtenção da equação (4.32). Levando em conta este fato, pode-se notar a maior penetração do calor na região de  $z < 0$  nos casos em que  $N_{pe}$  é pequeno.

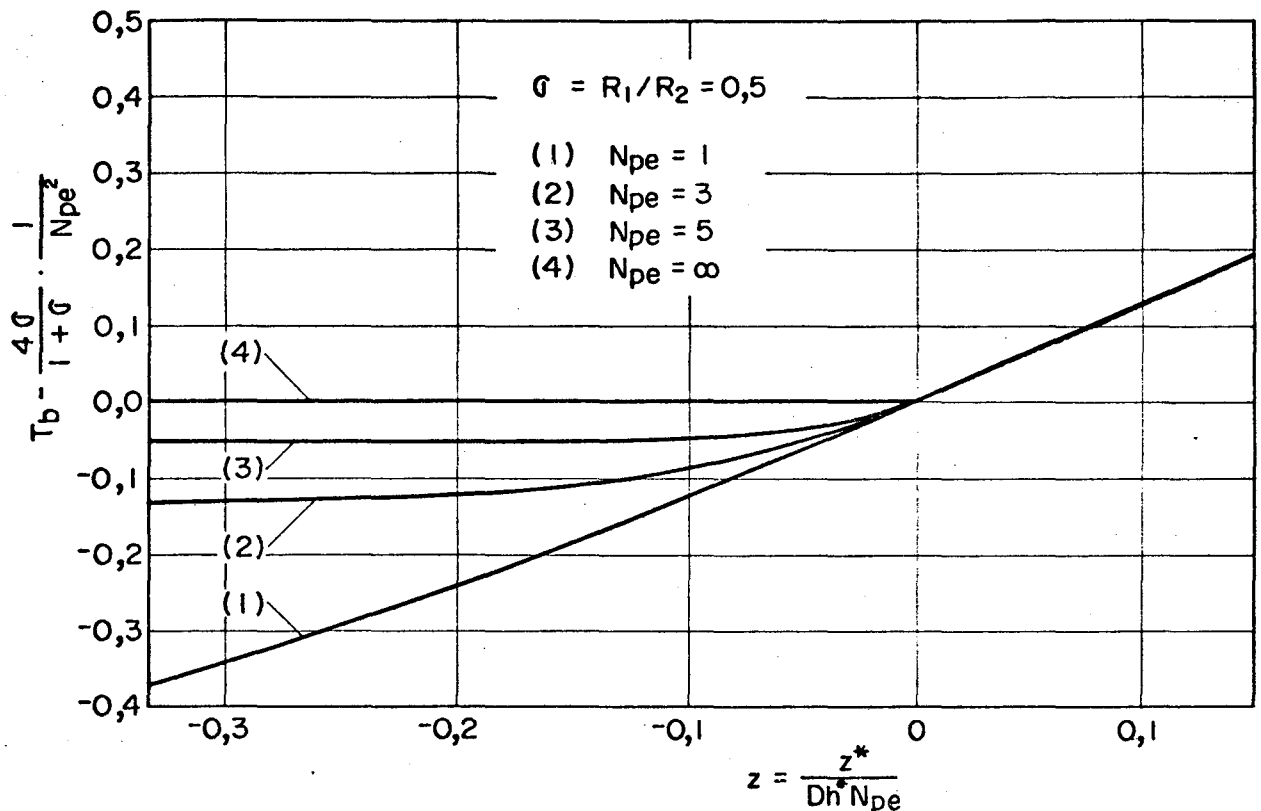


Fig. 14 - Temperatura média de mistura para vários  $N_{pe}$  e  $\sigma = 0,5$ .

A figura 15 mostra um conjunto de isotermas, no caso de  $\sigma = 0,5$  e  $N_{pe} = 3,0$ . O efeito do fluxo térmico pode ser notado pela inclinação ocorrida nas isotermas no raio interno, após o ponto  $z = 0$ . As isotermas, que saem perpendiculares do raio interno em  $z < 0$ , inclinam-se em  $z > 0$  para possibilitar o gradiente térmico. Interessante é notar, ainda, que as isotermas vão tomando uma forma padrão e ficando igualmente espaçadas, à medida que  $z$  cresce. Isto acontece porque a parte exponencial da distribuição de temperatura vai perdendo significação com o crescimento de  $z$ .

Como consequência, o perfil de temperatura, a menos de uma constante adquire sua forma plenamente desenvolvida.

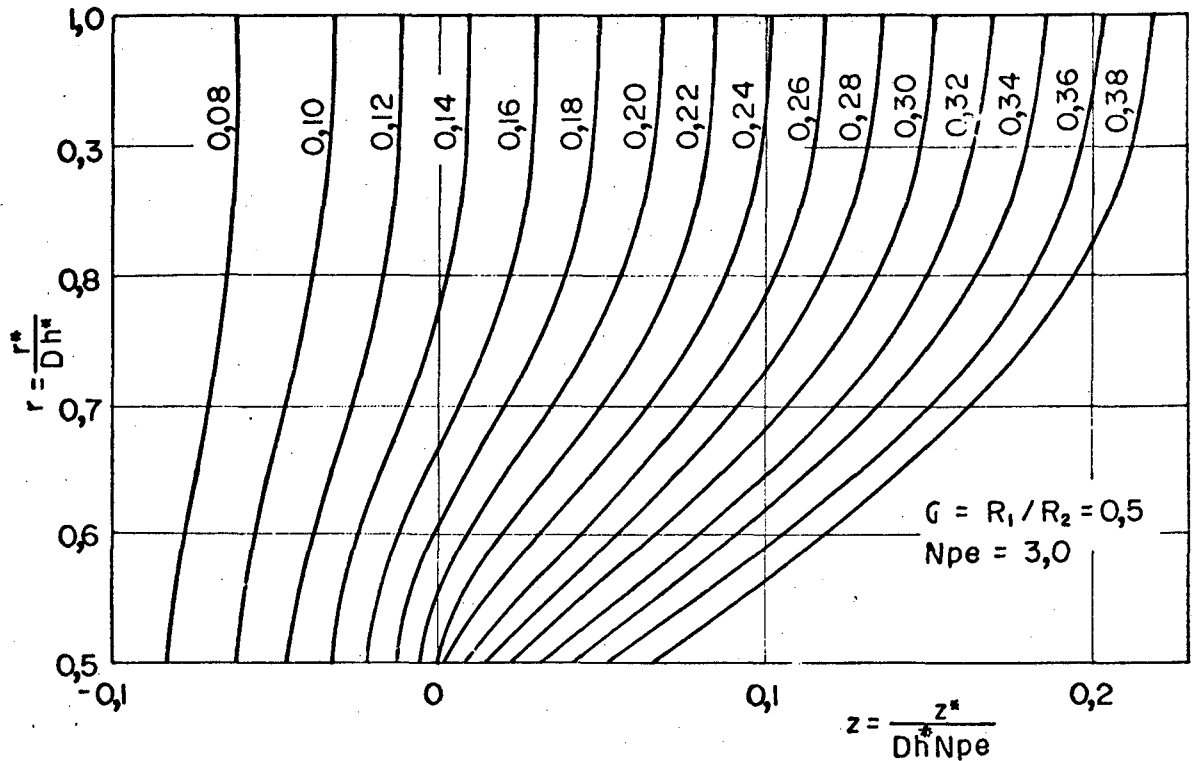


Fig. 15 - Campo de isotermas num duplo-tubo com  $\sigma = 0,5$  e  $N_{pe} = 3,0$

É fácil de ver que o perfil de temperatura plenamente desenvolvido deve satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = v(r) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.62)$$

ou lembrando que  $\partial T / \partial z = C$  resulta

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = C v(r) \quad (4.63)$$

A equação (4.63) pode ser integrada e se obter uma expressão explícita da temperatura, conforme pode ser visto na referência [14]. No presente trabalho, como se pode notar na equação (4.62), o perfil de temperatura plenamente desenvolvido é dado pela seguinte expressão:

$$T(r) = r^2 - \frac{r}{1 - \sigma} + \sum_{i=0}^n b_i \cos \left( \frac{i\pi \ln (r/r_i)}{\ln (1/\sigma)} \right) \quad (4.64)$$

A tabela 9 mostra a comparação entre os valores desta temperatura, calculada por (4.64), e seu valor exato, calculado pela solução de (4.63), para vários valores de raio num duplo-tubo com  $\sigma = 0,5$ .

r	T (4.64)	T exata
0,50	0,3124	0,3099
0,55	0,2647	0,2626
0,60	0,2235	0,2213
0,65	0,1875	0,1866
0,70	0,1591	0,1588
0,75	0,1375	0,1375
0,80	0,1222	0,1225
0,85	0,1125	0,1128
0,90	0,1072	0,1077
0,95	0,1052	0,1057
1,00	0,1045	0,1054

Tabela 9 - Comparação entre as temperaturas da região plenamente desenvolvida calculadas analiticamente e pela equação (4.64).

Esta concordância é naturalmente esperada em vista do fato de a solução (4.64) ser solução variacional de (4.63) obtida pelo método de Ritz.

## V - CONCLUSÃO

Apesar de o presente trabalho ter aplicado o método variacional para duas condições de contorno específicas, a saber, de temperatura uniforme e de fluxo térmico uniforme, algumas conclusões são permitidas a partir dos resultados obtidos e das soluções existentes, utilizadas para comparação dos resultados.

Com base nos resultados de Hsu [14] e Agrawal [1], pode-se afirmar que o método variacional apresenta a vantagem de dispensar a construção de seqüências de função ortogonais, levadas a efeito naqueles trabalhos. Tais funções ortogonais, como vimos, são expandidas através de funções arbitrárias que constituem conjuntos linearmente independentes e completos em determinado espaço métrico ou normado. Adicionalmente, tais funções devem satisfazer condições de contorno coerentes com o tipo de condição de contorno a ser analisado. Contudo, é possível relaxar tais condições de contorno, pela construção de um funcional adequado para cada problema específico. É possível, por exemplo, no caso de fluxo térmico prescrito, expandir a solução variacional por seqüência linearmente independente e completa que não satisfaça qualquer condição de contorno e utilizar um funcional com termo complementar que tenha a propriedade de forçar que as combinações lineares dessas funções satisfaçam as condições de contorno quando o número de termos da soma da combinação linear aumentar [11].

Uma outra consideração deve ser feita quanto ao número de Péclét. As soluções analíticas são trabalhosas mesmo para geometrias simples [4]. O método variacional não apresenta dificuldade analítica adicional para esses casos de Péclét finito. A dificuldade é transferida para o cálculo da solução, pois nesse caso, a dimensão do espaço é duplicada, conforme pode ser visto nas construções das matrizes associadas a esses casos. Desta forma, todo o trabalho adicional é transferido para o computador.

Além das vantagens citadas implicitamente acima, outras vantagens se apresentam. Conforme pode ser visto na discussão dos resultados, para os casos especiais aqui abordados, o método varia-



cional apresenta boa concordância dos resultados com os dados de Hsu [14] e Agrawal [ 1] para número de termos da série definida da solução, menor que os números de termos utilizados naqueles trabalhos.

Outra consideração se faz necessária no que diz respeito à extensão dos resultados do presente trabalho a casos não lineares. Sob o ponto de vista prático, é interessante analisar o efeito da temperatura sobre a condutibilidade térmica do fluido. Nos metais líquidos por exemplo, esse efeito é bastante grande. Neste sentido, é possível estender os funcionais apresentados neste trabalho, para o caso da condutibilidade térmica ser função da temperatura, a exemplo da formulação de Hays [13]. A formulação do problema de Graetz não linear na condutibilidade térmica pode ser encontrada em [ 7 ].

## BIBLIOGRAFIA

1. Agrawal, H.C., Heat transfer in laminar flow between parallel plates at small Péclet numbers. Appl. Sci. Res., Sec. A, Vol. 9, 177-189, 1959-1960.
2. Bhattacharyya, T.K. and Roy, D.N., Laminar heat transfer in a round tube with variable circumferential or arbitrary wall heat flux. Int. J.H. Mass Transfer, Vol. 13, 1057-1060, 1970.
3. Bird, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, F.N., Transport phenomena, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1960.
4. Brown, G.M., Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in a circular or flat conduit. A.I.Ch.E. Journal, Vol. 6, No. 2, p. 179, June, 1960.
5. Carnahan, B. et al., Applied numerical methods, John Wiley, New York, 1969.
6. Collatz, L., The numerical treatment of differential equations. 3rd. edition, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
7. Colle, S., Princípio variacional para a equação da energia - Aplicação à solução do problema de Graetz generalizado. (Trabalho apresentado na UFSC no concurso de professor titular da cadeira de Termodinâmica), fevereiro de 1980.
8. Deavours, C.A., An exact solution for the temperatura distribution in parallel plate Poiseuille flow. Journal of Heat Transfer, p. 489, November, 1974.
9. Dennis, S.C.R., McD. Mercer, A. and Poots, G., Forced heat convection in laminar flow through rectangular ducts. Quart. Appl. Mech., 17 (1959), 285.

10. Dwight, H.B., Tables of integrals and other mathematical data. Macmillan Publishing Co., Inc., 1961
11. Feijoo, R.A., Método das funções de interpolação sequenciais. Tese D.Sc., Publicação PTS-5-76, COPPE/UFRJ, 1975.
12. Gelfand, I.M.; Fomin, S.V., Calculus of variations. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1963.
13. Hays, D.F., Variational formulation of the heat equation: Temperature-dependent thermal conductivity, (in, Non-equilibrium thermodynamics variational techniques and stability, The University of Chicago Press), 1968.
14. Hsu, C.J., Theoretical solutions for low-Péclet-number thermal-entry-region heat transfer in laminar flow through concentric annuli. Int. J. H. Mass Transfer, Vol. 13, 1907-1924, 1970.
15. Hurevicz, V., Lectures on ordinary differential equations. Northoland, 1968.
16. Jakob, M., Heat transfer, Vol. I, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
17. Jones, A.S., Extensions to the solution of the Graetz problem. Int. J.H. Mass Transfer, Vol. 14, 619-623, 1971.
18. Kaplan, W., Advanced calculus, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1963.
19. Kays, W.M., Convective heat and mass transfer. McGraw-Hill Publishing Co. Ltd, 1975.
20. Kreith, F., Princípios da transmissão de calor, Edgar Blücher Ltda, 1977.
21. Kreysig, E., Advanced engineering mathematics, John Wiley and Sons, Inc., 1972.

22. Meirovich, L., Analytical methods in mechanical vibrations. John Wiley, New York, 1968.
23. Michelsen, M.L., and Villadsen, J., The Graetz problem with axial heat conduction. Int. J.H. Mass Transfer, Vol. 17, 1391-1402, 1974.
24. Ou, J.W. and Cheng, K.C., Viscous dissipation effects on thermal entrance region heat transfer in pipes with uniform wall heat flux., Appl. Sci. Res., Sec. A., Vol. 28, p. 289, November, 1973.
25. Petit Bois, G., Tables of indefinite integrals. Dover Publications, Inc., 1961.
26. Savkar, S.D., On a variational formulation of a class of thermal entrance problems. Int. J.H. Mass Transfer, Vol. 13, 1187-1197, 1970.
27. Schneider, P.J., Effect of axial fluid conduction on heat transfer in the entrance regions of parallel plates and tubes. Transactions of the ASME, p. 765, May 1957.
28. Sparrow, E.M. and Siegel, R., Application of variational methods to the thermal entrance region of ducts. In. J. H. Mass Transfer, Vol. 1, 161-172, 1960.
29. Tay, A.O. and De Vahl Davis, G., Application of the finite element method to convection heat transfer between parallel planes. Int. J.H. Mass Transfer, Vol. 14, 1057-1069, 1971.

## APÊNDICE A

## PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA

Este apêndice mostra o desenvolvimento apresentado na referência [7], que é uma generalização do princípio restrito apresentado por Hays na referência [13].

A equação da energia para um fluido isotrópico em escoamento laminar, numa dada região R, toma a seguinte forma:

$$\rho C_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot (-K \nabla T) \quad (1)$$

onde

$$\rho C_V = \rho C_V(T) \quad (2)$$

$$e \quad K = K(T)$$

Tomando as variações das funções T,  $\rho C_V$  e K, tem-se as seguintes funções variadas:

$$\hat{T} = T + \delta \hat{T}$$

$$\hat{K} = K + \delta \hat{K} \quad (3)$$

$$e \quad \hat{\rho} C_V = \rho C_V + \delta \hat{\rho} C_V$$

Colocando as funções expressas em (3) na equação (1), resulta

$$\hat{\rho} C_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \delta \hat{T}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T + \vec{v} \cdot \nabla (\delta \hat{T}) \right) = \nabla \cdot (\hat{K} \nabla \hat{T}) \quad (4)$$

Multiplicando (4) por  $\delta \hat{T}$ , vem

$$\hat{\rho} C_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \delta \hat{T}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T + \vec{v} \cdot \nabla (\delta \hat{T}) \right) \delta \hat{T} = \nabla \cdot (\hat{K} \nabla \hat{T}) \delta \hat{T} \quad (5)$$

mas como

$$\nabla \cdot (\hat{K} \nabla \hat{T}) \delta \hat{T} = \nabla \cdot (\hat{K} \nabla \hat{T} \delta \hat{T}) - K \nabla \hat{T} \cdot \nabla (\delta \hat{T}) \quad (6)$$

A expressão (5) pode ser transformada em

$$-\rho^{\wedge} C_V \left( \frac{\partial \delta \hat{T}}{\partial t} \delta \hat{T} + \bar{v} \cdot \nabla (\delta \hat{T}) \delta \hat{T} \right) = \rho^{\wedge} C_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} \delta \hat{T} + \bar{v} \cdot \nabla T \delta \hat{T} \right) + \\ + \hat{K} \nabla \hat{T} \cdot \nabla (\delta \hat{T}) - \nabla \cdot (\hat{K} \nabla \hat{T} \delta \hat{T}) \quad (7)$$

Tem-se que

$$\frac{\partial \delta \hat{T}}{\partial t} \delta \hat{T} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(\delta \hat{T})^2}{2} \right) \quad (8)$$

$$e \quad \nabla (\delta \hat{T}) \delta \hat{T} = \nabla \left( \frac{(\delta \hat{T})^2}{2} \right) \quad (9)$$

Substituindo (8) e (9) em (7) e dividindo por  $\rho^{\wedge} C_V$ , vem

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(\delta \hat{T})^2}{2} \right) - \bar{v} \cdot \nabla \left( \frac{(\delta \hat{T})^2}{2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \delta \hat{T} + \bar{v} \cdot \nabla T \delta \hat{T} - \\ + \frac{\hat{K}}{\rho^{\wedge} C_V} \nabla \hat{T} \cdot \nabla (\delta \hat{T}) - \nabla \cdot \left( \frac{\hat{K} \nabla \hat{T} \delta \hat{T}}{\rho^{\wedge} C_V} \right) \quad (10)$$

Mas, como

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{K} \nabla \hat{T} \delta \hat{T}}{\rho^{\wedge} C_V} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\hat{K} \nabla \hat{T} \delta \hat{T}}{\rho^{\wedge} C_V} \right) - \hat{K} \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho^{\wedge} C_V} \right) \delta \hat{T} \quad (11)$$

$$e \quad \frac{\hat{K}}{\rho^{\wedge} C_V} \nabla \hat{T} \cdot \nabla (\delta \hat{T}) = \frac{\hat{K}}{2 \rho^{\wedge} C_V} \delta (\nabla \hat{T})^2 \quad (12)$$

A equação (10) pode ser transformada em

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(\delta \hat{T})^2}{2} \right) - \bar{v} \cdot \nabla \left( \frac{(\delta \hat{T})^2}{2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \delta \hat{T} + \bar{v} \cdot \nabla T \delta \hat{T} + \frac{\hat{K}}{2 \rho^{\wedge} C_V} \delta (\nabla \hat{T})^2 - \\ - \nabla \cdot \left( \frac{\hat{K} \nabla \hat{T} \delta \hat{T}}{\rho^{\wedge} C_V} \right) + \hat{K} \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho^{\wedge} C_V} \right) \delta \hat{T} \quad (13)$$

Integrando a equação (13) entre zero e  $t$  e na região  $R$ , resulta,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int_0^t \int_R \frac{\partial}{\partial t} ((\delta T)^2) dV dt - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R \tilde{v} \cdot \nabla ((\delta T)^2) dV dt = \\
 = \int_0^t \int_R \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla T \right) \delta T dV dt + \int_0^t \int_R \left| \frac{K \delta (\nabla T)^2}{\rho \hat{C}_V} + \right. \\
 \left. + K \nabla T \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho \hat{C}_V} \right) \delta T \right| dV dt - \int_0^t \int_{\partial R} \left( \frac{K \nabla T \delta T}{\rho \hat{C}_V} \right) dV dt \quad (14)
 \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência ao último termo do lado direito da equação (14), vem:

$$\int_0^t \int_R \nabla \cdot \left( \frac{K \nabla T \delta T}{\rho \hat{C}_V} \right) dV dt = \int_0^t \int_{\partial R} \frac{K}{\rho \hat{C}_V} \nabla T \cdot \tilde{n} \delta T dA dt \quad (15)$$

onde  $\tilde{n}$  é o vetor normal a  $\partial R$ .

Tem-se que

$$\int_R \tilde{v} \cdot \nabla \left( \frac{(\delta T)^2}{2} \right) dV = \int_R \nabla \cdot \left( \frac{\tilde{v} (\delta T)^2}{2} \right) dV - \int_R \nabla \cdot \tilde{v} \frac{(\delta T)^2}{2} dV \quad (16)$$

ou, aplicando o teorema da divergência de Gauss e usando a lei da conservação da massa,

$$\nabla \cdot (\rho \tilde{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (17)$$

$$e \quad \nabla \cdot (\rho \tilde{v}) = \rho \nabla \cdot \tilde{v} + \tilde{v} \cdot \nabla \rho \quad (18)$$

$$\int_R \tilde{v} \cdot \nabla \left( \frac{(\delta T)^2}{2} \right) dV = \frac{1}{2} \int_{\partial R} \tilde{v} \cdot \tilde{n} (\delta T)^2 dA + \frac{1}{2} \int_R \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla \rho \right) (\delta T)^2 dV \quad \dots (19)$$

Colocando (19) e (15) em (14), vem,

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R \frac{\partial}{\partial t} (\delta\hat{T})^2 dV dt - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\partial R} \tilde{v} \cdot \tilde{n} (\delta\hat{T})^2 dA dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla \rho \right) \frac{(\delta\hat{T})^2}{\rho} dV dt = \int_0^t \int_R \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla T \right) \delta\hat{T} + \right. \\
 & + \frac{K}{2 \rho C_V} \delta(\nabla\hat{T})^2 + K \nabla\hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho \hat{C}_V} \right) \delta\hat{T} \left. \right] dV dt - \\
 & - \int_0^t \int_{\partial R} \frac{K}{\rho \hat{C}_V} \nabla\hat{T} \cdot \tilde{n} \delta\hat{T} dV dt \tag{20}
 \end{aligned}$$

Admitindo que o escoamento é incompressível e lembrando que a velocidade é nula no contorno da região R, (20) fica,

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R \frac{\partial}{\partial t} (\delta\hat{T})^2 dV dt = \int_0^t \int_R \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla T \right) \delta\hat{T} + \right. \\
 & + \frac{K}{2 \rho \hat{C}_V} \delta(\nabla\hat{T})^2 + K \nabla\hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho \hat{C}_V} \right) \delta\hat{T} \left. \right] dV dt - \int_0^t \int_{\partial R} \frac{K}{\rho \hat{C}_V} \nabla\hat{T} \cdot \tilde{n} \delta\hat{T} dA dt \tag{21}
 \end{aligned}$$

Tem-se que

$$\frac{K}{2 \rho \hat{C}_V} \delta(\nabla\hat{T})^2 + K \nabla\hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho \hat{C}_V} \right) \delta\hat{T} = K \nabla\hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta\hat{T}}{\rho \hat{C}_V} \right) \tag{22}$$

e, utilizando as expressões (3), vem

$$K \nabla\hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta\hat{T}}{\rho \hat{C}_V} \right) = (K + \delta K) \nabla\hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta\hat{T}}{\rho C_V + \delta \rho \hat{C}_V} \right) \tag{23}$$

ou



$$\hat{K} \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta \hat{T}}{\hat{\rho} C_V} \right) = (K + \delta K) \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta \hat{T}}{\rho C_V} \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta \hat{\rho} C_V}{\rho C_V}\right)} \right) \quad (24)$$

mas, como  $\delta \hat{\rho} C_V / \rho C_V$  é muito pequeno, vale a expressão abaixo:

$$\frac{1}{1 + \frac{\delta \hat{\rho} C_V}{\rho C_V}} = 1 - \frac{\delta \hat{\rho} C_V}{\rho C_V} \quad (25)$$

Portanto, (23) fica

$$\hat{K} \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta \hat{T}}{\hat{\rho} C_V} \right) = (K + \delta K) \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta \hat{T}}{\rho C_V} \left(1 - \frac{\delta \hat{\rho} C_V}{\rho C_V}\right) \right) \quad (26)$$

ou, desprezando os termos de ordem superior em  $\delta$ ,

$$\hat{K} \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta \hat{T}}{\hat{\rho} C_V} \right) = K \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta \hat{T}}{\rho C_V} \right) \quad (27)$$

Colocando (27) em (22) e (22) em (21), vem

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R \frac{\partial}{\partial t} (\delta \hat{T})^2 dV dt &= \int_0^t \int_R \left[ \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \hat{T} \right) \delta \hat{T} + \right. \\ &+ \left. K \nabla \hat{T} \cdot \nabla \left( \frac{\delta \hat{T}}{\rho C_V} \right) \right] dV dt - \int_0^t \int_{\partial R} \frac{K \nabla \hat{T} \cdot \bar{n}}{\rho C_V} \delta \hat{T} dA dt \end{aligned} \quad (28)$$

As funções  $\hat{K}$  e  $\hat{\rho} C_V$  do último termo da equação (28) foram substituídas por  $K$  e  $\rho C_V$ , porque é possível obter, de maneira análoga à obtenção de (27), a seguinte expressão:

$$\frac{\hat{K} \nabla \hat{T}}{\hat{\rho} C_V} = \frac{K \nabla \hat{T}}{\rho C_V} \quad (29)$$

Admitindo que  $\rho C_V$  seja constante e que o regime seja

permanente, (28) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{2} \int_R (\delta \hat{T})^2 dV &= \frac{1}{\rho C_V} \int_0^t \int_R [\rho C_V \tilde{v} \cdot \nabla T \delta \hat{T} + \\
 &+ \frac{K}{2} \delta (\nabla \hat{T})^2] dV dt - \\
 - \frac{1}{\rho C_V} \int_0^t \int_{\partial R} K \nabla \hat{T} \cdot \tilde{n} \delta \hat{T} dA dt &\leq 0 \quad (30)
 \end{aligned}$$

Deve-se agora considerar as condições de contorno às quais está submetida a equação (1). Se a temperatura for prescrita em  $\partial R$ ,  $\delta \hat{T}$  será nula na fronteira e portanto o último termo do lado direito da equação (30) se anulará. Se, por outro lado, o fluxo for prescrito na fronteira, digamos  $q(\partial R)$ , tem-se

$$K \nabla \hat{T} \cdot \tilde{n} = q \quad \text{em } \partial R \quad (31)$$

Então, para temperatura prescrita, vem,

$$- \frac{1}{2} \int_R (\delta \hat{T})^2 dV = \frac{1}{\rho C_V} \delta \int_R [\rho C_V \tilde{v} \cdot \nabla T \hat{T} + \frac{K}{2} (\nabla \hat{T})^2] dV \quad (32)$$

onde o sinal de variação  $\delta$  foi alternado com o sinal de integração.

Para fluxo prescrito, vem,

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{2} \int_R (\delta \hat{T})^2 dV &= \frac{1}{\rho C_V} \delta \int_R [\rho C_V \tilde{v} \cdot \nabla T \hat{T} + \frac{K}{2} (\nabla \hat{T})^2] dV - \\
 - \frac{1}{\rho C_V} \delta \int_{\partial R} q \hat{T} dA &\quad (33)
 \end{aligned}$$

Pode-se notar que, nas expressões (32) e (33), o termo da esquerda é uma quantidade quadrática negativa definida que só se anula quando  $\delta\hat{T}$  for zero. Portanto, os termos da direita, que são as primeiras variações das integrais, serão nulos quando  $\delta\hat{T} = 0$ , isto é,  $\hat{T} = T$ . Como se sabe do cálculo variacional, as integrais são funcionais que são extremalizadas quando a função  $\hat{T}$  for solução de (1); isto ocorre quando  $\hat{T} = T$ .

Pode-se então propor o funcional

$$J_1(T, \hat{T}) = \int_R (\rho C_v \bar{v} \cdot \nabla T \hat{T} + \frac{K}{2} (\nabla \hat{T})^2) dV \quad (34)$$

que é aplicável a problemas com temperatura prescrita, e o funcional

$$J_2(T, \hat{T}) = \int_R (\rho C_v \bar{v} \cdot \nabla T \hat{T} + \frac{K}{2} (\nabla \hat{T})^2) dV - \int_{\partial R} q \hat{T} dA \quad (35)$$

que é aplicável a problemas com fluxo prescrito.

## APÊNDICE B

## INTEGRAIS DOS PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Neste apêndice estão apresentadas as expressões analíticas dos termos das matrizes A, B e H dos problemas de aplicação.

Para os termos da equação (3.71), as expressões são as seguintes:

$$H_{ij} = \frac{(a \ln (1/\sigma))^2}{N_{pe}^2} \left[ \frac{(1/\sigma)^2 - 1}{(2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} - \frac{(1/\sigma)^2 - 1}{(2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} \right]$$

para  $i+j$  par, ou

$$H_{ij} = \frac{(a \ln (1/\sigma))^2}{N_{pe}^2} \left[ \frac{(1/\sigma)^2 + 1}{(2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} - \frac{(1/\sigma)^2 + 1}{(2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} \right]$$

para  $i+j$  ímpar.

$$B_{ij} = \delta_{ij} \frac{\pi^2 ij}{2 \ln (1/\sigma)}$$

$$A_{ij} = \frac{2 N_{pe}^2}{C_2} H_{ij} + \frac{a^2 2 \ln (1/\sigma)}{C_2} (I_1 + \frac{C_1 \ln (1/\sigma)}{2} (I_2' - I_2''))$$

$$\text{onde } I_1 = \frac{C_1 \ln (2a(1 - \sigma))}{a^2 \ln (1/\sigma)} N_{pe}^2 H_{ij}$$

$$I'_2 = \frac{-(1/\sigma)^2 2 \ln (1/\sigma)}{(2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} - \frac{(1/\sigma)^2 ((i\pi - j\pi)^2 - (2 \ln (1/\sigma))^2)}{((2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2)^2} +$$

$$+ \frac{((2 \ln (1/\sigma))^2 - (i\pi - j\pi)^2)}{((2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2)^2}$$

para  $i+j$  ímpar, ou

$$I'_2 = \frac{(1/\sigma)^2 2 \ln (1/\sigma)}{(2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} - \frac{(1/\sigma)^2 ((2 \ln (1/\sigma))^2 - (i\pi - j\pi)^2)}{((2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2)^2} +$$

$$+ \frac{((2 \ln (1/\sigma))^2 - (i\pi - j\pi)^2)}{((2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2)^2}$$

para  $i+j$  par.

$$I''_2 = \frac{-(1/\sigma)^2 2 \ln (1/\sigma)}{(2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} - \frac{(1/\sigma)^2 ((i\pi + j\pi)^2 - (2 \ln (1/\sigma))^2)}{((2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2)^2} +$$

$$+ \frac{((2 \ln (1/\sigma))^2 - (i\pi + j\pi)^2)}{((2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2)^2}$$

para  $i+j$  ímpar, ou

$$I''_2 = \frac{(1/\sigma)^2 2 \ln (1/\sigma)}{(2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} - \frac{(1/\sigma)^2 ((2 \ln (1/\sigma))^2 - (i\pi + j\pi)^2)}{((2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2)^2} +$$

$$+ \frac{((2 \ln (1/\sigma))^2 - (i\pi + j\pi)^2)}{((2 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2)^2}$$

para  $i+j$  par.

$$I_3 = (2a(1 - \sigma))^2 2 \ln (1/\sigma) \left[ \frac{(1/\sigma)^4 - 1}{(4 \ln (1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} - \right.$$

$$- \frac{(1/\sigma)^4 - 1}{(4 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2}]$$

para  $i+j$  ímpar, ou

$$I_3 = (2a(1 - \sigma)^2 \ln(1/\sigma) \left[ \frac{(1/\sigma)^4 - 1}{(4 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} - \frac{(1/\sigma)^4 - 1}{(4 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} \right]$$

A constante  $a$  é dada pela expressão abaixo:

$$a = \frac{\sigma}{2(1 - \sigma)}$$

Para os termos da equação (4.56), as expressões são as seguintes:

$$H_{ij} = \frac{(a \ln(1/\sigma))^2}{N_{pe}^2} \left[ \frac{(1/\sigma)^2 - 1}{(2 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} + \frac{(1/\sigma)^2 - 1}{(2 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} \right]$$

para  $i+j$  par, ou

$$H_{ij} = - \frac{(a \ln(1/\sigma))^2}{N_{pe}^2} \left[ \frac{(1/\sigma)^2 + 1}{(2 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} + \frac{(1/\sigma)^2 + 1}{(2 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} \right]$$

$$B_{ij} = \delta_{ij} \frac{\pi^2}{2 \ln(1/\sigma)}$$

$$A_{ij} = \frac{2 N_{pe}^2}{C_2} H_{ij} + \frac{a^2 2 \ln(1/\sigma)}{C_2} (I_1 + \frac{C_1 \ln(1/\sigma)}{2} (I_1' + I_2'') - I_3)$$

$$I_1 = \frac{C_1 \ln(2a(1-\sigma)) N_{pe}^2}{a^2 \ln(1/\sigma)} H_{ij}$$

$$I_2' = (1/\sigma)^2 \left[ \frac{\cos((i\pi + j\pi) - \alpha)}{R_0} - \frac{\cos((i\pi + j\pi) - 2\alpha)}{R_0^2} \right] + \frac{\cos(2\alpha)}{R_0^2}$$

onde

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{(i\pi + j\pi)}{2 \ln(1/\sigma)} \right)$$

$$R_0 = (i\pi + j\pi)^2 + (2 \ln(1/\sigma))^2$$

$$I_2'' = (1/\sigma)^2 \left[ \frac{\cos((i\pi - j\pi) - \alpha)}{R_0} - \frac{\cos((i\pi - j\pi) - 2\alpha)}{R_0^2} \right] + \frac{\cos(2\alpha)}{R_0^2}$$

onde

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{(i\pi - j\pi)}{2 \ln(1/\sigma)} \right)$$

$$R_0 = (i\pi - j\pi)^2 + (2 \ln(1/\sigma))^2$$

$$I_3 = (2a(1-\sigma))^2 2 \ln(1/\sigma) \left[ \frac{(1/\sigma)^4 - 1}{(4 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} + \frac{(1/\sigma)^4 - 1}{(4 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} \right]$$

para  $i+j$  par, ou

$$I_3 = -(2a(1-\alpha))^2 2 \ln(1/\alpha) \left[ \frac{(1/\sigma)^4 + 1}{(4 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi + j\pi)^2} + \frac{(1/\sigma)^4 + 1}{(4 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2} \right]$$

$$+ \frac{(1/\sigma)^4 + 1}{(4 \ln(1/\sigma))^2 + (i\pi - j\pi)^2}]$$

$$t_j = a^2 \frac{((1/\sigma)^2 - 1)}{((j\pi)^2 + (2 \ln(1/\sigma))^2)} - M$$

para  $j$  par, ou

$$t_j = -a^2 \frac{((1/\sigma)^2 + 1)}{(j\pi)^2 + (2 \ln(1/\sigma))^2} - M$$

para  $j$  ímpar.

onde

$$M = \frac{8\sigma(M_1 - M_2 + M_3) a^2 \ln(1/\sigma)}{(1 + \sigma) C_2}$$

onde

$$M_1 = \frac{((1/\sigma)^2 - 1) 2 \ln(1/\sigma) (1 + C_1 \ln(1/\sigma))}{((2 \ln(1/\sigma))^2 + (j\pi)^2)}$$

para  $j$  par, ou

$$M_1 = - \frac{((1/\sigma)^2 + 1) 2 \ln(1/\sigma) (1 + C_1 \ln(1/\sigma))}{((2 \ln(1/\sigma))^2 + (j\pi)^2)}$$

para  $j$  ímpar.

$$M_2 = \frac{((1/\sigma)^4 - 1) \sigma^2 4 \ln(1/\sigma)}{((4 \ln(1/\sigma))^2 + (j\pi)^2)}$$

para  $j$  par, ou

$$M_2 = - \frac{((1/\sigma)^4 + 1) \sigma^2 4 \ln(1/\sigma)}{((4 \ln(1/\sigma))^2 + (j\pi)^2)}$$



para  $j$  ímpar.

$$M_3 = C_1 \ln(1/\sigma) \left[ (1/\sigma)^2 \left( \frac{\cos(j\pi - \alpha)}{R_0} - \frac{\cos(j\pi - 2\alpha)}{R_0^2} \right) + \frac{\cos 2\alpha}{R_0^2} \right]$$

onde

$$R_0 = (j\pi)^2 + (2 \ln(1/\sigma))^2$$

e

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{j\pi}{2 \ln(1/\sigma)} \right)$$