

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA-MECÂNICA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS  
AO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM REGIME LAMINAR  
COM CONDUÇÃO E CONVECÇÃO COMBINADAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

ÁLVARO TOUBES PRATA

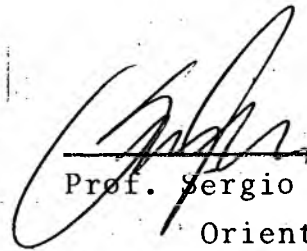
FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 1980

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS  
AO PROBLEMA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM RÉGIME LAMINAR  
COM CONDUÇÃO E CONVECÇÃO COMBINADAS

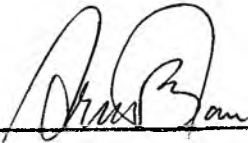
Álvaro Toubes Prata

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO TERMOTÉC  
NICA E, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

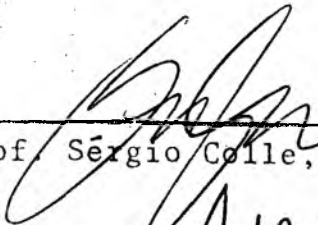


Prof. Sergio Colle, D.Sc.  
Orientador



Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador do Curso

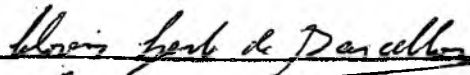
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Sérgio Colle, D.Sc.



Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.



Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.

A meus pais,  
pela orientação.

A meus irmãos,  
pelo estímulo.

À Cristina,  
pela compreensão

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os colegas da Divisão de Termotécnica, pelo apoio e incentivo recebido; aos funcionários do CPD da UFSC pela atenção que me dispensaram quando solicitados; a Nestor Back pelo trabalho de datilografia; a Roberto José Dias de Andrade pelos desenhos, e a todos os professores, funcionários e alunos deste Centro que de uma forma ou de outra colaboraram durante a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço ao Prof. Sérgio Colle, cuja orientação transcende o conteúdo deste trabalho. Sua seriedade e dedicação sempre me serviram de exemplo durante todo o curso de Pós-Graduação.

## ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA .....	9
2.1 - Considerações iniciais .....	9
2.2 - Equação diferencial do movimento .....	13
2.3 - Equação diferencial da temperatura .....	14
3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA PELO MÉTODO INTEGRAL .....	17
3.1 - Método integral .....	17
3.2 - Equação integral do movimento .....	18
3.3 - Equação integral da temperatura .....	21
3.3.1 - Equação de Laplace .....	21
3.3.2 - Equação de Poisson .....	23
3.3.3 - Equação bi-harmônica .....	24
4. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS .....	30
4.1 - Divisão do contorno .....	30
4.2 - Aproximação das integrais .....	31
4.3 - Discretização da equação integral da velocidade .....	32
4.4 - Discretização das equações integrais da temperatura ...	35
4.4.1 - Região sólida .....	35
4.4.2 - Região de escoamento .....	39
5. ANÁLISE DE UM PROBLEMA APLICADO À ENGENHARIA .....	43
5.1 - Aplicação do método integral .....	43
5.2 - Discussão dos resultados .....	50
6. CONCLUSÕES .....	81
BIBLIOGRAFIA .....	84
APÊNDICE A - PROBLEMA A VALORES NOS CONTORNOS ASSOCIADOS À EQUAÇÃO DE LAPLACE .....	90

APÊNDICE B - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS ASSOCIADAS AOS OPERADORES LAPLACEANO E BI-HARMÔNICO .....	92
B.1 - Operador Laplaceano .....	92
B.2 - Operador bi-harmônico .....	97
APÊNDICE C - TRATAMENTO DAS SINGULARIDADES .....	101
APÊNDICE D - CÁLCULO DA VELOCIDADE MÉDIA PARA REGIÕES MULTIPLAMENTE CONEXAS .....	104
APÊNDICE E - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM ESCOAMENTO LAMINAR NO INTERIOR DE UM DUTO DE SECÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR, SOB A CONDIÇÃO DE FLUXO PRESCRITO .....	108
APÊNDICE F - SUPERFÍCIE DE LIAPUNOV E SUPERFÍCIE REGULAR SEGUNDO KELLOG .....	110

## SIMBOLOGIA

A	- semi-largura do retângulo
a	= A/AE
A*	- área de escoamento
AE	- eixo maior da elipse
A <sub>ij</sub>	- elemento da matriz  A
B	- semi-altura do retângulo
b	= B/BE
BE	- eixo menor da elipse
c	= A/B
c <sub>p</sub>	- calor específico do fluido
D <sub>h</sub> *	- diâmetro hidráulico do duto, definido conforme a equação (2.8).
D <sub>i</sub>	- região de Liapunov ou regular do R <sup>2</sup>
g	- função de Green associada ao operador Laplaceano
G	- função de Green associada ao operador bi-harmônico
h	- coeficiente de convecção definido conforme a equação (2.4)
I <sub>i</sub>	- elemento do vetor  I
j	- referência j da Bibliografia
k <sub>f</sub>	- condutibilidade térmica do fluido
k <sub>s</sub>	- condutibilidade térmica do sólido
L*	- dimensão característica da secção transversal do duto usada nas adimensionalizações
<u>n</u>	- normal exterior a ∂D.
N <sub>i</sub>	- número de pontos nodais no contorno ∂D <sub>i</sub>
Nu	- número de Nusselt definido conforme a equação (2.7)
P*	- perímetro do duto
p*, p	- pressão e a correspondente adimensional
q*	- fluxo de calor por unidade de comprimento do duto
$\dot{q}$	- taxa de geração interna de energia por unidade de volume
s	- comprimento de arco
T	- temperatura adimensional definida conforme a equação (2.18)



$T^*$	- temperatura
$T_b^*, T_b$	- temperatura de mistura definida conforme a equação (2.1) e a correspondente adimensional
$\bar{T}^*, \bar{T}_s$	- temperatura média no contorno aquecido do duto e a correspondente adimensional
$u$	- velocidade adimensional do fluido definida conforme a equação (2.12)
$u^*$	- velocidade vetorial do fluido
$u_m^*, u_m$	- velocidade média do fluido definida conforme a equação (3.12) e a correspondente adimensional
$x^*, y^*, z^*$	- coordenadas cartesianas
$x, y$	- coordenadas cartesianas adimensionais
$z$	- par ordenado $(x, y)$
$ 1 $	- matriz identidade
$\alpha_f$	- difusibilidade térmica do fluido
$\partial D_i$	- fronteira de $D_i$
$\partial G$	= $\partial G / \partial n$
$\partial g$	= $\partial g / \partial n$
$\partial T$	= $\partial T / \partial n$ , derivada normal de $T$
$\partial u$	= $\partial u / \partial n$ , derivada normal de $u$
$\nabla$	- operador nabla
$\nabla^2$	- operador Laplaceano
$\nabla^4$	- operador Lagrangeano ou bi-harmônico
$\delta(z-z')$	- distribuição singular "Delta de Dirac"
$\in$	- pertinência a conjuntos
$\mu$	- viscosidade absoluta
$\rho$	- massa específica

## RESUMO

O objetivo do presente trabalho é aplicar o método de equações integrais à transferência de calor em escoamento laminar, no interior de dutos com paredes espessas e secção transversal arbitrária.

A formulação do problema físico é proposta de forma a permitir uma utilização do método em diversas situações na engenharia.

A partir das funções de Green fundamentais do operador Laplaceano e bi-harmônico, constrói-se o conjunto de equações integrais do problema a ser resolvido. Um esquema numérico é apresentado e testado em um problema a valores de contorno composto e seccionalmente homogêneo, com fluido escoando em dutos de secção transversal elíptica. A influência da condutibilidade térmica do sólido na transferência de calor para a região de escoamento, é analisada em função de parâmetros representativos.

Os resultados obtidos em alguns casos limites foram comparados com valores encontrados na literatura especializada.

## ABSTRACT

The main objective of this work is to apply the integral equation method to the analysis of laminar heat transfer in thick-walled ducts with arbitrary cross section.

The formulation of the physical problem is proposed in order to allow a wide range of utilization of the integral method in many engineering problems.

A set of integral equations is constructed from the fundamental Green's function associated with the Laplace operator and the bi-harmonic operator. A numerical scheme is shown and tested in a compound and sectionally homogeneous boundary value problem, with fluid flowing in ducts of elliptical cross section. The influence of the thermal conductivity of the solid in the heat transfer process is analysed in terms of relevant parameters.

Results for some limiting cases were compared with analytical results from the literature.

## 1. INTRODUÇÃO

O problema da transferência de calor em escoamentos laminares por convecção forçada tem sido estudado extensivamente desde o final do século passado e inúmeros são os pesquisadores que trabalharam nesta área. Jakob [29] e McAdams [30] fazem uma revisão destas investigações.

Os primeiros estudos foram feitos considerando-se escoamentos em dois tipos de canais: placas planas paralelas e dutos de secções circulares. A análise térmica de escoamentos em secções não circulares despertou a atenção dos pesquisadores em transferência de calor e uma das principais motivações seria a aplicação destes estudos na análise de trocadores de calor para reatores nucleares.

A transferência de calor em secções transversais retangulares foi estudada em 1953 por Clark e Kays. Eles supuseram escoamento laminar e perfil de temperatura plenamente desenvolvido. Em 1959, Dennis, Mercer e Poots [19] analisaram o mesmo problema, desta feita considerando o perfil de temperatura não desenvolvido. O escoamento em dutos com secção elíptica foi estudado por Tao [3] que fez a hipótese de perfil de temperatura plenamente desenvolvido. Desde então diversos têm sido os trabalhos apresentados nesta área e os métodos de solução têm se aprimorado com o intuito de se abordar problemas cada vez mais complexos.

Os problemas de transferência de calor cujas soluções analíticas são difíceis de serem obtidas, receberam grande impulso com o desenvolvimento dos métodos numéricos. Dentre essas técnicas de solução destaca-se o método de solução por equações integrais, devido ao fato deste método fazer uso de um número menor de equações do que os demais métodos existentes. No método integral, a dimensão do espaço em questão é a dimensão do contorno da região estudada.

O método de solução por equações integrais foi utilizado em 1964 por Sparrow et al [21] na análise da transferência de calor por condução. Foi estudado o problema inverso onde a temperatura é prescrita como função do tempo para pontos no interior

do sólido com o intuito de se determinar a temperatura e o fluxo de calor na superfície.

Em 1966, Tolubinskiy |5| utilizou o método integral na análise de problemas de transferência de calor e massa em regimes transientes. Deu ao método integral um formalismo matemático rigoroso.

Em 1968, Crosbie e Viskanta |6| estudaram o problema da condução de calor não estacionária em uma placa sujeita a resfriamento ou aquecimento, levando em conta os efeitos de convecção e radiação. O método integral demonstrou ser exato no sentido de que qualquer grau de precisão pôde ser obtido e o erro estimado.

Shaw |7| em 1974, estudou a transferência de calor não estacionária em uma região com geometria em forma de setor de círculo, através do método de solução por equações integrais. O objetivo principal do trabalho de Shaw foi apontar as vantagens do método, em relação a outros métodos numéricos.

Em 1973 Chang et al |8| utilizaram as funções de Green fundamentais juntamente com a segunda fórmula de Green para estudar o problema da condução de calor em meio anisotrópicos. O método demonstrou ser bastante eficaz quando aplicado a configurações cujo contorno não possua cantos agudos. Os autores apresentaram também, alguns resultados obtidos com funções de Green incompletas e concluíram que sempre que ela puder ser construída, deve ser usada em substituição à função de Green fundamental. Outros trabalhos |9|, |10| e |11| foram realizados por Chang et al na aplicação do método de equações integrais a problemas de condução de calor.

Em 1978, Gonzalez |12| estudou o problema do esfriamento de peças cilíndricas e prismáticas, utilizando o método de equações integrais. Apesar do tempo de computação ter sido relativamente grande, os resultados obtidos foram bons já que o problema envolvia condições de contorno não-lineares.

Em 1979, Abreu |13| aplicou o mesmo método a problemas de transferência de calor estacionário afim de verificar a influência da condutibilidade térmica sobre a transferência de calor por radiação entre sólidos de geometria arbitrária. Neste trabalho foram utilizadas funções de Green completas e incompletas,

obtendo bons resultados.

No mesmo ano, Colle [15] aplicou o método de equações integrais ao estudo hidrodinâmico de escoamentos laminares, em dutos retilíneos com secção transversal de geometria múltiplamente conexa. O método demonstrou bastante eficiência comparado com outros métodos numéricos existentes. A generalização de soluções integrais para problemas de transferência de calor em regime laminar em dutos de secção transversal de geometria arbitrária é apresentada em [16]. Baseado neste trabalho existe hoje no Centro Tecnológico da UFSC um programa computacional que permite uma análise completa da transferência de calor em regime laminar, em dutos de secção transversal arbitrária e regiões múltiplamente conexas.

O método de solução por equações integrais tem sido utilizado com êxito a diversos problemas na engenharia. O objetivo do presente trabalho é verificar a aplicação do método integral no estudo térmico de escoamentos laminares em dutos de secção transversal arbitrária, com efeitos de condução e convecção combinados. Ao que parece, estes problemas ainda não foram analisados utilizando-se esta técnica de solução.

Propõe-se a análise de um problema a valores no contorno acoplado e seccionalmente homogêneo, conforme a figura 1.1.

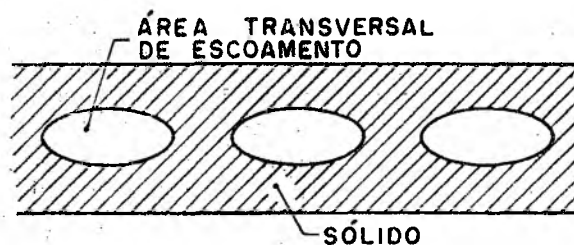


Figura 1.1

Nesta configuração, um determinado líquido escoar em regime laminar no interior dos dutos de secção transversal elíptica, e deseja-se retirar ou fornecer calor ao fluido em questão. A intensidade com que o calor é trocado, dependerá das condutibilidades térmicas do sólido e do fluido, bem como da geometria em estudo. Resta saber como estes parâmetros influenciam na transfe

rência de calor.

Em várias situações na Engenharia, depara-se com problemas semelhantes ao apresentado anteriormente. A seguir, são mostradas algumas aplicações práticas.

- Derretimento de neve

O uso de serpentinas aquecidas para o derretimento de neve em calçadas, rodovias, rampas e avenidas, tem sido largamente difundido. Além de evitar a necessidade de se remover constantemente o excesso de neve depositado, proporciona maior segurança no tráfego de veículos e no deslocamento dos pedestres.

Na figura 1.2 é mostrado como os dutos são normalmente posicionados no interior do concreto em uma instalação padrão.

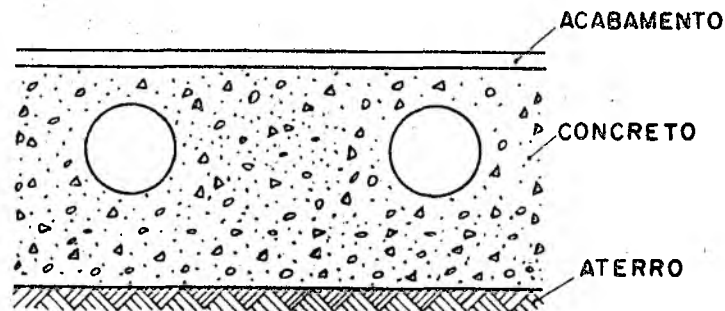


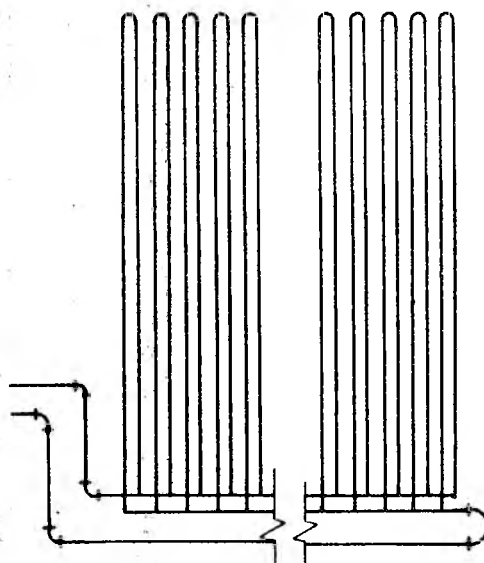
Figura 1.2

A profundidade dos dutos é estipulada de acordo com o cálculo estrutural. A profundidade do acabamento normalmente fica em torno de 10 mm. No caso do acabamento ser asfalto, os dutos devem estar mais próximos da superfície. Quando se utiliza outros materiais, a resistência térmica a ser vencida deve equivaler a uma camada de 70 mm de concreto.

### - Pistas de patinação

Muitos sistemas de distribuição do fluxo de refrigerante ao longo da área onde se deseja obter uma camada de gelo, têm sido utilizados. A instalação deve ser projetada de maneira a garantir uma distribuição uniforme do refrigerante ao longo de toda a malha de dutos. Bons projetos requerem um sistema de alimentação e retorno devidamente balanceados, de maneira que assegurem uma baixa velocidade de fluxo. As unidades dimensionadas para operar com escoamento laminar têm mostrado uma maior eficiência. A figura 1.3 mostra o diagrama esquemático de uma instalação.

Figura 1.3



Existem diversos modos de se preparar o solo para receber a rede de dutos. De uma maneira geral não é necessário que se coloque nenhum tipo de isolamento e basta que o subsolo esteja convenientemente drenado, para se conseguir boa eficiência. Na figura 1.4 é mostrado uma disposição onde o custo é um fator limitante.

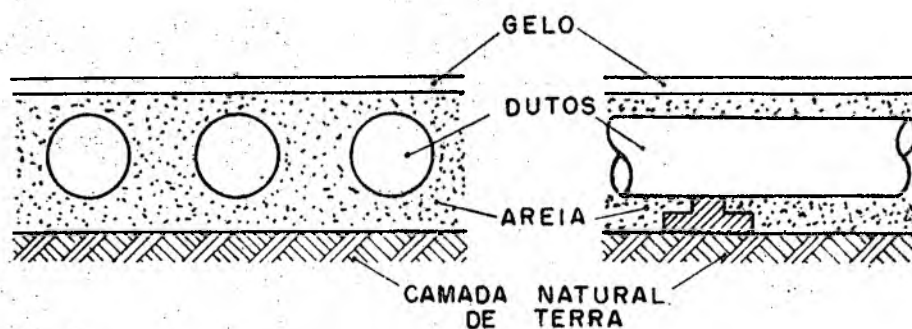


Figura 1.4



## - Painéis de aquecimento

O uso de painéis no aquecimento de recintos fechados, é uma técnica bastante eficiente, e tem sido aplicada em residências há cerca de sessenta anos. Por outro lado, a aplicação em larga escala no aquecimento de prédios comerciais só foi incrementada nos últimos anos. Geralmente utiliza-se água previamente aquecida, circulando em dutos embutidos no assoalho, paredes ou teto. Dependendo do projeto, os painéis podem ser usados tanto para aquecimento como para resfriamento.

Quando os dutos são embutidos no teto, a configuração utilizada geralmente é uma das seguintes:

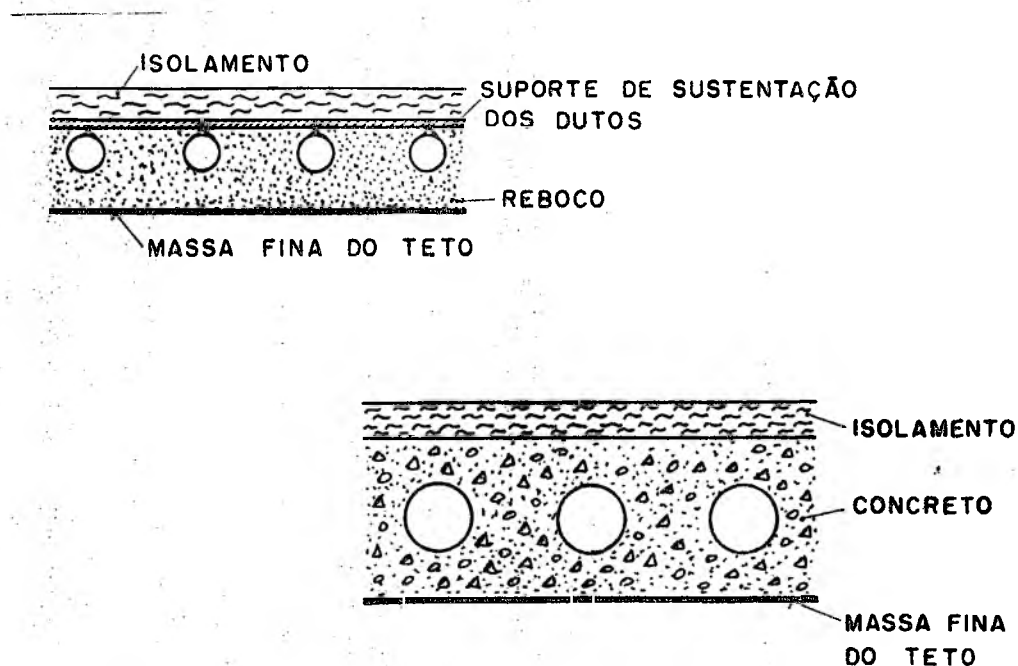


Figura 1.5

Embora não tão difundida, a instalação de painéis de aquecimento nas paredes, deve ser construída da mesma maneira que os painéis do teto. Para o assoalho os arranjos mais comuns são os mostrados na figura 1.6.

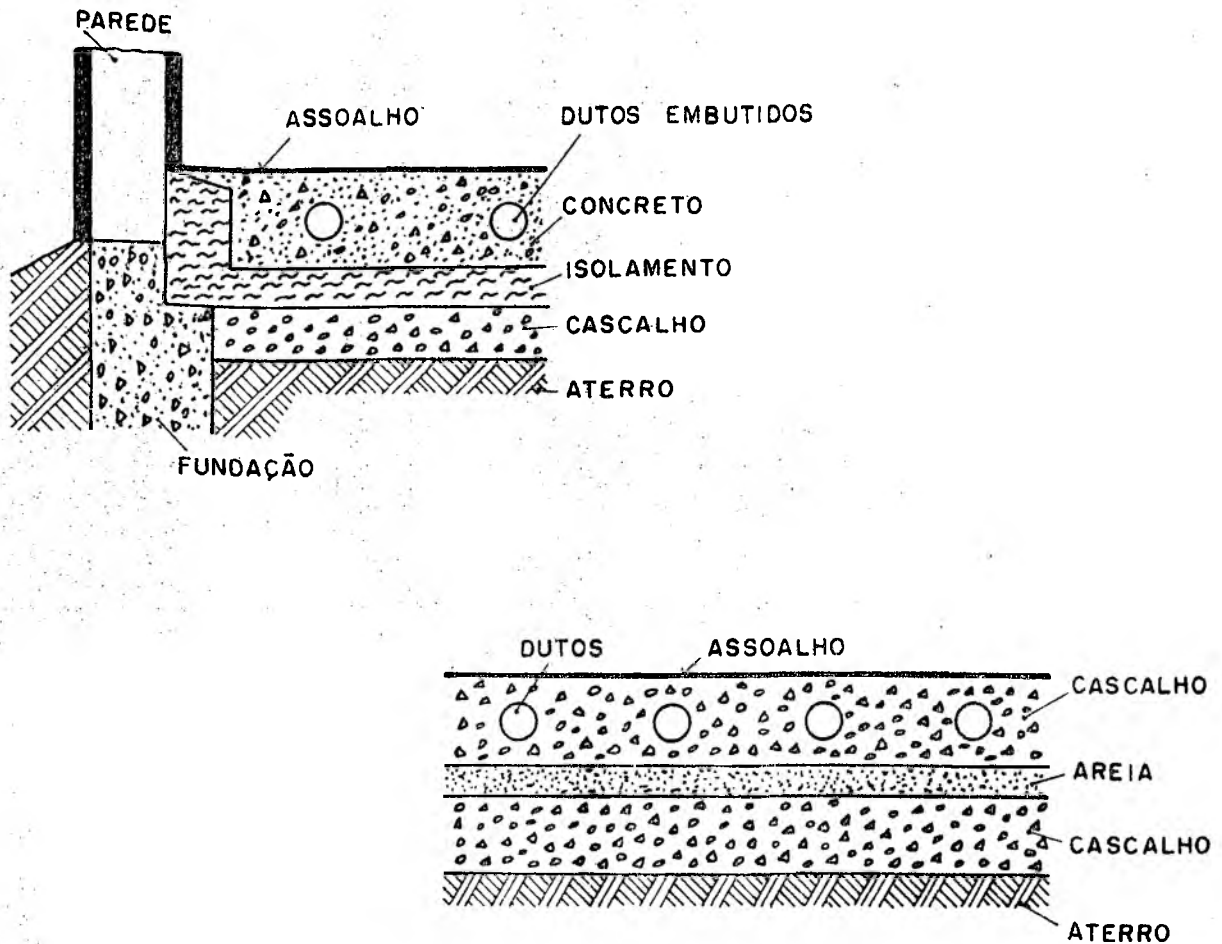


Figura 1.6

#### - Coletores solares planos

O aproveitamento da energia solar tem se difundido bastante, principalmente devido ao interesse crescente em se tornar cada vez mais viável, a utilização de fontes não convencionais de energia.

O coletor solar padrão, apesar de já estar bastante comercializado, ainda possui um custo inicial relativamente alto. Muitas pesquisas têm sido feitas no intuito de se obter novas geometrias e novos materiais. Muitas idéias têm sido colocadas em prática e inúmeras são as patentes registradas.

O problema básico do coletor solar plano, é a sua eficiência. Quanto mais alta a temperatura de operação do coletor, me-

nor o rendimento e conseqüentemente maior a preocupação com o isolamento, coberturas, tintas seletivas, material empregado na confecção dos dutos, etc. Desta forma, operando em temperaturas mais baixas, o coletor pode se tornar bastante simples. Um exemplo é o coletor feito com uma placa de polipropileno extrudado e mostrado na figura 1.7.

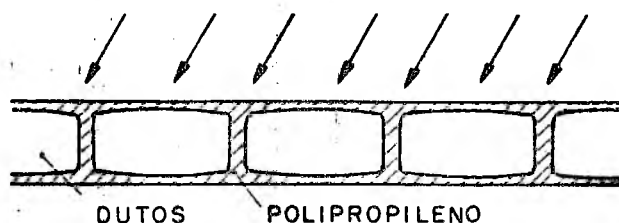


Figura 1.7

Este coletor dispensa o uso de isolamentos térmicos e qualquer tipo de cobertura, além de ter uma vida útil bastante longa. Pode ser usado para aquecimento de piscinas, estufas, ou para melhorar o rendimento de unidades biodigestoras.

Um estudo detalhado dos sistemas apresentados anteriormente, envolve considerações específicas de projeto. Cada situação deve ser analisada separadamente, levando-se em conta o custo inicial da instalação, a vida útil dos equipamentos, e uma série de outros fatores.

Este trabalho fornece dados para que se possa fazer uma análise qualitativa e quantitativa desta classe de problemas. É pretensão do autor, contribuir tanto para o estudo da transferência de calor em escoamentos laminares, como para a aplicação do método de solução por equações integrais a problemas de valores no contorno compostos.

## 2. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA

### 2.1 - Considerações iniciais

Neste capítulo será apresentada a formulação de um problema de transferência de calor em escoamento laminar no interior de dutos de secção transversal arbitrária, com paredes sólidas isotrópicas e homogêneas. A fim de manter a generalidade na formulação, a análise será feita para a geometria mostrada na figura 2.1.

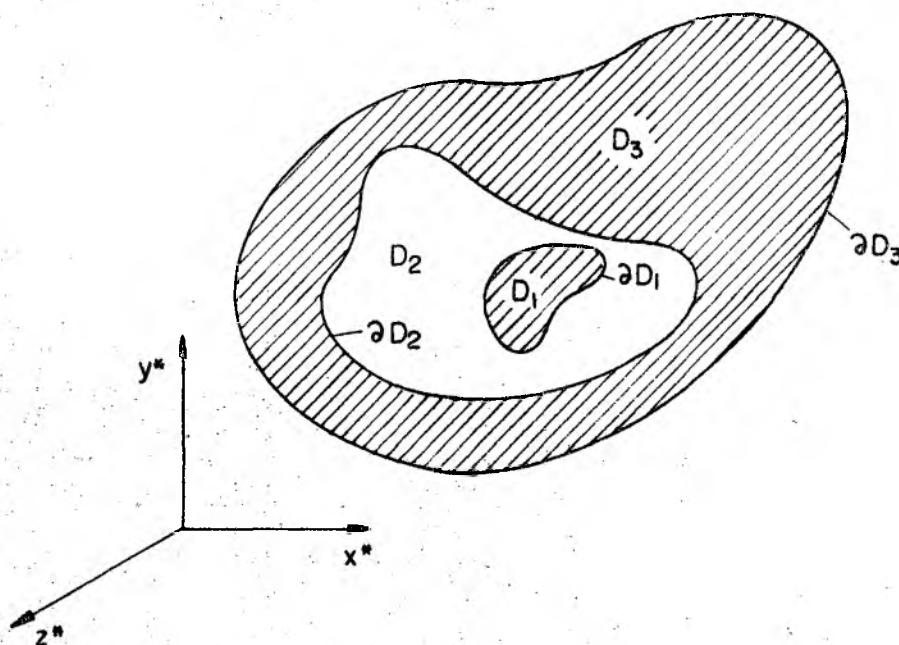


Figura 2.1

No presente trabalho, as regiões  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  serão consideradas como regiões de Liapunov ou mais restritamente, regiões regulares segundo Kellog (ver Apêndice F). Os contornos de  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  serão representados como  $\partial D_1$ ,  $\partial D_2$  e  $\partial D_3$ , respectivamente.

Algumas hipóteses simplificativas devem ser feitas a fim de facilitar a obtenção da solução do problema. Estas hipóteses são normalmente feitas em estudos desta natureza:

- a. Fluido Newtoniano e incompressível com propriedades físicas constantes.
- b. Duto retilíneo com paredes perfeitamente polidas.
- c. Dissipação viscosa desprezível.
- d. Perfis de velocidade e temperatura plenamente desenvolvidos.
- e. Fluxo de calor por unidade de comprimento do duto, constante.
- f. Condução axial desprezível, tanto no sólido como no líquido.
- g. Regime permanente com escoamento laminar.

A hipótese "d" implica na existência de um perfil de temperatura invariante com o comprimento do duto. Por conveniência, define-se a temperatura de mistura  $T_b^*$ ; esta temperatura caracteriza o estado de energia térmica média do fluido:

$$T_b^* = \frac{1}{u_m^* A^*} \int_{A^*} u T^* dA^* \quad (2.1)$$

Se uma temperatura adimensional é definida em termos da temperatura de mistura  $T_b^*$  e da temperatura média na parede do duto  $\bar{T}_s^*$ , e é invariante na direção do escoamento, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{\bar{T}_s^* - T^*}{\bar{T}_s^* - T_b^*} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Diferenciando e rearranjando,

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{\partial \bar{T}_s^*}{\partial z^*} + \left( \frac{\bar{T}_s^* - T^*}{\bar{T}_s^* - T_b^*} \right) \left( \frac{\partial T_b^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \bar{T}_s^*}{\partial z^*} \right) \quad (2.3)$$

Um parâmetro relevante neste tipo de problema é o coeficiente de troca de calor "h", que pode ser definido usando a temperatura de mistura  $T_b^*$ :

$$h = \frac{q^*}{\bar{T}_s^* - T_b^*} \quad (2.4)$$

$q^*$  - fluxo de calor por unidade de tempo e comprimento do duto.

Convém notar que "h" é essencialmente uma propriedade fluidodinâmica do escoamento ao passo que a diferença de temperatura é uma quantidade termodinâmica.

Para pontos afastados da região de entrada do duto, o coeficiente de troca de calor "h" é considerado constante. De acordo com a hipótese "e" e a equação (2.4), tem-se

$$\bar{T}_s^* - T_b^* = \text{constante}$$

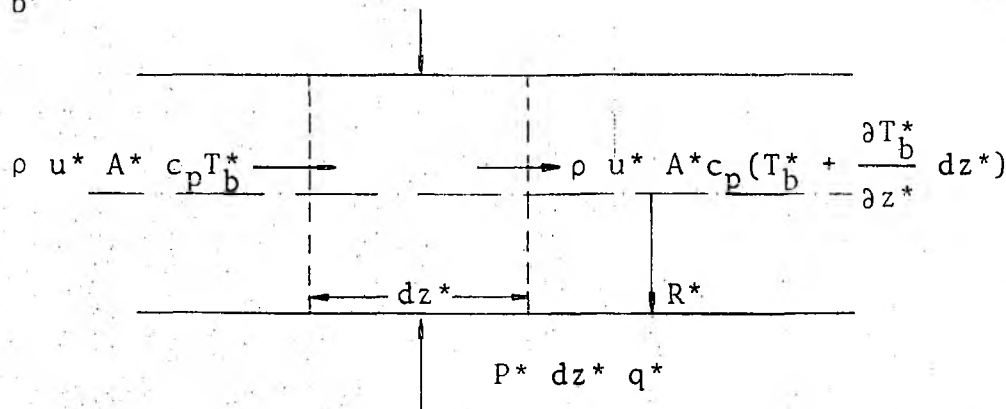
da qual

$$\frac{\partial \bar{T}_s^*}{\partial z^*} = \frac{\partial T_b^*}{\partial z^*}$$

Substituindo na equação (2.3),

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{\partial \bar{T}_s^*}{\partial z^*} = \frac{\partial T_b^*}{\partial z^*} = \text{constante} \quad (2.5)$$

Aplicando o princípio da conservação da energia a um volume de controle diferencial de um duto circular, verifica-se que  $\partial T_b^*/\partial z^*$  de fato é constante:



$$\frac{\partial T_b^*}{\partial z^*} = \frac{P^* q^*}{\rho u^* A^* c} = \text{const.} \quad (2.6)$$

$R^*$  - raio do duto

$P^*$  - perímetro aquecido do duto

$A^*$  - área da secção transversal do duto

De acordo com a hipótese "f", todo calor que incidir na superfície externa da região sólida da figura 2.1, contorno  $\partial D_3$ , será transmitido ao fluido. Desta forma um perfil de temperatura invariante no líquido conforme indicado na equação (2.5), garante um perfil de temperatura invariante nas regiões sólidas.

Para as aplicações técnicas é conveniente que os resultados sejam apresentados em termos do número de Nusselt, que é de finido de maneira convencional como sendo

$$\text{Nu} = \frac{h D_h^*}{k_f} \quad (2.7)$$

onde " $D_h^*$ " é o diâmetro hidráulico:

$$D_h^* = 4 \left( \frac{\text{área da secção transversal de escoamento}}{\text{perímetro molhado}} \right) \quad (2.8)$$

O número de Nusselt pode ser fisicamente interpretado como a relação entre o gradiente de temperatura no fluido imediatamente em contato com a superfície e a diferença de temperatura ( $T_s^* - T_b^*$ ) por unidade de comprimento do duto.

Obviamente as considerações feitas limitam a amplitude de aplicação da solução do problema. No entanto quanto mais complexa for a formulação proposta, maiores dificuldades aparecerão quando da aplicação do método. Um compromisso deve existir, e este compromisso justifica as hipóteses assumidas. Um método é melhor que outro na medida em que ele resolve problemas mais complexos de uma maneira mais simples.

## 2.2 - Equação diferencial do movimento

Antes de se analisar o problema térmico, é necessário que se resolva a equação de Navier-Stokes, a fim de se determinar a distribuição de velocidade na região de escoamento.

A equação de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos com viscosidade e densidade constante, em coordenadas cartesianas, e considerando o escoamento unidimensional em regime permanente, tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dz^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.9)$$

Adotando  $L^*$  como uma dimensão característica da secção transversal do duto, a seguinte adimensionalização pode ser feita:

$$x = x^*/L^* \quad (2.10)$$

$$y = y^*/L^* \quad (2.11)$$

$$u = - \frac{u^* \mu}{L^{*2}} \frac{dp^*}{dz^*} \quad (2.12)$$

A equação do movimento se reduz a,

$$\nabla^2 u = -1 \quad (2.13)$$

A fim de se resolver o problema hidrodinâmico, basta analisar o seguinte problema a valores no contorno:

$$\nabla^2 u = -1 \quad \text{em } D_2 \quad (2.14)$$

$$u|_{\partial D_2} = 0 \quad (2.15)$$



onde  $\partial D_2$  é o contorno da região de escoamento  $D_2$  que, como foi dito, será considerada uma região de Liapunov. O contorno  $\partial D_2$  pode ser considerado como a união disjunta de curvas fechadas:

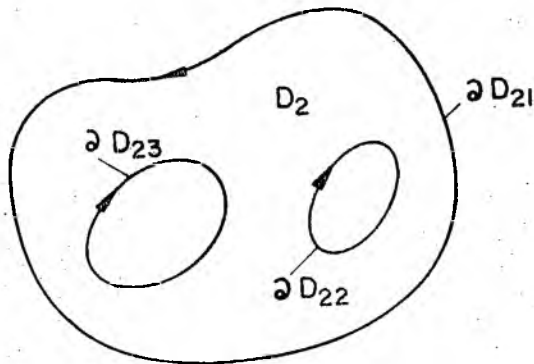


Figura 2.2

$$\partial D_2 = \partial D_{21} \cup \partial D_{22} \cup \dots \cup \partial D_{2N+1}$$

onde  $N$  é o número de contornos interiores a  $D$ .

A equação (2.14) é uma equação de Poisson ou seja, um caso especial de uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem do tipo elíptico.

### 2.3 - Equação diferencial da temperatura

A equação da energia para fluidos Newtonianos, com viscosidade, densidade e condutibilidade térmica constantes, expressa em coordenadas cartesianas, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( \frac{\partial T^*}{\partial t} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) &= k_f \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] + \\ &+ 2\mu \left[ \left( \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para escoamento unidimensional, regime permanente e considerando a dissipação viscosa desprezível, a equação anterior se reduz ao que se segue:

$$\rho c_p u^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = k_f \nabla^2 T^* \quad (2.17)$$

Usando a definição de velocidade e coordenadas adimensionais dadas em (2.10), (2.11) e (2.12), e a seguinte adimensionalização para a temperatura,

$$T = \frac{T^* \alpha_f \mu}{L^{*4} \frac{dp^*}{dz^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*}} \quad (2.18)$$

$$\alpha_f = k_f / \rho c_p \quad (2.19)$$

a equação (2.17) adquire a seguinte forma,

$$\nabla^2 T = -u \quad (2.20)$$

A equação (2.20), do mesmo modo que a equação (2.14), é uma equação de Poisson.

Fazendo-se uso da equação (2.13), a equação (2.20) se torna uma equação bi-harmônica da forma

$$\nabla^4 T = 1 \quad (2.21)$$

Para o caso da região sólida da figura 2.1, a equação (2.20) se resume na seguinte equação de Laplace,

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.22)$$

Dependendo das condições de contorno aplicadas à equação acima, pode-se ter um problema de Dirichlet, de Neumann ou de

caráter misto (ver Apêndice A).

No caso da região  $D_1$  possuir geração interna de calor, deve-se introduzir mais um termo na equação diferencial da temperatura, que passará a ser escrita na seguinte forma:

$$\nabla^2 T = - \frac{\dot{q}}{k_s/k_f} \quad (2.23)$$

onde  $q$  representa a taxa de geração interna de energia por unidade de volume. O termo  $k_s/k_f$  apareceu na equação (2.23) devido ao fato da adimensionalização ser feita em função da condutibilidade térmica do fluido, conforme indicado na equação (2.18).

Convém lembrar que, bem como a região de escoamento, as regiões sólidas serão consideradas regiões de Liapunov.

A solução do problema proposto na figura 2.1, pode então ser obtida pela resolução do seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\nabla^2 u(z) = -1; \quad z \in D_2 \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 T(z) = 0; \quad z \in D_3 \quad (2.25)$$

$$\nabla^4 T(z) = 1; \quad z \in D_2 \quad (2.26)$$

$$\nabla^2 T(z) = - \frac{\dot{q}(z)}{k_s/k_f}; \quad z \in D_1 \quad (2.27)$$

onde  $z$  doravante representará o par  $(x,y) \in R^2$ .

As condições de contorno a serem incluídas nas equações anteriores, dependem do problema físico a ser analisado e podem ser de diversos tipos como será visto no capítulo 3.

### 3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA PELO MÉTODO INTEGRAL

#### 3.1 - Método integral

O método de solução por equações integrais consiste em transformar as equações diferenciais parciais que regem o problema, em equações integrais. Para se obter explicitamente as soluções destes problemas a valores de contorno, é necessário que se faça uso de alguns teoremas, identidades, e das soluções fundamentais associadas aos operadores Laplaceano e bi-harmônico.

#### Teorema da Divergência

$$\int_D \nabla \cdot \underline{F} \, dA = \int_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n} \, ds \quad (3.1)$$

onde  $D$  é uma região normal (Ref. [31] pág. 85) do  $R^n$ ,  $\underline{F}$  é um campo vetorial continuamente diferenciável,  $\underline{n}$  é o vetor unitário normal a  $\partial D$ ,  $dA$  é o elemento de área e  $ds$  é o elemento de arco.

#### Segundo Teorema de Green

$$\int_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dA = \int_{\partial D} \left[ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] \, ds \quad (3.2)$$

onde  $u$  e  $v$  têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas em  $D$  e  $\partial u/\partial n$  bem como  $\partial v/\partial n$  são suas derivadas normais.

#### Identidade de Rayleigh-Green

$$\int_D (\phi \nabla^4 \psi - \psi \nabla^4 \phi) \, dA = - \int_{\partial D} \left[ \psi \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 \phi) - \nabla^2 \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \, ds +$$

$$+ \int_{\partial D} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 \psi) - \nabla^2 \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \quad (3.3)$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  têm derivadas parciais de quarta ordem contínuas em  $D$ .

A função de Green fundamental, associada ao operador de Laplace, é a solução da seguinte equação diferencial parcial:

$$-\nabla^2 g = \delta(z - z') \quad z \text{ e } z' \in \mathbb{R}^n \quad (3.4)$$

onde  $\delta(z - z')$  é a distribuição singular [33] "Delta de Dirac", (ver Apêndice B).

A função de Green pode ser entendida fisicamente como sendo uma fonte única e unitária, situada no ponto  $z'$ , e gerando um potencial Newtoniano no ponto  $z$ .

A solução fundamental associada ao operador bi-harmônico, satisfaz a seguinte equação diferencial parcial:

$$-\nabla^4 G = \delta(z - z') \quad z \text{ e } z' \in \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

### 3.2 - Equação integral do movimento

Como já foi visto, o problema hidrodinâmico a ser resolvido, é caracterizado por:

$$\nabla^2 u = -1 \quad (2.14)$$

$$u|_{\partial D_2} = 0 \quad (2.15)$$

Multiplicando a equação (2.14) por  $g$ , a equação (3.4) por  $u$  e somando ambas, vem:

$$g \nabla^2 u - u \nabla^2 g = u \delta(z - z') - g \quad (3.6)$$

Integrando a equação (3.6) ao longo da região  $D_2$  e aplicando o segundo teorema de Green (3.2),

$$\int_{\partial D_2} \left( g \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds = \int_{D_2} u \delta(z - z') dA - \int_{D_2} g dA \quad (3.7)$$

onde

$D_2$  - região de escoamento

$\partial D_2$  - contorno de  $D_2$

Aplicando a propriedade (B.3) da função Delta de Dirac, e observando a condição de contorno (2.15), a equação (3.5) adquire a seguinte forma:

$$u(z') = \int_{D_2} g(z, z') dA(z) + \int_{\partial D_2} g(z, z') \frac{\partial u}{\partial n}(z) ds(z) \quad (3.8)$$

Usando a simetria da função  $g(z, z')$  e trocando  $z$  por  $z'$ ,

$$u(z) = \int_{D_2} g(z, z') dA(z') + \int_{\partial D_2} g(z, z') \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds(z') \quad (3.9)$$

$z \in D_2$

Por simplicidade, a derivada normal da velocidade doravante passará a ser denotada por  $\partial u$ . Conhecendo a derivada normal da velocidade no contorno pode-se determinar a velocidade em qualquer ponto da região  $D_2$  pela equação (3.9). Como  $\partial u$  normalmente não é conhecida, necessita-se determinar uma equação para  $z$  em  $\partial D_2$ . A fim de se contornar as singularidades que surgem quando  $z = z'$ , o ponto  $z$  deve ser isolado de  $D_2$  através de um semi-círculo. Aplicando as propriedades (B.4)-(B.5) na equação (3.9) para um ponto sobre o contorno  $\partial D_2$ , obtém-se:

$$\int_{D_2} g(z, z') dA(z') + \int_{\partial D_2} g(z, z') \partial u(z') ds(z') = 0 \quad (3.10)$$

$z \in \partial D_2$

A equação (3.8) é uma equação integral de Fredholm de primeira espécie que tem a derivada normal  $\partial u$  como função incôgnita. O problema da velocidade pode então ser completamente resolvido através do sistema de equações integrais formado pelas equações (3.9) e (3.10).

Como a função de Green fundamental não admite solução para todas as classes de contorno [15], é conveniente que se insira nas equações integrais (3.9) e (3.10) a condição de consistência do problema (2.14)-(2.15):

$$\int_{\partial D_2} \partial u ds = \int_{D_2} \nabla^2 u dA = -A(D_2) \quad (3.11)$$

A velocidade média no duto é um parâmetro de interesse na resolução do problema da temperatura. De posse da distribuição de velocidade, pode-se determinar a velocidade média, definida conforme a equação

$$u_m(D_2) = \frac{1}{A(D_2)} \int_{D_2} u(z) dA(z) \quad z \in D_2 \quad (3.12)$$

Em [15] é apresentado uma expressão analítica para o cálculo da velocidade média efetuando-se as integrais ao longo dos contornos (ver Apêndice C).

Com base em [15], a integral da função de Green ao longo da área da região  $D_2$ , também pode ser reduzida a uma integral de contorno (ver Apêndice B). Deste modo a solução hidrodinâmica do escoamento laminar obtida através das equações (3.9) e (3.10), passa a depender somente da geometria dos contornos da região em estudo.

Usando a equação (B.18) bem como a equação (3.11), a e-

equação (3.10) pode ser escrita como se segue:

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D_2} g(z, z') a(z, z') ds(z') + \int_{\partial D_2} [g(z, z') - 1/4\pi] \partial u(z') ds(z') = 0; \quad z \text{ e } z' \in \partial D_2 \quad (3.13)$$

onde  $a(z, z') = (z' - z) \cdot \underline{n}'$ .

Da mesma forma, a equação (3.9) que fornece a distribuição de velocidade ao longo da região, expressa em termos de integrais de linha, adquire a seguinte forma:

$$u(z) = \frac{1}{2} \int_{\partial D_2} g(z, z') a(z, z') ds(z') + \int_{\partial D_2} [g(z, z') - 1/4\pi] \partial u(z') ds(z'); \quad z \in D_2 \quad (3.14)$$

#### - Equação integral da temperatura

No problema proposto (Figura 2.1) a temperatura deve ser determinada tanto no sólido como no fluido. Já que as equações diferenciais são diferentes, os problemas serão abordados separadamente.

#### 3.3.1 - Equação de Laplace

No sólido o problema de temperatura consiste em resolver a equação:



$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.22)$$

Usando o mesmo procedimento adotado na solução do problema da velocidade, pode-se chegar na seguinte equação:

$$T(z) = \int_{\partial D_{1,3}} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.15)$$

$$z \in D_{1,3}$$

$D_{1,3}$  - regiões sólidas  $D_1$  e  $D_3$

$\partial D_{1,3}$  - contorno de  $D_{1,3}$

A derivada normal da temperatura, bem como a derivada normal da função de Green fundamental, doravante serão escritas como  $\partial T$  e  $\partial g$ , respectivamente.

Se os valores das temperaturas e suas derivadas nos contornos forem conhecidas, pode-se determinar a temperatura em qualquer ponto da região sólida fazendo-se uso da equação (3.15). Problemas de transferência de calor desta natureza, onde se conhece todos os valores das variáveis no contorno e deseja-se obter uma propriedade no interior da região em estudo, são denominados problemas diretos. De outra forma, existem situações físicas onde são conhecidos alguns valores das variáveis no contorno, e deseja-se determinar os valores desconhecidos; estes problemas são denominados problemas inversos.

Nos problemas inversos é necessário que se determine equações integrais para pontos no contorno. Contornando as singularidades que surgem quando  $z = z'$  e aplicando as propriedades da função de Green, do mesmo modo como foi feito no problema da velocidade, chega-se à equação:

$$\frac{1}{2} T(z) = \int_{\partial D_{1,3}} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.16)$$

$$z \in \partial D_{1,3}$$

De posse das equações (3.15) e (3.16), bem como das condições de contorno advindas do problema físico, determina-se a distribuição de temperatura na região. Para cada região deve-se construir uma equação do tipo (3.15). No caso da região ser multiplamente conexa, cada contorno terá uma equação semelhante à equação (3.16).

### 3.3.2 - Equação de Poisson

Havendo geração interna de calor na região sólida  $D_1$ , para se determinar a distribuição de temperatura deve-se resolver a seguinte equação diferencial:

$$\nabla^2 T = - \frac{\dot{q}}{k_s/k_f} \quad (2.23)$$

Procedendo de maneira semelhante à adotada na obtenção das equações integrais calculadas anteriormente para os problemas hidrodinâmico e térmico, constroi-se a seguinte equação:

$$T(z) = \int_{D_1} g(z, z') \frac{\dot{q}}{k_s/k_f} dA(z') + \int_{\partial D_1} [g(z, z') \partial T(z') + T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad z \in D_1 \quad (3.17)$$

Contornando as singularidades que surgem quando  $z = z'$ , e aplicando as propriedades da função de Green fundamental e de sua derivada normal, pode-se obter uma equação integral para pontos situados no contorno da região  $\partial D_1$ ,

$$\frac{1}{2} T(z) = \int_{D_1} g(z, z') \frac{\dot{q}}{k_s/k_f} dA(z') + \int_{\partial D_1} [g(z, z') \partial T(z') +$$

$$- T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad z \in \partial D_1 \quad (3.18)$$

Não havendo a fonte interna  $\dot{q}$ , as equações (3.17) e (3.18) se reduzem às equações (3.15) e (3.16). Se a geração de calor for constante ao longo da área  $D_1$ , pode-se calcular a integral da função de Green na região, por meio de uma integração ao longo do contorno  $\partial D_1$  (ver Apêndice B).

Fazendo a redução das integrais de área que aparecem nas equações (3.17) e (3.18) a integrais de contorno, obtêm-se as seguintes equações:

$$T(z) = \frac{\dot{q}}{2 k_s/k_f} \int_{\partial D_1} [g(z, z') + 1/4\pi] a(z, z') ds(z') + \int_{\partial D_1} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.19)$$

$z \in D_1$

e

$$\frac{1}{2} T(z) = \frac{\dot{q}}{2 k_s/k_f} \int_{\partial D_1} [g(z, z') + 1/4\pi] a(z, z') ds(z') + \int_{\partial D_1} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.20)$$

$z \in \partial D_1$

### 3.3.3 - Equação Bi-harmônica

Na região ocupada pelo fluido, o problema térmico a ser resolvido é governado pela equação

$$\nabla^4 T = 1 \quad (2.21)$$

Multiplicando a equação (2.21) por  $G$ , a equação (3.5) por  $T$  e somando ambas, resulta:

$$G \nabla^4 T - T \nabla^4 G = G + T \delta(z - z') \quad (3.21)$$

Integrando a equação (3.21) ao longo da região  $D_2$  e aplicando a identidade de Rayleigh-Green (3.3), resulta em

$$\begin{aligned} \int_D G \, dA + \int_{D_2} T \delta(z - z') \, dA = & - \int_{\partial D_2} \left[ T \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 G) - \nabla^2 G \frac{\partial T}{\partial n} \right] ds + \\ & + \int_{\partial D_2} \left[ G \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 T) - \nabla^2 T \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

$D_2$  - região de escoamento

$\partial D_2$  - contorno de  $D_2$

A exemplo de [16],  $G(z, z')$  é escolhida de forma a satisfazer a seguinte equação de Poisson:

$$\nabla^2 G(z, z') = g(z, z') \quad (3.23)$$

A intenção principal quando se utiliza a equação (3.23), é fazer com que as equações integrais do problema harmônico e bi-harmônico tenham núcleos idênticos.

Lembrando que

$$\nabla^2 T = -u \quad (2.20)$$

e aplicando a propriedade (B.3) da função Delta de Dirac, a equação (3.22) adquire a seguinte forma:

$$\int_{D_2} G(z, z') dA(z) + T(z') = \int_{\partial D_2} [g(z, z') \partial T(z') + T(z') \partial g(z, z')] ds(z) - \int_{\partial D_2} G(z, z') \partial u(z') \quad (3.24)$$

Usando a simetria das funções  $g(z, z')$  e  $G(z, z')$ , e trocando  $z$  por  $z'$ ,

$$T(z) = - \int_{D_2} G(z, z') dA(z') - \int_{\partial D_2} G(z, z') \partial u(z') ds(z') + \int_{\partial D_2} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.25)$$

$z \in D_2$

Conhecidas as condições de contorno  $T(z')$ ,  $\partial T(z')$  e  $\partial u(z')$ , pode-se determinar a temperatura em qualquer ponto da região de escoamento  $D_2$ .

Para pontos no contorno, avaliando-se as singularidades quando  $z = z'$ , e aplicando-se as propriedades (B.5)-(B.7), a equação (3.25) resulta em,

$$\frac{1}{2} T(z) = - \int_{D_2} G(z, z') dA(z') - \int_{\partial D_2} G(z, z') \partial u(z') ds(z') + \int_{\partial D_2} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.26)$$

$z \in \partial D_2$

Para a solução de problemas diretos, basta utilizar a equação (3.25) e as condições de contorno do problema físico. No

caso de problemas inversos, a solução é obtida através da resolução do sistema de equações integrais formado por equações do tipo (3.25) e (3.26). Em regiões multiplamente conexas, deve-se construir para cada contorno uma equação da forma da equação (3.26).

A exemplo das equações (3.19) e (3.20), é possível reduzir as equações (3.25) e (3.26) a equações integrais sob o contorno  $\partial D_2$ , fazendo com que o problema térmico passe a ter uma única dimensão. Utilizando o mesmo procedimento apresentado em [16] (ver Apêndice B), deve-se substituir nas equações (3.25) e (3.26) a equação (B.29), obtendo:

$$\begin{aligned}
 T(z) = & -\frac{1}{16} \int_{\partial D_2} [g(z, z') + 5/8\pi] a(z, z') |z - z'|^2 ds(z') + \\
 & - \int_{\partial D_2} G(z, z') \partial u(z') ds(z') + \int_{\partial D_2} [g(z, z') \partial T(z') + \\
 & - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad z \in D_2 \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} T(z) = & -\frac{1}{16} \int_{\partial D_2} [g(z, z') + 5/8\pi] a(z, z') |z - z'|^2 ds(z') + \\
 & - \int_{\partial D_2} G(z, z') \partial u(z') ds(z') + \int_{\partial D_2} [g(z, z') \partial T(z') + \\
 & - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad z \in \partial D_2 \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Foi visto que a distribuição de velocidade na região do escoamento, pode ser calculada através de equações integrais que são funções somente da geometria do duto. Nas equações integrais

da temperatura é necessário que se conheça determinadas condições de contorno. Estas condições de contorno podem ser basicamente de dois tipos:

$$1. \quad T|_{\partial D_i} = T_s(z) \quad - \text{temperatura prescrita}$$

$$2. \quad \partial T|_{\partial D_i} = q(z) \quad - \text{fluxo prescrito}$$

A prescrição do fluxo de calor não pode ser arbitrária, uma vez que a condição de consistência deve ser satisfeita. Aplicando o teorema da divergência ao campo vetorial  $\nabla T$ , tem-se:

$$\int_{D_i} \nabla \cdot (\nabla T) \, dA = \int_{\partial D_i} \nabla T \cdot \underline{n} \, ds$$

de outra forma,

$$\int_{D_i} \nabla^2 T \, dA = \int_{\partial D_i} \partial T \, ds$$

$$\int_{\partial D_i} \partial T \, ds = -u_m(D) A(D) \quad (3.29)$$

Na análise do problema hidrodinâmico, foi observado que a função de Green fundamental não admite solução para todas as classes de contorno. Deve-se então inserir nas equações integrais (3.25) e (3.26), a condição de consistência do problema, ou seja, a equação (3.29).

Conforme foi mostrado neste capítulo, o problema a valores de contorno composto apresentado na figura 2.1, pode ser completamente solucionado por intermédio de equações integrais. Na obtenção da solução de problemas de transferência de calor utilizando-se o método de equações integrais, podem ser utilizadas na construção das equações, funções de Green incompletas. Embora a formulação final se torne mais simples, é necessário que se determine uma função de Green particular para cada geometria. Para determinadas regiões a obtenção destas funções pode se constituir em um problema à parte. Já que no presente trabalho as regiões são arbitrárias, é conveniente que se use somente a função de Green fundamental.



#### 4. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

##### 4.1 - Divisão do contorno

Na solução numérica de um problema de equações integrais, os contornos das regiões em estudo devem ser divididos em segmentos de arco. Para cada segmento de arco deverá existir um ponto nodal sobre o qual será aplicada uma equação integral. A fim de se avaliar as integrais em torno de cada ponto nodal, é necessário que os segmentos de arco sejam divididos em curvas suaves ou pelo menos suaves por partes. Os pontos resultantes desta subdivisão do contorno serão denominados pontos sub-nodais. A figura 4.1 ilustra esta divisão.

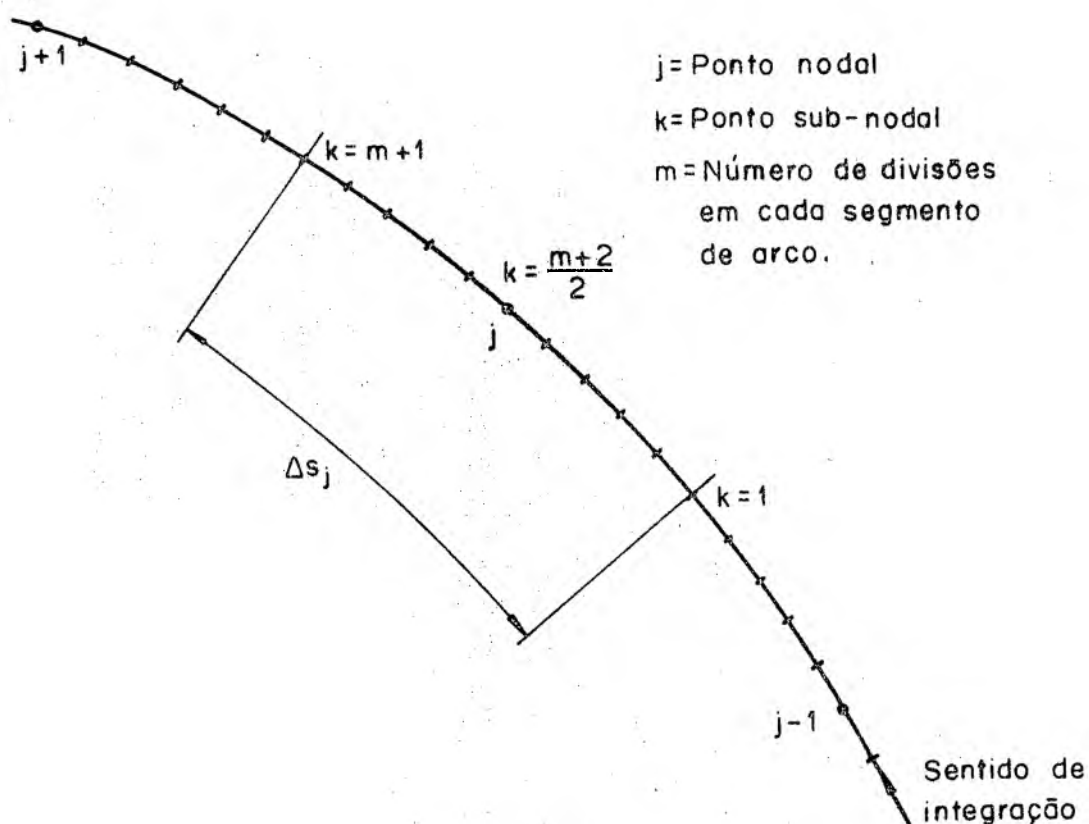


Figura 4.1

Na escolha dos pontos sub-nodais é importante que se inclua todos os cantos de cada contorno  $\partial D_i$  bem como todos os pontos onde ocorre mudanças nas condições de contorno. Desta for-

ma garante-se que cada sub-intervalo da fronteira seja suave e que a normal seja bem definida em cada ponto nodal. Neste trabalho será assumido que os pontos nodais, bem como os sub-nodais, serão numerados de forma crescente no sentido positivo de integração, ou seja, ao se caminhar sobre a fronteira, a região  $D_i$  sempre estará do lado esquerdo.

#### 4.2 - Aproximação das integrais

Tanto no problema hidrodinâmico como no problema térmico, as integrais que aparecem nas equações, são da seguinte forma:

$$\phi(z) = \int_{\partial D_i} K(z, z') f(z') ds(z') \quad (4.1)$$

onde a função  $K(z, z')$  é um núcleo conhecido. Mais precisamente,  $K(z, z')$  será a solução fundamental do operador Laplaceano, a derivada da função de Green fundamental ou a solução fundamental do operador bi-harmônico.

A função  $f(z')$  que aparece no integrando da equação (4.1) é normalmente desconhecida. Esta função será o valor nos contornos das incógnitas do problema: derivada normal da velocidade, temperatura e derivada normal da temperatura (fluxo de calor).

Já que o contorno foi dividido em intervalos suaves, pode-se aproximar a função  $f(z')$ ,  $z' \in \partial D$  pela função degrau,

$$\bar{f}(z') = f_j \quad z' \in \Delta s_j \quad (4.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, N_i$$

onde  $N_i$  é o número de pontos nodais no contorno  $\partial D_i$ , e  $f_j$  é uma constante no intervalo  $\Delta s_j$ .

Usando a aproximação indicada pela equação (4.2), a in

tegral (4.1) pode ser avaliada por:

$$\bar{\phi}(z) = \int_{\partial D} K(z, z') \bar{f}(z') ds(z') \quad (4.3)$$

Já que  $\bar{f}(z')$  é constante no intervalo  $\Delta s_j$ , resulta que:

$$\bar{\phi}(z) = \sum_{j=1}^{N_i} f_j \int_{\Delta s_j} K(z, z') ds(z') \quad (4.4)$$

O desenvolvimento anterior nada mais é do que uma aplicação modificada do teorema da média.

Para cada ponto nodal deve-se construir uma equação da forma da equação (4.4). Os coeficientes

$$\int_{\Delta s_j} K(z, z') ds(z')$$

normalmente são calculados numericamente, usando-se a subdivisão do intervalo em pontos sub-nodais.

#### 4.3 - Discretização da equação integral da velocidade

A equação integral que fornece a distribuição de velocidade em pontos no interior da região de escoamento já foi determinada:

$$u(z) = \frac{1}{2} \int_{\partial D_2} g(z, z') a(z, z') ds(z') + \int_{\partial D_2} \left[ g(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial u(z') ds(z'); \quad z \in D_2 \quad (3.14)$$

Na utilização da equação (3.14), é necessário que se conheça os valores que a derivada normal da velocidade assume ao longo do contorno de  $D_2$ . Deve-se então, resolver a equação (3.13):

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D_2} g(z, z') a(z, z') ds(z') + \int_{\partial D_2} \left[ g(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial u(z') ds(z') = 0; \quad z \text{ e } z' \in \partial D_2 \quad (3.13)$$

Aproximando  $\partial u$  por uma função degrau  $\partial \bar{u}$  como foi descrito anteriormente, e de acordo com (4.4), resulta:

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D_2} g(z, z') a(z, z') ds(z') + \sum_{j=1}^{N_2} \partial \bar{u}(z_j) \int_{\Delta s_j} \left[ g(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] ds(z') = 0 \quad (4.5)$$

A equação integral (4.5) deve ser resolvida pelo método da colocação [36]. Tal método consiste em aplicar a equação a cada ponto nodal  $z_j$ , impondo-se que as condições de contorno sejam satisfeitas pontualmente. Consequentemente a equação (4.5) adquire a seguinte forma:

$$A(z_i) + \sum_{j=1}^{N_2} \partial \bar{u}(z_j) B_{ij} = 0; \quad z_j \in \partial D_2 \quad (4.6)$$

onde

$$A(z_i) = \frac{1}{2} \int_{\partial D_2} g(z_i, z') a(z_i, z') ds(z') \quad (4.7)$$

$$B_{ij} = \int_{\Delta s_j} \left[ g(z_i, z') - \frac{1}{4\pi} \right] ds(z') \quad (4.8)$$

A função de Green fundamental  $g(z, z')$ , está definida no Apêndice B, equação (B.8). Os elementos  $A(z_i)$  e  $B_{ij}$ , são calculados numericamente.

Como  $z$  e  $z'$  estão sobre o mesmo contorno, surgirão singularidades quando  $i = j$ . A fim de contornar estas singularidades é necessário que se faça uma integração analítica na vizinhança dos polos (ver Apêndice C).

A equação (4.6) pode ser escrita na forma matricial como é apresentado a seguir:

$$|A| + |B| |\partial \bar{u}| = 0 \quad (4.9)$$

Desta forma, a equação integral original foi aproximada por um sistema de equações algébricas lineares, que deve ser resolvido simultaneamente para que se obtenha a distribuição da derivada normal da velocidade no contorno. O número de equações bem como o número de incógnitas, será igual ao número de pontos nodais existentes no contorno da região.

De posse das derivadas normais da velocidade no contorno, pode-se calcular a velocidade em pontos no interior da região de escoamento, discretizando-se a equação integral (3.14):

$$u(z_i) = \frac{1}{2} \int_{\partial D_2} g(z_i, z') a(z_i, z') ds(z') + \sum_{j=1}^{N_2} \partial \bar{u}(z_j) \int_{\Delta s_j} \left[ g(z_i, z') - \frac{1}{4\pi} \right] ds(z'); \quad (4.10)$$

$$z_i \in D_2; \quad z_j \in \partial D_2$$

#### 4.4 - Discretização das equações integrais da temperatura

Para se determinar a distribuição de temperatura no interior de uma dada região fazendo-se uso do método integral, deve-se obter primeiramente as distribuições de temperatura e fluxos de calor nos contornos.

##### 4.4.1 - Região sólida

No caso da região sólida a equação integral a resolver é a seguinte:

$$\frac{1}{2} T(z) = \int_{\partial D_{1,3}} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.16)$$

$$z \in \partial D_{1,3}$$

A equação anterior vale tanto para o contorno de  $D_1$ , como para o contorno de  $D_3$ . Convém lembrar que no caso da região possuir vários contornos, para cada contorno deve-se construir uma equação da forma da equação (3.16).

Aplicando o teorema da média do mesmo modo como foi feito na equação integral da velocidade, pode-se aproximar a equação (3.16) pela expressão dada a seguir:

$$\frac{1}{2} T(z) = \sum_{j=1}^{N_{1,3}} \partial \bar{T}(z_j) \int_{\Delta s_j} g(z, z') ds(z') +$$

$$- \sum_{j=1}^{N_{1,3}} \bar{T}(z_j) \int_{\Delta s_j} \partial g(z, z') ds(z') \quad (4.11)$$

onde  $N_{1,3}$  é o número de pontos na fronteira  $\partial D_1$  ou na fronteira  $\partial D_3$ .

Utilizando o método da colocação, obtém-se a partir da

equação (4.11), a seguinte equação para a temperatura nos pontos do contorno:

$$\frac{1}{2} \bar{T}(z_i) = \sum_{j=1}^{N_{1,3}} \partial \bar{T}(z_j) C_{ij} - \sum_{j=1}^{N_{1,3}} \bar{T}(z_j) D_{ij}; \quad z_i \text{ e } z_j \in \partial D_{1,3} \quad \dots(4.12)$$

onde,

$$C_{ij} = \int_{\Delta s_j} g(z_i, z') ds(z') \quad (4.13)$$

$$D_{ij} = \int_{\Delta s_j} \partial g(z_i, z') ds(z') \quad (4.14)$$

Os coeficientes  $C_{ij}$  e  $D_{ij}$ , são calculados numericamente, atentando-se para as singularidades que ocorrem quando  $i = j$ . Cada região sólida terá um conjunto de equações algébricas lineares da forma da equação (4.12), e o número destas equações dependerá do número de pontos nodais na fronteira da região.

Escrevendo a equação (4.12) em forma matricial, resulta:

$$(1/2 |1| + |D|) |\bar{T}_{1,3}| - |C| |\partial \bar{T}_{1,3}| = 0 \quad (4.15)$$

Na equação anterior a matriz  $|1|$  é a matriz identidade,  $|\bar{T}|$  e  $|\partial \bar{T}|$  são as matrizes coluna da temperatura e do fluxo de calor nos pontos nodais do contorno  $\partial D_{1,3}$ ;  $|C|$  e  $|D|$  são as matrizes quadradas dos elementos  $C_{ij}$  e  $D_{ij}$  respectivamente.

Para que o sistema de equações apresentado em (4.15) possa ser resolvido, é necessário que se conheça os valores das temperaturas ou dos fluxos de calor nas fronteiras das regiões. Estes valores são prescritos pelas condições de contorno do problema.

De posse das distribuições de temperatura e fluxo de ca

lor nos contornos, a temperatura em qualquer ponto da região sôli  
da pode ser determinada por intermédio da equação (3.15):

$$T(z) = \int_{\partial D_{1,3}} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.15)$$

$$z \in D_{1,3}$$

Esta equação depois de discretizada, adquire a seguinte  
forma:

$$T(z_i) = \sum_{j=1}^{N_{1,3}} \partial \bar{T}(z_j) \int_{\Delta s_j} g(z_i, z') ds(z') +$$

$$- \sum_{j=1}^{N_{1,3}} \bar{T}(z_j) \int_{\Delta s_j} \partial g(z_i, z') ds(z') \quad (4.17)$$

$$z_i \in D_{1,3}; \quad z_j \in \partial D_{1,3}$$

Havendo geração interna de calor na região sôlida  $D_1$ , e  
supondo esta geração constante ao longo de toda a área, a equação  
integral da temperatura em pontos no contorno passa a ser a se-  
guinte:

$$\frac{1}{2} T(z) = \frac{\dot{q}}{2k_s/k_f} \int_{\partial D_1} [g(z, z') + 1/4\pi] a(z, z') ds(z') +$$

$$+ \int_{\partial D_1} [g(z, z') \partial T(z') - T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \quad (3.20)$$

$$z \in \partial D_1$$

Discretizando a equação (3.20), e aplicando o método da  
colocação, resulta em:



$$\frac{1}{2} \bar{T}(z_i) = E(z_i) + \sum_{j=1}^{N_1} \partial \bar{T}(z_j) F_{ij} - \sum_{j=1}^{N_1} \bar{T}(z_j) G_{ij} \quad (4.18)$$

$$z_i \text{ e } z_j \in \partial D_1$$

onde

$$E(z_i) = \frac{\dot{q}}{2k_s/k_f} \int_{\partial D_1} [g(z_i, z') + 1/4\pi] a(z_i, z') ds(z') \quad (4.19)$$

$$F_{ij} = \int_{\Delta s_j} g(z_i, z') ds(z') \quad (4.20)$$

$$G_{ij} = \int_{\Delta s_j} \frac{\partial g}{\partial n}(z_i, z') ds(z') \quad (4.21)$$

Como a única diferença existente entre as equações (4.12) e a equação (4.18) é o termo referente à geração interna de calor  $E(z_i)$ , todas as observações já feitas para aquela equação valem também para esta.

Apresentando a equação (4.18) em forma matricial, tem-se a seguinte equação:

$$(1/2 |1| + |G|) |\bar{T}_1| - |F| |\partial \bar{T}_1| = |E| \quad (4.22)$$

A fim de calcular a temperatura em pontos no interior da região  $D_1$ , basta fazer uso da equação (3.19) na forma discretizada, ou seja:

$$T(z_i) = \frac{\dot{q}}{2k_s/k_f} \int_{\partial D_1} [g(z_i, z') + 1/4\pi] a(z_i, z') ds(z') +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{N_1} \partial \bar{T}(z_j) \int_{\Delta s_j} g(z_i, z') ds(z') + \\
& - \sum_{j=1}^{N_1} \bar{T}(z_j) \int_{\Delta s_j} \partial g(z_i, z') ds(z') \qquad (4.23) \\
& \qquad \qquad \qquad z_i \in D_1; \quad z_j \in \partial D_1
\end{aligned}$$

#### 4.4.2 - Região de escoamento

Para se determinar os valores da temperatura e do fluxo de calor no contorno da região de escoamento, deve-se usar a equação integral (3.28):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T(z) = & - \frac{1}{16} \int_{\partial D_2} [g(z, z') + 5/8\pi] a(z, z') |z - z'|^2 ds(z') + \\
& - \int_{\partial D_2} G(z, z') \partial u(z') ds(z') + \int_{\partial D_2} [g(z, z') \partial T(z') + \\
& + T(z') \partial g(z, z')] ds(z') \qquad z \in \partial D_2 \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Conforme foi observado no capítulo 3, para que a equação integral anterior possa ser resolvida para todas as classes de contorno de regiões regulares segundo Kellog, deve-se inserir a condição de consistência do problema físico, ou seja, a equação (3.29). Deste modo a equação (3.28) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T(z) = & - \frac{1}{16} \int_{\partial D_2} [g(z, z') + 5/8\pi] a(z, z') |z - z'|^2 ds(z') + \\
& - \int_{\partial D_2} G(z, z') \partial u(z') ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_1} [g(z, z') + 1] \partial T(z') ds(z') + \\
& - \int_{\partial D_2} T(z') \partial g(z, z') ds(z') + u_m(D_2) A(D_2)
\end{aligned}$$

$z \in \partial D_2$  (4.24)

Adotando o mesmo procedimento usado nas equações integrais da velocidade e da temperatura na região sólida, a equação (4.24) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \bar{T}(z_i) = & H_i - \sum_{j=1}^{N_2} \partial \bar{u}(z_j) I_{ij} + \sum_{j=1}^{N_2} \partial \bar{T}(z_j) L_{ij} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_2} \bar{T}(z_j) M_{ij} \quad z_i \text{ e } z_j \in \partial D_2
\end{aligned}$$

(4.25)

onde,

$$\begin{aligned}
H_i = & - \frac{1}{16} \int_{\partial D_2} [g(z_i, z') + 5/8\pi] a(z_i, z') |z - z'|^2 ds(z') + \\
& + u_m(D_2) A(D_2)
\end{aligned}$$

(4.26)

$$I_{ij} = \int_{\Delta s_j} G(z_i, z') ds(z') \quad (4.27)$$

$$L_{ij} = \int_{\Delta s_j} [g(z_i, z') + 1] ds(z') \quad (4.28)$$

$$M_{ij} = \int_{\Delta s_j} \partial g(z_i, z') ds(z') \quad (4.29)$$

Na equação (4.25) deve-se usar os valores da derivada normal da velocidade obtidos do sistema de equações (4.9). Por outro lado, os valores da temperatura, do fluxo de calor, ou uma combinação de ambos, deve também ser conhecido a fim de que o sistema que possui  $N_2$  equações algébricas lineares, possua também  $N_2$  incógnitas e possa ser resolvido.

Escrevendo a equação (4.25) em forma matricial, resulta

$$(1/2 |I| + |M|) |\bar{T}_2| - |L| |\partial \bar{T}_2| = |H| - |\partial \bar{u}| |I| \quad (4.30)$$

A temperatura em pontos no interior da região de escoamento  $D_2$ , pode ser obtida através da equação (3.27). Esta equação depois de discretizada, adquire a seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(z_i) = & - \frac{1}{16} \int_{\partial D_2} \left[ g(z_i, z') + \frac{5}{8\pi} \right] a(z, z') |z - z'|^2 ds(z') + \\ & - \sum_{j=1}^{N_2} \partial \bar{u}(z_j) \int_{\Delta s_j} G(z_i, z') ds(z') + \\ & + \sum_{j=1}^{N_2} \partial \bar{T}(z_j) \int_{\Delta s_j} [g(z_i, z') + 1] ds(z') + \end{aligned}$$

$$- \sum_{j=1}^{N_2} \bar{T}(z_j) \int_{\Delta s_j} \partial g(z_i, z') ds(z') + u_m(D_2) A(D_2) \quad (4.31)$$

$$z_i \in D_2; \quad z_j \in \partial D_2$$

De acordo com o que foi apresentado, pode-se resumir a solução do problema de transferência de calor em dutos de secção transversal arbitrária, conforme a figura 2.1 e considerando os efeitos de condução e convecção combinados, a solução dos seguintes sistemas de equações:

$$|A| + |B| |\partial \bar{u}| = 0 \quad (4.9)$$

$$(1/2 |1| + |G|) |\bar{T}_1| - |F| |\partial \bar{T}_1| = |E| \quad (4.22)$$

$$(1/2 |1| + |D|) |\bar{T}_3| - |C| |\partial \bar{T}_3| = 0 \quad (4.15)$$

$$(1/2 |1| + |M|) |\bar{T}_2| - |L| |\partial \bar{T}_2| = |H| - |\partial \bar{u}| |I| \quad (4.30)$$

O número de equações a serem resolvidas simultaneamente depende da maneira como foi feita a discretização. Aumentando o número de nós usados na discretização, a precisão do método numérico é incrementado assim como o tempo gasto na solução do modelo. Na análise de geometrias complexas para que se obtenha uma boa precisão nos resultados é necessário que se faça uma discretização refinada dos contornos o que resulta em um aumento no tempo de processamento da solução.

## 5. ANÁLISE DE UM PROBLEMA APLICADO À ENGENHARIA

### 5.1 - Aplicação do método integral

Nos capítulos precedentes foi desenvolvido um esquema numérico para se abordar problemas de transferência de calor em regiões multiplamente conexas levando-se em consideração os efeitos de condução e convecção combinados. A formulação foi proposta de uma forma bastante genérica, de modo a evidenciar as vantagens do método. Neste capítulo utiliza-se o método das equações integrais na resolução de um problema aplicado à Engenharia, cuja configuração já foi apresentada na figura 1.1.

Pretende-se analisar basicamente três fatores:

- a. Precisão dos resultados obtidos pelo método de solução por equações integrais.
- b. Influência da geometria do duto, na transferência de calor entre o sólido e o líquido.
- c. Influência das condutibilidades térmicas do sólido e do líquido nas distribuições de temperatura, bem como nos parâmetros de troca de calor.

Devido às simetrias existentes na configuração proposta na figura 1.1, o estudo será feito para a geometria mostrada na figura 5.1. O calor é trocado somente na parte superior do retângulo e dois casos serão analisados: fluxo de calor prescrito e temperatura prescrita ao longo do contorno superior. As adimensionalizações foram feitas usando como comprimento característico, o eixo maior da elipse BE.

Supondo o comprimento do duto de parede espessa infinito, e admitindo-se que as hipóteses citadas na secção 2.1 são válidas, este problema pode ser considerado um caso particular do problema geral apresentado anteriormente no capítulo 2.

As equações integrais devem ser construídas para a região sólida e para a região de escoamento. No caso do sólido, a

região a ser considerada está mostrada na figura 5.2.

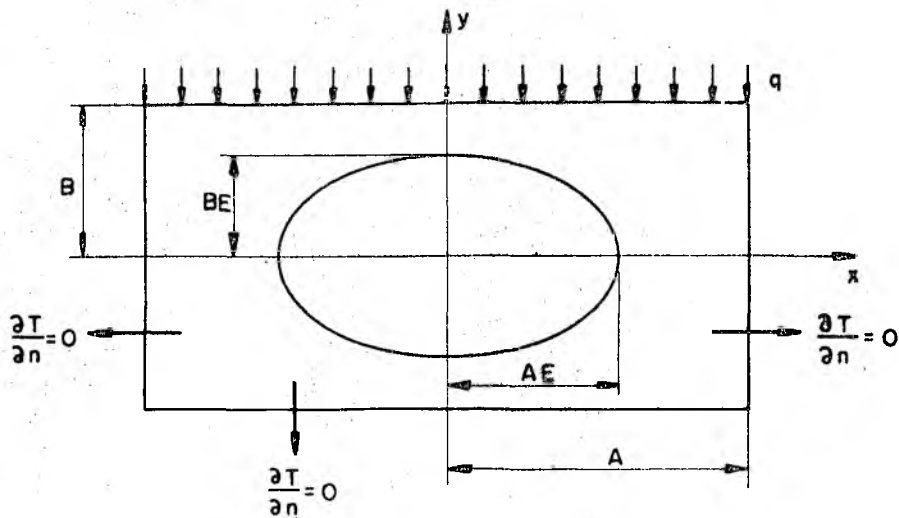


Fig. 5.1 - Geometria do problema

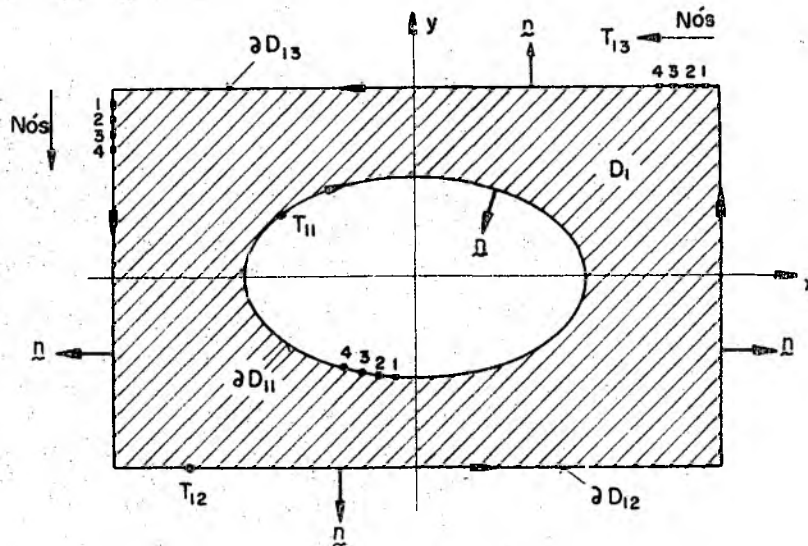


Fig. 5.2 - Região sólida do problema

No caso do líquido, a região a ser considerada está mostrada na figura 5.3.

Adotando-se o procedimento apresentado nos capítulos anteriores, determina-se o seguinte conjunto de equações integrais:

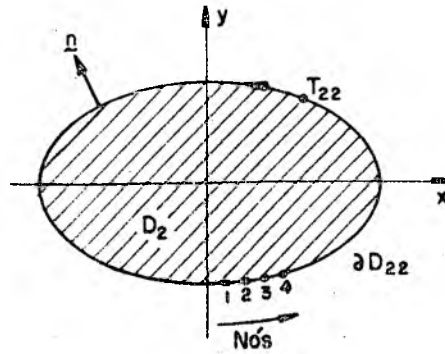


Fig. 5.3 - Região de escoamento do problema

a. Equações integrais do problema hidrodinâmico

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D_{22}} \ln |z - z'| (z' - z) \cdot \underline{n}(z') ds(z') +$$

$$+ \int_{\partial D_{22}} \left( \ln |z - z'| + \frac{1}{2} \right) \partial u(z') ds(z') = 0 ; z \in \partial D_{22} \quad (5.1)$$

$$u_m(D_2) A(D_2) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D_{22}} \int_{\partial D_{22}} \left[ \frac{1}{3} (\ln |z - z'| - \frac{2}{3}) (z - z') \cdot \underline{n}(z') + \right.$$

$$\left. + \ln |z - z'| \partial u(z') \right] (z - z') \cdot \underline{n}(z) ds(z) ds(z') \quad (5.2)$$

b. Equações integrais do problema térmico

$$\frac{1}{2} T_{22}(z) = u_m(D_2) A(D_2) + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial D_{22}} \left[ \frac{1}{4} (\ln |z - z'| - \frac{5}{4}) (z' - z) \cdot \underline{n}(z') + \right.$$

$$\left. + (\ln |z - z'| - 1) \partial u(z') \right] |z - z'|^2 ds(z') +$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{22}} [(\ln |z - z'| - 2\pi) \partial T_{22}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{22}(z')] ds(z'); \quad z \in \partial D_{21} \quad (5.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T_{11}(z) &= - \frac{1}{2} \int_{\partial D_{11}} [\ln |z - z'| \partial T_{11}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{11}(z')] ds(z') + \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{12}} [\ln |z - z'| \partial T_{12}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{12}(z')] ds(z') + \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{13}} [\ln |z - z'| \partial T_{13}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{13}(z')] ds(z'); \quad z \in \partial D_{11} \quad (5.4)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} T_{12}(z) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{11}} [\ln |z - z'| \partial T_{11}(z') +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{11}(z')] ds(z') + \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{12}} [\ln |z - z'| \partial T_{12}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{12}(z')] ds(z') + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{13}} [\ln |z - z'| \partial T_{13}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{13}(z')] ds(z'); \quad z \in \partial D_{12} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T_{13}(z) & = - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{11}} [\ln |z - z'| \partial T_{11}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{11}(z')] ds(z') + \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{12}} [\ln |z - z'| \partial T_{12}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{12}(z')] ds(z') +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{13}} [\ln |z - z'| \partial T_{13}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{13}(z')] ds(z'); \quad z \in \partial D_{13} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(z) = & u_m(D_2) A(D_2) + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial D_{22}} \left[ \frac{1}{4} (\ln |z - z'| - \frac{5}{4}) (z - z') \cdot \underline{n}(z') + \right. \\
& + (\ln |z - z'| - 1) \partial u(z') \left. \right] |z - z'|^2 ds(z') - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{22}} \left[ (\ln |z - z'| - 2\pi) \partial T_{22}(z') + \right. \\
& + \left. \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{22}(z') \right] ds(z'); \quad z \in D_2 \quad (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1(z) = & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{11}} [\ln |z - z'| \partial T_{11}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{11}(z')] ds(z') + \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{12}} [\ln |z - z'| \partial T_{12}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \underline{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{12}(z')] ds(z') +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{13}} [\ln |z - z'| \partial T_{13}(z') + \\
& + \frac{(z - z') \cdot \bar{n}(z')}{|z - z'|^2} T_{13}(z')] ds(z'); \quad z \in D_1 \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Na obtenção da solução do problema, deve-se resolver primeiramente a equação (5.1) a fim de se determinar a derivada normal da velocidade no contorno  $\partial D_{22}$ .

De posse de  $\partial u$ , calcula-se o produto da velocidade média pela área na região  $D_2$ , utilizando-se a equação (5.2), e então resolve-se o sistema de equações (5.3)-(5.6) determinando-se as distribuições de temperatura e fluxo de calor nos contornos. As distribuições de temperatura nas regiões  $D_1$  e  $D_2$  podem ser calculadas a partir das equações (5.7) e (5.8).

As condições de contorno para o problema térmico são:

$$1. \quad T_{11}(z) = T_{22}(z) \quad (5.9)$$

$$2. \quad \partial T_{12}(z) = 0 \quad (5.10)$$

$$3. \quad k_s \partial T_{11}(z) = -k_f \partial T_{22}(z) \quad (5.11)$$

$$4. \quad T_{13}(z) = 0 \quad (\text{temperatura prescrita}) \quad (5.12)$$

$$k_s \partial T_{13}(z) = q \quad (\text{fluxo prescrita}) \quad (5.13)$$

Introduzindo a condição de consistência, equação (3.29), e admitindo-se o fluxo de calor constante ao longo do contorno  $\partial D_{13}$ , a condição de contorno indicada pela equação (5.13) adquire a seguinte forma:

$$\partial T_{13}(z) = - \frac{u_m(D_2) A(D_2)}{2A k_s/k_f} \quad (5.14)$$

No caso da temperatura prescrita no contorno  $\partial D_{13}$ , as incógnitas do problema térmico serão:

$$T_{22} = T_{11}, \quad \partial T_{22} = -k_s/k_f \partial T_{11}, \quad T_{12} \quad \text{e} \quad \partial T_{13}$$

Já que o número de equações é igual ao número de incógnitas, o problema pode ser resolvido e possui solução única a menos de uma constante.

Admitindo-se fluxo de calor prescrita no contorno  $\partial D_{13}$ , as incógnitas do problema térmico serão:

$$T_{22} = T_{11}, \quad \partial T_{22} = -k_s/k_f \partial T_{11}, \quad T_{12} \quad \text{e} \quad T_{13}$$

Novamente o número de equações é igual ao número de incógnitas, e a solução do problema pode ser determinada a menos de uma constante.

As equações integrais apresentadas anteriormente foram discretizadas conforme apresentado no capítulo 4, e de acordo com as figuras 5.2 e 5.3. A fim de se eliminar a dificuldade de divisão do contorno da elipse em arcos de comprimentos iguais, utilizou-se o método sugerido em [16]. Em [16], as equações paramétricas do contorno e as integrais foram feitas em relação ao ângulo.

Na discretização dos contornos foram usados 48 nós em  $\partial D_{13}$ , 96 nós em  $\partial D_{12}$  e 80 nós em  $\partial D_{11} = -\partial D_{22}$ . Na solução do problema térmico a simetria existente em relação ao eixo y foi aproveitada e o sistema a ser resolvido foi reduzido a 152 equações integrais. Um programa foi escrito em FORTRAN IV e processado em um computador IBM 4341 com um tempo de processamento de 28 segundos.

## 5.2 - Discussão dos resultados

Para se averiguar a precisão do método de equações integrais e do esquema numérico de solução, é conveniente que se resolva um problema de configuração mais simples para o qual se encontrem resultados obtidos anteriormente, ou que tenha uma solu-

ção analítica conhecida.

Fazendo a condutibilidade térmica do sólido tender a infinito, o problema se reduz ao cálculo da distribuição de temperatura em um escoamento laminar no interior de um duto, sob a condição de fluxo de calor prescrito no contorno. Para o caso do duto circular, a solução analítica é simples (ver Apêndice E), e os resultados obtidos pelo método integral concordam com os resultados analíticos. O erro máximo encontrado foi da ordem de 0,5% e a comparação entre os dois resultados é mostrada na figura 5.4.

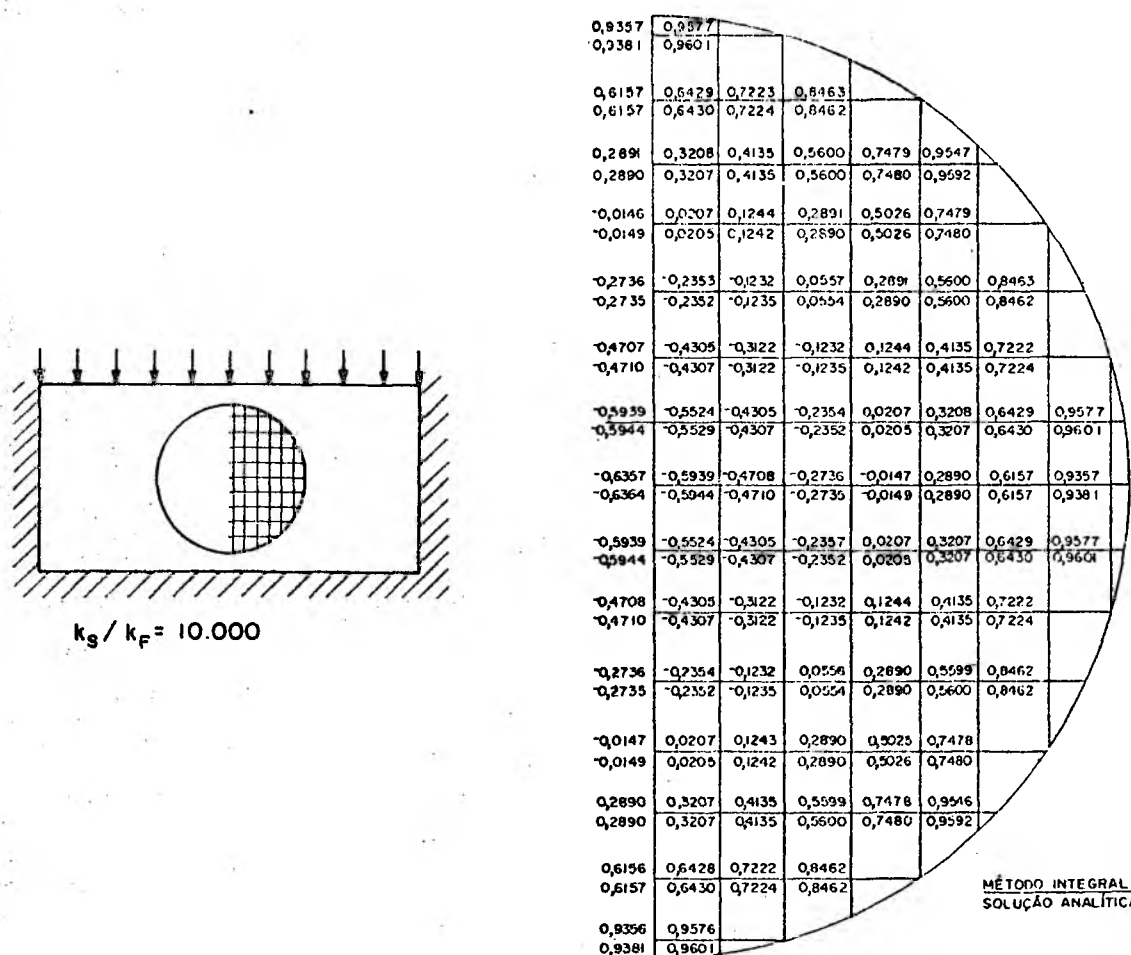


Fig. 5.4 - Distribuição de temperatura em um escoamento laminar no interior de um duto de seção circular sob a condição de fluxo de calor prescrito no contorno do duto.

Pode ser visto na figura 5.4 que à medida que o ponto se aproxima do contorno, a precisão no valor da temperatura decresce. Tal fato ocorre devido às singularidades apresentadas pela função de Green e sua derivada. Estas singularidades prejudicam a avaliação das integrais numéricas sobre o contorno, mesmo que se aumente o número de pontos usados na discretização. Embora esta dificuldade possa ser contornada com o uso de um método de interpolação adequado, em Engenharia é mais frequente a necessidade de informações sobre parâmetros fisicamente relevantes na média sobre o contorno.

Para compreender como se realiza a transmissão de calor do contorno superior do retângulo até a região de escoamento, faz-se necessário uma visualização de algumas soluções da equação integral. Analisar localmente as temperaturas e os fluxos de calor nos contornos permite que se tenha uma idéia global do fenômeno.

Todos os gráficos serão apresentados em função de quatro números adimensionais a saber:

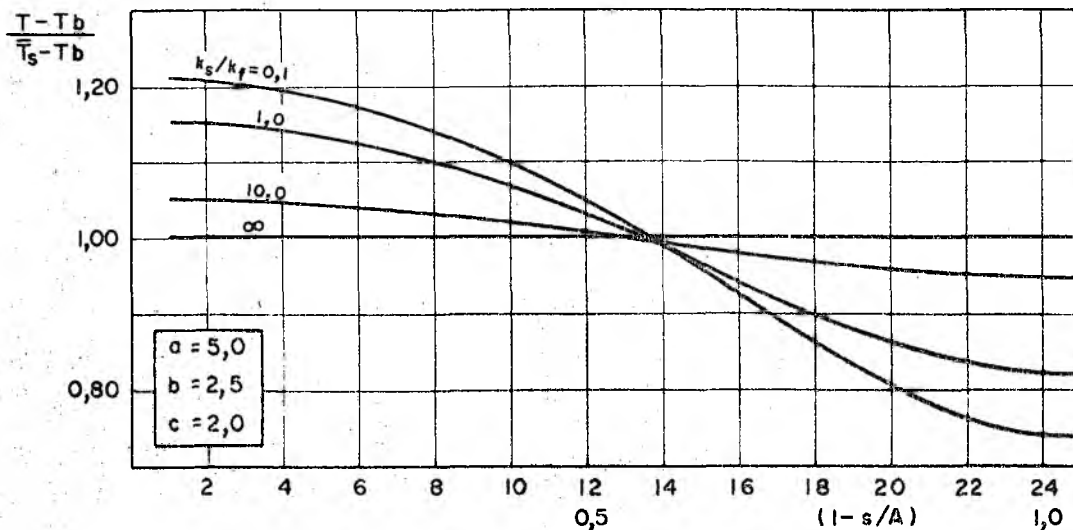
$a = A/AE$  - relaciona a base do retângulo com o eixo maior da elipse.

$b = B/BE$  - relaciona a altura do retângulo com o eixo menor da elipse.

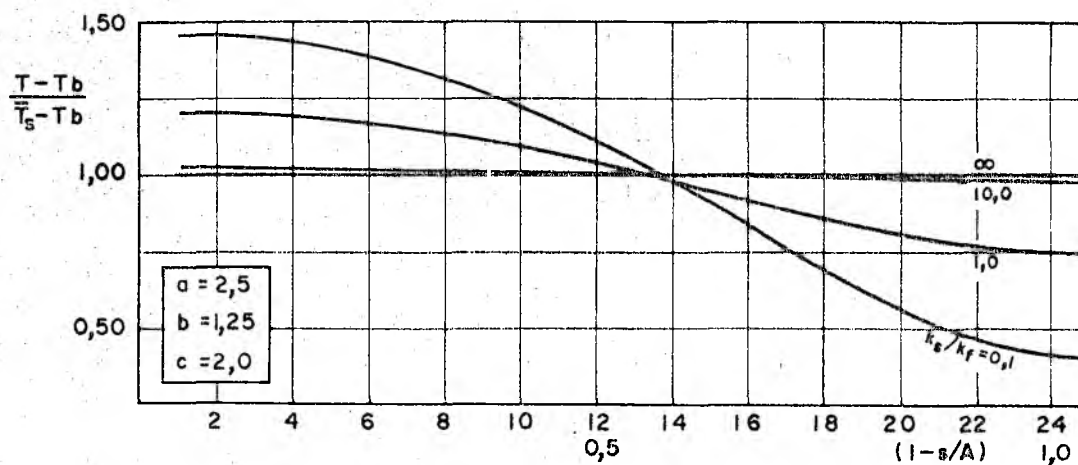
$c = A/B$  - caracteriza as dimensões do retângulo.

$k_s/k_f$  - relaciona as condutibilidades térmicas do sólido e do líquido.

Nas figuras 5.5 e 5.6 são mostradas as distribuições de temperatura na superfície superior do retângulo para várias relações de condutibilidades térmicas, sob a condição de fluxo prescrito. As temperaturas foram plotadas de acordo com o perfil adimensional  $(T - T_b)/(\bar{T}_s - T_b)$ , onde  $T_b$  é a temperatura de mistura definida conforme a equação (2.1), e  $\bar{T}_s$  é a temperatura média no contorno superior do retângulo. À medida que a condutibilidade térmica do sólido aumenta, a temperatura no contorno superior ten



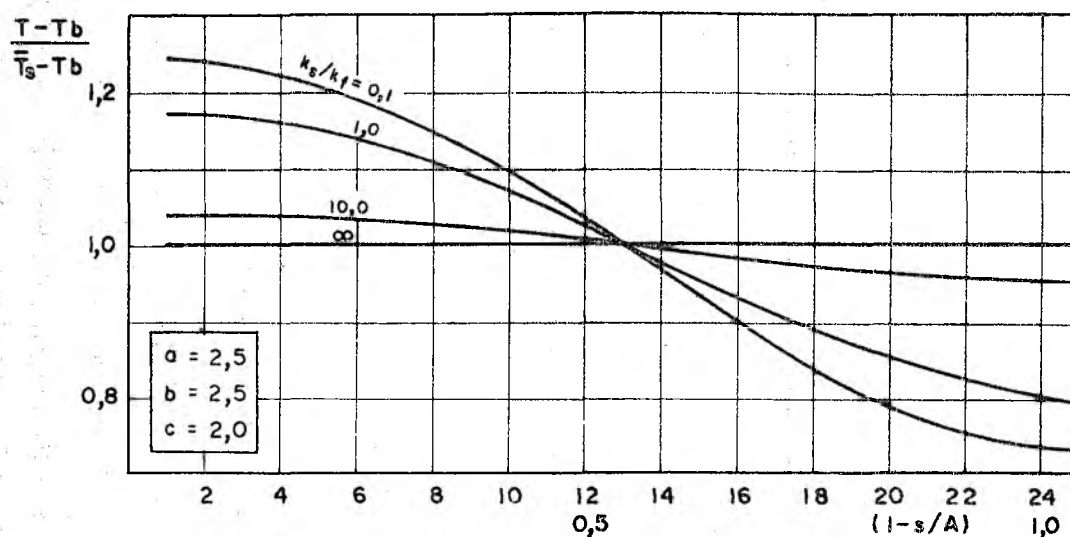
a) Duto com secção circular,  $a = 5,0$  e  $b = 2,5$ .



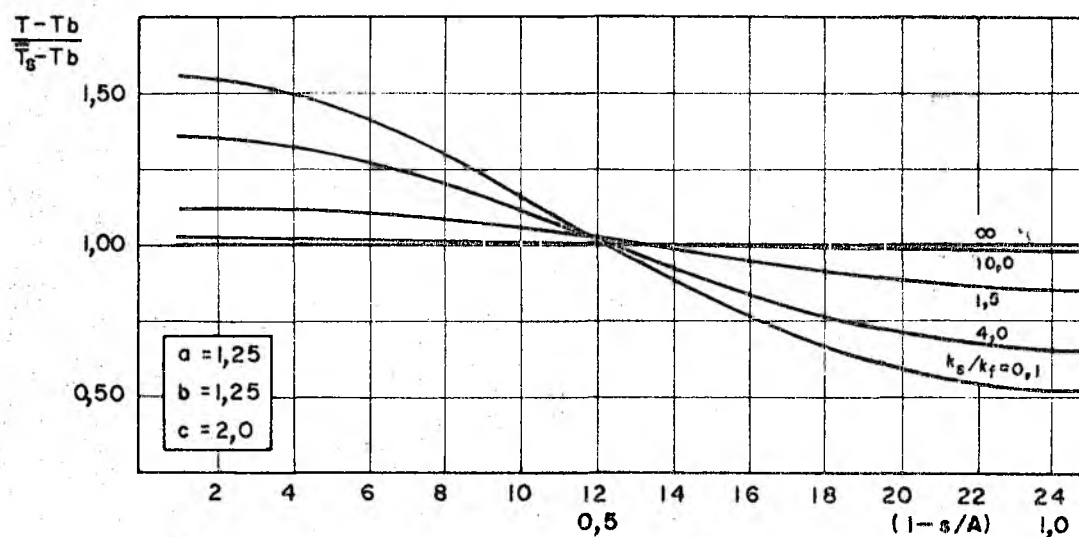
b) Duto com secção circular,  $a = 2,5$  e  $b = 1,25$ .

Fig. 5.5 - Distribuição da temperatura na superfície superior do retângulo, função das condutibilidades térmicas. Condição de fluxo de calor prescrito.





a) Duto com secção elíptica,  $a = b = 2,5$



b) Duto com secção elíptica,  $a = b = 1,25$

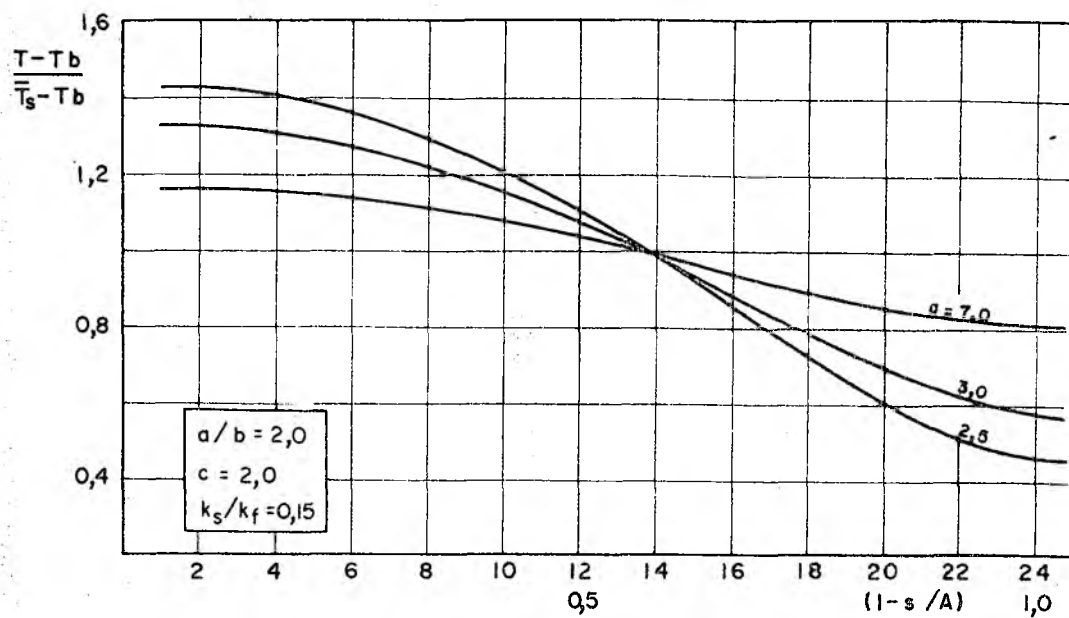
Fig. 5.6 - Distribuição da temperatura na superfície superior do retângulo, função das condutibilidades térmicas. Condição de fluxo de calor prescrito.

de a se uniformizar em torno da temperatura média  $\bar{T}_s$ .

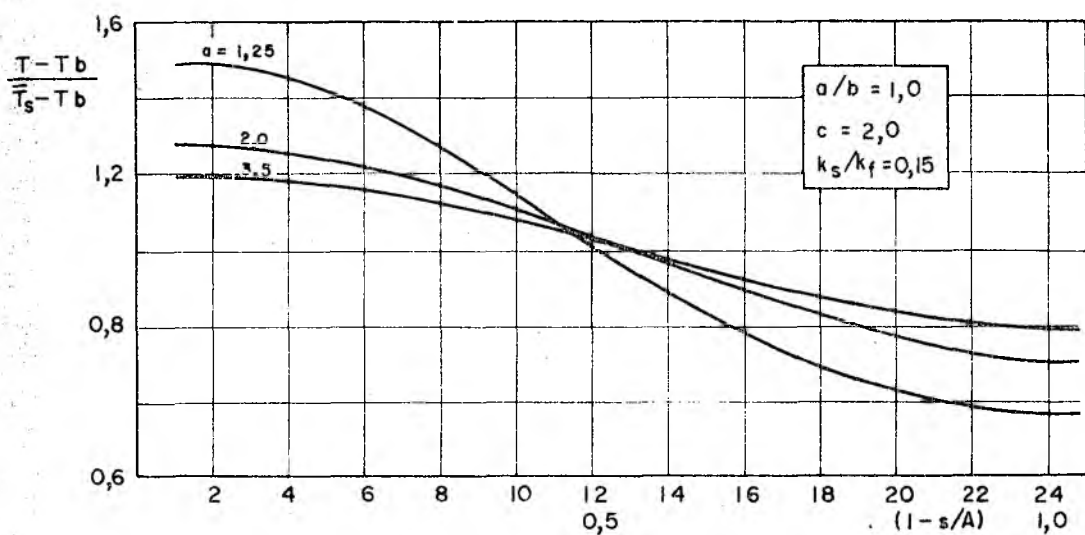
A influência da área de escoamento na distribuição de temperatura no contorno superior do retângulo sob a condição de fluxo de calor prescrito, é mostrada na figura 5.7 para uma baixa condutibilidade do sólido. Um aumento da área de escoamento, diminui a temperatura média na interface do sólido onde o calor é trocado; este efeito é mais acentuado na elipse do que no círculo.

Nas figuras 5.8 e 5.9 pode-se ver a influência das condutibilidades térmicas na temperatura da interface sólido-líquido sob a condição de fluxo de calor prescrito. Para baixas condutibilidades do sólido,  $\bar{T}_s$  é bem maior que a temperatura na interface, e o perfil adimensional se aproxima de zero. Aumentando a relação  $k_s/k_f$ , a temperatura na superfície da elipse se aproxima da temperatura no contorno superior do sólido que por sua vez tende a se uniformizar em torno de  $\bar{T}_s$ , conforme foi visto nas figuras 5.5 e 5.6. Para o duto de secção elíptica com uma condutibilidade térmica do sólido pequena em relação à do fluido, observa-se que a temperatura máxima não ocorre na parte superior do duto, embora esta região esteja mais próxima do contorno aquecido. Este efeito pode ser melhor analisado pela figura 5.10, onde a distribuição de temperatura é plotada para diferentes áreas de escoamento e uma relação de condutibilidades térmicas igual a 0,15. Verifica-se então que, para o duto elíptico, a temperatura máxima ocorre próxima da região de estagnação, em virtude da baixa velocidade do fluido em escoamento. Para o duto circular, a temperatura cresce à medida que se aproxima do contorno aquecido.

A influência das condutibilidades térmicas no fluxo de calor que atravessa a interface sólido-líquido, sob a condição de fluxo prescrito, é mostrada nas figuras 5.11 e 5.12. Na figura 5.13 o fluxo de calor na interface sólido-líquido é plotado em função da área de escoamento para uma baixa condutibilidade térmica do sólido. Novamente pode ser notado que nas regiões de estagnação o fluxo de calor decresce, podendo até assumir valores negativos, ou seja, o fluido passa a perder calor para o sólido. Já que o objetivo é aquecer o fluido injetando calor na superfície superior do retângulo, estas perdas que ocorrem nas regiões de es

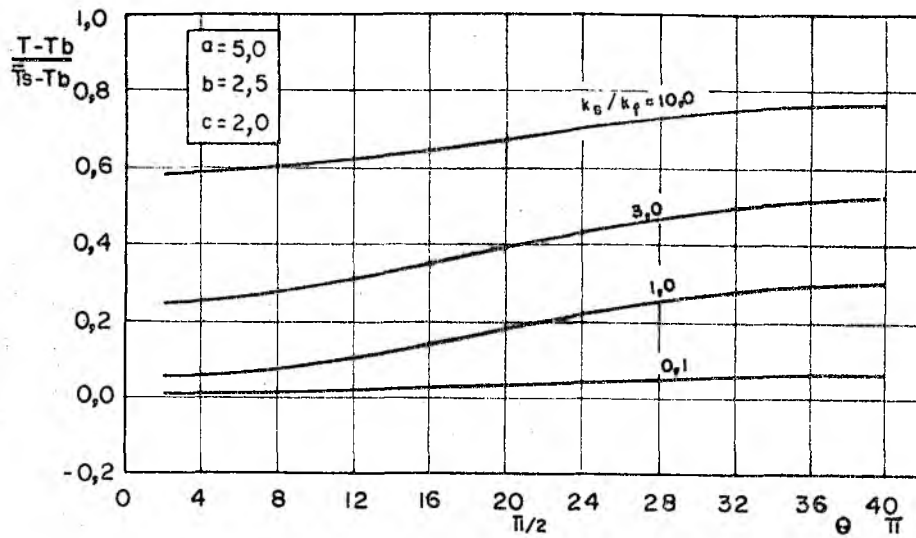


a) Duto com secção circular,  $a/b = 2,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

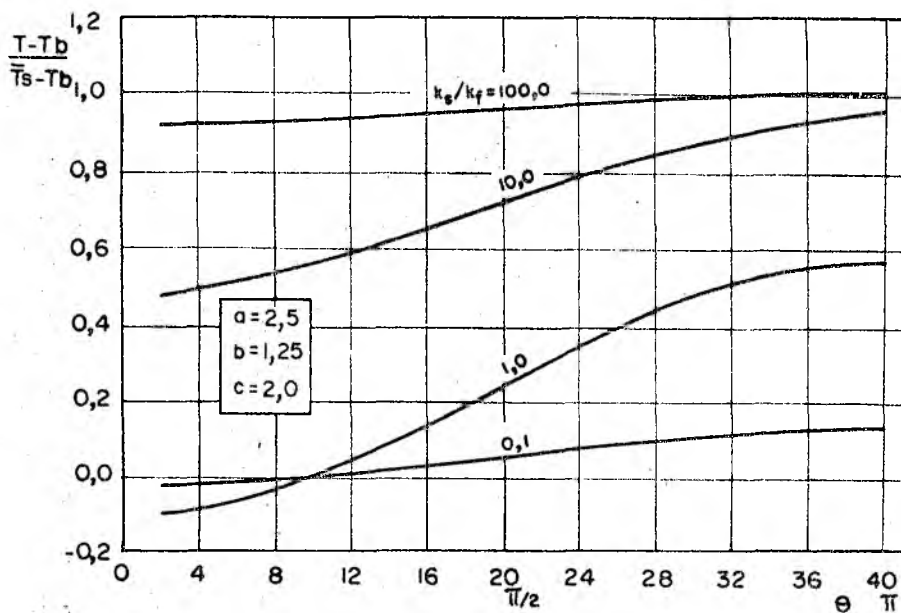


b) Duto com secção elíptica,  $a/b = 1,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$ .

Fig. 5.7 - Distribuição da temperatura na superfície superior do retângulo, função da área de escoamento. Condição de fluxo prescrito.

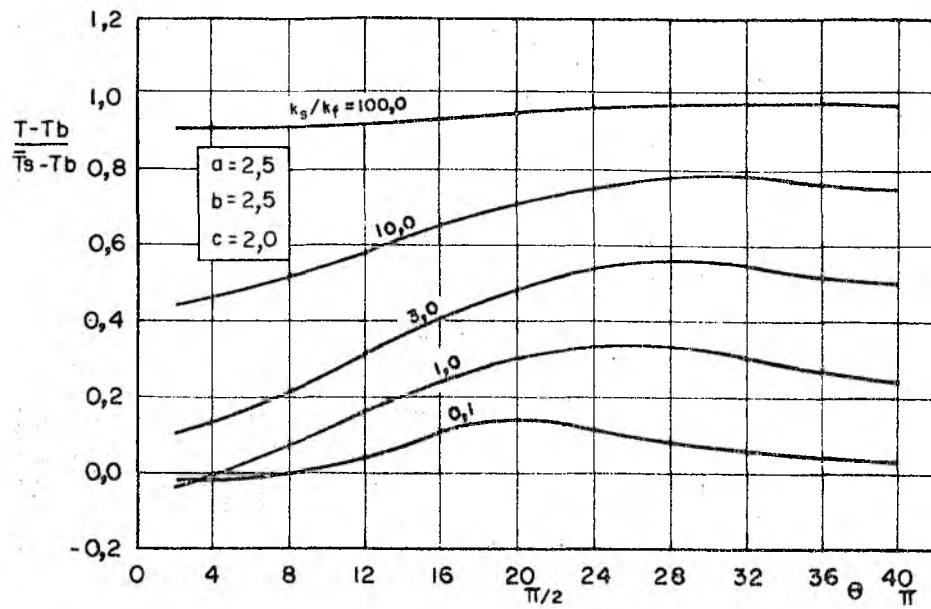


a) Duto com secção circular,  $a = 5,0$  e  $b = 2,5$

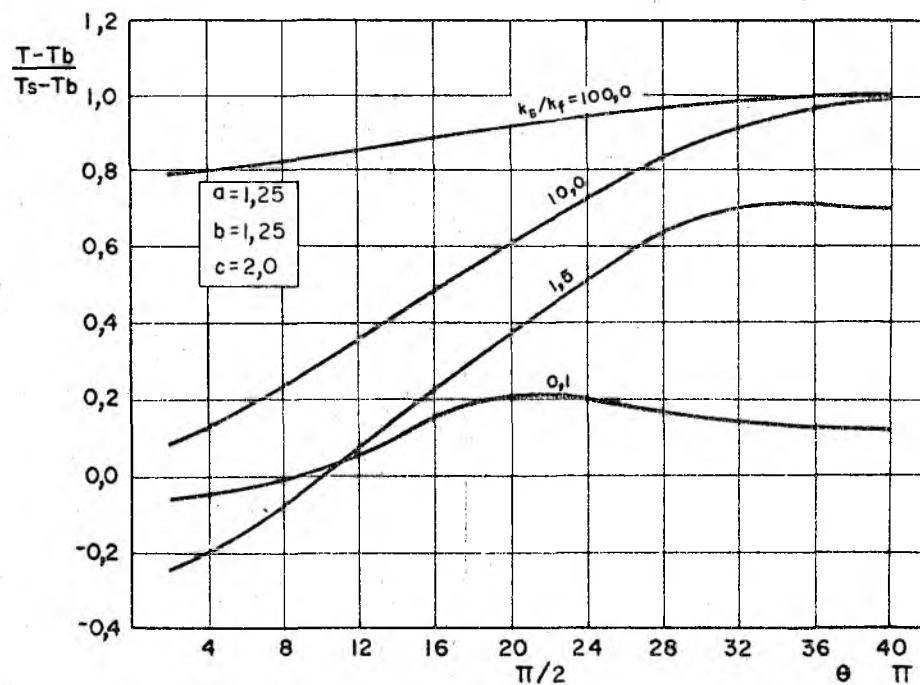


b) Duto com secção circular,  $a = 2,5$  e  $b = 1,25$ .

Fig. 5.8 - Distribuição da temperatura na interface sólido-líquido função das condutibilidades térmicas. Condição de fluxo de calor prescrito.

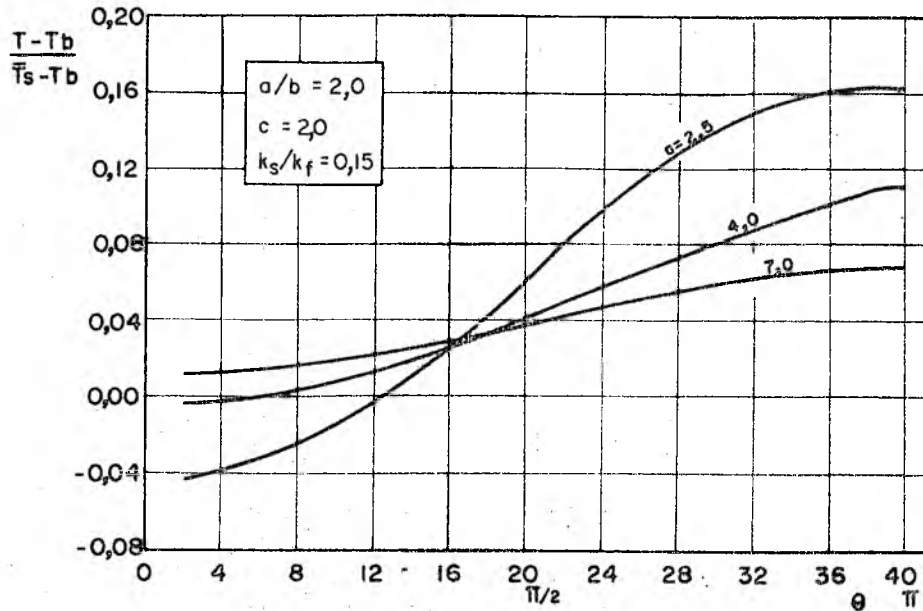


a) Duto com secção elíptica,  $a = 2,5$  e  $b = 2,5$ .

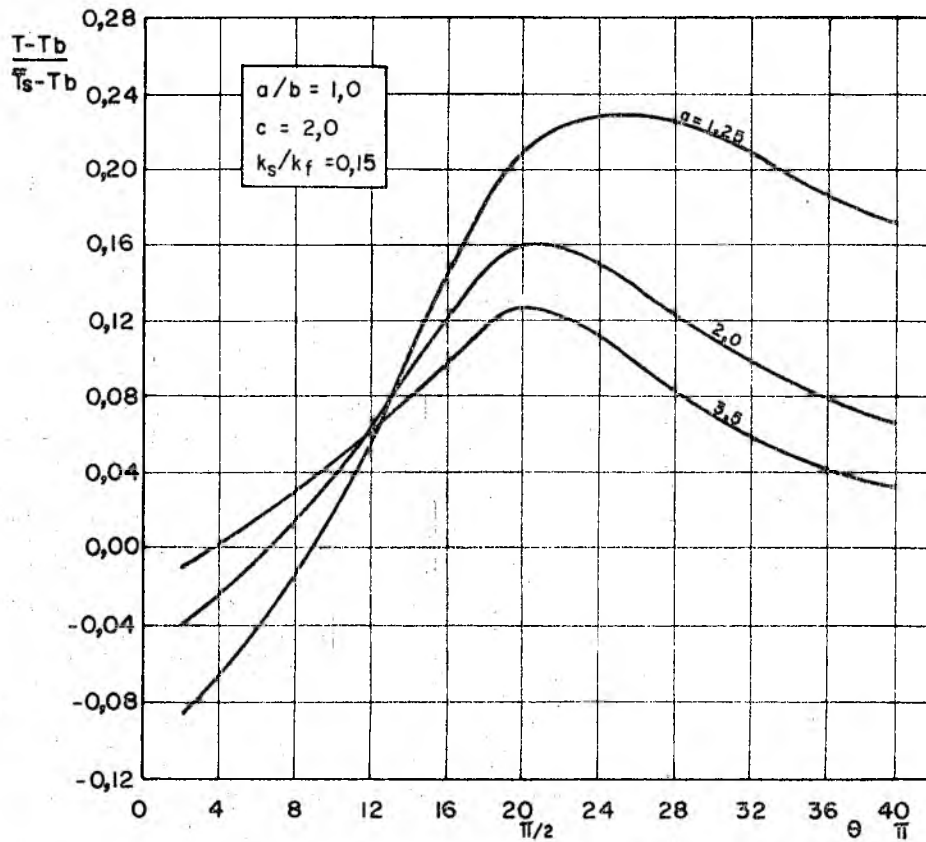


b) Duto com secção elíptica,  $a = 1,25$  e  $b = 1,25$ .

Fig. 5.9 - Distribuição da temperatura na interface sólido-líquido função das condutibilidades térmicas. Condição de fluxo de calor prescrito.

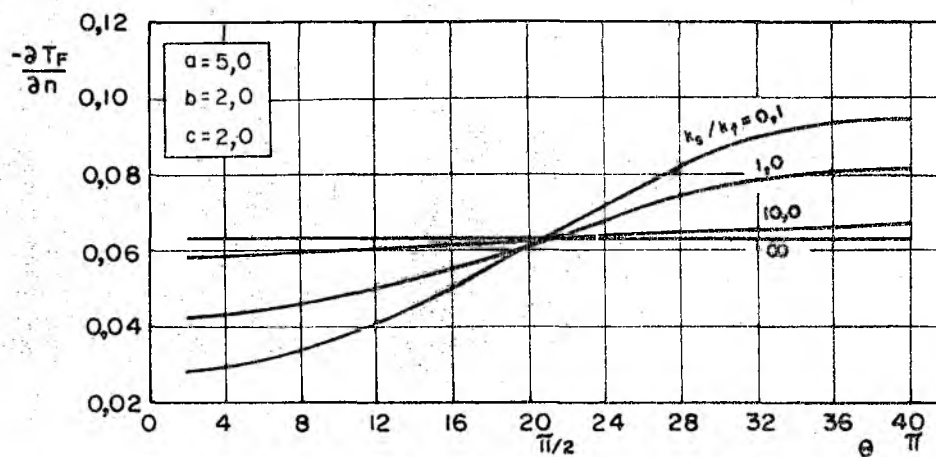


a) Duto com secção circular,  $a/b = 2,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

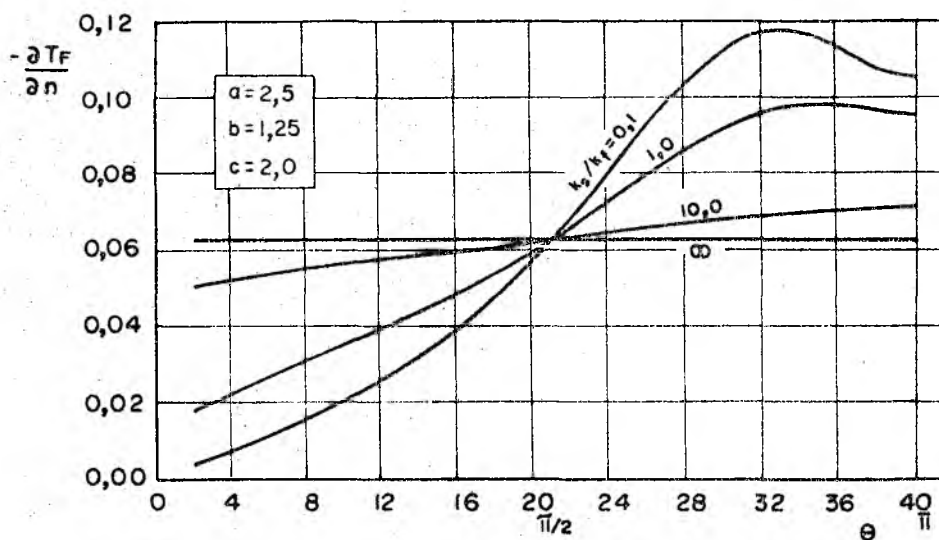


b) Duto com secção elíptica,  $a/b = 1,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

Fig. 5.10 - Distribuição da temperatura na interface sólido-líquido, função da área de escoamento. Condição de fluxo de calor prescrito.

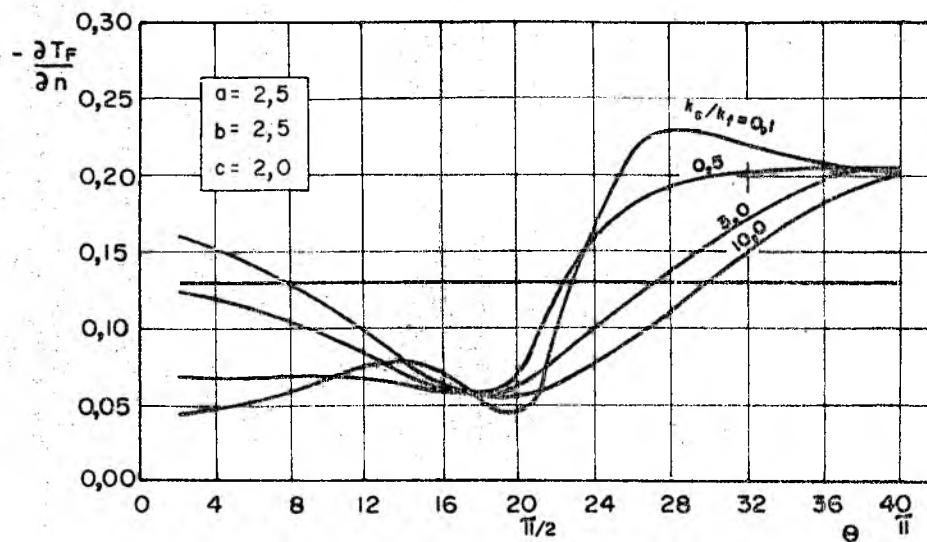


a) Duto com secção circular,  $a = 5,0$  e  $b = 2,5$

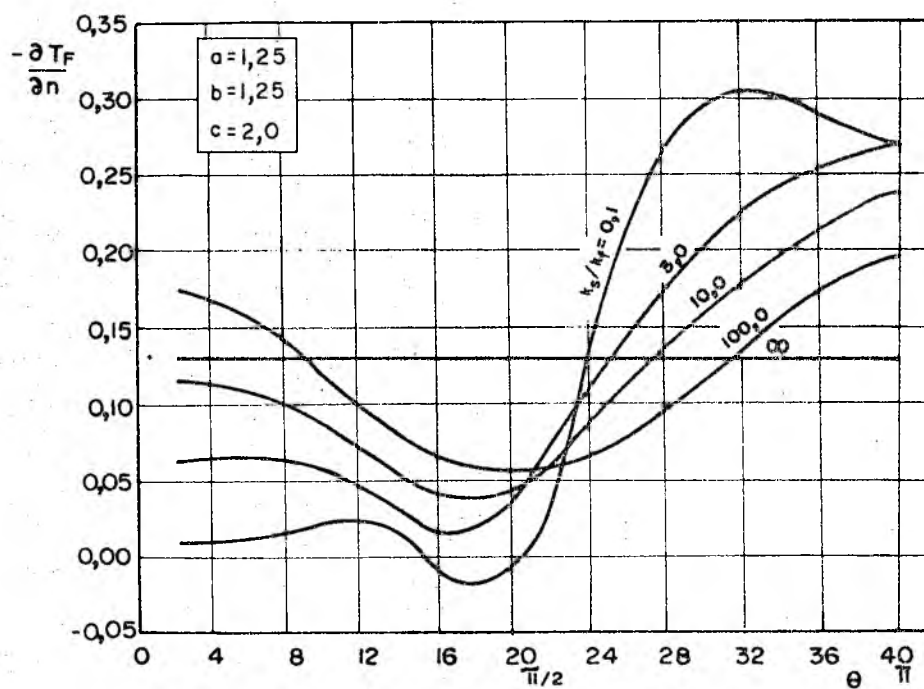


b) Duto com secção circular,  $a = 2,5$  e  $b = 1,25$

Fig. 5.11 - Distribuição do fluxo de calor na interface sólido-líquido, função das condutibilidades térmicas. Condição de fluxo de calor prescrito.



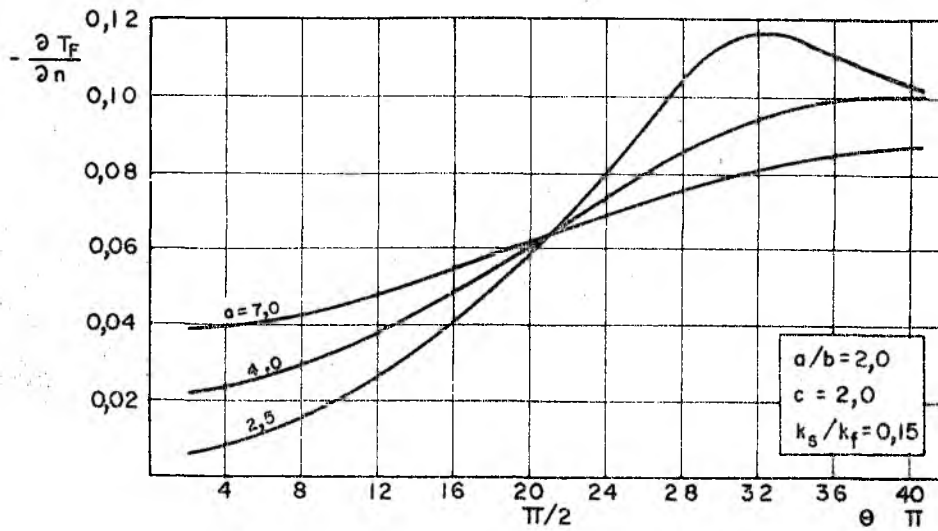
a) Duto com secção elíptica,  $a = 2,5$  e  $b = 2,5$ .



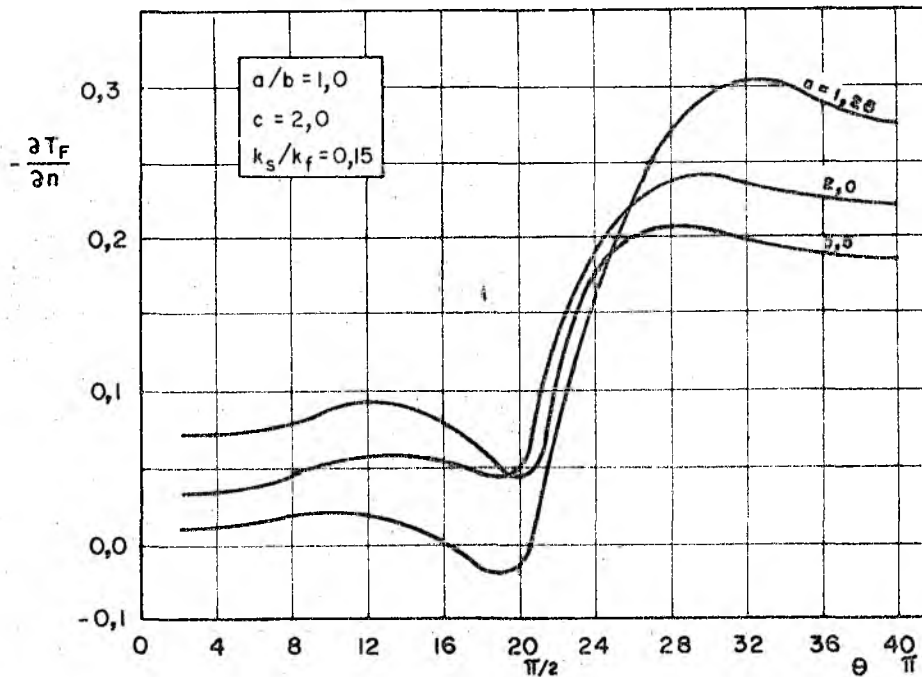
b) Duto com secção elíptica,  $a = 1,25$  e  $b = 1,25$

Fig. 5.12 - Distribuição do fluxo de calor na interface sólido-líquido, função das condutibilidades térmicas. Condição de fluxo de calor prescrito.





a) Duto com secção circular,  $a/b = 2,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$ .



b) Duto com secção elíptica,  $a/b = 1,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

Fig. 5.13 - Distribuição do fluxo de calor na interface sólido-líquido, função da área de escoamento. Condição de fluxo de calor prescrito.

tagnação influenciam sobremaneira no processo global de transmissão de calor.

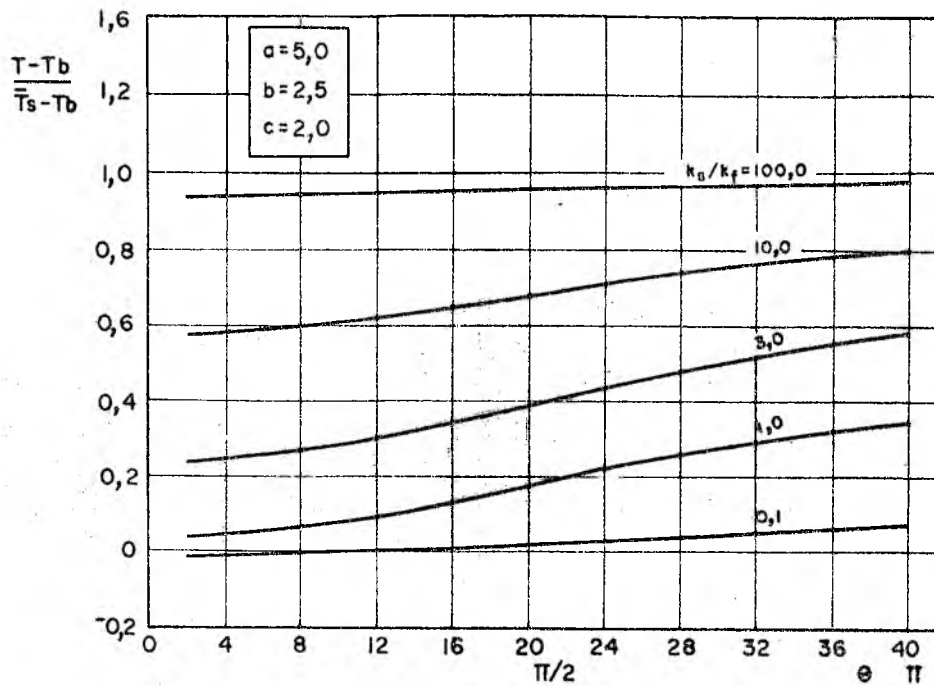
Nas figuras 5.14 e 5.15 é mostrado como a temperatura da interface sólido-líquido varia em função das condutibilidades térmicas, sob a condição de temperatura prescrita no contorno do retângulo. Estas figuras se assemelham às figuras 5.9 e 5.10, embora o efeito da estagnação na temperatura da interface somente seja notado com pequenas áreas de escoamento. Na figura 5.16 percebe-se este efeito mais facilmente.

A variação do fluxo de calor no contorno da elipse em função das condutibilidades térmicas, e sob a condição de temperatura prescrita, pode ser observada nas figuras 5.17 e 5.18. Para o duto com secção circular o fluxo aumenta à medida em que o ponto interior se aproxima do contorno aquecido. No caso do duto elíptico, o fluxo decresce na região de estagnação.

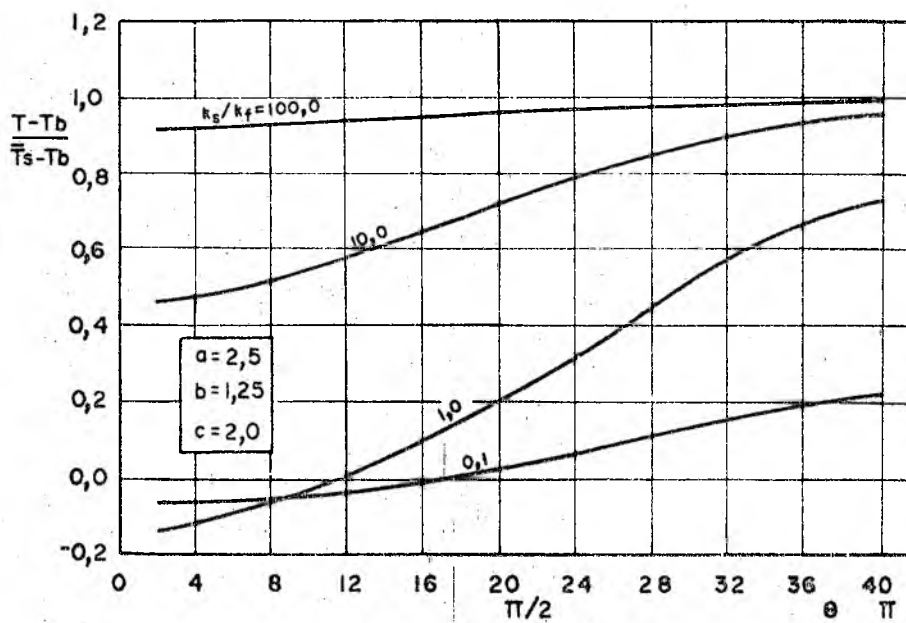
Comparando as figuras 5.17 e 5.18 (temperatura prescrita), com as figuras 5.11 e 5.12 (fluxo prescrito), observa-se que a distribuição de fluxo de calor na interface é praticamente a mesma para as duas condições de contorno, quando o sólido é bom condutor. Diminuindo-se a condutibilidade térmica do sólido, o fluxo de calor na interface sob a condição de temperatura prescrita, difere bastante do fluxo de calor sob a condição de fluxo prescrito, principalmente para grandes áreas de escoamento. Na figura 5.19 é mostrado, para uma relação  $k_s/k_f$  pequena, a variação do fluxo no contorno da região de escoamento em função dos tamanhos da elipse e do círculo (condição de temperatura prescrita). Com grandes áreas de escoamento, o fluxo na interface para pontos próximos da região aquecida, é bem maior no caso de temperatura prescrita do que quando se prescreve o fluxo. A razão deste aumento é que quando se impõe uma temperatura constante, o fluxo no contorno aquecido se concentra na região mais próxima do fluido. As figuras 5.20, 5.21 e 5.22, mostram claramente este efeito.

Na figura 5.21b, quando  $k_s/k_f$  assume valores elevados, observa-se que o fluxo no contorno superior cresce à medida que se aproxima dos cantos do retângulo. A razão deste crescimento pode ser melhor entendida, se observarmos a figura 5.23.

Como o calor que entra na parte central do retângulo é

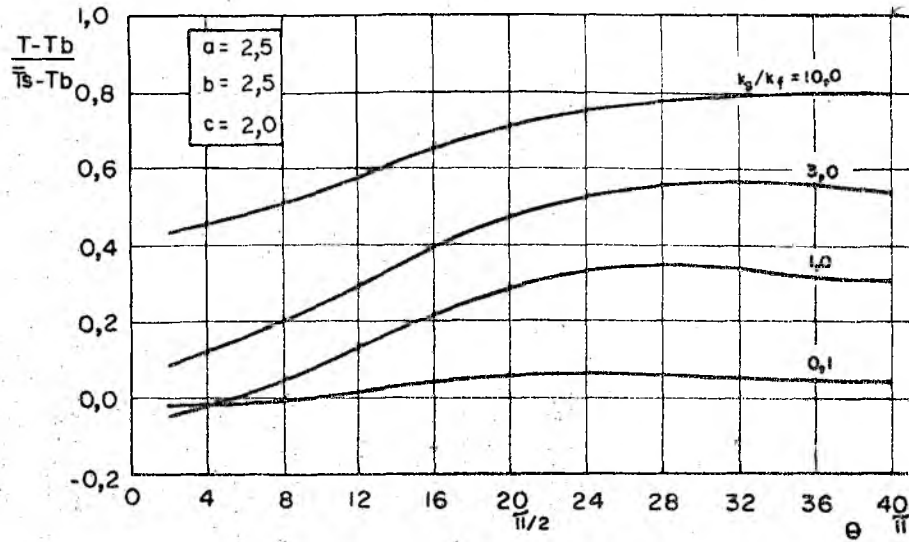


a) Duto com secção circular,  $a = 5.0$  e  $b = 2.5$ .

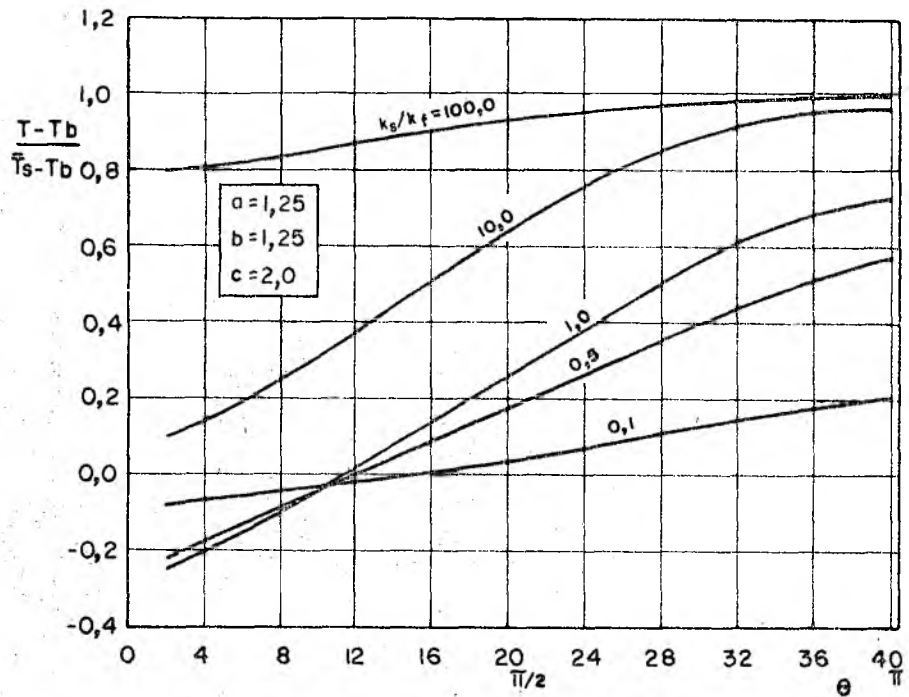


b) Duto com secção circular,  $a = 2.5$  e  $b = 1.25$

Fig. 5.14 - Distribuição da temperatura na interface sólido-líquido, função das condutibilidades térmicas. Condição de temperatura prescrita.

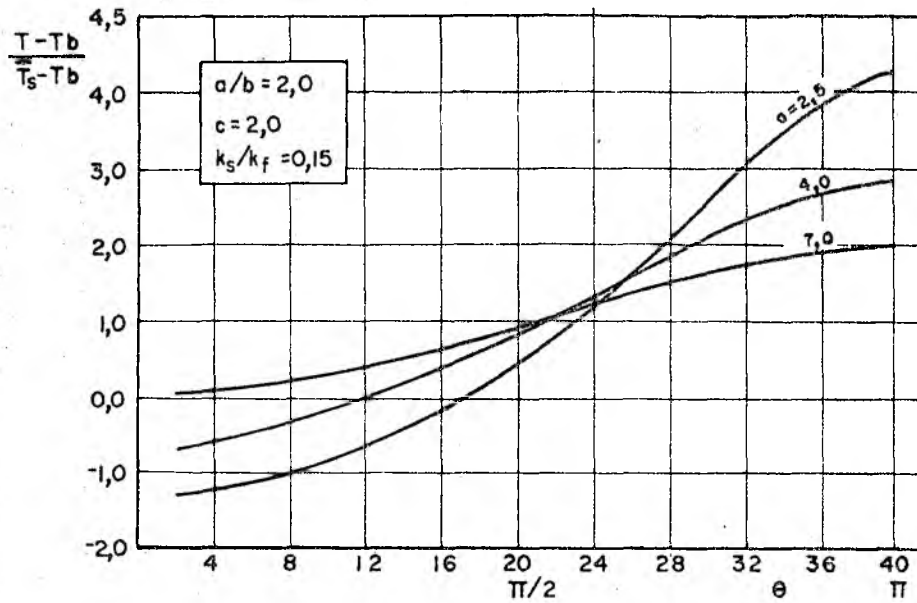


a) Duto com secção elíptica,  $a = 2,5$  e  $b = 2,5$

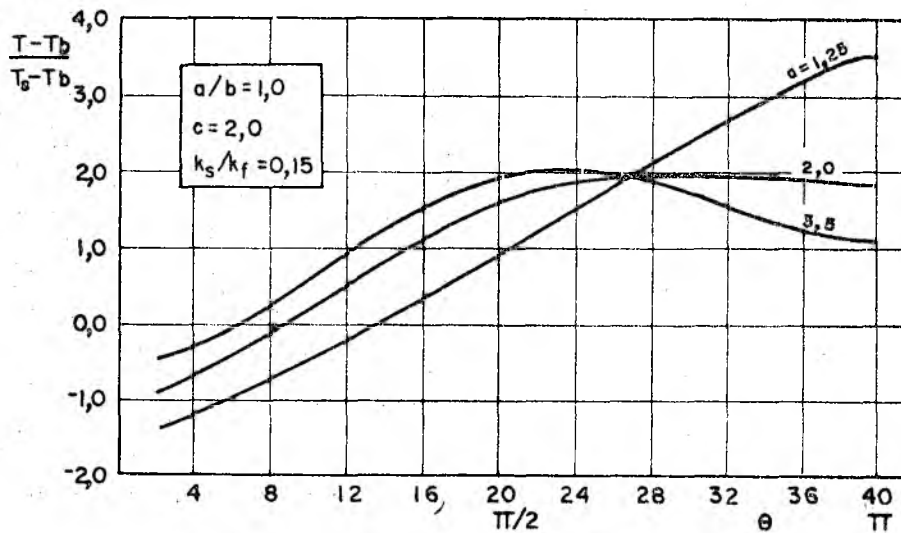


b) Duto com secção elíptica,  $a = 1,25$  e  $b = 1,25$

Fig. 5.15 - Distribuição da temperatura na interface sólido-líquido, função das condutibilidades térmicas. Condição de temperatura prescrita.

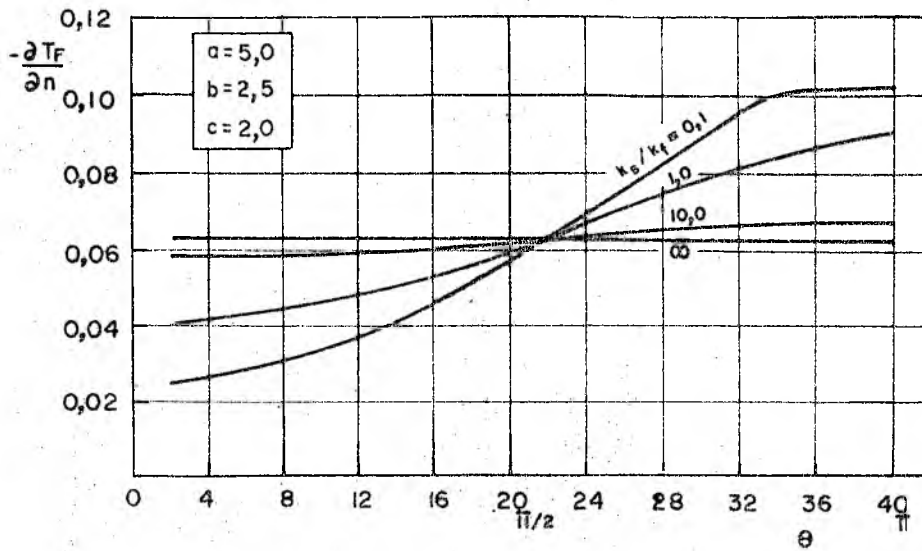


a) Duto com secção circular,  $a/b = 2,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

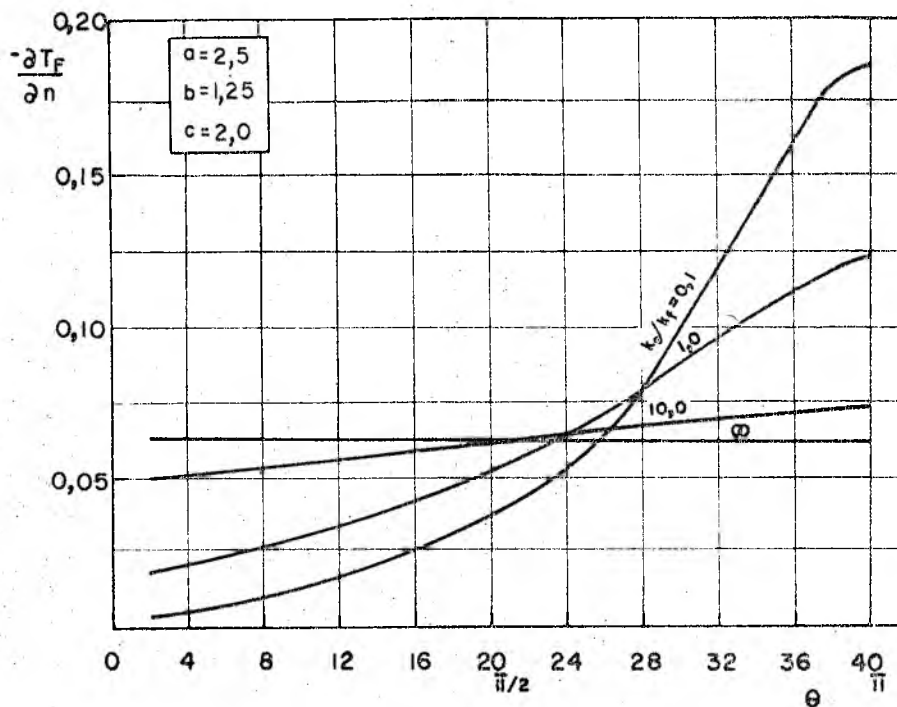


b) Duto com secção elíptica,  $a/b = 1,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

Fig. 5.16 - Distribuição de temperatura na interface sólido-líquido, função da área de escoamento. Condição de temperatura prescrita.

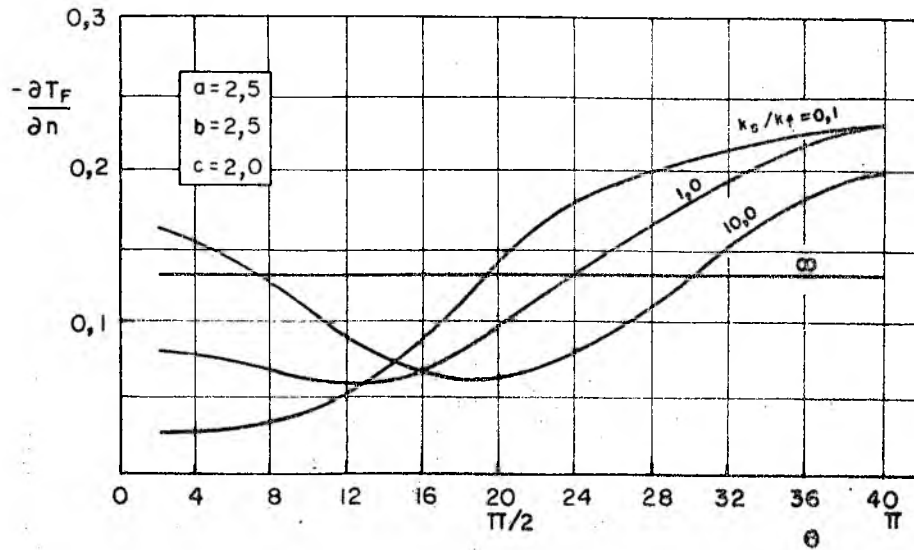


a) Duto com secção circular,  $a = 5,0$  e  $b = 2,5$

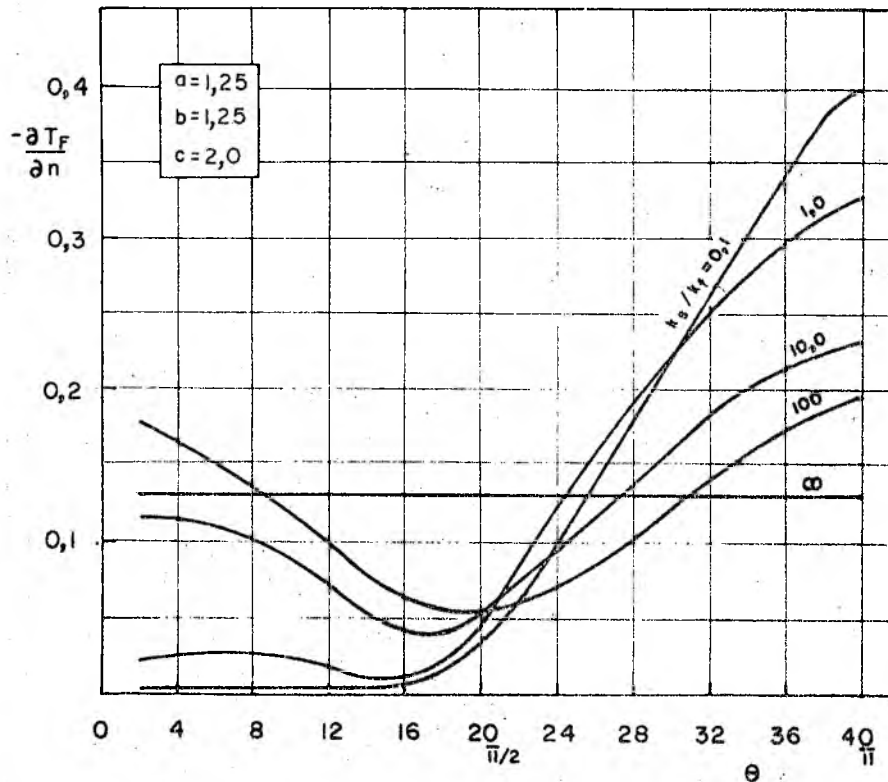


b) Duto com secção circular,  $a = 2,5$  e  $b = 1,25$

Fig. 5.17 - Distribuição do fluxo de calor na interface sólido-líquido, função das condutibilidades térmicas. Condição de temperatura prescrita.

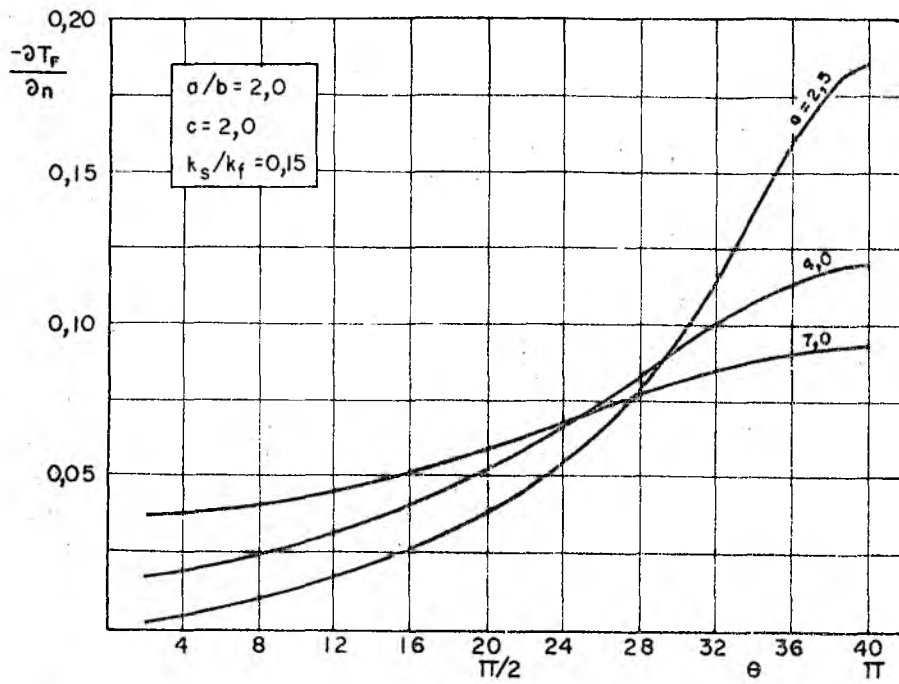


a) Duto com secção elíptica,  $a = 2,5$  e  $b = 2,5$

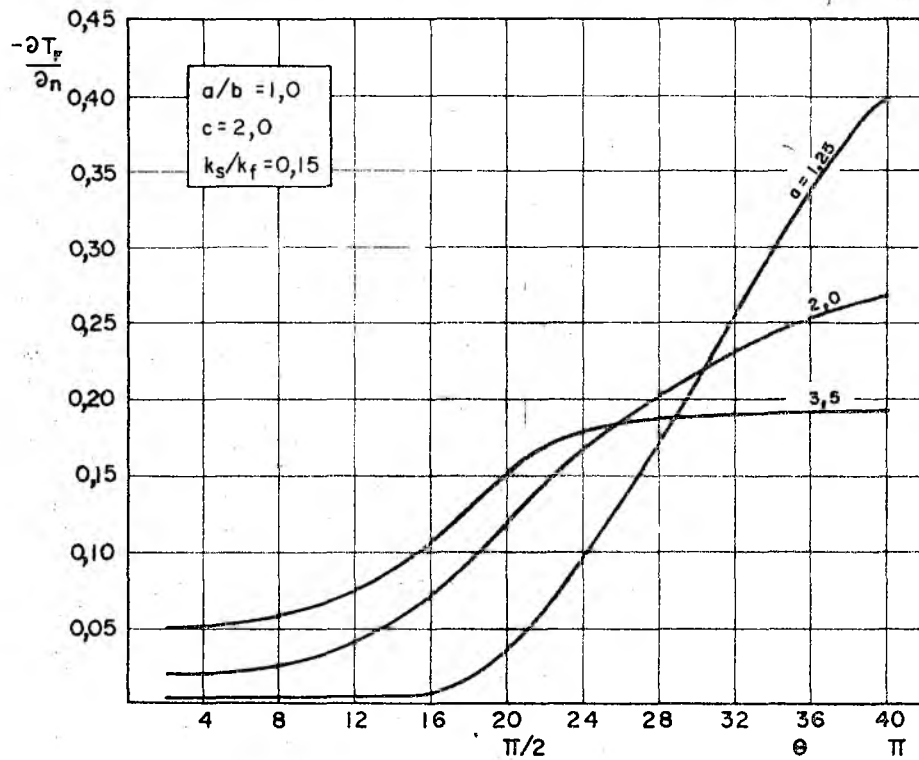


b) Duto com secção elíptica,  $a = 1,25$  e  $b = 1,25$ .

Fig. 5.18 - Distribuição do fluxo de calor na interface sólido-líquido, função das condutibilidades térmicas. Condição de temperatura prescrita.



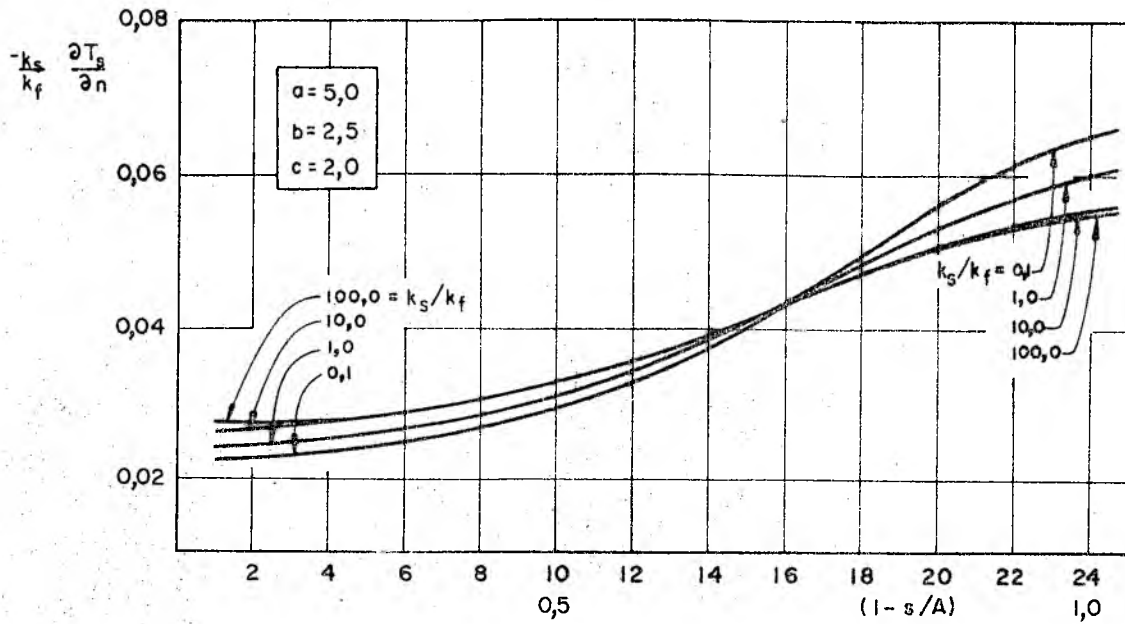
a) Duto com secção circular,  $a/b = 2,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$



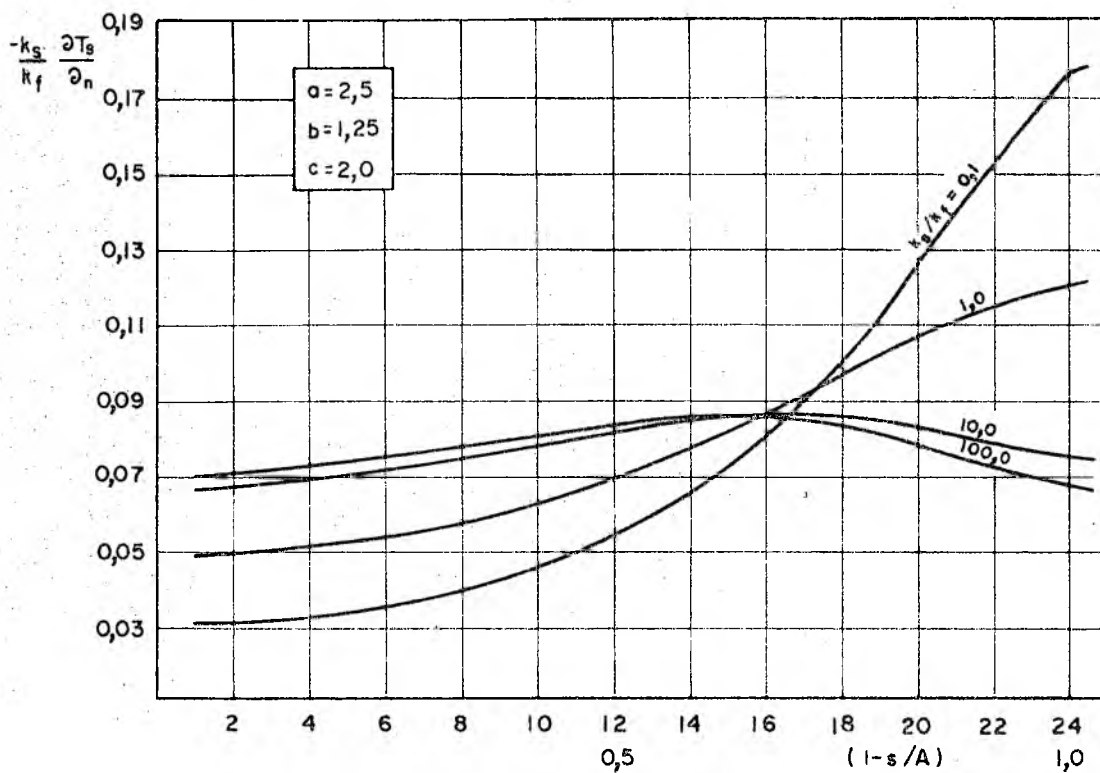
b) Duto com secção elíptica,  $a/b = 1,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

Fig. 5.19 - Distribuição do fluxo de calor na interface sólido-líquido, função da área de escoamento. Condição de temperatura prescrita.



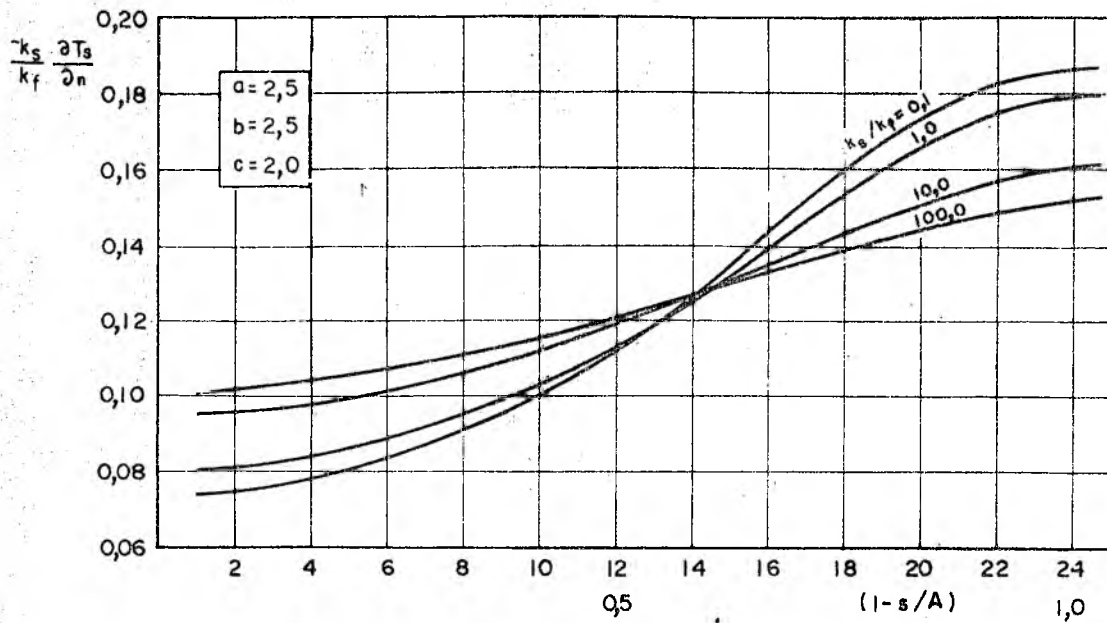


a) Duto com secção circular,  $a = 5,0$  e  $b = 2,5$

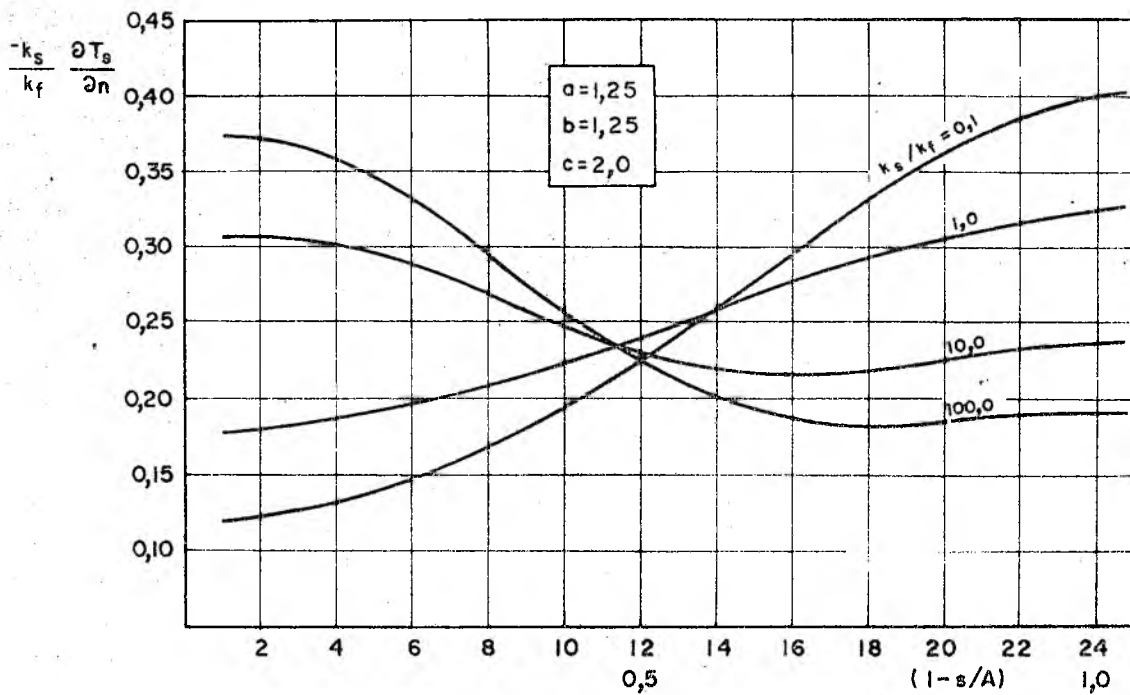


b) Duto com secção circular,  $a = 2,5$  e  $b = 1,25$

Fig. 5.20 - Distribuição do fluxo de calor na superfície superior do retângulo, função das condutibilidades térmicas. Condição de temperatura prescrita.

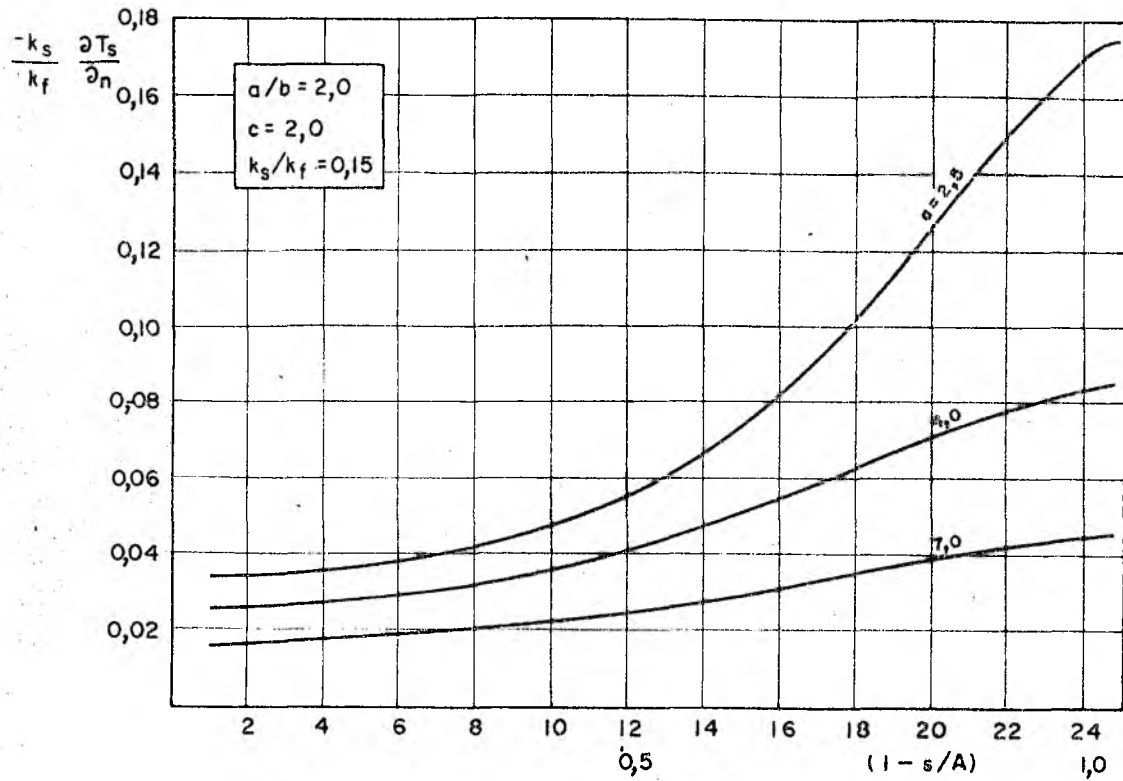


a) Duto com secção elíptica,  $a = 2,5$  e  $b = 2,5$

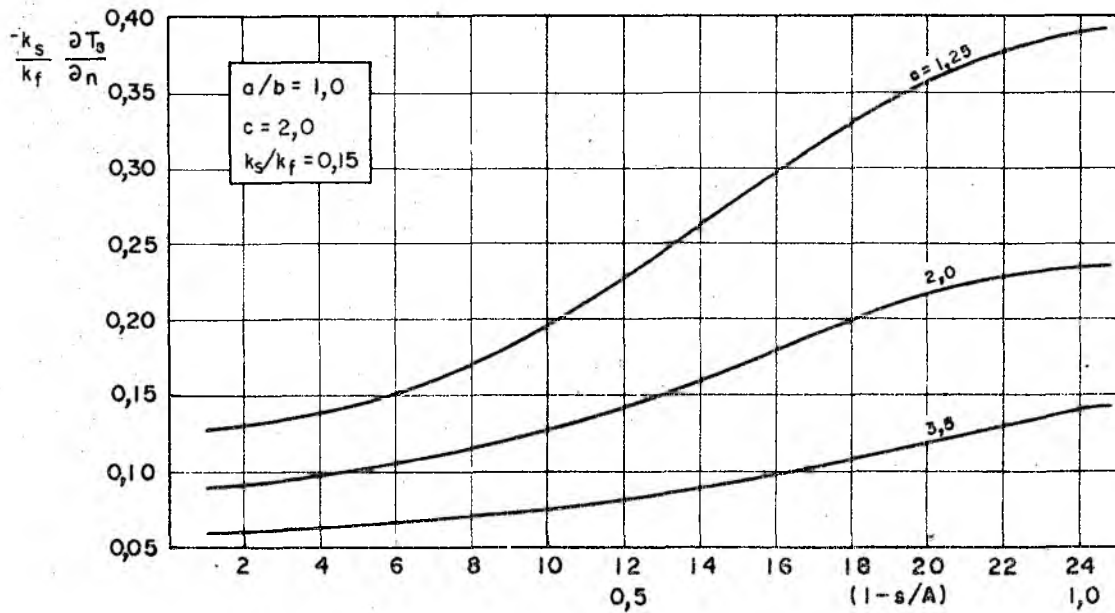


b) Duto com secção elíptica,  $a = 1,25$  e  $b = 1,25$ .

Fig. 5.21 - Distribuição do fluxo de calor na superfície superior do retângulo, função das condutibilidades térmicas. Condição de temperatura prescrita.



a) Duto com secção circular,  $a/b = 2,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$



b) Duto com secção elíptica,  $a/b = 1,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

Fig. 5.22 - Distribuição do fluxo de calor na superfície superior do retângulo, função da área de escoamento. Condição de temperatura prescrita.

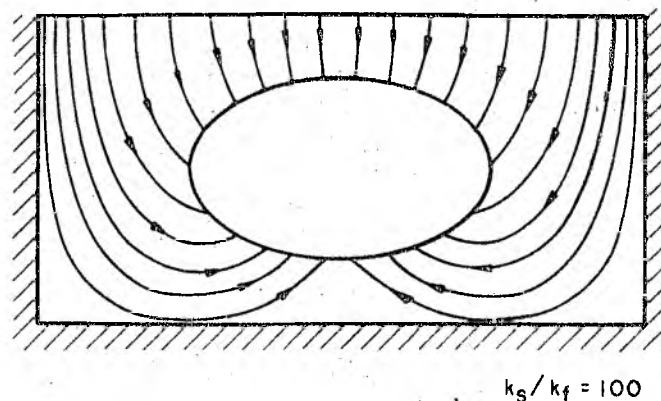


Figura 5.23

transmitido diretamente ao fluido, o calor que é fornecido ao contorno inferior da elipse terá que provir de pontos mais próximos dos cantos do retângulo. De acordo com a figura 5.18b, o calor transmitido ao fluido pela superfície inferior da elipse, é praticamente igual ao calor transmitido ao fluido pela superfície superior da elipse. Este fato vem reforçar a justificativa dada no parágrafo anterior.

Nas figuras 5.24, 5.25 e 5.26 podem ser vistos os campos de temperatura delineados por suas isotermas, para diferentes áreas de escoamento e sob as condições de temperatura e fluxo de calor prescritos na superfície superior do retângulo. Todos os campos foram obtidos para uma pequena relação  $k_s/k_f$ .

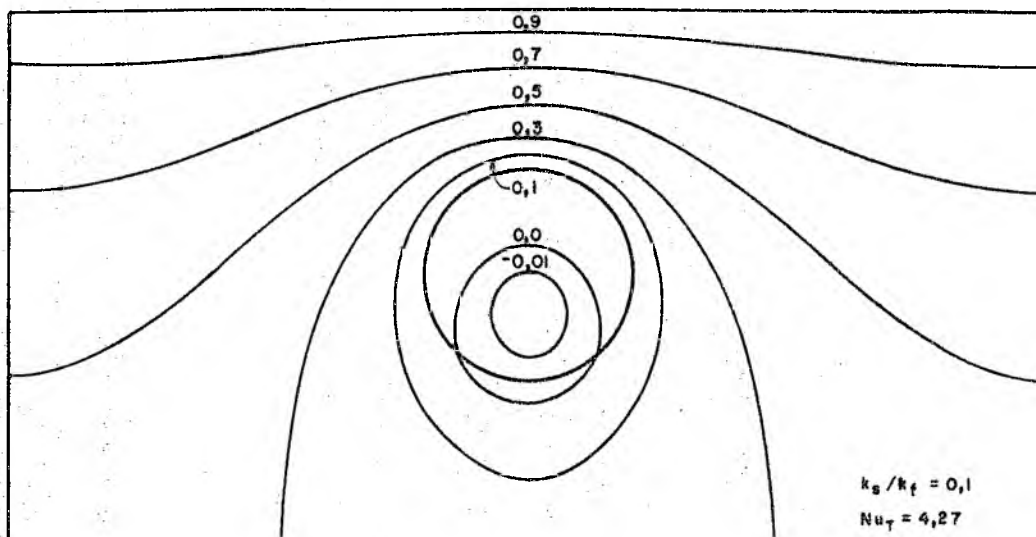
Conforme já foi observado, para aplicações técnicas é conveniente que se analise o desempenho obtido na transferência de calor do sólido para o fluido, em função do número de Nusselt:

$$Nu = \frac{h D_h}{k_f} \quad (2.7)$$

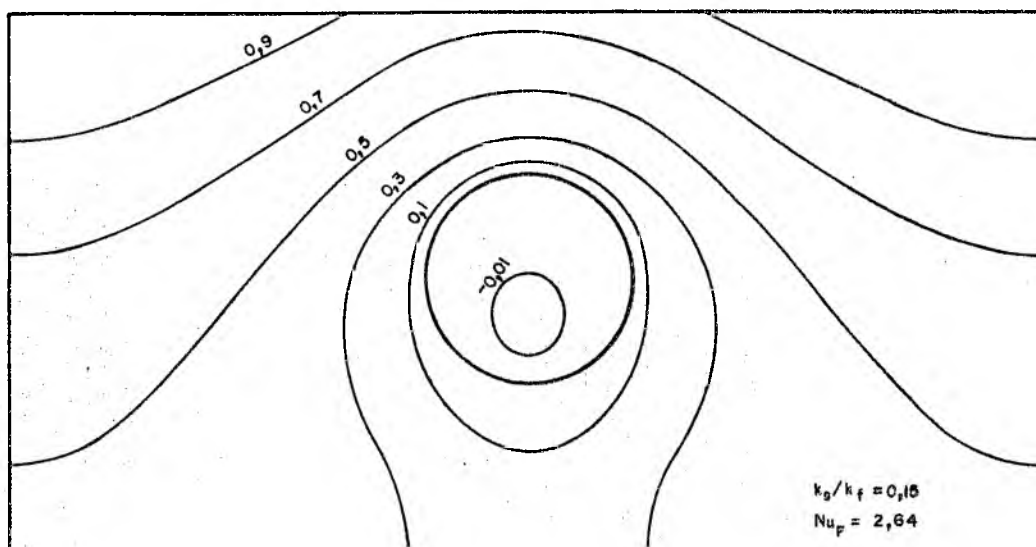
Como,

$$h = \frac{q}{(\bar{T}_s - T_b)} \quad (2.4)$$

$$D_h = \frac{4 A(D_2)}{L(\partial D_2)} \quad (2.8)$$

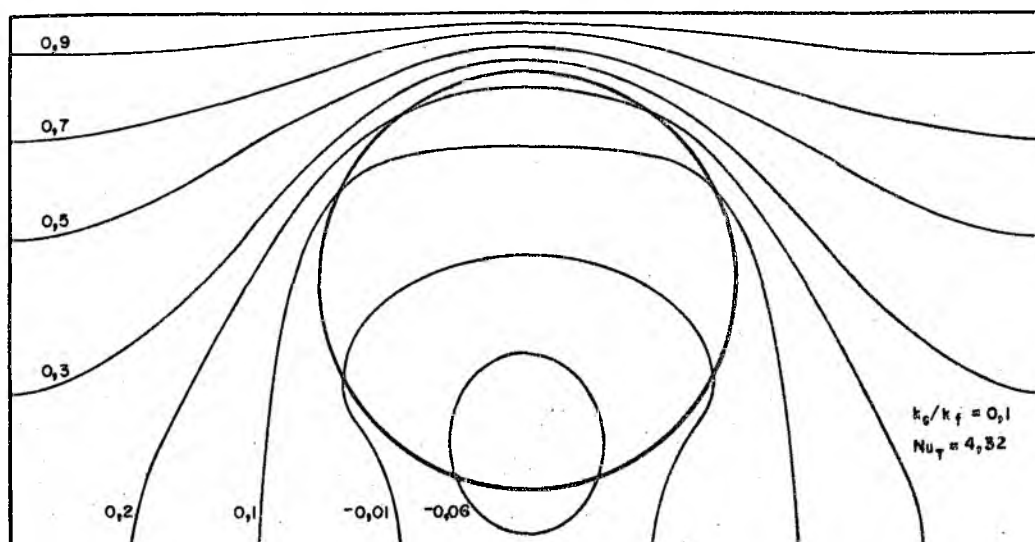


a) Condição de temperatura prescrita

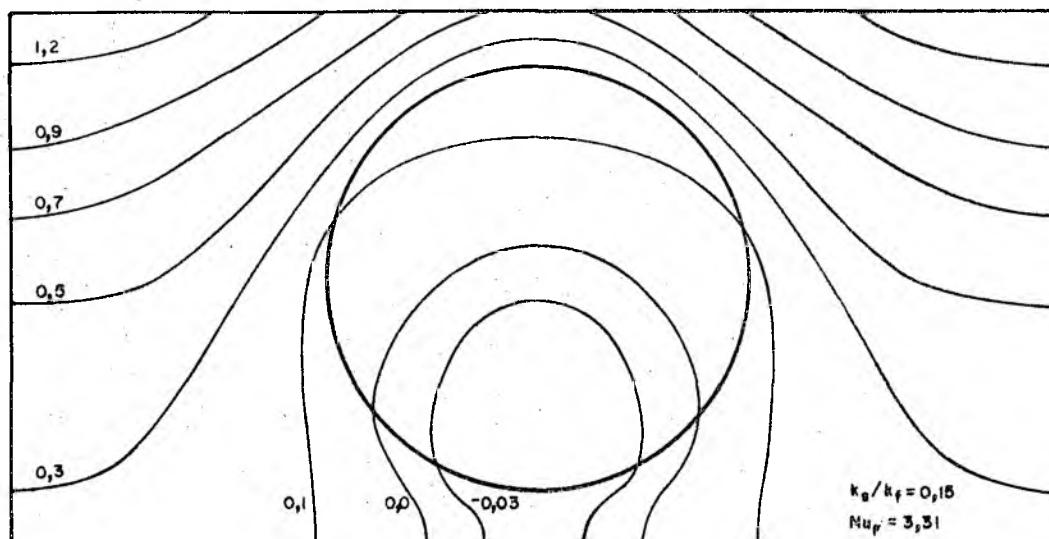


b) Condição de fluxo de calor prescrito.

Fig. 5.24 - Isotermas do retângulo, e do duto com secção circular  
 $a = 5,0$ ,  $b = 2,5$  e  $c = 2,0$ .

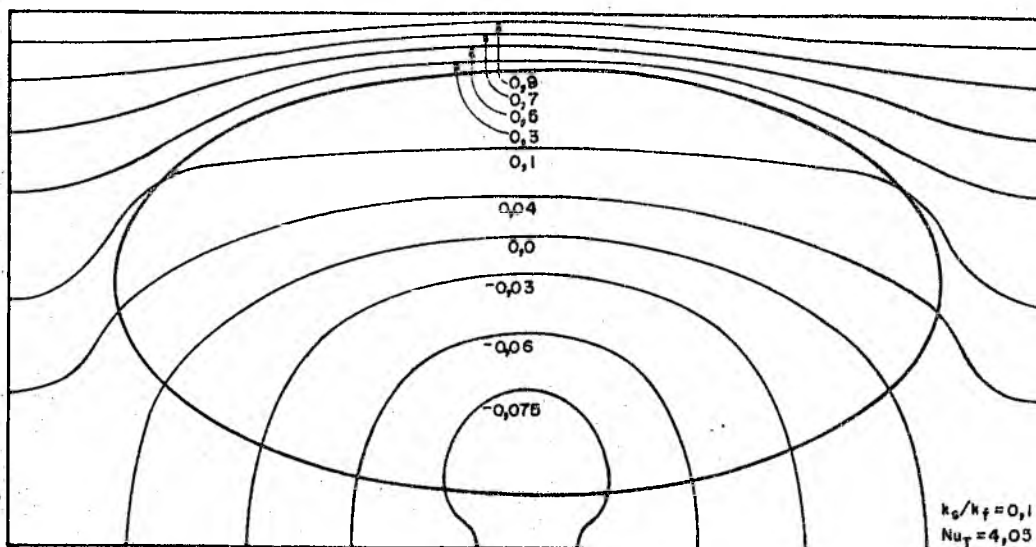


a) Condição de temperatura prescrita

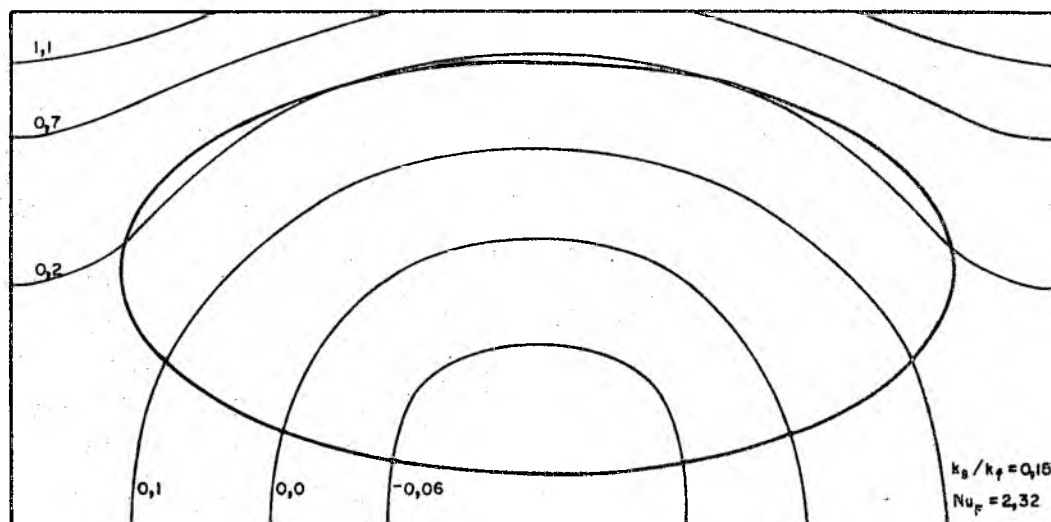


b) Condição de fluxo de calor prescrito

Fig. 5.25 - Isothermas do retângulo, e do duto com secção circular  
 $a = 2,5$ ,  $b = 1,25$  e  $c = 2,0$ .



a) Condição de temperatura prescrita



b) Condição de fluxo de calor prescrito

Fig. 5.26 - Isothermas do retângulo, e do duto com secção elíptica;  $a = 1,25$ ,  $b = 1,25$  e  $c = 2,0$ .

e de (3.29),

$$q = - \frac{u_m(D_2) A(D_2) k_f}{L(\partial D_2)} \quad (5.15)$$

o número de Nusselt pode ser calculado de acordo com a expressão dada a seguir:

$$Nu = \frac{u_m(D_2) D_h^2}{4(T_b - \bar{T}_s)} \quad (5.16)$$

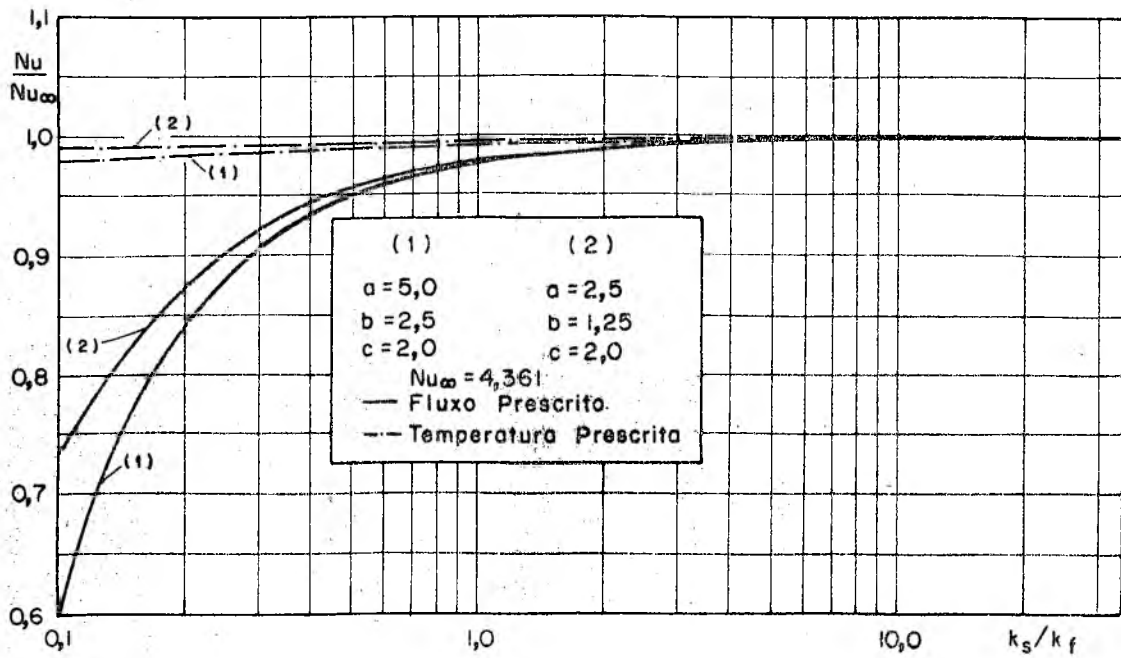
Para o problema em questão, o número de Nusselt é função de cinco fatores:

- condição de contorno na superfície superior do retângulo (temperatura ou fluxo prescritos).
- relação entre as condutibilidades térmicas do sólido e do fluido ( $k_s/k_f$ ).
- relação de aspecto da elipse (BE/AE)
- relação de aspecto do retângulo (B/A)
- relação entre a área de escoamento e as dimensões do retângulo (A/AE ou B/AE).

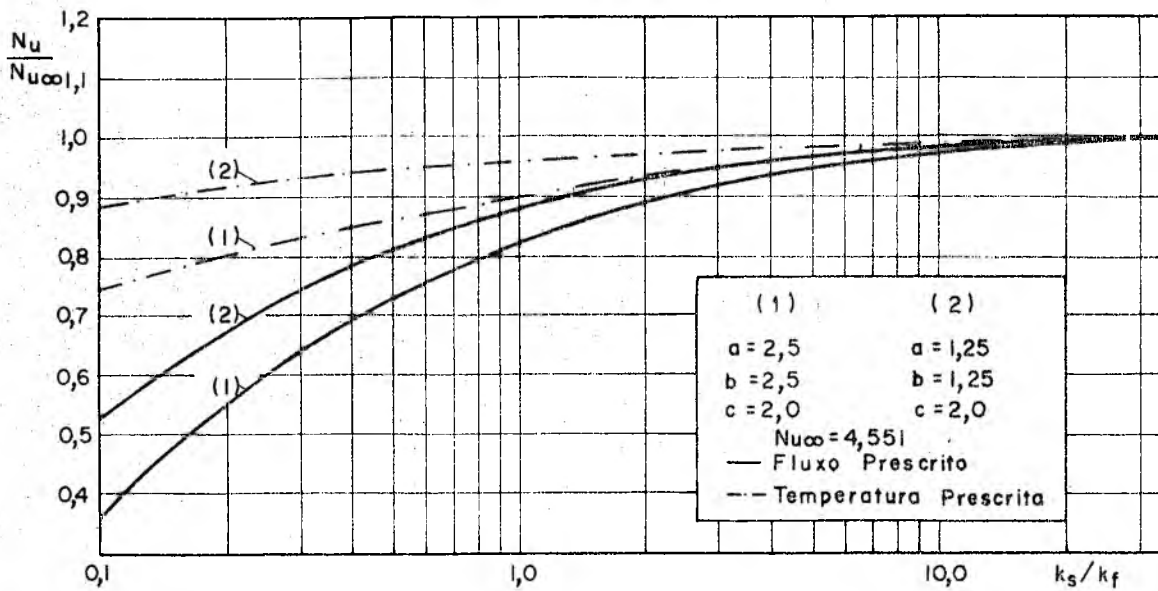
Na figura 5.27 é mostrada a influência das condutibilidades térmicas no número de Nusselt, para as condições de fluxo e temperatura prescritos. Com uma mesma relação  $k_s/k_f$ , o número de Nusselt sob a condição de temperatura prescrita é sempre maior que o número de Nusselt para fluxo prescrita. A razão é que quando se impõe uma temperatura constante na superfície aquecida, o fluxo de calor se concentra nas áreas de maior velocidade do escoamento. Para fluxo prescrita a temperatura do fluido na região de estagnação fica bastante elevada, aumentando a temperatura de mistura o que faz com que o número de Nusselt decresça. Este efeito tende a desaparecer quando a condutibilidade térmica do sólido aumenta.

Para uma relação  $k_s/k_f$  elevada, o número de Nusselt do





a) Duto com secção circular



b) Duto com secção elíptica

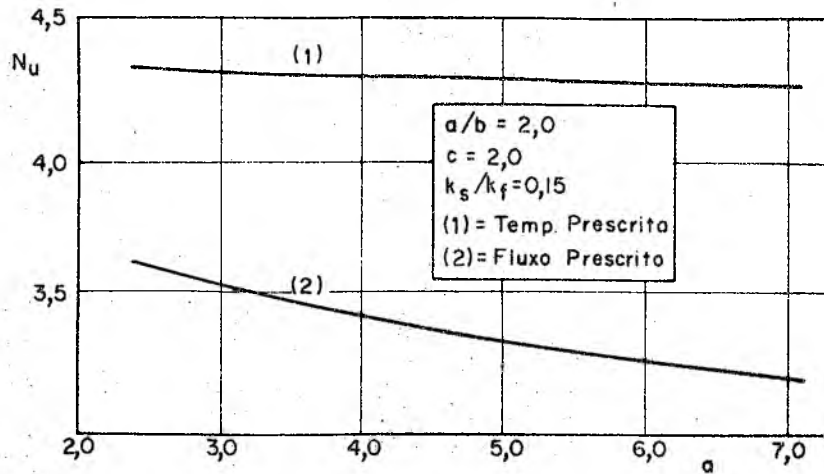
Fig. 5.27 - Influência das condutibilidades térmicas no número de Nusselt.

círculo calculado pelo método integral foi 4,361, que é 0,07% menor que o valor encontrado na literatura. Para o duto com secção elíptica, o número de Nusselt foi de 4,551, que difere de 0,15% do valor obtido analiticamente por Tao [3].

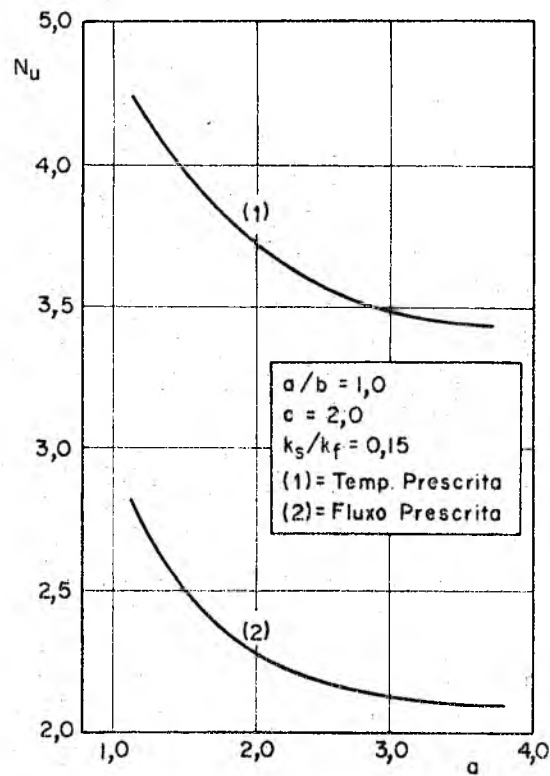
O número de Nusselt sob a condição de temperatura prescrita, varia bem menos com a condutibilidade térmica que o número de Nusselt para fluxo prescrito. Quando se impõe uma temperatura constante na superfície aquecida e se reduz a condutibilidade térmica do sólido, aumenta-se o fluxo de calor no contorno superior da região de escoamento do fluido, fazendo com que a variação do número de Nusselt não seja tão acentuada. Este efeito é menor no duto elíptico em virtude da região de estagnação.

Na figura 5.28 é mostrada a variação do número de Nusselt com a área de escoamento. Aumentando-se a área, aumenta-se o número de Nusselt como era de se esperar.

Já foi observado que para a elipse, quando a condutibilidade térmica do sólido é baixa, o fluxo de calor na região de estagnação pode até sair do fluido e ir para o sólido, em virtude das altas temperaturas nesta região. Este efeito prejudica a transmissão de calor para o fluido, e faz com que o número de Nusselt do duto com secção elíptica seja menor que o do duto com secção circular para baixas relações  $k_s/k_f$ . Uma comparação entre as figuras 5.28a e 5.28b corrobora a afirmação anterior.



a) Duto com secção circular,  $a/b = 2,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$



b) Duto com secção elíptica,  $a/b = 1,0$  e  $k_s/k_f = 0,15$

Fig. 5.28 - Influência da área de escoamento no número de Nusselt

## 6. CONCLUSÃO

O método de solução por equações integrais mostrou ser uma ferramenta eficaz na análise da transferência de calor em escoamentos laminares em dutos com secção transversal arbitrária, considerando-se os efeitos de condução e convecção combinados. As equações integrais desenvolvidas no capítulo 3, podem ser aplicadas a inúmeras situações em engenharia e a formulação do problema foi proposta de modo a manter a generalidade do método. Em virtude de haver sido considerado os efeitos de geração interna de calor, o esquema numérico aqui proposto pode ser utilizado inclusive no estudo da transferência de calor em reatores nucleares.

A aplicação do método integral a esta classe de problemas foi sugerida em [14], quando se analisou o desempenho ótimo de um duplo-tubo aletado para a transferência de calor em regime laminar. Nesse trabalho foi observado que a condução de calor nas aletas influencia no número de Nusselt, e este efeito deve ser considerado. O presente esquema aborda aquela sugestão, com até mais generalidade.

A solução numérica das equações diferenciais harmônica, bi-harmônica e de Poisson pelo método integral, permite que se façam algumas observações relevantes:

- a. O esquema numérico utilizado converge satisfatoriamente no sentido pontual, a exemplo de trabalhos anteriores (ver [8], [12], [13], [15] e [16]). Os parâmetros físicos definidos por integrações na fronteira, tais como velocidade média e fluxo médio, convergem uniformemente.
- b. Uma vez tendo construído as equações integrais para uma dada geometria, as condições de contorno do problema físico podem variar e o núcleo das equações integrais permanece fixo.
- c. Como todas as integrais de área que aparecem na construção das equações integrais podem ser transformadas em integrais de linha, basta que se conheça a geometria dos contornos e as condições nas fronteiras para que o problema seja solucionado. O fa

to da dimensão do problema se reduzir à dimensão do contorno da região em estudo, é uma das principais vantagens do método integral.

- d. O método integral utilizando a função de Green fundamental passa a ser extremamente poderoso no estudo de geometrias complexas que se figuram em regiões de Liapunov ou aproximações de regiões regulares segundo Kellog, permitindo que tal método seja aplicado em diversos ramos da teoria do potencial e elastostática.
- e. No cálculo das distribuições de temperatura e velocidade para pontos no interior das regiões em estudo, a precisão do método integral é prejudicada à medida que estes pontos se aproximam dos contornos destas regiões. Estas imprecisões se devem à ocorrência de singularidades na função de Green e sua derivada normal. Embora um método de interpolação adequado possa ser usado para contornar este problema, em Engenharia os parâmetros fisicamente relevantes são calculados como uma média sobre todos os pontos no contorno. Exemplo destes parâmetros são a velocidade média, a temperatura de mistura e o número de Nusselt.
- f. A aproximação das funções desconhecidas nos contornos (derivada normal da velocidade, fluxo de calor e temperatura) por funções degrau bem como a aplicação das equações integrais a um número finito de pontos, constituem as principais causas das imprecisões que surgem na utilização do esquema numérico apresentado. Embora estas imprecisões possam ser reduzidas com um refinamento da discretização, um número de equações muito grande resulta em um tempo excessivo de computação. As imprecisões advindas da resolução do sistema linear de equações integrais, podem ser negligenciadas quando comparadas com as imprecisões citadas anteriormente.

A aplicação do esquema proposto na solução do problema apresentado na figura 5.1, onde se deseja fornecer calor a um fluido que escoar no interior de um duto embutido em um sólido de condutibilidade térmica  $k_s$ , forneceu uma série de informações acerca do desempenho obtido na transferência de calor para a re-

gião de escoamento, conforme discutido no item 5.2. O duto com secção circular mostrou ser mais eficiente que o duto com secção elíptica, para pequenas relações de  $k_s/k_f$ . Independente de haver temperatura ou fluxo de calor prescrito na superfície aquecida, obteve-se o mesmo número de Nusselt para altas condutibilidades térmicas do sólido.

No presente trabalho, como não se considerou a condução axial nem no sólido nem no líquido, o esquema proposto se aplica principalmente a problemas de engenharia onde o sólido possui uma condutibilidade térmica pequena comparada com a condutibilidade térmica do líquido. Nestes problemas a condução axial no sólido pode ser desprezada, e no líquido o efeito da convecção se sobrepõe ao efeito da condução axial.

Embora as condições de contorno tenham sido analisadas somente para os casos de temperatura ou fluxo de calor constantes na superfície aquecida, em aplicações reais pode-se não ter tais situações. Estas duas condições no entanto são os dois casos limites encontrados em engenharia.

O estudo aqui desenvolvido ficou limitado à transferência de calor estacionária com condições de contorno lineares, e propriedades isotrópicas. A extensão do método a casos mais gerais, tais como transferência de calor não estacionária, propriedades anisotrópicas e condições de contorno não lineares, pode ser feita sem necessitar de grandes alterações na formulação proposta.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] - Shah, R.K. - Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry. Int. J. Heat & Mass Transfer, 18: 849-862, 1975.
- [2] - Singh, S.N. - Heat transfer by laminar flow in a cylindrical tube. Appl. Sci. Res., A7: 325-340, 1958.
- [3] - Tao, L.N. - On some laminar forced-convection problems. J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 83: 466-472, 1961.
- [4] - Tao, L.N. - The second fundamental problem in heat transfer of laminar forced convection. J. Appl. Mechanics, Trans. ASME "E", 84: 415-420, 1962.
- [5] - Tolubinskiy, E.V. - An integral method of solution of the general heat and mass transfer problem. Int. J. Heat & Mass Transfer, 9: 1471-1488, 1966.
- [6] - Crosbie, A.L.; Viskanta, R. - Transient heating or cooling of a plate by combined convection and radiation. Int. J. Heat & Mass Transfer, 11: 305-317, 1968.
- [7] - Shaw, R.P. - An integral equation approach to diffusion. Int. J. Heat & Mass Transfer, 17: 693-699, 1974.
- [8] - Chang, Y.P.; Kang, C.S.; Chen, D.J. - The use of fundamental Green's function for the solution of problem of heat transfer in anisotropic media. Int. J. Heat & Mass Transfer, 16: 1905-1918, 1973.
- [9] - Chang, Y.P.; Tsou, R.C.H. - Heat conduction in an anisotropic medium homogeneous in cylindrical regions - Unsteady state. J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 99: 41-46, 1977.

- [10] - Chang, Y.P.; Tsou, R.C.H. - Heat conduction in an anisotropic medium homogeneous in cylindrical regions - Steady state. J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 99: 132-134, 1977.
- [11] - Chang, Y.P. - Analytical solution for heat conduction in anisotropic media in infinite, semi-infinite and two-plane-bounded regions. Int. J. Heat & Mass Transfer. 20: 1019-1028, 1977.
- [12] - Gonzalez, M.L. - Um esquema integral para a determinação do transiente de temperatura de peças cilíndricas com condução, convecção e radiação combinadas. Dissertação de Mestrado, CT-UFSC, 1978.
- [13] - Abreu, R.C. - Aplicação de equações integrais à transferência de calor por radiação, condução e convecção combinadas entre sólidos de geometria arbitrária. Dissertação de Mestrado, CT-UFSC, 1979.
- [14] - Colle, S. - Uma previsão para o desempenho ótimo de um duplo-tubo aletado para a transferência de calor em regime laminar. Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, 1976.
- [15] - Colle, S. - Perda de carga no escoamento laminar em dutos de secção transversal de geometria multiplamente conexa. Anais do COBEM/79, Vol. A, pp. 350-359, 1979.
- [16] - Colle, S., Aplicação do método de equações integrais ao problema de transferência de calor em regime laminar em dutos de secção transversal de geometria arbitrária. (A ser publicado como relatório interno), Centro Tecnológico/UFSC, 1980.
- [17] - Mori, S.; Sakakibara, M.; Tanimoto, A. - Steady heat transfer to laminar flow in a circular tube with conduction in the tube wall. Chem. Engng., 38(2): 37-46, 1974.



- [18] - Schenk, J.; Han, B.S. - Heat transfer from laminar flow in ducts with elliptic cross-section. Appl. Sci. Res., 17: 96-114, 1959.
- [19] - Dennis, S.C.R.; Mercer, A.McD.; Poots, G. - Forced heat convection in laminar flow through rectangular ducts. Quart. Appl. Mech., 17: 285-297, 1959.
- [20] - Dunwoody, N.T. - Thermal results for forced heat convection through elliptical ducts. J. Appl. Mechanics, 29: 165-170, 1962.
- [21] - Sparrow, E.M.; Haji-Sheikh, A.; Lundgreen, T.S. - The inverse problem in transient heat conduction. J. Appl. Mechanics, 31: 369-375, 1964.
- [22] - Sparrow, E.M.; Haji-Sheikh, A. - Flow and heat transfer in ducts of arbitrary shape with arbitrary thermal boundary conditions. J. Heat Transfer, Trans. ASME, 351-358, 1966.
- [23] - Eckert, E.R.G.; Irwine Jr., T.F.; Yen, J.T. - Local laminar heat transfer in wedge-shaped passages. Trans. ASME, 80: 1433-1438, 1958.
- [24] - Siegel, R.; Sparrow, E.M.; Hallman, T.M. - Steady laminar heat transfer in a circular tube with a prescribed wall heat flux. Appl. Sci. Res., A7: 386-392, 1958.
- [25] - Leay, R.W.; Barrow, H., Theoretical analysis of forced laminar convection heat transfer in the entrance region of an elliptical tube, Int. J. Heat & Mass Transfer, 16: 1501-1503, 1973.
- [26] - Luikov, A.V.; Aleksashenko, V.A.; Aleksashenko, A.A. - Analytical methods of solutions of congregated problems in convective heat transfer. Int. J. Heat & Mass Transfer, 14: 1047-1056, 1971.

- [27] - Poatier, J.J.; Arnas, O.A. - Analytical study of unsteady heat conductions in composite regions. 3rd International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, London, 1-5 September, 1975.
- [28] - Maliska, C.R. - Estudo dinâmico e térmico do escoamento laminar em um duplo tubo aletado. Dissertação de Mestrado, CT-UFSC, 1975.
- [29] - Jakob, M. - Heat transfer, Vol. I, John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [30] - McAdams, W.H. - Heat transmission, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1954.
- [31] - Kellogg, O.D. - Foundations of potential theory. Dover Publications Inc. New York, 1953.
- [32] - Bird, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, F.N. - Transport phenomena, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [33] - Stakgold, I. - Boundary value problems of mathematical physics, Vol. I, Macmillan, London, 1972.
- [34] - Stakgold, I. - Boundary value problems of mathematical physics. Vol. II, Macmillan, London, 1972.
- [35] - Silva, A.F.C. - Influência da espessura da aleta na convecção forçada em um duplo-tubo aletado internamente - solução pelo método de Golub. Dissertação de Mestrado, CT-UFSC, 1978.
- [36] - Jaswon, M.A.; Symm, G.T. - Integration equation methods in potential theory and elastostatic. Academic Press, London, 1977.
- [37] - Rohsenow, W.M.; Hartnett, J.P. - Handbook of heat transfer McGraw-Hill, New York, 1973.
- [38] - Kaplan, W. - Advanced Calculus. Addison Wesley, Massachusetts, 1971.

- |39| - Courant, R.; Hilbert, D. - Methods of mathematical physics. Vol. I, Interscience Publishers, New York, 1953.
- |40| - Kays, W.M. - Convective heat transfer, McGraw-Hill, New York, 1966.
- |41| - Bakhvalov, N.S. - Numerical methods. Mir Publishers Moscow, 1977.
- |42| - Sobolev, S.L. - Partial differential equations of mathematical physics. Pergamon Press, Oxford, 1964.
- |43| - Sneddon, I. - Elements of partial differential equations. McGraw-Hill, New York, 1957.
- |44| - ASHRAE - Handbook and Product Directory, Applications. New York, 1974
- |45| - ASHRAE - Handbook and Product Directory, Applications. New York, 1977.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A

## PROBLEMAS A VALORES NOS CONTORNOS ASSOCIADOS À EQUAÇÃO DE LAPLACE

Por definição, um problema a valores nos contornos consiste de uma equação diferencial, ordinária ou parcial, com condições iniciais ou de fronteiras associadas ao problema.

Seja  $D$  uma região normal do  $R^n$ , isto é, uma região aberta e simplesmente conexa no sentido de Liapunov [42] e seja  $\partial D$  a fronteira de  $D$ . Seja  $\bar{D} = D + \partial D$  o fecho de  $D$ , e  $f : \bar{D} \rightarrow R$  contínua em  $\bar{D}$ .

Existem três problemas básicos a valores nos contornos, associados à equação de Laplace:

## i. Problema de Dirichlet

$$-\nabla^2 u = 0 \quad ; \quad x \in D \quad (A.1)$$

$$u|_{\partial D} = h(x) \quad ; \quad h \text{ contínua em } \partial D \quad (A.2)$$

## ii. Problema de Neumann

$$-\nabla^2 u = 0 \quad ; \quad x \in D \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = \nabla u \cdot \underline{n}|_{\partial D} = r(x); \quad r \text{ contínua em } \partial D \quad (A.4)$$

com a condição de consistência,

$$\int_{\partial D} r(x) \, ds = 0 \quad (A.5)$$

## iii. Problema de Caráter Misto

$$-\nabla^2 u = 0 \quad ; \quad x \in D \quad (A.6)$$

$$u|_{\partial D_i} = h_i(x); \quad h_i \text{ cont\u00ednua em } \partial D_i \quad (A.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}|_{\partial D_j} = r_j(x); \quad i \neq j, \quad r_j \text{ cont\u00ednua em } \partial D_j \quad (A.8)$$

$$\partial D = \sum_{i=1}^N \partial D_i$$

onde  $\partial D$  \u00e9 composta por  $N$  superf\u00edcies disjuntas duas a duas para  $i \neq j$ .

A fun\u00e7\u00e3o  $u$  nos tr\u00eas problemas propostos anteriormente deve ter derivadas parciais de segunda ordem cont\u00ednuas em  $\bar{D}$ .

As solu\u00e7\u00f5es destes problemas a valores de contorno existem e s\u00e3o \u00fanicas, exceto para o problema (A.3) e (A.4), cuja solu\u00e7\u00e3o \u00e9 \u00fanica a menos de uma constante arbitr\u00e1ria.

Para uma discuss\u00e3o detalhada sobre a natureza desses problemas, ver [39] e [42].

## APÊNDICE B

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS ASSOCIADAS AOS OPERADORES  
LAPLACEANO E BI-HARMÔNICO

## B.1 - Operador Laplaceano

A solução fundamental associada ao operador Laplaceano é denominada função de Green fundamental e satisfaz a equação:

$$-\nabla^2 g(z, z') = \delta(z - z'), \text{ em } D \quad (\text{B.1})$$

onde  $D$  é uma região normal do  $\mathbb{R}^n$ , e  $\delta(z, z')$  é a função "Delta de Dirac" ou Distribuição Singular, definida pelas condições:

$$\text{i. } \delta(z - z') = 0, \text{ para todo } z \neq z' \text{ em } D \quad (\text{B.2})$$

$$\text{ii. } \int_D \delta(z - z') f(z) dA(z) = f(z') \quad (\text{B.3})$$

onde  $f(z)$  é contínua em  $D$ .

A função de Green apresenta algumas propriedades básicas que são usadas para isolar polos, ou seja, determinar as singularidades que surgem quando  $z'$  tende a  $z$ . Seja  $\epsilon$  o raio de um pequeno círculo, envolvendo o ponto  $z$  na região  $D$ , e seja  $\partial D_\epsilon$  o contorno deste círculo, com  $z' \in \partial D_\epsilon$ :

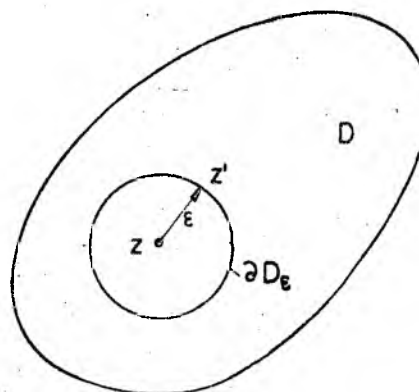


Figura B.1

Pode-se mostrar que:

i. A função de Green é simétrica, isto é

$$g(z, z') = g(z', z) \quad (\text{B.4})$$

$$\text{ii. } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} g(z, z') ds(z') = 0 \quad z' \in \partial D_\epsilon \quad (\text{B.5})$$

$$\text{iii. } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} g(z, z') ds(z') = -1 \quad z' \in \partial D_\epsilon \quad (\text{B.6})$$

Se o polo surge quando  $z \in \partial D$ , este pode ser isolado traçando-se um pequeno semi-círculo de raio  $\epsilon$  e centro em  $z$ :

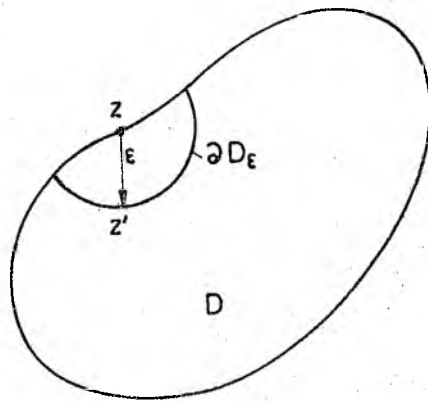


Figura B.2

Pode-se mostrar então que

$$\text{iv. } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} g(z, z') ds(z') = -1/2 \quad \begin{array}{l} z \in \partial D \\ z' \in \partial D_\epsilon \end{array} \quad (\text{B.7})$$

A função de Green fundamental para o espaço bi-dimensional é dada pela expressão:



$$g(z, z') = - \frac{1}{2\pi} \ln |z - z'| \quad (\text{B.8})$$

onde

$$z = (x, y) \quad \text{e} \quad |z - z'| = |(x - x')^2 + (y - y')^2|^{1/2}.$$

É fácil ver que esta função satisfaz a equação (B.5), bem como as propriedades (B.4), (B.5) e (B.7).

A derivada normal da função de Green pode ser calculada facilmente:

$$\frac{\partial g}{\partial n'}(z, z') = \nabla g(z, z') \cdot \underline{n}'$$

onde  $\underline{n}'$  é a normal à superfície  $\partial D$  no ponto  $z'$ .

Como

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x'} \underline{i} + \frac{\partial g}{\partial y'} \underline{j}$$

$$\text{e} \quad |z - z'| = |(x - x')^2 + (y - y')^2|^{1/2}$$

De (B.8) conclui-se que,

$$\frac{\partial g}{\partial x'} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x - x')}{|z - z'|^2}; \quad \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - y')}{|z - z'|^2}$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial g}{\partial n'} = \nabla g \cdot \underline{n}' = \frac{1}{2\pi} \frac{(z - z') \cdot \underline{n}'}{|z - z'|^2} \quad (\text{B.9})$$

É fácil ver que a derivada da função de Green satisfaz a propriedade (B.6) e (B.7).

Quando se usa a função de Green fundamental na construção de equações integrais, é interessante que a equação final possua somente integrais ao longo do contorno. Desta forma é preciso

que a integral da função de Green fundamental na região, seja reduzida a uma integral de linha.

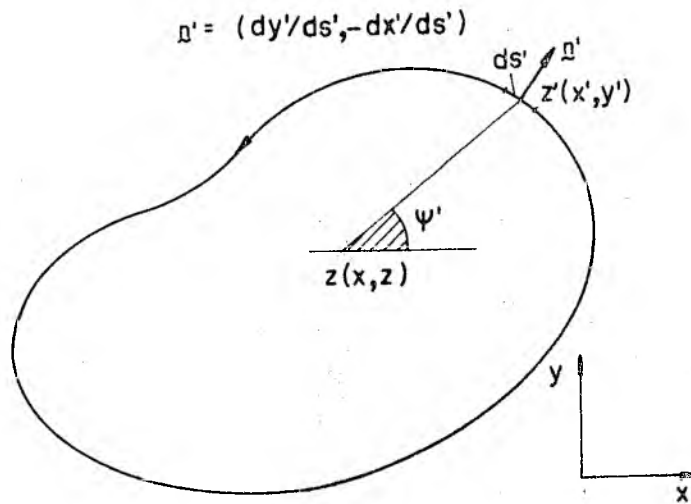


Figura B.3

De acordo com a figura B.3

$$\Psi' = \text{arctg} \left( \frac{y' - y}{x' - x} \right) \quad (\text{B.10})$$

Como

$$ds' = dx' \underline{i} + dy' \underline{j},$$

obtém-se

$$\frac{d\Psi'}{ds'} = \frac{\partial\Psi'}{\partial x'} \frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial\Psi'}{\partial y'} \frac{dy'}{ds'} \quad (\text{B.11})$$

onde, de acordo com (B.10),

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial x'} = - \frac{(y' - y)}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial y'} = \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \quad (\text{B.13})$$

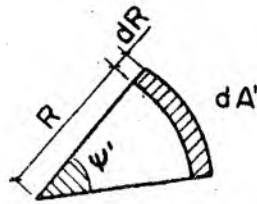
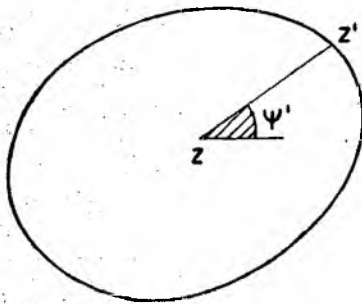
Substituindo (B.12) e (B.13) em (B.11) e agrupando,

$$\frac{d\psi'}{ds'} = \frac{(z' - z) \cdot \underline{n}'}{|z' - z|^2} \quad (\text{B.14})$$

onde

$$(z' - z) = (x' - x)\underline{i} + (y' - y)\underline{j}$$

Fixando agora um sistema de coordenadas polares em  $z$ , conforme a figura B.4,



$$\text{onde } R = |z' - z|$$

$$dA' = R d\psi' dR$$

Figura B.4

A integral a ser calculada se torna,

$$\int_D g(z, z') dA(z') = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\psi')} R \ln R dR d\psi'$$

onde  $R(\psi') = |z' - z|$ ,  $z' \in \partial D$

Resolvendo a primeira integral,

$$\int_D g(z, z') dA(z') = -\frac{1}{2\pi} \int_D \left( \ln R - \frac{1}{2} \right) \frac{R^2}{2} d\psi'$$

Usando a relação obtida em (B.14) e rearranjando os termos,

$$\int_D g(z, z') dA(z') = \frac{1}{2} \int_{\partial D} g(z, z') a(z, z') ds(z') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{a(z, z')}{2} ds(z') \quad (\text{B.15})$$

$$\text{onde } a(z, z') = (z' - z) \cdot \underline{n}' \quad (\text{B.16})$$

De acordo com o teorema de Gauss,

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} a(z, z') ds(z') \quad (\text{B.17})$$

Substituindo (B.17) em (B.15),

$$\int_D g(z, z') dA(z') = \frac{1}{2} \int_{\partial D} g(z, z') a(z, z') ds(z') + \frac{1}{4\pi} A(D) \quad (\text{B.18})$$

A equação (B.18) permite que se calcule a integral da função de Green fundamental na região  $R$ , através de integrais ao longo do contorno.

## B.2 - Operador Bi-harmônico

A solução fundamental associada ao operador bi-harmônico, satisfaz a equação:

$$-\nabla^4 G(z, z') = \delta(z - z') \quad \text{em } D \quad (\text{B.19})$$

onde  $D$  é uma região normal do  $R^n$  e  $\delta(z, z')$  é a função "Delta de Dirac".

Pode-se mostrar facilmente, que o Laplaceano da função  $G(z, z')$ , satisfaz as mesmas propriedades da solução fundamental do

operador Laplaceano. Admite-se então, que  $G(z, z')$  satisfaz à equação diferencial parcial:

$$\nabla^2 G(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z'| \quad (\text{B.20})$$

A função  $G(z, z')$  não é única, pois todas as soluções que diferem da solução fundamental por uma função  $v(z, z')$  tal que  $\nabla^4 v(z, z') = 0$ , são soluções da equação (B.19). Como  $\nabla^2$  e  $\nabla^4$  são operadores a coeficientes constantes, resulta que:

$$g(z, z') = g(z - z', 0) \quad (\text{B.21})$$

$$G(z, z') = G(z - z', 0)$$

Como foi admitido que  $G(z, z')$  satisfaz (B.20), a solução fundamental do operador bi-harmônico deverá ser calculada por integração direta. No ponto  $z'$  a equação adquire a seguinte forma:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial G}{\partial R} \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln R \quad (\text{B.22})$$

onde  $R = |z - z'|$ .

Integrando uma vez em relação a  $R$ ,

$$R \frac{\partial G}{\partial R} = -\frac{1}{2\pi} \frac{R^2}{2} \left( \ln R - \frac{1}{2} \right) + c_1 \quad (\text{B.23})$$

Como a primeira integral de (B.22) é interna em  $D$ , olhando para a figura B.1, resulta que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial \underline{n}'} (z, z') ds(z') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial R} (z, z') ds(z')$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \epsilon \frac{\partial G}{\partial R} (z, z') \Big|_{R=\epsilon} d\theta = 0$$

portanto  $c_1 = 0$ .

Integrando novamente a equação (B.23),

$$G(z - z', 0) = G(r, 0) = - \frac{1}{4\pi} \frac{R^2}{2} (\ln R - 1) + c_2 \quad (\text{B.24})$$

onde  $c_2$  é uma constante arbitrária.

Seja  $c_2$  tal que  $G(0, 0) = 0$ , então:

$$G(r, 0) = G(z - z', 0) = G(z, z') = - \frac{1}{8\pi} |z - z'|^2 (\ln |z - z'| - 1) \quad \dots (\text{B.25})$$

A equação (B.25) fornece a expressão para a solução fundamental do operador bi-harmônico.

Quando se utiliza a solução fundamental do operador bi-harmônico na construção de equações integrais, é interessante que a equação final possua somente integrais ao longo do contorno. Assim sendo, do mesmo modo como foi feito para a função de Green fundamental, é necessário que a integral de  $G(z, z')$  ao longo da região em estudo, seja reduzida a uma integral de linha.

De acordo com as figuras (B.3) e (B.4) e fazendo-se uso da equação (B.25), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_D G(z, z') dA(z') &= - \frac{1}{8\pi} \int_D R (\ln R - 1) R dR d\psi' \\ &= - \frac{1}{8\pi} \int_0^2 \int_0^{R(\psi')} R^3 (\ln R - 1) dR d\psi' \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

onde  $R(\psi') = |z' - z|$ ,  $z' \in \partial D$ .

Resolvendo a primeira integral,

$$\int_D G(z, z') dA(z') = - \frac{1}{32\pi} \int_{\partial D} R^4 \left( \ln R - \frac{5}{4} \right) d\Psi' \quad (\text{B.27})$$

Substituindo a relação (B.14) na equação (B.27), resulta .

$$\int_D G(z, z') dA(z') = - \frac{1}{32\pi} \int_{\partial D} |z - z'|^2 \left( \ln |z - z'| - \frac{5}{4} \right) (z' - z) \cdot \underline{n}' ds(z') \quad (\text{B.28})$$

A equação (B.28) permite que se calcule a integral de  $G(z, z')$  na região  $D$ , usando somente integrais ao longo do contorno  $\partial D$ .

Uma outra forma de se escrever a equação (B.28), seria:

$$\int_D G(z, z') dA(z') = \frac{1}{16} \int_{\partial D} \left[ g(z, z') + \frac{5}{8\pi} \right] a(z, z') |z - z'|^2 ds(z') \quad \dots (\text{B.29})$$

onde  $a(z, z') = (z' - z) \cdot \underline{n}'$ .

## APÊNDICE C

## TRATAMENTO DAS SINGULARIDADES

A função de Green fundamental para o espaço bi-dimencional é dada pela expressão:

$$g(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z'| \quad (\text{B.8})$$

Na integração da função acima sobre um certo contorno, surgirão singularidades quando  $z'$  tender a  $z$ . Estas singularidades devem ser contornadas a fim de que a integral possa ser obtida.

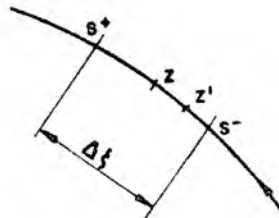


Figura C.1

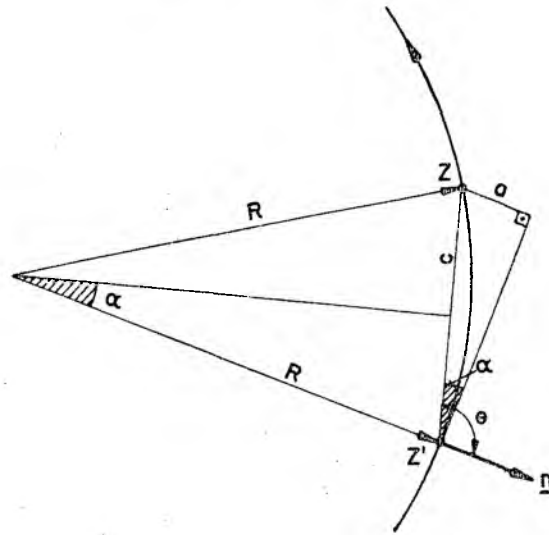
Quando  $z'$  tende a  $z$ , pode-se definir um arco finito, tal que  $|z - z'| = s$ . Desta forma integra-se  $g(z, z')$  na vizinhança do polo:

$$\int_{s^-}^{s^+} -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z'| ds(z') = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\xi} \ln s ds = -\frac{\Delta\xi}{\pi} (\ln \Delta\xi - 1) \quad (\text{C.1})$$

Ao se fazer a integração da derivada normal da função de Green fundamental sobre um certo contorno, novamente surgirão singularidades quando  $z'$  tender a  $z$ . Neste caso, pode-se calcular um limite.

Quando  $z'$  tende a  $z$ , pode-se dizer que,





$$\alpha = (\Psi - \Psi')/2$$

$$c = |z - z'|$$

Figura C.2

$$|z - z'| = ds = \frac{ds}{d\Psi'} (\Psi - \Psi') = R(\Psi - \Psi') \quad (\text{C.2})$$

De acordo com a figura C.2,

$$\begin{aligned} (z - z') \cdot \underline{n}' &= |z - z'| |\underline{n}'| \cos (z - z', \underline{n}') \\ &= c \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Mas,

$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{2R} = \frac{a}{c} \quad (\text{C.4})$$

$$\text{e } \cos \theta = -\frac{a}{c} \quad (\text{C.5})$$

Juntando (C.3), (C.4) e (C.5),

$$(z - z') \cdot \underline{n}' = -\frac{c^2}{2R} \quad (\text{C.6})$$

Como

$$\frac{\partial g}{\partial n'}(z, z') = \frac{1}{2\pi} \frac{(z - z') \cdot \underline{n}'}{|z - z'|^2} \quad (\text{B.9})$$

é fácil ver que:

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{\partial}{\partial n'} g(z, z') = - \frac{1}{4\pi} K(z') \quad (\text{C.7})$$

onde  $K(z')$  é a curvatura do contorno no ponto  $z'$ .

## APÊNDICE D

## CÁLCULO DA VELOCIDADE MÉDIA PARA REGIÕES MULTIPLAMENTE CONEXAS

A velocidade média em dutos de secção transversal arbitrária, é definida pela equação:

$$u_m(D) = \frac{1}{A(D)} \int_D u(z) dA(z) \quad z \in D \quad (3.12)$$

A equação integral que fornece a distribuição da velocidade em dutos de secção transversal arbitrária, é a seguinte:

$$u(z) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \ln |z - z'| a(z, z') ds(z') + \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[ \ln |z - z'| + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds(z') \quad (3.10)$$

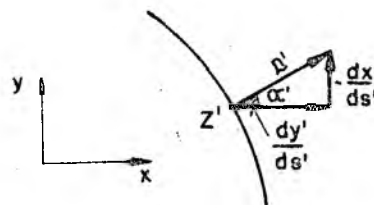
Substituindo a equação (3.10) na equação (3.13), duas integrais devem ser efetuadas:

$$I_1 = \int_D \int_{\partial D} \ln |z - z'| a(z, z') ds(z') dA(z) \quad (D.1)$$

$$I_2 = \int_D \int_{\partial D} \left[ \ln |z - z'| + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds(z') dA(z) \quad (D.2)$$

Como  $a(z, z') = (z' - z) \cdot \underline{n}'$ , de acordo com a figura D.1, pode-se afirmar que

$$a(z, z') = (x' - x) \text{sen } \alpha' - (y' - y) \text{cos } \alpha'$$



$$z' = (x', y')$$

Figura D.1

De acordo com a figura B.3,

$$\cos \Psi = \frac{(x' - x)}{|z - z'|} \quad (\text{D.3})$$

$$\text{sen } \Psi = \frac{(y' - y)}{|z - z'|} \quad (\text{D.4})$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} a(z, z') &= |z - z'| \cos \Psi \text{ sen } \alpha' - |z - z'| \text{ sen } \Psi \cos \alpha' \\ &= |z - z'| \text{ sen } (\alpha' - \Psi) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Substituindo a expressão (D.5) na equação (D.1), resulta:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_D \int_{\partial D} \ln |z - z'| a(z, z') ds(z') dA(z) \\ &= \int_D \int_{\partial D} \ln |z - z'| |z - z'| \text{ sen } (\alpha' - \Psi) ds(z') dA(z) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Conforme a figura B.4,

$$R = |z - z'|$$

$$dA(z) = R dR d\Psi$$

A integral  $I_1$ , pode então ser calculada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\partial D} \int_{\partial D} \int_0^{R(\Psi)} R^2 \ln R \operatorname{sen}(\alpha' - \Psi) dR d\Psi ds(z') \\
 &= \int_{\partial D} \int_{\partial D} \frac{R^3}{3} \left( \ln R - \frac{1}{3} \right) \operatorname{sen}(\alpha' - \Psi) d\Psi ds(z') \quad (D.7)
 \end{aligned}$$

Lembrando a equação (B.16), pode-se finalmente concluir que:

$$I_1 = \int_{\partial D} \int_{\partial D} \frac{(\ln |z - z'| - 1/3)}{3} a(z, z') z(z', z) ds(z) ds(z') \quad \dots(D.8)$$

Na redução da equação (D.2) a integrais de contornos, deve-se adotar o mesmo procedimento usado anteriormente. Logo,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_D \int_{\partial D} \left( \ln |z - z'| + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds(z') dA(z) \\
 &= \int_{\partial D} \left[ \int_{\partial D} \left( \ln |z - z'| + \frac{1}{2} \right) |z - z'| d|z - z'| d\Psi \right] \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds(z') \\
 &= \int_{\partial D} \int_{\partial D} \frac{|z - z'|^2 \ln |z - z'|}{2} d\Psi \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds(z') \\
 &= \int_{\partial D} \int_{\partial D} \frac{\ln |z - z'|}{2} \frac{\partial u}{\partial n}(z') a(z', z) ds(z) ds(z') \quad (D.9)
 \end{aligned}$$

Substituindo as equações (D.8) e (D.9) na equação que define a velocidade média do escoamento, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
u_m(D) = & - \frac{1}{4\pi A(D)} \int_{\partial D} \int_{\partial D} \left[ \frac{1}{3} (\ln |z - z'| - \frac{1}{3}) (z' - z) \cdot \underline{n}' + \right. \\
& \left. + \ln |z - z'| \frac{\partial u}{\partial n} (z') \right] (z - z') \cdot \underline{n}' ds(z) ds(z') \quad (D.10)
\end{aligned}$$

Esta expressão permite que se calcule a velocidade média em dutos de secção transversal arbitrária, efetuando-se as integrações ao longo dos contornos.

## APÊNDICE E

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM ESCOAMENTO LAMINAR NO INTERIOR DE UM DUTO DE SECÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR, SOB A CONDIÇÃO DE FLUXO PRESCRITO.

A solução analítica para este problema é facilmente obtida pela integração da equação da energia:

$$\nabla^2 T = -u \quad (2.20)$$

O perfil de velocidade para este escoamento é dado pela equação de Hagen-Poiseuille:

$$u = \frac{1}{4} (1 - r^2) \quad (E.1)$$

Escrevendo a equação da energia em coordenadas cilíndricas e substituindo o perfil de velocidade, obtêm-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{4} (r^2 - 1) \quad (E.2)$$

Integrando uma vez em relação ao raio, resulta:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{r^3}{16} - \frac{r}{8} + \frac{c_1}{r} \quad (E.3)$$

Como

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad c_1 = 0$$

Integrando a equação (E.3),

$$T = \frac{r^4}{64} - \frac{r^2}{16} + c_2 \quad (E.4)$$

De posse da distribuição de temperatura na região, pode-se calcular a temperatura de mistura pela equação dada a seguir:

$$T_b = \frac{1}{u_m(D) A(D)} \int_D T u \, dA \quad (2.1)$$

onde  $u_m(D)$  - velocidade média  
 $A(D)$  - área do círculo

Calculando a temperatura de mistura, resulta,

$$T_b = c_2 - 1,82292 \times 10^{-2}$$

Adotando-se um perfil invariante para a temperatura conforme a seguinte equação,

$$\theta = \frac{T - T_b}{T_F - T_b} \quad (E.5)$$

onde

$$T_F = T|_{r=R} = c_2 - 4,68750 \times 10^{-2}$$

Pode-se calcular a distribuição de temperatura no interior do duto através da seguinte equação:

$$\theta = -0,54545 r^4 + 2,18181 r^2 - 0,63636 \quad (E.6)$$

O Número de Nusselt definido conforme a equação (2.7), para a condição de fluxo de calor prescrito na fronteira, pode também ser obtido a partir dos parâmetros calculados anteriormente

$$Nu_F = 4,364$$



## APÊNDICE F

## SUPERFÍCIE DE LIAPUNOV E SUPERFÍCIE REGULAR SEGUNDO KELLOG (\*)

A superfície de Liapunov é uma superfície suave que possui um plano tangente e uma normal, mas não necessariamente uma curvatura, em cada ponto. Este fato implica na existência de coordenadas locais em cada ponto da superfície, eixo - z ao longo da normal, eixo - x e y no plano tangente, de tal forma que a porção de superfície nesta vizinhança obedece a equação  $Z = Z(x,y)$  onde as derivadas parciais  $Z_x$  e  $Z_y$ , mas não necessariamente  $Z_{xx}$ ,  $Z_{yy}$  e  $Z_{zz}$ , existem e são contínuas.

Se  $\underline{n}_p$  e  $\underline{n}_q$  são os vetores normais unitários nos pontos p e q de uma superfície de Liapunov, então

$$\cos^{-1}(\underline{n}_p \cdot \underline{n}_q) \leq D|p - q|^\nu \quad 0 < \nu \leq 1, \quad D > 0 \quad (\text{F.1})$$

Esta condição é remanescente da condição que caracteriza a continuidade de Hölder. Uma função  $f(x)$  satisfaz a condição de Hölder no intervalo  $a \leq x \leq b$ , simbolizada por  $f(x) \in H[a,b]$ , se

$$|f(x_2) - f(x_1)| < D|x_2 - x_1|^\nu \quad 0 < \nu \leq 1, \quad D > 0 \quad (\text{F.2})$$

para quaisquer dois pontos distintos  $x_2$  e  $x_1 \in [a,b]$ .

Shidfar (1977) provou que (F.1) vale para a superfície definida por  $Z = Z(x,y)$  se  $Z_x$  e  $Z_y$  forem Hölder contínuas sobre esta superfície. Simbolizando uma superfície de Liapunov por  $S\{\nu\}$ , e a continuidade de Hölder similarmente, o resultado obtido por Shidfar pode ser expresso da seguinte forma:

$$Z_x \in H\{\nu_1\} \text{ e } Z_y \in H\{\nu_2\} \quad Z(z,y) \in S\{\min(\nu_1, \nu_2)\} \quad (\text{F.3})$$

---

(\*) Este Apêndice foi parafraseado dos Apêndices 1 e 2 da Ref. [36]

A suavidade de uma superfície de Liapunov é mais forte que uma suavidade  $C^{(1)}$ . Como exemplo pode-se citar a superfície de finida por

$$z = \int_0^x (\ln t)^{-1} dt \quad 0 \leq x \leq 1/2 \quad (\text{F.4})$$

que tem uma suavidade  $C^{(1)}$  e não satisfaz a condição (F.1) para um valor arbitrário de  $\nu$ , pois  $Z_x$  não satisfaz a condição (F.2).

Do mesmo modo como na continuidade de Hölder,  $\nu = 1$  define a classe das superfícies de Liapunov mais restritas. Por exemplo,

$$(x^2 + y^2)^{3/4} \in S\{1/2\} \quad \text{mas} \notin S\{1\} \quad (\text{F.5})$$

Qualquer superfície caracterizada por uma suavidade  $C^{(2)}$ , exemplo, o elipsóide, pertence a  $S\{1\}$ , mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Como ilustração considere a superfície  $\partial B$  formada pelo fechamento de um cilindro circular finito por um hemisfério em cada extremidade. Obviamente  $\partial B$  tem um plano tangente e uma direção normal que varia continuamente; pode ser facilmente provado que  $\partial B \in S\{1\}$ , mas  $\partial B \notin C^{(2)}$  já que a curvatura tem um salto quando se passa do cilindro para o hemisfério.

A superfície de Liapunov é menos geral que a superfície regular de Kellog, que pode ter cantos e extremidades, desde que estes não sejam muito agudos. Um cubo é uma superfície regular de Kellog ao passo que um cone não é.