

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SÍNTESE DE MECANISMOS COM A UTILIZAÇÃO DA
TEORIA DAS POSIÇÕES MULTIPLAMENTE SEPARADAS

Dissertação submetida à Universidade Federal de
Santa Catarina para a obtenção do grau de
mestre em engenharia mecânica.

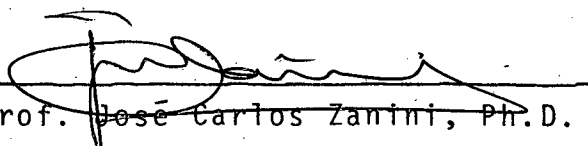
BERNARDO GONÇALVES RISO

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
FEVEREIRO - 1980


SÍNTESE DE MECANISMOS COM A UTILIZAÇÃO DA
TEORIA DAS POSIÇÕES MULTIPLAMENTE SEPARADAS

Bernardo Gonçalves Riso

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia", especialidade: engenharia mecânica, área de concentração: projeto, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

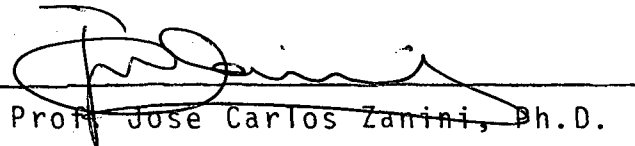


Prof. José Carlos Zanini, Ph.D.
Orientador

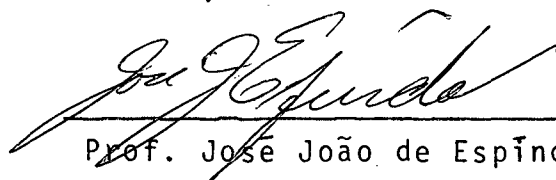


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador da Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

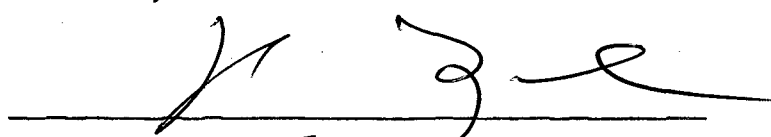
Apresentada perante a Banca Examinadora,
composta dos Professores:



Prof. José Carlos Zanini, Ph.D.



Prof. José João de Espindola, Ph.D.



Prof. Nelson Diógenes do Valle, Dr. Ing-

À Marli
e
ao Alexandre

AGRADECIMENTOS

- Ao professor José Carlos Zanini, pela orientação;
- Aos professores e funcionários do Departamento de Ciências Estatísticas e da Computação da Universidade Federal de Santa Catarina, pela colaboração;
- À CREMER S.A. - Produtos Têxteis e Cirúrgicos, pela oportunidade de aplicação da teoria e pelo auxílio financeiro;
- Ao Conselho Nacional de Pesquisas, pela bolsa de estudos durante a obtenção dos créditos;
- E a todos que contribuíram com críticas e sugestões.

S U M Á R I O

	<u>PÁG.</u>
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u>	1
Revisão Bibliográfica	2
A Transformação da Curvatura	3
A Transformação de Coordenadas	8
<u>CAPÍTULO II - ELEMENTOS DA TEORIA PMS</u>	10
2.1 - Introdução	10
2.2 - TRÊS PMS	11
2.3 - QUATRO PMS	30
2.4 - CINCO PMS	37
<u>CAPÍTULO III - EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DA TEORIA PMS.</u>	47
3.1 - Introdução	47
3.2 - Mecanismo de Regulagem do Fluxo	48
3.3 - Mecanismo de Carimbação	51
3.4 - Mecanismo de Encapamento	55

<u>CAPÍTULO IV - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</u>	59
4.1 - Conclusões	59
4.2 - Recomendações	61
APÊNDICES:	
1. O Programa PMS	63
2. Os Coeficientes Generalizados da Curvatura..	70
3. A Especificação do Movimento	73
4. A Transformação Fundamental da Teoria PMS ..	78
5. Glossário	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82

R E S U M O

São apresentados elementos da Teoria das Posições Multiplamente Separadas (Teoria PMS) para a síntese coplanar de mecanismos articulados, utilizando uma notação uniforme para 1, 2, 3, 4, 5 posições, com base nos coeficientes generalizados da curvatura, $A_{m\ell}$. São mostradas as considerações teóricas que permitem a obtenção de características especiais como trajetórias com pontos duplos, cuspides, tangentes definidas previamente, etc. Essas características são especificadas de modo compacto e uniforme.

A Teoria é aplicada em três casos específicos : um mecanismo regulador do fluxo de carretéis, um mecanismo de carimbação e um mecanismo de encapamento de carretéis, todos apresentando características especiais de movimento.

O programa computacional implantado e utilizado na Universidade Federal de Santa Catarina é adequado ao sistema geral de referência e sumariamente descrito.

A B S T R A C T

The basis of The Multiply Separated Positions Theory (MSP Theory) in Coplanar Motion is presented for linkage synthesis in a uniform notation, using the generalized coefficients of the curvature, $A_{m\ell}$, for 1, 2, 3, 4, 5 positions. Theoretical aspects related to special features as coupler curves with double points, cusps, defined tangents, etc., are shown in a short and uniform way.

The Theory is applied to three specific cases : a flow regulator mechanism, a stamping mechanism and a wrapping mechanism, all of them producing special motion features.

The PMS computer programme set up at the University of Santa Catarina is suitable to be used with the general reference system and is briefly described in this work.

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

A Teoria das Posições Multiplamente Separadas (Teoria PMS) está situada entre os métodos algébricos que utilizam pontos de precisão para a síntese de mecanismos articulados. Esses pontos de precisão definem as características do movimento do acoplador e podem apresentar-se separados de modo finito, infinitesimal e múltiplo. Com isto, em uma mesma especificação alguns pontos podem apresentar-se separados de modo finito, e outros separados de modo infinitesimal.

A teoria PMS permite que sejam especificados, no máximo, cinco pontos de precisão que são, em geral, suficientes para a especificação de características especiais de movimento como trajetórias com pontos duplos ou triplos, cuspides, tangentes definidas, inflexões, trechos retilíneos, etc., apresentando-se, portanto, como uma ferramenta extremamente poderosa para o projeto de mecanismos.

Todas as características especiais de movimento são especificadas com um máximo de quinze parâmetros de movimento $\{a_\ell, b_\ell, \phi_\ell\}$, $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$, quando é utilizado o sistema geral de referência ou com um número de parâmetros livres ainda mais reduzido quando é utilizado o sistema especial de referência.

Nesta exposição são utilizados os coeficientes

generalizados da curvatura, $A_{m\ell}$, que permitem um tratamento unificado de toda a teoria PMS.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

TESAR e ESCHENBACH [1] elaboraram em 1967 a primeira tentativa de criação de uma teoria analítica de síntese de mecanismos que considerasse simultaneamente posições finitamente separadas (PFS) e posições infinitesimalmente separadas (PIS) do plano acoplador. Ainda em 1967 TESAR [2] desenvolveu essa teoria até três posições múltiplamente separadas (3 PMS) considerando simultaneamente PFS e PIS. Em 1968 TESAR [3] apresentou a teoria PMS até quatro posições. Ainda nesse ano, TESAR e SPARKS [4] completaram a Teoria PMS com a síntese coplanar para cinco posições.

Em 1968 TESAR, SPARKS e WALTERS [5] apresentaram um artigo no qual eram discutidos novos aspectos teóricos e práticos da Teoria PMS.

Em 1975, ZANINI [6] elaborou a sua tese de doutoramento apresentando interpretações do significado geométrico de PIS e comparando os resultados obtidos através da aplicação da Teoria PMS com aqueles obtidos através da aplicação de métodos de otimização.

A Teoria PMS foi estendida à síntese de mecanismos esféricos com os artigos de TESAR, DOWLER e DUFFY [7] [8] publicados, respectivamente, em 1976 e 1978.

Na dissertação ora apresentada é realizada a unificação da Teoria PMS plana em termos dos coeficientes generalizados da curvatura, $A_{m\ell}$, que s̄o tinham sido utilizados para 5 PMS. O sistema especial de referência é utilizado a partir de 3 PMS, uma vez que permite grande simplificação algêbrica. Três aplicações originais da Teoria PMS s̄o apresentadas como exemplos.

A TRANSFORMAÇÃO DA CURVATURA

Considerado o mais importante de toda a s̄ntese cinemática, o conceito de transformação da curvatura é apresentado, a seguir, para o caso plano.

Na Figura 1.1 os planos Σ e E s̄o superpostos. O plano Σ é fixo e sobre ele est̄a marcado o sistema fixo X, Y de referência. O plano E é m̄vel e desloca-se sobre Σ carregando o sistema m̄vel x, y de referência.

Para que uma posição do plano m̄vel fique especificada em relação ao sistema fixo de referência é necessário que sejam definidas as coordenadas (a, b) da origem m̄vel e o ângulo ϕ entre os eixos x, X . Os parâmetros de posição $\{a, b, \phi\}$ tornam-se, então, o conjunto de especificações para um movimento obtido ou a obter.

Assim, para se especificar o movimento do plano m̄vel utilizando PMS $\ell = 0, 1, 2, \dots$ posições sucessivas, assumidas ao longo do seu deslocamento, determina-se o conjunto $\{a, b, \phi\}_\ell$, para cada posição ℓ .

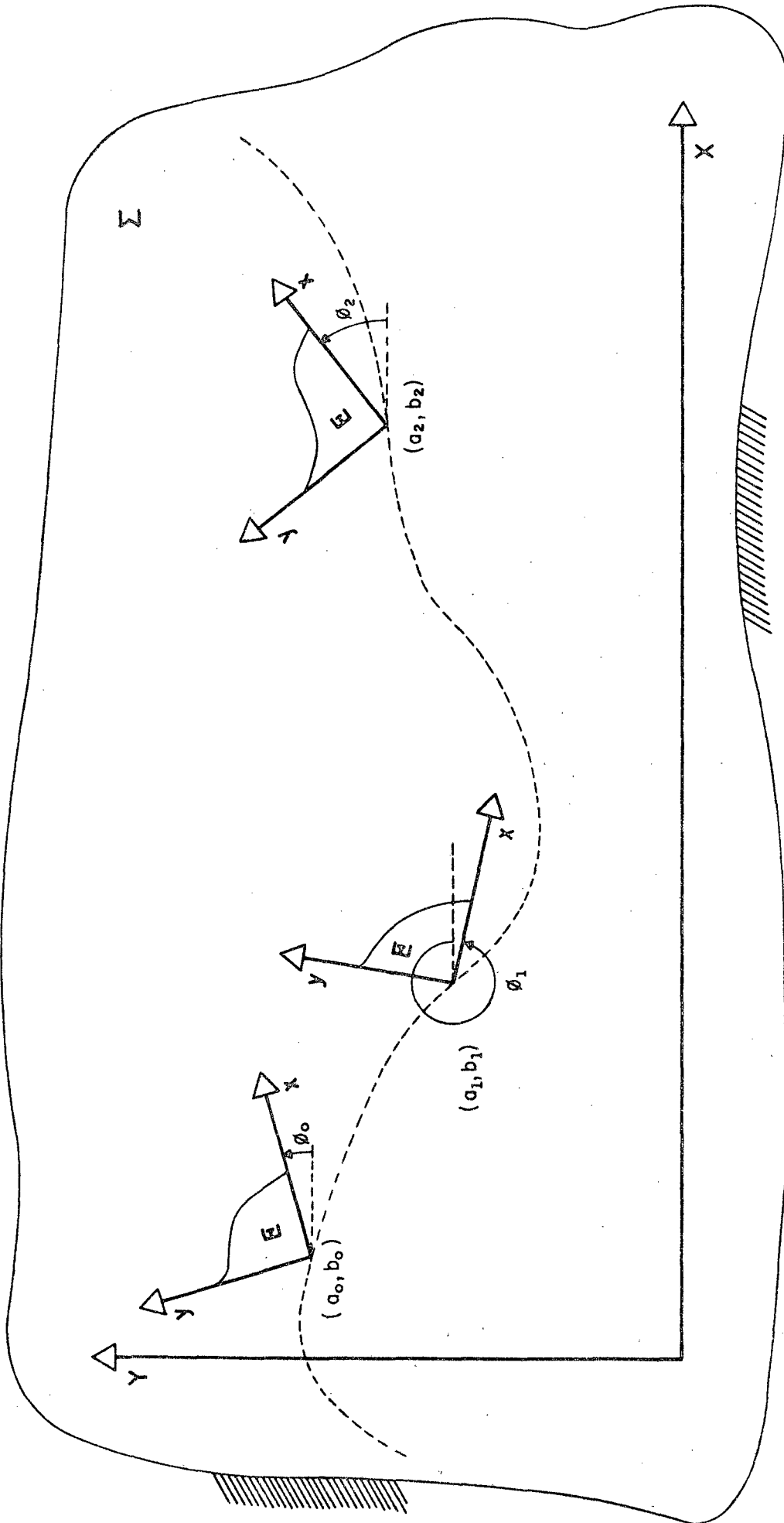


Figura 1.1 - O Deslocamento do plano móvel

A cada posição ℓ do plano móvel, um ponto A pertencente a este plano assume uma posição A_ℓ , de coordenadas X_ℓ, Y_ℓ em relação ao sistema fixo. Se A é um ponto de círculo, as posições $A_\ell, \ell = 0, 1, 2, \dots$ estão sobre um círculo g_A do plano fixo, com centro em O_A . Em conjunto, os pontos A e O_A formam um par de Burmester (Figura 1.2).

De posse desses conceitos, pode-se apresentar um enunciado conciso para a transformação da curvatura: se o movimento de um plano móvel com relação a um sistema fixo de referência é especificado pelos parâmetros de movimento $\{\alpha, b, \phi\}_\ell, \ell = 0, 1, 2, \dots$, o problema de transformação da curvatura consiste em determinar aqueles pontos $A(x,y)$ do plano móvel que assumem posições $A_\ell, \ell = 0, 1, 2, \dots$ sobre círculos do plano fixo com centro em $O_A(X,Y)$.

Usando-se duas vezes esta transformação, são obtidos os dois pares (A, O_A) e (B, O_B) que permitem a construção do mecanismo mostrado na Figura 1.3. Os pares (A, O_A) e (B, O_B) determinam possíveis manivelas, pois garantem ao sistema movimento imposto, isto é, um grau de liberdade. Esse sistema é o quadrilátero articulado, e o seu movimento faz com que o plano acoplador assuma as posições pré-estabelecidas $\ell = 0, 1, 2, \dots$, conforme foram especificadas pelos parâmetros $\{\alpha, b, \phi\}_\ell$.

Ao sistema assim considerado, aplicar-se-á o seguinte:

- (a) o sistema possui um grau de liberdade.

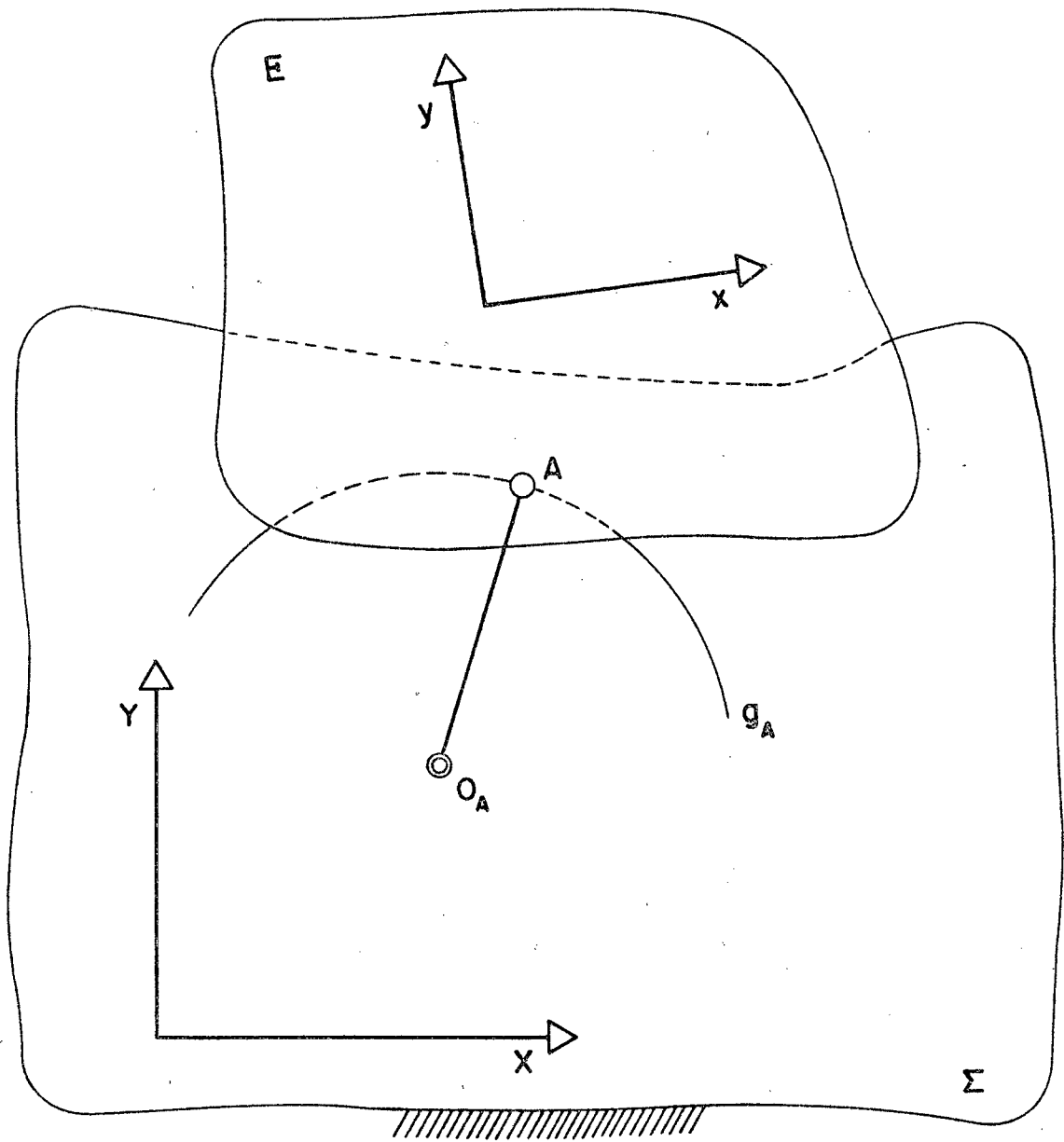


Figura 1.2 - O Binário articulado

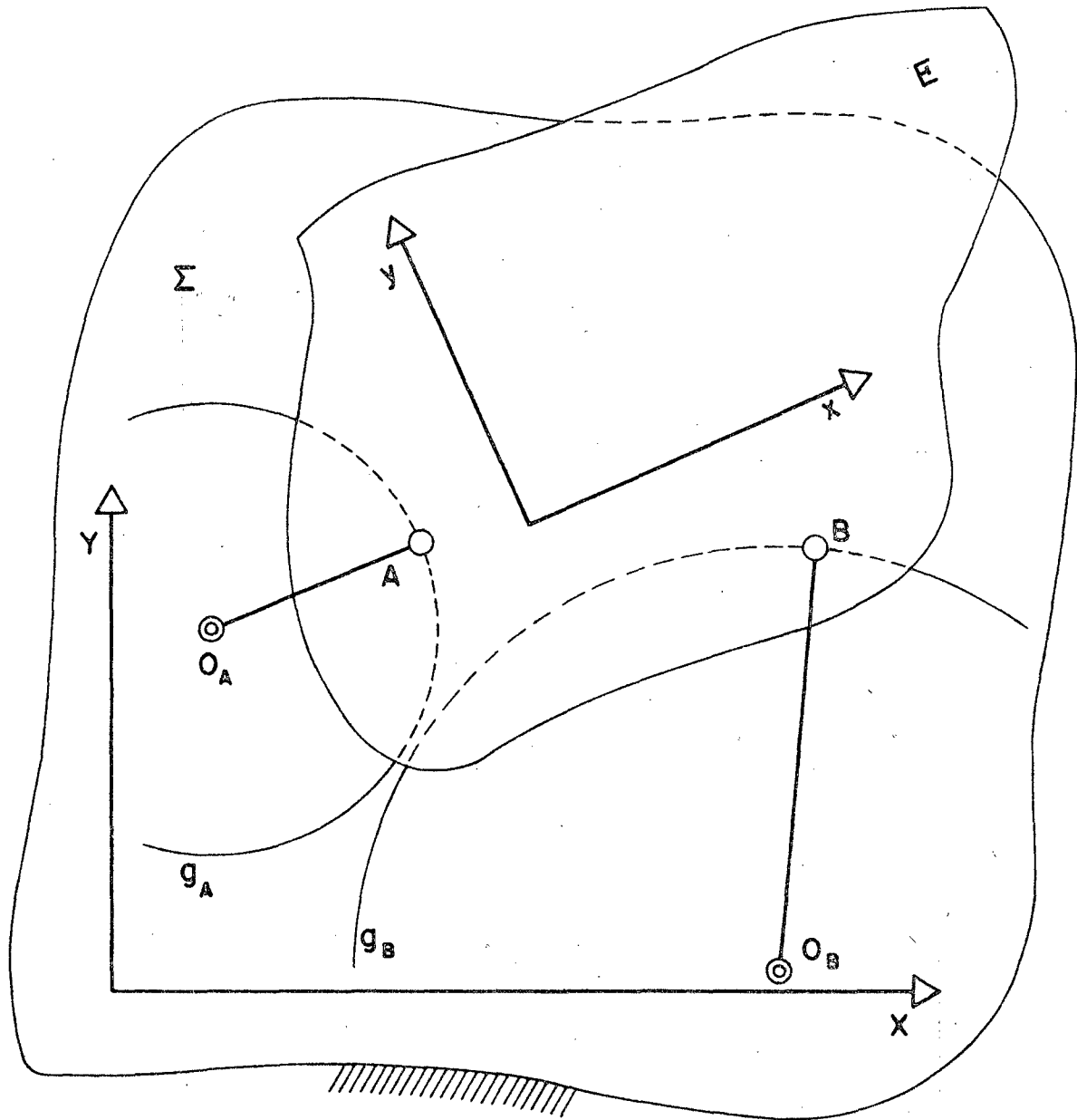


Figura 1.3 - O Quadrilátero articulado

- (b) ϕ é a coordenada generalizada escolhida.
- (c) as relações $a = a(\phi)$ e $b = b(\phi)$ tornam-se as funções generalizadas de referência para a especificação do movimento.
- (d) pode-se admitir arbitrariamente $\phi \equiv t$ e, então, $d\phi/dt = 1$.
- (e) os sistemas móvel (x,y) e fixo (X,Y) , podem ser considerados coincidentes na posição inicial, de modo que $a = b = \phi = 0$.
- (f) é de interesse o movimento da origem do sistema móvel, para a qual $x = y = 0$. Suas coordenadas em relação ao sistema fixo são $X = a$ e $Y = b$.

A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Considerando o plano móvel na posição especificada por $\{a, b, \phi\}$, ficam estabelecidas as expressões, através das quais, dadas as coordenadas de um ponto $A(x,y)$ em relação ao sistema móvel, pode-se calcular as suas coordenadas X, Y em relação ao sistema fixo (Figura 1.4), e reciprocamente.

Esta transformação de coordenadas entre o sistema fixo e o sistema móvel é básica para o tratamento analítico da síntese coplanar.

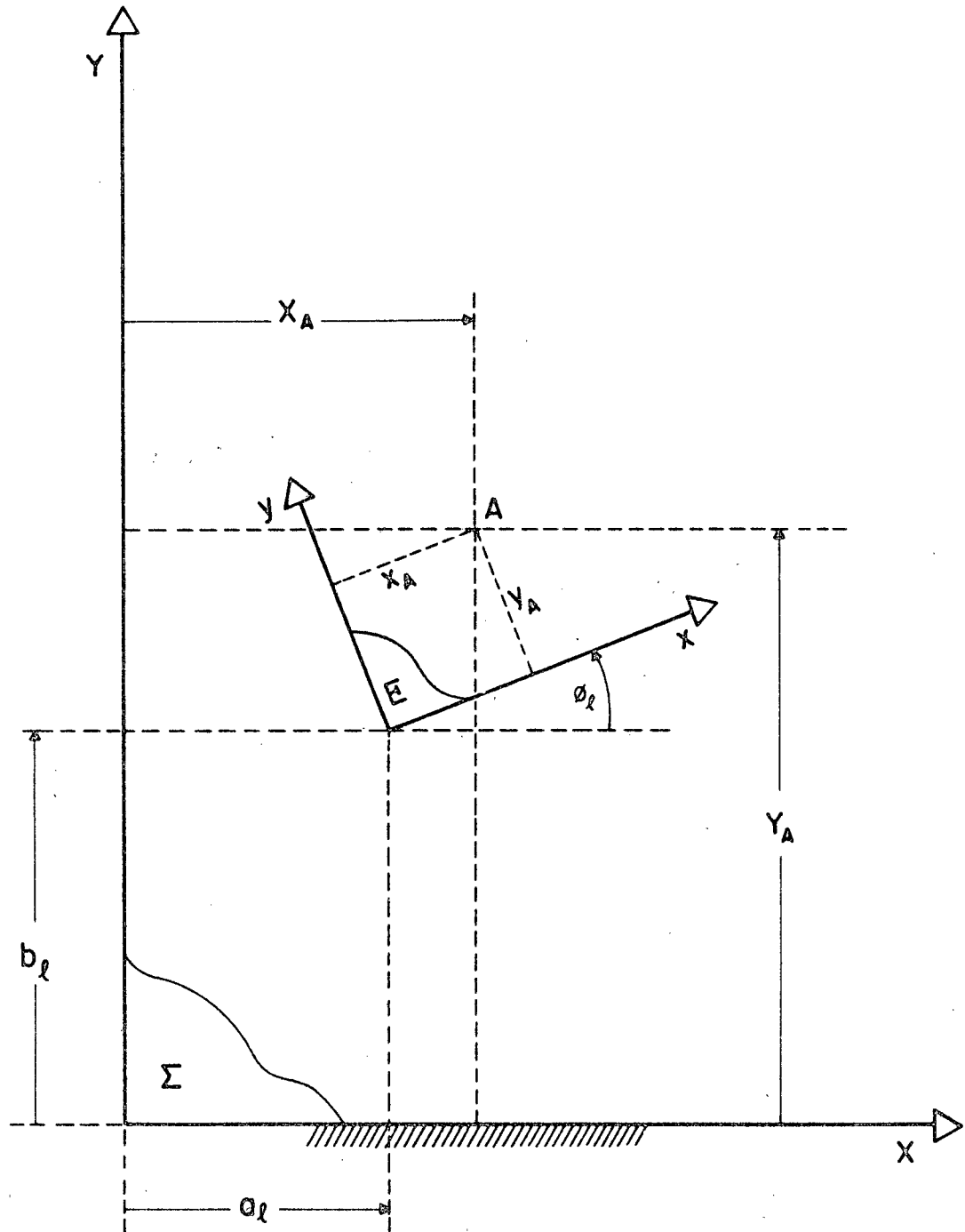


Figura 1.4 - A Transformação de coordenadas

C A P Í T U L O I I

ELEMENTOS DA TEORIA PMS

2.1 - INTRODUÇÃO

A concepção analítica da Teoria PMS engloba, em um tratamento matemático unificado, deslocamentos finitos (P-P) e infinitesimais (PP) de um plano móvel, permitindo ainda todas as combinações possíveis desses deslocamentos para 3, 4 e 5 PMS. Esses deslocamentos múltiplos, tomados em relação a uma posição inicial de referência, constituem-se no aspecto fundamental da teoria.

Nesta exposição foram utilizados os coeficientes generalizados da curvatura, $A_{m\ell}$, com a finalidade de unificar a teoria PMS em termos de uma notação concisa e completamente abrangente.

O sistema especial de referência ($\phi_0 = a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0, b_2 = 1$) permite grande simplificação alébrica e, por isso, foi utilizado a partir de 3 PMS.

O sistema especial de referência não chega a se constituir em uma limitação prática, já que pode sempre ser utilizado, embora na especificação de 3, 4 e 5 PMS haja, em geral, a necessidade do uso de transformações de coordenadas e de escala.

2.2 - TRÊS PMS

Uma Posição

Ao se considerar o deslocamento de um plano móvel sobre um plano fixo (Figura 1.1), cada uma das posições $\ell = 0, 1, 2, \dots$ finitamente separadas (PFS) do plano móvel é especificada pelos parâmetros de movimento $\{a_\ell, b_\ell, \phi_\ell\}$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Um ponto qualquer $A(x, y)$ do plano móvel (Figura 1.4) tem, então, as suas coordenadas definidas em relação ao sistema fixo de referência X, Y , como

$$X = x \cos \phi - y \sin \phi + a \quad (2.2.1)$$

$$Y = x \sin \phi + y \cos \phi + b$$

onde ϕ pode ser considerado o parâmetro independente do movimento imposto, de modo que $a = a(\phi)$ e $b = b(\phi)$.

Se os sistemas fixo e móvel de referência forem coincidentes na posição inicial $\ell = 0$, então $\phi_0 = a_0 = b_0 = 0$.

Duas Posições

Duas posições finitamente separadas (2 PFS) do plano móvel são especificadas por $\{a_m, b_m, \phi_m\}$ e $\{a_n, b_n, \phi_n\}$, e definem um pólo de rotação P_{mn} . Se m e n são especificadas como posições sucessivas, $n = m + 1$. Para m , posição inicial, $m = 0$ e $n = 1$. Na posição inicial os sistemas móvel e fixo de referência podem ser tomados coinci

dentes. Se, além disso, o pólo P_{01} for requerido na origem comum dos sistemas, as duas posições $\ell = 0, 1$ do plano móvel serão especificadas por $\{0, 0, 0\}$ e $\{0, 0, \phi_1\}$, onde ϕ_1 é o ângulo finito de giro do plano móvel ao passar da posição $\ell = 0$ para a posição $\ell = 1$.

O deslocamento do ponto $A(x,y)$ correspondente às duas posições m, n do plano móvel, finitamente separadas, pode ser escrito como

$$\Delta X = X_n - X_m$$

$$\Delta Y = Y_n - Y_m$$

Considerando a equação (2.2.1),

$$\Delta X = x(\cos \phi_n - \cos \phi_m) - y(\sin \phi_n - \sin \phi_m) + a_n - a_m$$

$$\Delta Y = x(\sin \phi_n - \sin \phi_m) + y(\cos \phi_n - \cos \phi_m) + b_n - b_m$$

(2.2.2)

O pólo P_{mn} é o único ponto que não se desloca quando são consideradas as posições $\ell = m, n$ do plano móvel. Portanto, para o pólo P_{mn} , $\Delta X = \Delta Y = 0$, o que leva às coordenadas do pólo no sistema móvel, através de (2.2.2),

$$x_{P_{mn}} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\phi_n - \phi_m}{2}} \left\{ \operatorname{sen} \frac{\phi_n + \phi_m}{2} (a_n - a_m) - \cos \frac{\phi_n + \phi_m}{2} (b_n - b_m) \right\}$$

(2.2.3)

$$y_{P_{mn}} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\phi_n - \phi_m}{2}} \left\{ \cos \frac{\phi_n + \phi_m}{2} (a_n - a_m) + \operatorname{sen} \frac{\phi_n + \phi_m}{2} (b_n - b_m) \right\}$$

As coordenadas do pólo P_{mn} em relação ao sistema fixo de referência podem ser obtidas considerando a inversa da transformação (2.2.1) e que $x_{P_{mn}}^m = x_{P_{mn}}^n$ e $y_{P_{mn}}^m = y_{P_{mn}}^n$.

$$X_{P_{mn}} = \frac{a_n + a_m}{2} - \frac{b_n - b_m}{2} \cot \frac{\phi_n - \phi_m}{2} \quad (2.2.4)$$

$$Y_{P_{mn}} = \frac{b_n + b_m}{2} - \frac{a_n - a_m}{2} \cot \frac{\phi_n - \phi_m}{2}$$

Se m e n são duas posições paralelas, $\phi_n - \phi_m = 0$ e $\cot \frac{\phi_n - \phi_m}{2} \rightarrow \infty$, indicando que o pólo P_{mn} possui coordenadas infinitamente grandes.

O tratamento analítico de duas posições infinitesimalmente separadas (2 PIS) pode ser considerado a partir do acréscimo $\Delta\phi$, pequeno, dado ao parâmetro independente. Com esse acréscimo, um ponto do plano móvel sofre um deslocamento que pode ser expresso pelas alterações ΔX e ΔY de suas coordenadas em relação ao sistema fixo:

$$\Delta X = X(\phi + \Delta\phi) - X(\phi) \quad (2.2.5)$$

$$\Delta Y = Y(\phi + \Delta\phi) - Y(\phi)$$

Considerando as equações (2.2.1) e (2.2.5) conjuntamente, tem-se

$$\Delta X = -x \operatorname{sen} \phi \Delta \phi - y \operatorname{cos} \phi \Delta \phi + a(\phi + \Delta \phi) - a(\phi)$$

$$\Delta Y = x \operatorname{cos} \phi \Delta \phi - y \operatorname{sen} \phi \Delta \phi + b(\phi + \Delta \phi) - b(\phi)$$

Considerando agora os limites

$$\lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta \phi} = \frac{dX}{d\phi} = X'$$

$$\lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta \phi} = \frac{dY}{d\phi} = Y'$$

tem-se as equações que representam um deslocamento infinitesimal de um ponto do plano móvel:

$$dX = (-x \operatorname{sen} \phi - y \operatorname{cos} \phi + a') d\phi \quad (2.2.6)$$

$$dY = (x \operatorname{cos} \phi - y \operatorname{sen} \phi + b') d\phi$$

Duas posições, infinitesimalmente separadas, do plano móvel definem um centro instantâneo de rotação C , para o qual,

$$X'_C = Y'_C = 0$$

A partir de (2.2.6), obtêm-se, então, as coordenadas do centro instantâneo de rotação em relação ao sistema móvel como

$$x_C = a' \operatorname{sen} \phi - b' \operatorname{cos} \phi \quad (2.2.7)$$

$$y_C = a' \operatorname{cos} \phi + b' \operatorname{sen} \phi$$

Substituindo as expressões (2.2.7) na equação (2.2.1), obtêm-se as coordenadas do centro instantâneo de rotação em relação ao sistema fixo.

$$\begin{aligned} X_C &= a - b' \\ Y_C &= b + a' \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Considerando uma variação contínua para o valor de ϕ na equação (2.2.7), tem-se as equações paramétricas que definem o centrodo móvel. Procedendo do mesmo modo em relação à equação (2.2.8), tem-se as equações que definem o centrodo fixo.

O tratamento analítico de 2 PFS e 2 PIS, considerado globalmente, é realizado sob o título de duas posições multiplamente separadas, 2 PMS. A notação utilizada para PMS inclui os índices j , k e ℓ , com a seguinte significação:

j = contador do número de PFS, podendo assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4.

k = contador do número de PIS correspondente a uma dada posição finita. Pode assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4.

ℓ = contador do número total de PMS. Pode assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4.

Considerando os índices j , k , ℓ , a equação (2.2.1) toma a forma geral (Apêndice 4) adequada ao tratamento de PMS:

$$\begin{aligned}
 X(j,k,\ell) &= \frac{d^k}{d\phi^k} \{x \cos \phi - y \operatorname{sen} \phi\}_{\phi=\phi_j} + \frac{d^k}{d\phi^k} \{a(\phi)\}_{\phi=\phi_j} \\
 Y(j,k,\ell) &= \frac{d^k}{d\phi^k} \{x \operatorname{sen} \phi + y \cos \phi\}_{\phi=\phi_j} + \frac{d^k}{d\phi^k} \{b(\phi)\}_{\phi=\phi_j}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.9}$$

Para 2 PFS, os contadores (j, k, ℓ) assumem os valores $(0, 0, 0)$ para a primeira posição e $(1, 0, 1)$ para a segunda. Para 2 PIS, os valores são $(0, 0, 0)$ para a primeira posição e $(0, 1, 1)$ para a segunda.

O significado de PMS em cinemática é melhor compreendido em termos de deslocamentos do plano móvel. Aqui, PMS implica em movimentos mistos de PFS e PIS inseridos dentro de uma filosofia analítica válida para todos os tipos de movimento, simultaneamente. Considerando a posição de referência $m=0$ e uma posição geral $n = \ell$, o conceito de 2 PMS pode ser obtido combinando-se os resultados das equações (2.2.2) e (2.2.9) quando $n=1$, ou seja:

$$\Delta X_{0,1} = \Delta X_1 = (d\phi)^k \left[\frac{d^k}{d\phi^k} \{x (\cos \phi - \cos \phi_0) - (\operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi_0) + a - a_0\} \right]_{\phi=\phi_j}$$

$$\Delta Y_{0,1} = \Delta Y_1 = (d\phi)^k \left[\frac{d^k}{d\phi^k} \{x (\operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi_0) + (\cos \phi - \cos \phi_0) + b - b_0\} \right]_{\phi=\phi_j}$$

Permitindo que os sistemas coordenados sejam coincidentes na posição inicial, $\phi_0 = \alpha_0 = b_0 = 0$, e então

$$\Delta X_1 = (d\phi)^k \left[\frac{d^k}{d\phi^k} \{x(\cos \phi - 1) - y \operatorname{sen} \phi + a\} \right]_{\phi=\phi_j}$$

$$\Delta Y_1 = (d\phi)^k \left[\frac{d^k}{d\phi^k} \{x \operatorname{sen} \phi - y(\cos \phi - 1) + b\} \right]_{\phi=\phi_j}$$

ou, mais compactamente, introduzindo os "coeficientes generalizados da curvatura", $A_{m\ell}$,

$$A_{3\ell} = \frac{d^k}{d\phi^k} \{\cos \phi - 1\} \quad \phi=\phi_j$$

$$A_{4\ell} = \frac{d^k}{d\phi^k} \{\operatorname{sen} \phi\} \quad \phi=\phi_j$$

(2.2.10)

$$A_{5\ell} = \frac{d^k}{d\phi^k} \{a(\phi)\} \quad \phi=\phi_j$$

$$A_{6\ell} = \frac{d^k}{d\phi^k} \{b(\phi)\} \quad \phi=\phi_j$$

em que $\phi_0 = \alpha_0 = b_0 = 0$,

$$\Delta X_1 = (d\phi)^k \left[A_{3\ell} x - A_{4\ell} y + A_{5\ell} \right]$$

$$\Delta Y_1 = (d\phi)^k \left[A_{4\ell} y - A_{3\ell} x + A_{6\ell} \right]$$

Três Posições

A restrição linear é importante para o projetista que pode usá-la, por exemplo, na síntese do mecanismo biela-manivela, e deve ser considerada.

Como uma reta do plano fixo pode ser descrita por

$$L_0 X + L_1 Y + L_2 = 0,$$

se o ponto $A(x,y)$ assume 3 PMS sobre uma reta, então, para cada posição $\ell = 0, 1, 2$, tem-se:

$$\lambda_\ell (X, Y) = L_0 X_\ell + L_1 Y_\ell + L_2 = 0 \quad (2.2.11)$$

onde (X_ℓ, Y_ℓ) , $\ell = 0, 1, 2$ são as coordenadas do ponto A em relação ao sistema fixo, para cada posição especificada do plano móvel.

Para excluir o coeficiente L_2 de futuras considerações, pode-se escrever o sistema (2.2.11) como

$$\lambda_1 - \lambda_0 = L_0(X_1 - X_0) + L_1(Y_1 - Y_0) = 0 \quad (2.2.12)$$

$$\lambda_2 - \lambda_0 = L_0(X_2 - X_0) + L_1(Y_2 - Y_0) = 0$$

Para que existam soluções diferentes da trivial, o determinante principal do sistema (2.2.12) deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 \\ X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2.13)$$

Considerando a equação (2.2.9), os elementos desse determinante podem ser generalizados e escritos como

$$X_{\ell} - X_0 = \frac{d^k}{d\phi^k} \{x(\cos \phi - \cos \phi_0) - y(\sin \phi - \sin \phi_0)\}_{\phi=\phi_j} + \\ + \frac{d^k}{d\phi^k} \{a(\phi) - a(\phi_0)\}_{\phi=\phi_j} \quad (2.2.14)$$

$$Y_{\ell} - Y_0 = \frac{d^k}{d\phi^k} \{x(\sin \phi - \sin \phi_0) + y(\cos \phi - \cos \phi_0)\}_{\phi=\phi_j} + \\ + \frac{d^k}{d\phi^k} \{b(\phi) - b(\phi_0)\}_{\phi=\phi_j}$$

onde $\ell = 1, 2$.

Considerando o sistema especial de referência, $\phi_0 = \alpha_0 = b_0 = 0$ e introduzindo os coeficientes generalizados da curvatura (2.2.10), a equação (2.2.13) assume a forma,

$$\begin{vmatrix} A_{31}x - A_{41}y + A_{51} & A_{41}x + A_{31}y + A_{61} \\ A_{32}x - A_{42}y + A_{52} & A_{42}x + A_{32}y + A_{62} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2.15)$$

Desenvolvendo o determinante (2.2.15), e colocando em evidência as potências de x e y , resulta

$$\begin{aligned}
& (x^2 + y^2) (A_{31} A_{42} - A_{41} A_{32}) + x(A_{51} A_{42} + \\
& + A_{31} A_{62} - A_{32} A_{61} - A_{41} A_{52}) + y(A_{61} A_{42} + \\
& + A_{51} A_{32} - A_{31} A_{52} - A_{41} A_{62}) + A_{51} A_{62} - \\
& - A_{61} A_{52} = 0 \qquad (2.2.16)
\end{aligned}$$

A equação (2.2.16) mostra que o lugar geométrico dos pontos do plano móvel que assumem 3 PMS sobre uma reta é um círculo.

Os pólos P_{01} , P_{02} e P_{12} ou os centros instantâneos C_{01} , C_{02} e C_{12} , pertencem ao círculo (2.2.16) por possuírem, no máximo, duas posições distintas para as três posições consideradas do plano móvel. Para o pólo P_{01} , $X_1 - X_0 = Y_1 - Y_0 = 0$, e a primeira linha do determinante da equação (2.2.12) se anula. Para P_{02} , é a segunda linha que se anula. Para P_{12} , tem-se $X_2 = X_1$ e $Y_2 = Y_1$, e as duas linhas do determinante tornam-se iguais.

Quando $\phi_0 = a_0 = b_0 = 0$, os sistemas fixo e móvel são coincidentes na posição inicial do plano móvel, e $A_{50} = A_{60} = 0$. Se, além disso, $a_1 = b_1 = 0$, então, $A_{51} = A_{61} = 0$, e o pólo P_{01} , ou o centro instantâneo C_{01} , coincide com a origem comum. Neste caso, o círculo (2.2.16) torna-se

$$(x^2 + y^2) + x \frac{A_{62} A_{31} - A_{52} A_{41}}{A_{42} A_{31} - A_{41} A_{32}} + y \frac{-A_{52} A_{31} - A_{62} A_{41}}{A_{42} A_{31} - A_{41} A_{32}} = 0 \qquad (2.2.17)$$

Desejando-se que o círculo seja tangente aos eixos x, X , o coeficiente de x na equação (2.2.17) deve ser nulo.

$$A_{62} A_{31} - A_{52} A_{41} = 0 \quad (2.2.18)$$

$$\text{Então, } A_{52} = A_{62} \frac{A_{31}}{A_{41}} \quad (2.2.19)$$

ou

$$a_2 = b_2 \frac{A_{31}}{A_{41}} \quad (2.2.20)$$

Fixando a escala dos sistemas de modo que o diâmetro do círculo seja unitário, o coeficiente de y deve ser igual a -1 .

$$\frac{-A_{52} A_{31} - A_{62} A_{41}}{A_{42} A_{31} - A_{41} A_{32}} = -1 \quad (2.2.21)$$

Substituindo (2.2.19) em (2.2.21), obtêm-se

$$b_2 = \frac{A_{41} (A_{42} A_{31} - A_{41} A_{32})}{A_{31}^2 + A_{41}^2} \quad (2.2.22)$$

A equação do círculo, então, pode ser escrita na forma

$$x^2 + y^2 - y = 0 \quad (2.2.23)$$

As condições impostas acima, ou seja,

$$a_0 = b_0 = \phi_0 = 0$$

$$a_1 = b_1 = 0$$

e mais as condições (2.2.18) e (2.2.21) constituem-se no sistema especial de referência, que apresenta a vantagem de simplificação dos cálculos e pode ser aplicado em grande número de situações práticas.

Pode-se obter expressões simples para os valores de a_2 e b_2 em cada caso de 3 PMS quando é utilizado o sistema especial de referência.

1º Caso: PPP (3 PIS)

Neste caso, $\phi_j = \phi_0 = 0$ e, então,

$$A_{31} = \frac{d}{d\phi} \{ \cos \phi - 1 \}_{\phi=\phi_0} = -\sin \phi_0 = 0$$

$$A_{41} = \frac{d}{d\phi} \{ \sin \phi \}_{\phi=\phi_0} = \cos \phi_0 = 1$$

$$A_{32} = \frac{d^2}{d\phi^2} \{ \cos \phi - 1 \}_{\phi=\phi_0} = -\cos \phi_0 = -1$$

$$A_{42} = \frac{d^2}{d\phi^2} \{ \sin \phi \}_{\phi=\phi_0} = -\sin \phi_0 = 0$$
(2.2.24)

Substituindo os resultados (2.2.24) em (2.2.19) e (2.2.21), tem-se

$$a_2 = 0 \quad e \quad b_2 = 1$$

Neste caso, os pontos do círculo descrevem trajetórias com uma inflexão instantânea. Devido a isso, para

3 PIS, o círculo (2.2.16) é denominado círculo de inflexão. No sistema especial de referência, o círculo de inflexão é dado pela equação (2.2.23).

2º Caso: PP - P (2 PIS e 1PFS)

Neste caso, $\phi_0 = 0$ e ϕ_1 é um ângulo finito qualquer.

$$A_{31} = -\text{sen } \phi_0 = 0$$

$$A_{41} = \cos \phi_0 = 1$$

$$A_{32} = \cos \phi_1 - 1$$

$$A_{42} = \text{sen } \phi_1$$

$$\text{Então, } \alpha_2 = 0 \text{ e } b_2 = 1 - \cos \phi_1$$

O círculo (2.2.16) torna-se o lugar geométrico dos pontos do plano móvel que traçam uma trajetória que possui, instantaneamente, uma tangente definida, e a terceira posição de cada um desses pontos, finita, estará sobre essa tangente. Por isso, o círculo é denominado círculo ponto-tangente.

3º Caso: P-P-P (3 PFS)

Agora, $\phi_0 = 0$, mas ϕ_1 e ϕ_2 são ângulos finitos quaisquer.

$$A_{31} = \cos \phi_1 - 1 \quad A_{41} = \text{sen } \phi_1$$

$$A_{32} = \cos \phi_2 - 1 \quad A_{42} = \sin \phi_2$$

Então,

$$a_2 = -2 \operatorname{sen} \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi_2}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi_1}{2}$$

e

$$b_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi_2}{2} \cos \frac{\phi_1}{2}$$

Para este caso, o círculo (2.2.16) é o lugar geométrico dos pontos do plano móvel cujas trajetórias interceptam uma reta do plano fixo em três posições finitamente separadas. Este círculo, denominado círculo de três posições, é dado no sistema geral de referência pela equação (2.2.16) e no sistema especial pela equação (2.2.17).

Equação Generalizada da Transformação da Curvatura.

A determinação dos pontos do plano móvel que assumem 3 PMS sobre um arco de círculo $G(X,Y)$ permite que sejam estabelecidas as restrições físicas circulares que fornecem o movimento especificado por 3 PMS.

A restrição circular é dada para os casos de PMS na forma

$$g_\ell(X,Y) = \frac{d^k}{d\phi^k} \{Q_0(X^2 + Y^2) + 2Q_1X + 2Q_2Y + Q_3\}_{\phi=\phi_j} = 0$$

com $\ell = 0, 1, 2, \dots$ (2.2.25)

Na posição inicial, $\ell = j = k = 0$, e a equação (2.2.26), toma a forma

$$g_0(X_0, Y_0) = Q_0(X_0^2 + Y_0^2) + 2Q_1X_0 + 2Q_2Y_0 + Q_3 = 0 \quad (2.2.27)$$

Subtraindo a equação (2.2.27) da equação (2.2.26), obtêm-se uma expressão livre do coeficiente Q_3 :

$$G_\ell(X, Y) = g_\ell - g_0 = \frac{d^k}{d\phi^k} \{Q_0(X^2 + Y^2 - X_0^2 - Y_0^2) + 2Q_1(X - X_0) + 2Q_2(Y - Y_0)\}_{\phi=\phi_j} = 0$$

com $\ell = 1, 2, \dots$ (2.2.28)

Usando a transformação fundamental (2.2.9) e considerando as condições especiais $\phi_0 = \alpha_0 = b_0 = 0$, a equação (2.2.28) assume a forma

$$G_\ell = \frac{d^k}{d\phi^k} \left\{ Q_0 \left[\frac{a^2 + b^2}{2} + x(a \cos \phi + b \sin \phi) + y(-a \sin \phi + b \cos \phi) \right] + Q_1 \left[x(\cos \phi - 1) - y \sin \phi - a \right] + Q_2 \left[x \sin \phi + y(\cos \phi - 1) + b \right] \right\}_{\phi=\phi_j} = 0$$

com $\ell = 1, 2, \dots$ (2.2.29)

Introduzindo os restantes coeficientes generalizados da curvatura,

$$A_{0\ell} = \frac{d^k}{d\phi^k} \left\{ \frac{\alpha^2 + b^2}{2} \right\}_{\phi=\phi_j}$$

$$A_{1\ell} = \frac{d^k}{d\phi^k} \{ \alpha \cos \phi + b \sin \phi \}_{\phi=\phi_j} \quad (2.2.30)$$

$$A_{2\ell} = \frac{d^k}{d\phi^k} \{ -\alpha \sin \phi + b \cos \phi \}_{\phi=\phi_j}$$

e considerando os coeficientes dados em (2.2.10), a equação (2.2.29) pode ser reescrita como

$$G_\ell = Q_0(A_{0\ell} + A_{1\ell}x + A_{2\ell}y) + Q_1(A_{3\ell}x - A_{4\ell}y + A_{5\ell}) +$$

$$+ Q_2(A_{4\ell}x + A_{3\ell}y + A_{6\ell}) = 0$$

com $\ell = 1, 2, \dots$

que é uma expressão linear em termos das coordenadas x, y do ponto genérico A .

Uma expressão mais condensada pode ser obtida fazendo

$$R_\ell = A_{0\ell} + A_{1\ell}x + A_{2\ell}y$$

$$S_\ell = A_{3\ell}x - A_{4\ell}y + A_{5\ell}$$

$$T_\ell = A_{4\ell}x + A_{3\ell}y + A_{6\ell}$$

e, então,

$$G_\ell = Q_0 R_\ell + Q_1 S_\ell + Q_2 T_\ell = 0$$

$$\text{com } \ell = 1, 2, \dots \quad (2.2.31)$$

Considerando as posições $\ell = 1, 2$, a equação (2.2.31) resulta no sistema

$$Q_0 R_1 + Q_1 S_1 + Q_2 T_1 = 0$$

$$Q_0 R_2 + Q_1 S_2 + Q_2 T_2 = 0$$

que fornece as coordenadas $X_{0\alpha}$, $Y_{0\alpha}$ do centro de curvatura O_α :

$$X_{0\alpha} = -\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{R_1 T_2 - R_2 T_1}{S_1 T_2 - S_2 T_1} \quad (2.2.32)$$

$$Y_{0\alpha} = -\frac{Q_2}{Q_0} = \frac{R_2 S_1 - R_1 S_2}{S_1 T_2 - S_2 T_1}$$

Na Figura 2.2.1, o ponto P_{01} corresponde ao pólo ou centro instantâneo de rotação para as posições $\ell = 0, 1$. O ponto $A(r, \theta)$ é um ponto qualquer do plano móvel e $O_\alpha(r^*, \theta^*)$ é o centro do círculo sobre o qual o ponto A assume 3 PMS.

Considerando a equação (2.2.32),

$$r^* = (X_{0\alpha}^2 + Y_{0\alpha}^2)^{1/2} = \frac{\{(R_1 T_2 - R_2 T_1)^2 + (R_2 S_1 - R_1 S_2)^2\}^{1/2}}{S_2 T_1 - S_1 T_2}$$

Como $A_{01} = A_{11} = A_{21} = 0$, então $R_1 = 0$. De mo

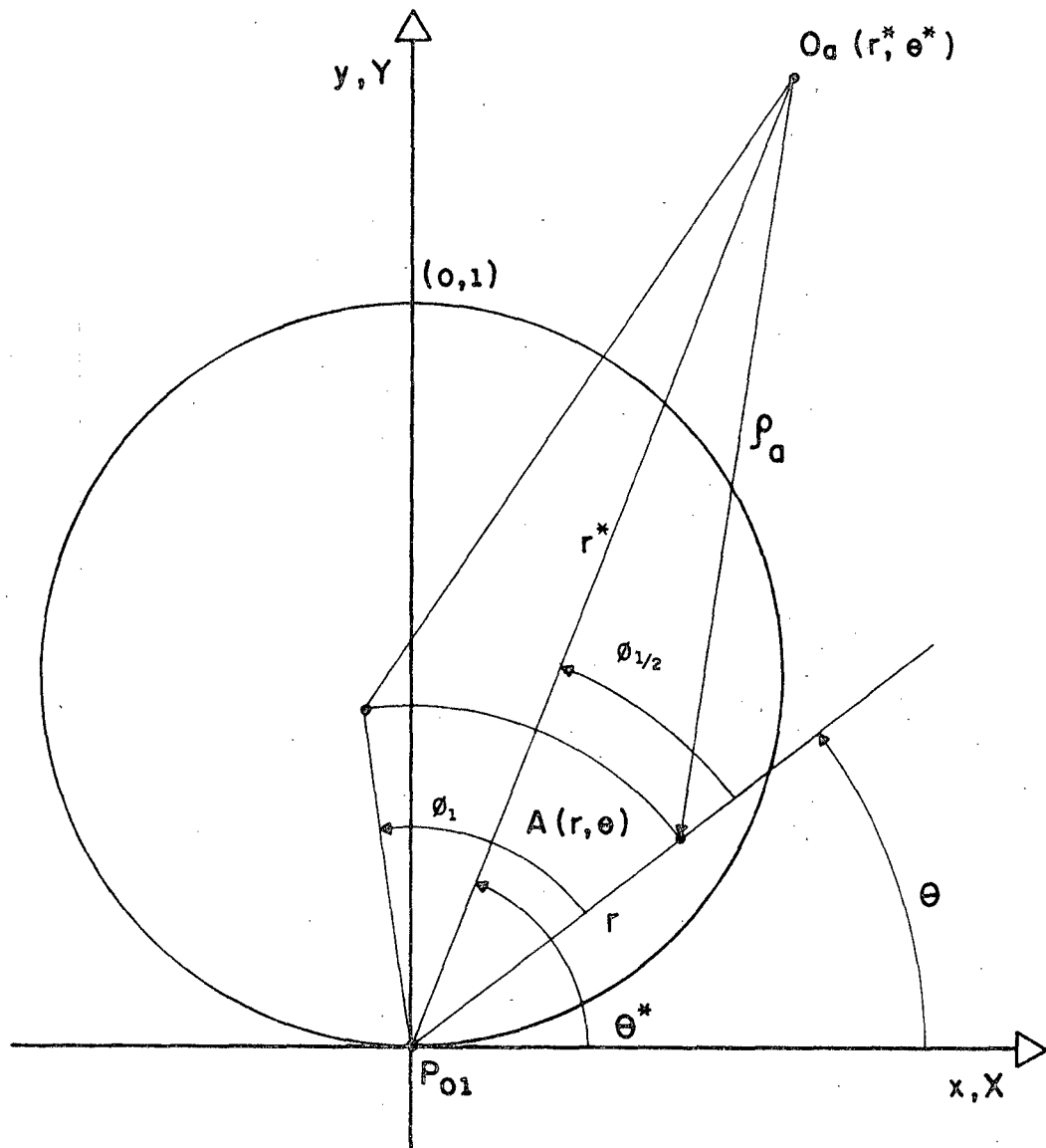


Figura 2.2.1 - Transformação da curvatura para 3 PMS
Nos casos PPP e PP-P, $\phi_1 = 0$

do que

$$r^* = \frac{R_2 (T_1^2 + S_1^2)^{1/2}}{S_2 T_1 - S_1 T_2}$$

Mas

$$S_2 T_1 - S_1 T_2 = (x^2 + y^2 - y) (A_{32} A_{41} - A_{31} A_{42})$$

$$S_1^2 + T_1^2 = (x^2 + y^2) (A_{31}^2 + A_{41}^2)$$

e

$$R_2 = A_{02} + A_{12}x + A_{22}y$$

Então

$$r^* = \frac{(A_{02} + A_{12}x + A_{22}y)(x^2 + y^2)^{1/2} (A_{31}^2 + A_{41}^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 - y) (A_{32} A_{41} - A_{31} A_{42})}$$

ou, em coordenadas polares,

$$r^* = \frac{(A_{02} + A_{12} r \cos \theta + A_{22} r \sin \theta)(A_{31}^2 + A_{41}^2)^{1/2}}{(\sin \theta - r) (A_{32} A_{41} - A_{31} A_{42})}$$

No caso PPP, tem-se a equação de Euler-Savary

$$r^* = \frac{r \sin \theta}{\sin \theta - r}$$

No caso PP-P,

$$r^* = \frac{r \sin(\theta + \phi_1) + \sin^2(\phi_1/2)}{\sin \theta - r}$$

No caso P-P-P,

$$r^* = \frac{r \operatorname{sen} (\theta + \phi_2 - \phi_1/2) + \operatorname{sen} \left[(\phi_2 - \phi_1)/2 \right] \operatorname{sen}(\phi_2/2)}{\operatorname{sen} \theta - r} \quad (2.2.33)$$

Notando que no caso PPP $\phi_j = \phi_0 = 0$ para $\ell = 0, 1, 2$ e que no caso PP-P $\phi_j = \phi_0 = 0$ para $\ell = 0, 1$, a equação (2.2.33) pode ser considerada válida para todos os casos de 3 PMS, e juntamente com

$$\theta^* = \theta + \frac{\phi_1}{2}$$

compõe a solução do problema da transformação da curvatura para 3 PMS no sistema especial de referência.

2.3 - QUATRO PMS

As especificações de 4 PMS podem ser feitas com as seguintes combinações principais: PPPP, PPP-P, PP-PP, PP-P-P e P-P-P-P, onde P-P representa duas posições finitamente separadas, e, PP, duas posições infinitesimalmente separadas.

O problema da transformação da curvatura para 3 PMS é satisfeito por todos os pontos do plano móvel, pois cada ponto assume três posições $\ell = 0, 1, 2$, que definem um círculo sobre o plano fixo. Assim, o problema de 3 PMS possui ∞^2 soluções. Se são especificadas 4 PMS, $\ell = 0, 1, 2, 3$, o problema da transformação da curvatura passa a per

mitir ∞ soluções, pois a condição adicional representada pela quarta posição restringe as soluções aos pontos de uma curva: a cúbica dos pontos de círculo.

O Ponto e a Reta de Ball Generalizados

O ponto de Ball é o ponto do plano móvel que assume 4 PMS sobre uma reta

$$L_0 X + L_1 Y + L_2 = 0 \quad (2.3.1)$$

do plano fixo: a reta de Ball. As posições (X_ℓ, Y_ℓ) , $\ell = 0, 1, 2, 3$ do ponto de Ball (x_b, y_b) devem satisfazer a equação (2.3.1). Assim,

$$\begin{aligned} L_0 X_\ell + L_1 Y_\ell + L_2 &= 0 & (2.3.2) \\ \text{com } \ell &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Para remover o coeficiente L_2 de futuras considerações, cada equação do sistema (2.3.2) pode ser subtraída da equação correspondente a $\ell = 0$, obtendo-se

$$\begin{aligned} \lambda_\ell &= L_0 (X_\ell - X_0) + L_1 (Y_\ell - Y_0) = 0 & (2.3.3) \\ \text{com } \ell &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \lambda_\ell &= L_0 (DX_\ell) + L_1 (DY_\ell) = 0 & (2.3.4) \\ \text{com } \ell &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

O tratamento de PMS exige que seja obtida uma expressão para a função linear generalizada, o que pode ser

realizado considerando-se DX_ℓ , DY_ℓ os deslocamentos generalizados que sofre um ponto do plano móvel quando este assume PMS em relação à posição inicial $\ell = 0$. Os deslocamentos finitos são dados pela equação (2.2.2) e os deslocamentos generalizados, finitos ($k = 0$) ou infinitesimais ($k > 0$), são obtidos através da transformação fundamental (2.2.9), na forma

$$DX_\ell = \left\{ \frac{d^k}{d\phi^k} \left[x(\cos \phi - 1) - y \sin \phi + a \right]_{\phi=\phi_j} \right\} d\phi^k$$

$$DY_\ell = \left\{ \frac{d^k}{d\phi^k} \left[x \sin \phi + y(\cos \phi - 1) + b \right]_{\phi=\phi_j} \right\} d\phi^k$$

ou, em termos dos coeficientes generalizados da curvatura (2.2.10),

$$DX_\ell = (A_{3\ell}x - A_{4\ell}y + A_{5\ell}) d\phi^k \quad (2.3.5)$$

$$DY_\ell = (A_{4\ell}x + A_{3\ell}y + A_{6\ell}) d\phi^k$$

Substituindo as expressões (2.3.5) na equação (2.3.2), obtêm-se a função linear generalizada dada por

$$\Lambda_\ell = L_0(A_{3\ell}x - A_{4\ell}y + A_{5\ell}) + L_1(A_{4\ell}x + A_{3\ell}y + A_{6\ell}) = 0$$

com $\ell = 1, 2, 3$

Para $\ell = 3$, a relação L_1/L_0 é dada por

$$\frac{L_1}{L_0} = - \frac{DX_3}{DY_3} = - \frac{A_{33}x - A_{43}y + A_{53}}{A_{43}x + A_{33}y + A_{63}}$$

Para $\ell = 1, 2$, a equação (2.3.3) é satisfeita por todos os pontos do círculo (2.2.16) que é o lugar geométrico dos pontos do plano móvel que possuem 3 PMS sobre uma reta do plano fixo. Consequentemente, o ponto de Ball está sobre esse círculo (Figura 2.3.1).

Escolhendo $B'(r', \theta_b')$ como um ponto sobre a reta de Ball, mas de tal modo que $P_{01}B'$ lhe seja normal,

$$\tan \theta_b' = \tan (\theta_b + \beta) = \frac{L_1}{L_0}$$

Então,

$$\frac{\tan \theta_b + \tan \beta}{1 - \tan \theta_b \tan \beta} = - \frac{A_{33}x_b - A_{43}y_b + A_{53}}{A_{43}x_b + A_{33}y_b + A_{63}} \quad (2.3.6)$$

Como

$$x_b = r_b \cos \theta_b = \text{sen } \theta_b \cos \theta_b$$

$$y_b = r_b \text{sen } \theta_b = \text{sen}^2 \theta_b$$

então, a partir da equação (2.3.6), obtêm-se a expressão geral para a determinação do ponto de Ball:

$$\tan \theta_b = - \frac{A_{53} + A_{63} \tan \beta}{A_{33} + A_{63} + A_{43} \tan \beta}$$

E a reta de Ball é dada na sua forma geral por

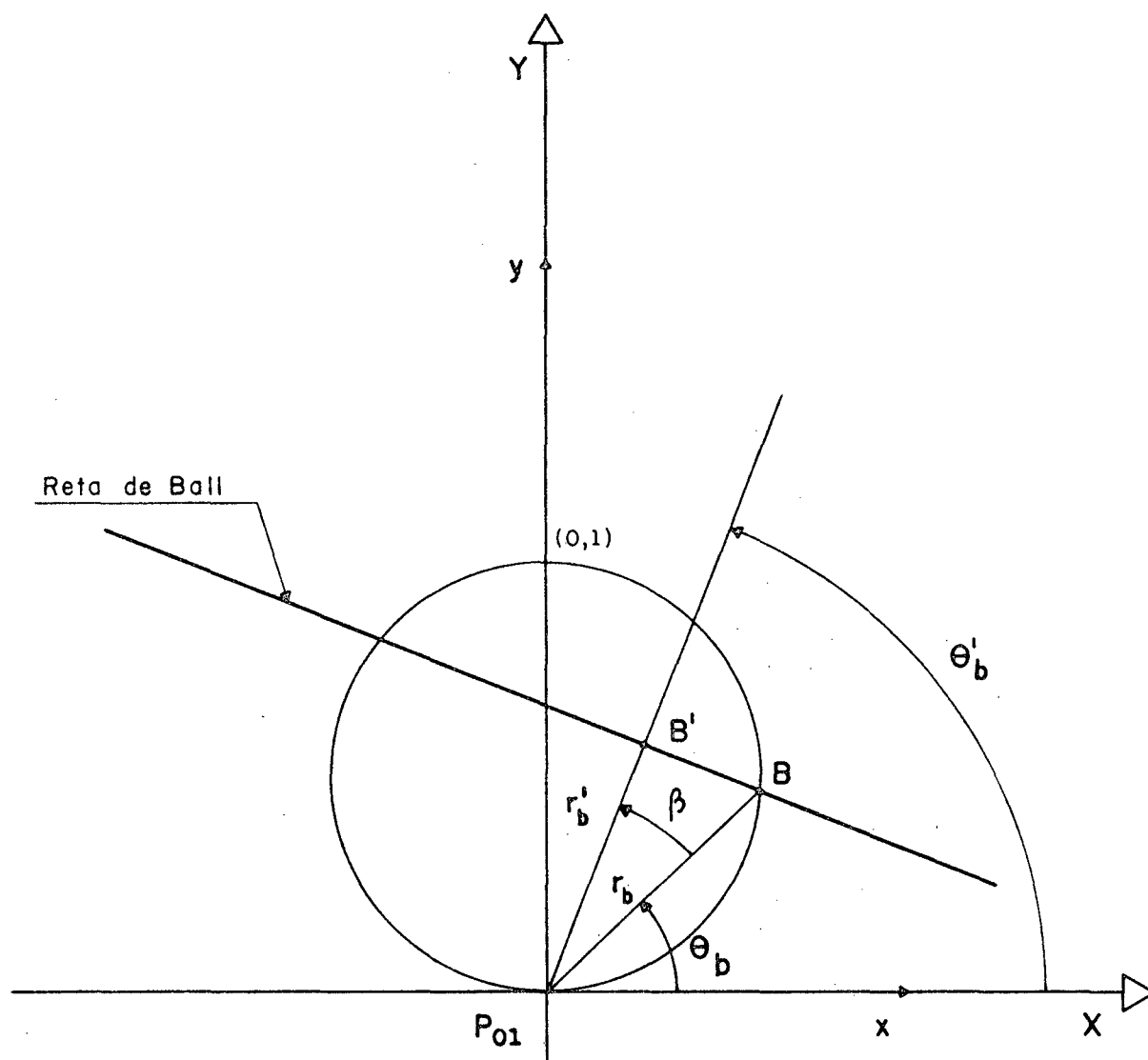


Figura 2.3.1 - A reta e o ponto de Ball

$$x + y \tan(\theta_b + \beta) - \{\cot \theta_b + \tan(\theta_b + \beta)\} \text{sen}^2 \theta_b = 0$$

Expressão Generalizada da Curva dos Pontos de Círculo

O lugar geométrico dos pontos do plano móvel que assumem 4 PMS sobre um círculo $G(X,Y) = 0$ do plano fixo é chamado curva dos pontos de círculo.

Considerando a forma geral do círculo no plano fixo dada pela equação (2.2.25) para $\ell = 0, 1, 2, 3$, a remoção da constante Q_3 pode ser obtida com o sistema (2.2.28) para $\ell = 1, 2, 3$, constituído de três equações homogêneas a três incógnitas: Q_0, Q_1 e Q_2 . O determinante principal desse sistema deve ser nulo para que sejam admitidas soluções diferentes da trivial. Usando a transformação fundamental (2.2.9), os coeficientes generalizados da curvatura (2.2.10), (2.2.30) e as condições especiais ($\phi_0 = \alpha_0 = b_0 = \alpha_1 = b_1 = 0$), tem-se

$$\begin{vmatrix} A_{11}X + A_{21}Y + A_{01} & A_{31}X - A_{41}Y + A_{51} & A_{41}X + A_{31}Y + A_{61} \\ A_{12}X + A_{22}Y + A_{02} & A_{32}X - A_{42}Y + A_{52} & A_{42}X + A_{32}Y + A_{62} \\ A_{13}X + A_{23}Y + A_{03} & A_{33}X - A_{43}Y + A_{53} & A_{43}X + A_{33}Y + A_{63} \end{vmatrix} = 0$$

(2.3.7).

onde

$$A_{01} = A_{11} = A_{21} = A_{51} = A_{61} = 0.$$

Os elementos do determinante da equação (2.3.7) são funções lineares de x e y . Desenvolvendo esse determinante, obtêm-se a expressão geral da cúbica dos pontos de círculo:

$$(x^2 + y^2) \{Ax + By\} + Cx^2 + Dy^2 + Exy + Fx + Gy = 0 \quad (2.3.8)$$

onde

$$A = A_{12}(A_{41}A_{33} - A_{31}A_{43}) + A_{13}(A_{31}A_{42} - A_{41}A_{32})$$

$$B = A_{22}(A_{41}A_{33} - A_{31}A_{43}) + A_{23}(A_{31}A_{42} - A_{41}A_{32})$$

$$C = A_{02}(A_{41}A_{33} - A_{31}A_{43}) + A_{03}(A_{31}A_{42} - A_{41}A_{32}) +$$

$$+ A_{12}(A_{41}A_{53} - A_{31}A_{63}) + A_{13}(A_{31}A_{62} - A_{41}A_{52})$$

$$D = A_{02}(A_{41}A_{33} - A_{31}A_{43}) + A_{03}(A_{31}A_{42} - A_{41}A_{32}) +$$

$$+ A_{22}(A_{31}A_{53} - A_{41}A_{63}) - A_{23}(A_{31}A_{52} + A_{41}A_{62})$$

$$E = A_{12}(A_{31}A_{53} + A_{41}A_{63}) - A_{13}(A_{31}A_{52} + A_{41}A_{62}) +$$

$$+ A_{22}(A_{41}A_{53} - A_{31}A_{63}) - A_{23}(A_{41}A_{52} - A_{31}A_{62})$$

$$F = A_{02}(A_{41}A_{53} - A_{31}A_{63}) + A_{03}(A_{31}A_{62} - A_{41}A_{52})$$

$$G = A_{02}(A_{31}A_{53} + A_{41}A_{63}) - A_{03}(A_{31}A_{52} + A_{41}A_{62})$$

Para o caso de 4PIS, e considerando as condições especiais ($\phi_0 = a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = a_2 = 0, b_2 = 1$), a equação (2.3.8) toma a forma da cúbica de curvatura esta

cionária:

$$(x^2 + y^2) \{(a_3 + 3)x + b_3 y\} - 3xy = 0$$

2.4 - CINCO PMS

As combinações principais de 5 PMS (PPPPP, PPPP-P, PPP-PP, PPP-P-P, PP-PP-P, PP-P-P-P, P-P-P-P-P) permitem a especificação de movimentos com uma grande variedade de características (Figuras 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6 e 2.4.7), de onde resulta a potencialidade da Teoria PMS.

O problema da transformação da curvatura para 4 PMS apresenta infinitas soluções, pois os pontos de círculo correspondentes constituem uma cúbica $f(x,y) = 0$ do plano móvel. Se são especificadas 5 PMS sucessivas, $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$, a quantidade de soluções é finita. Considerando f_{0123} como a cúbica dos pontos de círculo correspondente às quatro posições $\ell = 0, 1, 2, 3$ e f_{0124} , o mesmo em relação às posições $\ell = 0, 1, 2, 4$, então, as intersecções dessas cúbicas constituem-se nos pontos do plano móvel que possuem 5 PMS sobre um círculo do plano fixo.

Ora, a teoria das curvas algébricas assegura que existem nove intersecções entre duas cúbicas. Dessas, os pólos ou centros instantâneos P_{01} , P_{12} e P_{02} são pontos comuns às cúbicas f_{0123} e f_{0124} apresentando-se,

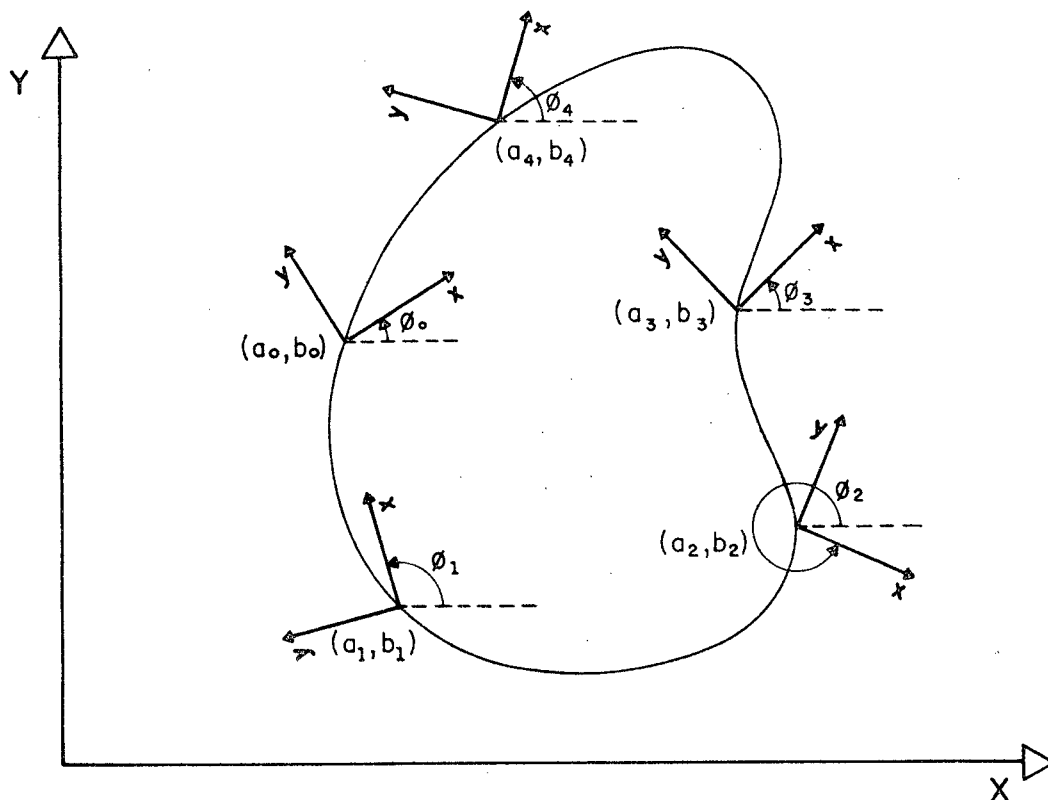


Figura 2.4.1. - 5 PFS, P-P-P-P-P, definem dez pólos de rotação

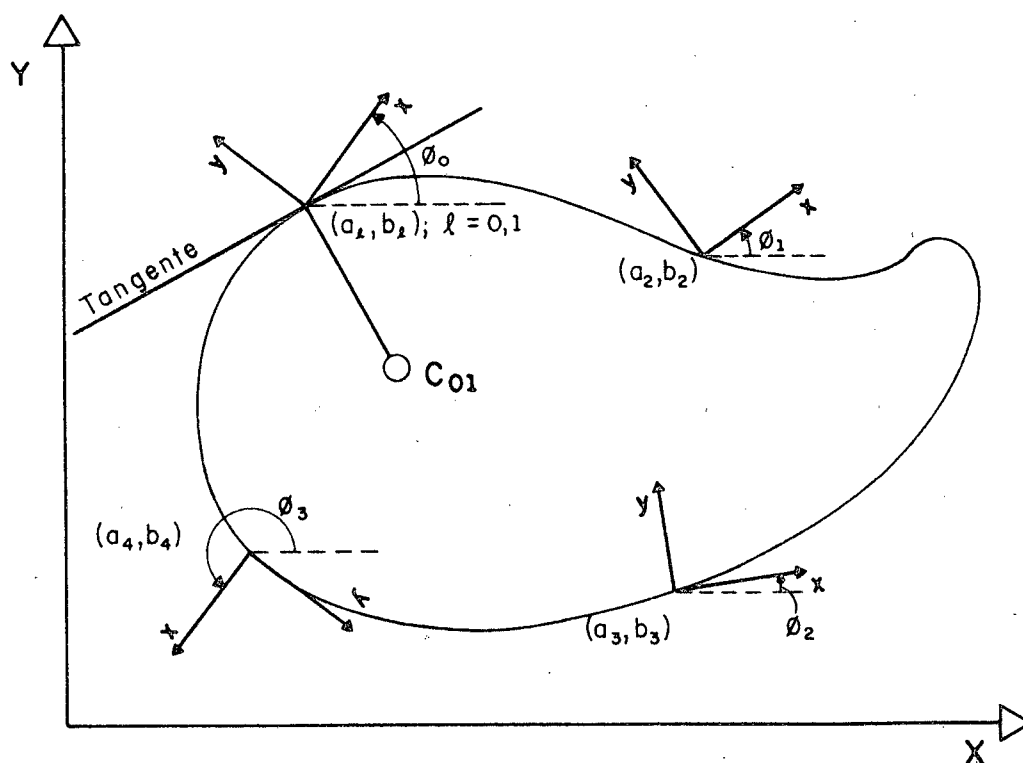


Figura 2.4.2 - 5 PMS, PP-P-P-P. As 2 PIS definem uma tangente à trajetória

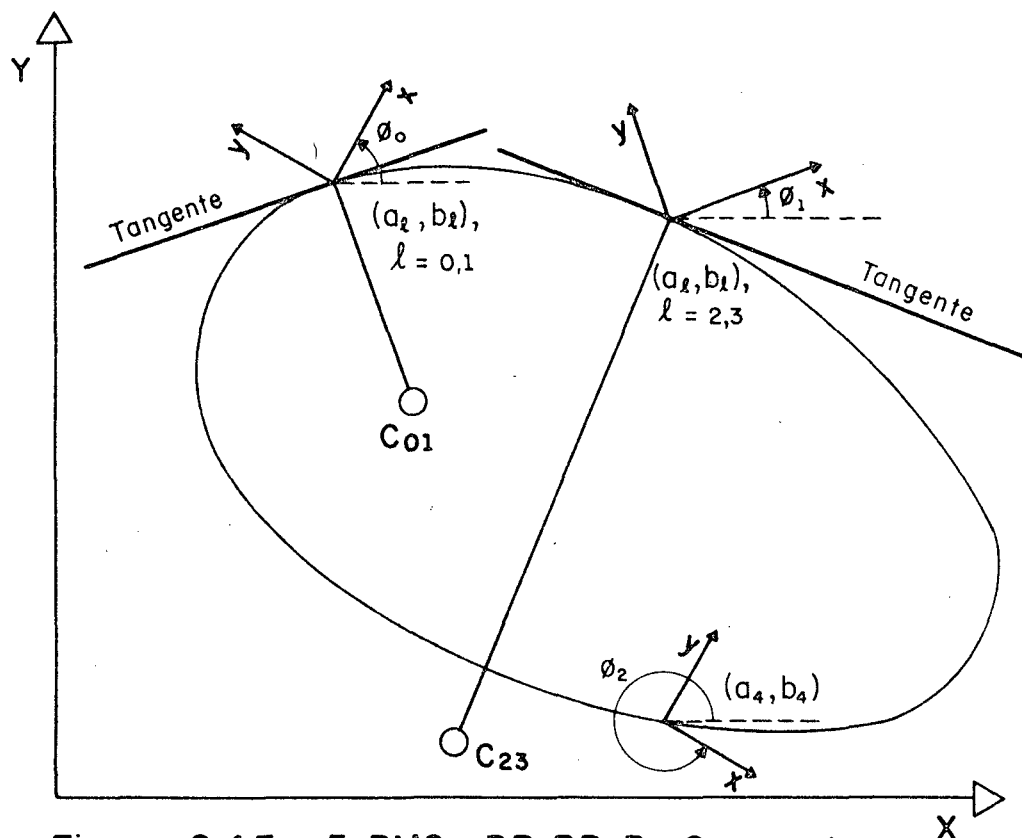


Figura 2.4.3 - 5 PMS, PP-PP-P. Com esta combinação ficam definidas duas tangentes à trajetória

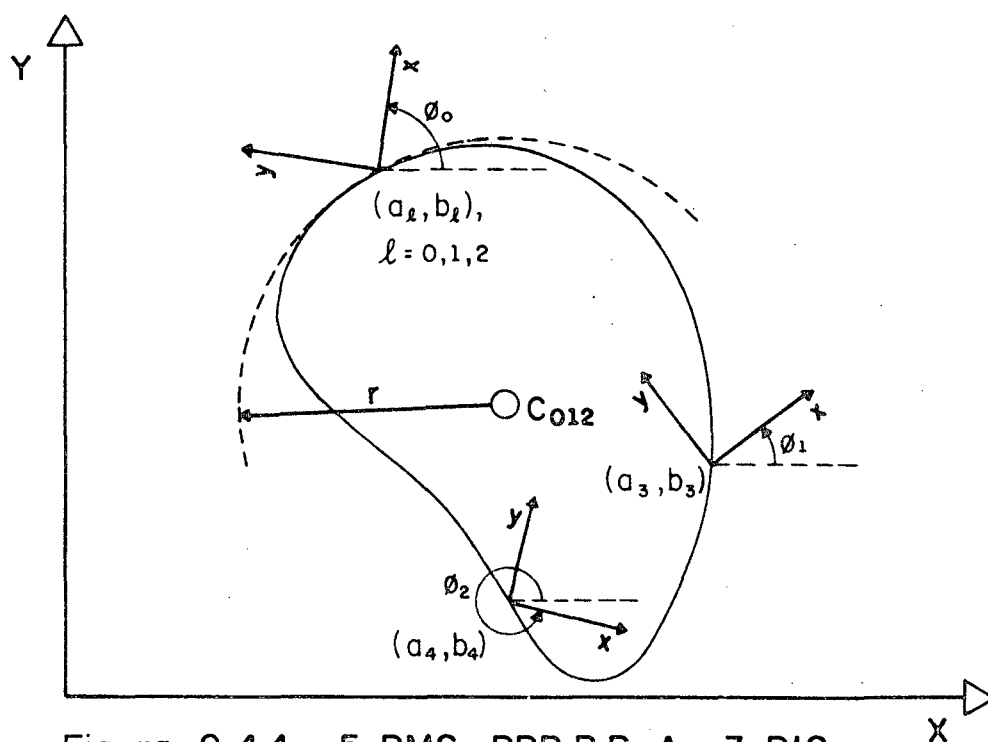


Figura 2.4.4. - 5 PMS, PPP-P-P. As 3 PIS definem a curvatura $K = 1/r$ em um trecho da trajetória

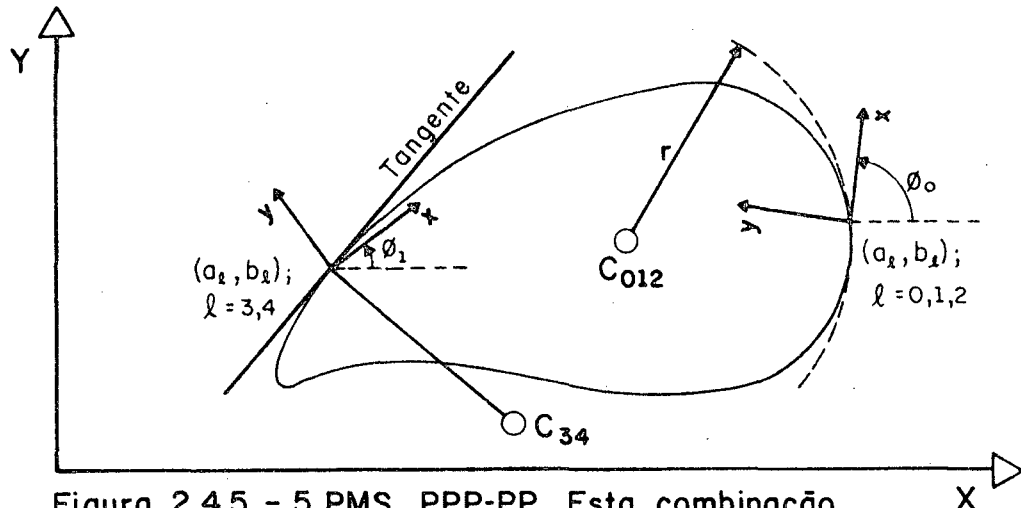


Figura 2.4.5 - 5 PMS, PPP-PP. Esta combinação define uma curvatura $K=1/r$ e uma tangente

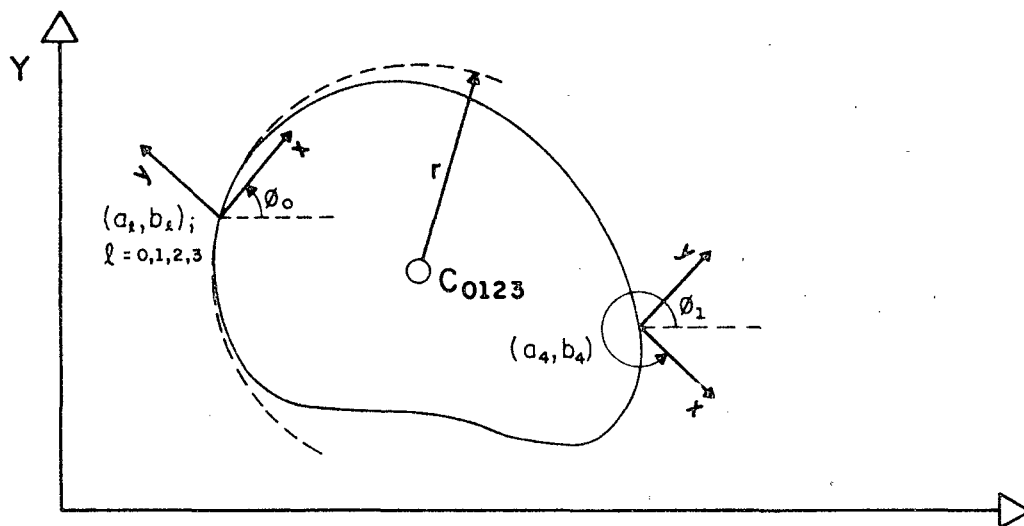


Figura 2.4.6. - 5 PMS, PPPP-P. As 4 PIS definem uma curvatura $K=1/r$ e sua derivada K'

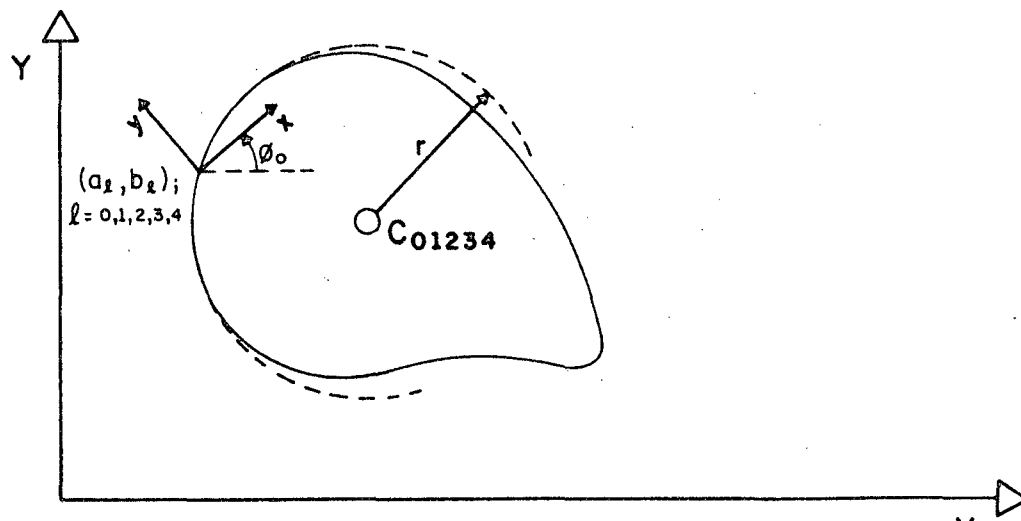


Figura 2.4.7 - 5 PIS definem uma curvatura $K=1/r$ e suas derivadas K' e K''

portanto, como três intersecções reais. Dois pontos complexos representam mais duas intersecções. São as quatro intersecções restantes que satisfazem o problema de 5 PMS. Se todos estes quatro pontos forem reais, existem quatro pares de Burmester que levam a seis soluções originais. Se apenas duas intersecções forem reais, o problema tem solução única. O problema não terá solução se os quatro pontos forem complexos.

O círculo de Burmester é dado em relação ao sistema fixo pela expressão

$$G(X,Y) = Q_0(X^2 + Y^2) + 2 Q_1 X + 2 Q_2 Y + Q_3 = 0$$

a partir da qual, utilizando o sistema especial de referência ($\phi_0 = a_0 = b_0 = 0$) e os coeficientes generalizados da curvatura (2.2.10) e (2.2.30), obtêm-se a equação de restrição circular generalizada

$$\begin{aligned} & A_{0\ell} Q_0 + A_{1\ell} Q_0 x + A_{2\ell} Q_0 y + A_{3\ell} (Q_1 x + Q_2 y) + \\ & + A_{4\ell} (Q_2 x - Q_1 y) + A_{5\ell} Q_1 + A_{6\ell} Q_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

para $\ell = 1, 2, 3, 4$

cujas incógnitas são (x, y) , as coordenadas do ponto de Burmester no plano móvel, e

$$X = - \frac{Q_1}{Q_0} \qquad Y = - \frac{Q_2}{Q_0}$$

as coordenadas do centro de Burmester no plano fixo. Como existe uma equação para cada uma das quatro posições $\ell = 1, 2, 3, 4$, o sistema (2.4.1) é determinado.

Dividindo-se a equação (2.4.1) por Q_0 , obtém-se a equação não linear

$$A_{0\ell} + A_{1\ell}x + A_{2\ell}y + A_{3\ell} \frac{xQ_1 + yQ_2}{Q_0} + A_{4\ell} \frac{xQ_2 - yQ_1}{Q_0} + A_{5\ell} \frac{Q_1}{Q_0} + A_{6\ell} \frac{Q_2}{Q_0} = 0, \quad (2.4.2)$$

$$\ell = 1, 2, 3, 4$$

que é linearizada quando se considera o novo conjunto de sete incógnitas

$$Z_0 = Q_0 \quad Z_1 = xQ_0 \quad Z_2 = yQ_0$$

$$Z_3 = xQ_1 + yQ_2 \quad Z_4 = xQ_2 - yQ_1 \quad Z_5 = Q_1$$

$$Z_6 = Q_2$$

de modo que a equação (2.4.2) torna-se

$$\sum_{m=0}^6 A_{m\ell} Z_m = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, 4 \quad (2.4.3)$$

que se constitui em quatro relações lineares, uma para cada valor de ℓ .

As relações quadráticas

$$Z_0 Z_3 = Z_1 Z_5 + Z_2 Z_6 \quad (2.4.4)$$

$$Z_0 Z_4 = Z_1 Z_6 - Z_2 Z_5$$

juntamente com as equações (2.4.3) representam seis relações em termos de seis incógnitas Z_m/Z_0 , $m = 1, 2, \dots, 6$, de modo que existem quatro soluções que podem ser todas reais, todas complexas ou duas reais e duas complexas. Essas soluções têm a forma

$$x_n = \left(\frac{Z_1}{Z_0} \right)_n \quad y_n = \left(\frac{Z_2}{Z_0} \right)_n$$

$$X_n = \left(\frac{Z_5}{Z_0} \right)_n \quad Y_n = \left(\frac{Z_6}{Z_0} \right)_n$$

Considerando a solução para o caso de 5 PMS do plano móvel e supondo que Z_0 , Z_1 e Z_2 sejam valores conhecidos, pode-se reescrever a equação (2.4.3) na forma

$$A_{3\ell} Z_3 + A_{4\ell} Z_4 + A_{5\ell} Z_5 + A_{6\ell} Z_6 = -A_{0\ell} Z_0 - A_{1\ell} Z_1 - A_{2\ell} Z_2$$

$$\ell = 1, 2, 3, 4 \quad (2.4.5)$$

Usando a regra de Cramer, a solução do sistema linear (2.4.5) toma a forma

$$Z_{i+2} = Z_0 B_i + Z_1 C_i + Z_2 D_i \quad (2.4.6)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

onde

$$B_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=1}^4 (-1)^\ell A_{0\ell} \Delta_{\ell i}$$

$$C_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=1}^4 (-1)^\ell A_{1\ell} \Delta_{\ell i}$$

$$D_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=1}^4 (-1)^\ell A_{2\ell} \Delta_{\ell i}$$

Δ representa o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (2.4.5) e $\Delta_{\ell i}$ representa os cofatores referentes às posições ℓ, i .

Se $\Delta \rightarrow 0$, $Q_{1,2} \rightarrow \infty$ e um círculo de Burmester de genera em reta, de modo que um ponto de Burmester possui 5 PMS sobre uma reta.

Se $\Delta \neq 0$, a equação (2.4.5) fornece expressões para Z_3, Z_4, Z_5 e Z_6 em termos de Z_0, Z_1 e Z_2 . Substituindo estas expressões na equação (2.4.4), obtêm-se as cônicas de Bottema no plano móvel:

$$D_4 y^2 + \{(D_3 + C_4)x + B_4 - D_1\}y + C_3 x^2 + (B_3 - C_1)x - B_1 = 0$$

$$D_3 y^2 + \{(C_3 - D_4)x + B_3 - D_2\}y - C_4 x^2 + (C_2 - B_4)x + B_2 = 0$$

(2.4.7)

Os quatro pontos de Burmester são as intersecções dessas cônicas. Combinando-se as duas quadráticas (2.4.7) para a eliminação de y , obtêm-se a quártica

$$E_1 x^4 + E_2 x^3 + E_3 x^2 + E_4 x + E_5 = 0$$

onde

$$E_1 = (c - h)^2 - f(c - h)(a - f) + h(a - f)^2,$$

$$E_2 = (h - c) [2(p - d) + f(b - g)] + (a - f) [f(p - d) + g(h - c) + p(a - f) + 2h(b - g)],$$

$$E_3 = (d - p)^2 + 2(h - c)(q - e) + (b - g) [f(p - d) + g(h - c) + h(b - g)] + (a - f) [f(q - e) + g(p - d) + q(a - f) + 2p(b - g)],$$

$$E_4 = (b - g) [f(q - e) + g(p - d) + 2q(a - f) + p(b - g)] + (q - e) [2(p - d) + g(a - f)],$$

$$E_5 = (e - q)^2 + g(q - e)(b - g) + q(b - g)^2$$

e

$$a = \frac{D_3 + C_4}{D_4}$$

$$b = \frac{B_4 - D_1}{D_4}$$

$$c = \frac{C_3}{D_4}$$

$$d = \frac{B_3 - C_1}{D_4}$$

$$e = \frac{-B_1}{D_4}$$

$$f = \frac{C_3 - D_4}{D_3}$$

$$g = \frac{B_3 + D_2}{D_3}$$

$$h = \frac{-C_4}{D_3}$$

$$p = \frac{C_2 - B_4}{D_3}$$

$$q = \frac{B_2}{C_3}$$

As raízes reais e complexas da quártica podem ser calculadas por um processo analítico, obtendo-se os quatro valores de x_n . Os correspondentes valores de y_n podem, então, ser calculados por

$$y_n = \frac{(h - c) (x_n)^2 + (p - d)x_n + (q - e)}{(a - f)x_n + (b - g)}$$

e os centros de Burmester são determinados através das expressões

$$X_n = -(B_3 + C_3 x_n + D_3 y_n)$$

$$Y_n = -(B_4 + C_4 x_n + D_4 y_n)$$

$$n = 1, 2, 3, 4$$

C A P Í T U L O I I I

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DA TEORIA PMS

3.1 - INTRODUÇÃO

A teoria PMS foi utilizada no projeto dos mecanismos de regulagem do fluxo, carimbação e encapamento para uma máquina de embalar carretéis de esparadrapo. A máquina foi concebida com três módulos distintos:

- a) o primeiro, denominado módulo de alimentação, recebe de modo desordenado os carretéis e as capas, que são ordenados e enviados ao segundo módulo para serem submetidos ao início do processamento de embalagem.
- b) o segundo, denominado módulo de preparação, recebe os carretéis e as capas ordenadamente, regula o seu fluxo, carimba e encapa os carretéis e, por sua vez, envia-os para o terceiro módulo. No segundo módulo foram previstos mecanismos articulados para executar as tarefas de regulagem do fluxo, carimbação e encapamento.
- c) o terceiro, denominado módulo de empacotamento, recebe os carretéis encapados, ordena-os e coloca-os na embalagem. Os mecanismos articulados previstos para este módulo ainda não foram dimensionados.

Neste capítulo pretende-se apresentar o procedi

mento utilizado na síntese cinemática dos mecanismos de regulagem do fluxo, carimbação e encapamento previstos para o segundo módulo.

3.2 - MECANISMO DE REGULAGEM DO FLUXO

As operações de carimbação e encapamento exigem, do modo como foram concebidas, o fluxo intermitente das capas e dos carretéis. Esta intermitência poderia ser obtida através de diferentes dispositivos, entre eles, a roda de Genebra com seis rasgos.

Embora a máquina pudesse utilizar uma roda de Genebra acionada do modo clássico, tentou-se obter esse acionamento através de um rolete instalado na barra acoplado-ra de um quadrilátero articulado.

As características principais desejáveis do movimento do rolete são a entrada suave nos rasgos da roda de Genebra, uma trajetória aproximadamente circular durante o acionamento, um acionamento sem acelerações e uma trajetôria externa curta e sem interferência com a roda. Trata-se de um problema de síntese de trajetória e a especificação adotada para o movimento foi a de 2 PIS, com a configuração PP - PP - P. Na entrada da roda, assim como na saída, 2 PIS definem tangentes à trajetória do rolete. A especificação de 1 PFS no trecho externo completa a configuração de 5 PMS.

Tomando a origem do plano móvel como ponto do a

coplador, usou-se o sistema geral de referência para evitar uma trajetória com cuspide (Figura 3.2.1).

Para $\lambda = 0$, $a_0 = 0,424$ e $b_0 = 0,245$ foram tomados como as coordenadas do ponto de acoplamento com a roda. Como o problema é de síntese de trajetória, os ângulos ϕ_j são livres para otimização. Na especificação que gerou o mecanismo definitivo tomou-se $\phi_0 = 30^\circ$.

A especificação de a_1 e b_1 depende da definição das tangentes às trajetórias de dois pontos do plano móvel no instante correspondente à posição $\lambda = 0$. A tangente à trajetória do rolete tem inclinação de 30° no ponto de acoplamento, então o centro instantâneo de rotação $C_{01}(XC_{01}, YC_{01})$ deve estar sobre a normal

$$y = -1,732x + 0,980$$

Para $XC_{01} = -0,6$, $YC_{01} = 2,019$, e a_1 e b_1 são dados por

$$a_1 = YC_{01} - b_0 = 1,774$$

$$b_1 = a_0 - XC_{01} = 1,024$$

Para a posição $\lambda = 2$, na saída da roda de Geneva, foram especificados,

$$a_2 = 0,424$$

$$b_2 = -0,245$$

$$\phi_j = \phi_1 = 55^\circ$$

l	j	k	a	b	θ
0	0	0	0,424	0,245	30°
1	0	1	1,774	1,024	—
2	1	0	0,424	-0,245	55°
3	1	1	0,304	-0,176	—
4	2	0	0,490	0,000	70°

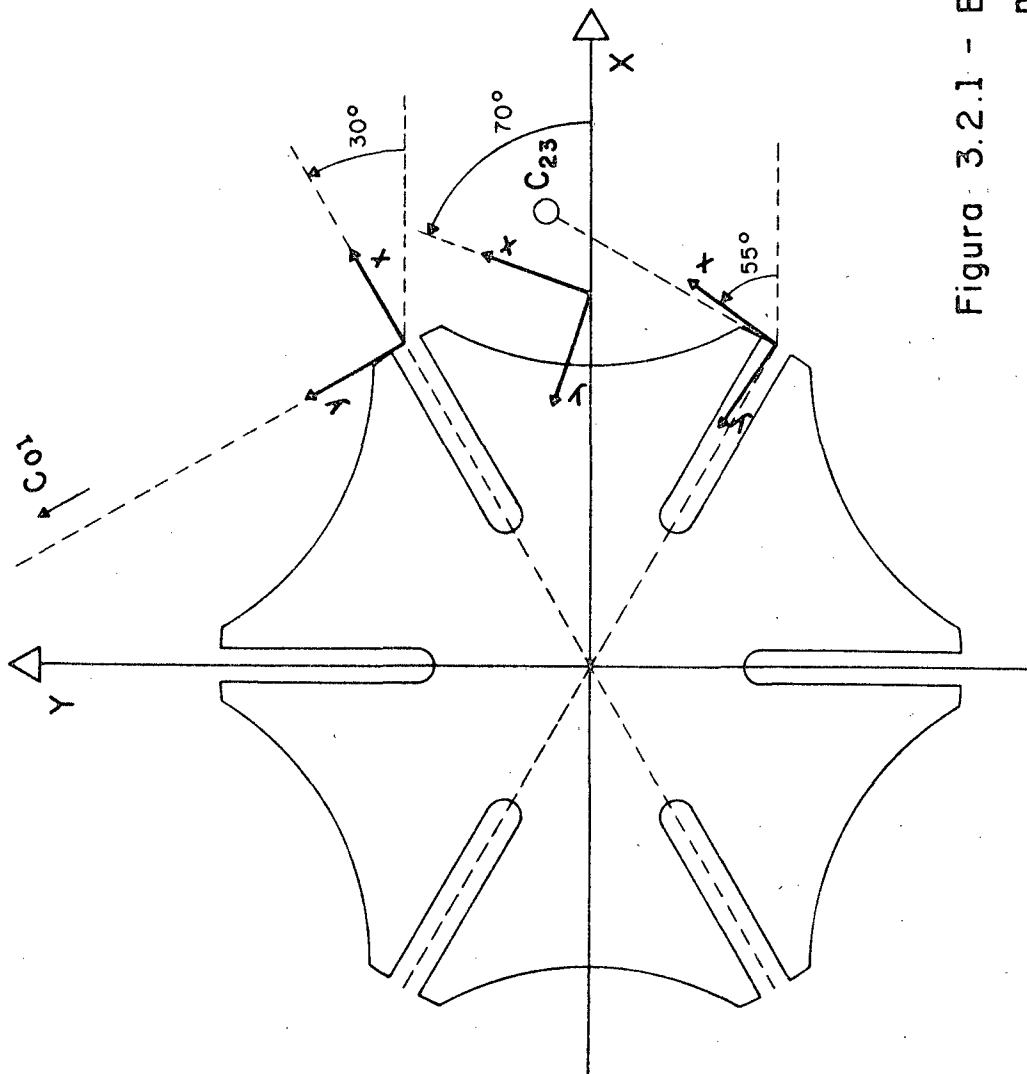


Figura 3.2.1 - Especificação do movimento para o mecanismo de regulagem do fluxo (PP-PP-P)

Os parâmetros de movimento para $\ell = 3$ foram de terminados de modo análogo ao que foi utilizado para $\ell = 1$. Com a normal definida por

$$y = 1,732 x - 0,980$$

para

$$XC_{23} = 0,6 \quad e \quad YC_{23} = 0,059$$

tem-se

$$a_3 = 0,304 \quad e \quad b_3 = -0,176$$

A quinta posição foi definida por

$$a_4 = 0,490 \quad b_4 = 0,000 \quad \phi_j = \phi_2 = 75^\circ$$

Entre os mecanismos obtidos, o da Figura 3.2.2, apresenta uma trajetória satisfatória para o ponto do acoplador, boa mobilidade e barras proporcionais. Como a construção de modelos indicou um bom funcionamento do sistema, esse mecanismo é proposto como solução para o problema do acionamento da roda de Genebra.

3.3 - MECANISMO DE CARIMBAÇÃO

As principais características desejáveis para o movimento do mecanismo de carimbação de carretéis foram de finidas por uma aproximação paralela da face atuante do carimbo sobre a superfície a carimbar e, logo após a carimbação, afastamento instantâneo. Estas características sugere

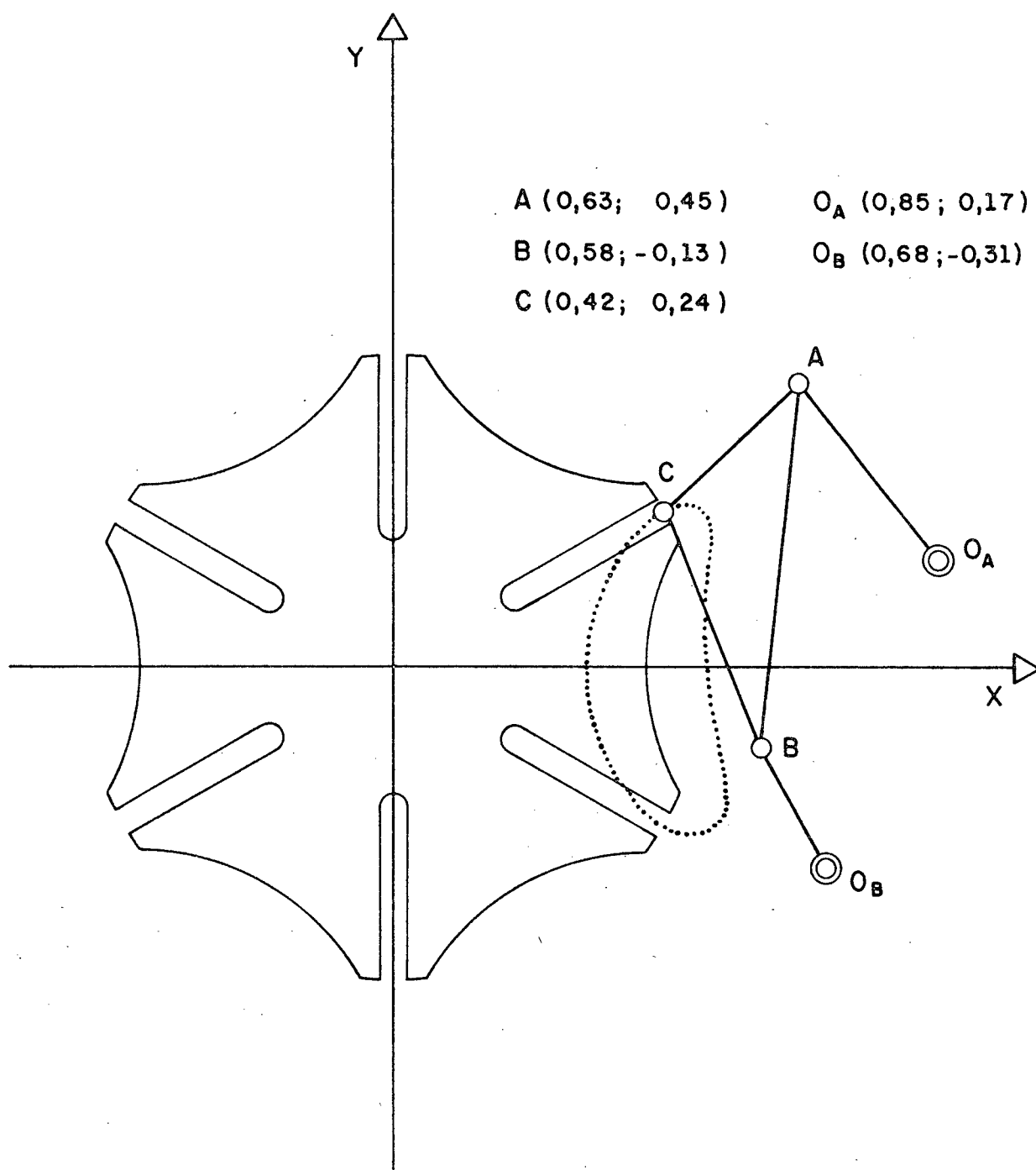


Figura 3.2.2 - Mecanismo de regulagem do fluxo

rem um cuspide na trajetória do ponto do acoplador.

Um cuspide é obtido na trajetória do ponto do acoplador quando este ponto torna-se um centro instantâneo de rotação em alguma posição de sua trajetória.

Usando a combinação PP - P - P - P (onde PP significa 2 PIS e P - P, 2 PFS), e o sistema especial de referência, o sistema móvel x, y e o sistema fixo X, Y de coordenadas são coincidentes na posição inicial $\ell = 0$. Então, $\phi_0 = \alpha_0 = b_0 = 0$.

Uma rotação instantânea define tangentes às trajetórias de todos os pontos do plano móvel, com exceção única do centro instantâneo de rotação C_{01} (XC_{01}, YC_{01}). Tomando $XC_{01} = YC_{01} = 0$, a origem do sistema móvel apresenta um ponto de cuspide na sua trajetória ao passar pela origem do sistema fixo.

Usando a equação (2.2.8),

$$a_1 = YC_{01} - b_0 = 0$$

$$b_1 = a_0 - XC_{01} = 0$$

As posições $\ell = 2, 3, 4$ são especificadas como PFS e foram usadas para otimizar as características do mecanismo (Figura 3.3.1).

O mecanismo da Figura 3.3.2 foi obtido com as especificações apresentadas na Figura 3.3.1. É do tipo manivela - balancim, possui boa mobilidade e barras proporcio-

PP-P-P-P

l	j	k	a	b	ϕ
0	0	0	0,0	0,0	0,0°
1	0	1	0,0	0,0	—
2	1	0	0,49	-0,24	5,0°
3	2	0	0,59	-0,07	-20,0°
4	3	0	0,35	0,07	-23,0°

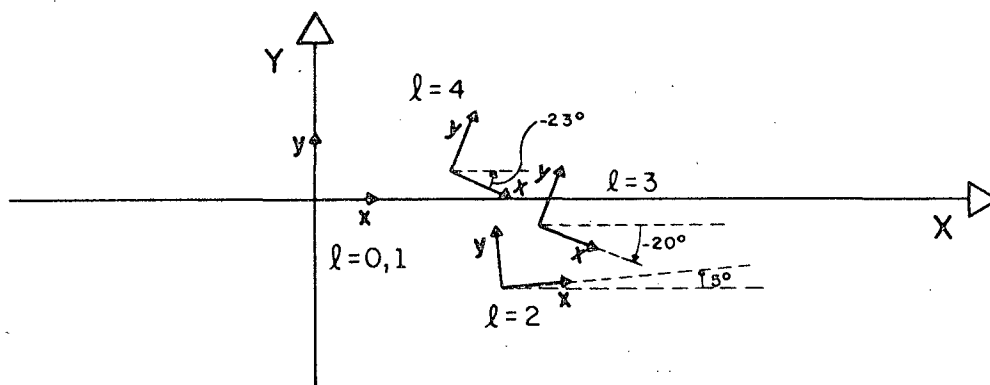


Figura 3.3.1 - Especificações para o mecanismo de carimbação

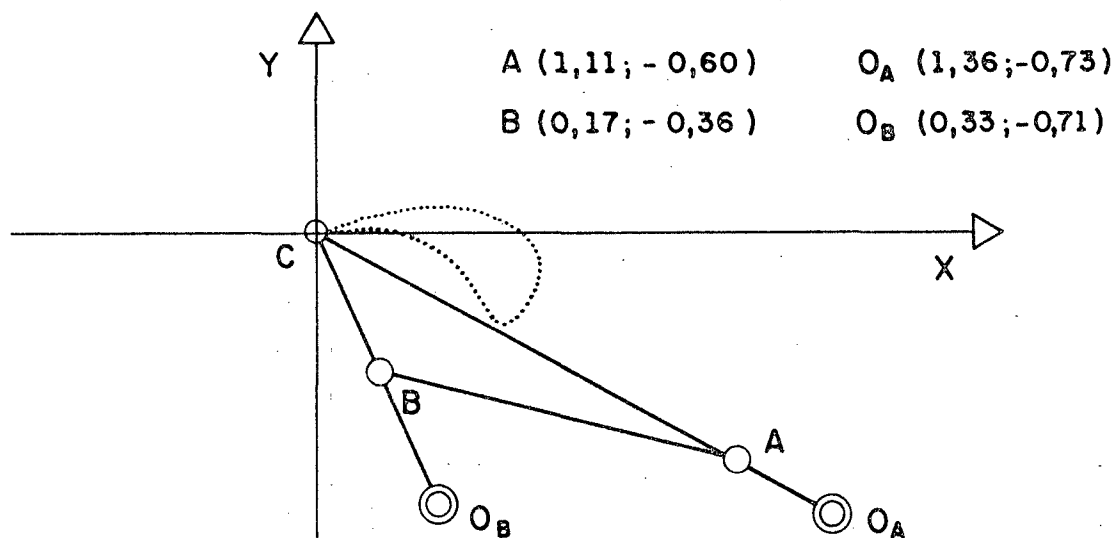


Figura 3.3.2. - Mecanismo de carimbação

nais. Esse mecanismo é apresentado como uma solução possível para o problema da carimbação de carretéis, uma vez que os modelos apresentaram boas condições de funcionamento.

3.4 - MECANISMO DE ENCAPAMENTO

A operação de encapamento dos carretéis foi concebida de tal maneira que exige do ponto do acoplador uma trajetória de pequena curvatura em um trecho relativamente longo. Durante a execução desse trecho da trajetória, o carretel é empurrado e depois introduzido e fixado no interior da capa. Além disso, o acoplador tem a função de impedir que o carretel, ao chegar no fundo do acumulador, escape ou tombe. A construção de modelos mostrou que, nesta função, se inclinado na posição inicial (Figura 3.4.1), o acoplador ainda orienta o carretel para dentro da capa, mesmo sem empurrá-lo.

Outras características exigidas para o mecanismo de encapamento são uma boa transmissão de forças e a presença dos pivôs fora do acumulador, e de um mesmo lado.

Foi adotada a especificação de 5 PFS, apresentada na Figura 3.4.1. A posição $\lambda = 0$ define a posição inicial do acoplador e $\lambda = 1$ a posição final, de modo que apenas o trecho $\lambda = 0, 1$ é utilizado. As outras posições foram utilizadas de modo a otimizar as características do mecanismo.

A Figura 3.4.2 apresenta uma proposta de solução

P-P-P-P-P

l	j	k	a	b	θ
0	0	0	0,0	0,0	-3°
1	1	0	-0,254	0,028	0°
2	2	0	-0,412	0,067	7°
3	3	0	0,181	-0,370	$54,3^\circ$
4	4	0	0,274	0,066	$5,5^\circ$

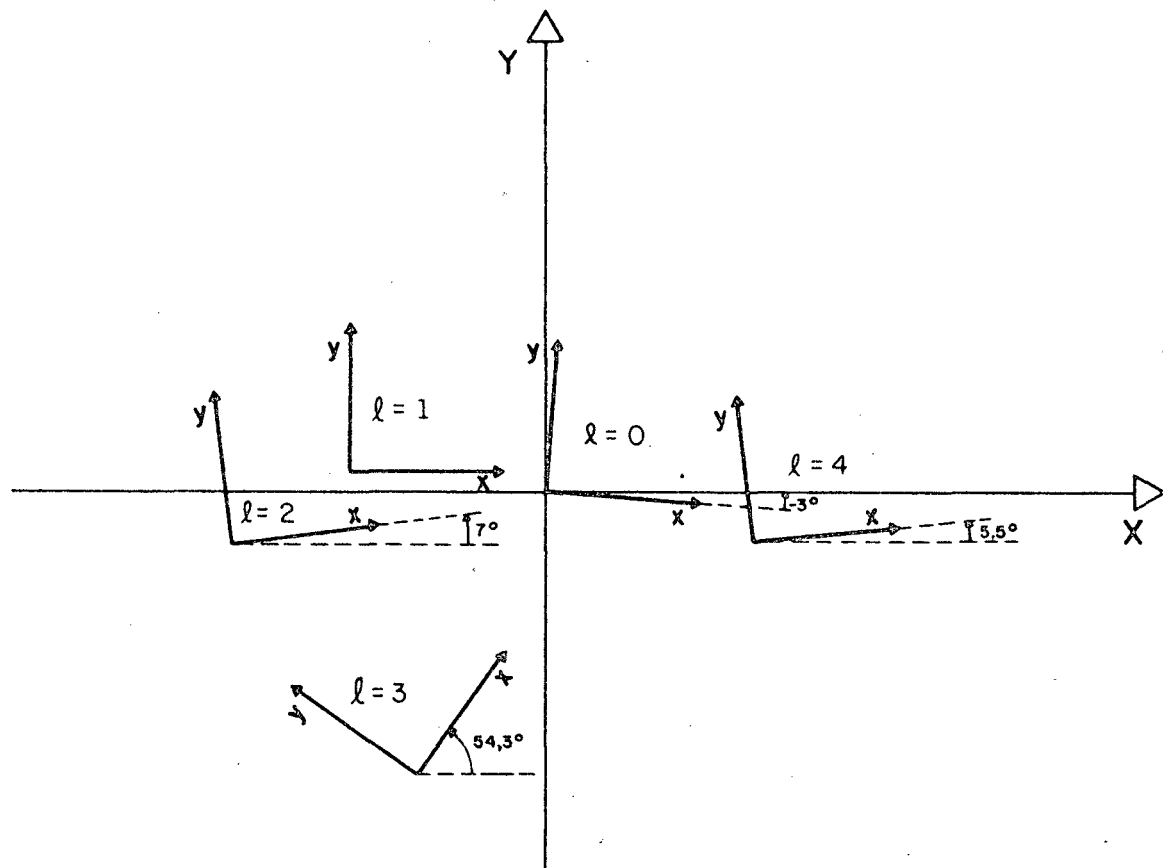


Figura 3.4.1 - Especificação para o mecanismo de encapamento

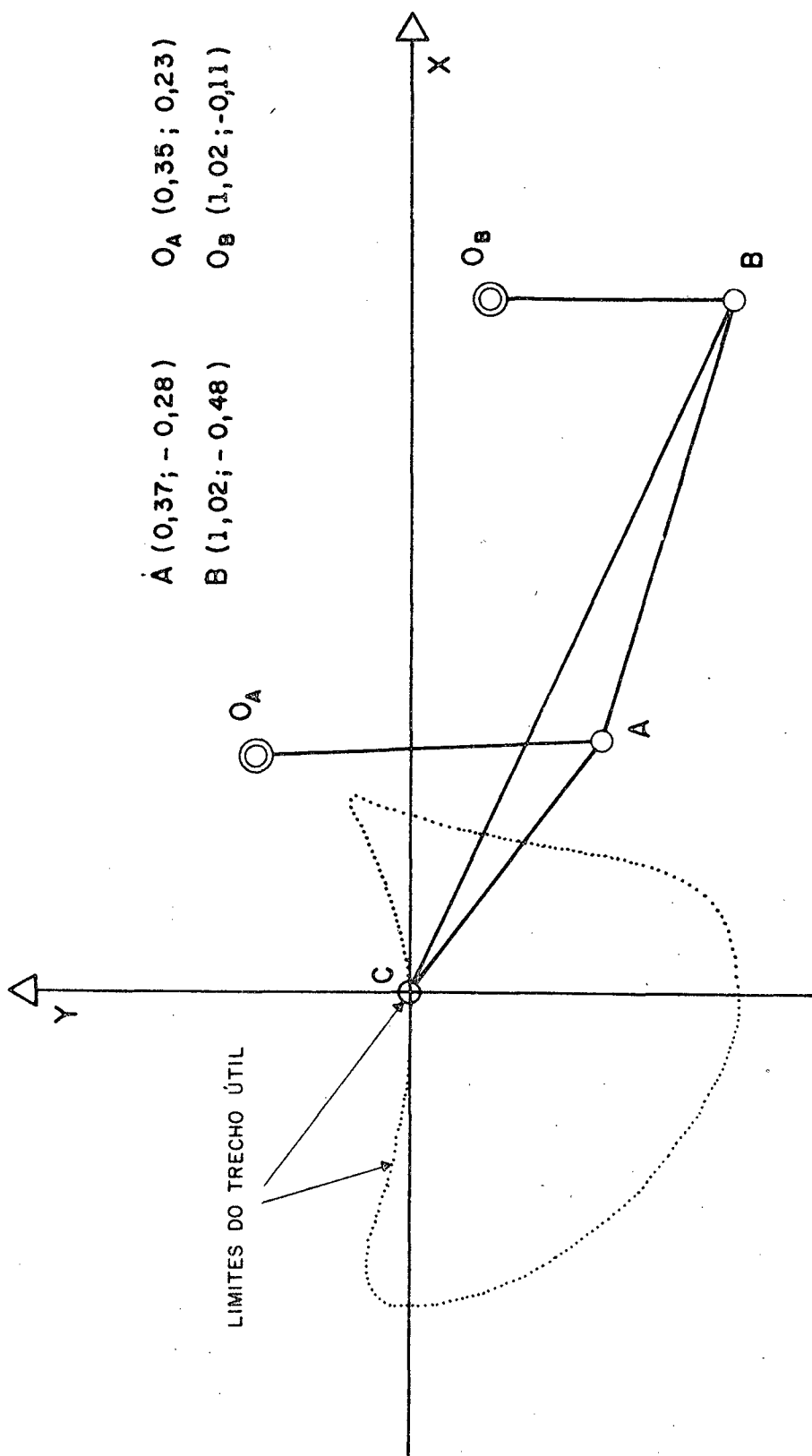


Figura 3.4.2. - Mecanismo de encapamento

para o problema do encapamento de carretéis. Trata-se de um mecanismo manivela-balancim, que deverá ser transformado em um mecanismo de seis barras para que o acoplador execute apenas o movimento útil.

Um modelo desse mecanismo demonstra um bom funcionamento na execução da tarefa de encapamento de carretéis.

C A P Í T U L O I V

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

4.1 - CONCLUSÕES

A síntese de mecanismos de quatro barras é básica e pode ser utilizada na obtenção de mecanismos planos de 5, 6 e mais barras, e de mecanismos espaciais. Desse modo, a teoria PMS aliada à inversão, cognação angular e cognação de trajetória torna-se um meio de amplos recursos na obtenção de movimentos com as mais variadas características.

A Teoria PMS é uma ferramenta poderosa para o projeto de mecanismos quando se dispõe de um programa computacional para aplicá-la. A especificação eficiente dos parâmetros de movimento $\{a_\ell, b_\ell, \phi_\ell\}$, entretanto, requer habilidade e conhecimento vasto da teoria de mecanismos.

A primeira especificação dos $\{a_\ell, b_\ell, \phi_\ell\}$ raramente leva a resultados satisfatórios. É com a análise dos resultados obtidos e com a modificação paulatina dos parâmetros de entrada a cada especificação, que o projetista pode esperar que os resultados se encaminhem para a solução desejada.

Quando são utilizadas apenas PFS, a importância dos $\{a_\ell, b_\ell, \phi_\ell\}$ é óbvia, mas a compreensão profunda des-

As especificações inclui, por exemplo, o conceito de pólo de rotação e pólo relativo, quando são desejados pontos duplos ou quando há necessidade de coordenação angular entre os movimentos das barras.

A análise de especificações com 2 PIS serve-se principalmente dos conceitos de derivada de primeira ordem e centro instantâneo de rotação, que permitem a obtenção de trajetórias com tangentes definidas e cuspides.

As especificações com 3 PIS exigem enorme discernimento por parte do projetista. A quantidade e a sutileza dos conceitos envolvidos torna a tarefa de especificação de 3 PIS um cuidadoso estudo das influências que a posição e as dimensões do círculo de inflexão, assim como a especificação da curvatura exercem sobre os mecanismos obtidos. Esses conceitos criteriosamente manipulados são recursos poderosos para a obtenção de características especiais como trechos retilíneos, inflexões e curvaturas, mas compõem um complexo conjunto de informações difícil de analisar, e essa complexidade aumenta à medida que mais PIS são utilizadas.

A abordagem prática e consciente a 4 e 5 PIS só pode ser realizada após uma grande penetração no significado dos conceitos da primeira e segunda derivadas da curvatura, da cúbica de curvatura estacionária, do Ponto de Ball, etc., considerados isoladamente e em conjunto, inclusive com o círculo de inflexão.

Na prática, a obtenção de um mecanismo utilizável é conseguida após uma série de especificações. A cada especificação dos parâmetros de movimento eleva-se a quantidade de mecanismos e de informações com eles relacionada. Se, por um lado, uma grande quantidade de mecanismos oferece variedade de opções ao projetista, por outro lado, juntamente com os outros dados fornecidos nos relatórios do computador, constituem um volume de informações penoso de examinar. Entretanto, a análise desses relatórios se constitui no aspecto fundamental para o desenvolvimento da síntese de mecanismos através da Teoria PMS e quanto mais profunda for essa análise, maior a possibilidade de êxito em uma nova especificação.

Assim, a Teoria PMS apresenta-se ao projetista de mecanismos como uma arma sofisticada de amplos recursos, mas que exige do usuário um alto nível de qualificação técnica.

4.2 - RECOMENDAÇÕES

O domínio da especificação da Teoria PMS deve surgir da prática frequente e do aprofundamento teórico. Neste aprofundamento cabe o desenvolvimento de uma sistemática de especificação para os diversos tipos de problema: síntese de trajetória, síntese coplanar, coordenação angular de barras, etc.

A Teoria PMS plana no sistema geral de referência é de grande importância porque elimina as restrições do sistema especial, e pode ser desenvolvida com a utilização dos coeficientes generalizados da curvatura, $A_{m\ell}$. A Teoria PMS esférica já está desenvolvida e pode ser objeto de estudo.

A síntese de mecanismos através de métodos de otimização é de grande interesse prático. Os algoritmos já desenvolvidos poderiam ser implantados na UFSC e tornados disponíveis aos projetistas.

Um processo poderoso para a síntese de mecanismos pode ser desenvolvido aliando-se um método de otimização com a teoria PMS. No caso de PFS, por exemplo, poderiam ser especificadas vinte posições do plano móvel. Dessas, seriam escolhidas, sistematicamente, cinco posições, e aplicada a teoria PMS. Esse processo seria repetido, os resultados analisados e os melhores mecanismos apresentados. No caso de PMS, as PIS poderiam ser consideradas fixas.

A P E N D I C E 1

O PROGRAMA PMS

O programa PMS está escrito em linguagem FORTRAN IV e permite a utilização da teoria PMS tanto com o sistema geral quanto com o sistema especial de referência. Esse programa foi trazido da Inglaterra pelo Professor José Carlos Zanini, que o utilizou durante a elaboração de sua tese de doutoramento e foi implantado pelo autor desta dissertação no sistema IBM/360 da UFSC, utilizando precisão dupla para as variáveis reais.

O programa PMS foi elaborado de tal modo que é permitida ao usuário a especificação de dois conjuntos de parâmetros angulares, ϕ_j , para as posições finitas.

No programa principal são lidos alguns dados de entrada e é exercido o controle geral sobre todo o programa.

A subrotina MSP5 comanda os cálculos mais importantes realizados no programa e imprime alguns resultados.

A subrotina INPUT lê e imprime os dados de entrada.

A subrotina EQUATN identifica o caso especificado de PSM e calcula os coeficientes generalizados da curvatura, $A_{m\ell}$, que são utilizados em outras subrotinas.

A subrotina MATEST aplica testes sobre as matrizes para verificar casos de degeneração.

A subrotina INFPTY calcula os coeficientes da cúbica de curvatura estacionária, suas coordenadas, ponto focal e assíntota. Calcula o centro e o raio do círculo de inflexão.

A subrotina ZIZO verifica os casos de degeneração das cúbicas, calcula os coeficientes da quártica, calcula as coordenadas dos pontos de Burmester e imprime esses resultados.

A subrotina STLINE trata o problema da especificação de posições sobre uma reta.

As subrotinas MATRX3 e MATRX4 calculam determinantes de terceira e de quarta ordem, respectivamente.

A subrotina COG calcula as coordenadas dos pivôs dos mecanismos cognados e imprime resultados.

A subrotina MOTION classifica os mecanismos originais e cognados de acordo com o critério de Grashof.

As subrotinas MOVE1, MOVE2 e MOVE3 estão relacionadas à utilização do traçador de gráficos para desenhar as cúbicas.

O diagrama de fluxo apresentado na Figura 1 pretende mostrar a estrutura lógica do programa PMS.

O programa PMS reconhece sete casos de 5 PMS. Esses casos são mostrados a seguir, e devem ser especifica-

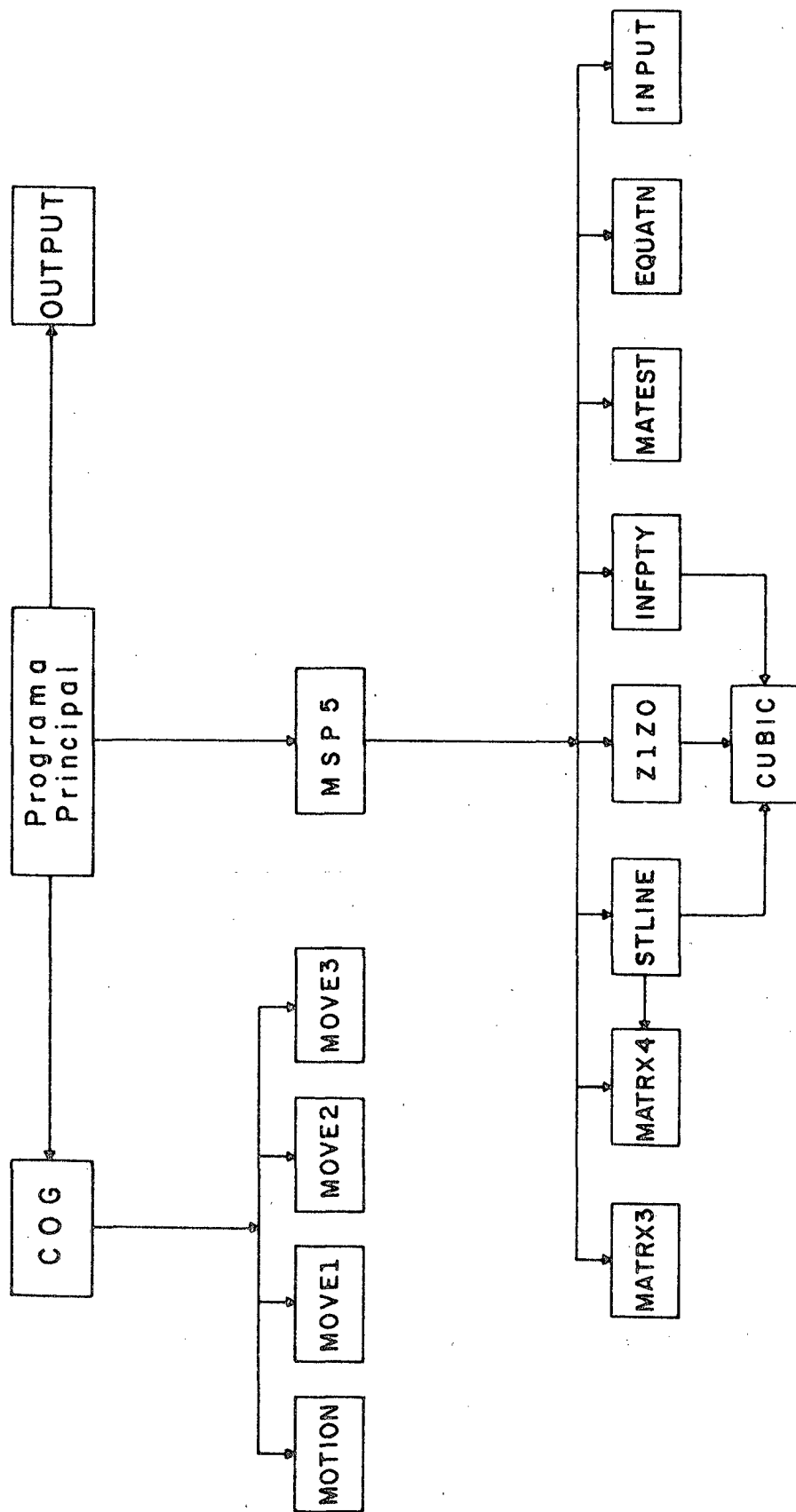


Figura 1 - Diagrama de fluxo do programa PMS

dos pelo usuário do programa.

Caso 1	PPPPP	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	2	3	4
		j	0	0	0	0	0
Caso 2	PPPP-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	2	3	0
		j	0	0	0	0	1
Caso 3	PPP-PP	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	2	0	1
		j	0	0	0	1	1
Caso 4	PPP-P-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	2	0	0
		j	0	0	0	1	2
Caso 5	PP-PP-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	0	1	0
		j	0	0	1	1	2
Caso 6	PP-P-P-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	0	0	0
		j	0	0	1	2	3
Caso 7	P-P-P-P-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	0	0	0	0
		j	0	1	2	3	4

onde

j = contador das PFS.

k = contador de PIS para cada posição finita.

ℓ = contador de PMS.

A seguir são apresentadas as instruções para a entrada de dados no programa PMS. Para cada problema, todos os cartões devem ser repetidos, com exceção do primeiro. Um asterisco no número da coluna indica formato inteiro.

CARTÃO	COLUNAS E FORMATOS	DEFINIÇÃO	VARIÁVEL LIDA
1	1 a 2*	Número de problemas a serem resolvidos.	NPROB
2	1 a 10	1.0 se forem especificadas posições sobre a reta. Para todos os outros casos, deixar em branco.	GOSTLN
3	1 a 2*	Número do caso PMS	NCASE
	3 a 4*	Quantidade de parâmetros a_ℓ a serem especificados.	NAP
	5 a 6*	Quantidade de parâmetros b_ℓ a serem especificados.	TRACE

CARTÃO	COLUNAS E FORMATOS	DEFINIÇÃO	VARIÁVEL LIDA
	7 a 11	Controle de impressão dos resultados. Colocar 0.0 ou 1.0.	TRACE
	12 a 16	2.0 para saída em formato exponencial das coordenadas da cúbica. 1.0 para saída em formato F.	VARFMT
4 atē 4 + NAP - 1	1*	Valores de j (posições finitas).	JA
	2*	Valores de k (derivadas)	KA
	3 a 22	Valores de a_{ℓ}	HANGA
4 + NAP atē 3 + NAP + NBP	1*	Valores de j (posições finitas).	JB
	2*	Valores de k (derivadas)	KB
	3 a 22	Valores de b_{ℓ}	HANGB
4 + NAP + NBP	1 a 10	Primeiro conjunto de parâmetros angulares ϕ_j , em graus: para $j = 0$	P(5)

CARTÃO	COLUNAS E FORMATOS	DEFINIÇÃO	VARIÁVEL LIDA
	11 a 20	para $j = 1$	
	21 a 30	para $j = 2$	
	31 a 40	para $j = 3$	
	41 a 50	para $j = 4$	
5 + NAP + NBP	1 a 20	Valor inicial de Y para o traçado da cúbica.	STARTY
	21 a 40	Incrementos de Y	STEPY
	41 a 44*	Número de valores de Y a serem usados no gráfico da cúbica.	NOYVLS
6 + NAP + NBP		Segundo conjunto de parâmetros angulares ϕ_j , em graus:	G(5)
	1 a 10	para $j = 0$	
	11 a 20	para $j = 1$	
	21 a 30	para $j = 2$	
	31 a 40	para $j = 3$	
	41 a 50	para $j = 4$	

A P Ê N D I C E 2

OS COEFICIENTES GENERALIZADOS DA CURVATURA

Estes coeficientes permitem uma exposição da teoria PMS unificada em termos de notação. Seus valores (Tabela 1) dependem do valor de ℓ , do caso PMS e do sistema de referência utilizado. São definidos como segue:

$$A_{0\ell} = A_{0\ell}(j,k) = \frac{d^k}{d\phi^k} \left\{ \frac{a^2 + b^2}{2} \right\}_{\phi=\phi_j}$$

$$A_{1\ell} = A_{1\ell}(j,k) = \frac{d^k}{d\phi^k} \{a \cos \phi + b \operatorname{sen} \phi\}_{\phi=\phi_j}$$

$$A_{2\ell} = A_{2\ell}(j,k) = \frac{d^k}{d\phi^k} \{-a \operatorname{sen} \phi + b \cos \phi\}_{\phi=\phi_j}$$

$$A_{3\ell} = A_{3\ell}(j,k) = \frac{d^k}{d\phi^k} \{\cos \phi - 1\}_{\phi=\phi_j}$$

$$A_{4\ell} = A_{4\ell}(j,k) = \frac{d^k}{d\phi^k} \{\operatorname{sen} \phi\}_{\phi=\phi_j}$$

$$A_{5\ell} = A_{5\ell}(j,k) = \frac{d^k}{d\phi^k} \{a\}_{\phi=\phi_j}$$

$$A_{6\ell} = A_{6\ell}(j,k) = \frac{d^k}{d\phi^k} \{b\}_{\phi=\phi_j}$$

A Tabela 1 apresenta expressões para o cálculo do valor dos coeficientes generalizados da curvatura para todos os casos de 5 PMS. Para $k \geq 2$ considera-se $j = 0$ e o sistema especial de referência.

TABELA 1 - Coeficientes Generalizados da Curvatura

k	$A_{0g}(j,k)$	$A_{1g}(j,k)$	$A_{2g}(j,k)$	$A_{3g}(j,k)$	$A_{4g}(j,k)$	$A_{5g}(j,k)$	$A_{6g}(j,k)$
0	$(1/2)(\alpha^2(j,0)+b^2(j,0))$	$\alpha(j,0)\cos\phi_j + b(j,0)\text{sen}\phi_j$	$b(j,0)\cos\phi_j - \alpha(j,0)\text{sen}\phi_j$	$\cos\phi_j - 1$	$\text{sen}\phi_j$	$\alpha(j,0)$	$b(j,0)$
1	$\alpha(j,0)\alpha(j,1)+b(j,0)b(j,1)$	$(\alpha(j,1)+b(j,0))\cos\phi_j + (b(j,1)-\alpha(j,0))\text{sen}\phi_j$	$(b(j,1)-\alpha(j,0))\cos\phi_j - (\alpha(j,1)+b(j,0))\text{sen}\phi_j$	$-\text{sen}\phi_j$	$\cos\phi_j$	$\alpha(j,1)$	$b(j,1)$
2	0	0	1	-1	0	0	1
3	0	$\alpha(0,3) + 3$	$b(0,3)$	0	-1	$\alpha(0,3)$	$b(0,3)$
4	3	$\alpha(0,4) + 4b(0,3)$	$b(0,4) - 4\alpha(0,3) - 6$	1	0	$\alpha(0,4)$	$b(0,4)$

A P Ê N D I C E 3

A ESPECIFICAÇÃO DO MOVIMENTO

Na especificação de 5 PMS, a primeira posição do plano móvel, correspondente a $\lambda = 0$, é obrigatoriamente finita. Assim, os valores dos parâmetros $\{a_0, b_0, \phi_0\}$ são finitos e arbitrários, se é utilizado o sistema geral de referência. No caso de ser utilizado o sistema especial, os sistemas de coordenadas móvel e fixo são coincidentes na origem e $a_0 = b_0 = \phi_0 = 0$.

A segunda posição, $\lambda = 1$, do plano móvel pode ser separada da primeira, $\lambda = 0$, de modo finito ou infinitesimal. Quando se trata de 2 PFS, os parâmetros de movimento $\{a_1, b_1, \phi_1\}$ são estabelecidos arbitrariamente, e as posições $\lambda = 0, 1$ definem um pólo de rotação $P_{01}(XP_{01}, YP_{01})$.

Se é utilizado o sistema especial de referência, $XP_{01} = YP_{01} = 0$ e, então, $a_1 = b_1 = 0$.

Quando se trata de 2PIS, a definição das tangentes ao movimento instantâneo de dois pontos permite a localização do centro instantâneo de rotação $C_{01}(XC_{01}, YC_{01})$, de modo que

$$a_1 = YC_{01} - b_0$$

$$b_1 = a_0 - XC_{01}$$

No sistema especial de referência, $a_1 = b_1 = 0$.

Na especificação de 3 PMS pode-se ter três casos principais: P-P-P, PP-P e PPP, onde P-P representa duas posições separadas finitamente e, PP, duas posições separadas infinitesimalmente. Nos dois primeiros casos, o que ficou estabelecido acima é suficiente para a especificação de a_2, b_2, ϕ_2 . Se for utilizado o sistema especial de referência, tem-se para P-P-P: ϕ_2 é estabelecido arbitrariamente, e

$$a_2 = -2 \operatorname{sen} \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi_2}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi_1}{2}$$

$$b_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi_2}{2} \cos \frac{\phi_1}{2}$$

Para PP-P, tem-se ϕ_1 escolhido arbitrariamente, $a_2 = 0$ e $b_2 = 1 - \cos \phi_1$.

A especificação de 3 PMS, entretanto, exige definições a respeito do conceito de curvatura de uma trajetória, que é definida por

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{|X'Y'' - YX''|}{\{(X')^2 + (Y')^2\}^{3/2}}$$

onde ρ é o raio de curvatura.

Os pontos do plano móvel para os quais $K = 0$ estão sobre o círculo de inflexão, definido no sistema geral de referência por

$$\left(x - \frac{T}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{W}{2}\right)^2 = \frac{T^2 + W^2 + 4a_2b_1 - 4a_1b_2}{4}$$

onde

$$T = b_2 \sin \phi_j + a_1 \sin \phi_j + a_2 \cos \phi_j - b_1 \cos \phi_j$$

$$W = b_2 \cos \phi_j + a_1 \cos \phi_j - a_2 \sin \phi_j - b_1 \sin \phi_j$$

No sistema especial, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, e o círculo de inflexão tangencia o eixo móvel das abcissas na origem, e possui diâmetro unitário. Seus pontos possuem 3 PIS sobre uma reta.

Quando é usado o sistema especial de referência para a especificação de 3, 4 e 5 PIS, em geral há necessidade de transformações de coordenadas e mudanças de escala. O projetista pode evitar a transformação de coordenadas se tomar a origem do plano móvel como o ponto útil do acoplador. As mudanças de escala podem ser evitadas se o círculo de inflexão for definido com diâmetro unitário na escala original.

A especificação dos casos de 4 PMS (P-P-P-P, PP-P-P, PP-PP, PPP-P, PPPP), com exceção de PPPP podem ser realizadas com as indicações já fornecidas. A especificação de 4 PIS no sistema especial de referência fica completa com a definição dos valores de a_3 e b_3 , o que pode ser feito definindo-se características da cúbica de curvatura estacionária,

$$\frac{1}{M \sin \theta} + \frac{1}{N \cos \theta} = \frac{1}{r}$$

que é o lugar geométrico dos pontos do plano móvel que possuem 4 PIS sobre um círculo ($K' = 0$). Os valores de M e N ficam definidos quando são escolhidos dois pontos $A(r_A, \theta_A)$ e $B(r_B, \theta_B)$ do plano móvel como pontos da cúbica. As condições do problema indicam que pontos devem ser escolhidos. Um dos pontos, por exemplo, A , pode ser o ponto do acoplador enquanto o outro, B , pode ser escolhido sobre o círculo de inflexão. Nesse caso, B será o ponto de Ball, que possui 4 PIS sobre um círculo de raio infinito.

Obtidos M e N , os parâmetros de movimento para $\rho = 3$ são calculados através das equações

$$a_3 = \frac{3}{M} - 3$$

$$b_3 = \frac{3}{N}$$

Com estas considerações ficam estabelecidas orientações para a especificação dos casos de 5 PMS (P-P-P-P-P, PP-P-P-P, PP-PP-P, PPP-P-P, PPP-PP, PPPP-P, PPPPP), com exceção de PPPPP.

Quando é utilizado o sistema especial de referência, obtêm-se a expressão

$$a_4 + 4b_3 - (4a_3 - b_4 + \frac{3}{r^2} + 5) \tan \theta +$$

$$+ \left(\frac{4a_3 + 9}{r} \right) \tan \theta \cdot \sin \theta - 4 \frac{b_3}{r} \sin \theta + \frac{3}{r} \cos \theta = 0$$

que define o lugar geométrico dos pontos do plano móvel que possuem $K'' = 0$. Essa expressão permite a determinação de a_4 e b_4 , quando aplicada a dois pontos $A(r_A, \theta_A)$ e $B(r_B, \theta_B)$ do plano móvel.

A P Ê N D I C E 4

A TRANSFORMAÇÃO FUNDAMENTAL DA TEORIA PMS

As expressões que permitem a transformação de coordenadas do sistema móvel para o sistema fixo são dadas por (2.2.1) e são básicas no tratamento analítico da síntese de mecanismos. Nessas expressões, as coordenadas (X,Y) caracterizam pontos de precisão, isto é, posições finitamente separadas (PFS) que um ponto do plano móvel assume em relação ao sistema fixo de referência. A essas posições correspondem deslocamentos finitos do plano móvel.

A Teoria PMS considera, também, posições infinitesimalmente separadas (PIS) do plano móvel, que levam a deslocamentos infinitesimais dados por (2.2.6) com

$$\begin{aligned} X' &= -x \operatorname{sen} \phi - y \operatorname{cos} \phi + \frac{d}{d\phi} \{a(\phi)\} \\ Y' &= x \operatorname{cos} \phi - y \operatorname{sen} \phi + \frac{d}{d\phi} \{b(\phi)\} \end{aligned} \quad (1)$$

A consideração de PIS leva, portanto, às derivadas das funções $X(\phi)$ e $Y(\phi)$ dadas por (1). Essas derivadas são de primeira ordem na teoria de 2 PIS, de segunda ordem na teoria de 3 PIS, de terceira, na teoria de 4 PIS e de quarta, na teoria de 5 PIS.

A maior contribuição trazida pela Teoria PMS à síntese de mecanismos foi a de permitir um tratamento ana

lítico unificado para PFS e PIS, o que foi feito sob o título PMS. Essa unificação exigiu o desenvolvimento de expressões algébricas válidas simultaneamente para PFS e PIS. Daí, a necessidade de generalização das expressões (2.2.1). Colocando as expressões (2.2.1) e (1) lado a lado, vê-se que essa generalização é possível na forma (2.2.9), que se constitui na transformação fundamental da Teoria PMS. Com as expressões (2.2.9), X e Y são pensados genericamente, isto é, dentro da Teoria PMS.

Os índices j, k, ℓ são próprios da teoria PMS e foram introduzidos para caracterizar PFS e PIS. Quando $k = 0$, as expressões (2.2.9) são adequadas ao tratamento de PFS e reduzem-se às expressões (2.2.1). Quando $k \neq 0$, trata-se de PIS.

A P Ê N D I C E 5

GLOSSÁRIO

ACOPLADOR ou PLANO ACOPLADOR é o plano obtido quando a barra acopladora do quadrilátero articulado é expandida e pensada como um plano. Na Figura 1.3 a barra acopladora é AB, que liga os pivôs móveis, e o plano acoplador é o plano móvel E.

CENTRO INSTANTÂNEO, ou centro instantâneo de rotação é o equivalente ao pólo de rotação quando é considerado um deslocamento infinitesimal do plano acoplador.

CENTRODO é o equivalente a polodo quando é considerado o deslocamento contínuo do plano acoplador.

CÍRCULO DE INFLEXÃO é o lugar geométrico dos pontos do plano acoplador que possuem 3 PIS sobre uma reta do plano fixo.

CÚBICA DE CURVATURA ESTACIONÁRIA é a cúbica dos pontos de círculo quando são consideradas 4 PIS do plano móvel.

CÚBICA DOS PONTOS DE CÍRCULO é o lugar geométrico dos pontos do plano móvel que assumem 4 PMS sobre um círculo do plano fixo.

PÓLO ou **PÓLO DE ROTAÇÃO** - Considerando duas posições m , n do plano móvel E , o pólo é o ponto do plano fixo que permite rotação pura de E da posição m para n e vice-versa, quando nele for rotulado.

POLODO é o lugar geométrico dos pontos que assumem a função de pólo durante o movimento do plano acoplador. O polodo fixo corresponde ao lugar geométrico desses pontos no plano fixo. O polodo móvel é o equivalente sobre o plano móvel.

PONTO DE CÍRCULO é o ponto do plano móvel que assume posições sobre um círculo no plano fixo.

PONTO DE PRECISÃO - Na síntese analítica, os pontos de precisão são aqueles previamente especificados para controlar o deslocamento do plano móvel.

SISTEMA ESPECIAL DE REFERÊNCIA é aquele em que os sistemas móvel e fixo são coincidentes na posição inicial tendo o pólo como origem comum e, respectivamente, a tangente e a normal ao círculo de inflexão de diâmetro unitário, no pólo, como os eixos coordenados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] TESAR, D.; ESCHENBACH, P.W., "Four Multiply Separated Positions in Coplanar Motion", Journal of Engineering for Industry, maio, 1967, pp. 231-234.
- [2] TESAR, D., "The Generalized Concept of Three Multiply Separated Positions in Coplanar Motion", Journal of Mechanisms, Vol. 2, 1967, pp. 461-474.
- [3] TESAR, D., "The Generalized Concept of Four Multiply Separated Positions in Coplanar Motion", Journal of Mechanisms, Vol. 3, 1968, pp. 11-23.
- [4] TESAR, D.; SPARKS, J.W., "The Generalized Concept of Five Multiply Separated Positions in Coplanar Motion", Journal Of Mechanisms, Vol. 3, 1968, pp. 25-33.
- [5] TESAR, D.; SPARKS, J.W.; WALTERS, W.T., "Multiply Separated Position Synthesis", publicação da ASME, Conferência de Mecanismos de Atlanta, Gainesville, Flórida, outubro, 1968.
- [6] ZANINI, J.C., "Investigation of Methods of Linkage Synthesis", tese de doutoramento, Victoria University of Manchester, junho, 1975.

- [7] TESAR, D.; DOWLER, H.J.; DUFFY, J., " A Generalized Study of Three Multiply Separated Positions in Spherical Kinematics", Mechanism and Machine Theory , Vol. 11, 1976, pp. 395-410.
- [8] TESAR, D.; DOWLER, H.J.; DUFFY, J., " A Generalized Study of Four and Five Multiply Separated Positions in Spherical Kinematics - II", Mechanism and Machine Theory, Vol. 13, 1978, pp. 409-435.