

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS À TRANSFERÊNCIA DE CALOR  
POR RADIAÇÃO, CONDUÇÃO E CONVECÇÃO COMBINADAS  
ENTRE SÓLIDOS DE GEOMETRIA ARBITRÁRIA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

RICARDO CHEREM DE ABREU

FLORIANÓPOLIS, MAIO DE 1979

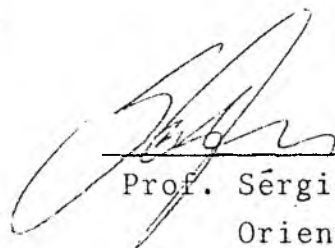
APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS À TRANSFERÊNCIA DE CALOR  
POR RADIAÇÃO, CONDUÇÃO E CONVECÇÃO COMBINADAS  
ENTRE SÓLIDOS DE GEOMETRIA ARBITRÁRIA

RICARDO CHEREM DE ABREU

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE

"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO TERMO  
TÉCNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRA-  
DUAÇÃO.

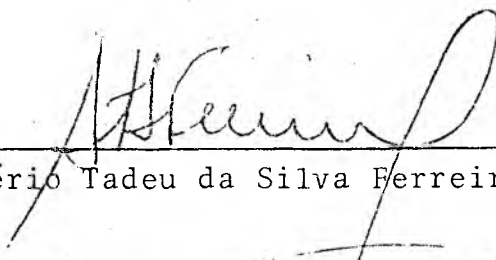


Prof. Sérgio Colle, D.Sc.  
Orientador

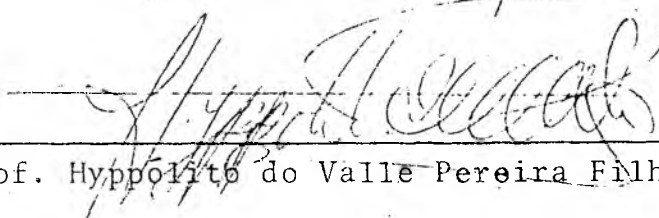


Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador

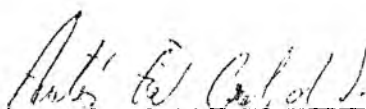
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.



Prof. Hyppólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.



Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva, M.Sc.

A meus pais  
À Mari  
A meus filhos

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar o meus agradecimentos ao Profesor Sergio Colle pela orientaço dedicada e precisa, aos colegas Manoel Luiz Gonzales e Antonio Fabio Carvalho da Silva pelo interesse e apoio, a Nestor Back pelo trabalho de datilografia, a Roberto Jose Dias de Andrade pelos desenhos e a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram no desenvolvimento desete trabalho.

## ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. FORMULAÇÃO DO MÉTODO .....	5
2.1 - Método de equações integrais na transferência de calor em sólidos com geometria multiplamente conexa .....	5
2.2 - O problema de radiação térmica entre dois corpos com geometria multiplamente conexa considerando-se os efeitos de condução .....	17
3. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS .....	26
4. LIMITES IMPORTANTES E EFICIÊNCIA DA TROCA DE CALOR POR RADIAÇÃO .....	34
4.1 - Eficiência da troca de calor por radiação como função da condutibilidade térmica .....	35
5. APLICAÇÃO DO MÉTODO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	40
5.1 - Troca de calor por radiação entre parede cilíndrica e placa plana isotérmica .....	40
5.2 - Troca de calor por radiação entre parede cilíndrica e placa espessa .....	57
6. CONCLUSÕES .....	62
BIBLIOGRAFIA .....	65
APÊNDICE A .....	67
A.1 - Problemas de Dirichlet, Neumann e de caráter misto .....	67
A.2 - Funções de Green - Definição e propriedades .....	68
APÊNDICE B .....	73
B.1 - Solução analítica para o cilindro com furo concêntrico .	73

## SIMBOLOGIA

$B$	- semi-largura da placa plana
$H$	- distância da placa ao centro do cilindro
$D_i$	- região de Liapunov ou Regular do $R^2$
$\partial D_i$	- fronteira de $D_i$
$\partial D_{ij}$	- para $j = 1$ , fronteira externa a $D_i$ para $j > 1$ , fronteira interna a $D_i$
$h_i$	- coeficiente de convecção para a região $D_i$
$k_i$	- condutibilidade térmica do material que compõe a região $D_i$
$T_i^*$	- temperatura de um ponto no interior de $D_i$
$T_{ij}^*$	- temperatura de um ponto no contorno $\partial D_{ij}$
$x^*, y^*$	- coordenadas cartesianas
$z^*$	- par ordenado $(x^*, y^*)$
$\nabla$	- operador nabla
$\in$	- pertinência
$\underline{n}$	- normal exterior a $\partial D$
$T_r^*$	- temperatura de referência
$T_i$	$= T_i^*/T_r^*$
$T_{ij}$	$= T_{ij}^*/T_r^*$
$G$	- função de Green fundamental para o $R^2$
$g_i$	- função de Green incompleta para $D_i$
$N_{ij}$	- número de pontos nodais no contorno $\partial D_{ij}$
$\partial T$	$= \partial T / \partial \underline{n} = \text{grad } T \cdot \underline{n}$ , derivada normal da $T$
$\partial G$	$= \partial G / \partial \underline{n}$
$\partial g_i$	$= \partial g_i / \partial \underline{n}$
$s$	- comprimento de arco
$Nr_i$	$= \sigma T_r^{*3} L_r^*/k_i$ , Número de Radiação para $D_i$
$Bi_i$	$= h_i L_r^*/k_i$ , Número de Biot para $D_i$
$q^*$	- fluxo de calor por unidade de área
$\bar{q}^*$	- fluxo médio por unidade de área
$\Delta q^*$	- fluxo líquido de calor trocado por radiação
$\bar{T}$	- temperatura local com fonte unitária
$A_{ij}$	- elementos da matriz $ A $
$B_{ij}$	- elementos da matriz $ B $
$I_i$	- elementos do vetor $ I $
$\bar{q}$	- fluxo médio total adimensional

$\Delta\bar{q}$	- variação no fluxo médio adimensional
$r_i$	- raio interno adimensional
$r_e$	- raio externo adimensional
$k$	- coeficiente de condutibilidade térmica do material

### Índices

Sub-índices : o primeiro sub-índice refere-se à região e o segundo refere-se ao contorno (1 para superfície externa, 2, 3, ..., n para superfícies internas)

Sobre-índices : o primeiro sobre-índice refere-se à região; o segundo ao contorno sobre o qual se encontra o ponto nodal considerado; o terceiro ao contorno sobre o qual está sendo feita a integração.

### Observações

[M]	- matriz dos elementos $M_{ij}$
[j]	- referência j da Bibliografia

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo aplicar o método de equações integrais na solução de problemas de transferência de calor, analisando a influência da condutibilidade térmica dos corpos negros envolvidos na troca de calor por radiação.

É feita a formulação para o problema da transferência de calor por radiação e convecção combinadas, entre dois corpos negros de superfície convexa e geometria multiplamente conexa, envolvidos por um meio não participante. São apresentadas duas formulações, uma para o uso de funções de Green fundamentais, e outra para o uso de funções de Green incompletas.

Apresenta-se um esquema numérico de solução para o sistema de equações integrais não-lineares formulado. Para ilustrar a aplicação do método, são resolvidos dois problemas de radiação com geometrias simples: uma parede cilíndrica trocando calor com uma placa plana isotérmica de largura finita; uma parede cilíndrica trocando calor com uma placa espessa de largura finita.

Definindo-se um parâmetro representativo, verifica-se a influência da condutibilidade térmica dos sólidos na troca de calor por radiação, para os dois casos analisados.

Embora sejam disponíveis poucos trabalhos com resultados numéricos na literatura especializada, são analisados alguns casos limites que concordam com os resultados analíticos.



## ABSTRACT

The main goal of this work is to use the integral equation method in heat transfer problem, developing an analysis of the thermal conductivity relation with radiation heat transfer processes.

The heat transfer by combined conduction, radiation and convection between two black bodies, with smooth convex surfaces and multiple connecting geometry, involved by non-participating media, is formulated. Two formulations are presented: one using fundamental Gree's functions, the other using incomplete Gree's functions.

The integral equation systems obtained by both formulations are solved numerically. Two heat transfer problems with simple geometry, a cylindrical wall exchanging heat with an isothermal plate and a cylindrical wall exchanging heat with a thick plate are solved to show this method suitability.

A parameter of physical value is defined and its behavior is studied for both solved problems, to analyse the thermal conductivity influence on radiation heat exchange between two black bodies.

As there were few known results at the studied bibliography, in this work are solved some special cases that agree well with analitical results.

## 1. INTRODUÇÃO

A solução de problemas de transferência de calor foi grandemente facilitada pelo desenvolvimento dos métodos numéricos de solução, cuja aplicação tornou-se viável com o advento dos computadores digitais de grande velocidade e capacidade. À medida que progrediram as técnicas de solução numérica, passaram a ser solucionados os problemas de transferência de calor que oferecem maiores dificuldades para serem resolvidos analiticamente. Entre tais problemas podem ser citados aqueles que possuem condições de contorno não-lineares, como na transferência de calor por radiação e convecção combinadas.

Na transferência de calor por condução e convecção, a energia transferida de, ou para, um elemento de volume de um sólido, ou fluido, depende do gradiente de temperatura e das propriedades físicas do material na região imediatamente vizinha a esse elemento. No entanto, na transferência de calor por radiação, a energia transferida é proporcional à temperatura do elemento considerado, elevada à quarta potência. Além disto, a energia é transferida, entre dois elementos separados, sem a necessidade de um meio transmissor. Portanto, ao ser determinada a equação para o balanço de energia em problemas onde é considerada a transferência de calor por radiação, condução e/ou convecção combinadas, aparecem termos na forma diferencial, devidos à condução e/ou convecção. Surgem ainda, nesta equação, termos na forma integral devidos à radiação. Esta equação, que define uma condição de contorno, é uma equação íntegro-diferencial, o que dificulta de sobremaneira a solução analítica do problema.

Para a solução de problemas deste tipo geralmente são utilizados métodos de solução aproximada e, entre estes, o método de equações integrais parece ser mais conveniente que os métodos mais tradicionais como: Diferenças Finitas, Elementos Finitos e Métodos Variacionais.

A aplicação do método de solução por equações integrais, para a condução do calor, foi utilizada em 1964, com to-

tal sucesso, por Sparrow et al [1]. Nesse mesmo ano, Tolubinskyi [2], na URSS, tratou o método integral com elevado rigor matemático, com vistas à sua aplicação à Física e à Engenharia, nas áreas de difusão de calor e massa e propagação de ondas. Crosbie e Viskanta [3] aplicaram este método à transferência de calor unidimensional, em regime transitório na direção normal à uma placa plana, comparando os efeitos da radiação com os da convecção. Um outro estudo interessante foi feito por Shaw [4], que analisou a transferência de calor não-estacionário em uma região com geometria em forma de setor de círculo, usando na obtenção das equações integrais uma função de Green incompleta. Algumas conclusões desse trabalho merecem citação, pois apontam as principais vantagens e desvantagens do uso do método de equações integrais, com relação a outros métodos numéricos, como diferenças finitas e elementos finitos. As conclusões mais significativas por ele apresentadas foram:

- a. O método de equações integrais faz uso de um menor número de equações do que os outros métodos numéricos citados, o que é explicado pelo fato de, no método integral, a dimensão do espaço em questão ser a dimensão do contorno da região estudada. Por outro lado, os cálculos necessários para a obtenção dos coeficientes das equações integrais discretizadas são muito mais complicados no método de equações integrais.
- b. Diferentemente do que é obtido pelos métodos das diferenças finitas e elementos finitos, o método de equações integrais não fornece imediatamente a solução em qualquer ponto da região estudada. Em compensação, as condições de contorno são aplicadas diretamente na fronteira ao invés de serem interpoladas como ocorre nos métodos de diferenças finitas e elementos finitos.
- c. Na prática, em grande parte dos problemas de transferência de calor em Engenharia, é mais interessante a determinação da distribuição de temperatura e fluxo de calor na superfície dos corpos. Neste caso, o método das equações integrais parece ser o mais indicado para a obtenção dos resultados desejados.

Em 1973 Chang et al [5], aplicaram o método de equações integrais no problema da condução de calor em sólidos anisotrópicos, usando funções de Green fundamentais. Nesse trabalho foram apresentados também alguns resultados obtidos com funções de Green incompletas e as vantagens obtidas ao serem aplicadas estas funções. Contudo, os resultados apresentados referem-se a problemas com condições de contorno lineares.

Em 1978, Gonzáles [11], aplicou o método de equações integrais ao problema do transiente de esfriamento de peças cilíndricas e prismáticas, de geometria simplesmente conexa. Em seu trabalho considerou a radiação e convecção combinadas, obtendo bons resultados, porém com tempo de processamento considerável, devido ao fato de o problema ser transiente.

Este mesmo método foi utilizado no estudo do escoamento laminar em dutos de seção transversal de geometria múltiplamente conexa [10]. Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios em comparação com resultados de outros métodos.

Vários fatores motivaram a realização deste trabalho, além do interesse em explorar-se o método de equações integrais, verificando-se as reais vantagens da utilização de funções de Green incompletas e fundamentais.

Embora se saiba que o método de equações integrais parece ser adequado para resolver problemas de transferência de calor com radiação e convecção combinadas, foram encontrados poucos trabalhos nesta área em transferência de calor unidimensional [3 e 4], e em transferência de calor bi ou tridimensional [5, 6 e 7].

A transferência de calor por radiação assume um papel de maior destaque nos processos industriais, à medida que estes ocorrem a temperaturas mais elevadas, como em caldeiras, reatores nucleares ou fornos de alta temperatura. A radiação térmica é fundamental no aproveitamento da energia solar, ou quando não existe um outro modo de transferência de calor, como acontece nas naves espaciais onde toda absorção ou dissipação de energia dá-se por radiação.

A intensidade do calor emitido por radiação a partir da superfície de um corpo é, como se sabe, consideravelmente dependente de sua temperatura. A condutibilidade térmica do mate-

rial deste corpo pode provocar a formação de gradientes de temperatura na sua superfície, o que certamente influencia a transferência de calor por radiação. Apesar disto, parece não haver uma análise qualitativa e quantitativa da influência da condutibilidade térmica no fluxo líquido de calor entre dois sólidos, separados por um meio não participante.

Os argumentos expostos anteriormente definiram o objetivo deste trabalho, que é adaptar a formulação do método de equações integrais ao problema da transferência de calor por radiação entre corpos de geometria arbitrária e aplicar tal método para analisar o efeito da condutibilidade térmica dos sólidos envolvidos na transferência de calor radiante. No desenvolvimento de tal análise, define-se um parâmetro relevante para a comparação entre a troca de calor por radiação para diferentes condutibilidades térmicas. Verifica-se também a adequação em fazer-se uso de funções de Green incompletas ou, fundamentais.

É importante salientar que, para o fim proposto, considerou-se suficiente a análise de problemas com transferência de calor bidimensional em regime estacionário. Para o caso da transferência de calor tridimensional o comportamento é semelhante, o mesmo podendo-se afirmar para problemas não-estacionários. Uma análise envolvendo este tipo de problemas implicaria na adição destes dois novos fatores, que viriam a aumentar o tempo e a capacidade necessária ao processamento do método numérico de solução, sem ganho proporcionalmente relevante na análise do fenômeno físico.

## 2. FORMULAÇÃO DO MÉTODO

### 2.1 - O Método de Equações Integrais na Transferência de Calor em Sólidos com Geometria Multiplamente Conexa.

Em projetos de Engenharia de alta confiabilidade onde é necessária a obtenção de resultados de grande precisão, a solução de problemas de transferência de calor incluindo troca de calor por radiação, fica extremamente dificultada pela natureza do fenômeno físico. É sabido que, dependendo da abordagem, pode-se considerar a energia radiante sendo transportada por meio de ondas eletromagnéticas ou por meio de fótons. A teoria eletromagnética é utilizada na previsão das propriedades de radiação de certo tipo de superfícies, que podem emitir ou refletir radiação em função do comprimento de onda e propriedades físicas do material, segundo direções preferenciais. A teoria quântica, por outro lado, é empregada na determinação das propriedades dos meios participantes, ou seja, meios que emitem, espalham e absorvem radiação. A radiação eletromagnética compreende diversos tipos de radiação, desde radiações  $\gamma$  de altíssima frequência até ondas de rádio de grande comprimento, sendo cada tipo de radiação caracterizado pela forma como é gerada. A radiação térmica é definida como sendo a energia radiante emitida por um meio, com uma determinada distribuição de frequência, devido unicamente à sua temperatura. Logo, quem governa a emissão da radiação térmica é a temperatura do meio emissor, ocupando este tipo de radiação uma pequena faixa no espectro global da radiação eletromagnética. Portanto, na determinação da quantidade de calor trocada por radiação entre duas superfícies, devem ser consideradas as propriedades de radiação destas superfícies e as propriedades do meio que as separa, para cada comprimento de onda.

No entanto, os problemas comuns de Engenharia continuam a ser resolvidos considerando-se propriedades de radiação totais e hemisféricas, isto é, sobre todos os comprimentos de onda e sobre o espaço hemisférico acima da superfície considera

da. Definem-se ainda outras hipóteses simplificativas que vêm a facilitar a formulação e conseqüente solução do problema.

Pelo que foi dito, considerando-se que o objetivo deste trabalho é formular e aplicar o método de equações integrais para verificar a influência da condutibilidade térmica sobre a transferência de calor por radiação, é razoável admitirem-se as seguintes hipóteses simplificativas:

- a. Os corpos em estudo comportam-se como corpos negros.
- b. As superfícies externas dos corpos são convexas, isto é, um ponto da superfície não enxerga outros pontos sobre ela mesma.
- c. O meio que envolve os corpos em estudo é não participante, quanto à radiação.
- d. As propriedades físicas dos materiais são constantes e não dependem de orientação.
- e. Não há geração de calor no interior das regiões consideradas.
- f. A transferência de calor ocorre no estado estacionário.

Para ilustrar a aplicação do método integral na solução de problemas de transferência de calor bidimensional em corpos de geometria multiplamente conexa, abordar-se-á o seguinte problema:

Seja  $D_1$  a região de Liapunov que representa a secção transversal de um corpo com comprimento infinito, e seja  $\partial D_1$  o contorno de  $D_1$ , que coincide com as superfícies do corpo em questão (ver figura 1).

A condução de calor bidimensional na região  $D_1$  é regida pela seguinte equação de Laplace:

$$\nabla^2 T_1^* = \frac{\partial^2 T_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T_1^*}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (2.1)$$

As condições de contorno, que se aplicam a  $\partial D_{11}$  e  $\partial D_{12}$  podem ser, genericamente, do tipo de Dirichlet, Neumann ou de caráter misto (ver Apêndice A). No entanto, são comuns os

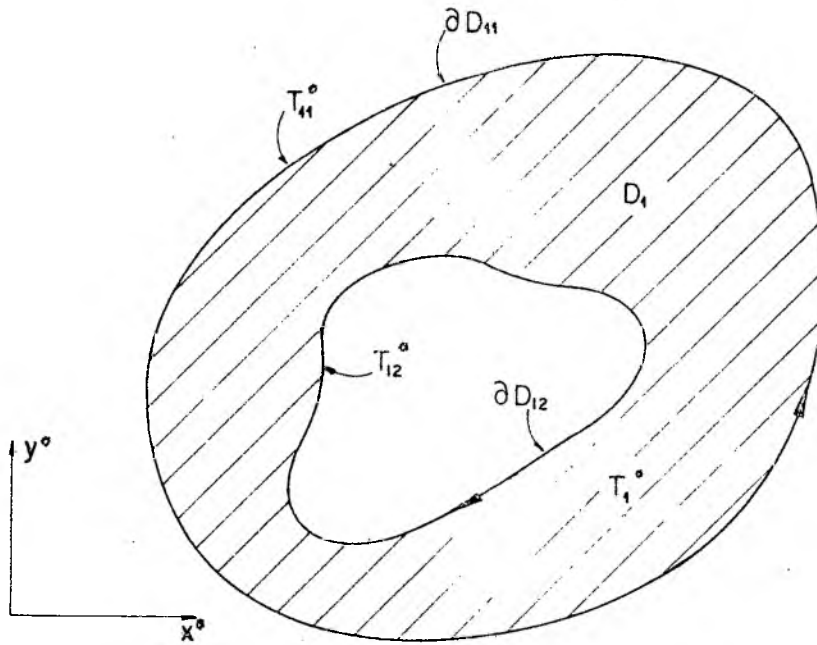


Fig. 1 - Configuração genérica de uma região regular multiplamente conexa.

problemas em que na superfície interna é conhecida a distribuição de temperatura, como num tubo com fluido escoando a alta velocidade, ou um escoamento com mudança de fase. É então plausível considerar-se a seguinte condição de contorno, para a superfície interna:

$$T_1^* \Big|_{\partial D_{12}} = T_{12}^*(z^*), \quad z^* \in \partial D_{12}, \quad (2.2)$$

onde  $z^* = (x^*, y^*)$ . Para a superfície externa, fazendo-se um balanço de energia, determina-se a seguinte condição de contorno:

$$-k_1 \frac{\partial T_1^*}{\partial \underline{n}} \Big|_{\partial D_{11}} = q^*(z^*), \quad z^* \in \partial D_{11} \quad (2.3)$$



onde  $z' = (x', y')$  e  $\delta$  é a "função Delta" de Dirac.

Multiplicando-se a equação (2.7) por  $T_1(z)$ , a equação (2.4) por  $G(z, z')$  e somando, vem:

$$G \nabla^2 T_1 - T_1 \nabla^2 G = T_1 \delta(z - z') \quad (2.8)$$

Integrando-se a equação (2.8) na região  $D_1$ , esta pode ser escrita como:

$$\int_{D_1} (G \nabla^2 T_1 - T_1 \nabla^2 G) dz = \int_{D_1} T_1 \delta(z - z') dz \quad (2.9)$$

Aplicando-se na equação (2.9) a segunda fórmula de Green, obtém-se o que segue:

$$\begin{aligned} \int_{D_1} T_1 \delta(z - z') dz = & \int_{\partial D_{11}} \left[ G \frac{\partial T_{11}}{\partial \underline{n}} - T_{11} \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} \right] ds(z) + \\ & + \int_{\partial D_{12}} \left[ G \frac{\partial T_{12}}{\partial \underline{n}} - T_{12} \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} \right] ds(z) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para simplificar a simbologia, a derivada normal passará a ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{\partial T}{\partial \underline{n}} = \partial T \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} = \partial G$$

Aplicando-se a propriedade (A.11) da "função Delta", a equação (2.10) pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} T_1(z') = & \int_{\partial D_{11}} [G(z, z') \partial T_{11}(z) - T_{11}(z) \partial G(z, z')] ds(z) + \\ & + \int_{\partial D_{12}} [G(z, z') \partial T_{12}(z) - T_{12}(z) \partial G(z, z')] ds(z) \\ & \dots (2.11) \end{aligned}$$

Trocando-se  $z$  por  $z'$  na equação (2.11) e usando-se a propriedade da reflexividade da função de Green, obtêm-se finalmente:

$$T_1(z) = \int_{\partial D_{11}} [G(z, z') \partial T_{11}(z') - T_{11}(z') \partial G(z, z')] ds(z') + \\ + \int_{\partial D_{12}} [G(z, z') \partial T_{12}(z') - T_{12}(z') \partial G(z, z')] ds(z'), \\ z \in D_1 \text{ e } z' \in \partial D_1 \quad \dots(2.12)$$

Analisando-se a equação (2.12), nota-se que se as condições de contorno  $T_{11}(z')$ ,  $\partial T_{11}(z')$ ,  $T_{12}(z')$  e  $\partial T_{12}(z')$ , forem conhecidas, a equação (2.12) permite o cálculo da temperatura em qualquer ponto no interior da região  $D_1$ . Como  $T_{12}(z')$  e  $\partial T_{11}(z')$  são dadas pelas condições de contorno (2.5)-(2.6), é necessário determinar-se o valor de  $T_{11}(z')$  sobre o contorno  $\partial D_{11}$  e  $\partial T_{12}(z')$  sobre o contorno  $\partial D_{12}$ . No entanto, para avaliar estes valores no contorno, não se pode fazer na equação (2.12),  $z' = z$ . Pois, como  $z$  e  $z'$  pertencem ao contorno, surgirão singularidades. Isto pode ser verificado facilmente, uma vez que, para o problema bidimensional a função de Green e sua derivada normal, são definidas como segue:

$$G(z, z') = - \frac{1}{2\pi} \ln |z - z'| ; \quad (2.13)$$

e

$$\partial G(z, z') = \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \frac{(z - z') \cdot \underline{n}'}{|z - z'|^2} \quad (2.14)$$

Avaliando-se as singularidades quando  $z = z'$ , (ver Apêndice A), e aplicando-se as propriedades (A.14)-(A.16) na equação (2.12), para um ponto sobre o contorno  $\partial D_{11}$ , esta equação pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_{11}(z) = & \int_{\partial D_{11}} [G(z, z') \partial T_{11}(z') - T_{11}(z') \partial G(z, z')] ds(z') + \\ & + \int_{\partial D_{12}} [G(z, z') \partial T_{12}(z') - T_{12}(z') \partial G(z, z')] ds(z'), \\ & z' \text{ e } z \in \partial D_{11}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para um ponto sobre o contorno  $\partial D_{12}$ , a equação (2.12) reduz-se a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_{12}(z) = & \int_{\partial D_{11}} [G(z, z') \partial T_{11}(z') - T_{11}(z') \partial G(z, z')] ds(z') + \\ & + \int_{\partial D_{12}} [G(z, z') \partial T_{12}(z') - T_{12}(z') \partial G(z, z')] ds(z'), \\ & z' \text{ e } z \in \partial D_{12} \end{aligned} \quad (2.16)$$

As equações integrais sobre  $\partial D_{11}$  e  $\partial D_{12}$ , do tipo (2.15) e (2.16), respectivamente, juntamente com as condições de contorno prescritas para o problema considerado, são suficientes para determinar as funções incógnitas no contorno, neste caso  $T_{11}$  e  $\partial T_{12}$ .

Em transferência de calor, quando são conhecidos todos os valores das variáveis no contorno e deseja-se avaliar uma propriedade no interior da região em estudo, diz-se que o problema é direto. Por outro lado, quando são conhecidos alguns valores das variáveis no contorno, ou são conhecidos valores das variáveis no interior da região, e desejam-se determinar as variáveis desconhecidas no contorno, diz-se que o problema é inverso.

Historicamente, o método de equações integrais, pelo uso da segunda fórmula de Green, é apropriado para resolver problemas diretos, pois basta resolver uma equação do tipo (2.12) para determinar-se a temperatura em cada ponto da região.

O método de equações integrais é apropriado para a solução de problemas inversos, sendo necessário para tal, resolver

um sistema de equações integrais, formado por equações do tipo (2.12), (2.15) e (2.16).

Na resolução de problemas de transferência de calor utilizando-se o método de equações integrais, não é necessário, forçosamente, o uso da função de Green fundamental. Podem ser utilizadas, na formulação das equações integrais, funções de Green incompletas, definidas como em (A.21)-(A.31). O uso de funções de Green incompletas apresenta algumas vantagens, tais como aquelas citadas em [7], sendo que a mais importante é o facto de sua utilização vir a simplificar a formulação, como será exposto a seguir.

A função de Green incompleta para o problema dado por (2.4) e suas condições de contorno (2.5)-(2.6), é a solução do seguinte problema a valores de contorno (ver Apêndice A):

$$-\nabla^2 g(z, z') = \delta(z - z'), \quad z \text{ e } z' \text{ em } D_1; \quad (2.17)$$

e

$$g(z, z') \Big|_{\partial D_{12}} = 0 \quad z' \in \partial D_{12} \quad (2.18)$$

Da mesma forma como no uso da função de Green fundamental, podem-se relacionar os dois problemas dados pelas equações (2.4) e (2.17). Aplicando-se a segunda fórmula de Green, as propriedades (A.11) para a função Delta de Dirac e (A.13) para a função de Green, para um ponto no interior da região  $D_1$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} T_1(z) = & \int_{\partial D_{11}} [g(z, z') \partial T_{11}(z') - T_{11}(z') \partial g(z, z')] ds(z') + \\ & + \int_{\partial D_{12}} [g(z, z') \partial T_{12}(z') - T_{12}(z') \partial g(z, z')] ds(z') \\ & z' \in \partial D_1 \text{ e } z \in D_1 \quad (2.19) \end{aligned}$$

Visto que, a segunda integral na equação (2.19) é realizada sobre o contorno  $\partial D_{12}$ , ao aplicar-se a condição de con-

torno (2.18), a equação (2.19) reduz-se a:

$$T_{11}(z) = \int_{\partial D_{11}} [g(z, z') \partial T_{11}(z') - T_{11}(z') \partial g(z, z')] ds(z') - \int_{\partial D_{12}} T_{12}(z') \partial g(z, z') ds(z'), \quad z \in D_1 \quad (2.20)$$

Nota-se agora que se forem conhecidas as condições de contorno  $T_{11}(z')$ ,  $\partial T_{11}(z')$  e  $T_{12}(z')$ , estará determinada a temperatura em qualquer ponto no interior da região  $D_1$ . No problema dado por (2.4),  $T_{12}(z')$  e  $\partial T_{11}(z')$  são definidas pelas condições de contorno (2.3) e (2.5), respectivamente. Neste caso, necessita-se determinar o valor de  $T_{11}(z')$  sobre o contorno  $\partial D_{11}$ , não sendo mais necessário calcular  $\partial T_{12}(z')$ , como no uso da função de Green fundamental.

Para um ponto sobre  $\partial D_{11}$ , avaliando-se as singularidades, a equação (2.20) pode ser escrita como segue:

$$T_{11}(z) = \int_{\partial D_{11}} [g(z, z') \partial T_{11}(z') - T_{11}(z') \partial g(z, z')] ds(z') - \int_{\partial D_2} T_{12}(z') \partial g(z, z') ds(z'), \quad (2.21)$$

para todo  $z \in \partial D_{11}$ .

Portanto, fazendo-se uso do método de equações integrais e funções de Green incompletas, a solução de problemas diretos é dada pela equação integral (2.20). A solução de problemas inversos é fornecida pela solução do sistema de equações integrais, formado por equações do tipo (2.20) e (2.21).

A utilização de funções de Green incompletas apresenta como único inconveniente o fato de ser necessário determinar uma função de Green incompleta para cada geometria em particular.

Logo, para regiões com geometria geral, para as quais a determinação da função de Green incompleta se consti

tui um problema à parte, é conveniente fazer-se uso da função de Green fundamental. Porém, em problemas axi-simétricos, como no estudo de corpos com forma cilíndrica, as equações (2.12)-(2.16), para a função de Green fundamental, não devem ser utilizadas. Uma vez que, quando as condições de contorno prescritas não são funções das variáveis independentes,  $x$  e  $y$ , ou seja, não são funções da posição, os termos

$$\int_{\partial D_{1i}} T_{1i}(z') G(z, z') ds(z'), \text{ com } T_{1i} \text{ constante e } \neq 0,$$

são nulos, o que equivale a dizer que na equação discretizada, a matriz dos coeficientes é singular.

Para contornar este problema, basta realizar uma mudança de variáveis, do tipo:

$$\bar{T} = T - \frac{1}{4} |z|^2; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \underline{n}} = \frac{\partial T}{\partial \underline{n}} - \frac{1}{2} \underline{z} \cdot \underline{n} \quad (2.22)$$

O problema em estudo, dado pela equação (2.4) e suas condições de contorno (2.5)-(2.6), reduz-se ao seguinte problema a valores de contorno:

$$\nabla^2 \bar{T}_1 = -1; \quad (2.23)$$

$$\bar{T}_1 \Big|_{\partial D_{12}} = T_{12} - \frac{1}{4} |z|^2, \text{ para } z \in \partial D_{12}; \quad (2.24)$$

e

$$\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \underline{n}} \Big|_{\partial D_{11}} = \frac{\partial T_{11}}{\partial \underline{n}} - \frac{1}{2} \underline{z} \cdot \underline{n}, \text{ para } z \in \partial D_{11}; \quad (2.25)$$

Usando-se a segunda fórmula de Green e o mesmo procedimento desenvolvido em [10], obtém-se para um ponto no inte-

rior de  $D_1$ , a seguinte equação integral:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_1(z) = & \frac{1}{2} \int_{\partial D_{11}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial D_2} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
 & + \int_{\partial D_{11}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{11}(z') - \bar{T}_{11}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
 & + \int_{\partial D_{12}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{12}(z') - \bar{T}_{12}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') \\
 & \dots (2.26)
 \end{aligned}$$

$$\text{onde } a(z, z') = (z' - z) \cdot \underline{n}' \quad (2.27)$$

Para um ponto sobre o contorno  $\partial D_{11}$ , obtém-se a seguinte equação integral:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \bar{T}_{11}(z) = & \frac{1}{2} \int_{\partial D_{11}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial D_{12}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
 & + \int_{\partial D_{11}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{11}(z') - \bar{T}_{11}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
 & + \int_{\partial D_{12}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{12}(z') - \bar{T}_{12}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') \\
 & \dots (2.28)
 \end{aligned}$$

Finalmente, para um ponto sobre o contorno  $\partial D_{12}$ , obtém-se a equação integral que segue:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \bar{T}_{12}(z) = & \int_{\partial D_{11}} G(z, z') \cdot a(z, z') \, ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{12}} G(z, z') \, a(z, z') \, ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{11}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{11}(z') - \bar{T}_{11}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{12}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{12}(z') - \bar{T}_{12}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') \\
& \dots (2.29)
\end{aligned}$$

Nota-se que, aplicando-se o método de equações integrais, para o problema da transferência de calor bidimensional, obtêm-se ao final da formulação apenas equações com integrais de linha. A solução numérica destas equações certamente exige menos esforço que a solução numérica da equação diferencial original.

O fato de terem sido consideradas as hipóteses simplificativas relacionadas no início deste capítulo, na formulação apresentada, não implica em dizer que o método de equações integrais não tem aplicação mais geral. Caso algumas destas hipóteses fossem relaxadas, a formulação não sofreria grandes modificações, como pode ser visto em [7]. Nesse trabalho é abordado o problema da transferência de calor em corpo isotrópicos com geração de calor em seu interior. A hipótese de corpos negros não impede que se analise o problema aqui apresentado, para corpos cinzentos e para radiação difusa. O mesmo pode ser dito com relação à hipótese de superfícies convexas, que elimina a possibilidade de radiação mútua. Uma hipótese que considerasse corpos cinzas, radiação difusa e radiação mútua, isto é, troca de calor entre pontos da mesma superfície, modificaria, com relação às hipóteses aqui apresentadas, somente condições de contorno do tipo (2.16).

Porém, como já foi dito, tendo em vista os objetivos



deste trabalho, as hipóteses simplificativas adotadas vêm facilitar a análise da influência da condutibilidade térmica na transferência de calor por radiação.

## 2.2 - O Problema da Radiação Térmica entre dois Corpos com Geometria Multiplamente Conexa Considerando-se os Efeitos da Condução.

Para abordar o problema da transferência de calor por radiação entre dois corpos de geometria multiplamente conexa, será analisado o caso da troca de calor entre dois corpos de comprimento infinito, cujas secções transversais podem ser representadas pelas regiões  $D_1$  e  $D_2$ , como pode ser visto na figura 2.

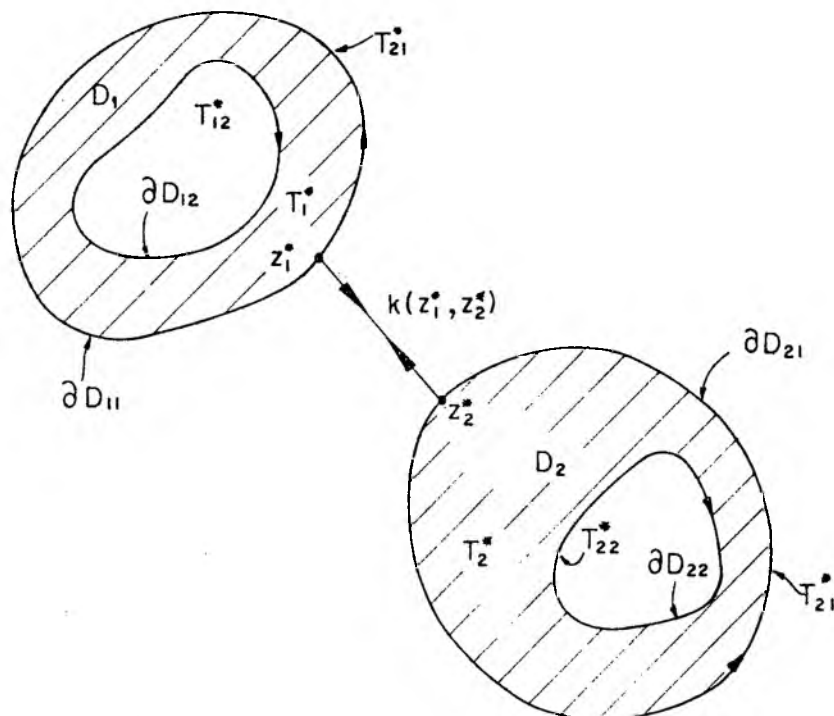


Fig. 2 - Configuração genérica do problema da transferência de calor entre dois corpos com secções transversais de geometria multiplamente conexa.

Sejam  $D_1$  e  $D_2$  duas regiões regulares, no sentido de Liapunov, e sejam  $\partial D_1$  e  $\partial D_2$  os contornos de  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente, coincidentes com as superfícies dos corpos em estudo.

A condução de calor nas regiões  $D_1$  e  $D_2$  é regida pela equação (2.1). As condições de contorno prescritas são do tipo de Dirichlet para as superfícies  $\partial D_{12}$  e  $\partial D_{22}$ . Para a região  $D_1$ , esta condição de contorno é definida por:

$$T_1^*(z) \Big|_{\partial D_{12}} = T_{12}^*(z), \quad \text{para } z \in \partial D_{12}; \quad (2.30)$$

onde  $T_{12}^*$  é uma distribuição de temperatura conhecida. Da mesma forma, para a região  $D_2$ , define-se

$$T_2^*(z) \Big|_{\partial D_{22}} = T_{22}^*(z), \quad \text{para } z \in \partial D_{22}; \quad (2.31)$$

onde  $T_{22}^*$  é uma distribuição de temperatura conhecida.

Para as superfícies  $\partial D_{11}$  e  $\partial D_{21}$ , fazendo-se um balanço de energia, chega-se a condições de contorno de caráter misto. Para a região  $D_1$ , obtém-se a seguinte condição de contorno:

$$\begin{aligned} -k_1 \frac{\partial T_1^*(z)}{\partial n} \Big|_{\partial D_{11}} &= h_1 [T_{11}^*(z) - T_a^*] + \sigma T_{11}^{*4}(z) - \\ &- \sigma \int_{\partial D_{21}} T_{21}^{*4}(z) K(z_1, z_2) ds(z_2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde o termo à esquerda do sinal de igualdade é a lei de Fourier para a condução, e  $k_1$  a condutibilidade térmica do material. Na equação (2.32), o termo

$$h_1 [T_{11}^*(z) - T_a^*], \quad \text{para } z \in \partial D_{11},$$

representa o calor local que entra ou sai da superfície  $\partial D_{11}$ , por unidade de área, trocado por convecção com o meio envolvente à temperatura  $T_a^*$ , onde  $h_1$  é o coeficiente de película local

na superfície  $\partial D_{11}$ . O termo

$$\sigma T_{11}^{*4}(z), \text{ para } z \in \partial D_{11},$$

representa o calor emitido por radiação a partir do ponto  $z$ , onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann. O termo

$$\sigma \int_{\partial D_{21}} T_{21}^{*4}(z_2) K(z_1, z_2) ds(z_2)$$

para  $z_1 \in \partial D_1$  e  $z_2 \in \partial D_2$ , representa o calor que chega por radiação à superfície  $\partial D_{11}$ , proveniente da superfície  $\partial D_{21}$ . Neste termo da equação,  $K(z_1, z_2) ds(z_2)$  é o fator de forma entre uma área elementar com largura  $ds(z_1)$  em torno do ponto  $z_1$  sobre  $\partial D_{11}$ , e uma área elementar com largura  $ds(z_2)$  em torno do ponto  $z_2$ , sobre  $\partial D_{21}$ . Esta definição é equivalente a (ver [15], página 122):

$$K(z_1, z_2) ds(z_2) = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi |z_1 - z_2|^2} ds(z_2); \quad (2.33)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos formados entre o vetor  $(z_1 - z_2)$  e as normais à  $\partial D_{11}$  no ponto  $z_1$ , e  $\partial D_{21}$  no ponto  $z_2$ , respectivamente.

Da mesma forma, para a região  $D_2$ , obtêm-se na superfície  $\partial D_{21}$ , a condição de contorno que segue:

$$\begin{aligned} -k_2 \left. \frac{\partial T_2^*(z)}{\partial n} \right|_{\partial D_{21}} &= h_2 [T_{21}^*(z) - T_a] + \sigma T_{21}^{*4}(z) - \\ &- \sigma \int_{\partial D_{11}} T_{11}^{*4} K(z_2, z_1) ds(z_1), \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde:  $k_2$  é a condutibilidade térmica do material que compõe o sólido cuja secção transversal é representada por  $D_2$ ;  $h_2$  é o coeficiente de película na superfície  $\partial D_{21}$ . O fator de forma

$K(z_2, z_1) ds(z_1)$  representa a proporção de energia radiante que sai da área elementar cuja largura é o arco  $ds(z_1)$  e atinge o elemento de superfície de largura  $ds(z_2)$ , com relação à energia radiante que sai de  $ds(z_1)$  no espaço hemisférico total sobre  $z_1$ .

Observando-se as condições de contorno (2.34) e (2.32), nota-se que os problemas a valores de contorno para as regiões  $D_1$  e  $D_2$  estão por estas acopladas.

Para generalizar a solução do problema, serão introduzidas variáveis adimensionais, como foi feito na obtenção das equações (2.4)-(2.6).

A condução de calor na região  $D_1$  é regida pela seguinte equação de Laplace:

$$\nabla^2 T_1(z) = 0, \quad \text{para } z \in D_1 \quad (2.35)$$

onde  $T_1 = T_1^*/T_r^*$  e  $z = z^*/L_r^*$ .

A condição de contorno (2.30), adimensionalizada passa a ser:

$$T_1(z) \Big|_{\partial D_{12}} = T_{12}(z), \quad z \in \partial D_{12} \quad (2.36)$$

onde  $T_{12} = T_{12}^*/T_r^*$ .

A condição de contorno (2.32) reduz-se a:

$$\frac{\partial T_1(z)}{\partial n} \Big|_{\partial D_{11}} = -Bi_1 [T_{11}(z) - T_a] - Nr_1 [T_{11}^4(z) - \int_{\partial D_{21}} T_{21}^4(z) K(z_1, z_2) ds(z_2)] , \quad (2.37)$$

onde  $T_{11} = T_{11}^*/T_r^*$ ,  $T_a = T_a^*/T_r^*$  e  $T_{21} = T_{21}^*/T_r^*$ . O parâmetro  $Bi_1 = h_1 L_r^*/k_1$  é o número de Biot para a região  $D_1$ . O número de Biot fornece a razão entre as resistências térmicas interna e externa a um corpo sólido, servindo como parâmetro de comparação entre os modos de transferência de calor por convecção e condução. Por exemplo, quanto maior o número de Biot, menor se-

rã, para a convecção pura, a diferença entre a temperatura da superfície externa do corpo e a temperatura ambiente. Logo, a medida que cresce o número de Biot, diminui a resistência térmica à convecção.

O grupo adimensional  $Nr_1 = \sigma T_r^{*3} L_r^*/k_1$  será chamado de Número de Radiação para a região  $D_1$ , de modo semelhante como em [3]. O Número de Radiação, definido desta forma, serve de parâmetro de comparação entre a troca de calor por radiação e condução.

Analogamente, para a região  $D_2$  o problema a valores de contorno dado por (2.4), (2.31) e (2.34), passa a ser:

$$\nabla^2 T_2(z) = 0, \quad z \in D_2; \quad (2.38)$$

$$T_2(z) \Big|_{\partial D_{22}} = T_{22}(z), \quad z \in \partial D_{22}; \quad (2.39)$$

e

$$\frac{\partial T_2(z)}{\partial n} \Big|_{\partial D_{21}} = - Bi_2 [T_{21}(z) - T_a] - Nr_2 [T_{21}^4(z) - \int_{\partial D_{11}} T_{11}^4(z_1) K(z_2, z_1) ds(z_1)] \quad (2.40)$$

onde  $Bi_2 = h_2 L_r^*/k_2$  e  $Nr_2 = \sigma T_r^{*3} L_r^*/k_2$ .

Adotando-se um procedimento semelhante ao da secção 2.1, as equações (2.35) e (2.38) podem ser transformadas em equações integrais. No caso de se fazer uso da função de Green fundamental, determina-se o seguinte conjunto de equações integrais:

$$\bar{T}_1(z) = \frac{1}{2} \int_{\partial D_{11}} G(z, z') a(z, z') ds(z') +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{\partial D_{12}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{11}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{11}(z') - \bar{T}_{11}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{12}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{12}(z') - \bar{T}_{12}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') \\
& \qquad \qquad \qquad z \in D_1; \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \bar{T}_{11}(z) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D_{11}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\partial D_{12}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{11}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{11}(z') - \bar{T}_{11}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{12}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{12}(z') - \bar{T}_{12}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z'), \\
& \qquad \qquad \qquad z \in \partial D_{11}; \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \bar{T}_{12}(z) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D_{11}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\partial D_{12}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{11}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{11}(z') - \bar{T}_{11}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{12}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{12}(z') - \bar{T}_{12}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') \\
& \qquad \qquad \qquad z \in \partial D_{12}, \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

para a região  $D_1$ . Da mesma forma, para a região  $D_2$ , determina-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_2(z) = & \frac{1}{2} \int_{\partial D_{21}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial D_{22}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
 & + \int_{\partial D_{21}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{21}(z') - \bar{T}_{21}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
 & + \int_{\partial D_{22}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{22}(z') - \bar{T}_{22}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z'), \\
 & z \in D_2; \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \bar{T}_{21}(z) = & \frac{1}{2} \int_{\partial D_{21}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial D_{22}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
 & + \int_{\partial D_{21}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{21}(z') - \bar{T}_{21}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
 & + \int_{\partial D_{22}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{22}(z') - \bar{T}_{22}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z'), \\
 & z \in \partial D_{21}; \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2} \bar{T}_{22}(z) = \frac{1}{2} \int_{\partial D_{21}} G(z, z') a(z, z') ds(z') +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{\partial D_{22}} G(z, z') a(z, z') ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{21}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{21}(z') - \bar{T}_{21}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{22}} \left\{ \left[ G(z, z') - \frac{1}{4\pi} \right] \partial \bar{T}_{22}(z') - \bar{T}_{22}(z') \partial G(z, z') \right\} ds(z'), \\
& z \in \partial D_{21}. \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Logo, as equações integrais sobre  $\partial D_{11}$ ,  $\partial D_{12}$ ,  $\partial D_{21}$  e  $\partial D_{22}$ , ou seja, as equações integrais (2.42), (2.43), (2.45) e (2.46), respectivamente, juntamente com as condições de contorno (2.36)-(2.37) e (2.39)-(2.40), possibilitam o cálculo das distribuições de temperatura  $T_{11}$ ,  $T_{21}$  em  $\partial D_{11}$  e  $\partial D_{21}$ . Estas mesmas equações fornecem a solução para o fluxo de calor, calculado a partir de  $\partial T_{12}$  e  $\partial T_{22}$ , em  $\partial D_{12}$  e  $\partial D_{22}$ . Uma vez determinados estes valores, as equações (2.41) e (2.44) podem ser usadas para calcular a temperatura em pontos no interior de  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente.

No caso de se fazer uso de funções de Green incompletas, determinam-se, para a região  $D_1$ , as seguintes equações integrais:

$$\begin{aligned}
T_1(z) &= \int_{\partial D_{11}} [g_1(z, z') \partial T_{11}(z') - T_{11}(z') \partial g_1(z, z')] ds(z') - \\
&- \int_{\partial D_{12}} T_{12}(z') \partial g_1(z, z') ds(z'), \quad z \in D_1; \quad (2.47)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2} T_{11}(z) = \int_{\partial D_{11}} [g_1(z, z') \partial T_{11}(z') - T_{11}(z') \partial g_1(z, z')] ds(z') -$$



$$- \int_{\partial D_{12}} T_{12}(z') \partial g_1(z, z') ds(z'), \quad z \in \partial D_{11}, \quad (2.48)$$

onde  $g_1(z, z')$  é a função de Green incompleta para a região  $D_1$ , determinada como em (A.21)-(A.22). Da mesma forma, para a região  $D_2$ , obtém-se as equações integrais que seguem:

$$T_2(z) = \int_{\partial D_{21}} [g_2(z, z') \partial T_{21}(z') - T_{21}(z') \partial g_2(z, z')] ds(z') - \int_{\partial D_{22}} T_{22}(z') \partial g_2(z, z') ds(z'), \quad z \in D_2; \quad (2.49)$$

e

$$\frac{1}{2} T_{21}(z) = \int_{\partial D_{21}} [g_2(z, z') \partial T_{21}(z') - T_{21}(z') \partial g_2(z, z')] ds(z') - \int_{\partial D_{22}} T_{22}(z') \partial g_2(z, z') ds(z'), \quad z \in \partial D_{21}, \quad (2.50)$$

onde  $g_2(z, z')$  é a função de Green incompleta para a região  $D_2$ , determinada como em (A.21)-(A.22).

Quando são utilizadas funções de Green incompletas, as equações integrais sobre  $\partial D_{11}$  e  $\partial D_{21}$ , isto é, as equações integrais (2.48) e (2.50), respectivamente, em conjunto com as condições de contorno (2.36)-(2.37) e (2.39)-(2.40), possibilitam o cálculo das distribuições de temperatura  $T_{11}$  e  $T_{21}$ , que agora são as funções incógnitas. Conhecidas as distribuições  $T_{11}$  e  $T_{21}$ , por meio das equações (2.47) e (2.50), pode-se calcular a distribuição de temperatura no interior de  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente.

### 3. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Um esquema eficiente para a solução numérica da transferência de calor bidimensional em regiões simplesmente conexas, fazendo uso do método de equações integrais e da função de Green fundamental, pode ser encontrado em [5].

Como já foi observado na secção 2.2, todas as equações integrais obtidas na formulação do problema bidimensional, são formadas por integrais de linha. O esquema numérico utilizado neste trabalho, consiste em discretizar estas equações, pelo uso do Teorema da Média, integrando-as numericamente no contorno.

Para discretizar as equações, divide-se o contorno da região  $D_1$  do seguinte modo:  $\partial D_{11}$  em  $N_{11}$  segmentos de arco e  $\partial D_{12}$  em  $N_{12}$  segmentos. O contorno da região  $D_2$  é dividido como segue:  $\partial D_{21}$  em  $N_{21}$  segmentos e  $\partial D_{22}$  em  $N_{22}$  segmentos. Para cada segmento de arco existe um ponto nodal primário correspondente, de modo que o contorno de  $D_1$  comportará  $N_{11} + N_{12}$  pontos nodais e o contorno de  $D_2$  comportará  $N_{21} + N_{22}$  pontos nodais primários.

As funções  $T(z)$ ,  $\partial T(z)$ ,  $g(z, z')$ ,  $\partial g(z, z')$ ,  $G(z, z')$  e  $\partial G(z, z')$  são contínuas no intervalo de integração, que agora serão os segmentos de arco resultantes da divisão dos contornos, enquanto que as funções  $g(z, z')$ ,  $\partial g(z, z')$ ,  $G(z, z')$  e  $\partial G(z, z')$ , são localmente integráveis. Portanto, nas equações integrais obtidas na formulação pode-se usar o Teorema da Média para integrais, e o sistema de equações integrais não lineares, que fornece a solução para o problema abordado, pode ser transformado num sistema de equações algébricas.

As funções  $g(z, z')$ ,  $\partial g(z, z')$ ,  $G(z, z')$  e  $\partial G(z, z')$  devem ser integradas numericamente em torno de cada ponto nodal primário. Para tal, cada contorno será sub-dividido como pode ser visto na figura 3.

Na secção 2.2 foram analisados dois casos no desenvolvimento da formulação do problema proposto, obtendo-se dois sistemas de equações integrais distintos. O sistema formado pelas equações do tipo (2.42), (2.43), (2.45) e (2.46), deve ser utilizado com a função de Green fundamental. O sistema formado pelas equações do tipo (2.48) e (2.50), deve ser usado com fun-

ções de Green incompletas.

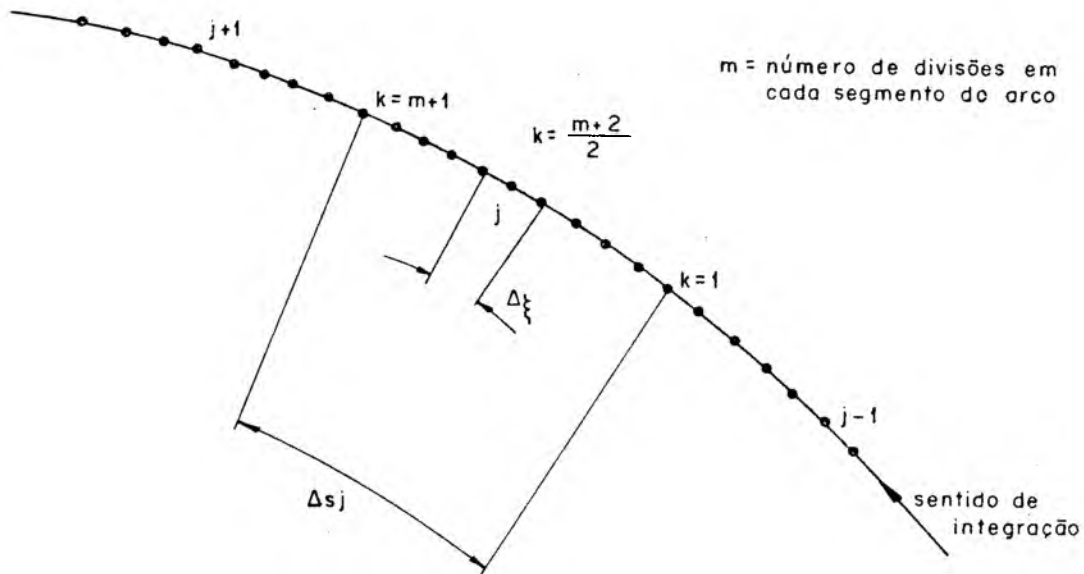


Fig. 3 - Discretização usual sobre um contorno.

Discretizando-se as equações do tipo (2.42), (2.43) (2.45) e (2.46), obtêm-se, na ordem correspondente, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{T}_{11}(z_i) &= \sum_{j=1}^{N_{11}} \partial \bar{T}_{11}(z_j) A_{ij}^{111} - \sum_{j=1}^{N_{11}} \bar{T}_{11}(z_j) B_{ij}^{111} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{12}} \partial \bar{T}_{12}(z_j) A_{ij}^{112} - \sum_{j=1}^{N_{12}} \bar{T}_{12}(z_j) B_{ij}^{112} + I_i^{111} + I_i^{112}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{T}_{12}(z_i) &= \sum_{j=1}^{N_{11}} \partial \bar{T}_{11}(z_j) A_{ij}^{121} - \sum_{j=1}^{N_{11}} \bar{T}_{11}(z_j) B_{ij}^{121} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{12}} \partial \bar{T}_{12}(z_j) A_{ij}^{122} - \sum_{j=1}^{N_{12}} \bar{T}_{12}(z_j) B_{ij}^{122} + I_i^{121} + I_i^{122}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{T}_{21}(z_i) &= \sum_{j=1}^{N_{21}} \partial \bar{T}_{21}(z_j) A_{ij}^{211} - \sum_{j=1}^{N_{21}} \bar{T}_{21}(z_j) B_{ij}^{211} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{22}} \partial \bar{T}_{22}(z_j) A_{ij}^{212} - \sum_{j=1}^{N_{22}} \bar{T}_{22}(z_j) B_{ij}^{212} + I_i^{211} + I_i^{212}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{T}_{22}(z_i) &= \sum_{j=1}^{N_{21}} \partial \bar{T}_{21}(z_j) A_{ij}^{221} - \sum_{j=1}^{N_{21}} \bar{T}_{21}(z_j) B_{ij}^{221} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{22}} \partial \bar{T}_{22}(z_j) A_{ij}^{222} - \sum_{j=1}^{N_{22}} \bar{T}_{22}(z_j) B_{ij}^{222} + I_i^{221} + I_i^{222}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde os elementos das matrizes  $A_{ij}^{mnp}$  são dados por

$$A_{ij}^{mnp} = \int_{\Delta s_j} \left[ G(z_i, z') - \frac{1}{4\pi} \right] ds(z'), \quad z_i \in \partial D_{mn} \quad \text{e} \quad z' \in \partial D_{mp}; \quad \dots \quad (3.5)$$

os elementos das matrizes  $B_{ij}^{mnp}$  são dados por

$$B_{ij}^{mnp} = \int_{\Delta s_j} \partial G(z_i, z') ds(z'), \quad z_i \in \partial D_{mn} \quad \text{e} \quad z' \in \partial D_{mp}; \quad (3.6)$$

finalmente, os elementos dos vetores  $I_i^{mnp}$  são dados por

$$I_i^{mnp} = \int_{D_{mp}} \frac{1}{2} G(z_i, z') a(z_i, z') ds(z'), \quad z_i \in \partial D_{mn} \text{ e} \quad (3.7)$$

$$z' \in \partial D_{mp}.$$

A função de Green fundamental para o problema bidimensional,  $G$ , e sua derivada normal,  $\partial G$ , estão definidas em (A.17) e (A.18). Observa-se que no integrando de  $A_{ij}^{mnp}$  e  $B_{ij}^{mnp}$ , para  $n = p$ , surgirão singularidades quando  $i = j$ , pois  $z$  e  $z'$  estarão sobre o mesmo contorno e no intervalo  $\Delta s_i$ ,  $z'$  tende a  $z_i$  (ver figura 3). Adotando-se o mesmo procedimento apresentado em [10] estas singularidades podem ser contornadas.

Quando  $z'$  tende a  $z_i$ , pode-se definir um arco finito, tal que  $|z_i - z'| = s$ . Logo,

$$\int_{s^-}^{s^+} -\frac{1}{2\pi} \ln |z_i - z'| ds(z') = -\frac{1}{2\pi} \int_{s^-}^{s^+} \ln s ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} [s^+ (\ln s^+ - 1) - s^- (\ln s^- - 1)], \quad (3.8)$$

onde  $(s^+ - s^-) = \Delta \xi$  (ver figura 3).

Por outro lado, pode-se mostrar que quanto  $z$  tende a  $z_i$ ,

$$\lim_{z' \rightarrow z_i} \partial G(z_i, z') = \frac{1}{2\pi} \lim_{z' \rightarrow z_i} \frac{(z_i - z') \cdot n'}{|z_i - z'|^2} = \frac{1}{4\pi} k(z') \quad (3.9)$$

onde  $k(z')$  é a curvatura do contorno no ponto  $z'$ .

O mesmo procedimento deve ser utilizado no cálculo dos vetores  $I_i^{mnp}$ , quando  $n = p$ .

Estão definidas agora  $N_{11}$  equações do tipo (3.1),  $N_{12}$  equações do tipo (3.2),  $N_{21}$  equações do tipo (3.3) e  $N_{22}$  equações do tipo (3.4), para  $N_{11}$  incógnitas  $\bar{T}_{11}$ ,  $N_{12}$  incógnitas  $\partial \bar{T}_{12}$ ,  $N_{21}$  incógnitas  $\bar{T}_{21}$  e  $N_{22}$  incógnitas  $\partial \bar{T}_{22}$ . Portanto, necessita-se resolver um sistema de equações não-lineares, com  $N_{11} + N_{12} + N_{21} + N_{22}$  equações, e igual número de incógnitas. Um

método numérico apropriado para resolver tal sistema é o método de Newton-Raphson, descrito detalhadamente em [13].

As equações do tipo (2.51)-(2.54) podem ser escritas na forma matricial, como são apresentadas a seguir:

$$\left(\frac{1}{2} |1| + |B^{111}| \right) |\bar{T}_{11}| - |A^{111}| |\partial \bar{T}_{11}| - |A^{112}| |\partial \bar{T}_{12}| + |C^{11}| = 0 \quad \dots (3.10)$$

$$|B^{121}| |\bar{T}_{11}| - |A^{121}| |\partial \bar{T}_{11}| - |A^{122}| |\partial \bar{T}_{12}| + |C^{12}| = 0 \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{1}{2} |1| + |B^{211}| \right) |\bar{T}_{21}| - |A^{211}| |\partial \bar{T}_{21}| - |A^{212}| |\partial \bar{T}_{22}| + |C^{21}| = 0 \quad \dots (3.12)$$

$$|B^{221}| |\bar{T}_{21}| - |A^{221}| |\partial \bar{T}_{21}| - |A^{222}| |\partial \bar{T}_{22}| + |C^{22}| = 0 \quad (3.13)$$

onde

$$|C^{11}| = |B^{112}| |\bar{T}_{12}| + |I^{111}| + |I^{112}|; \quad (3.14)$$

$$|C^{12}| = \left(\frac{1}{2} |1| + |B^{122}| \right) |\bar{T}_{12}| + |I^{121}| + |I^{122}|; \quad (3.15)$$

$$|C^{21}| = |B^{212}| |\bar{T}_{22}| + |I^{211}| + |I^{212}|; \quad (3.16)$$

$$|C^{22}| = \left(\frac{1}{2} |1| + |B^{222}| \right) |\bar{T}_{22}| + |I^{221}| + |I^{222}|. \quad (3.17)$$

Nestas equações a matriz  $|1|$  é a matriz identidade,  $|\bar{T}_{mn}|$ ,  $|\partial \bar{T}_{mn}|$  e  $|I^{mnp}|$  são as matrizes coluna dos elementos  $\bar{T}_{mn}(z_i)$ ,  $\partial \bar{T}_{mn}(z_i)$  e  $I_i^{mnp}$ , respectivamente;  $|A^{mnp}|$  e  $|B^{mnp}|$  são as matrizes quadradas dos elementos  $A_{ij}^{mnp}$  e  $B_{ij}^{mnp}$ , respectivamente. As matrizes  $|C^{mn}|$  podem ser calculadas antecipadamente por serem

constantes, pois dependem unicamente de  $\bar{T}_{12}(z_i)$  e  $\bar{T}_{22}(z_i)$ , que são dadas pelas equações de contorno (2.36) e (2.39), respectivamente, e das matrizes  $|I^{mnp}|$  que dependem somente da geometria.

No caso de se fazer uso de funções de Green incompletas, o sistema a ser resolvido é formado por equações do tipo (2.48) e (2.50). Discretizando-se estas equações, obtém-se, na ordem correspondente, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_{11}(z_i) &= \sum_{j=1}^{N_{11}} \partial T_{11}(z_j) A_{ij}^{111} - \sum_{j=1}^{N_{11}} T_{11}(z_j) B_{ij}^{111} - \\ &- \sum_{j=1}^{N_{12}} T_{12}(z_j) B_{ij}^{112}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_{21}(z_i) &= \sum_{j=1}^{N_{21}} \partial T_{21}(z_j) A_{ij}^{211} - \sum_{j=1}^{N_{21}} T_{21}(z_j) B_{ij}^{211} - \\ &- \sum_{j=1}^{N_{22}} T_{22}(z_j) B_{ij}^{212}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde os elementos das matrizes  $A_{ij}^{mnp}$  são dados por

$$A_{ij}^{mnp} = \int_{\Delta s_j} g_m(z_i, z') ds(z'), \quad z_i \in \partial D_{mn} \text{ e } z' \in \partial D_{mp} \quad (3.20)$$

e os elementos das matrizes  $B_{ij}^{mnp}$  são dados por

$$B_{ij}^{mnp} = \int_{\Delta s_j} \partial g_m(z_i, z') ds(z'), \quad z_i \in \partial D_{mn} \text{ e } z' \in \partial D_{mp}; \quad (3.21)$$

sendo  $g_m(z, z')$  a função de Green incompleta para a região  $D_m$ , definida como em (A.21)-(A.22).

Estão definidas agora  $N_{11}$  equações do tipo (3.18) e  $N_{21}$  equações do tipo (3.19), para  $N_{11}$  incógnitas  $T_{11}$  e  $N_{21}$  incógnitas  $T_{21}$ . Estas equações podem ser escritas na forma matricial como segue:

$$\left(\frac{1}{2} |1| + |B^{111}| \right) |T_{11}| - |A^{111}| |\partial T_{11}| + |B^{112}| |T_{12}| = 0; \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{1}{2} |1| + |B^{211}| \right) |T_{21}| - |A^{211}| |\partial T_{21}| + |B^{212}| |T_{22}| = 0; \quad (3.23)$$

onde os produtos  $|B^{mn2}| |T_{m2}|$  são conhecidos.

Resumindo, a solução do problema da transferência de calor por radiação entre dois corpos de geometria multiplamente conexa, com as condições de contorno (2.36), (2.37), (2.39) e (2.40), reduz-se à solução dos seguintes sistemas de equações:

a. Utilizando-se funções de Green incompletas, o sistema de equações é formado por:

$$(3.22), \quad \left(\frac{1}{2} |1| + |B^{111}| \right) |T_{11}| - |A^{111}| |\partial T_{11}| + |B^{112}| |T_{12}| = 0;$$

$$(3.23), \quad \left(\frac{1}{2} |1| + |B^{211}| \right) |T_{21}| - |A^{211}| |\partial T_{21}| + |B^{212}| |T_{22}| = 0$$

... (3.24)

b. Utilizando-se a função de Green fundamental, o sistema de equações é formado por:

$$(3.10), \quad \left(\frac{1}{2} |1| + |B^{111}| \right) |\bar{T}_{11}| - |A^{111}| |\partial \bar{T}_{11}| - |A^{112}| |\partial \bar{T}_{12}| +$$



$$+ |C^{11}| = 0;$$

$$(3.11), |B^{121}| |\bar{T}_{11}| - |A^{121}| |\partial \bar{T}_{11}| - |A^{122}| |\partial \bar{T}_{12}| + |C^{12}| = 0$$

$$(3.12), \left(\frac{1}{2} |1| + |B^{211}| \right) |\bar{T}_{21}| - |A^{211}| |\partial \bar{T}_{21}| - |A^{212}| |\partial \bar{T}_{22}| +$$

$$+ |C^{21}| = 0;$$

$$\text{e (3.13), } |B^{221}| |\bar{T}_{21}| - |A^{221}| |\partial \bar{T}_{21}| - |A^{222}| |\partial \bar{T}_{22}| + |C^{22}| = 0$$

...(3.25)

À primeira vista o sistema (3.25) tem maior número de equações. No entanto, as matrizes  $|A^{mnp}|$  são inversíveis, como pode ser visto em [16], e as equações do tipo (3.11) e (3.13) podem substituir  $|\partial \bar{T}_{12}|$  e  $|\partial \bar{T}_{22}|$  nas equações do tipo (3.10) e (3.12), respectivamente. O sistema (3.25) pode ter então, o mesmo número de equações que o sistema (3.24). Contudo, quando é utilizada a função de Green fundamental, o número de matrizes de coeficientes que devem ser calculadas é muito maior do que o necessário no caso de serem utilizadas funções de Green incompletas.

## 4. LIMITES IMPORTANTES E EFICIÊNCIA DA TROCA DE CALOR POR RADIAÇÃO

Para se determinar qual a amplitude da influência da condutibilidade térmica na troca de calor por radiação, serão examinados alguns casos extremos.

Considere-se, por exemplo, o caso da transferência de calor entre dois corpos, cuja geometria é definida na figura 2. Sejam  $T_{12}(z)$  e  $T_{21}(z)$  conhecidas e uniformes sobre  $\partial D_{12}$  e  $\partial D_{21}$ , respectivamente, com  $T_{21}$  maior que  $T_{12}$ .

Se a condutibilidade térmica do material do corpo cuja secção transversal é representada pela região  $D_1$  é infinita, a temperatura no contorno externo  $T_{11}(z)$  certamente será igual à temperatura no contorno interno. Então, neste caso, a temperatura da superfície externa não sofre influência alguma da temperatura da superfície  $\partial D_{21}$ ,  $T_{21}$ .

Agora, supondo-se que a condutibilidade térmica em  $D_1$  seja nula, é fácil ver que não existe condução de calor em  $D_1$ . Fazendo-se uma análise das equações integrais obtidas na secção 2.2, é possível obter-se uma previsão da distribuição de temperatura na superfície externa de  $D_1$ , quando a condutibilidade térmica do material desta região tende a zero.

No problema dado, a equação integral sobre o contorno  $\partial D_{11}$ , para o caso de utilizar funções de Green incompletas é a equação (2.48), que pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_{11}(z) = & \int_{\partial D_{11}} [g_1(z, z') \{-Bi_1 [T_{11}(z') - T_a] - Nr_1 [T_{11}^4(z') - \\ & - \int_{\partial D_{21}} T_{21}^4(z_2) K(z_1, z_2) ds(z_2)]\} - T_{11}(z') \cdot \\ & \cdot \partial g_1(z, z')] ds(z') - \int_{\partial D_{12}} T_{12}(z') \partial g_1(z, z') ds(z') \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dividindo-se esta equação por  $Nr_1$  e fazendo-se  $k_1$  ten

der a zero, isto é,  $Nr_1$  tender a infinito, resulta:

$$\int_{\partial D_{11}} g_1(z, z') [T_{11}^4(z') - \int_{\partial D_{21}} T_{21}^4(z_2) K(z_1, z_2) ds(z_2)] ds(z') = 0 \quad \dots (4.2)$$

Como pode ser visto em [16], para a igualdade (4.2) pode-se escrever:

$$T_{11}(z_1) = \left[ \int_{\partial D_{21}} T_{21}^4(z_2) K(z_1, z_2) ds(z_2) \right]^{1/4} \quad (4.3)$$

Pode-se concluir então que, para um número de radiação infinito, ou seja, uma condutibilidade térmica nula, a temperatura da superfície  $\partial D_{11}$  depende unicamente da temperatura das superfícies que a cercam, neste caso, da superfície  $\partial D_{21}$ .

Portanto, a distribuição de temperatura na superfície externa de um corpo pode variar entre a temperatura de sua superfície interna, para condutibilidade infinita, e uma distribuição de temperatura que é função somente da temperatura de superfícies com as quais troca calor por radiação.

#### 4.1 - Eficiência da Troca de Calor por Radiação como Função da Condutibilidade Térmica.

Ao serem abordados problemas de transferência de calor por radiação, considerando-se a condutibilidade térmica dos materiais, é possível analisar-se a influência da condutibilidade térmica, através da seguinte função:

$$\Psi(Nr) = \bar{q}(Nr)/Nr \quad (4.4)$$

onde, para a radiação pura na superfície  $\partial D_{11}$ , por exemplo,

$$\bar{q}(Nr_1) = - \int_{\partial D_{11}} \partial T_{11}(z) ds(z), \text{ ou}$$

$$\bar{q} = \frac{Nr_1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} [T_{11}^4(z) - \int_{\partial D_{21}} T_{21}^4(z') K(z, z') ds(z')] ds(z); \quad (4.5)$$

e

$$L(\partial D_{11}) = \int_{\partial D_{11}} ds,$$

é o comprimento de  $\partial D_{11}$ .

Combinando-se as equações (4.5) e (4.4), obtém-se

$$\Psi(Nr_1) = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} [T_{11}^4(z) - \int_{\partial D_{21}} T_{21}^4(z') K(z, z') ds(z')] ds(z) \quad \dots(4.6)$$

Como é fácil ver, comparando-se a equação (4.6) com a condição de contorno sobre  $\partial D_{11}$ , para a radiação pura,

$$q^* = -k_1 \frac{\partial T_{11}^*(z)}{\partial \underline{n}} = \sigma [T_{11}^{*4}(z) - \int_{\partial D_{11}} T_{21}^{*4}(z') K(z, z') ds(z')], \quad (4.7)$$

a função  $\Psi$  pode ser escrita como segue:

$$\Psi(Nr_1) = \bar{q}^*/\sigma T_r^{*4}, \quad (4.8)$$

onde  $\bar{q}^*$  é o fluxo médio de calor que passa por  $\partial D_{11}$  por radiação. Portanto, a função  $\Psi$  tem relação direta com o fluxo real de calor que passa por  $\partial D_{11}$ , sendo um parâmetro de significado físico relevante.

O efeito da condutibilidade térmica de um sólido, na

transferência de calor por radiação pode ser compreendido mais facilmente se for conhecida a seguinte relação:

$$\xi(Nr) = \frac{\Psi(Nr)}{\Psi(0)} \quad (4.9)$$

como função do Número de Radiação, Nr.

O parâmetro  $\Psi(0)$  representa o fluxo médio de calor que passa por  $\partial D_{11}$ , por radiação, para um material com condutibilidade térmica infinita. Como para este caso a resistência ao fluxo de calor é mínima, portanto este assume um valor máximo, a relação  $\xi(Nr)$  pode ser definida como uma eficiência na transferência de calor.

Quando se considera a troca de calor por convecção combinada com a radiação, a função  $\Psi$  passa a ser definida da seguinte forma:

$$\Psi(Nr, Bi) = \bar{q}(Nr, Bi)/Nr, \quad (4.10)$$

onde, para a superfície  $\partial D_{11}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{q}(Nr, Bi) = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} \{ Bi_1 [T_{11}(z) - T_a] + Nr_1 [T_{11}^4(z) - \\ - \int_{\partial D_{11}} T_{21}^4(z') K(z', z') ds(z')] \} ds(z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Um outro parâmetro relevante em problemas de transferência de calor por radiação, é o calor líquido trocado por radiação entre duas superfícies. Considerando-se o problema abordado na secção 2.2, o calor líquido trocado por radiação entre dois arcos infinitesimais sobre as superfícies  $\partial D_{11}$  e  $\partial D_{21}$ , como pode ser visto em [9], é dado por:

$$d^2q^* = \sigma [T_{11}^{*4}(z) - T_{21}^{*4}(z')] K(z', z) ds(z') ds(z) \quad (4.12)$$

O fluxo médio do calor líquido trocado por radiação é obtido pela expressão

$$\Delta \bar{q}^* = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} \int_{\partial D_{21}} \sigma [T_{11}^*(z) - T_{21}^*(z')] K(z', z) ds(z') ds(z) \quad \dots(4.13)$$

A exemplo da definição (4.4), é possível analisar-se a influência da condutibilidade térmica no calor líquido trocado por radiação entre duas superfícies, utilizando-se a relação

$$\phi(Nr) = \Delta \bar{q}(Nr) / Nr, \quad (4.14)$$

onde, tomando-se como referência a superfície  $\partial D_{11}$ ,

$$\frac{\Delta \bar{q}(Nr_1)}{Nr_1} = \frac{\Delta \bar{q}^*}{\sigma T_r^{*4}} \quad (4.15)$$

Deste modo, pode-se definir um rendimento para o calor trocado por radiação entre duas superfícies, como sendo

$$\eta(Nr) = \frac{\phi(Nr)}{\phi(0)} \quad (4.16)$$

onde  $\phi(0)$  é obtida para condutibilidade térmica infinita.

Para o problema da secção 2.3, considerando-se a condutibilidade térmica infinita no interior de  $D_1$  e  $D_2$ , resulta para a equação (4.14), a seguinte equação limite:

$$\phi(0) = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} \int_{\partial D_{21}} [T_{12}^4 - T_{22}^4] K(z, z') ds(z') ds(z) \quad (4.17)$$

onde  $T_{12}$  e  $T_{22}$  são tais que

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\partial D_{12}} = \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\partial D_{21}} = 0$$

e são obtidas das condições de contorno (2.30) e (2.31). Neste caso particular as equações integrais tornam-se lineares.

## 5. APLICAÇÃO DO MÉTODO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são abordados dois problemas de transferência de calor com radiação, condução e convecção combinadas.

No âmbito deste trabalho são vários os objetivos traçados ao serem abordados estes problemas:

- a. Aplicar o método numérico de solução, verificando-se a precisão dos resultados obtidos.
- b. Verificar as vantagens e desvantagens do uso de funções de Green incompletas e da função de Green fundamental.
- c. Examinar a influência do número de radiação na distribuição de temperatura na superfície dos corpos, e no calor trocado entre os mesmos.

### 5.1 - Troca de Calor por Radiação entre Parede Cilíndrica e Placa Plana Isotérmica.

Para se averiguar a precisão do método de equações integrais e do esquema numérico de solução, é conveniente a resolução de um problema de configuração mais simples, para o qual se encontrem resultados obtidos anteriormente, ou que este tenha solução analítica conhecida.

Considere-se o problema da transferência de calor entre uma parede cilíndrica espessa e uma placa plana isotérmica de largura finita  $2B^*$  (ver figura 4).

Supondo-se que o comprimento do cilindro e da placa são infinitos, e que são válidas todas as hipóteses simplificativas citadas na secção 2.1, este problema pode ser considerado um caso particular do problema proposto na secção 2.2.

Considerando-se a temperatura da superfície interna do cilindro constante e, na superfície externa, transferência de calor por radiação e convecção combinadas, as condições de



contorno para este problema serão semelhantes à (2.30) e (2.32).

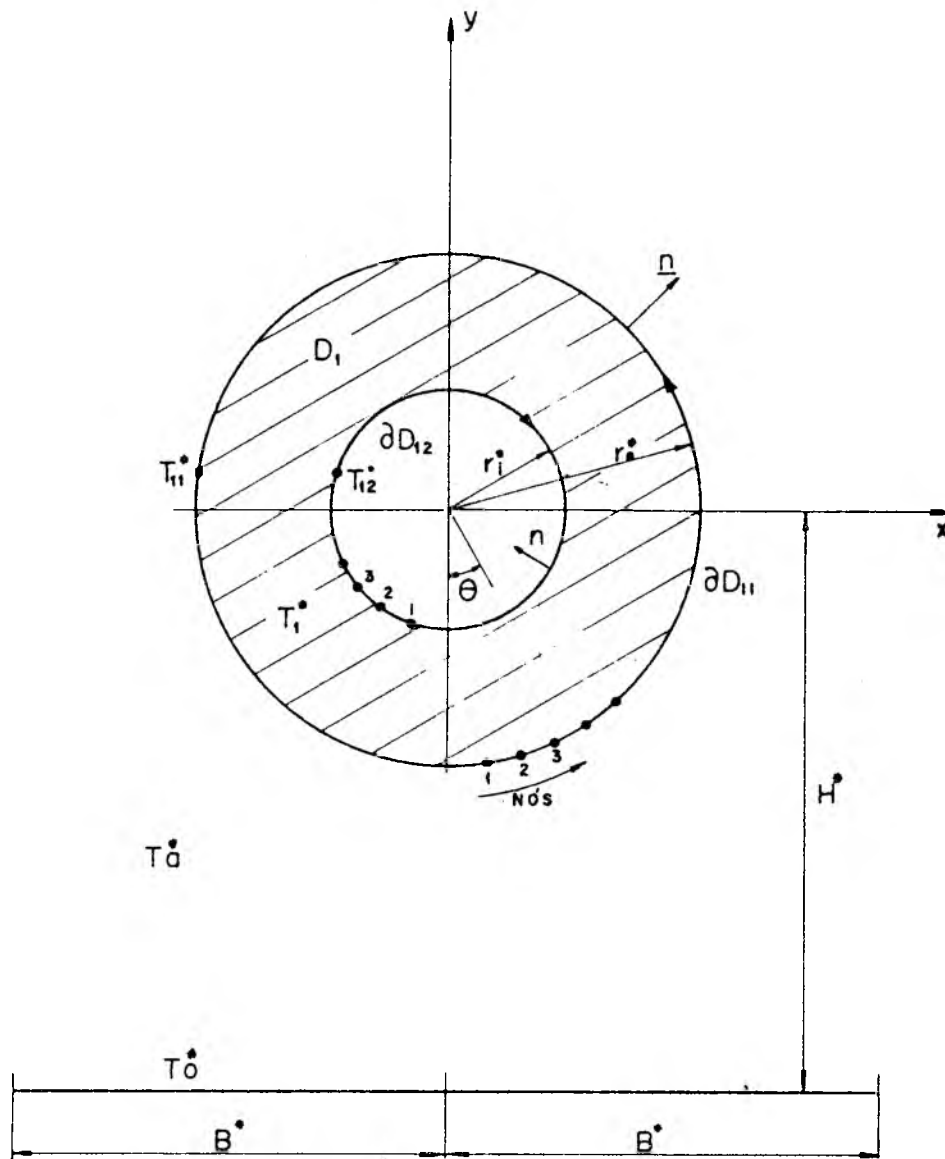


Fig. 4 - Geometria do problema.

Adotando-se como temperatura de referência a temperatura da placa,  $T_0^*$ , e como comprimento de referência o raio externo do cilindro,  $r_e^*$ , estas condições de contorno podem ser escritas como segue:

$$T_{12}(z) = T_i = \text{constante}, \quad z \in \partial D_{12} \quad (5.1)$$

e

$$\partial T_{11}(z) = -Bi_1 [T_{11}(z) - T_a] - Nr_1 [T_{11}^4(z) - K(z,s)], \quad (5.2)$$

$z \in \partial D_{11}$ , onde  $K(z,s)$  é o fator de forma entre um ponto na superfície do cilindro e a superfície da placa,  $S$ .

A solução deste problema é obtida pela resolução do sistema de equações (3.24), para o caso de se fazer uso de uma função de Green incompleta (função de Green para o círculo de raio  $r_i$ , ver Apêndice A).

Quando se utiliza a função de Green fundamental, a solução deste problema é dada pelo sistema (3.25).

Para o caso do cilindro com furo concêntrico trocando calor por convecção com o meio ambiente, ou seja, sem a presença da placa, a solução analítica é simples (ver Apêndice B), e os resultados numéricos concordam perfeitamente com os resultados analíticos. O erro máximo no cálculo da temperatura da superfície externa, no esquema numérico com a função de Green fundamental, foi da ordem de 0,001%. Para o esquema numérico com a função de Green incompleta, o erro máximo foi da ordem de 0,0003% como pode ser visto no quadro 1.

A precisão do método numérico melhora com o aumento do número de nós, ou pontos nodais sobre o contorno da região em estudo. No entanto, o número de pontos nodais adotados é uma solução de compromisso entre a precisão desejada, o tempo de processamento e o espaço alocado no computador. Na solução do problema proposto neste secção, foram considerados muito bons os resultados obtidos por ambos os métodos, utilizando-se a função de Green fundamental e utilizando-se a função de Green para o círculo de raio  $r_i$ , para 32 nós no contorno externo e 16 nós no contorno interno, com 10 divisões em cada intervalo (ver figura 3).

O método numérico com a função de Green incompleta, além de fornecer resultados mais precisos, usa menos espaço no computador e é processado em menos tempo. Por apresentar estas vantagens utilizou-se este método na obtenção dos resultados

subsequentes. Embora tenha sido preterido, convém lembrar que o método numérico que faz uso da função de Green fundamental é realmente útil na solução de problemas com geometria mais geral.

$Bi_1 = 10,0$ $T_i = 0,5$ $r_i = 0,5$			
NO	MÉT. ANALÍTICO	MÉT. GREEN FUND.	MÉT. GREEN INC.
1	T=0,9369600	T=0,9370334	T=0,9369627
2	0,9369600	0,9369336	0,9369622
3	0,9369600	0,9369881	0,9369631
4	0,9369600	0,9368888	0,9369627
5	0,9369600	0,9370330	0,9360627
6	0,9369600	0,9369337	0,9369629
7	0,9369600	0,9369879	0,9369628
8	0,9369600	0,9368888	0,9369626
9	0,9369600	0,9370325	0,9369630
10	0,9369600	0,9369335	0,9369628
11	0,9369600	0,9369880	0,9369625
12	0,9369600	0,9368885	0,9369630
13	0,9369600	0,9370329	0,9369627
14	0,9369600	0,9369333	0,9369630
15	0,9369600	0,9369878	0,9369625
16	0,9369600	0,9368887	0,9369628

QUADRO 1 - Comparação entre o resultado analítico e resultados obtidos com função de Green Fundamental e função de Green para o círculo, para a temperatura superficial do cilindro concêntrico trocando calor por convecção com o ambiente.

A convergência do método iterativo usado para resolver o sistema de equações não lineares depende fundamentalmente da distribuição de temperatura arbitrada. Supondo-se a temperatura da placa,  $T_0$ , maior que a temperatura da superfície interna do cilindro,  $T_i$ , é razoável arbitrar-se uma distribuição inicial uniforme, entre  $T_0$  e  $T_i$ . Para testar a convergência do método, foram arbitradas diversas distribuições iniciais de temperatura, como pode ser visto nas figuras 5 a 8. Sabendo-se que

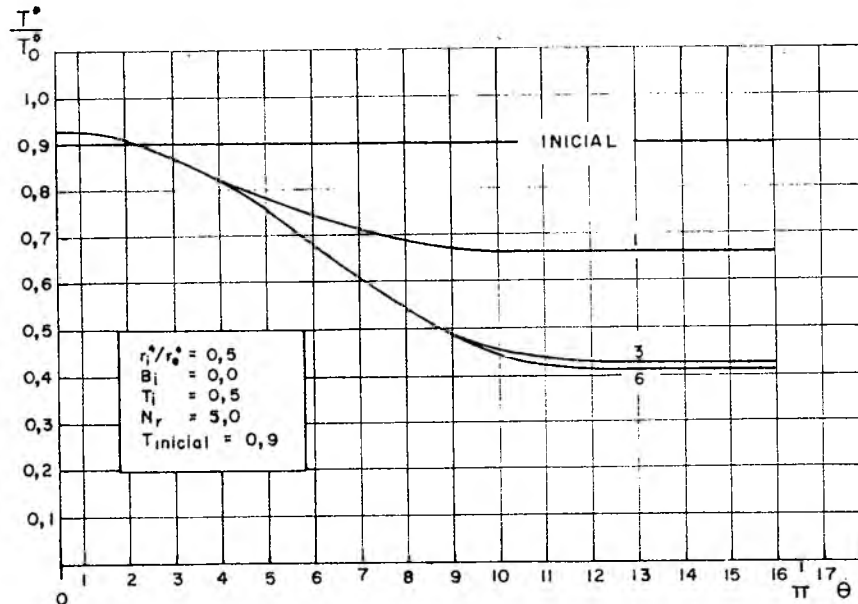


Fig. 5 - Convergência do método para  $T_{inicial} = 0,9$ .

temperaturas dos pontos sobre a superfície  $\partial D_{11}$  devem ser todas da mesma ordem de grandeza, foi utilizado o seguinte critério de convergência:

$$\left| \left\{ \sum_{j=1}^{N_{11}} [T_{11}(z_j)]_{t-1}^2 \right\}^{1/2} - \left\{ \sum_{j=1}^{N_{11}} [T_{11}(z_j)]_t^2 \right\}^{1/2} \right| \leq \epsilon \quad (5.3)$$

onde  $t$  é o número da iteração e  $\epsilon$  é o valor da tolerância (da ordem de  $1 \times 10^{-4}$ ). Pode-se afirmar que a convergência do método é realmente boa, uma vez que até para valores iniciais incoerentes (ver figuras 6 e 7), o método convergiu em poucas itera

ções.

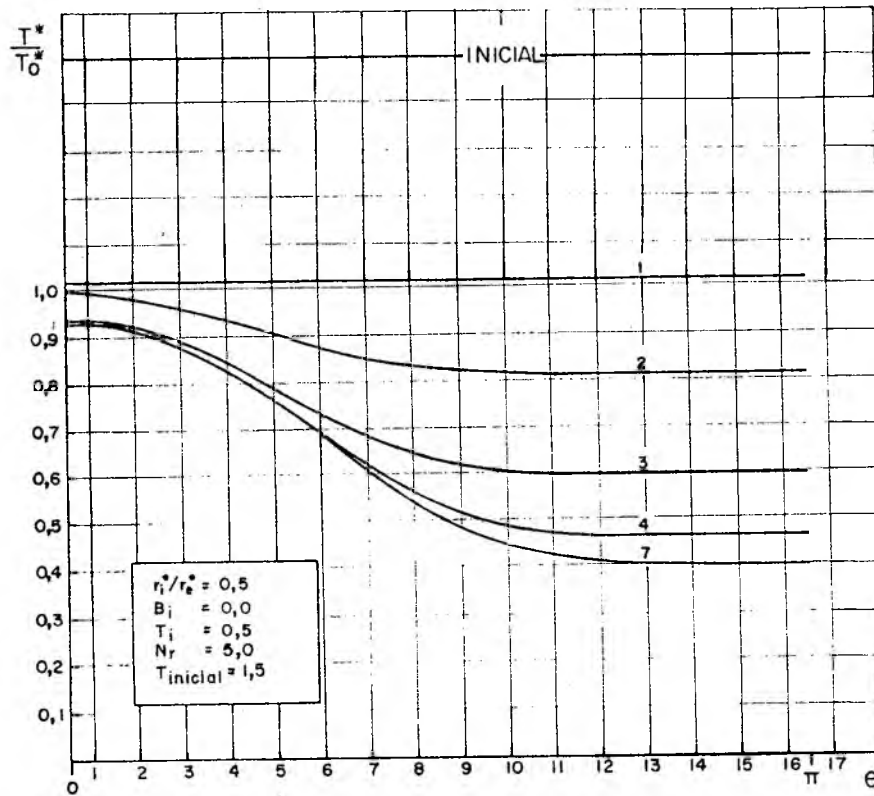


Fig. 6 - Convergência do método para  $T_{inicial} = 1,5$ .

Embora não se tivesse otimizado a distribuição inicial de temperatura, para grandes número de radiação a melhor distribuição parece ser

$$T_{11}(z_i) = [K(z_j, s)]^{1/4},$$

que pode ser obtida a partir da discussão apresentada no capítulo 4 (ver figura 8).

Para o problema do cilindro trocando calor por radia-

ção com a placa plana isotérmica, não foram encontrados resultados na bibliografia disponível. No entanto, podem-se averiguar os resultados do método de equações integrais neste caso, para os limites prescritos na secção 2.4.

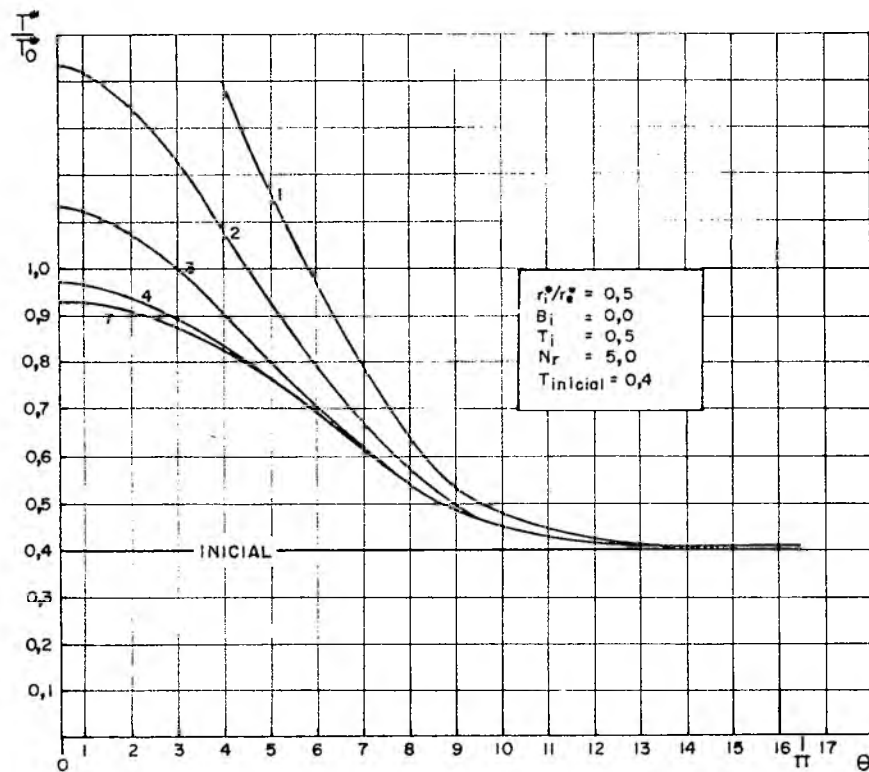


Fig. 7 - Convergência do método para  $T_{inicial} = 0,4$ .

Para um Número de Radiação nulo, a temperatura da superfície externa do cilindro deve ser igual à temperatura da superfície interna. Para um Número de Radiação infinito, a temperatura da superfície externa deve ser semelhante àquela dada pela expressão (4.3), ou seja, depende somente da

temperatura da placa e do fator de forma placa-cilindro.

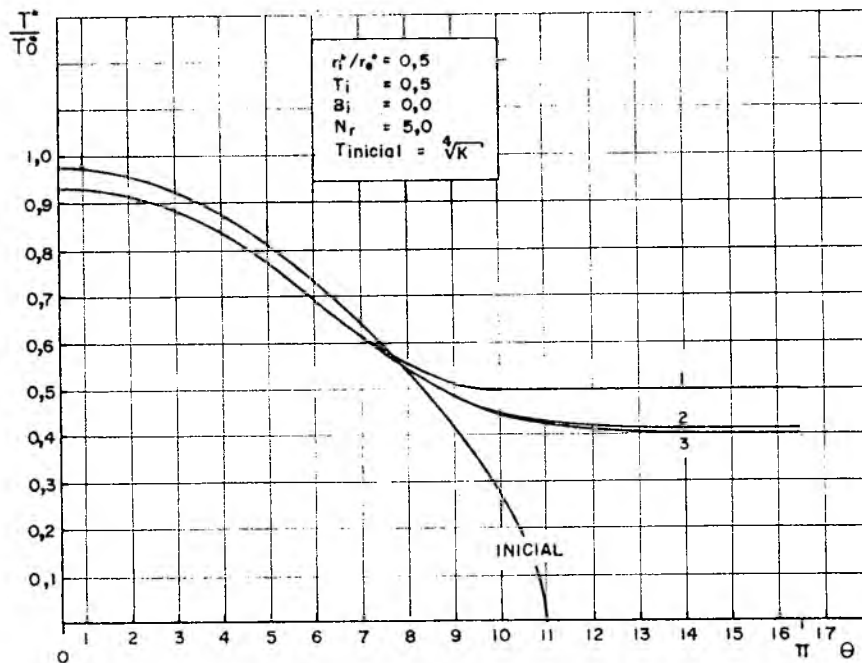


Fig. 8 - Convergência do método para  $T_{inicial} = [K(z,s)]^{1/4}$

Estes limites foram realmente verificados, como se pode ver nas figuras 9 e 10. Nestas figuras estão plotadas as distribuições de temperatura na superfície do cilindro, em função do Número de Radiação, para diferentes temperaturas na superfície interna. Em ambas as figuras nota-se que, para grandes Números de Radiação o perfil de temperatura tende ao esperado, ou seja, para  $T_0 = 1$ , é igual à raiz quarta do fator de forma.

Embora para um Número de Radiação infinito, ou seja, para condutibilidade térmica nula, não haja fluxo de calor no

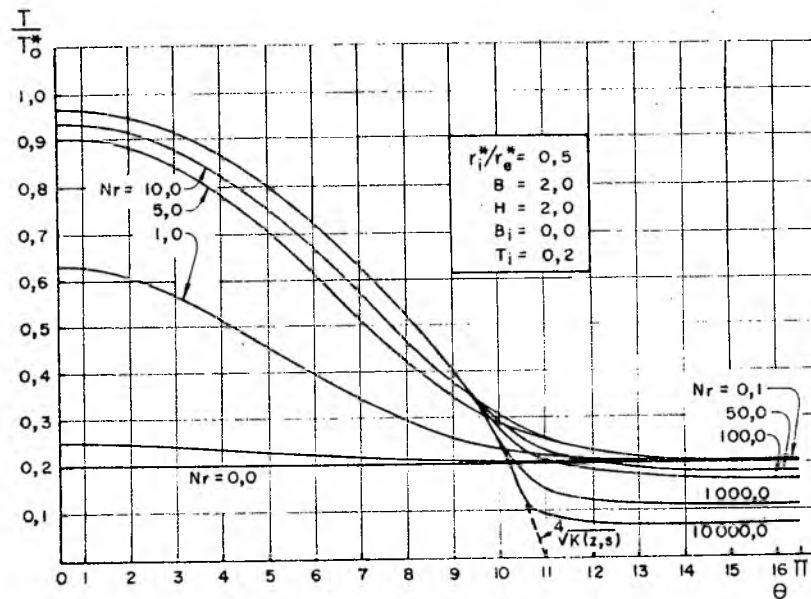


Fig. 9 - Distribuição de temperatura na superfície externa do cilindro função do Número de Radiação, para  $T_i = 0,2$ .

interior do cilindro, existe uma distribuição de temperatura e para o problema simétrico, como por exemplo, o cilindro no interior de uma cavidade, esta é dada por (B.13).

As distribuições de temperatura obtidas, plotadas nas figuras 9 e 10, confirmam que à medida que diminui a condutibilidade térmica, ou aumenta o Número de Radiação, a temperatura da superfície dos corpos torna-se mais dependente da radiação.

Na figura 11 pode ser observado o efeito da espessura da parede do cilindro sobre a temperatura da superfície externa. Nesta figura vê-se que, como se poderia esperar, para um mesmo Número de Radiação, a temperatura da superfície externa do cilindro torna-se mais sensível à presença da placa, com o aumento na espessura da parede.

A influência do Número de Biot sobre a temperatura da superfície externa do cilindro pode ser observada na figura 12. Como se poderia prever, quanto maior o Número de Biot, mais a temperatura da superfície do cilindro se aproxima da temperatu-



ra ambiente,  $T_a$ .

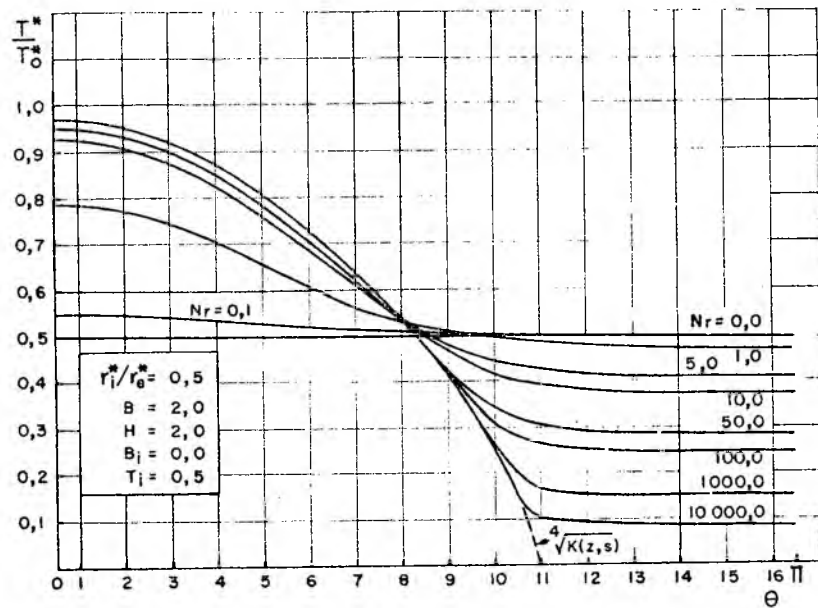


Fig. 10 - Distribuição de temperatura na superfície externa do cilindro, função do Número de Radiação, para  $T_i = 0,5$ .

Na figura 13 podem ser vistas distribuições de temperatura na superfície, para diferentes afastamentos da placa. A alteração na temperatura com o deslocamento da placa é proporcional à mudança no fator de forma cilindro-placa, motivada por este deslocamento.

Utilizando-se a equação (2.47) calcula-se a temperatura no interior da parede do cilindro. Na figura 14 pode ser visto o campo de temperatura delineado por suas isoterms, para o cilindro com furo concêntrico. O campo de temperatura para o cilindro com furo excêntrico pode ser observado na figura 15.

A influência da condutibilidade térmica na troca de calor por radiação foi analisada neste problema, sob dois aspectos. Inicialmente quanto à sua importância na quantidade de calor que passa na superfície do cilindro, isto é, o calor que é cedido ou recebido pelo cilindro. A seguir foi analisada sua im

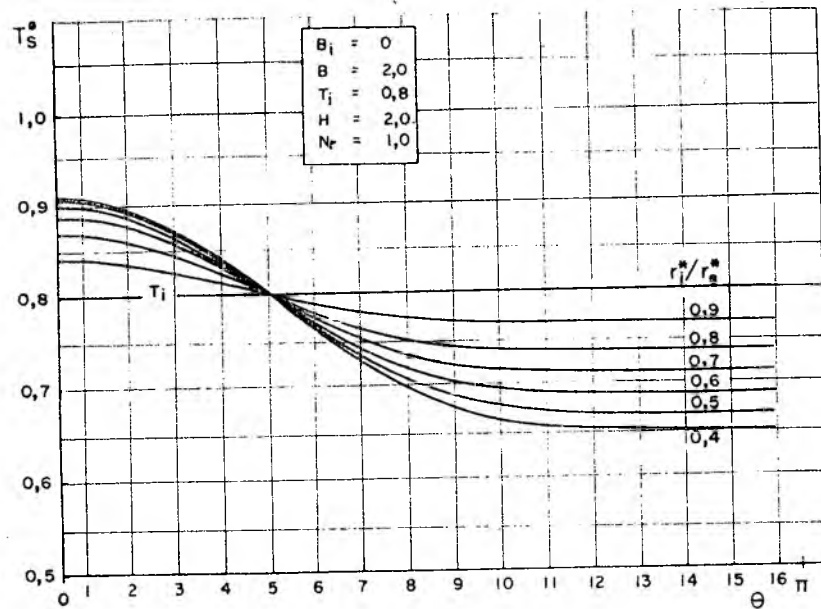


Fig. 11 - Influência da espessura da parede na distribuição de temperatura na superfície externa do cilindro.

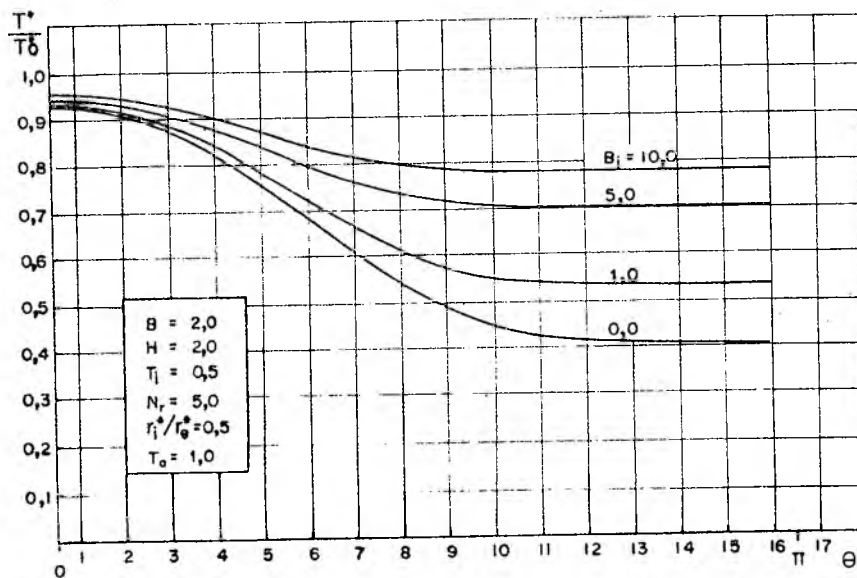


Fig. 12 - Influência do Número de Biot na distribuição de temperatura na superfície externa do cilindro.

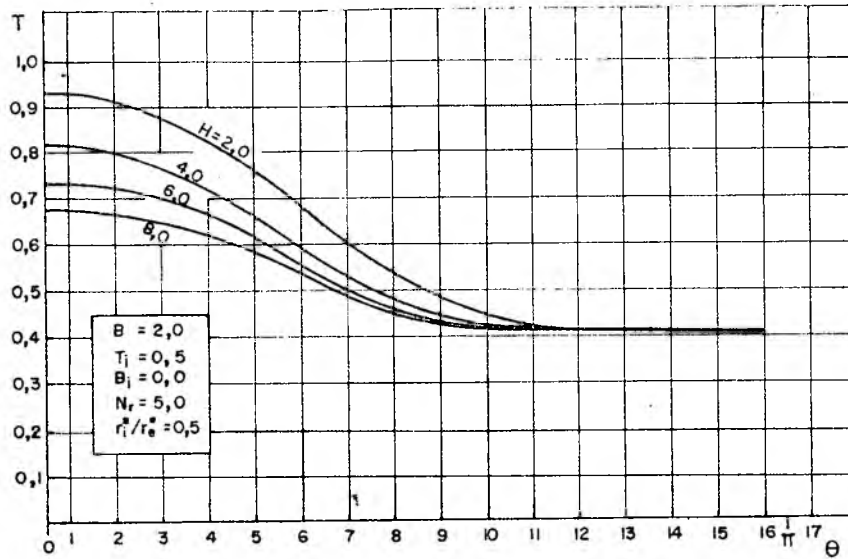


Fig. 13 - Distribuição de temperatura para diversas distâncias placa-cilindro.

portância sobre o calor líquido trocado entre a placa e a superfície externa do cilindro.

Para o primeiro caso foi determinado o rendimento da troca de calor por radiação, como definido por (4.9), para vários Números de Radiação, relações de raio e temperaturas da superfície interna do cilindro. Alguns valores obtidos estão plotados nas figuras 16, 17 e 18. É conveniente observar-se que Números de Radiação com valores próximos de zero a valores próximos de 10 são facilmente encontrados na prática, sendo os menores valores para metais e os maiores para materiais refratários e isolantes.

\* Como pode ser visto através destas figuras, o Número de Radiação exerce uma forte influência na quantidade de calor que flui de ou para o cilindro, diminuindo este fluxo grandemente à medida que aumenta o Número de Radiação. Como pode ser verificado, caso estivesse sendo calculada a quantidade de calor absorvida pelo cilindro para  $B = 2$ ,  $H = 2$ , Número de Biot nulo, isto é, sem convecção, e Número de Radiação unitário. Ao calcular-se este fluxo considerando-se a condutibilidade do

material infinita, o erro cometido seria da ordem de:

18% para  $T_i = 0,2$  e  $r_i = 0,5$  (ver figura 16);

45% para  $T_i = 0,4$  e  $r_i = 0,5$  (ver figura 17);

92% para  $T_i = 0,6$  e  $r_i = 0,5$  (ver figura 18).

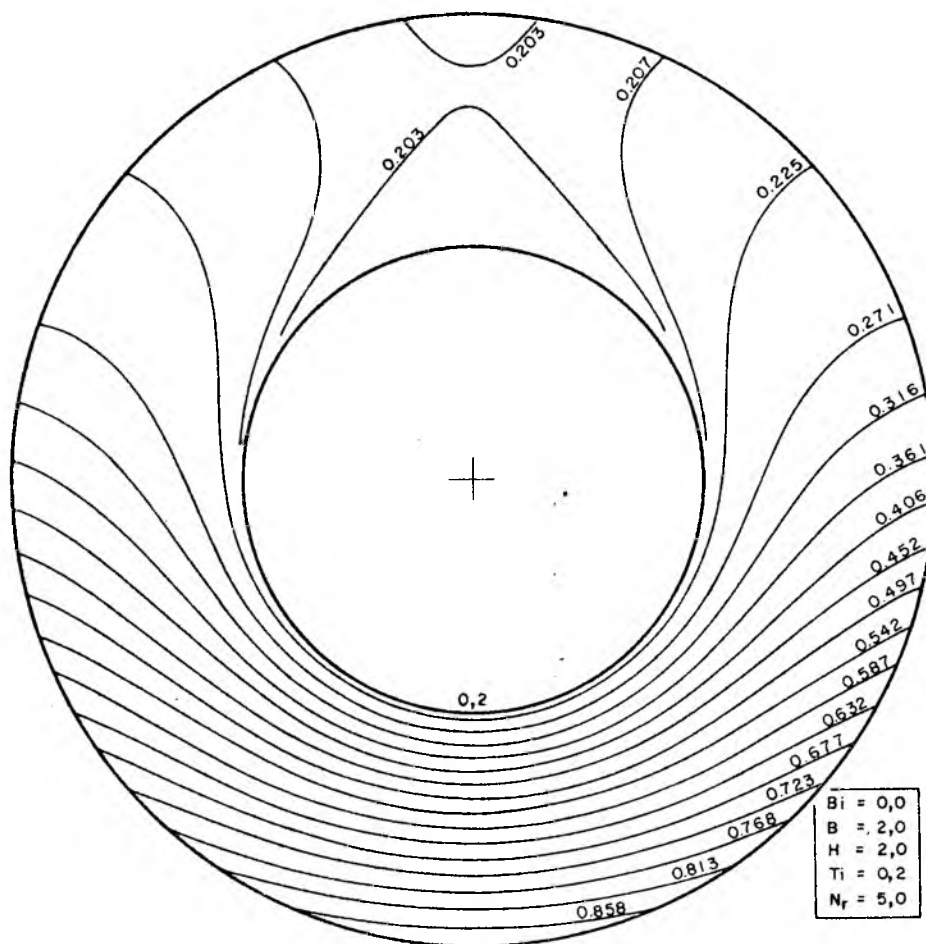
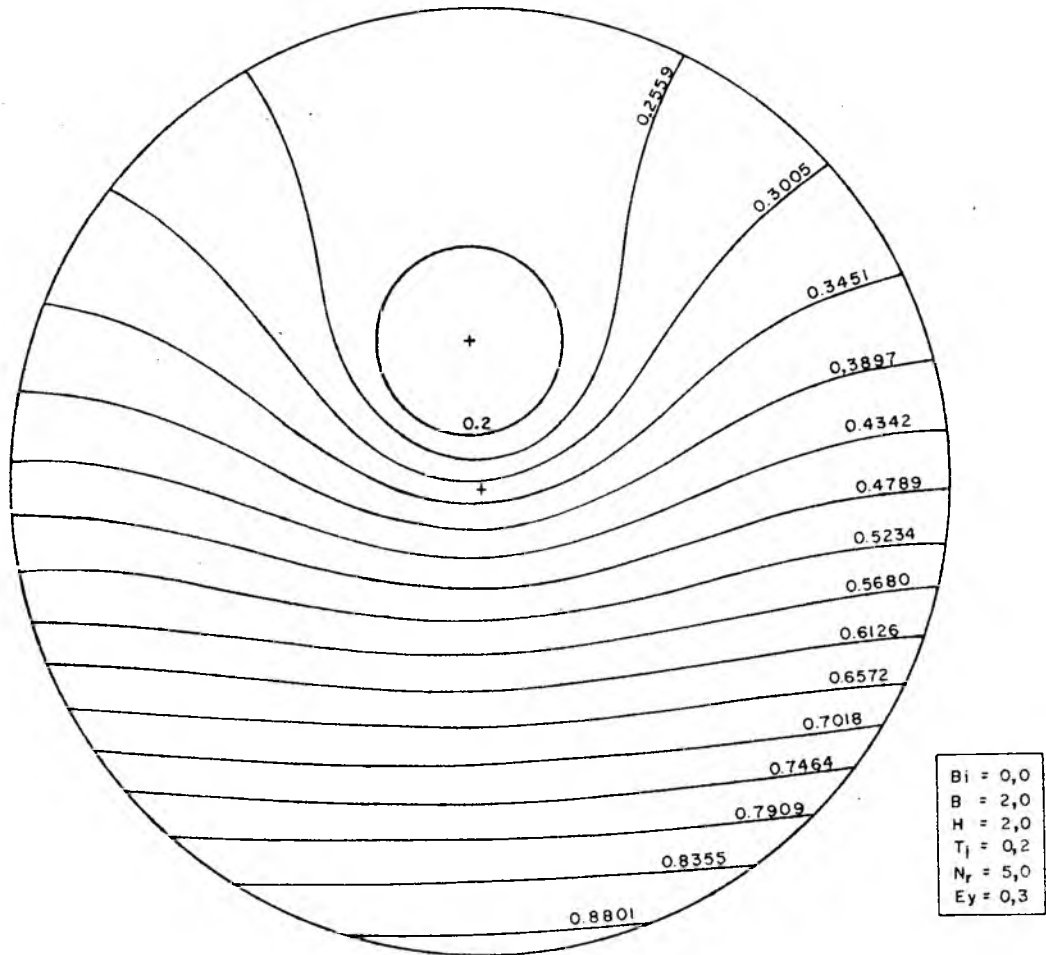


Fig. 14 - Isotermas do cilindro com furo concêntrico. para  $Bi = 0$ ;  
 $B = 2$ ;  $H = 2,0$ ;  $T_i = 0,2$  e  $Nr = 5,0$ .



$E_y$  = excentricidade na direção  
do eixo Y

Fig. 15 - Isotermas do cilindro excêntrico, para  $Bi = 0$ ;  $B = 2,0$ ;  
 $H = 2,0$ ;  $T_i = 0,2$ ;  $N_r = 5$  e  $E_y = 0,3$ .

Na figura 19 pode ser observada a influência do Número de Biot no rendimento da troca de calor,  $\xi(Nr, Bi)$ , agora definido por (4.9) e (4.10).

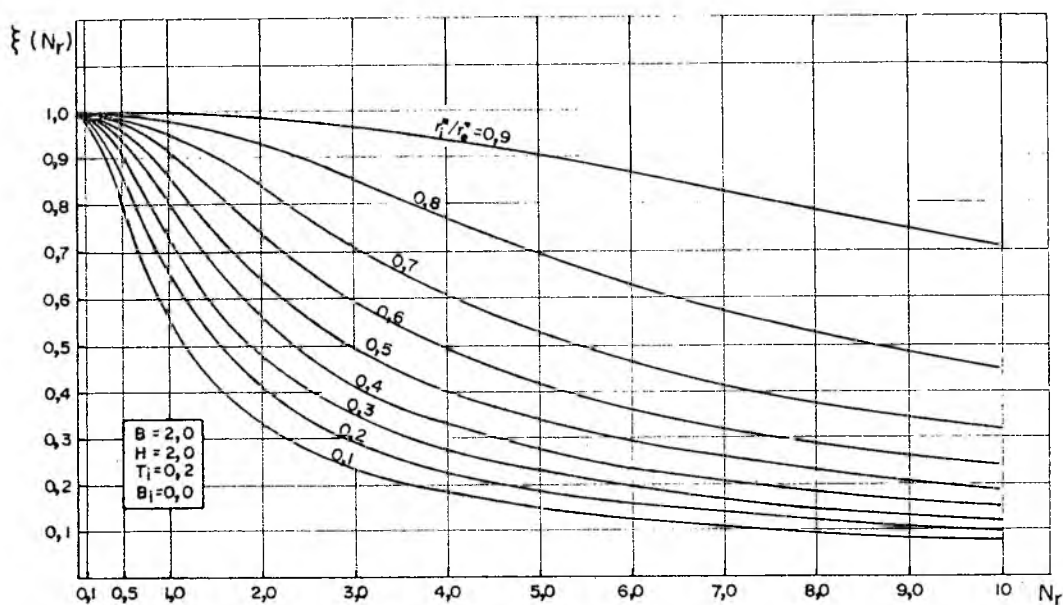


Fig. 16 - Rendimento da troca de calor por radiação em função de  $Nr_1$ , para  $T_i = 0,2$  e diversas relações de raio.

A importância da condutibilidade térmica no calor líquido trocado entre duas superfícies, neste caso as superfícies da placa e do cilindro, pode ser observada na figura 20.

Nesta figura está representado o rendimento do calor líquido trocado entre cilindro e placa, definido em (4.16), em função do número de radiação, para diversas relações de raio. É importante notar-se que, diversamente do rendimento do calor absorvido pelo cilindro, o rendimento do calor líquido trocado não tende a zero quando o Número de Radiação tende ao infinito. Sabe-se que para o caso limite, ou seja, para condutibilidade

térmica nula, não existe fluxo de calor no interior do cilindro. Entretanto, neste caso, devido à geometria do problema, e às temperaturas envolvidas, o cilindro recebe calor por radiação da placa emitindo-o para o ambiente. Por este motivo, mesmo com fluxo de calor nulo por condução, existe fluxo de calor por radiação entre placa e cilindro, que depende somente da temperatura da superfície da placa e do fator de forma placa-cilindro.

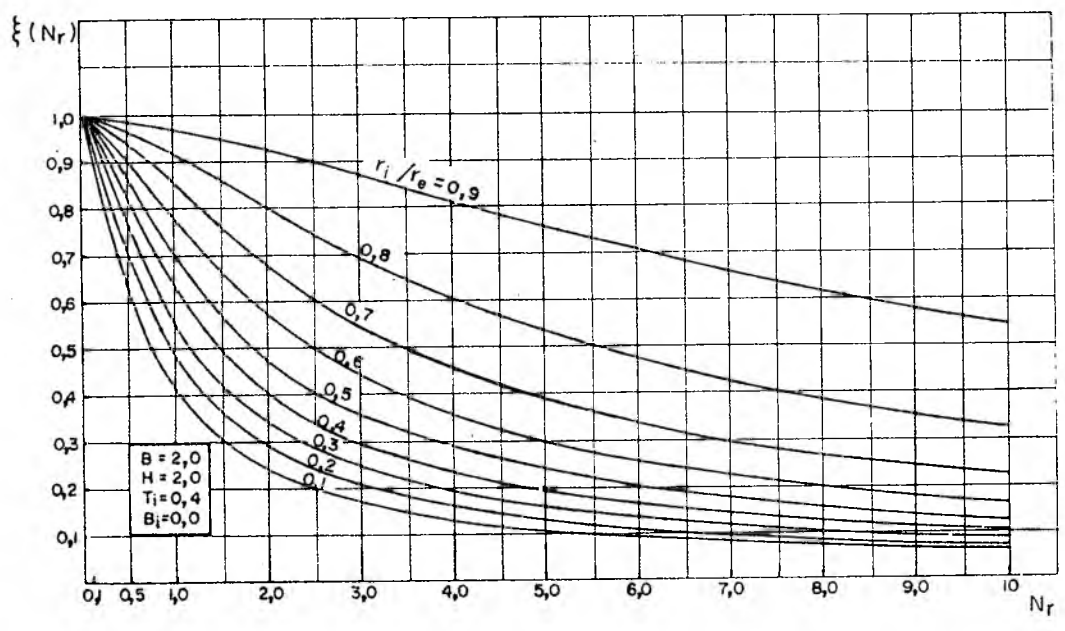


Fig. 17 - Rendimento da troca de calor por radiação em função de  $N_{r1}$ , para  $T_i = 0,4$  e diversas relações de raio.

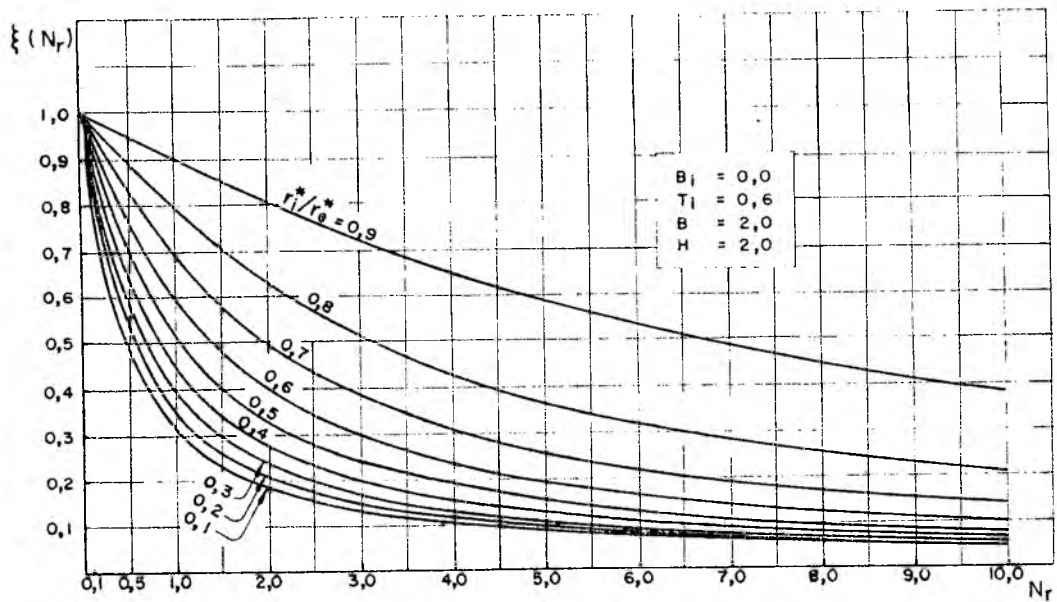


Fig. 18 - Rendimento de troca de calor por radiação em função de  $N_r$ , para  $T_i = 0,6$  e diversas relações de raio.

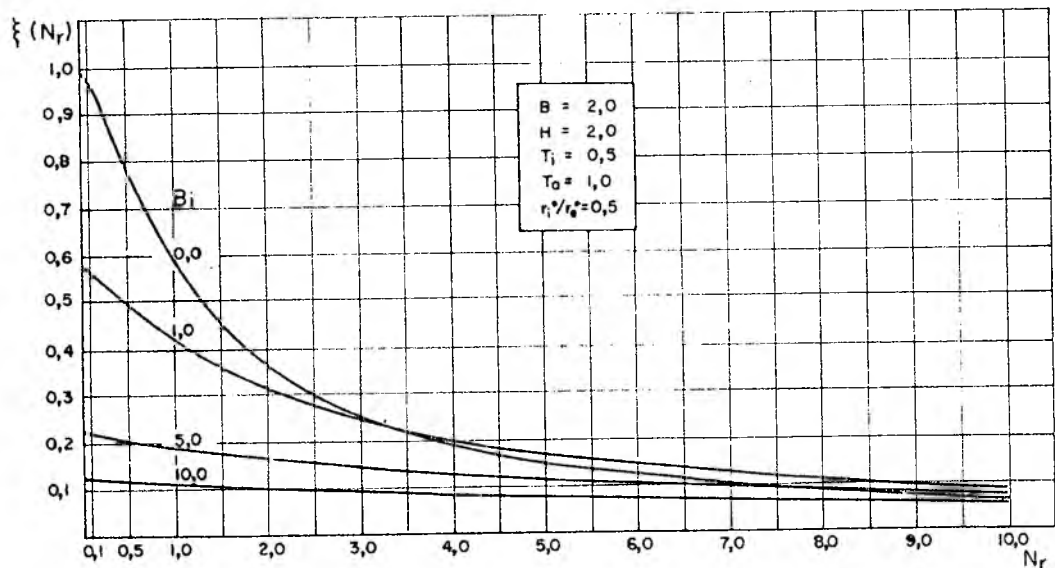


Fig. 19 - Influência do Número de Biot no rendimento da troca de calor por radiação em função de  $N_r$ .



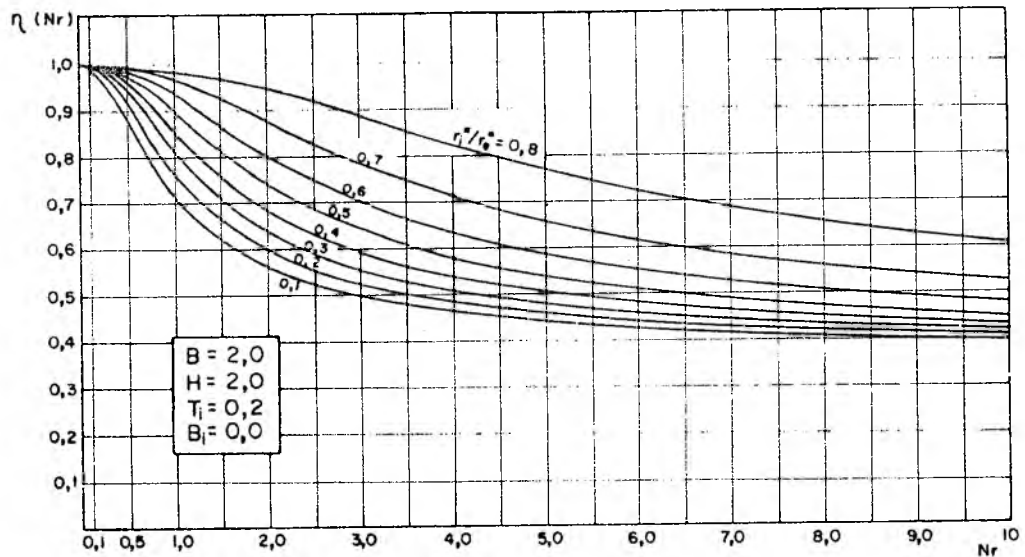


Fig. 20 - Rendimento do calor líquido trocado por radiação entre placa e cilindro, para  $T_1 = 0,2$  e diversas relações de raio.

## 5.2 - Troca de Calor por Radiação entre Parede Cilíndrica e Placa Espessa.

Para analisar uma situação um pouco mais geral, foi abordado o problema da transferência de calor entre uma parede cilíndrica e uma placa espessa, de largura finita  $2B^*$  (ver figura 21). Este caso particular se encaixa no caso geral demonstrado na secção 2.2, uma vez que tanto a região  $D_1$  como a região  $D_2$ , que representam a secção transversal do problema aqui abordado, são regiões semelhantes àsquelas consideradas na secção 2.2. Fazendo-se um corte de  $\partial D_{21}$  e  $\partial D_{22}$ , na região  $D_2$  da figura 2, supondo-se neste corte o fluxo de calor nulo, e considerando-se os raios de curvatura de  $\partial D_{21}$  e  $\partial D_{22}$  infinitamente grandes, chega-se à região  $D_2$  considerada nesta secção.

Mesmo que a região  $D_2$  da figura 21, pelo fato de apresentar cantos, não corresponda a uma região de Liapunov, pode-se supor que por ser esta região composta por contornos regu-

lares, segundo Kellogg [12], é viável a aplicação do método das equações integrais.

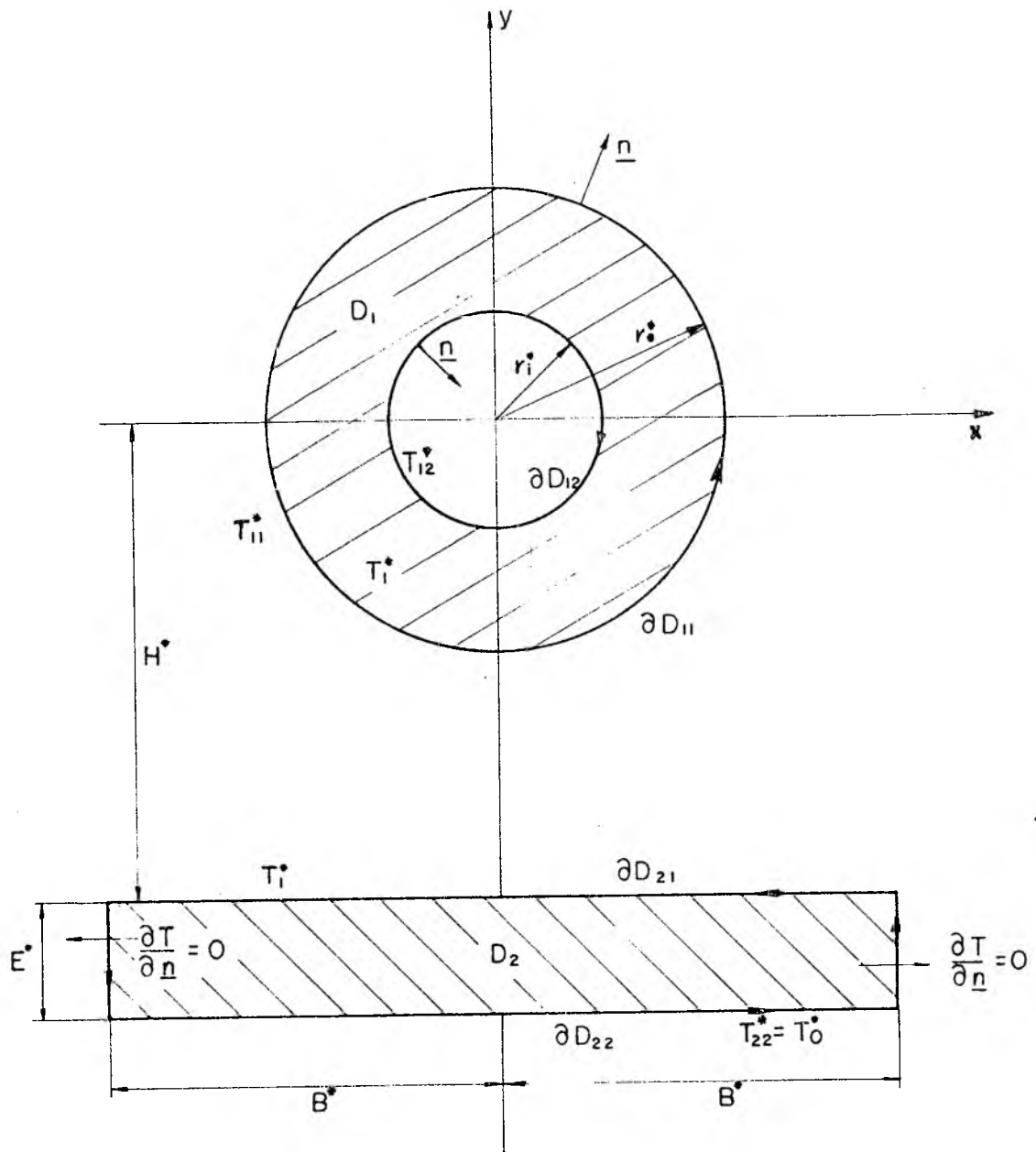


Fig. 21 - Geometria do problema

Portanto, supondo-se que o cilindro e a placa tenham comprimento infinito, este problema é semelhante ao problema abordado na secção 2.2. Para o caso de se fazer uso da função de Green fundamental, a solução deste problema é obtida pela resolução de um sistema de equações integrais do tipo (3.25). Tomando-se como temperatura de referência a temperatura da base da

placa,  $T_r^* = T_{22}^*$ , e como comprimento de referência o raio externo do cilindro,  $L_r^* = r_e^*$ , as condições de contorno deste problema são dadas por (2.36), (2.37), (2.39) e (2.40), além de considerar-se o fluxo nulo nas extremidades da placa.

Utilizando-se a função de Green para o círculo de raio  $r_i$ , dada por (A.32), aplicada à região  $D_1$ , e aplicando-se à região  $D_2$  a função de Green para o semi-plano, dada por (A.32), a solução do problema proposto é obtida pela resolução de um sistema de equações do tipo (3.24).

Os resultados apresentados na secção 5.1 podem ser considerados um caso particular do problema desta secção, onde considerou-se a condutibilidade térmica do material da placa infinita. Logo, todos os resultados obtidos para o problema anterior valem para o problema agora considerado, fazendo-se  $Nr_2 = 0$ , ou seja, o Número de Radiação para a placa nulo. Para se confirmar a precisão oferecida pelo método de solução, foi testada exatamente esta condição, uma vez que na bibliografia estudada não se encontrou resultado algum para este tipo de problemas.

Na figura 22 estão representadas as distribuições de temperatura na superfície externa do cilindro e na superfície da placa oposta ao mesmo, para  $Nr_2 = 0$  e  $Nr_2 = 1,0$ .

A influência da condutibilidade térmica do material da placa e do cilindro pode ser observada na figura 23, onde estão plotadas curvas de mesmo Número de Radiação para a placa, em função do rendimento da troca de calor por radiação entre placa e cilindro, e do Número de Radiação para o cilindro. Para a obtenção deste gráfico foi considerado o rendimento definido por (2.91), ou seja, quanto ao calor que é absorvido ou cedido pelo cilindro. Na figura 24 pode ser vista uma representação tridimensional para este mesmo gráfico, onde fica claro que para cálculos de boa confiabilidade um problema de radiação deve ser levada em conta a resistência à condução de calor em todas as paredes consideradas. Nesta mesma figura pode-se constatar, inclusive, que para a geometria apresentada, o rendimento da troca de calor por radiação é mais sensível a uma alteração do Número de Radiação da placa.

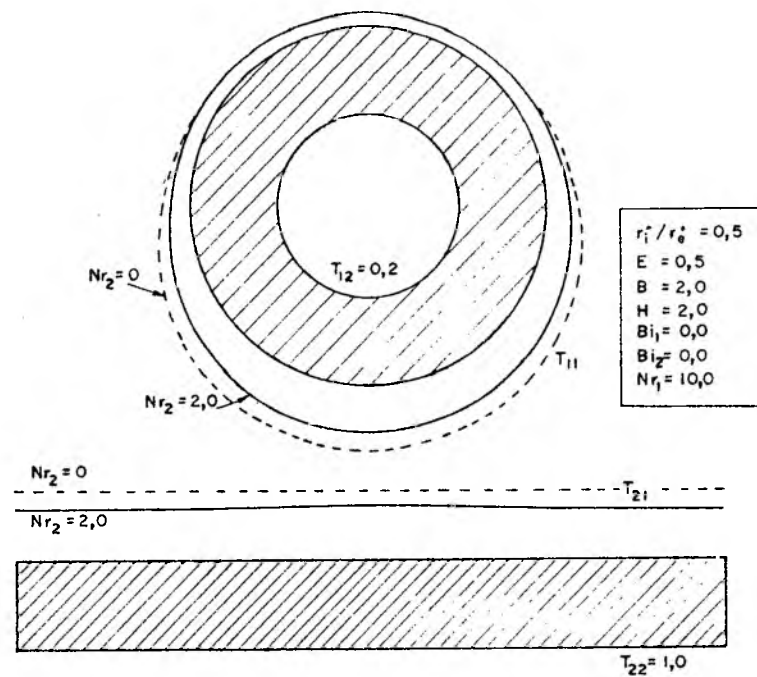


Fig. 22 - Distribuição de temperatura nas superfícies do cilindro e placa.

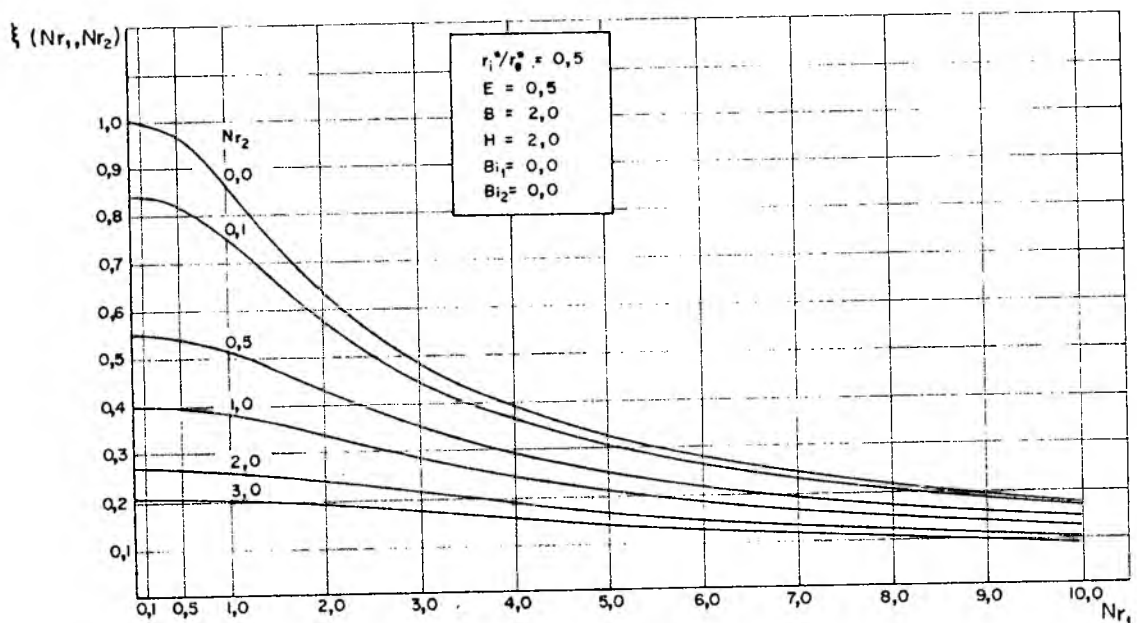


Fig. 23 - Rendimento da troca de calor por radiação em função de  $Nr_1$  e  $Nr_2$ .

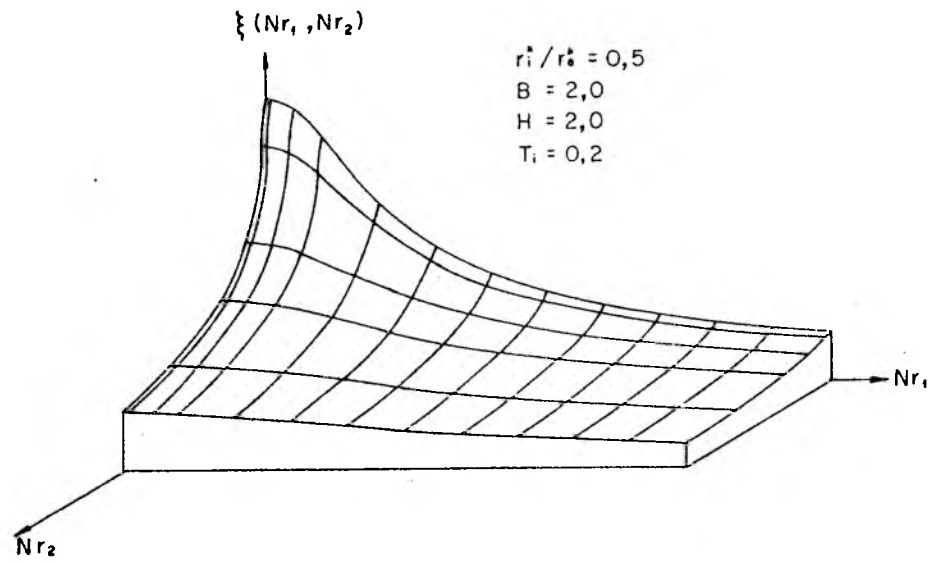


Fig. 24 - Rendimento da troca de calor por radiação em função de  $Nr_1$  e  $Nr_2$ .

## 6 - CONCLUSÕES

Todo o estudo aqui desenvolvido ficou, conforme o propósito inicial, limitado ao caso da transferência de calor estacionária em corpos com propriedades isotrópicas. Embora se tenha imposto estas limitações, o método aqui empregado pode ser estendido ao caso anisotrópico não-estacionário, sem maiores dificuldades matemáticas.

Contudo, a aplicação do método de equações integrais na análise da transferência de calor por radiação com condução e convecção combinadas, permite que sejam feitas algumas afirmações significativas:

- a. O método de equações integrais é adequado a problemas a valores no contorno, nos quais se aplica o operador de Laplace, com geometrias gerais complexas que se configuram em regiões de Liapunov ou aproximações de regiões regulares segundo Kellogg, que apresentam limitações de ordem prática para o método de elementos finitos, método de diferenças finitas e métodos variacionais.
- b. O método de equações integrais é extremamente adequado à solução de problemas com condições de contorno não lineares, do tipo daquelas geradas pela lei de Stefan-Boltzmann.
- c. O método numérico utilizado, a exemplo de utilizações em trabalhos anteriores (vide [5], [10] e [11]), converge satisfatoriamente no sentido pontual. Por outro lado, funções fisicamente relevantes, tais como fluxos médios, definidas por integrações na fronteira convergem uniformemente.
- d. A utilização da função de Green fundamental nos casos aqui analisados, resulta na obtenção de duas equações integrais não-lineares para cada região considerada, uma para cada contorno, cujas incógnitas são a derivada normal da temperatura no contorno interno e a temperatura do contorno externo. Apesar de a derivada normal poder ser eliminada nas duas equa-

ções, o número de matrizes a serem calculadas na solução numérica é maior que o número correspondente ao caso do uso de funções de Green incompletas. Por outro lado, a dificuldade da obtenção de funções de Green incompletas para geometrias arbitrárias, vem fortalecer a opinião de que o método de equações integrais utilizando a função de Green fundamental possa ser mais poderoso, no sentido de representar um método geral de abordagem para a classe de problemas semelhantes aos aqui analisados.

- e. O cálculo da distribuição de temperatura em pontos pertencentes ao interior das regiões em estudo, apesar de se constituir de uma simples integração numérica sobre o contorno destas regiões, tem a sua precisão prejudicada à medida em que estes pontos se aproximam do contorno. A ocorrência de tal imprecisão deve-se ao fato de que, para estes casos, a função de Green e sua derivada em geral apresentam singularidades. Estas singularidades prejudicam de sobremodo a integração numérica sobre o contorno, mesmo que se aumente o número de pontos sobre o mesmo. Contudo, um método de interpolação adequado poderia contornar esta dificuldade. Por outro lado, tal dificuldade não é tão prejudicial ao método de equações integrais, uma vez que, em Engenharia, é mais frequente a necessidade de informações sobre variáveis fisicamente relevantes na média, sobre o contorno, do que sobre variáveis locais, dentro da região, como mostra a literatura deste campo especializado.

A influência da condução do calor em problemas de transferência de calor por condução, radiação e convecção combinadas aumenta continuamente com a diminuição da condutibilidade térmica dos materiais, como pode ser observado nos resultados obtidos neste trabalho. Através destes resultados conclui-se que, mesmo para problemas envolvendo materiais com boa condutibilidade térmica, se a transferência de calor por radiação for um processo preponderante, ao ser desprezado o efeito da resistência à condução do calor, pode-se estar incorrendo em erros de considerável grandeza. Embora esta seja uma conclusão de caráter generalizado, não é possível, com as hipóteses simplifica

tivas consideradas neste trabalho, determinaram-se "coeficientes de correção" para o cálculo da transferência de calor entre duas superfícies, pois este depende fundamentalmente da geometria das regiões, das propriedades das superfícies quanto à radiação e das características do meio que as separa. Porém, como já foi observado, o método de equações integrais é mais poderoso que a sua particularização para este trabalho. Tal método pode muito bem ser empregado em problemas a valores no contorno, que entre outros, abordam os seguintes aspectos da transferência de calor:

- a. Análise de problemas de transferência de calor por radiação e convecção combinadas em geometrias encontradas frequentemente na prática, considerando-se a condução em meios anisotrópicos e a radiação entre corpos cinzentos com superfícies que apresentam propriedades direcionais.
- b. Análise de problemas em regime transitório para regiões múltiplamente conexas, considerando-se a radiação mútua, como por exemplo, a otimização de superfícies aletadas quanto à radiação e condução.
- c. Estudo do efeito de cavidades em paredes espessas e paredes do tipo das utilizadas em superfícies coletoras de energia solar.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Sparrow, E.M.; Haji-Sheikh, A.; Lundgreen, T.S. - "The inverse problem in transient heat conduction", J. Appl. Mechanics 31: 369-75, 1964.
- [2] Tolubinskiy, E.V. - "An integral method of solution of the general heat and mass transfer problem", Int. J. Heat & Mass Transfer, 9: 1471-88, 1966.
- [3] Crosbie, A.L.; Viskanta, R. - "Transient heating or cooling of a plate by combined convection and radiation" Int. J. Heat & Mass Transfer, 11: 305-17, 1968.
- [4] Shaw, R.P. - "An integral equation approach to diffusion" Int. J. Heat & Mass Transfer, 17: 693-99, 1974.
- [5] Chang, Y.P.; Kang, C.S.; Chen, D.J.- "The use of fundamental Green's functions for the solution of problem of heat transfer in anisotropic media", Int. J. Heat & Mass Transfer, 16: 1905-18, 1973.
- [6] Chang, Y.P.; Tsou, R.C.H. - "Heat conduction in an anisotropic medium homogeneous in cylindrical regions - Unsteady state", J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 99: 41-46, 1977.
- [7] Chang, Y.P.; Tsou, R.C.H. - "Heat conduction in an anisotropic medium homogeneous in cylindrical region - Steady state". J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 99: 132-34, 1977.
- [8] Stakgold, I. - "Boundary value problems of mathematical physics", Vols. I & II, Mac Millan, New York, 1971.
- [9] Siegel, R.; Howell, J.R. - "Thermal radiation heat transfer", MacGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1972.

- [10] Colle, S. - "Perda de carga no escoamento laminar em dutos de secção transversal de geometria multiplamente conexa", Anais do COBEM/79, Vol. A, pp. 350-359, 1979.
- [11] Gonzães, M.L. - "Um esquema integral para a determinação do transiente de temperatura de peças cilíndricas com condução, convecção e radiação combinadas". Dissertação de Mestrado, CT-UFSC, 1978.
- [12] Kellog, O.D. - "Foundations of potential theory", Dover, New York, 1929.
- [13] Demidovich, B.P.; Maron, I.A. - "Computational mathematics", M.I.R. - Publishers, Moscou, 1973.
- [14] Sobolev, S.L. - "Partial differential equations os mathematical physics", Pergamon Press, London, 1964.
- [15] Özisik, M.N. - "Radiative transfer and interactions with conduction and convection", John Wiley & Sons, New York 1973.
- [16] Colle, S. - "Uma previsão para o desempenho ótimo de um duplo-tubo aletado para a transferência de calor em regime laminar. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1976.

## APÊNDICE A

## A.1 - Problemas de Dirichlet, Neumann e de Caráter Misto.

Uma discussão completa sobre a natureza desses problemas pode ser vista em [14] e [8].

Seja  $D$  uma região normal do  $R^n$ , isto é, uma região aberta e simplesmente conexa, no sentido de Liapunov [14] e seja  $\partial D$  a fronteira de  $D$ . Para  $\bar{D} = D + \partial D$  o fecho de  $D$  e  $f : \bar{D} \rightarrow R$  contínua em  $\bar{D}$ , existem três problemas básicos a valores de contorno, a saber:

$$a) \quad -\nabla^2 u = f(x), \quad x \in D; \quad (A.1)$$

$$u \Big|_{\partial D} = h(x), \quad h \text{ contínua em } \partial D; \quad (A.2)$$

conhecido como problema de Dirichlet.

$$b) \quad -\nabla^2 u = f(x), \quad x \in D; \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = \text{grad } u \cdot n \Big|_{\partial D} = r(x), \quad r \text{ contínua em } \partial D; \quad (A.4)$$

com a condição de consistência

$$\int_{\partial D} r(x) \, dA = \int_D f(x) \, dx, \quad dx = dx_1 \, dx_2 \, \dots \, dx_n, \quad (A.5)$$

onde  $A$  é a área de  $\partial D$ ; conhecido como problema de Neumann.

$$c) \quad -\nabla^2 u = f(x), \quad x \in D \quad (A.6)$$

$$u \Big|_{\partial D_i} = h_i(x), \quad (A.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D_j} = r_j(x), \quad i \neq j, \quad \partial D = \bigcup_{i=1}^N \partial D_i; \quad (\text{A.8})$$

onde  $\partial D$  é composta por  $N$  superfícies disjuntas duas a duas para  $i \neq j$ ,  $r_j$  contínua em  $\partial D_j$  e  $h_i$  contínua em  $\partial D_i$ . Este problema é conhecido como problema de Caráter Misto.

A função  $u$  deve ser duas vezes continuamente diferenciável em  $\bar{D}$ .

As soluções destes problemas a valores de contorno existem e são únicas, exceto para o problema (A.3)-(A.4), cuja solução é única a menos de uma constante arbitrária.

## A.2 - Funções de Green- Definição e Propriedades

Seja  $G(z, z')$  a função de Green fundamental, ou função de Green para um domínio infinito, associada aos problemas a valores de contorno (A.1)-(A.8), esta deve ser tal que

$$-\nabla^2 G(z, z') = \delta(z - z'), \quad \text{em } D; \quad (\text{A.9})$$

onde  $\delta(z - z')$  é a distribuição singular de Dirac definida pelas condições:

$$\delta(z - z') = 0, \quad \text{para todo } z \neq z' \text{ em } D, \text{ e} \quad (\text{A.10})$$

$$\int_D \delta(z - z') h(z) dz = h(z') \quad (\text{A.11})$$

A função de Green apresenta algumas propriedades básicas que são utilizadas para isolar polos, ou seja, determinar as singularidades que surgem quando  $z'$  tende a  $z$ . Seja  $\epsilon$  o raio de um pequeno círculo, envolvendo o ponto  $z$  na região  $D$ , e seja  $\partial D_\epsilon$  o contorno desse círculo, com  $z' \in \partial D_\epsilon$ . Pode-se mostrar que:

$$G(z, z') \text{ é positiva para todo } z' \in D; \quad (\text{A.12})$$

$$G(z, z') = G(z', z) \text{ para todo } z' \in D; \quad (\text{A.13})$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} G(z, z') ds(z') = 0; \quad z' \in \partial D_\epsilon \quad (\text{A.14})$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \underline{n}} G(z, z') ds(z') = -1; \quad z' \in \partial D_\epsilon \quad (\text{A.15})$$

Se o polo surge quando  $z \in \partial D$ , pode ser isolado traçando-se um pequeno semi-círculo de raio  $\epsilon$  e centro em  $z$ , pode-se mostrar que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \underline{n}} G(z, z') ds(z') = -\frac{1}{2} \quad (\text{A.16})$$

A função de Green fundamental para o problema bidimensional é dada pela expressão

$$G(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z'|, \quad (\text{A.17})$$

onde  $z = (x, y)$  e  $|z - z'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$ . É fácil ver que a condição (A.9) se verifica e são válidas as propriedades (A.12)-(A.14). A derivada normal é dada pela igualdade

$$\frac{\partial}{\partial \underline{n}} G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \frac{(z - z') \cdot \underline{n}}{|z - z'|^2}, \quad (\text{A.18})$$

onde  $\underline{n}$  é a normal à superfície  $\partial D$  no ponto  $z'$ . Também é fácil ver que para  $G(z, z')$  dada por (A.17), verificam-se as propriedades (A.15)-(A.16).

Da mesma forma são definidas as funções de Green incompletas, que são funções de Green que obedecem algumas das condições de contorno da região.

Seja  $D$  a região bidimensional definida anteriormente. Se a única solução do problema a valores de contorno,

$$\nabla^2 u = 0; \quad (\text{A.19})$$

$$u \Big|_{\partial D} = 0, \quad (\text{A.20})$$

for a solução trivial, existe a função de Green associada ao problema (A.1)-(A.2) e esta é unicamente determinada pelo seguinte problema a valores de contorno:

$$-\nabla^2 g(z, z') = \delta(z - z') \text{ em } D; \quad (\text{A.21})$$

$$g(z, z') \Big|_{\partial D} = 0 \text{ para todo } z \in \partial D \quad (\text{A.22})$$

Do mesmo modo, se a única solução do problema a valores de contorno,

$$\nabla^2 u = 0 \text{ em } D; \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{n}} u \Big|_{\partial D} = 0, \quad (\text{A.24})$$

for uma constante real, a função de Green associada ao problema (A.3)-(A.4) existe, é única a menos de uma constante real, e é determinada pelas seguintes condições, como pode ser visto em |8|:

$$-\nabla^2 g(z, z') = \delta(z - z') - \frac{1}{V(D)}; \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{n}} g(z, z') \Big|_{\partial D} = 0 \text{ para todo } z \in \partial D; \quad (\text{A.26})$$

onde

$$V(D) = \int_D dz$$

Finalmente, se a única solução do problema a valores de contorno

$$\nabla^2 u = 0; \quad (A.27)$$

$$u \Big|_{\partial D_i} = \frac{\partial}{\partial \underline{n}} u \Big|_{\partial D_j} = 0, \quad i \neq j \quad (A.28)$$

for a solução trivial, a função de Green associada ao problema (A.6)-(A.8) existe, é única e é determinada pelas seguintes condições

$$-\nabla^2 g(z, z') = \delta(z - z'); \quad (A.29)$$

$$g(z, z') \Big|_{\partial D_i} = \frac{\partial}{\partial \underline{n}} g(z, z') \Big|_{\partial D_j} = 0, \quad (A.30)$$

para todo  $z \in \partial D$  e  $i \neq j$ .

As funções de Green incompletas também possuem as propriedades (A.12)-(A.16), sendo que a propriedade (A.13) só é válida para a função de Green do problema (A.3)-(A.4), se a seguinte condição for satisfeita:

$$\int_D g(z, z') dz = 0, \quad \text{para todo } z' \in D \quad (A.31)$$

A função de Green para o círculo de raio  $r$ , isto é, a função de Green que é nula sobre o círculo de raio  $r$  é a seguinte:

$$g(z, z') = \frac{1}{2\pi} \ln \left| 1 - \frac{z \bar{z}'}{r^2} \right| - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{r} - \frac{z'}{r} \right|, \quad (A.32)$$

onde  $z = x + iy$ ,  $z' = x' + iy'$  e  $\bar{z}' = x' - iy'$ , para o círculo com centro em  $x = y = 0$ .

A derivada normal desta função de Green satisfaz a igualdade,

$$\frac{\partial g(z, z')}{\partial \underline{n}'} = \frac{1}{2\pi} \frac{(|z/r|^2 z' - z) \cdot \underline{n}'}{r^2 |1 - z \bar{z}'/r^2|^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{(z - z') \cdot \underline{n}'}{|z - z'|^2} \quad (\text{A.33})$$

A função de Green para o semiplano, isto é, a função de Green que se anula sobre uma linha ( $x = 0$ ), é

$$g(z, z') = \frac{1}{2\pi} \ln |z - z^*| - \frac{1}{2\pi} \ln |z - z'|, \quad (\text{A.34})$$

onde  $z = (x, y)$ ,  $z' = (x', y')$  e  $z^* = (x', -y')$ .

A derivada normal da função de Green para o semiplano é dada por

$$\frac{\partial g(z, z')}{\partial \underline{n}} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(z - z') \cdot \underline{n}'}{|z - z'|^2} - \frac{(x - x') n_{x'}}{|z - z^*|^2} + \frac{(y + y') n_{y'}}{|z - z^*|^2} \right], \quad \dots (\text{A.35})$$

onde  $\underline{n} = (n_{x'}, n_{y'})$ .



## APÊNDICE B

## B.1 - Solução Analítica para o Cilindro com Furo Concêntrico.

Para o cilindro com furo concêntrico e comprimento finito, cuja secção transversal é correspondente à região  $D_1$  da figura 4, determina-se facilmente a solução analítica, se este não recebe calor por radiação, ou para o problema simétrico.

Na região  $D_1$ , a condução de calor é regida pela seguinte equação de Laplace:

$$\nabla^2 T_1 = 0. \quad (\text{B.1})$$

As condições de contorno para a convecção pura são:

$$T_1(z) \Big|_{\partial D_{12}} = T_{12} = \text{cte}, \quad (\text{B.2})$$

e

$$\frac{\partial T_1(z)}{\partial n} \Big|_{\partial D_{11}} = -Bi_1 [T_{11}(z) - T_a]. \quad (\text{B.3})$$

Neste caso, o calor fluirá igualmente na direção radial do cilindro e a equação da condução pode ser escrita em coordenadas cilíndricas como segue,

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_1}{dr} \right) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Integrando-se duas vezes a equação (B.4) com relação a  $r$  chega-se a

$$T_1(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad (\text{B.5})$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a determinar.

Aplicando-se em (B.5) as condições de contorno (B.2) e (B.3), obtêm-se

$$T_{11} = \frac{T_{12} - T_a \text{Bi}_1 \ln r_i}{1 - \text{Bi}_1 \ln r_i}. \quad (\text{B.6})$$

Para o cilindro emitindo calor por radiação, a condição de contorno (B.3) passa a ser

$$\left. \frac{\partial T_1(z)}{\partial n} \right|_{\partial D_{11}} = -\text{Bi}_1 [T_{11}(z) - T_a] - \text{Nr}_1 T_{11}^4(z). \quad (\text{B.7})$$

E a temperatura na superfície externa do cilindro, obtida analogamente a (B.6), é calculada a partir da seguinte equação:

$$T_{11} - T_{11}^4 \text{Nr}_1 \ln r_i - (T_{12} - \text{Nr}_1 \ln r_i) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Considerando-se o cilindro no interior de uma cavidade completamente envolvente, com temperatura uniforme igual à temperatura de referência, a condição de contorno (B.3) pode ser escrita como

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\partial D_{11}} = -\text{Bi}_1 [T_{11}(z) - T_a] - \text{Nr}_1 [T_{11}^4(z) - 1]. \quad (\text{B.9})$$

Logo, aplicando-se em (B.5) as condições de contorno (B.2) e (B.9), obtêm-se para um ponto no interior da região  $D_1$ ,

$$T_1(r) = [-Bi(T_{11} - T_a) - Nr_1(T_{11}^4 - 1)] \ln r + \\ + T_{12}[-Bi(T_{11} - T_a) - Nr_1(T_{11}^4 - 1)] \ln r_i, \quad (B.10)$$

ou

$$T_1(r) = [Bi(T_{11} - T_a) + Nr_1(T_{11}^4 - 1)] \ln \frac{r_i}{r} + T_{12} \quad (B.11)$$

Para um ponto sobre a superfície externa, ou seja, para  $r = 1$  no caso de se tomar  $r_e^*$  como comprimento de referência na adimensionalização, a temperatura é

$$T_{11} = [Bi(T_{11} - T_a) + Nr_1(T_{11}^4 - 1)] + T_{12}. \quad (B.12)$$

Substituindo-se esta equação em (B.11), obtêm-se a expressão para a distribuição de temperatura no interior da região  $D_1$ , conhecidas as temperaturas no contorno, que pode ser escrita como segue:

$$T_1(r) = T_{11} - \frac{(T_{11} - T_{12}) \ln r}{\ln r_i}. \quad (B.13)$$