

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

MODELO MATEMÁTICO PARA O CÁLCULO DE ESCOAMENTO  
TURBULENTO INTERNO

Dissertação submetida à Universidade Federal  
de Santa Catarina para a obtenção do grau de  
Mestre em Ciências.

Vicente de Paulo Nicolau

julho - 1980

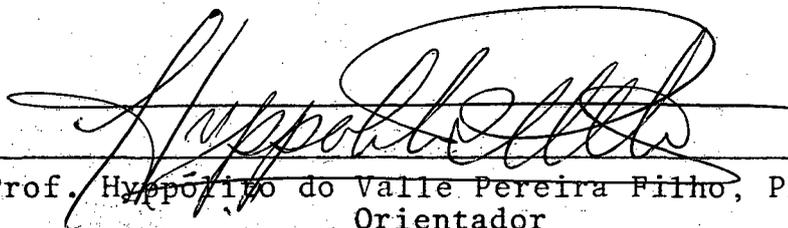
MODELO MATEMÁTICO PARA O CÁLCULO DE ESCOAMENTO  
TURBULENTO INTERNO

Vicente de Paulo Nicolau

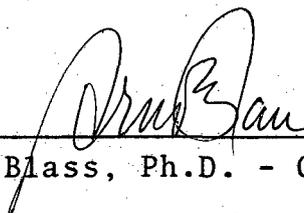
Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção  
do título de

Mestre em Ciências

área de concentração: Termodinâmica e aprovada em sua  
forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

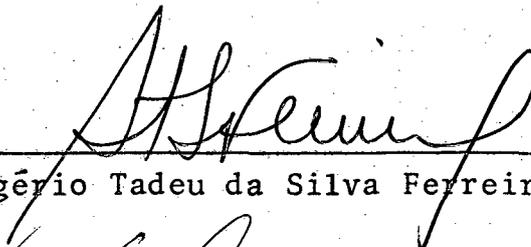


Prof. Hypólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.  
Orientador

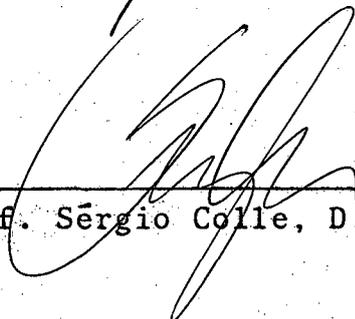


Prof. Arno Blass, Ph.D. - Coordenador

Banca examinadora:



Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.



Prof. Sérgio Colle, D.Sc.

À Leila, minha esposa  
e aos nossos pais

## AGRADECIMENTOS

- À Comissão Nacional de Energia Nuclear, pelo suporte financeiro;
- Ao Departamento de Processamento de Dados da UFSC, pela execução dos trabalhos computacionais;
- Ao orientador, prof. Hyppólito do Valle Pereira Filho, pelo apoio e dedicação dispensados;
- Aos colegas da divisão de Termotécnica, pelo incentivo recebido;
- A todos os que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

## ÍNDICE

|   | pág. |
|---|------|
| SIMBOLOGIA.....   | i    |
| RESUMO.....   | iv   |
| ABSTRACT.....   | vi   |
| 1 - INTRODUÇÃO.....   | 1    |
| 2 - EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA.....   | 6    |
| 2.1 - Equações Básicas na Forma Vetorial.....                               | 6    |
| 2.2 - Obtenção da Equação na Forma Vetorial.....                            | 8    |
| 2.3 - Sistema de Coordenadas Utilizado e Simplificações do<br>Problema..... | 10   |
| 2.4 - Equações em Coordenadas Cilíndricas.....                              | 10   |
| 3 - HIPÓTESES DE FECHAMENTO.....  | 14   |
| 3.1 - Inversão da Coordenada Radial.....                                    | 14   |
| 3.2 - Modelos Utilizados.....   | 16   |
| 3.3 - Condições de Contorno.....  | 18   |
| 4 - TRATAMENTO NUMÉRICO.....  | 19   |
| 4.1 - Adimensionalização.....   | 19   |
| 4.2 - Discretização.....  | 21   |
| 4.2.1 - Definição da Grade.....   | 22   |
| 4.2.2 - Equação na Forma Discreta.....                                      | 24   |
| 4.3 - Valor das Constantes.....   | 28   |

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 4.4 -   | Convergência e Perfis Iniciais.....  | 29 |
| 4.5 -   | Fluxograma.....  | 30 |
| 5 -     | ANÁLISE DOS RESULTADOS.....  | 34 |
| 5.1 -   | Resultados Obtidos.....  | 34 |
| 5.2 -   | Discussão dos Resultados.....  | 35 |
| 5.2.1 - | Perfil de Velocidade.....  | 35 |
| 5.2.2 - | Distribuição da Tensão Turbulenta de Reynolds.....                             | 37 |
| 5.2.3 - | Coeficiente de Fricção.....  | 40 |
| 5.2.4 - | Distribuição de Energia Cinética Turbulenta.....                               | 43 |
| 5.2.5 - | Balço de Energia Cinética Turbulenta.....                                      | 46 |
| 5.3 -   | Conclusões.....  | 52 |
|         | BIBLIOGRAFIA.....  | 53 |
|         | APÊNDICES  |    |
|         | APÊNDICE 1 - PROCESSO DE MÉDIA.....  | 55 |
|         | APÊNDICE 2 - EQUAÇÕES NA FORMA TENSORIAL.....                                  | 61 |
|         | APÊNDICE 3 - EQUAÇÕES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS.....                          | 66 |
|         | APÊNDICE 4 - BALANÇO ENERGÉTICO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA..... | 82 |

## SIMBOLOGIA

|                      |   |  |
|----------------------|---|--|
| $A_j, B_j, C_j, D_j$ | - | Coeficientes da Equação (48)                               |
| $C_1$                | - | Constante para a taxa de dissipação                        |
| $C_f$                | - | Coeficiente de fricção                                     |
| $\nu D$              | - | Taxa de dissipação viscosa                                 |
| DISS                 | - | Taxa de dissipação viscosa - forma adimensional            |
| DIFPQ                | - | Taxa de difusão por pressão e energia cinética             |
| DIFV                 | - | Taxa de difusão viscosa                                    |
| $e^j$                | - | Vetor de base contravariante                               |
| $e_j$                | - | Vetor de base covariante                                   |
| $g^{ij}$             | - | Componente contravariante do tensor métrico                |
| $g_{ij}$             | - | Componente covariante do tensor métrico                    |
| $G_j, GP_j$          | - | Coeficientes definidos nas equações (50) e (51)            |
| H                    | - | Função definida pela equação (21)                          |
| K                    | - | Constante da equação (24), igual a 0,4                     |
| $\lambda$            | - | Escala de turbulência, definida pela equação (23)          |
| m                    | - | Número máximo de pontos da grade                           |
| P                    | - | Pressão  |
| PESTR                | - | Parâmetro de estrutura                                     |
| PROD                 | - | Taxa de produção da equação da energia cinética turbulenta |
| Q                    | - | Energia cinética turbulenta                                |
| Q                    | - | Energia cinética turbulenta adimensional                   |
| r                    | - | Coordenada radial  |

|                   |   |
|-------------------|---|
| $R$               | - Raio interno do tubo  |
| $Re$              | - Número de Reynolds baseado no diâmetro e na velocidade de máxima  |
| $R_q$             | - Número de Reynolds da turbulência local                           |
| $R_{q_0}$         | - Constante da equação (21), igual a 110                            |
| $S$               | - Razão da progressão geométrica de definição da grade.             |
| $u^*$             | - Velocidade de fricção   |
| $\vec{V}$         | - Vetor velocidade  |
| $\bar{V}^j$       | - Componente da velocidade média na direção $j$                     |
| $v^j$             | - Componente da flutuação de velocidade na direção $j$              |
| $V$               | - Velocidade média adimensional ; $V = \bar{V}^z / \bar{V}_{max}^z$ |
| $\bar{V}_{max}^z$ | - Máxima velocidade média axial                                     |
| $V^+$             | - Velocidade média adimensional ; $V^+ = \bar{V}^z / u^*$           |
| $VYVZ$            | - Componente adimensional do tensor de Reynolds                     |
| $y$               | - Coordenada radial com origem na parede do tubo                    |
| $y^+$             | - Coordenada radial adimensionalizada por: $y^+ = y u^* / \nu$      |
| $z$               | - Coordenada axial  |
| $\alpha$          | - Função definida pela equação (24)                                 |
| $\beta$           | - Constante introduzida com a modelação, igual a 0,2                |
| $\Gamma_{jk}^i$   | - Símbolo de Christoffel  |
| $\delta_j^i$      | - Delta de Kronecker  |
| $\Delta \eta_j$   | - Valor dos intervalos da coordenada $\eta_j$                       |
| $\epsilon$        | - Tolerância definida na equação (53)                               |
| $\eta$            | - Coordenada radial adimensional, igual a $y/R$                     |
| $\theta$          | - Coordenada angular  |
| $\mu$             | - Viscosidade absoluta  |
| $\nu$             | - Viscosidade cinemática  |
| $\rho$            | - Massa específica do fluido  |
| $\tau_0$          | - Tensão cisalhante na parede do tubo                               |

- $\phi$  - Razão entre a velocidade de fricção e a velocidade máxima do escoamento
- $(\bar{\quad})$  - Valor médio definido pela equação (A1.1)
- $(\quad)_{,j}$  - Derivada parcial em relação à coordenada  $j$
- $(\quad)_j$  - Componente covariante na direção  $j$
- $(\quad)^j$  - Componente contravariante na direção  $j$
- $(\underline{\quad})$  - Grandeza vetorial

## R E S U M O

As equações de Navier-Stokes e conservação da energia cinética turbulenta são aplicadas ao escoamento turbulento incompressível, completamente desenvolvido, no interior de tubo.

Os modelos matemáticos foram adaptados de modelos originalmente empregados na solução da camada limite sobre placa plana. A modelação aplica-se à tensão turbulenta, aos termos de produção, difusão e dissipação na equação da energia cinética turbulenta.

As equações referidas foram obtidas em coordenadas cilíndricas, partindo-se da forma vetorial e depois tensorial, incluindo finalmente as simplificações inerentes ao problema.

Como o sistema a ser resolvido compõe-se de equações diferenciais ordinárias não lineares, não é passível de solução analítica. Nestas circunstâncias, para contornar esta dificuldade ou esta impossibilidade de solução analítica, utiliza-se o método numérico de diferenças finitas.

Dentre os resultados obtidos, o coeficiente de fricção, a distribuição de velocidade, bem como a distribuição de tensão turbulenta apresentam um comportamento satisfatório, para os diversos números de Reynolds. A distribuição de energia cinética turbulenta concorda com os valores experimentais apenas no aspecto qualitativo, com algumas discrepâncias no aspecto quantitativo.

## A B S T R A C T

The Navier-Stokes and the turbulent kinetic energy equations for the incompressible, turbulent and fully developed pipe flow, were solved by a finite difference procedure. Mathematical models for the turbulent shear stress and for the diffusion and dissipation of the turbulent kinetic energy in the flat-plate boundary layer were modified and used in the calculation of the pipe flow.

The equations were obtained firstly in vectorial form, then in tensorial form and finally in cylindrical coordinates.

Friction coefficient and the distributions of the mean velocity, turbulent shear stress and turbulent kinetic energy were obtained at different Reynolds numbers. Those numerical results were compared with experimental data and the agreement was good in whole cross section of the flow.

## CAPÍTULO 1

### I N T R O D U Ç Ã O

Em 1904, Ludwig Prandtl introduziu um conceito revolucionário na Mecânica dos Fluidos, relativo ao escoamento de fluidos reais ao longo de um contorno sólido. Segundo o mesmo o efeito da viscosidade é considerável em apenas uma região bastante fina chamada "camada limite" junto ao referido contorno. A partir deste ponto, os escoamentos passaram a ser tratados como viscosos no interior da camada limite e ideais fora da mesma.

Por outro lado, Osborne Reynolds (1883) demonstrou, através de seu clássico experimento, a existência de dois tipos de escoamentos: o laminar e o turbulento.

A partir dos conceitos acima, os esforços foram concentrados na solução das equações relativas às camadas limites laminar e turbulenta, existindo um grande número de trabalhos teóricos e experimentais já publicados neste sentido.

O escoamento laminar devido à sua relativa simplicidade em relação ao turbulento, foi desde cedo abordado, e soluções ainda

que aproximadas, foram obtidas.

O mesmo não ocorreu com o escoamento turbulento, de maior complexidade por ser um escoamento de caráter randômico. Devido às flutuações e à aleatoriedade destas flutuações apresentadas pelas componentes da velocidade e pela pressão, sérias dificuldades são introduzidas na resolução das equações referentes a este tipo de escoamento.

Reynolds sugeriu que este movimento aleatório fosse decomposto em uma parte média e uma parte flutuante. A partir daí, a camada limite passou a ser calculada somente com base nos valores médios do escoamento para a aplicação direta em engenharia, como por exemplo, no cálculo do coeficiente de fricção.

Mas, com a introdução deste conceito de valor médio e flutuante, novas incógnitas surgem devido a não linearidade das equações. Na equação de Navier-Stokes surge o termo chamado "tensão turbulenta de Reynolds", cujas componentes são médias de duplas correlações entre componentes das flutuações de velocidade.

A indeterminação pode ser resolvida com a introdução das hipóteses de fechamento ou modelos, que consistem em relações matemáticas entre certas incógnitas, tornando o problema determinado (número de equações igual ao número de incógnitas).

Boussinesq deu o primeiro passo neste sentido com a introdução do conceito de "viscosidade turbulenta", a partir de uma analogia entre a tensão viscosa e a tensão turbulenta de Reynolds.

Prandtl (1925) propôs a hipótese do "comprimento de mistura", que relaciona a viscosidade turbulenta com o gradiente de ve

locidade média, como modelo para o tensor de Reynolds.

Von Kármán (1930), introduziu a chamada "hipótese de similaridade", expressando o comprimento de mistura em função da primeira e segunda derivada da velocidade média.

O processo consistia, em última análise, na busca de modelos para a tensão turbulenta, que possibilitassem a solução da equação de Navier-Stokes.

Com o advento das modernas máquinas de computação surgiram inúmeros trabalhos sobre a resolução de sistemas de equações diferenciais parciais não lineares. E este avanço repercutiu favoravelmente na Mecânica dos Fluidos, particularmente no cálculo de escoamentos turbulentos. Novas equações foram criadas a partir da equação de Navier-Stokes e novos modelos foram testados, abrangendo a solução de camada limite em placa plana, camada limite com gradiente de pressão, escoamento em tubo, etc.

O presente trabalho consiste em mais uma contribuição à solução de escoamento turbulento. Com este objetivo, faz parte de uma linha de pesquisa do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina, sendo precedido pelos trabalhos de Pereira Filho [12], Dutra [05], Ferreira [06] e Lima [11].

Pereira Filho [12] resolveu um sistema composto por quatro equações: equação da continuidade, quantidade de movimento, energia cinética turbulenta e equação da conservação da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta, aplicadas a um escoamento incompressível em uma camada limite turbulenta bidimensional, em placa

plana e também com gradiente de pressão.

Dutra [05] abordou o problema de escoamento incompressível em uma camada limite turbulenta sobre superfícies curvas, em regime permanente, utilizando as equações da continuidade e conservação da quantidade de movimento. Para contornar o problema de fechamento, modelou a viscosidade turbulenta em duas equações, para duas regiões distintas do escoamento: a região junto à parede e a região afastada da parede.

Ferreira [06] resolveu um sistema composto por três equações fundamentais: equação da continuidade, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia cinética turbulenta. Estas equações foram aplicadas ao escoamento incompressível em uma camada limite turbulenta sobre superfícies curvas. Seus modelos, baseados em Beckwith e Bushnell [02] incluíam o conceito de parâmetro de estrutura e relações entre a dissipação viscosa e a energia cinética turbulenta e entre o termo de difusão e o gradiente de energia cinética.

Líma [11] resolveu as equações da continuidade, conservação da quantidade de movimento e da energia, para o escoamento turbulento incompressível em camada limite bidimensional sobre placa plana e também sobre superfícies curvas. Introduziu modelos relativos à viscosidade turbulenta e à difusibilidade térmica turbulenta.

Este trabalho, por sua vez, surgiu do interesse em dar continuidade ao objetivo inicial de resolução de escoamentos turbulentos. Refere-se o mesmo ao escoamento turbulento incompressível no interior de um tubo de paredes lisas, com perfil de velocidade

completamente desenvolvido. Duas equações o integram:

- Equação de Navier-Stokes, na direção axial do escoamento;
- Equação da conservação da energia cinética turbulenta.

Os modelos utilizados são adaptados de Beckwith e Bushnell [02], também utilizados por Ferreira [06], e ainda com uma escala de turbulência apresentada por Konstantinov [09].

## CAPÍTULO 2

### EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

Neste capítulo são apresentadas as equações utilizadas na solução do problema. O conceito de valor médio e flutuante é introduzido e a equação da conservação da energia cinética turbulenta é obtida. As equações que inicialmente estão na forma vetorial são representadas em seguida na forma tensorial e finalmente aplicadas ao sistema de coordenadas cilíndricas, com introdução das simplificações físicas do problema .

#### 2.1 - Equações Básicas na Forma Vetorial

As equações básicas do problema são obtidas a partir das seguintes equações fundamentais:

a) Equação da Continuidade :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

(1)

b) Equação de Navier-Stokes (desprezando-se as forças de campo) :

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \underline{v} \quad (2)$$

As equações são relativas ao escoamento turbulento instantâneo, com variáveis de valor instantâneo que apresentam flutuações aleatórias, impossibilitando a solução destas equações.

Procurando viabilizar a solução de escoamentos turbulentos, torna-se comum a introdução do processo de média temporal. Através da mesma, as variáveis são representadas por um valor médio mais um valor flutuante, conforme o Apêndice 1.

Obtém-se por uma manipulação matemática adequada, a equação de Navier-Stokes para o escoamento médio, as equações da continuidade para o escoamento médio e flutuante e ainda a equação da conservação da energia cinética turbulenta. As equações apresentam a seguinte forma:

a) Equação da Continuidade - escoamento médio :

$$\nabla \cdot \bar{\underline{v}} = 0 \quad (3)$$

b) Equação da Continuidade - escoamento flutuante :

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (4)$$

c) Equação de Navier-Stokes - escoamento médio :

$$\nabla \cdot (\bar{\underline{v}} \bar{\underline{v}}) + \nabla \cdot (\overline{\underline{v} \underline{v}}) = - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{\underline{v}} \quad (5)$$

d) Equação da Conservação da Energia Cinética Turbulenta :

A energia cinética turbulenta ( $\bar{Q}$ ), representa uma ener-

gia cinética por unidade de massa e é definida do seguinte modo :

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} ( \overline{v \cdot v} )$$

A equação da conservação para esta variável é derivada da equação de Navier-Stokes para o escoamento flutuante, equação ( A1.7 ) . Esta é multiplicada escalarmente por  $v$ , com a posterior aplicação do processo de média, resultando em :

$$\overline{v \cdot (v \cdot \nabla) v} + \overline{v \cdot \nabla Q} + \nabla \cdot (\overline{v Q}) = - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\overline{v p}) + v \nabla \cdot \nabla \bar{Q} - v \bar{D} \quad (6)$$

$$Q = \frac{1}{2} ( v \cdot v ) \quad - \text{energia cinética turbulenta instantânea ;}$$

$$v \bar{D} = v \overline{\nabla v : \nabla v} \quad - \text{taxa de dissipação viscosa}$$

## 2.2 - Obtenção das Equações na Forma Tensorial :

Aplicando os conceitos tensoriais [07], ao sistema de equações proposto, obtêm-se as mesmas ainda em coordenadas genéricas, na forma tensorial, conforme o Apêndice 2. As componentes das velocidades média e flutuante aparecem na forma contravariante.

a) Equação da Continuidade - escoamento médio :

$$\bar{v}^j_{,j} + \bar{v}^j \Gamma^i_{ji} = 0 \quad (7)$$

b) Equação da Continuidade - escoamento flutuante :

$$v^j_{,j} + v^j \Gamma^i_{ji} = 0 \quad (8)$$

onde  $\Gamma_{ji}^i$  é o símbolo de Christoffel [07].

c) Equação de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} & \{ (\bar{V}^j \bar{V}^i)_{,i} + \bar{V}^l \bar{V}^i \Gamma_{li}^j + \bar{V}^j \bar{V}^k \Gamma_{ki}^i + \overline{(v^j v^i)}_{,i} + \overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^j + \\ & + \overline{v^j v^k} \Gamma_{ki}^i \} e_j = - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,i} g^{ji} e_j + v (\bar{V}^j_{,li} g^{li} + 2 \bar{V}^l_{,k} \Gamma_{li}^j g^{ki} + \\ & - \bar{V}^j_{,l} \Gamma_{lk}^l g_{ik} + \bar{V}^l \Gamma_{lk,i}^j g^{ki} + \bar{V}^l \Gamma_{lm}^k \Gamma_{ki}^j g^{mi} + \\ & - \bar{V}^l \Gamma_{lk}^j \Gamma_{im}^k g^{mi} ) e_j ; \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $g^{ij}$  e  $g_{ij}$  são as componentes do tensor métrico, de base contravariante e covariante, respectivamente;  $e_j$  é o vetor de base covariante.

d) Equação de Conservação da Energia Cinética Turbulenta :

$$\begin{aligned} & \bar{V}^i \bar{Q}_{,i} + \overline{v^i v^j} \bar{V}^l_{,j} g_{li} + \overline{v^i v^j} \bar{V}^l \Gamma_{lj}^m g_{mi} + \overline{(v^i Q)}_{,i} + \\ & + \overline{v^j Q} \Gamma_{ji}^i = - \frac{1}{\rho} \overline{(v^j p)}_{,j} - \frac{1}{\rho} \overline{v^j p} \Gamma_{ji}^i + \\ & + v \{ \bar{Q}_{,ji} g^{ji} - \bar{Q}_{,j} \Gamma_{il}^j g^{li} \} - v \bar{D} \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $\bar{Q} = \frac{1}{2} \overline{(v \cdot v)} = \frac{1}{2} \overline{v^i v^j} g_{ij}$  ;

$$\begin{aligned} v \bar{D} = & v \{ \overline{v^j_{,i} v^k_{,l}} g_{jk} g^{il} + 2 \overline{v^j_{,i} v^k} \Gamma_{kl}^n g_{jn} g^{il} + \\ & + \overline{v^j v^k} \Gamma_{ji}^m \Gamma_{kl}^n g_{mn} g^{il} \} \end{aligned}$$

### 2.3 - Sistema de Coordenadas Utilizado e Simplificações do Problema

Como o problema em estudo refere-se a um escoamento no interior de um tubo cilíndrico, considerou-se mais adequado o uso de coordenadas cilíndricas. Este sistema apresenta as componentes  $(r, \theta, z)$  sendo "r" a coordenada radial, " $\theta$ " o ângulo polar e "z" a coordenada coincidente com o eixo do tubo.

Partindo da hipótese de um escoamento completamente desenvolvido e axi-simétrico, várias simplificações podem ser introduzidas nas equações, que seriam :

-A velocidade média na direção z ( $\bar{v}^z$ ), seria função de r, somente :  $\bar{v}^z = \bar{v}^z(r)$  ;

-As velocidades médias nas direções r e  $\theta$  ( $\bar{v}^r$  e  $\bar{v}^\theta$ ), seriam nulas ;

-O valor médio do produto de duas quantidades flutuantes  $\overline{v^i v^j}$ , seria função de r, somente:  $\overline{v^i v^j} = f(r)$ .

### 2.4 - Equações em Coordenadas Cilíndricas

A partir das equações (7), (8), (9) e (10), na forma tensorial pode-se representá-las em coordenadas cilíndricas, expressando-se os seus índices em função das componentes deste sistema de coordenadas. Admitindo-se em seguida as simplificações consideradas anteriormente, o resultado, conforme o Apêndice 3, seria:

a) Equação da Continuidade - escoamento flutuante :

$$\frac{1}{r} (r v^r)_{,r} + \frac{1}{r} v^\theta_{,\theta} + v^z_{,z} = 0 \quad (11)$$

b) Equação da Continuidade - escoamento médio :

$$\bar{v}^z_{,z} = 0 \quad (12)$$

c) Equação de Navier-Stokes - escoamento médio :

- componente na direção r :

$$\frac{1}{r} (\overline{r v^r v^r})_{,r} - \frac{1}{r} \overline{v^\theta v^\theta} = - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,r} \quad (13)$$

- componente na direção  $\theta$  :

$$\frac{1}{r} (\overline{v^\theta v^r})_{,r} + \frac{2}{r^2} \overline{v^\theta v^r} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r^2} \bar{p}_{,\theta} \quad (14)$$

- componente na direção z :

$$\frac{1}{r} (\overline{r v^r v^z})_{,r} = - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,z} + \frac{\nu}{r} (\overline{r v^z}_{,r})_{,r} \quad (15)$$

d) Equação da Conservação da Energia Cinética Turbulenta :

Segundo o resultado obtido no Apêndice 3, a equação (10)

resulta em :

$$\overline{v^r v^z} \bar{v}^z_{,r} + \frac{1}{r} [r \overline{v^r (Q + \frac{p}{\rho})}]_{,r} - \frac{\nu}{r} (\overline{r \bar{Q}}_{,r})_{,r} + \nu \bar{D} = 0 \quad (16)$$

onde :

- o primeiro termo representa a produção de energia cinética turbulenta ;

- o segundo termo, a difusão por pressão e por energia cinética;

- o terceiro termo, a difusão viscosa ;

- o quarto termo representa a taxa de dissipação viscosa ;

e ainda :

$$\overline{Q} = \frac{1}{2} ( \overline{v^r v^r} + \overline{v^\theta v^\theta} + \overline{v^z v^z} ) ;$$

$$Q = \frac{1}{2} ( v^r v^r + v^\theta v^\theta + v^z v^z )$$

$$\begin{aligned} \overline{D} = & \overline{v^r, r v^r, r} + \overline{v^\theta, r v^\theta, r} + \overline{v^z, r v^z, r} + \frac{1}{r^2} \overline{v^r, \theta v^r, \theta} + \\ & + \frac{1}{r^2} \overline{v^\theta, \theta v^\theta, \theta} + \frac{1}{r^2} \overline{v^z, \theta v^z, \theta} + \overline{v^r, z v^r, z} + \overline{v^\theta, z v^\theta, z} + \\ & + \overline{v^z, z v^z, z} + \frac{2}{r^2} \overline{v^\theta, \theta v^r} - \frac{2}{r^2} \overline{v^r, \theta v^\theta} + \frac{1}{r^2} \overline{v^\theta v^\theta} + \frac{1}{r^2} \overline{v^r v^r} \end{aligned}$$

e) Simplificações Adicionais :

De acordo com o Apêndice 3, as componentes da equação de Navier-Stokés podem ser simplificadas, obtendo-se os seguintes resultados :

- direção  $\theta$  :

$$\overline{v^\theta v^r} = 0$$

- direção  $r$  :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} \right] = 0$$

- direção z :

$$\overline{v^r v^z} - \nu \overline{V^z}_{,r} = \frac{r}{R} u^{*2} \quad (17)$$

onde  $u^*$  representa a velocidade de fricção :  $u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$

O sistema de equações a ser resolvido é composto pelas equações (16) e (17).

## CAPÍTULO 3

### HIPÓTESES DE FECHAMENTO

O sistema formado pelas equações (16) e (17) não é passível de solução, pois apresenta para apenas duas equações, um maior número de incógnitas. Valores médios do produto entre quantidades flutuantes não apresentam um comportamento conhecido, sendo portanto responsáveis pelo excesso de variáveis.

Buscando-se uma solução viável, lança-se mão das hipóteses de fechamento com a inclusão de relações ou modelos matemáticos que exprimem estas quantidades desconhecidas em função das variáveis  $\bar{V}^2$  e  $\bar{Q}$ , velocidade média e energia cinética turbulenta.

Os modelos utilizados são baseados em Beckwith e Bushnell [02]. Estes modelos foram inicialmente utilizados por Glushko citado por [02], na solução do escoamento da camada limite em placa plana.

#### 3.1 - Inversão da Coordenada Radial

Beckwith e Bushnell [02] utilizaram em suas equações e conseqüentemente em seus respectivos modelos, um sistema de coorde

nadas cartesianas. Neste sistema a componente perpendicular à parede sólida cresce com o afastamento da parede. Como no sistema de coordenadas cilíndricas o raio cresce em sentido contrário (centro para a parede), torna-se mais conveniente adotar um sistema no qual o crescimento ocorra da parede para o centro. Com este objetivo pode-se definir uma nova coordenada "y" com a mesma direção, mas sentido contrário a "r", tal que :

$$y = R - r$$

Diferenciando esta relação, obtém-se :

$$dy = - dr$$

A componente da flutuação de velocidade  $v^r$ , passa a ser representada por  $v^y$ , com :

$$v^y = - v^r$$

Introduzindo-se estas mudanças, o sistema formado por (16) e (17) ficaria do seguinte modo (lembrando que atualmente a única variável independente é "y" ) :

- equação de Navier-Stokes, direção z :

$$-v^y \frac{d^2 \bar{v}^z}{dy^2} + v \frac{d\bar{v}^z}{dy} = \frac{R-y}{R} u_*^2 \quad (18)$$

- equação da energia cinética turbulenta :

$$\overline{v^y v^z} \frac{d\overline{V}^z}{dy} + \frac{1}{R-y} \frac{d}{dy} \left[ (R-y) \overline{v^y \left( Q + \frac{p}{\rho} \right)} \right] +$$

$$- \frac{v}{R-y} \frac{d}{dy} \left[ (R-y) \frac{d\overline{Q}}{dy} \right] + v\overline{D} = 0 \quad (19)$$

### 3.2 - Modelos Utilizados

a) Componente do tensor de Reynolds :

$$- \rho \overline{v^y v^z} = \mu H(R_q) \beta R_q \frac{d\overline{V}^z}{dy} \quad (20)$$

onde  $\beta$  é uma constante igual a 0,2;  $H(R_q)$  é uma função dada por :

$$H(R_q) = \begin{cases} \frac{R_q}{R_{q_0}} & \text{para } 0 < \frac{R_q}{R_{q_0}} < 0,75 \\ \frac{R_q}{R_{q_0}} - \left( \frac{R_q}{R_{q_0}} - 0,75 \right)^2 & \text{para } 0,75 \leq \frac{R_q}{R_{q_0}} < 1,25 \\ 1 & \text{para } 1,25 \leq \frac{R_q}{R_{q_0}} < \infty \end{cases} \quad (21)$$

sendo  $R_{q_0}$  uma constante igual a 110;  $R_q$  o número de Reynolds turbulento local, definido por :

$$R_q = \frac{\ell \overline{Q}^{\frac{1}{2}}}{\nu} \quad (22)$$

e sendo  $\ell$  uma escala de turbulência que, segundo Konstantinov [ 09 ] pode ser calculada por :

$$\frac{\ell}{R} = 0,37 - 0,24 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0,13 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^4 \quad (23)$$

b) Taxa de dissipação viscosa :

$$\sqrt{D} = C_1 \alpha \bar{Q} / \ell^2, \text{ onde :}$$

$$\alpha = \nu(1 + H(K R_q) \beta K R_q) \quad (24)$$

$C_1$  e  $K$  são constantes e  $H(K R_q)$  obedece a mesma função (21), com um argumento igual a  $K R_q$  em lugar de  $R_q$ .

c) Difusão total :

Segundo Beckwith e Bushnell [ 02 ], a difusão total é função do gradiente de energia cinética turbulenta e pode ser expressa do seguinte modo :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R-y} \frac{d}{dy} \left[ (R-y) \overline{v^y \left( Q + \frac{p}{\rho} \right)} \right] - \frac{\nu}{R-y} \frac{d}{dy} \left[ (R-y) \frac{d\bar{Q}}{dy} \right] = \\ = - \frac{1}{R-y} \frac{d}{dy} \left[ (R-y) \alpha \frac{d\bar{Q}}{dy} \right], \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  assume o mesmo valor do item anterior.

Substituindo estes resultados nas equações (18) e (19), obtém-se :

- equação de Navier-Stokes - direção z :

$$\frac{R-y}{R} u^{*2} = \nu H(R_q) \beta R_q \frac{d\bar{V}^z}{dy} + \nu \frac{d\bar{V}^z}{dy} \quad \text{ou}$$

$$\frac{R-y}{R} u^{*2} = \nu \left[ H(R_q) \beta R_q + 1 \right] \frac{d\bar{V}^z}{dy} \quad (25)$$

- equação da energia cinética turbulenta :

$$\overline{v^y v^z} \frac{d\overline{V^z}}{dy} - \frac{1}{R-y} \frac{d}{dy} \left[ (R-y) \alpha \frac{d\overline{Q}}{dy} \right] + \frac{C_1 \alpha \overline{Q}}{\ell^2} = 0 \quad (26)$$

### 3.3 - Condições de Contorno

a) Considerando a hipótese de não deslizamento junto à parede do tubo, tanto a velocidade média axial, como as componentes flutuantes apresentam valor nulo neste local, ou seja :

$$\text{- para } y=0 \text{ ou } r=R : \overline{V^z} = 0 ; \overline{v^y v^z} = 0 ; \overline{Q} = 0$$

b) Considerando a axi-simetria do problema, as seguintes hipóteses podem ser adotadas :

$$\text{- para } y=R \text{ ou } r=0 : \frac{d\overline{Q}}{dy} = 0 ; \frac{d\overline{V^z}}{dy} = 0 ;$$

- substituindo a condição de derivada nula da velocidade média no centro do tubo, definida acima, na equação (18), surge a seguinte condição de contorno :

$$\overline{v^y v^z} = 0 \text{ para } r=0 \text{ ou } y=R .$$

## CAPÍTULO 4

### TRATAMENTO NUMÉRICO

O sistema de equações obtido no capítulo anterior é formado por equações diferenciais ordinárias não lineares e será solucionado com o auxílio de um método numérico.

Este método baseia-se no método implícito de diferenças finitas. Visando este tipo de solução, as equações serão adimensionalizadas e discretizadas neste capítulo. A partir da discretização a equação da energia cinética turbulenta apresenta-se, para os vários pontos, como uma matriz de forma tridiagonal [ 01 ], que será utilizada como recurso adicional de solução.

Finalmente será elaborado um fluxograma contendo os passos principais de todo o procedimento de cálculo numérico, com a posterior utilização do meio de computação disponível, o FORTRAN IV.

#### 4.1 - Adimensionalização

O sistema formado pelas equações principais (25) e (26) e pelas equações auxiliares (20), (21), (22), (23) e (24) será adimensionalizado a partir da definição das seguintes variáveis :

$$\begin{aligned}
 V &= \bar{V}^Z / \bar{V}^Z_{\max} ; & Q &= \bar{Q} / u^{*2} ; \\
 VYZ &= \sqrt{y \bar{V}^Z} / u^{*2} ; & V^+ &= \bar{V}^Z / u^* ; \\
 \alpha^* &= \alpha / (R \bar{V}^Z_{\max}) ; & \phi &= u^* / \bar{V}^Z_{\max} ; \\
 \eta &= y/R & Re &= 2R \bar{V}^Z_{\max} / \nu ; \\
 \ell^* &= \ell/R & y^+ &= \frac{u^* y}{\nu} = \frac{1}{2} \phi Re \eta
 \end{aligned}$$

Estas relações são inicialmente introduzidas nas equações auxiliares e em seguida nas principais.

#### a) Equações Auxiliares :

A equação (22) que define  $R_q$ , o número de Reynolds turbulento local, já encontra-se na forma adimensional e pode ser escrita em função das variáveis adimensionais :

$$R_q = \frac{\ell^* R u^* (Q)^{\frac{1}{2}}}{\nu} = \frac{1}{2} \phi Re \ell^* Q^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

A escala de turbulência definida na equação (23) pode ser escrita do seguinte modo :

$$\ell^* = \ell/R = 0,37 - 0,24 (1-\eta)^2 - 0,13 (1-\eta)^4 \quad (28)$$

Pela equação (24) o valor de  $\alpha^*$  será :

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{R \bar{V}^Z_{\max}} = \frac{2}{Re} (1 + H(K R_q) \beta K R_q) \quad (29)$$

Por sua vez, o valor adimensional de  $-\overline{v^y v^z}$ , da equação (20) será :

$$-VYVZ = \frac{\overline{v^y v^z}}{u^{*2}} = \frac{2}{\phi^2 Re} H(R_q) \beta R_q \frac{dV}{d\eta} \quad (30)$$

b) Equações Principais :

- equação de Navier-Stokes na direção z, equação(25):

$$\frac{R(1-\eta)}{R} u^{*2} = \nu (H(R_q) \beta R_q + 1) \frac{\overline{V}_{max}^z}{R} \frac{dV}{d\eta}, \text{ ou}$$

$$1-\eta = \frac{2}{\phi^2 Re} (H(R_q) \beta R_q + 1) \frac{dV}{d\eta} \quad (31)$$

- equação da energia cinética turbulenta :

Introduzindo-se as variáveis na equação (26) :

$$VYVZ u^{*2} \frac{\overline{V}_{max}^z}{R} \frac{dV}{d\eta} - \frac{1}{R(1-\eta)} \frac{1}{R} \frac{d}{d\eta} \left[ R(1-\eta) \alpha^* \overline{V}_{max}^z R \frac{u^{*2}}{R} \frac{dQ}{d\eta} \right] + \frac{C_1 \alpha^* \overline{V}_{max}^z R u^{*2} Q}{R^2 \ell^{*2}} = 0$$

Dividindo-se esta expressão por  $u^{*2} \overline{V}_{max}^z / R$  :

$$VYVZ \frac{dV}{d\eta} - \frac{1}{1-\eta} \frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \alpha^* \frac{dQ}{d\eta} \right] + \frac{C_1 \alpha^* Q}{\ell^{*2}} = 0 \quad (32)$$

#### 4.2 - Discretização

Devido às condições peculiares do problema, as equações gerais resultaram em função de apenas uma variável independente  $y$ ,

a coordenada radial para o tubo. A solução das equações consistirá portanto, em determinar as distribuições das variáveis dependentes com  $y$ .

Com vistas à aplicação do método numérico de diferenças finitas, as equações devem ser discretizadas. Este processo consistirá, em primeiro lugar, na definição de uma grade geométrica para a coordenada radial  $\eta$  a partir de sua divisão em um determinado número de pontos. A seguir, as equações discretizadas serão aplicadas a todos os pontos possíveis da grade. Para os pontos extremos serão estabelecidas condições de contorno necessárias à solução e já apresentadas no item 3.3 .

#### 4.2.1 - Definição da Grade

Em escoamentos turbulentos, conforme [ 13 ], existem três regiões até certo ponto distintas ao longo do raio, que seriam: sub-camada viscosa, junto à parede; a região intermediária, designada por sub-camada de transição ou de superposição; região de escoamento completamente turbulento ao centro.

A região central, de escoamento completamente turbulento ocupa grande parte do raio do tubo, sendo as demais bastante próximas da parede. Em razão desta proximidade, as duas primeiras regiões são de grande importância neste estudo pois no interior das mesmas é que ocorrem os maiores gradientes das variáveis do escoamento, como velocidade média, energia cinética turbulenta e tensão turbulenta. Assim, deve-se escolher uma grade cuja malha possua pequenos espaçamentos para que um número adequado de pontos seja atingido, fornecendo as informações necessárias para o conhecimento da estrutura

do escoamento nestas regiões. Por outro lado, a parte central do tubo apresenta uma menor variação dos parâmetros do escoamento para uma região maior, não sendo necessária a utilização de espaçamentos tão pequenos, que acarretariam um demasiado número de pontos. Optou-se, então, por uma grade de espaçamentos variáveis.

Esta variação será baseada em uma progressão geométrica de razão  $S$  e definida da seguinte maneira :

- o primeiro intervalo junto à parede foi definido como iniciando em  $y^+ = 0$  ( $\eta = 0$ ), e terminando em um valor de  $y^+ = 1$ , aproximadamente. Conhecido o número de Reynolds do escoamento e a constante  $\phi$  pode-se calcular o valor de  $\eta$  correspondente a  $y^+ \approx 1$  ;

- o valor do número de pontos total ( $m$ ) da grade será escolhido de modo a fornecer um valor adequado para a razão  $S$ , e assim a coordenada  $\eta$  assume valores nos  $m$  pontos, como  $\eta_j$ , com  $j$  variando de 1 a  $m$ . Neste caso  $\eta_1 = 0$  e  $\eta_m = 1$ .  $\eta_2$  teria um valor correspondente a  $y^+ \approx 1$  ;

- os demais pontos da grade serão definidos pela progressão geométrica :

$$\eta_3 = S \eta_2 ; \eta_4 = S \eta_3 ; \dots ; \eta_{m-1} = S \eta_{m-2} .$$

Por outro lado o último termo da progressão geométrica se relaciona com o segundo termo :

$$\eta_m = \eta_2 S^{m-2} ; \text{ mas, como } \eta_m = 1 :$$

$$S = \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^{\frac{1}{m-2}} \quad (33)$$

Com a obtenção do valor de S, a grade estará definida e as equações poderão ser discretizadas para esta grade.

Para os vários números de Reynolds a serem usados, escolheu-se um número total de cem pontos, resultando em valores de S aproximadamente dentro de uma faixa permissível definida por Cebeci e Smith, citados por Ferreira [ 06 ].

#### 4.2.2 - Equações na Forma Discreta

A discretização será feita em torno de um ponto j qualquer. Uma função F neste ponto seria designada por  $F_j$ .

As derivadas de F em relação a  $\eta$  seriam :

- derivada central :

$$\left. \frac{dF}{d\eta} \right|_j = \frac{F_{j+1} - F_{j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} \quad (34)$$

onde :  $\Delta\eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j$ , seria o valor do intervalo

entre os pontos j e j+1 ; do mesmo modo :

$$\Delta\eta_{j-1} = \eta_j - \eta_{j-1}$$

- derivada crescente :

$$\left. \frac{dF}{d\eta} \right|_j = \frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta\eta_j} \quad (35)$$

- derivada segunda, usando a definição de pontos  $j+1/2$  e  $j-1/2$  (  $A$  é uma função qualquer ) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\eta} \left[ A \frac{dF}{d\eta} \right] \right|_j &= \frac{\left[ A \frac{dF}{d\eta} \right] \Big|_{j+1/2} - \left[ A \frac{dF}{d\eta} \right] \Big|_{j-1/2}}{\frac{1}{2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} = \\ &= \left[ A_{j+1/2} \frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta\eta_j} - A_{j-1/2} \frac{F_j - F_{j-1}}{\Delta\eta_{j-1}} \right] \frac{1}{\frac{1}{2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \end{aligned}$$

Para os pontos  $j+1/2$  e  $j-1/2$  :

$$A_{j+1/2} = \frac{A_{j+1} + A_j}{2} \quad ; \quad A_{j-1/2} = \frac{A_j + A_{j-1}}{2}$$

Substituindo estes valores :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[ A \frac{dF}{d\eta} \right] &= \left[ (A_j + A_{j+1}) \frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta\eta_j} - (A_j + A_{j-1}) \frac{F_j - F_{j-1}}{\Delta\eta_{j-1}} \right] \times \\ &\times \frac{1}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} \quad (36) \end{aligned}$$

Com base nestes resultados o sistema de equações pode ser discretizado em torno do ponto  $j$ . Como o método de cálculo é iterativo, a variável referente à energia cinética turbulenta média terá mais um índice ( $i$ ), relativo à iteração. As equações assumem a seguinte forma :

$$l^*_j = 0,37 - 0,24 (1-\eta_j)^2 - 0,13 (1-\eta_j)^4 \quad (37)$$

$$R_{q_j} = \frac{1}{2} \phi \operatorname{Re} \ell_j^* (Q_{i,j})^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

$$\alpha_j^* = \frac{2}{\operatorname{Re}} \left[ 1 + H(K R_{q_j}) \beta K R_{q_j} \right] \quad (39)$$

$$-VYVZ_j = \frac{2}{\phi^2 \operatorname{Re}} H(R_{q_j}) \beta R_{q_j} \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} \quad (40)$$

Para a distribuição de velocidade média, a partir da equação de Navier-Stokes :

$$(1-\eta_j) = \frac{2}{\phi^2 \operatorname{Re}} \left[ H(R_{q_j}) \beta R_{q_j} + 1 \right] \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} \quad (41)$$

usando-se o conceito de derivada central; ou

$$(1-\eta_j) = \frac{2}{\phi^2 \operatorname{Re}} \left[ H(R_{q_j}) \beta R_{q_j} + 1 \right] \frac{V_{j+1} - V_j}{\Delta \eta_j} \quad (42)$$

usando-se o conceito de derivada crescente .

Aplicando a equação da energia cinética turbulenta ao ponto  $j$ , iteração  $i+1$  :

$$\begin{aligned} -VYVZ_j \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} + \frac{1}{1-\eta_j} \left[ ((1-\eta_j) \alpha_j^* + (1-\eta_{j+1}) \alpha_{j+1}^*) \right. \\ \left. \left( \frac{Q_{i+1,j+1} - Q_{i+1,j}}{\Delta \eta_j} - ((1-\eta_j) \alpha_j^* + (1-\eta_{j-1}) \alpha_{j-1}^*) \right) \right. \\ \left. \left( \frac{Q_{i+1,j} - Q_{i+1,j-1}}{\Delta \eta_{j-1}} \right) \right] \frac{1}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} - C_1 \alpha_j^* Q_{i+1,j} / \ell_j^{*2} = 0 \quad (43) \end{aligned}$$

Definindo os seguintes valores :

$$A_j = \left( \alpha_j^* + \frac{1-\eta_{j+1}}{1-\eta_j} \alpha_{j+1}^* \right) \frac{1}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} ; \quad (44)$$

$$C_j = \left( \alpha_j^* + \frac{1-\eta_{j-1}}{1-\eta_j} \alpha_{j-1}^* \right) \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} ; \quad (45)$$

$$B_j = -A_j - C_j - C_1 \alpha_j^* / \lambda_j^{*2} ; \quad (46)$$

$$D_j = VYVZ_j \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} ; \quad (47)$$

a equação (43) pode ser escrita como :

$$A_j Q_{i+1,j+1} + B_j Q_{i+1,j} + C_j Q_{i+1,j-1} = D_j ; \quad (48)$$

cuja solução fornece a distribuição de  $Q_{i+1,j}$ .

Aplicando-se a equação (48) para os pontos  $j = 2$  até  $j = m-1$ , obtém-se um sistema de equações lineares, com  $m-2$  equações e  $m-2$  incógnitas, cuja matriz representativa é conhecida como matriz tridiagonal [ 01 ]. Sua solução é dada por :

$$Q_{i+1,j} = G_j Q_{i+1,j+1} + GP_j ; \quad (49)$$

$$\text{onde: } G_j = \frac{-A_j}{B_j + C_j G_{j-1}} ; \quad (50)$$

$$GP_j = \frac{D_j - C_j GP_{j-1}}{B_j + C_j G_{j-1}} \quad (51)$$

O valor desconhecido da equação (49) é sempre  $Q_{i+1,j}$  e o cálculo inicia-se no ponto  $j = m-1$ , pois  $j+1 = m$  é um ponto conhecido como condição de contorno .

As condições de contorno definidas no item 3.3 assumem a seguinte forma :

$$\text{-para } \eta = 0 \quad (r=R) ; \quad Q_{i+1,1} = 0 ; \quad VYVZ_1 = 0 ; \quad V_1 = 0$$

$$\text{-para } \eta = 1 \quad (r=0) ; \quad VYVZ_m = 0 ; \quad V_m = 1 .$$

A condição  $\left. \frac{dQ}{d\eta} \right|_{\eta=1} = 0$  pode ser descrita por :

$$Q_{i+1,m} = Q_{i+1,m-1} ;$$

como  $Q_{i+1,m}$  não é conhecido para o cálculo de  $Q_{i+1,m-1}$ , optou-se pela condição :

$$Q_{i+1,m} = Q_{i,m-1} ;$$

pois a distribuição  $Q_{i,j}$  já é conhecida.

Com a condição  $Q_{i+1,1} = 0$ , os termos definidos nas equações (50) e (51) seriam, para o ponto 1 :

$$G_1 = GP_1 = 0$$

#### 4.3 - Valor das Constantes :

No problema surgem quatro constantes, introduzidas com os modelos. Um bom ajustamento entre os resultados previstos pelas equações modeladas e os dados experimentais irá depender dos valores assumidos por estas constantes. Os valores inicialmente usados, conforme Beckwith e Bushnell [ 02 ], são :

$$C_1 = 3,93 ; K = 0,4 ; \beta = 0,2 ; R_{q_0} = 110$$

Outra constante, dependente do número de Reynolds é a relação  $\phi = u^*/\bar{V}_{\max}^z$ . Seu valor pode ser obtido da equação (56) aplicada a  $r=0$ , onde  $\eta=1$  ou  $y^+ = \phi Re/2$  e  $\bar{V}^z = \bar{V}_{\max}^z$  ou  $V=1$ . Resultaria na seguinte relação implícita :

$$1 = \phi \left( 2,5 \log_e \frac{\phi Re}{2} + 5,5 \right) \quad (52)$$

#### 4.4 - Convergência e Perfis Iniciais

Como o método de solução é iterativo, há necessidade de se arbitrar perfis iniciais para as variáveis do problema. A busca da solução consiste em utilizar as equações iterativamente, comparando-se os resultados em cada iteração. Deste modo o objetivo a ser atingido é a convergência, que é conseguida quando a diferença entre as duas últimas iterações atinge um valor menor que uma certa tolerância estipulada. Todo este processo de convergência está baseado na variável energia cinética turbulenta (Q).

A tolerância  $\epsilon$  é calculada para todos os pontos  $j = 2$  até  $m$ , em cada iteração. Como Q assume valores sempre positivos :

$$\epsilon_j = \frac{|Q_{i+1,j} - Q_{i,j}|}{Q_{i,j}} \quad (53)$$

A convergência é atingida quando a tolerância para cada ponto for menor ou igual ao valor 0,001, escolhido :

$$\epsilon_j \leq 0,001 \quad \text{para } j = 2, m$$

O perfil inicial para a velocidade média longitudinal  $V_j$ , foi obtido a partir da distribuição apresentada por Welty, Wicks e Wilson [ 16 ]:

$$V = \phi y^+ \quad \text{para } 0 \leq y^+ \leq 5 \quad (54)$$

$$V = \phi (5 \log_e y^+ - 3,05) \quad \text{para } 5 < y^+ \leq 30 \quad (55)$$

$$V = \phi (2,5 \log_e y^+ + 5,5) \quad \text{para } y^+ > 30 \quad (56)$$

A partir da distribuição de velocidade o perfil inicial para a tensão turbulenta ( $VYVZ$ ) foi obtido da equação de Navier-Stokes (18).

Com a introdução do conceito "parâmetro de estrutura", aqui designado por PESTR e utilizado por Ferreira [ 06 ], o perfil inicial  $Q_{1,j}$  pode ser obtido por :

$$Q_{1,j} = 2 \cdot \text{PESTR} \cdot VYVZ_j \quad ; \quad (57)$$

onde PESTR assume um valor aproximado de 0,15 .

#### 4.5 - Fluxograma :

A seguir será apresentado um roteiro contendo os passos principais do programa numérico.

a) Início do programa :

- a.1 -definição do valor das constantes do problema ;
- a.2 -cálculo do valor de  $\phi$  pela equação (52) ;
- a.3 -obtenção da grade com cálculo da razão da progressão geométrica  $S$ , dos valores  $\eta_j$  para  $j$  variando de 1 até  $m$  e  $\Delta\eta_j$ , para  $j$  variando de 1 a  $m-1$  ;
- a.4 -cálculo dos perfis iniciais  $V_j$ ,  $VYVZ_j$  e  $Q_{1,j}$  ;
- a.5 -cálculo de  $\lambda_j^*$ , com  $j$  variando de 1 até  $m-1$ , pela equação (37);
- a.6 -interpolação dos valores experimentais pelo método de Lagrange, através da subrotina PREDIF, com o objetivo de adaptá-los à grade do problema ;
- a.7 -impressão dos perfis iniciais e experimentais .

b) Processo iterativo interno :

- b.1 -definição das condições de contorno ;
- b.2 -cálculo de  $R_{q_j}$  pela equação (38) e  $\alpha_j^*$ , equação (39) ;
- b.3 -cálculo de  $Q_{i+1,j}$ ,  $j=2$  a  $m-1$ , através do processo de matriz tridiagonal, equações (49), (50) e (51) ;
- b.4 -teste de convergência, equação (53). Se não houve convergência, o processo deve ser repetido a partir do item b.1, com a nova distribuição  $Q_{i+1,j}$ . Se houve convergência, o processo interno está concluído.

c) Processo iterativo externo : inclui o processo iterativo interno.

- c.1 -processo iterativo interno ;
- c.2 -cálculo de  $R_{q_j}$  e  $H(R_{q_j})$ , equações (38) e (21), a partir da última distribuição  $Q_{i+1,j}$  ;
- c.3 -cálculo de  $V_j$  pelas equações (41) ou (42) e  $VYVZ_j$  pela equação (40) ;

c.4 -teste de convergência : se houve mais de uma iteração no processo interno, a convergência não está assegurada pois houve modificações na distribuição  $Q_{i+1,j}$ . O processo é reiniciado a partir do item c.1 acima, com os novos valores de  $V_j$  e  $VYVZ_j$  calculados. Mas se houve somente uma iteração no processo interno, significa que os valores de  $V_j$  e  $VYVZ_j$  calculados no processo externo não modificam mais a distribuição  $Q_{i+1,j}$  dentro de uma certa tolerância, e o processo convergiu.

d) Resultados finais :

- d.1 -cálculo dos termos produção, difusão e dissipação, integrantes da equação da energia cinética turbulenta ;
- d.2 -cálculo da velocidade média na seção do escoamento ;
- d.3 -cálculo do coeficiente de fricção ;
- d.4 -impressão dos resultados finais, com o uso da subrotina PLOTTER para a traçagem de gráficos envolvendo as variáveis do problema .

Todos os passos podem ser mostrados resumidamente no diagrama de blocos da figura (4.1).

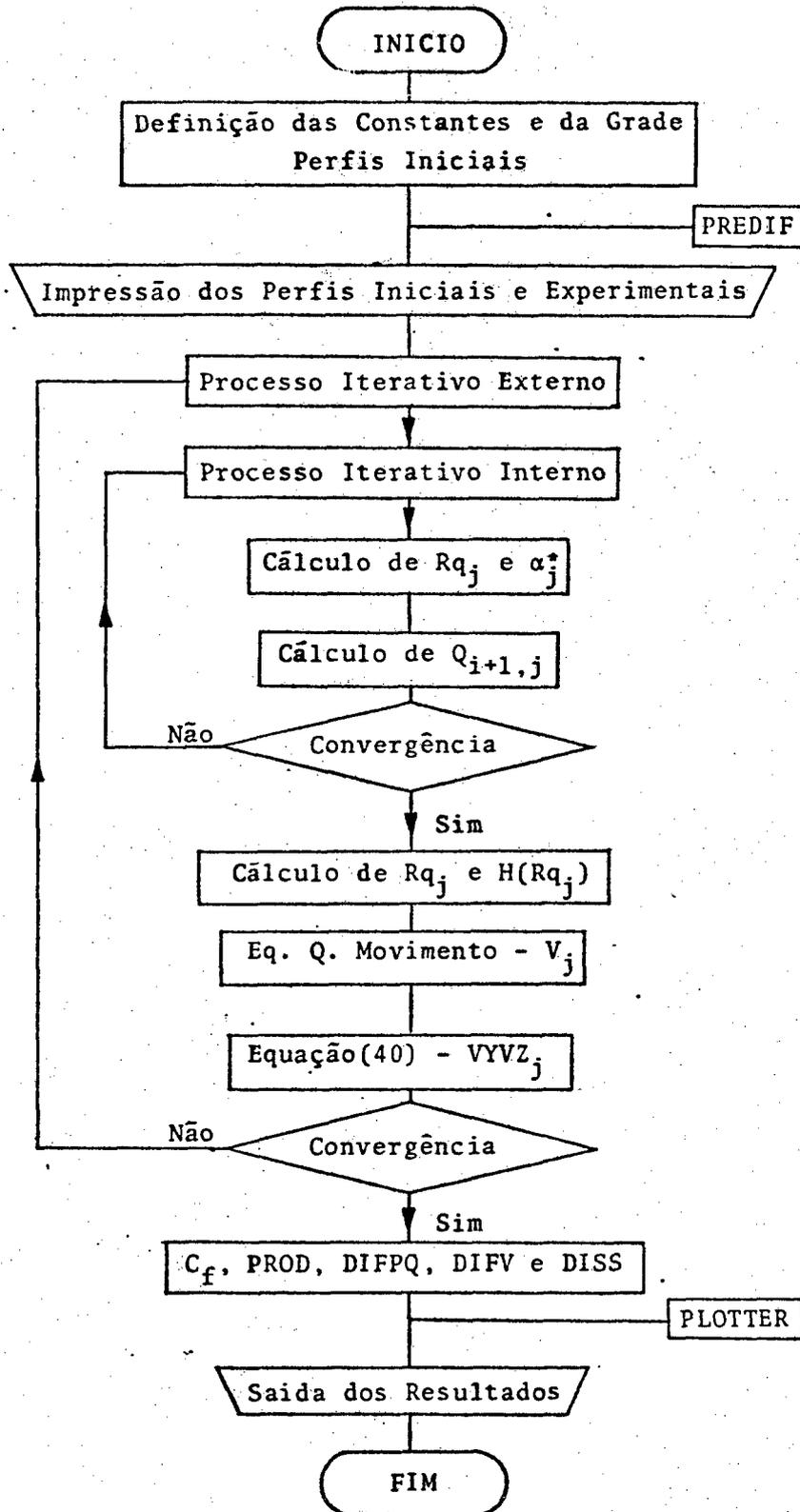


FIG. 4.1 - Diagrama de blocos referente ao programa numérico.

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE DOS RESULTADOS

O teste final de qualquer esquema numérico é a sua aplicação a problemas, para os quais existam dados experimentais. Por intermédio de comparações com estes dados, pode-se rejeitar ou ajustar o método. Como o modelo utilizado no presente trabalho demonstrou-se válido quando de sua aplicação ao cálculo dos parâmetros da camada limite turbulenta sobre superfícies curvas [06], a sua extensão ao escoamento interno de mesma natureza deverá comportar-se de forma análoga, pela semelhança física existente.

Seguindo esta linha de raciocínio, a fim de que o método numérico apresentado possa ser analisado, vários parâmetros do escoamento interno em um tubo circular foram calculados e são apresentados como resultados finais.

#### 5.1 - Resultados Obtidos

O problema numérico foi resolvido para vários números de Reynolds. Considerando-se todos estes casos em conjunto, o número de gráficos resultantes foi excessivo, e somente alguns serão apresentados no presente texto. Os resultados finais são os seguintes:

- perfil universal de velocidade ( $V^+$ ) ;
- distribuição da tensão turbulenta de Reynolds ( $VYVZ$ ) ;
- coeficiente de fricção ( $C_f$ ) ;
- distribuição da energia cinética turbulenta ( $Q$ ) ;
- distribuição dos termos componentes da equação da energia cinética turbulenta (PROD, DIFPQ, DISS, DIFV).

## 5.2 - Discussão dos Resultados

Métodos numéricos apresentam limitações, pela sua natureza. Com o uso de modelos matemáticos simula-se o comportamento de vários termos das equações, havendo uma certa aproximação incluída neste procedimento. Apesar desta e de outras aproximações, espera-se obter um quadro geral em termos de velocidade média, tensão turbulenta e energia cinética turbulenta que forneça importantes informações acerca da estrutura do escoamento turbulento.

### 5.2.1 - Perfil de Velocidade

A velocidade média axial do escoamento está representada por  $V^+$ , a distribuição universal de velocidade, em função da escala da parede ( $y^+$ ). Seu comportamento bastante satisfatório pode ser observado nas figuras (5.01) e (5.02) para  $Re = 5 \times 10^4$  e  $Re = 5 \times 10^5$ , respectivamente. A distribuição escolhida como padrão de comparação consta da distribuição universal de velocidade na forma implícita, desenvolvida por Spalding e apresentada por White [17], com a seguinte forma:

$$y^+ = V^+ + 0,1108 \left[ e^{0,4V^+} - 1 - 0,4V^+ - \frac{(0,4V^+)^2}{2} - \frac{(0,4V^+)^3}{6} \right] \quad (58)$$

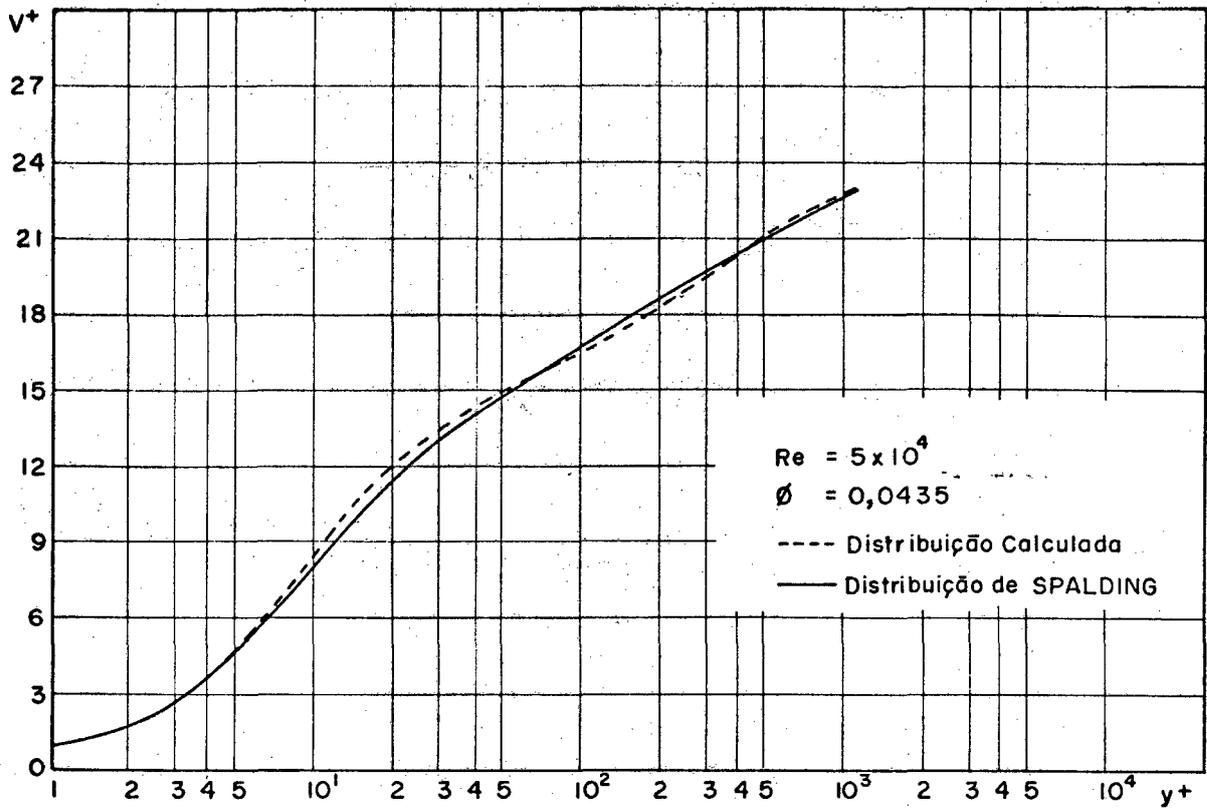


FIGURA 5.01 - Distribuição universal de velocidade

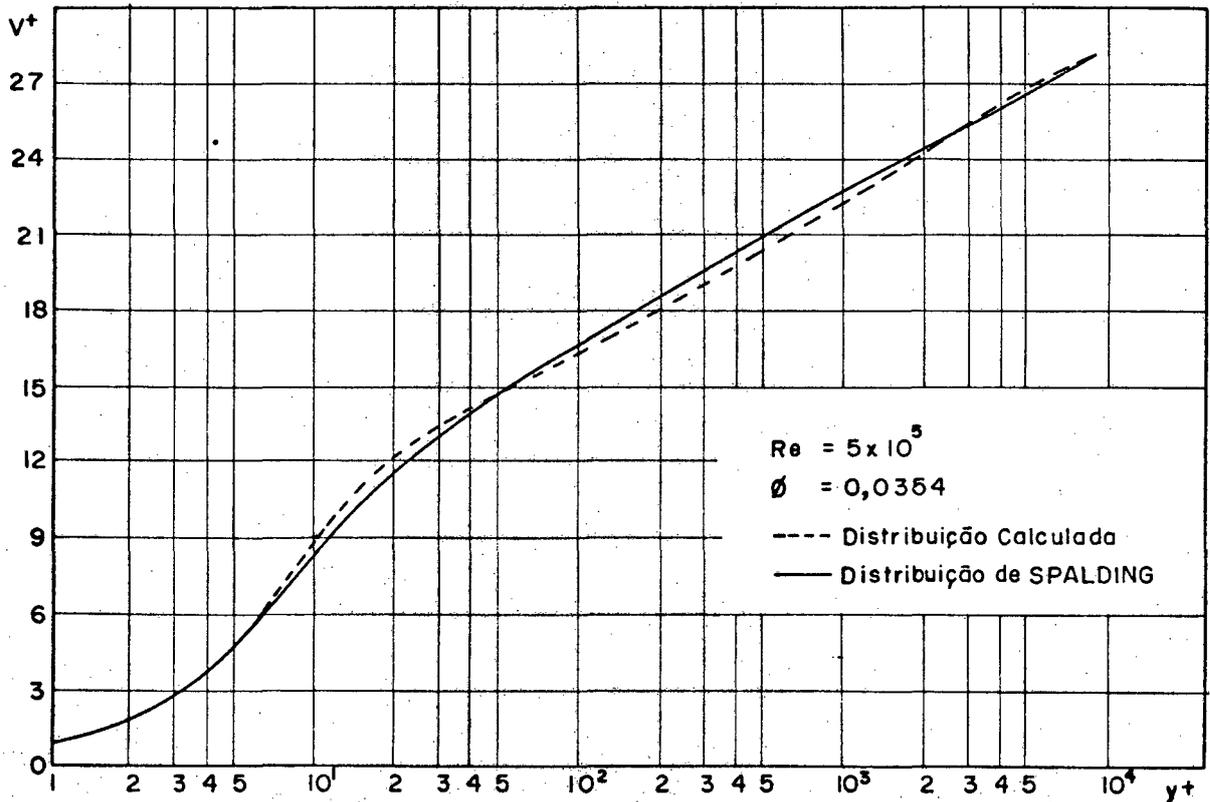


FIGURA 5.02 - Distribuição universal de velocidade

Próximo à parede verifica-se a melhor concordância. Afastando-se desta ocorrem pequenos desajustes na subcamada de transição e depois na camada de turbulência completa. Vale lembrar que a equação usada como padrão de comparação não é exata e também que a distribuição de velocidade foi calculada a partir da condição de velocidade nula na parede. Como este cálculo é feito ponto a ponto pelo processo descrito, ocorre um acúmulo progressivo de erros, no sentido parede-centro do tubo. A menos destas pequenas discrepâncias, o resultado é excelente.

### 5.2.2 - Distribuição da Tensão Turbulenta de Reynolds

A equação de conservação da quantidade de movimento (18), apresenta do lado esquerdo a soma de dois termos: o primeiro representa a tensão turbulenta e o segundo, a tensão cisalhante viscosa. A equação garante que a soma das duas tensões apresenta um valor máximo na parede ( $\tau_0$ ) e decresce linearmente até um valor nulo no centro do tubo. O valor de cada uma das tensões não pode ser obtido diretamente da equação (18), como já foi comentado, lançando-se mão da modelação.

Os resultados obtidos para a tensão turbulenta estão apresentados nas figuras (5.03), (5.04), (5.05) e (5.06), em regiões próximas e afastadas da parede, para  $Re=5 \times 10^4$  e  $Re=5 \times 10^5$ . A equação ajustada aos valores experimentais para estes números de Reynolds são apresentados por Laufer [10].

A tensão turbulenta calculada possui um bom comportamento para a região afastada da parede. Para pontos próximos da parede, observam-se certos afastamentos da distribuição experimental.

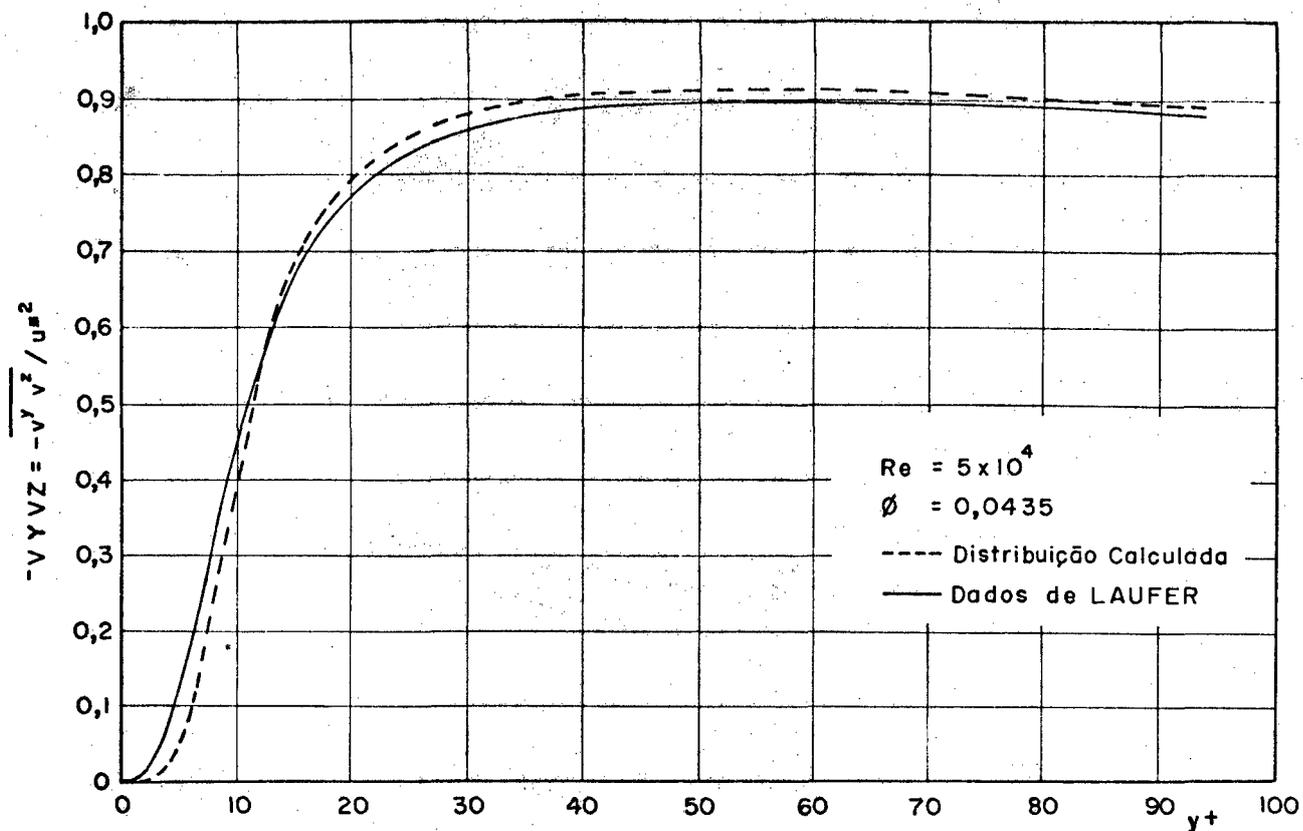


FIGURA 5.03 - Distribuição de tensão turbulenta, região próxima à parede.

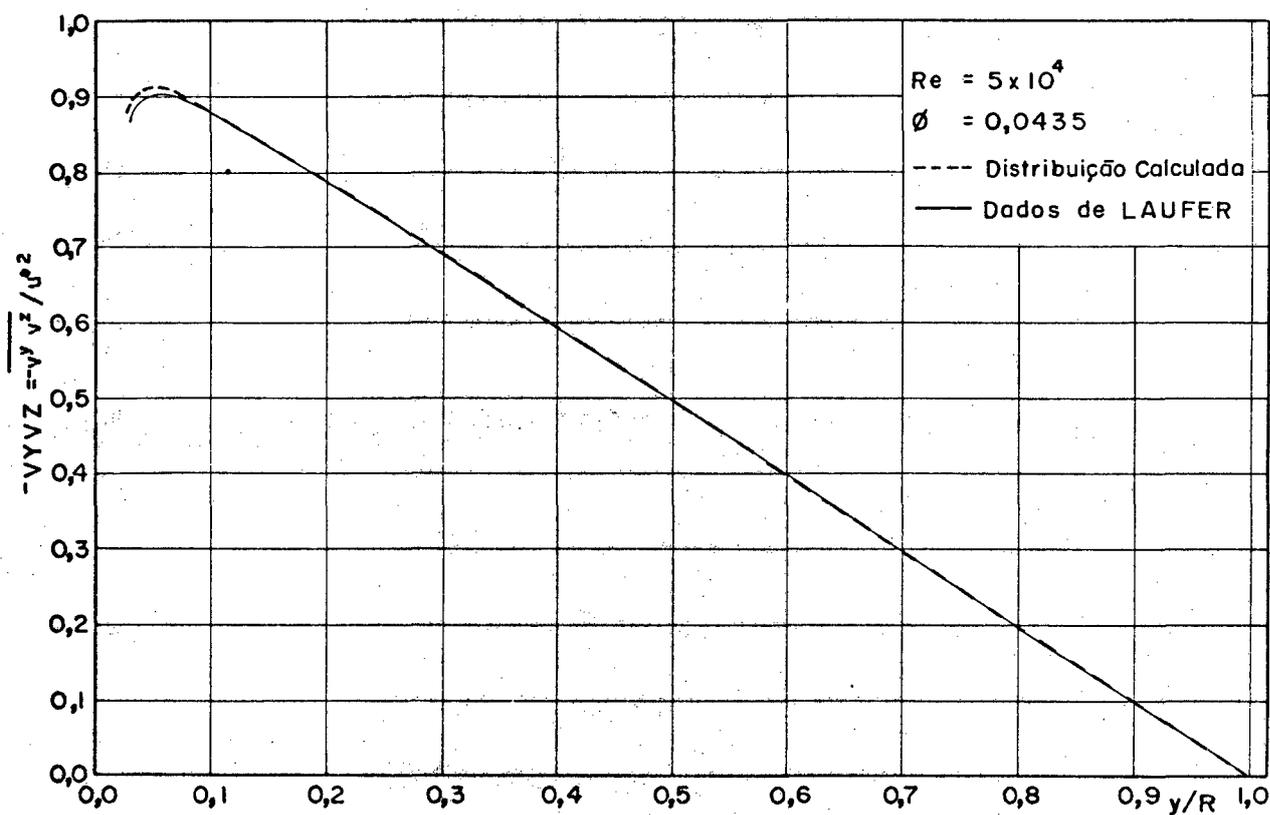


FIGURA 5.04 - Distribuição de tensão turbulenta, região afastada da parede.

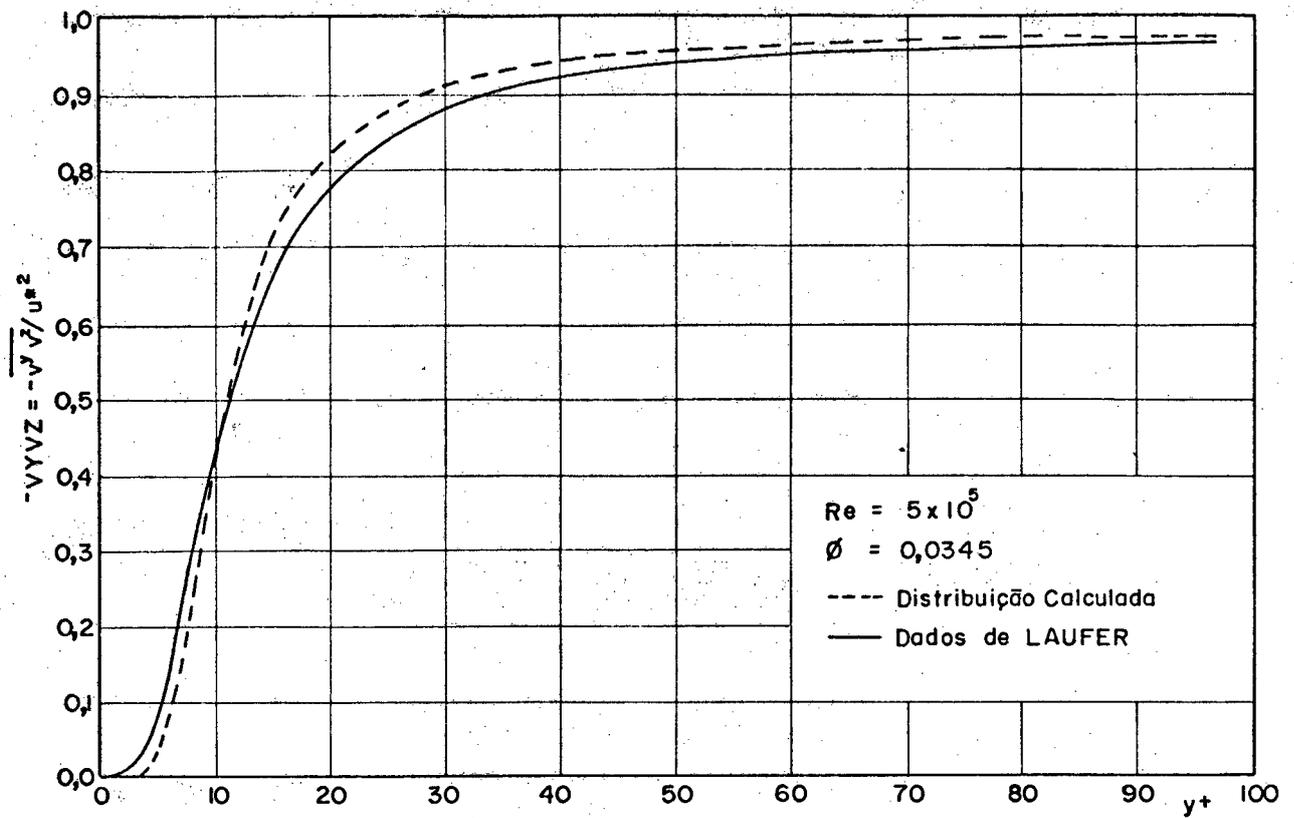


FIGURA 5.05 - Distribuição de tensão turbulenta, região próxima à parede.

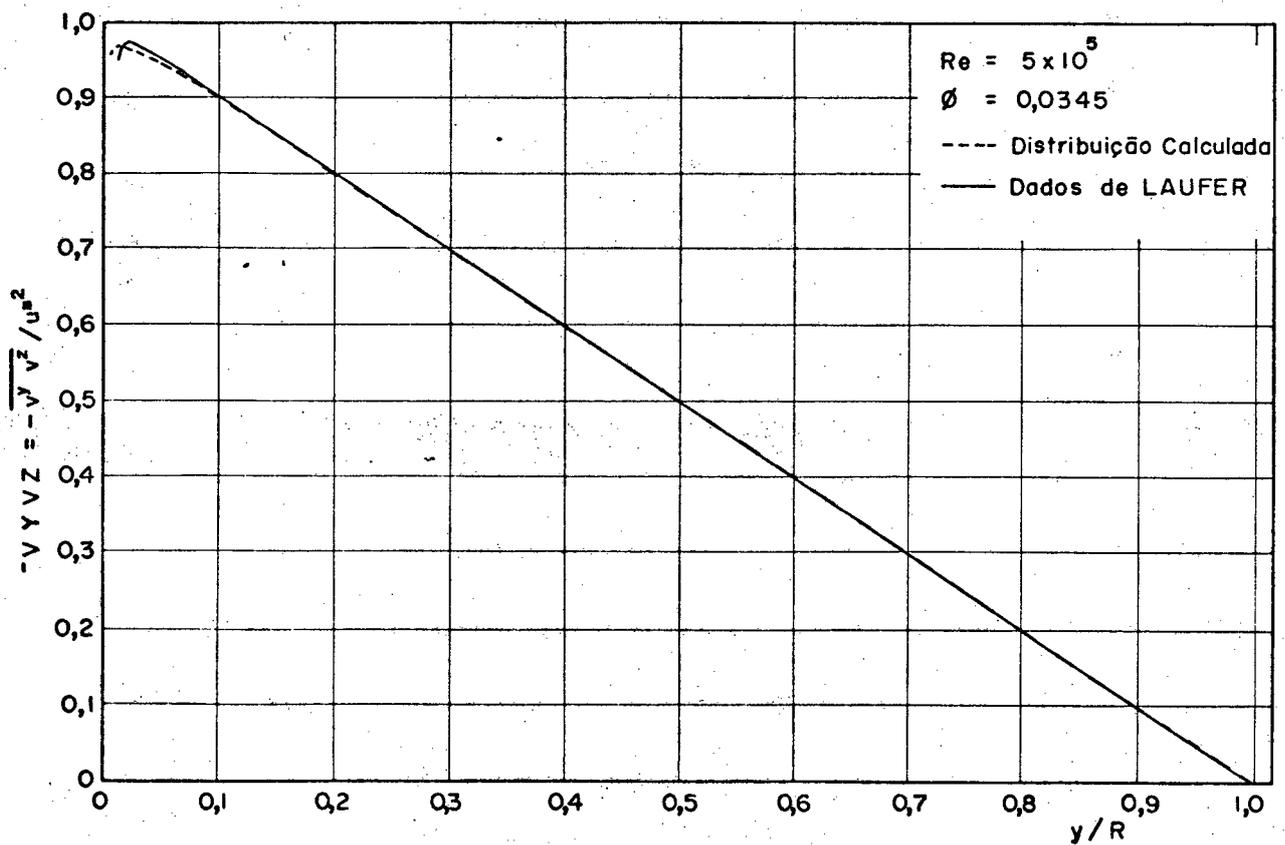


FIGURA 5.06 - Distribuição de tensão turbulenta, região afastada da parede.

Este comportamento parece estranho a princípio, pois a distribuição de velocidade apresenta seu melhor ajuste junto à parede. Na verdade a tensão turbulenta obtida por Laufer [10] não está completamente de acordo com a tensão turbulenta obtida pela substituição da distribuição de velocidade média na equação de Navier-Stokes (18).

A partir da distribuição de tensão turbulenta, pode-se estipular o valor da tensão viscosa. Em grande parte do raio do tubo (longe da parede), a tensão viscosa é desprezível, em comparação com a turbulenta. A situação inversa ocorre na chamada subcamada viscosa, onde os efeitos viscosos são predominantes. Nesta subcamada a tensão turbulenta decresce até um valor nulo junto à parede.

### 5.2.3 - Coefficiente de Fricção

Por definição, conforme Reynolds [13]:

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho \bar{V}_{med}^2} ;$$

onde  $\tau_0$  é a tensão cisalhante na parede do tubo;

$\bar{V}_{med}^z$  é a velocidade média na seção de escoamento ;

$\rho$  é a massa específica do fluido.

A velocidade média adimensional pode ser calculada pela distribuição de velocidade  $V_j$  :

$$V_{med} = \frac{\bar{V}_{med}^z}{\bar{V}_{max}^z} = \frac{m-1}{\sum_{j=1}^{m-1}} \left[ (V_{j+1} + V_j) \left(1 - \frac{\eta_{j+1} + \eta_j}{2}\right) \Delta\eta_j \right]$$

As definições da velocidade de fricção  $u^*$  e da constante  $\phi$  permitem que o coeficiente de fricção seja escrito da seguinte forma :

$$C_f = \frac{2 \phi^2}{V_{med}^2} \quad (59)$$

Para efeito de comparação o coeficiente de fricção calculado pela equação (59) para os vários números de Reynolds é apresentado no quadro (5.1), juntamente com o mesmo coeficiente calculado pelas seguintes equações apresentadas por White [17] :

- segundo Blasius :

$$C_f = 0.0791 (Re V_{med})^{-1/4} \quad \text{para } (Re \cdot V_{med}) < 10^4 ; \quad (60)$$

- segundo Prandtl :

$$\frac{1}{\sqrt{4C_f}} \cong 2,0 \log_{10} (Re V_{med} \sqrt{4C_f}) - 0,8 \quad (61)$$

- segundo White :

$$C_f \cong 0,255 (\log_{10} Re V_{med})^{-2,5} \quad (62)$$

Observando-se o quadro (5.1), conclui-se que o valor de  $C_f$  calculado pelo problema apresenta uma boa precisão para qualquer número de Reynolds. O erro máximo apresentado, em torno de 3%, tem a mesma magnitude do erro previsto por White [17], pela equação (62), quando comparadas com a equação (61).

| Re              | Equação (60)<br>(Blasius) | Equação (61)<br>(Prandtl) | Equação (62)<br>(White) | Equação (59)<br>(calculado) |
|-----------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| $1 \times 10^4$ | 0,00838                   | 0,00822                   | 0,00849                 | 0,00845                     |
| $2 \times 10^4$ | 0,00702                   | 0,00683                   | 0,00703                 | 0,00706                     |
| $3 \times 10^4$ | 0,00633                   | 0,00617                   | 0,00632                 | 0,00633                     |
| $4 \times 10^4$ | 0,00588                   | 0,00575                   | 0,00588                 | 0,00588                     |
| $5 \times 10^4$ | 0,00555                   | 0,00545                   | 0,00557                 | 0,00556                     |
| $1 \times 10^5$ | 0,00465                   | 0,00467                   | 0,00474                 | 0,00472                     |
| $2 \times 10^5$ | -                         | 0,00404                   | 0,00408                 | 0,00405                     |
| $3 \times 10^5$ | -                         | 0,00372                   | 0,00375                 | 0,00372                     |
| $4 \times 10^5$ | -                         | 0,00352                   | 0,00353                 | 0,00351                     |
| $5 \times 10^5$ | -                         | 0,00338                   | 0,00338                 | 0,00336                     |
| $7 \times 10^5$ | -                         | 0,00318                   | 0,00317                 | 0,00315                     |
| $1 \times 10^6$ | -                         | 0,00298                   | 0,00296                 | 0,00295                     |

QUADRO 5.1 - Comparação entre os diversos valores previstos para o coeficiente de fricção ( $C_f$ ).

### 5.2.4 - Distribuição de Energia Cinética Turbulenta

Nos gráficos de distribuição da energia cinética turbulenta, para pontos próximos e afastados da parede, figuras (5.08) a (5.11), observa-se um crescimento rápido junto à parede, atingindo um máximo por volta de  $y^+ = 20$ . Em seguida ocorre uma diminuição lenta em direção ao centro do tubo. Este comportamento está de acordo com o verificado experimentalmente.

Considerando o raio do tubo, a energia cinética apresenta distribuições diferentes para diferentes números de Reynolds como seria de se esperar. Com o aumento do número de Reynolds o ponto de máxima energia cinética aproxima-se da parede como pode ser visto na figura (5.07). Neste caso a subcamada viscosa tem sua espessura diminuída, levando consigo a região de superposição e a região de turbulência completa se expande.

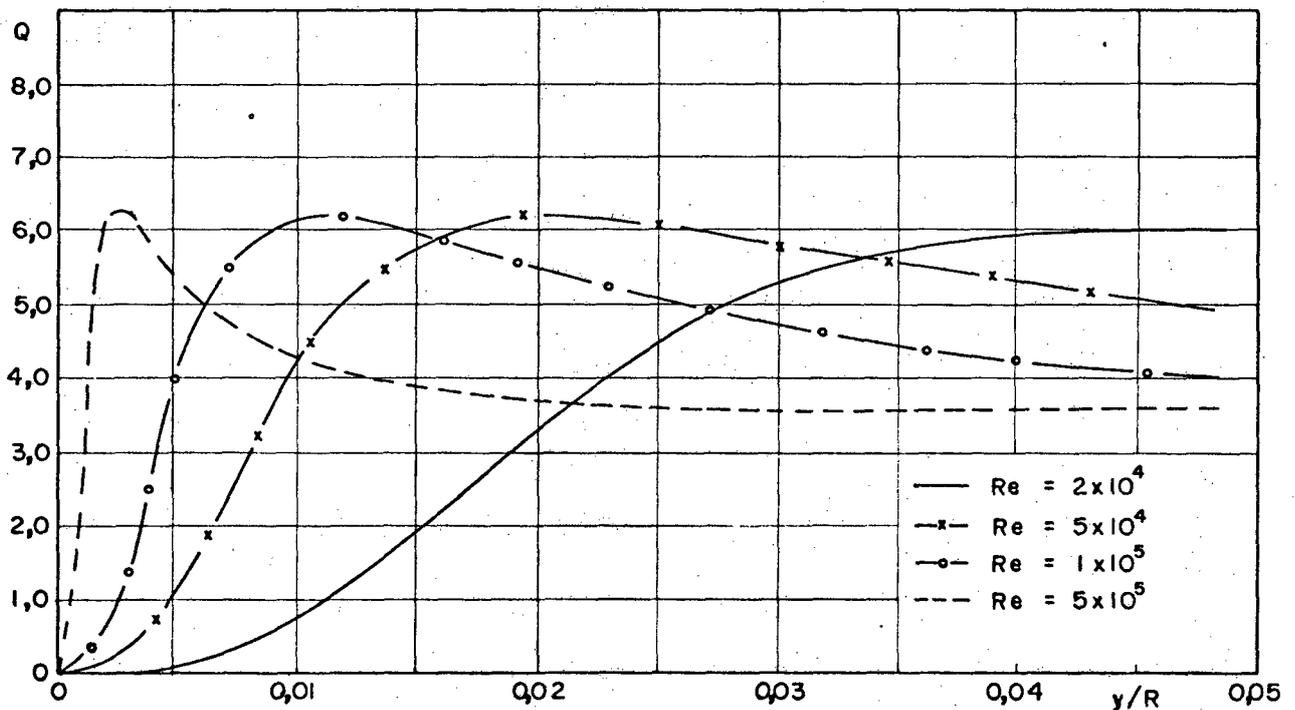


FIGURA 5.07 - Distribuição de energia cinética turbulenta para os vários números de Reynolds.

Referente ao aspecto qualitativo o comportamento do modelo é excelente. No tocante ao aspecto quantitativo, verifica-se que, para uma região compreendida entre  $10 < y^+ < 200$ , o valor obtido através do modelo não concorda perfeitamente com os valores experimentais. Vários testes foram realizados, variando-se o valor das constantes do modelo a fim de melhorar este comportamento. Este tipo de procedimento alterava sensivelmente os valores da velocidade média. A única melhoria obtida ocorreu com a fixação de um valor para a constante  $C_1$  em torno de 4,4, que foi usado posteriormente. Decidiu-se finalmente manter a precisão no cálculo da velocidade média em detrimento de erros relativos à distribuição de energia cinética.

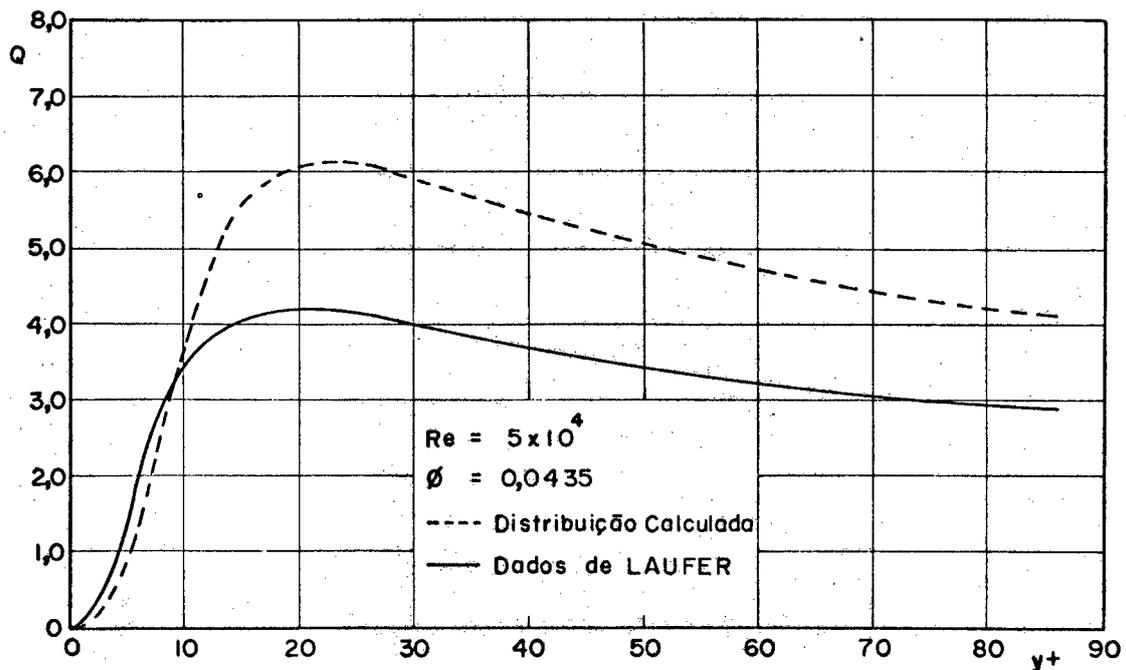


FIGURA 5.08 - Distribuição de energia cinética turbulenta para a região próxima da parede.

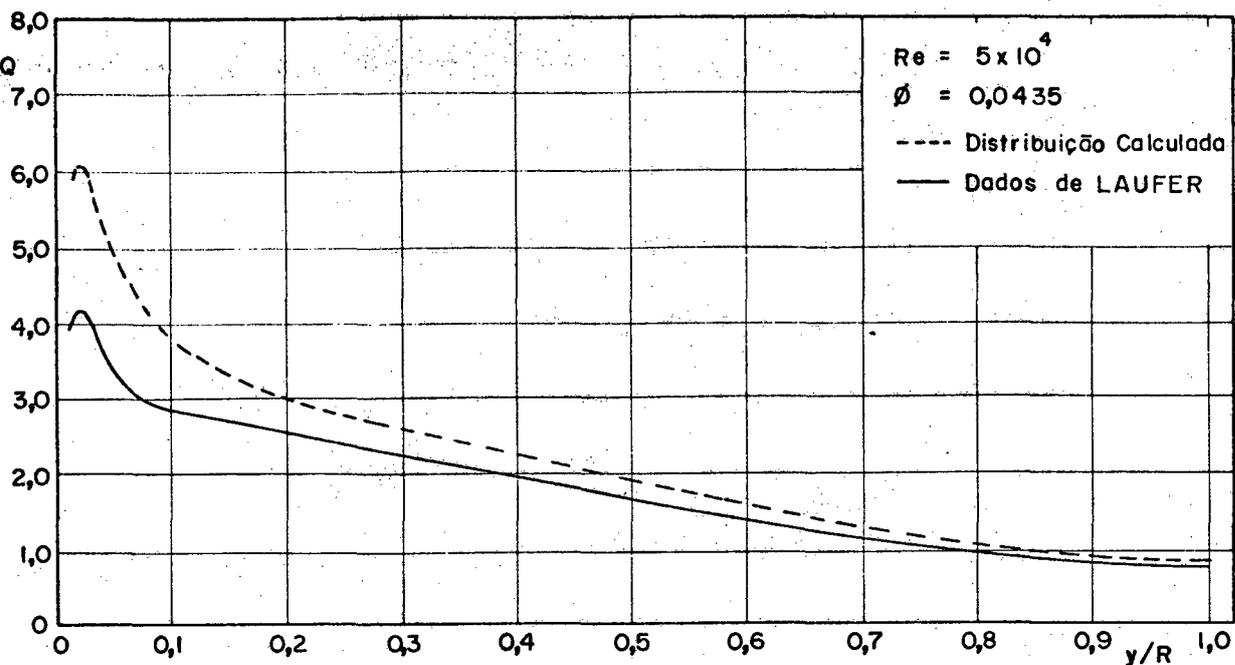


FIGURA 5.09 - Distribuição de energia cinética turbulenta para a região afastada da parede.

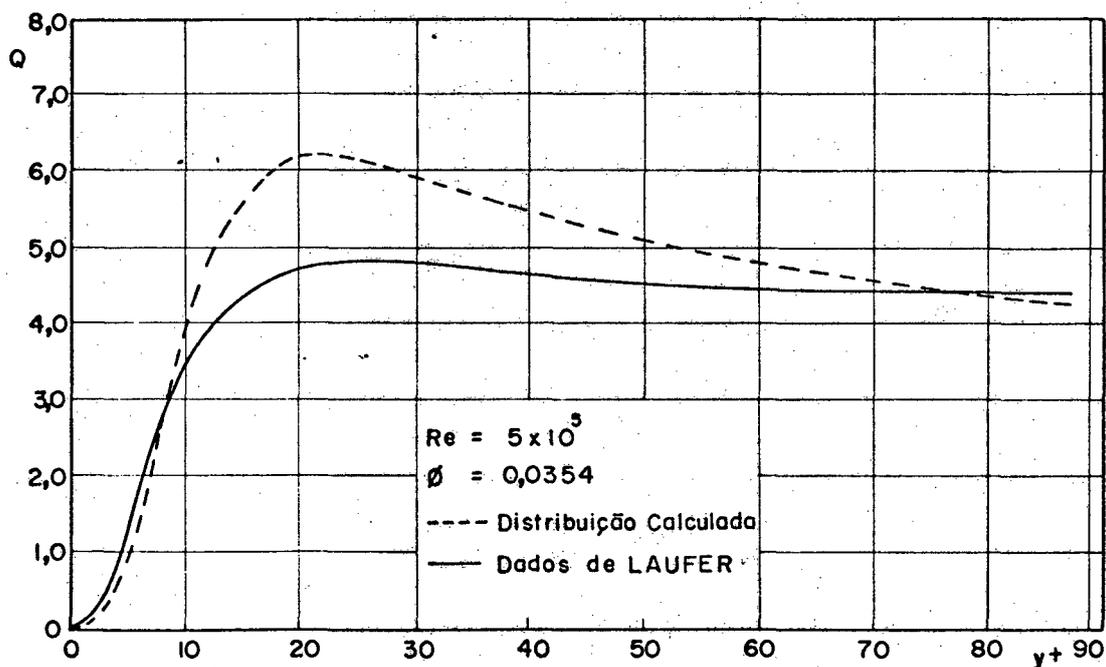


FIGURA 5.10 - Distribuição de energia cinética turbulenta para a região próxima da parede.

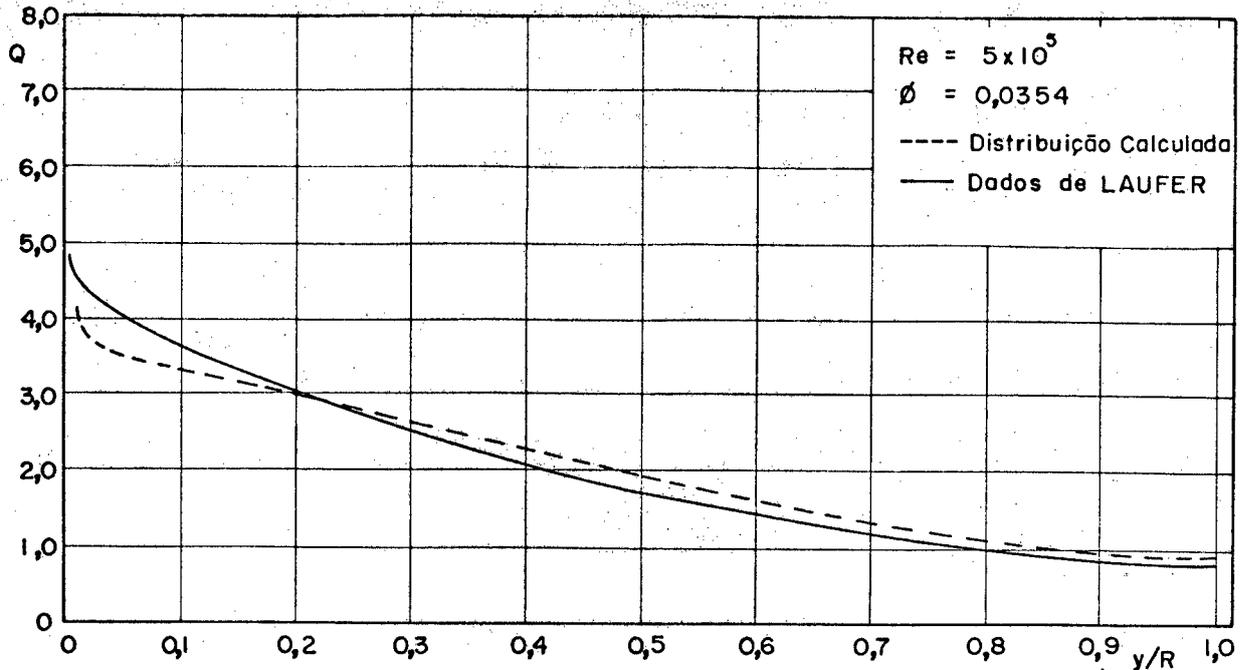


FIGURA 5.11 - Distribuição de energia cinética turbulenta para a região afastada da parede.

### 5.2.5 - Balço da Energia Cinética Turbulenta

Este balanço energético realiza-se com base na equação (19), sendo descrito pelo Apêndice 4.

Após o cálculo da distribuição de energia cinética turbulenta os termos componentes deste balanço podem ser obtidos. O somatório dos termos para um determinado ponto do raio, que representa o balanço, deve ser nulo conforme a equação :

$$\text{PROD}_j + \text{DIFPQ}_j + \text{DIFV}_j + \text{DISS}_j = 0 \quad (\text{A4.1})$$

O escoamento médio possui uma certa energia que, pelo fato de ser viscoso, vai sendo consumida. Uma parcela deste consumo ocorre por ação molecular direta, decorrente do gradiente de velocidade.

locidade média na direção radial. A outra parcela de consumo ocorre na manutenção do escoamento turbulento, que do ponto de vista deste passa a ser chamada de produção (PROD). O balanço em discussão refere-se somente a esta parcela de energia produzida para o escoamento turbulento.

Esta energia da turbulência não apresenta uma taxa de produção constante ao longo do raio do tubo. Do mesmo modo a sua dissipação viscosa (DISS), também não apresenta distribuição constante. Nem sempre toda a energia produzida é consumida no mesmo ponto, ocorrendo transporte de um ponto para outro, em termos de uma difusão viscosa (DIFV), ou em termos de uma difusão turbulenta de pressão e energia cinética, aqui modelados em conjunto e designados por DIFPQ.

Os resultados experimentais deste balanço obtidos por Laufer [10] são apresentados nas figuras (5.12) e (5.13). Os resultados calculados estão nas figuras (5.14) a (5.17). Nestas figuras, a parte negativa indicada por GANHO, representa a energia cinética disponível, através da produção ou difusão para este ponto. A parte positiva indicada por PERDA, representa o modo pelo qual a energia cinética vai ser extraída daquele ponto, por dissipação viscosa ou por difusão para outro ponto.

As seguintes conclusões podem ser tiradas :

a) através da quase totalidade da seção transversal, com exceção da região central, a taxa de produção de energia cinética turbulenta para um determinado ponto é aproximadamente contrabalançada pela taxa de dissipação desta energia;

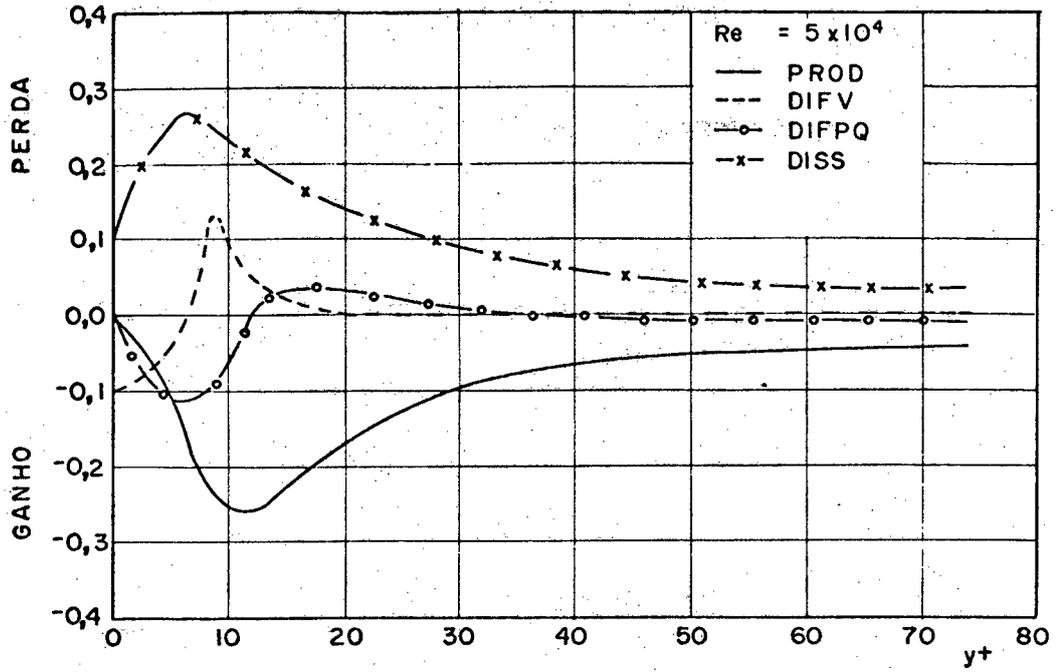


FIGURA 5.12 - Balanço energético segundo Laufer, região próxima à parede.

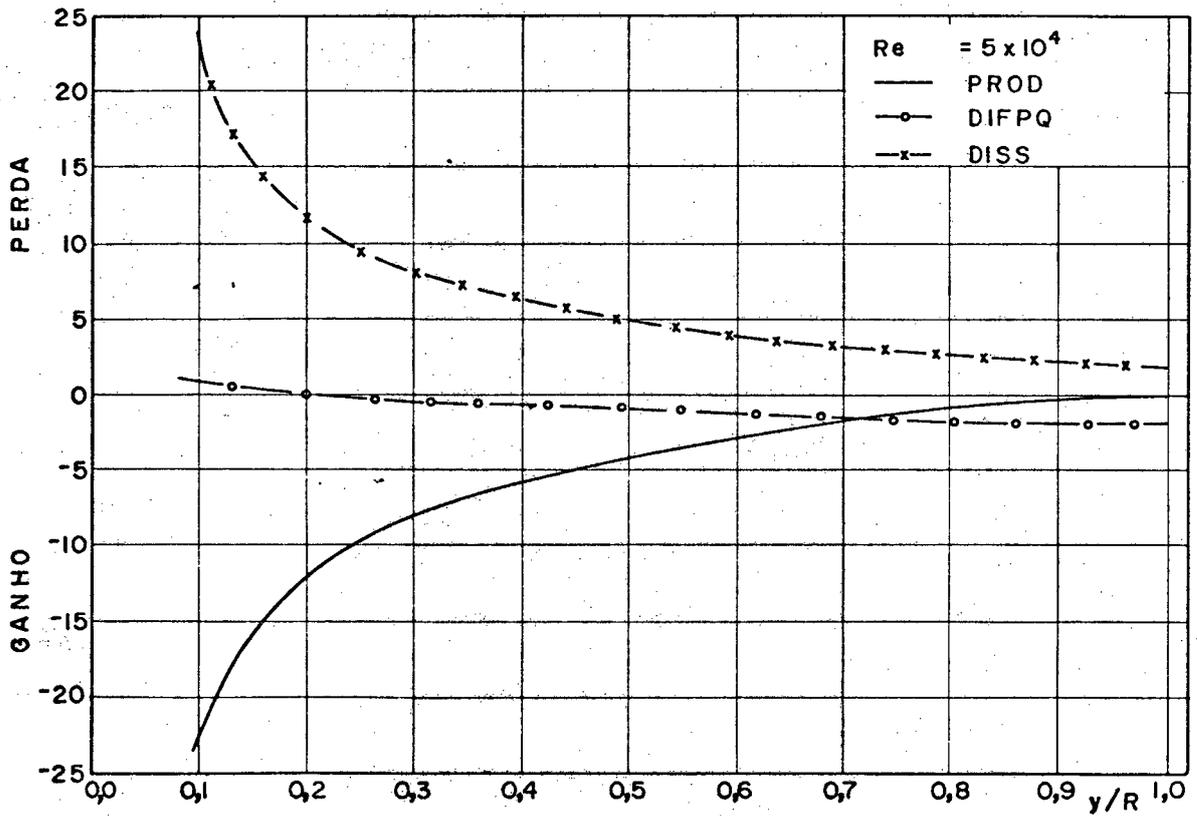


FIGURA 5.13 - Balanço energético segundo Laufer, região afastada da parede.

- b) todas as quatro formas de taxa de energia atingem seu máximo próximo do limite externo da subcamada viscosa ( $y^+$  em torno de 10) ;
- c) Este ponto também aparenta ser o local a partir do qual a energia cinética é difundida em direção à parede e também em direção ao centro do tubo ;
- d) junto à parede a dissipação é compensada pela difusão viscosa e ao centro, pela difusão turbulenta.

Do comportamento das distribuições calculadas conclui-se o seguinte :

- a) a produção de energia cinética turbulenta apresenta um comportamento bastante satisfatório em todos os pontos do escoamento, com relação aos dados experimentais disponíveis.
- b) a dissipação e a difusão viscosa apresentam um comportamento real apenas no aspecto qualitativo, com algumas discrepâncias no aspecto quantitativo, principalmente nas proximidades da parede;
- c) a difusão turbulenta não concorda com os dados experimentais na região da parede. Talvez neste termo ocorra a maior falha da modelação, acarretando inclusive falhas na distribuição de energia cinética como foi verificado.

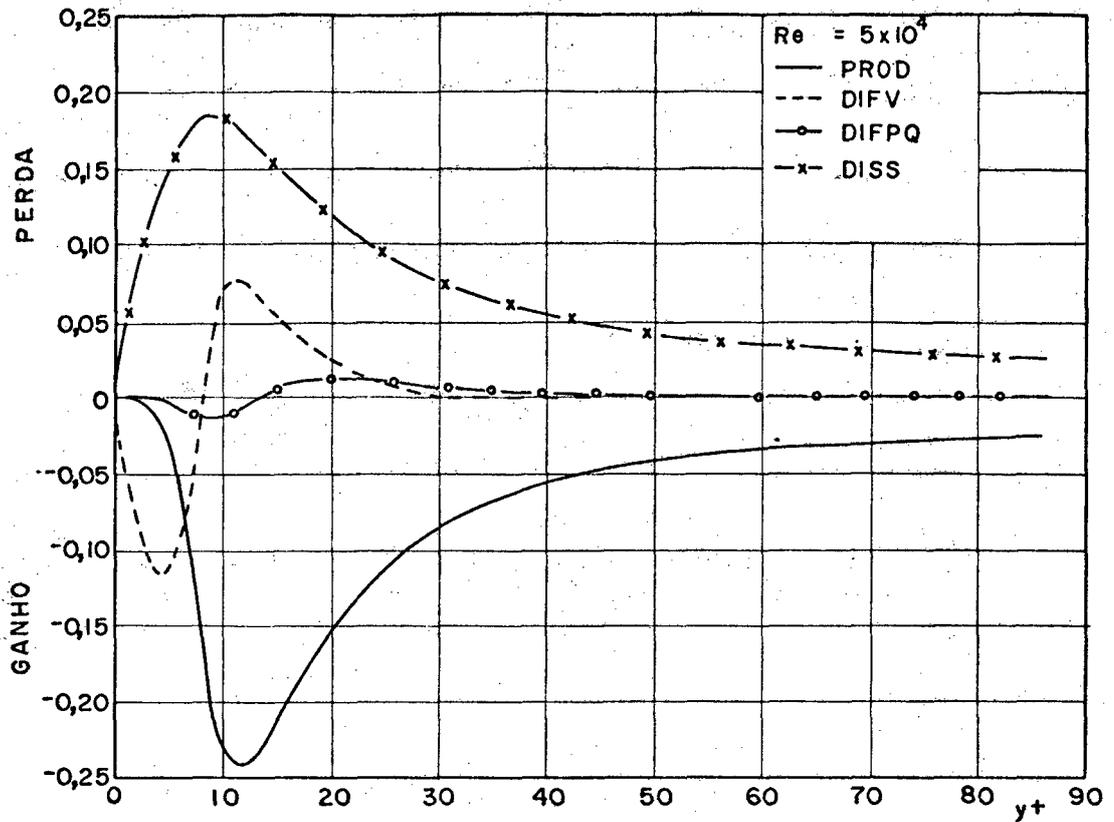


FIGURA 5.14 - Balanço energético calculado, região próxima à parede.

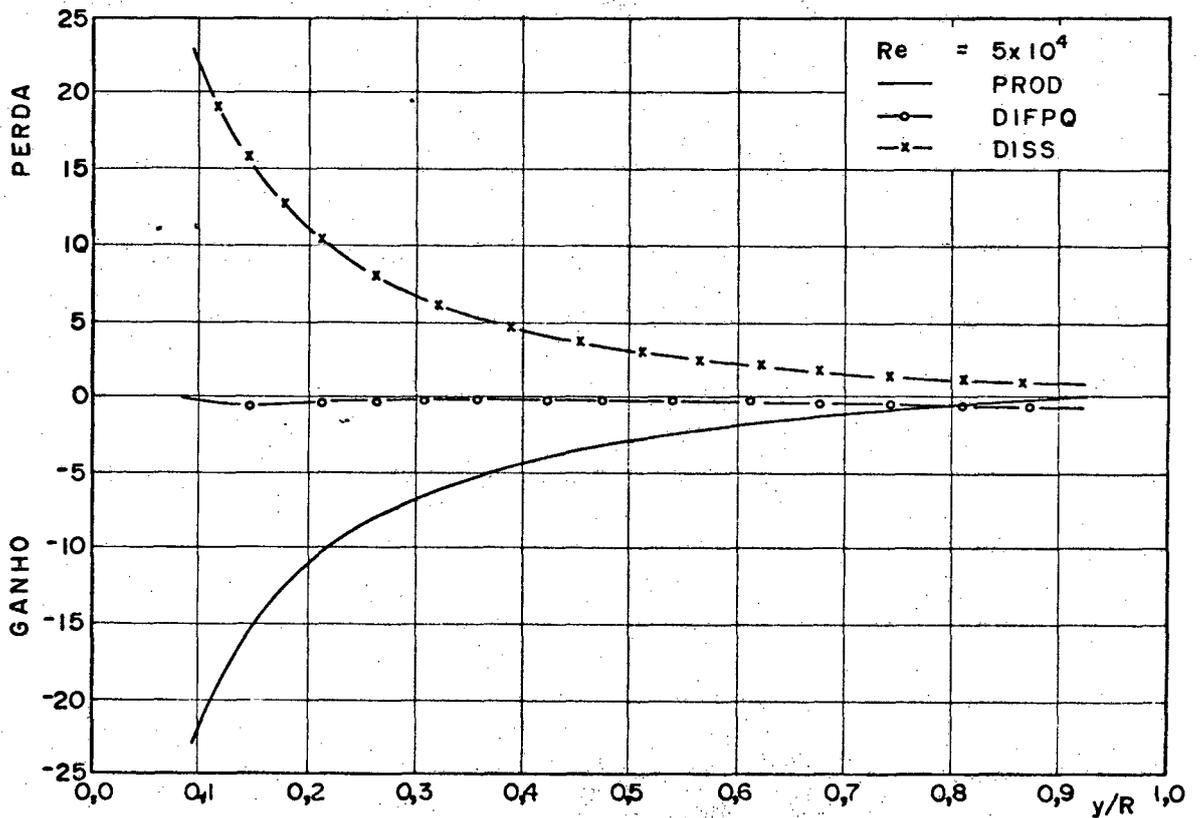


FIGURA 5.15 - Balanço energético calculado, região afastada da parede.

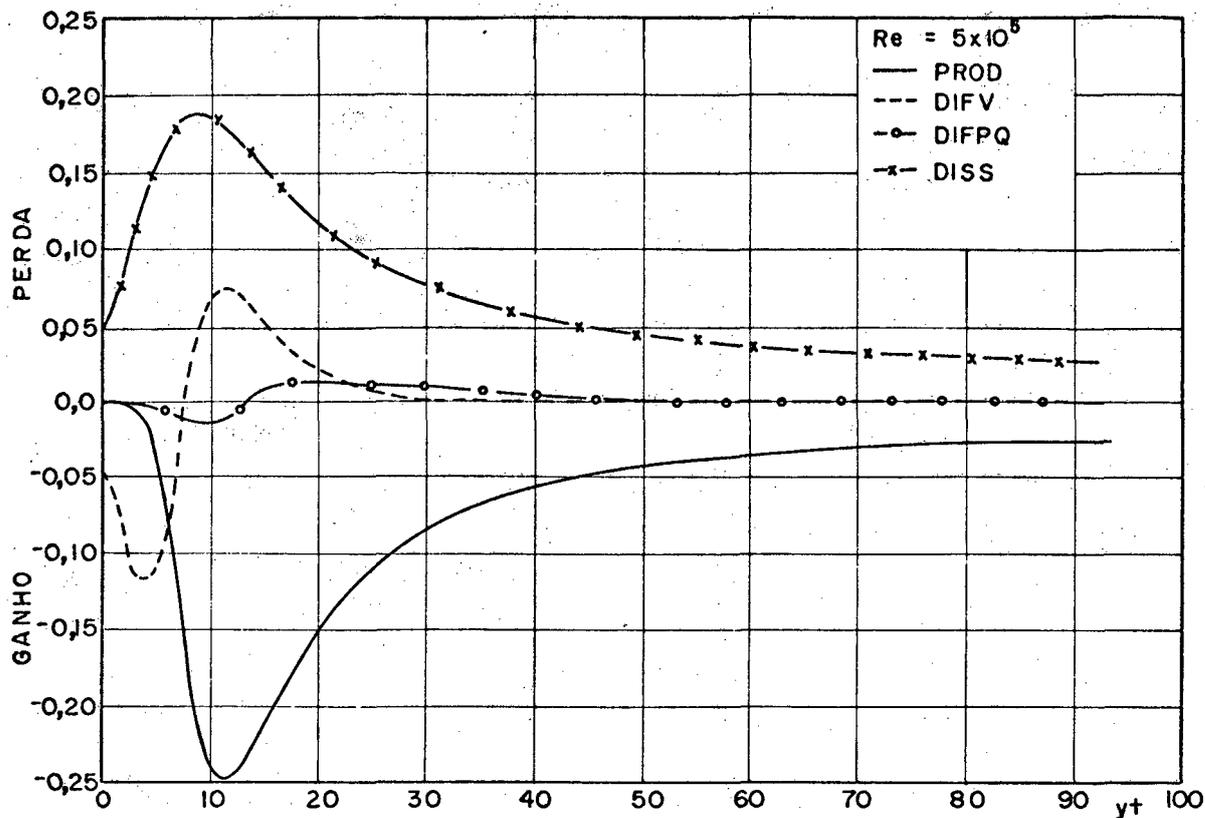


FIGURA 5.16 - Balanço energético calculado, região próxima à parede.

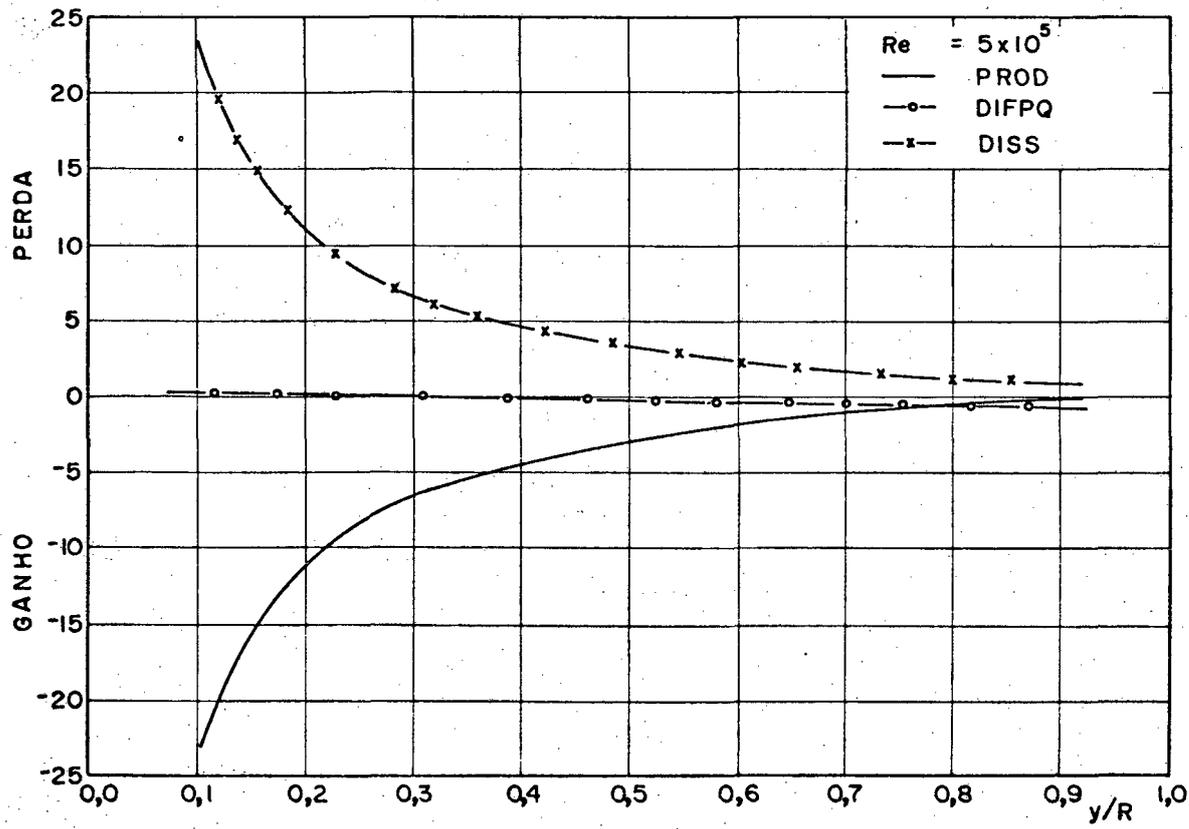


FIGURA 5.17 - Balanço energético calculado, região afastada da parede.

### 5.3 - Conclusões

Os resultados encontrados para o escoamento turbulento no interior de tubos, quando comparados com os resultados experimentais de Laufer [10], são tidos como bons.

Com boa precisão foram determinados os perfis de velocidade, de tensão turbulenta e o coeficiente de fricção. Para a energia cinética turbulenta ocorrem desvios nas regiões próximas à parede, principalmente para baixos números de Reynolds. Esta distribuição não muito perfeita afeta os termos de difusão e dissipação da equação da energia cinética turbulenta.

Acredita-se que um aprimoramento do comportamento do modelo seja possível, principalmente com um estudo mais detalhado em torno do valor das constantes. Também novas funções podem ser introduzidas, como foi o caso da escala de turbulência apresentada por Konstantinov [09].

Além das recomendações acima, futuros trabalhos podem ser realizados a partir deste, para os seguintes casos:

- escoamento turbulento no interior de tubo, com troca de massa através da parede;
- escoamento turbulento em tubo convergente ou divergente;
- escoamento turbulento em tubo com troca de calor na parede.

## BIBLIOGRAFIA

- 01 - AMES, W.F. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2. ed. New York, Academic Press, 1977.
- 02 - BECKWITH, I.E.; BUSHNELL, D.M. Calculation of Mean and Fluctuating Properties of the Incompressible Turbulent Boundary Layer. AFORS - IFP - Stanford Conference, 1968.
- 03 - BRODKEY, R.S. The Phenomena of Fluid Motions. Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- 04 - DAILY, J.W.; HARLEMAN, D.R.F. Dinâmica de los Fluidos. México, Editorial F. Trillas, 1969.
- 05 - DUTRA, J.C.C. Um Modelo em Diferenças Finitas para Calcular a Camada Limite Turbulenta em Superfícies Curvas. Dissertação de Mestrado submetida à Universidade Federal de Santa Catarina, dez/1978.
- 06 - FERREIRA, W.C.S. Modelo Matemático para a Solução da Camada Limite Turbulenta sobre Superfícies Curvas. Dissertação de Mestrado pela Universidade Federal de Santa Catarina, dez/78.
- 07 - FLÜGGE, W. Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer-Verlag, 1962.
- 08 - HINZE, J.O. Turbulence. 2.ed. Mc Graw-Hill, 1975.

- 09 - KONSTANTINOV, S.V. Calculation of the Main Characteristics of a Turbulent Stream of Incompressible Fluid in a Pipe. Fluid Dynamics. New York and London, 12 (5), sep./oct 1977.
- 10 - LAUFER, J. The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow. N.A.C.A., report 1174, 1954.
- 11 - LIMA, L.C. Camada Limite Turbulenta com Troca de Calor sobre Superfícies Curvas. Dissertação de Mestrado pela Universidade Federal de Santa Catarina, jun/1979.
- 12 - PEREIRA Fº, H.V. A Four Equation Model for Numerical Solution of the Turbulent Boundary Layer. Dissertação de Doutorado pela Universidade de Houston, maio/1974.
- 13 - REYNOLDS, A.J. Turbulent Flows in Engineering. John Wiley & Sons, 1974.
- 14 - SCHLICHTING, H. Boundary Layer Theory. 6.ed. Mc Graw-Hill, 1968.
- 15 - TENNEKES, H.; LUMLEY, J.L. A First Course in Turbulence. The MIT Press, 1972.
- 16 - WELTY, J.R.; WICKS, C.E.; WILSON, R.E. Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer. John Wiley & Sons, 1969.
- 17 - WHITE, F.M. Viscous Fluid Flow. Mc Graw-Hill, 1974.

## APÊNDICE 1

### PROCESSO DE MÉDIA

#### A1.1- Decomposição de Reynolds

Como foi admitido anteriormente, uma variável instantânea pode ser decomposta em uma quantidade média e uma quantidade flutuante. Para a velocidade do escoamento:

$$\tilde{v} = \bar{v} + v \quad ;$$

onde a barra sobreposta indica o valor médio e a letra minúscula, o valor flutuante.

A velocidade média  $\bar{v}$  é interpretada como uma velocidade média temporal, de acordo com [15] e definida por:

$$\bar{v} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} v \, dt \quad (A1.1)$$

Segundo esta definição, o valor médio de uma quantidade flutuante seria zero. Por exemplo, para a flutuação de velocidade :

$$\bar{\tilde{V}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} (\tilde{V} - \bar{\tilde{V}}) dt \equiv 0 \quad (\text{A1.2})$$

Para que a média temporal faça sentido, as integrais acima devem ser independentes de  $t_0$ . Esta independência é obtida a partir da consideração de um escoamento médio em regime permanente, tal que :

$$\frac{\partial \bar{\tilde{V}}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A1.3})$$

A decomposição de Reynolds também aplica-se às demais variáveis do problema, como pressão, energia cinética turbulenta e taxa de dissipação :

$$P = \bar{P} + p \quad ;$$

$$Q = \bar{Q} + q \quad ;$$

$$D = \bar{D} + d \quad .$$

## A1.2 - Introdução dos Conceitos nas Equações

a) Equação da Continuidade :

$$\nabla \cdot \tilde{V} = 0 \quad (1)$$

como  $\tilde{V} = \bar{\tilde{V}} + \tilde{v}$  :

$$\nabla \cdot (\bar{\tilde{V}} + \tilde{v}) = \nabla \cdot \bar{\tilde{V}} + \nabla \cdot \tilde{v} = 0 \quad (\text{A1.4})$$

Aplicando o conceito de valor médio a esta equação :

$$\overline{\nabla \cdot \tilde{V}} + \overline{\nabla \cdot \tilde{v}} = \nabla \cdot \bar{\tilde{V}} + \nabla \cdot \bar{\tilde{v}} = 0$$

Mas  $\bar{\tilde{v}} = 0$  , conforme a equação (A1.2) e :

$$\nabla \cdot \bar{\tilde{V}} = 0 . \quad (3)$$

Subtraindo a equação (3) da equação (A1.4) :

$$\nabla \cdot \tilde{v} = 0 ; \quad (4)$$

que implica na validade da equação da continuidade para as flutuações.

b) Equação de Navier-Stokes :

- escoamento médio :

$$\frac{\partial \bar{\tilde{V}}}{\partial t} + (\bar{\tilde{v}} \cdot \nabla) \bar{\tilde{V}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{\tilde{V}} . \quad (2)$$

Introduzindo-se o conceito de valor médio :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\tilde{V}} + \tilde{v}) + [(\bar{\tilde{V}} + \tilde{v}) \cdot \nabla] (\bar{\tilde{V}} + \tilde{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla (\bar{P} + p) + \nu \nabla^2 (\bar{\tilde{V}} + \tilde{v}) ;$$

ou ainda :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tilde{V}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + (\bar{\tilde{V}} \cdot \nabla) \bar{\tilde{V}} + (\bar{\tilde{V}} \cdot \nabla) \tilde{v} + (\tilde{v} \cdot \nabla) \bar{\tilde{V}} + (\tilde{v} \cdot \nabla) \tilde{v} = \\ = -\frac{1}{\rho} (\nabla \bar{P} + \nabla p) + \nu (\nabla^2 \bar{\tilde{V}} + \nabla^2 \tilde{v}) \end{aligned} \quad (A1.5)$$

Considerando o resultado apresentado pela equação (A1.3), o valor médio desta equação será :

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} + \overline{(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{V} \quad ; \quad (A1.6)$$

que representa a equação de Navier-Stokes para o escoamento médio.

Os termos do lado esquerdo podem ser transformados, pela ocorrência da seguinte igualdade :

$$\nabla \cdot (\bar{V} \bar{V}) = (\nabla \cdot \bar{V}) \bar{V} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \quad ;$$

e com base na equação da continuidade (3), pode-se afirmar que :

$$\nabla \cdot (\bar{V} \bar{V}) = (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} .$$

Do mesmo modo :

$$\nabla \cdot (\underline{v} \underline{v}) = (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$$

Substituindo em (A1.6) :

$$\nabla \cdot (\bar{V} \bar{V}) + \nabla \cdot (\underline{v} \underline{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{V} \quad (5)$$

- escoamento flutuante : Subtraindo a equação (A1.6) da equação (A1.5) obtém-se a equação de Navier-Stokes para o escoamento flutuante, com a seguinte forma :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \bar{V} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} - \overline{(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}} &= \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{v} & \quad (A1.7) \end{aligned}$$

c) Equação da Conservação da Energia Cinética Turbulenta:

É obtida multiplicando-se escalarmente a equação (A1.7) por  $\underline{v}$  e aplicando-se o processo de média ao resultado desta operação :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\underline{v} \cdot \underline{v})} + \overline{\underline{v} \cdot (\underline{V} \cdot \nabla) \underline{v}} + \overline{\underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{V}} + \overline{\underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}} &= \\ = -\frac{1}{\rho} \overline{\underline{v} \cdot \nabla p} + \nu \overline{\underline{v} \cdot \nabla^2 \underline{v}} & \quad (A1.8) \end{aligned}$$

Considerando a hipótese de um escoamento médio em regime permanente, o primeiro termo à esquerda possui valor nulo. Alguns dos demais termos desta equação podem ser modificados com base nos seguintes resultados :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{v} &= \nabla \cdot (\nabla \underline{v}) \quad ; \\ \frac{1}{2} \nabla \cdot [\nabla (\underline{v} \cdot \underline{v})] &= \frac{1}{2} \nabla \cdot [(\nabla \underline{v}) \cdot \underline{v}] + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = \\ &= \nabla \cdot [(\nabla \underline{v}) \cdot \underline{v}] = \overline{[\nabla \cdot (\nabla \underline{v})] \cdot \underline{v}} + \overline{\nabla \underline{v} : \nabla \underline{v}} \quad ; \end{aligned}$$

com este resultado :

$$\begin{aligned} \overline{\underline{v} \cdot \nabla^2 \underline{v}} &= \overline{[\nabla \cdot (\nabla \underline{v})] \cdot \underline{v}} = \frac{1}{2} \nabla \cdot [\nabla (\underline{v} \cdot \underline{v})] - \overline{\nabla \underline{v} : \nabla \underline{v}} = \\ &= \nabla \cdot (\nabla \bar{Q}) - \bar{D} \end{aligned}$$

A energia cinética turbulenta e a taxa de dissipação viscosa, respectivamente, são definidas por :

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \overline{\underline{v} \cdot \underline{v}} \quad ;$$

$$\nu \bar{D} = \nu (\overline{\nabla \underline{v} : \nabla \underline{v}})$$

Por sua vez, o segundo termo da equação (A1.8) pode ser escrito como:

$$\overline{\underline{v} \cdot (\underline{\bar{v}} \cdot \nabla) \underline{v}} = \overline{\underline{\bar{v}} \cdot [(\nabla \underline{v}) \cdot \underline{v}]} = \overline{\underline{\bar{v}} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right)} = \overline{\underline{\bar{v}} \cdot \nabla Q}$$

O quarto termo :

$$\overline{\underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}} = \overline{\underline{v} \cdot [(\nabla \underline{v}) \cdot \underline{v}]} = \overline{\underline{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right)} = \overline{\underline{v} \cdot \nabla Q} ,$$

onde  $Q$  representa a energia cinética turbulenta instantânea. Este resultado ainda pode ser simplificado :

$$\nabla \cdot (\underline{v} Q) = (\nabla \cdot \underline{v}) Q + \underline{v} \cdot \nabla Q ;$$

como  $\nabla \cdot \underline{v} = 0$  ,

$$\overline{\underline{v} \cdot \nabla Q} = \nabla \cdot (\overline{\underline{v} Q})$$

De modo análogo, o quinto termo pode ser escrito como :

$$\overline{\underline{v} \cdot \nabla p} = \nabla \cdot (\overline{\underline{v} p})$$

Introduzindo os resultados acima na equação (A1.8), obtém-se a equação da conservação da energia cinética turbulenta :

$$\overline{\underline{\bar{v}} \cdot \nabla Q} + \overline{\underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}} + \nabla \cdot (\overline{\underline{v} Q}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\overline{\underline{v} p}) +$$

$$+ \nu \nabla \cdot \nabla \bar{Q} - \nu \bar{D}$$

(6)

## APÊNDICE 2

### EQUAÇÕES NA FORMA TENSORIAL

#### A2.1- Equação da Continuidade

-para o escoamento médio :

Usando as componentes contravariantes da velocidade [07], a equação (3) teria a seguinte forma :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{v} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{v}^j e_j) \cdot e^i = \bar{v}^j_{,i} e_j \cdot e^i + \bar{v}^j \Gamma_{ji}^\ell e_\ell \cdot e^i = \\ &= \bar{v}^j_{,i} \delta_j^i + \bar{v}^j \Gamma_{ji}^\ell \delta_\ell^i = \bar{v}^j_{,j} + \bar{v}^j \Gamma_{ji}^i = 0 \quad ; \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $\delta_j^i$  representa o delta de Kronecker [ 07 ].

-para as flutuações, a exemplo do item acima :

$$\nabla \cdot \underline{v} = v^j_{,j} + v^j \Gamma_{ji}^i = 0 \quad (8)$$

#### A2.2 - Equação de Navier-Stokes - Escoamento Médio

$$\nabla \cdot (\bar{v} \bar{v}) + \nabla \cdot (\underline{v} \underline{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{v} \quad (5)$$

Para o primeiro termo :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\bar{\nabla} \bar{\nabla}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\nabla}^j \bar{e}_j \bar{\nabla}^k \bar{e}_k) \cdot \bar{e}^i = (\bar{\nabla}^j \bar{\nabla}^k \bar{e}_j \bar{e}_k)_{,i} \cdot \bar{e}^i = \\
 &= (\bar{\nabla}^j \bar{\nabla}^k \bar{e}_j)_{,i} \delta_k^i + \bar{\nabla}^j \bar{\nabla}^k \bar{e}_j \Gamma_{ki}^\ell \delta_\ell^i = \\
 &= (\bar{\nabla}^j \bar{\nabla}^i)_{,i} \bar{e}_j + \bar{\nabla}^j \bar{\nabla}^i \Gamma_{ji}^\ell \bar{e}_\ell + \bar{\nabla}^j \bar{\nabla}^k \Gamma_{ki}^i \bar{e}_j = \\
 &= \left[ (\bar{\nabla}^j \bar{\nabla}^i)_{,i} + \bar{\nabla}^\ell \bar{\nabla}^i \Gamma_{\ell i}^j + \bar{\nabla}^j \bar{\nabla}^k \Gamma_{ki}^i \right] \bar{e}_j .
 \end{aligned}$$

O segundo termo, a exemplo do primeiro termo, teria a seguinte forma :

$$\nabla \cdot (\underline{\nabla} \underline{\nabla}) = \left[ (\underline{v}^j \underline{v}^i)_{,i} + \underline{v}^\ell \underline{v}^i \Gamma_{\ell i}^j + \underline{v}^j \underline{v}^k \Gamma_{ki}^i \right] \underline{e}_j .$$

Terceiro termo :

$$-\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{P}) \bar{e}^i = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,i} \bar{e}^i = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,i} g^{ij} \bar{e}_j$$

Quarto termo :

$$\begin{aligned}
 v \nabla^2 \bar{\nabla} &= v \nabla \cdot (\nabla \bar{\nabla}) = v \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\nabla}^\ell \bar{e}_\ell) \bar{e}^j \right] \cdot \bar{e}^i = \\
 &= v \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\nabla}^\ell_{,j} \bar{e}_\ell \bar{e}^j + \bar{\nabla}^\ell \Gamma_{\ell j}^k \bar{e}_k \bar{e}^j) \cdot \bar{e}^i = \\
 &= v (\bar{\nabla}^\ell_{,ji} \bar{e}_\ell \bar{e}^j + \bar{\nabla}^\ell_{,j} \Gamma_{li}^k \bar{e}_k \bar{e}^j - \bar{\nabla}^\ell_{,j} \Gamma_{ik}^j \bar{e}_\ell \bar{e}^k + \\
 &+ \bar{\nabla}^\ell_{,i} \Gamma_{\ell j}^k \bar{e}_k \bar{e}^j + \bar{\nabla}^\ell \Gamma_{\ell j,i}^k \bar{e}_k \bar{e}^j + \bar{\nabla}^\ell \Gamma_{\ell j}^k \Gamma_{ki}^m \bar{e}_m \bar{e}^j + \\
 &- \bar{\nabla}^\ell \Gamma_{\ell j}^k \Gamma_{im}^j \bar{e}_k \bar{e}^m) \cdot \bar{e}^i =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v (\bar{V}^{\ell}_{,ji} g^{ji} e_{\ell} + \bar{V}^{\ell}_{,j} \Gamma_{\ell i}^k g^{ji} e_k - \bar{V}^{\ell}_{,j} \Gamma_{ik}^j g^{ik} e_{\ell} + \bar{V}^{\ell}_{,i} \Gamma_{\ell j}^k g^{ji} e_k + \\
&+ \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell j, i}^k g^{ji} e_k + \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell j}^k \Gamma_{ki}^m g^{ji} e_m - \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell j}^k \Gamma_{im}^j g^{mi} e_k) = \\
&= v (\bar{V}^j_{, \ell i} g^{\ell i} + 2 \bar{V}^{\ell}_{, k} \Gamma_{\ell i}^j g^{ki} - \bar{V}^j_{, \ell} \Gamma_{ik}^{\ell} g^{ik} + \\
&+ \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k, i}^j g^{ki} + \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell m}^k \Gamma_{ki}^j g^{mi} - \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^j \Gamma_{im}^k g^{mi}) e_j
\end{aligned}$$

Reagrupando estes termos, obtêm-se a equação de Navier-Stokes na forma tensorial :

$$\begin{aligned}
&\left[ (\bar{V}^j \bar{V}^i)_{,i} + \bar{V}^{\ell} \bar{V}^i \Gamma_{\ell i}^j + \bar{V}^j \bar{V}^k \Gamma_{ki}^i + (\overline{v^j v^i})_{,i} + \overline{v^{\ell} v^i} \Gamma_{\ell i}^j + \overline{v^j v^k} \Gamma_{kj}^i \right] e_j = \\
&= \frac{1}{\rho} \bar{P}_{,i} g^{ji} e_j + v (\bar{V}^j_{, \ell i} g^{\ell i} + 2 \bar{V}^{\ell}_{, k} \Gamma_{\ell i}^j g^{ki} - \bar{V}^j_{, \ell} \Gamma_{ik}^{\ell} g^{ik} + \\
&+ \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k, i}^j g^{ki} + \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell m}^k \Gamma_{ki}^j g^{mi} - \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^j \Gamma_{im}^k g^{mi}) e_j \quad (9)
\end{aligned}$$

### A2.3. Equação da Conservação da Energia Cinética :

$$\bar{V} \cdot \nabla \bar{Q} + \overline{v \cdot (\nabla \cdot \bar{V})} + \nabla \cdot (\overline{v \bar{Q}}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\overline{v \bar{P}}) + v \nabla \cdot \nabla \bar{Q} - v \bar{D} \quad (6)$$

Primeiro termo :

$$\bar{V} \cdot \nabla \bar{Q} = \bar{V}^i e_{i1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{Q}) e_j = \bar{V}^i e_{i1} \cdot \bar{Q}_{,j} e_j = \bar{V}^i \bar{Q}_{,j} \delta_i^j = \bar{V}^i \bar{Q}_{,i}$$

Segundo termo :

$$\begin{aligned}
\overline{v \cdot (\nabla \cdot \bar{V})} &= \overline{v^i e_{i1} \cdot (v^j e_{j2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} e^k) \bar{V}^{\ell} e_{\ell}} = \\
&= \overline{v^i e_{i1} v^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{V}^{\ell} e_{\ell}) = \overline{v^i e_{i1} v^j} \cdot (\bar{V}^{\ell}_{,j} e_{\ell} + \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell j}^m e_m) =
\end{aligned}$$

$$= \overline{v^i v^j} \overline{V^l}_{,j} e_{li} + \overline{v^i v^j} \overline{V^l} \Gamma_{lj}^m e_{mi} .$$

Terceiro termo :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\overline{v^j Q}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{v^j e_j Q}) \cdot e^i = (\overline{v^j Q})_{,i} e_j \cdot e^i + \overline{v^j Q} \Gamma_{ji}^l e_l \cdot e^i = \\ &= (\overline{v^j Q})_{,i} \delta_j^i + \overline{v^j Q} \Gamma_{ji}^l \delta_l^i = (\overline{v^i Q})_{,i} + \overline{v^j Q} \Gamma_{ji}^i \end{aligned}$$

Quarto termo :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\overline{v^j p}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{v^j e_j p}) \cdot e^i = -\frac{1}{\rho} [(\overline{v^j p})_{,i} e_j \cdot e^i + \\ &+ \overline{v^j p} \Gamma_{ji}^l e_l \cdot e^i] = -\frac{1}{\rho} (\overline{v^j p})_{,j} - \frac{1}{\rho} \overline{v^j p} \Gamma_{ji}^i \end{aligned}$$

Quinto termo :

$$\begin{aligned} v \nabla \cdot \nabla \overline{Q} &= v \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{Q}) e^j \right] \cdot e^i = v \frac{\partial}{\partial x_i} [\overline{Q}_{,j} e^j] \cdot e^i = \\ &= v (\overline{Q}_{,ji} e^j \cdot e^i - \overline{Q}_{,j} \Gamma_{il}^j e^l \cdot e^i) = \\ &= v (\overline{Q}_{,ji} g^{ji} - \overline{Q}_{,j} \Gamma_{il}^j g^{li}) \end{aligned}$$

Sexto termo :

$$v \overline{D} = v (\overline{\nabla v} : \overline{\nabla v})$$

Apenas a título de ilustração este termo será desenvolvido, pois nas equações constará como um termo global.

$$v (\overline{\nabla v} : \overline{\nabla v}) = v \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (v^j e_j) e^i : \frac{\partial}{\partial x_l} (v^k e_k) e^l \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= v \left[ (\overline{v^j_{,i} e_j e^i} + v^j \Gamma_{ji}^m \overline{e_m e^i}) : (\overline{v^k_{,l} e_k e^l} + v^k \Gamma_{kl}^n \overline{e_n e^l}) \right] = \\
&= v \left[ \overline{v^j_{,i} v^k_{,l} g_{jk} g^{il}} + \overline{v^j_{,i} v^k} \Gamma_{kl}^n g_{jn} g^{il} + \overline{v^j v^k_{,l}} \Gamma_{ji}^m g_{mk} g^{il} + \right. \\
&\quad \left. + \overline{v^j v^k} \Gamma_{ji}^m \Gamma_{kl}^n g_{mn} g^{il} \right] = v \left[ \overline{v^j_{,i} v^k_{,l} g_{jk} g^{il}} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \overline{v^j_{,i} v^k} \Gamma_{lk}^n g_{jn} g^{il} + \overline{v^j v^k} \Gamma_{ji}^m \Gamma_{kl}^n g_{mn} g^{il} \right] \quad (A2.1)
\end{aligned}$$

Com a reunião dos termos desenvolvidos acima, surge a seguinte equação :

$$\begin{aligned}
\overline{V^i Q_{,i}} + \overline{v^i v^j} \overline{V^l_{,j} g_{li}} + \overline{v^i v^j} \overline{V^l} \Gamma_{lj}^m g_{mi} + (\overline{v^i Q})_{,i} + \overline{v^j Q} \Gamma_{ji}^i &= \\
= -\frac{1}{\rho} \overline{(v^j_p)_{,j}} - \frac{1}{\rho} \overline{v^j_p} \Gamma_{ji}^i + v(\overline{Q}_{,ji} g^{ji} - \overline{Q}_{,j} \Gamma_{il}^j g^{li}) - v \overline{D} &\quad (10)
\end{aligned}$$

### APÊNDICE 3

#### EQUAÇÕES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

As equações na forma tensorial podem ser particularizadas para coordenadas cilíndricas. Neste sistema, as componentes contravariantes da velocidade média são designadas por  $\bar{V}^r$ ,  $\bar{V}^\theta$  e  $\bar{V}^z$ ; para a flutuação,  $v^r$ ,  $v^\theta$  e  $v^z$ .

Como as componentes na direção  $\theta$  em notação tensorial são apenas velocidades angulares, faz-se necessária uma transformação para velocidades tangenciais, substituindo  $\bar{V}^\theta$  e  $v^\theta$  em notação tensorial por  $\bar{V}^\theta/r$  e  $v^\theta/r$ , respectivamente, onde os novos valores  $\bar{V}^\theta$  e  $v^\theta$  representam velocidades tangenciais.

Para o sistema de coordenadas cilíndricas, algumas considerações adicionais podem ser feitas, segundo Flügge [ 07 ]:

-os únicos símbolos de Christoffel não nulos são :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \quad ; \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad ;$$

-as componentes não nulas do tensor métrico são :

$$g^{rr} = g_{rr} = 1 \quad ; \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad ; \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad ; \quad g^{zz} = g_{zz} = 1.$$

A3.1 - Equação da Continuidade :

$$\bar{V}^j_{,j} + \bar{V}^j \Gamma^i_{ji} = 0 \quad (7)$$

Em coordenadas cilíndricas :

$$\bar{V}^r_{,r} + \bar{V}^\theta_{,\theta} + \bar{V}^z_{,z} + \bar{V}^r \Gamma^{\theta}_{r\theta} = 0$$

Como  $\bar{V}^r = \bar{V}^\theta = 0$  , resulta em :

$$\bar{V}^z_{,z} = 0 \quad ; \quad (12)$$

que está de acordo com a hipótese de que  $\bar{V}^z$  é função do raio somente.

A3.2 - Equação de Navier-Stokes - equação (9)

-Componente r (quando j for igual a r) :

Primeiro termo :

$$(\bar{V}^j \bar{V}^i)_{,i} = (\bar{V}^r \bar{V}^i)_{,i} = 0 \quad ;$$

pois  $\bar{V}^r$  é nula .

Segundo termo :

$$\bar{v}^l \bar{v}^i \Gamma_{li}^j = \bar{v}^l \bar{v}^i \Gamma_{li}^r = \bar{v}^\theta \bar{v}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r = 0 ,$$

pois  $\bar{v}^\theta$  é nula .

Terceiro termo :

$$\bar{v}^j \bar{v}^k \Gamma_{ki}^i = \bar{v}^r \bar{v}^k \Gamma_{ki}^i = 0 ; \quad (\bar{v}^r = 0)$$

Quarto termo :

$$\overline{(v^j v^i)},_i = \overline{(v^r v^i)},_i = \overline{(v^r v^r)},_r + \overline{(v^r v^\theta)},_\theta + \overline{(v^r v^z)},_z = \overline{(v^r v^r)},_r ;$$

pois  $\overline{v^r v^\theta}$  e  $\overline{v^r v^z}$  são funções de  $r$ , somente.

Quinto termo :

$$\overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^j = \overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^r = \overline{v^\theta v^\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r ;$$

substituindo  $v^\theta$  por  $v^\theta/r$ , conforme a consideração inicial e  $\Gamma_{\theta\theta}^r$  pelo seu valor :

$$\overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^j = -\frac{1}{r} \overline{v^\theta v^\theta}$$

Sexto termo :

$$\overline{v^j v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^r v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^r v^r} \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \overline{v^r v^r}$$

Sétimo termo :

$$-\frac{1}{\rho} P_{,i} g^{ji} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,i} g^{ri} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,r} g^{rr} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,r}$$

Oitavo termo :

$$v \bar{V}^j_{,li} g^{li} = v \bar{V}^r_{,li} g^{li} = 0 ; (\bar{V}^r = 0)$$

Nono termo :

$$2 v \bar{V}^l_{,k} \Gamma^j_{li} g^{ki} = 2 v \bar{V}^l_{,k} \Gamma^r_{li} g^{ki} = 2 v \bar{V}^\theta_{,\theta} \Gamma^r_{\theta\theta} g^{\theta\theta} = 0 ; (\bar{V}^\theta = 0)$$

Décimo termo :

$$- v \bar{V}^j_{,l} \Gamma^l_{ik} g^{ik} = - v \bar{V}^r_{,l} \Gamma^l_{ik} g^{ik} = 0 ; (\bar{V}^r = 0)$$

Décimo primeiro termo :

$$v \bar{V}^l \Gamma^j_{lk,i} g^{ki} = v \bar{V}^l \Gamma^r_{lk,i} g^{ki} = v \bar{V}^\theta \Gamma^r_{\theta\theta,i} g^{\theta i} = 0 ; (\bar{V}^\theta = 0)$$

Décimo segundo termo :

$$v \bar{V}^l \Gamma^k_{lm} \Gamma^j_{ki} g^{mi} = v \bar{V}^l \Gamma^k_{lm} \Gamma^r_{ki} g^{mi} = v \bar{V}^r \Gamma^{\theta}_{r\theta} \Gamma^r_{\theta\theta} g^{\theta\theta} = 0 ;$$

$$\text{pois } \bar{V}^r = 0 .$$

Décimo terceiro termo :

$$- v \bar{V}^l \Gamma^j_{lk} \Gamma^k_{im} g^{mi} = - v \bar{V}^l \Gamma^r_{lk} \Gamma^k_{im} g^{mi} = - v \bar{V}^\theta \Gamma^r_{\theta\theta} \Gamma^{\theta}_{im} g^{mi} = 0 ;$$

$$(\bar{V}^\theta = 0)$$

Com a reunião dos termos não nulos, a equação de Navier-Stokes, componente r, resulta em :

$$\overline{(v^r v^r)},_r - \frac{1}{r} \overline{v^\theta v^\theta} + \frac{1}{r} \overline{v^r v^r} = -\frac{1}{\rho} \overline{P},_r \quad (13)$$

-Componente  $\theta$  (quando j for igual a  $\theta$ ) :

Primeiro termo:

$$(\overline{v^j v^i}),_i = (\overline{v^\theta v^i}),_i = 0 \quad ; \quad (\overline{v^\theta} = 0)$$

Segundo termo :

$$\overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^j = \overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^\theta = \overline{v^r v^\theta} \Gamma_{r\theta}^\theta + \overline{v^\theta v^r} \Gamma_{\theta r}^\theta = 0 \quad ; \quad (\overline{v^r} = \overline{v^\theta} = 0)$$

Terceiro termo:

$$\overline{v^j v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^\theta v^k} \Gamma_{ki}^i = 0 \quad (\overline{v^\theta} = 0)$$

Quarto termo :

$$\overline{(v^j v^i)},_i = \overline{(v^\theta v^i)},_i = \overline{(v^\theta v^r)},_r + \overline{(v^\theta v^\theta)},_\theta + \overline{(v^\theta v^z)},_z \quad ;$$

Substituindo  $v^\theta$  por  $v^\theta/r$  e considerando que  $\overline{v^\theta v^\theta}$  e  $\overline{v^\theta v^z}$  são funções de r somente :

$$\overline{(v^j v^i)},_i = \frac{1}{r} \overline{(v^\theta v^r)},_r - \frac{1}{r^2} \overline{v^\theta v^r}$$

Quinto termo :

$$\overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^j = \overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^\theta = \overline{v^r v^\theta} \Gamma_{r\theta}^\theta + \overline{v^\theta v^r} \Gamma_{\theta r}^\theta \quad ;$$

substituindo  $v^\theta$  por  $v^\theta/r$  :

$$\overline{v^{\ell i}} \Gamma_{\ell i}^j = \frac{2}{r^2} \overline{v^\theta v^r} .$$

Sexto termo :

$$\overline{v^j v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^\theta v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^\theta v^r} \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r^2} \overline{v^\theta v^r} ;$$

após substituir  $v^\theta$  por  $v^\theta/r$  .

Sétimo termo:

$$-\frac{1}{\rho} \overline{P}_{,i} g^{ji} = -\frac{1}{\rho} \overline{P}_{,i} g^{\theta i} = -\frac{1}{\rho} \overline{P}_{,\theta} g^{\theta\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r^2} \overline{P}_{,\theta}$$

Oitavo termo :

$$v \overline{V}_{, \ell i}^j g^{\ell i} = v \overline{V}_{, \ell i}^\theta g^{\ell i} = 0 ; \quad (\overline{V}^\theta = 0)$$

Nono termo :

$$2 v \overline{V}_{, k}^\ell \Gamma_{\ell i}^j g^{ki} = 2 v \overline{V}_{, k}^\ell \Gamma_{\ell i}^\theta g^{ki} = 2 v \overline{V}_{,\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta g^{\theta\theta} + 2 v \overline{V}_{,r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta g^{rr} = 0$$

pois  $\overline{V}^\theta = \overline{V}^r = 0$

Décimo termo :

$$-v \overline{V}_{, \ell}^j \Gamma_{ik}^\ell g^{ik} = -v \overline{V}_{, \ell}^\theta \Gamma_{ik}^\ell g^{ik} = 0 ; \quad (\overline{V}^\theta = 0)$$

Décimo primeiro termo :

$$\begin{aligned}
 v \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k, i}^j g^{ki} &= v \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k, i}^{\theta} g^{ki} = v \bar{V}^r \Gamma_{r\theta, \theta}^{\theta} g^{\theta\theta} + \\
 + v \bar{V}^{\theta} \Gamma_{\theta r, r}^{\theta} g^{rr} &= 0 ; \quad ( \bar{V}^{\theta} = \bar{V}^r = 0 ) .
 \end{aligned}$$

Décimo segundo termo :

$$v \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell m}^k \Gamma_{ki}^j g^{mi} = v \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell m}^k \Gamma_{ki}^{\theta} g^{mi} = 0 ;$$

pois  $\bar{V}^{\ell}$  será não nulo somente se  $\ell=z$  ( $\bar{V}^{\ell} = \bar{V}^z$ ), o que implicaria em  $\Gamma_{zm}^k = 0$ , para quaisquer valores de  $k$  e  $m$ .

Décimo terceiro termo :

$$-v \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^j \Gamma_{im}^k g^{mi} = -v \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^{\theta} \Gamma_{im}^k g^{mi} = 0 ;$$

pela mesma razão apresentada no termo precedente.

Reagrupando os termos, a componente  $\theta$  ficaria em :

$$\frac{1}{r} (\overline{v^{\theta} v^r})_{,r} + \frac{2}{r^2} \overline{v^{\theta} v^r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r^2} \bar{P}_{, \theta} \quad (14)$$

-Componente na direção  $z$  ( quando  $j$  for igual a  $z$  )

Primeiro termo :

$$(\bar{V}^j \bar{V}^i)_{,i} = (\bar{V}^z \bar{V}^i)_{,i} = (\bar{V}^z \bar{V}^r)_{,r} + (\bar{V}^z \bar{V}^{\theta})_{,\theta} + (\bar{V}^z \bar{V}^z)_{,z} = 0 ;$$

pois  $\bar{V}^r = \bar{V}^{\theta} = 0$  e  $\bar{V}^z_{,z} = 0$ , pela equação (12)

Segundo termo :

$$\overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^j = \overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^z = 0 ; \quad ( \Gamma_{li}^z = 0 )$$

Terceira termo:

$$\overline{v^j v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^z v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^z v^r} \Gamma_{r\theta}^\theta = 0 ; \quad ( \overline{v^r} = 0 )$$

Quarto termo :

$$\overline{(v^j v^i)},_i = \overline{(v^z v^i)},_i = \overline{(v^z v^r)},_r + \overline{(v^z v^\theta)},_\theta + \overline{(v^z v^z)},_z = \overline{(v^z v^r)},_r ;$$

pois os demais termos são funções de r, somente.

Quinto termo :

$$\overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^j = \overline{v^l v^i} \Gamma_{li}^z = 0 ; \quad ( \Gamma_{li}^z = 0 )$$

Sexto termo :

$$\overline{v^j v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^z v^k} \Gamma_{ki}^i = \overline{v^z v^r} \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \overline{v^z v^r}$$

Sétimo termo :

$$-\frac{1}{\rho} \overline{p},_i g^{ji} = -\frac{1}{\rho} \overline{p},_i g^{zi} = -\frac{1}{\rho} \overline{p},_z g^{zz} = -\frac{1}{\rho} \overline{p},_z$$

Oitavo termo :

$$v \overline{v^j},_{li} g^{li} = v \overline{v^z},_{li} g^{li} = v \overline{v^z},_{rr} g^{rr} = v \overline{v^z},_{rr}$$

Nono termo :

$$2 \nu \bar{V}^{\ell}_{,k} \Gamma_{\ell i}^j g^{ki} = 2 \nu \bar{V}^{\ell}_{,k} \Gamma_{\ell i}^z g^{ki} = 0 ; \quad ( \Gamma_{\ell i}^z = 0 )$$

Décimo termo :

$$- \nu \bar{V}^j_{, \ell} \Gamma_{ik}^{\ell} g^{ik} = - \nu \bar{V}^z_{, \ell} \Gamma_{ik}^{\ell} g^{ik} = - \nu \bar{V}^z_{, r} \Gamma_{\theta\theta}^r g^{\theta\theta} = \frac{\nu}{r} \bar{V}^z_{, r}$$

Décimo primeiro termo :

$$\nu \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k, i}^j g^{ki} = \nu \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k, i}^z g^{ki} = 0 ; \quad ( \Gamma_{\ell k}^z = 0 )$$

Décimo segundo termo :

$$- \nu \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell m}^k \Gamma_{ki}^j g^{mi} = \nu \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell m}^k \Gamma_{ki}^z g^{mi} = 0 ; \quad ( \Gamma_{ki}^z = 0 )$$

Décimo terceiro termo:

$$- \nu \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^j \Gamma_{im}^k g^{mi} = - \nu \bar{V}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^z \Gamma_{im}^k g^{mi} = 0 ; \quad ( \Gamma_{\ell k}^z = 0 )$$

Reagrupando estes termos :

$$\frac{1}{r} ( r \overline{v^z v^r} )_{, r} = - \frac{1}{\rho} \bar{P}_{, z} + \frac{\nu}{r} ( r \bar{V}^z_{, r} )_{, r} \quad .(15)$$

### A3.3 - Equação da Conservação da Energia Cinética Turbulenta - equação (10)

Primeiro termo :

$$\bar{V}^i \bar{q}_{, i} = \bar{V}^r \bar{q}_{, r} + \bar{V}^{\theta} \bar{q}_{, \theta} + \bar{V}^z \bar{q}_{, z} = 0 ;$$

pois  $\overline{V^r} = \overline{V^\theta} = 0$  e  $\overline{Q}_{,z} = 0$

Segundo termo:

$$\overline{v^i v^j} \overline{V^l}_{,j} g_{li} = \overline{v^z v^r} \overline{V^z}_{,r} g_{zz} = \overline{v^z v^r} \overline{V^z}_{,r}$$

Terceiro termo :

$$\overline{v^i v^j} \overline{V^l} \Gamma^m_{lj} g_{mi} = \overline{v^i v^j} \overline{V^z} \Gamma^m_{zj} g_{mi} = 0 ; \quad (\Gamma^m_{zj} = 0)$$

Quarto termo:

$$(\overline{v^i Q})_{,i} = (\overline{v^r Q})_{,r} + (\overline{v^\theta Q})_{,\theta} + (\overline{v^z Q})_{,z} = (\overline{v^r Q})_{,r} ;$$

sabendo-se que  $\overline{v^\theta Q}$  e  $\overline{v^z Q}$  são somente funções de  $r$ .

Quinto termo :

$$\overline{v^j Q} \Gamma^i_{ji} = \overline{v^r Q} \Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r} \overline{v^r Q}$$

Sexto termo :

$$-\frac{1}{\rho} (\overline{v^j P})_{,j} = -\frac{1}{\rho} (\overline{v^r P})_{,r} - \frac{1}{\rho} (\overline{v^\theta P})_{,\theta} - \frac{1}{\rho} (\overline{v^z P})_{,z} = -\frac{1}{\rho} (\overline{v^r P})_{,r} ;$$

pois  $\overline{v^r P}$  e  $\overline{v^\theta P}$  são funções de  $r$ , somente.

Sétimo termo :

$$-\frac{1}{\rho} \overline{v^j P} \Gamma^i_{ji} = -\frac{1}{\rho} \overline{v^r P} \Gamma^{\theta}_{r\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \overline{v^r P}$$

Oitavo termo :

$$v \bar{Q}_{,ji} g^{ji} = v \bar{Q}_{,rr} g^{rr} = v \bar{Q}_{,rr}$$

Nono termo :

$$-v \bar{Q}_{,j} \Gamma_{il}^j g^{li} = -v \bar{Q}_{,r} \Gamma_{\theta\theta}^r g^{\theta\theta} = v \frac{1}{r} \bar{Q}_{,r}$$

Décimo termo :

$$\begin{aligned} -v \bar{D} = & -v (\overline{v_{,i}^j v_{,l}^k} g_{jk} g^{il} + 2 \overline{v_{,i}^j v^k} \Gamma_{kl}^n g_{jn} g^{il} + \\ & + \overline{v_{,i}^j v^k} \Gamma_{ji}^m \Gamma_{kl}^n g_{mn} g^{il}) \end{aligned} \quad (A2.1)$$

-primeira parte :

$$\begin{aligned} \overline{v_{,i}^j v_{,l}^k} g_{jk} g^{il} &= \overline{v_{,i}^j v_{,i}^j} g_{jj} g^{ii} = \\ &= \overline{v_{,r}^r v_{,r}^r} g_{rr} g^{rr} + \overline{v_{,r}^{\theta} v_{,r}^{\theta}} g_{\theta\theta} g^{rr} + \overline{v_{,r}^z v_{,r}^z} g_{zz} g^{rr} + \\ &+ \overline{v_{,\theta}^r v_{,\theta}^r} g_{rr} g^{\theta\theta} + \overline{v_{,\theta}^{\theta} v_{,\theta}^{\theta}} g_{\theta\theta} g^{\theta\theta} + \overline{v_{,\theta}^z v_{,\theta}^z} g_{zz} g^{\theta\theta} + \\ &+ \overline{v_{,z}^r v_{,z}^r} g_{rr} g^{zz} + \overline{v_{,z}^{\theta} v_{,z}^{\theta}} g_{\theta\theta} g^{zz} + \overline{v_{,z}^z v_{,z}^z} g_{zz} g^{zz} = \end{aligned}$$

Substituindo  $v^{\theta}$  por  $v^{\theta}/r$  e as componentes do tensor métrico pelos seus valores :

$$\begin{aligned} &= \overline{v_{,r}^r v_{,r}^r} + \overline{v_{,r}^{\theta} v_{,r}^{\theta}} - \frac{2}{r} \overline{v_{,r}^{\theta} v^{\theta}} + \frac{1}{r^2} \overline{v^{\theta} v^{\theta}} + \overline{v_{,r}^z v_{,r}^z} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \overline{v_{,\theta}^r v_{,\theta}^r} + \frac{1}{r^2} \overline{v_{,\theta}^{\theta} v_{,\theta}^{\theta}} + \frac{1}{r^2} \overline{v_{,\theta}^z v_{,\theta}^z} + \overline{v_{,z}^r v_{,z}^r} + \end{aligned}$$

$$\overline{v',_z v',_z} + \overline{v',_z v',_z} ;$$

-segunda parte :

$$2 \overline{v',_i v^k} \Gamma_{\ell k}^n g_{jn} g^{i\ell} = 2 \overline{v',_i v^k} \Gamma_{ik}^j g_{jj} g^{ii} =$$

$$2 \overline{v',_\theta v^\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r g_{rr} g^{\theta\theta} + 2 \overline{v',_r v^\theta} \Gamma_{r\theta}^\theta g_{\theta\theta} g^{rr} +$$

$$+ 2 \overline{v',_\theta v^r} \Gamma_{\theta r}^\theta g_{\theta\theta} g^{\theta\theta} =$$

Substituindo  $v^\theta$  por  $v^\theta/r$  :

$$= \frac{-2}{r^2} \overline{v',_\theta v^\theta} + \frac{2}{r} \overline{v',_r v^\theta} - \frac{2}{r^2} \overline{v^\theta v^\theta} + \frac{2}{r^2} \overline{v',_\theta v^\theta}$$

-terceira parte :

$$\overline{v^j v^k} \Gamma_{ji}^m \Gamma_{kl}^n g_{mn} g^{i\ell} = \overline{v^j v^k} \Gamma_{ji}^m \Gamma_{ki}^m g_{mm} g^{ii} =$$

$$= \overline{v^\theta v^\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{\theta\theta}^r g_{rr} g^{\theta\theta} + \overline{v^r v^r} \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{r\theta}^\theta g_{\theta\theta} g^{\theta\theta} +$$

$$+ \overline{v^\theta v^\theta} \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta g_{\theta\theta} g^{rr} =$$

Substituindo  $v^\theta$  por  $v^\theta/r$  e os demais valores :

$$= \frac{1}{r^2} \overline{v^r v^r} + \frac{2}{r^2} \overline{v^\theta v^\theta} .$$

Reagrupando as partes relativas ao décimo termo :

$$-v \bar{D} = -v \left( \overline{v',_r v',_r} + \overline{v',_r v',_r} + \overline{v',_r v',_r} + \frac{1}{r^2} \overline{v',_\theta v',_\theta} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2} \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}} + \frac{1}{r^2} \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}^z} + \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}^z} + \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}^z} + \\
& + \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}^z} + \frac{1}{r^2} \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}} + \frac{1}{r^2} \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}} - \frac{2}{r^2} \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}} + \frac{2}{r^2} \overline{v_{,\theta} v_{,\theta}}
\end{aligned}$$

A equação da conservação da energia cinética turbulenta ficaria em :

$$\begin{aligned}
\overline{v^z v^r} \overline{v^z}_{,r} + \frac{1}{r} (r \overline{v^r Q})_{,r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} (r \overline{v^r p})_{,r} + \\
+ v \frac{1}{r} (r \overline{Q})_{,r} - v \overline{D} ;
\end{aligned}$$

de outro modo :

$$\overline{v^r v^z} \overline{v^z}_{,r} + \frac{1}{r} \left[ r \overline{v^r (Q + \frac{p}{\rho})} \right]_{,r} - v \frac{1}{r} (r \overline{Q})_{,r} + v \overline{D} = 0 \quad (16)$$

#### A3.4. Simplificações Adicionais

As componentes da equação de Navier-Stokes podem ser simplificadas, conforme o procedimento a seguir :

- equação de Navier-Stokes - direção  $\theta$

Segundo Daily e Harleman [ 04 ], devido a simetria axial do problema, a variação da pressão média com o ângulo  $\theta$  seria nula:

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial \theta} = 0 ; \text{ ou } \overline{P}_{,\theta} = 0$$

A equação (14) com  $\overline{P}_{,\theta} = 0$ , resulta em :

$$\frac{1}{r} (\overline{v_{,\theta} v^r})_{,r} + \frac{2}{r^2} \overline{v_{,\theta} v^r} = 0 ;$$

Como  $\overline{v^\theta v^r}$  é função apenas do raio, pode-se afirmar que:

$$\frac{d}{dr} (\overline{v^\theta v^r}) + \frac{2}{r} \overline{v^\theta v^r} = 0$$

Esta equação pode ser integrada, obtendo-se o seguinte resultado :

$$\overline{v^\theta v^r} = \frac{C}{r^2} ;$$

onde C é uma constante. Usando a condição de contorno de que  $\overline{v^\theta v^r}$  apresenta um valor finito em  $r=0$ , conclui-se que a constante C deve ser nula, e :

$$\overline{v^\theta v^r} = 0$$

- equação de Navier-Stokes - direção r :

Derivando-se parcialmente a equação (13) em relação a z:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{v^r v^r}) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v^\theta v^\theta}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} \right) ;$$

que pode ser colocada na seguinte forma :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v^r v^r}) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v^\theta v^\theta}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) .$$

Como  $\overline{v^r v^r}$  e  $\overline{v^\theta v^\theta}$  são funções de r somente, conforme já foi admitido :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{v^r v^r}) = \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v^\theta v^\theta}) = 0$$

Isto implica na nulidade de todo o lado esquerdo da equação anterior. Em consequência, do lado direito :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) = 0 \quad ;$$

resultando que  $\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}$  não é função do raio .

-equação de Navier-Stokes - direção z :

$$\frac{1}{r} (r \overline{v^r v^z})_{,r} - \frac{\nu}{r} (r \overline{V^z}_{,r})_{,r} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,z} \quad (15)$$

Segundo o item anterior  $\bar{P}_{,z}$  não depende de r; portanto, o lado direito da equação (15) também não dependerá de r. Sem esta dependência a equação pode ser integrada em r, resultando :

$$r (\overline{v^r v^z} - \nu \frac{d\overline{V^z}}{dr}) = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,z} \frac{r^2}{2} + C \quad ;$$

onde C é uma constante. O valor desta constante pode ser obtido aplicando-se a equação ao ponto  $r=0$  (centro do tubo), resultando em  $C=0$ . A equação resultaria em :

$$\overline{v^r v^z} - \nu \frac{d\overline{V^z}}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{r}{2} \bar{P}_{,z}$$

Esta equação, por sua vez, pode ser aplicada ao ponto  $r=R$ , onde  $\overline{v^r v^z}$  terá um valor nulo, pois na parede do tubo não há flutuações de velocidade :

$$-\nu \left. \frac{d\overline{V^z}}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{1}{\rho} \frac{R}{2} \bar{P}_{,z}$$

O valor  $-\mu \left. \frac{d\overline{V^z}}{dr} \right|_{r=R}$  representa a tensão cisalhante na parede

do tubo, designada por  $\tau_0$  :

$$\tau_0 = -\mu \left. \frac{d\bar{V}^z}{dr} \right|_{r=R}$$

Substituindo este valor na última equação :

$$\tau_0 = -\frac{R}{2} \bar{P}_{,z} ;$$

ou 
$$\frac{\tau_0}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{R}{2} \bar{P}_{,z}$$

A raiz quadrada da razão  $\tau_0/\rho$  é definida como: "velocidade de fricção", designada por  $u^*$ , ou seja :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u^{*2}$$

O gradiente da pressão média na direção  $z$  pode ser representado por :

$$\bar{P}_{,z} = -\frac{2\rho}{R} u^{*2}$$

Substituindo este resultado na equação em estudo:

$$\frac{r}{\nu} \frac{d\bar{V}^z}{dr} = \frac{r}{R} u^{*2} ; \quad (17)$$

que é a equação de Navier-Stokes na direção axial do escoamento , em uma forma simplificada .

## APÊNDICE 4

### BALANÇO ENERGÉTICO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

A conservação da energia cinética turbulenta pode ser prevista pela seguinte equação :

$$\overline{v^y v^z} \frac{d\overline{V^z}}{dy} + \frac{1}{R-y} \frac{d}{dy} \left[ (R-y) \overline{v^y (Q + \frac{P}{\rho})} \right] - \frac{\nu}{R-y} \frac{d}{dy} \left[ (R-y) \frac{d\overline{Q}}{dy} \right] + v \overline{D} = 0 \quad ; \quad (19)$$

onde :

- o primeiro termo representa a produção de energia cinética turbulenta (PROD) ;
- o segundo termo, a difusão de energia através da energia cinética e energia de pressão (DIFPQ) ;
- o terceiro termo, a difusão viscosa (DIFV) ;
- o quarto termo, a taxa de dissipação (DISS).

Pela equação (19) observa-se que os quatro termos estão em equilíbrio para qualquer valor de  $y$ , tal que:

- para qualquer ponto  $j$  :

$$\text{PROD}_j + \text{DIFPQ}_j + \text{DIFV}_j + \text{DISS}_j = 0 \quad (\text{A4.1})$$

Devido a importância que representam para a análise e compreensão do escoamento, torna-se conveniente que se obtenha a distribuição de cada um deles ao longo do raio do tubo.

Após a introdução dos modelos os termos apresentam-se da seguinte forma :

$$\text{PROD}_j = \text{VYVZ}_j \left. \frac{dV}{d\eta} \right|_j ,$$

$$\text{DIFV}_j = \frac{-1}{1-\eta_j} \left. \frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \frac{2}{\text{Re}} \frac{dQ}{d\eta} \right] \right|_j ,$$

$$\text{DIFPQ}_j = \frac{-1}{1-\eta_j} \left. \frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \frac{2}{\text{Re}} H(K R_q) \beta K R_q \frac{dQ}{d\eta} \right] \right|_j$$

$$\text{DISS}_j = \frac{C_1 \alpha_j^* Q_{i+1,j}}{\ell_j^{*2}} .$$

Para comparação com dados experimentais, os termos acima devem ser representados nas mesmas escalas utilizadas por Hinze [08]. Esta transformação constaria de uma multiplicação pelos seguintes fatores :

-próximo à parede :  $\frac{2}{\phi^2 \text{Re}}$

-longe da parede :  $\frac{1}{\phi}$