

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO DE ELEMENTO DE HASTE CURVA
PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

ANTÔNIO BENTO FILHO

JANEIRO 1980

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO DE ELEMENTO DE HASTE CURVA
PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

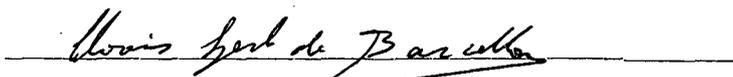
ANTÔNIO BENTO FILHO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO MECÂNICA
APLICADA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUA-
ÇÃO.



Prof. Arno Blass, Ph.D.

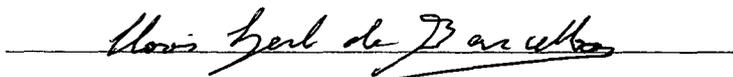
Coordenador



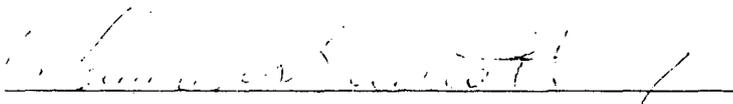
Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Orientador

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES:



Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.



Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.



Prof. Nelson Back, Ph.D.

À Lena e Marcelo

AGRADECIMENTOS

O autor, ao término do trabalho, deseja agradecer:

- Ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos, pela orientação;
- Ao companheiro Raul Guenther, pelo incentivo e companheirismo;
- Aos membros do GRANTE, pelas discussões e sugestões;
- Ao acadêmico Wilson Wronscki Ricardo pelo auxílio na elaboração dos programas;
- À UFSC, por tornar possível a realização do trabalho.

AGRADECIMENTO

Este trabalho foi realizado com a ajuda financeira da Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), do Conselho Nacional de Pesquisas e da FINEP com recursos do FNDCT, em cumprimento ao convênio firmado entre a CNEN e a Fundação do Ensino da Engenharia em Santa Catarina.

SUMÁRIO

Notação.....	i
Resumo.....	iii
Abstract.....	iv
Capítulo 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - Apresentação.....	1
1.2 - Definição do problema.....	1
1.3 - Análise bibliográfica.....	2
Capítulo 2 - ANÁLISE DE HASTES CURVAS E DEFINIÇÃO DO MODELO DE UM ELEMENTO	
2.1 - Introdução.....	4
2.2 - Relações deformações - deslocamentos nas hastes curvas.....	4
2.2.1 - Geometria diferencial das hastes curvas.....	4
2.2.2 - Relações deformações - deslocamentos.....	12
2.3 - O modelo do elemento de haste curva e suas relações deformações - deslocamentos.....	17
2.4 - Hipóteses simplificativas e as relações de deformações deslocamentos simplificadas.....	21
Capítulo 3 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE VIGA CURVA.....	24
3.1 - Introdução.....	24
3.2 - Grau de liberdade do elemento.....	24
3.2.1 - Formulação com 12 grau de liberdade.....	24
3.2.2 - Formulação com 16 graus de liberdade.....	26
3.3 - Deformações e tensões no elemento em termos dos deslocamentos nodais.....	27
3.3.1 - Matriz das funções de interpolação.....	27
3.3.2 - Campos de deformação e tensão no elemento em termos dos deslocamentos nodais.....	28
3.4 - Matriz de rigidez do elemento.....	30
3.4.1 - Energia potencial total do elemento.....	30

3.4.2 - Matriz de rigidez intrínseca do elemento em termos dos deslocamentos nodais.....	31
3.4.3 - Matrizes de tensões em termos dos deslocamentos nodais.....	32
3.5 - Processo computacional.....	33
Capítulo 4 - ANÁLISE DE RESULTADOS.....	34
4.1 - Introdução.....	34
4.2 - Modelos de interpolação dos deslocamentos..	34
4.2.1 - Modelo de interpolação I.....	35
4.2.2 - Modelo de interpolação II.....	35
4.2.3 - Modelo de interpolação III.....	35
4.2.4 - Modelo de interpolação IV.....	36
4.3 - Aplicações em vigas retas.....	36
4.4 - Aplicações em vigas curvas.....	41
Capítulo 5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	46
APÊNDICE.....	48
A1 - Vetores tangentes às linhas de coordenadas fora da linha de referência $(x_1, 0, 0)$	49
A1.1 - Configuração indeformada.....	49
A1.2 - Configuração deformada.....	51
A1.3 - Determinação das componentes \tilde{G}_i, \tilde{G}_j das relações de deformações - deslocamentos.....	52
A2 - Programa teste.....	56
A2.1 - Introdução.....	56
A2.2 - Descrição do programa teste.....	56
A2.2.1 - Leitura de dados do problema.....	56
A2.2.2 - Ciclo de integração.....	58
A2.2.3 - Solução do sistema.....	58
A3 - Deformações no elemento em termos dos deslocamentos nodais.....	59
A3.1 - Considerações sobre a hipótese $\epsilon_{23}=0$	59
A3.2 - Montagem da matriz das relações de deformações - deslocamentos nodais.....	61
A4 - Resultados de tensões.....	63
A4.1 - Introdução.....	63

A4.2 - Localização dos pontos onde são calculadas as tensões na viga longa.....	63
A4.3 - Localização dos pontos onde são calculadas as tensões na viga média.....	66
A4.4 - Localização dos pontos onde são calculadas as tensões na viga curta.....	68

NOTAÇÃO

$(F)_{,i}$	- Derivada parcial de F em relação a x_i .
x_1, x_2, x_3	- Linhas de coordenadas.
$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3; \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3$	- Vetores tangentes às linhas de coordenadas na configuração indeformada.
$\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3; \tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3$	- Vetores tangentes as linhas de coordenadas na configuração deformada.
\tilde{r}_0, \tilde{R}_0	- Vetor posição da linha de referência da haste.
\tilde{r}, \tilde{R}	- Vetor posição de um ponto da haste nas configurações indeformada e deformada, respectivamente.
\tilde{V}	- Vetor deslocamento de um ponto da haste.
χ_2, χ_3	- Componentes da curvatura principal da linha de referência da haste na configuração indeformada.
τ	- Torsão inicial da linha de referência da haste na configuração indeformada.
α, β, γ	- Componentes do vetor \tilde{g}_1 em relação a $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.
$g_{ij}; G_{ij}$	- Coeficientes métricos associados às configurações indeformada e deformada, respectivamente.
u, v, w	- Componentes do deslocamento segundo as direções das linhas de coordenadas (x_1, x_2, x_3) .
ϵ_{ij}	- Deformação específica.
B	- Base da seção transversal da haste.
H	- Altura da seção transversal da haste.
$L/2; C$	- Semi comprimento da linha de referência da haste.
R_0	- Raio da linha de referência da haste.
$\left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\}; \{\bar{\delta}\}$	- Campo de deslocamento no elemento finito.
$[B^*]$	- Relações deformações - deslocamentos
$[N]$	- Matriz das funções de interpolação dos deslocamentos.

$H_{ij}^k; N_{ij}^k$	- Funções de interpolação.
ϕ_i, ξ	- Componentes de interpolação na direção axial.
$\psi^1; \psi^2; \psi^3$	- Componentes de interpolação no plano da seção.
$\{\delta\}$	- Vetor deslocamentos nodais e parâmetros não nodais do elemento.
$\{\hat{\delta}\}$	- Deslocamentos nodais.
$\{\tilde{\delta}\}$	- Parâmetros não nodais.
$[B]$	- Relações deformações - deslocamentos nodais.
$[C]$	- Matriz das propriedades elásticas do material.
$[S]$	- Matriz tensão
$[\bar{S}]$	- Matriz tensão reduzida.
$[K]$	- Matriz de rigidez do elemento.
$[\bar{K}]$	- Matriz de rigidez reduzida do elemento.
$[F]$	- Vetor força resultante.
$[\hat{F}]$	- Vetor força resultante reduzido.

RESUMO

No presente trabalho é desenvolvido um procedimento para a determinação da matriz de rigidez de um elemento de viga curva espessa através do princípio da energia potencial mínima aplicada a elementos finitos.

O campo de deslocamentos é prescrito por polinômios e o modelo de interpolação é determinado através de uma comparação entre diversas formulações, usando diferentes expansões polinomiais.

Como caso limite da viga curva, são analisadas três vigas retas com diferentes relações dimensionais usando-se as formulações propostas.

Finalmente é proposto um modelo de interpolação e sua formulação é aplicada a uma viga curva de grande curvatura, determinando-se deslocamentos e solicitações internas que são comparadas com resultados encontrados na literatura.

ABSTRACT

A procedure for the evaluation of the stiffness matrix for a thick curved beam element is developed, by means of the minimum potential energy principle, applied to finite elements.

The displacement field is prescribed through polynomial expansions, and the interpolation model is determined by comparison of results obtained by the use of a sample of different expansions.

As curved beam a limiting case, three cases of straight beams, with different dimensional ratios are analysed, employing the approach here proposed.

Finally, an interpolation model is proposed and applied to a curved beam with great curvature. Displacements and internal stresses are determined and the results are compared with those found in the literature.

1. INTRODUÇÃO

1.1 - Apresentação

Pontes ferroviárias e rodoviárias, grandes equipamentos de movimentação de terra e mineração e muitas outras aplicações da engenharia estrutural, têm forçado a análise de vigas curvas de seções sólidas ou vazadas, abertas ou fechadas.

Como na maioria dos problemas estruturais, repete-se no caso das vigas curvas, o sucesso alcançado pelo método dos elementos finitos devido a sua grande versatilidade em modelar estruturas sob as mais diversas condições de carregamento e vinculação. Particularmente, o problema de vigas curvas tem solução satisfatória com o uso de elementos sólidos isoparamétricos. Tais elementos requerem, entretanto, malhas bastante refinadas o que os tornam antieconômicos para aplicações práticas, apesar da grande precisão alcançada por eles.

Razões econômicas têm então motivado o desenvolvimento de elementos curvos com características de viga, que permitam o uso de malhas menos refinadas, possibilitando assim soluções mais econômicas embora com menor acuidade que a obtida com os elementos sólidos isoparamétricos.

1.2 - Definição do problema

Com o presente trabalho se pretende desenvolver um elemento finito de viga curva com boa sensibilidade às solicitações torcionais, flexionais e cisalhantes através do método dos deslocamentos.

Se uma viga de seção não circular for solicitada a torção, ocorrerá o empenamento da seção e, caso o torque seja variável ou uma das seções da viga for restrita ao empenamento, este será variável ao longo do eixo da viga.

Embora alguns autores considerem pequena a influência do empenamento nas vigas curvas de seção sólida dando maior ênfase

se ao cisalhamento transversal |8|, a torção não uniforme e o cisalhamento transversal são solicitações predominantes em vigas curvas com grande curvatura inicial carregadas transversalmente ao plano de curvatura. Outros desprezam a influência do cisalhamento, dando maior ênfase às solicitações torcionais, sob certas condições de carregamento |4|. Na referência |8| o autor não faz restrição quanto às dimensões da viga ao passo que em |4| o trabalho é desenvolvido com vigas de grande curvatura.

O problema fica então estabelecido como sendo o desenvolvimento de um elemento finito de viga curva que possa modelar, com malhas relativamente grossas, vigas curvas com cargas fora do plano de curvatura.

1.3 - Análise Bibliográfica

Os métodos energéticos têm sido largamente usados na solução analítica de vigas curvas.

Hogan |10| apresenta soluções analíticas para uma ampla variedade de situações geométricas e de carregamento envolvendo vigas curvas circulares. Infelizmente, o autor limitou-se à apresentação de um extenso formulário, não fornecendo maiores detalhes acerca do desenvolvimento analítico e das hipóteses formuladas.

Langhaar |4| apresenta a solução para uma situação particular onde uma viga curva é submetida a um torque uniforme ao longo do eixo. O desenvolvimento é baseado no princípio dos trabalhos virtuais. Através de uma função de tensão convenientemente definida, obtém-se a equação de Euler-Lagrange do funcional em termos da função tensão, que é então expandida em série de Fourier. Os coeficientes são determinados por um grupo de equações diferenciais, resultantes da substituição da série na equação de Euler-Lagrange. Na sua análise, despreza o efeito do cisalhamento na direção da carga.

Young |12| apresenta uma análise para vigas curvas quaisquer. Partindo dos coeficientes de flexibilidade para vigas retas, divide a estrutura em pequenos trechos e determina a matriz de flexibilidade da estrutura global.

Nitzsche e Miller [8] apresentam soluções para vigas curvas circulares de seção aberta e fechada, através da solução das equações diferenciais de equilíbrio.

Reddy [17], apresenta o desenvolvimento da matriz de rigidez de um elemento curvo em arco de circunferência, através da solução exata das equações diferenciais que relacionam momentos e deslocamentos de uma seção da viga.

Williams [13], através do mesmo processo, apresenta soluções para anéis circulares finos.

Douglas e Gambrell [14] apresentam comparação entre dois sistemas de análise de vigas mestras curvas, usadas na construção de pontes. Um dos sistemas é desenvolvido utilizando-se as equações de equilíbrio e compatibilidade, condições de contorno, relações momentos-deslocamentos e fornece soluções para momentos, torques, forças cortantes, deslocamentos e rotações da estrutura, levando em conta os efeitos de torção não uniforme, resultante de restrições ao empenamento.

Perry [15] usa também o método da rigidez para obter a matriz de rigidez de um tubo encurvado, de acordo com o Asme Boiller and Pressure Vessel Code-Section III.

Ferguson e Clark [5] desenvolveram um elemento sólido isoparamétrico para aplicação em vigas curvas, entre outras. Infelizmente os autores não fornecem detalhes acerca da convergência de deslocamentos e tensões, bem como, da formulação do campo de deslocamentos.

Sabir [16] apresenta um elemento baseado em campos de deformação independentes. Utiliza na sua análise a hipótese que as deformações da viga decorrentes de carregamentos no plano de curvatura, são independentes daquelas resultantes de carregamentos transversais ao plano de curvatura. O autor apresenta resultados apenas para vigas com pequenas curvaturas.

2. ANÁLISE DE HASTES CURVAS E DEFINIÇÃO DO MODELO DE UM ELEMENTO

2.1 - Introdução

Inicialmente é desenvolvida a teoria geral de deformação das hastes curvas e são determinadas as relações deformações-deslocamentos para uma haste curva genérica, em termos da sua curvatura principal e da torção da linha de referência da haste indeformada.

A seguir são especificadas as características geométricas do elemento de haste curva e seu sistema de referência. Desenvolve-se então, com estas características, as relações deformações-deslocamentos para a geometria proposta e finalmente obtêm-se as relações deformações-deslocamentos, simplificadas através das hipóteses formuladas acerca das deformações da haste.

2.2 - Relações deformações-deslocamentos nas hastes curvas

2.2.1 - Geometria diferencial das hastes curvas

A figura 2.1 mostra uma haste curva nas posições indeformada e deformada.

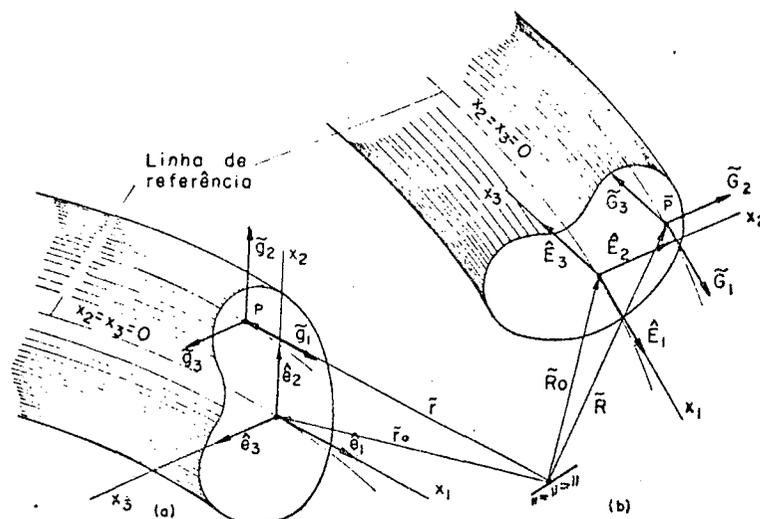


Figura 2.1 - Segmento de haste curva; (a) configuração indeformada; (b) configuração deformada.

Na configuração indeformada, o vetor posição e os vetores tangentes às linhas de coordenadas num ponto qualquer da haste, são dados por |2|:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.1a)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_{,i} \quad (2.2a)$$

para pontos fora da linha de referência, sendo x_1, x_2, x_3 , comprimentos de arco ao longo das linhas de coordenadas e :

$$(\quad)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (a)$$

Para pontos sôbre a linha de referência, tem-se:

$$\tilde{\mathbf{r}}_0 = \tilde{\mathbf{r}}_0(x_1, 0, 0) \quad (2.3a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{\mathbf{g}}_i(x_1, 0, 0) \quad (2.4a)$$

Analogamente, na configuração deformada, define-se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{R}_{,i} \quad (2.2b)$$

e

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0(x_1, 0, 0) \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{G}_i(x_1, 0, 0) \quad (2.4b)$$

Usando as definições (2.1a) e (2.1b), o vetor deslocamento de um ponto qualquer da haste é dado por:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} - \tilde{\mathbf{r}} \quad (2.5)$$

O vetor $\tilde{\mathbf{G}}_i$ pode ser reescrito na forma:

$$\tilde{G}_i = \tilde{r}_{,i} + \tilde{V}_{,i} = \tilde{g}_i + \tilde{V}_{,i} \quad (2.6a,b)$$

Da maneira como foram definidos em (2.4a), os vetores tangentes às linhas de coordenadas nos pontos sobre a linha de referência $(x_1, 0, 0)$, são ortonormais, ou seja,

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.7a)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Derivando-se (2.7a) em relação a x_1 , obtêm-se:

$$\begin{aligned} X_2 &= \hat{e}_{1,1} \cdot \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{2,1} \\ X_3 &= \hat{e}_{1,1} \cdot \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{3,1} \\ \tau &= \hat{e}_{2,1} \cdot \hat{e}_3 = -\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_{3,1} \end{aligned} \quad (2.8a,b,c)$$

onde: X_2, X_3 - componentes da curvatura principal da linha de referência na configuração indeformada.

τ - torção da linha de referência na configuração indeformada.

Na configuração indeformada, o vetor posição de um ponto qualquer fora da linha de referência pode ser escrito na forma

$$\tilde{r} = \tilde{r}_0 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \quad (2.9)$$

Os vetores tangentes às linhas de coordenadas fora da linha de referência são obtidos pela aplicação da definição (2.2a) na equação (2.9) para $i = 1, 3$. Considerando as definições das componentes de curvatura e da torção da linha de referência na configuração indeformada, equações (2.8), obtêm-se: (Apêndice A1.1)

$$\tilde{g}_1 = \alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2 + \gamma \hat{e}_3 \quad (2.10a)$$

$$\tilde{g}_2 = \hat{e}_2 \quad (2.10b)$$

$$\hat{g}_3 = \hat{e}_3 \quad (2.10c)$$

onde

$$\alpha = (1 - X_2 x_2 - X_3 x_3)$$

$$\beta = -x_3 \tau \quad (2.10d,e,f)$$

$$\gamma = x_2 \tau$$

Nota-se pelas relações (2.10a,d,e,f) que o vetor \tilde{g}_1 não é unitário e, se houver torção inicial, ele não é perpendicular à seção transversal.

Representando por s_i o comprimento de arco na linha de coordenada x_i fora da linha de referência, as componentes do tensor métrico associado ao estado indeformado, consideradas as relações (2.2a) e (2.10a,b,c), são expressas por:

$$g_{11} = \tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_1 = \left(\frac{ds_1}{dx_1} \right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = A^2 \quad (2.11a,b,c,d)$$

$$g_{22} = \tilde{g}_2 \cdot \tilde{g}_2 = \left(\frac{ds_2}{dx_2} \right)^2 = 1 \quad (2.11e,f,g)$$

$$g_{33} = \tilde{g}_3 \cdot \tilde{g}_3 = \left(\frac{ds_3}{dx_3} \right)^2 = 1 \quad (2.11h,i,j)$$

$$g_{12} = \tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2 = \left(\frac{ds_1}{dx_2} \right)^2 = \beta \quad (2.11k,l,m)$$

$$g_{13} = \tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_3 = \left(\frac{ds_1}{dx_3} \right)^2 = \gamma \quad (2.11n,o,p)$$

$$g_{23} = \tilde{g}_2 \cdot \tilde{g}_3 = \left(\frac{ds_2}{dx_3} \right)^2 = 0 \quad (2.11q,r,s)$$

As derivadas dos vetores tangente \tilde{g}_i são dadas por (Apêndice A1.1):

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{1,1} = & (\alpha_{,1} - \beta X_2 - \gamma X_3) \hat{e}_1 + (\beta_{,1} + \alpha X_2 - \gamma \tau) \hat{e}_2 + \\ & + (\gamma_{,1} + \alpha X_3 + \beta \tau) \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (2.12a)$$

$$\tilde{g}_{1,2} = -X_2 \hat{e}_1 + \tau \hat{e}_3 \quad (2.12b)$$

$$\tilde{g}_{1,3} = -X_3 \hat{e}_1 - \tau \hat{e}_2 \quad (2.12c)$$

$$\tilde{g}_{2,1} = -X_2 \hat{e}_1 + \tau \hat{e}_3 \quad (2.12d)$$

$$\tilde{g}_{2,2} = \tilde{g}_{2,3} = 0 \quad (2.12e,f)$$

$$\tilde{g}_{3,1} = -X_3 \hat{e}_1 - \tau \hat{e}_2 \quad (2.12g)$$

$$\tilde{g}_{3,2} = \tilde{g}_{3,3} = 0 \quad (2.12h,i)$$

Se (u,v,w) são as projeções do vetor deslocamento de um ponto genérico P sobre os vetores tangentes às linhas de coordenadas no ponto P considerado, na configuração indeformada, o vetor deslocamento do ponto P é expresso por $|2,3|$:

$$\tilde{V} = u \frac{\tilde{g}_1}{\sqrt{A}} + v \hat{e}_2 + w \hat{e}_3 \quad (2.13)$$

Substituindo-se (2.13) em (2.5) e reorganizando os termos, obtêm-se o vetor posição do ponto P na configuração deformada sob a forma:

$$\tilde{R} = \tilde{r} + u \frac{\tilde{g}_1}{\sqrt{A}} + v \hat{e}_2 + w \hat{e}_3 \quad (2.14)$$

Os vetores tangentes às linhas de coordenadas na configuração deformada, definição (2.2b), são então expressos por: (Apêndice A1.2)

$$\begin{aligned}
\bar{G}_1 = & \{ [1 + (u/A)_{,1}] \alpha + \frac{u \alpha_{,1}}{A} - X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) - X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) \} \hat{e}_1 + \\
& + \{ [1 + (u/A)_{,1}] \beta + \frac{u \beta_{,1}}{A} - \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \} \hat{e}_2 + \\
& + \{ [1 + (u/A)_{,1}] \gamma + \frac{u \gamma_{,1}}{A} + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \} \hat{e}_3 \\
& \dots (2.15a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_2 = & [\alpha(u/A)_{,2} - \frac{X_2 u}{A}] \hat{e}_1 + [1 + \beta(u/A)_{,2} + v_{,2}] \hat{e}_2 + \\
& + [\gamma(u/A)_{,2} + \frac{\tau u}{A} + w_{,2}] \hat{e}_3 \quad (2.15b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_3 = & [\alpha(u/A)_{,3} - \frac{X_3 u}{A}] \hat{e}_1 + [\beta(u/A)_{,3} - \frac{\tau u}{A} + v_{,3}] \hat{e}_2 + \\
& + [1 + \gamma(u/A)_{,3} + w_{,3}] \hat{e}_3 \quad (2.15c)
\end{aligned}$$

As componentes do tensor métrico associado ao estado deformado são expressas por: (Apêndice A1.3)

$$\begin{aligned}
\bar{G}_1 \cdot \bar{G}_1 = & A^2 + 2A^2(u/A)_{,1} + 2\alpha \left[\frac{u \alpha_{,1}}{A} - X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) - X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) \right] + \\
& + 2\beta \left[\frac{u \beta_{,1}}{A} - \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \right] + 2\gamma \left[\frac{u \gamma_{,1}}{A} + \right. \\
& + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \left. \right] + (u/A)^2 \left[(\alpha_{,1})^2 + (\beta_{,1})^2 + \right. \\
& + (\gamma_{,1})^2 \left. \right] + X_2^2 \left[\left(\frac{\beta u}{A} + v \right)^2 + \left(\frac{\alpha u}{A} \right)^2 \right] + X_3^2 \left[\left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\alpha u}{A}\right)^2] + \tau^2 \left[\left(\frac{\gamma u}{A} + w\right)^2 + \left(\frac{\beta u}{A} + v\right)^2\right] + \\
& + 2(u/A)_{,1} \{u/A(\alpha \alpha_{,1} + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1}) + \\
& + X_2 [(\alpha - \beta) \frac{u}{A} - v] + X_3 [(\alpha - \gamma) \frac{u}{A} - w] + \tau [(\beta - \gamma) \frac{u}{A} + \\
& + v - w] + v_{,1} + w_{,1}\} + \frac{2u}{A} \{X_2 [\alpha_{,1} (\frac{\beta u}{A} + v) + \\
& + \beta_{,1} \frac{\alpha u}{A}] + X_3 [-\alpha_{,1} (\frac{\gamma u}{A} + w) + \gamma_{,1} \frac{\alpha u}{A}] + \\
& + \tau [-\beta_{,1} (\frac{\gamma u}{A} + w) + \gamma_{,1} (\frac{\beta u}{A} + v)] + \beta_{,1} v_{,1} + \gamma_{,1} w_{,1} + \\
& + X_2 X_3 \beta (\frac{\gamma u}{A} + w) - \tau \gamma (\frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1}) + X_2 \alpha v_{,1} + \\
& + \tau \beta (\frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1}) + X_3 \alpha w_{,1}\} + 2v [X_2 X_3 (\frac{\gamma u}{A} + w) + \\
& + \tau (\frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1})] - 2w \tau (\frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1}) + (v_{,1})^2 + (w_{,1})^2 + \\
& + [(u/A)_{,1} A]^2 \tag{2.16a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_2 \cdot \bar{G}_2 & = 1 + 2\beta(u/A)_{,2} + 2v_{,2} + (u/A)^2 (X_2^2 + \tau^2) + \\
& + 2(u/A)_{,2} \left[\frac{u}{A} (\gamma\tau - \alpha X_2) + \beta v_{,2} + \gamma w_{,2}\right] + \\
& + [(u/A)_{,2} A]^2 + (v_{,2})^2 + (w_{,2})^2 + \frac{2\tau u w_{,2}}{A} \tag{2.16b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_3 \cdot \bar{G}_3 &= 1 + 2\gamma(u/A)_{,3} + 2w_{,3} + (u/A)^2(X_3^2 + \tau^2) + \\
&+ 2(u/A)_{,3} \left[-\frac{u}{A} (\beta\tau + \alpha X_3) + \beta v_{,3} + \gamma w_{,3} \right] + \\
&+ [(u/A)_{,3} A]^2 + (v_{,3})^2 + (w_{,3})^2 + \frac{2\tau u v_{,3}}{A} \quad (2.16c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_1 \cdot \bar{G}_2 &= (u/A)_{,2} A^2 + v_{,1} - \tau w + \beta [1 + (u/A)_{,1} + v_{,2}] + \gamma w_{,2} + \\
&+ \frac{u}{A} \beta_{,1} + \frac{u}{A} (u/A)_{,2} [\alpha \alpha_{,1} + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1} + \alpha(X_2\beta + \\
&+ X_3 \gamma)] + (u/A)_{,2} \{ \beta v_{,1} + \gamma w_{,1} - \alpha [X_2(\frac{\beta u}{A} + v) + \\
&+ X_3(\frac{\gamma u}{A} + w)] - \tau [\beta (\frac{\gamma u}{A} + w) + \gamma(\frac{\beta u}{A} + v)] \} + \\
&+ v_{,2} [(\frac{\beta u}{A})_{,1} - \tau(\frac{\beta u}{A} + v) + \frac{X_3 \alpha u}{A}] + w_{,2} [(\frac{\gamma u}{A})_{,1} + \\
&+ \tau(\frac{\beta u}{A} + v) + \frac{X_3 \alpha u}{A}] + \frac{u}{A} \{ -X_2(\frac{\alpha u}{A})_{,1} + X_2 [X_2(\frac{\beta u}{A} + v) + \\
&+ X_3(\frac{\gamma u}{A} + w)] + \tau [(\frac{\gamma u}{A})_{,1} + \tau(\frac{\beta u}{A} + v) + \frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1}] \} + \\
&+ (u/A)_{,1} (u/A)_{,2} A^2 + v_{,1} v_{,2} + w_{,1} w_{,2} \quad (2.16d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_1 \cdot \bar{G}_3 &= (u/A)_{,3} A^2 + w_{,1} + \tau v + \gamma [1 + (u/A)_{,1} + w_{,3}] + \frac{u}{A} \gamma_{,1} + \beta v_{,3} + \\
&+ \frac{u}{A} (u/A)_{,3} [\alpha \alpha_{,1} + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1} + \alpha(X_2\beta + X_3 \gamma)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (u/A)_{,3} \{ \beta v_{,1} + \gamma w_{,1} - \alpha [X_2 (\frac{\beta u}{A} + v) + X_3 (\frac{\gamma u}{A} + w)] - \\
& - \tau [\beta (\frac{\gamma u}{A} + w) + \gamma (\frac{\beta u}{A} + v)] \} + v_{,3} [(\frac{\beta u}{A})_{,1} - \tau (\frac{\gamma u}{A} + w) + \\
& + \frac{X_2 \alpha u}{A}] + w_{,3} [(\frac{\gamma u}{A})_{,1} + \tau (\frac{\beta u}{A} + v) + \frac{X_3 \alpha u}{A}] + \\
& + \frac{u}{A} \{ -X_3 (\frac{\alpha u}{A})_{,1} + X_3 [X_3 (\frac{\gamma u}{A} + w) + X_2 (\frac{\beta u}{A} + v)] + \\
& + \tau [-(\frac{\beta u}{A})_{,1} + \tau (\frac{\gamma u}{A} + w) - \frac{X_2 u}{A} - v_{,1}] \} + \\
& + (u/A)_{,1} (u/A)_{,3} A^2 + v_{,1} v_{,3} + w_{,1} w_{,3} \tag{2.16e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_2 \cdot \tilde{G}_3 = & w_{,2} + v_{,3} + \beta (u/A)_{,3} + \gamma (u/A)_{,2} + (u/A)_{,2} (u/A)_{,3} A^2 + \\
& + v_{,2} v_{,3} + w_{,2} w_{,3} + \frac{u}{A} \{ (u/A)_{,3} (\tau \gamma - X_2 \alpha) + \\
& + (u/A)_{,2} (-\tau \beta - X_3 \alpha) - \tau (v_{,2} + w_{,3}) - \frac{X_2 X_3 u}{A} \} + \\
& + (u/A)_{,2} (\beta v_{,3} + \gamma w_{,3}) + (u/A)_{,3} (\beta v_{,2} + \gamma w_{,2}) \\
& \dots \tag{2.16f}
\end{aligned}$$

2.2.2 - Relações de deformações-deslocamentos

Para linhas de coordenadas não ortogonais as componentes das deformações são definidas pelas relações |1|:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial s_j} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_j} \right), \quad i = 1,3; \quad j = 1,3 \quad (2.17)$$

onde s_i é o comprimento de arco ao longo da linha de coordenada x_i na configuração indeformada. De acordo com (2.11d,g) o comprimento de arco em cada uma das linhas de coordenadas é expresso por

$$ds_1 = A dx_1$$

$$ds_2 = dx_2 \quad (2.18a,b,c)$$

$$ds_3 = dx_3$$

Desenvolvendo as relações (2.17), com auxílio das definições (2.2a,b) e das relações (2.11), obtêm-se as componentes de deformação da haste na forma

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{G}_1 \cdot \bar{G}_1}{A^2} - 1 \right) \quad (2.19a)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2} (\bar{G}_2 \cdot \bar{G}_2 - 1) \quad (2.19b)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{2} (\bar{G}_3 \cdot \bar{G}_3 - 1) \quad (2.19c)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2A} (\bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 - \beta) \quad (2.19d)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2A} (\bar{G}_1 \cdot \bar{G}_3 - \gamma) \quad (2.19e)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} (\bar{G}_2 \cdot \bar{G}_3) \quad (2.19f)$$

Substituindo-se (2.10d,e) e (2.16) nas equações (2.19) tem-se as relações deformações-deslocamentos da haste curva genérica em termos das componentes da curvatura e da torção da haste e dos parâmetros α , β e γ . Então:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} = & (u/A)_{,1} + \frac{\alpha}{A^2} \left[\frac{u \alpha_{,1}}{A} - X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) - X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) \right] + \\
& + \frac{\beta}{A^2} \left[\frac{u \beta_{,1}}{A} - \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \right] + \frac{\gamma}{A^2} \left[\frac{u \gamma_{,1}}{A} + \right. \\
& + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \left. \right] + (u/A)^2 \left[(\alpha_{,1})^2 + (\beta_{,1})^2 + \right. \\
& + (\gamma_{,1})^2 \left. \right] + X_2^2 \left[\left(\frac{\beta u}{A} + v \right)^2 + \left(\frac{\alpha u}{A} \right)^2 \right] + X_3^2 \left[\left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\alpha u}{A} \right)^2 \right] + \tau^2 \left[\left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)^2 + \left(\frac{\beta u}{A} + v \right)^2 \right] + 2(u/A)_{,1} \left\{ \frac{u}{A} (\alpha \alpha_{,1} + \right. \\
& + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1}) + X_2 \left[(\alpha - \beta) \frac{u}{A} - v \right] + X_3 \left[(\alpha - \gamma) \frac{u}{A} - w \right] + \right. \\
& + \tau \left[(\beta - \gamma) \frac{u}{A} + v - w \right] + v_{,1} + w_{,1} \left. \right\} + \frac{2u}{A} \left\{ X_2 \left[\alpha_{,1} \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\beta_{,1} \alpha u}{A} \right] + X_3 \left[-\alpha_{,1} \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \frac{\gamma_{,1} \alpha u}{A} \right] + \tau \left[-\beta_{,1} \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \right. \\
& + \left. \gamma_{,1} \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) \right] + \beta_{,1} v_{,1} + \gamma_{,1} w_{,1} + X_2 X_3 \beta \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) - \\
& - \tau \gamma \left(\frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \right) + X_2 \alpha v_{,1} + \tau \beta \left(\frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \right) + X_3 \alpha w_{,1} \left. \right\} + \\
& + 2v \left[X_2 X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \tau \left(\frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \right) \right] - 2w \tau \left(\frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \{ [(u/A)_{,1} A]^2 + (v_{,1})^2 + (w_{,1})^2 \} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} = & v_{,2} + \beta(u/A)_{,2} + \frac{1}{2} (u/A)^2 (X_2^2 + \tau^2) + (u/A)_{,2} \left[\frac{u}{A} (\gamma\tau - \alpha X_2) + \right. \\ & \left. + \beta v_{,2} + \gamma w_{,2} \right] + \frac{1}{2} [(u/A)_{,2} A]^2 + \frac{(v_{,2})^2}{2} + \frac{(w_{,2})^2}{2} + \frac{\tau u w_{,2}}{A} \\ & \dots (2.20b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} = & w_{,3} + \gamma(u/A)_{,3} + \frac{1}{2} (u/A)^2 (X_3^2 + \tau^2) + (u/A)_{,3} \left[-\frac{u}{A} (\beta\tau + \right. \\ & \left. + \alpha X_3) + \beta v_{,3} + \gamma w_{,3} \right] + \frac{1}{2} [(u/A)_{,3} A]^2 + \\ & + \frac{(v_{,3})^2}{2} + \frac{(w_{,3})^2}{2} + \frac{\tau u v_{,3}}{A} \quad (2.20c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} = & \frac{1}{2A} \{ (u/A)_{,2} A^2 + v_{,1} - \tau w + \beta [(u/A)_{,1} + v_{,2}] + \gamma w_{,2} + \\ & + \frac{u}{A} \beta_{,1} + \frac{u}{A} (u/A)_{,2} [\alpha \alpha_{,1} + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1} + \alpha (X_2 \beta + X_3 \gamma)] + \\ & + (u/A)_{,2} \{ \beta v_{,1} + \gamma w_{,1} - \alpha [X_2 (\frac{\beta u}{A} + v) + X_3 (\frac{\gamma u}{A} + w)] - \\ & - \tau [\beta (\frac{\gamma u}{A} + w) + \gamma (\frac{\beta u}{A} + v)] \} + v_{,2} [(\frac{\beta u}{A})_{,1} - \tau (\frac{\gamma u}{A} + w) + \\ & + \frac{X_2 \alpha u}{A}] + w_{,2} [(\frac{\gamma u}{A})_{,1} + \tau (\frac{\beta u}{A} + v) + \frac{X_3 \alpha u}{A}] + \\ & + \frac{u}{A} \{ -X_2 (\frac{\alpha u}{A})_{,1} + X_2 [X_2 (\frac{\beta u}{A} + v) + X_3 (\frac{\gamma u}{A} + w)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau \left[\left(\frac{\gamma u}{A} \right)_{,1} + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \right] + \\
& + (u/A)_{,1} (u/A)_{,2} A^2 + v_{,1} v_{,2} + w_{,1} w_{,2} \} \quad (2.20d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{13} = & \frac{1}{2A} \{ (u/A)_{,3} A^2 + w_{,1} + \tau v + \gamma [(u/A)_{,1} + w_{,3}] + \beta v_{,3} + \\
& + \frac{u \gamma_{,1}}{A} + \frac{u}{A} (u/A)_{,3} [\alpha \alpha_{,1} + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1} + \alpha (X_2 \beta + X_3 \gamma)] + \\
& + (u/A)_{,3} \{ \beta v_{,1} + \gamma w_{,1} - \alpha [X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)] - \\
& - \tau \left[\beta \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \gamma \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) \right] \} + v_{,3} \left[\left(\frac{\beta u}{A} \right)_{,1} - \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \right. \\
& + \left. \frac{X_2 \alpha u}{A} \right] + w_{,3} \left[\left(\frac{\gamma u}{A} \right)_{,1} + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \frac{X_3 \alpha u}{A} \right] + \\
& + \frac{u}{A} \{ -X_3 \left(\frac{\alpha u}{A} \right)_{,1} + X_3 \left[X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) \right] + \\
& + \tau \left[- \left(\frac{\beta u}{A} \right)_{,1} + \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) - \frac{X_2 u}{A} - v_{,1} \right] \} + \\
& + (u/A)_{,1} (u/A)_{,3} A^2 + v_{,1} v_{,3} + w_{,1} w_{,3} \} \quad (2.20e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{23} = & w_{,2} + v_{,3} + \beta (u/A)_{,3} + \gamma (u/A)_{,2} + (u/A)_{,2} (u/A)_{,3} A^2 + \\
& + v_{,2} v_{,3} + w_{,2} w_{,3} + \frac{u}{A} \{ (u/A)_{,3} (\tau \gamma - X_2 \alpha) - \\
& - (u/A)_{,2} (-\tau \beta - X_3 \alpha) - \tau (v_{,2} + w_{,3}) - X_2 X_3 \frac{u}{A} \} +
\end{aligned}$$

$$+ (u/A)_{,2} (\beta v_{,3} + \gamma w_{,3}) + (u/A)_{,3} (\beta v_{,2} + \gamma w_{,2}) \quad \dots(2.20f)$$

2.3 - O modelo de elemento de haste curva e suas relações de deformações-deslocamentos.

O elemento tem sua formulação baseada na geometria de um segmento de haste circular plana. A figura 2.2 apresenta o sistema intrínseco de coordenadas e os parâmetros dimensionais do elemento.

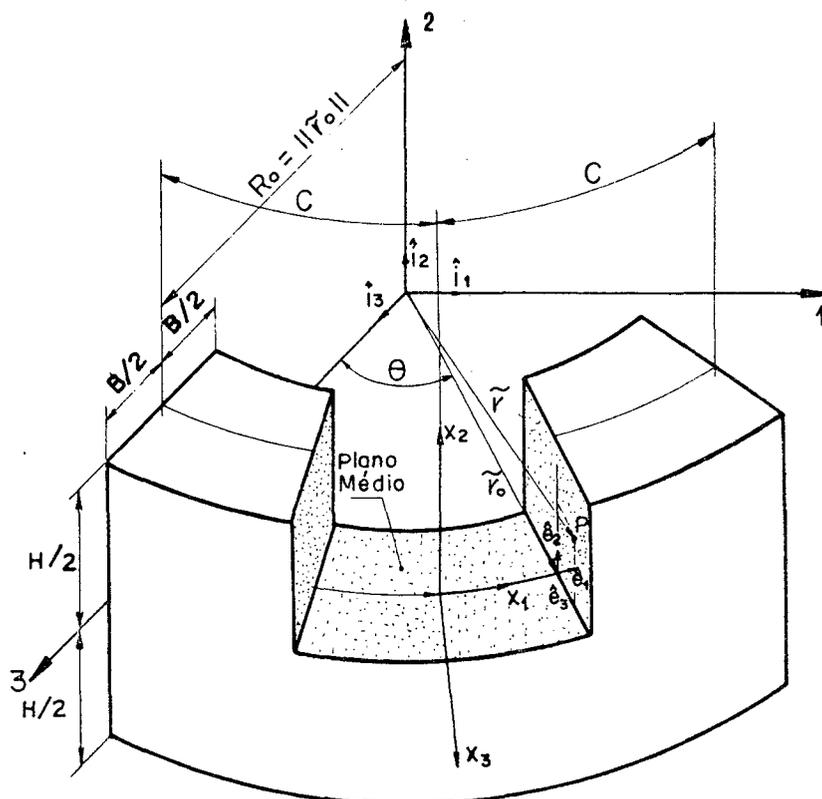


Figura 2.2 - Segmento de haste circular plana; sistemas de referência e dimensões.

Em relação ao sistema (1,2,3), o vetor posição de um ponto P qualquer da haste, equação (2.1a), é dado por:

$$\vec{r} = \hat{i}_1 (R_0 + x_3) \sin \theta + \hat{i}_2 x_2 + (R_0 + x_3) \cos \theta \hat{i}_3 \quad (2.21)$$

onde R_0 é o raio da linha de referência x_1 .

Em relação ao sistema (x_1, x_2, x_3) , tem-se:

$$\theta = \frac{x_1 + C}{R_0} \quad (\text{a})$$

onde C é o semi-comprimento da linha de referência da haste na configuração indeformada. Substituindo-se (a) em (2.21) obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{r} = \hat{i}_1 (R_0 + x_3) \operatorname{sen} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) + \hat{i}_2 x_2 + \hat{i}_3 (R_0 + x_3) \operatorname{cos} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) \hat{i}_3 \\ \dots (2.21a) \end{aligned}$$

Esta, juntamente com a definição (2.2a), fornece os vetores tangentes às linhas de coordenadas fora da linha de referência na forma:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 &= \hat{i}_1 \frac{(R_0 + x_3)}{R_0} \operatorname{cos} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) - \hat{i}_3 \frac{(R_0 + x_3)}{R_0} \operatorname{sen} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) \\ \tilde{g}_2 &= \hat{i}_2 \\ \tilde{g}_3 &= \hat{i}_1 \operatorname{sen} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) + \hat{i}_3 \operatorname{cos} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) \end{aligned} \quad (2.22a, b, c)$$

Para pontos sobre a linha de referência, as equações (2.4a) e (2.22) resultam:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \hat{i}_1 \operatorname{cos} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) - \hat{i}_3 \operatorname{sen} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) \\ \hat{e}_2 &= \hat{i}_2 \\ \hat{e}_3 &= \hat{i}_1 \operatorname{sen} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) + \hat{i}_3 \operatorname{cos} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) \end{aligned} \quad (2.23a, b, c)$$

cujas derivadas em relação a x_1 ficam dadas por:

$$\hat{e}_{1,1} = \frac{1}{R_0} \left[-\hat{i}_1 \operatorname{sen} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) - \hat{i}_3 \operatorname{cos} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) \right]$$

$$\hat{e}_{2,1} = 0 \quad (2.24a,b,c)$$

$$\hat{e}_{3,1} = \frac{1}{R_0} \left[\hat{i}_1 \operatorname{cos} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) - \hat{i}_3 \operatorname{sen} \left(\frac{x_1 + C}{R_0} \right) \right]$$

As equações (2.8) das componentes de curvatura e torção da haste, juntamente com (2.23) e (2.24), implicam em:

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = -1/R_0 \quad (2.25a,b,c)$$

$$\tau = 0$$

As constantes α , β e γ das equações (2.10) são dadas então por:

$$\alpha = 1 + \frac{x_3}{R_0}$$

$$\beta = 0 \quad (2.26a,b,c)$$

$$\gamma = 0$$

e, finalmente, as equações (2.11c,d) fornecem

$$g_{11} = \left(1 + \frac{x_3}{R_0} \right)^2 = A^2 \quad (b)$$

o que resulta

$$A = \left(1 + \frac{x_3}{R_0}\right) \quad (2.27)$$

A partir das expressões (2.25), (2.26) e (2.27), as relações de deformações-deslocamentos, equações (2.20), resultam:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & \frac{R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} + \frac{1}{R_0 + x_3} w + \frac{1}{R_0^2} (w^2 + u^2) + \frac{2R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} \left[\frac{1}{R_0} (w - \right. \\ & \left. - u) + v_{,1} + w_{,1} \right] - \frac{2}{R_0} u w_{,1} + \frac{1}{2} [(u_{,1})^2 + (v_{,1})^2 + (w_{,1})^2] \\ & \dots (2.28a) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22} = v_{,2} + \frac{1}{2} [(u_{,2})^2 + (v_{,2})^2 + (w_{,2})^2] \quad (2.28b)$$

$$\varepsilon_{33} = w_{,3} + \frac{1}{(R_0 + x_3)} u u_{,3} + \frac{1}{2} [(u_{,3})^2 + (v_{,3})^2 + (w_{,3})^2] \quad (2.28c)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = & \frac{1}{2A} [u_{,2} A + v_{,1} + \frac{u}{R_0} (w - w_{,2}) - \frac{u}{R_0 + x_3} (u + w) + \\ & + A(u_{,1} u_{,2} + v_{,1} v_{,2} + w_{,1} w_{,2})] \quad (2.28d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} = & \frac{1}{2A} [u_{,3} A + w_{,1} - \frac{1}{R_0 + x_3} u - \frac{u_{,3} w}{R_0 + x_3} - \frac{u w_{,3}}{R_0} - \\ & - \frac{u}{R_0 + x_3} (u_{,1} + \frac{w}{R_0}) + A(u_{,1} u_{,3} + v_{,1} v_{,3} + w_{,1} w_{,3})] \\ & \dots (2.28e) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left[v_{,3} + w_{,2} - \frac{u u_{,2}}{(R_0 + x_3)} + u_{,2} u_{,3} + v_{,2} v_{,3} + w_{,2} w_{,3} \right] \quad (2.28f)$$

2.4 - Hipóteses simplificativas e as relações deformações-deslocamentos simplificadas.

As equações (2.28) apresentam as relações deformações - deslocamentos para o segmento de haste curva plana da figura 2.2.

Estas relações foram obtidas usando a formulação lagrangeana para a definição do vetor deslocamento de um ponto genérico e, na forma em que se apresentam, são completas e exatas, porém não lineares.

Para uma primeira aproximação, que é o objetivo do presente trabalho, formular-se-ão algumas hipóteses simplificativas de modo a se obter relações deformações-deslocamentos lineares. Algumas destas hipóteses já foram formuladas em soluções clássicas de problemas envolvendo vigas curvas.

São consideradas válidas as seguintes hipóteses acerca das deformações da haste:

1. Existe relação linear entre deformação e deslocamento, ou seja, os deslocamentos que ocorrem na haste são pequenos.
2. As seções transversais da haste são bi-simétricas e os eixos de coordenadas no plano da seção, coincidem com os eixos principais de inércia.
3. Para pequenas deformações, as tensões cisalhantes resultantes da distorção da seção transversal, na direção paralela ao seu plano inicial, são pequenas quando comparadas àquelas resultantes do empenamento da seção na direção normal, e podem ser desprezadas [4,5].

Sob estas condições, as relações deformações-deslocamentos da haste, equações (2.28), podem ser reescritas como:

$$\epsilon_{11} = \frac{R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} + \frac{1}{R_0 + x_3} w \quad (2.29a)$$

$$\epsilon_{22} = v_{,2} \quad (2.29b)$$

$$\epsilon_{33} = w_{,3} \quad (2.29c)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(u_{,2} + \frac{R_0}{R_0 + x_3} v_{,1} \right) \quad (2.29d)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(u_{,3} + \frac{R_0}{R_0 + x_3} w_{,1} \right) - \frac{u}{R_0 + x_3} \quad (2.29e)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} (v_{,3} + w_{,2}) = 0 \quad (2.29e,f)$$

Estas relações recaem naquelas apresentadas por Langhaar [4], bastando para isto que se faça a correspondência entre o sistema de referência aqui estabelecido e aquele usado na referência citada.

As equações (2.29) podem ser arranjadas como um operador matricial na forma:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix} = [B^*] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.30a,b)$$

sendo

$$[B^*] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{R_0}{R_0 + x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} & & & 0 & & \frac{1}{R_0 + x_3} \\
 0 & & & \frac{\partial}{\partial x_2} & & 0 \\
 0 & & & 0 & & \frac{\partial}{\partial x_3} \\
 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} & & & \frac{R_0}{R_0 + x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} & & 0 \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{R_0 + x_3} \right) & & & 0 & & \frac{1}{2} \frac{R_0}{(R_0 + x_3)} \frac{\partial}{\partial x_1}
 \end{array} \right] \quad (2.31)$$

O operador diferencial (2.31) define as relações deformações-deslocamentos da haste curva da figura 2.2, levando em consideração as hipóteses formuladas no ítem 2.4. A disposição das relações deformações-deslocamentos na forma (2.31) visa facilitar a determinação das relações entre deformações e deslocamentos nodais e parâmetros não nodais do elemento, necessárias para obtenção da energia potencial deste.

3. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE VIGA CURVA

3.1 - Introdução

Neste capítulo é apresentada a teoria do método de elementos finitos usada na formulação da matriz de rigidez do elemento.

As funções de interpolação dos deslocamentos são especificadas e é obtida a matriz das relações deslocamentos no elemento em termos dos seus deslocamentos nodais e parâmetros não nodais. Com o uso destas relações e das relações deformações-deslocamentos obtidas no capítulo anterior, são obtidas as matrizes de deformações e tensões no elemento. Através do princípio da energia potencial total, é obtida a matriz de rigidez do elemento em termos dos deslocamentos nodais e parâmetros não nodais.

Finalmente é apresentado o processo de condensação estática dos parâmetros não nodais do elemento visando a obtenção das matrizes de rigidez e tensões em termos dos deslocamentos nodais do elemento.

3.2 - Graus de liberdade do elemento

3.2.1 - Formulação com 12 graus de liberdade

O elemento possui 2 nós e 12 graus de liberdade. Os nós são localizados nos pontos inicial e final da linha centroidal do elemento, sendo que em cada um deles são prescritos 3 deslocamentos e 3 rotações nodais. A especificação destes graus de liberdade visa satisfazer as condições de continuidade de deslocamentos e rotações inter-elementos e também a facilitar a prescrição de condições de contorno.

Além das hipóteses acerca das deformações, formuladas no capítulo anterior, supõe-se ainda que as seções transversais inicialmente planas, permaneçam planas após serem solicitadas à flexão simples, o que permite que as rotações nodais nas direções

dos eixos principais de inércia da seção, sejam descritas por:

$$\theta_2 = u_{,3} \quad (3.1a)$$

$$\theta_3 = u_{,2} \quad (3.1b)$$

A hipótese (3), formulada no capítulo anterior resulta em

$$w_{,2} = -v_{,3} \quad (a)$$

o que permite que a rotação nodal da seção na direção normal a esta, seja descrita por

$$\theta_1 = w_{,2} \quad (3.1c)$$

Os graus de liberdade de rotação do elemento são apresentados na figura 3.1. Na figura 3.1c, foi omitido o empenamento da seção, embora este esteja presente na formulação do elemento.

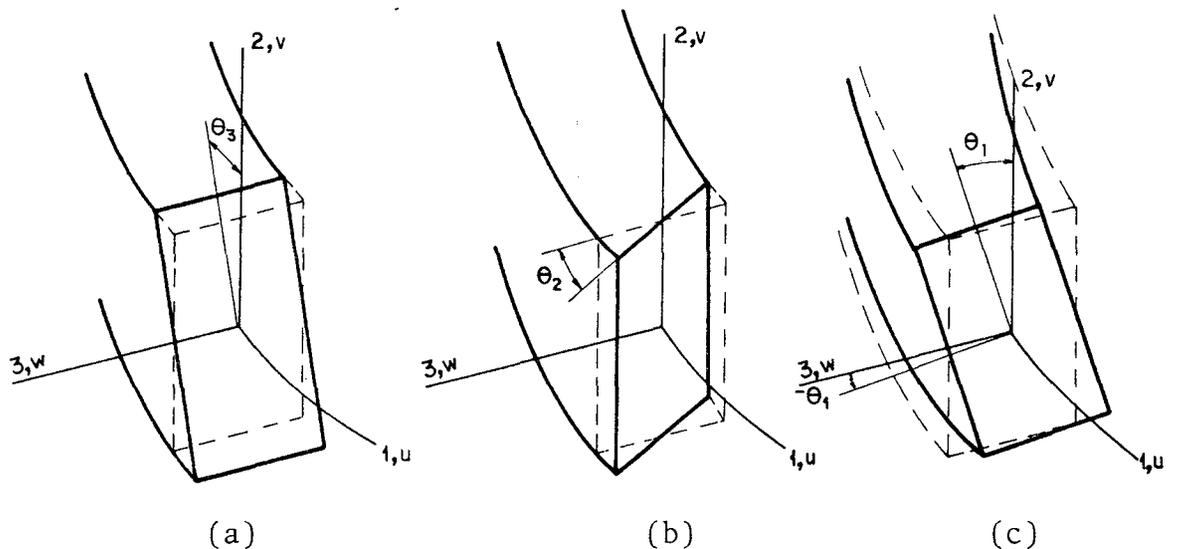


Figura 3.1 - (a) rotação da seção na direção 3; (b) rotação da seção na direção 2; (c) rotação da seção na direção 1.

3.2.2 - Formulação com 16 graus de liberdade

Nesta formulação continuam válidas as hipóteses e definições desenvolvidas na formulação anterior.

Acrescenta-se porém, como graus de liberdade adicionais, as inclinações nodais da linha centroidal segundo os planos (1,3) e (1,2), (Figura 3.2).

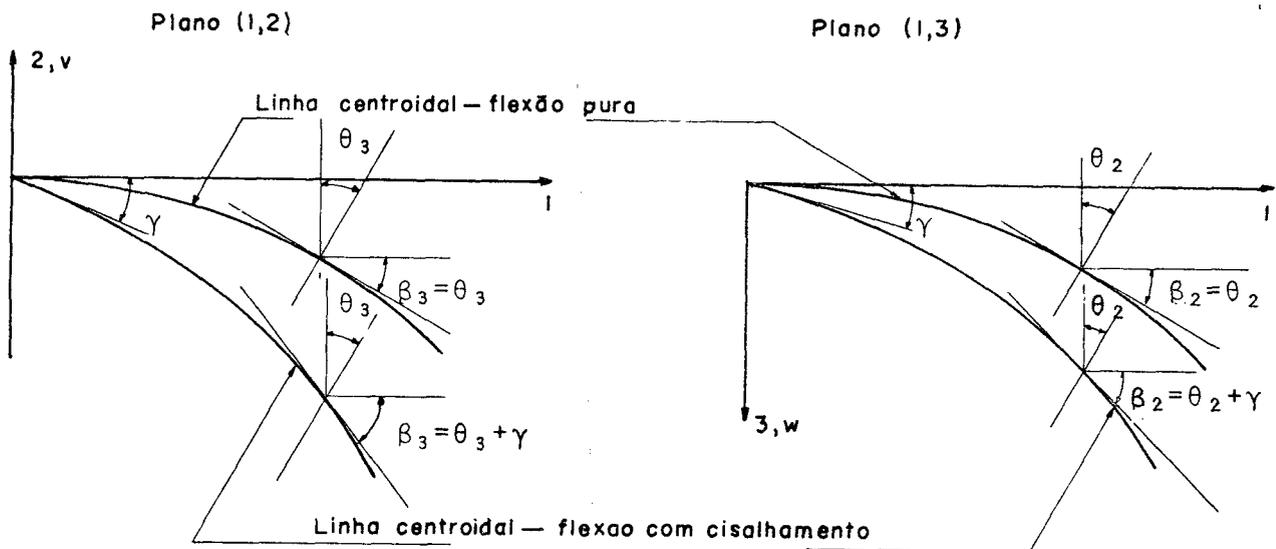


Figura 3.2 - Inclinações da linha centroidal do elemento sob flexão pura e flexão com cisalhamento.

Esta formulação é mais adequada quando se deseja conhecer as inclinações β_2 e β_3 porém dificulta a prescrição de condições de contorno nos nós engastados, quando a viga está solicitada com cargas que provocam cisalhamento. Essas inclinações nodais são descritas por:

$$\beta_2 = w_{,1} \quad (3.2a)$$

$$\beta_3 = v_{,1} \quad (3.2b)$$

3.3 - Deformações e tensões no elemento em termos dos deslocamentos nodais.

3.3.1 - Matriz das funções de interpolação

O vetor deslocamentos no elemento em termos dos deslocamentos nodais e parâmetros não nodais pode ser expresso na forma

$$\{\bar{\delta}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\} = \begin{bmatrix} [N^1 \ ; \ H^1] & & (\text{zero}) \\ & [N^2 \ ; \ H^2] & \\ (\text{zero}) & & [N^3 \ ; \ H^3] \end{bmatrix} \{\delta\}$$

... (3.3a,b,c)

sendo

u, v, w - deslocamentos nas direções 1, 2 e 3, respectivamente

$[N]$ - matriz das funções de interpolação

$\{\delta\}$ - vetor deslocamentos nodais e parâmetros não nodais.

e os superscritos 1, 2 e 3 significam funções de interpolação de u, v e w , respectivamente, as quais podem ser postas sob a forma:

$$N^k = [N_{11}^k \ N_{12}^k \ N_{13}^k \ \dots \ N_{ij}^k \ \dots \ N_{mn}^k]$$

(3.4a,b)

$$H^k = [H_{11}^k \ H_{12}^k \ H_{13}^k \ \dots \ H_{ij}^k \ \dots \ H_{mn}^k]$$

Os elementos das matrizes (3.4a,b) são dados por:

$$N_{ij}^k = a_{ij}^k \psi_i^k(x_2, x_3) \phi_j(x_1)$$

(3.5a,b)

$$H_{ij}^k = b_{ij}^k \psi_i^k(x_2, x_3) \xi(x_1)$$

onde

- a_{ij}^k, b_{ij}^k - coeficientes constantes das componentes de interpolação
 $\psi_i^k(x_2, x_3)$ - i-ésima componente polinomial no plano da seção.
 $\phi_j(x_1)$ - j-ésima componente das funções de interpolação na direção axial
 $\xi(x_1)$ - função de interpolação na direção axial que satisfaz condições de contorno homogêneas nos nós.
 m, n - número de funções ψ e ϕ respectivamente

3.3.2 - Campos de deformação e tensão no elemento em termos dos deslocamentos nodais.

No capítulo anterior foram desenvolvidas as relações de formações-deslocamentos no elemento, equação (2.31). Estas relações quando aplicadas ao vetor deslocamento, equação (3.3b), resultam:

$$\{\epsilon\} = [B^*] [N] \{\delta\} = [B] \{\delta\} \quad (3.6a,b)$$

Sendo $a = R_0/(R_0 + x_3)$ e $b = 1/(R_0 + x_3)$ obtêm-se, tendo em conta (3.3c),

$$[B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 a [N^1 \ ; \ H^1]_{,1} & & & [\theta] & & b [N^3 \ ; \ H^3] \\
 & [\theta] & & & [N^2 \ ; \ H^2]_{,2} & & [\theta] \\
 & & [\theta] & & & & [N^3 \ ; \ H^3]_{,3} \\
 & & & & & & \\
 \frac{1}{2} [N^1 \ ; \ H^1]_{,2} & & & & a [N^2 \ ; \ H^2]_{,1} & & [\theta] \\
 & & & & & & \\
 \left[\frac{1}{2} [N^1 \ ; \ H^1]_{,3} - b [N^1 \ ; \ H^1] \right] & & & & [\theta] & & a [N^3 \ ; \ H^3]_{,1} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \dots
 \end{array} \right] \quad (3.6c)$$

Com o objetivo de facilitar o processo de condensação estática dos parâmetros não nodais, a matriz [B] é submetida, durante o processo computacional, a uma reordenação de suas colunas de tal forma que o vetor { δ } seja expresso na forma

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \hat{\delta} \\ \text{---} \\ \bar{\delta} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde

- { $\hat{\delta}$ } - vetor dos deslocamentos nodais do elemento
 { $\bar{\delta}$ } - vetor dos parâmetros não nodais do elemento.

Para um material homogêneo e isotrópico, a matriz das propriedades elásticas assume a forma [6,7]:

$$[C] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

sendo:

- E - módulo de elasticidade do material
 ν - coeficiente de Poisson

Usando as equações (3.6b), (3.8) e a Lei de Hooke, o vetor tensões é expresso por:

$$\{\sigma\} = [C] [B] \{\delta\} = [S] \{\delta\} \quad (3.9a,b)$$

onde

-S é a matriz tensão em um ponto do elemento em termos dos deslocamentos nodais e parâmetros não nodais, expressa por:

$$[S] = E(1-\lambda) \begin{bmatrix} a[N^1; H^1]_{,1} & \frac{\nu}{(1-\nu)} [N^2; H^2]_{,2} & [(b[N^3; H^3] + \frac{a\nu}{(1-\nu)} [N^3; H^3]_{,1})] \\ \frac{a\nu}{(1-\nu)} [N^1; H^1]_{,1} & [N^2; H^2]_{,2} & [(-\frac{b\nu}{(1-\nu)} [N^3; H^3] + \frac{a\nu}{(1-\nu)} [N^3; H^3]_{,1})] \\ \frac{a\nu}{(1-\nu)} [N^1; H^1]_{,1} & \frac{\nu}{(1-\nu)} [N^2; H^2]_{,2} & [(-\frac{\nu b}{(1-\nu)} [N^3; H^3] + a [N^3; H^3]_{,1})] \\ \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} [N^1; H^1]_{,2} & \frac{a(1-2\nu)}{2(1-\nu)} [N^2; H^2]_{,2} & [0] \\ \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} [(\frac{1}{2} [N^1; H^1]_{,3} - [N^1; H^1]_{,3})] & [0] & \frac{a(1-2\nu)}{2(1-\nu)} [N^3; H^3] \end{bmatrix}$$

... (3.9c)

onde

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

3.4 - Matriz de rigidez do elemento

3.4.1 - Energia potencial total do elemento

Na ausência de forças de corpo e estados de deformação inicial, a energia potencial total de um corpo elástico linear é dada por |6|:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dv - \int_{S_1} \{T\}^T \{\bar{\delta}\} ds_1 \quad (3.10)$$

onde:

- $\{\epsilon\}$ - campo de deformações
- $\{\sigma\}$ - campo de tensões
- $\{T\}^T$ - forças de superfície atuando na região S_1 do contorno
- $\{\bar{\delta}\}$ - campo de deslocamentos

Substituindo-se (3.3b), (3.7b) e (3.9a) em (3.10) e realizando o processo variacional para obtenção da primeira variação do funcional π [6], obtém-se:

$$[\bar{K}] \{\delta\} = \{F\} \quad (3.11)$$

sendo

$[\bar{K}]$ - matriz de rigidez intrínseca do elemento, expressa por

$$[\bar{K}] = \int_V [B]^T [C] [B] dv \quad (3.11a)$$

$\{\delta\}$ - vetor deslocamentos nodais e parâmetros não nodais

$\{F\}$ - vetor força resultante

3.4.2 - Matriz de rigidez intrínseca do elemento em termos dos deslocamentos nodais.

A equação (3.7) permite reescrever a equação (3.11) na forma:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \bar{F} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Operando (3.12) de modo a obter-se uma relação em termos dos deslocamentos nodais do elemento |6,7|, resulta,

$$[K] \{\delta\} = \{\hat{F}\} \quad (3.13)$$

onde

$$[K] = [K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{12}]^T$$

$$\{\delta\} = [K_{22}]^{-1} \{\bar{F}\} - [K_{22}]^{-1} [K_{12}]^T \{\delta\} \quad (3.14a,b,c)$$

$$\{\hat{F}\} = \{\bar{F}\} - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} \{\bar{F}\}$$

e

$[K]$ - matriz de rigidez intrínseca do elemento em termos dos deslocamentos nodais

$\{\delta\}$ - parâmetros não nodais do elemento em termos dos deslocamentos nodais e forças nodais

$\{\hat{F}\}$ - forças nodais resultantes.

3.4.3 - Matrizes de tensões em termos dos deslocamentos nodais

A distribuição das tensões no elemento em termos dos deslocamentos nodais e parâmetros não nodais, pode ser reescrita como:

$$\{\sigma\} = [[S_1] \ ; \ [S_2]] \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta \end{Bmatrix} \quad (3.15a)$$

Substituindo-se (3.14b) em (3.15a) resulta

$$\{\sigma\} = [[S_1] - [K_{22}]^{-1} [K_{12}]] \{\delta\} + [S_2] [K_{22}]^{-1} \{F\} \quad (3.15b)$$

ou ainda

$$\{\sigma\} = [[S_1] - [K_{22}]^{-1} [K_{12}] \quad ; \quad [S_2] [K_{22}]^{-1} \{F\}] \begin{Bmatrix} \delta \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix} = [\bar{S}] \begin{Bmatrix} \delta \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots(3.15c,d)$$

sendo:

$[\bar{S}]$ - matriz de tensões no elemento em termos dos deslocamentos nodais.

3.5 - Processo computacional

Para realizar os procedimentos analíticos desenvolvidos na determinação das matrizes de deformações, tensões e rigidez do elemento, foi elaborado um programa digital em FORTRAN IV, cuja descrição da sua estrutura é apresentada, resumidamente, no Apêndice A2.

O algoritmo realiza numericamente, através do processo de Gauss-Legendre, a integração indicada na equação (3.11a). Aproveitando a simetria da matriz do integrando dessa equação, calcula-se apenas a parte triangular superior da matriz, cujos elementos são alocados numa matriz unidimensional. O processo de condensação estática dos parâmetros não nodais das matrizes de rigidez e tensões, a montagem da matriz global da estrutura, a introdução das condições de contorno e a solução do sistema resultante, bem como a determinação das solicitações internas à estrutura, são realizados de forma a explorar a simetria e esparsidade da matriz de rigidez global da estrutura.

Alguns procedimentos são considerados padrão em programas de elementos finitos e foram omitidos no desenvolvimento analítico por não apresentarem características especiais na presente aplicação.

4. ANÁLISE DE RESULTADOS

4.1 - Introdução

Neste capítulo são analisados os resultados de deslocamentos de algumas formulações, diferentes entre si pelas funções de interpolação. A aplicação dessas formulações às vigas retas surge da necessidade da investigação de um modelo de interpolação que, formado por polinômios, possa conferir ao elemento a sensibilidade às deformações transversais e torcionais que predominam nas vigas curvas com grandes curvaturas iniciais. Ademais, o comportamento da viga curva deve tender ao da viga reta quando a curvatura tende a zero.

Em todas formulações apresentadas é assegurada a validade das hipóteses acerca dos deslocamentos e deformações, formuladas anteriormente.

Todos os resultados numéricos apresentados foram obtidos com um programa de elementos finitos de pequeno porte, especialmente desenvolvido para esta finalidade e cuja descrição encontra-se no Apêndice A2.

4.2 - Modelos de interpolação dos deslocamentos

São propostos e analisados 4 modelos de interpolação. Em todos eles, a interpolação na direção axial do elemento é formada por uma família de polinômios de Hermite do 3º grau. Em relação às equações (3.5a,b), tem-se:

$$\Phi_1(x_1) = 0,25(x_1^3 - 3x_1 + 2) \quad (4.1a)$$

$$\Phi_2(x_1) = 0,25(-x_1^3 + 3x_1 + 2) \quad (4.1b)$$

$$\Phi_3(x_1) = 0,25(x_1^3 - x_1^2 - x_1 + 1) \quad (4.1c)$$

$$\Phi_4(x_1) = 0,25(x_1^3 + x_1^2 - x_1 - 1) \quad (4.1d)$$

$$\xi(x_1) = (1 - x_1^2)^2 \quad (4.1e)$$

4.2.1 - Modelo de interpolação I

Este modelo usa um conjunto de polinômios completos do 3º grau em x_2 e x_3 para interpolação do deslocamento u . As funções de interpolação para v e w devem ser tais que preservem a hipótese $\varepsilon_{23} = 0$ e uma das maneiras é formá-las por grupos de polinômios sem termos cruzados. Assim, tem-se:

$$\{\psi^1\} = \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_2^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_3^3\}$$

$$\{\psi^2\} = \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_2^3\} \quad (4.2a,b,c)$$

$$\{\psi^3\} = \{1, x_2, x_3, x_3^2, x_3^3\}$$

4.2.2 - Modelo de interpolação II

Este modelo usa um conjunto de polinômios incompletos, porém com termos simétricos, do 3º grau em x_2 e x_3 para interpolação do deslocamento u . Esta formulação inclui apenas as componentes polinomiais que permitem os modos de deslocamento u , v e w que ocorrem nas solicitações a flexão, cisalhamento e torção. Além disso, continuam válidas as restrições aos campos de deslocamentos v e w , formuladas para o modelo de interpolação I. Assim, tem-se:

$$\{\psi^1\} = \{1, x_2, x_3, x_2x_3, x_2^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_3^3\}$$

$$\{\psi^2\} = \{1, x_2, x_3, x_2^3\} \quad (4.3a,b,c)$$

$$\{\psi^3\} = \{1, x_2, x_3, x_3^3\}$$

4.2.3 - Modelo de interpolação III

Neste modelo, a interpolação do deslocamento u em x_2 e x_3 é feita por polinômios incompletos sem termos cruzados. Os des

locamentos v e w são interpolados com o mesmo grupo de polinômios do modelo II. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}\{\psi^1\} &= \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_3^2, x_2^3, x_3^3\} \\ \{\psi^2\} &= \{1, x_2, x_3, x_2^3\} \\ \{\psi^3\} &= \{1, x_2, x_3, x_3^3\}\end{aligned}\tag{4.4a,b,c}$$

4.2.4 - Modelo de interpolação IV

Neste modelo, o grupo de polinômios de interpolação do deslocamento u é o mesmo usado no modelo I. Uma outra maneira de preservar a hipótese $\epsilon_{23} = 0$ é mostrada no Apêndice A3. Dessa maneira, pode-se formular um grupo de funções mais completo para interpolos os deslocamentos v e w , na forma:

$$\begin{aligned}\{\psi^1\} &= \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_2^3, x_3^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_3^3\} \\ \{\psi^2\} &= \{1, x_2, x_3, x_2x_3, x_3^2/2, x_2^2/2, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_2^3/3, x_3^3/3\} \\ \{\psi^3\} &= \{1, x_2, x_3, x_2^2/2, x_2x_3, x_2^2/2, x_2^3/3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_3^3/3\} \\ &\dots\end{aligned}\tag{4.5a,b,c}$$

4.3 - Aplicações em vigas retas

Os modelos propostos foram testados em vigas longas, médias e curtas.

a) Viga longa ($L/H > 10$)

A figura 4.1 apresenta uma viga longa engastada numa das extremidades, sendo a outra livre. A viga é submetida, isoladamente, a uma força normal N , um momento fletor M_3 , uma carga

F_2 e um torque T , concentrados na extremidade livre como mostra a mesma figura.

As tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam os resultados de deslocamentos e/ou rotações da extremidade livre e os valores usados na comparação dos resultados são aqueles fornecidos pelas teorias encontradas nos textos de resistência dos materiais.

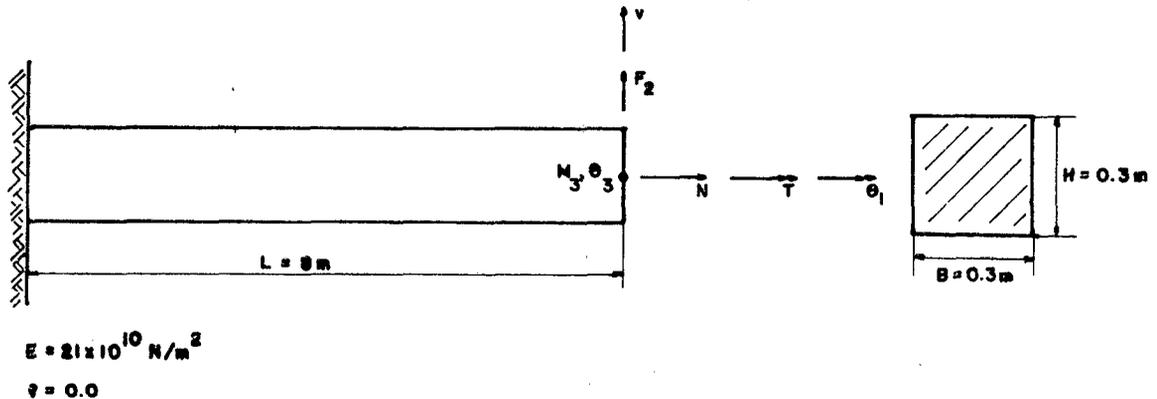


Fig. 4.1 - Viga longa engastada; Dimensões e carregamento.

Tabela 4.1 - Esforço normal; deslocamento u da extremidade livre

Nº EL.	II	III	IV
1	-	4,2328	-
2	4,2329	4,2329	4.2329
Valor exato: $u = 4,2329 \times 10^{-8} \text{ m}$		$N = 100 \text{ N}$	

Tabela 4.2 - Flexão pura; deslocamento v e rotação θ_3 da extremidade livre

Nº de Elementos	I		II		III		IV	
	v	θ_3	v	θ_3	v	θ_3	v	θ_3
1	1,800	4,4994	1,800	4,4994	1,7881	4,4855	-	-
2	1,800	4,4994	1,800	4,4994	1,800	4,4994	-	-
3	-	-	-	-	1,800	4,4994	1,7822	4,4664
Valor exato: $v = 1,8050 \times 10^{-4}$ m; $\theta_3 = 4,5125 \times 10^{-5}$ rd; $M_3 = 800$ Nm								

Tabela 4.3 - Flexão com cisalhamento; deslocamento v da extremidade livre.

Nº EL.	I	II	III	IV
1	1,2027	1,2027	1,1908	-
2	1,2027	1,2027	1,2027	-
3	-	-	1,2027	1,1900
Valor exato: $v = 1,2050 \times 10^{-4}$ m $F_2 = 100$ N				

Tabela 4.4 - Viga sob torção; ângulo de torção da extremidade livre.

Nº EL.	I	II	III	IV
1	4,5959	-	4,5151	-
2	5,0956	4,5151	4,5151	-
3	5,0956	-	-	4,5150
Valor exato: $\theta_1 = 5,1520 \times 10^{-5}$ rd $T = 800$ Nm				

Pela análise das tabelas anteriores nota-se que os campos de deslocamentos propostos, tiveram comportamento semelhante sob solicitações normais, flexionais e cisalhantes, para uma viga com uma relação $L/H > 10$.

Na torção, o melhor resultado foi obtido com o uso da formulação I com erro de 1,09%, enquanto que as demais formula-

ções apresentaram erros superiores a 10%.

b) Viga média ($L/H = 10$)

A figura 4.2 apresenta uma viga média engastada numa das extremidades e tendo a outra livre. A viga é submetida a uma carga concentrada F_2 na extremidade livre e a tabela 4.5 apresenta os valores obtidos para o deslocamento v da extremidade livre, com o uso da formulação I.

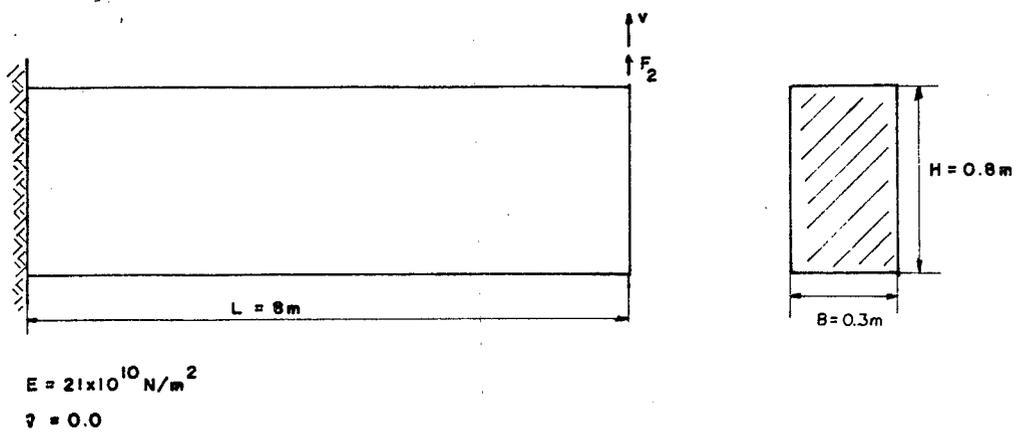


Fig. 4.2 - Viga média; dimensões e carregamento.

Tabela 4.5 - Flexão com cisalhamento; deslocamento v da extremidade livre; $L/H = 10$; $F_2 = 1000 \text{ N}$.

Nº	EL.	I
1		6,3845
2		6,3925
3		6,3907
Valor exato: $v = 6,3873 \times 10^{-5} \text{ m}$		

Para uma viga com $L/H = 10$, os resultados são semelhantes para todas as formulações sendo que, a que apresenta menor erro, 0,081%, é a formulação I.

Observa-se na tabela 4.5 que a malha com 4 elementos, onde cada elemento tem uma relação $L/H = 2,5$, apresenta piores resultados que a malha com 2 elementos onde cada elemento tem uma relação $L/H = 5$.

c) Viga curta ($L/H = 5$)

A análise da viga curta é feita de maneira idêntica à da viga média, mantendo-se a mesma condição de carregamento e aumentando-se a altura da seção para $H = 1,6$ m. A tabela 4.6 apresenta os valores obtidos para o deslocamento v da extremidade livre, com o uso da formulação I.

Tabela 4.6 - Flexão com cisalhamento; deslocamento v da extremidade livre; $L/H = 5$; $F = 1000$ N

Nº EL.	I
1	8,1250
2	8,1220
4	8,1128
Valor exato: $v = 8,1269 \times 10^{-6}$ m	

Novamente neste caso, os melhores resultados foram obtidos com a formulação I, com erro 0,023%.

Pela análise da tabela 4.6, nota-se que, apesar da grande precisão no cálculo do deslocamento v obtida com o uso de apenas 1 elemento com relação $L/H = 5$, o refino da malha para 2 e 4 elementos com relações $L/H = 2,5$ e $L/H = 1,25$, respectivamente, provoca um enrijecimento da estrutura. Tal enrijecimento foi também observado no caso da viga média modelada com 4 elementos com relação $L/H = 2,5$.

Na viga longa com carga concentrada na extremidade li-

vre, o momento fletor em pontos próximos a ela é pequeno em comparação aos pontos próximos do engaste. Os resultados obtidos com a formulação I mostram que o elemento representou bem os deslocamentos de corpo rígido, predominantes nessa região onde o momento fletor é pequeno $|M|$. Tal raciocínio conduz à conclusão que a formulação I, não satisfaz plenamente os estados de deformação constante, predominantes quando o elemento tem comprimento pequeno e restringe a sua aplicação a casos onde a relação $L/H > 2,5$.

4.4 - Aplicações em vigas curvas

Na aplicação em vigas curvas foi usada a formulação I, que manteve o melhor desempenho global nas aplicações às vigas retas. O conjunto de polinômios de interpolação $\{\psi^1\}$ do deslocamento u foi expandido e inclui todas as componentes polinomiais em x_2 e x_3 de grau até 5 inclusive. O conjunto $\{\psi^1\}$ assume a forma:

$$\{\psi^1\} = \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_2^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_3^3, x_2^4, x_2^3x_3, x_2^2x_3^2, x_2x_3^3, x_3^4, x_2^5, x_2^4x_3, x_2^3x_3^2, x_2^2x_3^3, x_2x_3^4, x_3^5\} \quad (4.2d)$$

Os resultados obtidos são comparados com os da referência [10], tomados como exatos. As equações apresentadas nessa referência foram obtidas através do Teorema de Castigliano e desprezando-se o efeito cisalhante devido às cargas transversais. As demais hipóteses são as mesmas formuladas no presente trabalho, embora o autor não forneça detalhes acerca das limitações e do desenvolvimento do extenso formulário que apresenta.

A figura 4.7 apresenta uma viga curva engastada numa das extremidades tendo a outra livre. As tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 apresentam os resultados de deslocamento v , ângulo de torção θ_1 e ângulo de giro θ_3 da seção na extremidade livre, respectivamente. As tabelas 4.10, 4.11 e 4.12 apresentam os resultados de solicitações internas.

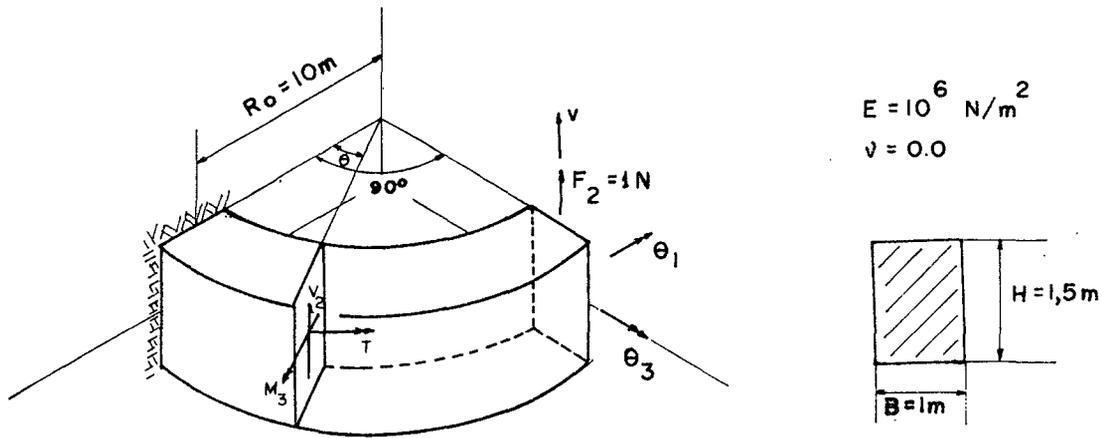


Fig. 4.7 - Viga curva engastada.

Tabela 4.7 - Deslocamento v da extremidade livre

Nº EL.	I	ERRO(%)
1	4,5676	12,5
2	5,0093	4,04
4	5,0835	2,62
8	4,9348	5,47
Valor exato: $v = 5,2202 \times 10^{-3} \text{ m}$		

Tabela 4.8 - Ângulo de torção θ_1 da extremidade livre.

Nº EL.	I	ERRO(%)
1	1,1599	20,69
2	1,4279	2,41
4	1,4780	1,06
8	1,4109	5,53
Valor exato: $\theta_1 = 1,4625 \times 10^{-4} \text{ rd}$		

Tabela 4.9 - Ângulo de giro θ_3 da seção na extremidade livre.

Nº EL	I	ERRO(%)
1	4,4382	14,41
2	4,8903	5,69
4	4,9822	3,92
8	4,7577	8,25
Valor exato: $\theta_3 = 5,1854 \times 10^{-4}$ rd		

Tabela 4.10 - Distribuição do esforço cortante V_2 , momento fletor Mf_3 e torque T na viga; malha com 8 elementos.

θ (°)	V_2 (N)	ERRO(%)	T (Nm)	ERRO(%)	Mf_3 (Nm)	ERRO(%)
0	1,0000	0,0	9,9999	0,001	9,9992	0,018
11,25	1,0000	0,0	8,0490	0,001	9,8072	0,007
22,5	1,0000	0,0	6,1730	0,003	9,2384	0,004
33,75	1,0000	0,0	4,4442	0,002	8,3145	0,002
45,0	1,0003	0,030	2,9290	0,003	7,0715	0,006
56,25	1,0005	0,050	1,6854	0,006	5,5557	0,0
67,5	1,0005	0,050	0,7613	0,011	3,8269	0,003
78,75	1,0000	0,0	0,1922	0,026	1,9509	0,0
90,0	1,0000	0,0	0,0	-	0,0	-

No caso de vigas retas observa-se um enrijecimento da estrutura quando a relação L/H do elemento é 2,5. No caso de vigas curvas o enrijecimento foi observado para L/H = 1,31. Recomenda-se o uso desta formulação preservando sempre uma relação L/H do elemento, maior ou igual a 2,62, que é o valor correspondente à malha de 4 elementos.

Nota-se nas tabelas 4.10, 4.11 e 4.12 que há uma convergência bastante boa na determinação das solicitações internas da estrutura.

Isto ratifica a afirmação anterior de que os estados de deformação constante do elemento não são plenamente satisfeitos pela formulação proposta.

Tabela 4.11 - Distribuição do esforço cortante V_2 , momento fletor Mf_3 e torque T na viga; malha com 4 elementos.

$\theta(^{\circ})$	V_2 (N)	ERRO(%)	T(Nm)	ERRO(%)	Mf_3 (Nm)	ERRO(%)
0	0,9999	0,010	10,0100	0,100	10,0690	0,690
22,5	0,9999	0,010	6,2392	1,069	9,3368	1,061
45,0	1,0000	0,0	2,9584	0,997	7,1638	1,311
67,5	1,0000	0,0	0,7656	0,578	3,8822	1,488
90,0	1,0000	0,0	0,0	-	0,0	-

Tabela 4.12 - Distribuição do esforço cortante V_2 , momento fletor Mf_3 e torque T na viga; malha com 2 elementos.

$\theta(^{\circ})$	V_2 (N)	ERRO(%)	T(Nm)	ERRO(%)	Mf_3 (Nm)	ERRO(%)
0	1,0000	0,0	10,1020	1,020	10,0710	0,710
45	1,0000	0,0	2,9599	1,058	7,1679	1,369
90	1,0000	0,0	0,0	-	0,0	-

5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os resultados apresentados mostram que a formulação proposta oferece boa acuidade na determinação dos deslocamentos, rotações e solicitações internas em vigas curvas. Tal formulação porém, se mostrou inadequada à determinação direta das tensões no elemento, em parte devido as limitações do princípio variacional usado, que permite boa convergência para deslocamentos não assegurando convergência para tensões. (Apêndice A4).

Também o fato de o elemento ter apenas 2 nós dispostos no eixo baricêntrico da viga, não permite que se refine as malhas no plano da seção, limitando o refino apenas à direção axial da estrutura.

Através de um esquema apropriado, o cálculo de tensões pode ser realizado utilizando-se os valores obtidos para as solicitações internas da estrutura, como forma de complementar a formulação apresentada.

Outras formas de implementar a formulação apresentada são a investigação, em maior profundidade, dos modos de deslocamentos rígidos e estados de deformação constante, para incluí-los explicitamente nos campos de deslocamento, bem como, a definição dos graus de liberdade do elemento em relação à linha neutra do mesmo. Assim, pode-se desenvolver funções de interpolação de ordem superior na direção axial do elemento, tornando-o adequado para aplicações com malhas ainda mais grosseiras. Além disso, pode-se estender a formulação apresentada a outras formas de seção transversal.

Outras formulações semelhantes podem ser desenvolvidas com a prescrição de um campo de deformações compatível, do qual seria obtido um campo de deslocamento mais próximo do comportamento real da viga, possibilitando melhor convergência pontual para determinação direta das tensões.

Uma formulação baseada num elemento com 8 nós e com um campo de deslocamento de ordem inferior, permite o refino das malhas também no plano da seção, podendo também solucionar satisfatoriamente o problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Wempner, G. - "Mechanics of solids with applications to thin bodies", McGraw - Hill, N. York, 1973.
2. Alves, D.B. - Teoria das Cascas, UFSC/Centro Tecnológico, 1977.
3. Boresi, A. P. - "Elasticity in engineering mechanics", Prentice Hall, N. Jersey, 1965.
4. Langhaar, H. L. - Torsion of curved beams of rectangular cross section, Journal of applied Mechanics - Transactions of the ASME, March, pp. 49-53, 1952.
5. Ferguson, G. H. e R.D. Clark - A variable thickness, curved beam and shell stiffening element with shear deformations, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 4, pp. 581-592, 1979.
6. Huebner, K. H. - "The finite element method for engineers", Willey, 1975.
7. Bathe, K. J. e E. L. Wilson - "Numerical methods in finite element analysis", Prentice Hall, 1976.
8. Nitzsche, R. N. e R.E. Miller - Torsion and flexure of curved thin walled beams or tubes, Journal of the Engineering Mechanics Division - Proceedings of the ASCE, EM4, pp. 867-869, 1972.
9. Barcellos, C. S. de e E. da Rosa - SIMELF-Sistema Modular de Elementos Finitos, GRANTE 02/78, 1979.
10. Hogan, M. B. - Circular beams loaded normal to the plane of curvature, Design Data and Methods - Applied Mechanics, Transactions of the ASME, July, 1953.

11. Cook, R. D. - "Concepts and applications of finite element analysis", Willey, 1974.
12. Young, M. C. - Flexibility influence functions for curved beams, Journal of the Structural Division - Proceedings of the ASME, ST7, pp. 1407-1429, 1969.
13. Williams, H. E. - Linear theory of thin rings, Journal of the Engineering Mechanics Division, - Proceedings of the ASCE, EM5, pp. 1031-1051, 1972.
14. Douglas, T. R. e S. C. Gambrell - Theoretical analysis of curved girder bridges, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM5, pp. 991-1003, 1974.
15. Perry, R. F. - Pipe elbow stiffness coefficients including shear and bend flexibility factors for use in direct stiffness codes, Transactions of the 4th. International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. F, paper F1/2, 1977.
16. Sabir, A. B. - Stiffness for the general deformation (out-of-plane and inplane) of curved beams members based on independent strain functions, MAFELAP 1975, Academic Press.
17. Reddy, M. N. - Stiffness of circular-arc I - section girders, Journal of the Structural Division, ST6, pp. 911-9 9,1978.

A P E N D I C E S

A1 - VETORES TANGENTES ÀS LINHAS DE COORDENADAS FORA DA LINHA DE REFERÊNCIA $(x_1, 0, 0)$

A1.1 - Configuração indeformada

O vetor posição de um ponto fora da linha de referência $(x_1, 0, 0)$, definido na equação (2.9), é dado por:

$$\tilde{r} = \tilde{r}_0 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$$

Aplicando-se a \tilde{r} as definições (2.4a) e (2.2a), obtém-se, para $i = 1, 3$:

$$\tilde{g}_1 = \tilde{r}_{,1} = \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_{2,1} + x_3 \hat{e}_{3,1}$$

$$\tilde{g}_2 = \tilde{r}_{,2} = \hat{e}_2 \quad (\text{A1.1-1a,b,c})$$

$$\tilde{g}_3 = \tilde{r}_{,3} = \hat{e}_3$$

Em relação aos vetores $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, os vetores tangentes às linhas de coordenadas fora da linha de referência $(x_1, 0, 0)$ podem ser expressos por:

$$\tilde{g}_i = (\tilde{g}_i \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\tilde{g}_i \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2 + (\tilde{g}_i \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3 \quad \text{A1.1-2}$$

onde $i = 1, 3$. Efetuando os produtos internos indicados na equação (A1.1-2) para $i = 1, 3$ e levando em consideração a definição da curvatura e da torção iniciais, equações (2.8), obtém-se os vetores tangentes na forma

$$\tilde{g}_1 = \alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2 + \gamma \hat{e}_3$$

$$\tilde{g}_2 = \hat{e}_2 \quad (\text{A1.1-3a,b,c})$$

$$\tilde{g}_3 = \hat{e}_3$$

onde

$$\alpha = 1 - X_2 x_2 - X_3 x_3$$

$$\beta = -\tau x_3$$

$$\gamma = \tau x_2$$

As derivadas dos vetores tangentes \tilde{g}_i , podem ser colocadas na forma:

$$\tilde{g}_{i,j} = (\tilde{g}_{i,j} \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\tilde{g}_{i,j} \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2 + (\tilde{g}_{i,j} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3 \quad (\text{A1.1-4})$$

onde

$$i,j = 1, 3 \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{i,j} = \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial x_j}$$

Operando a equação (A1.1-4) usando as equações (A1.1-3) para $i,j = 1, 3$ e observando as definições da curvatura e torção iniciais, equações (2.8), tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{1,1} = & (\alpha_{,1} - \beta X_2 - \gamma X_3) \hat{e}_1 + (\beta_{,1} + \alpha X_2 - \gamma \tau) \hat{e}_2 + \\ & + (\gamma_{,1} + \alpha X_3 + \beta \tau) \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A1.1-5a})$$

$$\tilde{g}_{1,2} = -X_2 \hat{e}_1 + \tau \hat{e}_3 \quad (\text{A1.1-5b})$$

$$\tilde{g}_{1,3} = -X_3 \hat{e}_1 - \tau \hat{e}_2 \quad (\text{A1.1-5c})$$

$$\tilde{g}_{2,1} = -X_2 \hat{e}_1 + \tau \hat{e}_3 \quad (\text{A1.1-5d})$$

$$\tilde{g}_{2,2} = 0 \quad (\text{A1.1-5e})$$

$$\tilde{g}_{2,3} = 0 \quad (\text{A1.1-5f})$$

$$\tilde{g}_{3,1} = -X_3 \hat{e}_1 - \tau \hat{e}_2 \quad (\text{A1.1-5g})$$

$$\bar{g}_{3,2} = 0 \quad (\text{A1.1-5h})$$

$$\bar{g}_{3,3} = 0 \quad (\text{A1.1-5i})$$

A1.2 - Configuração deformada

Na configuração deformada, o vetor posição de um ponto fora da linha de referência $(x_1, 0, 0)$ é dado pela equação (2.14), e os vetores tangentes às linhas de coordenadas, definidos na equação (2.2b), são dados por:

$$\bar{G}_i = \bar{g}_i + \left(\frac{u}{A} \bar{g}_1\right)_{,i} + (v \hat{e}_2)_{,i} + (w \hat{e}_3)_{,i}, \quad i = 1, 3 \quad (\text{A1.2-1})$$

que após efetuadas as operações indicadas tendo em conta as equações (2.10) e (A1.1-6), fornece

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 = & \{ [1 + (u/A)_{,1}] \alpha + \frac{u \alpha_{,1}}{A} - X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) - X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) \} \hat{e}_1 + \\ & + \{ [1 + (u/A)_{,1}] \beta + \frac{u \beta_{,1}}{A} - \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \} \hat{e}_2 + \\ & + \{ [1 + (u/A)_{,1}] \gamma + \frac{u \gamma_{,1}}{A} + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \} \hat{e}_3 \\ & \dots (\text{A1.2-2a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_2 = & \left[\alpha (u/A)_{,2} - \frac{X_2 u}{A} \right] \hat{e}_1 + [1 + \beta (u/A)_{,2} + v_{,2}] \hat{e}_2 + \\ & + \left[\gamma (u/A)_{,2} + \frac{\tau u}{A} + w_{,2} \right] \hat{e}_3 \quad (\text{A1.2-2b}) \end{aligned}$$

$$\bar{G}_3 = \left\{ \alpha (u/A)_{,3} - \frac{X_3 u}{A} \right\} \hat{e}_1 + \left\{ \beta (u/A)_{,3} - \frac{\tau u}{A} + v_{,3} \right\} \hat{e}_2 +$$

$$+ \{1 + \gamma(u/A)_{,3} + w_{,3}\} \tilde{e}_3 \quad (\text{A1.2-2c})$$

A1.3 - Determinação das componentes $\tilde{G}_i \cdot \tilde{G}_j$ das relações de deformações-deslocamentos.

As componentes $\tilde{G}_i \cdot \tilde{G}_j$ definem a métrica do espaço de coordenadas na configuração deformada. Com os valores de \tilde{G}_i dados nas equações (A1.2-2), estas componentes são expressas por:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 \cdot \tilde{G}_1 = & A^2 + 2A^2(u/A)_{,1} + 2\alpha \left[\frac{u \alpha_{,1}}{A} - X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) - X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) \right] + \\ & + 2\beta \left[\frac{u \beta_{,1}}{A} - \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \right] + 2\gamma \left[\frac{u \gamma_{,1}}{A} + \right. \\ & + \left. \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \right] + (u/A)^2 [(\alpha_{,1})^2 + (\beta_{,1})^2 + (\gamma_{,1})^2] + \\ & + X_2^2 \left[\left(\frac{\beta u}{A} + v \right)^2 + \left(\frac{\alpha u}{A} \right)^2 \right] + X_3^2 \left[\left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)^2 + \left(\frac{\alpha u}{A} \right)^2 \right] + \\ & + \tau^2 \left[\left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)^2 + \left(\frac{\beta u}{A} + v \right)^2 \right] + 2(u/A)_{,1} \left\{ \frac{u}{A} (\alpha \alpha_{,1} + \right. \\ & + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1}) + X_2 \left[(\alpha - \beta) \frac{u}{A} - v \right] + X_3 \left[(\alpha - \gamma) \frac{u}{A} - \right. \\ & - \left. w \right] + \tau \left[(\beta - \gamma) \frac{u}{A} + v - w \right] + v_{,1} + w_{,1} \left. \right\} + \\ & + \frac{2u}{A} \left\{ X_2 \left[\alpha_{,1} \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \beta_{,1} \frac{\alpha u}{A} \right] + X_3 \left[-\alpha_{,1} \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\gamma_{,1} \alpha u}{A} \right] + \tau \left[-\beta_{,1} \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \gamma_{,1} \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) \right] + \beta_{,1} v_{,1} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_{,1} w_{,1} + X_2 X_3 \beta \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) - \tau \gamma \left(\frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \right) + X_2 \alpha v_{,1} + \\
& + \tau \beta \left(\frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \right) + X_3 \alpha w_{,1} \} + 2v [X_2 X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \\
& + \tau \left(\frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \right)] - 2w\tau \left(\frac{X_2 \alpha u}{A} + v_{,1} \right) + (v_{,1})^2 + (w_{,1})^2 \\
& \dots (A1.3-1a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_2 \cdot \bar{G}_2 & = 1 + 2\beta(u/A)_{,2} + 2v_{,2} + (u/A)^2 (X_2^2 + \tau^2) + 2(u/A)_{,2} \left[\frac{u}{A} (\gamma\tau - \right. \\
& \left. - \alpha X_2) + \beta v_{,2} + \gamma w_{,2} \right] + [(u/A)_{,2} A]^2 + (v_{,2})^2 + \\
& + (w_{,2})^2 + \frac{2\tau u w_{,2}}{A} \quad (A1.3-1b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_3 \cdot \bar{G}_3 & = 1 + 2\gamma(u/A)_{,3} + 2w_{,3} + (u/A)^2 (X_3^2 + \tau^2) + 2(u/A)_{,3} \left[-\frac{u}{A} (\beta\tau + \right. \\
& \left. + \alpha X_3) + \beta v_{,3} + \gamma w_{,3} \right] + [(u/A)_{,3} A]^2 + (v_{,3})^2 + \\
& + (w_{,3})^2 + \frac{2\tau u v_{,3}}{A} \quad (A1.3-1c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 & = (u/A)_{,2} A^2 + v_{,1} - \tau w + \beta [1 + (u/A)_{,1} + v_{,2}] + \gamma w_{,2} + \\
& + \frac{u}{A} \beta_{,1} + \frac{u}{A} (u/A)_{,2} [\alpha \alpha_{,1} + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1} + \alpha (X_2 \beta + \\
& + X_3 \gamma)] + (u/A)_{,2} \{ \beta v_{,1} + \gamma w_{,1} - \alpha [X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)] - \tau \left[\beta \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \gamma \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) \right] \} + \\
& + v_{,2} \left[\left(\frac{\beta u}{A} \right)_{,1} - \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \frac{X_2 \alpha u}{A} \right] + w_{,2} \left[\left(\frac{\gamma u}{A} \right)_{,1} + \right. \\
& + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \left. \frac{X_3 \alpha u}{A} \right] + \frac{u}{A} \left\{ -X_2 \left(\frac{\alpha u}{A} \right)_{,1} + X_2 \left[X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \right. \right. \\
& + X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)] + \tau \left[\left(\frac{\gamma u}{A} \right)_{,1} + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \left. \frac{X_3 \alpha u}{A} + w_{,1} \right] \} + \\
& + (u/A)_{,1} (u/A)_{,2} A^2 + v_{,1} v_{,2} + w_{,1} w_{,2} \tag{A1.3-1d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_1 \cdot \bar{G}_3 & = (u/A)_{,3} A^2 + w_{,1} + \tau v + \gamma [1 + (u/A)_{,1} + w_{,3}] + \beta v_{,3} + \\
& + \frac{u}{A} \gamma_{,1} + \frac{u}{A} (u/A)_{,3} [\alpha \alpha_{,1} + \beta \beta_{,1} + \gamma \gamma_{,1} + \alpha (X_2 \beta + \\
& + X_3 \gamma)] + (u/A)_{,3} \{ \beta v_{,1} + \gamma w_{,1} - \alpha [X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \\
& + X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right)] - \tau \left[\beta \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \gamma \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) \right] \} + v_{,3} \left[\left(\frac{\beta u}{A} \right)_{,1} - \right. \\
& - \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + \left. \frac{X_2 \alpha u}{A} \right] + w_{,3} \left[\left(\frac{\gamma u}{A} \right)_{,1} + \tau \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) + \right. \\
& + \left. \frac{X_3 \alpha u}{A} \right] + \frac{u}{A} \left\{ -X_3 \left(\frac{\alpha u}{A} \right)_{,1} + X_3 \left[X_3 \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) + X_2 \left(\frac{\beta u}{A} + v \right) \right] + \right. \\
& + \tau \left[- \left(\frac{\beta u}{A} \right)_{,1} + \tau \left(\frac{\gamma u}{A} + w \right) - \left. \frac{X_2 u}{A} - v_{,1} \right] \} + \\
& + (u/A)_{,1} (u/A)_{,3} A^2 + v_{,1} v_{,3} + w_{,1} w_{,3} \tag{A1.3-1e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_2 \cdot \bar{G}_3 = & w_{,2} + v_{,3} + \beta(u/A)_{,3} + \gamma(u/A)_{,2} + (u/A)_{,2}(u/A)_{,3} A^2 + \\
& + v_{,2} v_{,3} + w_{,2} w_{,3} + \frac{u}{A} \{ (u/A)_{,3} (\tau\gamma - X_2 \alpha) + \\
& + (u/A)_{,2} (-\tau\beta - X_3 \alpha) - \tau(v_{,2} + w_{,3}) - \frac{X_2 X_3 u}{A} \} + \\
& + (u/A)_{,2} (\beta v_{,3} + \gamma w_{,3}) + (u/A)_{,3} (\beta v_{,2} + \gamma w_{,2}) \\
& \dots (A1.3-1f)
\end{aligned}$$

A2 - PROGRAMA TESTE

A2.1 - Introdução

Para testar o modelo de elemento finito proposto, foi desenvolvido um programa de elementos finitos, de pequeno porte, cuja estrutura funcional é mostrada na figura A2.1. Este programa na sua forma atual, determina deslocamentos e tensões de estruturas compostas de vigas curvas, que possuam um número máximo de 16 elementos.

O processo de condensação estática dos parâmetros não nodais e a solução do sistema são realizados por 2 subrotinas do programa SIMELF [9] atualmente sendo desenvolvido na UFSC.

O programa utiliza elementos iguais na modelagem das estruturas e admite apenas cargas nodais. Tais restrições não prejudicam a generalidade do elemento uma vez que as mesmas solicitações internas resultantes de carregamentos mais gerais, podem ser testadas apenas com cargas concentradas nos nós da estrutura.

A2.2 - Descrição do programa teste

A2.2.1 - Leitura de dados do problema

Na fase 1, são lidos apenas os dados relativos às opções usadas, ao elemento e à estrutura. Os dados de condições de contorno e carregamento, são lidos no momento de sua utilização, na fase 3 do programa.

Os dados iniciais relativos ao elemento e à estrutura, são usados na determinação das propriedades elásticas do elemento, na distribuição dos pontos de integração do processo de Gauss-Legendre e no dimensionamento e endereçamento dos conjuntos de valores obtidos nas diversas fases de execução do programa.

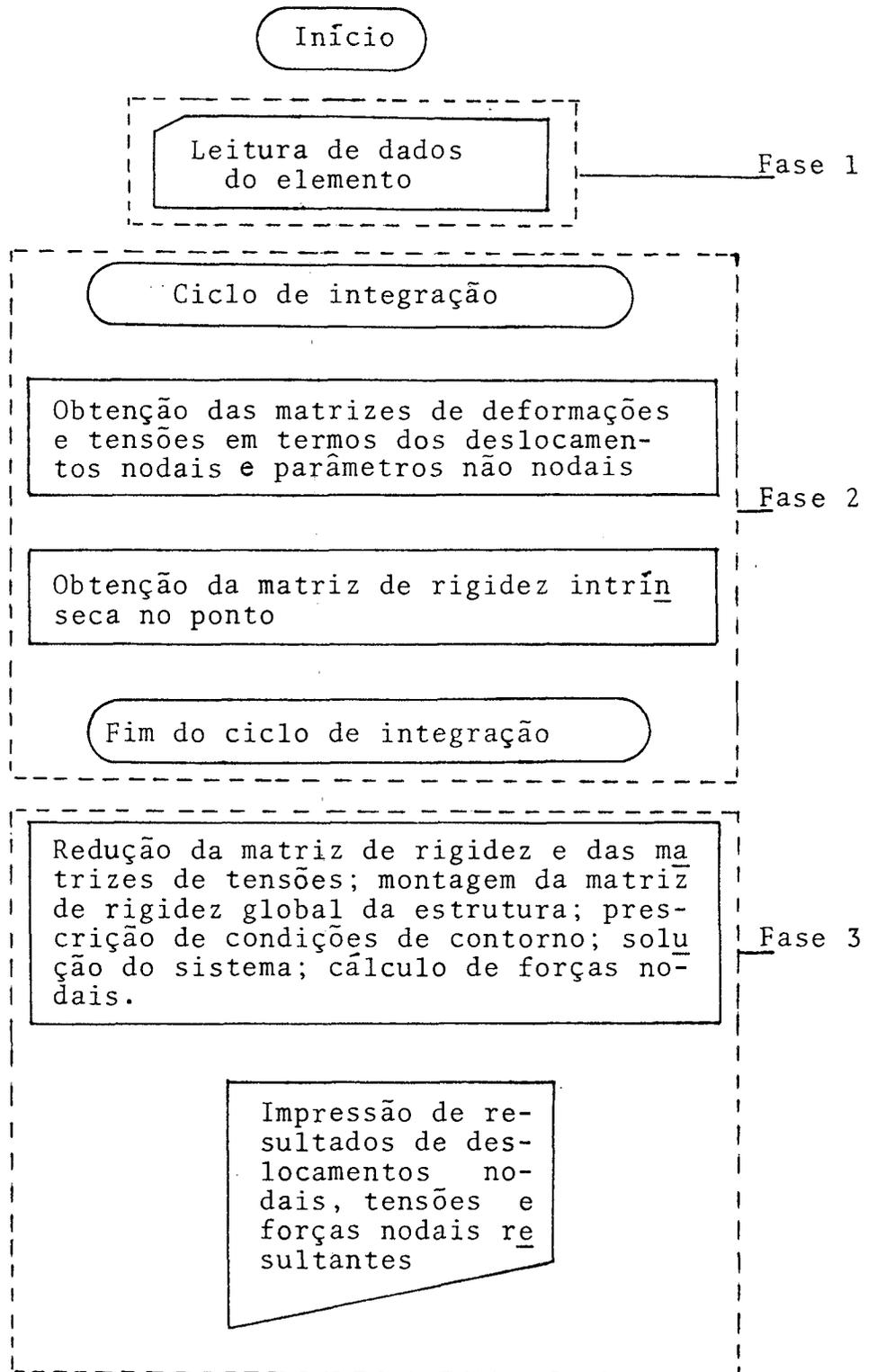


Figura A2.1

A2.2.2 - Ciclo de integração

Na fase 2 são calculadas as matrizes de deformações, equação (3.7b), tensões, equação (3.9b) e rigidez. Estas matrizes são calculadas em cada um dos pontos de integração prescritos e as matrizes de tensões são arquivadas na memória auxiliar em disco, para posterior cálculo das tensões nesses pontos. Ao final do ciclo de integração, obtém-se a matriz de rigidez intrínseca como resultado da integração da equação (3.11a).

A2.2.3 - Solução do sistema

Na fase 3 são efetuadas a condensação estática dos parâmetros não nodais e a redução das matrizes de tensões do elemento. A seguir é montada a matriz de rigidez global da estrutura, são prescritas as condições de contorno e carregamento, determinados os deslocamentos, forças nodais, tensões nos pontos usados na integração da matriz de rigidez e as solicitações internas nos nós da estrutura.

A3 - Deformações no elemento em termos dos deslocamentos nodais.

A3.1 - Considerações sobre a hipótese $\epsilon_{23} = 0$

No Capítulo II, Equação (3.3c), o vetor deslocamentos no elemento em termos dos deslocamentos nodais foi expresso na forma:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N^1; H^1] & (\text{zero}) \\ & [N^2; H^2] \\ (\text{zero}) & [N^3; H^3] \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (\text{a})$$

onde o vetor deslocamentos nodais $\{\delta\}$ é formado por

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} [u^1] \\ [u^2] \\ [u^3] \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.1-1})$$

sendo

$[u^1]$ - vetor deslocamentos nodais e parâmetros não nodais associado às funções de interpolação do deslocamento u no elemento.

$[u^2]$ - vetor deslocamentos nodais e parâmetros não nodais associado às funções de interpolação do deslocamento v no elemento.

$[u^3]$ - vetor deslocamentos nodais e parâmetros não nodais associado às funções de interpolação do deslocamento w no elemento.

Através das relações deformações-deslocamentos, equação (2.31), obtém-se, sendo $a = R_o / (R_o + x_3)$ e $b = 1 / (R_o + x_3)$,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a[N^1;H^1]_{,1} & [\theta] & b[N^3;H^3] \\ [\theta] & [N^2;H^2]_{,2} & [\theta] \\ [\theta] & [\theta] & [N^3;H^3]_{,3} \\ [N^1;H^1]_{,2} & a[N^2;H^2]_{,1} & [\theta] \\ [N^1;H^1]_{,3} - b[N^1;H^1] & [\theta] & a[N^3;H^3]_{,1} \\ [\theta] & [N^2;H^2]_{,3} & [N^3;H^3]_{,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u^1] \\ [u^2] \\ [u^3] \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.1-2})$$

Da Hipótese (3) do Capítulo II, resulta

$$\epsilon_{23} = [N^2;H^2]_{,3} \{u^2\} + [N^3;H^3]_{,2} \{u^3\} = 0 \quad (\text{A3.1-3})$$

e para que seja possível assegurar a validade dessa hipótese ao longo de todo o elemento será necessário que:

$$-[N^2;H^2]_{,3} = [N^3;H^3]_{,2} \quad (\text{A3.1-4})$$

que permite reescrever a equação (A3.1-3) na forma:

$$\epsilon_{23} = [-[N^2;H^2]_{,3} + [N^3;H^3]_{,2}] \{u^2\} = [-[N^2;H^2]_{,3} + [N^3;H^3]_{,2}] \{u^3\} = 0 \quad \dots (\text{A3.1-5})$$

A equação (A3-4) representa a igualdade entre duas matrizes linha. Conseqüentemente elas deverão ter um número igual de elementos, ou seja, quaisquer famílias de funções de interpolação u usadas para os deslocamentos v e w deverão conter o mesmo número de elementos e satisfazer a equação A3.1-4.

Na equação A3.1-5, os elementos nulos das matrizes linha apresentadas, estão associados às funções de interpolação que não influenciam na deformação ϵ_{23} e, conseqüentemente, não estão sujeitos às restrições impostas pela Hipótese (3) do Capítulo II.

A3.2 - Montagem da matriz das relações deformações-deslocamentos nodais

A equação A3.1-2 pode ser reordenada na forma:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a[N^1]_{,1} & [\theta] & b[N^3] & a[H^1]_{,1} & [\theta] & b[H^3] \\ [\theta] & [N^2]_{,2} & [\theta] & [\theta] & [H^2]_{,2} & [\theta] \\ [\theta] & [\theta] & [N^3]_{,3} & [\theta] & [\theta] & [H^3]_{,3} \\ [N^1]_{,2} & [N^2]_{,1} & [\theta] & [H^1]_{,2} & [H^2]_{,1} & [\theta] \\ [N^1]_{,3} - b[N^1]_{,1} & [\theta] & [N^3]_{,1} & [H^1]_{,3} - b[H^1]_{,1} & [\theta] & [H^3]_{,1} \\ [\theta] & [N^2]_{,3} & [N^3]_{,2} & [\theta] & [H^2]_{,3} & [H^3]_{,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u^u] \\ [u^v] \\ [u^w] \\ [u^n] \end{Bmatrix} \quad \dots (A3.2-1)$$

onde

$[u^u], [u^v], [u^w]$ - deslocamentos nodais

$[u^n]$ - parâmetros não nodais.

As equações A3.1-4 e A3.1-5, juntamente com A3.2-1, resultam em

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a[N^1]_{,1} & [\theta] & b[N^3] & b[H^3] \\ [\theta] & [N^2]_{,2} & [\theta] & [H^2]_{,2} \\ [\theta] & [\theta] & [N^3]_{,3} & [H^3]_{,3} \\ [N^1]_{,2} & [N^2]_{,1} & [\theta] & [H^2]_{,1} \\ [N^1]_{,3} - b[N^1]_{,1} & [\theta] & [N^3]_{,1} & [H^3]_{,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u^u] \\ [u^v] \\ [u^w] \\ [u^n] \end{Bmatrix} \quad (A3.2-1)$$

A equação A3.2-1 assegura a validade da Hipótese (3) formulada no Capítulo II ao longo de todo o elemento. A linha $\varepsilon_{23}=0$ é omitida por ser esta deformação idênticamente nula segundo a referida hipótese. O segundo e terceiro grupos de colunas da equação A3.2-1 não estão sujeitos às restrições dessa hipótese, e portanto não obedecem a equação A3.1-5.

A4 - RESULTADOS DE TENSÕES

A4.1 - Introdução

Como foi enfatizado nas conclusões, a presente formulação não apresentou resultados satisfatórios para as tensões no elemento. Verificou-se que apenas as tensões normais à seção são avaliadas satisfatoriamente pelo modelo apresentado.

Neste apêndice são apresentados os resultados de tensões obtidas com a formulação I aplicada a vigas retas. Devido ao grande volume de dados de saída de tensões no elemento, foram selecionados alguns pontos da estrutura, nos quais é calculada a tensão através da teoria apresentada nos textos de resistência dos materiais e comparada com os dados do modelo proposto.

A4.2 - Localização dos pontos onde são calculadas as tensões na viga longa.

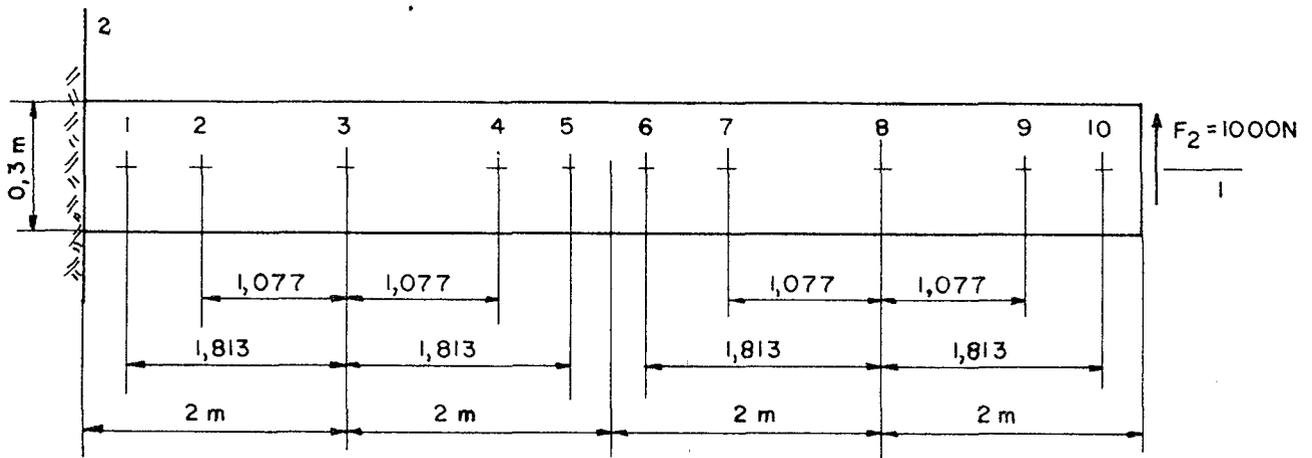


Figura A4.1 - Distribuição dos pontos ao longo do eixo da viga longa.

Cada um dos pontos sobre o eixo da viga, define uma seção, cuja distribuição de seus pontos é dada na figura A4.2.

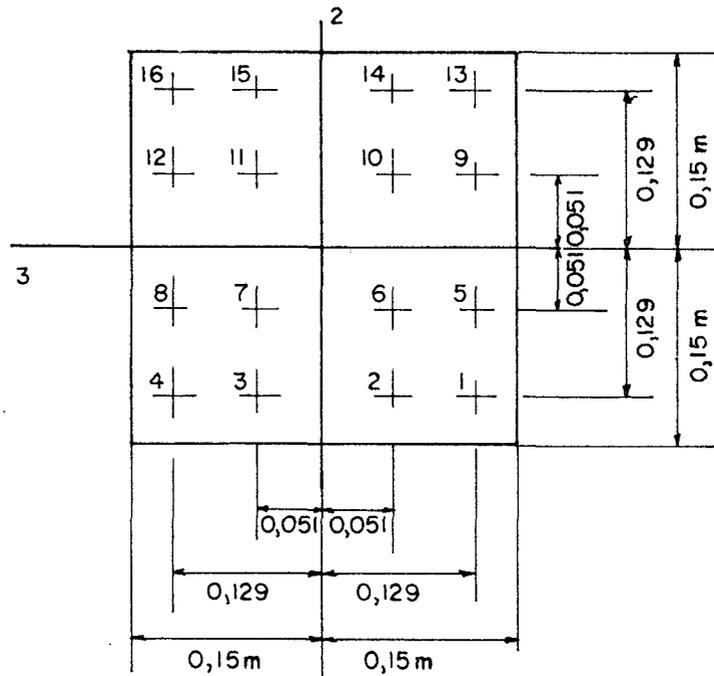


Figura A4.2 - Distribuição dos pontos na seção da viga longa.

Na figura A4.3 estão representadas as convenções para as tensões normais e de cisalhamento.

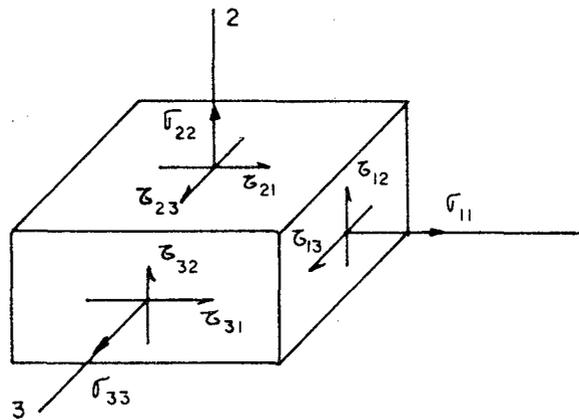


Figura A4.3 - Convenção para as tensões resultantes nos pontos de integração.

Tabela A4.1 - Distribuição das tensões numa viga longa com relação $L/H > 10$ sujeita a uma carga $F_2 = 1000N$ aplicada na extremidade livre (Figura A4.1); Modelo de interpolação I.

SEÇÃO	PONTO	σ_{11}			τ_{12}			ERROS (%)
		CALCULADO	ANALÍTICO	ERRO (%)	CALCULADO	ANALÍTICO	ERROS (%)	
1	1	1.4930×10^5	1.4932×10^5	-0.020	3.8038×10^2	4.3400×10^3	91.235	
	5	5.8951×10^4	5.9032×10^4	0.137	4.2469×10^2	1.4740×10^4	97.119	
	9	-5.8951×10^4	-5.9032×10^4	0.137	4.2487×10^2	1.4740×10^4	97.118	
	13	-1.4935×10^5	1.4932×10^5	-0.020	3.8050×10^2	4.3400×10^3	91.233	
3	1	1.1458×10^5	1.1467×10^5	0.078	2.3312×10^2	4.3400×10^3	94.629	
	5	4.5236×10^4	4.5334×10^4	0.216	1.6214×10^3	1.4740×10^4	89.000	
	9	-4.5236×10^4	-4.5334×10^4	0.216	1.6231×10^3	1.4740×10^4	89.988	
	13	-1.1458×10^5	-1.1467×10^5	0.078	2.3579×10^2	4.3400×10^3	94.567	
5	1	7.9237×10^4	8.0075×10^4	1.047	1.0710×10^3	4.3400×10^3	75.323	
	5	3.1299×10^4	3.1658×10^4	1.134	1.1160×10^3	1.4740×10^4	92.429	
	9	-3.1298×10^4	-3.1658×10^4	1.137	1.1170×10^3	1.4740×10^4	92.422	
	13	-7.9237×10^4	-8.0075×10^4	1.047	1.0710×10^3	4.3400×10^3	75.323	
8	1	3.8095×10^4	3.8222×10^4	0.332	2.3582×10^2	4.3400×10^3	94.566	
	5	1.5040×10^4	1.5111×10^4	0.470	1.4739×10^3	1.4740×10^4	90.001	
	9	-1.5040×10^4	-1.5111×10^4	0.470	1.4778×10^3	1.4740×10^4	89.974	
	13	-3.8095×10^4	-3.8222×10^4	0.332	2.4174×10^2	4.3400×10^3	94.430	
10	1	2.6692×10^3	3.5738×10^4	25.312	9.9200×10^2	4.3400×10^3	77.143	
	5	1.0668×10^3	1.4129×10^3	24.496	1.0310×10^3	1.4740×10^4	93.005	
	9	-1.0665×10^3	-1.4129×10^3	24.517	1.0310×10^3	1.4740×10^4	93.005	
	13	-2.6694×10^3	-3.5738×10^4	25.306	9.9300×10^2	4.3400×10^3	77.120	

A4.3 - Localização dos pontos onde são calculadas as tensões na viga média.

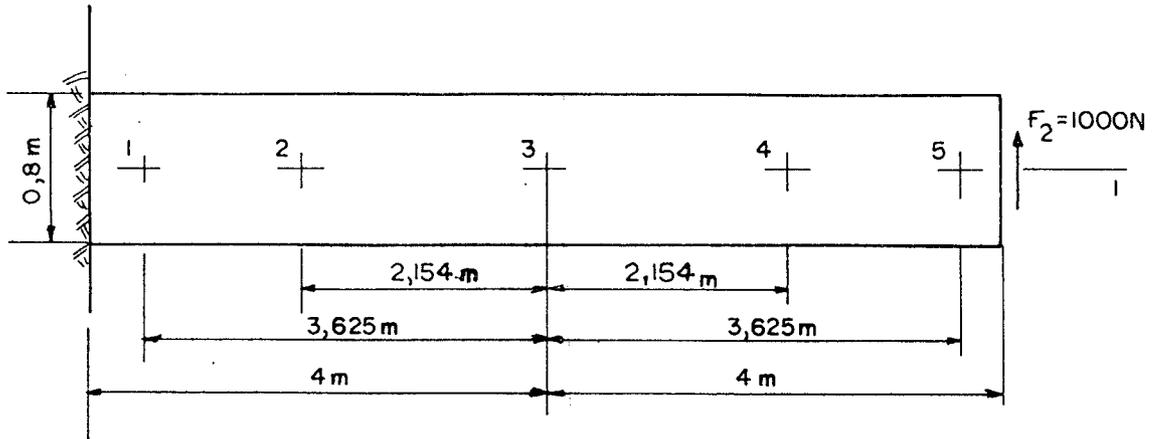


Figura A4.4 - Distribuição dos pontos ao longo do eixo da viga média, com $L/H=10$.

A distribuição dos pontos em cada uma das seções transversais ao longo da viga média é dada na Figura A4.5.

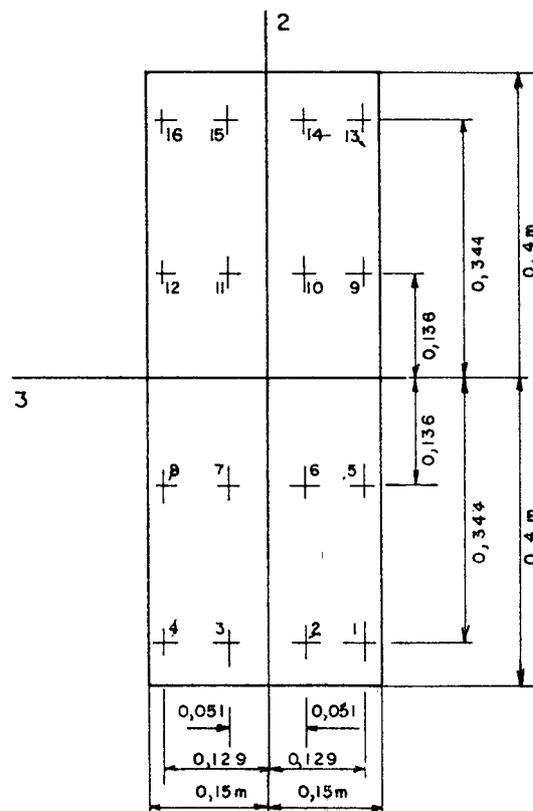


Figura A4.5 - Distribuição dos pontos na seção da viga média.

Tabela A4.2 - Distribuição das tensões numa viga média com relação $L/h=10$ sujeita a uma carga $F_2=1000N$ aplicada na extremidade livre (figura A4.4); Modelo de interpolação I.

SEÇÃO	PONTO	σ_{11}				τ_{12}			
		CALCULADO	ANALÍTICO	ERRO (%)	CALCULADO	ANALÍTICO	ERROS (%)		
1	1	2.0504×10^5	2.0492×10^5	-0.059	3.8904×10^3	1.6275×10^3	-139.041		
	5	8.0876×10^4	8.1016×10^4	0.173	4.0513×10^3	5.5276×10^3	26.708		
	9	-8.0876×10^4	-8.1016×10^4	0.173	4.0515×10^3	5.5276×10^3	26.704		
	13	-2.0504×10^5	-2.0492×10^5	-0.059	3.8905×10^3	1.6275×10^3	-139.048		
2	1	1.6590×10^5	1.6539×10^5	-0.308	2.7342×10^3	1.6275×10^3	-68.000		
	5	6.5323×10^4	6.5386×10^4	0.096	5.2699×10^3	5.5276×10^3	4.662		
	9	-6.5323×10^4	-6.5386×10^4	0.096	5.2701×10^3	5.5276×10^3	4.658		
	13	-1.6590×10^5	-1.6539×10^5	-0.308	2.7341×10^3	1.6275×10^3	-67.994		
3	1	1.0760×10^5	1.0750×10^5	-0.093	6.5389×10^2	1.6275×10^3	59.822		
	5	4.2480×10^4	4.2500×10^4	0.047	5.6837×10^3	5.5276×10^3	-2.824		
	9	-4.2480×10^4	-4.2500×10^4	0.047	5.6834×10^3	5.5276×10^3	-2.819		
	13	-1.0760×10^5	-1.0750×10^5	-0.093	6.5341×10^2	1.6275×10^3	59.852		
4	1	4.9271×10^4	4.9611×10^4	0.685	2.7060×10^3	1.6275×10^3	-66.267		
	5	1.9627×10^4	1.9614×10^4	-0.066	5.2424×10^3	5.5276×10^3	5.589		
	9	-1.9627×10^4	-1.9614×10^4	-0.066	5.2424×10^3	5.5276×10^3	5.589		
	13	-4.9271×10^4	-4.9611×10^4	0.685	2.7060×10^3	1.6275×10^3	-66.267		
5	1	1.0087×10^4	1.0078×10^4	-0.089	3.9223×10^3	1.6275×10^3	-141.002		
	5	4.0558×10^3	3.9844×10^3	-1.792	4.0831×10^3	5.5276×10^3	26.132		
	9	-4.0558×10^3	-3.9844×10^3	-1.792	4.0831×10^3	5.5276×10^3	26.132		
	13	-1.0087×10^4	-1.0078×10^4	-0.089	3.9214×10^3	1.6275×10^3	-140.946		

A4.4 - Localização dos pontos onde são calculadas as tensões na viga curta.

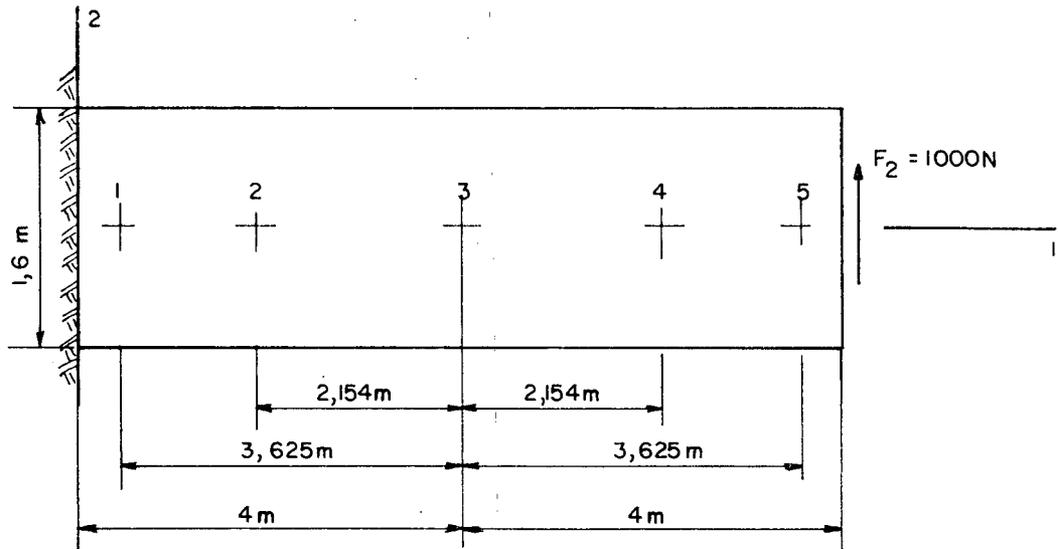


Figura A4.6 - Distribuição dos pontos ao longo do eixo da viga curta com $L/H=5$.

A distribuição dos pontos em cada uma das seções transversais da viga é dada na Figura A4.7.

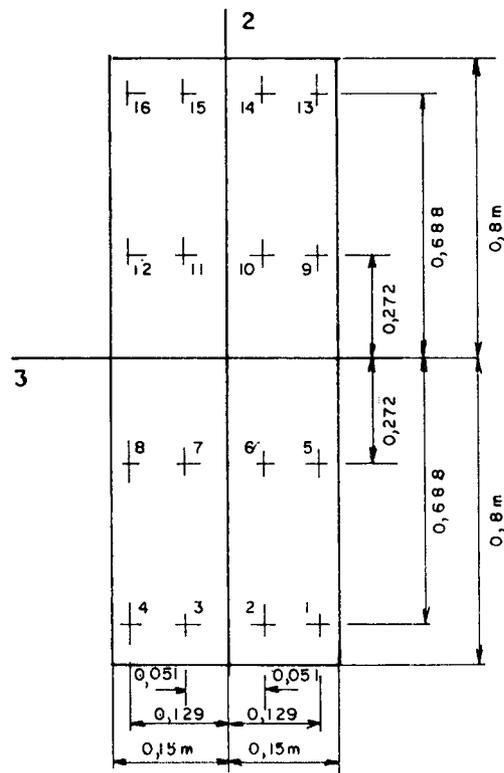


Figura A4.7 - Distribuição dos pontos na seção da viga curta.

Tabela A4.3 - Distribuição das tensões numa viga curta com relação $L/h=5$ sujeita a uma carga $F_2=1000N$ aplicada na extremidade livre (figura A4.6); Modelo de interpolação I.

SEÇÃO	PONTO	σ_{11}				τ_{12}			
		CALCULADO	ANALÍTICO	ERRO (%)	CALCULADO	ANALÍTICO	ERRO (%)		
1	1	5.1230×10^4	5.1174×10^4	-0.109	1.9580×10^3	8.1378×10^2	-140.606		
	2	2.0254×10^4	2.0131×10^4	-0.611	2.0373×10^3	2.7639×10^3	26.289		
	3	-2.0254×10^4	-2.0131×10^4	-0.611	2.0373×10^3	2.7639×10^3	26.289		
	4	5.1230×10^4	-5.1174×10^4	-0.109	1.9580×10^3	8.1378×10^2	-140.606		
2	1	4.1724×10^4	4.1347×10^4	-0.912	1.3725×10^3	8.1378×10^2	-68.694		
	2	1.6301×10^4	1.6347×10^4	0.281	2.6224×10^3	2.7639×10^3	5.120		
	3	-1.6501×10^4	-1.6347×10^4	0.281	2.6223×10^3	2.7639×10^3	5.123		
	4	-4.1724×10^4	-4.1347×10^4	-0.912	1.3724×10^3	8.1378×10^2	-68.645		
3	1	2.6875×10^4	2.6937×10^4	0.250	3.5454×10^2	8.1378×10^2	56.433		
	2	1.0625×10^4	1.0635×10^4	0.094	2.8337×10^3	2.7639×10^3	-2.525		
	3	-1.0625×10^4	-1.0635×10^4	0.094	2.8337×10^3	2.7639×10^3	-2.525		
	4	-2.6875×10^4	-2.6937×10^4	0.250	3.5453×10^2	8.1378×10^2	56.434		
4	1	1.2152×10^4	1.2405×10^4	2.024	1.3729×10^3	8.1378×10^2	-68.707		
	2	4.9693×10^3	4.9034×10^3	-1.344	2.6231×10^3	2.7639×10^3	5.094		
	3	-4.9693×10^3	-4.9034×10^3	-1.544	2.6231×10^3	2.7639×10^3	5.094		
	4	-4.2152×10^4	-1.2405×10^4	2.024	1.3731×10^3	8.1378×10^2	-68.731		
5	1	2.7054×10^3	2.5195×10^3	-7.378	1.9558×10^3	8.1378×10^2	-140.335		
	2	1.1410×10^3	9.9609×10^2	-14.548	2.0353×10^3	2.7639×10^3	26.361		
	3	-1.1410×10^3	-9.9609×10^2	-14.548	2.0354×10^3	2.7639×10^3	26.358		
	4	-2.7053×10^3	-2.5195×10^3	-7.374	1.9559×10^3	8.1378×10^2	-140.348		