

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**FUNÇÕES INTEIRAS E SUAS DERIVADAS
SUCESSIVAS**

João Luiz Martins

Dezembro - 1990

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

“ Mestre em Ciências ”

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

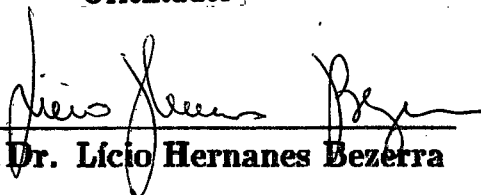


Prof. Dr. Gerardo A. Lara Luna
Coordenador

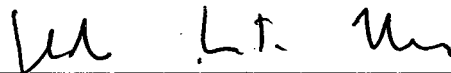
Banca examinadora:



Prof. Ph.D. Paul James Otterson
Orientador



Prof. Dr. Lício Hernanes Bezerra



Prof. MSc. Genaldo Leite Nunes

Agradecimento

Ao professor Msc. Genaldo Leite Nunes por sua orientação segura, pelo seu apoio, compreensão e amizade durante a elaboração deste trabalho.

Ao professor Ph.D. Paul James Otterson, pela gentileza de assumir a orientação deste trabalho, bem como pelas sugestões oportunas dadas ao texto.

Aos meus colegas de curso, ao Júlio, Aldo e em especial ao Rogério pelo incentivo.

Aos meus pais, irmãos, Mário e família pelo apoio nas horas difíceis.

Aos meus professores, em especial ao professor Dr. Lício H. Bezerra pelas sugestões e correções durante a elaboração deste trabalho.

E finalmente a minha esposa Sílvia e aos meus filhos pela compreensão, apoio, incentivo e pelas horas que deles tirei para poder realizar este trabalho.

Este trabalho é dedicado a:

**Sílvia, Ednardo, Helena e
João Vitor.**

ÍNDICE

Introdução	04
Resumo	07
Abstract	08
Capítulo I – Preliminares	09
Capítulo II – Conjunto Final	26
Bibliografia	56
Índice alfabético	57

INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata sobre os zeros das derivadas de uma função inteira. Especificamente, o problema que visa obter o conjunto final de uma função tem-se mostrado de extrema dificuldade e tem sido alvo de muitas pesquisas. Um dos pesquisadores que se dedicou a esta busca foi o matemático húngaro, naturalizado americano, G. Pólya. Ele em meados deste século reuniu num artigo uma coletânea de resultados a este respeito.

Neste artigo percebemos que era de seu conhecimento o seguinte:

se $f(z)$ é uma função inteira que tem ordem de crescimento menor ou igual a um , então seu conjunto final pode ser vazio, assim como também é possível construir uma função com esta ordem de crescimento cujo conjunto final contém pelo menos um ponto.

Entretanto, ele deixou claro não saber responder a seguinte questão:

(Q) Se $f(z)$ é uma função inteira que cresce mais rapidamente do que uma função exponencial então necessariamente seu conjunto final contém pelo menos um ponto?

Nosso objetivo é dar uma resposta a esta questão, mas também o leitor poderá observar que, além disso, nossas conclusões confirmam a afirmação acima feita por Pólya .

Convém ressaltar que este objetivo será alcançado mediante utilização de um artigo publicado pelos pesquisadores A. Edrei e G. R. MacLane.

Neste artigo eles deram as linhas gerais da demonstração de um teorema

que segundo eles servia como resposta para tal questão. Acontece que, como de costume, a maioria dos pesquisadores não tem o hábito de fazer os detalhes de suas afirmações, sendo assim, coube a nós preenchermos de forma minuciosa e precisa as lacunas necessárias deste artigo, bem como organizar um caminho que fosse o mais razoável possível de modo a formular um resultado que permitisse dentre outras coisas responder tal questão. Como é natural, a leitura deste trabalho pressupõe alguns pré-requisitos. Foi com esta preocupação que procuramos dividi-lo em dois capítulos.

O capítulo I, que chamaremos de preliminares, tem a priori duas intenções: a primeira é fornecer os subsídios necessários ao leitor, para que ele possa entender com clareza as etapas futuras.

A segunda é estabelecer algumas definições, bem como, certas proposições, acompanhadas de suas respectivas demonstrações que servirão como suporte para formulação de alguns lemas e também outros resultados que serão acoplados à demonstração das duas peças centrais deste trabalho, ou seja, os teoremas 1 e 2.

No capítulo II, reside essencialmente toda a originalidade deste trabalho, pois nele estão inseridas as etapas integrantes às condições necessárias para alcançar o que pretendemos.

Começamos com o enunciado e demonstração do Lema 1* que versa, mediante certas hipóteses, sobre a existência de uma função $g(z) = c(z - k)^\lambda$ que satisfaz algumas condições. Vamos fazer uso da seqüência da proposição 1 para definir o conjunto A_n , bem como sua fronteira C_n .

Depois, utilizando as proposições 2 e 3, o lema e mais alguns aspectos

tos garantiremos a existência de uma seqüência quádrupla suficiente para definir uma função $f(z)$.

De posse disto, provamos que esta função $f(z)$ é uma função inteira, que seu conjunto final coincide com um conjunto fechado do plano complexo. Além disso, se $M(r)$ é o seu módulo máximo então o limite superior do quociente deste módulo máximo por uma função especial $p(r)$, que será caracterizada na definição 1 do capítulo das preliminares, é igual a 1. Conseqüentemente fazendo uso destes resultados demonstraremos o teorema 1.

Seguindo um pouco mais, vamos estabelecer o teorema 2, cujo resultado contém a resposta à questão de Pólya e cuja demonstração faremos uso de algumas definições, juntamente com alguns lemas que serão enunciados e demonstrados já no capítulo das preliminares.

Sendo assim, o leitor deverá observar que de posse destes resultados será capaz de não só responder à esta questão levantada por Pólya, mas também avançar um pouco mais, abrindo assim uma boa perspectiva, com excelentes chances de estabelecer novos resultados no tocante a esta área de pesquisa. Desta forma, com estas etapas esperamos conduzir o leitor ao pleno entendimento de nosso trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo responder a seguinte questão:

“ Se $f(z)$ é uma função inteira que cresce mais rapidamente do que uma função exponencial então necessariamente seu conjunto final contém pelo menos um ponto”?

ABSTRACT

In this work we give an answer to the following question:

“ Does a transcendental entire function whose growth is faster than exponential necessarily have a non-empty final set”?

Capítulo 1

PRELIMINARES

Definição 1. Definimos funções de classe \mathcal{P} como sendo o conjunto das funções reais $p(r)$, com $r \geq 0$, tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p(r) \text{ é contínua ;} \\ (2) \quad p(r) \text{ é estritamente crescente ;} \\ (3) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-c} p(r) = \infty \quad \forall c \end{array} \right.$$

A função a seguir, que figura atualmente na teoria das Funções Meromorfas, nos será de grande utilidade em diversas ocasiões.

Definição 2. Definimos $\log^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\log^+ x = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \log x & x > 1 \end{cases}$$

Esta função satisfaz as seguintes propriedades:

$$\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b,$$

$$\log a = \log^+ a - \log^+ \frac{1}{a} \quad \text{para } a > 0,$$

$$\log^+(a+b) \leq \log^+ 2 \max(a,b) \leq \log^+ a + \log^+ b + \log 2.$$

Definição 3. Seja $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O número

$$\rho_{\Phi} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ \Phi(r)}{\log r}$$

é chamado de **ordem de crescimento** da função Φ .

O lema a seguir constitui-se um resultado clássico em Análise Complexa e sua demonstração poderá ser encontrada em qualquer livro básico sobre o assunto. (Por exemplo, [5])

Lema 1. Seja f uma função inteira transcendente e

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Então $M(r)$ é uma função de classe \mathcal{P} .

Definição 4. Se f é uma função inteira e $M(r)$ é a função módulo máximo acima então definimos a ordem de crescimento de f , como sendo, a ordem da função $M(r)$.

Denotaremos $O(f) = O(M) = \rho_f$.

Lema 2. Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma função inteira e $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Se

$$\theta_f = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}}$$

então

$$\theta_f = \rho_f.$$

Demonstração. A demonstração deste lema será feita em duas etapas: **primeira etapa.** Vamos mostrar que $\theta_f < \rho_f$. Inicialmente, convém ressaltar que, se $\theta_f = 0$ (por exemplo, se f é constante) então nada temos a provar, pois, pela definição 2, $\rho_f \geq 0$. Desta forma sem perda de generalidade podemos supor $\theta_f > 0$.

Seja $0 < s < \theta_f$,

então existe uma subsequência n_k de tal forma que,

$$\frac{n_k \log n_k}{\log \frac{1}{|a_{n_k}|}} > s$$

para todo n_k tal que $k \geq k_0$ para algum k_0 . Assim

$$\begin{aligned} n_k \log n_k &> s \log \frac{1}{|a_{n_k}|} \\ -n_k \log n_k &< \log |a_{n_k}|^s \\ |a_{n_k}| &> \frac{1}{n_k^{n_k/s}}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy temos que,

$$\frac{M(r)}{r^{n_k}} > |a_{n_k}|$$

isto é,

$$M(r) > \frac{r^{n_k}}{n_k^{n_k/s}}.$$

Seja $r_k = (e n_k)^{1/s}$, como $M(r) > \frac{r^{n_k}}{n_k^{n_k/s}} \quad \forall r$,
então vale também para r_k , $k \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$M(r) > \frac{[(e n_k)^{1/s}]^{n_k}}{n_k^{n_k/s}} = e^{n_k/s}$$

e assim, segue que

$$\log M(r_k) > \frac{n_k}{s} = \frac{r_k^s}{e s} > 0$$

Isto é,

$$\log \log M(r_k) > \log r_k^s - \log e s$$

Dividindo ambos os membros por $\log r_k$, temos

$$\frac{\log \log M(r_k)}{\log r_k} > \frac{s \log r_k}{\log r_k} - \frac{\log e s}{\log r_k} = s - \frac{1+s}{\log r_k}$$

Entretanto, quando $r_k \rightarrow \infty$

$$\frac{\log^+ \log^+ M(r_k)}{\log r_k} = \frac{\log \log M(r_k)}{\log r_k}$$

logo, tomando \limsup , segue que

$$\limsup_{r_k \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r_k)}{\log r} = \limsup_{r_k \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r_k)}{\log r_k} \geq s.$$

Portanto,

$$\rho_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r)}{\log r} \geq s$$

Como isto é verdadeiro para todos os s tal que $0 < s < \theta_f$

Concluimos que $\rho_f \geq \theta_f$.

Segunda etapa. Mostraremos agora que $\rho_f \leq \theta_f$.

É evidente que, se $\theta_f = \infty$ nada temos a demonstrar.

Suponhamos $\theta_f < \infty$. Seja $s > \theta_f$, então

$$\theta_f = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}} < s.$$

portanto, existe n_s tal que,

$$0 < \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}} < s \quad \text{para todo } n \geq n_s.$$

Assim sendo, para $n \geq n_s$,

$$\begin{aligned} n \log n &< s \log \frac{1}{|a_n|} \\ -n \log n &> \log |a_n|^s \end{aligned}$$

e portanto, segue que,

$$|a_n| < \frac{1}{n^{n/s}} \quad \text{para todo } n \geq n_s.$$

Seja r suficientemente grande para que $(2r)^s \geq n_s + 1$ e $M(r) > 1$ segue então que

$$\begin{aligned} M(r) &= \max_{|z|=r} |f(z)| \\ &= \max_{|z|=r} |a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots| \\ &\leq |a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \dots + |a_n| r^n + \dots \end{aligned}$$

Estabeleceremos agora um valor para n de tal forma que,

$$\frac{r^n}{n^{n/s}} < \frac{1}{2^n},$$

pois, com esta majoração podemos limitar de maneira mais adequada o que segue.

É evidente que,

$$\text{se } n > (2r)^s \quad \text{então} \quad \frac{r^n}{n^{n/s}} < \frac{1}{2^n}.$$

Assim sendo, colocamos

$$\Psi(r) = \sum_{n_s+1 \leq n \leq (2r)^s} |a_n| r^n, \quad A(r) = \sum_{n > (2r)^s} |a_n| r^n$$

e

$$\Phi(r) = \sum_{n=1}^{n_s} |a_n| r^n$$

Como

$$\begin{aligned} A(r) &= \sum_{n > (2r)^s} |a_n| r^n < \sum_{n > (2r)^s} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{[(2r)^s]+1}} = k \end{aligned}$$

onde k é um número real e $[(2r)^s]$ representa o maior inteiro menor ou igual a $(2r)^s$. Similarmente

$$\Psi(r) = \sum_{n_s+1 \leq n \leq (2r)^s} |a_n r^n| < \sum_{n_s+1 \leq n \leq (2r)^s} \frac{1}{n^{n/s}} r^n \leq r^{(2r)^s} \sum_{n=n_s+1}^{\infty} \frac{1}{n^{n/s}},$$

como

$$\sum_{n=n_s+1}^{\infty} \frac{1}{n^{n/s}} \text{ converge,}$$

então seja k_1 sua soma, desta forma, segue que,

$$\Psi(r) < r^{(2r)^s} k_1.$$

Por outro lado, $\Phi(r)$ é um polinômio de grau n , de posse destes resultados, temos,

$$M(r) < \Phi(r) + k_1 r^{(2r)^\sigma} + k$$

Isto é,

$$\begin{aligned} M(r) &< r^{(2r)^\sigma} \left[k_1 + \frac{k}{r^{(2r)^\sigma}} + \frac{\Phi(r)}{r^{(2r)^\sigma}} \right] \\ &< r^{(2r)^\sigma} N \end{aligned}$$

onde, $N = \left[k_1 + \frac{k}{r^{(2r)^\sigma}} + \frac{\Phi(r)}{r^{(2r)^\sigma}} \right]$. assim

$$\log M(r) < \log r^{(2r)^\sigma} + \log N$$

ou seja

$$\log M(r) < \log r^{(2r)^\sigma} \left(1 + \frac{\log N}{\log r^{(2r)^\sigma}} \right)$$

Aplicando novamente \log em ambos os membros segue que,

$$\log \log M(r) < \log \log r^{(2r)^\sigma} \left(1 + \frac{\log N}{\log r^{(2r)^\sigma}} \right)$$

isto é.

$$\log \log M(r) < \log(2r)^\sigma + \log \left(1 + \frac{\log N}{\log r^{(2r)^\sigma}} \right)$$

dividindo ambos os membros por $\log r$ e tomando o \limsup quando $r \rightarrow \infty$ temos

$$\rho_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma \log 2}{\log r} + \frac{\sigma \log r}{\log r} + \frac{\left(1 + \frac{\log N}{\log r^{(2r)^\sigma}} \right)}{\log r} \right)$$

Portanto,

$$\rho_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \leq 0 + s + 0 = s.$$

Desta forma, $\rho_f \leq s$ e como $s > \theta_f > 0$, segue que, $\rho_f \leq \theta_f$.

Provando assim que $\rho_f = \theta_f$. ■

O lema a seguir garante a existência de funções de crescimento regular.

Lema 3. Se $0 \leq \rho \leq \infty$ então existe uma função $p \in \mathcal{P}$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log p(r)}{\log r} = \rho. \quad (1.1)$$

Demonstração. A demonstração deste lema será feita em três etapas.

Primeira etapa. Vamos mostrar que se $\rho \in (0, \infty)$ então existe $p \in \mathcal{P}$ tal que a identidade 1.1 se verifica. Com efeito, se $\rho \in (0, \infty)$ então colocamos:

$$p(r) = e^{r^\rho}$$

Evidentemente, $p \in \mathcal{P}$.

resta mostrar que $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log p(r)}{\log r} = \rho$.

De fato, basta observar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log e^{r^\rho}}{\log r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho \frac{\log r}{\log r} = \rho.$$

Segunda etapa. Vamos mostrar agora que o lema vale para $\rho = 0$. Com efeito, se $\rho = 0$, colocamos:

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n^2}}$$

É evidente que $p \in \mathcal{P}$. Resta mostrar que a identidade 1.1 é satisfeita. De fato, como $p(z)$ é uma função inteira, então pelo lema 2

$$\begin{aligned} \rho_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \log \frac{1}{n^{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

Terceira etapa. Finalmente, vamos mostrar o lema para o caso $\rho = \infty$. Com efeito, se $\rho = \infty$, colocamos:

$$p(r) = e^{e^r}$$

Evidentemente, $p \in \mathcal{P}$. Vamos mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log p(r)}{\log r} = \infty.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log p(r)}{\log r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log e^r}{\log r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\log r} = \infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 4. Seja $\Phi(r)$ uma função que satisfaz as condições do lema 3, para $0 \leq \rho \leq \infty$.

Se $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\Psi(r)}{\Phi(r)} = 1$$

então

$$O(\Psi) = O(\Phi) = \rho.$$

Demonstração. Com efeito, do fato de $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\Psi(r)}{\Phi(r)} = 1$, então, dado $\epsilon > 0$ e r suficientemente grande, segue que

$$\frac{\Psi(r)}{\Phi(r)} \leq 1 + \epsilon$$

ou seja,

$$\Psi(r) \leq (1 + \epsilon)\Phi(r).$$

Aplicando o \log^+ em ambos os membros, temos

$$\log^+ \Psi(r) \leq \log^+ [(1 + \epsilon)\Phi(r)]$$

repetindo o processo,

$$\log^+ \log^+ \Psi(r) \leq \log^+ [\log^+(1 + \epsilon) + \log^+ \Phi(r)]$$

$$\log^+ \log^+ \Psi(r) \leq \log^+ \log^+ \Phi(r) \left[\frac{\log^+(1 + \epsilon)}{\log^+ \Phi(r)} + 1 \right]$$

Dividindo ambos os membros por $\log r$, temos

$$\frac{\log^+ \log^+ \Psi(r)}{\log r} \leq \frac{\log^+ \log^+ \Phi(r)}{\log r} + \frac{\log^+ \left[1 + \frac{\log^+(1 + \epsilon)}{\log^+ \Phi(r)} \right]}{\log r}.$$

Como

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ \Phi(r)}{\log r} = \rho$$

e

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \left[1 + \frac{\log^+(1 + \epsilon)}{\log^+ \Phi(r)} \right]}{\log r} = 0$$

então

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ \Psi(r)}{\log r} \leq \rho$$

ou seja, pela definição 3, segue que $\rho_\Psi \leq \rho_\Phi = \rho$.

Reciprocamente, pelo fato de $\lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\Psi(r)}{\Phi(r)} = 1$,

podemos escolher uma seqüência $\{r_n\}_1^\infty$ com $r_n \rightarrow \infty$ de tal forma que

$$\frac{\Psi(r_n)}{\Phi(r_n)} \rightarrow 1,$$

e então, dado $\epsilon > 0$ e n suficientemente grande, segue que

$$\frac{\Psi(r_n)}{\Phi(r_n)} \geq 1 - \epsilon$$

ou seja,

$$\Psi(r_n) \geq \Phi(r_n)(1 - \epsilon).$$

Aplicando \log^+ em ambos os membros temos,

$$\log^+ \Psi(r_n) \geq \log^+ \Phi(r_n)(1 - \epsilon)$$

repetindo o processo, temos

$$\log^+ \log^+ \Psi(r_n) \geq \log^+ [\log^+ \Phi(r_n) + \log^+(1 - \epsilon)]$$

$$\log^+ \log^+ \Psi(r_n) \geq \log^+ \left[\log^+ \Phi(r_n) \left(\frac{\log^+(1 - \epsilon)}{\log^+ \Phi(r_n)} + 1 \right) \right]$$

isto é,

$$\log^+ \log^+ \Psi(r_n) \geq \log^+ \log^+ \Phi(r_n) + \log^+ \left(\frac{\log^+(1 - \epsilon)}{\log^+ \Phi(r_n)} + 1 \right)$$

Se n é suficientemente grande então $\log r_n > 0$.

Logo,

$$\frac{\log^+ \log^+ \Psi(r_n)}{\log r_n} \geq \frac{\log^+ \log^+ \Phi(r_n)}{\log r_n} + \frac{\log^+ \left[\frac{\log^+(1-\epsilon)}{\log^+ \Phi(r_n)} + 1 \right]}{\log r_n}$$

Entretanto, como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ \Phi(r_n)}{\log r_n} = \rho_\Phi = \rho$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{\log^+(1-\epsilon)}{\log^+ \Phi(r_n)} + 1 \right]}{\log r_n} = 0$$

então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ \Psi(r_n)}{\log r_n} \geq \rho_\Phi = \rho.$$

Ou seja

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ \Psi(r)}{\log r} \geq \rho_\Phi = \rho.$$

Portanto, $\rho_\Psi \geq \rho_\Phi = \rho$.

Assim sendo, segue que $O(\Psi) = O(\phi) = \rho$. ■

Observação 1. (Plano estendido)

Notação. Se K é um conjunto fechado do plano complexo denotaremos por \check{K} o conjunto do plano estendido:

$$\check{K} = K \cup \{\infty\}$$

Definição 5. Seja f uma função inteira e $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dizemos que z pertence ao conjunto final de f se, e somente se, toda vizinhança de z contém zeros de uma quantidade infinita de derivadas da função f .

Denotaremos conjunto final da função f por L_f

Para que o leitor possa familiarizar-se um pouco mais com a definição 5, vamos encontrar o conjunto final de algumas funções.

Primeiro exemplo. Encontrar o conjunto final de $f(z) = e^z$

Solução. Seja $f(z) = e^z$ então

$$f'(z) = f''(z) = f'''(z) = \dots = f^n(z) = e^z,$$

significa que as derivadas de todas as ordens são iguais a e^z . Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, segue que, o conjunto final desta função não possui elemento algum, ou seja, $L_f = \emptyset$.

Segundo exemplo. Encontrar o conjunto final de $f(z) = \operatorname{sen} z$

Solução. Seja $f(z) = \operatorname{sen} z$ então

$$f'(z) = \cos z$$

$$f''(z) = -\operatorname{sen} z$$

$$f'''(z) = -\cos z \text{ e assim sucessivamente, temos}$$

$$f^{2n}(z) = (-1)^n \operatorname{sen} z \text{ e } f^{2n+1}(z) = (-1)^n \cos z.$$

Significa que o conjunto final desta função é composto pelos seguintes elementos:

$$L_f = \left\{ \dots, \frac{-k\pi}{2}, \dots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots, \frac{k\pi}{2}, \dots \right\} \cup \{\infty\} \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Terceiro exemplo. Encontrar o conjunto final de $f(z) = z \operatorname{sen} z$

Solução.

Com um pouco mais de trabalho verifica-se que o conjunto final desta função coincide com o conjunto final da função $f(z) = \operatorname{sen} z$.

Quarto exemplo. Encontrar o conjunto final de $f(z) = z^2 e^z$.

Solução.

Para isto vamos utilizar a fórmula de Leibnitz:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Assim sendo, temos

$$\begin{aligned} (z^2 e^z)^{(n)} &= z^2 e^z + 2n z e^z + n(n-1) e^z \\ &= e^z (z^2 + 2nz + n(n-1)) \end{aligned}$$

Cujos zeros são: $-n - \sqrt{n}$ e $-n + \sqrt{n}$, logo, o seu conjunto final contém apenas o elemento ∞ , ou seja, $L_f = \{\infty\}$.

Vamos agora enunciar e demonstrar alguns resultados sobre conjunto final de uma função inteira. Entretanto, convém ressaltar que para isto faremos uso de dois teoremas clássicos de Pólya e Saxer cujas demonstrações exigem

conhecimentos bem mais requintados do que os aqui expostos.

Teorema (Pólya-Saxer). Se $g(z)$ é uma função inteira e não é um polinômio então $g(z) = P(z)e^{Q(z)}$, onde P e Q são polinômios, ou $gg'g''$ tem uma quantidade infinita de zeros.

Teorema (Pólya). Seja $g(z) = P(z)e^{Q(z)}$, onde P e Q são polinômios. Se Q é de grau $q \geq 2$ então L_f consiste de q semi-retas igualmente espaçadas saindo do mesmo ponto.

Proposição 1.1. O conjunto final de uma função inteira $f(z)$ é fechado.

Demonstração. a) Se $L_f = \emptyset$ nada temos a provar, pois, \emptyset é fechado.

b) Seja $\{z_n\}_1^\infty$ uma seqüência em L_f , com $\{z_n\}_1^\infty$ convergindo para $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Vamos mostrar que $z \in L_f$.

De fato, como $z_n \rightarrow z$, então dado $\epsilon > 0$, arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$ tal que $|z_n - z| < \epsilon$.

Entretanto, $z_n \in L_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto quer dizer que podemos tomar uma vizinhança de z_n de raio $\frac{\epsilon}{2}$, que certamente existirá uma infinidade de $f^n(z)$ com zeros nesta vizinhança.

Portanto, como ϵ é arbitrário, significa que qualquer vizinhança do elemento z , existem zeros de uma quantidade infinita de $f^n(z)$.

Logo, $z \in L_f$. Assim sendo, L_f é fechado. ■

Proposição 1.2. *O conjunto final de uma função inteira obedece apenas uma das seguintes propriedades:*

$$(1) \quad \infty \in L_f \quad \text{ou} \quad (2) \quad L_f = \emptyset.$$

Demonstração. Vamos demonstrar esta proposição em duas etapas e em ambas utilizaremos essencialmente os teoremas de Pólya-Saxer e Pólya.

Primeira etapa. Se $f(z)$ é uma função inteira e não é um polinômio e $ff'f''$ tem uma quantidade infinita de zeros então f , f' ou f'' tem uma quantidade infinita de zeros.

Como os zeros de uma função inteira que não é constante só podem se acumular no infinito, ∞ é um ponto de acumulação; logo, $\infty \in L_f$.

Segunda etapa. Por outro lado, se $f(z)$ não é um polinômio e

$f(z) = P(z)e^{Q(z)}$, podemos ter o seguinte:

$$(1) \quad f(z) = P(z)e^{Q(z)} \quad \text{onde} \quad Q(z) \text{ tem grau } q \geq 2,$$

mas, ocorrendo isto, o teorema de Pólya nos garante que L_f consiste de q -semi-retas igualmente espaçadas saindo do mesmo ponto, significa então que $\infty \in L_f$.

$$(2) \quad f(z) = P(z)e^{Q(z)} \quad \text{onde} \quad Q(z) \text{ tem grau } q = 1.$$

Neste caso, $f(z) = P(z)e^{Q(z)}$, onde $Q(z) = cz + d$.

Ou seja,

$$f(z) = P_1(z)e^{az} \quad \text{onde} \quad P_1(z) = P(z)e^d.$$

Derivando, vamos obter,

$$f^n(z) = \{c^n a_1 z^m + [a_2 c + n m a_1] c^{n-1} z^{m-1} \\ + [c^2 a_3 + n a_2 c (m-1) + n a_1 m (m-1)] c^{n-2} z^{m-2} + \dots\} e^{cz}$$

como a soma das raízes é

$$S_r = \frac{-a_2 c^n - n m a_1 c^{n-1}}{c^n a_1} = \frac{-a_2}{a_1} - \frac{n m}{c}$$

a média aritmética das raízes será:

$$M_{S_r} = \frac{S_r}{m} = \frac{-a_2}{a_1 m} - \frac{n}{c}$$

como

$$\left| \frac{a_2}{a_1 m} \right| < M \quad \text{e} \quad \left| \frac{n}{c} \right| \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty,$$

temos,

$$|M_{S_r}| \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Significa que pelo menos uma das raízes tende para infinito, logo, $\infty \in L_f$.

(3) Se $f(z) = P(z)$ então apartir de um certo $n_0 \in \mathbb{N}$, digamos, $n+1 > n_0$, $f^{n+1}(z) = 0$.

Portanto, todo $z \in \mathbb{C}$ é zero de $f^{n+1}(z)$, isto é, $\mathbb{C} \subset L_f$. Assim sendo, $\infty \in L_f$.

(4) Se $P(z) = \text{constante}$ então $f(z) = K e^{cz}$, como e^{cz} nunca se anula, então significa que, $L_f = \emptyset$.

Portanto, como (1) (2) (3) e (4) fecham todas as possibilidades, concluimos que $\infty \in L_f$ ou $L_f = \emptyset$. ■

Capítulo 2

CONJUNTO FINAL

É importante registrar neste momento que a função $p(r)$ que será usada nas próximas demonstrações é uma função de classe \mathcal{P} acrescida da hipótese de $p(0) > 0$.

Lema 1*. *Sejam s e ϵ constantes positivas e N e λ_0 inteiros positivos. Seja k uma constante complexa. Então existe $c > 0$ e $\lambda \in \mathbf{Z}$ com $\lambda > \lambda_0$ tal que a função*

$$g(z) = c(z - k)^\lambda \quad (2.1)$$

satisfaz

$$|g^n(z)| < \epsilon, \quad 0 \leq n \leq N, \quad |z| \leq s, \quad (2.2)$$

$$|g(z)| \leq p(|z|), \quad |z| \geq 0, \quad (2.3)$$

e existe z_0 , $|z_0| > s$, tal que

$$|g(z_0)| = p(|z_0|). \quad (2.4)$$

Demonstração. A demonstração deste lema será feita em sete etapas.

Primeira etapa. Inicialmente, vamos mostrar que para $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $|g_\lambda^n(z)| < \epsilon$, sempre que $0 \leq n \leq N$ e $|z| \leq s$.

De fato, suponhamos $k > 0$. Escolhemos $r_0 > s + 2k$. Para cada inteiro positivo $\lambda > \lambda_0$, definimos,

$$g_\lambda(z) = c_\lambda(z - k)^\lambda,$$

onde,

$$c_\lambda = \frac{p(r_0)}{(r_0 - k)^\lambda}, \quad c_\lambda > 0 \quad \text{e} \quad g_\lambda(r_0) = p(r_0).$$

Entretanto, para $|z| \leq s$,

$$|g_\lambda(z)| = |c_\lambda(z - k)^\lambda| = c_\lambda|z - k|^\lambda,$$

como, $|z - k| < s + k$ e $\lambda > 0$, temos

$$|z - k|^\lambda \leq (s + k)^\lambda.$$

Portanto,

$$|g_\lambda(z)| = c_\lambda|z - k|^\lambda \leq c_\lambda(s + k)^\lambda,$$

logo, pelo fato de $p(r_0) = c_\lambda(r_0 - k)^\lambda$, temos,

$$|g_\lambda(z)| \leq p(r_0) \frac{(s + k)^\lambda}{(r_0 - k)^\lambda}.$$

Afirmamos que,

$$p(r_0) \frac{(s + k)^\lambda}{(r_0 - k)^\lambda} \rightarrow 0 \quad \text{sempre que} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

De fato, basta observar que $p(r_0)$ é constante e que $\frac{r+k}{r_0-k} < 1$. Desta forma, dado $\epsilon > 0$, arbitrário, podemos escolher λ suficientemente grande de tal maneira que,

$$|g_\lambda(z)| < \epsilon \quad \text{para} \quad |z| \leq s.$$

Segunda etapa. Mostraremos agora que dado $\epsilon > 0$, arbitrário,

$$|g_\lambda^n(z)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |z| \leq s, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Com efeito, visto que,

$$g_\lambda(z) = c_\lambda(z - k)^\lambda$$

então

$$g'_\lambda(z) = \lambda c_\lambda(z - k)^{\lambda-1};$$

$$g''_\lambda(z) = \lambda(\lambda - 1)c_\lambda(z - k)^{\lambda-2};$$

$$g'''_\lambda(z) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)c_\lambda(z - k)^{\lambda-3}$$

e assim sucessivamente, temos;

$$g_\lambda^n(z) = c_\lambda \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \dots (\lambda - (n - 1))(z - k)^{\lambda-n}.$$

Como,

$$\lambda^n \geq \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - (n - 1)) \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{Z},$$

então

$$\begin{aligned} |g_\lambda^n(z)| &\leq \lambda^n c_\lambda |z - k|^{\lambda - n} \\ &= \lambda^n c_\lambda |z - k|^\lambda |z - k|^{-n} \\ &\leq \frac{\lambda^n p(r_0) (s + k)^\lambda}{|z - k|^n (r_0 - k)^\lambda}. \end{aligned}$$

Como, $0 < \frac{s+k}{r_0-k} < 1$, colocamos, $\frac{s+k}{r_0-k} = \frac{1}{b}$, segue que $b > 1$.

Portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |g_\lambda^n(z)| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n p(r_0)}{|z - k|^n b^\lambda},$$

usando a regra de L'hospital, temos,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |g_\lambda^n(z)| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{n! p(r_0)}{|z - k|^n (\log b)^n b^{n\lambda}} = 0,$$

assim sendo, dado $\epsilon > 0$, arbitrário, podemos escolher λ suficientemente grande de tal forma que;

$$|g_\lambda^n(z)| < \epsilon, \quad \text{sempre que } |z| \leq s \quad \text{e} \quad 0 \leq n \leq N.$$

Terceira etapa. Nesta etapa mostraremos que

$$|g_\lambda(z)| \leq p(|z|), \quad \text{sempre que } |z| \leq s.$$

Com efeito, escolhendo λ suficientemente grande, temos,

$$|g_\lambda(z)| \leq p(0),$$

pois, $p(0) > 0$.

Entretanto, $p(z)$ é crescente, então,

$$|g_\lambda(z)| \leq p(0) \leq p(|z|) \quad \text{sempre que} \quad 0 \leq |z| \leq s.$$

Quarta etapa. Vamos garantir que apartir de um certo inteiro $M > 0$, $p(|z|)$ cresce muito mais rápido do que $c_\lambda(z - k)^\lambda$.

Ou seja,

$$p(|z|) \geq c_\lambda(z - k)^\lambda \quad \text{a medida que} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Em síntese, é suficiente mostrar que,

$$\frac{|g_\lambda(z)|}{p(|z|)} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

De fato,

$$\frac{|g_\lambda(z)|}{p(|z|)} = \frac{|c_\lambda(z - k)^\lambda|}{p(|z|)},$$

evidentemente, podemos escrever,

$$(z - k)^\lambda = z^\lambda + a_1 z^{\lambda-1} + a_2 z^{\lambda-2} + \dots + a_\lambda,$$

onde, $a_1, a_2, \dots, a_\lambda$, são constantes complexas. Assim,

$$\frac{|c_\lambda(z - k)^\lambda|}{p(|z|)} = \frac{|c_\lambda| |z|^\lambda \left| 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_\lambda}{z^\lambda} \right|}{p(|z|)}.$$

Como por hipótese,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-c} p(r) = \infty, \quad \text{para todo } c,$$

então

$$\frac{|c_\lambda|}{|z|^{-\lambda} p(|z|)} \rightarrow 0$$

e como $(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_\lambda)$ é limitado, concluímos que,

$$\frac{|g_\lambda(z)|}{p(|z|)} = \frac{|c_\lambda(z-k)^\lambda|}{p(|z|)} \rightarrow 0, \quad \text{sempre que } |z| \rightarrow \infty.$$

Quinta etapa. Agora, escolhemos $M > 2k + s$ tal que $M > r_0$. Seja $A = \{z; s \leq |z| \leq M\}$.

Definimos,

$$H : A \rightarrow \mathbb{C}$$
$$H(z) = \frac{g_\lambda(z)}{p(|z|)}.$$

Evidentemente, H é contínua, pois, $g_\lambda(z)$ é um polinômio e $p(|z|)$ é contínua. Como H está definida num compacto, então pelo teorema de Weierstrass existe $z_0 \in A$ tal que,

$$|H(z_0)| \geq |H(z)|, \quad \text{para todo } z \in A.$$

Definimos, também para $z \in \mathbb{C}$,

$$g(z) = g_\lambda(z) \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|}. \quad (2.5)$$

Então, $z \in A$, temos,

$$|g(z)| = |g_\lambda(z)| \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} = \frac{|g_\lambda(z)| p(|z_0|) p(|z|)}{p(|z|) |g_\lambda(z_0)|}.$$

Como, $|H(z_0)| \geq |H(z)|$, segue que,

$$|g(z)| \leq \frac{|g_\lambda(z_0)| p(|z_0|) p(|z|)}{p(|z_0|) |g_\lambda(z_0)|} = p(|z|).$$

Portanto,

$$|g(z)| \leq p(|z|) \quad \text{para} \quad s \leq |z| \leq M.$$

Notemos ainda que conforme a construção de $g_\lambda(z)$, tivemos um certo $r_0 \in \mathbb{A}$ tal que $g_\lambda(r_0) = p(r_0)$, logo, $H(r_0) = 1$ e portanto, o máximo, isto é, $|H(z_0)| \geq 1$. Desta forma,

$$\frac{p(|z_0|)}{g_\lambda(z_0)} \leq 1.$$

Com isto, as conclusões seguem da seguinte forma: Sabemos que,

$$|g_\lambda(z)| < \epsilon \quad \text{para} \quad |z| \leq s \quad \text{e} \quad \frac{p(|z_0|)}{g_\lambda(z_0)} \leq 1.$$

então

$$|g(z)| < \epsilon \quad \text{para} \quad |z| \leq s,$$

pois,

$$|g(z)| = |g_\lambda(z)| \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} \leq \epsilon \cdot 1 = \epsilon.$$

Sexta etapa. Vamos reunir nesta etapa todos os resultados até agora conseguidos afim de justificar cada uma das afirmações feitas no lema.

Assim temos, a afirmação (2.2) do lema, isto é,

$$|g^n(z)| < \epsilon, \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq N, \quad |z| \leq s,$$

segue imediatamente, pois,

$$|g^n(z)| = |g_\lambda^n(z)| \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} \leq \epsilon \cdot 1 = \epsilon.$$

A afirmação (2.3) do lema, segue utilizando as partes (A),(B) e (C), abaixo:

Parte (A).

$$|g(z)| = |g_\lambda(z)| \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} \leq p(|z|) \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} \leq p(|z|)$$

pois,

$$\frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} \leq 1 \quad \text{e} \quad |g_\lambda(z)| \leq p(|z|), \quad \text{para} \quad |z| \leq s.$$

Parte (B).

$$|g(z)| = |g_\lambda(z)| \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} \leq p(|z|) \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} \leq p(|z|)$$

pois,

$$\frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} \leq 1 \quad \text{e} \quad |g_\lambda(z)| \leq p(|z|) \quad \text{para} \quad |z| \geq M.$$

Parte (C).

Pela quinta etapa desta demonstração temos,

$$|g(z)| \leq p(|z|) \quad \text{para} \quad s \leq |z| \leq M.$$

Finalmente, a afirmação (2.4) do lema, segue de (2.5) colocando $z = z_0$.

Ou seja,

$$|g(z_0)| = |g_\lambda(z_0)| \frac{p(|z_0|)}{|g_\lambda(z_0)|} = p(|z_0|).$$

Sétima etapa. Para completar a demonstração deste lema é importante ressaltar que para o caso geral onde k é uma constante complexa qualquer, todas as conclusões anteriores permanecem verdadeiras.

De fato, podemos escolher $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $k = e^{i\theta}|k|$.

Com isto, temos,

$$\begin{aligned} |g_\lambda(z)| &= |(z - e^{i\theta}|k|)^\lambda| \\ &= |e^{i\lambda\theta}| |(ze^{-i\theta} - |k|)^\lambda| \\ &= |(ze^{-i\theta} - |k|)^\lambda|. \end{aligned}$$

Portanto, para $\omega = ze^{-i\theta}$, temos,

$$|\omega| = |ze^{-i\theta}| = |z| \leq s.$$

Desta forma, as conclusões anteriores permanecem verdadeiras, mesmo quando, k for uma constante complexa qualquer. ■

Proposição 1. *Seja K um conjunto fechado do plano complexo \mathbb{C} . Então existe uma seqüência $\{a_n\}_1^\infty$ em \mathbb{C} cujo conjunto dos pontos limites de todas as suas subseqüências $\{a_{n_k}\}_1^\infty$ é exatamente K .*

Demonstração. Com efeito, definimos, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$B_n = \left\{ \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \ ; \ \{j, k\} \subset \{-n^2, -n^2+1, \dots, 0, \dots, n^2-1\} \right\}$$

Seja

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

então A é uma família enumerável de retângulos.

Portanto, podemos escrever,

$$A = \{D_1, D_2, D_3, \dots, D_n, \dots\} \quad \text{onde } D_n \text{ são retângulos.}$$

Definimos agora a seqüência $\{a_n\}_1^\infty$ da seguinte forma:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$ se $D_n \cap K = \emptyset$ caso contrário escolhemos um elemento arbitrário da intersecção.

Com isto, vamos mostrar que \check{K} coincide com o conjunto dos pontos limites de todas as subseqüências $\{a_{n_k}\}_1^\infty$ de $\{a_n\}_1^\infty$.

Com efeito, seja $\{a_{n_k}\}_1^\infty$ uma subseqüência de $\{a_n\}_1^\infty$ tal que $\{a_{n_k}\}_1^\infty$ converge para um elemento arbitrário a . Certamente podemos tomar uma subseqüência $\{a_{n_{k_j}}\}_1^\infty$ de $\{a_{n_k}\}_1^\infty$ tal que os termos $a_{n_{k_j}} \in K$ para todo $n_{k_j} \in \mathbb{N}$. Logo, como K é fechado, segue que $a \in K$. Portanto, $a \in \check{K}$.

Para o caso em que a seqüência tomada seja divergente é trivial, pois, $\infty \in \check{K}$.

Reciprocamente, seja $a \in \check{K}$, significa que $a \in K$ ou $a = \infty$. Suponhamos que $a \in K$.

Como B_n é uma cobertura para $[-n, n] \times [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, então tomando n suficientemente grande de tal forma que $a \in \cup_{n=1}^\infty B_n$, segue que existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ com $k \geq k_0$ tal que $a \in \cup_{k=k_0}^\infty B_k$.

É sabido, conforme a construção de B_n que, para $k \geq k_0$ existe um D_{jk} subretângulo de B_k que contém a , pois, $a \in \cup_{k=k_0}^\infty B_k$.

Assim sendo, afirmamos que existe $\{a_{jk}\}_1^\infty$ em D_{jk} tal que $a_{jk} \rightarrow a$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, arbitrário, escolhemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{2}}{k_0} < \epsilon$.

Assim para $k \geq k_0$ temos $|a_{jk} - a| \leq \frac{\sqrt{2}}{k}$, pois, a_{jk} e a são elementos de D_{jk} .

Portanto,

$$|a_{jk} - a| \leq \frac{\sqrt{2}}{k} < \frac{\sqrt{2}}{k_0} < \epsilon.$$

Logo, $\{a_{jk}\}$ converge para a .

Finalmente, para o caso em que $a = \infty$, basta observar que o retângulo

$$\left[\frac{n^2 - 1}{n}, \frac{n^2}{n} \right] \times \left[\frac{n^2 - 1}{n}, \frac{n^2}{n} \right]$$

contribuirá com um ponto para a seqüência a_k e isto resultará numa subseqüência de a_k convergindo para ∞ . Portanto, ∞ está em \check{K} . ■

Antes de enunciármos a próxima proposição vamos definir alguns aspectos importantes.

Inicialmente, utilizando a seqüência $\{a_n\}_1^\infty$ da proposição 1, definimos

$$A_n = \{z; |z - a_n| \geq \frac{1}{n}, |z| \leq n + |a_n|\} \quad (2.6)$$

e $C_n =$ Fronteira de A_n .

A seguir, vamos garantir a existência de uma seguinte seqüência quádrupla, procedendo da seguinte forma:

Seja $c_1 = \lambda_1 = r_1 = \rho_1 = 1$. Nós escolhemos a seqüência quádrupla $\{c_n, \lambda_n, \rho_n, r_n\}_1^\infty$, indutivamente.

Suponhamos inicialmente que esta seqüência exista para $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que os termos c_{n+1} , λ_{n+1} , ρ_{n+1} e r_{n+1} existem. Para que possamos fazer isto, vamos enunciar e demonstrar duas proposições que servirão para tal propósito.

Proposição 2. Seja

$$\delta_k = \inf_{0 \leq m \leq \lambda_k} \{ \inf_{z \in A_k} |g_k^m(z)| \} \quad (2.7)$$

Então

$$\delta_k > 0 \quad \text{sempre que} \quad k \leq n.$$

Demonstração. De fato,

$$|g_k^m(z)| = |c_k \lambda_k (\lambda_k - 1) (\lambda_k - 2) \dots (\lambda_k - (m - 1)) (z - a_k)^{\lambda_k - m}| > 0$$

pois, $g_k^m(z) = 0$ somente quando $z = a_k$, mas como $z = a_k \notin A_k$, então

$$|g_k^m(z)| > 0.$$

Segue então que,

$$\inf_{z \in A_k} |g_k^m(z)| > 0.$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} |g_k^m(z)| &= |c_k \lambda_k (\lambda_k - 1) (\lambda_k - 2) \dots (\lambda_k - (m - 1)) (z - a_k)^{\lambda_k - m}| \\ &= |c_k| |\lambda_k| |\lambda_k - 1| \dots |\lambda_k - (m - 1)| |z - a_k|^{\lambda_k - m} \\ &\geq \frac{|c_k|}{|k|^{\lambda_k - m}}, \end{aligned}$$

$$\text{pois, } |z - a_k| \geq \frac{1}{k}.$$

Sendo assim, fazendo $a = \lambda_k - m$, temos $a > 0$. Portanto,

$$|g_k^m(z)| \geq \frac{1}{|k|^a} > 0, \quad \text{pois, } |k| \geq 1.$$

Desta maneira,

$$\inf_{0 \leq m \leq \lambda_k} \{ \inf_{z \in A_k} |g_k^m(z)| \} > 0.$$

Logo, segue que

$$\delta_k > 0, \quad \text{sempre que} \quad k \leq n. \quad \blacksquare$$

Proposição 3. Seja

$$\inf_{|z| \leq k + |c_k|} |g_k^{\lambda_k}(z)| = \eta_k \quad (2.8)$$

Então

$$\eta_k > 0, \quad \text{sempre que} \quad k \leq n.$$

Demonstração. Evidente, pois, $|g_k^{\lambda_k}(z)| = |c_k| |\lambda_k| = M$ onde M é uma constante maior do que zero. \blacksquare

Feito isto, vamos construir os termos c_{n+1} , λ_{n+1} , r_{n+1} e ρ_{n+1} em duas etapas: **Primeira etapa.** Escolhemos

$$\lambda_{n+1} \geq \lambda_{n+2}. \quad (2.9)$$

Para escolher ρ_{n+1} vamos proceder da seguinte forma:

Afirmamos que

$$\left| \sum_{k=1}^n g_k(z) \right| < \frac{p(r)}{n} \quad \text{para} \quad |z| = r \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

De fato

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n g_k(z) \right| &= \frac{|g_1(z) + g_2(z) + \dots + g_n(z)|}{p(r)} \\ &\leq \frac{|g_1(z)|}{p(r)} + \frac{|g_2(z)|}{p(r)} + \dots + \frac{|g_n(z)|}{p(r)}. \end{aligned}$$

Conforme a quarta etapa do lema,

$$\frac{|\sum_{k=1}^n g_k(z)|}{p(r)} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |z| = r \rightarrow \infty.$$

Portanto, para $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$, temos,

$$\frac{|\sum_{k=1}^n g_k(z)|}{p(r)} < \frac{1}{n},$$

ou seja,

$$|\sum_{k=1}^n g_k(z)| < \frac{p(r)}{n} \quad \text{sempre que} \quad |z| = r \rightarrow \infty.$$

Portanto, se ρ_{n+1} for suficientemente grande então para todo $r > \rho_{n+1}$ teremos que a desigualdade (2.10) será satisfeita. Assim sendo, escolhemos ρ_{n+1} de tal forma que (2.10) é satisfeito para $|z| = r > \rho_{n+1}$ e ainda,

$$\rho_{n+1} \geq \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (k + |a_k|), \quad \rho_{n+1} > r_n \quad \text{e} \quad \rho_{n+1} > \rho_n. \quad (2.11)$$

Segunda etapa. Esta etapa consiste em usar o Lema 1* para construir os termos

$$c_{n+1} \quad \text{e} \quad r_{n+1}.$$

De fato, Sejam, $s = \rho_{n+1}$ e $\epsilon = \frac{1}{2^{n+1}} \min(\delta_k, \eta_k, 1)$ constantes positivas. Sejam $\lambda_n = N$ e $\lambda_0 = \lambda_{n+2}$ inteiros positivos.

Seja $k = a_{n+1}$ uma constante complexa qualquer.

Então existe $c = c_{n+1} > 0$ e inteiros positivos $\lambda = \lambda_{n+1} > \lambda_{n+2} = \lambda_0$ tal que a função

$$g_{n+1}^m(z) = c_{n+1}(z - a_{n+1})^{\lambda_{n+1}}$$

conforme o Lema 1*, satisfaz:

$$|g_{n+1}^m(z)| < \frac{1}{2^{n+1}} \min(\delta_k, \eta_k, 1) \quad (2.12)$$

para $|z| \leq \rho_{n+1}$ e $0 \leq m \leq \lambda_n$;

$$|g_{n+1}(z)| \leq p(|z|) \quad \text{para} \quad |z| \geq 0 \quad (2.13)$$

e existe z_{n+1} , com

$$|z_{n+1}| = r_{n+1} > \rho_{n+1}, \quad (2.14)$$

tal que,

$$|g_{n+1}(z_{n+1})| = p(|z_{n+1}|). \quad (2.15)$$

Completando assim a construção dos termos c_{n+1} e r_{n+1} . Portanto, por estas etapas fica garantido a existência da seqüência quádrupla

$$\{\lambda_n, \rho_n, r_n, c_n\}_1^\infty.$$

Disto segue também que,

$$\rho_n \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

pois,

$$\rho_{n+1} \geq n \quad \text{e} \quad \rho_{n+1} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Em função do fato da seqüência quádrupla existir, definimos,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a_n)^{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z). \quad (2.17)$$

Proposição 4. *Afirmamos que $f(z)$ assim definida é uma função inteira.*

Demonstração. Seja O um compacto do plano complexo \mathbb{C} . Escolhemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_{n+1} \geq n$ e de tal maneira que $O \subset \{z; |z| \leq \rho_{n+1}\}$.

Assim sendo, usando (2.10), temos,

$$|g_{n+1}^m(z)| < \frac{1}{2^{n+1}} \min(\delta_k, \eta_k, 1)$$

para $|z| \leq \rho_{n+1}$ $0 \leq m \leq \lambda_n$. Logo,

$$|g_{n+1}^m(z)| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{para } z \in O,$$

pois, $\min_{1 \leq k \leq n} (\delta_k, \eta_k, 1) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Entretanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ converge; então usando o critério de Weierstrass, a série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_{n+1}^m(z) \text{ converge uniformemente para } z \in O.$$

Acontece que a afirmação (2.10) é verdadeira para $0 \leq m \leq \lambda_n$, portanto, fazendo $m = 0$ temos,

$$|g_{n+1}(z)| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{para } z \in O,$$

ou seja, pelo mesmo critério, temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1}(z)| \text{ converge uniformemente em } z \in O.$$

Logo,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) \text{ é uma função inteira. } \blacksquare$$

Proposição 5. Seja $f^{\lambda_m}(z)$ a derivada de ordem λ_m da função $f(z)$.

Então

$$f_m^{\lambda}(z) \text{ não tem zeros em } |z| \leq m + |a_m| \text{ sempre que } m \geq 1.$$

Demonstração. Afirmamos inicialmente que,

$$f^{\lambda_m}(z) = g_m^{\lambda_m}(z) + E_m(z) = \text{Constante} + E_m(z).$$

De fato,

$$\begin{aligned} f^{\lambda_m}(z) &= c_m \lambda_m! + c_{m+1} \lambda_{m+1} (\lambda_{m+1} - 1) \dots (\lambda_{m+1} - (\lambda_m - 1)) (z - a_{m+1})^{\lambda_{m+1} - \lambda_m} \\ &\quad + c_{m+2} \lambda_{m+2} (\lambda_{m+2} - 1) \dots (\lambda_{m+2} - (\lambda_m - 1)) (z - a_{m+2})^{\lambda_{m+2} - \lambda_m} + \dots \\ &\quad + c_{m+k} \lambda_{m+k} (\lambda_{m+k} - 1) \dots (\lambda_{m+k} - (\lambda_{m-1})) (z - a_{m+k})^{\lambda_{m+k} - \lambda_m} + \dots \\ &= g_m^{\lambda_m}(z) + g_{m+1}^{\lambda_m}(z) + g_{m+2}^{\lambda_m} + \dots + g_{m+k}^{\lambda_m} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Fazendo, } E_m(z) = g_{m+1}^{\lambda_m}(z) + g_{m+2}^{\lambda_m}(z) + \dots + g_{m+k}^{\lambda_m}(z) + \dots$$

Então

$$f^{\lambda_m} = g_m^{\lambda_m}(z) + E_m(z) = c_m \lambda_m! + E_m(z) = \text{Constante} + E_m(z). \quad (2.18)$$

Vamos mostrar agora que

$$|E_m(z)| < |g_m^{\lambda_m}(z)| \quad \text{para} \quad |z| \leq m + |a_m|.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} |E_m(z)| &= |g_{m+1}^{\lambda_m}(z) + g_{m+2}^{\lambda_m}(z) + \dots + g_{m+k}^{\lambda_m}(z) + \dots| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n^m(z)| \end{aligned}$$

e como $|z| \leq m + |a_m| \leq \rho_{n+1}$

então usando (2.10) ,temos

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n^m(z)| < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(\delta_m, \eta_m, 1), \quad (2.19)$$

sempre que $m \leq n + 1$.

Entretanto,

$$\min(\delta_m, \eta_m, 1) \leq \eta_m,$$

logo,

$$\begin{aligned} |E_m(z)| &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n^m(z)| < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min_{1 \leq m \leq n} (\delta_m, \eta_m, 1) \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\eta_m}{2^n}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\eta_m}{2^n} = \eta_m \left(\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \dots \right).$$

Como

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

é uma série geométrica cuja razão é $\frac{1}{2}$ e o primeiro termo é $\frac{1}{2^{m+1}}$,
 temos,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m},$$

logo,

$$|E_m(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\eta_m}{2^n} = \frac{\eta_m}{2^m} < \eta_m \leq |g_m^{\lambda_m}(z)|,$$

pois, $\eta_m = \inf |g_m^{\lambda_m}(z)|$ para $|z| \leq m + |a_m|$.

Portanto,

$$|E_m(z)| < |g_m^{\lambda_m}(z)| \quad \text{para} \quad |z| \leq m + |a_m|. \quad (2.20)$$

Como $f^{\lambda_m}(z)$ e $g_m^{\lambda_m}(z)$ são funções analíticas, pois, $f(z)$ é inteira e $g_m^{\lambda_m}(z)$ é constante em A_m e na sua fronteira, isto é em C_m , e também como, respectivamente, por (2.18) e (2.20),

$$|f^{\lambda_m}(z)| < 2|g_m^{\lambda_m}(z)|,$$

então pelo teorema de Rouché

$$f^{\lambda_m}(z) + g_m^{\lambda_m}(z) \quad \text{e} \quad g_m^{\lambda_m}(z)$$

tem o mesmo número de zeros em $|z| \leq m + |a_m|$.

Como $g_m^{\lambda_m}(z)$ é constante em $|z| \leq m + |a_m|$ significa que $g_m^{\lambda_m}(z)$ não tem zeros nesta região.

Portanto,

$f^{\lambda_m}(z)$ não tem zeros nesta região. ■

Proposição 6. Se $\lambda_{m-1} < s < \lambda_m$ então

$f^s(z)$ tem pelo menos um zero em $|z - a_m| < \frac{1}{m}$

e nenhum zero em $|z| \leq m + |a_m|$.

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que

$$f^s(z) = g_m^s(z) + F_s(z)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} f^s(z) = & c_m \lambda_m (\lambda_m - 1) \dots (\lambda_m - (s - 1)) (z - a_m)^{\lambda_m - s} \\ & + c_{m+1} \lambda_{m+1} (\lambda_{m+1} - 1) \dots (\lambda_{m+1} - (s - 1)) (z - a_{m+1})^{\lambda_{m+1} - s} + \dots \end{aligned}$$

Logo,

$$f^s(z) = g_m^s(z) + g_{m+1}^s(z) + \dots + g_{m+j}^s(z) + \dots$$

Fazendo $F_s(z) = g_{m+1}^s(z) + g_{m+2}^s(z) + \dots + g_{m+j}^s(z) + \dots$

temos que,

$$f^s(z) = g_m^s(z) + F_s(z). \quad (2.21)$$

Agora mostraremos que,

$$|F_s(z)| < |g_m^s(z)| \quad \text{para } z \in C_m.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |F_s(z)| &= |g_{m+1}^s(z) + g_{m+2}^s(z) + \dots + g_{m+j}^s(z) + \dots| \\ &\leq |g_{m+1}^s(z)| + |g_{m+2}^s(z)| + \dots + |g_{m+j}^s(z)| + \dots \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n^s(z)| \end{aligned}$$

Como, $|z| \leq m + |a_m| \leq \rho_{n+1}$ usando (2.10) temos,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n^s(z)| < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min_{1 \leq k \leq m} (\delta_k, \eta_k, 1)$$

Mas, como

$$\min_{1 \leq k \leq m} (\delta_k, \eta_k, 1) \leq \delta_m$$

e a série geométrica

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m}$$

Então

$$|F_s(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n^s(z)| < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(\delta_k, \eta_k, 1) \leq \frac{\delta_m}{2^m} < \delta_m$$

Logo,

$$|F_s(z)| < |g_m^s(z)| \quad \text{para} \quad |z| \leq m + |a_m|, \quad (2.22)$$

ou seja,

$$|F_s(z)| < |g_m^s(z)| \quad \text{para todo} \quad z \in C_m$$

Similarmente, $f^s(z)$ e $g_m^s(z)$ são analíticas em A_m e C_m e como pelas desigualdades (2.21) e (2.22)

$$|f^s(z)| < 2|g_m^s(z)|$$

então pelo teorema de Rouché

$$f^s(z) + g_m^s(z) \quad \text{e} \quad g_m^s(z)$$

tem o mesmo número de zeros nesta região.

Como $g_m^o(z)$ tem pelo menos um zero em $|z - a_m| < \frac{1}{m}$ e nenhum zero em $|z| \leq m + |a_m|$, concluímos que $f^o(z)$ tem pelo menos um zero em $|z - a_m| < \frac{1}{m}$ e nenhum zero em $|z| \leq m + |a_m|$. ■

Proposição 7. O conjunto final da função inteira $f(z)$ definida pela série em (2.17) é exatamente \check{K} .

Demonstração. Esta demonstração será feita em duas partes:

primeira parte. Suponhamos que $K \neq \emptyset$ e $z \in K$.

Seja $\{a_{n_j}\}_1^\infty$ uma subsequência que converge para z .

Então dado $\epsilon > 0$, escolhamos $j \geq j_0$, suficientemente grande de tal forma que $\frac{1}{n_j} < \frac{\epsilon}{2}$ e ainda $|a_{n_j} - z| < \frac{\epsilon}{2}$.

Assim sendo pela proposição 6, temos que,

$$\text{para } \lambda_{n_{j-1}} < \sigma < \lambda_{n_j},$$

$$f^o(z) \text{ tem pelo menos um zero em } |a_{n_j} - z| < \frac{1}{n_j}$$

e nenhum zero em $|z| \leq n_j + |a_{n_j}|$. Portanto, $f^o(z)$ tem pelo menos um zero no conjunto $\{\omega : |\omega - z| < \epsilon\}$.

Como existem infinitudes de j com a propriedade de $j \geq j_0$, certamente existirá uma infinidade de derivadas da função $f(z)$ que se anulará neste conjunto. Portanto $z \in L_f$.

Segunda parte. Suponhamos que $z \in \mathbb{C} - K$. Como $\mathbb{C} - K$ é aberto então existe uma vizinhança $V = B(z, r)$ $r > 0$, tal que a intersecção, ou seja, $V = B(z, r) \cap K = \emptyset$.

Desta forma, podemos escolher $n \geq n_0$ de tal maneira que

$$\frac{1}{n_0} < \frac{r}{2} \quad \text{e que} \quad V = B(z, r) \subset \{z, |z| \leq n + |a_n|\}.$$

Segue então que,

$$V = B(z, r/2) \cap B(a_n, 1/n_0) = \emptyset.$$

Entretanto, se $\lambda_{n-1} < s < \lambda_n$ a proposição 6 garante que

$$f^{\circ}(z) \quad \text{tem pelo menos um zero em} \quad |z - a_n| < \frac{1}{n_0}$$

e nenhum zero em $|z| \leq n + |a_n|$,

então como $B(z, r/2) \subset \{z; |z| \leq n + |a_n|\}$

significa que,

$$f(z) \quad \text{não tem zeros em} \quad B(z, r/2),$$

isto é, $z \notin L_f$.

Como $L_f \neq \emptyset$ então pela proposição 1.2 o ponto ∞ está em L_f , logo,

$$L_f = \mathbb{K}.$$

Consideremos agora $K = \emptyset$.

Neste caso temos que

$$a_n \rightarrow \infty.$$

Entretanto, pela proposição 6, para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos escolher

a_m como sendo um zero de $f^{(\lambda_{m-1}+1)}$ em $|z - a_m| < \frac{1}{m}$.

Obviamente a_m converge para ∞ .

Portanto,

$$\infty \in L_f.$$

Finalmente para o caso em que $z \in \mathbb{C}$ a demonstração segue de maneira similar ao que foi feito na segunda parte. ■

Proposição 8. *Seja $f(z)$ a função inteira definida em (2.17). Seja $p(r)$ satisfazendo as condições da definição 1 .*

Se $M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ então $\lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{M(r)}{p(r)} = 1$

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que:

se

$$\rho_n \leq |z| = r \leq \rho_{n+1}$$

então

$$|f(z)| < \frac{p(r)}{n-1} + p(r) + 1.$$

Com efeito,

$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |g_k(z)| + |g_n(z)| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z) \right|$$

entretanto pela desigualdade (2.10) segue que,

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} g_k(z) \right| < \frac{p(|z|)}{n-1} = \frac{p(r)}{n-1} \quad \text{sempre que} \quad |z| = r \geq \rho_n;$$

pelo lema 1*,

$$|g_n(z)| \leq p(|z|) = p(r) \quad \text{para} \quad |z| = r \geq 0$$

e

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |g_k(z)|$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(\delta_k, \eta_k, 1) \\
&< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^n} < 1 \quad \text{para } |z| = r \leq \rho_{n+1}
\end{aligned}$$

assim,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z) \right| < 1 \quad \text{sempre que } |z| = r \leq \rho_{n+1}. \quad (2.23)$$

Portanto,

$$|f(z)| < \frac{p(r)}{n-1} + p(r) + 1 \quad \text{para } \rho_n \leq |z| \leq \rho_{n+1}.$$

Se

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

então

$$M(r) < \frac{p(r)}{n-1} + p(r) + 1.$$

E ainda, como, $p(r) > 0$ para todo r , segue que,

$$\frac{M(r)}{p(r)} < \frac{p(r)}{(n-1)p(r)} + \frac{p(r)}{p(r)} + \frac{1}{p(r)} = \frac{1}{n-1} + 1 + \frac{1}{p(r)}.$$

Entretanto, quando $r \rightarrow \infty$, temos que,

$$p(r) \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad n \rightarrow \infty,$$

logo,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{p(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} + 1 + \frac{1}{p(r)} = 1.$$

Portanto,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{p(r)} \leq 1.$$

Reciprocamente,

$$\begin{aligned} |f(z_n)| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} g_k(z_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z_n) + g_k(z_n) \right| \\ &\geq |g_k(z_n)| - \left| \sum_{k=1}^{n-1} g_k(z_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z_n) \right| \end{aligned}$$

Como

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} g_k(z_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z_n) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} g_k(z_n) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z_n) \right|$$

Então

$$|f(z_n)| \geq |g_k(z_n)| - \left| \sum_{k=1}^{n-1} g_k(z_n) \right| - \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z_n) \right|$$

Portanto, usando as desigualdades (2.14) e (2.15) temos,

$$|g_k(z_n)| \leq p(|z_n|) - p(r_n) \quad \text{sempre que } r_n = |z_n| < \rho_{n+1}.$$

Seguem, respectivamente de (2.10) e (2.19) que,

$$\sum_{k=1}^{n-1} |g_k(z_n)| < \frac{p(r_n)}{n-1} \quad \text{para } |z_n| = r_n \geq \rho_n$$

e

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(z_n) \right| < 1 \quad \text{para } |z_n| = r_n \leq \rho_{n+1}$$

Logo,

$$|f(z_n)| \geq p(r_n) - \frac{p(r_n)}{n-1} - 1.$$

Mas,

$$M(r_n) = \max_{|z_n|=r_n} |f(z_n)|.$$

Assim sendo,

$$M(r_n) \geq p(r_n) - \frac{p(r_n)}{n-1} - 1.$$

Entretanto $p(r_n) > 0$ para todo r_n e tanto $p(r_n)$ quanto n tende a infinito, sempre que, $r_n \rightarrow \infty$.

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r_n)}{p(r_n)} &\geq \limsup_{r_n \rightarrow \infty} \frac{p(r_n)}{p(r_n)} - \frac{p(r_n)}{(n-1)p(r_n)} - \frac{1}{p(r_n)} \\ &= \limsup_{r_n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{p(r_n)} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, isto significa que existe uma seqüência $\{r_n\}_1^\infty$

com $r_n \rightarrow \infty$

tal que

$$\limsup_{r_n \rightarrow \infty} \frac{M(r_n)}{p(r_n)} \geq 1.$$

Logo,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{p(r)} \geq 1,$$

ou seja, podemos concluir que ,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{p(r)} = 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 1. Seja K um conjunto fechado do plano complexo.

Seja $p(r)$ uma função satisfazendo as condições da definição 1.

Então existe uma função inteira $f(z)$ tal que o seu conjunto final é exatamente \check{K} , isto é, $L_f = \check{K}$ e além disso seu módulo máximo, $M(r)$

Satisfaz

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{p(r)} = 1.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema segue trivialmente assim: Consideremos a função inteira $f(z)$ construída em (2.17); conforme a proposição 7 seu conjunto final é exatamente o conjunto \check{K} e segundo a proposição 8

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{p(r)} = 1.$$

Completando assim o que queríamos. ■

Teorema 2. Para cada $0 \leq \rho \leq \infty$ existe uma função inteira de ordem ρ cujo conjunto final é $\{\infty\}$, isto é, não possui elementos do plano complexo.

Demonstração. Seja $0 \leq \rho \leq \infty$. Pelo lema 3, existe uma função $p(r) \in \mathcal{P}$ tal que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log p(r)}{\log r} = \rho.$$

Mas pelo teorema 1, para $K = \emptyset$ existe uma função inteira $f(z)$ tal que

$$L_f = \{\infty\} \quad \text{e} \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{p(r)} = 1.$$

Como, pelo lema 4 e a definição 4, respectivamente, temos

$$O(M(r)) = O(p(r)) = \rho \quad \text{e} \quad O(f) = O(M(r))$$

Segue então que

$$O(f) = O(p(r)) = \rho.$$

Assim sendo, mostramos que existe uma função inteira $f(z)$ tal que

$$O(f) = \rho \quad \text{e} \quad L_f = \{\infty\}. \quad \blacksquare$$

Portanto, como o leitor pode observar para cada $0 \leq \rho \leq \infty$ é possível encontrar uma função inteira cuja ordem de crescimento é ρ tal que seu conjunto final não possui elemento algum do plano complexo, o que responde negativamente a questão (Q).

É importante ressaltar que ao propor esta questão, Pólya, evidentemente, não estava se referindo ao elemento ∞ , haja visto que, ele próprio já havia contribuído para demonstrar que o conjunto final de uma função inteira tinha apenas uma das seguintes propriedades: $L_f = \emptyset$ ou $\infty \in L_f$. Desta forma, isto certamente confirma que a sua preocupação era sem dúvidas, com o fato do conjunto final possuir ou não pelo menos um elemento do plano complexo? Como conclusão podemos dizer que o teorema acima, não só é uma resposta para a questão Q, como também, confirma o que Pólya havia afirmado.

De um certo modo alguns resultados sobre conjunto final foram obtidos a partir do estudo das derivadas sucessivas de uma determinada função inteira. Entretanto, o leitor deve ter percebido que nosso trabalho seguiu o caminho inverso, ou seja, obtemos uma função inteira cujo o conjunto final já era de nosso conhecimento. Esperamos com isto ter proporcionado

ao leitor, subsídios suficientes para que ele tenha entendido o percurso e desejamos também que este trabalho sirva como inspiração a quem eventualmente seguir esta linha de pesquisa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Edrei, Albert and MacLane, G.R.: On the zeroes of the derivatives of an entire function. *Proc. Americ. Math. Soc.* 8 (1957), 702-706.
- [2] Pólya, G.: Über die nullstellen sukzessiver derivierten. *Math. Zeit.* vol. 12, 1922.
- [3] Pólya, G.: On the zeros of derivatives of a function and its analytic character. *Bull. Amer. Math.* vol. 49, 1943.
- [4] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis*, third ed., MacGraw-Hill Book Company, New York, 1976.
- [5] Titchmarsh, E.C.: *The theory of functions*. Oxford University Press, Second edition, 1986.
- [6] Saxer, W.: Über die Picardschen Ausnahmewerte Sukzessiver derivierten. *Math. Zeit.* vol. 17, 1923.

ÍNDICE ALFABÉTICO

- Conjunto A_n , 36
- Conjunto B_n , 34
- Conjunto compacto K 20, 34, 35, 54
- Conjunto final, 21, 22, 23, 24, 25, 47, 48, 53, 54
- Conjunto \check{K} , 20, 34, 35
- Delta índice k , 37
- Derivada de ordem λ_m da função inteira f , 42
- Eta índice k , 38
- Equivalência da ordem de crescimento de uma função, 10, 11
- Fronteira do conjunto A_n , 36
- Funções de classe \mathcal{P} , 9
- Função e^z , 21
- Função $E_m(z)$, 42, 43, 44
- Função $g(z) = c(z - k)^\lambda$, 26, 27, 30, 31, 32
- Função $H(z) = \frac{q_\lambda(z)}{p(|z|)}$, 31
- Função inteira, 41
- Função $\operatorname{sen} z$, 21, 22
- Ínfimo, 37, 38
- Módulo máximo de uma função, 10, 11, 13, 49, 50, 51, 52, 53
- Ordem de crescimento de uma função, 10, 53, 54
- Seqüência quádrupla, 36, 39, 40

Teorema de Pólya, 23, 24

Teorema de Pólya-Saxer, 23, 24

Teorema de Rouché, 44, 46