UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CÁLCULO DE TRANSIENTES TÉRMICOS BIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

JOSÉ LUIZ ALVES DA FONTOURA RODRIGUES

FLORIANÓPOLIS, AGOSTO - 1980

CÁLCULO DE TRANSIENTES TÉRMICOS BIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

JOSÉ LUIZ ALVES DA FONTOURA RODRIGUES

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

" MESTRE EM ENGENHARIA "

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Clovis Sperb de Barcellos

Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.
Orientador

Arno Blass

Prof. Arno Blass
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Prof. Hyppólito do Vale Pereira Filho, Ph.D

Clovis Sperb de Barcellos

Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Edison da Rosa

Prof. Edison da Rosa, M. Sc.

AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas que por seu trabalho levaram o DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA da UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA à posição que hoje ocupa, agradeço.

À excelente equipe do GRUPO DE ANÁLISE DE TENSÕES e em especial ao Professor DOMINGOS BOECHAT ALVES, que tornaram viável este trabalho, agradeço.

Ao meu orientador, Professor CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS, agradeço duplamente. Por sua impecável conduta como professor orientador e pela amizade que cresceu e se consolidou no decorrer do trabalho.

À CRISTINA MARIA FERREIRA DA FONTOURA RODRIGUES por sua participação decisiva durante todo o desenvolver do trabalho e em especial sua atuação como analista de software, agradeço.

À COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR e em especial ao Professor REX NAZARÉ ALVES pela oportunidade de aperfeiçoamento profissional, agradeço sinceramente.

S U M Á R I O

ILUSTRAÇÕES

TABELAS

SIMBOLOGIA

Símbolos

{ }	Vetor
( )	Matriz
$\hat{}$ ou $\rightarrow$	Grandeza vetorial
$\forall$	Para todo
$\mathcal{L}$	Operador diferencial
$\cdot$	Produto escalar

Letras gregas

α	Difusividade térmica
∇	Gradiente
ξ	Comprimento adimensional
λ	Autovalores
λ	Componente da matriz autovalor (λ)
ρ	Massa específica
τ	Tempo
Δ	Área de um elemento

Super-índices

(e)	Referente a um elemento
r	Reduzida

T ou t	Transposta
-1	Inversa

Sub-índices

$\tilde{r}$	Número de nós do domínio
x	Direção x
y	Direção y
r	Direção r
z	Direção z

Letras Maiúsculas

(A)	Matriz condutância térmica
(B)	Matriz condutividade térmica
Bi	Módulo de Biot
{C}	Vetor carga térmica
CI	Constante de integração
(D)	Matriz obtida do produto $(R)^{-1}(A)((R)^{T})^{-1} = (D)$
D_2	Domínio bidimensional
D_3	Domínio tridimensional
DP	Desvio padrão
E	Espessura
Ea	Erro absoluto
$\overline{Ea}$	Erro absoluto médio
Ep	Erro percentual
$\overline{Ep}$	Erro percentual médio
{F}	Vetor carga térmica do sistema matricial desacoplado

Fo	Módulo de Fourier
(I)	Matriz identidade
(J)	Matriz das temperaturas no método economizador
K	Condutividade térmica
$(K_k)^{(e)}$	Matriz influência para condutividade térmica no elemento
$(K_t)^{(e)}$	Matriz influência para condutância térmica no elemento
L	Comprimento
{M}	Vetor constante de proporcionalidade
N_i	Função de interpolação
N_d	Número total de nós com temperatura desconhecida
Q	Geração interna de calor
$(Q)^{(e)}$	Matriz influência da geração interna de calor no elemento
$\bar{R}$	Raio adimensional
(R)	Matriz redução de Cholesky
R	Resíduo (método de Galerkin)
{S}	Vetor transformação de coordenadas
T	Temperatura
T_0	Temperatura inicial
T_∞	Temperatura ambiente
$\{T_\infty\}^{(e)}$	Vetor influência da temperatura ambiente no elemento
$\bar{T}$	Temperatura média
{T}	Vetor temperatura
T_g	Temperatura do gás
T_w	Temperatura da água

U	União
(V)	Matriz de autovetores
{Z}	Vetor transformação de coordenadas
{0}	Vetor nulo

Letras minúsculas

a_i	Constante da função interpoladora N_i
b_i	Constante da função interpoladora N_i
c_i	Constante da função interpoladora N_i
c	Contorno de domínio bidimensional
c_p	Calor específico à pressão constante
f_i	Componente do vetor {F}
h	Hora
$(\tilde{h})^{(e)}$	Matriz influência da convecção no elemento
$\tilde{h}$	Coeficiente de transferência de calor por convecção
$\tilde{h}_g$	Coeficiente de película do gás
$\tilde{h}_w$	Coeficiente de película da água
ℓ_{ij}	Comprimento do lado ij de elementos situados no contorno do domínio
m	Número de nós de um elemento
n	Número de elementos da malha
$\hat{n}$, $\vec{n}$	Vetor normal
n_x, n_y	Cossenos diretores de $\hat{n}$
q	Fluxo de calor especificado

q_c	Fluxo de calor por condução
$q_{\tilde{h}}$	Fluxo de calor por convecção
r	Raio
$\bar{r}$	Raio médio
s	Contorno do domínio tridimensional axissimétrico
t	Tempo
z_i	Componente do vetor $\{Z\}$

R E S U M O

O objetivo deste trabalho é a análise de problemas lineares de condução de calor em materiais aniso-trópicos e ou heterogêneos, sob regime transiente, através de domínios bidimensionais com qualquer tipo de geometria ou domínios tridimensionais axisimétricos. As condições de contorno e a geração interna de calor admitidas são constantes com o tempo. A resolução do problema é obtida por análise modal e o método numérico utilizado é a técnica de elementos finitos segundo a formulação de Galerkin. Opcionalmente pode ser acionado um método de resolução reduzido, denominado Método Economizador de Stoker, que permite uma diminuição nos custos de processamento do programa.

A B S T R A C T

The object of this papper is the unsteady linear heat conduction analysis throught anisotropic and/or heterogeneous matter, in either two-dimensional fields with any kind of geometry or three - dimensional fields with axial symmetry. The boundary conditions and the internal heat generation are supposed time - independent. The solution is obtained by modal analysis employing the finite element method under Galerkin formulation. Optionally, it can be used with a reduced resolution method called Stoker Economizing Method wich allows a decrease on the program processing costs.

1 - INTRODUÇÃO

Sabe-se que em estruturas termicamente carregadas é possível muitas vezes desacoplar as equações termo-elásticas daquelas que descrevem a distribuição de temperatura. Assim, é desejável resolver o problema de transmissão de calor e usar os valores das temperaturas resultantes para determinar os campos de tensão e deformação da estrutura. Desse modo, propõe-se aqui um programa numérico capaz de equacionar problemas lineares de condução de calor através de materiais anisotrópicos em domínios bidimensionais, sejam superfícies de contorno qualquer ou sólidos axisimétricos, em regime transiente ou permanente, submetidos a condições de carregamento térmico constantes com o tempo, admitindo ainda a existência de fontes internas de geração de calor. Tais condições se classificam em dois grupos básicos :

1. Condições de contorno especificadas (condições de Dirichlet) - temperaturas especificadas no contorno .

2. Condições de contorno naturais (condições de Cauchy) -

2.1. fluxo de calor especificado no contorno e/ou condições adiabáticas especificadas através de isolamento térmico ou pela existência de planos de simetria (fluxo nulo) ;

2.2. convecção especificada no contorno .

Visando o máximo aproveitamento do sistema de resolução numérica proposto, foi prevista a possibilidade de equacionar problemas de condução de calor não lineares em regime permanente através de materiais de condutividade térmica variável com a temperatura .

Foi utilizado como técnica de resolução o método dos elementos finitos, a fim de manter a uniformidade do conjunto a que pertence este trabalho. Trata-se do sistema de cálculo estrutural desenvolvido pelo Grupo de Análise de Tensões do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC para o estudo do comportamento dos vasos de pressão de reatores nucleares, particularmente durante as operações de início e término de funcionamento. Este trabalho é uma de suas etapas preliminares e tem como objetivo central a análise dos longos transientes térmicos que se estabelecem nestas ocasiões .

O método dos elementos finitos surgiu há cerca de vinte anos nos centros de pesquisa norte-americanos, derivado dos métodos matriciais de análise estrutural. O desenvolvimento de computadores digitais com grande velocidade de processamento estendeu sua aplicação aos problemas que envolvem análise de campos ou do continuum, seja em engenharia, física ou matemática.

Esta modalidade de cálculo oferece uma variedade grande de opções tanto para a formulação quanto para a resolução do problema, sendo importante que se defina precisamente o objetivo a ser alcançado, já que este será a norma que irá orientar a seleção dos recursos que serão empregados .

2 - PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

A resolução do sistema matricial de equações diferenciais de um problema físico, formulado por elementos finitos, requer normalmente um trabalho considerável de análise e processamento de dados. Desta forma, a pesquisa bibliográfica orientou-se na direção dos métodos de resolução que, para o problema específico, reúnam de forma equilibrada eficiência, custos aceitáveis e facilidade de processamento .

Existem dois enfoques possíveis para a resolução da equação matricial obtida por elementos finitos :

1º. Integração direta da equação através de procedimentos numéricos iterativos do tipo "step-by-step". Dentre estes são tidos como mais importantes o método das diferenças centrais, o de Houbolt, o de Wilson e ainda o de Newmark, todos apresentados por Bathe e Wilson (Ref. 8) .

2º. Análise modal do transiente térmico .

A resolução do transiente térmico obtida através de análise modal elimina as características indesejáveis dos métodos iterativos, suprimindo os erros acumulados e oferecendo a possibilidade de se obter o transiente para qualquer tempo, sem necessitar o cálculo dos instantes intermediários entre a origem e o instante desejado, sendo vantajosa para gradientes extensos. Por outro lado, a determinação da temperatura nos instantes iniciais do transiente, para o mesmo nível de precisão obtido em períodos maiores, exige malhas mais refinadas (maior número de autovalores) encarecendo assim o processo. Para tais faixas de tempo o processo iterativo é mais econômico dentro da mesma precisão (Ref. 8) .

Considerando-se que a grande limitação ao emprego dos elementos finitos é sua tendência a altos custos operacionais, mesmo nos casos mais simples onde não são exigidas malhas refinadas, fica evidente a necessidade de métodos de resolução por análise modal capazes de proporcionar resultados suficientemente precisos a custos aceitáveis. Estes métodos têm maior utilidade nos problemas em que o analista possua informações para identificar com certeza os pontos da malha onde existam nós com graus de liberdade supérfluos ao longo de todo o transiente e que possam ser suprimidos sem causar perda sensível na precisão dos resultados .

Esta eliminação seletiva de nós tem como objetivo a redução de custos pela redução da ordem matricial do problema .

O processo economizador mais difundido e de menor eficácia é o chamado "Condensação Estática" por Bathe e Wilson (Ref. 8) ou "Condensação" por Huebner (Ref. 7), no qual é diminuída a ordem das matrizes por eliminação gaussiana dos nós que podem ser desconsiderados de modo a não comprometer as condições de compatibilidade da função interpoladora usada. Estes nós são sempre internos ao elemento. Esta técnica pode ser aplicada a elementos sem nós internos desde que se crie, por aglutinação, um novo elemento no qual existam nós internos que possam ser eliminados .

Outra opção é o procedimento de Gallagher e Mallet (Ref. 2) que opera a redução de ordem da equação matricial do problema em três etapas distintas :

1º. A malha nodal resultante da discretização do domínio de solução é estruturada em vários subdomínios. Isto é feito com base no julgamento prévio do possível comportamento físico do problema. O analista divide o domínio em regiões de comportamento térmico semelhante e as subdivisões ou sub-estruturas formadas trabalharão como se fossem super-elementos na nova configuração estabelecida .

2º. Os graus de liberdade supérfluos de cada sub-estrutura são suprimidos através de condensação estática .

3º. É efetuada uma redução adicional na ordem da equação matricial baseada na análise modal do transiente térmico. Esta etapa é denominada "Síntese Nodal" e se fundamenta nas obras de Hurty (Ref. 4), Craig e Bampton (Ref. 5) .

A proposta selecionada como a mais adequada para ser utilizada neste trabalho foi a de Stoker (Ref. 1), apresentada no Capítulo 4. Influíram na escolha sua simplicidade operacional e maior facilidade de programação se comparada ao método de Gallagher e Mallet .

3 - FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

3.1 - INTRODUÇÃO

A resolução de um problema físico por elementos finitos apresenta como primeira etapa a escolha da formulação mais conveniente, existindo quatro opções possíveis :

1º. Formulação direta ou física - possui mais valor histórico do que prático, tendo sido usada no início da pesquisa com elementos finitos. Faz uso do conjunto de equações físicas do sistema considerado e, devido à sua simplicidade, é muito útil como introdução ao estudo dos elementos finitos .

2º. Formulação variacional - baseada no cálculo variacional, é utilizada extremizando ou tornando estacionário um dado funcional ou sistema de funcionais. Tem como limitação prática a exigência de um funcional desenvolvido para o tipo específico de problema em estudo .

3º. Método dos resíduos ponderados ou de Galerkin - baseado nas equações diferenciais que governam o sistema, não necessita de qualquer tipo de princípio variacional para sua aplicação, servindo tanto a sistemas lineares como a não lineares. É a formulação mais versátil entre as existentes.

4º. Formulação do balanço energético - como o processo anterior, não incide em princípios variacionais. Baseia-se no sistema de equações obtido do balanço energético e/ou mecânico do sistema, sendo adequada aos casos em que a representação por equações diferenciais torna-se problemática, como acontece nos sistemas termo-mecânicos.

Os problemas de condução de calor em regime estacionário admitem enfoque variacional, pois são descritos através de equações diferenciais elípticas para as quais existem funcionais já estabelecidos. Entretanto o caso transiente é expresso por equações diferenciais parabólicas para as quais não existem funcionais desenvolvidos. Deste modo a formulação de Galerkin torna-se uma imposição ao problema aqui analisado.

3.2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO PROBLEMA

A análise dos fenômenos de transferência de calor é toda desenvolvida a partir da equação da conservação da energia térmica que sob notação diferencial toma a forma

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \nabla \vec{q} = Q \tag{1}$$

Particularizando a equação básica (1) para o problema de condução térmica em sólidos heterogêneos e isotrópicos obtém-se

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla . (K \nabla T) + Q \tag{2}$$

A equação (2) aplicada a um domínio bidimensional descrito por coordenadas cartesianas fornece a equação do problema proposto (eq. 3) .

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial T}{\partial y}) + Q \qquad (3)$$

Como já foi mencionado na Introdução, o sistema de programas desenvolvido resolve duas situações básicas da equação (3) :

1º. Regime transiente onde a condutividade térmica é somente função do espaço, caracterizando um problema linear de condução de calor .

2º. Regime permanente onde a condutividade térmica é função de temperatura, caracterizando um problema não linear de condução de calor .

As condições de contorno do domínio de solução D_2 (Fig. 1) possíveis para o problema linear são :

1. Temperatura T especificada sobre a região c_1 do contorno c .

$$T = T(x,y) \quad \text{sobre } c_1 \text{ e } t>0 \qquad (4)$$

2. Fluxo de calor q especificado sobre a região c_2 do

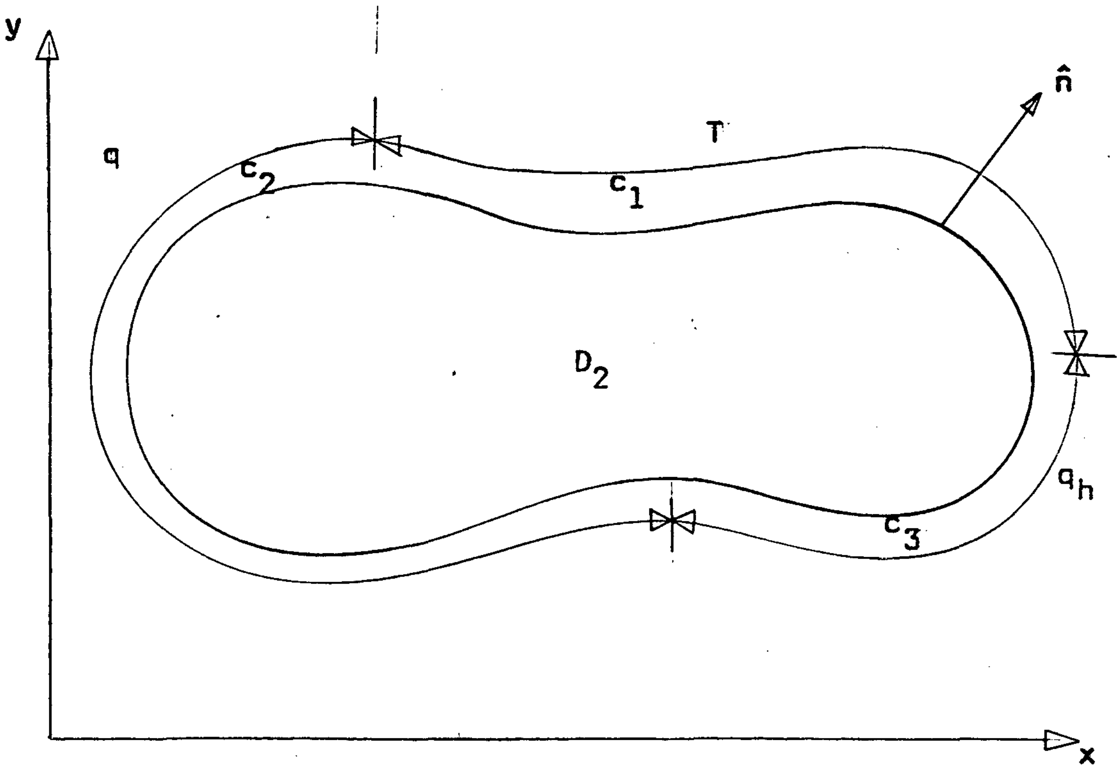


FIGURA 1. Domínio bidimensional D_2 . $c_1 \cup c_2 \cup c_3 = c$.

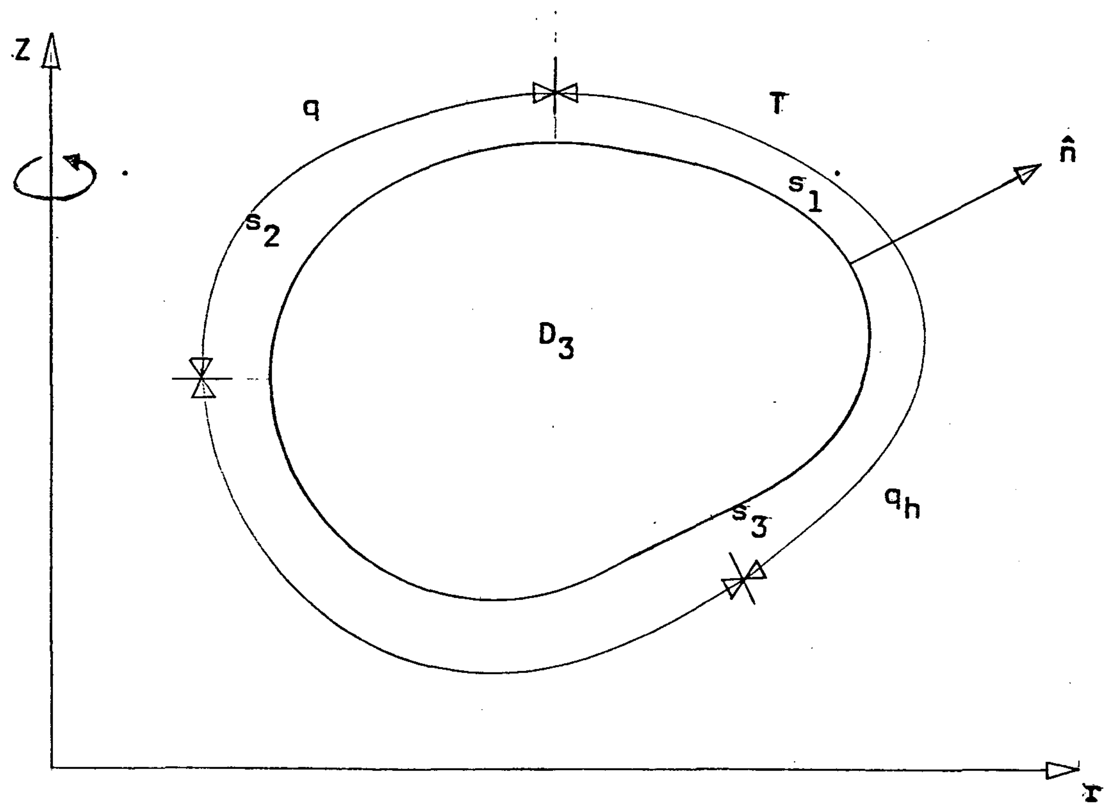


FIG. 2. Domínio tridimensional axissimétrico D_3 . $s_1 \cup s_2 \cup s_3 = s$.
(Secção reta)

contorno c .

$$K_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + q = 0 \quad \text{sobre } c_2 \text{ e } t>0 \qquad (5)$$

3. Trocas térmicas por convecção, especificadas sobre a região c_3 do contorno c para um coeficiente de transmissão de calor por convecção $\tilde{h}$ e uma temperatura ambiente T_∞ .

$$K_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \tilde{h}(T - T_\infty) = 0 \quad \text{sobre } c_3 \text{ e } t>0 \qquad (6)$$

As variáveis K_x, K_y representam a condutividade térmica segundo os eixos x, y e n_x, n_y são os cossenos diretores da normal $\hat{n}$ ao contorno c do domínio de solução D_2 .

A condição inicial do transiente sobre o domínio de solução D_2 para $t = 0$ é $T = T_0(x,y)$.

De maneira análoga, para o domínio tridimensional axissimétrico D_3 delimitado pelo contorno s (Fig. 2), a equação da condução do calor em regime transiente assume, segundo o desenvolvimento do Apêndice 1, a forma

$$\frac{\partial}{\partial r}(K_r\ r\ \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z\ r\ \frac{\partial T}{\partial z}) + rQ = r\rho c_p\ \frac{\partial\ T}{\partial\ t} \qquad (7)$$

admitindo como condições de contorno :

1. Temperatura T especificada sobre a região s_1 do contorno s .

$$T = T(r,z) \quad \text{sobre } s_1 \text{ e } t>0 \qquad (8)$$

2. Fluxo de calor q especificado sobre a região s_2 do contorno s .

$$K_r\ r\ \frac{\partial T}{\partial r}\ n_r + K_z\ r\ \frac{\partial T}{\partial z}\ n_z + rq = 0 \quad \text{sobre } s_2 \text{ e } t>0 \qquad (9)$$

3. Trocas térmicas por convecção especificadas sobre a região s_3 do contorno s para um coeficiente de transmissão de calor por convecção $\tilde{h}$ e uma temperatura ambiente T_∞ .

$$K_r\, r \frac{\partial T}{\partial r} n_r + K_z\, r \frac{\partial T}{\partial z} n_z + r\, \tilde{h}(T - T_\infty) = 0 \quad \text{sobre } s_3 \text{ e } t>0 \qquad (10)$$

As variáveis K_r, K_z representam a condutividade térmica segundo os eixos r, z e n_r, n_z são os cossenos diretores da normal $\hat{n}$ ao contorno s do domínio de solução D_3.

A condição inicial do transiente sobre o domínio de solução D_3 para $t = 0$ é $T = T_0(r,z)$.

3.3 - ELEMENTOS E FUNÇÕES INTERPOLADORAS EMPREGADOS

A qualidade da análise numérica efetuada pela técnica dos elementos finitos é em grande parte dependente do tipo de elemento bem como das funções interpoladoras selecionados. Entretanto, a aplicação recente deste método à termotécnica ainda não criou respaldo para a utilização de soluções mais elaboradas.

Neste trabalho foram empregados elementos triangulares com funções de interpolação lineares, o que representa a escolha mais simples possível para um problema bidimensional. Criam-se assim condições de comparação para pesquisas posteriores onde o emprego de funções interpoladoras não lineares e o uso de elementos mais complexos possam estabelecer bases mais sólidas para a utilização econômica do método .

As fórmulas e outras informações referentes às funções interpoladoras e ao elemento selecionados aparecem no Apêndice 2 .

3.4 - FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS DA EQUAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA

A modelação matricial, por elementos finitos, de problemas físicos descritos por equações diferenciais parabólicas tem como principal meio de implementação a técnica de Galerkin. Esta técnica pode ser apresentada através de sua aplicação a um caso genérico sintetizado pela relação

$$\mathcal{E}(\phi) - g = 0 \qquad (11)$$

onde $\mathcal{E}$ é um operador diferencial, ϕ é a variável de campo definida sobre o domínio de solução e g é função de variáveis independentes .

A formulação da equação matricial db problema através do método de Galerkin supõe inicialmente que seja válida a substituição da solução exata ϕ a ser calculada por uma certa solução aproximada $\tilde{\phi}$ definida pela relação (12) ,

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{m} (N_i \; \phi_i) \qquad (12)$$

onde N_i é a função interpoladora, ϕ_i representa o valor da variável independente no ponto i do domínio e m é o número de pontos usados na discretização do domínio de solução .

Sendo $\tilde{\phi}$ uma solução aproximada,

$$\mathcal{E}(\tilde{\phi}) - g \neq 0$$

ou

$$\mathcal{E}(\tilde{\phi}) - g = R$$

onde R é o erro residual decorrente do uso da solução aproximada $\tilde{\phi}$ no sistema de equações do problema .

A minimização do erro residual é obtida através da relação (13)

$$\int_D (\mathcal{E}(\tilde{\phi}) - g) N_i \, dD = \int_D R.N_i \, dD = 0 \quad , \tag{13}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$

onde m é o número de pontos discretos do domínio considerado e N_i é uma função peso que atua no sentido de anular a expressão (13), diminuindo em consequência o erro residual. O método de Galerkin se caracteriza por utilizar a função de interpolação do elemento como função peso minimizadora de R .

As expressões (11), (12) e (13) são válidas em qualquer ponto ou conjunto de pontos do domínio. Com base neste fato particulariza-se a formulação de Galerkin para o fenômeno de condução de calor através de um elemento "e" de modo que a equação (12) seja dada por

$$T^{(e)}(x,y,t) = \sum_{i=1}^{m} N_i(x,y)\, T_i(t)$$

onde $T^{(e)}(x,y,t)$ é a solução aproximada sobre o elemento bidimensional, m é o número de nós do elemento, N_i são as funções interpoladoras usadas na definição do elemento e T_i é o valor da temperatura em cada um dos m nós do elemento.

Sob notação matricial tem-se

$$T^{(e)}(x,y,t) = (N)^{(e)} \{T\}^{(e)} \tag{14}$$

onde $(N)^{(e)}$ são as funções interpoladoras definidas sobre o elemento genérico (e) e $\{T\}^{(e)}$ são as temperaturas nodais do elemento (e).

A equação (13) para um elemento (e) será

$$\int_{D^{(e)}} (\mathcal{L}(T^{(e)}) - g^{(e)})\, N_i^{(e)} \, dD^{(e)} = 0 \quad , \tag{15}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$.

A solução para todo o domínio é obtida pelo somatório das soluções para cada um dos elementos componentes da malha.

$$T(x,y,t) = \sum_{e=1}^{n} T^{(e)}(x,y,t) \quad ,$$

com n = número total de elementos.

Prosseguindo, substitui-se em (15) a equação diferencial do problema (eq. 3) definida para um elemento, obtendo

$$\iint_{D^{(e)}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y}\right) + Q^{(e)} - \rho\, c_p \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} \right) N_i^{(e)} d_x d_y = 0 \qquad (16)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$.

A equação (16) deduzida para um elemento interno do domínio, não considera os fenômenos térmicos típicos do contorno como fluxos de calor por convecção ou fluxos especificados de calor trocados com o meio ambiente. Para incluir os efeitos do contorno na equação (16) é suficiente desdobrá-la através do teorema de Green, conforme o Apêndice 3, chegando-se à equação

(17), com um termo referente ao fluxo total de calor que passa pelas fronteiras do domínio, seja por convecção seja por fluxo especificado. Este termo é representado por uma integral de linha sobre o contorno .

$$-\iint_{D^{(e)}} \left(K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y}\right) d_x d_y - \iint_{D^{(e)}} \rho\, c_p\, N_i \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} d_x d_y +$$

$$+ \oint_{c_4^{(e)}} \left(K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} n_y\right) N_i \, d_{c_4^{(e)}} + \iint_{D^{(e)}} N_i\, Q^{(e)} d_x d_y = 0 \qquad (17)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$

sendo $c_4{}^{(e)}$ o segmento do contorno c_4 (Fig. 1), definido por um elemento (e) conforme a Fig. 3 .

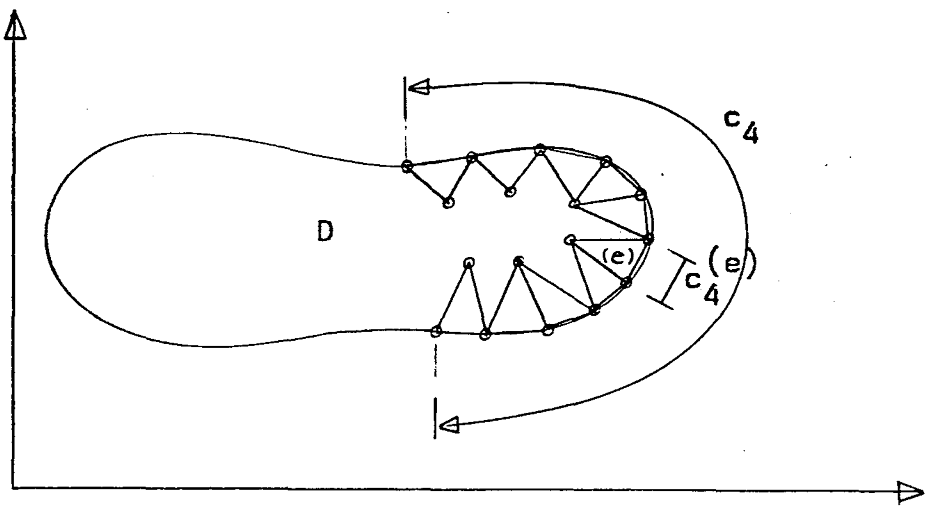


FIGURA 3. $c_4^{(e)}$: trecho do contorno c_4 correspondente a um único elemento. $c_4 = c_2 \cup c_3$.

As condições de contorno que se deseja incluir são apresentadas pelas equações (5) e (6), que podem ser agrupadas em uma única relação sob a forma

$$K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} n_y = -q^{(e)} - \tilde{h}(T^{(e)} - T_\infty) \qquad (18)$$

sobre c_4 .

Finalmente, substituindo-se o integrando da integral de linha da equação (17) pelo segundo membro da igualdade (18), introduz-se na equação (17) as condições que atuam no contorno c_4 . Reescrevendo a equação (17) com esta modificação e substituindo $T^{(e)}$ conforme a relação (14), chega-se a

$$\iint_{D^{(e)}} \left(K_x \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial y}\right) d_x d_y +$$

$$- \iint_{D^{(e)}} N_i \, Q^{(e)} d_x d_y + \oint_{c_4^{(e)}} (q^{(e)} N_i + \tilde{h} \, (N)^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i - \tilde{h} \, T_\infty N_i) d_{c_4^{(e)}} +$$

$$+ \iint_{D^{(e)}} \rho \, c_p (N)^{(e)} \left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}^{(e)} N_i \, d_x d_y = 0 \, , \qquad (19)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$.

A expressão obtida admite ainda uma notação mais compactada se colocada totalmente sob forma matricial. Para isto são necessárias as seguintes definições :

1 - Matriz influência para a condutividade térmica no elemento

$$(K_k)^{(e)} = \left[K_{kij}\right]$$

onde

$$K_{kij} = \iint_{D^{(e)}} (K_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}) \, d_x d_y \qquad (20)$$

2 - Matriz influência para a condutância térmica no elemento

$$(K_c)^{(e)} = \left[K_{cij}\right]$$

onde

$$K_{cij} = \iint_{D^{(e)}} \rho \; c_p \; N_i \; N_j \; d_x d_y \qquad (21)$$

3 - Matriz influência para convecção no contorno do elemento

$$(\tilde{h})^{(e)} = \left[\tilde{h}_{ij}\right]$$

onde

$$\tilde{h}_{ij} = \int_{C^{(e)}} \tilde{h}\ N_i\ N_j\ d_{c_3^{(e)}} \tag{22}$$

4 - Matriz influência para temperaturas ambientes nos trechos do elemento onde ocorre transmissão de calor por convecção

$$\{T_\infty\}^{(e)} = \left\{T_{\infty i}\right\}$$

onde

$$T_{\infty i} = \int_{C_3^{(e)}} \tilde{h}\ T_\infty\ N_i\ d_{c_3^{(e)}} \tag{23}$$

5 - Matriz influência para a geração interna de calor no elemento

$$\{Q\}^{(e)} = \left\{Q_i\right\}$$

onde

$$Q_i = \iint_{D^{(e)}} Q\ N_i\ d_x d_y \tag{24}$$

6 - Matriz influência para fluxo de calor especificado no contorno do elemento

$$\{q\}^{(e)} = \{q_i\}$$

onde

$$q_i = \int_{c_2^{(e)}} q \, N_i \, d_{c_2^{(e)}} \tag{25}$$

Substituindo as relações (20) a (25) na equação (19) chega-se a

$$(K_k)^{(e)} \{T\}^{(e)} - \{Q\}^{(e)} + \{q\}^{(e)} + (\tilde{h})^{(e)} \{T\}^{(e)} +$$

$$- \{T_\infty\}^{(e)} - (K_c)^{(e)} \{\frac{dT}{dt}\}^{(e)} = \{0\} \tag{26}$$

Fazendo

$$(A)^{(e)} = - (K_c)^{(e)} ,$$

$$(B)^{(e)} = (K_k)^{(e)} + (\tilde{h})^{(e)} ,$$

$$\{C\}^{(e)} = \{q\}^{(e)} - \{Q\}^{(e)} - \{T_\infty\}^{(e)} ,$$

estendendo a validade de $(A)^{(e)}$, $(B)^{(e)}$ e $\{C\}^{(e)}$ a todo o domínio de solução, de modo que

$$(A) = \sum_{e=1}^{n} (A)^{(e)}$$ (matriz condutância térmica)

$$(B) = \sum_{e=1}^{n} (B)^{(e)}$$ (matriz condutividade térmica)

$$\{C\} = \sum_{e=1}^{n} \{C\}^{(e)}$$ (vetor carga térmica)

e considerando ainda que

$$\{T\} = \sum_{e=1}^{n} \{T\}^{(e)}$$ (vetor temperatura)

$$\{\dot{T}\} = \sum_{e=1}^{n} \{\dot{T}\}^{(e)} = \sum_{e=1}^{n} \{\frac{\partial T}{\partial t}\}^{(e)}$$ (vetor derivada primeira da temperatura em relação ao tempo) ,

reescreve-se a relação (26) sob a forma

$$(A)\ \{\dot{T}\} + (B)\ \{T\} + \{C\} = \{0\} \tag{27}$$

que resume a equação matricial do problema analisado .

Convém ressaltar que a matriz (B) apesar de referenciada como "matriz condutividade térmica" engloba fenômenos de condução e convecção .

A resolução das integrais (20) a (25) encontra-se no Apêndice 4 e a apresentação do caso tridimensional axissimétrico, por ser uma pequena variação do desenvolvimento feito para o caso bidimensional, encontra-se no Apêndice 5 .

4 - RESOLUÇÃO

4.1 - RESOLUÇÃO DE UM TRANSIENTE TÉRMICO POR ANÁLISE MODAL

Para solucionar um sistema de equações diferenciais lineares na forma matricial por análise modal, é desejável o desacoplamento do conjunto de equações do sistema de maneira a possibilitar seu manuseio individual .

O processo desacoplador usado por Stoker (Ref. 1) baseado na pré-multiplicação da equação matricial (27) pela matriz condutividade térmica invertida $(B]^{1}$, cria a necessidade de um método computacional que calcule autovalores e autovetores em matrizes não simétricas. Tais recursos são complexos e caros .

A solução adotada foi a utilização do método proposto pelo Prof. Domingos Boechat Alves (Ref. 10) capaz de desacoplar o sistema matricial de equações do problema e determinar seus autovalores e autovetores através do conjunto de subrotinas CLVT, DPCHOL e DEIGEN. O sistema é desacoplado sem que suas matrizes percam a simetria, através da decomposição da matriz condutividade térmica (B) pela técnica conhecida como "Redução de Cholesky", seguida de duas transformações de coordenadas que se encontram detalhadas no decorrer deste capítulo.

A redução de Cholesky (Ref. 10) é uma técnica para o cálculo da matriz triangular inferior e não singular (R) com $r_{ij} = 0$, $\forall i<j$, efetuada pela subrotina DPCHOL, tal que (R) seja capaz de tornar verdadeira a igualdade

$$(B) = (R)\,(R)^t \tag{28}$$

Substituindo a relação (28) na equação (27) chega-se a

$$(A)\,\{\dot{T}\} + (R)\,(R)^t\,\{T\} + \{C\} = \{0\} \tag{29}$$

A primeira transformação de coordenadas do sistema se baseia no fato de que sendo (R) uma matriz não singular, existirá sempre um vetor $\{S\}$ que como o vetor temperatura $\{T\}$ será função do tempo e

$$(R)^t\{T\} = \{S\} \tag{30}$$

Explicitando o vetor temperatura e sua derivada em função do tempo na forma

$$\{T\} = ((R)^t)^{-1}\{S\} \tag{31}$$

$$\{\dot{T}\} = ((R)^t)^{-1}\{\dot{S}\} \tag{32}$$

obtém-se a transformação de coordenadas conveniente que, substituída na equação (29), resulta na forma

$$(A)((R)^t)^{-1}\{\dot{S}\} + (R)\{S\} + \{C\} = \{0\} \tag{33}$$

A nova configuração da equação matricial do sistema, se pré-multiplicada pela matriz $(R)^{-1}$, estará desacoplada a menos de seu termo em $\{S\}$, já que em (34) o vetor incógnita $\{S\}$

está multiplicado pela matriz unitária (I) e o vetor carga térmica {C} é conhecido .

$$(R)^{-1}(A)((R)^{t})^{-1}\{\dot{S}\} + (I)\{S\} + (R)^{-1}\{C\} = \{0\} \qquad (34)$$

Fazendo

$$(R)^{-1}(A)((R)^{t})^{-1} = (D)$$

obtém-se a forma mais compacta

$$(D)\{\dot{S}\} + (I)\{S\} + (R)^{-1}\{C\} = \{0\} \qquad (35)$$

É importante salientar que a transformação implementada manteve a simetria das matrizes do sistema, já que (D) será uma matriz simétrica sempre que (A) assim o for .

A segunda transformação de coordenadas do sistema, obtida através da análise modal, completa o desacoplamento e segue a sequência de operações descrita abaixo .

Supõe-se que o vetor {S} , representativo da temperatura no novo sistema de coordenadas, possa ser substituído pela combinação linear

$$\{S\} = (V)\ \{Z\} \tag{36}$$

onde a matriz (V) representa o conjunto de autovetores da matriz (D) e o vetor $\{Z\}$ é um multiplicador função do tempo, de modo que

$$\{\dot{S}\} = (V)\ \{\dot{Z}\} \tag{37}$$

A determinação dos autovetores (V) e dos autovalores $\{\lambda\}$ da matriz (D) é efetuada pelas subrotinas CLVT e DEIGEN, constituindo a parte mais extensa e importante de todo o processo de resolução por computador do sistema matricial de equações.

Substituindo as relações (36) e (37) na equação (35) e pré-multiplicando a igualdade assim formada pela matriz de autovetores invertida $(V)^{-1}$ chega-se à relação

$$(V)^{-1}(D)(V)\{\dot{Z}\} + (I)\{Z\} + (V)^{-1}(R)^{-1}\{C\} = \{0\} \tag{38}$$

Os autovalores $\{\lambda\}$ e autovetores (V) da matriz condutância térmica (D) são por definição o vetor e a matriz capazes de satisfazer a igualdade

$$(\,(\lambda) - (V)^{-1}(D)(V)\,)\{Z\} = \{0\} \tag{39}$$

onde

$$(\lambda) = (I)\{\lambda\}$$

Evidentemente, a solução trivial para a equação (39) não tem valor prático, restando

$$(\lambda) = (V)^{-1}(D)(V) \tag{40}$$

A relação (40) substituída na equação (38) fornece o sistema matricial de equações diferenciais lineares desacoplado, já que (λ) é uma matriz diagonal .

$$(\lambda)\{\dot{Z}\} + (I)\{Z\} + \{F\} = \{0\} \tag{41}$$

onde

$$\{F\} = (V)^{-1}(R)^{-1}\{C\}$$

O sistema matricial desacoplado de $\tilde{r}$ equações diferenciais lineares, representado pela equação (41), pode ser melhor visualizado em sua forma desdobrada

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\tilde{r}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{\tilde{r}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{\tilde{r}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde cada equação

$$\dot{z}_i + \left(\frac{z_i}{\lambda_i}\right) + \left(\frac{f_i}{\lambda_i}\right) = 0 \quad ,$$

$$i = 1, 2, \dots, \tilde{r}$$

será resolvida individualmente através de integração direta segundo a relação (42) (Ref. 13) .

$$z_i = (CI + \int_0^t - \frac{f_i}{\lambda i} \exp(\int_0^\tau \frac{d\alpha}{\lambda i}) d\tau) \exp(- \int_0^t \frac{dt}{\lambda i}) \qquad (42)$$

sendo CI a constante de integração .

Admitindo-se apenas condições de contorno constantes com o tempo, os termos f_i do vetor carga térmica também serão constantes com o tempo. Este fato somado à não variação dos autovalores λ_i durante o transiente, torna possível a simplificação da relação (42) desenvolvida no Apêndice 6, que leva à nova forma

$$z_i = CI (\exp(- \frac{t}{\lambda_i})) + f_i(\exp(- \frac{t}{\lambda_i}) - 1)$$

Uma vez obtidos todos os $\tilde{r}$ componentes do vetor solução {Z} são necessárias duas mudanças de coordenadas para que se retorne ao sistema original. Pela combinação das transformações (30) e (36) chega-se à relação que soluciona o problema

$$\{T\} = ((R)^t)^{-1}(V)\{Z\} \qquad (43)$$

4.2 - MÉTODO ECONOMIZADOR : ANÁLISE MODAL APROXIMADA ATRAVÉS DE MATRIZES REDUZIDAS

O método economizador de Stoker (Ref. 1) supõe que o regime transiente possa ser obtido, de forma aproximada, através de uma combinação linear de temperaturas estacionárias resultantes da aplicação de forças térmicas unitárias a um sub-conjunto de nós pequeno em relação à malha total. A maneira diferenciada com que cada um destes subconjuntos nodais reage à mesma excitação padrão, funciona como peso multiplicador na combinação linear que simula o transiente térmico .

O processo economizador é baseado na divisão dos nós da malha em três grupos mutuamente exclusivos :

1. Nós com temperaturas especificadas .

2. Nós "mestres", pertencentes às regiões onde a variação de temperatura se processará mais rapidamente e/ou onde ocorrerão os gradientes mais acentuados, bem como todos os nós que tenham fluxo de calor $q \neq 0$, geração interna Q ou trocas de calor

por convecção especificados. Estes nós e as grandezas a eles relacionadas são identificados pelo sub-índice 1 .

3. Nós "secundários", que são os demais nós da malha, identificados pelo sub-índice 2 .

A seleção correta dos nós mestres é vital na aplicação do método economizador. É possível esquematizar os tipos de nós que devem ser considerados mestres da seguinte forma:

1. Nós situados no contorno do domínio com condição de isolamento térmico prescrita ;

2. Qualquer nó da malha por onde ocorrerá entrada ou saída de calor do sistema considerado ;

3. Nós situados nas regiões da malha onde se supõe que se estabelecerão os gradientes mais pronunciados ;

4. Nós situados nas regiões da malha onde se supõe que as variações de temperatura serão mais rápidas .

Os nós incluídos nas duas primeiras categorias são de determinação exata, o mesmo não acontecendo com os nós dos ítens 3 e 4, selecionados com base na experiência do usuário .

À medida que os gradientes se acentuam ou que a temperatura varia mais rapidamente, aumenta o número mínimo de nós necessários para reproduzir numericamente o fenômeno com fidelidade. A definição deste número mínimo de nós, apenas o uso contínuo do método pode oferecer .

O sistema economizador pode ser empregado com vantagem mesmo não havendo experiência anterior do usuário, desde que o número de nós desconsiderados (secundários) seja mantido a níveis seguros .

Todo o processamento numérico é feito apenas para os nós mestres, o que reduz a ordem das matrizes a serem computadas. Depois de resolvido o sistema para os pontos selecionados como mestres, são calculadas as temperaturas para os nós secundários através da relação (50). Este procedimento evita o cálculo de autovalores e autovetores para as matrizes representativas da malha completa .

O tratamento matemático dado pelo método economizador ao problema se inicia com o particionamento da matriz condutividade térmica (B) e do vetor temperatura $\{T\}$ em termos de nós mestres e secundários na forma

$$(B) = \left[\begin{array}{c:c} (B_{11}) & (B_{12}) \\ \hdashline (B_{21}) & (B_{22}) \end{array}\right] , \qquad \{T\} = \left\{\begin{array}{c} \{T_1\} \\ \cdots\cdots \\ \{T_2\} \end{array}\right\} .$$

Supõe-se possível a simulação do transiente térmico baseada na resolução do problema permanente originado pela aplicação de forças térmicas unitárias ao conjunto de nós mestres e representado por

$$\left[\begin{array}{c:c} (B_{11}) & (B_{12}) \\ \hdashline (B_{21}) & (B_{22}) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} (J_{11}) \\ \cdots\cdots \\ (J_{21}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (I) \\ \cdots \\ (0) \end{array}\right] \tag{44}$$

onde a matriz (J) representa as temperaturas estáticas e $\left[\begin{array}{c} (I) \\ \cdots \\ (0) \end{array}\right]$ é a carga térmica unitária aplicada somente aos nós mestres.

Da relação (44) obtém-se as igualdades

$$(B_{11})(J_{11}) + (B_{12})(J_{21}) = (I) \tag{45}$$

$$(B_{21})(J_{11}) + (B_{22})(J_{21}) = (0) \tag{46}$$

Isolando na expressão (46) o valor de (J_{21})

$$(J_{21}) = - (B_{22})^{-1} (B_{21})(J_{11}) \tag{47}$$

e substituindo-o na equação (45) chega-se a

$$(J_{11})^{-1} = (B_{11}) - (B_{12})(B_{22})^{-1}(B_{21}) \tag{48}$$

As relações (47) e (48) demonstram a possibilidade de obtenção das temperaturas estáticas (J) a partir das grandezas físicas sempre conhecidas da matriz condutividade térmica (B).

Sendo objetivo do desenvolvimento a obtenção do vetor de temperaturas transientes {T} através de combinações lineares de temperaturas estáticas (J), propõe-se a relação (49) na qual o vetor {M} representa as constantes de proporcionalidade entre {T} e (J).

$$\{T\} = (J)\{M\} \tag{49}$$

Particionando (49)

$$\begin{Bmatrix} \{T_1\} \\ \cdots\cdot \\ \{T_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_{11}) \\ \cdots\cdots \\ (J_{21}) \end{bmatrix} \{M\}$$

é possível isolar o valor do vetor $\{T_2\}$

$$\{T_2\} = (J_{21})(J_{11})^{-1}\{T_1\} \qquad (50)$$

A igualdade (50) pode ser montada na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \{T_1\} \\ \cdots\cdot \\ \{T_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (I) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (J_{21})(J_{11})^{-1} \end{bmatrix} \{T_1\} \qquad (51)$$

A relação entre as temperaturas mestres e secundárias, se utilizada sob a forma (51), torna possível a obtenção das equações do problema em função apenas das temperaturas principais $\{T_1\}$.

Substituindo o vetor $\{T\}$ pela relação (51) na equação geral do problema (eq. 27), chega-se a

$$(A)\begin{bmatrix}(I)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (J_{21})(J_{11})^{-1}\end{bmatrix}\{\dot{T}_1\} + (B)\begin{bmatrix}(I)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (J_{21})(J_{11})^{-1}\end{bmatrix}\{T_1\} + \{C\} = \{0\} \qquad (52)$$

A equação (52) apresenta, em relação à equação (27), a perda de simetria das matrizes multiplicadoras dos vetores $\{\dot{T}\}$ e $\{T\}$. Como é salientado no ítem 4.1, a simetria de tais matrizes é muito importante para a resolução do sistema. Visando restaurar a simetria perdida, é utilizada a propriedade das matrizes simétricas pela qual

$$(J_{12}) = (J_{21})^T$$

Pré-multiplicando a equação (52) por

$$\begin{bmatrix}(I)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (J_{21})(J_{11})^{-1}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}(I) \vdots (J_{11})^{-1}(J_{12})\end{bmatrix}$$

obtém-se, sem perda de generalidade, a forma simétrica (53) para a equação geral do problema.

$$\left[(I)\vdots(J_{11})^{-1}(J_{12})\right](A)\begin{bmatrix}(I)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (J_{21})(J_{11})^{-1}\end{bmatrix}\{\dot{T}_1\}+$$

$$+\left[(I)\vdots(J_{11})^{-1}(J_{12})\right](B)\begin{bmatrix}(I)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (J_{21})(J_{11})^{-1}\end{bmatrix}\{T_1\}+$$

$$+\left[(I)\vdots(J_{11})^{-1}(J_{12})\right]\{C\} = \{0\} \tag{53}$$

Adotando uma notação mais compacta, reescreve-se a igualdade (53) como

$$(A_r)\{\dot{T}_1\} + (B_r)\{T_1\} + \{C_r\} = \{0\} \tag{54}$$

onde o sub-índice r simboliza a redução realizada ao se obter a equação em termos apenas dos nós mestres ,

$$(A_r) = \left[(I)\vdots(J_{11})^{-1}(J_{12})\right](A)\begin{bmatrix}(I)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (J_{21})(J_{11})^{-1}\end{bmatrix}, \tag{55}$$

$$(B_r) = \left[(I)\vdots(J_{11})^{-1}(J_{12})\right](B)\begin{bmatrix}(I)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (J_{21})(J_{11})^{-1}\end{bmatrix}, \tag{56}$$

e

$$\{C_r\} = \left[(I) \vdots (J_{11})^{-1}(J_{12})\right]\{C\} \tag{57}$$

A expressão (56) pode ser reduzida algebricamente a

$$(B_r) = (J_{11})^{-1}$$

conforme se demonstra no Apêndice 8 .

O método economizador proposto neste trabalho é sintetizado pela equação (54), que tem sua resolução apresentada no ítem 4.1 .

5 - PROGRAMAS UTILIZADOS

5.1 - GENERALIDADES

O método de cálculo apresentado neste trabalho só tem sua implementação possível através de computadores eletrônicos de médio ou grande porte. São usados dois programas básicos que sintetizam a aplicação da técnica dos elementos finitos, escritos em FORTRAN-IV e processados no IBM/360 da UFSC e no Burrougs B-6700 da UnB. O programa DINÂMICO trata dos problemas de condução de calor transientes e o programa ESTÁTICO dos problemas de condução de calor em regime permanente .

No programa DINÂMICO o sistema de leitura de dados, a montagem das matrizes de condutividade e de condutância térmica, do vetor carga térmica e a inclusão das condições de contorno foram modelados com base no programa de Huebner (Ref.7). O sistema de subrotinas responsável pela redução de Cholesky e pela análise modal do transiente térmico (CLVT, DPCHOL e DEIGEN) é de autoria do Prof. Domingos Boechat Alves. A subrotina CHAP, que realiza a inversão de matrizes, é do Prof. Clovis Sperb de Barcellos. As subrotinas MATMLT e MATVEC, que efetuam a multiplicação de matrizes e de matrizes por vetores respectivamente, são proposições de B. Carnahan, H. A. Luther e J. O. Wilkes (Ref.14). A subrotina PARTIC, responsável pela partição das matrizes foi desenvolvida durante a realização do trabalho sob a orientação do Prof. Clovis Sperb de Barcellos .

No programa ESTÁTICO as subrotinas SOLVE e SOLMIX, que resolvem um sistema de equações lineares por eliminação gaussiana, são de autoria do Prof. J. F. Booker (Ref. 7) .

5.2 - APLICAÇÕES BÁSICAS

Existem três tipos básicos de problemas que podem ser resolvidos por este sistema :

1. Problemas transientes de condução térmica bidimensionais ou tridimensionais axissimétricos, lineares, através de materiais heterogêneos e anisotrópicos, em domínios com qualquer tipo de geometria .

2. Problemas de condução térmica bidimensionais ou tridimensionais axissimétricos, lineares, através de materiais heterogeneos e anisotrópicos, sob regime permanente, em domínios com qualquer tipo de geometria .

3. Problemas de condução térmica bidimensionais ou tridimensionais axissimétricos, não lineares em decorrência de sua condutividade térmica variável com a temperatura, através de materiais heterogêneos e anisotrópicos, sob regime permanente, em domínios com qualquer tipo de geometria .

O primeiro tipo de problema é resolvido pelo programa DINÂMICO, podendo ou não ser usado o sistema economizador. O desenvolvimento da solução é o apresentado no Capítulo 4 .

5.3 - PROGRAMA ESTÁTICO

O programa ESTÁTICO é uma variante do proposto por Huebner (Ref. 7), que analisa fenômenos de condução térmica linear, bidimensional, sob regime permanente, com seu campo de aplicação ampliado de modo a resolver também problemas de condução térmica não lineares, através de cálculo iterativo .

A não linearidade que se pretende resolver é a introduzida por condutividade térmica variável com a temperatura. O programa, cujo processo de solução é o mesmo do caso linear, resolve inicialmente o problema com a condutividade especificada pelo analista. Com o primeiro campo de temperaturas obtido são calculadas as temperaturas médias de cada elemento através da média aritmética de suas temperaturas nodais. Com base na temperatura média o programa determina a nova condutividade térmica por interpolação na tabela correspondente ao material de cada elemento .

O processo iterativo é interrompido de duas formas:

1 - no fim da quinta iteração ;

2 - quando o erro relativo percentual definido pela relação (58) for menor ou igual a 0,005 .

$$EP = \frac{T_a - T_b}{T_a} 100 \qquad (58)$$

onde T_a é a temperatura calculada na última iteração e T_b é a temperatura calculada na penúltima iteração .

As duas condições de suficiência que encerram o processo iterativo foram arbitradas após uma série de testes que demonstraram o comportamento fortemente convergente do sistema, o que pode ser avaliado pelo fato de o programa não ter ido além da quarta iteração em nenhum dos testes efetuados, funcionando sempre o critério de erro mínimo para a interrupção do processo iterativo, apesar da severidade desta condição que impõe erros menores ou iguais a 0,005% .

5.4 - PRINCIPAIS LIMITAÇÕES

A limitação comum aos programas DINÂMICO e ESTÁTICO é o emprego compulsório do elemento triangular trinodal bidimensional, o mais simples e menos eficiente dos elementos bi-dimensionais .

5.4.1 - Limitações do programa ESTÁTICO

O programa ESTÁTICO em sua versão atual apresenta as seguintes restrições :

1. Sua capacidade de resolução de problemas de condução de calor é restrita à não linearidade introduzida pela condutividade térmica variável com a temperatura, não sendo ainda aplicável a problemas com condições de contorno que envolvam radiação .

2. Está programado com tabelas de condutividade térmica apenas para seis materiais, numa faixa de temperatura que vai de 70 °F a 1500 °F. Em consequência, para ser aplicado a outros

materiais que não sejam o aço carbono, aço austenítico desde o 18Cr-8Ni até o 25Cr-20Ni, aço alto-cromo de 12Cr a 17Cr, aço baixo-cromo com 3% no máximo de Cr, alumínio e níquel-cromo-ferro, será necessária a inclusão de tabelas correspondentes aos novos materiais. De maneira análoga, faixas de temperatura fora do intervalo 70 °F a 1500 °F ou escalas de temperatura em outros sistemas de unidades deverão ser incluídas no programa se necessárias .

5.4.2 - Limitações do programa DINÂMICO

O programa DINÂMICO em sua versão atual apresenta as seguintes restrições :

1. Pode ser aplicado apenas a problemas de condução de calor lineares, excluindo-se quaisquer condições de contorno envolvendo radiação e propriedades físicas variáveis com a temperatura. Carregamento térmico variável com o tempo, apesar de não alterar a linearidade do problema, também não é aceito mas pode ser implementado através de processos de integração mais elaborados .

2. O cálculo dos instantes iniciais do transiente com razoável precisão tende a altos custos pela exigência de malhas muito refinadas .

3. A eficiência do processo economizador empregado é sempre porporcional à experiência do analista em formar antecipadamente uma idéia aproximada do provável comportamento do transiente térmico .

6 - RESULTADOS

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo estão expostos e analisados os resultados obtidos com os programas ESTÁTICO e DINÂMICO em diversas situações de uso .

A apresentação dos resultados segue sempre a mesma sequência, iniciando com a descrição do problema, sua geometria, suas constantes físicas, a carga térmica atuante e as condições de contorno existentes. A seguir é determinada a malha de elementos finitos usada na discretização do domínio. Finalmente, com base nas tabelas onde estão condensados os resultados de cada caso, analisa-se a qualidade da solução encontrada por comparação com soluções analíticas ou numéricas obtidas para o mesmo problema .

Sendo uma característica do método empregado o uso de equações dimensionalizadas, o aparecimento de unidades ora no Sistema Inglês ora no Sistema Internacional é imposição das soluções usadas para comparação .

6.2 - REGIME PERMANENTE

6.2.1 - Descrição do problema

O problema térmico permanente é originado em uma placa retangular de espessura unitária (Fig. 4), com comprimento cinco vezes maior que a largura, tendo três de seus lados isolados termicamente enquanto o lado restante é mantido a uma temperatura constante. Supõe-se as superfícies da placa totalmente isoladas do meio .

A carga térmica atuante se manifesta através de uma taxa de geração interna de calor uniformemente distribuída pelo domínio de solução .

A condutividade térmica K foi considerada variável com a temperatura e os primeiros resultados são os que correspondem ao problema com condutividade térmica constante .

6.2.2 - Discretização do domínio

A malha usada é composta por vinte elementos com dezoito nós. O trecho do contorno com temperatura especificada é constituído pelos nós 16, 17 e 18. Os demais nós do contorno são mantidos sob isolamento térmico .

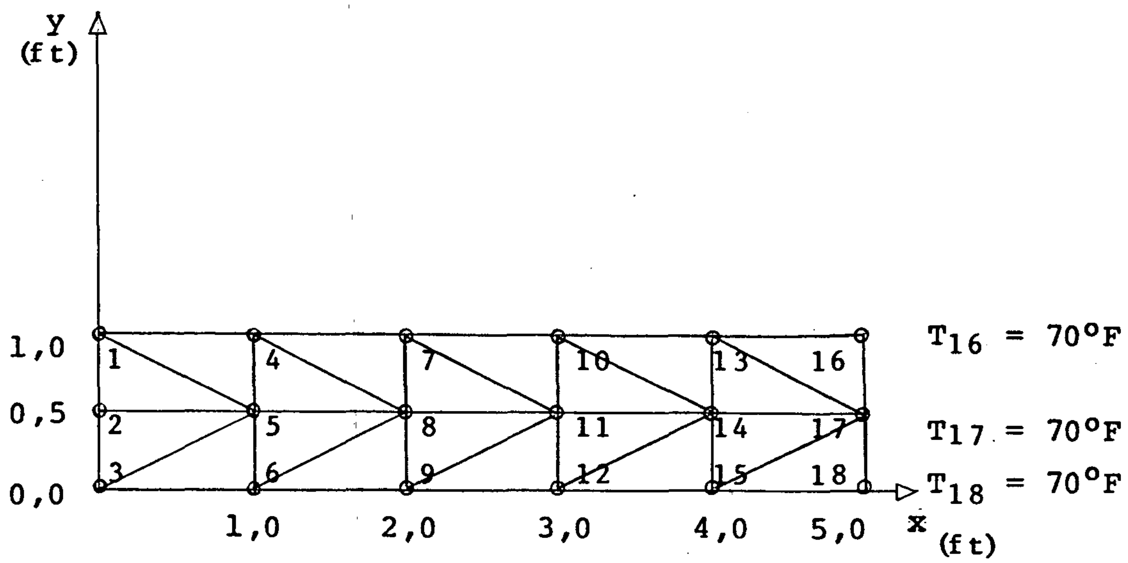


FIGURA 4. Discretização do domínio do problema permanente.

$$\frac{\partial T(x,1)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T(0,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0 .$$

6.2.3 - Análise dos resultados

Os resultados numéricos obtidos pelo programa ESTÁTICO foram confrontados com a solução analítica de Kirchoff para a equação estática da condução de calor em sólidos heterogêneos e isotrópicos com condutividade térmica variável (Ref. 11). Para tanto usou-se o erro percentual relativo definido pela relação (60) (ver ítem 6.3.3) .

onde A é o resultado analítico e B é o resultado numérico calculadb pelo programa ESTÁTICO .

As tabelas 1 e 2 apresentam respectivamente os resultados obtidos para placas de aço carbono submetidas a gradientes de 1500°F a 70°F e 800°F a 70°F, causados por níveis de geração interna de calor de 2880 $Btu/h\text{-}ft^3$ e 1670 $Btu/h\text{-}ft^3$.

As tabelas 3 e 4 apresentam respectivamente os resultados obtidos para placas de aço baixo-cromo submetidas aos mesmos gradientes que as placas de aço carbono, originados por fontes de geração interna de calor de 2o93 $Btu/h\text{-}ft^3$ e 1089 $Btu/h\text{-}ft^3$.

O exame dos resultados apresentados nas tabelas 1, 2, 3 e 4 leva às seguintes conclusões :

1. A resolução iterativa do problema de condução térmica não linear por elementos finitos, apresenta convergência muito rápida mesmo para materiais que, como o aço carbono, sofrem as maiores variações de condutividade térmica constatadas entre os metais, para um mesmo acréscimo de temperatura .

2. O programa ESTÁTICO demonstrou boa precisão

considerando-se que o erro médio apresentado em relação à solução analítica de Kirchoff oscilou entre 0,4% e 0,5% para o aço baixo-cromo e entre 2,6% e 3,1% para o aço carbono, sob gradientes que abrangem desde 1500 °F até a temperautra ambiente (70 °F) .

3. Observando nas tabelas 1 e 2 os erros percentuais obtidos para as placas de aço carbono, sob os diferentes gradientes, pode se afirmar que para gradientes não muito acentuados, mesmo em materiais com coeficiente de condutividade térmica bastante variável com a temperatura, é possível considerar K constante e obter uma aproximação razoável nos resultados. É evidente que para materiais com K mais estável como o aço baixo-cromo (tabelas 3 e 4) esta aproximação é ainda melhor. Nos casos mais simples, principalmente em problemas com gradientes curtos, é possível considerar K constante sem incorrer em erros significativos. Entretanto, a determinação de normas precisas para este procedimento necessita de um estudo mais cuidadoso .

x	nós	MÉTODOS EMPREGADOS			ERRO PERCENTUAL	
		KIRCHOFF	ELEMENTOS FINITOS			
			k=const.	k=k(T)	k=const.	k=k(T)
0,0	1,2,3	1500	1190	1545,5	20,67	3,03
1,0	4,5,6	1422	1144	1466	19,55	3,09
2,0	7,8,9	1206	1009	1242	16,33	2,99
3,0	10,11,12	887	785	914	11,50	3,04
4,0	13,14,15	500	472	514	5,60	2,80

TABELA 1. Temperaturas nodais (°F) calculadas em regime permanente para uma placa de aço carbono com $Q = 2880$ Btu h^{-1} ft^{-3}.

x	nós	MÉTODOS EMPREGADOS			ERRO PERCENTUAL	
		KIRCHOFF	ELEMENTOS FINITOS			
			k=const.	k=k(T)	k=const.	k=k(T)
0,0	1,2,3	800,0	719,0	824,9	10,13	3,11
1,0	4,5,6	766,8	692,7	790,1	9,66	3,04
2,0	7,8,9	669,7	614,8	689,5	8,20	2,96
3,0	10,11,12	515,4	485,1	529,8	5,88	2,79
4,0	13,14,15	312,4	303,5	320,6	2,85	2,62

TABELA 2. Temperaturas nodais (°F) calculadas em regime permanente para uma placa de aço carbono com $Q = 1670$ Btu h^{-1} ft^{-3}.

		MÉTODOS EMPREGADOS				
x	nós	KIRCHOFF	ELEMENTOS FINITOS		ERRO PERCENTUAL	
			k=const.	k=k(T)	k=const.	k=k(T)
0,0	1,2,3	1500,0	1446,2	1507,3	3,59	0,49
1,0	4,5,6	1440,5	1390,5	1447,0	3,47	0,45
2,0	7,8,9	1263,4	1225,5	1268,9	3,0	0,44
3,0	10,11,12	972,0	950,3	976,2	2,23	0,44
4,0	13,14,15	571,9	565,2	574,2	1,17	0,40

TABELA 3. Temperaturas nodais (°F) calculadas em regime permanente para uma placa de aço baixo-cromo com $Q = 2093$ Btu h^{-1} ft^{-3} .

		MÉTODOS EMPREGADOS				
x	nós	KIRCHOFF	ELEMENTOS FINITOS		ERRO PERCENTUAL	
			k=const.	k=k(T)	k=const.	k=k(T)
0,0	1,2,3	800,0	786,0	803,6	1,75	0,45
1,0	4,5,6	770,3	757,1	773,4	1,71	0,40
2,0	7,8,9	681,2	671,2	684,0	1,47	0,41
3,0	10,11,12	533,8	528,0	535,9	1,09	0,39
4,0	13,14,15	329,4	327,6	330,6	0,55	0,36

TABELA 4. Temperaturas nodais (°F) calculadas em regime permanente para uma placa de aço baixo-cromo com $Q = 1089$ Btu h^{-1} ft^{-3} .

6.3 - REGIME TRANSIENTE

6.3.1 - Descrição do problema

O transiente analisado desenvolve-se na placa retangular de espessura unitária esquematizada na fig. 5, sendo a proporção entre o comprimento e a largura de 5 para 2. A peça é inicialmente isolada do meio e mantida a 1000°C . O problema tem início quando é removido o isolamento de um dos lados e se estabelece um processo convectivo com o ambiente a 0 °C . Supõe-se as superfícies da placa totalmente isoladas do meio .

Os parâmetros físicos de condutividade e condutância térmicas, massa e calor específico são os seguintes :

$$\text{Modulo de Biot: } Bi = \frac{\tilde{h}\ L}{K} = 2$$

$$\text{Difusividade térmica: } \alpha = \frac{K}{\rho\ c_p} = 1$$

6.3.2 - Discretização do domínio

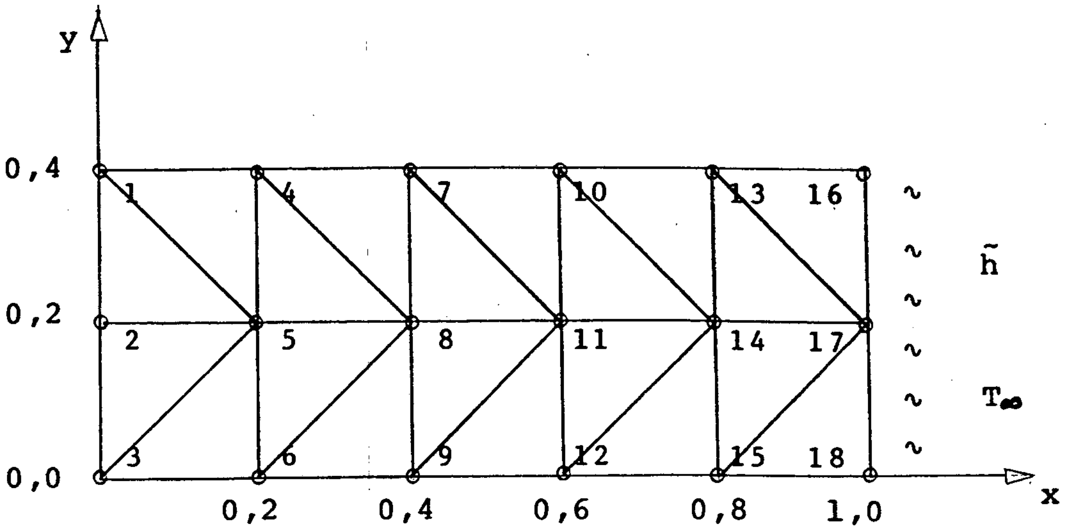


FIGURA 5. Discretização do domínio de solução do problema em regime transiente 6.3. $\frac{\partial T(x,\ 0,4)}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial T(0,y)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0$.

A malha usada é composta por vinte elementos com dezoito nós. O trecho do contorno submetido à convecção é constituído pelos nós 16, 17 e 18 . O isolamento térmico é mantido nos nós 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13 e 15 .

Foram calculadas as temperaturas para os seguintes tempos adimensionais expressos pelo módulo de Fourier :

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{L^2} = 0,1\ ;\ 0,2\ ;\ \ldots\ ;\ 1,3\ ;\ 1,4\ .$$

Definindo-se um comprimento $\xi = \frac{x}{L}$, adimensional, onde L é o comprimento total do domínio e x é um ponto genérico, analisou-se o comportamento térmico da placa para os pontos

$$\xi = (0,0),\ (0,2),\ (0,4),\ (0,6),\ (0,8),\ (1,0) .$$

6.3.3 - Análise dos resultados

Os resultados numéricos obtidos pelo programa DINÂMICO foram comparados com a solução analítica expressa pelas cartas unidimensionais da condução térmica transiente para placas planas de Boelter, Cherry, Johnson e Martinelli (Ref. 12) .

A geometria da placa bem como as condições de contorno atuantes permitem a hipótese de condução unidimensional do calor para efeito de comparação dos resultados com a solução analítica .

Para a avaliação dos resultados obtidos foram usados três tipos de erro :

1. Erro absoluto Ea :

$$Ea = A - B \,, \tag{59}$$

sendo A o resultado analítico e B o resultado numérico obtido pelo programa DINÂMICO em cada nó .

2. Erro relativo percentual Ep :

$$Ep = \frac{A - B}{A} 100 \,, \tag{60}$$

A e B com o mesmo significado do ítem anterior .

3. Desvio padrão DP :

$$DP = \left(\frac{\sum_{i=1}^{Nd} (A_i - B_i)^2}{Nd} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{61}$$

sendo A_i e B_i respectivamente os valores analíticos e numéricos calculados para todos os Nd nós de temperatura desconhecida, em cada instante do transiente .

Também foram considerados para cada instante os valores médios dos erros absolutos e relativos

$$\overline{Ea} = \frac{\sum_{i=1}^{Nd} Ea_i}{Nd} \qquad (62)$$

$$\overline{Ep} = \frac{\sum_{i=1}^{Nd} Ep_i}{Nd} \qquad (63)$$

Justifica-se a diversidade de parâmetros usados na avaliação do desempenho do programa DINÂMICO por ter sido este o primeiro teste efetivo da consistência do sistema de resolução por análise modal de transientes térmicos .

Na apresentação dos resultados, o valor calculado por elementos finitos em cada ponto do tempo t e do espaço ξ é sempre a média aritmética das temperaturas dos três nós que constituem a secção considerada da placa. Exemplificando: para $\xi = 0,4$ em qualquer tempo Fo, a temperatura lançada na tabela é a média aritmética das temperaturas calculadas pelo programa DINÂMICO para os nós 7, 8 e 9 .

Da tabela 5, que condensa os resultados do problema analisado, são possíveis as seguintes conclusões :

$\frac{x}{L}$	Fo = 0,1				Fo = 0,2				Fo = 0,3				Fo = 0,4			
	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep
0,0	1000	992	8,0	0,8	927	921,7	5,3	0,57	850	830,7	19,3	2,27	755	741,7	13,3	1,76
0,2	983	982,7	0,3	0,03	901	903,7	-2,7	-0,3	815	811,7	3,3	0,4	727	724,7	2,3	0,32
0,4	950	948,7	1,3	0,14	872	849	23,0	2,64	771	757	14	1,82	690	674	16	2,32
0,6	875	875,7	-0,7	-0,08	762	757	5	0,66	670	668	2	0,3	596	593	3	0,5
0,8	766	746,3	19,7	2,57	640	625,3	14,7	2,3	553	546,3	6,7	1,21	496	484	12	2,42
1,0	550	552,3	-2,3	-0,42	458	457	1	0,22	400	398	2	0,5	348	352	-4	-1,15

DP = 8,75		DP = 11,59		DP = 10,27		DP = 10,06	
$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$
4,38	0,51	7,72	1,02	7,88	1,08	7,1	1,03

TABELA 5. Problema transiente . Biot = 2 . α = 1 .

x/L	Fo = 0,5				Fo = 0,6				Fo = 0,7				Fo = 0,8			
	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep
0,0	676	661	15	2,22	600	588	12	2	533	524	9	1,69	474	466,3	7,7	1,62
0,2	644	645	-1	-0,16	570	574	-4	-0,7	508	511	-3	-0,59	453	455	-2	-0,44
0,4	616	600	16	2,6	546	534	12	2,2	483	475,3	7,7	1,59	435	423	12	2,76
0,6	530	527,3	2,7	0,51	470	469,3	0,7	0,15	423	418	5	1,18	371	372	-1	-0,27
0,8	442	430,3	11,7	2,65	397	383	14	3,53	350	340	10	2,86	310	303	7	2,26
1,0	310	312,7	-2,7	-0,8	275	278,7	-3,7	-1,35	248	248,3	-0,3	-0,12	222	220,3	1,7	0,77

DP = 10,28		DP = 9,26		DP = 6,76		DP = 6,59	
$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$
6,95	1,16	5,17	0,97	4,73	1,1	4,23	1,12

TABELA 5. (Continuação).

$\frac{x}{L}$	Fo = 0,9				Fo = 1,0				Fo = 1,1				Fo = 1,2			
	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El,	Ea	Ep
0,0	424	415,3	8,7	2,05	377	369,3	7,7	2,04	332	328,7	3,3	0,99	298	292,3	5,7	1,91
0,2	410	405	5	1,22	360	360,7	-0,7	-0,19	320	321	-1	-0,31	285	258,7	-0,7	-0,25
0,4	387	377	10	2,58	345	335	10	2,9	305	298	7	2,3	273	265,3	7,7	2,82
0,6	332	331	1	0,3	295	294,3	0,7	0,24	265	262	3	1,13	234	233	1	0,43
0,8	276	270	6	2,17	246	240	6	2,44	220	214	6	2,73	195	190	5	2,56
1,0	198	196,3	1,7	0,86	177	174,3	2,7	1,53	156	155,3	0,7	0,45	140	138,3	1,7	1,21
	DP = 6,33				DP = 5,82				DP = 4,21				DP = 4,49			
	$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$	
	5,4		1,53		4,4		1,49		3,17		1,21		3,4		1,45	

TABELA 5. (Continuação) .

x/L	Fo = 1,3				Fo = 1,4			
	Teór.	El.	Ea	Ep	Teór.	El.	Ea	Ep
0,0	265	260,7	4,3	1,62	233	231,7	1,3	0,56
0,2	254	254	0	0	225	226	-1	-0,44
0,4	241	236	5	2,07	215	210	5	2,33
0,6	208	208	0	0	186	185	1	0,54
0,8	175	169	6	3,43	155	151	4	2,58
1,0	126	123,3	2,7	2,14	112	109,3	2,7	2,41
	DP = 3,80				DP = 2,94			
	$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$	
	3		1,54		2,17		1,33	

TABELA 5. (Continuação)

1. Considerando que em nenhum instante do transiente o erro percentual médio $\overline{Ep}$ atingiu 1,6% , que o maior erro absoluto médio $\overline{Ea}$ foi de 11,59 °C num gradiente de aproximadamente 930 °C, pode se concluir que o sistema de cálculo montado é consistente e apresenta boa precisão numérica .

2. Como era esperado, os erros não apresentaram tendência a crescer com o desenvolvimento do transiente. Atingiu-se assim um dos objetivos propostos que é um método apropriado para o cálculo de transientes prolongados sem o inconveniente acúmulo de erros apresentado pelos métodos iterativos .

3. Tendência a erros maiores nos instantes iniciais do transiente, comprovando a deficiência característica da resolução por análise modal .

6.4 - REGIME TRANSIENTE ATRAVÉS DO MÉTODO ECONOMIZADOR

6.4.1 - Descrição do problema

O transiente a ser calculado se origina em uma placa de magnésio quadrada, com espessura unitária, mantida inicialmente a uma temperatura uniforme de 50 °F. Subitamente são especificadas temperaturas em seus quatro lados de maneira que três deles permaneçam a 0 °F e o restante a 200 °F. Supondo que não há qualquer troca de calor com o ambiente através das superfícies superior e inferior da placa, deseja-se saber a distribuição de temperatura que se estabelecerá com o passar do tempo.

As constantes físicas da placa são as seguintes:

condutividade térmica $K = 99$ Btu/h-ft-°F

massa específica $\rho = 109$ lbm/ft^3

calor específico $c_p = 0,232$ Btu/lbm-°F

6.4.2 - Discretização do domínio de solução

A malha usada, esquematizada na Fig. 6, é composta por 72 elementos com 49 nós. O contorno submetido à temperatura de 0 °F é constituído pelos nós 8, 14, 15, 21, 22 ,

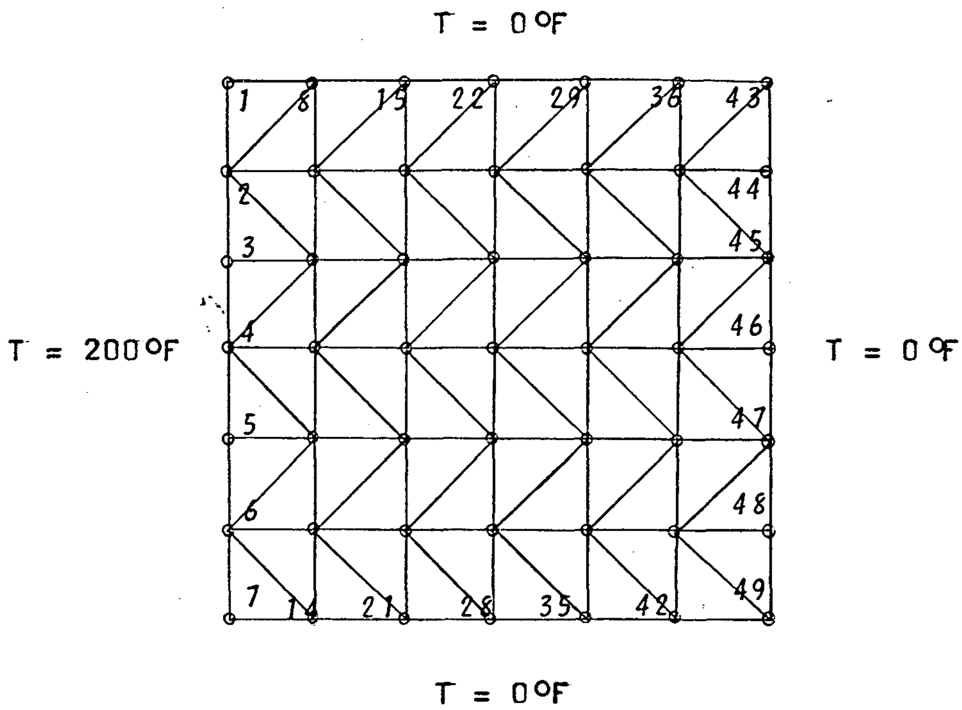


FIGURA 6. Modelação por elementos finitos para o problema proposto no ítem 6.4 .

28, 29, 35, 36, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 e 49. O contorno submetido à temperatura de 200 °F é constituído pelos nós 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

O problema foi resolvido para quatro distribuições diferentes de nós mestres e secundários, além da solução usando a malha inteira como base para comparação dos resultados. As quatro aplicações do método economizador tiveram as seguintes configurações :

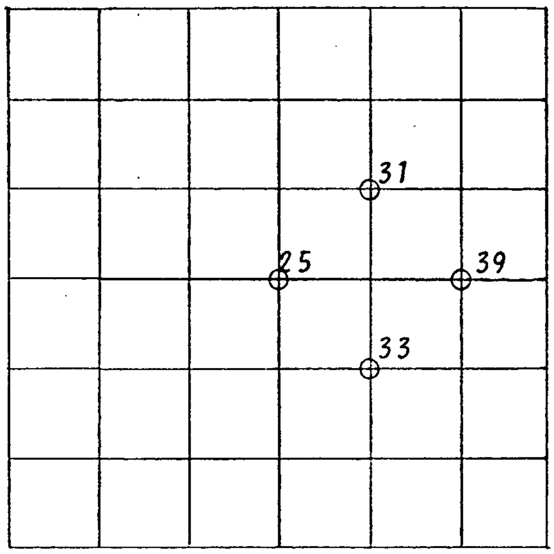


FIGURA 7. Configuração "quatro nós secundários" .

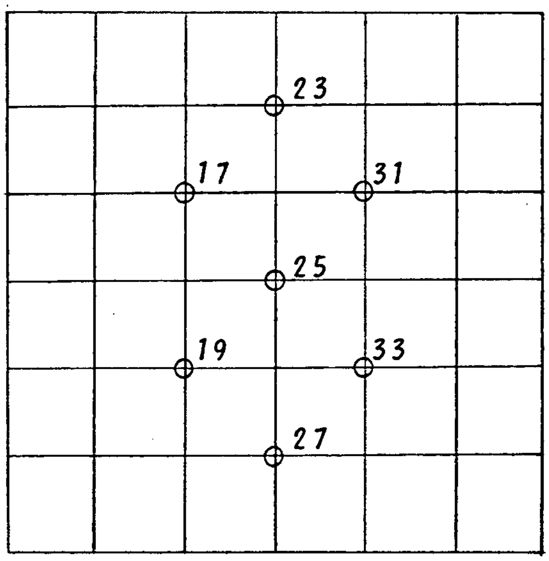


FIGURA 8. Configuração "sete nós secundários (a)" .

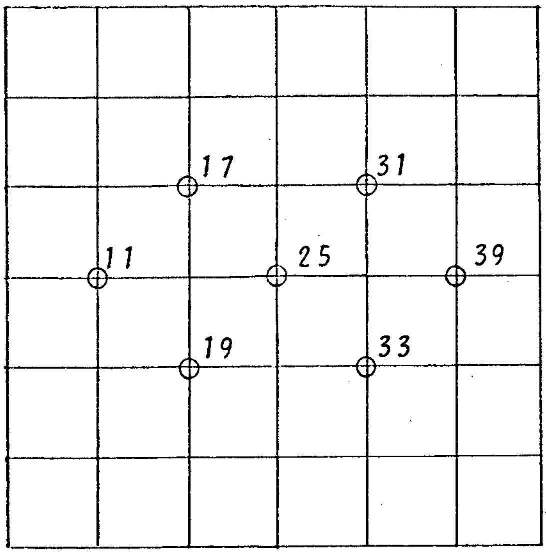


FIGURA 9. Configuração "sete nós secundários (b)" .

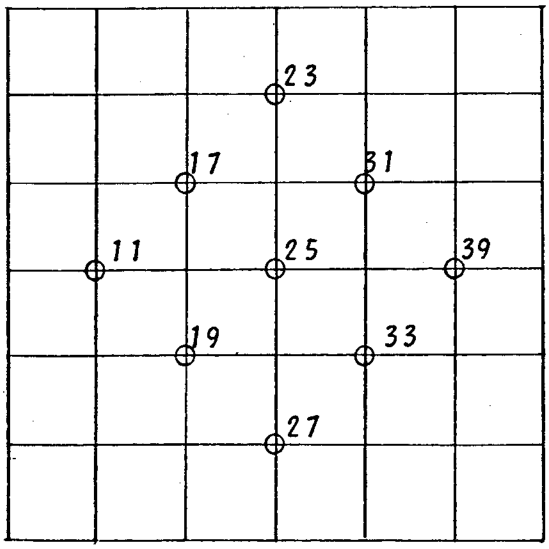


FIGURA 10. Configuração "nove nós secundários" .

1. Quatro nós secundários (Fig. 7) .

2. Sete nós secundários (a) (Fig. 8) .

3. Sete nós secundários (b) (Fig. 9) .

4. Nove nós secundários (Fig. 10) .

6.4.3 - Análise dos resultados

Os resultados obtidos pelo programa DINÂMICO foram comparados com a solução obtida por J. R. Welty (Ref. 9) pelo método das diferenças finitas e estão apresentados nas tabelas 6, 7 e 8 que correspondem respectivamente às distribuições de temperatura para os instantes t = 0,004 h ; 0,008 h ; 0,012 h .

Os critérios usados na avaliação dos erros são os definidos pelas relações (59), (60), (61), (62) e (63) .

Observa-se nas tabelas 6, 7 e 8 que :

1. Os erros não crescem ao longo do transiente. A tendência é de erros relativamente maiores no início, diminuindo até um nível de estabilidade .

2. Há grande diferença na qualidade das soluções apresentadas pelas duas configurações com sete nós secundários. A malha (a) oferece um ótimo padrão de confiabilidade, resumido por um desvio padrão que não ultrapassa ±0,87ºF, enquanto (b) apresenta para o melhor resultado um desvio padrão de ±19,17ºF (t=0,008h) .

3. Comparando as soluções apresentadas pelas malhas "quatro nós secundários" e "sete nós secundários (a)", constata-se que a primeira leva ligeira vantagem no instante inicial sendo superada pela segunda nos demais instantes, também por pequena diferença .

4. Os resultados das malhas "sete nós secundários (b)" e "nove nós secundários", mesmo apresentando níveis de erro que os desqualificam, trazem uma informação importante que é a superioridade da segunda malha sobre a primeira .

5. Apesar de os resultados ponto a ponto das malhas "sete nós secundários (b)" e "nove nós secundários" se mostrarem muito ruins, os erros médios $\overline{Ea}$ e $\overline{Ep}$ são pequenos e as temperaturas médias das placas se mantêm dentro de limites razoáveis ao longo do transiente .

TABELA 6. Problema transiente - Sistema economizador. (t = 0,004 h) .

Nó	Dif.	0 nós sec.			4 nós sec.			7 nós sec. (a)			7nós sec. (b)			9 nós sec.		
		El.	Ea	Ep	El.	Ea	Ep	El.	Ea	Ep	El.	Ea	Ep	El.	Ea	Ep
9	93,12	93,66	-0,54	-0,58	94,09	-0,97	-1,04	93,79	-0,67	-0,72	106,63	-13,51	-14,5	106,06	-12,9	-13,9
10	124,74	126,06	-1,32	-1,06	126,05	-1,31	-1,06	126,0	-1,26	-1,01	116,31	8,43	6,76	115,85	8,89	7,13
11	132,60	134,21	-1,61	-1,21	133,61	-1,01	-0,76	133,78	-1,18	-0,89	72,50*	60,10	45,32	72,31*	60,29	45,47
12	124,74	125,78	-1,04	-0,83	125,78	-1,04	-0,83	126,26	-1,52	-1,22	106.05	17,69	14,30	105,8	17,90	14,47
13	93,12	94,46	-1,34	-1,44	93,20	-0,08	-0,09	93,56	-0,44	-0,47	87,86	5,36	5,76	87,17	5,95	6,39
16	48,54	48,67	-0,13	-0,27	49,13	-0,59	-1,22	49,17	-0,63	-1,30	109,93	-61,3	-126	108,7	-60,2	-124,1
17	74,71	75,58	-0,87	-1,16	76,19	-1,48	-1,98	75,93*	-1,22	-1,63	86,36*	-11,6	-15,6	72,31*	2,4	3,21
18	82,61	83,74	-1,13	-1,37	83,89	-1,28	-1,55	84,01	-1,40	-1,69	67,65	14,96	18,11	67,55	15,06	18,23
19	74,61	75,07	-0,36	-0,48	74,83	-0,12	-0,16	75,85	-1,14	-1,53	63,36*	11,35	15,19	64,20*	10,51	14,07
20	48,54	48,86	-0,32	-0,66	48,04	0,50	1,03	49,03	-0,49	-1,01	44,0	4,54	9,35	43,56	4,98	10,26
23	26,99	26,43	0,56	2,07	26,72	0,27	1,0	27,03	-0,04	-0,15	45,36	-18,4	-68,0	44,95*	-17,96	-66,54
24	44,27	44,19	0,08	0,18	43,97	0,3	0,68	44,53	-0,26	-0,59	51,55	-7,28	-16,4	50,66	-6,39	-14,43
25	50,0	50,0	0,0	0,0	50,09*	-0,09	-0,18	50,03*	-0,03	-0,06	46,62*	3,38	6,76	46,33*	3,67	7,34
26	44,27	44,00	0,27	0,61	44,15	0,12	0,27	44,12	0,15	0,34	39,72	4,55	10,28	39,86	4,41	9,96
27	26,99	27,06	-0,07	-0,26	26,71	0,28	1,04	26,87*	0,12	0,44	23,92	3,07	11,37	24,12*	2,87	10,63
30	15,01	14,51	0,50	3,33	13,99	1,02	6,8	14,41	0,6	4,0	20,38	-5,37	-35,7	20,38	-5,37	-35,78
31	25,30	24,32	0,98	3,87	24,18*	1,12	4,43	24,31*	0,99	3,91	27,98*	-2,68	-10,5	27,84*	-2,54	-10,04
32	28,86	28,28	0,58	2,01	28,34	0,52	1,8	27,47	1,39	4,82	27,54	1,32	4,57	27,25	1,61	5,58
33	25,29	24,13	1,16	4,59	24,61*	0,68	2,69	24,32*	0,97	3,84	22,79*	2,50	9,89	22,52*	2,77	10,95
34	15,01	14,52	0,49	3,26	15,03	-0,02	-0,13	14,35	0,65	4,40	13,53	1,48	9,86	13,08	1,93	12,86
37	6,88	6,45	0,43	6,25	5,59	1,29	18,75	6,52	0,35	5,23	8,40	8,40	-22,1	8,27	-1,39	-20,20
38	11,72	11,26	0,46	3,92	10,42	1,3	11,09	10,82	0,90	7,68	12,40	-0,68	-5,80	13,06	-1,34	-11,43
39	13,43	12,48	0,95	7,07	12,42*	1,01	7,52	12,28	1,15	8,56	12,58*	0,85	6,33	12,55*	0,88	6,55
40	11,72	10,97	0,75	6,40	10,92	0,80	6,83	11,36	0,35	3,07	10,34	1,38	11,77	9,88	1,84	15,70
41	6,88	6,47	0,41	5,96	6,21	0,67	9,74	6,73	0,15	2,18	6,0	0,88	12,79	6,66	0,22	3,20
DP		0,78			0,85			0,87			18,94			18,65		
		$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$	$\overline{Ea}$		$\overline{Ep}$
		-0,048		1,6	0,0716		2,58	-0,10		1,47	2,28		-4,68	1,52		-3,78

* NÓS SECUNDÁRIOS

TABELA 7. Problema transiente - Sistema economizador. (t =0,008 h) .

Nó	Dif.	0 nós sec. El.	0 nós sec. Ea	0 nós sec. Ep	4 nós sec. El.	4 nós sec. Ea	4 nós sec. Ep	7 nós sec. (a) El.	7 nós sec. (a) Ea	7 nós sec. (a) Ep	7 nós sec. (b) El.	7 nós sec. (b) Ea	7 nós sec. (b) Ep	9 nós sec. El.	9 nós sec. Ea	9 nós sec. Ep
9	93.72	93.75	-0.03	-0.03	94.16	-0.44	-0.47	93.75	-0.03	-0.03	103.5	-12.8	-13.66	106.3	-12.3	-13.1
10	125.8	126.2	-0.40	-0.32	126.2	-0.37	-0.29	125.94	-0.12	-0.10	116.1	9.71	7.72	115.8	13.02	10.35
11	133.8	134.39	-0.54	-0.40	133.75	0.10	0.07	133.72	0.13	0.10	72.31*	61.54	45.98	72.26*	61.59	46.0
12	125.8	125.9	-0.12	-0.10	125.9	-0.08	-0.06	126.19	-0.37	-0.29	105.8	19.96	15.86	105.79	20.03	15.92
13	93.72	94.55	-0.83	-0.89	93.26	0.46	0.49	93.53	0.19	0.20	87.63	6.09	6.50	87.14	6.58	7.02
16	49.09	48.76	0.33	0.67	49.21	-0.12	-0.24	49.10	-0.01	-0.02	109.7	-60.64	-123.5	108.73	-59.6	-121.5
17	75.73	75.72	0.01	0.01	76.33	-0.60	-0.79	75.81*	-0.08	-0.11	86.07*	-10.34	-13.65	85.63*	-9.9	-13.0
18	83.82	83.92	-0.10	-0.12	84.05	-0.23	-0.27	83.86	-0.04	-0.05	67.28	16.54	19.73	67.45	16.3	19.53
19	75.73	75.22	0.51	0.67	74.96	0.77	1.02	75.73*	0.0	0.0	64.06*	11.67	15.41	64.12*	11.6	15.33
20	49.09	48.96	0.13	0.26	48.11	0.98	2.0	48.95	0.14	0.29	43.78	5.31	10.32	43.49	5.60	11.41
23	26.93	26.43	0.50	1.86	26.75	0.18	0.67	26.93*	0.0	0.0	45.11	-18.18	-67.51	44.90*	-17.9	-66.7
24	44.24	44.17	0.07	0.16	44.0	0.24	0.54	44.34	-0.1	-0.23	51.15	-6.91	-15.62	50.96	-6.32	-14.29
25	50.00	50.00	0.0	0.0	50.13*	-0.13	-0.26	49.84*	0.16	0.32	46.23*	3.77	7.54	46.22*	3.78	7.56
26	44.23	43.98	0.25	0.57	44.18	0.05	0.11	43.94	0.29	0.66	39.33	4.90	11.08	39.74	4.49	10.15
27	26.93	27.06	-0.13	-0.48	26.71	0.22	0.82	26.78*	0.15	0.56	23.67	3.26	12.11	24.06*	2.87	10.66
30	14.38	14.41	-0.03	-0.21	13.96	0.42	2.92	14.30	0.08	0.56	20.14	-5.76	-40.06	20.32	-5.94	-41.31
31	24.27	24.15	0.12	0.49	24.14*	0.13	0.54	24.14*	0.13	0.54	27.65*	-3.38	-13.93	27.75*	-3.48	-14.34
32	27.72	28.09	-0.37	-1.33	28.27	-0.55	-1.98	27.24	0.48	1.73	27.15	0.57	2.06	27.14	0.58	2.09
33	24.27	23.95	0.32	1.32	24.57*	-0.30	-1,24	24.16*	0,11	0.45	22,47*	1,80	7,42	22,43*	1,84	7,58
34	14.37	14.43	-0,06	-0,42	14,97	-0,6	-4,18	14,23	0,14	0,97	13,29	1,08	7,52	13,02	1,35	9,39
37	6,28	6,35	-0,07	-1,11	5,54	0,74	11,78	6,44	-0,16	-2,55	8,25	-1,97	-31,37	8,23	-1,95	-31,05
38	10,72	11,10	-0,38	-3,54	10,33	0,39	3,64	10,69	0,03	0,28	12,17	-1,45	-13,53	13,0	-2,28	-21,27
39	12,30	12,28	0,02	0,16	12,36*	-0,06	-0,49	12,13	0,17	1,38	12,35*	-0,05	-0,41	12,49*	-0,19	-1,54
40	10,72	10,81	-0,09	-0,84	10,84	-0,12	-1,12	11,22	-0,50	-4,66	10,10	0,62	5,78	9,82	0,90	8,40
41	6,28	6,37	-0,09	-1,43	6,15	0,13	2,07	6,63	-0,35	-5,57	5,84	0,44	7,01	6,62	-0,34	-5,41
DP		0,30			0,42			0,21			19,17			19,10		
		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$	
		-0,039	-0,020		0,048	0,061		0,018	-0,22		1,03	-6,03		1,21	-6,49	

* NÓS SECUNDÁRIOS

TABELA 8. Problema transiente - Sistema economizador. (t = 0,012 h) .

Nó	Dif.	0 nós sec. El.	0 nós sec. Ea	0 nós sec. Ep	4 nós sec. El.	4 nós sec. Ea	4 nós sec. Ep	7 nós sec. (a) El.	7 nós sec. (a) Ea	7 nós sec. (a) Ep	7 nós sec. (b) El.	7 nós sec. (b) Ea	7 nós sec. (b) Ep	9 nós sec. El.	9 nós sec. Ea	9 nós sec. Ep
9	93,74	93,75	-0,01	-0,01	94,17	-0,43	-0,46	93,75	-0,01	-0,01	106,5	-12,77	-13,6	106,0	-12,3	-13,1
10	125,84	126,22	-0,38	-0,30	126,19	-0,35	-0,28	125,9	-0,09	-0,07	116,1	9,74	7,74	115,8	10,04	7,98
11	133,88	134,39	-0,38	-0,30	133,76	0,12	0,09	133,7	0,17	0,13	72,29*	61,59	46,0	72,25*	61,63	46,03
12	125,84	125,94	-0,10	-0,08	125,91	-0,07	-0,06	126,2	-0,34	-0,27	105,84	20,0	15,89	105,8	20,06	15,94
13	93,74	94,55	-0,81	-0,86	93,27	0,47	0,50	93,52	0,22	0,23	87,61	6,13	6,54	87,13	6,61	7,05
16	49,10	48,76	0,34	0,69	49,21	-0,11	-0,22	49,09	0,01	0,02	109,72	-60,6	-123	108,7	-59,6	-121,4
17	75,76	75,72	0,04	0,05	76,34	-0,58	-0,77	75,80*	-0,14	-0,05	86,84*	-10,3	-13,6	85,63*	-9,87	-13,03
18	83,85	83,92	-0,07	-0,08	84,06	-0,21	-0,25	83,84	0,01	0,01	67,25	16,60	19,80	67,44	16,41	19,57
19	75,76	75,22	0,54	0,71	74,96	0,80	1,06	75,72*	0,04	0,05	64,03*	11,73	15,48	64,11*	11,65	15,38
20	49,10	48,95	0,15	0,31	48,12	0,98	2,00	48,94	0,16	0,33	43,76	5,34	10,88	43,49	5,61	11,43
23	26,92	26,43	0,49	1,82	26,75	0,17	0,63	26,92*	0,0	0,0	45,09	-18,17	-67,5	44,89*	-17,9	-66,75
24	44,23	44,17	0,06	0,14	44,01	0,22	0,50	44,32	-0,09	-0,20	51,11	-6,88	-15,5	50,55	-6,32	-14,29
25	50,00	50,00	0,0	0,0	50,13*	-0,13	-0,26	49,83*	0,17	0,34	46,19*	3,81	7,62	46,21*	3,79	7,58
26	44,23	43,98	0,25	0,57	44,19	0,04	0,09	43,92	0,31	0,70	39,30	4,93	11,15	39,73	4,50	10,17
27	26,92	27,06	-0,14	-0,52	26,72	0,20	0,74	26,77*	0,15	0,56	23,65	3,27	12,15	24,06*	2,86	10,62
30	14,36	14,41	-0,05	-0,35	13,96	0,40	2,79	14,29	0,07	0,49	20,12	-5,76	-40,1	20,31	-5,95	-41,43
31	24,25	24,15	0,10	0,41	24,15*	0,10	0,41	24,13*	0,12	0,49	27,62*	-3,37	-13,9	27,75*	-3,50	-14,43
32	27,69	28,09	-0,4	-1,44	28,27	-0,58	-2,09	27,23	0,46	1,66	27,11	0,58	2,09	27,13	0,56	2,02
33	24,25	23,95	0,3	1,24	24,57*	-0,32	-1,32	24,14*	0,11	0,45	22,44*	1,81	7,46	22,42*	1,83	7,55
34	14,36	14,43	-0,07	-0,49	14,98	-0,62	-4,32	14,22	0,14	0,97	13,27	1,09	7,59	13,01	1,35	9,40
37	6,26	6,35	-0,09	-1,44	5,55	0,71	11,34	6,43	-0,17	-2,72	8,24	-1,98	-31,6	8,23	-1,97	-31,47
38	10,70	11,10	-0,4	-3,74	10,33	0,37	3,46	10,68	0,02	0,19	12,15	-1,45	-13,5	12,99	-2,29	-21,40
39	12,27	12,28	-0,01	-0,08	12,36*	-0,09	-0,73	12,12	0,15	1,22	12,33*	-0,06	-0,49	12,48*	-0,21	-1,71
40	10,70	10,81	-0,11	-1,03	10,84	-0,14	-1,31	11,21	-0,51	-4,77	10,08	0,62	5,79	9,81	0,89	8,32
41	6,26	6,37	-0,11	-1,76	6,16	0,10	1,60	6,63	-0,37	-5,91	5,83	0,43	6,87	6,62	-0,36	-5,75
	DP	0,28			0,42			0,21			19,18			19,03		
		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$		$\overline{Ea}$	$\overline{Ep}$	
		-0,019	-0,25		0,042	0,53		0,028	-0,25		1,05	-6,01		1,10	-6,63	

* NÓS SECUNDÁRIOS

Aparentemente os fatos resumidos nos ítens 2, 3 e 4 contrariam a expectativa de uma perda na qualidade da solução à medida que se diminue a ordem da equação matricial pelo aumento do número de nós secundários. Em linhas gerais, é isto que se verifica desde que a seleção dos nós secundários se faça corretamente .

O critério de seleção dos nós secundários é a importância secundária dos mesmos no estabelecimento do campo térmico. Nós situados em regiões de maior gradiente são sempre pontos importantes que não devem ser eliminados sob pena de perdas graves nos resultados .

Neste problema as condições de contorno tornam simples a localização da região de maior variação de temperatura, que se situa na linha média que une o lado mantido a 200 ºF ao lado oposto, constituída pelos nós 4, 11, 18, 25, 32, 39 e 46 . Deve ser salientado que o nó 25, apesar de situado na região de maior variação térmica, mantém sua temperatura inalterada do início ao fim do transiente. Este comportamento é motivado pela igualdade entre a temperatura inicial e a temperatura média durante todo o processo e pela localização central do nó, justificando sua escolha como secundário nas quatro configurações estudadas. Com base nestas colocações, é simples a explicação dos fenômenos resumidos nos ítens 2, 3 e 4 .

A configuração "sete nós secundários (a)" tem apenas um nó secundário na região de maior gradiente, enquanto que a configuração (b) tem três. Daí a maior eficiência da primeira em relação à segunda .

Como já foi mencionado, uma carcterística da análise modal é a relação de proporção entre o número de nós considerados e a precisão dos resultados no início do transiente. A malha "quatro nós secundários", por apresentar maior número de nós mestres que a "sete nós secundários (a)", tem melhor resposta para a parte inicial do transiente. Esta tendência se inverte a partir do instante t = 0,008 h quando prevalece a melhor seleção de nós secundários da segunda malha .

O ítem 3 apresenta um resultado surpreendente pois as duas malhas têm o mesmo número de nós secundários sobre a região de maior variação de temperatura, tendo a malha "nove nós secundários", mesmo com dois nós mestres a menos, levado a resultados levemente superiores aos da malha "sete nós secundários (b)" nos três instantes calculados. A explicação para o fato está baseada na sensibilidade do cálculo de autovalores a direções preferenciais introduzidas ou inerentes à malha de elementos finitos. A configuração com nove nós secundários equilibra a tendência a uma direção dominante, o que não acontece com a malha "sete nós secundários (b)", que tem todos os seus nós secundários dispostos ao longo da região de maior gradiente .

6.5 - Regime transiente - Coordenadas cilíndricas

6.5.1 - Descrição do problema tridimensional axissimétrico

O problema transiente analisado desenvolve-se em um cilindro com altura igual ao raio e isolado termicamente do meio em suas extremidades superior e inferior, conforme a figura

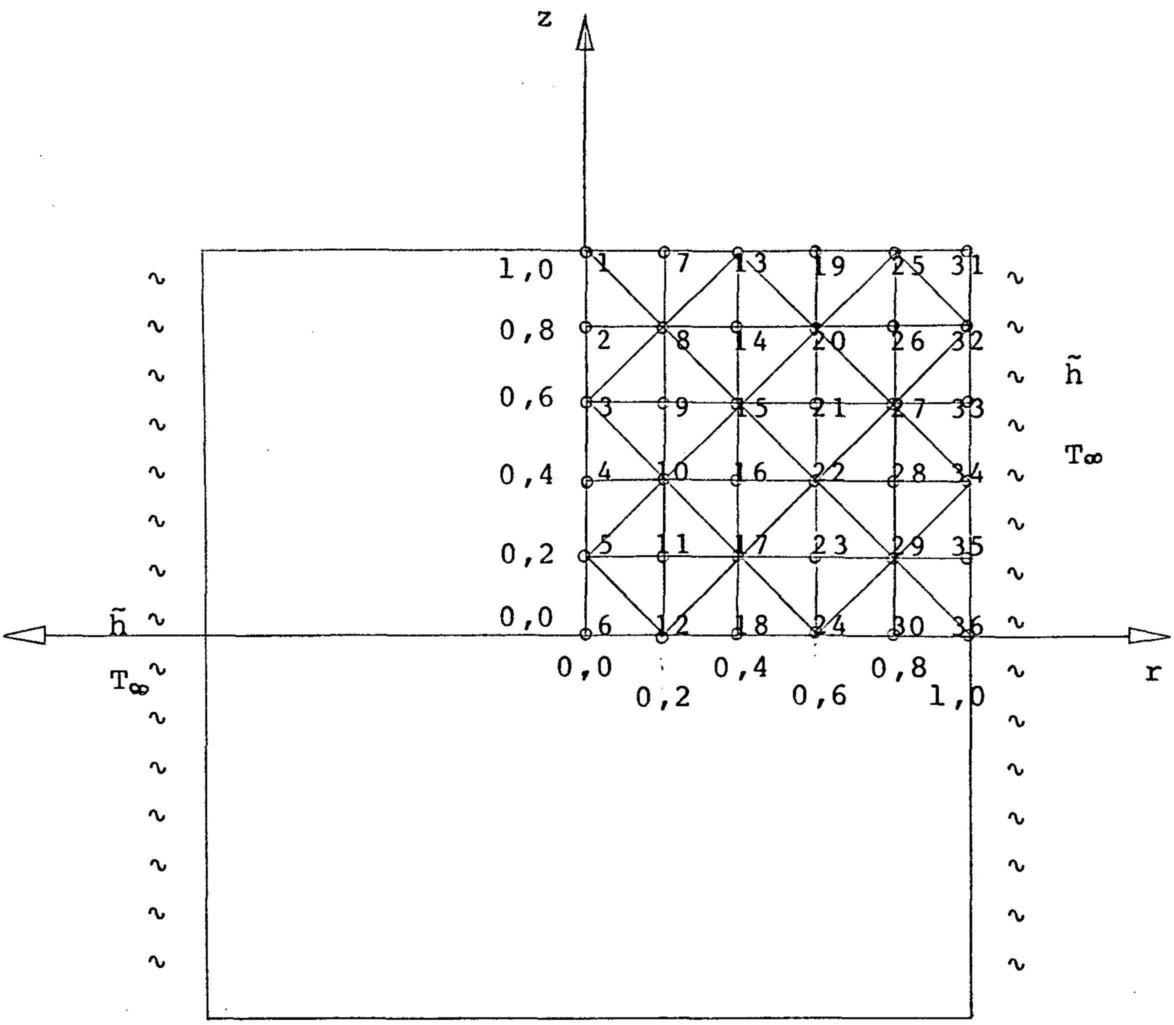


FIGURA 11. Sistema de coordenadas cilíndricas e topologia da malha de elementos finitos. $\frac{\partial T}{\partial z}(r,1)=0$, $\frac{\partial T}{\partial z}(r,0)=0$, $\frac{\partial T}{\partial r}(0,z)=0$.

11. A peça é inicialmente isolada do meio e mantida a 1000°C. O problema tem início quando o cilindro é subitamente colocado em contacto com um ambiente a 0°C, ao qual começa a ceder calor por convecção.

As propriedades físicas necessárias à resolução do problema são definidas pelas relações

$$\text{Módulo de Biot} \quad Bi = \frac{\tilde{h}\, L}{K} = 1$$

$$\text{Difusividade térmica} \quad \alpha = \frac{K}{\rho \; c_p} = 1$$

6.5.2 - Discretização do domínio

A malha usada é composta por 50 elementos e 36 nós. O trecho do contorno submetido à convecção é constituído pelos nós 31, 32, 33, 34, 35 e 36 . Os nós 1, 7, 13, 19 e 25 são isolados por imposição do problema. Os nós 2, 3, 4, 5, 6, 12, 18, 24 e 30 são isolados de modo a simular a simetria do domínio, já que $\frac{\partial T}{\partial r}(0,z) = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial z}(r,0) = 0$.

Foram calculadas as temperaturas para os seguintes tempos adimensionais expressos pelo módulo de Fourier :

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = 0{,}1 \;;\; 0{,}2 \;;\; 0{,}3 \;;\; 0{,}4 \;;\; 0{,}5 \;;\; 0{,}6 \;;\; 0{,}7 \;;\; 0{,}8 \;;$$

$$0{,}9 \;;\; 1{,}0 \;;\; 1{,}1 \;;\; 1{,}2 \,.$$

Definiu-se um raio adimensional $\bar{R} = \frac{r}{R}$ onde R é o raio do cilindro e r um ponto intermediário entre R e zero. Foram calculadas as temperaturas para $\bar{R} = 0{,}0$; 0,2 ; 0,4; 0,6 ; 0,8 ; 1,0 .

6.5.3 - Análise dos resultados

Os resultados numéricos obtidos pelo programa DINÂMICO foram comparados com a solução analítica expressa pelas cartas unidimensionais da condução de calor em regime transiente para cilindros de Boelter, Cherry, Jonhson e Martinelli (Ref. 11), uma vez que a geometria do domínio e as condições de contorno permitem a hipótese da condução unidimensional do calor .

Os resultados apresentados na Tabela 9 e na figura 12 permitem as seguintes conclusões :

1. Os resultados obtidos na região do cilindro próxima ao eixo z até $\bar{R} = 0{,}2$ são ruins. Na região correspondente a $\bar{R} = 0{,}4$ ainda predomina um nível de erro considerável com

$\overline{Ea} = 14{,}3\%$ para $Fo = 1{,}2$. Na faixa formada por valores entre $\bar{R} = 0{,}6$ e $\bar{R} = 1$ os erros são mínimos. Este comportamento já era esperado pois a utilização do raio médio $\bar{r}$ do elemento na resolução do problema, conforme apresenta o Apêndice 5, é um fator de geração de erros muito pronunciados na região próxima ao eixo z.

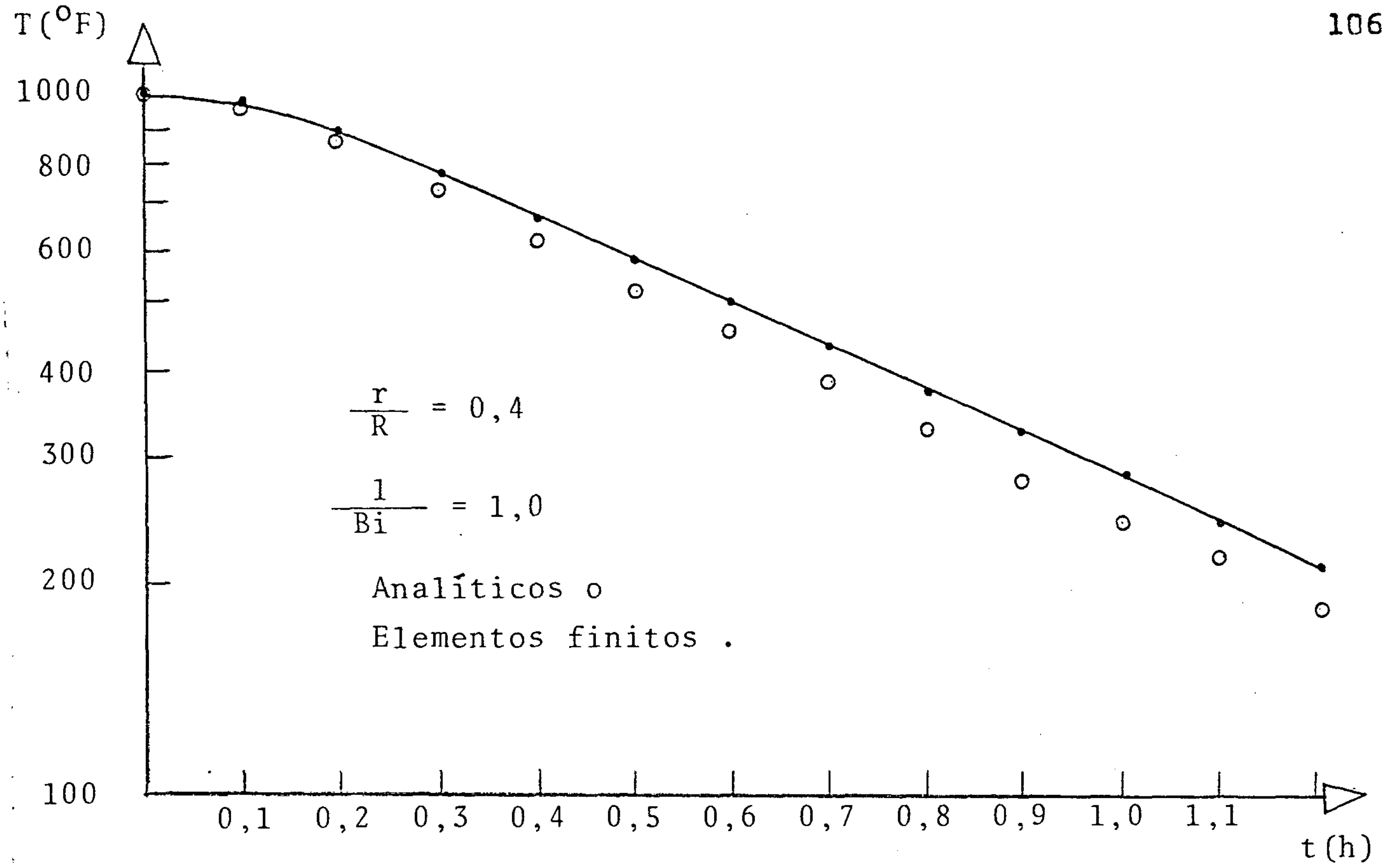
2. Considerando a deficiência inerente ao processo de resolução que utiliza o raio médio $\bar{r}$, os resultados obtidos permitem concluir que o sistema desenvolvido para domínios tridimensionais funciona satisfatóriamente.

3. Fica evidenciado pelos ítens 1 e 2 que a faixa de utilização eficiente do método proposto tem início para valores de $\bar{R}$ oscilando em torno de 0,4. Variações sobre este limite existirão de acordo com cada situação de uso do programa.

r/R	Fo = 0,1		Fo = 0,2		Fo = 0,3		Fo = 0,4		Fo = 0,5		Fo = 0,6	
	El.	Teór.	El.	Teór.	El.	Teór.	El.	Teór.	El.	Teór.	El.	Teór.
0,0	1004	1000	1008	890	974	780	905	655	819	560	730	480
0,2	999	1000	946	875	859	745	764	640	673	550	590	475
0,4	969	950	864	820	755	705	657	600	572	510	497	450
0,6	900	900	765	770	654	660	563	560	486	480	420	410
0,8	794	805	656	680	554	580	474	490	408	425	347	360
1,0	666	700	545	590	459	490	392	420	337	360	290	310

r/R	Fo = 0,7		Fo = 0,8		Fo = 0,9		Fo = 1,0		Fo = 1,1		Fo = 1,2	
	El.	Teór.	El.	Teór.	El.	Teór.	El.	Teór.	El.	Teór.	El.	Teór.
0,0	643	405	564	345	493	300	430	250	374	215	325	180
0,2	515	400	449	345	391	290	340	250	295	220	257	180
0,4	432	380	375	325	326	275	283	240	246	205	213	175
0,6	364	350	316	300	274	255	238	220	207	185	179	160
0,8	305	310	264	265	229	225	199	190	172	165	150	145
1,0	251	260	218	225	189	195	164	165	142	145	123	120

TABELA 9. Problema transiente - Coordenadas cilindricas .



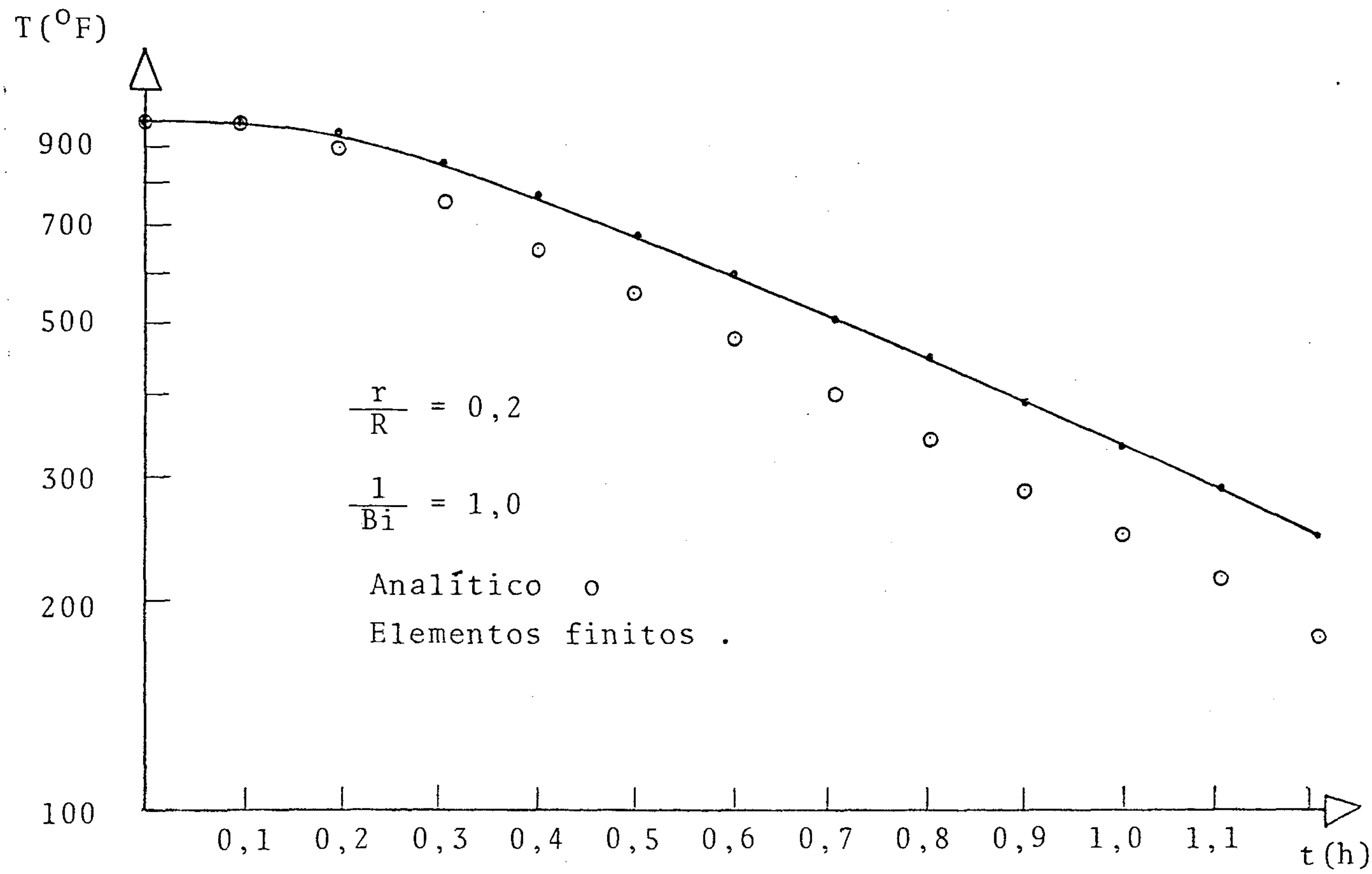
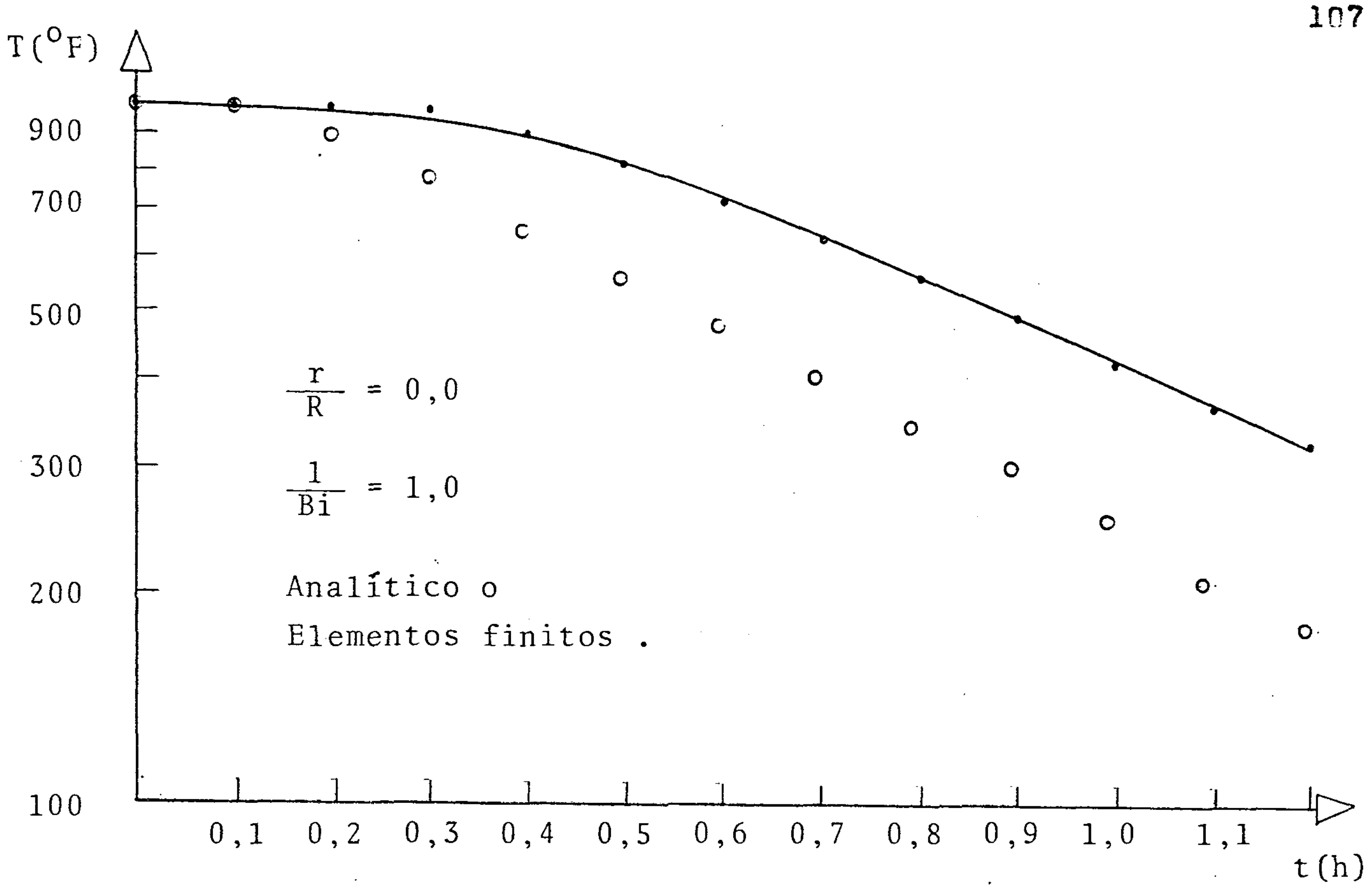


FIGURA 12 - Resultados do problema tridimensional axissimétrico



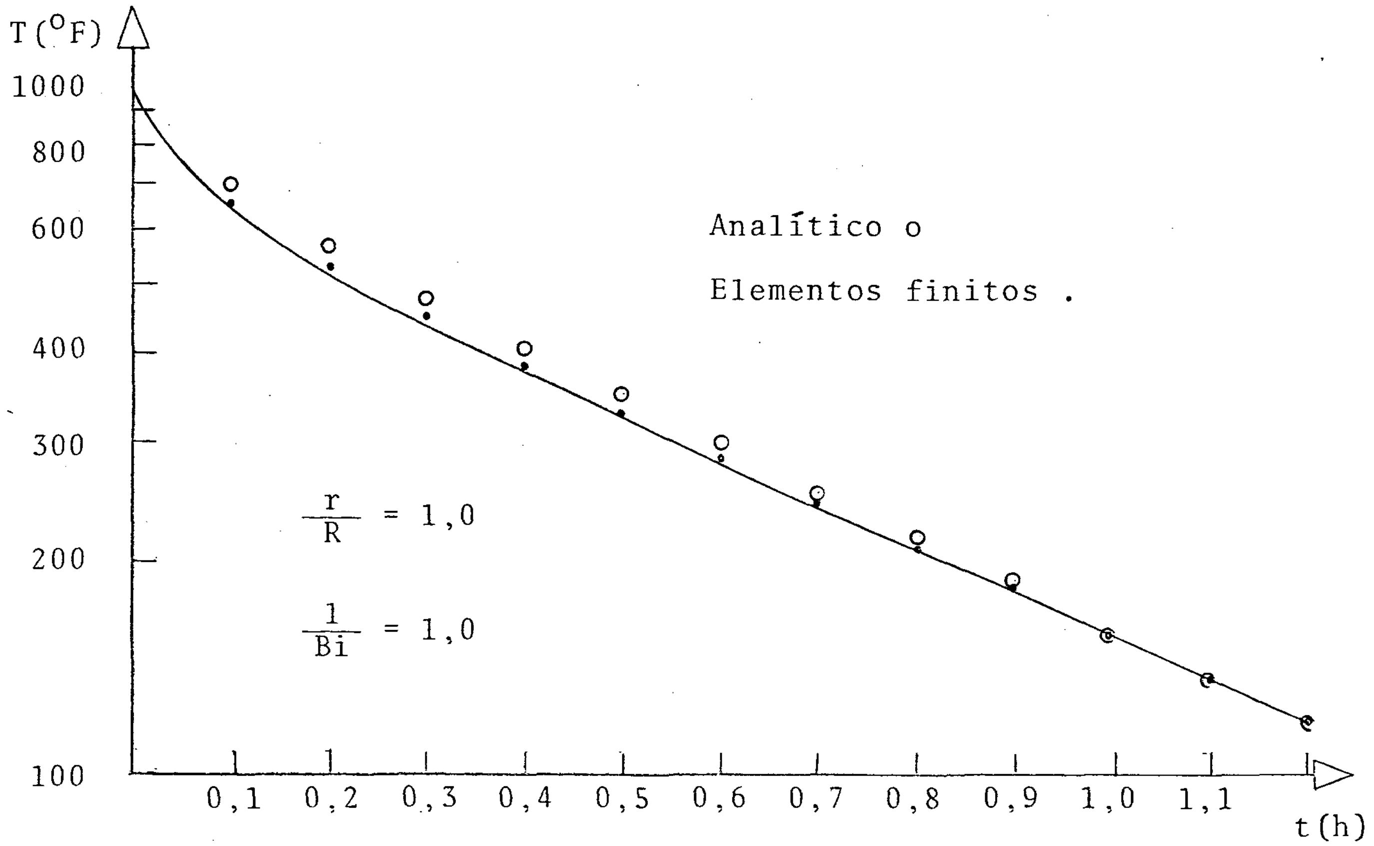
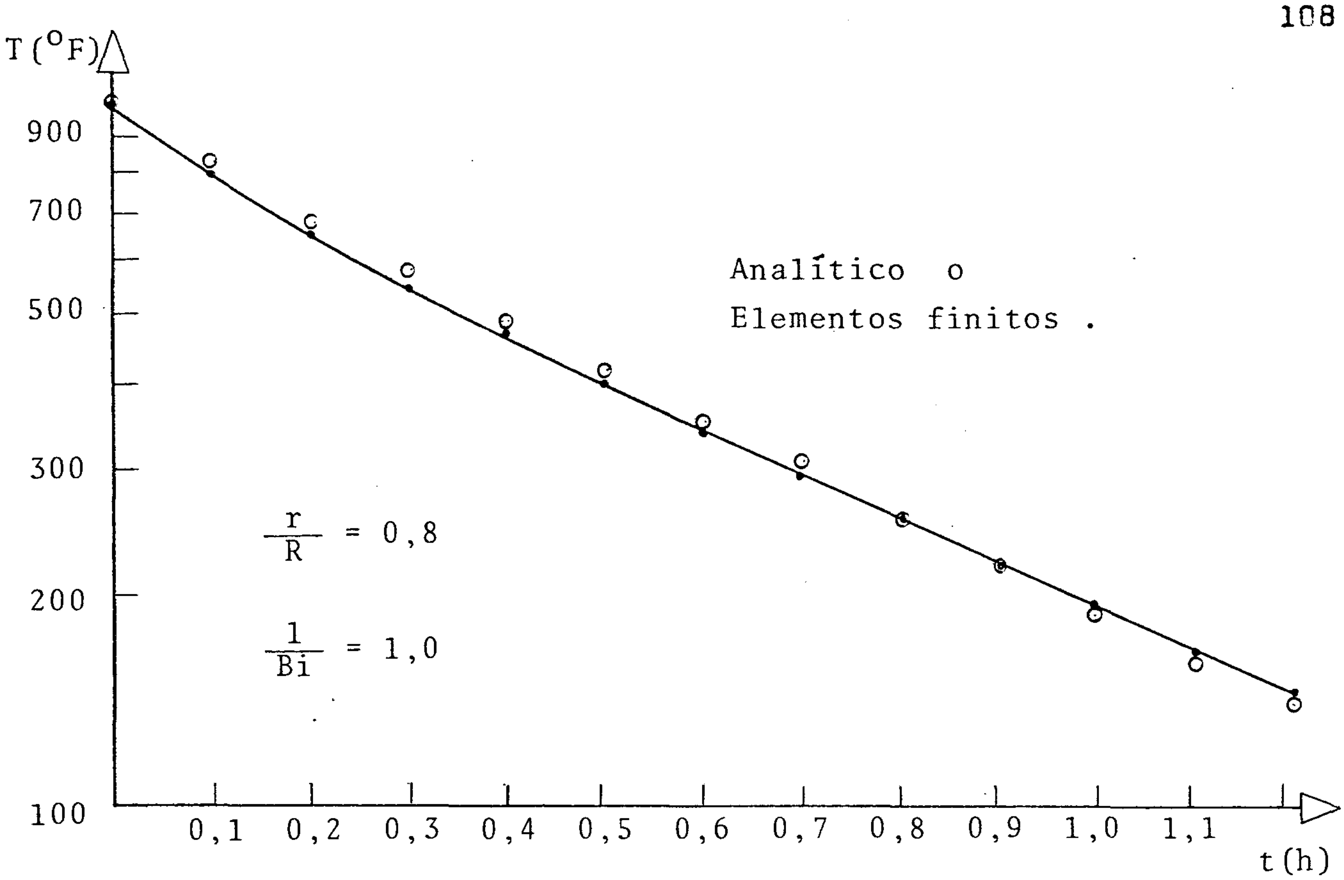


FIGURA 12 - (Continuação)



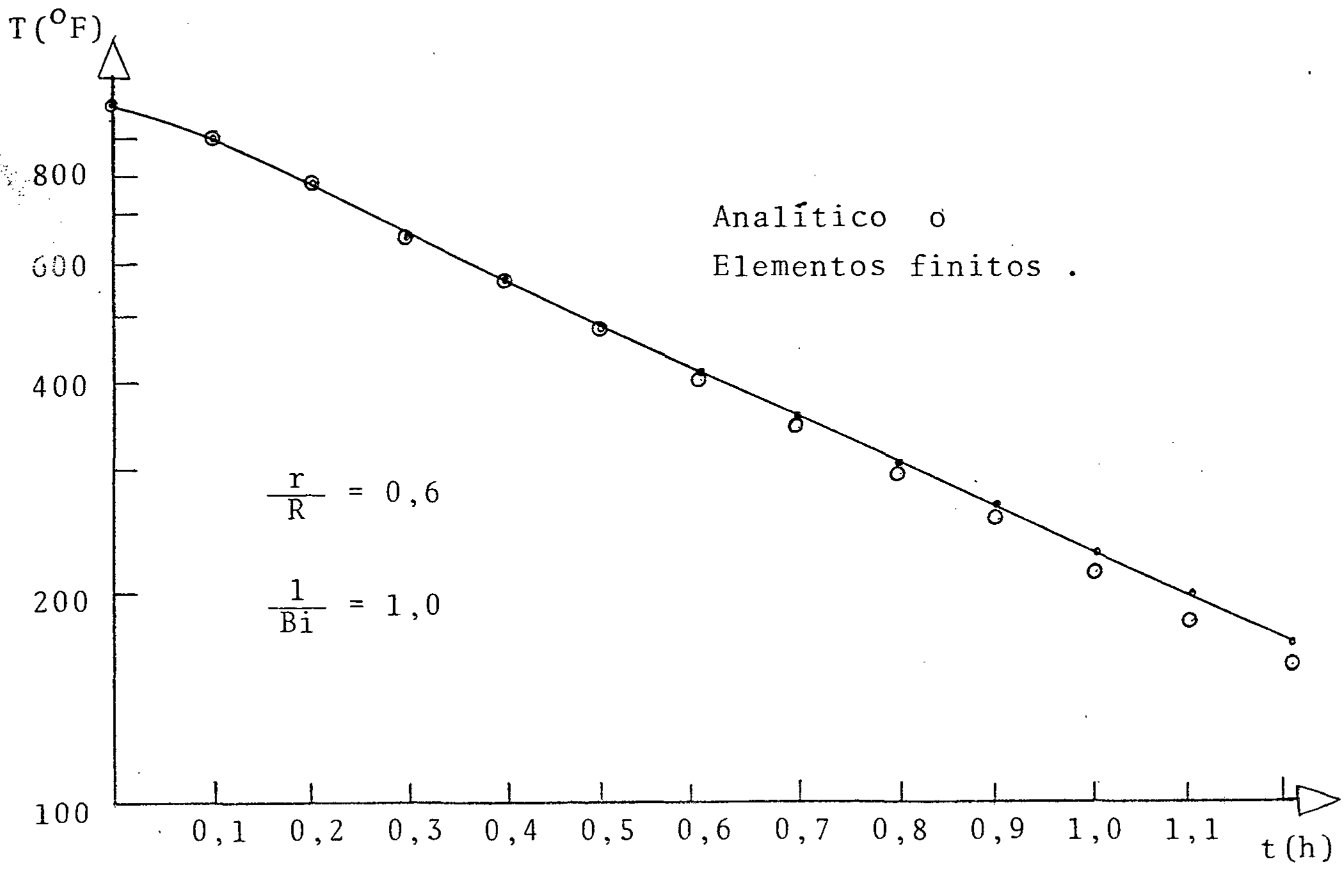


FIGURA 12 - (Continuação)

6.6 - CÁLCULO DO CAMPO DE TEMPERATURAS NA SECÇÃO RETA DE UMA PÁ DE TURBINA

6.6.1 - Descrição do problema

É analisado neste ítem o problema proposto por Livingood e Sams, apresentado por Schneider (Ref. 15, p. 162) .

O objetivo da análise é a determinação do campo de temperaturas que se estabelece na secção reta da pá de turbina a gás esquematizada na figura 13. A pá é atravessada no sentido longitudinal por dois dutos de refrigeração por onde circula água a 200 °F. Livingood e Sams estudam o problema da condução perma - nente de calor através de técnicas de relaxação .

Com o objetivo de testar o funcionamento do programa DINÂMICO em domínios de contorno irregular, foram feitas algumas alterações na proposta original, de forma a reconstituir o período que se inicia com a entrada da turbina em funcionamento e perdura até as lâminas entrarem em equilíbrio térmico, quando o campo de temperatura se estabelece de forma permanente .

Para a resolução do problema foram feitas as seguintes hipóteses simplificativas :

1. Todas as propriedades físicas são constantes e correspondem ao campo permanente de temperatura .

2. No início do transiente o campo de temperatura da pá é uniforme e igual a 200°F .

3. O início do problema se dá quando a turbina é acionada, o que provoca o estabelecimento instantâneo de uma temperatura ambiente de 2000°F .

4. A pá só troca calor com o meio por convecção, através dos dutos de refrigeração e pela superfície externa em contacto com o ambiente a 2000°F .

As constantes físicas tomadas são :

condutividade térmica $K = 15$ Btu/h-ft-°F

massa específica $\rho = 488$ lbm/ft^3

calor específico $c_p = 0,11$ Btu/lbm-°F

temperatura da água de refrigeração $T = 200$°F

temperatura ambiente $T_\infty = 2000$°F coeficiente de película $\tilde{h}$ nos tubos de

refrigeração = 2370 Btu/h-ft^2-^{o}F

O coeficiente de película na superfície externa da pá varia entre 176 e 390 Btu/h-ft^2-^{o}F conforme o ponto considerado do contorno. As dimensões do domínio e a variação de $\tilde{h}$ ao longo do contorno estão detalhadas na figura 13 .

6.6.2 - Discretização do domínio de solução

A figura 14 apresenta a malha com 165 elementos e 121 nós usada na discretização do domínio .

6.6.3 - Análise dos resultados

A duração de 0,02 horas (72 segundos) do transiente, bem como as temperaturas médias da pá nos instantes calculados estão ilustrados na figura 15. Optou-se pela apresentação dos resultados através das linhas isotérmicas indicadoras do campo de temperatura na pá em diferentes instantes do transiente, por não existir outra solução qe permita uma comparação ponto a ponto além da apresentada por Schneider (Ref. 15) sob a forma de um gráfico com as isotermas correspondentes ao campo de temperatura da pá (Fig. 28) .

A solução por elementos finitos está contida nas figuras 16 a 27 que mostram respectivamente os resultados obtidos para os instantes t = 0,0001; 0,0002; ...; 0,0009; 0,001; 0,02 h .

Comparando a figura 27 que representa o campo de temperatura permanente ná pá com o resultado proposto por Livingood e Sams na figura 28, observa-se que a distribuição e a forma das isotermas são semelhantes em ambos os casos. Porém nas regiões do contorno, em particular nos bordos de ataque e fuga, e na parte superior da pá, existem diferenças de até 100 F entre as duas soluções .

Um exame da figura 13 mostra que nas regiões onde a malha empregada por Livingood e Sams não têm flexibilidade suficiente para modelar o contorno é que se verificam as diferenças sensíveis na comparação das figuras 26 e 28 .

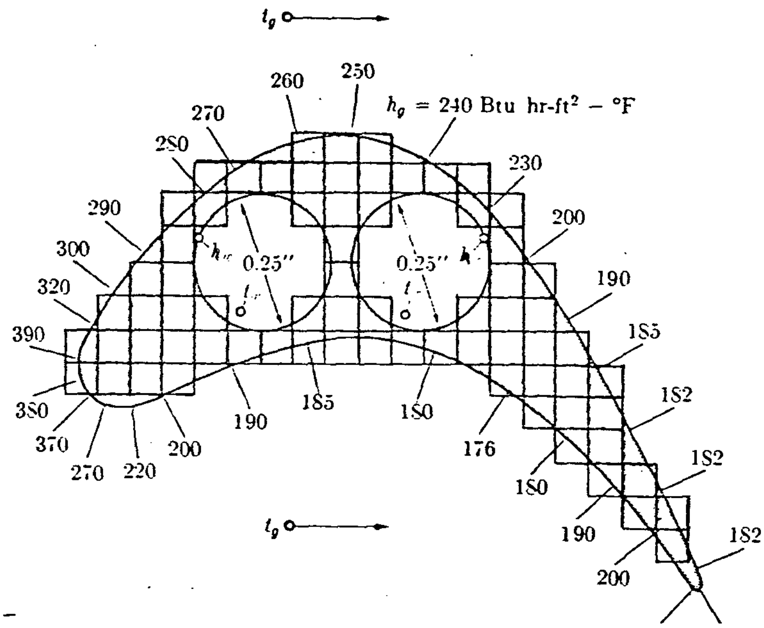


FIGURA 13. Secção reta da pá de turbina .

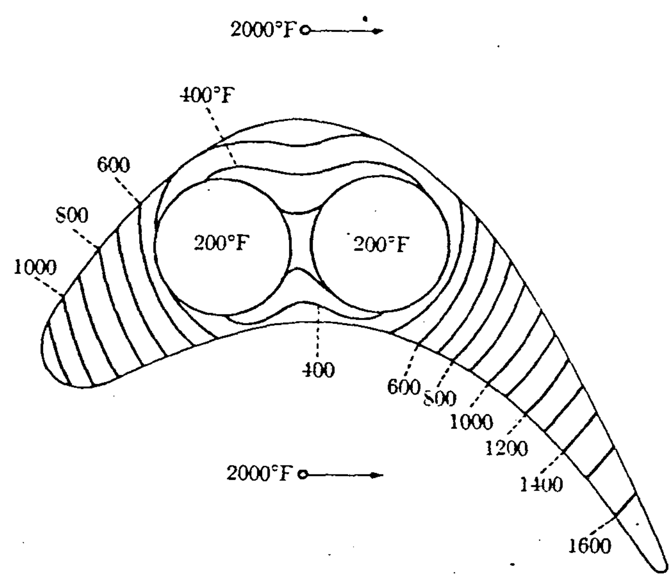


FIGURA 28. Campo permanente de temperatura segundo Livingood e Sams .

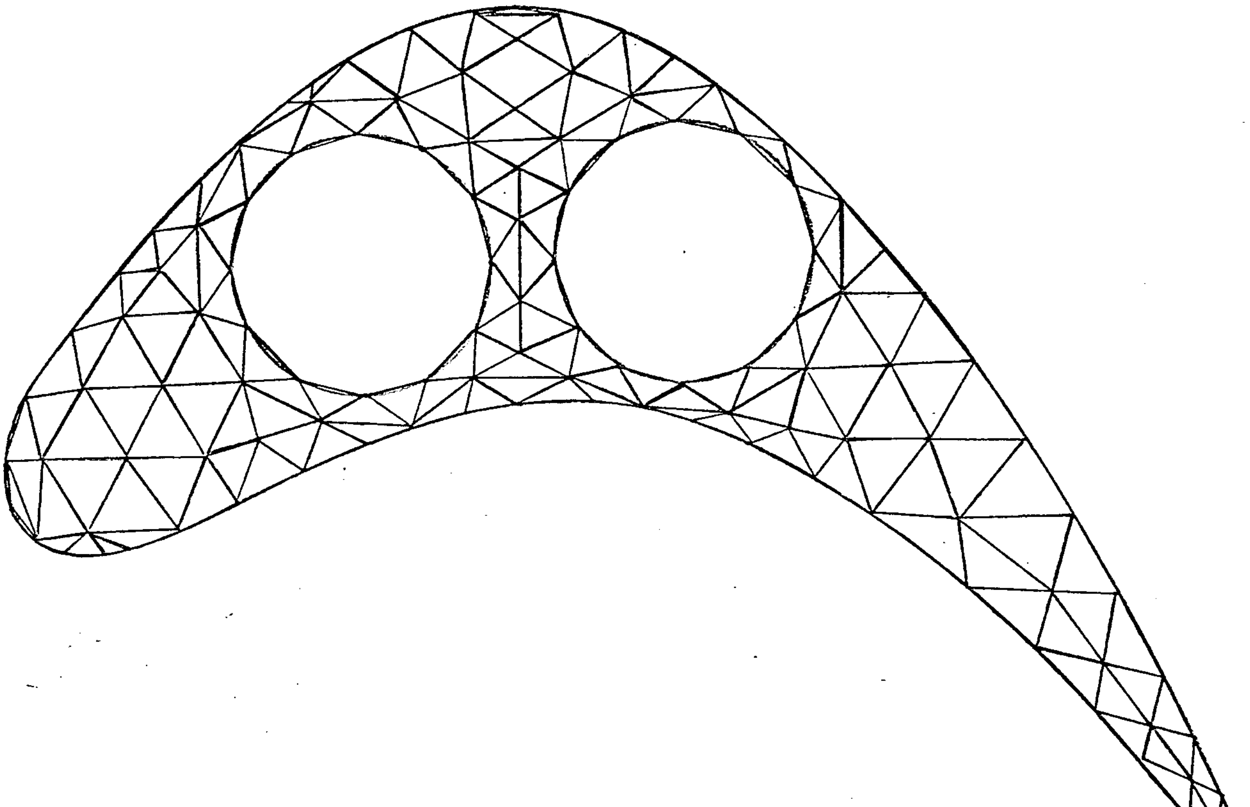


FIGURA 14. Discretização do perfil em 121 nós e 165 elementos .

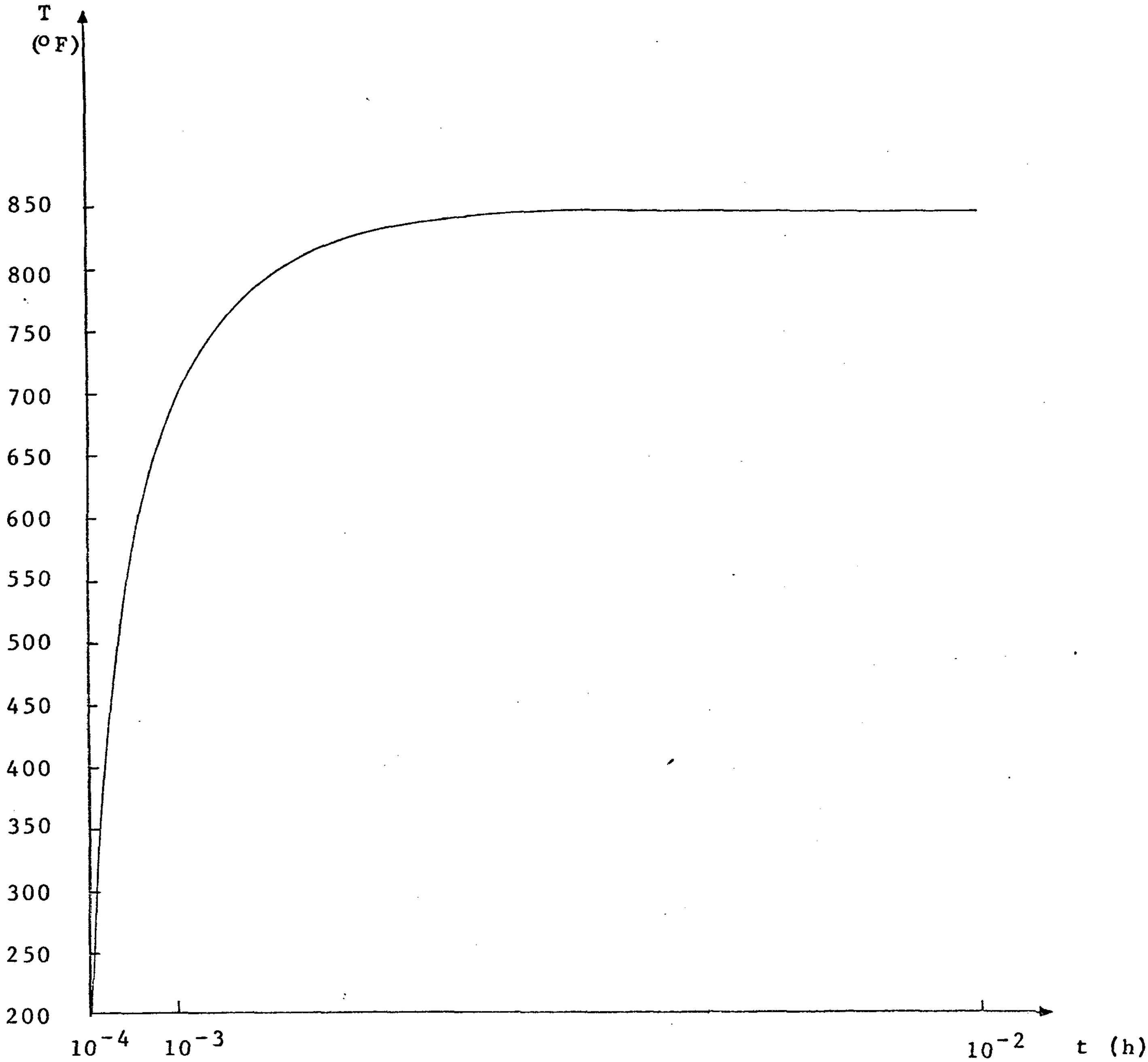


FIGURA 15. Variação da temperatura média da pá ao longo do tempo .

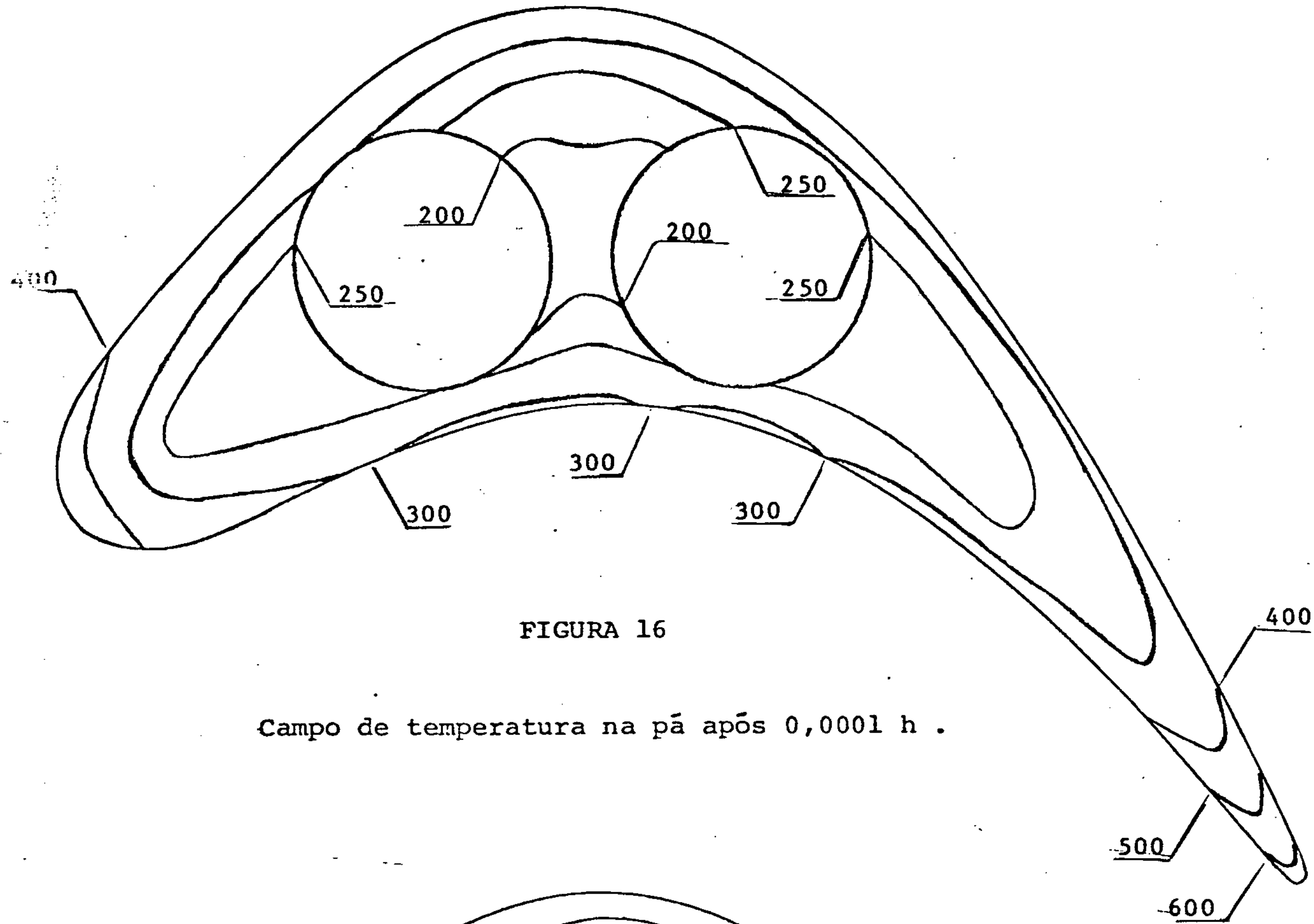


FIGURA 16

Campo de temperatura na pá após 0,0001 h .

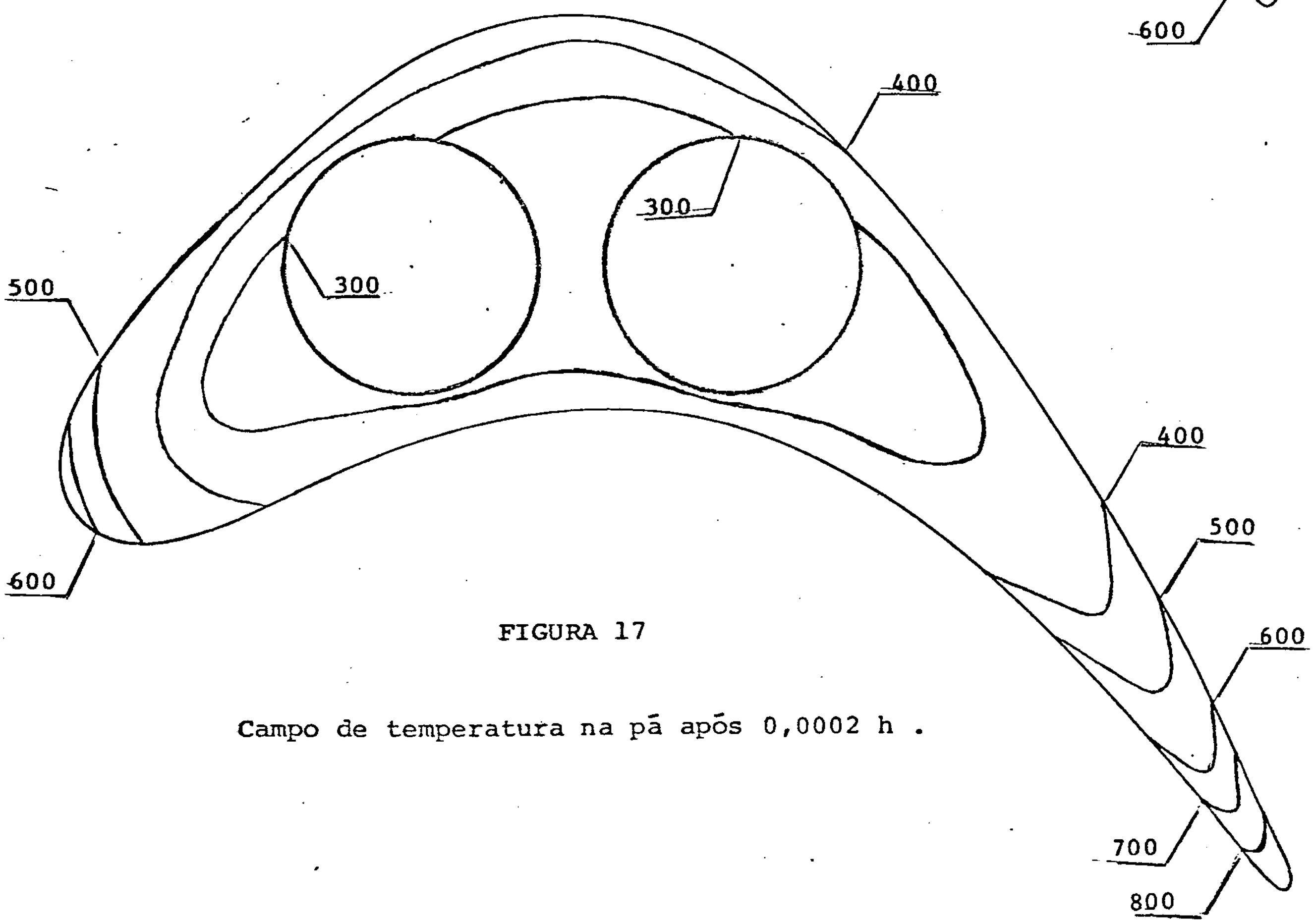


FIGURA 17

Campo de temperatura na pá após 0,0002 h .

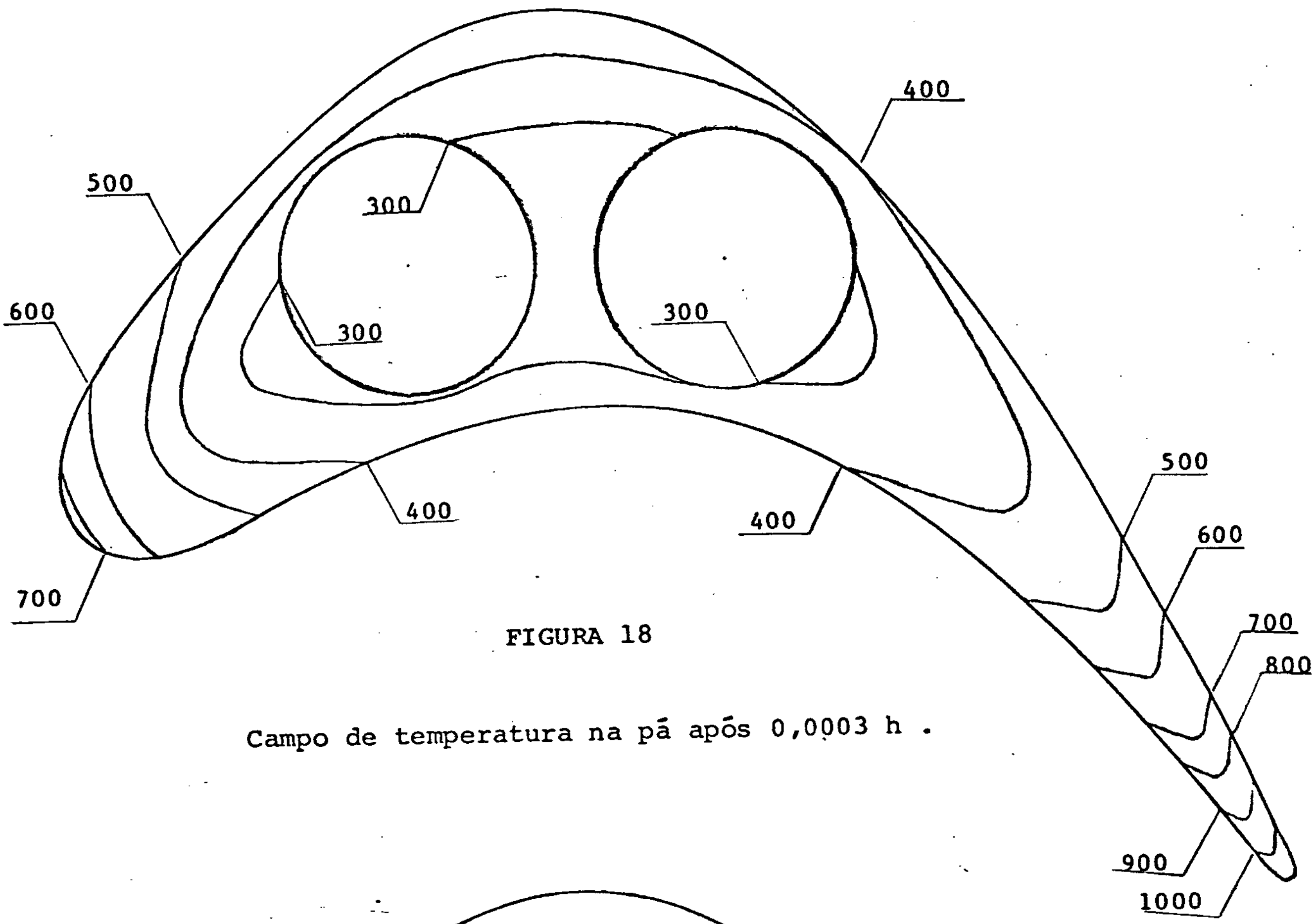


FIGURA 18

Campo de temperatura na pá após 0,0003 h .

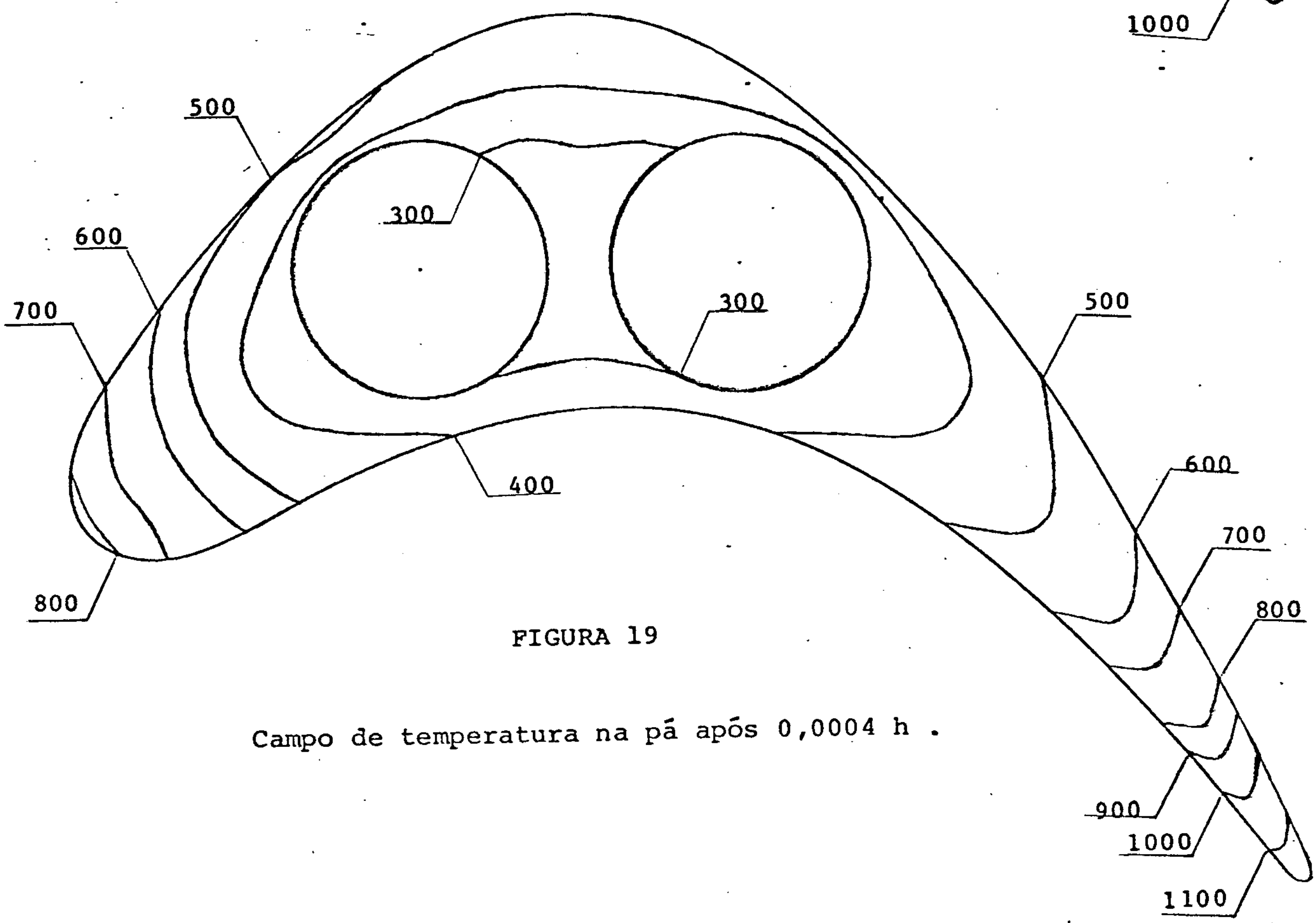


FIGURA 19

Campo de temperatura na pá após 0,0004 h .

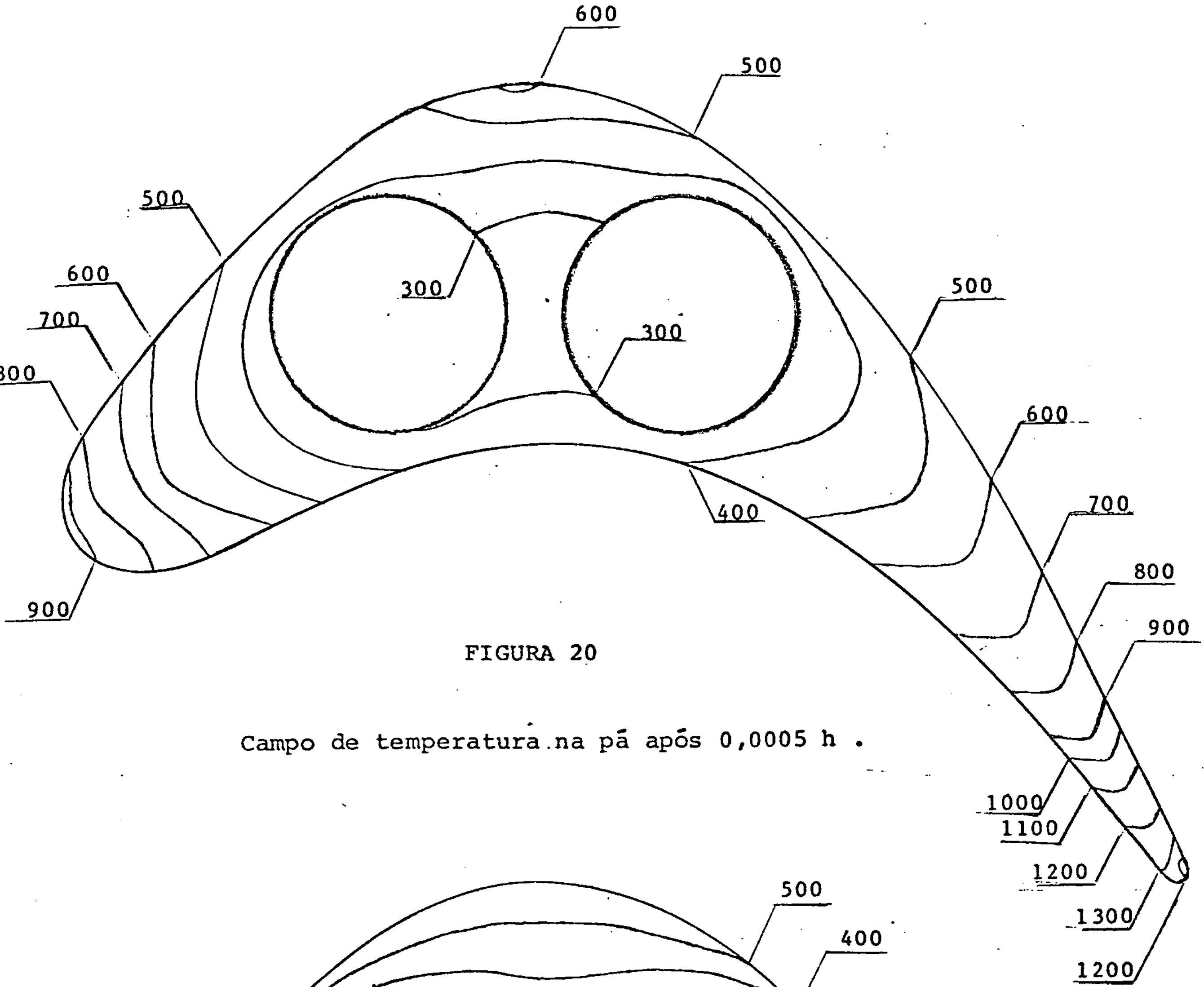


FIGURA 20

Campo de temperatura na pá após 0,0005 h .

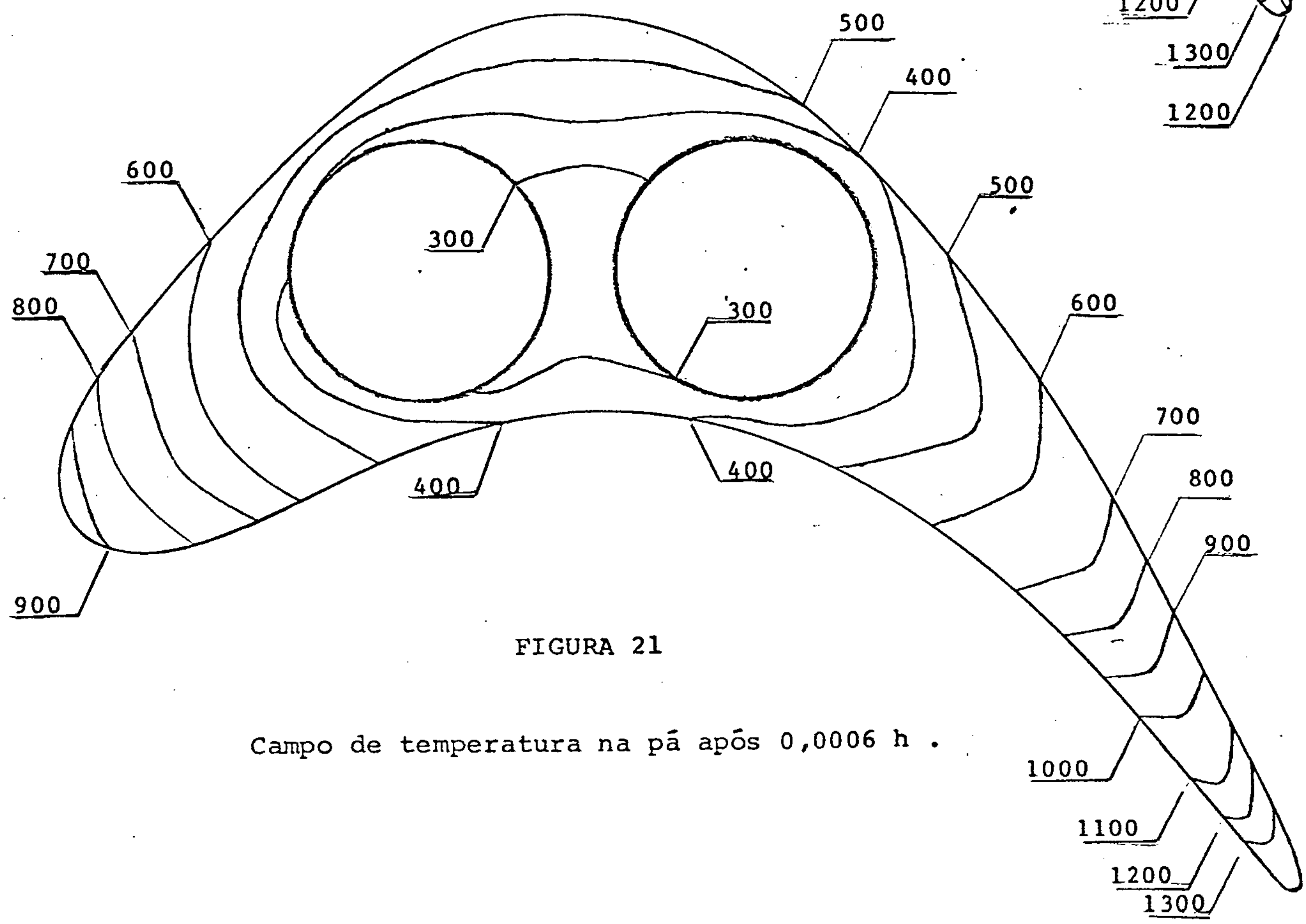


FIGURA 21

Campo de temperatura na pá após 0,0006 h .

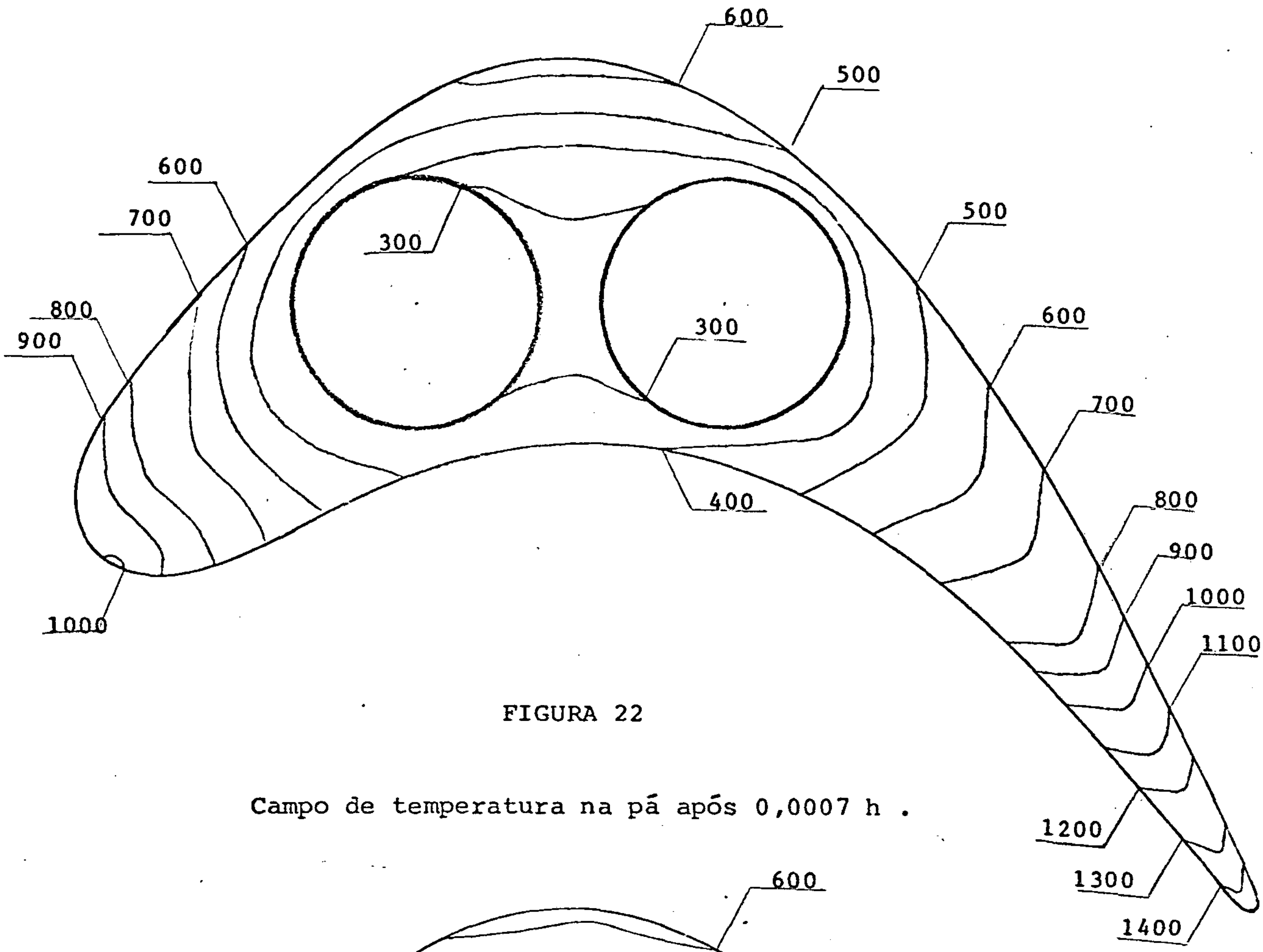


FIGURA 22

Campo de temperatura na pá após 0,0007 h .

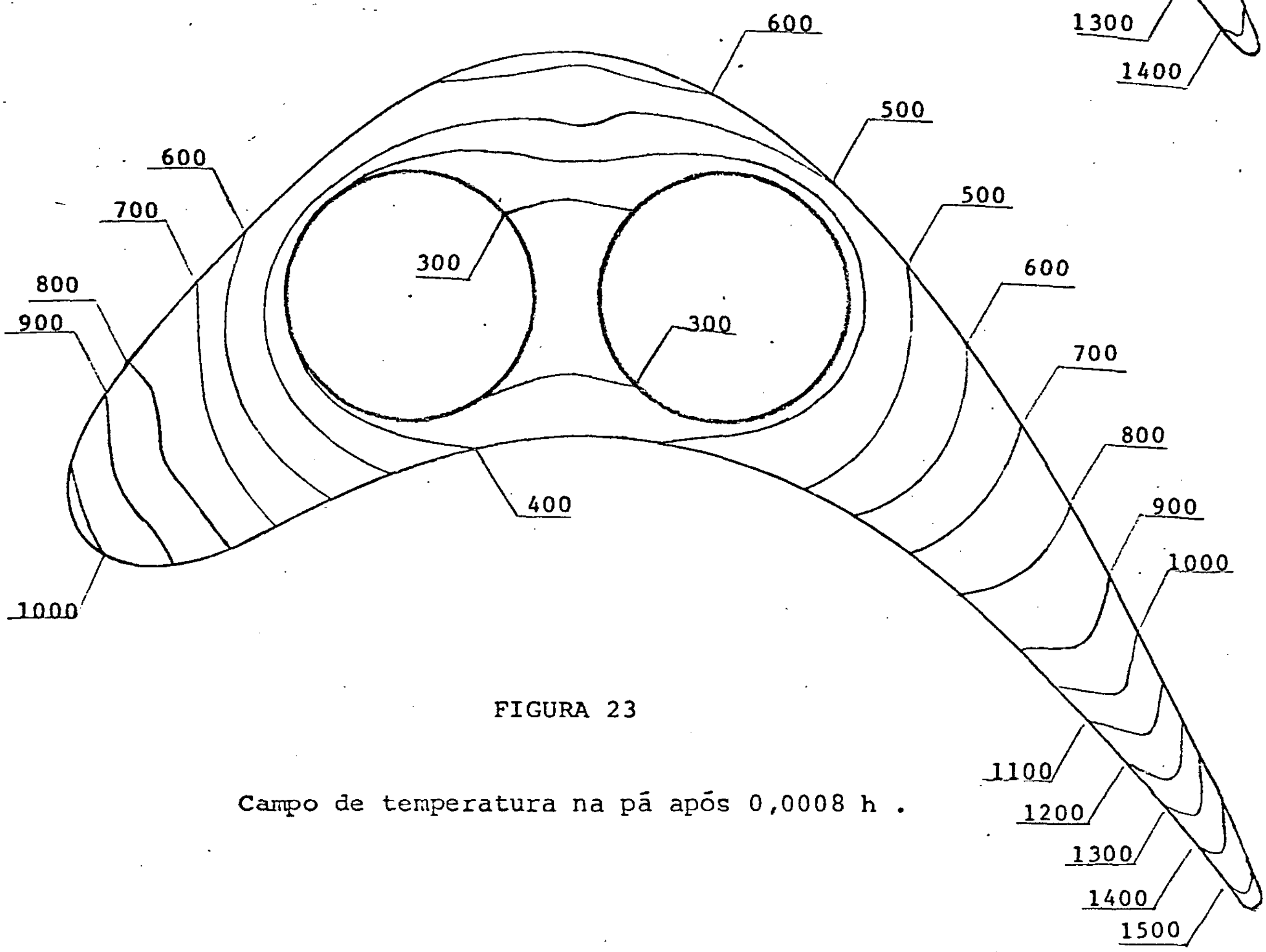


FIGURA 23

Campo de temperatura na pá após 0,0008 h .

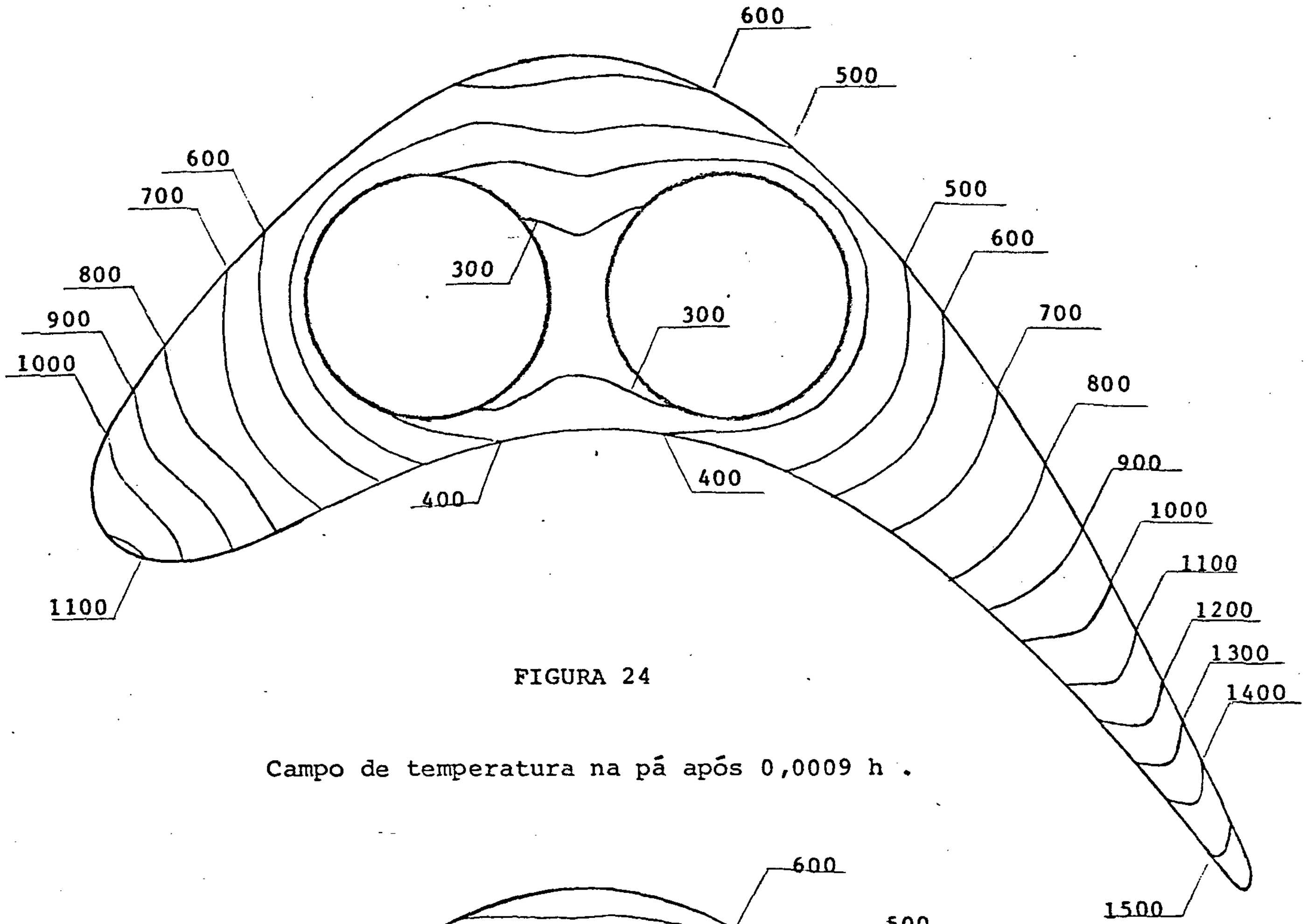


FIGURA 24

Campo de temperatura na pá após 0,0009 h .

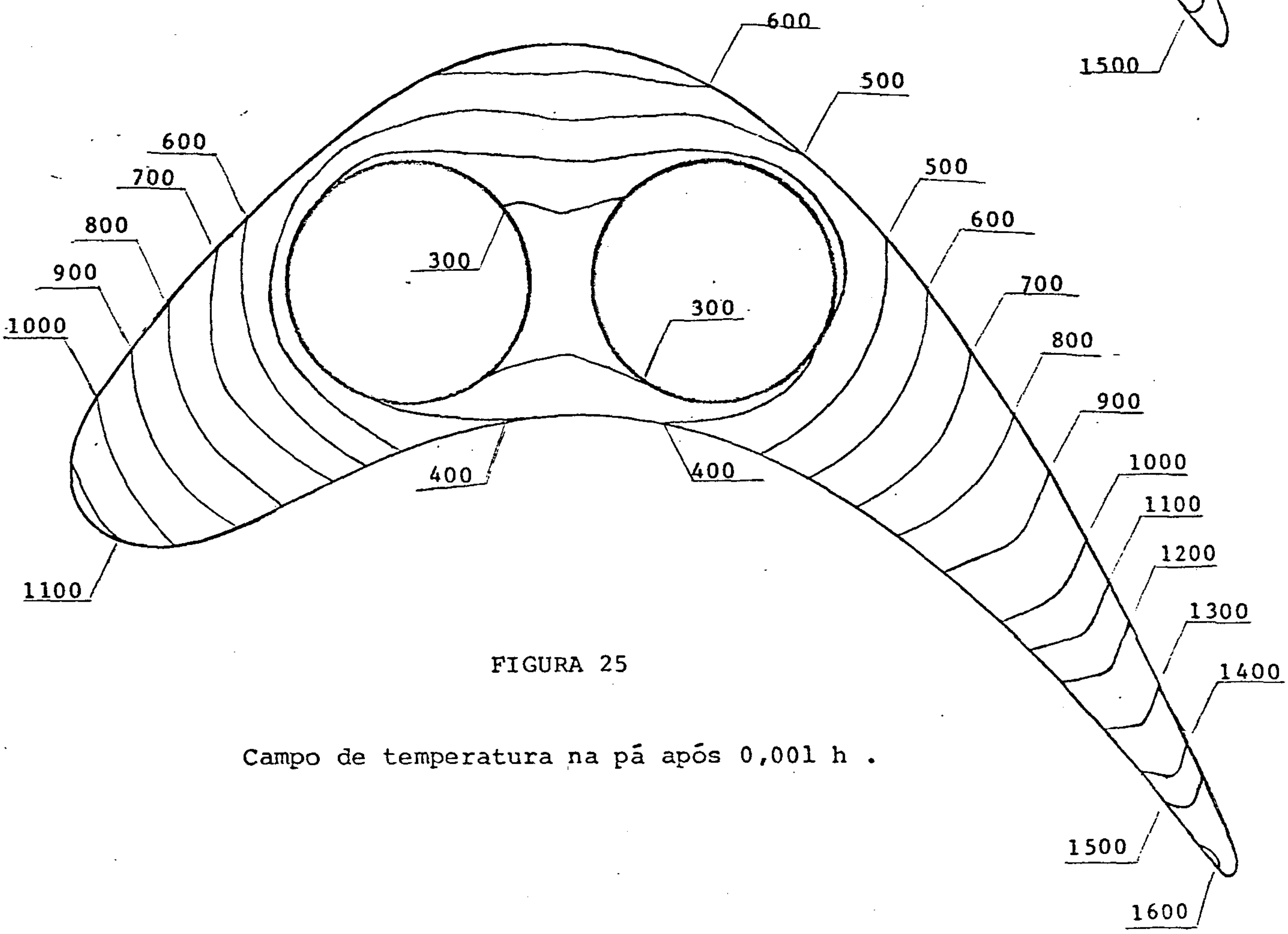


FIGURA 25

Campo de temperatura na pá após 0,001 h .

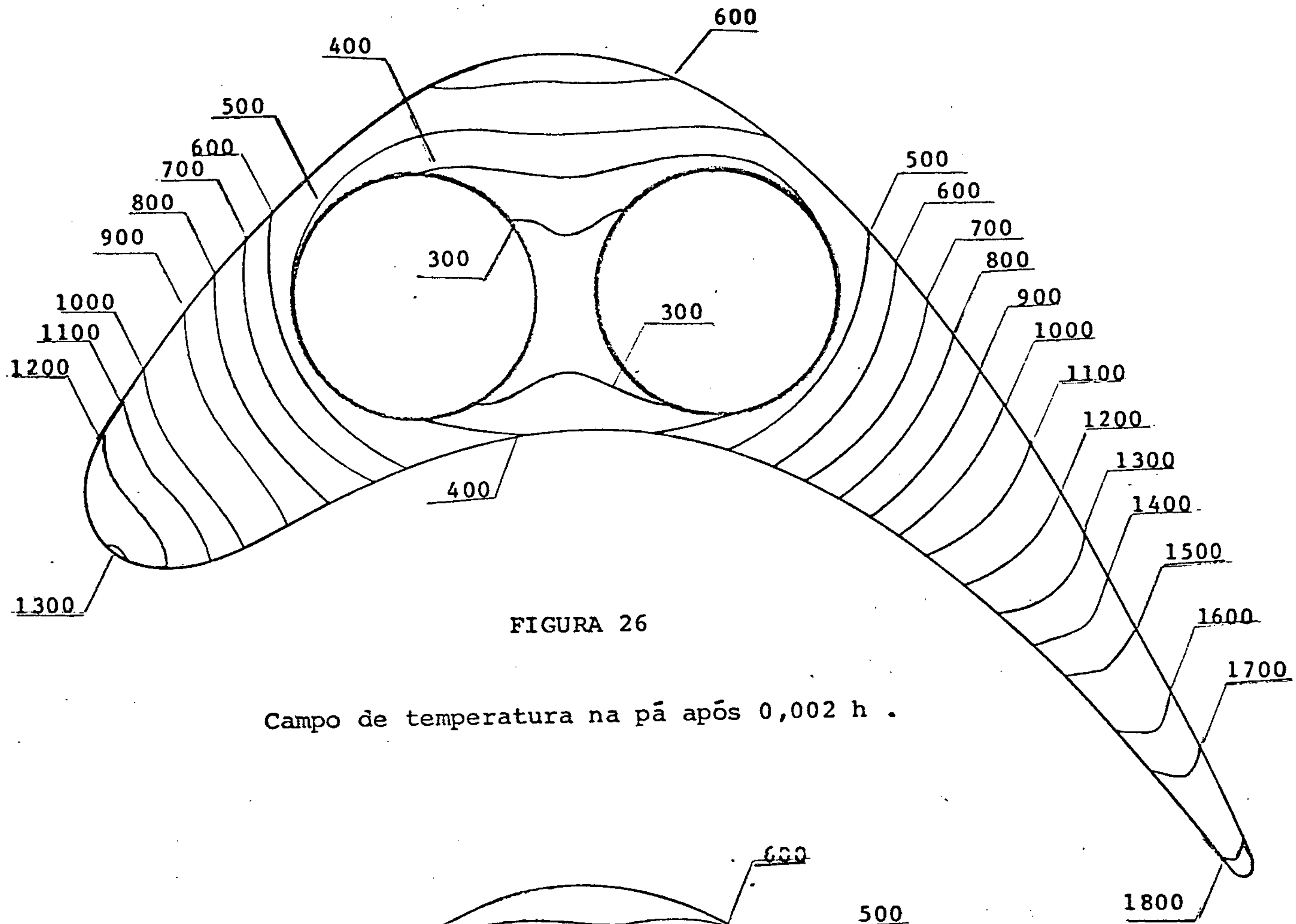


FIGURA 26

Campo de temperatura na pá após 0,002 h .

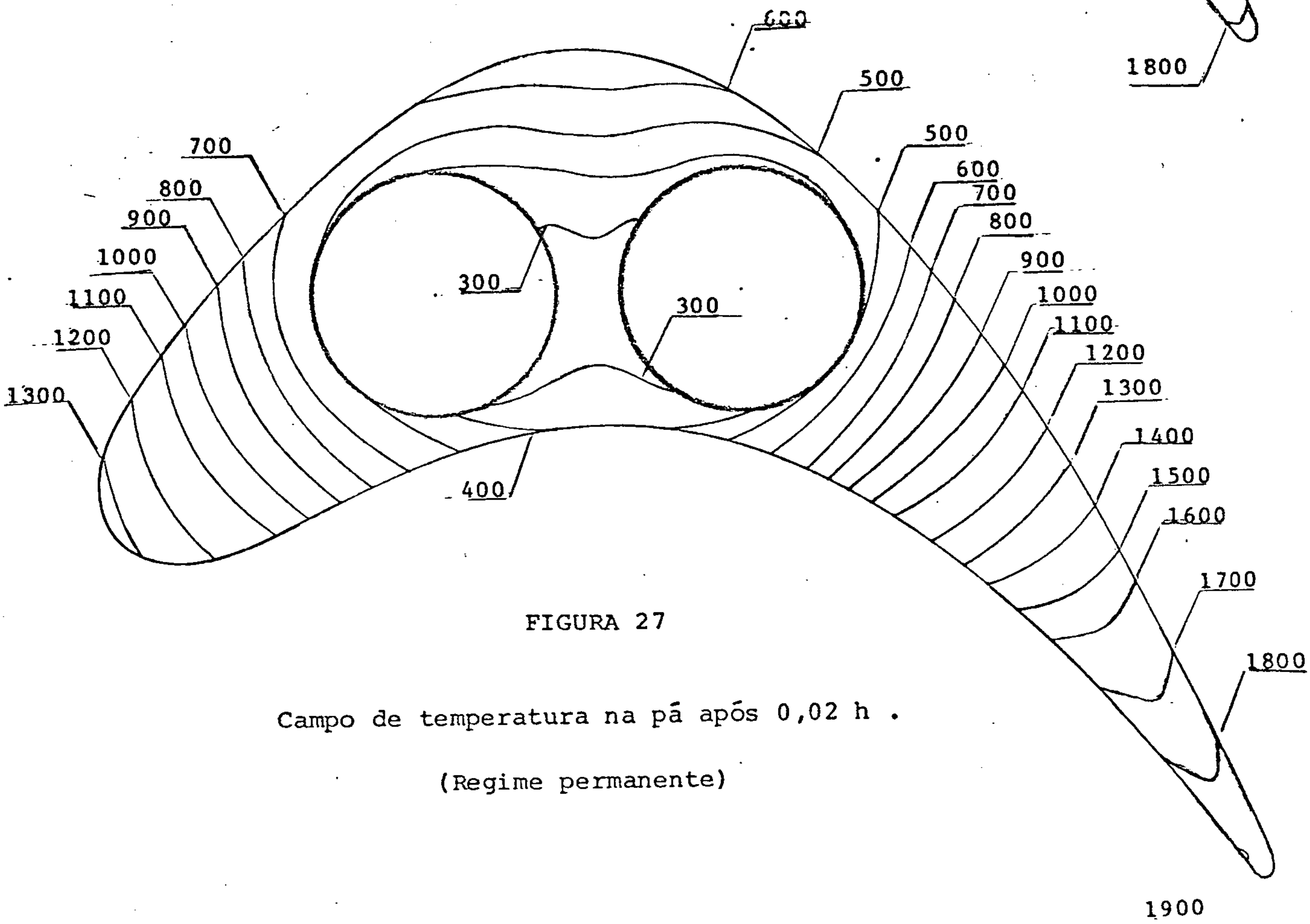


FIGURA 27

Campo de temperatura na pá após 0,02 h .

(Regime permanente)

7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.1 - O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS COMO INSTRUMENTO DE ANÁLISE TÉRMICA

O grau de precisão dos resultados obtidos e a facilidade de discretização e montagem da malha, mesmo sobre domínios heterogêneos com contorno irregular e características anisotrópicas, confirmaram plenamente a versatilidade e segurança da técnica de elementos finitos aplicada à análise térmica. Mesmo as limitações presentes no sistema criado, como a necessidade de condições de contorno constantes com o tempo ou a exigência de linearidade em problemas sob regime transiente, não são restrições inerentes ao método. Entretanto são limitações indiretas causadas pela exigência de centros de processamento de grande porte .

A utilização do método dos elementos finitos é obtida com o sacrifício da simplicidade de programação e dos baixos custos de processamento, exigindo sempre um volume de dados de entrada superior a qualquer outro processo de cálculo numérico.

É evidente que, montado o sistema, sua aplicação fica facilitada. Ainda assim não é conveniente o uso indiscriminado desta técnica, principalmente pela diferença nos custos de processamento se comparada aos métodos convencionais de cálculo numérico .

De modo geral pode ser afirmado que problemas de condução térmica com geometria regular, sejam placas retangulares ou quadradas, sólidos axissimétricos e configurações obtidas por composição de domínios com contorno regular, admitem solução mais simples e econômica, dentro dos mesmos níveis de confiabilidade , através de diferenças finitas. O campo de aplicação dos elementos finitos surge à medida que os contorno do domínio tomam formas mais complexas, impossibilitando o uso dos métodos numéricos tradicionais.

7.2 - SUGESTÕES

7.2.1 - Quanto ao elemento

Em geral, sofisticando-se o elemento por acréscimo de nós e de graus de liberdade através de funções interpoladoras de ordem mais elevada, diminui-se o número total de elementos necessários para a discretização do domínio. Porém este procedimento tem um limite além do qual o ganho obtido não compensa o trabalho exigido. Segundo Huebner (Ref. 7), elementos que necessitam funções interpoladoras com ordem superior a 3 raramente são viáveis. Dentro deste limite poderia se desenvolver um estudo comparativo do desempenho de elementos triangulares com funções de interpolação lineares, quadráticas e cúbicas (Fig. 29) estabelecendo padrões de aplicação à análise de problemas de condução de calor.

O estudo sugerido pode ainda ser ampliado de maneira a utilizar também elementos retangulares, que apesar de sua ineficiência na modelação de contornos curvos ou irregulares, apresentam facilidade de implementação de suas funções interpoladoras se comparados com elementos triangulares, especialmente nos casos quadráticos ou cúbicos. Esta ampliação pode ser feita através da montagem de um sistema que use elementos triangulares no contorno da malha deixando o espaço interno do domínio para os elementos retangulares (Fig. 30).

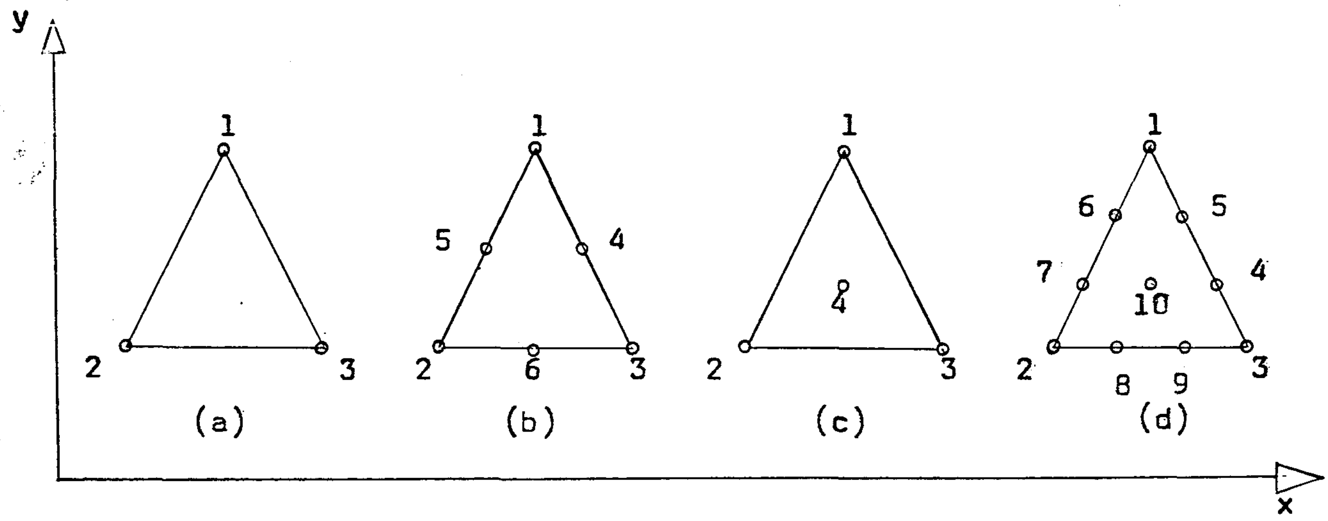


FIGURA 29. Formações clássicas dos elementos triangulares :
(a) linear com três nós. (b) quadrático com seis nós.
(c) cúbico com quatro nós. (d) cúbico com dez nós .

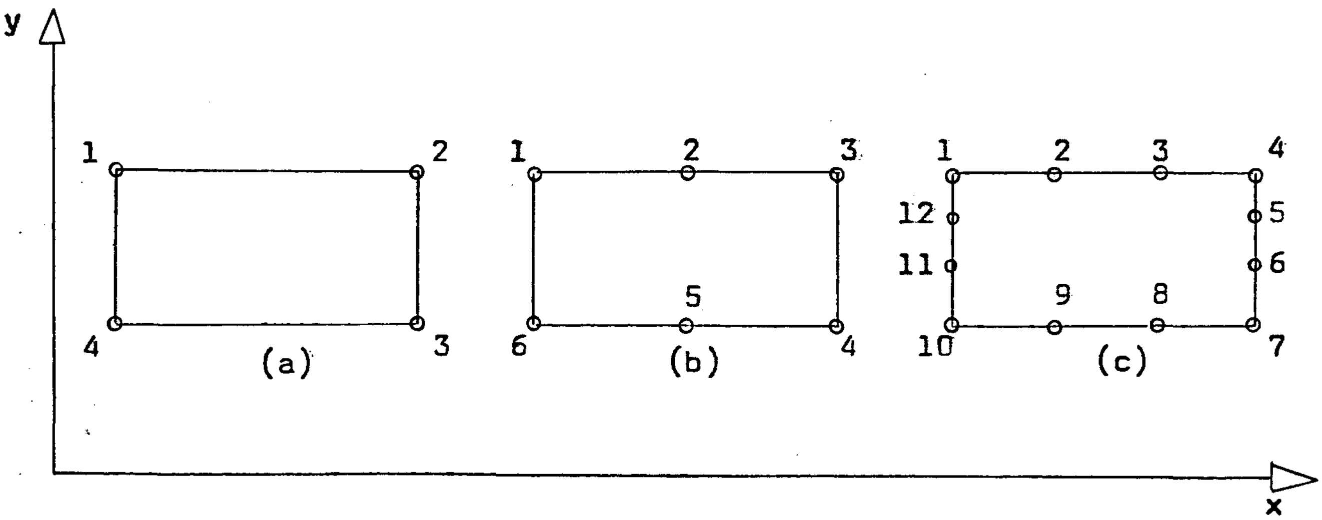


FIGURA 30. Configurações clássicas de elementos retangulares :
(a) linear com quatro nós. (b) quadrático com oito nós .
(c) cúbico com doze nós .

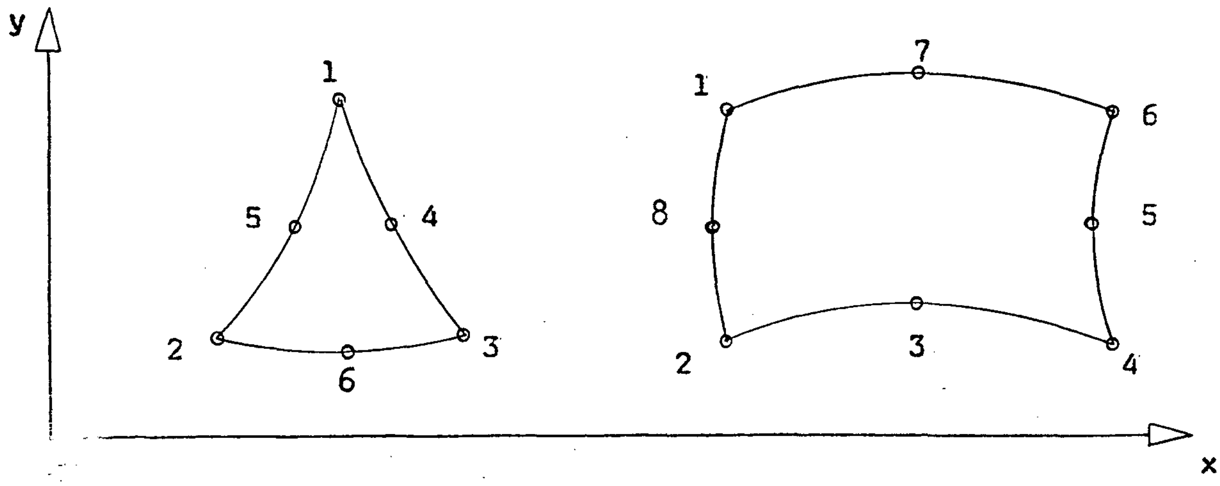


FIGURA 30a. Elementos isoparamétricos.
(a) Triangular. (b) Quadrilátero .

A última etapa deste estudo é a implementação dos elementos isoparamétricos. Tais elementos, formados por segmentos curvos, modelam perfeitamente qualquer tipo de contorno sem a necessidade de malhas refinadas. Em contrapartida, suas funções interpoladoras são mais complexas, encarecendo sua aplicação .

7.2.2 - Quanto às condições de contorno

Uma das limitações do programa DINÂMICO já mencionada, é a imposição de condições de contorno constantes com o tempo. Esta restrição pode ser eliminada com as seguintes modificações no programa :

1. O vetor carga térmica deve ser adaptado para receber os termos variáveis com o tempo .

2. Inclusão de um subprograma capaz de resolver a equação (42) correspondente ao problema com condições de contorno variáveis com o tempo .

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

(1) STOKER, J. R. . Eigenvalue solutions in finite element thermal transient problems . Third International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology. London, setembro-1975, Vol. 5, parte L .

(2) GALLAGHER, R. H. & MALLET, R. H.. Efficient solution processes for finite element analysis of transient heat conduction . ASME Journal of Heat Transfer. Agosto-1971, p. 257-263 .

(3) ALUJEVIČ, A., P. Skerget, J. C. Head & B. J. Eysink. Finite element heat conduction in reactor solids. ATKE. 1978, p. 151-153 .

(4) HURTY, W. . Dynamic analysis of structural systems using component modes. AIAA Journal. Abril-1965, Vol. 3, Nº 4 .

(5) CRAIG, R. R. & BAMPTON, M. C. . Coupling of structures for dynamic analysis. AIAA Journal. Julho-1968, Vol. 6, Nº 7 .

(6) COPPARI, L. A. & THOMAS, J. R. . Temperature decay in a composite geometry reactor vessel subjected to thermal shock: two-dimensional solution. Nuclear Engineering and Design. 1977, Nº 44, p. 211-225 .

(7) HUEBNER, Kenneth H.. The finite element method for engineers. New York, John Wiley & Sons Inc., 1975 .

(8) BATHE, Klaus J. & WILSON, Edward L. . Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1976 .

(9) WELTY, James R.. Engineering heat transfer. New York, John Wiley & Sons Inc., 1974 .

(10) ALVES, Domingos Boechat. Métodos numéricos - relatório preliminar de pesquisa. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1978 .

(11) ARPACI, Vedat S. . Conduction heat transfer. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Co., 1966 .

(12) BOELTER, L. M. K., V. H. Cherry, H. A. Johnson & R. C. Martinelli. Heat transfer notes. New York, McGraw-Hill, 1965 .

(13) KREIDER, Donald L., Robert G. Kuller & Donald R. Osterberg. Equações diferenciais . São Paulo, SP, Editora Edgard Blücher Ltda., 1972 .

(14) CARNAHAN, Brice, H. A. Luther & James O. Wilkes. Applied numerical methods. New York, John Wiley & Sons Inc., 1969.

(15) SCHNEIDER, P. J. . Conduction heat transfer. 2ª edição. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Co., 1957 .

(16) ZIENKIEWICZ, O. C. . The finite element method in engineering science. London, 1971 .

APÊNDICE 1

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA TRIDIMENSIONAL AXISSIMÉTRICO

A equação da condução de calor em sólidos heterogêneos e isotrópicos

$$\rho \; c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \; . \; (K \nabla T) + Q \tag{2}$$

sob coordenadas cilíndricas assume a forma

$$\rho \; c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \; r}(K_r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}(K_r \; T) +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial T}{\partial z}) + Q$$

Em problemas axissimétricos $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$. Logo a equação correspondente será

$$\rho \; c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \; r}(K_r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}(K_r \; T) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial T}{\partial z}) + Q$$

ou

$$r \; \rho \; c_p \frac{\partial T}{\partial t} = r \; \frac{\partial}{\partial r} \; (K_r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial r}(K_r \; T) + r \; \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial T}{\partial z}) + r \; Q$$

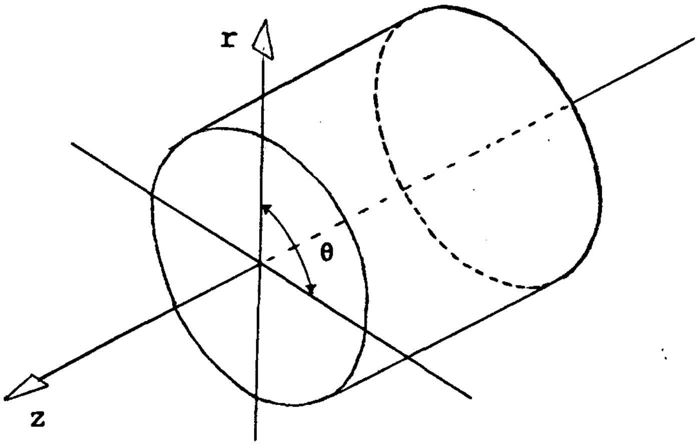


FIGURA 31. Coordenadas cilíndricas .

Reordenando convenientemente os termos obtém-se a equação

$$r\ \rho\ c_p\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}(r\ K_r\ \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}(r\ K_z\ \frac{\partial T}{\partial z}) + r\ Q \qquad (7)$$

As condições de contorno admitidas são :

1. Temperatura especificada $T = T(r,z)$.

2. Fluxo de calor especificado $r\ q$. Na fronteira do domínio se estabelece a igualdade

$$-\ q_c + r\ q = 0$$

ou

$$r\ K_r\ \frac{\partial T}{\partial r}\ n_r + r\ K_z\ \frac{\partial T}{\partial z}\ n_z + r\ q = 0$$

3. Fluxo de calor por convecção $r\,q_{\tilde{h}}$. Na fronteira do domínio se estabelece a igualdade

$$- q_c + r\,q_{\tilde{h}} = 0$$

ou

$$r\,K_r \frac{\partial T}{\partial r} n_r + r\,K_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z + r\,\tilde{h}(T - T_\infty) = 0$$

Adotou-se a convenção proposta por Arpaci (Ref. 11) para o sentido positivo e negativo dos fluxos de calor esquematizados nas figuras 32 e 33 deste apêndice .

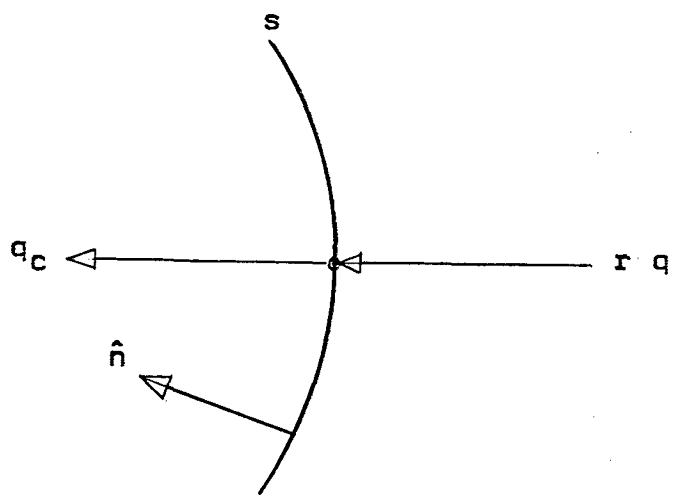


FIGURA 32. Fluxo de calor especificado $r\,q$.

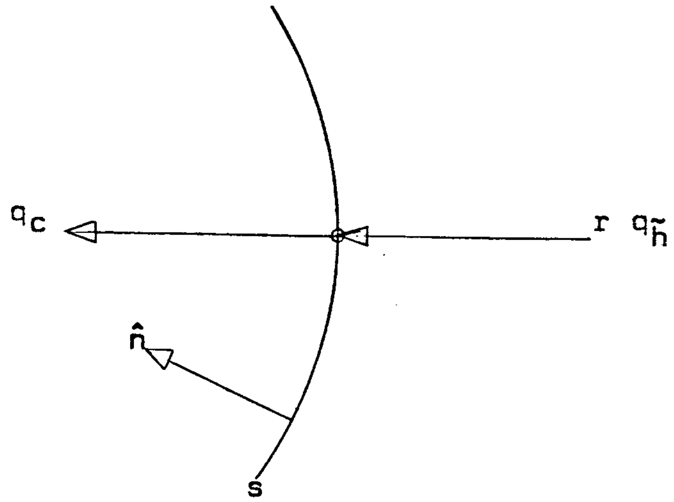


FIGURA 33. Fluxo de calor por convecção $r\ q_{\tilde{h}}$.

APÊNDICE 2

FUNÇÕES INTERPOLADORAS

O elemento usado neste trabalho é triangular com três nós distribuídos em seus vértices (Fig. 34). As funções interpoladoras são lineares, conferindo a cada nó um grau de liberdade.

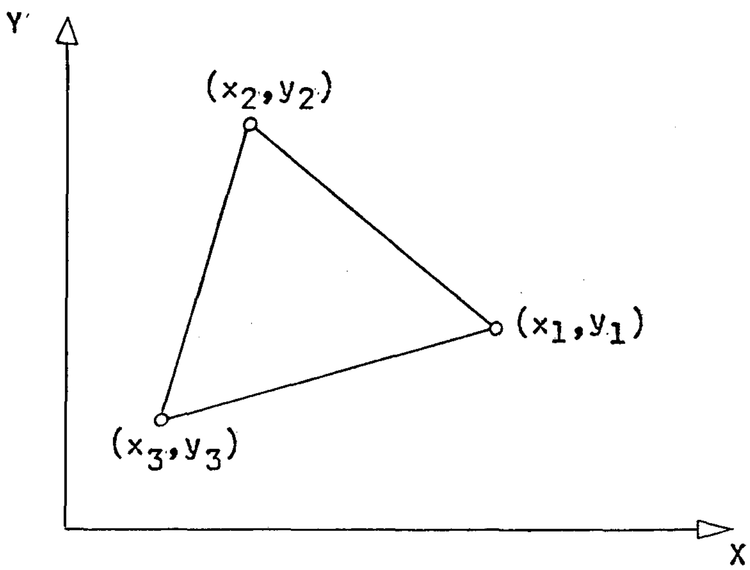


FIGURA 34 . Elemento triangular trinodal, com um grau de liberdade por nó .

Funções interpoladoras correspondentes :

$$N_1(x_1,y_1) = \frac{1}{2\Delta}(a_1 + b_1x + c_1y)$$

$$N_2(x_2,y_2) = \frac{1}{2\Delta}(a_2 + b_2x + c_2y)$$

$$N_3(x_3,y_3) = \frac{1}{2\Delta}(a_3 + b_3x + c_3y)$$

onde

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros constantes a, b, c são dados por :

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 , \qquad b_1 = y_2 - y_3 , \qquad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 , \qquad b_2 = y_3 - y_1 , \qquad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 , \qquad b_3 = y_1 - y_2 , \qquad c_3 = x_2 - x_1$$

APÊNDICE 3

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (17) A PARTIR DA EQUAÇÃO (16)

Para maior clareza separou-se a equação (16) segundo os componentes

1º) $$\iint_{D^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x}) \, dxdy \quad ,$$

2º) $$\iint_{D^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y}) \, dxdy \quad ,$$

3º) $$\iint_{D^{(e)}} N_i \, Q \, dxdy \quad ,$$

4º) $$\iint_{D^{(e)}} \rho \, c_p \, N_i \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} dxdy \quad .$$

Com base no Teorema de Green integra-se por partes o primeiro componente, de forma que

$$u = \oint_{c_4^{(e)}} N_i \, dy \qquad e \qquad du = \frac{\partial}{\partial x}\left(\oint_{c_4^{(e)}} N_i \, dy\right) dx \; ,$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x}\right) dx \qquad e \qquad v = K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \; ,$$

obtendo a igualdade

$$\iint_{D^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x}\right) dxdy = \oint_{c_4^{(e)}} K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} N_i \, dy +$$

$$- \iint_{D^{(e)}} K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dxdy = \oint_{c_4^{(e)}} K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} N_i \, n_x \, dc_4^{(e)} +$$

$$- \iint_{D^{(e)}} K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dxdy$$

onde $\quad dy = n_x \, dc_4^{(e)}$.

Repetindo o procedimento com o segundo termo de modo que

$$u = \oint_{c_4^{(e)}} N_i \, dx \qquad e \qquad du = \frac{\partial}{\partial y}\left(\oint_{c_4^{(e)}} N_i \, dx\right) dy \; ,$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y}\right) dy \qquad e \qquad v = K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \; ,$$

chega-se à igualdade

$$\iint_{D^{(e)}} Ni \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y}) \, dxdy = \oint_{C_4^{(e)}} Ky \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} N_i \, dx +$$

$$- \iint_{D^{(e)}} K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dxdy = \oint_{C_4^{(e)}} K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} N_i \, n_y \, dc_4^{(e)} +$$

$$- \iint_{D^{(e)}} K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \, dxdy$$

sendo $dx = n_y \, dc_4^{(e)}$.

Voltando à equação (16) com os novos valores obtidos para o primeiro e segundo termos obtém-se

$$\oint_{C_4^{(e)}} K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} N_i \, nx \, dc - \iint_{D^{(e)}} K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \, dxdy +$$

$$\oint_{C^{(e)}} K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} N_i \, n_y \, dc_4^{(e)} - \iint_{D^{(e)}} K \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \, dxdy +$$

$$+ \iint_{D^{(e)}} N_i \, \dot{Q}^{(e)} \, dxdy - \iint_{D^{(e)}} \rho \, c_p \, N_i \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} \, dxdy = 0$$

Para completar a passagem entre as equações (16) e (17) é suficiente um reagrupamento dos termos na forma

$$- \iint_{D^{(e)}} \left(K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y}\right) dxdy + \iint_{D^{(e)}} N_i \, Q^{(e)} dxdy +$$

$$+ \oint_{C_4^{(e)}} \left(K_x \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} n_y\right) N_i \, dc_4^{(e)} - \iint_{D^{(e)}} \rho \, c_p \, N_i \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} dxdy = 0$$

APÊNDICE 4

RESOLUÇÃO DAS INTEGRAIS (20) A (25)

1. Derivadas parciais das funções de interpolação N_i em relação a x e y .

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial b_i}{2\Delta} \qquad \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{\partial b_j}{2\Delta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial c_i}{2\Delta} \qquad \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{\partial c_j}{2\Delta} \tag{64}$$

As funções de interpolação N_i, os parâmetros constantes a_i, b_i, c_i e a área Δ do elemento estão especificados no Apêndice 1 .

2. Resolução da integral (20)

Aplicando as relações (64) e lembrando que o elemento tem uma espessura E , normalmente tomada como unitária, chega-se à integral

$$K_{tij} = \iint_{D^{(e)}} \left(K_x \frac{b_i}{2\Delta}\frac{b_j}{2\Delta} + K_y \frac{c_i}{2\Delta}\frac{c_j}{2\Delta}\right) dxdy$$

que efetuada leva à igualdade

$$K_{tij} = \frac{E}{4\Delta^2}\left(b_i\, b_j \iint_{D^{(e)}} K_x\, dxdy + c_i\, c_j \iint_{D^{(e)}} K_y dxdy\right)$$

Por serem K_x e K_y constantes no interior de um elemento, utilizando a Tabela 10 obtém-se a expressão

$$K_{tij} = \frac{E}{4\Delta}\left(K_x\, b_i\, b_j + K_y\, c_i\, c_j\right)$$

que tem a forma matricial

$$(K_t)^{(e)} = \frac{E}{4\Delta}\begin{bmatrix} K_x b_1^2 + K_y c_1^2 & K_x b_1 b_2 + K_y c_1 c_2 & K_x b_1 b_3 + K_y c_1 c_3 \\ K_x b_2 b_1 + K_y c_2 c_1 & K_x b_2^2 + K_y c_2^2 & K_x b_2 b_3 + K_y c_2 c_3 \\ K_x b_3 b_1 + K_y c_3 c_1 & K_x b_3 b_2 + K_y c_3 c_2 & K_x b_3 + K_y c_3^2 \end{bmatrix}$$

3. Resolução da integral (21)

Por ser Q constante no interior do elemento e pela aplicação direta da Tabela 11, obtém-se $Q_i = \frac{\Delta Q}{3}$. Considerando que a geração interna de calor Q expressa por seus valores nodais tem a forma $Q = Q_1N_1 + Q_2N_2 + Q_3N_3$, a integral (21) pode ser escrita como

$$Q_i = \iint_{D^{(e)}} (Q_1N_1 + Q_2N_2 + Q_3N_3)\ N_i\ dxdy \qquad (65)$$

Submetendo a integral (65) à Tabela 11 e colocando-a diretamente em sua forma matricial chega-se a

$$\{Q\}^{(e)} = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

4. Resolução da integral (22)

Esta integral é específica para os elementos que pertencem ao contorno do domínio (Fig. 35). Se os nós i e j do elemento em estudo estiverem situados na fronteira onde exista fluxo de calor constante q especificado, de acordo com a Tabela 10 chega-se à expressão

$$q_i = q\,\frac{\ell_{ij}}{2}\ , \qquad \text{sendo}\quad \ell_{ij} = (\ (x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\ )^{\frac{1}{2}}$$

que tem a forma matricial

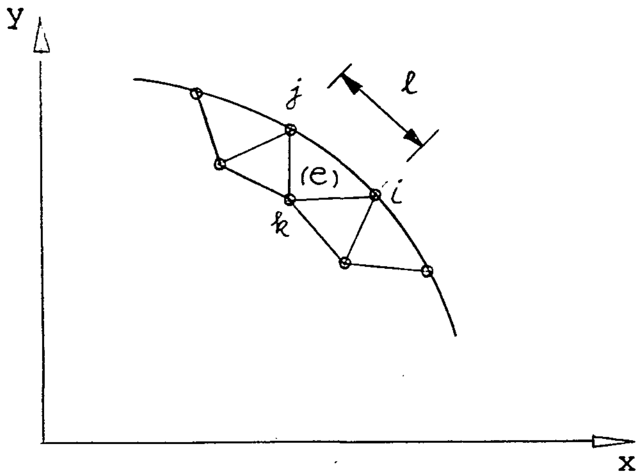


FIG. 35. Elemento do contorno no qual há condução ou convecção especificada.

$$\{q\}^{(e)} = q \frac{\ell_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se hover fluxo de calor especificado nos elementos internos do domínio, a matriz influência que traduzirá este fato será

$$\{q\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

5. Resolução da integral (23)

Este termo é específico para elementos localizados no contorno do domínio. Supõe-se que o coeficiente de transmissão convectiva de calor $\tilde{h}$ seja constante ao longo do segmento de contorno analisado .

Para resolver esta integral é conveniente colocá-la em sua forma matricial

$$(\tilde{h})^{(e)} = \tilde{h} \int_{c_3^{(e)}} \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k \\ N_jN_i & N_jN_j & N_jN_k \\ N_kN_i & N_kN_j & N_kN_k \end{bmatrix} dc_3^{(e)}$$

onde os valores da função de interpolação N_k, associada a um nó interno, são nulos por tratar-se de um fenômeno que ocorre apenas no contorno do domínio. De acordo com a Tabela 10 chega-se a

$$(\tilde{h})^{(e)} = \tilde{h}\ \ell_{ij} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Resolução da integral (26)

De maneira análoga à integral (22) obtém-se

$$(T\infty)^{(e)} = \tilde{h}\ T\infty \frac{\ell_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

7. Resolução da integral (25)

Supondo o calor específico c_p e a massa específica ρ constantes, a integral (25) tem a forma matricial

$$(K_c)^{(e)} = c_p \iint_{D^{(e)}} \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k \\ N_jN_i & N_jN_j & N_jN_k \\ N_kN_i & N_kN_j & N_kN_k \end{bmatrix} dxdy$$

De acordo com os resultados fornecidos pela Tabela 11 para integrais de superfície tem-se

$$(K_c)^{(e)} = c_p \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

TABELA 10

Integrais de linha

$$\ell_{\alpha\beta} = \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} N_1^{\alpha}\, N_2^{\beta}\, dx = \frac{A}{B}$$

$\alpha+\beta$	α	β	A	B
0	0	0	1	1
1	1	0	1	2
2	2	0	2	6
2	1	1	1	6
3	3	0	3	12
3	2	1	1	12
4	4	0	12	60
4	3	1	3	60
4	2	2	2	60
5	5	0	10	60
5	4	1	2	60
5	3	2	1	60
6	6	0	60	420
6	5	1	10	420
6	4	2	4	420
6	3	3	3	420

Fórmula de recorrência :

$$\int_{x_1}^{x_2} \ell_1^{\alpha}\, \ell_2^{\beta} = \frac{\alpha!\,\beta!\,(x_2-x_1)}{(\alpha+\beta+1)!}$$

TABELA 11

Integrais de superfície

$$\ell\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2\Delta}\iint_{D^{(e)}} N_1^{\alpha}\, N_2^{\beta}\, N_3^{\gamma}\, dxdy = \frac{A}{B}$$

$\alpha+\beta+\gamma$	α	β	γ	A	B
0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	3
2	2	0	0	2	12
2	1	1	0	1	12
3	3	0	0	3	60
3	2	1	0	2	60
3	1	1	1	1	60
4	4	0	0	12	180
4	3	1	0	3	180
4	2	2	0	2	180
4	2	1	1	1	180
5	5	0	0	60	1260
5	4	1	0	12	1260
5	3	2	0	6	1260
5	3	1	1	3	1260
5	2	2	1	2	1260
6	6	0	0	180	5040
6	5	1	0	30	5040
6	4	2	0	12	5040
6	4	1	1	6	5040
6	3	3	0	9	5040
6	3	2	1	3	5040
6	2	2	2	1	5040

Fórmula de recorrência :

$$\iint_{D^{(e)}} N_1^{\alpha}\, N_2^{\beta}\, N_3^{\gamma}\, dxdy = \frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\ +\ +\ +2)!}\, 2\Delta$$

APÊNDICE 5

TRANSFORMAÇÃO DAS MATRIZES DO ELEMENTO BIDIMENSIONAL PARA O ELEMENTO TRIDIMENSIONAL AXISSIMÉTRICO

A diferença fundamental entre as equações dos casos tridimensional axissimétrico e bidimensional tem origem no fato de as equações diferenciais do problema bidimensional serem integradas sobre a superfície do elemento, enquanto no tridimensional as equações são integradas sobre o volume do elemento .

Através do sub-índice T como indicador de variáveis tridimensionais e do sub-índice B para os termos bidimensionais, serão resumidas as transformações necessárias à formulação tridimensional .

Considerando inicialmente as dimensões x e y substituídas respectivamente por r e z, são feitas as seguintes substituições :

1. Funções interpoladoras do problema tridimensional

$$N_i(r,z) = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i r + c_i z) \ , \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \ .$$

2. A transformação de integrais planas (bidimensionais) em integrais de volume se inicia com a substituição da área do elemento plano (dxdy), pelo volume do elemento tridimensional $(2\pi\bar{r}\,drdz)$ onde $\bar{r}$ é o raio médio do elemento considerado,

$$\bar{r} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$

com r_1, r_2, r_3 representando os raios dos nós 1, 2 e 3 do elemento. Esta simplificação introduzirá um erro apreciável para os elementos mais próximos do eixo z .

3. Transformação de condutividade térmica K e do produto $\rho\ c_p$

$$K_T = (\bar{r}\ K)_B$$

$$(\rho\ c_p)_T = (\bar{r}\ \rho\ c_p)_B$$

4. Transformação da matriz condutividade térmica

$$(K_k)_T^{(e)} = 2\pi\bar{r}^2(K_K)_B^{(e)}$$

Supõe-se $\bar{r}\ K$ constante no interior do elemento .

5. Transformação da matriz condutância térmica

$$(K_t)_T^{(e)} = 2\,\pi\,\bar{r}\,(K_t)_B^{(e)}$$

Supõe-se $\bar{r}\ \rho\ c_p$ constante no interior do elemento.

6. Substituição dos termos representados por integrais de superfície (Apêndice 4)

$$(\ell_{ij})_T = 2\,\pi\,\bar{r}_{ij}(\ell_{ij})_B$$

onde $\bar{r}_{ij} = \frac{1}{2}\,(r_i + r_j)$

7. Transformação da matriz geração interna de calor (Apêndice 4)

$$(Q_i)_T = \bar{r}\,Q \int_r \int_z N_i\ 2\,\pi\,r\,dA$$

onde $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$

A resolução desta integral é baseada nos estudos de Zienkiewicz (Ref. 7) segundo a relação

$$Q_i = \bar{r}\,Q\,\pi\,(a_i\,\bar{r} + b_i\,\bar{r}^2 + \frac{b_i}{12}(\tilde{r}_1^2 + \tilde{r}_2^2 + \tilde{r}_3^2) +$$

$$+ c_i\,\bar{r}\,\bar{z} + \frac{c_i}{12}\,(\tilde{r}_1\,\tilde{z}_1 + \tilde{r}_2\,\tilde{z}_2 + \tilde{r}_3\,\tilde{z}_3)\,)$$

onde

$$\tilde{z}_i = z_i - \bar{z} \quad , \qquad \bar{z} = \frac{1}{3}\,(z_1 + z_2 + z_3) \quad e \quad \tilde{r}_i = r_i - \bar{r}$$

APÊNDICE 6

SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO (42)

$$z_i = (CI + \int_0^t (-\frac{f_i}{\lambda_i}) \exp(\int_0^\tau \frac{d\alpha}{\lambda_i}) d\tau) \exp(- \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda_i}) \qquad (42)$$

Sendo os termos f_i e λ_i constantes em relação à variável t, são possíveis as igualdades

1) $$\int_0^\tau \frac{d\tau}{\lambda_i} = \int_0^t \frac{dt}{\lambda_i} = \frac{t}{\lambda_i}$$

2) $$\exp(\int_0^t \frac{dt}{\lambda_i}) = \exp(\frac{t}{\lambda_i})$$

3) $$\int_0^t - \frac{f_i}{\lambda_i} \exp(\int_0^\tau \frac{d\tau}{\lambda_i}) dt = - f_i \ (\exp(\frac{t}{\lambda_i}) - 1)$$

Introduzindo na relação (42) as conclusões dos ítens 1, 2 e 3 :

$$z_i = CI \exp(\frac{-t}{\lambda_i}) - f_i (\exp(\frac{t}{\lambda_i}) - 1) \exp(\frac{-t}{\lambda_i})$$

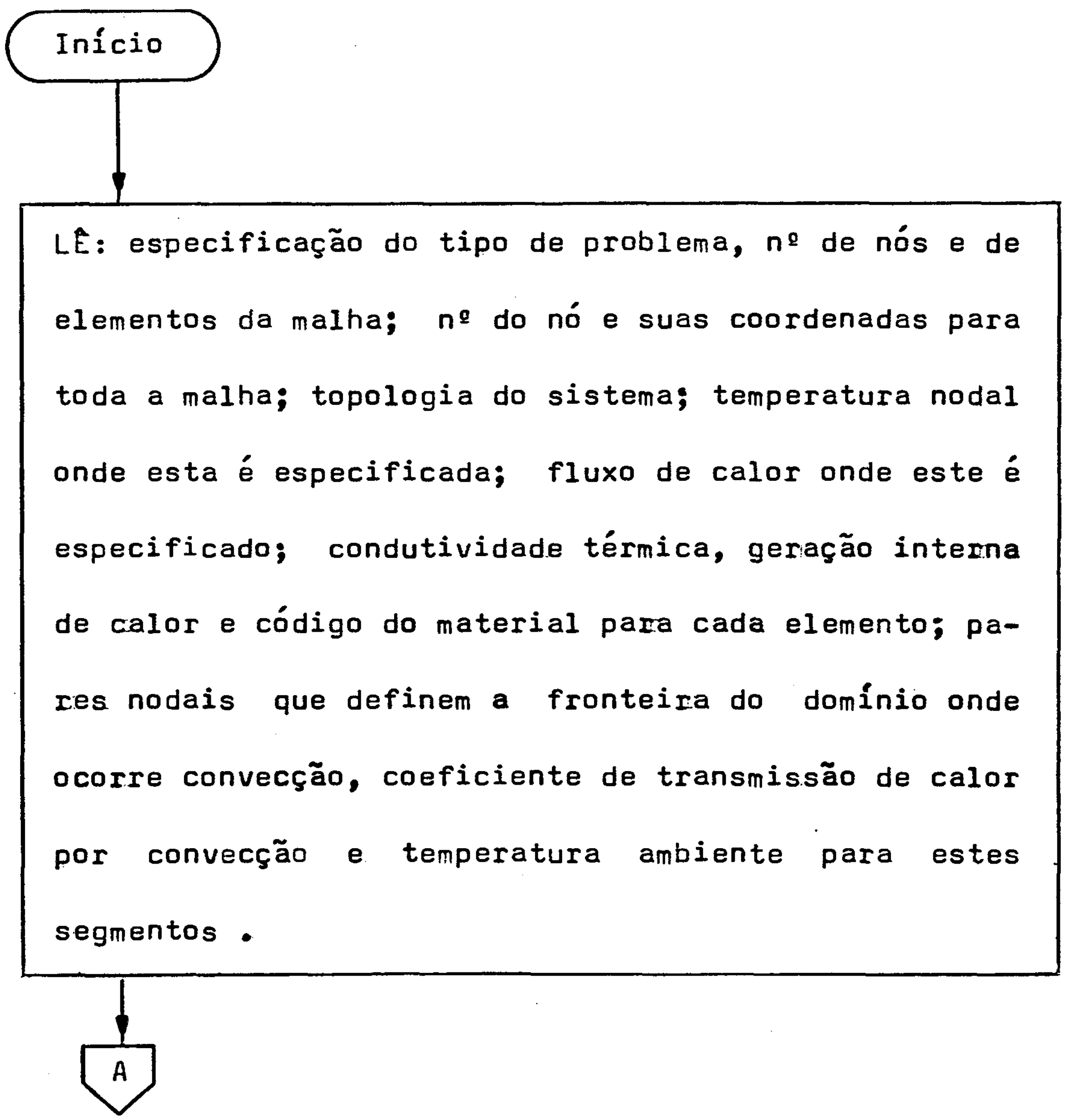
Efetuando-se os produtos indicados e as simplificações possíveis, obtém-se a forma final da relação (42)

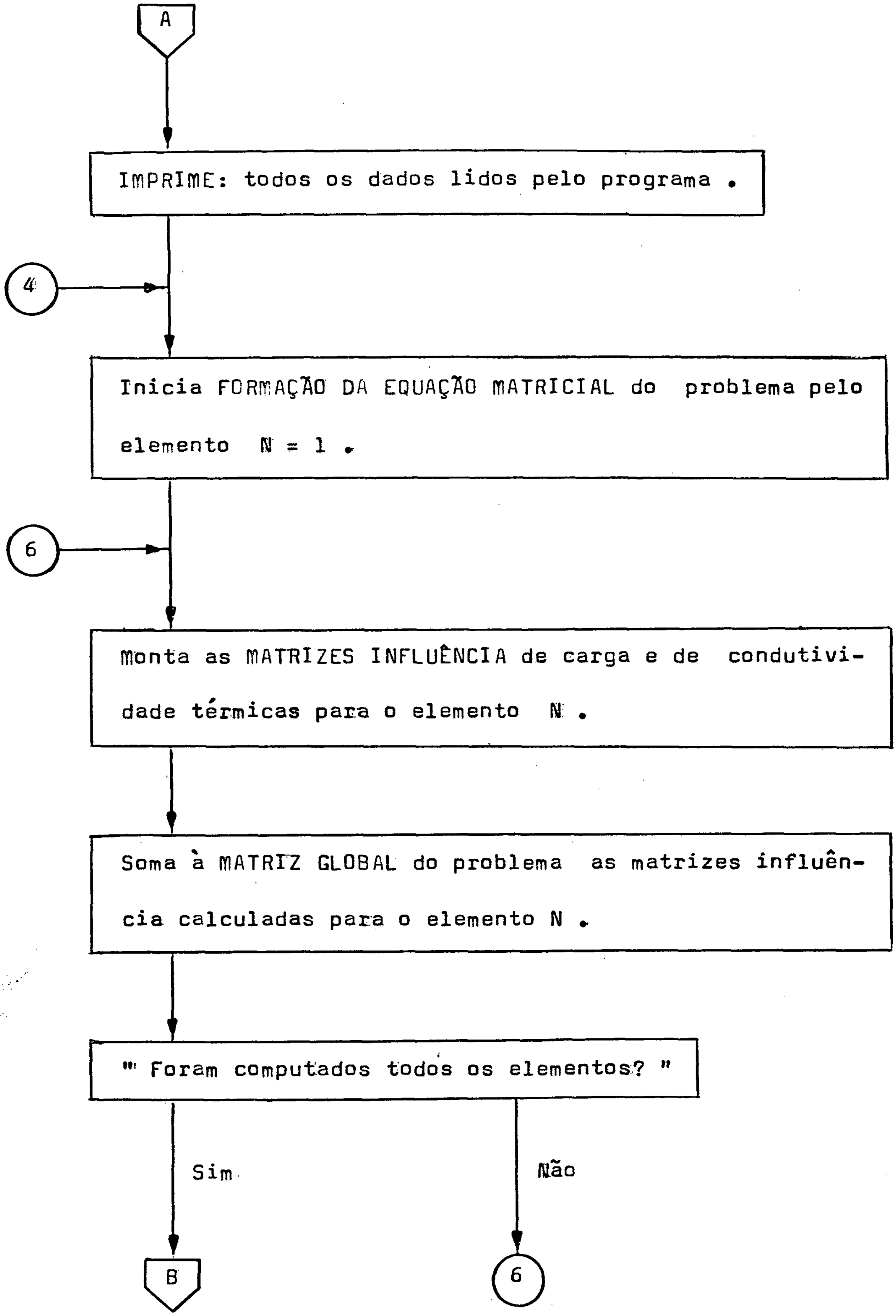
$$z_i = CI \exp(\frac{-t}{\lambda_i}) + f_i (\exp(\frac{-t}{\lambda_i}) - 1)$$

APÊNDICE 7

FLUXOGRAMAS

1. Fluxograma do programa ESTÁTICO




A
IMPRIME: todos os dados lidos pelo programa .
4
Inicia FORMAÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL do problema pelo elemento N = 1 .
6
Monta as MATRIZES INFLUÊNCIA de carga e de condutividade térmicas para o elemento N .
Soma à MATRIZ GLOBAL do problema as matrizes influência calculadas para o elemento N .
" Foram computados todos os elementos? "
Sim
Não
B
6

B

Introduz CONDIÇÕES DE CONTORNO NATURAIS na equação matricial do problema .

Resolve a equação matricial do problema por eliminação gaussiana (subrotinas SOLVE e SOLMIX), obtendo a solução sob a forma de temperatura ou fluxo de calor nodal e temperatura média do domínio .

IMPRIME: resultados obtidos .

" Quantas iterações já foram realizadas ? "

>1 e $\leqslant 5$

$= 1$

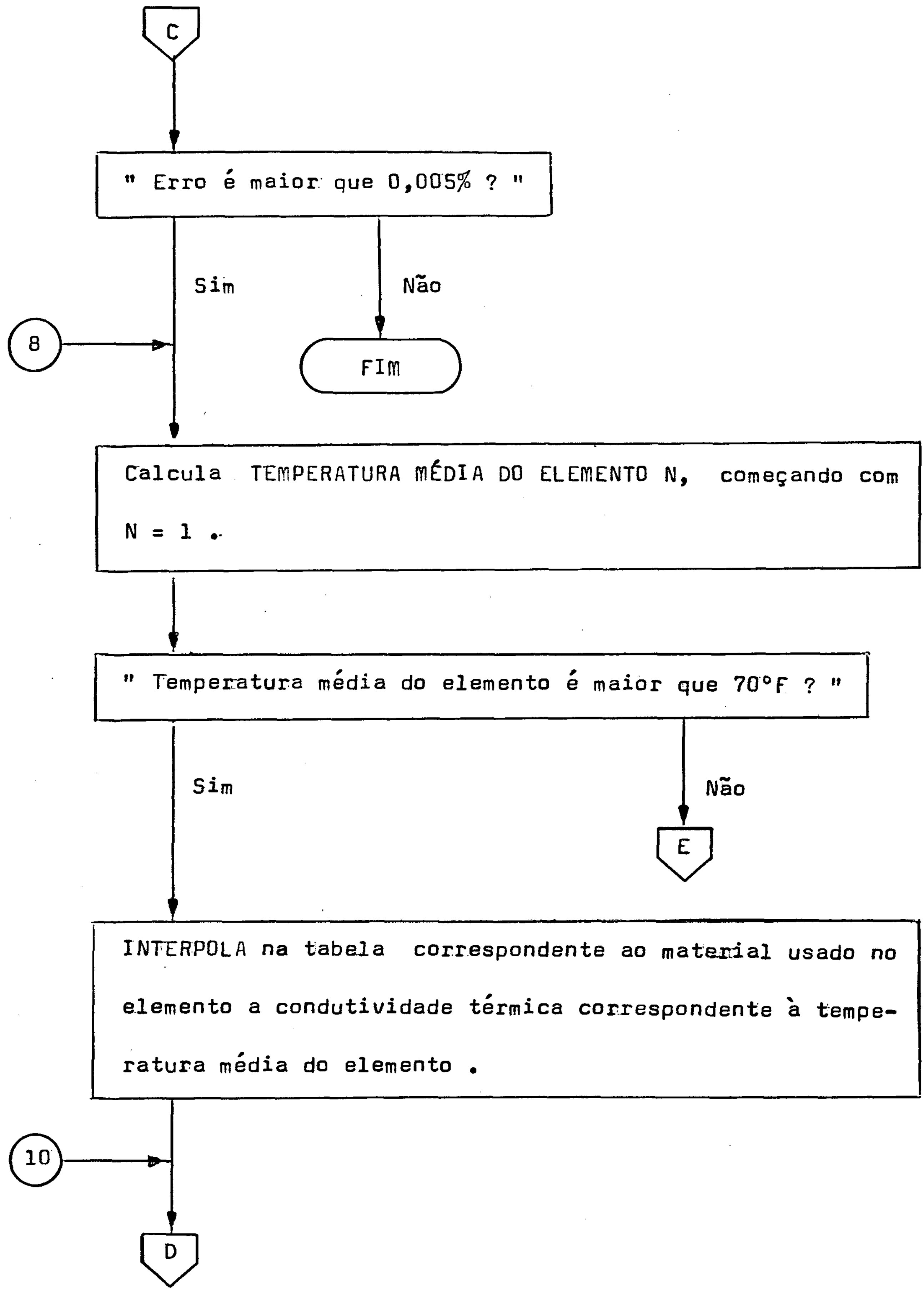
8

> 5

FIM

Calcula ERRO RELATIVO PERCENTUAL existente entre as temperaturas das duas últimas iterações .

C


C
" Erro é maior que 0,005% ? "
Sim
Não
8
FIM
Calcula TEMPERATURA MÉDIA DO ELEMENTO N, começando com N = 1 .
" Temperatura média do elemento é maior que 70°F ? "
Sim
Não
E
INTERPOLA na tabela correspondente ao material usado no elemento a condutividade térmica correspondente à temperatura média do elemento .
10
D

D

" A nova condutividade térmica já foi calculada para todos os elementos ? "

Sim

Não

8

Zera matriz condutividade térmica e vetor carga térmica .

4

E

Considera a nova condutividade térmica igual ao valor especificado para $T = 70^{\circ}F$ na tabela correspondente ao material usado no elemento .

10

2. Fluxograma do programa DINÂMICO

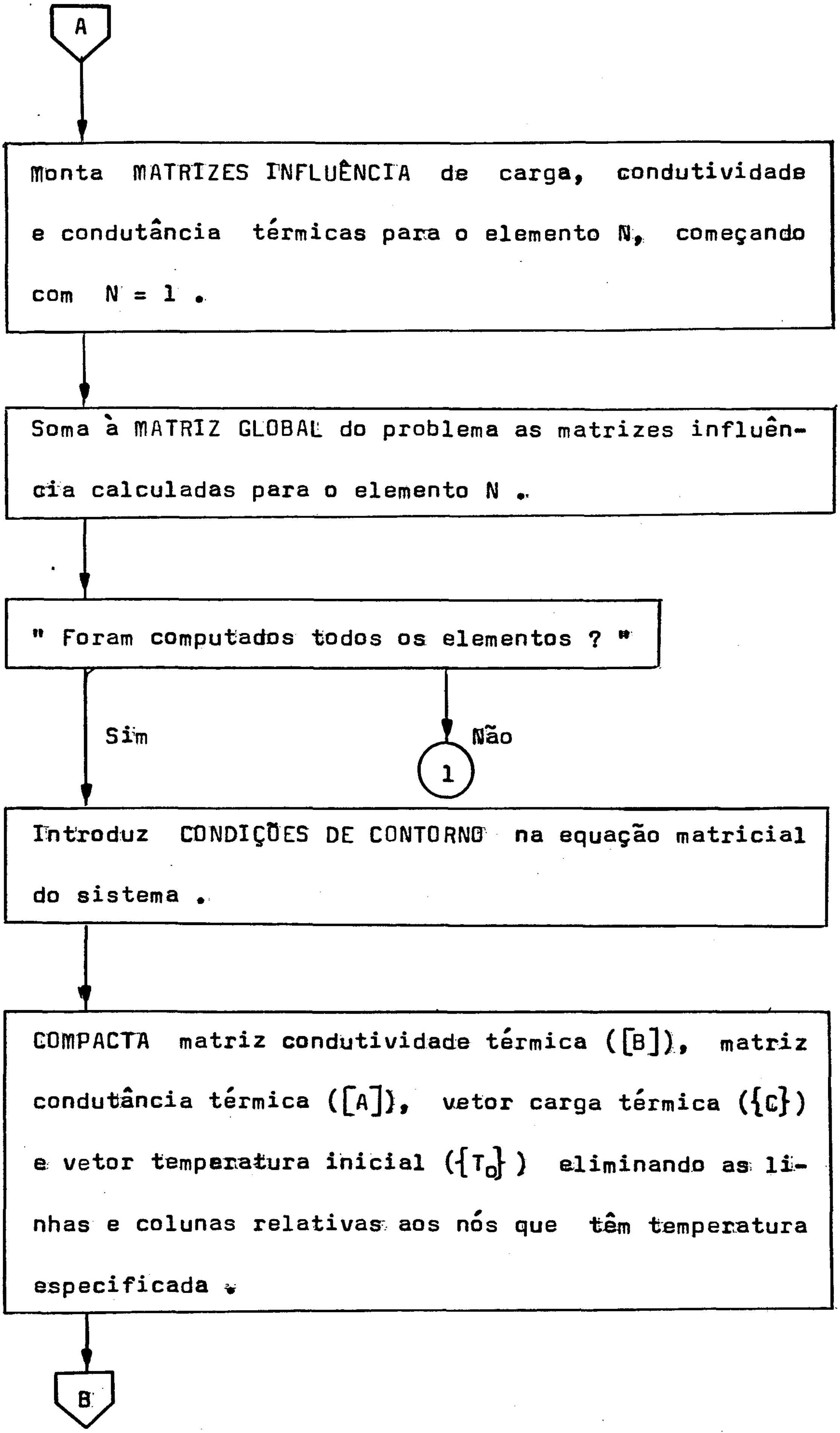
Início

LÊ: especificação do tipo de problema, nº de elementos, nº de nós, nº de nós mestres; nº do nó, suas coordenadas e sua temperatura inicial para toda a malha; nº do nó e sua temperatura onde esta é especificada; nº do nó e seu fluxo de calor onde este é especificado; pares nodais que definem a fronteira do domínio onde ocorre convecção, coeficiente de transmissão de calor por convecção e temperatura ambiente para esta fronteira; nº do elemento, sua topologia, sua condutividade térmica, sua geração interna de calor, densidade e calor específico a pressão constante, para todos os elementos .

IMPRIME: todos os dados lidos pelo programa .

1

A


A
Monta MATRIZES INFLUÊNCIA de carga, condutividade e condutância térmicas para o elemento N, começando com N = 1 .
Soma à MATRIZ GLOBAL do problema as matrizes influência calculadas para o elemento N .
" Foram computados todos os elementos ? "
Sim
Não
1
Introduz CONDIÇÕES DE CONTORNO na equação matricial do sistema .
COMPACTA matriz condutividade térmica ([B]), matriz condutância térmica ([A]), vetor carga térmica ({C}) e vetor temperatura inicial ({T0}) eliminando as linhas e colunas relativas aos nós que têm temperatura especificada .
B

B

" Será utilizado o SISTEMA ECONOMIZADOR ? "

Não

Sim

E

Efetua REDUÇÃO DE CHOLESKY, calcula AUTOVALORES e AUTOVETORES do sistema integral através das sub-rotinas CLVT, DPCHOL e DEIGEN que atuam acopladas .

Prepara MUDANÇA DE BASE do termo CONSTANTE da integral multiplicando-o por $[V]^{-1}[R]^{-1}[B]$.

Calcula vetor CARGA TÉRMICA na nova base :

$$\{F\} = [V]^{-1}[R]^{-1}\{C\}$$

3

LÊ: limite de integração (instante do transiente que se quer calcular) .

C

C

Calcula vetor SOLUÇÃO $\{Z\}$ na base $[R]^{-1}[V]^{-1}$.

Calcula TEMPERATURA dos nós MESTRES :

$$\{T_1\} = ([R]^t)^{-1}[V]\{Z\}$$

Calcula TEMPERATURA MÉDIA dos nós MESTRES e dos nós com TEMPERATURA ESPECIFICADA .

" Está sendo usado o sistema economizador ? "

Sim

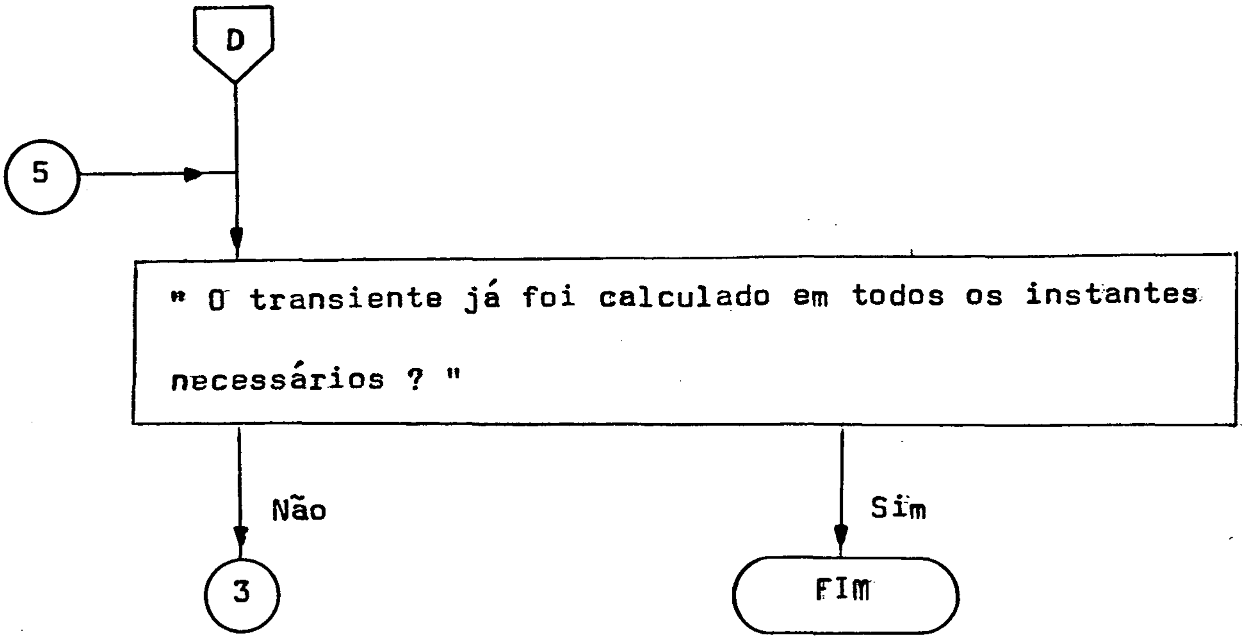
Não → 5

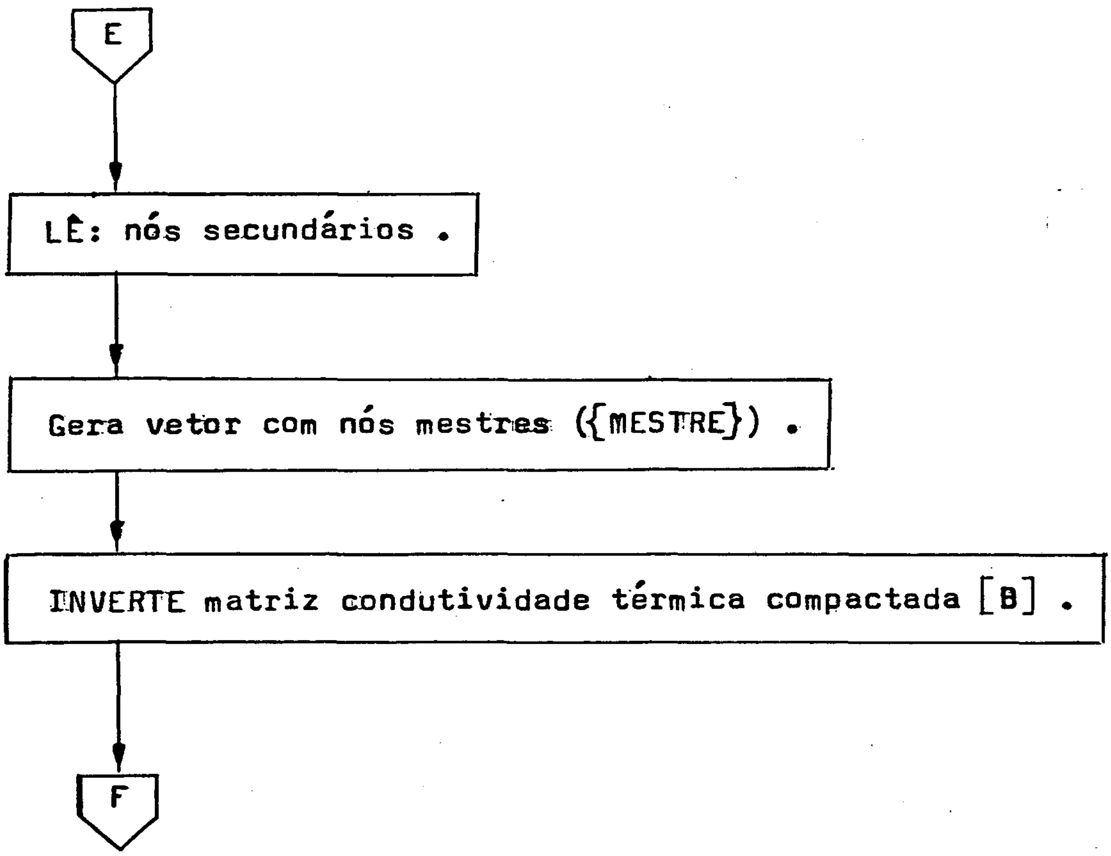
Calcula TEMPERATURA dos nós SECUNDÁRIOS :

$$\{T_2\} = [J_{21}][J_{11}]\{T_1\}$$

Calcula TEMPERATURA MÉDIA DE TODOS OS NÓS .

D


D
5
" O transiente já foi calculado em todos os instantes necessários ? "
Não
Sim
3
FIM


E
LÊ: nós secundários .
Gera vetor com nós mestres ({MESTRE}) .
INVERTE matriz condutividade térmica compactada [B] .
F

F

PARTICIONA matriz $[B]^{-1}$ obtendo $\left[\begin{array}{c|c} [J_{11}] & [J_{12}] \\ \hline [J_{21}] & [J_{22}] \end{array}\right]$.

Calcula matriz CONDUTIVIDADE TÉRMICA REDUZIDA $[B_r]$ por inversão da matriz $[J_{11}]$: $[B_r] = [J_{11}]^{-1}$.

Calcula matriz CONDUTÂNCIA TÉRMICA REDUZIDA $[A_r]$:

$$[A_r] = \left[I \;\vdots\; J_{11}^{-1} \cdot J_{12} \right] [A] \left[\begin{array}{c} I \\ \hline J_{21} \cdot J_{11}^{-1} \end{array} \right] .$$

Efetua REDUÇÃO DE CHOLESKY, calcula AUTOVALORES e AUTOVETORES do sistema REDUZIDO através das sub-rotinas CLVT, DPCHOL e DEIGEN que atuam acopladas .

G

G

Prepara MUDANÇA DE BASE do termo CONSTANTE da integral multiplicando-o por $[V]^{-1}[R]^{-1}[B_r]$.

Calcula vetor CARGA TÉRMICA REDUZIDA $\{C_r\}$ na nova base : $\{C_r\} = [V]^{-1}[R]^{-1}\left[I \vdots J_{11}^{-1} . J_{12}\right]\{C\}$.

3

APÊNDICE 8

IGUALDADE (56)

Dada a igualdade

$$(B_r) = \left[(I \;\vdots\; J_{11}^{-1} \; J_{12}) \right] (B) \begin{bmatrix} \dots\dots I \dots\dots \\ J_{21} \; J_{11}^{-1} \end{bmatrix} \tag{56}$$

pretende-se demonstrar que

$$(B_r) = (J_{11})^{-1} \tag{66}$$

Particionando a matriz condutividade térmica segundo seus nós mestres e secundários, desdobra-se a expressão (56) em

$$\left[(I \;\vdots\; J_{11}^{-1} \; J_{12}) \right] \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots\dots I \dots\dots \\ J_{21} \; J_{11}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= (B_{11} + J_{11}^{-1} J_{12} B_{21} + B_{12} J_{21} J_{11}^{-1} + J_{11}^{-1} J_{12} B_{22} J_{21} J_{11}^{-1}) \tag{67}$$

Da expressão (47)

$$(J_{21}) = -(B_{22})^{-1}(B_{21})(J_{11}) ,$$

pós-multiplicada por $(J_{11})^{-1}$ e pré-multiplicada por (B_{22}) resultam respectivamente as igualdades

$$(J_{21})(J_{11})^{-1} = -(B_{22})^{-1}(B_{21}) \tag{68}$$

$$(B_{22})(J_{21})(J_{11})^{-1} = -(B_{21}) \tag{69}$$

Substituindo a equação (69) na expressão (67) :

$$\begin{aligned}(B_{11} + J_{11}^{-1} J_{12} B_{21} + B_{12} J_{21} J_{11}^{-1} - J_{11}^{-1} J_{12} B_{21}) &= \\ = (B_{11} + B_{12} J_{21} J_{11}^{-1})\end{aligned} \tag{70}$$

Substituindo o valor de $(J_{21})(J_{11})^{-1}$ dado por (68) na expressão (70) obtém-se

$$(B_r) = (B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21})$$

que recai na relação (48), demonstrando a igualdade (66)

$$(B_r) = (J_{11})^{-1}$$