

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MATRIZES DE RIGIDEZ E DE TENSÕES PARA UM ELEMENTO FINITO DE CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA:

CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE

JULHO - 1980

MATRIZES DE RIGIDEZ E DE TENSÕES PARA UM ELEMENTO FINITO  
DE CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO

CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO  
MECÂNICO E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUA  
ÇÃO.

---

Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador

---

Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.  
Orientador

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES:

---

Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.

---

Prof. Arno Blass, Ph.D.

---

Prof. Antônio Bento Filho, M. Eng. Mec.

À Ina e Meus Pais

## AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Domingos Boéchat Alves, pela orientação;
- Ao companheiro Luiz Teixeira do Vale Pereira, pelo constante incentivo;
- Aos companheiros Antônio Bento Filho e Raul Guenther, pelas sugestões;
- Ao acadêmico Wilson Wronski Ricardo pelo auxílio no trabalho computacional;
- À CNEN (Comissão Nacional de Energia Nuclear), pela ajuda financeira prestada durante parte da realização deste trabalho;
- À UFSC, por tornar possível a realização deste trabalho.

## Í N D I C E

NOTAÇÃO .....	vii
RESUMO .....	ix
ABSTRACT .....	x
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO ELEMENTO FINITO .....	4
2.1. Introdução .....	4
2.2. Geometria .....	4
2.3. Hipóteses Básicas .....	6
2.4. Funções Deslocamentos .....	7
2.5. Relações Deformações-Deslocamentos .....	15
2.6. Relações Tensões Resultantes-Deformações .....	18
2.7. Matriz de Rigidez do Elemento .....	24
2.8. Matriz de Tensões do Elemento .....	31
CAPÍTULO 3 - SUB-PROGRAMA DIGITAL CASCAM .....	34
3.1. Introdução .....	34
3.2. Breve Descrição do Sub-Programa CASCAM ..	34
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E CONCLUSÕES .....	38
4.1. Introdução .....	38
4.2. Solução de Problemas e Comparação de Re-	
sultados .....	39
4.2.1. Casca cilíndrica de espessura cons-	
tante, longa, carregada com pres-	
são interna uniforme, momento dis-	
tribuído e força cortante distri-	
buída no extremo .....	39
4.2.2. Casca cilíndrica de espessura cons-	
tante, curta, carregada com pres-	
são interna uniforme .....	44
4.2.3. Casca cilíndrica de espessura cons-	
tante, curta, bi-engastada, carrega-	
da com pressão interna uniforme .....	49

4.2.4. Casca cilíndrica de espessura constante, longa, com carga uniformemente distribuída ao longo de uma secção circular .....	59
4.3. Conclusões .....	63
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	65
APÊNDICES .....	67
A.1 - COEFICIENTES DA FUNÇÃO MERIDIANO $R(\xi)$ ..	68
A.2 - SISTEMA DE COORDENADAS .....	70
A.3 - RELAÇÕES DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS .....	77
A.4 - EQUAÇÕES DE DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS E MUDANÇAS DE CURVATURA EM TERMOS DAS COORDENADAS GENERALIZADAS .....	84
A.5 - TENSÕES E MOMENTOS RESULTANTES .....	86
A.6 - TERMOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ $[K_e^m]$ PARA UM ELEMENTO CILÍNDRICO .....	93

NOTAÇÃO

- $\xi, R, \phi$  - linhas de coordenada longitudinal, radial e circunferencial, respectivamente.
- $u, v, w$  - deslocamentos nas direções meridional, circunferencial e radial, respectivamente. (Figura 2.1.)
- $\theta$  - rotação meridional. (Figura A.2.3.)
- $\alpha_i$  - coordenadas generalizadas.
- $m$  - ordem do harmônico da série de Fourier.
- $\{X_e^m\}$  - vetor deslocamento do elemento, para o harmônico  $m$ .
- $[B]$  - matriz (8x12) que relaciona deslocamentos no elemento com coordenadas generalizadas.
- $[M]$  - matriz (12x12) que relaciona coordenadas generalizadas com deslocamentos no elemento.
- $\{\epsilon_e^m\}$  - vetor deformações específicas do elemento, para o harmônico  $m$ .
- $[W_e^m]$  - matriz (6x12) deformação-deslocamentos do elemento, para o harmônico  $m$ .
- $z$  - distância medida ao longo da espessura, a partir da superfície de referência. (Fig. A.2.1.)
- $R_\xi, R_\phi$  - raios de curvatura nas direções meridional e circunferencial respectivamente.
- $L$  - comprimento longitudinal do elemento.
- $A, R$  - coeficientes da primeira forma fundamental para cascas de revolução.
- $h$  - espessura da casca.
- $E_\xi, E_\phi$  - módulos de elasticidade nas direções meridional e circunferencial, respectivamente.

- $\nu_{\xi\phi}, \nu_{\phi\xi}$  - coeficientes de Poisson.  
 $G_{\xi\phi}$  - módulo de elasticidade transversal.  
 $\{\bar{\sigma}\}$  - vetor tensões.  
 $\{\sigma_e^m\}$  - vetor tensões resultantes do elemento, para o harmônico  $m$ .  
 $[E]$  - matriz (6x6) tensões resultantes-deformações.  
 $\{F_e\}$  - vetor forças de contorno do elemento.  
 $[K_e^m]$  - matriz (8x8) de rigidez do elemento.  
 $\bar{U}_e^m$  - energia de deformação do elemento, para o harmônico  $m$ .  
 $\bar{W}_e^m$  - trabalho realizado pelas forças de contorno do elemento, para o harmônico  $m$ .  
 $\Pi_e^m$  - energia potencial total do elemento, para o harmônico  $m$ .  
 $a^-, a^+$  - raios do paralelo no início e término do elemento, respectivamente.  
 $[D_e^m]$  - matriz (12x8) que relaciona coordenadas generalizadas com deslocamentos nos contornos do elemento, para o harmônico  $m$ .  
 $[T_e^m]$  - matriz (6x8) de tensões do elemento, para o harmônico  $m$ .  
 $\epsilon_{\xi}^0, \epsilon_{\phi}^0, \epsilon_{\xi\phi}^0$  - componentes do vetor deformações específicas da superfície de referência.  
 $k_{\xi}, k_{\phi}, k_{\xi\phi}$  - componentes do vetor mudança de curvatura da superfície de referência.  
 $N_{\xi}, N_{\phi}, N_{\xi\phi}$  - tensões de membrana por unidade de comprimento.  
 $M_{\xi}, M_{\phi}, M_{\xi\phi}$  - momentos por unidade de comprimento.  
 $Q_{\xi}, Q_{\phi}$  - tensões transversais por unidade de comprimento.



## RESUMO

Neste trabalho é desenvolvida uma formulação analítica para um elemento finito axisimétrico de cascas finas de revolução, baseada na teoria de Love, visando o cálculo de deslocamentos e tensões resultantes em cascas de revolução carregadas arbitrariamente.

Através de uma formulação variacional, a matriz de rigidez do elemento é obtida da minimização do funcional de energia potencial total. Paralelamente, são calculadas as matrizes de tensões para cada ponto de integração.

A partir desta formulação analítica foi codificado um sub-programa digital que, inserido em um programa de elementos finitos, foi utilizado na resolução de vários problemas.

Os resultados obtidos são apresentados e comparados com soluções analíticas ou numéricas encontradas na literatura.

ABSTRACT

An analytical formulation for an axisymmetric finite element of a thin shell of revolution, based on the theory of Love, is developed for the computation of the displacements and the resultant stresses of shells of revolution arbitrarily loaded.

By means of a variational formulation, the stiffness matrix of the element is obtained by minimization of the functional of total potential energy. In addition, the stress matrices are evaluated for each integration point.

Using this analytical formulation, a digital sub-program was codified and included in a finite element program. Afterwards, this program was used in the solution of various problems.

The results are presented and compared with analytical or numerical solutions found in the literature.

## 1. INTRODUÇÃO

Uma casca fina de revolução é um corpo delimitado por duas superfícies de revolução separadas entre si de pequena distância.

Utilizando a Figura 1.1. pode-se visualizar os parâmetros geométricos básicos de uma casca fina de revolução: o eixo de revolução, a superfície de referência, a espessura e os contornos. A superfície de referência é obtida pelo giro da geratriz, denominada meridiano, em torno do eixo de revolução. O estudo de cascas finas é feito através da análise de suas superfícies de referência.

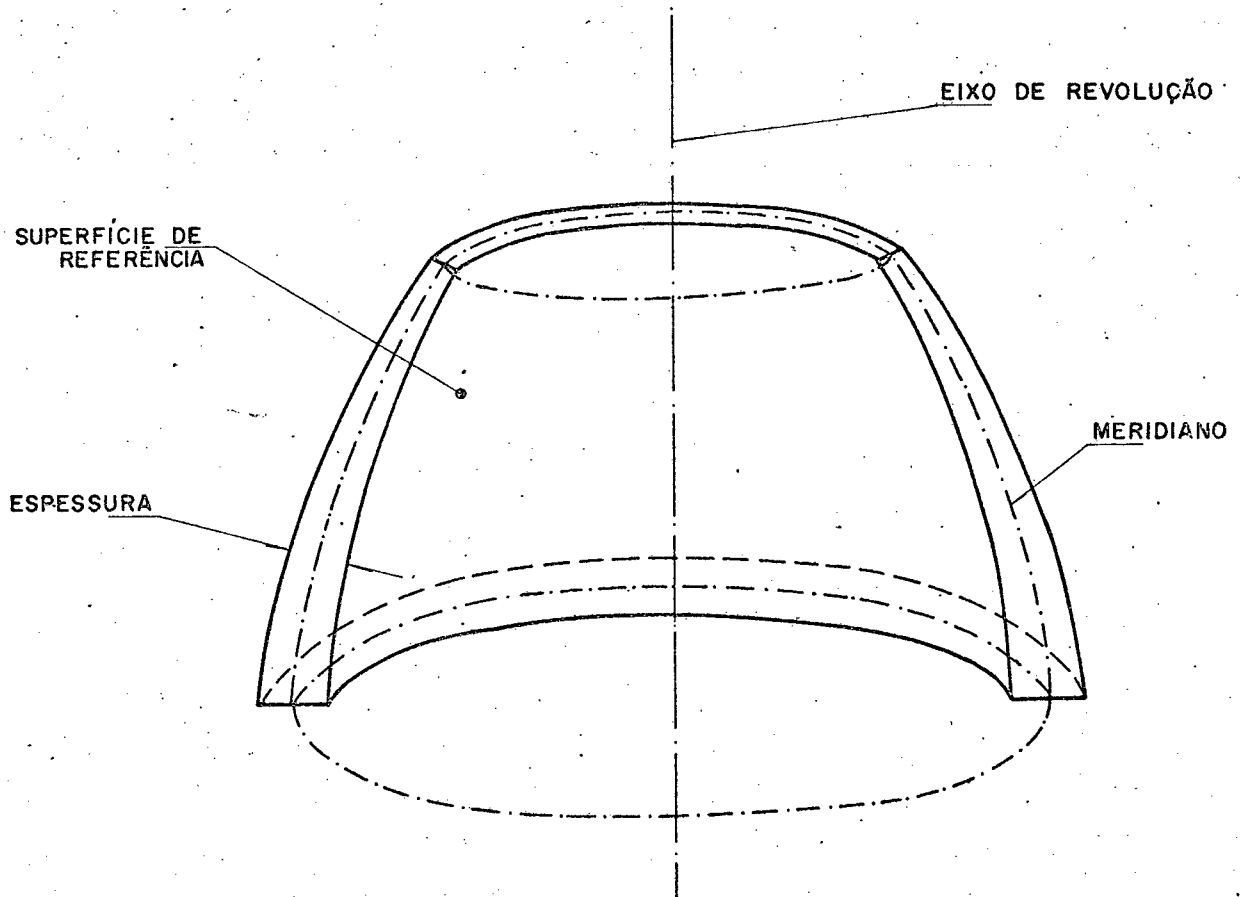


Figura 1.1. - Casca fina de revolução

Diversos componentes estruturais são constituídos de cascas finas de revolução carregadas, estática ou dinamicamente, das mais variadas maneiras. Soluções analíticas exatas para problemas de cascas podem ser obtidas somente para casos especiais. Devido a isso, nos últimos anos tem sido grande o desenvolvimento de métodos aplicáveis a computadores na busca de soluções para problemas complexos de cascas. Entre estes métodos, um dos que tem alcançado grande sucesso é o método dos elementos finitos, devido à sua grande versatilidade e eficiência em modelar e resolver problemas de estruturas complexas com as mais diversas formas de carregamento e vinculação.

Em problemas de cascas, estas são modeladas por um conjunto de elementos interconectados por nós, sendo que a configuração deslocamento no interior do elemento é aproximada por funções deslocamento dos nós. Em várias aplicações do método de elementos finitos a cascas de revolução, foram usados segmentos cônicos para modelar a casca; este procedimento foi usado por Popov, Penzien e Lu [16]. Neste tipo de tratamento ocorrem descontinuidades de inclinação e curvatura e, em consequência, aparecem momentos fletores em regiões onde só existem tensões de membrana. A utilização de elementos curvos, eliminando descontinuidades de inclinação, tem sido muito difundida nos últimos anos. Este tratamento foi o utilizado por Brombolich e Gould [15] ao derivar a matriz de rigidez e o conjunto de forças nodais equivalentes de um elemento finito para casca fina de revolução através do Princípio de Energia Potencial Total Estacionária. Os deslocamentos generalizados são aproximados por polinômios de grau variável. Os resultados são consideravelmente melhores comparados com aqueles obtidos utilizando-se elementos cônicos.

No presente trabalho tem-se por objetivo o desenvolvimento de um elemento finito curvo para cascas ortotrópicas de revolução a partir da minimização do funcional de energia potencial total, com o intuito de calcular deslocamentos e tensões resultantes. Para tanto a formulação leva em conta a teoria de cascas finas, conhecida como teoria de Love [1,5]. O material da casca é elástico e ortotrópico. Os deslocamentos são aproximados por polinômios do 3º grau, assim como o meridiano. A localização de um ponto sobre a casca é realizada por um sistema de coordenadas cilíndricas. Os carregamentos podem ser quaisquer devendo sua distribuição ao longo da coordenada circunferencial ser suficientemente "suave" para que a expansão em série de Fourier possa ser realizada.

No capítulo dois é desenvolvida uma formulação analítica para um elemento finito de casca fina de revolução, utilizando a hipótese de Kirchhoff-Love. A minimização do funcional da Energia Potencial Total fornece a matriz de rigidez do elemento. Computações adicionais levam à matriz de tensões do elemento.

No capítulo três é apresentada uma breve descrição do subprograma digital CASCAM, codificado a partir da formulação analítica desenvolvida no capítulo dois.

No capítulo quatro são apresentados resultados de alguns problemas típicos resolvidos com o subprograma digital CASCAM, comparando-se estes valores com soluções conhecidas.

## 2. FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO ELEMENTO FINITO CURVO

### 2.1. Introdução

Neste capítulo será desenvolvida a formulação analítica para um elemento finito de casca fina de revolução, a partir da teoria de cascas, utilizando hipóteses básicas discriminadas no item 2.3.. Considerando estas hipóteses, expandir-se-ão os deslocamentos e os carregamentos em série de Fourier na direção circunferencial e obter-se-ão relações deformações-deslocamentos e tensões resultantes-deformações.

Utilizando uma formulação variacional do problema, será minimizado o funcional de energia potencial total do elemento finito curvo, sendo obtidas as matrizes de rigidez e de tensões do elemento.

### 2.2. Geometria

Neste trabalho será usado um elemento finito que apresenta o raio e sua derivada contínuos ao longo do elemento (Figura 2.1.). Este elemento foi escolhido devido ao fato que, em cascas com meridiano "suave" o uso de um conjunto de elementos tronco-cônicos introduz descontinuidades nas tensões resultantes na borda de união dos elementos, em razão da mudança brusca do valor da derivada a cada novo elemento tomado.

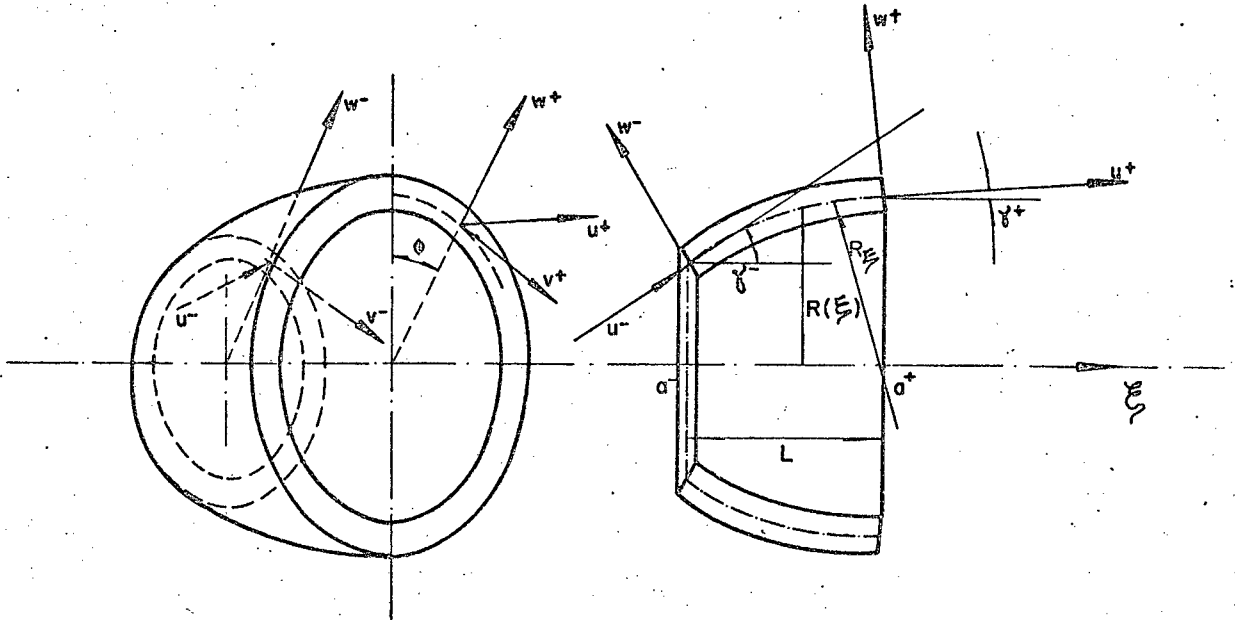


Figura 2.1. - Elemento de casca

Um ponto genérico da superfície de referência da casca é determinado pelas coordenadas longitudinal  $\xi$ , radial  $R$  e circunferencial  $\phi$ . Desse modo, o meridiano pode ser determinado explicitando  $R$  como uma função de  $\xi$ , tomando-se para função meridiano a expressão:

$$R(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (2.1.)$$

uma vez que esta função abrange a grande maioria de tipos de geometria usados na prática, tais como: arco de círculo, arco de elipse, etc...

Os valores das constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  para os ca-

so general e particulares podem ser encontrados no Apêndice A1.

Na Figura 2.1 estão representados três deslocamentos:  $u$  (deslocamento meridional),  $v$  (deslocamento circunferencial) e  $w$  (deslocamento normal). O quarto deslocamento a ser utilizado será a rotação meridional  $\theta$ , dada pela relação geométrica

$$\theta(\xi, \phi) = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{R_\xi} u \quad (2.2.)$$

onde  $R_\xi$  é o raio de curvatura do meridiano e  $A$  é o coeficiente da primeira forma fundamental, definido no Apêndice A.2.

### 2.3. Hipóteses Básicas

Neste trabalho será usada uma teoria linear de cascas elásticas, normalmente conhecida como teoria de Love, baseada nas seguintes hipóteses:

- a) Casca fina
- b) Pequenos deslocamentos e rotações
- c) A tensão normal  $\sigma_z$  à superfície de referência é desprezada, o que equivale à condição de tensões planas.
- d) As normais à superfície de referência antes da deformação, permanecem normais à superfície de referência deformada, não sofrendo variação de comprimento, o que equivale à condição de deformações planas, ou seja,  $\epsilon_z = \gamma_{\xi z} = \gamma_{\phi z} = 0$ . (Hipótese de Kirchhoff-Love)

A inconsistência entre o estado plano de tensões e o estado plano de deformações é eliminada considerando-se as defor



mações médias da superfície de referência [Referência 1]. Deste modo, os deslocamentos de um ponto genérico da casca serão tomados como função linear do deslocamento do ponto correspondente da superfície de referência.

#### 2.4. Funções Deslocamento

A fim de eliminar a influência da variável  $\phi$  no desenvolvimento do problema, os deslocamentos  $u(\xi, \phi)$ ,  $v(\xi, \phi)$  e  $w(\xi, \phi)$  são expandidos em série de Fourier como segue:

$$u(\xi, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} u^m(\xi) \cos m\phi \quad (2.3.a.)$$

$$v(\xi, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} v^m(\xi) \operatorname{sen} m\phi \quad (2.3.b.)$$

$$w(\xi, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} w^m(\xi) \cos m\phi \quad (2.3.c.)$$

onde  $m$  é o número do harmônico e  $u^m(\xi)$ ,  $v^m(\xi)$  e  $w^m(\xi)$  os coeficientes de Fourier, que são aproximados pelos seguintes polinômios do 3º grau, na variável  $\xi$ :

$$u^m(\xi) = \alpha_5^m + \alpha_6^m \xi + \alpha_9^m \xi^2 + \alpha_{10}^m \xi^3 \quad (2.4.a.)$$

$$v^m(\xi) = \alpha_7^m + \alpha_8^m \xi + \alpha_{11}^m \xi^2 + \alpha_{12}^m \xi^3 \quad (2.4.b.)$$

$$w^m(\xi) = \alpha_1^m + \alpha_2^m \xi + \alpha_3^m \xi^2 + \alpha_4^m \xi^3 \quad (2.4.c.)$$

sendo os coeficientes  $\alpha_i^m$  coordenadas generalizadas, denotados nesta ordem para enfatizar a importância da componente de deslocamento  $w$  e por necessidade de se obter (2.9.b.) inversível.

Usando a equação (2.2.), pode-se mostrar que a rotação meridional  $\theta(\xi, \phi)$  também pode ser expandida na seguinte série de Fourier:

$$\theta(\xi, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \theta^m(\xi) \cos m\phi \quad (2.5.a.)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta^m(\xi) = & \left( \frac{\alpha_2^m}{A} - \frac{\alpha_5^m}{R\xi} \right) + \left( \frac{2\alpha_3^m}{A} - \frac{\alpha_6^m}{R\xi} \right) \xi + \\ & + \left( \frac{3\alpha_4^m}{A} - \frac{\alpha_9^m}{R\xi} \right) \xi^2 + \frac{\alpha_{10}^m}{R\xi} \xi^3 \end{aligned} \quad (2.5.b.)$$

obtida substituindo-se as relações (2.4.) na expressão (2.2.).

Os vetores deslocamento da origem ( $u^-$ ,  $v^-$ ,  $w^-$ ,  $\theta^-$ ) e do término ( $u^+$ ,  $v^+$ ,  $w^+$ ,  $\theta^+$ ) do elemento podem ser agrupados em um único vetor deslocamento  $\{X\}$ , da seguinte forma:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} u^- \\ v^- \\ w^- \\ \theta^- \\ u^+ \\ v^+ \\ w^+ \\ \theta^+ \end{Bmatrix} \quad (2.6.)$$

Considerando as equações (2.3.) e (2.5.a), este vetor pode ser escrito em termos do vetor deslocamento correspondente ao harmônico  $\underline{m}$ , da seguinte forma:

$$\{ X \} = [ Q ] \{ X^m \} \quad (2.7.)$$

onde  $Q$  é a matriz diagonal

$$Q = \text{dia} (\cos m\phi, \sin m\phi, \cos m\phi, \cos m\phi, \cos m\phi, \sin m\phi, \cos m\phi, \cos m\phi) \quad (2.7.a.)$$

$$e \{ X^m \} = \begin{Bmatrix} u^{m-} \\ v^{m-} \\ w^{m-} \\ \theta^{m-} \\ u^{m+} \\ v^{m+} \\ w^{m+} \\ \theta^{m+} \end{Bmatrix} \quad (2.7.b.)$$

O vetor  $\{X^m\}$  pode ser dado em termos das coordenadas generalizadas  $\alpha_i^m$ , para cada harmônico, pela seguinte expressão:

$$\{ X^m \} = [ B ] \{ \alpha^m \} \quad (2.8.)$$

onde os elementos da matriz  $[B]$  são função dos coeficientes do polinômio definidor do meridiano e do comprimento axial do elemento.

A matriz  $[B]$ , para cada harmônico, pode ser particionada do modo que segue:

$$[B] = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ B_a^m & B_b^m \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.9.a.)$$

onde  $\begin{bmatrix} m \\ B_a \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} m \\ B_b \end{bmatrix}$  são matrizes obtidas avaliando-se o vetor deslocamento, para o harmônico em questão, nas bordas do elemento, utilizando as expressões (2.4.) e (2.5.b.). Assim procedendo obtém-se:

$$\begin{bmatrix} m \\ B_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_1 & 0 & 0 & 1/\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \frac{2L}{\lambda_2} & \frac{3L^2}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_4} & \frac{L}{\lambda_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9.b.)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L^2 & L^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{\lambda_4} & \frac{L^3}{\lambda_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9.c.)$$

sendo que

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + a_1^2} \quad (2.9.d.)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{1 + (a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2)^2} \quad (2.9.e.)$$

$$\lambda_3 = \frac{(\sqrt{1 + a_1^2})^3}{2a_2} \quad (2.9.f.)$$

$$\lambda_4 = \frac{(\sqrt{1 + (a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2)^2})^3}{2a_2 + 6a_3L} \quad (2.9.g.)$$

O vetor coordenadas generalizadas  $\{\alpha^m\}$  é particionado adequadamente a  $[B]$  em  $\{\alpha_a^m\}$  e  $\{\alpha_b^m\}$ , isto é:

$$\{\alpha_a^m\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1^m \\ \alpha_2^m \\ \alpha_3^m \\ \alpha_4^m \\ \alpha_5^m \\ \alpha_6^m \\ \alpha_7^m \\ \alpha_8^m \end{Bmatrix} \quad (2.9.h.) \quad \text{e} \quad \{\alpha_b^m\} = \begin{Bmatrix} \alpha_9^m \\ \alpha_{10}^m \\ \alpha_{11}^m \\ \alpha_{12}^m \end{Bmatrix} \quad (2.9.i.)$$

Para facilitar desenvolvimentos futuros, relativos à matriz de rigidez do elemento, a relação (2.8) é modificada da seguinte maneira:

explicita-se  $\{\alpha_a^m\}$  da relação

$$\{X^m\} = \begin{bmatrix} B_a^m & \vdots & B_b^m \\ B_a^m & \vdots & B_b^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_a^m \\ \dots \\ \alpha_b^m \end{Bmatrix} \quad (2.10.)$$

e obtém-se o vetor

$$\{\alpha_a^m\} = \begin{bmatrix} B_a^m &^{-1} \end{bmatrix} \{X^m\} - \begin{bmatrix} B_a^m &^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_b^m \end{bmatrix} \{\alpha_b^m\} \quad (2.11.)$$

o qual compondo-se adequadamente com  $\{\alpha_b^m\}$  resulta na seguinte expressão para o vetor coordenadas generalizadas:

$$\{\alpha^m\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_a^m \\ \dots \\ \alpha_b^m \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c|ccc} B_a^{m-1} & & & \\ \dots & B_a^{m-1} & B_b^m & \\ \ominus & & I_4 & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X^m \\ \dots \\ \alpha_b^m \end{array} \right\} \quad (2.12.)$$

Define-se então a matriz  $M$  :

$$[M] = \left[ \begin{array}{c|ccc} B_a^{m-1} & & & \\ \dots & B_a^{m-1} & B_b^m & \\ \ominus & & I_4 & \end{array} \right] \quad (2.13.a.)$$

ou, em termos dos parâmetros definidos pelas equações (2.9.e.)

a (2.9.h.), a matriz  $[M]$  pode ser escrita como:

$$[M] = \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{2\lambda_1}{\lambda_3 L} & 0 & -\frac{3}{L^2} & -\frac{2\lambda_1}{L} & \frac{\lambda_2}{\lambda_4 L} & 0 & -\frac{\lambda_2}{L} & 0 \\
 -\frac{\lambda_1}{\lambda_3 L^2} & 0 & \frac{2}{L^3} & \frac{\lambda_1}{L^2} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_4 L^2} & 0 & \frac{\lambda_2}{L^3} & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & -L^2
 \end{array}
 & \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -L & -L^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -L & -L^2
 \end{array}
 \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 \\
 & & & 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \Theta \\
 \Theta \\
 \Theta \\
 \Theta
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (2.13.b.)$$



### 2.5. Relações Deformações - Deslocamentos

No Apêndice A.3. são desenvolvidas as relações de deformações - deslocamentos, em coordenadas cilíndricas, para a superfície de referência de cascas de revolução, considerando a hipótese de Kirchhoff-Love. Estas equações são:

$$\varepsilon_{\xi}^0 = \frac{1}{A} u' + \frac{1}{R_{\xi}} w \quad (2.14.a.)$$

$$\varepsilon_{\phi}^0 = \frac{1}{R} \hat{v}' + \frac{R'}{AR} u + \frac{1}{R_{\phi}} w \quad (2.14.b.)$$

$$\gamma_{\xi\phi}^0 = \frac{1}{R} u' + \frac{1}{A} v' - \frac{R'}{AR} v \quad (2.14.c.)$$

$$k_{\xi} = \frac{1}{A^2} w'' + \frac{R'R''}{A^4} w' \quad (2.14.d.)$$

$$k_{\phi} = -\frac{1}{R^2} w'' - \frac{R'}{A^2R} w' \quad (2.14.e.)$$

$$k_{\xi\phi} = -\frac{2}{AR} w'' + \frac{2R'}{AR^2} w' \quad (2.14.f.)$$

onde  $( )' = \frac{\partial}{\partial \xi}$  e  $( )^{\circ} = \frac{\partial}{\partial \phi}$

Estas equações podem ser expressas em termos do vetor coordenadas generalizadas  $\{\alpha^m\}$  das funções representativas dos deslocamentos do e-ésimo elemento, para o m-ésimo harmônico, pela seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_e^m \\ \alpha_e^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e^m(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_e^m \end{Bmatrix} \quad (2.15.a.)$$

onde:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ \varepsilon \\ e \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} m \\ \varepsilon_0 \\ \xi \\ m \\ \varepsilon_0 \\ \phi \\ m \\ \varepsilon_0 \\ \xi \\ \phi \\ m \\ k \\ \xi \\ m \\ k \\ \phi \\ m \\ k \\ \xi \\ \phi \end{matrix} \quad (2.15.b.)$$

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ \alpha \\ e \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} m \\ \alpha_1 \\ m \\ \alpha_2 \\ m \\ \alpha_3 \\ m \\ \alpha_4 \\ m \\ \alpha_5 \\ m \\ \alpha_6 \\ m \\ \alpha_7 \\ m \\ \alpha_8 \\ m \\ \alpha_9 \\ m \\ \alpha_{10} \\ m \\ \alpha_{11} \\ m \\ \alpha_{12} \end{matrix} \quad (2.15.c.)$$

e a matriz  $\left[ W_e^m(\xi) \right]$  é obtida substituindo-se os deslocamentos  $u, v, w$ , dados pelas equações (2.4.), e suas derivadas nas expressões (2.14.), conforme indicado no Apêndice A.4.. Assim procedendo obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 [w_e^m(\xi)] = & \left[ \begin{array}{cccccccc}
 1/R_\xi & \xi/R_\xi & \xi^2/R_\xi & \xi^3/R_\xi & 0 & H_1 & 0 & 0 & 2H_1\xi & 3H_1\xi^2 & 0 & 0 \\
 1/R_\phi & \xi/R_\phi & \xi^2/R_\phi & \xi^3/R_\phi & H_2 & H_2\xi & H_3 & H_3\xi & H_2\xi^2 & H_2\xi^3 & H_3\xi^2 & H_3\xi^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -H_3 & (-H_3\xi) & -H_2 & (-H_2\xi+H_1) & -H_3\xi^2 & -H_3\xi^3 & (-H_2\xi^2+2H_1\xi) & (-H_2\xi^3+3H_1\xi^2)
 \end{array} \right] \\
 & \text{-----} \\
 & \left[ \begin{array}{cccc}
 0 & H_7 & (2H_7\xi-2H_4) & (3H_7\xi^2-6H_4\xi) \\
 H_6 & (H_6\xi-H_5) & (H_6\xi^2-2H_5\xi) & (H_6\xi^3-3H_5\xi^2) \\
 -H_9 & (H_8-H_9\xi) & (2H_8\xi-H_9\xi^2) & (3H_8\xi^2-H_9\xi^3)
 \end{array} \right] \\
 & \text{-----} \\
 & \Theta
 \end{aligned}
 \tag{2.15.d.}$$

sendo:

$$H_1 = \frac{1}{A} ; H_2 = \frac{R'}{AR} ; H_3 = \frac{m}{R} ; H_4 = \frac{1}{A^2} ; H_5 = \frac{R'}{A^2R} ; H_6 = \frac{m^2}{R^2} ; H_7 = \frac{R'R''}{A^4} ; H_8 = \frac{2m}{AR} ; H_9 = \frac{2mR'}{AR^2}
 \tag{2.15.e.}$$

## 2.6. Relações Tensões Resultantes - Deformações

As relações deformações - tensões para um material elástico linear e ortotrópico podem ser escritas na forma matricial seguinte [Referência 2]:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{\xi} \\ \epsilon_{\phi} \\ \epsilon_z \\ \gamma_{\xi\phi} \\ \gamma_{\phi z} \\ \gamma_{z\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{\xi} & -\nu_{\phi\xi}/E_{\phi} & -\nu_{z\xi}/E_z & & & \\ -\nu_{\xi\phi}/E_{\xi} & 1/E_{\phi} & -\nu_{z\phi}/E_z & & & \\ -\nu_{\xi z}/E_{\xi} & -\nu_{\phi z}/E_{\phi} & 1/E_z & & & \\ & & & 1/G_{\xi\phi} & 0 & 0 \\ & & & & 1/G_{\phi z} & 0 \\ & & & & & 1/G_{z\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\phi} \\ \sigma_z \\ \tau_{\xi\phi} \\ \tau_{\phi z} \\ \tau_{z\xi} \end{bmatrix} \quad (2.16.a.)$$

onde se verificam as relações:

$$\frac{\nu_{\xi\phi}}{E_{\xi}} = \frac{\nu_{\phi\xi}}{E_{\phi}} \quad ; \quad \frac{\nu_{z\xi}}{E_z} = \frac{\nu_{\xi z}}{E_{\xi}} \quad ; \quad \frac{\nu_{\phi z}}{E_{\phi}} = \frac{\nu_{z\phi}}{E_z} \quad (2.16.b.)$$

Considerando as hipóteses básicas para o estado plano de tensões e o estado plano de deformações, abordadas no item 2.3.:

$$\sigma_z = 0 \quad ; \quad \epsilon_z = \gamma_{\phi z} = \gamma_{z\xi} = 0 \quad (2.17.)$$

E a lei de Hooke fica na forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\phi} \\ \gamma_{\xi\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{\xi} & -\nu_{\phi\xi}/E_{\phi} & 0 \\ -\nu_{\xi\phi}/E_{\xi} & 1/E_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{\xi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\phi} \\ \tau_{\xi\phi} \end{Bmatrix} \quad (2.18.)$$

A mesma equação, colocando tensões em função de deformações, fica:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\phi} \\ \tau_{\xi\phi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{\xi\phi} \nu_{\phi\xi}} \begin{bmatrix} E_{\xi} & \nu_{\phi\xi} E_{\xi} & 0 \\ \nu_{\xi\phi} E_{\phi} & E_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{\xi}(1-\nu_{\xi\phi})}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\phi} \\ \gamma_{\xi\phi} \end{Bmatrix} \quad (2.19.)$$

A hipótese da manutenção da normal após a deformação leva a uma distribuição linear de deformações ao longo da espessura da casca [Referência 1]. Logo, a distribuição de tensões também é linear. Para se obter as forças e momentos resultantes por unidade de comprimento, usa-se escrevê-las em função das tensões definidas em (2.19.). Isto é feito integrando-se as tensões ao longo da espessura, referenciadas à superfície média da casca, eliminando-se a variável  $z$ .

A obtenção das equações para tensões resultantes é indicada no Apêndice A.5.. Logo, das equações (A.5.12.) as equações de tensões resultantes ficam:

$$N_{\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi} dz \quad (2.20.a.)$$

$$N_{\phi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\phi} dz \quad (2.20.b.)$$

$$N_{\xi\phi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\xi\phi} dz \quad (2.20.c.)$$

$$M_{\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi} z dz \quad (2.20.d.)$$

$$M_{\phi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\phi} z dz \quad (2.20.e.)$$

$$M_{\xi\phi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\xi\phi} z dz \quad (2.20.f.)$$

onde  $h$  é a espessura da casca.

A convenção de tensões e momentos resultantes positivos é mostrada na Figura 2.2.:

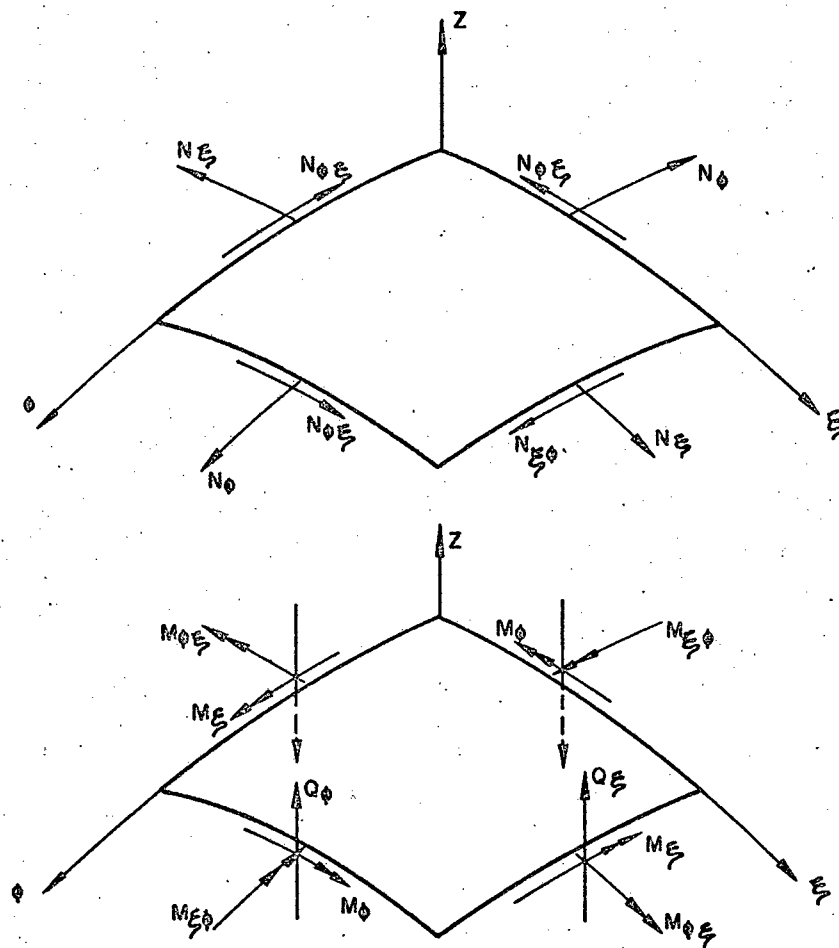


Figura 2.2. - Tensões resultantes e momentos resultantes.

As equações de tensões resultantes em termos das deformações específicas e mudanças de curvaturas são obtidas pela substituição das relações tensões-deformações (2.19) em (2.20.). Para tal é necessária uma alteração na equação (2.19.), a qual pode

ser escrita como uma relação matricial:

$$\{ \bar{\sigma} \} = [ H ] \{ \bar{\epsilon} \} \quad (2.21.)$$

A equação (2.21.) pode ser escrita na forma (2.22.) seguinte, usando as equações (A.3.8.), uma vez que as tensões e deformações se distribuem linearmente ao longo da espessura da casca.

$$\{ \bar{\sigma} \} = [ H ] \{ \bar{\epsilon}_0 \} + [ H ] \{ \bar{k} \} z \quad (2.22.)$$

onde

$$\{ \bar{\epsilon}_0 \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{\xi}^0 \\ \epsilon_{\phi}^0 \\ \gamma_{\xi\phi}^0 \end{Bmatrix} \quad e \quad \{ \bar{k} \} = \begin{Bmatrix} k_{\xi} \\ k_{\phi} \\ k_{\xi\phi} \end{Bmatrix}$$

Substituindo as linhas apropriadas de (2.22.) nas equações (2.20.), obtêm-se as tensões resultantes e momentos resultantes em termos das deformações específicas e das mudanças de curvatura que podem ser grupadas na seguinte equação matricial:

$$\{ \sigma \} = [ E ] \{ \epsilon \} \quad (2.23.a.)$$

onde



$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_{\xi} \\ N_{\phi} \\ N_{\xi\phi} \\ M_{\xi} \\ M_{\phi} \\ M_{\xi\phi} \end{Bmatrix} \quad (2.23.b.) ;$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi}^0 \\ \varepsilon_{\phi}^0 \\ \gamma_{\xi\phi}^0 \\ k_{\xi} \\ k_{\phi} \\ k_{\xi\phi} \end{Bmatrix} \quad (2.23.c.)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \frac{E_{\xi}h}{1-\nu_{\xi\phi}\nu_{\phi\xi}} & \nu_{\phi\xi} \frac{E_{\xi}h}{1-\nu_{\xi\phi}\nu_{\phi\xi}} & 0 & & & \\ \nu_{\xi\phi} \frac{E_{\phi}h}{1-\nu_{\xi\phi}\nu_{\phi\xi}} & \frac{E_{\phi}h}{1-\nu_{\xi\phi}\nu_{\phi\xi}} & 0 & & & \Theta \\ 0 & 0 & G_{\xi\phi}h & & & \\ \hline & & & \frac{E_{\xi}h^3}{12(1-\nu_{\xi\phi}\nu_{\phi\xi})} & \nu_{\phi\xi} \frac{E_{\xi}h^3}{12(1-\nu_{\xi\phi}\nu_{\phi\xi})} & 0 \\ & & & \nu_{\xi\phi} \frac{E_{\phi}h^3}{12(1-\nu_{\xi\phi}\nu_{\phi\xi})} & \frac{E_{\phi}h^3}{12(1-\nu_{\xi\phi}\nu_{\phi\xi})} & 0 \\ & \Theta & & 0 & 0 & \frac{G_{\xi\phi}h^3}{12} \end{array}$$

(2.23.d.)

onde  $E_{\xi}, E_{\phi}$  = módulos de elasticidade.

$\nu_{\xi\phi}, \nu_{\phi\xi}$  = coeficientes de Poisson.

$G_{\xi\phi}$  = módulo de elasticidade transversal.

$h$  = espessura da casca.

## 2.7. Matriz de Rigidez do Elemento

Em (2.6.) temos o vetor deslocamento  $\{X\}$  que é composto dos deslocamentos nos contornos do elemento de casca. Estes deslocamentos são provocados por forças atuando no contorno, mostradas na Figura 2.3. Estas forças podem ser colocadas na forma de um vetor-forças de contorno  $\{F\}$ . Entre as forças de contorno e os deslocamentos nos contornos existe uma relação matricial dada por:

$$\{F_e\} = [K_e] \{X_e\} \quad (2.24.a.)$$

onde

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} N^- \\ S^- \\ T^- \\ M^- \\ N^+ \\ S^+ \\ T^+ \\ M^+ \end{Bmatrix} \quad (2.24.b.)$$

$$\{X_e\} = \begin{Bmatrix} u^- \\ v^- \\ w^- \\ \theta^- \\ u^+ \\ v^+ \\ w^+ \\ \theta^+ \end{Bmatrix} \quad (2.24.c.)$$

e  $[K_e]$  é a matriz de rigidez do elemento a ser determinada por uma formulação variacional, minimizando-se o funcional da energia potencial total do elemento.

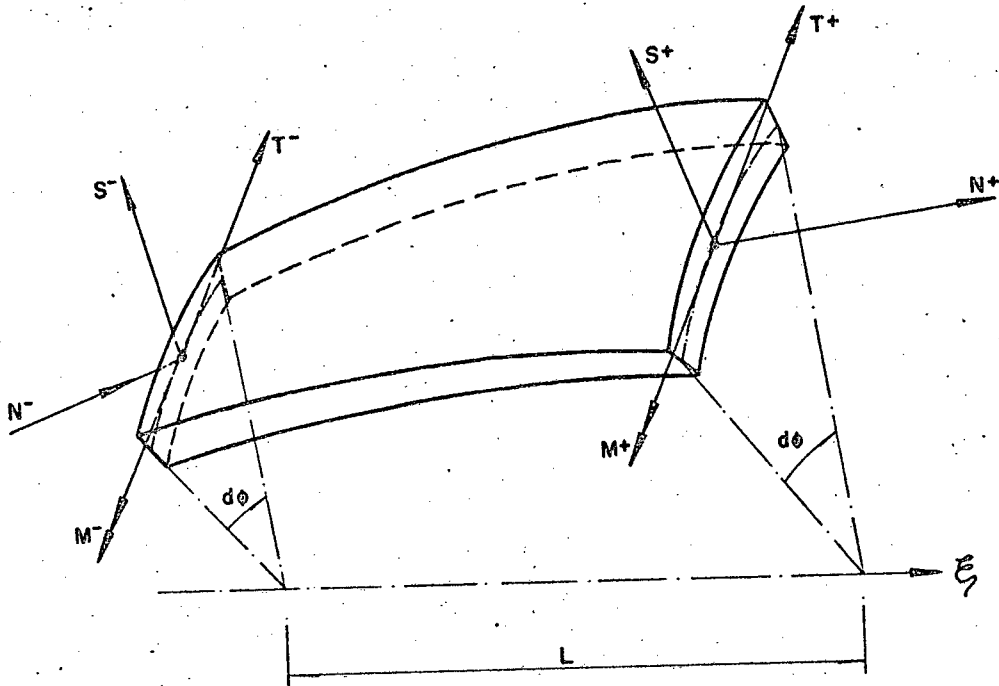


Figura 2.3. - Forças de contorno do elemento

A densidade de energia de deformação de um elemento genérico de casca, como o indicado na Figura 2.3. é dada por:

$$\frac{d\bar{U}}{dS} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} \quad (2.25.)$$

sendo que:  $\{\epsilon\}$  = vetor das deformações específicas em um ponto da superfície de referência.

$\{\sigma\}$  = vetor de tensões resultantes neste ponto.

Logo a energia de deformação de todo elemento de casca, como o visto na Figura 2.1., é dada pela integral sobre a superfície:

$$\bar{U}_e = \int_S \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_e^m \right\}^T \left\{ \sigma_e^m \right\} dS \quad (2.26.)$$

O vetor deformações específicas  $\{\epsilon_e^m\}$  e o vetor tensões resultantes  $\{\sigma_e^m\}$ , em termos do vetor coordenadas generalizadas  $\{\alpha_e^m\}$ , para o m-ésimo harmônico, dados por (2.15.a.) e (2.23.a.) respectivamente, quando substituídos em (2.26.) fornecem:

$$\bar{U}_e = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ \alpha_e^m \right\}^T \left[ W_e^m \right]^T \left[ E \right] \left[ W_e^m \right] \left\{ \alpha_e^m \right\} \left\langle \begin{matrix} \text{sen}^2 m\phi \\ \text{cos}^2 m\phi \end{matrix} \right\rangle AR d\xi d\phi \quad (2.27.)$$

A notação  $\left\langle \begin{matrix} \text{sen}^2 m\phi \\ \text{cos}^2 m\phi \end{matrix} \right\rangle$  indica que somente termos quadrados de senos e cossenos ocorrem quando o m-ésimo termo da série de Fourier é substituído na equação (2.26.). Alguns termos de (2.27) são multiplicados por  $\text{sen}^2 m\phi$  e os outros por  $\text{cos}^2 m\phi$ , mas suas integrais são:

$$\int_0^{2\pi} \left\langle \begin{matrix} \text{sen}^2 m\phi \\ \text{cos}^2 m\phi \end{matrix} \right\rangle d\phi = \begin{cases} \left\langle \begin{matrix} \pi \\ \pi \end{matrix} \right\rangle & \text{para } m \neq 0 \\ \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 2\pi \end{matrix} \right\rangle & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad (2.27.a)$$

Como o vetor coordenadas generalizadas  $\{\alpha_e^m\}$  independe das coordenadas axial  $\xi$  e circunferencial  $\phi$ , é explicitado da integral, obtendo-se:

$$\bar{U}_e = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_e^m \right\}^T \left[ L_e^m \right] \left\{ \alpha_e^m \right\} \quad (2.28.)$$

onde:

$$[L_e^m] = \pi^* \int_0^L [W_e^m]^T [E] [W_e^m] AR d\xi \quad (2.29.)$$

onde:  $\pi^* = \pi$  se  $m \neq 0$  e  $\pi^* = 2\pi$  se  $m = 0$

O vetor coordenadas generalizadas  $\{\alpha_e^m\}$  é dado pela equação (2.12.) e, colocado na expressão (2.28.), faz com que a energia de deformação do elemento, para um harmônico  $m$ , seja:

$$\bar{U}_e^m = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} X_e^m \\ \alpha_b^m \end{array} \right\}^T [M]^T [L_e^m] [M] \left\{ \begin{array}{c} X_e^m \\ \alpha_b^m \end{array} \right\} \quad (2.30.)$$

O trabalho realizado pelas forças de contorno  $\{F_e^m\}$ , ao produzirem os deslocamentos  $\{X_e^m\}$  dos contornos do elemento, é dado pela integral ao longo da coordenada circunferencial  $\phi$  dos produtos forças de contorno X deslocamentos de contorno:

$$\bar{W}_e^m = \int_0^{2\pi} \{X_e^m\}^T \left[ \begin{array}{c|c} a^- I_4 & \Theta \\ \hline \Theta & a^+ I_4 \end{array} \right] \{F_e^m\} \left\langle \begin{array}{c} \sin^2 m\phi \\ \cos^2 m\phi \end{array} \right\rangle d\phi = \quad (2.31.)$$

$$= \pi^* \{X_e^m\}^T \left[ \begin{array}{c|c} a^- I_4 & \Theta \\ \hline \Theta & a^+ I_4 \end{array} \right] \{F_e^m\},$$

onde  $a^-$  = raio do paralelo no início do elemento

$a^+$  = raio do paralelo no término do elemento

A energia potencial total do elemento, para o harmônico  $m$ , é dada por:

$$\bar{\Pi}_e^m = \bar{U}_e^m - \bar{W}_e^m \quad (2.32.)$$

Esta expressão constitui o funcional da energia potencial total e, em forma expandida, é:

$$\Pi_e^m = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} X_e^m \\ \alpha_b^m \end{matrix} \right\}^T [M]^T \left[ \pi^* \int_0^L [W_e^m]^T [E] [W_e^m] AR d\xi \right] [M] .$$

$$\cdot \left\{ \begin{matrix} X_e^m \\ \alpha_b^m \end{matrix} \right\} - \pi^* \{X_e^m\}^T \left[ \begin{array}{c|c} a^- I_4 & \Theta \\ \hline \Theta & a^+ I_4 \end{array} \right] \{F_e^m\} \quad (2.33.)$$

$$\Pi_e^m = \pi^* \left[ \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} X_e^m \\ \alpha_b^m \end{matrix} \right\}^T [M]^T \right] .$$

$$\cdot \left( \int_0^L [W_e^m]^T [E] [W_e^m] AR d\xi \right) [M] \left\{ \begin{matrix} X_e^m \\ \alpha_b^m \end{matrix} \right\} - \quad (2.34.)$$

$$- \{X_e^m\}^T \left[ \begin{array}{c|c} a^- I_4 & \Theta \\ \hline \Theta & a^+ I_4 \end{array} \right] \{F_e^m\} \right]$$

Para minimizar este funcional de energia potencial total do elemento, diferencia-se  $\Pi_e^m$  em relação a  $\left\{ \begin{matrix} X_e^m \\ \alpha_b^m \end{matrix} \right\}$

e iguala-se o resultado a zero:

$$\delta (\Pi_e^m) = 0 \quad (2.35.a.)$$

ou seja:

$$\frac{\partial \Pi_e^m}{\partial \left\{ \begin{array}{c} X_e^m \\ \alpha_m \\ b \end{array} \right\}} = 0 \quad (2.35.b.)$$

Então, tem-se:

$$\frac{\partial \Pi_e^m}{\partial \left\{ \begin{array}{c} X_e^m \\ \alpha_m \\ b \end{array} \right\}} = \pi^* \left[ [M]^T [G_e^m] [M] \left\{ \begin{array}{c} X_e^m \\ \alpha_m \\ b \end{array} \right\} - \left[ \begin{array}{c|c|c} a^- & I_4 & \\ \hline & a^+ & I_4 \\ \hline & & I_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F_e^m \\ \Theta \end{array} \right\} \right] = 0 \quad (2.36.a.)$$

onde

$$[G_e^m] = \int_0^L [w_e^m]^T [E] [w_e^m] AR d\xi \quad (2.36.b.)$$

resultando:

$$[M]^T [G_e^m] [M] \begin{Bmatrix} X_e^m \\ -\alpha_m \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a^- & I_4 & & \\ & & & \\ & & a^+ & I_4 \\ & & & & I_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_e^m \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_e^m \\ \bar{\Theta} \end{Bmatrix} \quad (2.37.)$$

onde  $\{\bar{F}_e^m\}$  é um vetor que leva em conta as forças de contorno e os raios do paralelo no contorno, ou seja, nos respectivos pontos de aplicação daquelas.

Da equação (2.37.), define-se uma matriz de rigidez  $[\bar{K}_e^m]$  do elemento, da qual, como exemplo de aplicação da formulação aqui desenvolvida, são apresentados os termos no Apêndice A.6.:

$$[\bar{K}_e^m] = [M]^T [G_e^m] [M] \quad (2.38.)$$

A matriz  $[\bar{K}_e^m]$  é uma matriz (12 x 12) que pode ser particionada convenientemente para se eliminar  $\{\alpha_m^b\}$  da equação (2.37.). Logo:

$$[\bar{K}_e^m] = \begin{bmatrix} K_{aa}^m & K_{ab}^m \\ K_{ba}^m & K_{bb}^m \end{bmatrix} \quad (2.39.)$$



Então podemos escrever, de (2.37.) e (2.39.):

$$[K_{aa}^m] \{X_e^m\} + [K_{ab}^m] \{\alpha_b^m\} = \{\overline{F}_e^m\} \quad (2.40.a.)$$

$$[K_{ba}^m] \{X_e^m\} + [K_{bb}^m] \{\alpha_b^m\} = \{\Theta\} \quad (2.40.b.)$$

Explicitando-se  $\{\alpha_b^m\}$  de (2.40.b.) e colocando-se este valor em (2.40.a.) obtém-se, finalmente, a matriz de rigidez do elemento, para o harmônico m:

$$\{\overline{F}_e^m\} = [K_e^m] \{X_e^m\} \quad (2.41.a.)$$

onde

$$[K_e^m] = K_{aa}^m - K_{ab}^m (K_{bb}^{-1}) K_{ba}^m \quad (2.41.b.)$$

## 2.8. Matriz de Tensões do Elemento

Na Secção 2.6., a equação (2.23.a.) dá as tensões resultantes para um elemento genérico de casca.

Na resolução de um problema qualquer de cascas, para calcular as tensões resultantes usa-se escrever a relação (2.23.a.) em termos do vetor deslocamentos no contorno do elemento  $\{X_e^m\}$ . Usando este procedimento, necessita-se de uma matriz de tensões do elemento  $[T_e^m]$ , que será obtida conforme segue.

Substituindo em (2.23.a.) a expressão (2.15.a.) das deformações específicas do elemento, para o harmônico m, tem-se as tensões resultantes  $\{\sigma_e^m\}$  em termos do vetor coordenadas generalizadas  $\{\alpha_e^m\}$ :

$$\{\sigma_e^m\} = [E] [W_e^m] \{\alpha_e^m\} \quad (2.42.)$$

Agora necessita-se de uma relação entre o vetor coordenadas generalizadas  $\{\alpha_e^m\}$  e o vetor deslocamentos nos contornos  $\{X_e^m\}$ .

Da equação (2.40.b) obtém-se:

$$\{\alpha_b^m\} = - [K_{bb}^m]^{-1} [K_{ba}^m] \{X_e^m\} \quad (2.43.a)$$

que levada à equação (2.11.), resulta:

$$\{\alpha_a^m\} = \left\{ [B_a^m]^{-1} + [B_a^m]^{-1} [B_b^m] [K_{bb}^m]^{-1} [K_{ba}^m] \right\} \{X_e^m\} \quad (2.43.b.)$$

Compondo os vetores  $\{\alpha_a^m\}$  e  $\{\alpha_b^m\}$  no vetor coordenadas generalizadas  $\{\alpha_e^m\}$ , como indicado nas equações (2.9.h) e (2.9.i), obtém-se a relação matricial entre esse vetor e o vetor deslocamentos nos contornos do elemento  $\{X_e^m\}$ :

$$\{\alpha_e^m\} = [D_e^m] \{X_e^m\} \quad (2.44.)$$

onde a matriz  $[D_e^m]$  é dada por:

$$[D_e^m] = \begin{bmatrix} [B_a^m]^{-1} + [B_a^m]^{-1} [B_b^m] [K_{bb}^m]^{-1} [K_{ba}^m] \\ \hline -[K_{bb}^m]^{-1} [K_{ba}^m] \end{bmatrix} \quad (2.45.)$$

Colocando a expressão (2.44.) em (2.42.) tem-se:

$$\{\sigma_e^m\} = [E] [W_e^m] [D_e^m] \{X_e^m\} \quad (2.46.)$$

Assim, define-se a matriz de tensões do elemento  $[T_e^m]$

por

$$[T_e^m] = [E] [W_e^m] [D_e^m] \quad (2.47.)$$

### 3. SUB-PROGRAMA DIGITAL CASCAM

#### 3.1. Introdução

Com a formulação analítica desenvolvida no Capítulo 2 foi codificado um sub-programa digital para a determinação das matrizes de rigidez, de massa e de tensões para um elemento finito curvo de casca de revolução. Estas matrizes serão utilizadas pelo Programa Analisador Dinâmico de Cascas (PADCAS) na resolução de problemas práticos os mais diversos.

#### 3.2. Breve Descrição do Sub-Programa CASCAM

A estrutura do sub-programa CASCAM encontra-se sucintamente esquematizada na Figura 3.1.

Os dados utilizados neste sub-programa, fornecidos de acordo com a Referência [4], incluem:

- a) o tipo de geometria da casca (JG)
- b) os coeficientes definidores do meridiano (AGEV)
- c) a coordenada axial de início do elemento (XGLOBL)
- d) o comprimento axial do elemento (XELEMT)
- e) as propriedades mecânicas da casca (PSKV)
- f) as propriedades das nervuras longitudinais (PSTV), se houverem.
- g) o número de nervuras longitudinais (NST)
- h) o número do harmônico (N)

Como primeiro passo, a sub-rotina CRVMER calcula as

constantes geométricas, abaixo definidas, para a coordenada de início do elemento:

$$Z = \text{raio do meridiano} \quad (3.1.a)$$

$$A_{11} = Z^2 \quad (3.1.b)$$

$$A_{22} = 1 + Z'^2 \quad (3.1.c)$$

$$B_{11} = \frac{Z}{\sqrt{A_{22}}} \quad (3.1.d)$$

$$B_{22} = \frac{Z''}{\sqrt{A_{22}}} \quad (3.1.e)$$

$$G_{121} = \frac{Z'}{Z} \quad (3.1.f)$$

$$G_{112} = \frac{-ZZ'}{A_{22}} \quad (3.1.g)$$

$$G_{222} = \frac{Z'Z''}{A_{22}} \quad (3.1.h)$$

onde

$$( )' = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{e} \quad ( )'' = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

Em seqüência, a sub-rotina CMAT calcula os termos da matriz [M], dada pela equação (2.13.b).

A seguir, a sub-rotina INTEGR calcula a matriz  $[G_e^m]$  que é fornecida na formulação analítica por (2.37.b). Este cálculo é realizado utilizando-se uma fórmula de integração de sete pontos pivotais [Referência 3]:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_0 + 6\bar{h}} f(\xi) d\xi \approx \frac{3\bar{h}}{10} (f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6) \quad (3.2)$$

onde  $f_i = f(\xi_0 + i \bar{h})$ ,  $i = 0, 6$

e  $\bar{h}$  = intervalo pivotal

A seguir, são calculadas as constantes geométricas, de finidas por (3.1.), para a coordenada de término do elemento, pois necessita-se destas constantes nas etapas seguintes de CASCAM.

O cálculo da matriz de rigidez do elemento  $[K_e^m]$  e da matriz  $[D_e^m]$ , de acordo com (2.41.b) e (2.45), é efetuado pela sub-rotina RIGIDZ.

Utilizando a matriz  $[D_e^m]$  é calculada a seguir a matriz de tensões do elemento  $[T_e^m]$ , dada pela equação (2.47), através da sub-rotina TENSÃO. Adicionalmente, a influência do cisalhamento é levada em conta através da sub-rotina CISALH.

Obtidas estas matrizes, elas são utilizadas pelo programa PADCAS na resolução do problema e fornecimento dos resultados de deslocamentos e tensões resultantes.

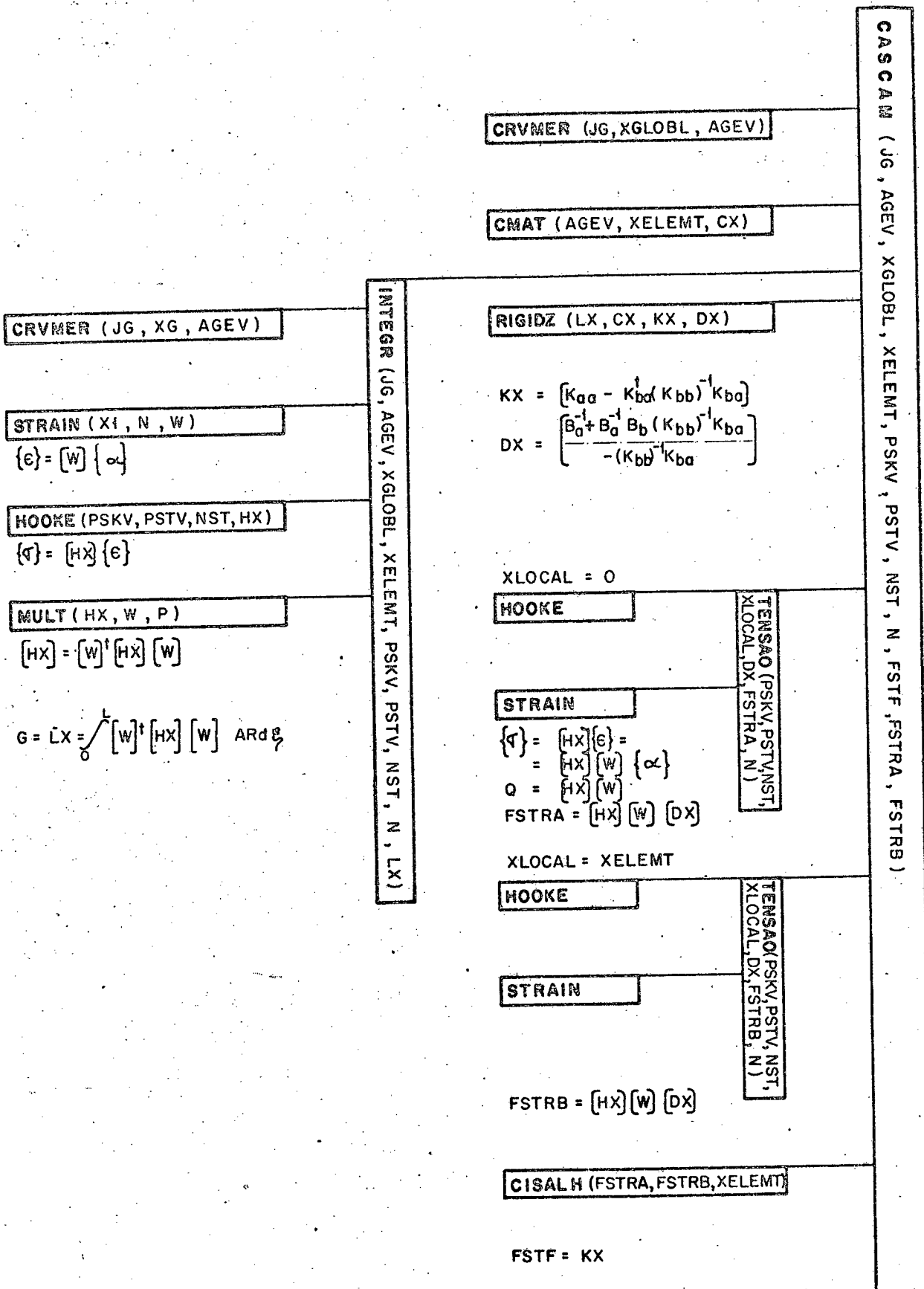


Figura 3.1. - Subprograma CASCAM

## 4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

### 4.1. Introdução

A formulação analítica desenvolvida no Capítulo 2 deve ser testada. Como visto no Capítulo 3, o subprograma digital CASCAM foi codificado a partir da mesma. Utilizando este subprograma, inserido no programa geral PADCAS, foram resolvidos alguns problemas típicos de cascas de revolução, cujas soluções analíticas ou numéricas são conhecidas das referências citadas em cada caso, visando comparar resultados e comprovar a formulação utilizada.



## 4.2. Solução de Problemas e Comparação de Resultados

4.2.1. Casca cilíndrica de espessura constante, longa, carregada com pressão interna uniforme, momento distribuído e força cortante distribuída no extremo.

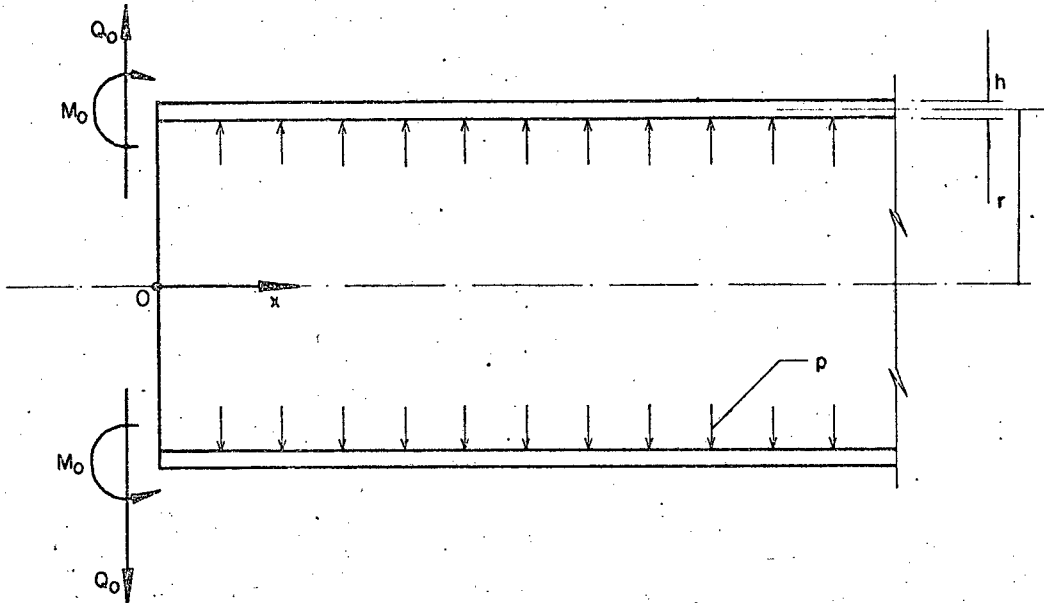


Figura 4.1.

Dados:  $E_{\xi} = E_{\phi} = E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

$\nu_{\xi\phi} = \nu_{\phi\xi} = \nu = 0.3$

$h = 0.1 \text{ cm}$

$r = 2 \text{ cm}$

$p = 100 \text{ kgf/cm}^2$

$Q_0 = 100 \text{ kgf}$

$M_0 = 100 \text{ kgf.cm}$

Número de elementos = 60

A solução analítica deste problema está apresentada na Referência [5], sendo fornecidos o deslocamento radial  $w$  e o mo-

mento meridional  $M_\xi$ :

$$w = \frac{pr^2}{Eh} + \frac{e^{-\mu x}}{2\mu^3 D} [ Q_0 \cos \mu x - \mu M_0 (\sin \mu x - \cos \mu x) ] \quad (4.1.)$$

$$M_\xi = - \frac{e^{-\mu x}}{\mu} [ Q_0 \sin \mu x + \mu M_0 (\cos \mu x + \sin \mu x) ] \quad (4.2.)$$

onde  $x$  é a coordenada de comprimento da casca, medida a partir do extremo da casca, conforme indica a Figura 4.1. e

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{r^2 h^2}}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Para testar a validade da formulação adotada, este problema foi resolvido, usando o subprograma CASCAM, considerando-se uma casca cilíndrica longa (comprimento maior que três vezes o diâmetro, pelo menos), de 15 cm de comprimento, com condição de contorno de engastamento ( $u = v = w = \theta = 0$ ) no extremo oposto aquele em que estão aplicados momentos e forças distribuídas. A casca foi tomada bastante longa de tal forma que, a partir de uma certa distância do engaste, ela possa ser considerada como aquela da solução analítica, sendo a influência do engaste na solução numérica bastante minimizada.

A seguir, na Tabela 4.1., são apresentados os resulta -

TABELA 4.1. - Deslocamento radial  $w$  e momento meridional  $M_{\xi}$

$\frac{x}{L}$	$w$			$M_{\xi}$		
	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]
0.0	$4.4326181 \times 10^{-2}$	$4.4460621 \times 10^{-2}$	-0.30	$-1.0 \times 10^2$	$-1.0724094 \times 10^{-2}$	-7.24
0.1	$2.0713285 \times 10^{-3}$	$2.0732109 \times 10^{-3}$	-0.09	2.1884056	2.1225805	3.01
0.2	$1.8953834 \times 10^{-3}$	$1.8952556 \times 10^{-3}$	0.01	$-4.9225660 \times 10^{-3}$	$-2.8611161 \times 10^{-3}$	41.88
0.3	$1.9048301 \times 10^{-3}$	$1.9046499 \times 10^{-3}$	0.01	$-3.4227140 \times 10^{-4}$	$-3.4051482 \times 10^{-4}$	0.51
0.4	$1.9047629 \times 10^{-3}$	$1.9045188 \times 10^{-3}$	0.01	$-2.2180000 \times 10^{-6}$	$-2.3393368 \times 10^{-6}$	-5.47
0.5	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9044946 \times 10^{-3}$	0.01	(*)		
0.6	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9045046 \times 10^{-3}$	0.01			
0.7	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9044906 \times 10^{-3}$	0.01			
0.8	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9044988 \times 10^{-3}$	0.01			
0.9	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9379163 \times 10^{-3}$	-1.74			
1.0		0.0				

(\*) Nota: A partir de  $\frac{x}{L} = 0.5$  a comparação entre soluções analítica e numérica não tem validade para o momento meridional  $M_{\xi}$  pois os resultados são de ordem de grandeza do erro utilizado na resolução do problema numérico.

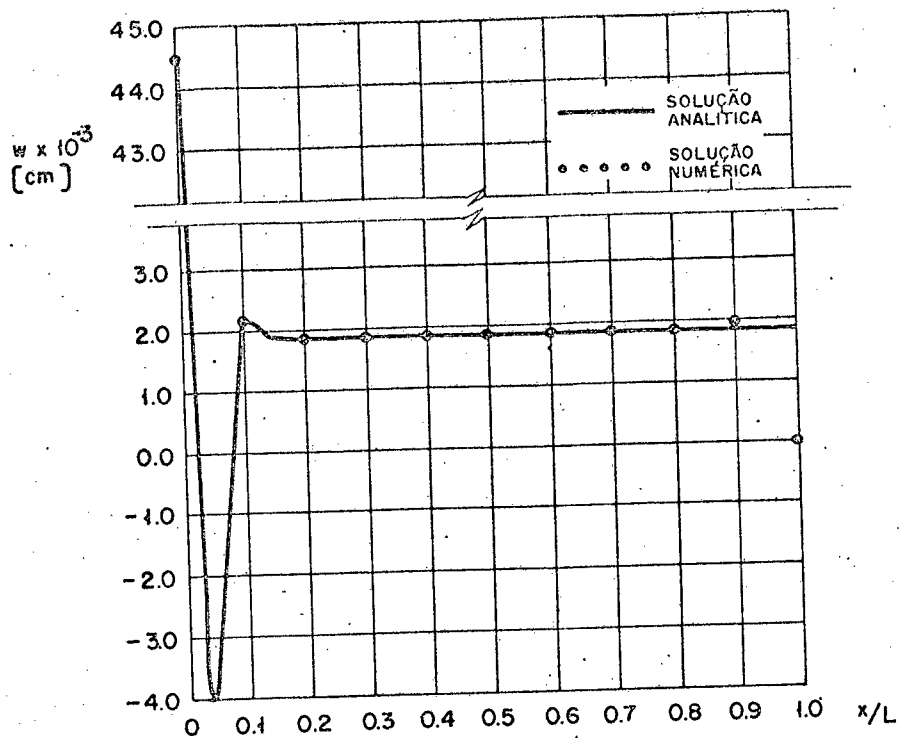


Figura 4.2. - Deslocamento radial  $w$

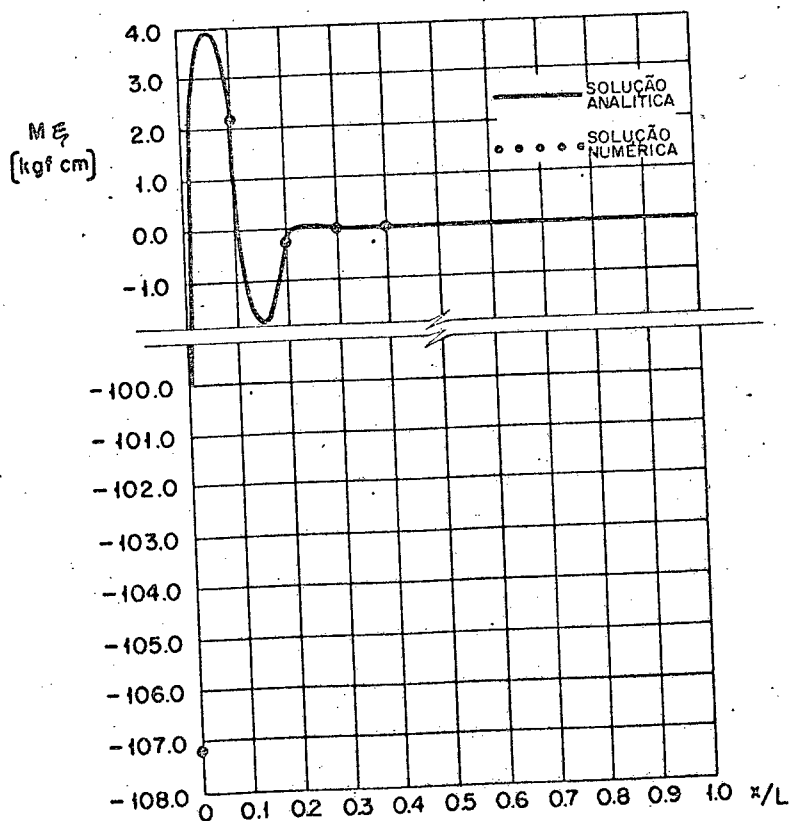


Figura 4.3. - Momento meridional  $M_{\xi}$

dos para o problema proposto usando as expressões (4.1.) e (4.2.), os resultados obtidos utilizando o subprograma CASCAM, como também o erro da solução numérica em relação à solução analítica, em função do comprimento adimensionalizado  $\frac{x}{L}$ .

Os resultados da Tabela 4.1. estão apresentados graficamente nas Figuras 4.2. e 4.3..

Analisando os resultados obtidos com o subprograma CASCAM verifica-se que, para o deslocamento radial, os percentuais de erro em relação à solução analítica são excelentes. Logicamente, esta comparação não é válida nas proximidades de  $\frac{x}{L} = 1.0$ , pois a solução analítica não leva em conta o engaste usado no extremo direito da casca cilíndrica, na solução numérica. Considerando o momento meridional, para os primeiros valores os resultados são razoáveis. Mas, para  $\frac{x}{L} = 0.2$ , tem-se um erro relativo grande; note-se, no entanto, que isto ocorre quando o valor do momento meridional vai tornando-se cada vez menor, comparativamente aos valores iniciais. Considerando que, para valores muito pequenos, a precisão da solução numérica computacional diminui e que, em análise de tensões, os maiores valores têm maior importância, pode-se considerar que a solução numérica apresenta uma boa precisão.

Uma análise global dos erros relativos para os resultados obtidos mostra que os valores de deslocamento radial apresentam precisão maior comparados aos valores de momento meridional. Isto era perfeitamente previsível uma vez que, para a obtenção da matriz de rigidez do elemento, foi utilizado o Princípio da Energia Potencial Total Mínima, que produz excelentes resultados para o campo de deslocamentos e resultados razoáveis para o campo de tensões.

4.2.2. - Casca cilíndrica de espessura constante, curta, carregada com pressão interna uniforme.

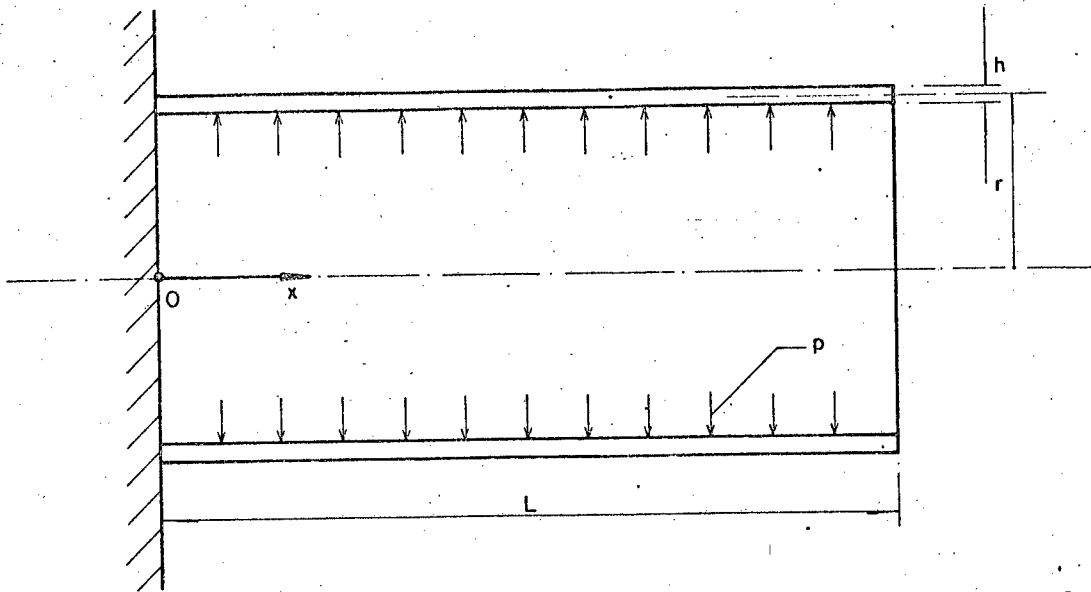


Figura 4.4.

$$\text{Dados: } E_{\xi} = E_{\phi} = E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\nu_{\xi\phi} = \nu_{\phi\xi} = \nu = 0.3$$

$$h = 0.1 \text{ cm}$$

$$r = 2 \text{ cm}$$

$$p = 100 \text{ kgf/cm}^2$$

$$L = 15 \text{ cm}$$

$$\text{N}^{\circ} \text{ de Elementos} = 60$$

A solução analítica deste problema encontra-se na Referência [11], dada na forma do deslocamento radial  $w$  e do momento meridional  $M_{\xi}$ :

$$w = \frac{p r^2}{Eh} \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh^2 \mu L + \cos^2 \mu L} \left[ \cosh \mu L (\sin \mu x \cdot \sinh \mu (L-x) + \cos \mu x \cosh \mu (L-x)) - \cos \mu L (\sinh \mu x \cdot \sin \mu (L-x) - \cosh \mu x \cos \mu (L-x)) \right] \right\} \quad (4.3.)$$

$$M_\xi = - \frac{p r h}{2 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{1}{\cosh^2 \mu L + \cos^2 \mu L} \left\{ \cosh \mu L \left[ \sin \mu x \sinh \mu (L-x) - \cos \mu x \cosh \mu (L-x) \right] + \cos \mu L \left[ \sinh \mu x \sin \mu (L-x) + \cosh \mu x \cos \mu (L-x) \right] \right\} \quad (4.4.)$$

onde  $x$  é a coordenada de comprimento da casca, medida a partir do engaste, conforme indica a Figura 4.4. e  $\mu$  é o mesmo definido no item 4.2.1..

Resolvendo este problema numericamente, utilizando o subprograma CASCAM, obtém-se resultados dados pela Tabela 4.2., onde estes também são comparados com os valores obtidos usando as expressões analíticas (4.3.) e (4.4.).

Os resultados da Tabela 4.2. são apresentados graficamente nas Figuras 4.5 e 4.6.

A análise dos resultados obtidos com o subprograma CASCAM leva à constatação que os valores para o deslocamento radial são muito bons. Note-se, no entanto, que os deslocamentos radiais próximos do extremo livre da casca não têm a precisão dos anteriores. Já os resultados para momento meridional não apresentam a mesma performance; novamente deve-se notar que os valores de momento meridional perdem em precisão à medida que vão tornando-se

cada vez menores, o que é esperado uma vez que a precisão da solução computacional cai para valores muito pequenos.

Outra vez pode-se notar que os valores para deslocamentos apresentam precisão maior que os valores para tensões resultantes o que ocorre devido à utilização do Princípio da Energia Potencial Total Mínima.



TABELA 4.2. - Deslocamento radial w e momento meridional  $M_\xi$

$\frac{x}{L}$	w			$M_\xi$		
	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]
0.0	0.0	0.0	0.0	6.0522751	5.5753126	7.88
0.1	$1.8773609 \times 10^{-3}$	$1.9379063 \times 10^{-3}$	-3.23	$7.4857488 \times 10^{-2}$	$5.6371689 \times 10^{-2}$	24.69
0.2	$1.9043716 \times 10^{-3}$	$1.9044823 \times 10^{-3}$	-0.01	$0.9135628 \times 10^{-3}$	$0.5519178 \times 10^{-3}$	39.59
0.3	$1.9047563 \times 10^{-3}$	$1.9044792 \times 10^{-3}$	0.01			
0.4	$1.9047618 \times 10^{-3}$	$1.9044904 \times 10^{-3}$	0.01			
0.5	$1.9047618 \times 10^{-3}$	$1.9044811 \times 10^{-3}$	0.01			
0.6	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9044990 \times 10^{-3}$	0.01			
0.7	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9045556 \times 10^{-3}$	0.01			
0.8	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9045642 \times 10^{-3}$	0.01			
0.9	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$1.9058301 \times 10^{-3}$	-0.06			
1.0	$1.9047619 \times 10^{-3}$	$2.0685797 \times 10^{-3}$	-8.60			

(\*) A partir de  $\frac{x}{L} = 0.3$  os valores de  $M_\xi$  apresentam a ordem de grandeza do erro usado na resolução do problema, sendo não-confiáveis e eliminando a validade da comparação.

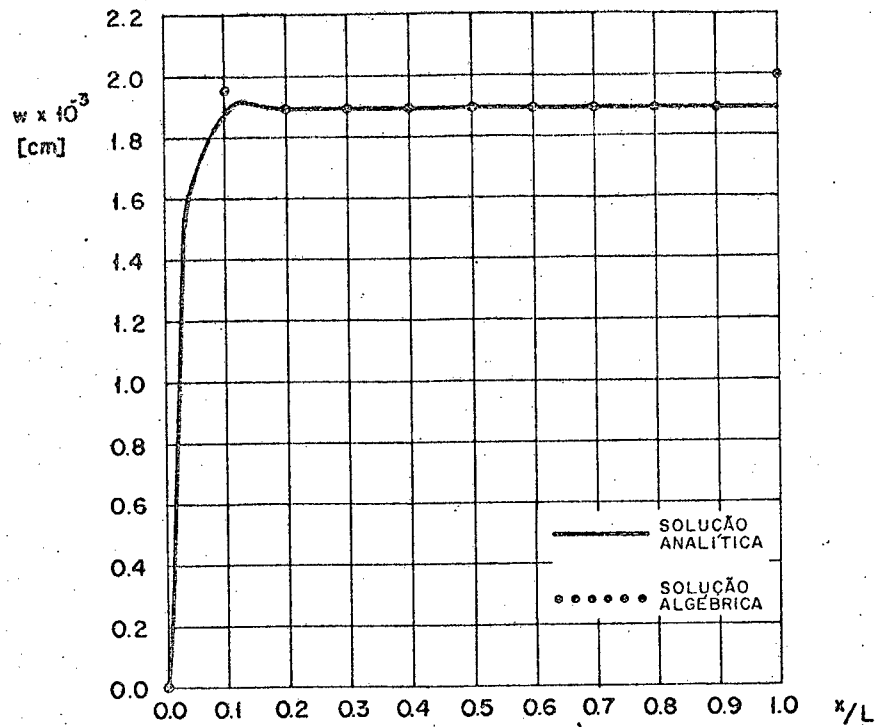


Figura 4.5. - Deslocamento radial  $w$

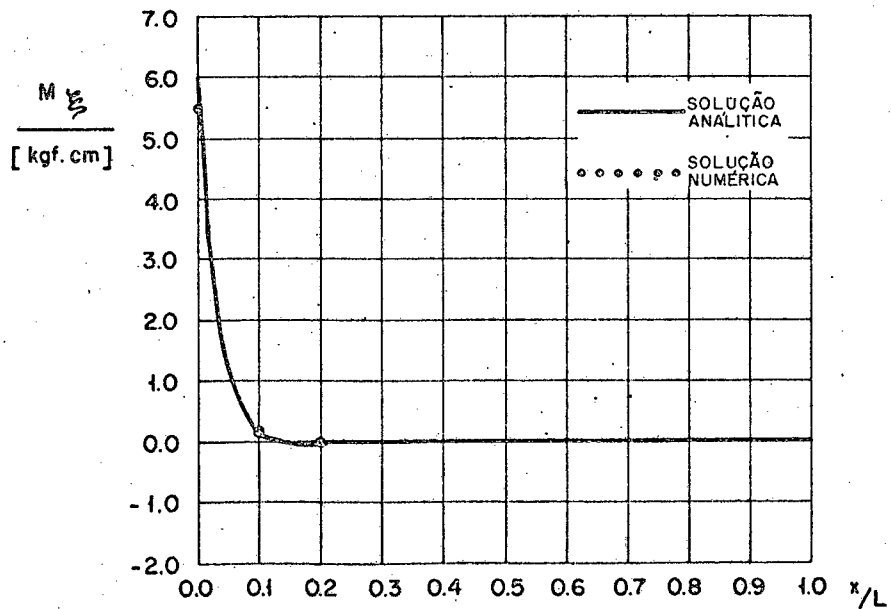


Figura 4.6. - Momento meridional  $M_{\xi}$

4.2.2. Casca cilíndrica de espessura constante, curta, bi-engastada, carregada com pressão interna uniforme.

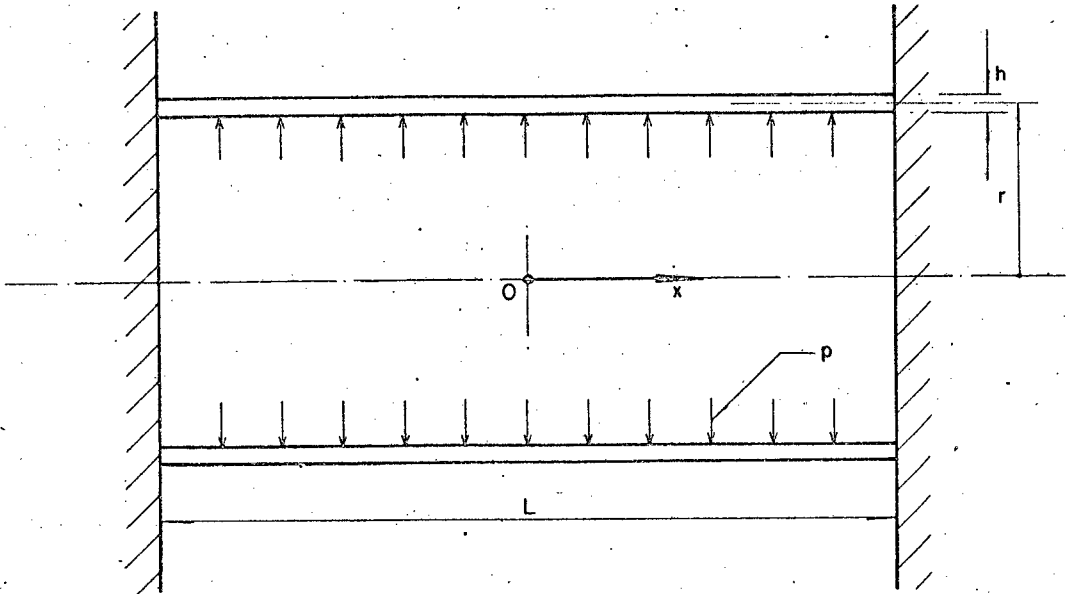


Figura 4.7.

Dados:  $E_{\xi} = E_{\phi} = E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$   
 $\nu_{\xi\phi} = \nu_{\phi\xi} = \nu = 0.3$   
 $h = 0.1 \text{ cm}$   
 $r = 2 \text{ cm}$   
 $p = 100 \text{ kgf/cm}^2$

A solução analítica deste problema está apresentada na Referência [5], sendo fornecidos o deslocamento radial  $w$  e o momento meridional  $M_{\xi}$ :

$$w = \frac{pr^2}{Eh} \left[ 1 - \frac{(\text{sen}\delta \cosh\delta + \text{cos}\delta \sinh\delta)}{(\sinh\delta \cosh\delta + \text{sen}\delta \cos\delta)} \cosh \mu x \cos \mu x - \frac{(\text{sen}\delta \cosh\delta - \text{cos}\delta \sinh\delta)}{(\sinh\delta \cosh\delta + \text{sen}\delta \cos\delta)} \sinh \mu x \sin \mu x \right] \quad (4.5.)$$

$$M_{\xi} = - 2 \mu^2 D \frac{Pr^2}{Eh} \left[ \frac{(\text{sen}\delta \cosh\delta + \cos\delta \text{senh}\delta)}{(\text{senh}\delta \cosh\delta + \text{sen}\delta \cos\delta)} \text{sen } \mu x \right. \\ \left. + \frac{(\cos\delta \text{senh}\delta - \text{sen}\delta \cosh\delta)}{(\text{senh}\delta \cosh\delta + \text{sen}\delta \cos\delta)} \cosh \mu x \cos \mu x \right] \quad (4.6.)$$

onde  $x$  é a coordenada de comprimento da casca, medida a partir do centro da casca, conforme indica a Figura 4.7.,  $\mu$  e  $D$  são os mesmos do problema 4.2.1.

$$e \quad \delta = \frac{\mu L}{2}$$

Para testar a validade da formulação adotada, este problema foi resolvido usando o subprograma CASCAM, considerando como condições de contorno  $u = v = w = \theta = 0$ , nos engastes. Para uma melhor avaliação do desempenho do subprograma CASCAM foi obtida a solução para dois casos:

- casca cilíndrica com comprimento  $L = 8$  cm, com 32 elementos.
- casca cilíndrica com comprimento  $L = 2$  cm, com 40 elementos.

Na Tabela 4.3. estão apresentados os resultados, para uma casca cilíndrica de comprimento 8 cm, usando as expressões analíticas (4.5.) e (4.6.), os resultados obtidos usando o subprograma CASCAM, assim como o erro da solução numérica em relação à solução analítica, em função do comprimento adimensionalizado  $\frac{x}{(L/2)}$ , sendo  $x$  medido a partir do centro da casca, conforme a Figura 4.7.

Na Tabela 4.4. estão apresentados os mesmos resultados,

para uma casca cilíndrica de comprimento 2 cm.

Os resultados das Tabelas 4.3. e 4.4. são apresentados graficamente nas Figuras 4.8. e 4.9..

A ocorrência de erros um pouco elevados, comparativamente ao exemplo 4.2.1., é devida ao fato de que a solução analítica considerada não utiliza, como condições de contorno, engastes reais e sim, uma condição de contorno que permite o movimento na direção axial. Esta condição de contorno irreal produz um razoável acréscimo nos valores dos erros quando comparadas as soluções numérica e analítica. Este aspecto já foi discutido anteriormente nas Referências [10, 12]. Em [10] uma determinada formulação é proposta para a solução de problemas de cascas de revolução e, baseado nela, foi codificado o programa CORTER. Resolvendo-se o problema proposto com condições de contorno reais (casca cilíndrica bi-engastada), utilizando o programa CORTER e o subprograma CASCAM, obtêm-se resultados que são comparados, para os dois casos (casca com comprimento  $L = 8$  cm e casca com comprimento  $L = 2$  cm), nas Tabelas 4.5. e 4.6., respectivamente.

Os resultados das Tabelas 4.5. e 4.6. são apresentados graficamente nas Figuras 4.10. e 4.11..

Deve-se aqui ressaltar que foi escolhida a comparação com o programa CORTER para a condição de bi-engastamento ao invés da resolução do problema com a condição de contorno permitindo movimento axial utilizando o subprograma CASCAM, uma vez que o programa PADCAS apresentava alguns problemas no trabalho com condições de contorno mistas.

A análise dos resultados obtidos com o subprograma CASCAM, usando as condições de contorno de engastamento real, mostra que os valores de deslocamento radial para ambos os casos

( $L = 2$  cm e  $L = 8$  cm) são excelentes, comparados com os fornecidos pelo programa CORTER. Já os valores de momento meridional são muito bons para o caso em que  $L = 2$  cm e razoáveis no caso em que  $L = 8$  cm. Novamente podemos constatar uma melhor performance do subprograma CASCAM no fornecimento de resultados relativos ao campo de deslocamentos comparativamente aos do campo de tensões, devido ao uso do Princípio da Energia Potencial Total Mínima na obtenção da matriz de rigidez do elemento finito.

TABELA 4.3. - Deslocamento radial  $w$  e momento meridional  $M_{\xi}$   
(Casca cilíndrica  $c/L = 8$  cm)

$x$ (L/2)	$w / \left( \frac{Pr^2}{E h} \right)$			$M_{\xi} / \left( 2\mu^2 D \frac{Pr^2}{E h} \right)$		
	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]
0.0	1.000008	0.917228	8.28	-0.000028	-2.889822x10 <sup>-5</sup>	-3.21
0.125	1.000057	0.917228	8.28	0.000008	3.519724x10 <sup>-6</sup>	56.00
0.25	0.999995	0.917176	8.28	0.000255	2.408263x10 <sup>-4</sup>	5.56
0.375	0.998936	0.916231	8.28	0.000125	1.790308x10 <sup>-4</sup>	-30.18
0.50	0.998882	0.916178	8.28	-0.004367	-4.023409x10 <sup>-3</sup>	7.87
0.625	1.017587	0.933241	8.29	-0.007114	-7.438785x10 <sup>-3</sup>	-4.57
0.75	1.039538	0.950881	8.53	0.069368	6.179933x10 <sup>-2</sup>	10.91
0.875	0.732840	0.672368	8.25	0.203823	1.991913x10 <sup>-1</sup>	2.27
1.00	0.0	0.0	0.0	-1.000022	-0.845004	15.50

TABELA 4.4. - Deslocamento radial  $w$  e momento meridional  $M_{\xi}$   
(Casca cilíndrica  $c/ L = 2$  cm)

$x$ ( $L/2$ )	$w / \left( \frac{pr^2}{E h} \right)$			$M_{\xi} / \left( 2 \mu^2 D \frac{pr^2}{E h} \right)$		
	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]
0.0	1.078892	1.016450	5.79	0.138933	0.131762	5.16
0.1	1.067325	1.005399	5.80	0.145292	0.137791	5.16
0.2	1.031601	0.971402	5.84	0.162444	0.153835	5.30
0.3	0.968967	0.911922	5.89	0.184447	0.173624	5.87
0.4	0.875929	0.823830	5.95	0.200903	0.188555	6.15
0.5	0.749982	0.704925	6.01	0.196404	0.184070	6.28
0.6	0.592155	0.556282	6.06	0.150152	0.141140	6.00
0.7	0.410448	0.385421	6.10	0.036175	0.034953	3.38
0.8	0.224106	0.210377	6.13	-0.175286	-0.162567	7.26
0.9	0.068489	0.064281	6.14	-0.514537	-0.480064	6.70
1.0	0.0	0.0	0.0	-1.006518	-0.941359	6.47



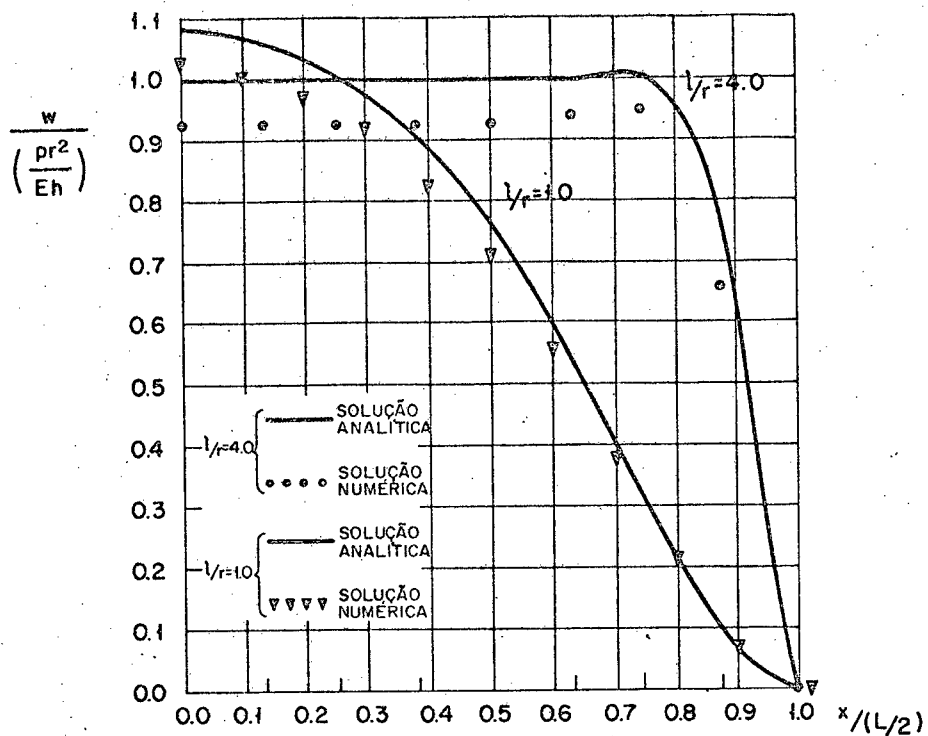


Figura 4.8. - Deslocamento radial w

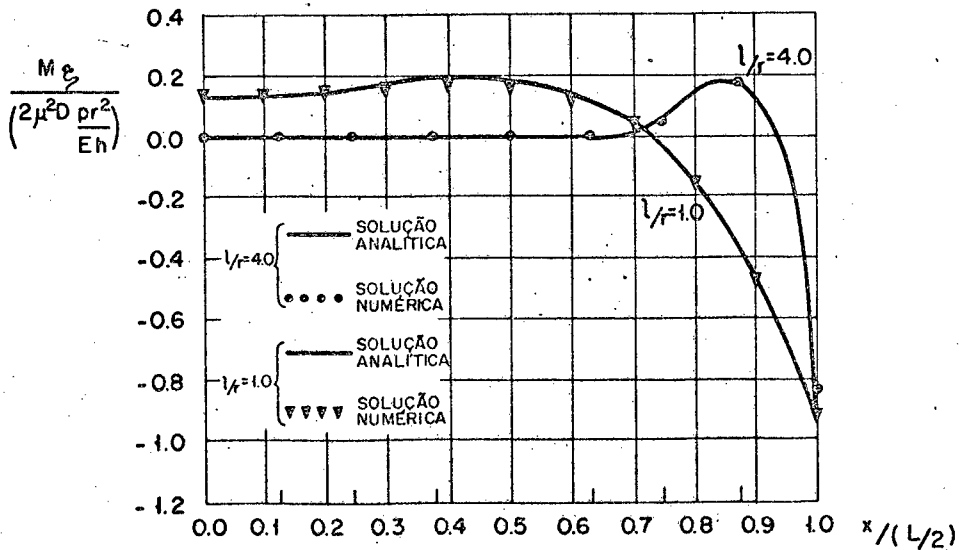


Figura 4.9. - Momento meridional  $M_{\xi}$

TABELA 4.5. - Deslocamento radial  $w$  e momento meridional  $M_{\xi}$   
(Casca cilíndrica  $c/L = 8$  cm)

$\frac{x}{L/2}$	$w / \left( \frac{Pr^2}{Eh} \right)$			$M_{\xi} / \left( 2u^2 \frac{Pr^2}{Eh} \right)$		
	Solução Numérica Programa CORTER	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]	Solução Numérica Programa CORTER	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]
0.0	$9.1728 \times 10^{-1}$	$9.17228 \times 10^{-1}$	0.01			
0.125	$9.173325 \times 10^{-1}$	$9.17228 \times 10^{-1}$	0.01		(*)	
0.25	$9.1728 \times 10^{-1}$	$9.17176 \times 10^{-1}$	0.01	$2.480885 \times 10^{-4}$	$2.408263 \times 10^{-4}$	2.93
0.375	$9.162825 \times 10^{-1}$	$9.16231 \times 10^{-1}$	0.01	$2.094749 \times 10^{-4}$	$1.790308 \times 10^{-4}$	14.53
0.50	$9.16335 \times 10^{-1}$	$9.16178 \times 10^{-1}$	0.02	$-4.029724 \times 10^{-3}$	$-4.023409 \times 10^{-3}$	0.16
0.625	$9.3366 \times 10^{-1}$	$9.33241 \times 10^{-1}$	0.04	$-7.324518 \times 10^{-3}$	$-7.438785 \times 10^{-3}$	-1.56
0.75	$9.526125 \times 10^{-1}$	$9.50881 \times 10^{-1}$	0.18	$6.491113 \times 10^{-2}$	$6.179933 \times 10^{-2}$	4.79
0.875	$6.661725 \times 10^{-1}$	$6.72368 \times 10^{-1}$	-0.93	$1.850215 \times 10^{-1}$	$1.991915 \times 10^{-1}$	-7.66
1.00	0.0	0.0	0.0	$-9.433414 \times 10^{-1}$	$-8.45004 \times 10^{-1}$	10.43

(\*) Nota: Os valores obtidos pelo subprograma CASCAM, nesta região, eram muito pequenos, da ordem de grandeza do erro usado na resolução do problema numérico, comprometendo a comparação.

TABELA 4.6. - Deslocamento radial  $w$  e momento meridional  $M_{\xi}$   
(Casca cilíndrica  $c/L = 2$  cm)

$x$ (L/2)	$w / \left( \frac{pr^2}{Eh} \right)$			$M_{\xi} / \left( 2\mu^2 D \frac{pr^2}{Eh} \right)$		
	Solução Numérica Programa CORTER	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]	Solução Numérica Programa CORTER	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]
0.0	1.0131975	1.016450	-0.32	0.131042	0.131762	-0.55
0.1	1.0022775	1.005399	-0.31	0.136995	0.137791	-0.58
0.2	0.968625	0.971402	-0.29	0.153043	0.153835	-0.52
0.3	0.909667	0.911922	-0.25	0.173588	0.173624	-0.02
0.4	0.822045	0.823830	-0.22	0.188838	0.188555	0.15
0.5	0.703500	0.704925	-0.20	0.184294	0.184070	0.12
0.6	0.555083	0.556282	-0.22	0.140382	0.141140	-0.54
0.7	0.384284	0.385421	-0.30	0.032662	0.034953	-7.01
0.8	0.209312	0.210377	-0.51	-0.166846	-0.162567	2.56
0.9	0.063499	0.064281	-1.23	-0.486627	-0.480064	1.35
1.0	0.0	0.0	0.0	-0.950089	-0.941359	0.92

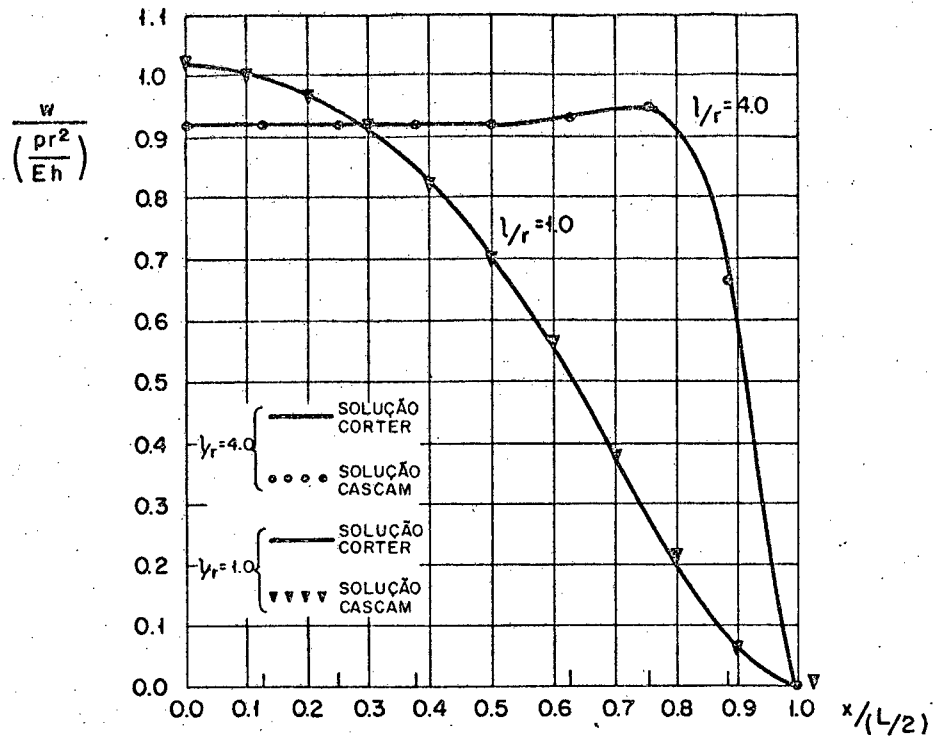


Figura 4.10. - Deslocamento radial  $w$

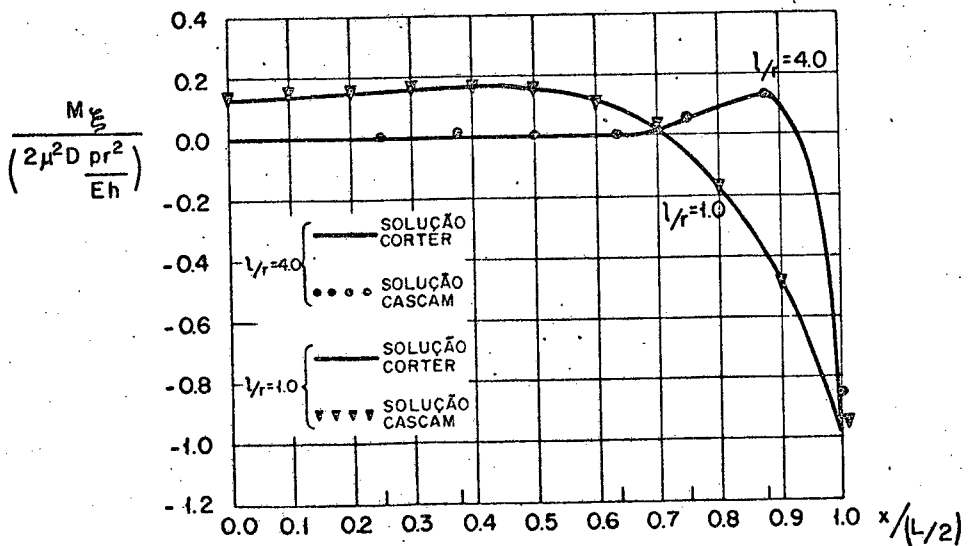


Figura 4.11. - Momento meridional  $M_{\xi}$

4.2.3. Casca cilíndrica de espessura constante, longa, com carga uniformemente distribuída ao longo de uma secção circular.

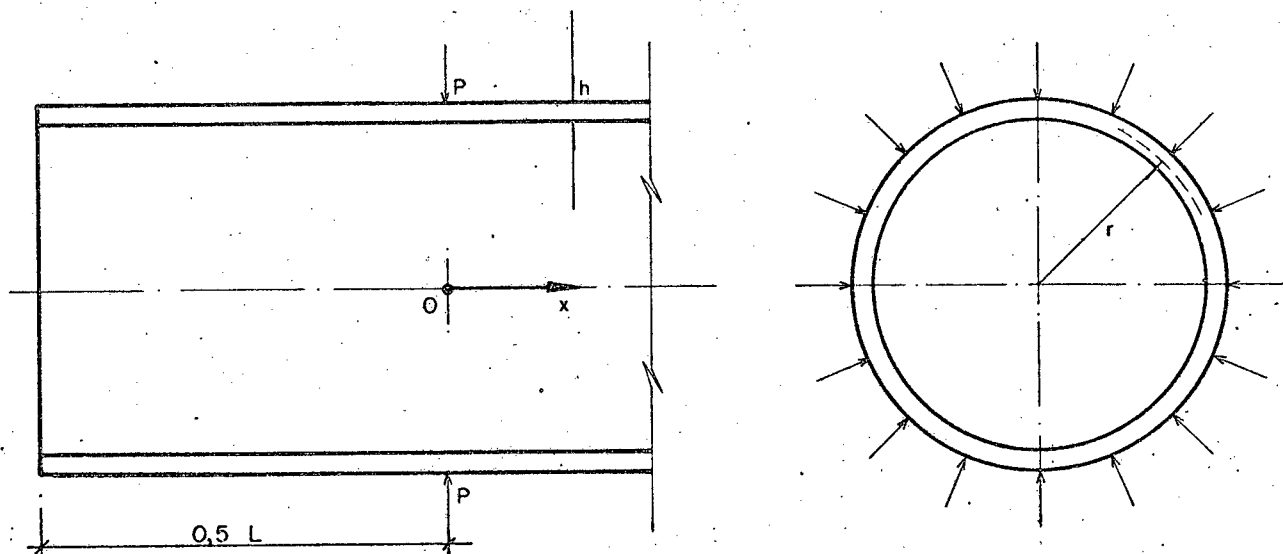


Figura 4.12.

Dados:  $E_{\xi} = E_{\phi} = E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

$\nu_{\xi\phi} = \nu_{\phi\xi} = \nu = 0.3$

$h = 0.1 \text{ cm}$

$r = 2 \text{ cm}$

$P = 100 \text{ kgf}$

Nº de elementos = 60

A solução analítica deste problema está apresentada na Referência [6], na forma do deslocamento radial  $w$  e do momento meridional  $M_{\xi}$ :

$$w = - \frac{P e^{-\mu x}}{8\mu^3 D} (\text{sen } \mu x + \text{cos } \mu x) \quad (4.7.)$$

$$M_{\xi} = \frac{P e^{-\mu x}}{4\mu} (\text{sen } \mu x - \text{cos } \mu x) \quad (4.8.)$$

onde  $\mu$  e  $D$  são os mesmos do problema 4.2.1..

Na resolução deste problema usando o subprograma CASCAM, considerou-se como condição de contorno um engaste, à direita do carregamento, sendo que a casca foi feita bastante longa ( $L = 15\text{cm}$ ) para minimizar a influência deste engaste na área de aplicação da carga.

Na Tabela 4.7. estão apresentados os resultados usando as expressões analíticas (4.7.) e (4.8.), os resultados obtidos com o subprograma CASCAM, bem como o erro da solução numérica em relação à solução analítica, em função do comprimento adimensionalizado  $\frac{x}{(L/2)}$ , medido conforme a Figura 4.12..

Os resultados da Tabela 4.7. estão apresentados na forma de gráficos nas Figuras 4.13. e 4.14..

A análise dos resultados mostra que o subprograma CASCAM obtém uma solução numérica muito boa para deslocamentos e boa para tensões resultantes. A partir de  $\frac{x}{(L/2)} = 0.5$  a comparação perde sua razão de ser pois começa a aparecer a influência do engaste, usado à direita do carregamento, nos valores de deslocamentos e tensões resultantes, além dos valores atingirem a ordem de grandeza do erro usado na solução numérica.

TABELA 4.7. - Deslocamento radial  $w$  e momento meridional  $M_{\xi}$

$\frac{x}{(L/2)}$	$w / \left( \frac{P}{8\mu^3 D} \right)$			$M_{\xi} / \left( \frac{P}{4\mu} \right)$		
	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]	Solução Analítica	Solução Numérica Subprograma CASCAM	Erro Relativo [%]
0.0	-1.00	-0.998887	0.11	-1.00	-0.920282	7.97
0.1	-3.262182x10 <sup>-2</sup>	-3.241804x10 <sup>-2</sup>	0.62	1.605167x10 <sup>-1</sup>	1.596423x10 <sup>-1</sup>	0.54
0.2	1.758705x10 <sup>-2</sup>	1.753459x10 <sup>-2</sup>	0.30	-7.114362x10 <sup>-3</sup>	-8.100885x10 <sup>-3</sup>	-13.87
0.3	-1.811675x10 <sup>-3</sup>	-1.802284x10 <sup>-3</sup>	0.52	-1.243423x10 <sup>-3</sup>	-1.101724x10 <sup>-3</sup>	11.40
0.4	-4.224468x10 <sup>-6</sup>	-2.901050x10 <sup>-6</sup>	31.33	2.544658x10 <sup>-4</sup>	2.494769x10 <sup>-4</sup>	1.96
0.5	2.484371x10 <sup>-5</sup>	3.0920617x10 <sup>-5</sup>	-24.46	-1.586448x10 <sup>-5</sup>	-1.716530x10 <sup>-5</sup>	-8.20
		(*)			(*)	

(\*) Nota: A partir de  $\frac{x}{(L/2)} = 0.5$  os valores começam a ser da ordem de grandeza do erro usado na resolução numérica, além de começar a se notar a influência do engaste usado à direita do carregamento, prejudicando a comparação.

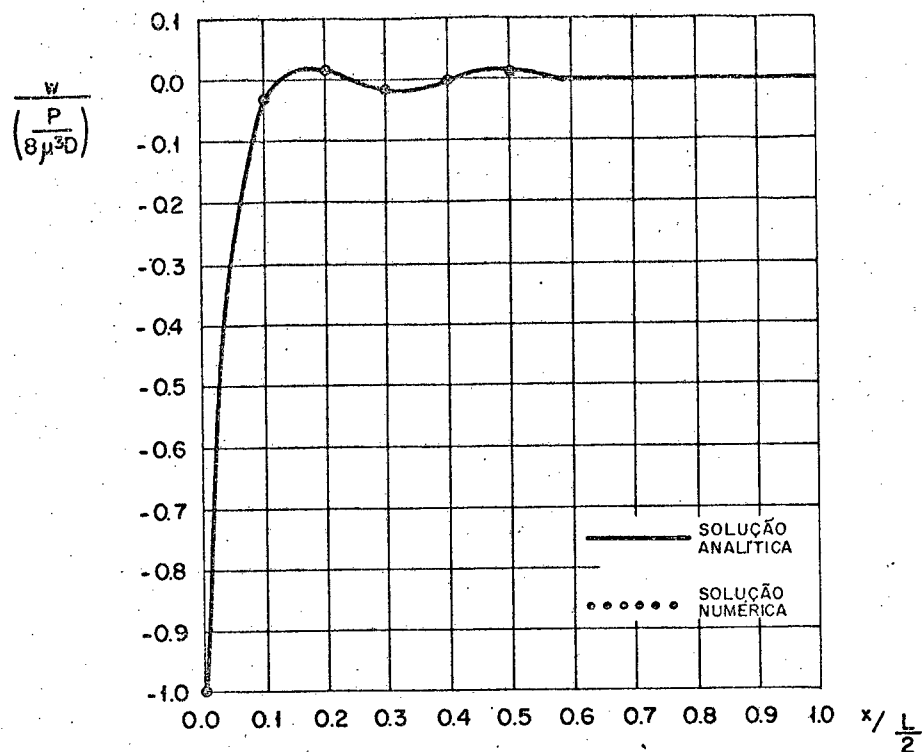


Figura 4.13. - Deslocamento radial  $w$

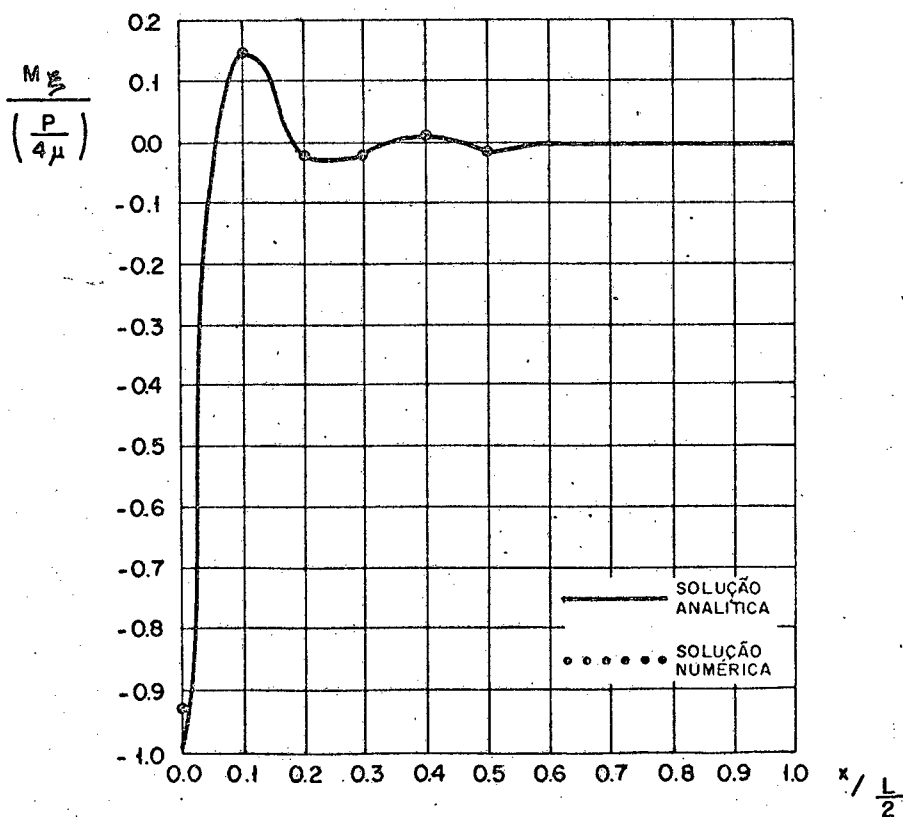


Figura 4.14. - Momento meridional  $M_\xi$



### 4.3. CONCLUSÕES

Uma análise global dos resultados obtidos com o subprograma CASCAM leva à conclusão que a formulação analítica desenvolvida no Capítulo 2 fornece boas soluções para problemas típicos de cascas de revolução. Deve-se notar que os resultados obtidos para o campo de deslocamentos, de um modo geral, são muito bons ao passo que os resultados obtidos para o campo das tensões resultantes não têm a precisão dos anteriores. Isto era esperado pois, via de regra, a formulação de um elemento finito utilizando a minimização do funcional da Energia Potencial Total leva a resultados muito bons de deslocamentos e não tão precisos para tensões.

Com relação à precisão menor dos resultados para as tensões, cabe salientar que os maiores valores de erro relativo ocorrem para os casos em que os valores de momento meridional são muito pequenos. Como, em análise de tensões, o maior interesse está voltado para os maiores valores de tensões, e para estes os erros relativos são bastante razoáveis, este aspecto adicional mostra que a formulação analítica, apresentada no Capítulo 2 e utilizada na forma do subprograma CASCAM, pode ser usada de modo bastante satisfatório na resolução de problemas de cascas de revolução carregadas arbitrariamente.

Deve-se aqui lembrar as várias dificuldades encontradas na verificação da validade da formulação proposta, utilizando o programa PADCAS. Este programa apresentava problemas na utilização de condições de contorno mistas, na resolução de problemas com descontinuidades geométricas e com singularidades (problema do polo). Estes três tópicos exigem um estudo mais acurado de modo a tornar o sistema o mais operacional possível.

Como continuações possíveis deste trabalho pode-se citar:

- a utilização da estrutura do programa PADCAS para testar outras formulações para cascas finas de revolução, podendo inclusive ser aproveitada a estrutura do subprograma CASCAM, se estas formulações não forem fundamentalmente diversas da desenvolvida neste trabalho. Nestas possíveis continuações sugere-se como alternativas expressar os deslocamentos através de polinômios de Legendre e calcular os termos da matriz  $[G_e^m]$  através da fórmula da quadratura de Gauss.

- a utilização da mesma teoria de cascas finas, mas ao invés do funcional da energia potencial total usar um funcional misto, de modo a melhorar os resultados para as tensões, sem um grande prejuízo para os valores de deslocamentos.

- a extensão da formulação para uma análise de cascas semi-espessas, não desprezando os termos  $\frac{z}{R_\xi}$  e  $\frac{z}{R_\phi}$  nas relações de formações-deslocamentos e tensões resultantes-deformações. Além disso, deveria ser introduzida mais uma componente de deslocamento: a rotação circunferencial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALVES, D. Boechat, "Teoria de Cascas", Centro Tecnológico/UFSC, 1978.
2. ALVES, D. Boechat, "Teoria da Elasticidade", Centro Tecnológico/UFSC, 1978.
3. ALVES, D. Boechat, "Métodos Numéricos", Centro Tecnológico/UFSC, 1979.
4. ALVES, D. Boechat, "Manual de Utilização do Programa Analisador Dinâmico de Cascas (PADCAS)", GRANTE, Centro Tecnológico/UFSC, 1979.
5. KRAUS, U., "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
6. TIMOSHENKO, S.P. e WOINOWSKY-KRIEGER, S., "Theory of Plates and Shells", Second Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1959.
7. SEGERLING, L.J., "Applied Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
8. PIAN, T.H.H., "Derivation of Element Stiffness Matrices", AIAA J., Vol. 2, Nº 3, 1964.
9. FLUGGE, W., "Stresses in Shells", Third Printing, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
10. GUENTHER, R., "Análise de Tensões Térmicas em Cascas de Revolução", Dissertação de Mestrado, Centro Tecnológico / UFSC, 1979.
11. HETÉNYI, M., "Beams on Elastic Foundation", The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1979.
12. GUENTHER, R. e ALVES, D. Boechat, "Análise de Tensões em Cascas Ortotrópicas de Revolução", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol. II, nº 1, 1980.
13. BUDIANSKY, B. e RADKOWSKY, P.P., "Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution", AIAA J., Vol. I, nº 8, 1963.

14. SANDERS, J.L., Jr., "An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells", NASA Report 24, 1959.
15. BROMBOLICH, L. e GOULD, P., "Finite Element Analysis of Shells of Revolution by Minimization of the Potential Energy Functional", Proceedings of the Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Vanderbilt University, Nashville, 1969.
16. POPOV, E.P., PENZIEN, J. e LU, Z.A., "Finite Element Solution for Axisymmetrical Shells", Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 90, N° 5, 1964.

A P Ê N D I C E S

A.1. - COEFICIENTES DA FUNÇÃO MERIDIANO  $R(\xi)$

Considerando a Figura 2.1., pode-se escrever as seguintes condições de contorno geométricas para um elemento de casca de revolução:

$$\begin{aligned} p/\xi = 0 & \quad , \quad R = a^- \\ p/\xi = L & \quad , \quad R = a^+ \end{aligned} \quad (\text{A.1.1.})$$

onde  $a^-$  e  $a^+$  são os raios do paralelo no início e término do elemento, respectivamente.

Então, a função meridiano, dada pela equação (2.1.), tem para seus coeficientes:

$$a_0 = a^- \quad (\text{A.1.2.a.})$$

$$a_1 = \tan \gamma^- \quad (\text{A.1.2.b.})$$

$$a_2 = -\frac{1}{L} (\tan \gamma^+ + 2 \tan \gamma^-) - \frac{3}{L^2} (a^- - a^+) \quad (\text{A.1.2.c.})$$

$$a_3 = \frac{1}{L^2} (\tan \gamma^+ + \tan \gamma^-) + \frac{2}{L^3} (a^- - a^+) \quad (\text{A.1.2.d.})$$

onde  $\tan \gamma^-$  e  $\tan \gamma^+$  são as tangentes ao meridiano no início e término do elemento, respectivamente.

Estes coeficientes, para os casos particulares, assumem a seguinte forma:

a) Para casca cilíndrica

As condições de contorno são:

$$p/\xi = 0 \quad e \quad \xi = L \quad , \quad R = a \quad (A.1.3.a.)$$

onde  $a$  é o raio do cilindro.

Então:

$$a_0 = a \quad (A.1.3.b.)$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

b) Para casca cônica

$$a_0 = a^-$$

$$a_1 = \tan \gamma^- \quad (A.1.4.)$$

$$a_2 = a_3 = 0$$

c) Para casca elíptica

$$a_0 = a^-$$

$$a_1 = \tan \gamma^- \quad (A.1.5.)$$

$$a_2 = -\frac{\tan \gamma^-}{L} + \frac{a^+ - a^-}{L^2}$$

$$a_3 = 0$$

## A.2. - SISTEMA DE COORDENADAS

Neste apêndice serão apresentados o sistema de coordenadas usado no presente trabalho e as propriedades geométricas das cascas a ele referenciadas.

Considerando a Figura A.2.1., um ponto genérico P da casca é localizado por um vetor posição  $\bar{R}$ . A normal à superfície de referência que passa pelo ponto P determina na superfície um ponto que é localizado pelo vetor posição  $\bar{r}$ . Então, pode-se escrever:

$$\bar{R}(x_1, x_2, z) = \bar{r}(x_1, x_2) + z \hat{n}(x_1, x_2) \quad (\text{A.2.1.})$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal à superfície de referência,  $z$  é a distância da superfície de referência ao ponto considerado e,  $x_1$  e  $x_2$  são as linhas de coordenadas ortogonais de superfície da superfície de referência [Referência 1].

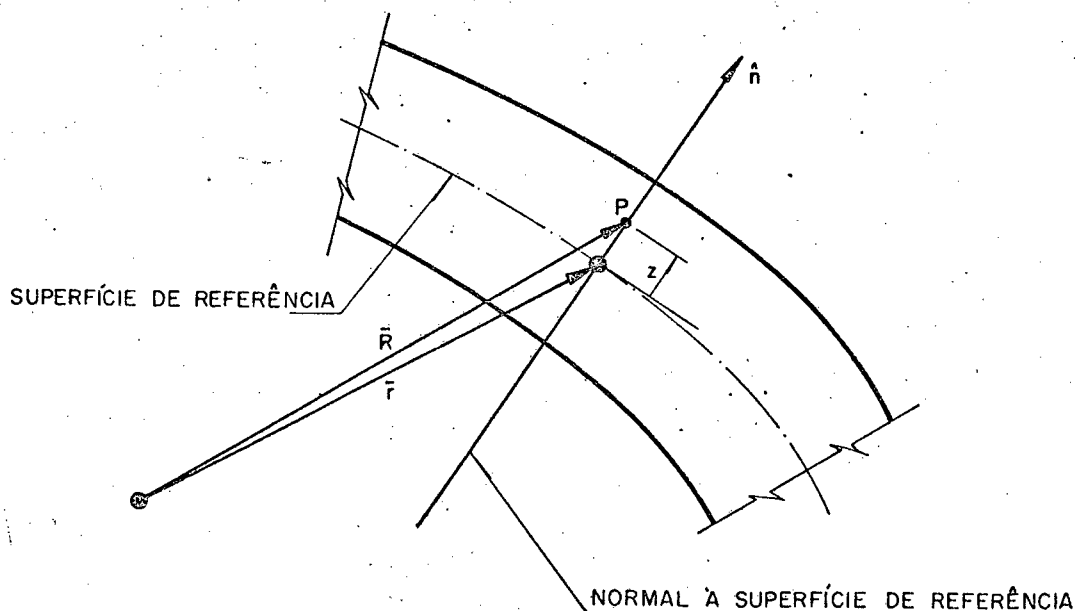


Figura A.2.1.



O diferencial do vetor posição  $\bar{R}$  é dado por:

$$d\bar{R} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial z} dz \quad (\text{A.2.2.a.})$$

onde

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_1} z \quad (\text{A.2.2.b.})$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_2} z \quad (\text{A.2.2.c.})$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial z} = \hat{n} \quad (\text{A.2.2.d.})$$

A distância entre dois pontos infinitamente próximos localizados por  $\bar{R}$  e  $\bar{R} + d\bar{R}$  é dada por:

$$ds^2 = d\bar{R} \cdot d\bar{R} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial x_1} dx_1^2 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial x_2} dx_2^2 + dz^2 \quad (\text{A.2.3.})$$

Considerando que as linhas de coordenadas  $(x_1, x_2, z)$  são linhas de curvatura principais, no caso, ortogonais e como:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial x_1} = \alpha^2 \quad (\text{A.2.4.a.})$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial x_2} = \beta^2 \quad (\text{A.2.4.b.})$$

pode-se escrever a equação (A.2.3.) da seguinte forma:

$$ds^2 = \alpha^2 dx_1^2 + \beta^2 dx_2^2 + \gamma^2 dz^2 \quad (\text{A.2.5.})$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os coeficientes de Lamé [Referência 2] dados por:

$$\alpha = A \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \quad (\text{A.2.6.a.})$$

$$\beta = B \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \quad (\text{A.2.6.b.})$$

$$\gamma = 1 \quad (\text{A.2.6.c.})$$

sendo  $R_1$  e  $R_2$  os raios de curvatura nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente; e

$A^2$  e  $B^2$  os coeficientes da primeira forma fundamental das superfícies.

A distância entre dois pontos infinitamente próximos, sobre a superfície de referência, é dada por:

$$ds^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} \quad (\text{A.2.7.a.})$$

ou melhor [Referência 1]:

$$ds^2 = A^2 dx_1^2 + B^2 dx_2^2 \quad (\text{A.2.7.b.})$$

Para particularizar as equações acima para cascas de revolução, considera-se a Figura A.2.2., onde se tem uma secção perpendicular ao eixo de revolução, na forma de um círculo de raio  $R$ , denominado paralelo. A coordenada  $x_1$  é a coordenada ao

longo do comprimento do meridiano e  $x_2$  a coordenada ao longo do ângulo circunferencial.

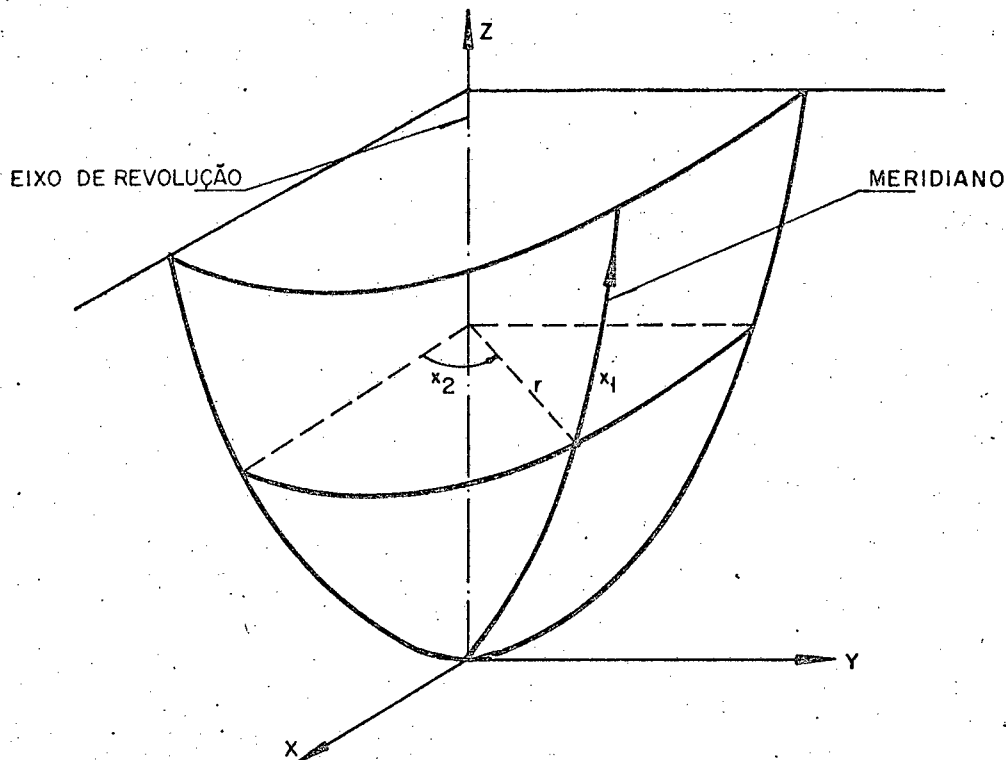


Figura A.2.2.

Então, as equações do meridiano serão:

$$r = r(x_1) \quad \text{e} \quad Z = Z(x_1) \quad (\text{A.2.8.})$$

As coordenadas retangulares do vetor posição  $\vec{r}(X, Y, Z)$  da superfície de referência da casca são:

$$X = r \cos x_2 \quad (\text{A.2.9.a.})$$

$$Y = r \sin x_2 \quad (\text{A.2.9.b.})$$

$$Z = Z(x_1) \quad (\text{A.2.9.c.})$$

Então, os parâmetros da primeira forma fundamental para

superfícies são [Referência 1]:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right)^2} \quad (\text{A.2.10.a.})$$

$$B = r \quad (\text{A.2.10.b.})$$

e as curvaturas principais, dadas pela Referência [1], são:

$$K_1 = \frac{\frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} \frac{\partial Z}{\partial x_1}}{\left(\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right)^2}\right)^3} \quad (\text{A.2.11.a.})$$

e

$$K_2 = \frac{\frac{\partial Z}{\partial x_1}}{r \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right)^2}} \quad (\text{A.2.11.b.})$$

Considerando o sistema de coordenadas cilíndricas usado neste trabalho, conforme pode ser visto na Figura 2.1., a coordenada  $x_1$  será o comprimento  $\xi$  ao longo do eixo de revolução e a coordenada  $x_2$  será o ângulo circunferencial .

Então, as equações (A.2.9.) ficam:

$$X = r \cos \phi \quad (\text{A.2.12.a.})$$

$$Y = r \sin \phi \quad (\text{A.2.12.b.})$$

$$Z = \xi \quad (\text{A.2.12.c.})$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental para superfícies de cascas de revolução serão:

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2} \quad (\text{A.2.13.a.})$$

$$B = r \quad (\text{A.2.13.b.})$$

Os coeficientes de Lamé serão:

$$\alpha = A \left(1 + \frac{z}{R_\xi}\right) \quad (\text{A.2.14.a.})$$

$$\beta = B \left(1 + \frac{z}{R_\phi}\right) \quad (\text{A.2.14.b.})$$

$$\gamma = 1 \quad (\text{A.2.14.c.})$$

E as curvaturas principais serão:

$$K_\xi = \frac{1}{R_\xi} = - \frac{\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2}}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2}\right)^3} = - \frac{\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2}}{A^3} \quad (\text{A.2.15.a.})$$

$$K_\phi = \frac{1}{R_\phi} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2}} = \frac{1}{r A} \quad (\text{A.2.15.b.})$$

No capítulo dois é desenvolvida uma formulação analítica para um elemento finito de casca de revolução, sendo necessários quatro deslocamentos: o deslocamento meridional  $u$ , o deslocamento circunferencial  $v$ , o deslocamento normal  $w$  e a rotação meridional  $\theta$ . Esta rotação é obtida a partir da Figura A.2.3.

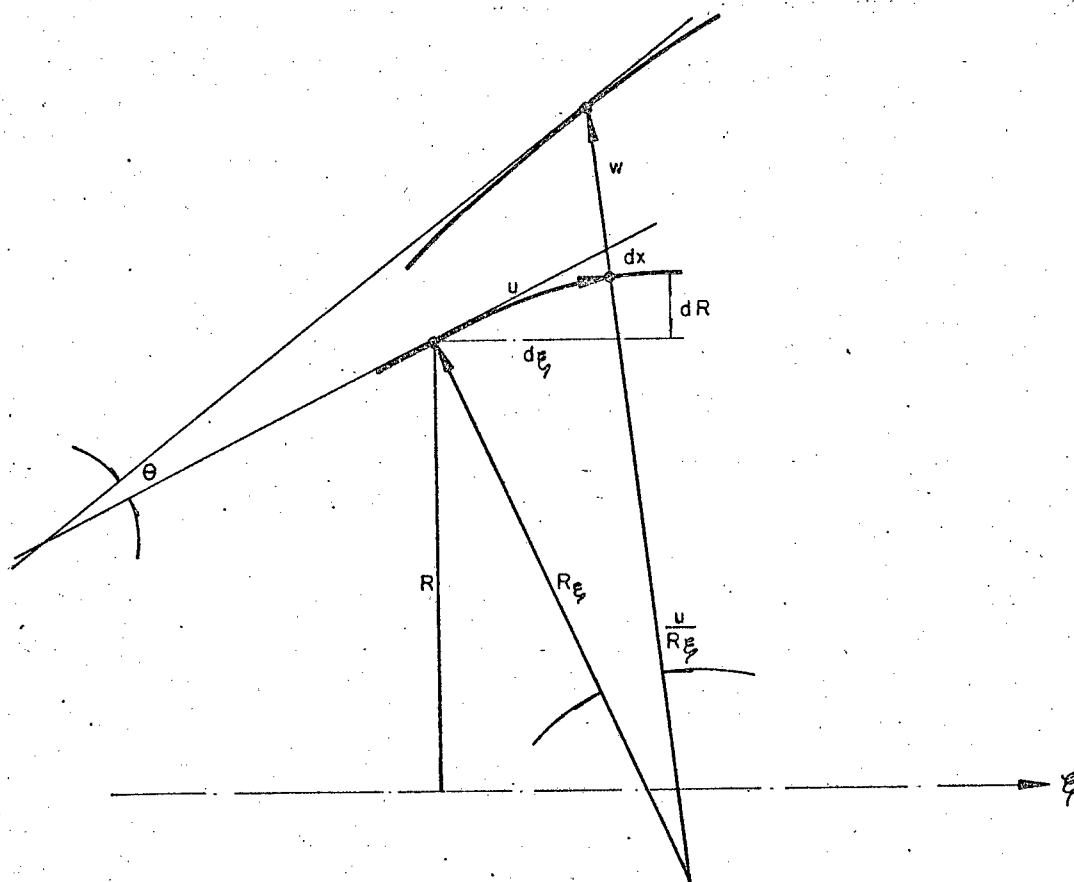


Figura A.2.3. - Rotação do meridiano

Da equação (A.2.7.b.) pode-se escrever:

$$dx = A d\xi \quad (\text{A.2.16.})$$

E a rotação do meridiano é expressa por:

$$\theta(\xi, \phi) = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{R\xi} u \quad (\text{A.2.17.})$$

### A.3 - RELAÇÕES DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS

As relações deformações-deslocamentos usadas neste trabalho são obtidas da teoria de elasticidade, considerando-se as hipóteses básicas, discriminadas em 2.3., e as propriedades geométricas para o caso de cascas finas.

Considerando um sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal  $(\xi, \phi, z)$ , na teoria de elasticidade foram desenvolvidas as equações deformações-deslocamentos concernentes [Referências 1 e 2]. Como estão sendo consideradas pequenas deformações, pode-se desprezar os termos quadráticos das relações acima mencionadas e tem-se as seguintes equações deformações-deslocamentos:

$$\epsilon_{\xi} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{\beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + \frac{\bar{w}}{\gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right] \quad (\text{A.3.1.a})$$

$$\epsilon_{\phi} = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{\bar{w}}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\bar{u}}{\alpha} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right] \quad (\text{A.3.1.b})$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\bar{u}}{\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{\beta} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A.3.1.c})$$

$$\gamma_{\phi z} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \phi} - \frac{\bar{w}}{\beta \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}}{\beta \gamma} \frac{\partial \beta}{\partial z} \quad (\text{A.3.1.d})$$

$$\gamma_{z \xi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\bar{u}}{\alpha \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\bar{w}}{\alpha \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \quad (\text{A.3.1.e})$$

$$\gamma_{\xi \phi} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\bar{v}}{\alpha \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} - \frac{\bar{u}}{\alpha \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \quad (\text{A.3.1.f})$$

onde

$\epsilon_\xi, \epsilon_\phi, \epsilon_z$  são deformações específicas normais

$\gamma_{\phi z}, \gamma_{z\xi}, \gamma_{\xi\phi}$  são deformações específicas cisalhantes

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  são os deslocamentos meridional, circunferencial e normal, respectivamente, de um ponto genérico da casca

$\alpha, \beta, \gamma$  são os coeficientes de Lamé (Ver Apêndice A.2.)

Quando o sistema de coordenadas é ortogonal pode-se escrever [Referência 1]:

$$A \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial B}{\partial \xi} \quad e \quad B \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = \beta \frac{\partial A}{\partial \phi} \quad (A.3.2)$$

sendo que A e B são os coeficientes da primeira forma fundamental para cascas [Referência 1], dados pelo Apêndice A.2.

Substituindo (A.3.2) em (A.3.1) e levando em consideração os coeficientes de Lamé dados no Apêndice A.2., tem-se:

$$\epsilon_\xi = \frac{1}{A(1 + \frac{z}{R_\xi})} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{B} \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{A}{R_\xi} \bar{w} \right] \quad (A.3.3.a)$$

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{B(1 + \frac{z}{R_\phi})} \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{B}{R_\phi} \bar{w} + \frac{\bar{u}}{A} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right] \quad (A.3.3.b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (A.3.3.c)$$



$$\gamma_{\phi z} = \frac{1}{B(1 + \frac{z}{R_\phi})} \left[ B(1 + \frac{z}{R_\phi}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \phi} - \frac{B}{R_\phi} \bar{v} \right] \quad (\text{A.3.3.d})$$

$$\gamma_{z\xi} = \frac{1}{A(1 + \frac{z}{R_\xi})} \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + A(1 + \frac{z}{R_\xi}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{A}{R_\xi} \bar{u} \right] \quad (\text{A.3.3.e})$$

$$\gamma_{\xi\phi} = \frac{1}{A(1 + \frac{z}{R_\xi})} \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\bar{u}}{B} \frac{\partial A}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{B(1 + \frac{z}{R_\phi})} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}}{A} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right] \quad (\text{A.3.3.f})$$

Considerando as hipóteses básicas, discriminadas na secção 2.3., sabe-se que as normais à superfície de referência permanecem normais à superfície de referência deformada, ou seja, tem-se a condição de deformações planas ( $\epsilon_z = \gamma_{\phi z} = \gamma_{z\xi} = 0$ ). Por outro lado, esta hipótese é equivalente a dizer que os deslocamentos se distribuem linearmente ao longo da espessura da casca. Utilizando o recurso de separação de variáveis, escrevemos os deslocamentos de um ponto genérico da casca ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ) em termos dos deslocamentos da superfície de referência ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) [Referência 1]:

$$\bar{u}(\xi, \phi, z) = u(\xi, \phi) + f(\xi, \phi) z \quad (\text{A.3.4.a})$$

$$\bar{v}(\xi, \phi, z) = v(\xi, \phi) + g(\xi, \phi) z \quad (\text{A.3.4.b})$$

$$\bar{w}(\xi, \phi, z) = w(\xi, \phi) + h(\xi, \phi) z \quad (\text{A.3.4.c})$$

Como  $\epsilon_z = 0$ , levando em consideração (A.3.3.c), conclui-se que  $h(\xi, \phi) = 0$  e que:

$$\bar{w}(\xi, \phi, z) = w(\xi, \phi)$$

Substituindo (A.3.4.a) em (A.3.3.e) e considerando que  $\gamma_{z\xi} = 0$  tem-se:

$$f(\xi, \phi) = \frac{u(\xi, \phi)}{R_\xi} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (\text{A.3.5.a})$$

Substituindo (A.3.4.b) em (A.3.3.d) e considerando que  $\gamma_{\phi z} = 0$  tem-se:

$$g(\xi, \phi) = \frac{v(\xi, \phi)}{R_\phi} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (\text{A.3.5.b})$$

As equações (A.3.5.a) e (A.3.5.b) representam as rotações das tangentes às linhas de coordenadas  $\xi$  e  $\phi$ .

Então, as equações (A.3.4.) ficam:

$$\bar{u} = u + \left( \frac{u}{R_\xi} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) z \quad (\text{A.3.6.a})$$

$$\bar{v} = v + \left( \frac{v}{R_\phi} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) z \quad (\text{A.3.6.b})$$

$$\bar{w} = w \quad (\text{A.3.6.c})$$

Lembrando de outra hipótese básica, ou seja, de que a casca é considerada fina, pode-se dizer que os quocientes  $\frac{z}{R_\xi}$  e  $\frac{z}{R_\phi}$  são pequenos comparados com a unidade e podem ser desprezados. Então, nas equações (A.3.3.), estes termos são abandonados.

Substituindo as equações (A.3.6.) nas equações (A.3.3.a), (A.3.3.b) e (A.3.3.f), obtém-se:

$$\epsilon_\xi = \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ u + \left( \frac{u}{R_\xi} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) z \right] + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \phi} \left[ v + \left( \frac{v}{R_\phi} - \right. \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \cdot z \left. + \frac{A}{R_{\xi}} w \right\} \quad (\text{A.3.7.a})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\phi} = \frac{1}{B} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ v + \left( \frac{v}{R_{\phi}} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) z \right] + \frac{B}{R_{\phi}} w + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \xi} \left[ u + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{u}{R_{\xi}} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) z \right] \right\} \quad (\text{A.3.7.b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\phi} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{v + \left( \frac{v}{R_{\phi}} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) z}{B} \right] + \\ + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{u + \left( \frac{u}{R_{\xi}} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) z}{A} \right] \quad (\text{A.3.7.c}) \end{aligned}$$

Pode-se separar as equações (A.3.7) do seguinte modo [Referência 1]:

$$\varepsilon_{\xi} = \varepsilon_{\xi}^0 + k_{\xi} z \quad (\text{A.3.8.a})$$

$$\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_{\phi}^0 + k_{\phi} z \quad (\text{A.3.8.b})$$

$$\gamma_{\xi\phi} = \gamma_{\xi\phi}^0 + k_{\xi\phi} z \quad (\text{A.3.8.c})$$

ou, na forma matricial:

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\bar{\varepsilon}^0\} + \{\bar{k}\} z \quad (\text{A.3.8.d})$$

onde:

$$\{\bar{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{\xi} \\ \epsilon_{\phi} \\ \gamma_{\xi\phi} \end{Bmatrix}; \quad \{\bar{\epsilon}^0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{\xi}^0 \\ \epsilon_{\phi}^0 \\ \gamma_{\xi\phi}^0 \end{Bmatrix}; \quad \{\bar{k}\} = \begin{Bmatrix} k_{\xi} \\ k_{\phi} \\ k_{\xi\phi} \end{Bmatrix}$$

O vetor  $\{\bar{\epsilon}^0\}$  representa as deformações específicas da superfície de referência e o vetor  $\{\bar{k}\}$  as mudanças de curvatura da superfície de referência. As relações para as deformações específicas e mudanças de curvatura da superfície de referência são:

$$\epsilon_{\xi}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{1}{R_{\xi}} w \quad (\text{A.3.9.a})$$

$$\epsilon_{\phi}^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{R_{\phi}} w + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} \quad (\text{A.3.9.b})$$

$$\gamma_{\xi\phi}^0 = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{u}{A} \right) \quad (\text{A.3.9.c})$$

$$k_{\xi} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u}{R_{\xi}} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \phi} \left( \frac{v}{R_{\phi}} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.3.9.d})$$

$$k_{\phi} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{v}{R_{\phi}} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} \left( \frac{u}{R_{\xi}} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (\text{A.3.9.e})$$

$$k_{\xi\phi} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\frac{v}{R_{\phi}} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi}}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\frac{u}{R_{\xi}} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi}}{A} \right) \quad (\text{A.3.9.f})$$

As equações (A.3.9.) possibilitam o cálculo das deformações específicas e das mudanças de curvatura da superfície de referência de uma casca genérica, quando é usada a teoria de Kirchhoff-Love.

Frequentemente os efeitos dos deslocamentos  $u$  e  $v$  nas mudanças de curvatura são desprezados [Referência 1]. Neste trabalho, esta simplificação foi adotada e as equações de mudanças de curvatura ficam:

$$k_{\xi} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.3.9.g})$$

$$k_{\phi} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} \left( -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (\text{A.3.9.h})$$

$$k_{\xi\phi} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (\text{A.3.9.i})$$

Particularizando as equações (A.3.9.) para as cascas de revolução estudadas neste trabalho, tem-se:

$$\epsilon_{\xi}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{R_{\xi}} w \quad (\text{A.3.10.a})$$

$$\epsilon_{\phi}^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{R_{\phi}} w + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} \quad (\text{A.3.10.b})$$

$$\gamma_{\xi\phi}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (\text{A.3.10.c})$$

$$k_{\xi} = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{A^3} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial A}{\partial \xi} \quad (\text{A.3.10.d})$$

$$k_{\phi} = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial B}{\partial \xi} \quad (\text{A.3.10.e})$$

$$k_{\xi\phi} = -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \phi} + \frac{2}{AB^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} \frac{\partial B}{\partial \xi} \quad (\text{A.3.10.f})$$

A.4. - EQUAÇÕES DE DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS E MUDANÇAS DE CURVATURA EM TERMOS DAS COORDENADAS GENERALIZADAS

Colocando as funções deslocamentos, dadas pelas equações (2.4.), e suas derivadas nas equações (2.14.), as equações de deformações específicas e mudanças de curvatura ficam:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\xi} = & \left( \frac{1}{R_{\xi}} \alpha_1^m + \frac{1}{R_{\xi}} \alpha_2^m \xi + \frac{1}{R_{\xi}} \alpha_3^m \xi^2 + \frac{1}{R_{\xi}} \alpha_4^m \xi^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{A} \alpha_6^m + \frac{2}{A} \alpha_9^m \xi + \frac{3}{A} \alpha_{10}^m \xi^2 \right) \cos m \phi. \end{aligned} \quad (\text{A.4.1.a.})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\phi} = & \left( \frac{1}{R_{\phi}} \alpha_1^m + \frac{1}{R_{\phi}} \alpha_2^m \xi + \frac{1}{R_{\phi}} \alpha_3^m \xi^2 + \frac{1}{R_{\phi}} \alpha_4^m \xi^3 + \right. \\ & + \frac{R'}{AR} \alpha_5^m + \frac{R'}{AR} \alpha_6^m \xi + \frac{m}{R} \alpha_7^m + \frac{m}{R} \alpha_8^m \xi + \frac{R'}{AR} \alpha_9^m \xi^2 + \\ & \left. + \frac{R'}{AR} \alpha_{10}^m \xi^3 + \frac{m}{R} \alpha_{11}^m \xi^2 + \frac{m}{R} \alpha_{12}^m \xi^3 \right) \cos m \phi \end{aligned} \quad (\text{A.4.1.b.})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\phi} = & \left[ -\frac{m}{R} \alpha_5^m - \frac{m}{R} \alpha_6^m \xi - \frac{R'}{AR} \alpha_7^m + \left( \frac{1}{A} - \frac{R'}{AR} \xi \right) \alpha_8^m - \right. \\ & - \frac{m}{R} \alpha_9^m \xi^2 - \frac{m}{R} \alpha_{10}^m \xi^3 + \left( \frac{2}{A} \xi - \frac{R'}{AR} \xi^2 \right) \alpha_{11}^m + \\ & \left. + \left( \frac{3}{A} \xi^2 - \frac{R'}{AR} \xi^3 \right) \alpha_{12}^m \right] \sin m \phi \end{aligned} \quad (\text{A.4.1.c.})$$

$$k_{\xi} = \left[ \frac{R'R''}{A^4} \alpha_2^m + \left( \frac{2R'R''}{A^4} \xi - \frac{2}{A^2} \right) \alpha_3^m + \right.$$

$$+ \left( 3 \frac{R'R''}{A^4} \xi^2 - \frac{6}{A^2} \xi \right) \alpha_4^m \right] \cos m\phi \quad (\text{A.4.1.d.})$$

$$k_\phi = \left[ \frac{m^2}{R^2} \alpha_1^m + \left( \frac{m^2}{R^2} \xi - \frac{R'}{A^2 R} \right) \alpha_2^m + \left( \frac{m^2}{R^2} \xi^2 - 2 \frac{R'}{A^2 R} \xi \right) \cdot \right. \\ \left. \alpha_3^m + \left( \frac{m^2}{R^2} \xi^3 - 3 \frac{R'}{A^2 R} \xi^2 \right) \alpha_4^m \right] \cos m\phi \quad (\text{A.4.1.e.})$$

$$k_{\xi\phi} = \left[ - \frac{2m R'}{AR^2} \alpha_1^m + \left( \frac{2m}{AR} - \frac{2m R'}{AR^2} \xi \right) \alpha_2^m + \left( \frac{4m}{AR} \xi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2m R'}{AR^2} \xi^2 \right) \alpha_3^m + \left( \frac{6m}{AR} \xi^2 - \frac{2m R'}{AR^2} \xi^3 \right) \alpha_4^m \right] \sin m\phi \quad (\text{A.4.1.f.})$$

### A.5. TENSÕES E MOMENTOS RESULTANTES

Neste apêndice determinam-se tensões e momentos resultantes por unidade de comprimento para cascas finas.

Considera-se um elemento infinitesimal de casca determinado por dois planos perpendiculares às linhas de coordenadas  $\xi$  e  $\phi$  e distante  $z$  da superfície de referência, tendo a espessura  $dz$ , como indicado na Figura (A.5.1.).

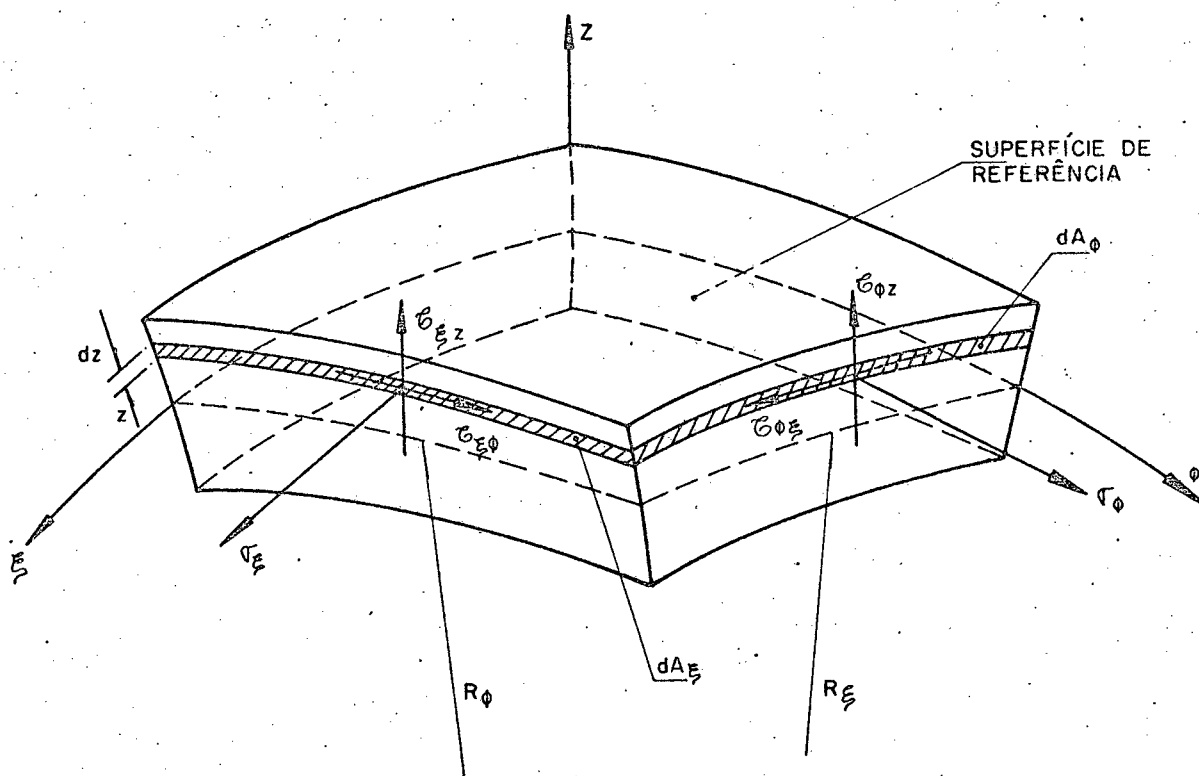


Figura A.5.1. - Elemento infinitesimal de casca



As áreas infinitesimais das superfícies laterais, perpendiculares aos eixos coordenados  $\xi$  e  $\phi$ , do elemento são [Referência 1]:

$$dA_{\xi} = \beta \, d\phi \, dz \quad (\text{A.5.1.a})$$

e

$$dA_{\phi} = \alpha \, d\xi \, dz \quad (\text{A.5.1.b})$$

Levando em conta as equações para os coeficientes de Lamé, deduzidas no Apêndice A.2., as relações (A.5.1.) ficam:

$$dA_{\xi} = B \left(1 + \frac{z}{R_{\phi}}\right) d\phi \, dz \quad (\text{A.5.1.c})$$

$$dA_{\phi} = A \left(1 + \frac{z}{R_{\xi}}\right) d\xi \, dz \quad (\text{A.5.1.d})$$

As tensões atuantes nestas áreas infinitesimais também aparecem na Figura (A.5.1.) onde estão colocadas segundo sua convenção positiva, dada pela Figura (A.5.2.), para um elemento infinitesimal:

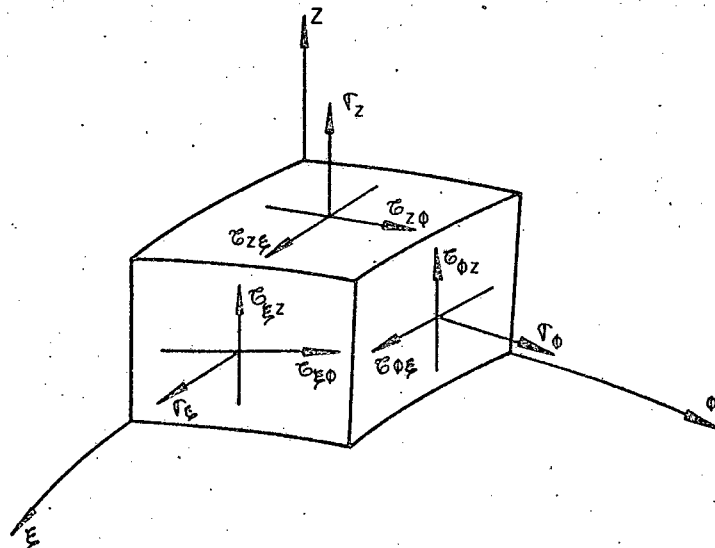
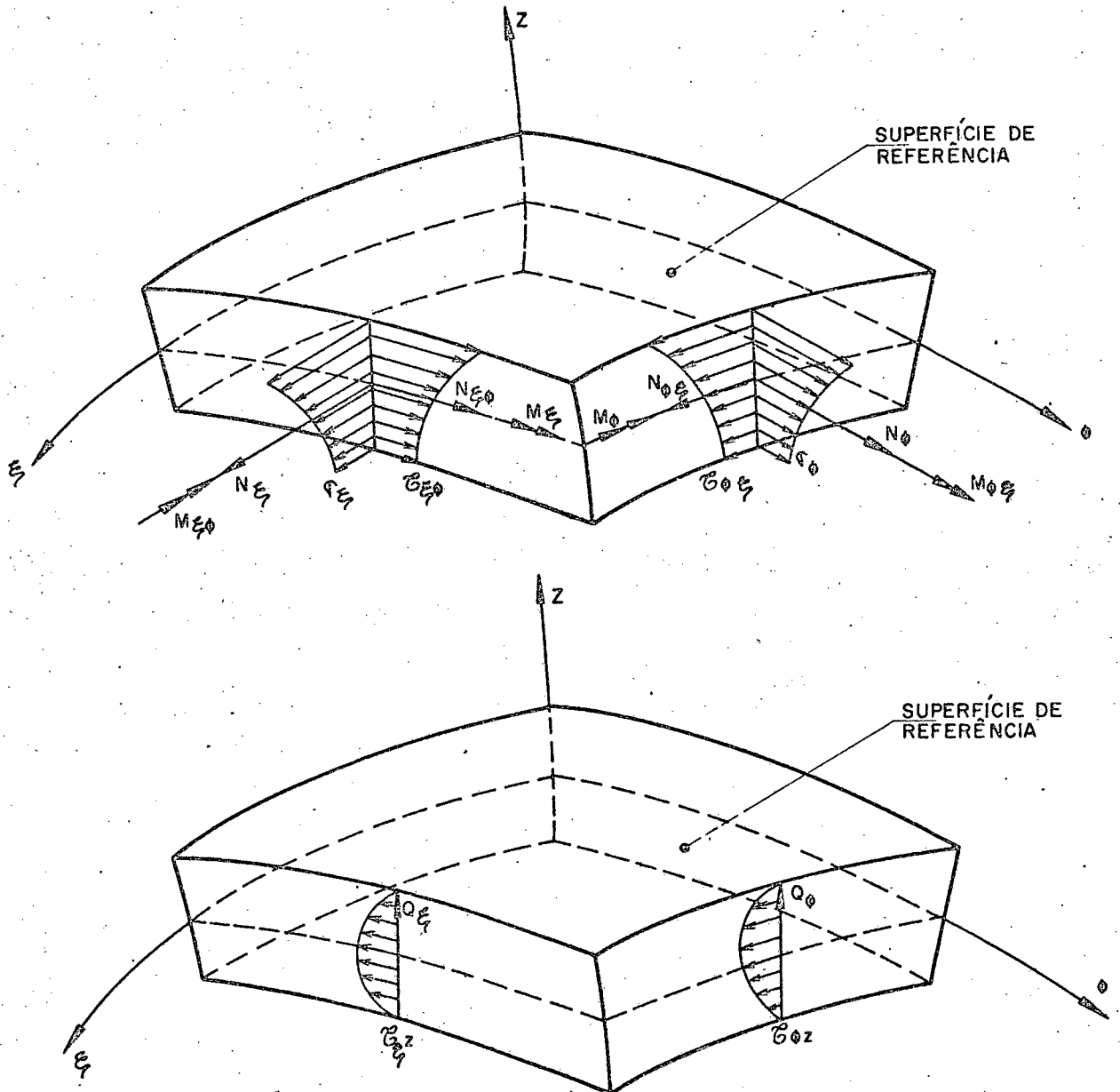


Figura A.5.2. - Convenção positiva das tensões

Estas tensões se distribuem ao longo das superfícies perpendiculares aos eixos coordenados  $\xi$  e  $\phi$  e a Figura (A.5.3.) as mostra de forma genérica, sendo que elas são equivalentes às tensões resultantes  $N_\xi$ ,  $N_\phi$ ,  $N_{\xi\phi}$ ,  $M_\xi$ ,  $M_\phi$ ,  $M_{\xi\phi}$ ,  $Q_\xi$  e  $Q_\phi$ , que são forças e momentos por unidade de comprimento.



NOTA - AS TENSÕES  $G_{\xi z}$  E  $G_{\phi z}$  ESTÃO PLOTADAS GIRADAS DE  $-90^\circ$  EM TORNO DOS EIXOS  $\xi$  E  $\phi$ , RESPECTIVAMENTE.

Figura A.5.3. - Tensões e momentos resultantes.

Para calcular a tensão resultante  $N_\xi$ , considera-se que a força total de tração na superfície de referência do elemento de casca, na direção  $\xi$  é

$$N_\xi B d\phi = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_\xi dA_\xi = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_\xi \beta d\phi dz$$

donde se obtêm:

$$N_\xi = \frac{1}{B} \int_{h_1}^{h_2} \beta \sigma_\xi dz \quad (\text{A.5.2.a})$$

sendo que  $h_1$  e  $h_2$  localizam as superfícies interna e externa da casca em relação à superfície de referência.

Considerando a equação para o coeficiente de Lamé  $\beta$  deduzida no Apêndice A.2., tem-se:

$$N_\xi = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_\xi \left(1 + \frac{z}{R_\phi}\right) dz \quad (\text{A.5.2.b})$$

Para calcular o momento resultante  $M_\xi$ , considera-se que o momento total que equilibra a integral das tensões normais, na superfície perpendicular ao eixo coordenado  $\xi$ , é

$$M_\xi B d\phi = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_\xi z dA_\xi = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_\xi z \beta d\phi dz$$

donde se obtêm:

$$M_{\xi} = \frac{1}{B} \int_{h_1}^{h_2} \beta \sigma_{\xi} z dz \quad (\text{A.5.3.a})$$

Considerando a equação para o coeficiente de Lamé  $\beta$  de duzida no Apêndice A.2., tem-se:

$$M_{\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{\xi} \left(1 + \frac{z}{R_{\phi}}\right) z dz \quad (\text{A.5.3.b})$$

Do mesmo modo como foram obtidos a tensão resultante  $N_{\xi}$  e o momento resultante  $M_{\xi}$ , podem ser encontradas as outras tensões e momentos resultantes, obtendo-se:

na face perpendicular ao eixo coordenado  $\xi$ :

$$N_{\xi\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\xi\phi} \left(1 + \frac{z}{R_{\phi}}\right) dz \quad (\text{A.5.4.})$$

$$M_{\xi\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\xi\phi} \left(1 + \frac{z}{R_{\phi}}\right) z dz \quad (\text{A.5.5.})$$

$$Q_{\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\xi z} \left(1 + \frac{z}{R_{\phi}}\right) dz \quad (\text{A.5.6.})$$

na face perpendicular ao eixo coordenado  $\phi$ :

$$N_{\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{\phi} \left(1 + \frac{z}{R_{\xi}}\right) dz \quad (\text{A.5.7.})$$

$$N_{\phi\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\phi\xi} \left(1 + \frac{z}{R_{\xi}}\right) dz \quad (\text{A.5.8.})$$

$$M_{\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{\phi} \left(1 + \frac{z}{R_{\xi}}\right) z dz \quad (\text{A.5.9.})$$

$$M_{\phi\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\phi\xi} \left(1 + \frac{z}{R_{\xi}}\right) z dz \quad (\text{A.5.10.})$$

$$Q_{\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\phi z} \left(1 + \frac{z}{R_{\xi}}\right) dz \quad (\text{A.5.11.})$$

As equações obtidas para tensões e momentos resultantes são gerais. Considerando agora as hipóteses básicas, discriminadas na Secção 2.3. do Capítulo 2, tem-se que, se a casca é fina, os quocientes  $\frac{z}{R_{\xi}}$  e  $\frac{z}{R_{\phi}}$  podem ser desprezados, pois, comparados com a unidade, são muito pequenos. Então estes termos são abandonados nas equações de tensões e momentos resultantes. Considerando também que o tensor tensão é simétrico, tem-se  $\tau_{\xi\phi} = \tau_{\phi\xi}$  e as equações para as tensões resultantes ficam:

$$N_{\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{\xi} dz \quad (\text{A.5.12.a})$$

$$N_{\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{\xi} dz \quad (\text{A.5.12.b})$$

$$N_{\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{\phi} dz \quad (\text{A.5.12.b})$$

$$N_{\xi\phi} = N_{\phi\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\xi\phi} dz \quad (\text{A.5.12.c})$$

$$Q_{\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\xi z} dz \quad (\text{A.5.12.d})$$

$$Q_{\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\phi z} dz \quad (\text{A.5.12.e})$$

e para os momentos resultantes:

$$M_{\xi} = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{\xi} z dz \quad (\text{A.5.12.f})$$

$$M_{\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{\phi} z dz \quad (\text{A.5.12.g})$$

$$M_{\xi\phi} = \int_{h_1}^{h_2} \tau_{\xi\phi} z dz \quad (\text{A.5.12.h})$$

A.6. - TERMOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ  $[\bar{K}_e^m]$  PARA UM ELEMENTO CILÍNDRICO

A equação (2.38.) fornece a matriz de rigidez  $[\bar{K}_e^m]$  para um elemento finito curvo de casca de revolução. Considerando um caso particular, qual seja, uma casca cilíndrica, os termos individuais de  $[\bar{K}_e^m]$  para um elemento finito cilíndrico são listados abaixo. Para uma maior facilidade na notação destes termos, os elementos da matriz que relaciona tensões resultantes com deformações específicas e mudanças de curvatura da superfície de referência, dada por (2.23.d.), são redenominadas a seguir:

$$B_{11} = \frac{E_\xi h}{1 - \nu_{\xi\phi} \nu_{\phi\xi}} \quad (\text{A.6.1.a.})$$

$$B_{12} = \nu_{\xi\phi} B_{22} = \nu_{\phi\xi} B_{11} \quad (\text{A.6.1.c.})$$

$$B_{33} = G_{\xi\phi} h \quad (\text{A.6.1.d.})$$

$$D_{11} = \frac{E_\xi h^3}{12(1 - \nu_{\xi\phi} \nu_{\phi\xi})} \quad (\text{A.6.1.e.})$$

$$D_{22} = \frac{E_\phi h^3}{12(1 - \nu_{\xi\phi} \nu_{\phi\xi})} \quad (\text{A.6.1.f.})$$

$$D_{12} = \nu_{\xi\phi} D_{22} = \nu_{\phi\xi} D_{11} \quad (\text{A.6.1.g.})$$

$$D_{33} = \frac{G_{\xi\phi} h^3}{12} \quad (\text{A.6.1.h.})$$

Então, os termos de  $[\bar{K}_e^m]$  para um elemento cilíndrico

são:

$$\bar{K}_{11} = \frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L}{3} + \frac{B_{11}}{L} a$$

$$\bar{K}_{12} = \bar{K}_{21} = -\frac{m}{2} (B_{12} - B_{33})$$

$$\bar{K}_{13} = \bar{K}_{31} = -\frac{B_{12}}{2}$$

$$\bar{K}_{14} = \bar{K}_{41} = -\frac{B_{12}}{2} \frac{L}{12}$$

$$\bar{K}_{15} = \bar{K}_{51} = \frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L}{6} - \frac{B_{11}}{L} a$$

$$\bar{K}_{16} = \bar{K}_{61} = -\frac{m}{2} (B_{12} + B_{33})$$

$$\bar{K}_{17} = \bar{K}_{71} = -\frac{B_{12}}{2}$$

$$\bar{K}_{18} = \bar{K}_{81} = \frac{B_{12}}{2} \frac{L}{12}$$

$$\bar{K}_{19} = -\frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{1,10} = -\frac{7}{60} \frac{m^2}{a} B_{33} L^4$$

$$\bar{K}_{1,11} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^2}{6}$$



$$\bar{K}_{1,12} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^3}{4}$$

$$\bar{K}_{2,2} = \frac{m^2}{a} B_{22} \frac{L}{3} + \frac{B_{33}}{L} a$$

$$\bar{K}_{2,3} = \bar{K}_{3,2} = \frac{7}{20} \frac{m}{a} B_{22} L$$

$$\bar{K}_{2,4} = \bar{K}_{4,2} = \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^2}{20}$$

$$\bar{K}_{2,5} = \bar{K}_{5,2} = \frac{m}{2} (B_{12} + B_{33})$$

$$\bar{K}_{26} = \bar{K}_{62} = \frac{m^2}{a} B_{22} \frac{L}{6} - \frac{B_{33}}{L} a$$

$$\bar{K}_{27} = \bar{K}_{72} = \frac{3}{20} \frac{m}{a} B_{22} L$$

$$\bar{K}_{28} = \bar{K}_{82} = \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^2}{30}$$

$$\bar{K}_{29} = -m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^2}{6}$$

$$\bar{K}_{2,10} = -m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^3}{4}$$

$$\bar{K}_{2,11} = -\frac{m^2}{a} B_{22} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{2,12} = -\frac{7}{60} \frac{m^2}{a} B_{22} L^4$$

$$\bar{K}_{33} = \frac{13}{35} \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) L - \frac{m^2}{a} \left( -\frac{12}{5} D_{12} - \frac{24}{5} D_{33} \right) \frac{1}{L} +$$

$$+ \frac{12 D_{11}}{L^3} a$$

$$\bar{K}_{34} = \bar{K}_{43} = \frac{11}{210} \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) L^2 - \frac{m^2}{a} \left( -\frac{6}{5} D_{12} - \frac{2}{5} D_{33} \right) + \frac{6 D_{11}}{L^2} a$$

$$\bar{K}_{35} = \bar{K}_{53} = \frac{B_{12}}{2}$$

$$\bar{K}_{36} = \bar{K}_{63} = \frac{3}{20} \frac{m}{a} B_{22} L$$

$$\bar{K}_{37} = \bar{K}_{73} = \frac{9}{70} \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) L - \frac{m^2}{a} \left( \frac{12}{5} D_{12} + \frac{24}{5} D_{33} \right) \frac{1}{L} - \frac{12 D_{11}}{L^3} a$$

$$\bar{K}_{38} = \bar{K}_{83} = -\frac{13}{420} \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{33} \right) L^2 - \frac{m^2}{a} \left( -\frac{1}{5} D_{12} - \frac{2}{5} D_{33} \right) + \frac{6 D_{11}}{L^2} a$$

$$\bar{K}_{39} = -\frac{B_{12} L^2}{5}$$

$$\bar{K}_{3,10} = -\frac{3}{10} B_{12} L^3$$

$$\bar{K}_{3,11} = -\frac{m}{a} B_{22} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{3,12} = -\frac{4}{35} \frac{m}{a} B_{22} L^4$$

$$\bar{K}_{44} = \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) \frac{L^3}{105} - \frac{m^2}{a} \left( -\frac{4}{15} D_{12} - \frac{8}{15} D_{33} \right) L + \frac{4 D_{11}}{L} a$$

$$\bar{K}_{45} = \bar{K}_{54} = \frac{B_{12} L}{12}$$

$$\bar{K}_{46} = \bar{K}_{64} = \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^2}{30}$$

$$\bar{K}_{47} = \bar{K}_{74} = \frac{13}{420} \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) L^2 - \frac{m^2}{a} \left( \frac{1}{5} D_{12} + \frac{2}{5} D_{33} \right) - \frac{6 D_{11}}{L^2} a$$

$$\bar{K}_{48} = \bar{K}_{84} = -\frac{1}{140} \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) L^3 - \frac{m^2}{a} \left( \frac{1}{15} D_{12} + \frac{2}{15} D_{33} \right) L + \frac{2 D_{11}}{L} a$$

$$\bar{K}_{49} = -\frac{B_{12} L^3}{60}$$

$$\bar{K}_{4,10} = -\frac{B_{12} L^4}{30}$$

$$\bar{K}_{4,11} = -\frac{m}{a} B_{22} \frac{L^4}{60}$$

$$\bar{K}_{4,12} = -\frac{m}{a} B_{22} \frac{L^5}{42}$$

$$\bar{K}_{55} = \frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L}{3} + \frac{B_{11}}{L} a$$

$$\bar{K}_{56} = \bar{K}_{65} = \frac{m}{2} (B_{12} - B_{33})$$

$$\bar{K}_{57} = \bar{K}_{75} = \frac{B_{12}}{2}$$

$$\bar{K}_{58} = \bar{K}_{85} = -\frac{B_{12} L}{12}$$

$$\bar{K}_{59} = -\frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{5,10} = -\frac{2}{15} \frac{m^2}{a} B_{33} L^4$$

$$\bar{K}_{5,11} = -m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^2}{6}$$

$$\bar{K}_{5,12} = -m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^3}{4}$$

$$\bar{K}_{66} = \frac{m^2}{a} B_{22} \frac{L}{3} + \frac{B_{33}}{L} a$$

$$\bar{K}_{67} = \bar{K}_{76} = \frac{7}{20} \frac{m}{a} B_{22} L$$

$$\bar{K}_{68} = \bar{K}_{86} = -\frac{m}{a} B_{22} \frac{L^2}{20}$$

$$\bar{K}_{69} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^2}{6}$$

$$\bar{K}_{6,10} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^3}{4}$$

$$\bar{K}_{6,11} = -\frac{m^2}{a} B_{22} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{6,12} = -\frac{2}{15} \frac{m^2}{a} B_{22} L^4$$

$$\bar{K}_{77} = \frac{13}{35} \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) L - \frac{m^2}{a} \left( -\frac{12}{5} D_{12} - \frac{24}{5} D_{33} \right)$$

$$\cdot \frac{1}{4} + \frac{12 D_{11}}{L^3} a$$

$$\bar{K}_{78} = \bar{K}_{87} = -\frac{11}{210} \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) L^2 - \frac{m^2}{a} \left( \frac{6}{5} D_{12} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5} D_{33} \right) - \frac{6 D_{11}}{L^2} a$$

$$\bar{K}_{79} = \frac{B_{12} L^2}{5}$$

$$\bar{K}_{7,10} = \frac{3}{10} B_{12} L^3$$

$$\bar{K}_{7,11} = -\frac{m}{a} B_{22} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{7,12} = -\frac{19}{140} \frac{m}{a} B_{22} L^4$$

$$\bar{K}_{88} = \left( \frac{B_{22}}{a} + \frac{m^4}{a^3} D_{22} \right) \frac{L^3}{105} - \frac{m^2}{a} \left( -\frac{4}{15} D_{12} - \frac{8}{15} D_{33} \right) L + \frac{4 D_{11}}{L} a$$

$$\bar{K}_{89} = - \frac{B_{12} L^3}{60}$$

$$\bar{K}_{8,10} = - \frac{B_{12} L^4}{60}$$

$$\bar{K}_{8,11} = \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^4}{60}$$

$$\bar{K}_{8,12} = \frac{11}{420} \frac{m}{a} B_{22} L^5$$

$$\bar{K}_{91} = - \frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{92} = - m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^2}{6}$$

$$\bar{K}_{93} = - B_{12} \frac{L^2}{5}$$

$$\bar{K}_{94} = - B_{12} \frac{L^3}{60}$$

$$\bar{K}_{95} = - \frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{96} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^2}{6}$$

$$\bar{K}_{97} = B_{12} \frac{L^2}{5}$$

$$\bar{K}_{98} = - B_{12} \frac{L^3}{60}$$

$$\bar{K}_{99} = \frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L^5}{30} + B_{11} \frac{L^3 a}{3}$$

$$\bar{K}_{9,10} = \bar{K}_{10,9} = \frac{m^2}{a} B_{33} \frac{L^6}{20} + B_{11} \frac{L^4 a}{2}$$

$$\bar{K}_{9,11} = \bar{K}_{11,9} = 0$$

$$\bar{K}_{9,12} = \bar{K}_{12,9} = -m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^5}{60}$$

$$\bar{K}_{10,1} = -\frac{7}{60} \frac{m^2}{a} B_{33} L^4$$

$$\bar{K}_{10,2} = -m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^3}{4}$$

$$\bar{K}_{10,3} = -\frac{3}{10} B_{12} L^3$$

$$\bar{K}_{10,4} = -B_{12} \frac{L^4}{30}$$

$$\bar{K}_{10,5} = -\frac{2}{15} \frac{m^2}{a} B_{33} L^4$$

$$\bar{K}_{10,6} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^3}{4}$$

$$\bar{K}_{10,7} = \frac{3}{10} B_{12} L^3$$

$$\bar{K}_{10,8} = -B_{12} \frac{L^4}{60}$$

$$\bar{K}_{10,10} = \frac{8}{105} \frac{m^2}{a} B_{33} L^7 + \frac{4}{5} B_{11} L^5 a$$

$$\bar{K}_{10,11} = \bar{K}_{11,10} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^5}{60}$$

$$\bar{K}_{10,12} = \bar{K}_{12,10} = 0$$

$$\bar{K}_{11,1} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^2}{6}$$

$$\bar{K}_{11,2} = - \frac{m^2}{a} B_{22} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{11,3} = - \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{11,4} = - \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^4}{60}$$

$$\bar{K}_{11,5} = - m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^2}{6}$$

$$\bar{K}_{11,6} = - \frac{m^2}{a} B_{22} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{11,7} = - \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^3}{12}$$

$$\bar{K}_{11,8} = \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^4}{60}$$

$$\bar{K}_{11,12} = \bar{K}_{12,11} = \frac{m^2}{a} B_{22} \frac{L^6}{20} + B_{33} \frac{L^4 a}{2}$$

$$\bar{K}_{12,1} = m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^3}{4}$$

$$\bar{K}_{12,2} = - \frac{7}{60} \frac{m^2}{a} B_{22} L^4$$

$$\bar{K}_{12,3} = - \frac{4}{35} \frac{m}{a} B_{22} L^4$$



$$\bar{K}_{12,4} = - \frac{m}{a} B_{22} \frac{L^5}{42}$$

$$\bar{K}_{12,5} = - m (B_{12} + B_{33}) \frac{L^3}{4}$$

$$\bar{K}_{12,6} = - \frac{2}{15} \frac{m^2}{a} B_{22} L^4$$

$$\bar{K}_{12,7} = - \frac{19}{140} \frac{m}{a} B_{22} L^4$$

$$\bar{K}_{12,8} = \frac{11}{420} \frac{m}{a} B_{22} L^5$$