

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

RADIAÇÃO ACÚSTICA EM CASCA CILÍNDRICA
FINITA SIMPLEMENTE APOIADA

JORGE CLAUDIO DA SILVA PINTO

Florianópolis
SANTA CATARINA - BRASIL
Novembro - 1980

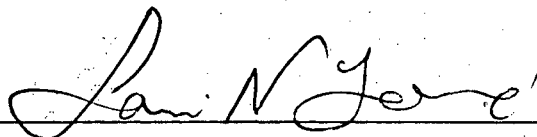
RADIAÇÃO ACÚSTICA DE CASCA CILÍNDRICA

Jorge Claudio da Silva Pinto

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ACÚSTICA E VIBRAÇÃO

E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Samir N.Y. Gerges Ph.D

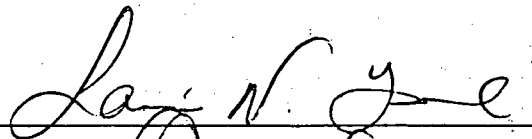
Orientador



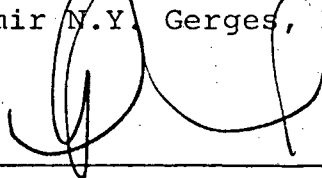
Prof. Arno Blass, Ph.D

Coordenador

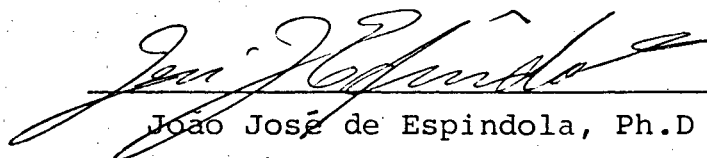
APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES



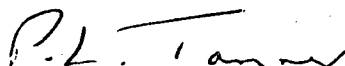
Samir N.Y. Gerges, Ph.D



Guilherme Marcos de La Penha, Ph.D



João José de Espindola, Ph.D



Peter Tanner, M. SC

Às minhas filhas Julia e
Fernanda.

Que no mundo delas as pessoas
possam ouvir mais.

Este trabalho é o meu iniciamento nos estudos da Área de Acústica e Ruído, atualmente tão ligado ao homem.

No nosso dia a dia, carece ao homem aprimorar técnicas para que sua vida se torne mais amena nos grandes centros, mais "humanizada".

Esta pesquisa é uma pequena contribuição a essa "humanização".

Neste instante, os nomes de muitas pessoas emergem em minha mente, pois a cada uma delas devo parte deste trabalho, mas em primeiro lugar, devo agradecer ao meu orientador, Prof. Doutor Samir N. Yoursi Gerges, incansável durante todo o período desta pesquisa. Agradeço ao Prof. Doutor Guilhermé de La Penha, por me ter apoiado sempre e me ter indicado a existência desse curso no Brasil.

A minha mulher Ana, agradeço o estímulo, a paciência e a compreensão do tempo que roubei de nós dois e também pela revisão de português.

Agradeço, ainda, ao prof. Doutor J.J. Espindola, ao prof. Roberto M. Herdrich, ao prof. Peter Tanner, ao meu amigo Marco, aos Coordenadores do INPM, Dr. Clemenceau, Dr. Cesar Augusto e ao Diretor Dr. Armenio Lobo da Cunha.

Em nível diferente, porém não de menor importância, devo agradecer, a meus pais e meu sogros por me ajudarem.

Infelizmente não é possível mencionar todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, me apoiaram, e às quais devo agradecer.

R E S U M O

Um conhecimento da potência de radiação acústica é necessária para estimar o acoplamento entre fluido e uma estrutura que vibre tal como reatores resfriados a água, usinas hidrelétrica e estrutura submersa de plataforma de extração de petróleo. É também necessário no sentido de incluir o amortecimento acústico na análise de estrutura vibrante e no controle de ruído. Esse trabalho apresenta resultados na eficiência de radiação modal de casca cilíndrica finita que vibra nas direções axial e circunferencial, onde o comprimento da casca l , possui um número inteiro de onda. Os resultados são obtidos resolvendo-se diretamente a equação da onda que satisfaz as condições de contorno.

Os resultados mostram que a eficiência de radiação de uma casca cilíndrica finita nas baixas frequências ($k_0 \ll k_z$) decaí exponencialmente com a frequência dependendo da razão do comprimento do raio e número de modo (s e m , ver equação 3,13). Em torno da frequência crítica ($k_z = k$) a variação da eficiência da radiação não é uma função monotônica simples porque ocorre efeitos complicados de interferência entre as ondas e a casca. Acima da frequência crítica ($k_0 > k_z$) a radiação de casca finita aproxima-se assintoticamente da casca infinita, e bem acima da frequência crítica ($k_0 \ll k_z$) a eficiência de radiação aproxima-se da unidade.

A B S T R A C T

A knowledge of the radiated acoustic power is required in estimating the coupling between a fluid and a vibrating structure such as in water - cooled reactor structures, the structures of hydroelectric power plants and submerged structure of off-shore oil rigs. It is also required in order to include acoustic damping in the analysis of structural vibration and in noise control. This work presents results on the modal radiation efficiency of a finite cylindrical shell which vibrates in axial and circumferential directions, where the shell length vibrates in an integer number of half wavelength. The results are obtained by solving the wave equation directly satisfying the boundary conditions.

The results show that the radiation efficiency of a finite cylindrical shell at low frequency ($k_0 \ll k_z$) decay exponentially with frequency depending upon length to radius ratio and mode number (s and m , see equation 3.13). Around the critical frequency ($k_z \approx k$) the variation of the radiation efficiency with frequency and shell parameters is not a simple monotonic function because complicated interference effects between waves and the shell occur. Above the critical frequency ($k_0 > k_z$), the radiation from finite shell asymptotically approaches that from an infinite shell, and well above the critical frequency, ($k_0 \gg k_z$) the radiation efficiency approaches unity.

I N D Í C E

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

1.1. Introdução	6
1.2. Estudo Bibliográfico	7
1.3. Método	7
1.4. Bibliografia	9

CAPÍTULO 2: RADIAÇÃO ACÚSTICA DE CASCAS FINITAS

2.1. Teoria da Radiação Acústica de Corpos Cilíndricos	11
2.2. Radiação Acústica de Casca Infinita	15
2.3. Radiação Acústica da Casca Cilíndrica Finita.	23
2.4. Bibliografia	37
Figuras 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4	

CAPÍTULO 3: COMPUTAÇÃO DA EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO

3.1. Método Numérico	42
3.2. Comportamento da Função Próximo a zero	42
3.3. Escolha do Número de Pontos de Integração ...	44
3.5. O Limite Inferior X em I_2	45
3.6. Resultados obtidos pelo Método Numérico	46
3.7. Aproximação em Baixas Frequências	46
3.8. Aproximação nas Altas Frequências	48
3.9. Resumo e Conclusões	48

3.10. Bibliografia	62
Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12.	

CAPÍTULO 4: INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL SOBRE AMORTECIMENTO INTERNO E EXTERNO DE UMA CASCA ESPECÍFICA FINITA VIBRANTE

4.1. Introdução	63
4.2. Amortecimento total	64
4.3. Discussão e Conclusões	65
4.4. Bibliografia	69
Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4	

CAPÍTULO 5: RESUMO E CONCLUSÃO

5.1. Resumo	70
5.2. Conclusão	71

APÊNDICE A: SUBROTINA BESSEL	73
------------------------------------	----

APÊNDICE B: SUBROTINA NEUMANN	75
-------------------------------------	----

APÊNDICE C: SUBROTINA HANKEL	76
------------------------------------	----

APÊNDICE D: Trabalho apresentado no 100 th meeting of the Acoustical Society of America (ASA) in Los Angeles, California, USA, 17-21 November, 1980, (Session SS, 20 November at 9:00 a.m.) - "Acoustic Radiation By Finite Shells	77
---	----

APÊNDICE E: Trabalho Apresentado no 4º Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais, Universidade Federal de Santa Catarina, Dezembro, 1980 - "Amortecimento Interno e Externo de uma casca Finita Vibrante" 78

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Erro introduzido devido ao fato de se começar a integração em $\theta = 10^{-5}$ ao invés de $\theta = 0$
A_m	Coefficiente determinado pelas condições de contorno
a	Raio externo
a_i	Raio interno
BESJ	Subrotina que gera a função Bessel
BESY	Subrotina que gera a função Neumann
C	Velocidade do som
f	Frequência em Hz
HAHD	Subrotina que gera a função Hankel
$H_m(\bar{k}r)$	Função Hankel de ordem m ($H_m = J_m + iy_m$)
$\bar{H}_m(\bar{k}r)$	Derivada primeira da função Hankel
$J_m(\bar{k}r)$	Função Bessel de ordem m
$\bar{J}_m(\bar{k}r)$	Derivada primeira da função Bessel
$Y_m(\bar{k}r)$	Função Neumann de ordem m
$\bar{Y}_m(\bar{k}r)$	Derivada primeira da função Neumann
k_0	Número de onda acústica, $k_0 = \frac{\omega}{c}$
k_z	Número de onda axial, $k_z = \pi s/\ell$
k	Número de onda radial
ℓ	Comprimento do cilindro
s	Número de modo axial

m	Número de modo circunferencial
$MH_m(x)$	Função Bessel modificada
M	Massa correspondente a um comprimento l de uma casca, $M = \rho_m l \pi (a^2 - a_i^2)$
P	Pressão acústica
$P_{m,s}(r, \phi, z, t)$	Pressão acústica para um modo de vibração
$\bar{P}(z)$	Transformada de Fourier
R_{rad}	Resistência de radiação
η_{mec}	Amortecimento interno devido a dissipação da energia cinética dentro do material
η_{rad}	Fator de perda de radiação
η_p	Amortecimento das junções, solda, suporte
η_{tot}	Amortecimento total
σ_{rad}	Eficiência de radiação
$\delta(k-k_z)$	Função delta de Dirac
ρ_m	Densidade da casca
ρ	Densidade do meio
V	Velocidade superficial normal
V_o	Constante real representando a amplitude da velocidade
$\langle \bar{V}^2 \rangle$	Velocidade média quadrática em relação ao tempo e espaço
$\langle w \rangle$	Potência acústica média radiada
ω	Frequência em ciclos/seg

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO

1.1. INTRODUÇÃO

Quando uma estrutura que vibre está submersa em um fluido, como no caso de usinas hidroelétricas, e reatores nucleares resfriados a água e estruturas submersas de plataformas submarinas para a extração do petróleo, o meio fluido deverá deslocar-se no sentido de acomodar o movimento de vibração da estrutura. Esse efeito é usualmente expresso com o conceito de eficiência de radiação e massa adicionada. A eficiência de radiação representa o acoplamento entre a estrutura vibrante e o meio fluido. Para estruturas que vibrem no vácuo os efeitos da radiação acústica e a massa adicionada são nulos. Para estrutura vibrante no ar esses efeitos são pequenos devido à baixa densidade do meio circundante em comparação com a densidade da estrutura e, portanto, podem ser ignorados. Por outro lado, para estrutura vibrante em água, o método da análise modal clássica para o cálculo da Tensão vibracional não é válido e os efeitos do amortecimento de radiação e massa adicionada devem ser levados em conta. Portanto informações sobre a eficiência de radiação da estrutura vibrante é necessária para:

- 1 - Calcular o acoplamento da interação fluido - estrutura [1.1, 1.2, 1.3]
- 2 - Adicionar o efeito do amortecimento acústico [1.4]
- 3 - Controle do ruído

1.2. ESTUDO BIBLIOGRÁFICO

Morse e Ingard [1.5] consideraram a potência acústica radiada por uma casca cilíndrica infinita usando a pressão calculada em campo livre. Junger [1.6] calcula a resistência de radiação de casca infinita que vibrava somente na direção circunferencial, Robey [1.7] considerou um sistema pulsante montado em uma casca infinita. Willian [1.8] utilizando casca finita apresentou resultados somente para a pressão acústica e diretividade. Manning e Maidanik [1.9] apresentaram resultados para a eficiência de radiação média da casca cilíndrica finita usando a teoria de placa modificada para obter a curvatura da mesma e calculando a média do resultado na banda de frequência. Yoursi Gerges e Fahy [1.10, 1.11] apresentaram resultados para a eficiência de radiação de uma barra cilíndrica finita com vibração axial somente.

Este trabalho apresenta resultados para a eficiência de radiação de cascas cilíndricas finita, vibrando axial e circunferencialmente em modo simples. Os resultados são obtidos resolvendo-se diretamente a equação da onda satisfazendo as condições de contorno da casca finita e infinita.

1.3. MÉTODO

A solução da equação da onda em coordenadas cilíndricas foi revisada. A solução para a pressão acústica radiada por casca finita e infinita foi obtida satisfazendo as condições de contorno. A potência acústica total radiada é então obtida integrando-se a pressão na superfície e a velocidade. Tem-se por fim a efi-

ciência de radiação da casca finita e infinita.

Este trabalho [1.12] foi aceito no 100th meeting of acoustical Society of America 16-21 de novembro/1980, Los Angeles, California, E.U.A. O trabalho experimental de Capítulo 4 também foi aceito no 4º Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais, 15-17 de dezembro/1980, UFSC [1.4]

1.4. REFERÊNCIA

- [1.1] S.N. Yoursi Gerges. The international Conference in Noise Control Engeneering Warsovia, Polonia, set 1979. Structure - Acoustic Interaction in an Enclosuse.
- [1.2] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy. Journal of Sound and Vibration, 53(3), 441-452, 1977. Distorted cylindrical shell Response to Internal Acoustic Excitation Below the cut-off Frequency.
- [1.3] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy. Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão. V.F.Ba., Salvador, BA, Brasil, Nov. 1980. Resposta de Cascas a um Campo Sonoro Interno Acima da Frequência de Corte.
- [1.4] Samir N. Yoursi Gerges e Jorge C. da Silva Pinto, 4º Congresso Brasileiro em engenharia e Ciência dos materiais, UFSC, Santa Catarina, Dezembro 1980. "Amortecimento Interno e Externo de uma Casca Finita Vibrante".
- [1.5] P.M. Morse and K.U. Ingard, 1968. Theoretical Acoustics. MC Graw Hill Book Company
- [1.6] M.C. Junger, Journal of the Acoustical Society of America, 1952, 24(3), 288-289. "Radiation Loading of Cylindrical and Spherical Surfaces"
- [1.7] D.H. Robey, Journal of the Acoustical Society of America, 1955, 27(4), 706-710. "On the Radiation Impedance of an array of

finite Cylinders".

- [1.8] W. Willians, N.G. Parke, D.A. Moran and C.M. Sherman. Journal of the Acoustical Society of America, 1964, 36(12), 2316-2322. "Acoustic Radiation from a Finite Cylinder"
- [1.9] J.E. Maningand and G. Naidanik, Journal of the Acoustical Society of America, 1964, 36(9) 1961-1968. "Radiation Properties of Cylindrical shells".
- [1.10] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy, Journal of sound and Vibration, 1973, 26|4|, 437-439. Sound Radiation from transversely Vibrating unbaffled beams.
- [1.11] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy, Journal of Sound and Vibration, 1975, 40(3). 299-306. Acoustic Radiation by unbaffled Cylindrical Beams in Multi-Modal Transverse Vibration.
- [1.12] S.N. Yoursi Gerges e J.C. Silva Pinto, Acoustic Radiation by Finite Shells. The 100th Meeting of Acoustical society of America, november 1980. Los Angeles, E.U.A.

C A P Í T U L O 2

RADIÇÃO ACÚSTICA DE CASCAS FINITAS

2.1. TEORIA DA RADIAÇÃO ACÚSTICA DE CORPOS CILÍNDRICOS

A potência acústica radiada pode ser determinada calculando-se a pressão acústica na superfície vibrante, e obtendo-se a potência média no tempo, pela integração do produto da pressão pela velocidade superficial normal sobre a superfície da estrutura. Isso requer que a solução da equação da onda satisfaça às duas condições de contorno:

- (a) Igualdade da velocidade da partícula do fluido do meio em contato com a casca, com a velocidade superficial normal.
- (b) Somente as ondas que deixam a superfície devem ser utilizadas para satisfazer a condição de radiação no infinito, em condição de campo livre.

A solução da equação da onda em coordenadas cilíndricas é demonstrada nas publicações [2.1, 2.2, 2.3] mas, por uma questão de unidade, a solução será rerepresentada aqui.

A equação da pressão acústica em coordenadas cilíndricas é dada sob a forma:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] p(r, \phi, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(r, \phi, z, t)}{\partial t^2} \quad (2.1.1)$$

Fazendo a função $P(r, \phi, z, t)$ variar harmonicamente com o tempo (t), obtêm-se:

$$p(r, \phi, z, t) = P(r, \phi, z) e^{-i\omega t} \quad (2.1.2)$$

A derivada parcial de 2ª ordem da expressão (2.1.12) em relação ao tempo, dará:

$$\frac{\partial^2 p(r, \phi, z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 P(r, \phi, z) e^{-i\omega t} \quad (2.1.3)$$

Substituindo (2.1.3) em (2.1.1), vem:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] P(r, \phi, z) + k_0^2 P(r, \phi, z) = 0 \quad (2.1.4)$$

onde $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, k_0 é o número de onda acústica.

A transformada de Fourier de $P(r, \phi, z)$ e sua inversa são dadas respectivamente por:

$$\bar{P}(r, \phi, k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(r, \phi, z) e^{-ikz} dz \quad (2.1.5)$$

ou

$$P(r, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(r, \phi, k) e^{ikz} dk, \quad (2.1.5)$$

as derivadas parciais de z podem ser executadas assim:

$$\frac{\partial^2 P(r, \phi, z)}{\partial z^2} = -k^2 P(r, \phi, z) \quad (2.1.6)$$

Tomando a transformada de Fourier de ambos os membros da equação (2.1.4), tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] P(r, \phi, z) e^{-ikz} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 P(r, \phi, z)}{\partial z^2} e^{-ikz} dz + \int_{-\infty}^{\infty} k_0^2 P(r, \phi, z) e^{-ikz} dz = 0 \quad (2.1.7)$$

O que se pode observar é que em (2.1.7) estão contidas as expressões (2.1.5), logo:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \bar{P}(r, \phi, k) + (k_0^2 - k^2) \bar{P}(r, \phi, k) = 0 \quad (2.1.8)$$

Obtém-se uma solução para $\bar{P}(r, \phi, k)$ utilizando a condição de contorno (b), e essa solução será sob a forma [2.5]:

$$\bar{P}(r, \phi, k) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi) H_m(\bar{k}r) \quad (2.1.9)$$

onde

$$\bar{k}^2 = k_0^2 - k^2$$

$H_m(\bar{k}r)$ é a função Hankel de ordem m e

$$H_m(\bar{k}r) = J_m(\bar{k}r) + iN_m(\bar{k}r)$$

e $J_m(\bar{k}r)$ é a função Bessel de ordem m

$Y_m(\bar{k}r)$ e a função Neumann de ordem m

A_m é uma função geral de k e $\bar{k}^2 = k_0^2 - k^2$

Obtêm-se a solução tomando o inverso da transformada de $P(r, \phi, k)$,

$$P(r, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi) H_m(\bar{k}r) e^{ikz} dk \quad (2.1.10)$$

Finalmente, substituindo (2.1.10) em (2.1.2) tem-se como solução:

$$p(r, \phi, z, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi) H_m(\bar{k}r) \right] e^{ikz} dk \quad (2.1.11)$$

Da equação (2.1.11) o valor de A_m será obtido pela condição de contorno (a), isto é:

$$v \Big|_{r=a} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

Onde:

ω é a frequência em ciclos/segundo

ρ é a densidade do meio

2.2. RADIAÇÃO ACÚSTICA DE CASCA INFINITA

Considerando um cilindro infinito com o modo axial $k_z = \frac{\pi s}{\ell}$, onde s é número de modo estrutural e ℓ um comprimento do cilindro em metros, e que contém um número inteiro de meia ondas estrutural, e tomando-se a velocidade normal superficial da forma $v = V_0 \operatorname{sen}(k_z z) \cos m\phi e^{-i\omega t}$, $-\infty < v < \infty$ (2.2.1), onde V_0 é uma constante real representando a amplitude da velocidade, poder-se-á determinar a equação da pressão acústica na superfície da casca, utilizando a forma geral dada pela expressão (2.1.11) e a condição de contorno, que iguala a velocidade da partícula do fluido à velocidade normal superficial; isto é:

$$v \Big|_{r=a} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

Derivando a equação (2.1.11), tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi) \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk \quad (2.2.2)$$

Portanto, a velocidade da partícula será:

$$v \Big|_{r=a} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi i\omega\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi) \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk \quad (2.2.3)$$

De acordo com a condição de contorno (a), seção (2.1), deve-se igualar a equação (2.2.3) à equação (2.2.1) e obter-se:

$$V_0 \text{sen}(k_z z) \cos(m\phi) e^{-i\omega t} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi i \omega \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi) \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk \quad (2.2.4)$$

Onde $H_m(\bar{k}a)$ é a derivada de 1^a ordem da função de Hankel calculada em $r = a$.

Multiplicando ambos os lados da expressão (2.2.4) por $\cos p\phi$ e fazendo a integração abaixo, obtém-se:

$$2\pi \cdot i\omega\rho \int_0^{2\pi} V_0 \text{sen}(k_z z) \cos(m\phi) \cos(p\phi) d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_m \cos(m\phi) \cos(p\phi) d\phi \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk \quad (2.2.5)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade da função cosseno em (2.2.5), quando $m \neq p$ a integral será zero e, para $m = p \neq 0$, ter-se-á sucessivamente:

$$2\pi \cdot i\omega\rho \int_0^{2\pi} V_0 \text{sen}(k_z z) \cos^2(m\phi) d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_m \cos^2(m\phi) \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk d\phi$$

$$2\pi \cdot i\omega\rho V_0 \text{sen}(k_z z) \int_0^{2\pi} \cos^2(m\phi) d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} A_m \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk \int_0^{2\pi} \cos^2(m\phi) d\phi$$

$$2\pi \cdot i\omega\rho V_0 \text{sen}(k_z z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_m \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk \quad (2.2.6)$$

$$A_m \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) = 2\pi i \omega \rho V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(k_z z) e^{-ikz} dz \quad (2.2.7)$$

Substituindo em (2.2.7) a relação $\text{sen}(k_z z) = \frac{e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}}{2i}$

ter-se-á:

$$A_m \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) = 2\pi V_0 i \omega \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}}{2i} \cdot e^{-ikz} dz$$

$$A_m \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) = \omega \rho \pi V_0 \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_z)z} dz - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k+k_z)z} dz \right]$$

$$A_m \bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a) = \pi V_0 \omega \rho \left[\delta(k-k_z) - \delta(k+k_z) \right]$$

onde δ é a função impulso de Dirac.

Portanto, o valor de A_m será:

$$A_m = \pi V_0 \omega \rho \left[\delta(k-k_z) - \delta(k+k_z) \right] \cdot \frac{1}{\bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a)}$$

Assim, a equação (2.1.11) pode ser reescrita sob a forma:

$$p_{m,s}(r, \phi, z, t) = \frac{\omega \rho V_0 e^{-i\omega t}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(k-k_z) - \delta(k+k_z) \right] \cos(m\phi) \frac{H_m(\bar{k}r)}{\bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a)} e^{ikz} dk =$$

$$= \frac{\omega \rho V_0 \cos(m\phi) e^{-i\omega t}}{2} \left[\frac{H_m(\bar{k}r) e^{-ik_z z}}{\bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a)} - \frac{H_m(\bar{k}r)}{\bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a)} e^{ik_z z} \right]$$

$$p_{m,s}(r, \phi, z, t) = - \frac{\omega \rho V_0 \cos(m\phi) e^{-i\omega t}}{2} \cdot \frac{H_m(\bar{k}r)}{\bar{k} \bar{H}_m(\bar{k}a)} 2 \text{isen}(k_z z)$$

ou

$$p_{m,s}(r, \phi, z, t) = i\omega \rho V_0 e^{-i\omega t} \left[\frac{H_m(x)}{\bar{k} \bar{H}_m(\bar{x})} \right] \text{sen}(k_z z) \cos(m\phi) \quad (2.2.8)$$

onde

$$\bar{x} = \bar{k}a, \quad x = \bar{k}r, \quad \bar{k} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}, \quad \text{onde } K \text{ é a variável de integração, agora mudou-se para: } \bar{K} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$$

$p(r, \phi, z, t)$ é a pressão acústica para um modo de vibração.

A parte real da equação (2.2.8) poderá ser escrita sob a forma:

$$p_{m,s}(a, \phi, z, t) = iV_0 \omega \rho \text{sen}(k_z z) \cos(\omega t) \cos(m\phi) \left[\frac{H_m(\bar{x})}{\bar{k} \bar{H}_m(\bar{x})} \right] \text{imag} \quad (2.2.9)$$

A potência acústica média radiada em um ciclo T (segundos) e um comprimento ℓ (em metros e contendo um número inteiro de meias ondas estruturais) de uma casca infinita, por definição, será:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left[p(a, \phi, z, t) \cdot v_{\text{real}} \right] a d\phi dz dt \quad (2.2.10)$$

Escrevendo a parte real da equação (2.2.1), obtêm-se:

$$V_{\text{real}} = V_0 \text{sen}(k_z z) \cos(m\phi) \cos(\omega t) \quad (2.2.11)$$

Substituindo então (2.2.11) e (2.2.9), na equação (2.2.10), tem-se:

$$\langle w \rangle = - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{\ell} i V_0 \omega \rho a \text{sen}(k_z z) \cos(\omega t) \cos(m\phi) \left[\frac{H_m(\bar{x})}{k \bar{H}_m(\bar{x})} \right] V_0 \text{sen}(k_z z) dz \cdot I$$

$$I = \cos(m\phi) \cos(\omega t) a \, d\phi dt$$

onde, separando as integrais, tem-se:

$$\langle w \rangle = i \frac{i V_0^2 \rho \omega a}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \int_0^{\ell} \text{sen}^2(k_z z) dz \int_0^{2\pi} \cos^2(m\phi) d\phi \left[\frac{H_m(\bar{x})}{k \bar{H}_m(\bar{x})} \right] \text{imag}$$

cujo resultado será:

$$\langle w \rangle = i \frac{\pi V_0^2 \omega \rho a \ell}{4} \left[\frac{H_m(\bar{x})}{k \bar{H}_m(\bar{x})} \right] \text{imag} \quad (2.2.12)$$

A equação (2.2.12) poderá ser mais desenvolvida utilizando-se as expressões abaixo [2.4] ..

$$\bar{J}_m = \frac{1}{2} \left[J_{m-1} - J_{m+1} \right]$$

$$\bar{Y}_m = \frac{1}{2} \left[Y_{m-1} - Y_{m+1} \right]$$

$$iy_m \bar{J}_m - iJ_m \bar{Y}_m = - \frac{2i}{\pi \bar{x}}$$

Assim:

$$\langle w \rangle = \frac{\pi V_0^2 \rho \omega a l}{4} \cdot \frac{\frac{2}{\pi \bar{x}}}{\bar{k} \left| \bar{H}_m(\bar{x}) \right|^2}$$

ou

$$\langle w \rangle = \frac{V_0^2 \omega \rho l}{2} \cdot \frac{1}{\bar{k}^2 \left| \bar{H}_m(\bar{x}) \right|^2} \quad (2.2.13)$$

Por definição, a resistência de radiação é:

$$R_{\text{rad}} = \frac{\langle w \rangle}{\langle \bar{v}^2 \rangle} \quad (2.2.14)$$

onde $\langle \bar{v}^2 \rangle$ é a velocidade média quadrática em relação ao tempo e espaço.

Por definição, o fator de perda da radiação é:

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{R_{\text{rad}}}{\omega M} \quad (2.2.15)$$

onde

M é a massa correspondente a um comprimento ℓ de uma casca infinita, isto é:

$$M = \rho_m \ell \pi (a^2 - a_i^2), \text{ onde:}$$

ρ_m é a densidade da casca

a é o raio externo

a_i é o raio interno

Por outro lado, a velocidade média quadrática em relação ao tempo e espaço $\langle \bar{v}^2 \rangle$, pode ser calculada assim:

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \frac{1}{2\pi a \ell} v_o^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \int_0^\ell \sin^2(k_z z) dz \int_0^{2\pi a} \cos \frac{m}{a} (a\phi) d(a\phi) \quad (2.2.16)$$

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \frac{v_o^2}{8}$$

Portanto, substituindo (2.2.16) e (2.2.13) em (2.2.14) obtém-se o seguinte para a resistência de radiação:

$$R_{\text{rad}} = \frac{4\omega\rho\ell}{\bar{k}^2 \left| \bar{H}_m(\bar{x}) \right|^2}$$

Utilizando-se então (2.2.17) em (2.2.15), o fator de perda na radiação ficará:

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{4\rho\omega\ell}{\bar{k}^2 \left| \bar{H}_m(\bar{x}) \right|^2} \cdot \frac{1}{\omega\ell\rho_m\pi(a^2 - a_i^2)}, \text{ ou}$$

$$\eta_{\text{rad}} \cdot \frac{\rho_m}{\rho} \cdot \left[1 - \frac{a_i^2}{a^2} \right] = \frac{4}{\pi a^2 \bar{k}^2 |\bar{H}_m(a\bar{k})|^2} \quad (2.2.18)$$

Usando-se algumas aproximações definidas em [2.5], a equação (2.2.13) poderá ser escrita:

$$\text{Para } \bar{x} = a\bar{k} \gg m + \frac{1}{2}$$

$$|\bar{H}_m(\bar{x})|^2 \approx \frac{2}{\pi \bar{k} a}, \quad m > 0$$

A resistência de radiação, equação (2.2.17), fica:

$$R_{\text{rad}} = \frac{4\omega\rho\ell}{\bar{k}^2} \cdot \frac{\pi\bar{k}a}{2}, \quad \text{portanto}$$

A resistência de radiação normalizada ou a eficiência de radiação será:

$$\frac{R_{\text{rad}}}{2\pi a \rho C \ell} = \sigma_{\text{rad}} \approx 1 \quad (2.2.19)$$

Para o fator de perda na radiação; (2.2.18), ter-se-á:

$$\eta_{\text{rad}} \frac{\rho_m}{\rho} \left[1 - \frac{a_i^2}{a^2} \right] \approx \frac{2}{\bar{k}a} \quad (2.2.20)$$

Nas altas frequências ou pequenos comprimentos de onda, comparados com o perímetro da casca ($\bar{k}a \gg m + 1/2$ ou $2\pi a \gg \lambda$), a resistência de radiação normalizada (2.2.19) é igual à unidade. Isto ocorre porque em altas frequências a pressão acústica e a velocidade da partícula estão em fase e fornecerão um valor máximo para a ra

dição normalizada. No caso da casca finita, o cancelamento poderá não ocorrer devido à radiação das pontas; este caso será demonstrado no próximo parágrafo.

2.3 - RADIAÇÃO ACÚSTICA DE CASCA CILÍNDRICA FINITA

Na prática, uma casca cilíndrica tem comprimento finito, mas para evitar dificuldades na aplicação das condições de contorno (bordas do cilindro), é conveniente considerá-la como tendo comprimento infinito rígido, exceto na parte finita de comprimento ℓ .

A velocidade superficial normal do cilindro pode ser determinada através das componentes harmônicas, dadas por: (figura 2.4).

$$\begin{aligned}
 v &= 0 & z < -\ell/2 \\
 v &= v_0 \frac{\cos}{\sin} \left(\frac{s\pi z}{\ell} \right) \cos(m\phi) e & -\ell/2 \leq z \leq \ell/2 & \quad 2.3.1 \\
 v &= 0 & z > \ell/2
 \end{aligned}$$

Onde

$\cos\left(\frac{s\pi z}{\ell}\right)$ será usado quando s for ímpar, e $\sin\left(\frac{s\pi z}{\ell}\right)$ quando for par.

A solução da equação escalar de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, para a pressão, será análoga à equação (2.1.11).

O valor A_m poderá ser determinado pela condição de contorno (a) da seção 2.1.

Portanto, obtêm-se:

$$V_0 \frac{\cos\left(\frac{s\pi Z}{\ell}\right) \cos(m\phi)}{\text{sen}} e^{-i\omega t} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi i \omega \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{k} A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) \cos(m\phi) e^{ikz} dk$$

$-\ell/2 < z < \ell/2$

multiplicando ambos os membros da expressão anterior por $\cos(m\phi)$, fazendo a integração e aplicando a propriedade de ortogonalidade das funções seno e cosseno, dará:

$$2\pi V_0 \frac{\cos\left(\frac{s\pi Z}{\ell}\right)}{\text{sen}} = \frac{1}{i\omega \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{k} A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk$$

Notando-se que

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{k} A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) e^{ikz} dk$ é a transformada inversa de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ i\omega \rho V_0 \frac{\cos\left(\frac{s\pi Z}{\ell}\right)}{\text{sen}} \right\} \text{ tem-se:}$$

$$\bar{k} A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = i\omega \rho V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{s\pi Z}{\ell}\right)}{\text{sen}} e^{-ikz} dz \quad (2.3.2)$$

desde que $V = 0$ para $-\ell/2 > z > \ell/2$, a expressão (2.3.2) poderá ser escrita sob a forma:

$$\bar{k} A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = i\omega \rho V_0 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\cos\left(\frac{s\pi Z}{\ell}\right)}{\text{sen}} e^{-ikz} dz, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.3)$$

Para se obter a expressão para A_m , a equação (2.3.3) deverá ser analisada para dois casos:

Primeiro: quando S for ímpar, tem-se sucessivamente

$$\bar{k}A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = i\omega\rho V_0 \int_{-l/2}^{l/2} \cos(k_z z) e^{-ikz} dz$$

$$\bar{k}A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = i\omega\rho V_0 \left[\frac{e^{-ikz} (-ik \cos k_z z + k_z \sin k_z z)}{k_z^2 - k^2} \right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$\bar{k}A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = \frac{i\omega\rho V_0}{k_z^2 - k^2} \left[-2k \cos \frac{k_z l}{2} \sin \frac{kl}{2} + 2k_z \sin \frac{k_z l}{2} \cos \frac{kl}{2} \right] \quad (2.3.4)$$

Para $\frac{k_z l}{2} = \frac{s\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{s\pi}{2}$ decorre que (2.3.4) ficará sob a forma:

$$\bar{k}A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = \frac{i\omega\rho V_0}{k_z^2 - k^2} \left[2k_z \sin \frac{k_z l}{2} \cos \frac{kl}{2} \right] \quad (2.3.5)$$

Segundo: quando S for par, tem-se sucessivamente:

$$\bar{k}A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = i\omega\rho V_0 \int_{-l/2}^{l/2} \sin k_z z e^{-ikz} dz$$

$$\bar{k}A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = \left[e^{-ikz} (-ik \sin k_z z - k_z \cos k_z z) \right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$\bar{k}A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = \frac{i\omega\rho V_0}{k_z^2 - k^2} \left[-2ik \cos \frac{kl}{2} \sin \frac{k_z \ell}{2} + 2ik_z \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{k_z \ell}{2} \right] \quad (2.3.6)$$

Para $\frac{k_z \ell}{2} = \frac{S\pi}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{S\pi}{2}$ decorre que (2.3.6) ficará sob a forma:

$$\bar{k}A_m \bar{H}_m(\bar{k}a) = \frac{i\omega\rho V_0}{k_z^2 - k^2} \left[2ik_z \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{k_z \ell}{2} \right] \quad (2.3.7)$$

Obtidos os resultados separados para quando S for ímpar (2.3.5) e quando S for par (2.3.7), a expressão (2.3.3) fornecerá o valor de A_m , que deverá ser substituído na expressão para a pressão (2.1.11) correspondente a um modo de vibração, que ficará sob a forma

$$P_{m,s}(a, \phi, z, t) = \frac{i\omega\rho}{2\pi} e^{-i\omega t} \cos(m\phi) V_0 k_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k_z \ell}{2} \cos \frac{kl}{2}}{\bar{k} (k_z^2 - k^2)} \cdot \frac{H_m(\bar{k}a)}{\bar{H}_m(\bar{k}a)} e^{ikz} dk \quad (2.3.7.1)$$

onde a função seno é usada quando S é ímpar e a função cosseno é usada quando S é par.

A potência acústica externa média radiada em um ciclo T (segundos) e comprimento ℓ (metros) para uma casca finita, por definição, será:

$$\langle w \rangle_{m,s} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} P_{m,s}(a, \phi, z, t) \cdot V \, a \, d\phi dz dt \quad (2.3.8)$$

* real real

levando em conta a expressão (2.3.1) e substituindo-se (2.3.7.1) em (2.3.8), obtém-se:

$$\langle w \rangle_{m,s} = \frac{i\omega\rho V_0^2 a k_z}{2\pi} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \overbrace{\cos^2(\omega t) e^{-i\omega t} dt}^A \int_0^{2\pi} \overbrace{\cos^2(m\phi) d\phi}^B \cdot I$$

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2 \sin \frac{k_z l}{2} \cos \frac{kl}{2} \cos k_z z}{2i \cos \frac{k_z l}{2} \sin \frac{kl}{2} \sin k_z z} \cdot \frac{H_m(\bar{k}a)}{\bar{H}_m(\bar{k}a)} \cdot \frac{e^{ikz}}{\bar{k}(k_z^2 - k^2)} \right) dk dz}_{C} \quad (2.3.9)$$

Considerando somente a parte real de $e^{-i\omega t}$, encontra-se para A:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

As demais partes B e C são obtidas abaixo:

$$B = \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi d\phi = \pi$$

$$C = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin \frac{k_z l}{2} \cos \frac{kl}{2} \cos k_z z}{2i \cos \frac{k_z l}{2} \sin \frac{kl}{2} \sin k_z z} \right) \frac{H_m(\bar{k}a)}{\bar{H}_m(\bar{k}a)} \frac{e^{ikz}}{\bar{k}(k_z^2 - k^2)} dk dz$$

Desmembrando C nas partes abaixo:

$$C_1 = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\cos(k_z z)}{\sin(k_z z)} e^{ikz} dz \quad (2.3.10)$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} 2i \frac{\sin \frac{k_z l}{2} \cos \frac{kl}{2}}{\cos \frac{k_z l}{2} \sin \frac{kl}{2}} \frac{H_m(\bar{k}a)}{\bar{H}_m(\bar{k}a)} \frac{dk}{\bar{k}(k_z^2 - k^2)} \quad (2.3.11)$$

Será feito, primeiramente, a integração de C_1 , que por sua vez será analisado sob dois casos:

Primeiro: se S for ímpar, tem-se sucessivamente

$$C_{1i} = \int_{-l/2}^{l/2} \cos(k_z z) e^{ikz} dz$$

$$C_{1i} = e^{ikz} \left. \frac{ik \cos k_z z + k_z \sin k_z z}{k_z^2 - k^2} \right|_{-l/2}^{l/2}$$

Substituindo os limites de integração, obtém-se:

$$C_{1i} = \frac{2k \cos \frac{k_z l}{2} \sin \frac{kl}{2} + 2 \sin \frac{k_z l}{2} \cos \frac{kl}{2}}{k_z^2 - k^2}, \text{ mas se } S \text{ é ímpar,}$$

Ter-se-á:

$$C_{1i} = \frac{2k_z \sin \frac{k_z l}{2} \cos \frac{kl}{2}}{k_z^2 - k^2} \quad (2.3.12)$$

Segundo: se S for par, tem-se sucessivamente

$$C_{1p} = \int_{-l/2}^{l/2} \text{sen}(k_z z) e^{ikz} dz$$

$$C_{1p} = \frac{e^{ikz} \left[ik \text{sen} k_z z - k_z \text{cos} k_z z \right]}{k_z^2 - k^2} \Bigg|_{-l/2}^{l/2}$$

Ao se substituir os limites de integração, obter-se-á:

$$C_{1p} = \frac{2ik_z \cos \frac{k_z l}{2} \text{sen} \frac{kl}{2}}{k_z^2 - k^2} \quad (2.3.13)$$

Assim, (2.3.13) e (2.3.12) são soluções parciais que, quando se substitui em (2.3.10), obtêm-se a seguinte expressão:

$$C_1 = \frac{2 \text{sen} \frac{k_z l}{2} \text{cos} kl}{2i \cos \frac{k_z l}{2} \text{sen} \frac{kl}{2}} \frac{1}{k_z^2 - k^2} \quad (2.3.14)$$

Finalmente obtidas as soluções para A, B e C_1 , poder-se-á escrever a equação (2.3.9) sob a forma.

$$\langle w \rangle_{m,s} = \left[\frac{i\omega V_0^2 a}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4k_z^2 \left(\frac{\text{cos} kl}{2} \right)^2}{(k_z^2 - k^2)} \cdot \frac{H_m(\bar{k}a)}{\bar{H}_m(\bar{k}a)} \cdot \frac{dk}{\bar{k}(k_z^2 - k^2)} \right]_{\text{real}} \quad (2.3.15)$$

ou, fazendo as simplificações e reescrevendo (2.3.15) para quando S for ímpar, obtêm-se:

$$\langle w \rangle_{m,s} = \left[i\omega\rho V_0^2 a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z^2 \cos \frac{2k\ell}{2}}{(k_z^2 - k^2)^2} \cdot \frac{H_m(\bar{k}a)}{\bar{H}_m(\bar{k}a)} \cdot \frac{dk}{\bar{k}} \right] \text{real} \quad (2.3.16)$$

Como $\bar{k} = \sqrt{k_0^2 - k^2}$ e $F(k)$ sendo uma função de integração poder-se-á utilizar a relação: $\sqrt{K_0^2 - k^2} = i\sqrt{k^2 - k_0^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} = 2 \int_0^{\infty}, \text{ o que tem a equação (2.3.16) a ficar}$$

sob a forma:

$$\langle w \rangle_{m,s} = \left[2i\omega\rho V_0^2 a \int_0^{\infty} \frac{k_z^2 \cos \frac{2k\ell}{2}}{(k_z^2 - k^2)^2} \cdot \frac{H_m(a\sqrt{k_0^2 - k^2})}{\bar{H}_m(a\sqrt{k_0^2 - k^2})} \cdot \frac{dk}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \right] \text{real} \quad (2.3.17)$$

A equação (2.3.17) terá sua integração resolvida utilizando-se a seguinte relação:

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{k_0} + \int_{k_0}^{\infty}$$

$$E = E_1 + E_2$$

Assim, usando a relação $\sqrt{k_0^2 - k^2} = i\sqrt{k^2 - k_0^2}$, E_2 poderá ficar sob a forma:

$$E_2 = \int_{k_0}^{\infty} \frac{k_z^2 \cos \frac{2k\ell}{2}}{(k_z^2 - k^2)^2} \times \frac{H_m(ai\sqrt{k^2 - k_0^2})}{\bar{H}_m(ai\sqrt{k^2 - k_0^2})} dk \quad (2.3.18)$$

Da referência [2.4] , poder-se-á utilizar as seguintes relações:

$$H_m(x) = \frac{\pi}{2} i^{-m+1} H_m(ix)$$

ou

$$H_m(ix) = \frac{2}{\pi} i^{-1-m} MH_m(x)$$

Onde $MH_m(x)$ é a função Bessel modificada, sendo uma função real, e assim se pode escrever:

$$H_m(ia \sqrt{k^2 - k_o^2}) = \frac{2}{\pi} i^{-1-m} MH_m(a \sqrt{k^2 - k_o^2}) \quad (c)$$

$$H_{m+1}(ia \sqrt{k^2 - k_o^2}) = \frac{2}{\pi} i^{-1-(m+1)} MH_m(a \sqrt{k^2 - k_o^2}) \quad (a)$$

$$H_{m-1}(ia \sqrt{k^2 - k_o^2}) = \frac{2}{\pi} i^{-1-(m-1)} MH_m(a \sqrt{k^2 - k_o^2}) \quad (b)$$

Notando-se que:

Quando m for ímpar, tem-se:

$$H_{m+1}(ia \sqrt{k^2 - k_o^2}) = \frac{2}{\pi i} (-1)^{\frac{m-1}{2}} MH_m(a \sqrt{k^2 - k_o^2}) \quad (2.3.19.1)$$

$$H_{m-1}(ia \sqrt{k^2 - k_o^2}) = \frac{2}{\pi i} (-1)^{\frac{3m-1}{2}} MH_m(a \sqrt{k^2 - k_o^2}) \quad (2.3.19.2)$$

$$H_m(ia\sqrt{k^2-k_0^2}) = \frac{2}{\pi i} (-1)^{\frac{3m-1}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) \quad (2.3.19.3)$$

Pelo teorema da recorrência [2.4] tem-se:

$$\bar{H}_m(z) = \frac{1}{2} \left[H_{m-1}(z) - H_{m+1}(z) \right] \quad (2.3.20)$$

Substituindo (2.3.19.2) e (2.3.19.1) em (2.3.20), obtêm-se:

$$\bar{H}_m(ia\sqrt{k^2-k_0^2}) = \frac{1}{\pi} \left[(-1)^{\frac{-m}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) - (-1)^{\frac{-m-2}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) \right] \quad (2.3.21)$$

Assim, substituindo (2.3.21) e (2.3.19.3) em (2.3.18) obtêm-se:

$$E_2 = \int_{k_0}^{\infty} \frac{k_z^2 \cos^2 \frac{k\ell}{2}}{(k_z^2 - k^2)^2} \frac{\frac{2}{\pi i} (-1)^{\frac{3m-1}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2})}{\frac{1}{\pi} \left[(-1)^{\frac{-m}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) - (-1)^{\frac{m-2}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) \right]} \frac{dk}{i\sqrt{k^2-k_0^2}} \quad (2.3.22)$$

Da mesma forma quando m for ímpar, o segundo membro da equação (2.3.32) é uma função real.

Quando m for par, tem-se:

$$H_{m+1}(ia\sqrt{k^2-k_0^2}) = \frac{2}{\pi} (-1)^{\frac{-m-2}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) \quad (2.3.23.1)$$

$$H_{m-1}(ia\sqrt{k^2-k_0^2}) = \frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{-m}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) \quad (2.3.23.2)$$

$$H_m(ia\sqrt{k^2-k_0^2}) = \frac{2}{\pi i}(-1)^{\frac{3m-1}{2}} HM_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) \quad (2.3.23.3)$$

Novamente, substituindo (2.3.23.2) e (2.3.23.1) em (2.3.20), obtêm-se outra vez a expressão (2.3.21) e, substituindo, agora, (2.3.21) e (2.3.23.3) em (2.3.18), ter-se-á:

$$E_2 = \int_{k_0}^{\infty} \frac{k_z^2 \cos \frac{2k\ell}{2}}{(k_z^2 - k^2)^2} \cdot \frac{\frac{2}{\pi i}(-1)^{\frac{3m-1}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2})}{\frac{1}{\pi} \left[(-1)^{\frac{-m}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) - (-1)^{\frac{m-2}{2}} MH_m(a\sqrt{k^2-k_0^2}) \right]} \cdot \frac{dk}{i\sqrt{k^2-k_0^2}}$$

O que se observa é que essa expressão é análoga à expressão (2.3.22); assim se conclui que, para m ímpar, e para m par, o segundo segundo membro de E_2 será uma função real.

Assim, a equação (2.3.17) não será real, quando E_2 for real, o que leva a abandonar o resultado obtido para a relação E_2 na tal equação, pois isso implicará uma potência imaginária. Por outro lado, pode-se observar que a equação (2.3.15) deverá ser analisada no caso de S par, mas tal não é necessário, já que o resultado será análogo ao resultado obtido para S ímpar.

Para o mesmo S ímpar, a equação (2.3.17) terá sua integração resolvida utilizando-se a relação E_1 .

$$E_1 = \int_0^{k_0} \frac{k_z^2 \cos \frac{2k\ell}{2}}{(k_z^2 - k^2)^2} \times \frac{H_m(\bar{k}a)}{\bar{H}_m(\bar{k}a)} \frac{dk}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \quad (2.3.24)$$

Utilizando em (2.3.24) uma transformação de variável do tipo

$$k = k_0 \cos \theta \quad (2.3.25)$$

$$dk = -k_0 \sin \theta d\theta \quad e$$

por conseguinte;

$$\sqrt{k_0^2 - k^2} = \sqrt{k_0^2 - k_0^2 \cos^2 \theta} = k_0 \sin \theta$$

Tem-se:

$$E_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{k_z^2 \cos^2 \frac{k\ell}{2}}{(k_z^2 - k_0^2 \cos^2 \theta)^2} \cdot \frac{H_m(ak_0 \sin \theta)}{\bar{H}_m(ak_0 \sin \theta)} d\theta \quad (2.3.26)$$

Utilizando a mesma transformação (2.3.25), para o caso de quando S for par, a equação (2.3.24) fica sob a forma:

$$E_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{k_z^2 \sin^2 \frac{k\ell}{2}}{(k_z^2 - k_0^2 \cos^2 \theta)^2} \cdot \frac{H_m(ak_0 \sin \theta)}{\bar{H}_m(ak_0 \sin \theta)} d\theta \quad (2.3.27)$$

Substituindo agora as equações (2.3.27) e (2.3.24) em (2.3.17), obtem-se:

$$\langle w \rangle = 2i\omega\rho V_0^2 a \int_0^{\pi/2} \frac{(k_z \cos \frac{k\ell}{2})^2}{(k_z^2 - k_0^2 \cos^2 \theta)^2} \cdot \left[\frac{H_m(ak_0 \sin \theta)}{\bar{H}_m(ak_0 \sin \theta)} \right] \text{imag} \quad (2.3.28)$$

A equação (2.3.28) poderá ser mais desenvolvida se for utilizadas

as expressões |2.4|

$$\bar{J}_m = \frac{1}{2} \left[J_{m-1} - J_{m+1} \right]$$

$$\bar{Y}_m = \frac{1}{2} \left[Y_{m-1} - Y_{m+1} \right]$$

$$\left[\frac{H_m(x)}{\bar{H}_m(x)} \right]_{\text{imag}} = \frac{J_m + iy_m}{\bar{J}_m + i\bar{y}_m} \cdot \frac{\bar{J}_m - i\bar{y}_m}{\bar{J}_m - i\bar{y}_m} = \frac{y_m \bar{J}_m - J_m \bar{y}_m}{\bar{y}_m^2 - y_m^2} = \frac{2}{\left| H(ak_0 \cos \theta) \right|^2}$$

Assim, a equação (2.3.28) ficará sob a forma:

$$\langle w \rangle_{m,s} = \frac{4\omega\rho V_0^2}{\pi k_0} k_z^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \left(\frac{k_0 l \cos \theta}{2} \right)}{\left[1 - \frac{k_0^2}{k_z^2} \cos^2 \theta \right]^2} \cdot \frac{d\theta}{\left| \bar{H}_m(ak_0 \cos \theta) \right|^2 \sin \theta} \quad (2.3.29)$$

Utilizando a equação (2.3.14), tem-se:

$$R_{\text{rad}} = \frac{\langle w \rangle_{m,s}}{V_0^2 |8} = \frac{32\omega\rho}{\pi k_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \left(\frac{k_0 l \cos \theta}{2} \right)}{\left[1 - \frac{k_0^2}{k_z^2} \cos^2 \theta \right]^2} \cdot \frac{d\theta}{\left| \bar{H}_m(ak_0 \cos \theta) \right|^2 \sin \theta}$$

Portanto a eficiência de radiação, ficará:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{16}{\pi^2 a \ell} \int_0^{\pi/2} \frac{\left[\frac{\cos\left(\frac{k_0 \ell \cos\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k_0 \ell \cos\theta}{2}\right)} \right]^2}{k_z^2 \left[1 - \frac{k_0^2}{k_z^2} \cos^2\theta \right]^2} \cdot \frac{d\theta}{\left| \bar{H}_m(ak_0 \sin\theta) \right|^2 \sin\theta} \quad (2.3.30)$$

A equação (2.3.30) fornece a eficiência de radiação de uma casca vibrante na forma de integração como função de ℓ/a , k_0/k_z , m e s . No próximo capítulo serão mostrados os resultados numéricos.

2.4. REFERENCIA

- [2.1] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy, 1975, Journal of sound and vibration. 40(3), 299-306. Acoustic Radiation by un baffled Cylindrical Beams in Multi Modal Transverse vibration.
- [2.2] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy, 1973, Journal of sound and Vibration, 26(4), 437-439. Sound Radiation From Transversely Vibrating Un baffled Beams.
- [2.3] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy, 1973, Journal of sound and Vibration, 52(3), 441-445. Distorted Cylindrical Shell Response to Internal Acoustic Existation Below the cut-off Frequency.
- [2.4] Handbook of Mathematical Functins Edited by M. Abramowitz e I.A. Stegun Dover Publications Inc.
- [2.5] Philip M. Morse, 1948, Vibration and sound, Mc Graw Hell.

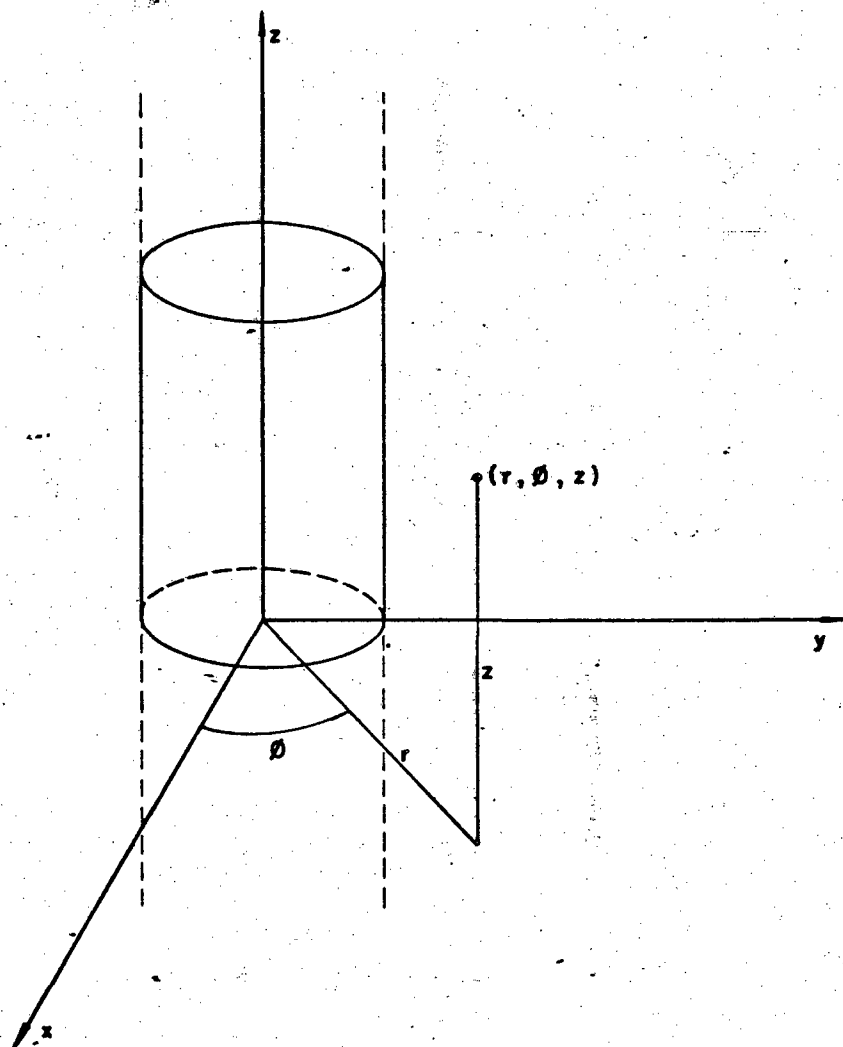
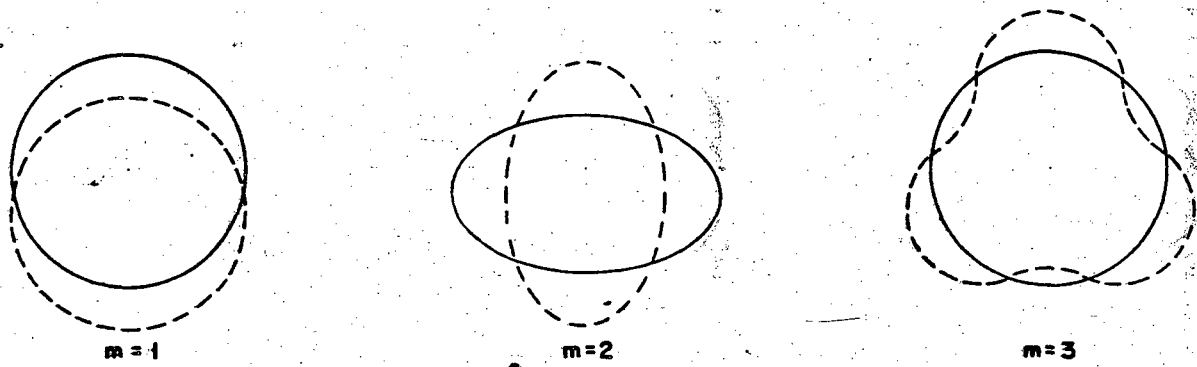
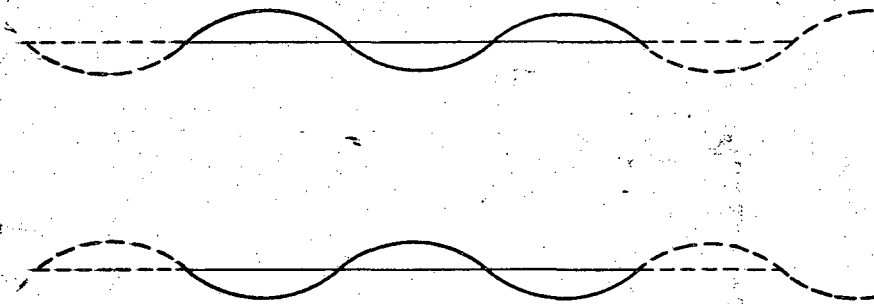


FIG. 2.1 COORDENADAS CILÍNDRICAS DE UMA CASCA CILÍNDRICA



MODO CIRCUNFERENCIAL



MODO AXIAL

FIG. 2.2 MODOS DE VIBRAÇÃO

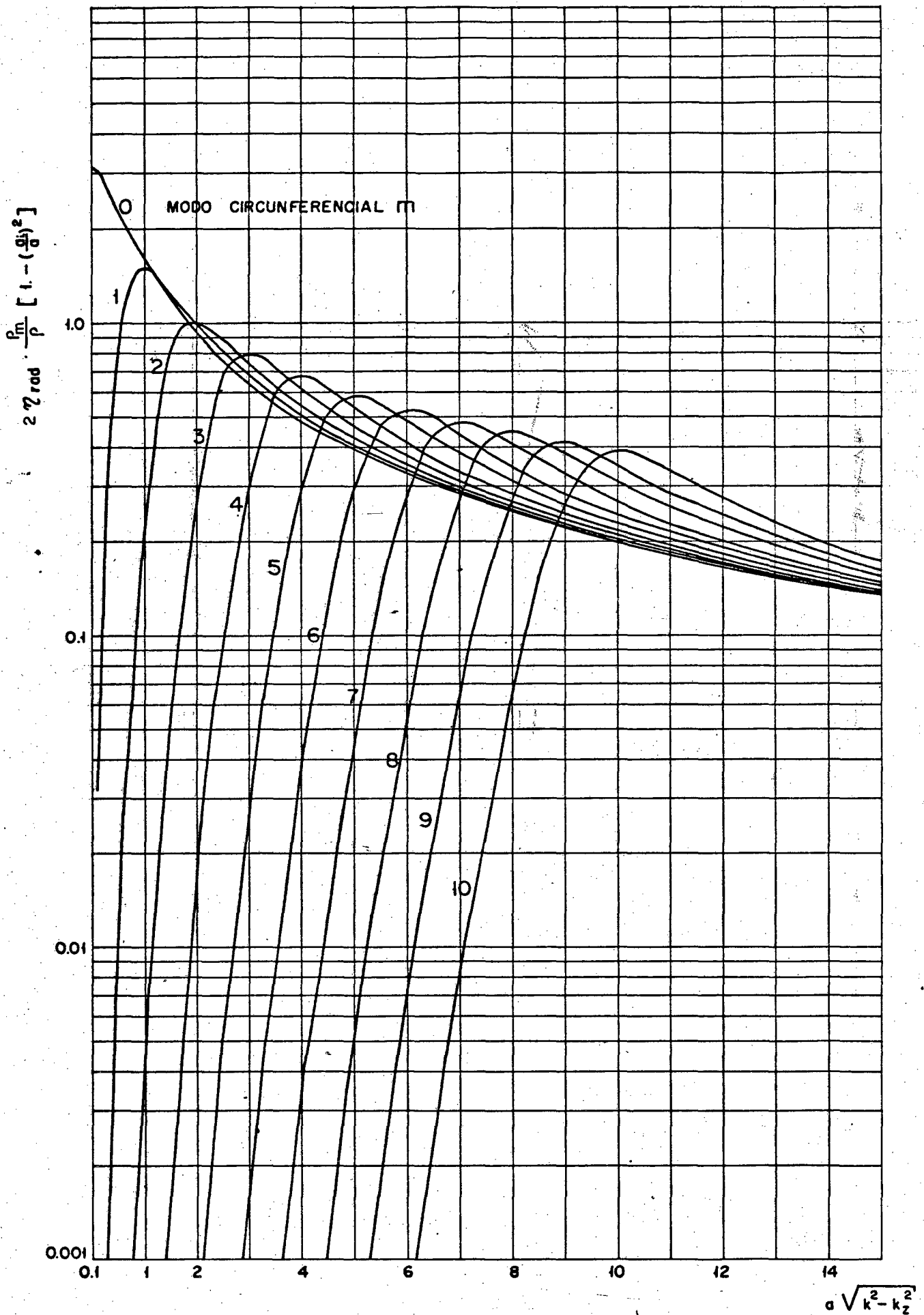
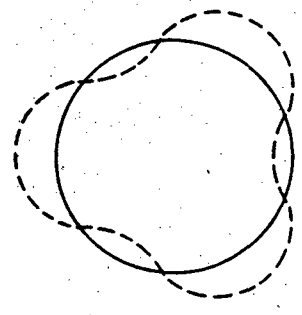
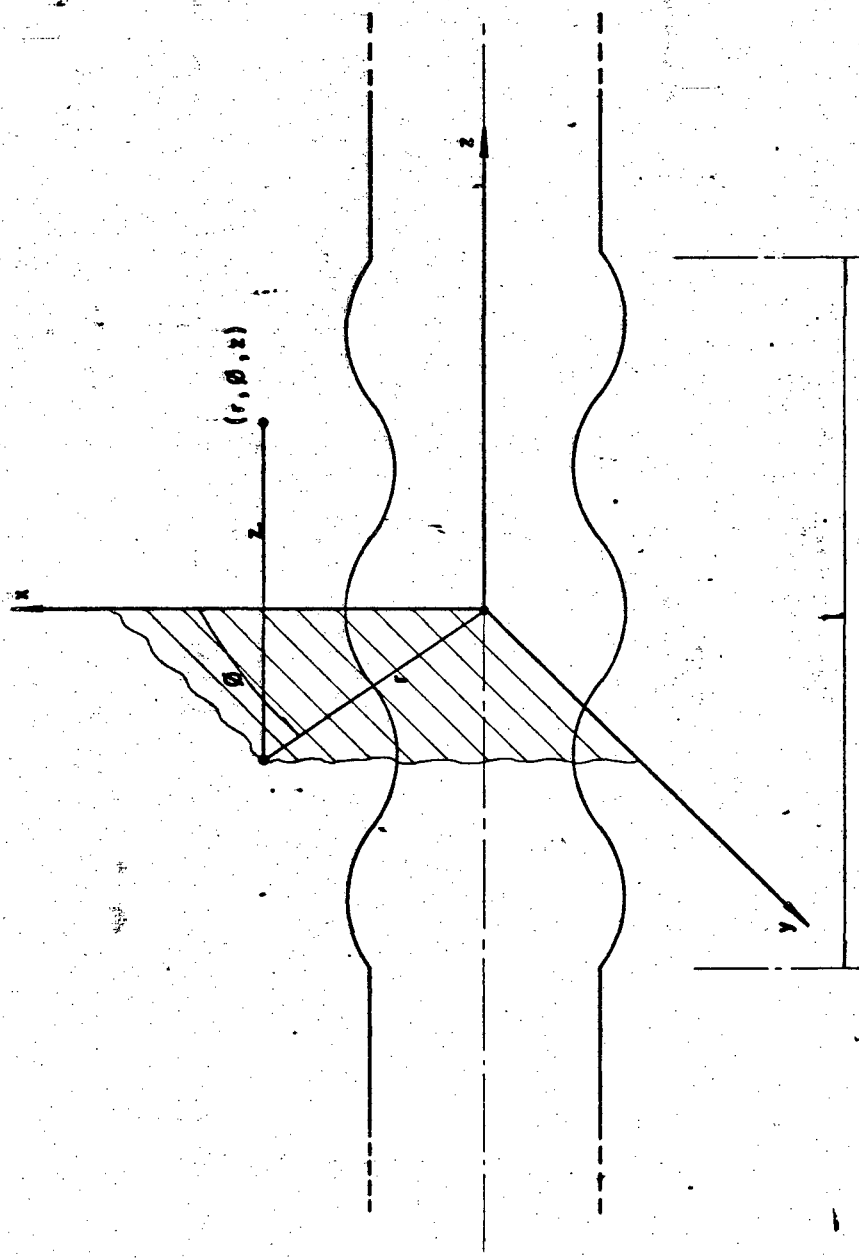


FIG. 23 FATOR PERDA NA RADIAÇÃO z_{rad} PARA UMA CASCA CILÍNDRICA INFINITA VIBRANDO EM MODO CIRCUNFERENCIAL m E NÚMERO DE ONDA AXIAL k_z .



MODO CIRCUNFERENCIAL $m = 3$

FIG. 2.4 CASCA FINITA EM COORDENADAS CILINDRICAS

C A P Í T U L O 3

COMPUTAÇÃO DA EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO

3.1. MÉTODO NUMÉRICO

A equação (2.3.30) fornece a eficiência de radiação de uma casca cilíndrica vibrante de comprimento finito.

O método usado para a solução numérica da equação (2.3.30) foi o método RUNGE-KUTTA [3.1], começando no ponto θ_0 . Após calculado os pontos $(\theta_n, F(\theta_n))$, obtém-se o próximo ponto $(\theta_{n+1}, F(\theta_{n+1}))$ pelo seguinte passo:

$$\begin{aligned} k_1 &= hF(\theta_n) \\ k_2 &= hF\left(\theta_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= hF(\theta_n + h) \end{aligned} \tag{3.1}$$

O resultado da integração até $n + 1$ é igual ao resultado da integração até o ponto $n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$.

3.2. COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO PRÓXIMA A ZERO

A forma geral da equação (2.3.30) pode ser escrita sob a forma:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{16}{ak_z^2} \int_0^{\pi/2} F(\theta) d\theta \quad (3.2)$$

onde

$$F(\theta) = \frac{\left[\frac{\cos \frac{kl \cos \theta}{2}}{\cos \frac{kl \cos \theta}{2}} \right]^2}{\left[1 - \frac{k_o^2}{k_z^2} \cos^2 \theta \right]^2 \sin \theta \left| \bar{H}_m(ak_o \sin \theta) \right|} \quad (3.3)$$

Pelo fato de θ ser um ângulo pequeno próximo a zero, pode-se tornar as relações trigonométricas $\sin \theta = \theta$ e $\cos \theta = 1$. A função derivada primeira de Hankel, terá a aproximação que segue [2.4.]

Para $ak_o \sin \theta < m + \frac{1}{2}$

$$\left| \bar{H}_m(ak_o \sin \theta) \right|^2 = \left[\frac{m!}{2\pi} \right]^2 \left[\frac{2}{ak_o \sin \theta} \right]^{2m+2} \quad (3.4)$$

Assim, substituindo (3.4) em (3.3) obtém-se:

$$F(\theta) = \frac{\left[\frac{\cos \frac{kl}{2}}{\sin \frac{kl}{2}} \right]^2 \cdot (2\pi)^2 \cdot (ak_o)^{2m+2}}{\left[1 - \frac{k_o^2}{k_z^2} \right]^2 \cdot (m!)^2 \cdot (2)^{2m+2}} \quad (3.5)$$

Da expressão (3.5) se conclui que quando θ tende para zero, $F(\theta)$ tende também para zero.

Por outro lado diferenciando $F(\theta)$ observa-se que a inclinação da curva tende também para zero quando θ tende para zero (ver expressão 3.6)

$$dF(\theta) = \frac{\left[\frac{\cos\left(\frac{k_0 \ell}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k_0 \ell}{2}\right)} \right]^2 \cdot (2\pi)^2}{\left[1 - \frac{k_0^2}{k_z^2} \right]^2 \cdot (m!)^2 \cdot (2)^{2m+2}} \cdot 2m + 2(ak_0\theta)^{2m+1} (ak_0) d\theta \quad (3.6)$$

A diferenciação demonstra que a contribuição do resultado da integral próximo a zero fornece um valor pequeno (ver itens 3.4 e 3.5)

3.3. ESCOLHA DO NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO

O valor para M (número de pontos de integração) foi 1600 por dar uma variância máxima em torno de 0.2% do valor assintótico de sua variação.

3.4. SUBROTINA "FUNÇÃO HANKEL"

As subrotinas BESJ(BESSEL), BESY(NEUMANN) e HAHD (HANKEL) (vide apêndices para o método de desenvolvimento) como também a função derivada de 1ª ordem da função de Hankel não produzem valores precisos quando $aksen\theta < 0.1$, logo, a equação (2.3.30) passa a ter os seus limites de integração sob a forma:

$$\int_0^{\pi/2} = \int_0^{xx} + \int_{xx}^{\Delta} + \int_{\Delta}^{\pi/2} \quad \text{onde } \Delta = \text{sen}^{-1} 0.1/ak_0 \quad (3.7)$$

$I \qquad I_1 \qquad I_2 \qquad I_3$

Para I_1

A função $H_m(aksen\theta) \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow 0$ por esse fato se ini

ciou a integração em $xx = 10^{-5}$, embora a integração numérica possa começar em $\theta = 0$. O erro cometido é desprezível como se pode verificar na Tabela (1) abaixo:

Tabela (1)

S	m	A	σ_{rad}	%
30	02	4.2×10^{-5}	0.39	1.0×10^{-2}
30	08	8.3×10^{-46}	1.80	4.6×10^{-44}
08	08	4.1×10^{-30}	0.49	8.4×10^{-28}

onde

S é o modo axial

m é o modo circunferencial

σ_{rad} é a eficiência de radiação

A é o Erro introduzido devido ao fato de se começar a integração em $\theta = 10^{-5}$ ao invés de $\theta = 0$

3.5. O LIMITE INFERIOR xx em I_2

Por ter xx sido um ponto inicial escolhido e já em (3.4) se ter o erro introduzido, na parte de integração I_2 , se terão duas possibilidades:

Se $xx \ll \Delta$

Nesse caso, a equação (2.3.30) terá uma forma aproximada, que é a substituição de (3.5) e (3.4) em (3.2) ficando:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{16}{\pi a l k_z^2} \frac{\left[\frac{\cos(\frac{k_0 l}{2})}{\sin(\frac{k_0 l}{2})} \right]^2 \cdot (2\pi)^2 \cdot (a k_0 x x)^{2m+2}}{\left[1 - \frac{k_0^2}{k_z^2} \right]^2 \cdot (m!)^2 \cdot (2)^{2m+2}} \quad (3.8)$$

Se $xx \gg \Delta$,

Nesse caso não haverá problemas para as subrotinas Bessel, Neumann e Hankel pois $xx > \Delta > 0.1$, levando então ao uso da equação (2.3.30)

3.6. RESULTADOS OBTIDOS PELO MÉTODO NUMÉRICO

Os resultados obtidos para a eficiência de radiação (σ_{rad}) foi mantendo valores para m (modo circunferencial) S (modo axial) a relação l/a (l comprimento da casca cilíndrica e a o raio da casca) como pode ser visto na tabela (2) abaixo e fazendo-se variar k_0/k_z .

A eficiência de radiação (σ_{rad}) se encontra plotada nos gráficos (3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11).

Tabela 2

m	08	08	08	30	30	30	08	08	30	30	30
s	02	05	08	02	05	08	02	05	02	05	08
l/a	100	100	100	100	100	100	10	10	10	10	10

3.7. APROXIMAÇÃO EM BAIXAS FREQUÊNCIAS

Uma expressão analítica de forma fechada pode ser obtida para a equação (2.3.30) quando se estabelece a condição de bai

xa frequência, ou melhor, se estabelecem as condições:

$\frac{k_0}{k_z} \ll 1$, $k_0 \ell \ll 1$ e $k_0 \ell \cos \theta < m + \frac{1}{2}$ o que permite usar a aproximação [2.4] para:

$$\left[\bar{H}_m(x) \right]^2 = \left[\frac{m!}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{x} \right)^{m+1} \right]^2 \quad (3.9)$$

Utilizando as relações trigonométricas que seguem:

$$\sin^2 \frac{k_0 \ell \cos \theta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(k_0 \ell \cos \theta) \quad (3.10)$$

$$\sin^2 \frac{k_0 \ell \cos \theta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(k_0 \ell \cos \theta)$$

Substituindo (3.10) e (3.9) em (2.3.30) obtém-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi}{m!} \right)^2 \left(\frac{k_0}{k_z} \right)^{2m+2} \left(\frac{a}{\ell} \right)^{2m+1} \frac{\pi S^{2m}}{2^{2m+2}} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} \theta \, d\theta + \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} \cos(k_0 \ell \cos \theta) \, d\theta \quad (3.11)$$

$I_1 \qquad I_2$

A integral I_1 terá como resultado [3.4]:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} \theta \, d\theta = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} \quad (3.12)$$

O resultado da integral I_2 foi desenvolvido pelo método numérico e seus resultados obtidos se encontram na figura (3.12).

Da figura (3.12) conclue-se que $k_0 \ell > 10$ introduz erro menor que 10%, o que leva a se desprezar esses valores. O caso contrário de verá incluir valores ponto a ponto.

Assim para todo valor de $k_0 \ell > 10$ levará a equação (3.11) ficar sob a forma:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{2\pi}{m!} \right)^2 \left(\frac{k_0}{k_z} \right)^{2m+2} \left(\frac{a}{\ell} \right)^{2m+1} \frac{\pi^{2m} S^{2m}}{2^{2m+2}} \left(\frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} \right) \quad (3.13)$$

Os resultados numéricos para a equação (3.13) se encontram nos gráficos do item 3.6.

3.8. APROXIMAÇÃO NAS ALTAS FREQUÊNCIAS

A eficiência de radiação (σ_{rad}) para um comprimento finito vibrante de uma casca tem seu valores próximo a unidade, quando a relação k_0/k_z tende para valores bem maiores que a unidade.

3.9. RESUMO E CONCLUSÕES

Partindo da equação (2.3.30) que fornece a eficiência de radiação para uma casca finita vibrante, escolheu-se o método numérico para sua computação.

Tendo o método (Runge-Kutta), estudou-se o comportamento da função próximo a zero pois a função Hankel tende a infinito quando o seu argumento tende a zero; havendo então a escolha de novo ponto inicial e o erro introduzido nessa escolha.

Outro fator analisado, foi o número de pontos de integração e, no

item 3.3 levou a se concluir que o valor escolhido dentre os vários valores obtidos pelo método numérico oferece um bom fator de segurança.

A impossibilidade das subrotinas (vide apêndice) reproduzirem valores precisos quando $\text{aksen}\theta < 0.1$, levou a análise dos limites de integração no item 3.5 e a se utilizar uma forma aproximada para a eficiência de radiação (equação 3.8) toda vez que ocorrer $\text{aksen}\theta < 0.1$.

Uma forma fechada para solução da equação (2.3.30) foi obtida no item 3.7 quando através do método numérico se conseguir valores para a aproximação em baixas frequências (ver equação 3.13) e plotados nas mesmas figuras do método numérico da equação geral no item 3.6.

A eficiência de radiação é sempre função de m , S , ko/k_z e l/a . Para valores pequenos de ko/k_z (baixa frequência) a eficiência de radiação cai exponencialmente ou linearmente na escala logarítmica (ver item 3.7). Para valores de ko/k_z grandes a radiação de casca finita aproxima-se assintoticamente da casca infinita e para valores muito grande de ko/k_z , se aproximam da unidade.

Esses resultados foram confirmados no caso especial de barra cilíndrica vibrante em modo axial [3.2, 3.3].

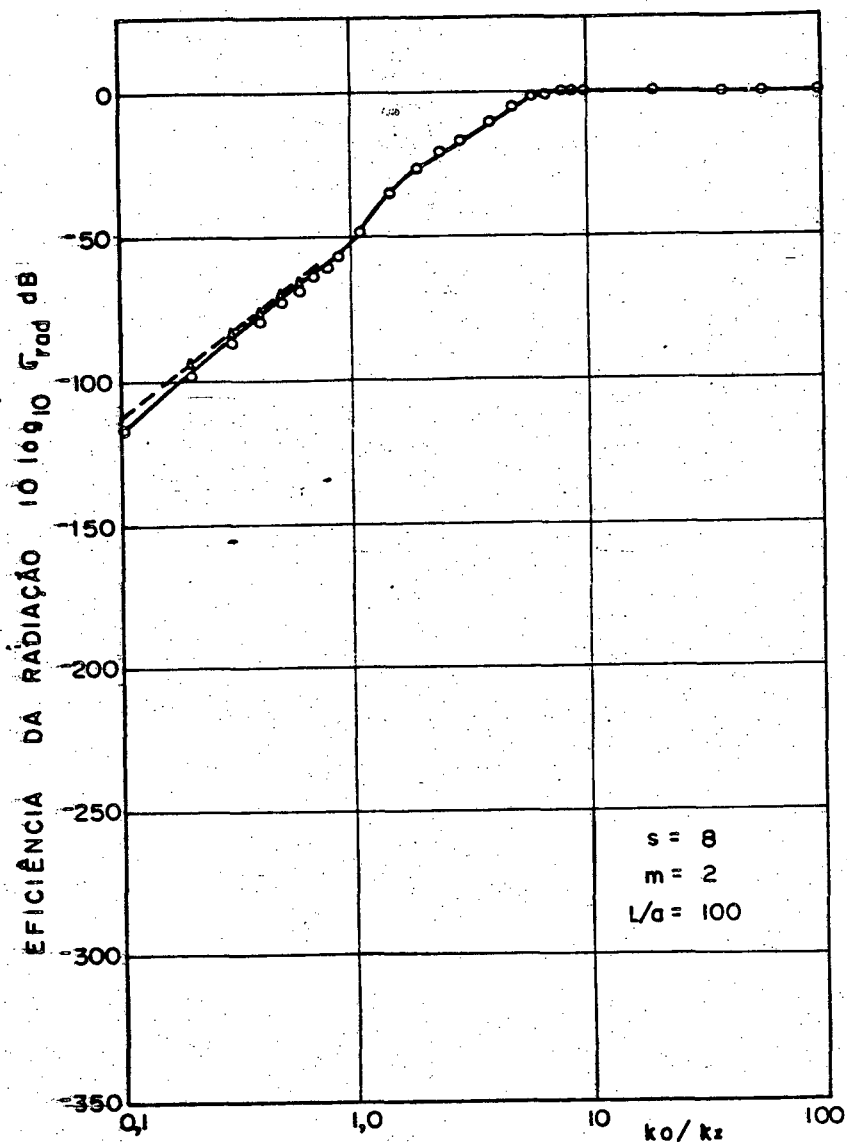


Figura 3.1 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 100$ vibrando em modo circunferencial $m = 02$ e modo axial $s = 08$

○—○ Resultado obtido pela equação (2.3.30)

△—△ Resultado obtido pela equação (3.13)

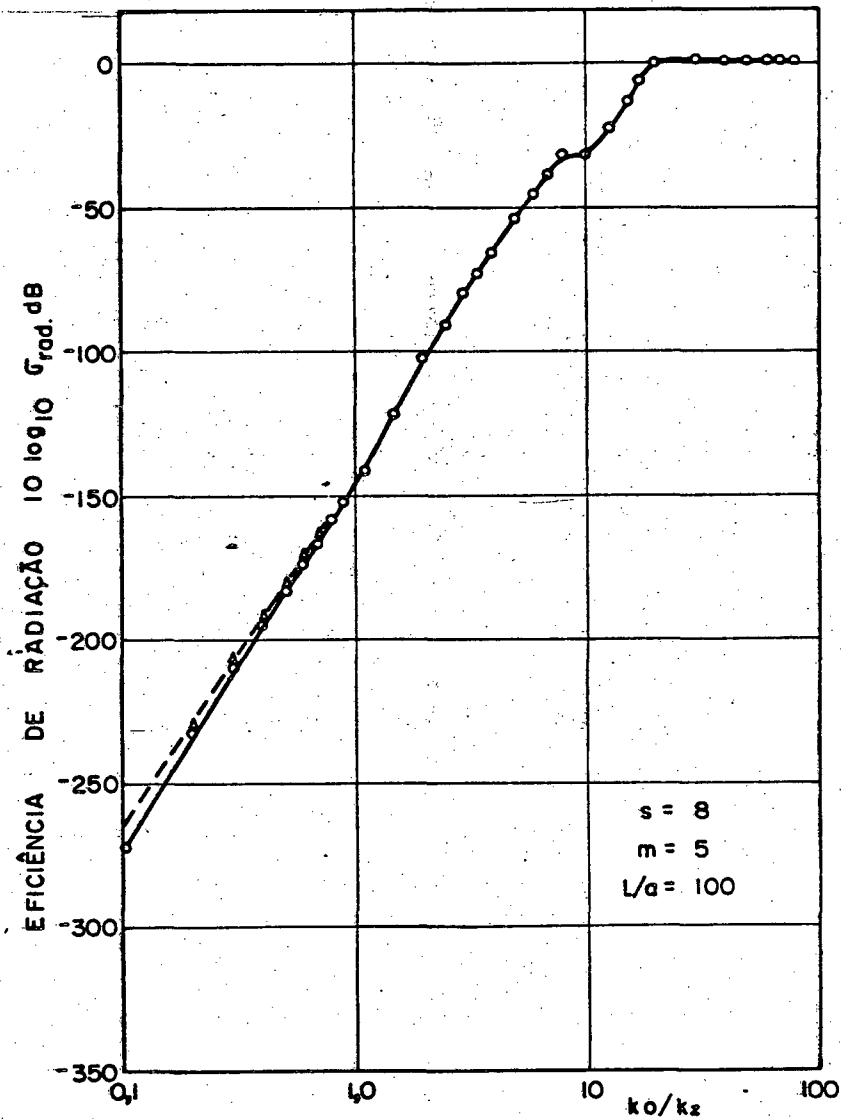


Figura 3.2 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 100$ vibrando em modo circunferencial $m = 05$ e modo axial $s = 08$

- Resultado obtido pela equação (2.3.30)
 △—△ Resultado obtido pela equação (3.13)

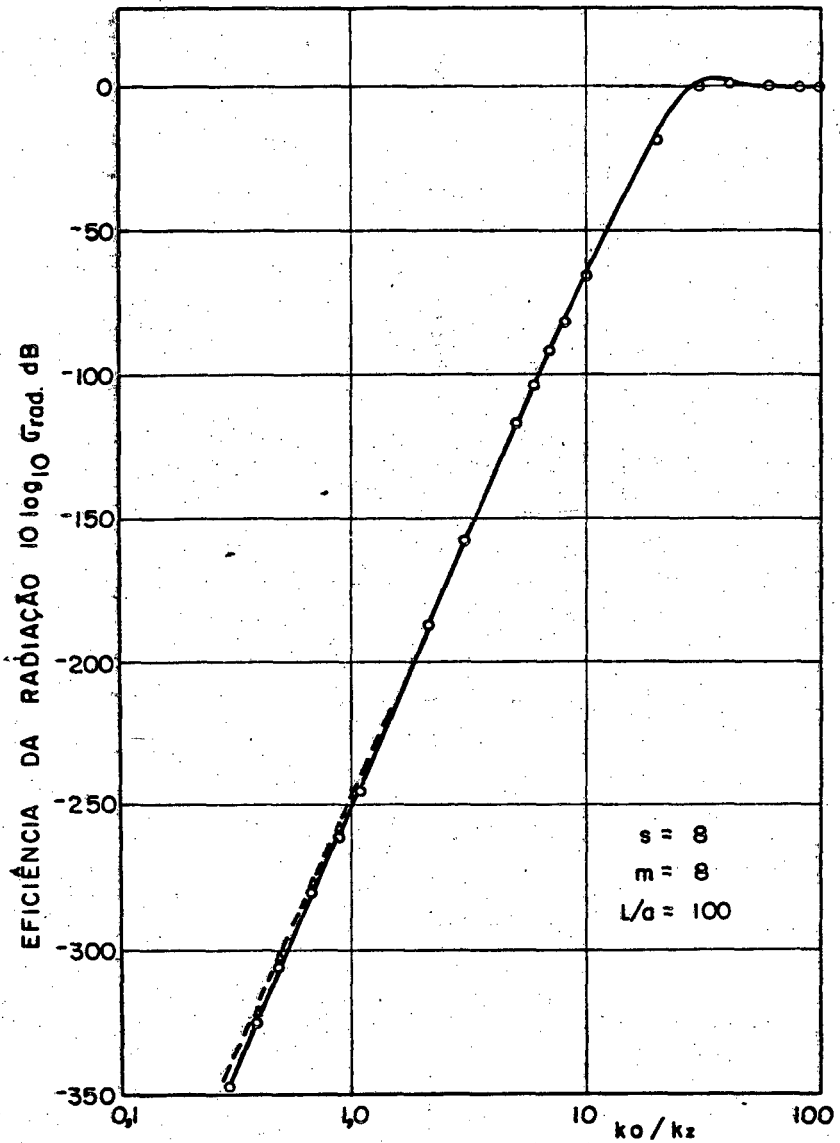


Figura 3.3 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 100$ vibrando em modo circunferencial $m = 08$ e modo axial $s = 08$.

○—○ Resultado obtido pela equação (2.3.30)

△—△ Resultado obtido pela equação (3.13)

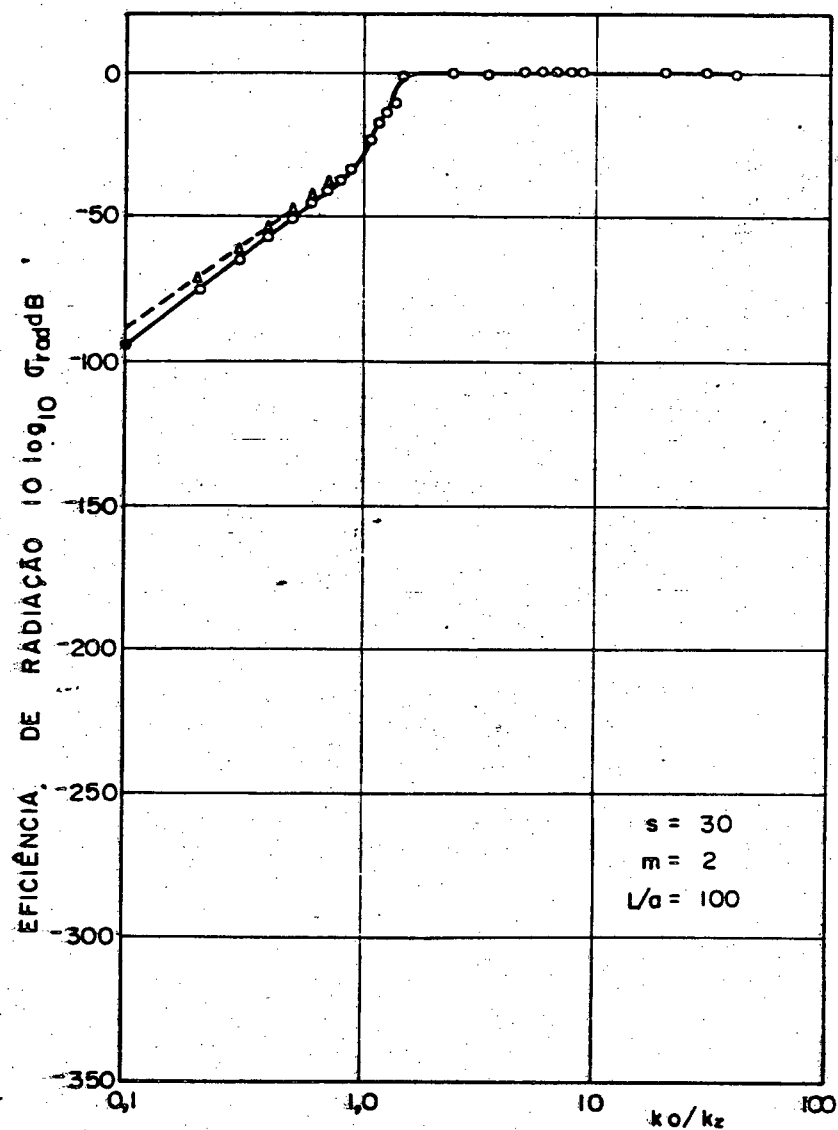


Figura 3.4 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 100$ vibrando em modo circunferencial $m = 02$ e modo axial $s = 30$

○—○ Resultado obtido pela equação (2.3.30)

△—△ Resultado obtido pela equação (3.13)

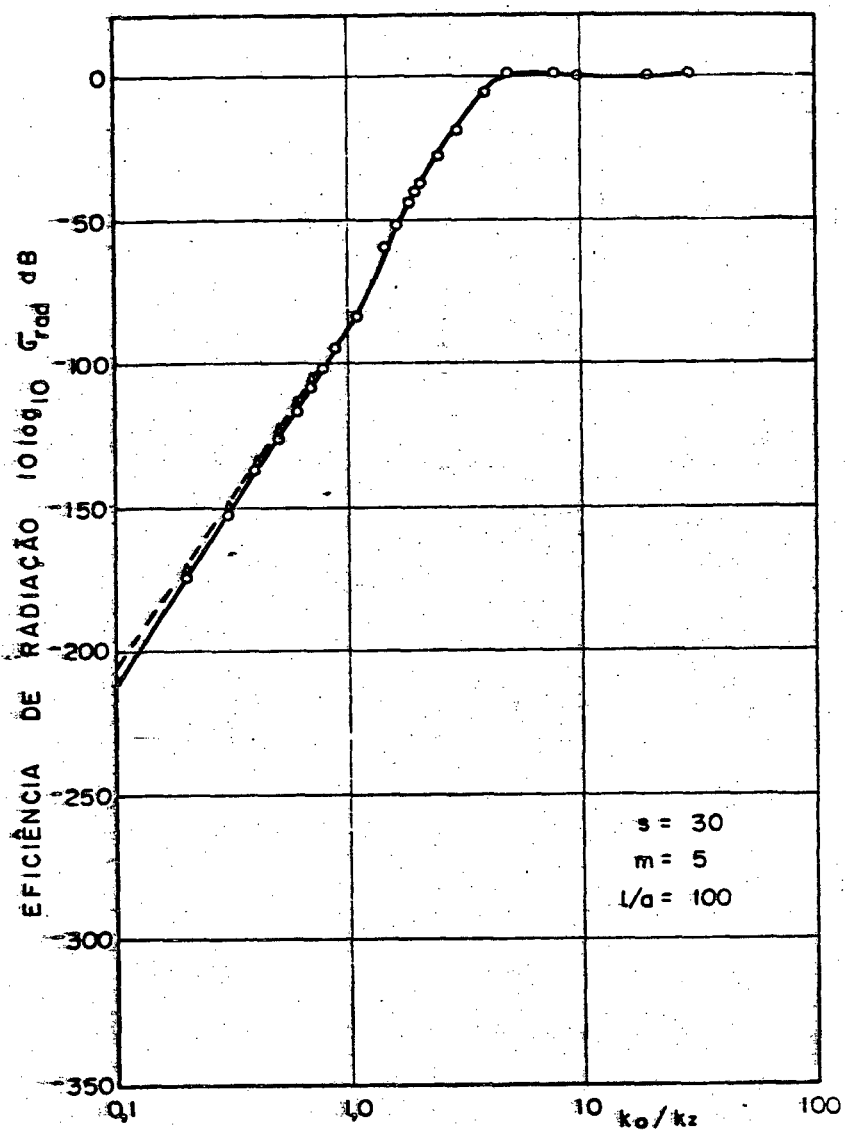


Figura 3.5 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 100$ vibrando em modo circunferencial $m = 05$ e modo axial $s = 30$

○ — ○ Resultado obtido pela equação (2.3.30)

△ — △ Resultado obtido pela equação (3.13)

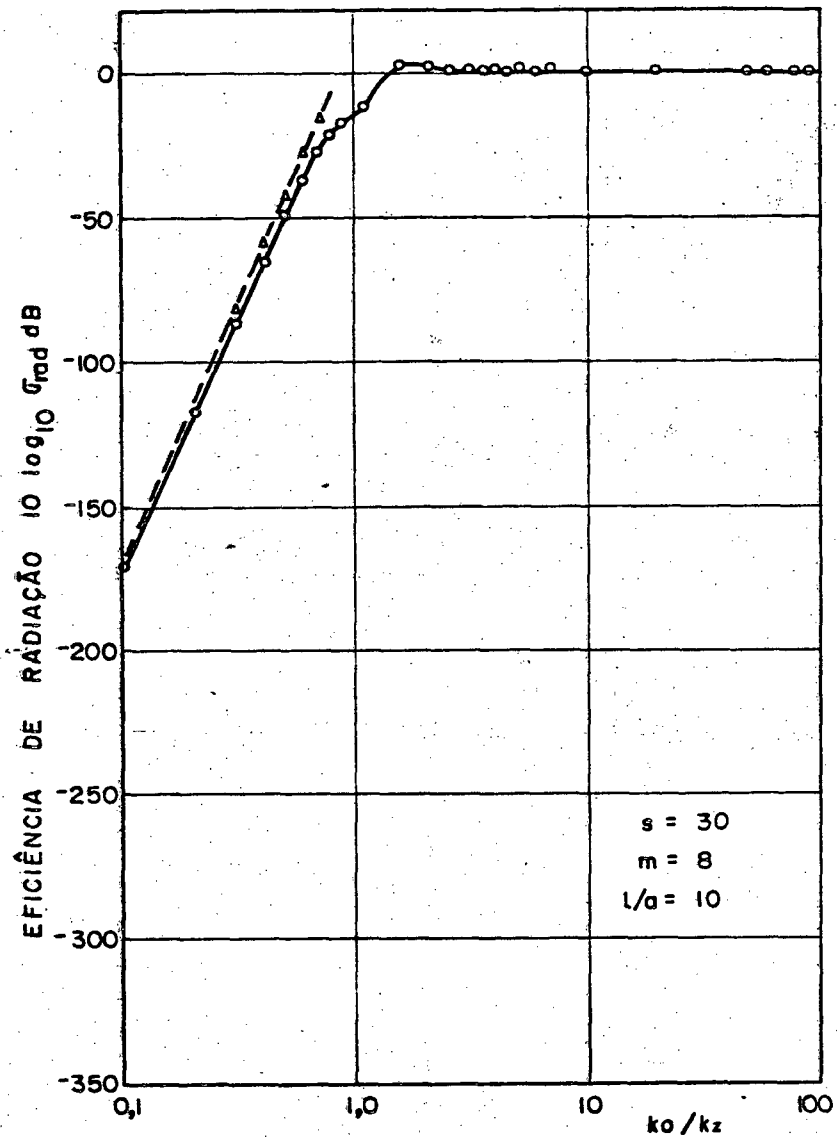


Figura 3.6 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 100$ vibrando em modo circunferencial $m = 08$ e modo axial $s = 50$

○—○ Resultado obtido pela equação (2.3.30)

△—△ Resultado obtido pela equação (3.13)

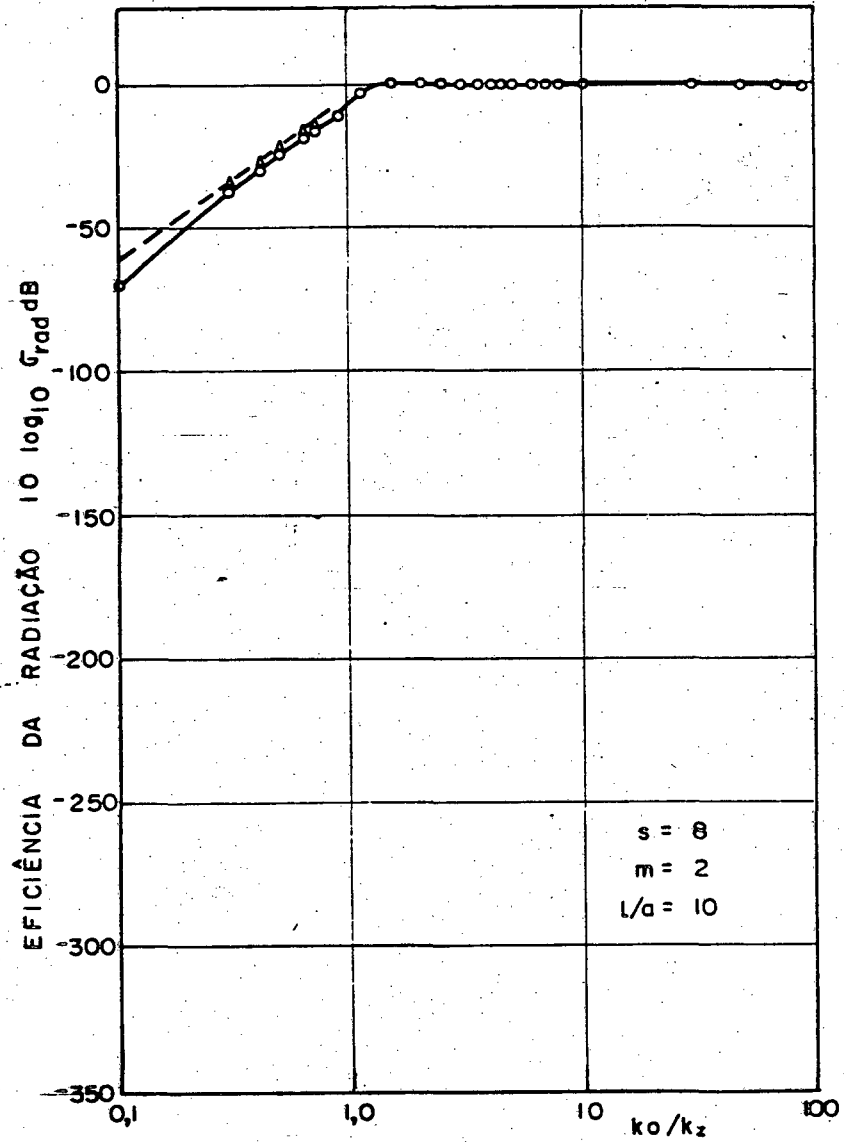


Figura 3.7 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 100$ vibrando em modo circunferencial $m = 02$ e modo axial $s = 08$.

○—○ Resultado obtido pela equação (2.3.30)

△—△ Resultado obtido pela equação (3.31)

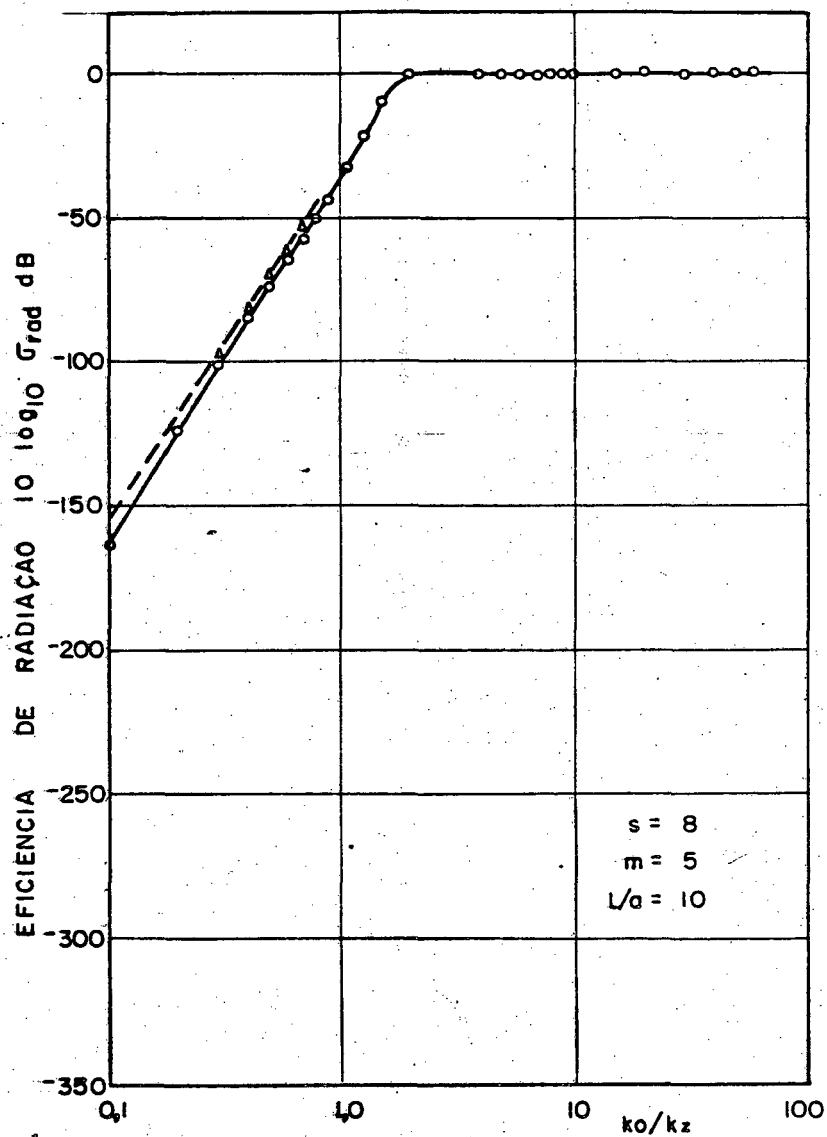


Figura 3.8 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 10$ vibrando em modo circunferencial $m = 05$ e modo axial $s = 08$

○—○ Resultado obtido pela equação (2.3.30)

△---△ Resultado obtido pela equação (3.13)

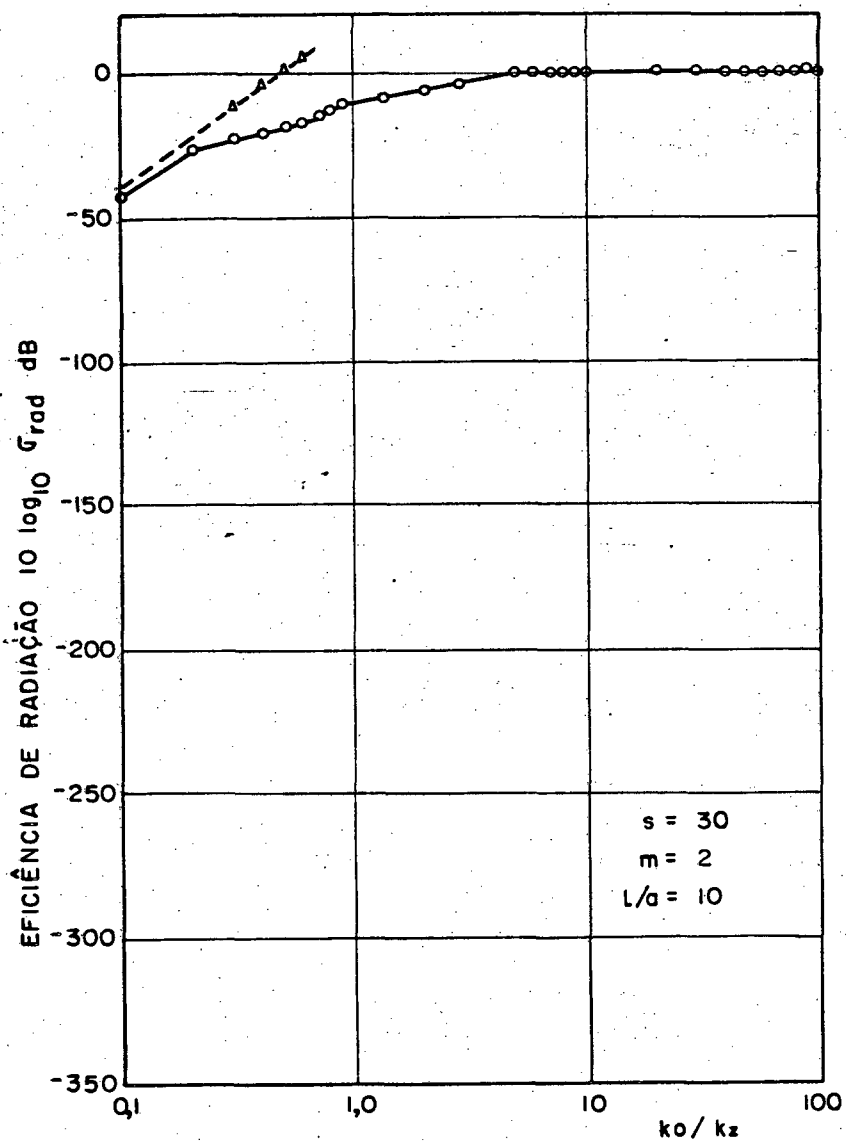


Figura 3.9 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 10$ vibrando em modo circunferencial $m = 02$ e modo axial $s = 30$

O—O Resultado obtido pela equação (2.3.30)

Δ---Δ Resultado obtido pela equação (3.13)

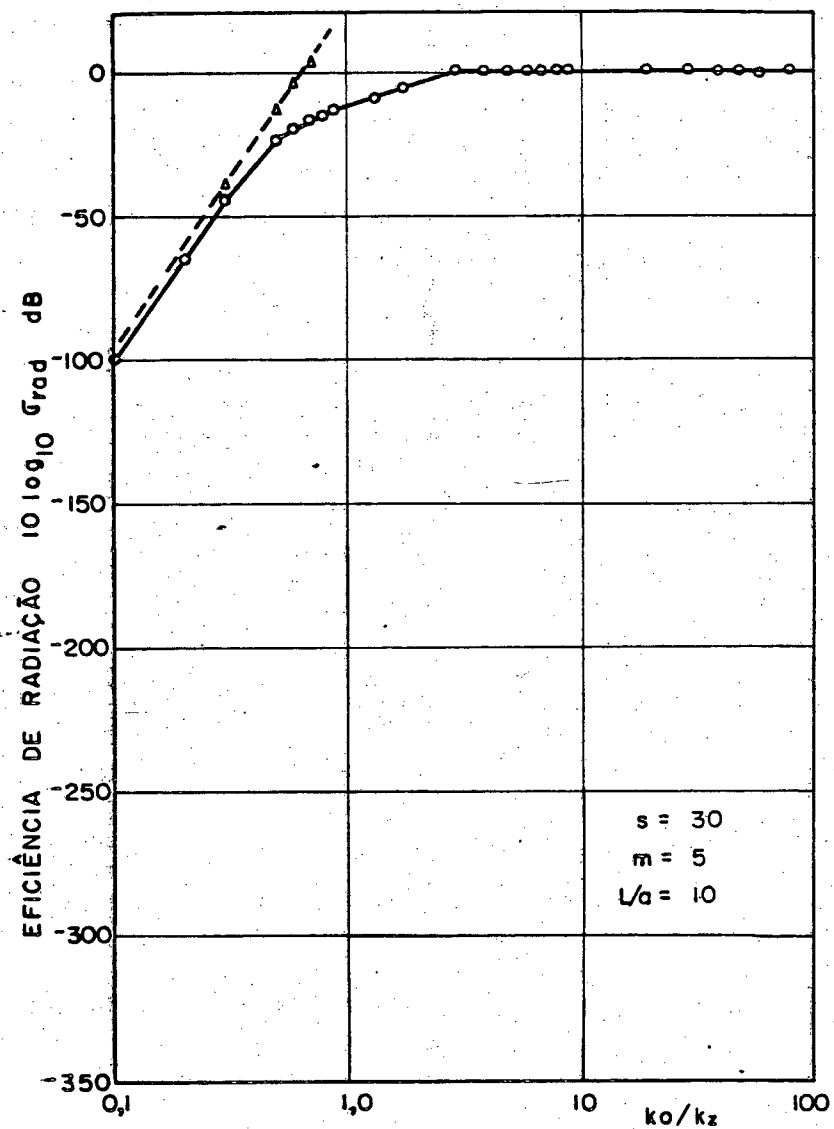


Figura 3.10 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 10$ vibrando em modo circunferencial $m = 05$ e modo axial $s = 30$

○ — ○ Resultado obtido pela equação (2.3.30)

△ — — — △ Resultado obtido pela equação (3.13)

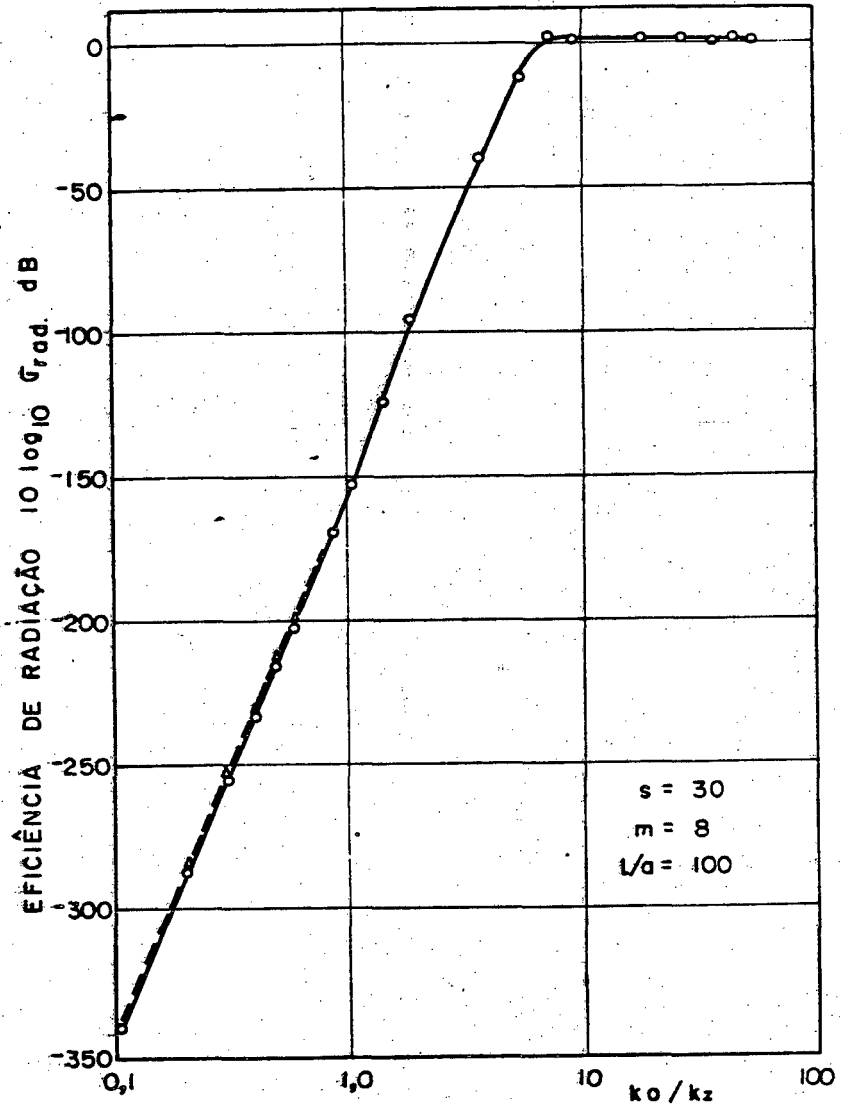


Figura 3.11 - Eficiência de radiação σ_{rad} para uma casca finita de $l/a = 10$ vibrando em modo circunferencial $m = 08$ e modo axial $s = 30$

- O—O Resultado obtido pela equação (2.3.30)
 Δ—Δ Resultado obtido pela equação (3.13)

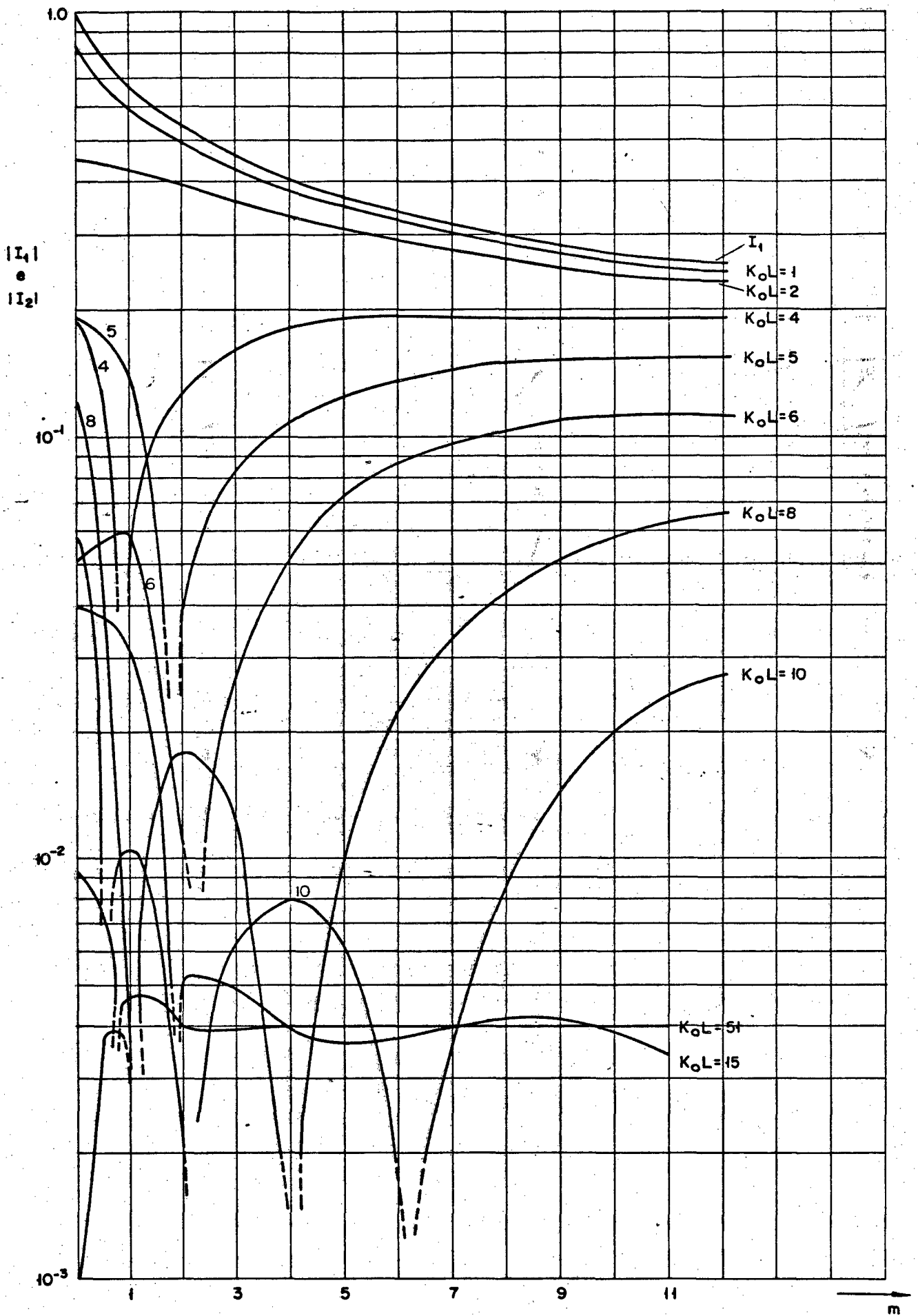


FIG. 3.12 INTEGRAÇÃO DE I_1 e I_2 NA EQUAÇÃO (3.11)

3.10. REFERENCIA

- [3.1] Ralph H. Pennington. Introductory Computer Methods and Numerical Analysis. Editado por Collier - Mac Millan - 1965
Runge-Kutta method - pag 432-439.
- [3.2] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy. Journal of sound and vibration, 1975, 40(3), 299-306. Acoustic Radiation by Unbaffled Cylindrical beams in multimodal Transverse vibration.
- [3.3] S.N. Yoursi Gerges e F.J. Fahy. Journal of sound and vibration, 1973, 26(4), 437-439. Sound Radiation from Transversely vibrating unbaffled beams.
- [3.4] M.R. Spiegel. Manual de Formulas e Tabelas Matemáticas, 1973.
Editado pela Mc Graw-Hell Book Co. Pag 96

C A P Í T U L O 4

INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL SOBRE AMORTECIMENTO INTERNO E EXTERNO DE
UMA CASCA ESPECÍFICA FINITA VIBRANTE4.1. INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações da Teoria de vibrações e ondas, as magnitudes das forças de amortecimento são pequenas em relação às forças elásticas e inércia. De qualquer modo, as amplitudes das deformações induzidas na estrutura vibrante, na ressonância, são controladas somente pelo amortecimento. Existem tres principais mecanismos de amortecimento:

- 1 - Amortecimento interno devido à dissipação da energia cinética dentro do material η_{mec} .
- 2 - Amortecimento externo devido à energia acústica radiada da estrutura vibrante η_{rad}
- 3 - Amortecimento nas Junções, solda, suporte, etc, η_p

Portanto o amortecimento total é dado por:

$$\eta_{tot} = \eta_{mec} + \eta_{rad} + \eta_p$$

O objetivo desse capítulo é apresentar resultados da contribuição quantitativa do amortecimento acústico na medida do amortecimento total para uma casca específica de aço.

4.2. Amortecimento total

As amplitudes das deformações induzidas na estrutura vibrante na ressonância ou perto desta são controladas pela presença do amortecimento total no sistema. Uma casca de aço foi suspensa livremente por fios finos, (1,00 mm) para minimizar a energia transmitida através de suporte, tendo a casca as seguintes dimensões:

Comprimento da casca 1.04 m
 raio da casca 0.425 m
 espessura da casca 0.003 m

A experiência foi desenvolvida para identificar os modos da casca e medir seus amortecimentos. O conjunto experimental é mostrado na figura 4.1 Foi realizada uma varredura do sinal senoidal de excitação, com a finalidade de identificar algumas frequências de ressonância na faixa de 50-2000 Hz. O sinal de aceleração gravado é mostrado na figura 4.2.

Cinco modos foram identificados através do deslocamento de um microfone muito próximo à superfície da casca no sentido axial e circunferencial. Essa técnica foi usada para evitar o carregamento da casca por qualquer transdutor fixado e economizar tempo.

Os modos circunferenciais foram identificados girando o microfone na mesa-giratória (β & k tipo 3511). O amortecimento total foi medido usando uma excitação impulsiva e gravando o decremento-logaritmico do sinal aceleração, filtrado por um filtro de 3% (β & k tipo 1621). A figura 4.3 mostra um valor típico do decremento-logaritmico.

Os resultados obtidos são mostrados na tabela que se

que:

Tabela 1

Frequência	η_{tot} (medido)	η_{rad} (calculado)
283	1.1×10^{-4}	8.58×10^{-6}
300	8.3×10^{-5}	1.02×10^{-5}
395	1.1×10^{-4}	9.42×10^{-6}
450	1.1×10^{-4}	1.01×10^{-5}
642	1.2×10^{-4}	2.03×10^{-4}

Para cada modo acima o amortecimento total foi medido 6 (seis) vezes, e o valor médio e variância foram calculados. A figura 4 mostra o fator de perda total médio com $\pm \sigma$ desvio padrão.

4.3. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Para cada modo da casca mostrado na tabela 1, o fator de perda de radiação é calculado pela equação (2.3.30). A figura 4 mostra o fator de perda da radiação e o fator de perda total medido como função da frequência. O fator de perda de radiação aumenta com o aumento da frequência, e o fator de perda total é quase constante. O fator de perda de radiação é em torno de 7-17% aquém do fator de perda total. Isso significa que o amortecimento acústico é altamente relevante no controle de vibrações e pode ser usado como uma variável do projeto.

Neste sentido a estrutura deverá ser projetada de tal sorte que possua modos, com alto fator de amortecimento acústico. É interessante mencionar que para estruturas vibrantes em fluidos tais como estruturas submersas e estruturas de reatores nucleares

resfriados à água, o amortecimento acústico é alto, devido a densidade do fluido; ver equação (2.3.30). O forte acoplamento é representado pelo fator de perda de radiação e deve ser levado em conta no cálculo de qualquer amplitude de deformação.

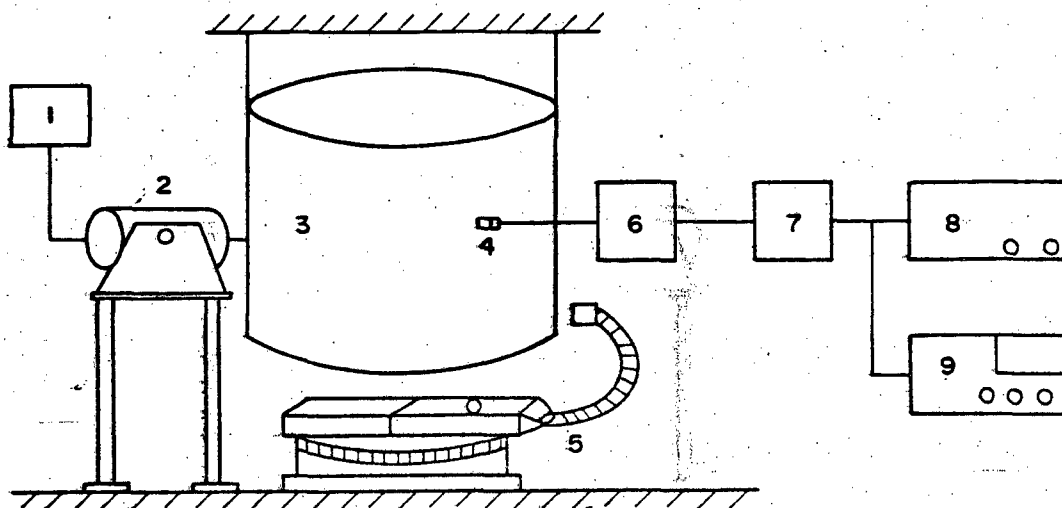


Figura 4.1 - Conjunto Experimental.

- | | |
|--|---------------------------------|
| (1) Gerador - Seno (BEK 1017). | (2) Vibrador (BEK 4810) |
| (3) Casca Cilindrica | (4) Acelerometro (BEK 4343) |
| (5) Medidor de Nível Sonoro + mi-
crofone + filtro (BEK 3511) | (6) Pré-Amplificador (BEK 2626) |
| (7) Filtro (BEK 1621) | (8) Osciloscópio |
| (9) Registrador gráfico (BEK 2305). | |

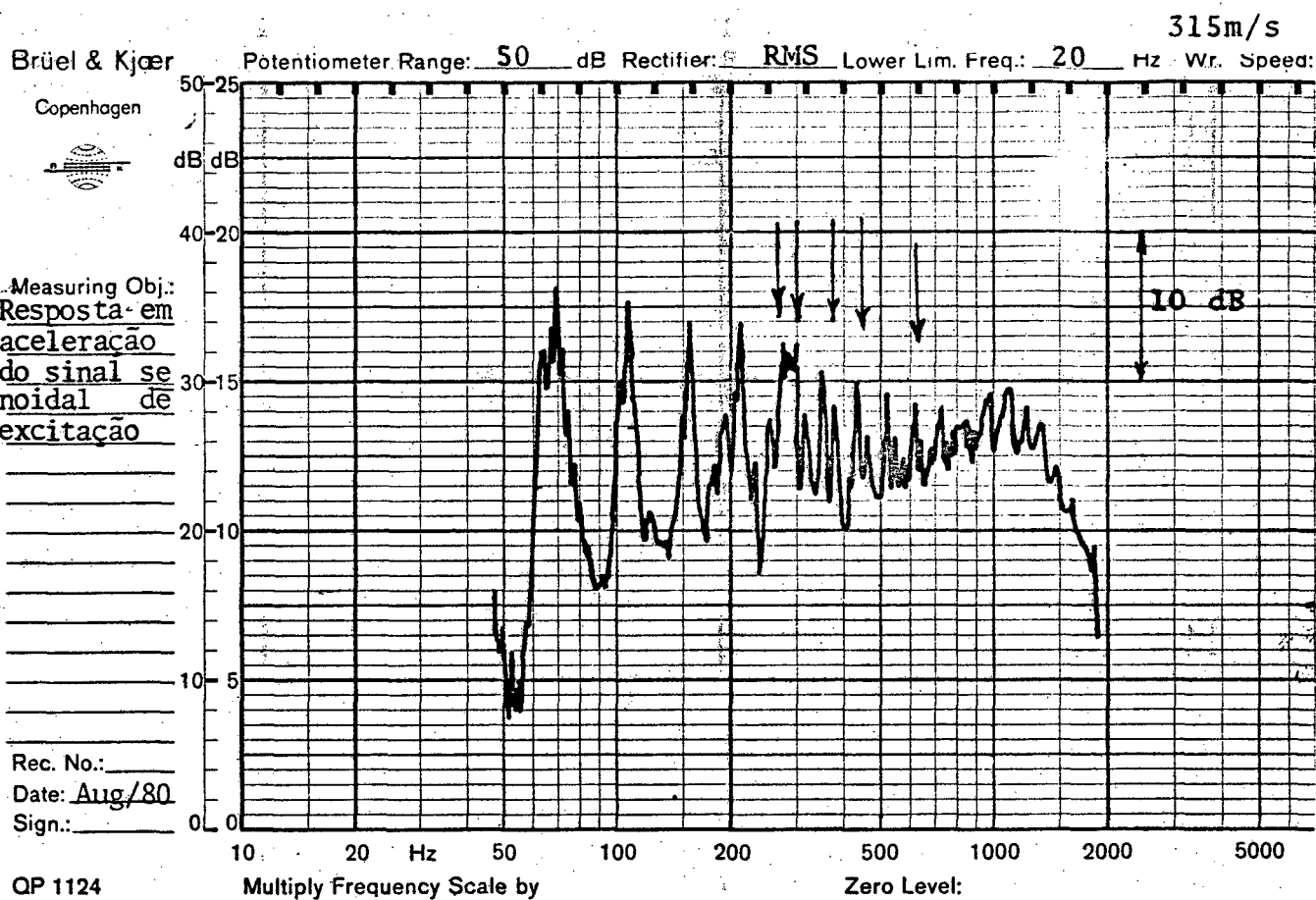


Figura 4.2 - Aceleração da Casca devido à Excitação Se
noidal



Figura-4.3 - Curva do Decremento-logaritmico de um modo da Casca.

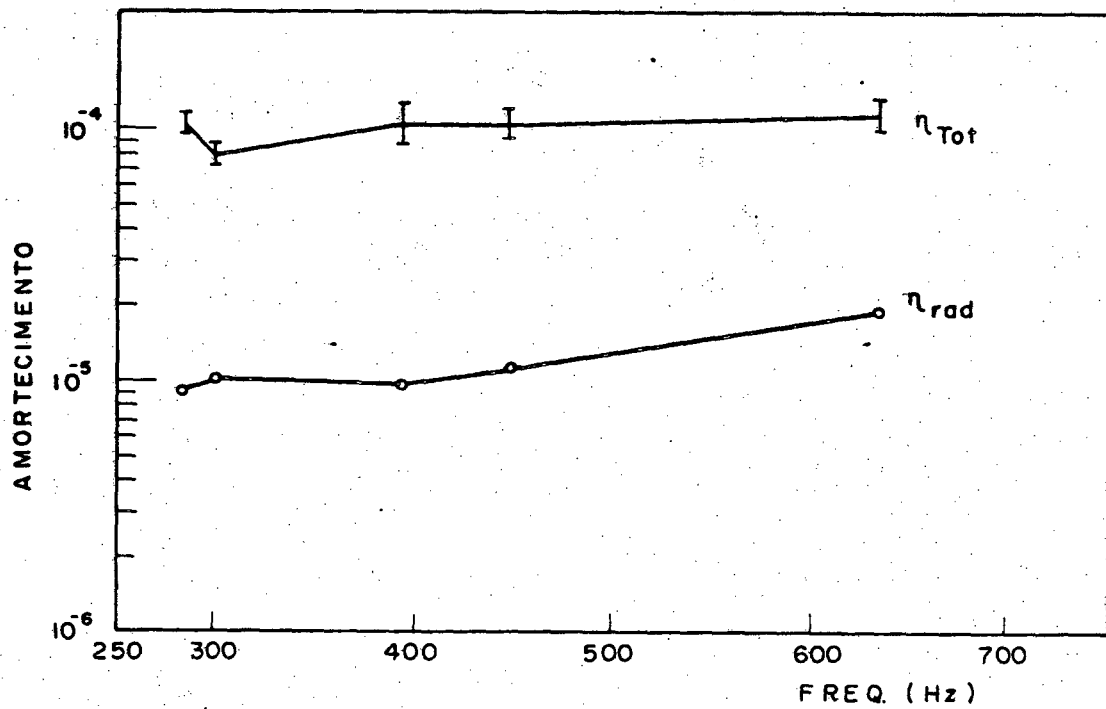


Figura 4.4 - Amortecimento total e Amortecimento Acústico da Casca.

C A P Í T U L O 5

RESUMO E CONCLUSÕES

5.1. RESUMO

As estruturas que vibram submersas em fluidos, terão o fluido acomodando-se ao seu movimento, e esse efeito é expresso pela massa adicionada e a eficiência de radiação. Portanto a eficiência de radiação é necessária para calcular o acoplamento fluido-estrutura, amortecimento acústico e controle de ruído.

Através do estudo bibliográfico (Capítulo 1) mostrou-se que não há dados para o cálculo da eficiência de radiação modal para uma casca cilíndrica finita. Este trabalho apresenta resultados para a eficiência de radiação de cascas cilíndricas finitas, vibrando axial e circunferencialmente em modos simples e os resultados foram obtidos resolvendo-se diretamente a equação da onda, satisfazendo as condições de contorno.

Partindo-se da solução da equação da onda em coordenadas cilíndricas (equação 2.1.1) e considerando, primeiramente, um cilindro infinito com número de onda axial $k_z = \frac{\pi s}{\ell}$, onde s é o número de modo axial e ℓ um comprimento do cilindro em metros e tomando-se a velocidade normal superficial (equação 2.2.1) pode-se determinar a equação da pressão acústica. Para a casca de comprimento finito, para evitar dificuldades na aplicação das condições de contorno, considerou-se a casca com comprimento infinito rígido exceto na parte finita que está vibrando de comprimento ℓ .

Tomando-se o valor médio do produto da pressão acústica pela velocidade superficial (equação 2.2.10) se obtém a po-

tência acústica média para uma casca cilíndrica infinita e finita (equações 2.2.13 e 2.3.29).

Por definição, a partir dos resultados da potência acústica se obteve a resistência de radiação (equação 2.2.14), o fator de perda de radiação (equação 2.2.15) e a eficiência de radiação modal (2.3.30). Obtida a equação para a eficiência de radiação de uma casca cilíndrica vibrante de comprimento finito, escolheu-se o método para a sua solução numérica (Runge-Kutta).

Tendo o método numérico estudou-se o comportamento da função próximo a zero, pois a função Hankel tende para infinito quando seu argumento tende para zero. Escolhido um ponto inicial e o erro introduzido na escolha (ver Tabela 1, Capítulo 3.4), outro fator analisado foi o número de pontos de integração (Capítulo 3.3). O fato de as subrotinas não produzirem valores precisos quando o argumento $k_0 < 0.1$, levou à análise dos limites de integração Capítulo 3.5) e a se utilizar uma forma aproximada para a eficiência de integração toda vez que isso ocorresse (equação 3.8). As amplitudes das deformações induzidas na estrutura vibrante na ressonância, ou perto desta, são controladas pela presença do amortecimento total no sistema.

O amortecimento total foi medido usando-se uma excitação impulsiva e gravando-se o decaimento-logarítmico do sinal da aceleração.

5.2. CONCLUSÕES

A eficiência de radiação modal de uma casca cilíndrica finita em baixa frequência ($k_0 < k_z$), onde k_0 é número de on

da acústica e k_z o número de onda axial, cai exponencialmente com a frequência de pendendo da razão l/a (l comprimento da casca e do raio da casca), do número do modo circunferencial (m) e do número do modo axial (s) (ver equação 2.3.30).

Em torno da frequência crítica ($k_0 \approx k_z$) a variação da eficiência de radiação com a frequência e os parâmetros da casca não é uma função monotônica simples porque efeitos complicados de interferência, ocorrem entre a casca e a onda. Acima da frequência crítica ($k_0 > k_z$) a eficiência de radiação da casca finita aproxima-se assintoticamente da casca infinita.

Para valores bem acima da frequência crítica ($k_0 \gg k_z$) a eficiência de radiação aproxima-se da unidade porque a potência sonora radiada é proporcional à soma espacial da média temporal da pressão, multiplicada pela velocidade de contorno, e terá um valor máximo quando estiverem em fase.

Por outro lado, o fator de perda de radiação aumenta com a frequência e o fator de perda total é quase constante. O fator de perda de radiação pode estar em torno de 7-17% para um caso especial de casca (ver Capítulo 4) aquêm do fator de perda total. Isto significa que o amortecimento acústico é altamente relevante no controle de vibrações.

APÊNDICE A

SUBROTINA BESJ (X, N, BJ, D, IER)

Esse programa calcula a função Bessel J para um dado argumento X e ordem N.

Linguagem: FORTRAN

Descrição: A relação de recorrência foi usada (sentido contrário)

Referências: H. Golstein e R. M. Thaler. Recurrence Techniques for the calculation of Bessel functions M.T.A.C. V 13 pp 102-108

I.A. Stegun e M. Abramowitz. Generation of Bessel functions for high speed computers M.T.A.C. V 11, 1957 pp 255-257

IBM application program, 1130 scientific subroutine package.

Parâmetros: X é o argumento da função Bessel J desejada

N é a ordem da função Bessel desejada

D é a precisão requerida

Saída: BJ é a função Bessel J

IER código de erro resultante onde:

IER = 0 sem erro

- I
- IER = 1 N é negativo
 - IER = 2 X é negativo ou zero
 - IER = 3 a precisão requerida não obtida
 - IER = 4 a faixa de N comparada a X é não corrente

Nota:

N deve ser maior ou igual a zero, mas deverá ser menor que

$$20 + 10^x - x^{0.663} \quad \text{para } x \leq 15$$

e

$$90 + x/2 \quad \text{para } x > 15$$

APÊNDICE B

SUBROTINA BESY (X, N, BY, IER)

Esse programa calcula a função Bessel Y (NEUMANN) para um dado argumento X e ordem Y.

Linguagem: FORTRAN

Descrição: A relação de recorrência foi usada

Referências: A.J.M. Hitchcock, polynomial approximations to Bessel functions of order zero and one and to related functions M.T.A.C V.11, 1957 PP 86-88

G.N. Watson, A treatise on the Theory of Bessel functions Cambridge University Press 1958 PP 82

IBM application program, 1130 Scientific subroutine package.

Parâmetros: X é o argumento de função Bessel Y desejada.

N é a ordem da função Bessel Y desejada

Saída: By é a função Bessel Y

IER código de erro resultante onde:

IER = 0 sem erro

IER = 1 N é negativo

IER = 2 X é negativo ou zero

IER = 3 BY é maior que 10^{36}

Nota:

Um valor muito pequeno de X poderá fazer exceder a função armazenada ALOG. Para $N = 30$ e $x = 5$, essa condição poderá ocorrer.

X deve ser maior que zero.

N deve ser maior ou igual a zero.

APÊNDICE C

SUBROTINA HAHD (X, N, HM, HPH, HDM, HDPH)

Esse programa calcula a função Hankel (HA) e a derivada primeira da função Hankel (HP) para um dado argumento X e ordem N.

Linguagem: FORTRAN

Descrição: Essa subrotina chama as subrotinas Bessel J e Bessel Y

Parâmetros: X é o argumento das funções HA e HD desejadas
N é a ordem das funções HA e HD desejadas.

Saída: HM é o módulo da função Hankel

NPH é a fase da função Hankel

HDM é o módulo da derivada primeira da função Hankel

NDPH é a fase da derivada primeira da função Hankel.

APENDICE D

Paper Presented to the One Hundredth Meeting of The Acoustical Society of America (ASA) in Los Angeles, California, USA, 17-21 November, 1980, (session SS, 20 November at 9:00 a.m.).

ACOUSTIC RADIATION BY FINITE SHELLS

By


Samir N. Yousri Gerges
Laboratório de Vibrações e Acústica
EMC, CTC da UFSC
Cx. P. 476 - Trindade
Florianópolis 88.000, SC, BRASIL.

Jorge C. da Silva Pinto
Lab. de Vibrações e Acústica
INPM, Rodovia Washington Luiz
Km 23 - Rio de Janeiro - RJ.
BRASIL.

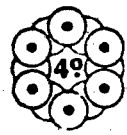
ABSTRACT

A single integral equation for the radiation efficiency of a single vibrational mode of a cylindrical shell is obtained. A close form solution has been obtained at low frequencies, the shell is un baffled and considered to be of infinite length, but held rigid except for a finite length which vibrates in axial and circumferential directions. Only sound radiation externally has been considered.

ANAIS



**4º. Congresso Brasileiro
de Engenharia e
Ciência dos Materiais**



Deptº. de Engenharia Mecânica - UFSC
Dezembro de 1980
Trabalho/Paper Nº..... PP.....

Patrocínio
ABCM - ABM - CNEN - CNPq. - SESU/MEC - UFSC

TÍTULO DO TRABALHO: AMORTECIMENTO INTERNO E EXTERNO DE UMA
TÍTULO DO PAPER: CASCA FINITA VIBRANTE

Samir N. Yousri Gerges
Professor Titular, Lab. de Vibrações e Acústica, Depto.
de Eng. Mecânica - UFSC, Cx.P. 476, Florianópolis, SC.

Jorge C. da Silva Pinto
Físico, Lab. de Acústica e Vibrações, INPM, Rio de Ja-
neiro.

SUMÁRIO - Amortecimento é a remoção da energia de um sistema vi-
brante. A energia perdida pode ser transmitida externamente do
sistema por algum mecanismo tal como radiação acústica, transmis-
são da energia nas junções, soldas, suportes, etc, e dissipada
internamente pelo material.

Os objetivos desse trabalho são quantificar o mecanismo de amor-
tecimento acústico para cascas cilíndricas finitas e determinar
a contribuição do amortecimento acústico no amortecimento total.

SUMMARY- Damping is the removal of energy from a vibratory sys-
tem. The energy lost may be transmitted externally from the system
by different mechanisms such as; acoustic radiation, transmis-
sion of energy at joints, welds, supports, etc, and dissipated
internally within the material.

The objective of this paper is to quantify the acoustic damping
mechanism for finite cylindrical shell and to determine the con-
tribution of acoustic damping to the total damping.