

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE DESCARGAS
TÉRMICAS EM CORPOS D'ÁGUA RASOS
DE GEOMETRIA E PROFUNDIDADE VARIÁVEIS**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

JUAN OYARZO PEREZ

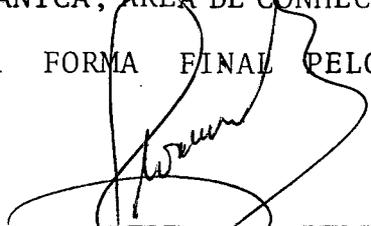
FLORIANÓPOLIS, JUNHO - 1987

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE DESCARGAS
TÉRMICAS EM CORPOS D'ÁGUA RASOS
DE GEOMETRIAS E PROFUNDIDADE VARIÁVEIS

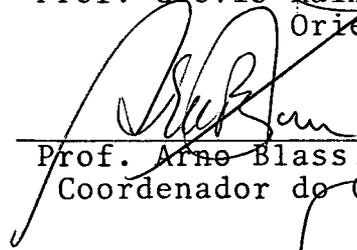
JUAN OYARZO PEREZ

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONHECIMENTO CIÊNCIAS
TÉRMICAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Orientador

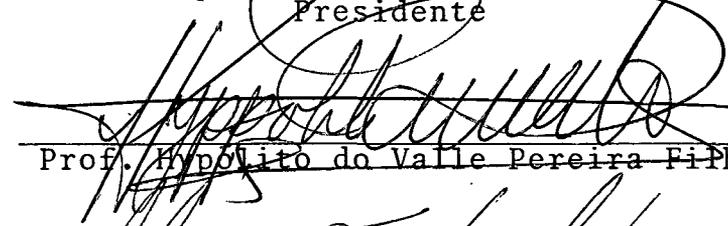


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador do Curso

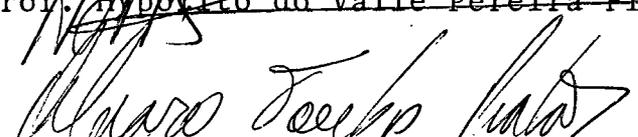
BANCA EXAMINADORA:



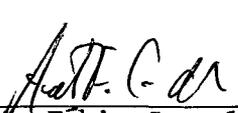
Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Presidente



Prof. Hipólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.



Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.



Prof. Antonio Fábio Carvalho da Silva, M.Eng.Mec.

A minha esposa Sylvia e meus
filhos, Claudia, Juan Fernando
e Gabriela, pela compreensão e
apoio.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Clovis Raimundo Maliska, pela orientação, pelos conhecimentos entregados e pela amizade demonstrada ao longo do período de minha estada na UFSC.

- Ao Professor Antonio Fabio Carvalho da Silva, pela valiosa cooperação.

- Ao Professor Arno Blass, pelo apoio na qualidade de Coordenador do Curso.

- Aos Professores do Curso de Pós-Graduação, pela formação específica.

- À Universidade de Magallanes (Chile), pela oportunidade de efetuar estudos de pós-graduação.

- À CAPES, pelo apoio financeiro.

- A todos aqueles que, de alguma forma, colaboraram para que este trabalho fosse levado a bom termo.

- A presente dissertação foi desenvolvida ao longo do projeto EMC/UFSC/ELETROSUL para o desenvolvimento de metodologias para previsão de descarga de jatos térmicos em rios e lagos. A cooperação recebida, as discussões realizadas com os integrantes do SINMEC - Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor e o apoio da ELETROSUL são aqui agradecidos.

ÍNDICE

	Página
LISTA DE TABELAS	ix
LISTA DE FIGURAS	x
SIMBOLOGIA	xv
RESUMO	xxi
ABSTRACT	xxii
 CAPÍTULOS	
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 - Preliminares	1
1.2 - Revisão Bibliográfica	4
1.3 - Perfil da Dissertação	8
 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	 11
2.1 - Introdução	11
2.2 - Formulação do Problema	11
2.3 - Equações Governantes do Problema no Sistema Car tesiano	 13
 3. GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS	 19
3.1 - Introdução	19
3.2 - Transformação do Sistema Coordenado	19
3.3 - Geração do Sistema Coordenado	24
3.4 - Controle de Espaçamento entre linhas e Pontos Coordenados	 28

4. TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	31
4.1 - Introdução	31
4.2 - Variáveis Dependentes para as Equações Transfor madas	31
4.3 - Transformação das Equações Governantes	35
5. MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS APLICADOS ÀS EQUAÇÕES GO- VERNANTES NO PLANO TRANSFORMADO	41
5.1 - Introdução	41
5.2 - Disposição das Variáveis Dependentes na Malha ..	41
5.3 - Equações Aproximadas no Plano Cartesiano	43
6. ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO	54
6.1 - Introdução	54
6.2 - Equações do Movimento em Termos de U e V	54
6.3 - Método para Tratar o Acoplamento Pressão-Veloci dade	57
6.4 - Obtenção da Equação para a Pressão	61
7. CONDIÇÕES DE CONTORNO	65
7.1 - Introdução	65
7.2 - Considerações Gerais sobre as Condições de Con- torno	66
7.3 - Condição de Contorno da Velocidade	69
7.4 - Determinação dos Gradientes de Pressão nos Volu mes de Controle das Velocidades na Fronteira ...	70
7.5 - Condições de Contronno para a Pressão	72

7.6 - Determinação dos Gradientes de Temperatura nos Volumes de Controle Situados na Fronteira	76
7.7 - Condições de Contorno para a Temperatura	77
8. RESULTADOS	84
8.1 - Introdução	84
8.2 - Testes Hidrodinâmicos	85
8.2.1 - Escoamento em um Canal com Expansão	85
8.2.2 - Canal com Profundidade Variando Linearmente	106
8.3 - Testes Envolvendo Transferência de Calor	109
8.3.1 - Teste em uma Geometria Variável com Jato e Perda de Calor na Superfície	109
8.3.2 - Escoamento Bidimensional com Descargas Térmicas em um Lago de Geometria e Profundidade Variável	114
9. CONCLUSÕES	132
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	134
APÊNDICES	
A - COMPRIMENTO NO DOMÍNIO FÍSICO. EQUAÇÕES GOVERNANTES NO PLANO TRANSFORMADO	139
A.1 - Introdução	139
A.2 - Comprimento e Áreas no Plano Transformado	139
A.3 - Transformação da Equação de Conservação da Massa no Plano Transformado	141

A.4 - Transformação da Equação Genérica Governante para o Plano Transformado	144
B - DETERMINAÇÃO DE GRADIENTES DE PRESSÃO, COEFICIENTES E TERMOS FONTES PARA VOLUMES DE CONTROLE DA CONTINUIDADE NA FRONTEIRA	146
B.1 - Introdução	146
B.2 - Determinação dos Gradientes de Pressão nas Fronteiras	146
B.3 - Coeficientes e Termos Fonte da Equação da Pressão para Volume de Controle da Continuidade na Fronteira	150
C - DETERMINAÇÃO DE FLUXO DE CALOR, GRADIENTES DE TEMPERATURAS E EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA PARA VOLUMES DE CONTROLE NAS FRONTEIRAS	157
C.1 - Introdução	157
C.2 - Determinação dos Fluxos de Calor	157
C.3 - Determinação dos Gradientes de Temperatura nos Volumes de Controle na Fronteira	161
C.4 - Equações e Termos Fonte para a Temperatura para Volume de Controle nas Fronteiras	163

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1 - Grandezas S^ϕ , P^ϕ e Γ^ϕ para as Equações governantes	17
Tabela 2 - Grandezas \hat{S}^ϕ , \hat{P}^ϕ para as equações governantes transformadas	38
Tabela 3 - Vorticidade na parede para $Re = 10$	95
Tabela 4 - Pressão na parede para $Re = 10$	96
Tabela 5 - Vorticidade na parede para $Re = 100$	97
Tabela 6 - Pressão na parede para $Re = 100$	98
Tabela 7 - Resumo de resultados	100

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1 - Domínio com malha adaptada à geometria, e malha ortogonal	3
Figura 2 - Domínio físico do problema da convecção forçada bidimensional em geometria variável	12
Figura 3 - Volume elementar no domínio físico para efetuar os balanços de conservação de uma variável ϕ genérica	13
Figura 4 - Transformação de coordenadas	22
Figura 5 - Domínio físico com sistema natural de coordenadas	25
Figura 6 - Domínio transformado	26
Figura 7 - Componentes cartesianas covariantes e contravariantes do vetor velocidade \vec{V}	32
Figura 8 - Componentes contravariantes, e contravariantes sem normalização métrica	33
Figura 9 - Posição das variáveis na malha adotada	43
Figura 10 - Volume de controle elementar no plano transformado	44
Figura 11 - Determinação das componentes contravariantes U e V não necessárias para satisfazer a conservação da massa	60

Figura 12 - Volume de controle da continuidade, com as velocidades que participam no balanço de massa	61
Figura 13 - Volume de controle fictício no domínio transformado	67
Figura 14 - Volume de controle da velocidade V na fronteira. Avaliação do gradiente $\frac{\partial P}{\partial \xi}_3$	70
Figura 15 - Aproximação do perfil de pressão na fronteira	71
Figura 16 - Volume de controle da continuidade, com suas velocidades contravariantes, que participam no balanço de massa na fronteira	73
Figura 17 - Volume de controle para avaliar os gradientes de temperatura na fronteira	77
Figura 18 - Volume de controle de temperatura com seus fluxos de calor para o balanço	78
Figura 19 - Volume de controle identificado por L para a temperatura na fronteira	81
Figura 20 - Geometria do canal para $Re = 10$	86
Figura 21 - Volume de controle para u e v no cálculo de seus gradientes	88
Figura 22 - Volume de controle da pressão para calcular seus gradientes nos pontos f	89
Figura 23 - Malha utilizada no problema canal com $Re = 10$. Caso TEST 1	91

Figura 24 - Malha utilizada no problema canal com $Re = 10$. Caso TEST 2	92
Figura 25 - Domínio do canal com as condições de contorno utilizadas	93
Figura 26 - Distribuição da vorticidade na parede para $Re = 10$	101
Figura 27 - Distribuição da pressão na parede para $Re = 10$	102
Figura 28 - Distribuição da vorticidade na parede para $Re = 100$	103
Figura 29 - Distribuição da pressão na parede para $Re = 100$	104
Figura 30 - Canal reto com profundidade constante no domínio	107
Figura 31 - Canal reto com profundidade variável linearmente	108
Figura 32 - Domínio físico de uma geometria variável com suas condições de contorno	110
Figura 33 - Malha não ortogonal usada na geometria variável no plano físico	111
Figura 34 - Isotermas com temperaturas de descarga de 30°C e 40°C para $R = 4$	112
Figura 35 - Isotermas com temperaturas de descarga de 30°C para $R = 4$ e $R = 8$	113

Figura 36 - Domínio físico do Lago Ontário com suas profundidades e contorno	115
Figura 37 - Domínio de cálculo utilizado	116
Figura 38 - Grade computacional usada no modelo matemático para simulação da descarga térmica no lago	117
Figura 39 - Perfil do fundo do lago para uma seção A-A ..	118
Figura 40 - Condições de contorno usadas no domínio do lago	121
Figura 41 - Campo de velocidade do modelo deste trabalho	124
Figura 42 - Campo de velocidades modelo 14 	125
Figura 43 - Isotermas do modelo deste trabalho	128
Figura 44 - Isotermas modelo 14 para $k = 2$	129
Figura 45 - Isotermas modelo 14 para $k = 3$	130
Figura 46 - Isotermas 17°C superpostas, do modelo 14 com $k = 2$, $k = 3$ e do modelo deste trabalho ..	131
Figura A.1 - Comprimento no domínio físico	140
Figura A.2 - Relações entre as velocidades cartesianas e as contravariantes	142
Figura B.1 - Volume de controle de fronteira onde são avaliados os gradientes de pressão	147

Tabela

Figura B.2 - Perfil parabólico da pressão assumido para calcular seu gradiente nas fronteiras Norte e Este	148
Figura B.3 - Perfil da pressão para avaliar seu gradiente nas fronteiras Sul e Oeste	149
Figura B.4 - Volume de controle de fronteira para a continuidade com condições de contorno no plano transformado	151
Figura C.1 - Volume de controle para determinar o fluxo de calor nas fronteiras Este e Oeste	158
Figura C.2 - Volume de controle para determinar o fluxo de calor nas fronteiras Norte e Sul	160
Figura C.3 - Volume de controle de fronteira onde são avaliados os gradientes de temperaturas ...	161
Figura C.4 - Volume de controle para avaliação dos gradientes de temperaturas nos pontos w nas faces de fronteiras	163
Figura C.4 - Volume de controle de fronteira e condições de contorno para a temperatura no plano transformado, para avaliação de equações e termos fontes	164

SIMBOLOGIA

- d - Profundidade do domínio.
- x, y - Sistema cartesiano de coordenadas.
- q, E, F, R, S - Grandezas definidas na Equação (2.5).
- $\hat{q}, \hat{E}, \hat{F}, \hat{R}, \hat{S}$ - Grandezas definidas na Equação (4.10).
- S^ϕ - Termo fonte na equação de conservação para ϕ .
- \hat{S}^ϕ - Termo fonte transformado na equação de transformação para ϕ .
- $L | |$ - Operador da aproximação em volumes finitos da quantidade entre colchetes.
- J - Jacobiano da transformação definida pelas Equações (3.1) e (3.2).
- J_o - Jacobiano da transformação definida pelas Equações (3.5) e (3.6).
- P, Q - Termos fontes das Equações (3.14) e (3.15) de geração de malha.
- a, b, c, d - Coeficientes nas Equações (3.23) e (3.24) para P e Q .
- g_{ij} - Componentes do tensor métrico covariante.
- $d\vec{A}$ - Área elementar no plano físico.
- dL_ξ, dL_η - Comprimentos elementares no plano físico.

- ΔV - Volume de um volume de controle no plano transformado.
- $\Delta_{\xi}, \Delta_{\eta}$ - Comprimentos elementares no plano transformado.
- \vec{V} - Vetor velocidade.
- u, v - Componentes de velocidades no sistema cartesiano.
- U, V - Componentes contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica.
- \bar{U}, \bar{V} - Componentes contravariantes do vetor velocidade, definidas pelas Equações (4.28) e (4.29).
- V^i - Componente contravariantes do vetor velocidade.
- V_i - Componente covariantes do vetor velocidade.
- \hat{U}, \hat{V} - Velocidades definidas pelas Equações (6.1) e (6.2).
- u_{∞}, v_{∞} - Velocidades cartesianas uniformes nas fronteiras com entrada de massa.
- ω - Vorticidade na parede definida pela Equação (8.5) no plano transformado.
- P - Pressão.
- ΔP_f - Gradiente de pressão nas fronteiras.
- P_w - Pressão na parede.
- T - Temperatura.
- T_1, T_2 - Temperaturas uniformes nas fronteiras com entrada de massa.

- T_{amb} - Temperatura ambiente.
- t - tempo na Equação (5.3).
- Δt - Avanço do tempo.
- E - Fator multiplicativo do tempo dado pela Equação (5.31).
- e, w, n, s - Indicadores das faces Este, Oeste, Norte e Sul para volumes de controle.
- P - Indicador de volume de controle.
- $E, W, N, S, NE, NW, SE, SW$ - Indicador de volumes de controle vizinhos ao elemento P .
- C_1, C_2, C_4, C_5 - Coeficientes definidos pelas Equações (4.19) a (4.21).
- $A_P^*, A_P^\phi, A_e^\phi, A_w^\phi, \dots, A_{sw}^\phi$ - Coeficientes nas equações aproximadas para ϕ .
- M_e, D_e - Parcelas convectivas e difusivas presentes nos coeficientes acima.
- B - Termo fonte na equação para pressão.
- ST - Termo fonte na equação para temperatura.
- $S_F^{u,v}$ - Tensões pelo atrito no fundo do domínio para as componentes cartesianas u, v .
- $S_S^{u,v}$ - Tensões cizalhamento pelo vento na superfície para as componentes cartesianas u, v .

- S_F^T - Fluxo pela condução de calor no fundo do domínio.
- S_S^T - Fluxo de calor perdido na superfície dado pela Equação (8.14).
- q - Fluxo de calor por condução nas fases.
- k - Coeficiente de condutividade térmica.
- k_t - Coeficiente de condutividade térmica turbulento. Equação (8.19).
- H - Coeficiente de transferência de calor por convecção.
- C_p - Calor específico à pressão constante.
- R - Relação de vazão nos escoamentos confluentes.
- Q_R - Vazão do escoamento principal.
- Q_j - Vazão do jato.
- Re - Número de Reynolds.
- re - Número de Peclet da malha. Equação (5.14).
- P_{rt} - Número de Prandtl turbulento. Equação (8.18).
- α, β, γ - Componentes do tensor métrico. Equações (3.20) a (3.22).
- $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ - Coeficientes para os perfis convectivos e difusivos. Equações (5.12) e (5.13).
- ϵ - Tolerância para critérios de convergência.
- ϵ_ω - Erros percentuais da vorticidade na parede definido pela Equação (8.12).

- ϵ_p - Erros porcentuais da pressão na parede definido pela Equação (8.13).
- ξ, η - Sistema generalizado de coordenadas. Domínio transformado.
- ϕ - Campo escalar genérico.
- Γ^ϕ - Coeficiente de transporte difusivo para um escalar ϕ .
- μ - Viscosidade absoluta.
- μ_t - Viscosidade absoluta turbulenta.
- α_t - Difusividade térmica turbulenta.
- ρ - Massa específica.
- σ - Fronteiras no domínio físico. Figura 5.
- σ^* - Fronteiras do domínio transformado. Figura 6.

SUBÍNDICES

- x, y, ξ, η - Derivadas parciais de primeira ordem.
- $xx, yy,$
 $\xi\xi, \eta\eta$ - Derivadas parciais de segunda ordem.
- P, E, N, S...
 SW - Pontos onde as variáveis são avaliadas.
- e, w, n, s, f - Pontos onde as variáveis são avaliadas.

SUPERÍNDICES

- $\hat{}$ - Indica quantidades transformadas.
- - Indica valores médios na profundidade.
- n, n+1,
n+ θ - Níveis de tempo t, t+ Δt e t+ $\theta\Delta t$ respectivamente.

RESUMO

Na presente dissertação é abordado o problema bidimensional elíptico de uma descarga térmica em um lago de geometria variável, levando-se em consideração a geometria irregular do fundo do domínio através da realização de médias das variáveis na profundidade.

As equações governantes do problema são transformadas de um sistema coordenado cartesiano para um sistema coordenado não ortogonal, gerado este, a partir da solução de um sistema elíptico de equações. Aplica-se o método dos volumes finitos onde as equações governantes são discretizadas no plano transformado.

Com a utilização de balanços para todos os volumes elementares as condições de contorno são incorporadas nas equações algébricas.

O modelo numérico é testado resolvendo-se o problema hidrodinâmico de um canal com expansão suave, usando-se malhas não ortogonais. Outro teste hidrodinâmico é feito em um canal incorporando as profundidades constantes e variável do domínio, para verificação da equação da conservação da massa. Este teste tem o objetivo de verificar a correção do programa com relação a variável profundidade.

Por último, o modelo é aplicado na solução do problema da descarga de um jato quente em um lago com profundidade variável e a solução é comparada com aquela obtida com um modelo tridimensional.

ABSTRACT

The thermal discharge problem in lakes and rivers is analyzed using a two-dimensional elliptic model where the bathymetry is taken into account performing an averaging of the variables in the vertical direction. The arbitrary shape of the shoreline is considered using a conforming boundary coordinate system. Buoyance effects are not taken into account, so the solution is valid for shallow waters with thermal discharges having a large densimetric Froude number.

The model transforms the governing equations from the Cartesian coordinate system to a general curvilinear coordinate system in whose system the equations are discretized using the finite volume method. Boundary conditions are incorporated in the algebraic equations by applying the conservation equations for the boundary elemental volumes. The resulting model is, therefore, fully conservative.

To test the model, suitable fluid flow problems are solved and the results compared with the ones available in the specialized literature. To demonstrate the generality, the thermal discharge into a lake is simulated and the results compared qualitatively with the one obtained with a three-dimensional model.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Preliminares

Relacionados aos avanços tecnológicos dos processos industriais encontram-se, hoje em dia, os problemas que são devidos às descargas de poluentes em rios e lagos, por descargas contínuas de despejos ou contaminantes liberados acidentalmente, bem como os problemas oriundos de descargas de jatos térmicos, provocados por usinas térmicas e nucleares que utilizam corpos d'água para resfriamento de seus condensadores.

Tanto a descarga de poluentes como o fenômeno térmico provocam danos no ambiente local; devido à existência dos efeitos de difusão e convecção de massa, o poluente e a descarga térmica se propagam em um certo raio de ação, o que poderá afetar seriamente o local, do ponto de vista ecológico, sabe-se que a fauna depende das mudanças de temperatura, existindo organismos que morrem devido a pequenos aumentos de temperatura. Em alguns casos pode ocorrer uma migração completa de certas espécies ou, o que é geral, um sério ataque ao metabolismo aquático.

A consideração destes problemas se reflete na legislação ambiental, tentando-se formular um conjunto de procedimentos e normas, e grandes esforços são realizados com o propósito de assegurar que não haja prática de descargas em rios ou lagos sem atenção ao objetivo de proteger o meio ambiente de uma

maneira socialmente benéfica, de acordo com as condições naturais do lugar.

Pela existência desta grande variedade de problemas é que se faz necessário conhecer as condições de fluxos, o campo de temperatura e de concentrações produzido pelas descargas.

É importante que técnicas consistentes sejam usadas para prever a distribuição de temperatura do corpo da água receptor em função das condições locais. Assim é que, para o estudo deste fenômeno, centrando-se o interesse em conhecer os campos de velocidade e temperaturas, faz-se de uma modelação que envolve um sistema de equações diferenciais parciais não lineares acopladas, onde se encontram as equações de continuidade, quantidade de movimento e energia. Estas equações diferenciais são resolvidas através de técnicas numéricas cuja formulação, no presente trabalho, é baseada no método dos volumes finitos, chegando-se a um conjunto de equações algébricas com a consequente aproximação de cada equação diferencial.

Como os rios e lagos possuem geometrias irregulares, é conveniente utilizar sistemas de coordenadas, cujas linhas adaptam-se às fronteiras do domínio. Deste modo as condições de contornos ficam definidas exatamente nas linhas de fronteira, com a vantagem de se evitar interpolações, o que aconteceria caso um outro sistema de coordenadas fosse utilizado.

Nesta dissertação portanto, faz-se uso de sistemas de coordenadas generalizadas, em função das geometrias complexas e variadas dos rios e lagos.

O tipo de malha selecionada tem conseqüências impor -

tantes, relativas à flexibilidade, precisão e generalidade do código computacional que se deve usar para resolver as equações.

É importante, por exemplo, considerar a vantagem das malhas coincidentes com a fronteira sobre as cartesianas ou outro sistema ortogonal para geometrias variadas; no caso cartesiano, consideram-se pontos que não são de interesse para o problema, como é indicado na Figura 1, acarretando um maior tempo de CPU e falta de generalidade ao modelo.

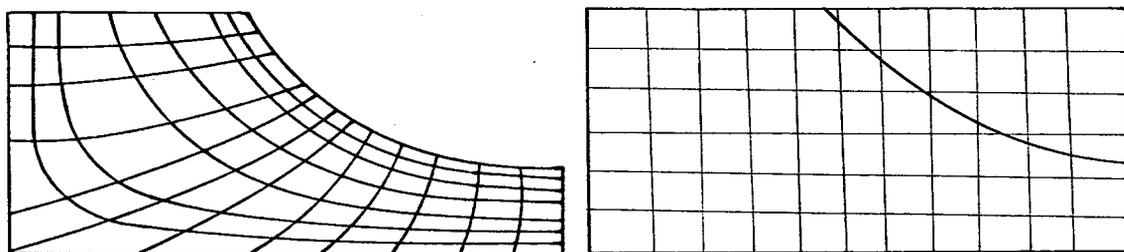


Figura 1 - Domínio com malha adaptada à geometria, e malha ortogonal.

Devido à importância do estudo da descarga de jatos em corpos da água, tanto do ponto de vista ecológico como técnico na fase de concepção dos projetos de usinas, a presente dissertação aborda este tema.

Na realidade, embora os problemas de descargas de jatos nos corpos da água sejam tridimensionais, existem situações onde um modelo bidimensional com médias na profundidade pode ser utilizado, levando-se em consideração que estes modelos possuem uma menor complicação numérica e um menor tempo de CPU. De

maneira que, tendo domínios de águas não profundos, é possível omitir, das equações básicas tridimensionais, a equação que identifica as profundidades, chegando-se a ter um sistema de equações bidimensionais com as condições de contorno definidas no fundo e topo do domínio, incorporadas à equação diferencial.

O modelo bidimensional a ser desenvolvido nesta dissertação é utilizado com melhor resultado em rios ou lagos pouco profundos, e, por conseguinte, tem uma maior validade para o caso de águas rasas | 9 |. O modelo matemático deste trabalho é testado resolvendo-se o problema do escoamento laminar em um canal com expansão, conforme Napolitano |15|. Um teste qualitativo também é realizado para um canal com profundidade constante com jato e com perda de calor na superfície.

Finalmente, compara-se o modelo deste trabalho, baseado no modelo matemático de Raithby |13|, com o caso apresentado por Elliott|14|, do qual mais detalhes são apresentados na próxima seção.

Uma análise dos modelos existentes e também da utilização dos modelos bidimensionais é feita a seguir na revisão bibliográfica.

1.2 - Revisão Bibliográfica

No que diz respeito a soluções de problemas de convecção forçada em geometria arbitrária, com previsão de descargas térmicas, são de grande interesse os trabalhos de Dunn et al. |1| e Jirka et al. |2|, como pioneiros na área.

Dunn et al. [1] concluem que o modelo apresentado é só uma estimativa geral à solução do problema, concluindo que os modelos numéricos seriam promissores no futuro. Nesse artigo trata-se da utilização de um sistema cartesiano de coordenadas, onde talvez a mais séria limitação do modelo era o alto custo computacional requerido para a solução.

Ainda quanto a modelos com descargas térmicas, McGuirk & Rodi [3] desenvolvem uma técnica numérica, obtendo uma maior precisão. O modelo é resolvido tridimensionalmente, fazendo-se uma aproximação hidrostática não considerando os efeitos das tensões no fundo. Os modelos são comparados com resultados experimentais. Igualmente o trabalho de Policastro & Dunn [4], resume vários modelos numéricos que, utilizando um sistema cartesiano de coordenadas sobre problemas de descargas térmica, utilizam um modelo algébrico de turbulência. Os diferentes modelos numéricos analisados, apresentam diversas situações físicas. Vários modelos são testados com dados experimentais. Já os autores recomendam o desenvolvimento numérico para estabelecer um conjunto de problemas para descargas térmicas, onde certos casos hipotéticos simples podem ser resolvidos por teste de certos algoritmos. Igualmente problemas mais complexos podem ser comparados com dados de laboratórios, de alta confiabilidade.

Um aporte importante no desenvolvimento de descargas térmicas é devida a Raithby & Schneider [5]. O modelo, na sua formulação, resolve a equação de movimento vertical como parte do conjunto de equações governantes. Esta representa uma grande diferença entre este modelo e o apresentado por McGuirk & Rodi [3], já que ambos são cartesianos tridimensionais, onde os

efeitos das flutuações são levados em consideração. Outras diferenças entre os dois modelos é que |5| inclui um conjunto mais completo de tensões turbulentas e o método de discretização em diferenças finitas utilizado. Os resultados são comparados com |3| e com dados experimentais sobre uma descarga térmica injetada desde um canal de dimensões variáveis.

Para os casos de rios ou lagos pouco profundos encontram-se os trabalhos apresentados no relatório da Environmental Protection Service 1977, onde são comentados três modelos numéricos bidimensionais, dois em diferenças finitas, de Edinger et al. |6| e Yeh et al. |7|, e um em elementos finitos, apresentado por Loziuk et al. |8|. O melhor modelo testado (relatado a dados experimentais) é o |6|, por considerar a batimetria do domínio, além de considerar efeitos do vento e perda de calor na superfície, que os outros dois modelos também consideram. As equações são resolvidas no sistema cartesiano para todos os casos. O modelo |6| é recomendado para uso geral por determinar campos de temperaturas para descargas térmicas em rios ou lagos pouco profundos.

Em condições similares encontra-se o modelo de Vasiliev |9|; analisa-se um modelo numérico bidimensional para descargas térmicas em corpos de águas. Neste caso são consideradas as tensões do fundo, que são avaliadas pela fórmula de Chezy, utilizadas em canais. O autor desenvolve as equações e testa com dados experimentais de um canal, encontrando resultados muito bons. Igualmente neste trabalho se recomenda o uso de sistemas bidimensionais para solução de problemas com águas rasas, pela experiência comprovada.

Um modelo simplificado puramente bidimensional foi desenvolvido por Tribess & Maliska [10]: nele não é considerada a profundidade do domínio, mas aborda-se o problema para geometria variável pelo uso de coordenadas naturais.

Considerando-se modelos numéricos tridimensionais mais recentes, encontra-se o trabalho de Elliott & Raithby [11], onde modelos em diferenças finitas são desenvolvidos, considerando as altas irregularidades do fundo e as ações do vento atuando convectivamente na superfície. O modelo apresenta boas qualidades quanto às comparações com as medições feitas. São utilizadas malhas ortogonais cartesianas a nível de superfície e não ortogonais no sentido vertical. Igualmente o modelo de Raithby & Elliott [12] é similar ao [11], do ponto de vista da formulação, com a grande diferença de que neste caso são usadas coordenadas para uma geometria complexa. Ou seja, trata-se o problema em coordenadas naturais, adaptando-se à geometria do domínio físico, o que é usado no presente trabalho.

Como já foi citado, o modelo matemático de Raithby [13], em coordenadas generalizadas, é usado para comparar o problema de uma descarga térmica em um lago, tal como apresentado por Elliott [14]; embora este seja um modelo tridimensional, podemos fazer uma análise qualitativa com o modelo bidimensional abordado nesta dissertação, onde são levadas em consideração as profundidades do domínio, sabendo-se que os modelos bidimensionais são eficazes para domínios de águas pouco profundas. O modelo [13] é um importante problema para teste, funcionando como apoio nas condições de contorno, que foram utilizadas neste trabalho.

1.3 - Perfil da Dissertação

A seguir são apresentados os diferentes capítulos que formam a presente dissertação.

CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA. Nesse capítulo é apresentada a formulação do problema a se desenvolver neste trabalho. São apresentadas as equações governantes no plano cartesiano, com suas hipóteses simplificativas, e em seguida um breve comentário sobre a formulação "incompressível".

CAPÍTULO 3 - GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS. São apresentadas as técnicas de geração de sistemas naturais de coordenadas. Mostram-se as transformações do sistema natural de coordenadas para um sistema de coordenadas usado na discretização dos domínios, onde são obtidos os resultados numéricos. Analisam-se as funções usadas no controle de espamento entre as linhas e pontos coordenados.

CAPÍTULO 4 - TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES. Nesse capítulo são colocadas as transformações das equações diferenciais parciais governantes do problema. Elas são levadas de um sistema cartesiano para um sistema genérico de coordenadas, mostrando-se a manutenção da forma conservativa da equação governante. Discute-se o uso das velocidades cartesianas como variáveis dependentes.

CAPÍTULO 5 - MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS APLICADO ÀS EQUAÇÕES GOVERNANTES NO PLANO TRANSFORMADO. A finalidade desse capítulo é

a obtenção das equações discretizadas a nível de volumes finitos, a partir das equações governantes no plano transformado. Mostra-se a disposição das variáveis dependentes na malha a nível de volume elementar para uma variável genérica. Usam-se aproximações numéricas para obtenção das equações governantes discretizadas na formulação u-v.

CAPÍTULO 6 - ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO. São apresentados os distintos arranjos para a disposição das variáveis. Posteriormente é descrito o procedimento de solução das equações discretizadas no volume de controle finito, mostrando-se a formulação U-V. Descreve-se ainda o método PRIME, que, mediante a obtenção da equação da pressão, atualiza esta e corrige os campos das velocidades.

CAPÍTULO 7 - CONDIÇÕES DE CONTORNO. Nesse capítulo são introduzidas as condições de contorno em todo o domínio transformado, que, com o uso das equações governantes, dão solução ao problema. São analisadas as diferentes condições de contorno inclusive com emprego de volume fictício. Aplicam-se os balanços de conservação a nível de volume elementar para incorporar as condições de contorno.

CAPÍTULO 8 - RESULTADOS. Nesse capítulo são mostrados os resultados obtidos numericamente. Primeiramente são apresentados os resultados para solução de problemas em convecção forçada hidrodinâmica resolvendo-se o problema em um canal com expansão suave com o uso de malhas não ortogonais. São comparadas as várias soluções existentes. Posteriormente é mostrado o teste hidrodinâmico.

dâmico em um canal com profundidade unitária para logo dar uma profundidade variável linearmente, sendo testadas as velocidades de acordo com a conservação da massa.

Do ponto de vista térmico mostram-se os efeitos produzidos em um canal de geometria variável por uma descarga de jato quente, com perda de calor na superfície. Na parte final é resolvido o problema de uma descarga térmica aplicada a um lago de geometria variável, levando-se em conta a sua profundidade; usam-se malhas não ortogonais na solução, e comparam-se os resultados relativamente a um modelo tridimensional.

CAPÍTULO 9 - CONCLUSÕES. Esse capítulo indica as conclusões principais obtidas no transcurso desta dissertação, bem como propõe algumas sugestões para futuros trabalhos relacionados com as matérias tratadas.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - Introdução

Neste capítulo formula-se o problema para determinação do campo de temperatura provocado pela descarga térmica em um rio ou lago. Como já se comentou, o fenômeno é tratado bidimensionalmente com médias das variáveis na profundidade.

São introduzidas as equações diferenciais parciais escritas em coordenadas cartesianas numa forma conservativa para um campo escalar ϕ genérico. Estas equações representam a conservação da massa, a conservação da quantidade de movimento nas duas direções e da energia. Consideram-se também alguns aspectos sobre a chamada formulação "incompressível".

2.2 - Formulação do Problema

O problema de interesse, é o da convecção forçada bidimensional elíptica em um lago de geometria variável, que é afetado pela descarga térmica de um jato quente em fluxo cruzado, em regime permanente, onde são tomadas em consideração as profundidades variáveis, como mostra a Figura 2.

Apesar de ser um problema bidimensional ele leva em consideração a profundidade variável do lago, o que nos fornece

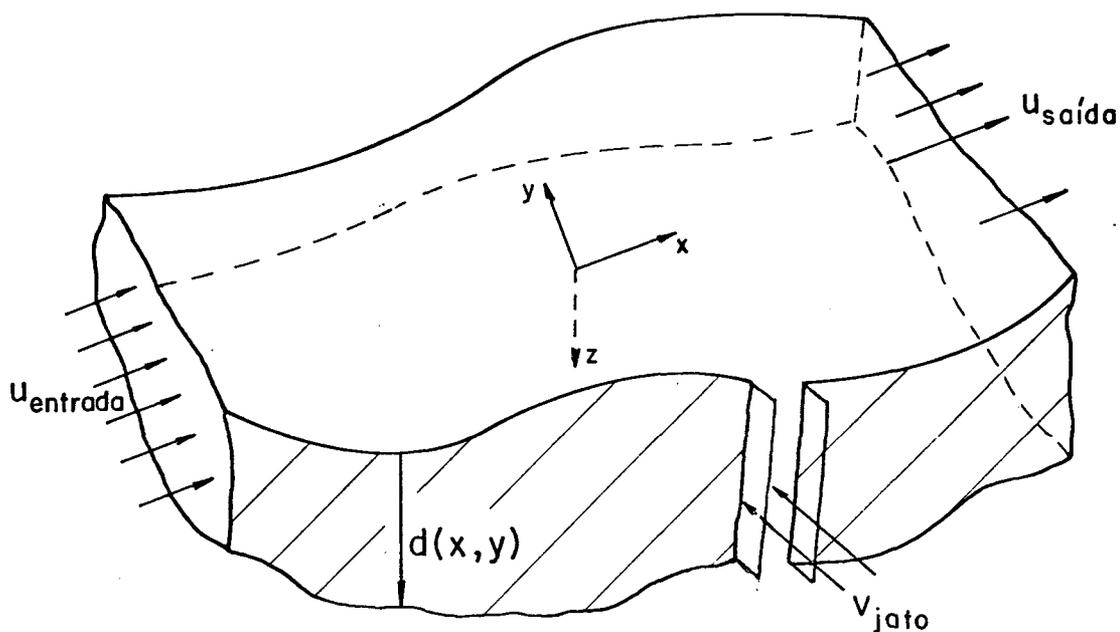


Figura 2 - Domínio físico do problema da convecção forçada bidimensional em geometria variável.

rã os valores médios dos campos de velocidades e temperaturas. Por outro lado, considera os efeitos de atrito do fundo e da superfície do lago através de especificações de tensões de cisalhamento adequados. Além disso, pode ser considerada a perda de calor por convecção para o ar devido à velocidade do vento atuando sobre toda a superfície do lago.

As considerações simplificativas do problema serão tratadas na próxima seção; as condições gerais de contorno, no Capítulo 7; as condições mais particulares, por sua vez, no Capítulo 8, onde se mostrarão especialmente os resultados.

2.3 - Equações Governantes do Problema no Sistema Cartesiano

Considera-se um volume de controle elementar correspondente ao domínio do lago no sistema cartesiano x - y , analisado para uma variável ϕ genérica.

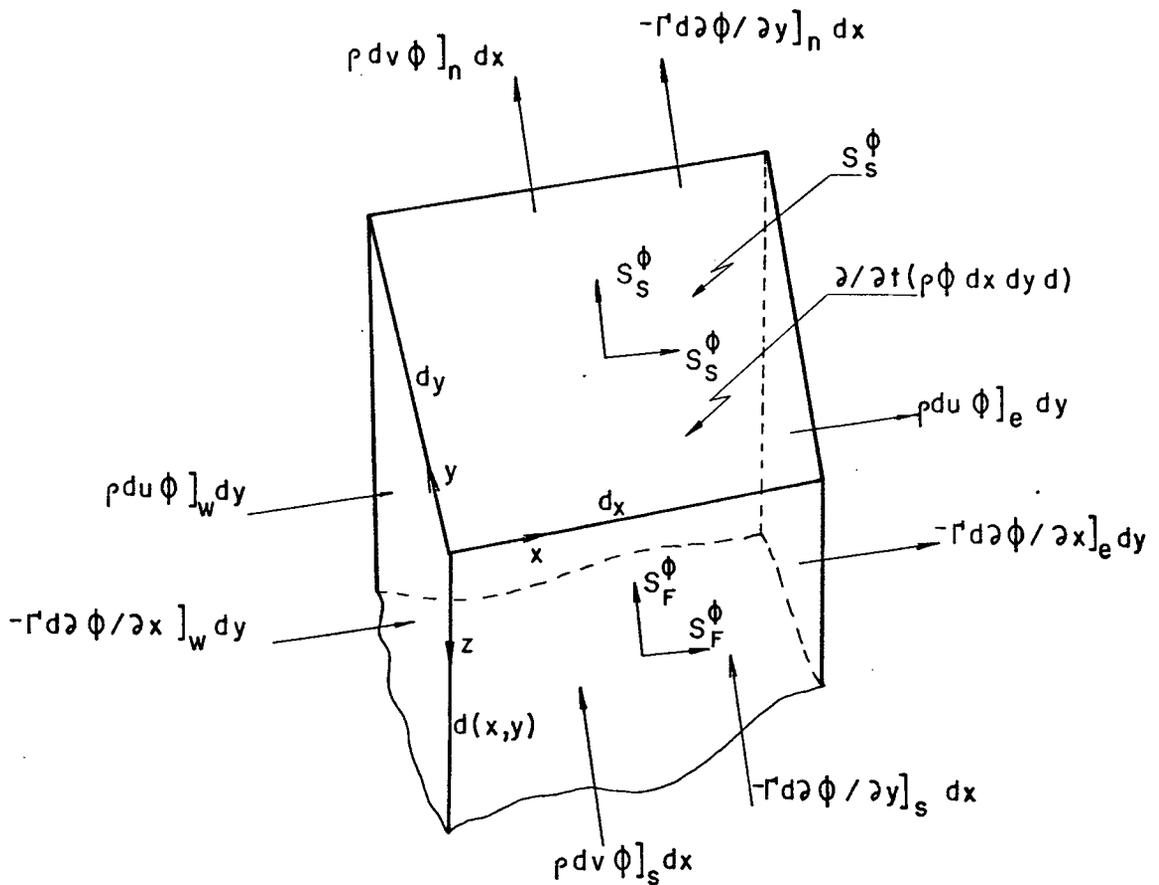


Figura 3 - Volume elementar no domínio físico para efetuar os balanços de conservação a nível de uma variável ϕ genérica.

Realizando-se os balanços de massa, quantidade de movimento e energia sobre o volume de controle elementar mostrado na Figura 3, e observando-se as seguintes hipóteses simplificativas:

- a) Regime laminar ou turbulento com $\mu_t = \text{constante}$
- b) Forças de campo nulas em ambas as direções
- c) Escoamento incompressível
- d) Fluido newtoniano e homogêneo
- e) Massa específica, viscosidade, calor específico, condutividade térmica e demais propriedades do fluido constantes
- f) Sem geração de calor
- g) Sem dissipação viscosa,

obtêm-se as seguintes equações governantes, que estabelecem o modelo matemático do problema bidimensional;

Continuidade

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u d) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v d) = 0 \quad (2.1)$$

Quantidade de movimento em x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u d) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u d) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v d) + d \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x} d) + \\ \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y} d) + S_F^u + S_S^u + S^u \end{aligned} \quad (2.2)$$

Quantidade de movimento em y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v d) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v d) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v d) + d \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x} d) + \\ \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y} d) + S_F^v + S_S^v + S^v \end{aligned} \quad (2.3)$$

Energia

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T d) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T d) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T d) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p} d \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{c_p} d \frac{\partial T}{\partial y}\right) + (S_F^T + S_S^T) \frac{1}{c_p} \quad (2.4)$$

Onde u , v , P e T , representam seus valores médios na profundidade do lago.

Os termos S^u e S^v , nas equações de movimento, são os termos fontes correspondentes às forças de campo nas direções x - y , que são nulas por hipótese, já que a força de campo devida à gravidade atua em um plano perpendicular ao escoamento.

Os termos fontes S_F^u e S_S^u representam as forças pela unidade de área na direção x causadas pelo atrito no fundo do lago e pelo atrito com o vento na superfície, respectivamente. Similar definição é válida para os termos fontes S_F^v e S_S^v , representando forças pela unidade de área na direção y , causadas pelos mesmos fenômenos no fundo e na superfície. Na equação da energia os termos fontes S_F^T e S_S^T são os efeitos de difusão no fundo e na superfície do lago, respectivamente.

As equações acima também podem ser obtidas fazendo-se a integração das equações tridimensionais sobre a coordenada z .

É importante mencionar que, mesmo quando estamos interessados no regime permanente, os termos transientes são mantidos nas equações de movimento e energia para fins de avanços iterativos.

Fazendo uma análise das Equações (2.1) a (2.4) pode-

se reescrevê-las de acordo com a seguinte equação genérica no plano cartesiano [16], [17]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + P^\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + S^\phi \quad (2.5)$$

com

$$q = \rho d\phi \quad (2.6)$$

$$E = \rho du\phi \quad (2.7)$$

$$F = \rho dv\phi \quad (2.8)$$

$$R = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} d \quad (2.9)$$

$$S = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} d \quad (2.10)$$

e S^ϕ termo fonte.

O valor da grandeza Γ^ϕ representa o coeficiente de transporte difusivo para as equações de movimento e energia. Desta forma, Γ^ϕ é igual à viscosidade absoluta para as equações de movimento e igual à relação entre a condutividade térmica e o calor específico do fluido a pressão constante para a equação da energia.

Examinando a equação genérica (2.5) conclui-se que:

- a) Ela representa a equação da conservação da massa quando P^ϕ e S^ϕ são nulos e ϕ toma o valor 1.
- b) As duas equações de movimento nas direções x-y são obtidas

fazendo ϕ igual a u e v respectivamente com os termos de pressão e os termos fontes adequados.

c) A equação da energia é também obtida fazendo ϕ igual a T , com o termo de pressão nulo e o termo fonte adequado.

Na Tabela 1 apresentam-se as grandezas S^ϕ , P^ϕ e Γ^ϕ para as equações governantes.

Tabela 1 - Grandezas S^ϕ , P^ϕ e Γ^ϕ para as Equações Governantes.

	Equação da Continuidade	Equação de Movimento em u	Equação de Movimento em v	Equação da Energia
Grandeza	$\phi = 1$	$\phi = u$	$\phi = v$	$\phi = T$
S^ϕ	0	$S_F^u + S_S^u$	$S_F^v + S_S^v$	$(S_F^T + S_S^T)/c_p$
P^ϕ	0	$d\frac{\partial P}{\partial x}$	$d\frac{\partial P}{\partial y}$	0
Γ^ϕ	0	μ	μ	k/c_p

Para completar a formulação do problema é necessário identificar a variação de ρ por dispor de quatro equações com cinco incógnitas, como indicado anteriormente. Se ρ varia consideravelmente com P e T , então uma equação de estado relacionando ambas as variáveis provê a relação adicional necessária, onde esta equação determina a pressão e a continuidade é uma equação para a massa específica.

Se ρ varia muito pouco com a pressão, mas varia significativamente com a temperatura, como pode acontecer no presente caso, a equação de estado $P = P(\rho, T)$ não pode ser usada

para determinar P , porque pequenos erros cometidos no cálculo de massa específica, via equação de continuidade, provocam grandes erros em P , calculado via equação de estado. Com este campo de pressões errados nas iterações sucessivas poderão ser produzidas grandes instabilidades na solução numérica. Como a massa específica não depende da pressão, mas só da temperatura calculada pela equação de energia, então a equação de estado será utilizada para o cálculo de ρ . Portanto, a equação da continuidade é apenas uma condição a ser satisfeita pelo campo de velocidade, através da escolha correta do campo de pressão nas equações do movimento [18].

Assim, pela necessidade de procurar um campo de pressões, este deve gerar um campo de velocidades que satisfaça a equação da conservação da massa. É assim que, quando a massa específica não varia com a pressão, se produz um forte acoplamento entre a pressão e a velocidade, causando dificuldades para a solução do sistema de equações. A nova formulação é chamada "incompressível". Faz-se necessário criar, portanto, uma nova equação para a pressão, o que será tratado no Capítulo 6.

CAPÍTULO 3

GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

3.1 - Introdução

Neste capítulo apresenta-se um método para a geração de malhas sobre regiões de contornos arbitrários. Analisam-se os diferentes tipos de malhas com suas generalidades e o código computacional respectivo. Por outro lado, transformam-se as equações diferenciais geradoras do plano físico para o plano transformado, onde elas são resolvidas para obtenção do novo sistema de coordenadas.

Por último, avaliam-se os termos que regulam o controle de espaçamento entre as linhas e atração de pontos no plano transformado.

3.2 - Transformação do Sistema Coordenado

No desenvolvimento de modelos numéricos generalizados, o uso dos sistemas ortogonais que são conhecidos como cartesianos, cilíndricos, esféricos, etc., apresentam grandes limitações, pois são adequados apenas à geometria cujas fronteiras coincidam com o sistema coordenado. Em tais casos, deve-se procurar sistemas que se adaptem à geometria e evitar interpolações ou limitações que produzam soluções imprecisas, produto da aplicação incorreta das condições de contorno nas frontei-

ras de interesse, onde certos parâmetros requerem ser conhecidos com exatidão. Por outro lado, o código computacional se faz totalmente dependente da geometria, e deve ser alterado quando ela se modifica.

Por esta razão, o uso de sistemas que se adaptam à geometria são mais adequados. Estes sistemas coordenados podem ser ortogonais ou não ortogonais.

Na opinião do autor, o importante é se dispor de um modelo numérico que seja geral e possa admitir malhas ortogonais e não ortogonais, uma vez que nem sempre é possível dispor-se de uma malha ortogonal para todos os problemas. Por exemplo, no caso tridimensional, as malhas ortogonais são de difícil geração, sendo, então, necessário o desenvolvimento de modelos não ortogonais. Neste trabalho faz-se uso de um modelo desenvolvido por Maliska & Raithby [19], que foi exaustivamente testado, apresentando taxa de convergência similar a modelos desenvolvidos unicamente para o sistema de coordenadas cartesianas.

O vasto campo de utilização de malhas quasi-ortogonais [20], não pode ser contemplado quando o modelo desenvolvido é restritivo a um sistema coordenado ortogonal. Muitos sistemas coordenados quasi-ortogonais podem ser facilmente gerados, apresentando excelentes resultados.

Há casos em que é difícil respeitar uma ortogonalidade, pelo fato de existir uma grande concentração de linhas devido a fortes gradientes. Como nestes casos a ortogonalidade é difícil de manter, o recomendável é produzir um certo relaxamento na ortogonalidade [21], desde que não se produzam excessivas

distorções da malha. Esta condição confere características de generalidade ao modelo numérico. Em tal caso, o método desenvolvido admite tanto grades ortogonais como não ortogonais; o uso das primeiras constitui-se, então, em um caso particular para a metodologia. Portanto, a flexibilidade permite ao analista numérico adotar a grade de acordo com o fenômeno físico em questão, sem excessivas restrições. Portanto, nesta dissertação adota-se o uso de modelos não-ortogonais por apresentarem maior generalidade [22].

Existem autores que usam sistemas generalizados de coordenadas ortogonais. Para obter um sistema tal, por exemplo em Raithby [23], é gerada inicialmente uma malha não ortogonal; com esta malha, através de um programa de elementos finitos, são geradas as coordenadas ortogonais utilizadas na solução do problema de interesse. Obviamente, este procedimento não é simples. Atualmente, é grande o esforço por parte dos pesquisadores para desenvolver métodos de geração rápida de sistema de coordenadas ortogonais, pois sempre é desejável utilizar um sistema mais ortogonal possível.

O desenvolvimento dos sistemas não-ortogonais para geração de coordenadas é devido, principalmente a Thompson et al. [24]. Eles utilizam-se duas equações do tipo Poisson com condições de contorno tipo Dirichlet para a geração do sistema coordenado. Este método é adotado neste trabalho.

Considera-se um domínio arbitrário bidimensional simplesmente conexo, no qual se deseja fazer a transformação de coordenadas e levar a geometria física a uma retangular, como mostra a Figura 4.

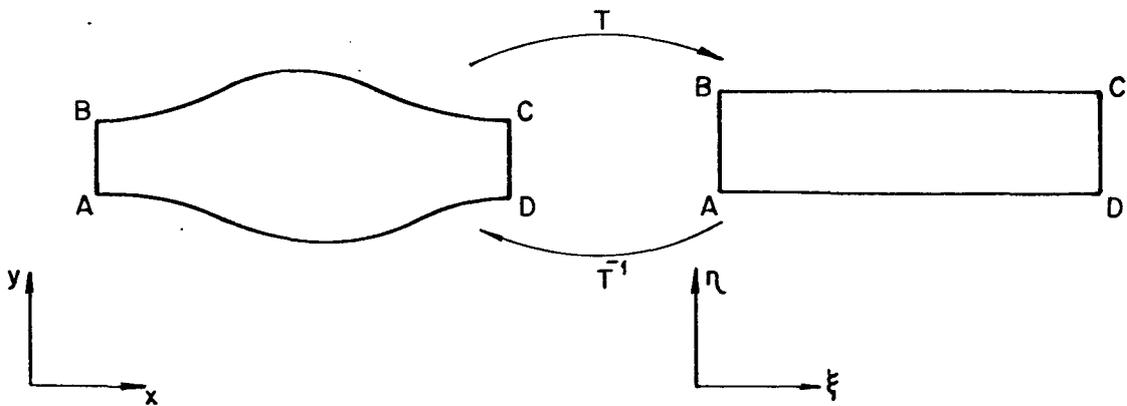


Figura 4 - Transformação de coordenadas.

Para realizar esta transformação é preciso determinar a seguinte expressão:

$$\xi = \xi(x, y) \quad (3.1)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (3.2)$$

que relaciona as coordenadas no plano físico e transformado, e cuja matriz Jacobiana é

$$[J] = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde os subíndices indicam derivadas parciais. O determinante Jacobiano da transformação é

$$J = \det[J] = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (3.4)$$

Aplicando o teorema fundamental da função inversa [25], as Equações (3.1) e (3.2) fornecem

$$x = x(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

Com a matriz Jacobiana

$$[J_o] = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e o determinante Jacobiano dado por

$$J_o = \det [J_o] = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (3.8)$$

onde

$$[J] = [J_o]^{-1} \quad (3.9)$$

Garantida a função inversa, obtêm-se as seguintes relações:

$$\xi_x = y_\eta J ; \xi_y = -x_\eta J \quad (3.10)$$

$$\eta_x = -y_\xi J ; \eta_y = x_\xi J \quad (3.11)$$

Fazendo uso de regra da cadeia obtêm-se a transformação das derivadas parciais.

$$f_x = f_{\xi} \xi_x + f_{\eta} \eta_x \quad (3.12)$$

$$f_y = f_{\xi} \xi_y + f_{\eta} \eta_y \quad (3.13)$$

As derivadas de ordem maior são obtidas por aplicações sucessivas das Equações (3.12) e (3.13); mais detalhes da transformação podem ser encontrados na referência [26].

3.3 - Geração do Sistema Coordenado

Para determinar o valor das funções ξ, η dadas pelas Equações (3.1) e (3.2), faz-se aqui uso de um método automático de geração. Tal método faz com que o sistema natural de coordenadas (ξ, η) seja solução de um sistema de equações diferenciais parciais elípticas no domínio físico, com condições de contorno de Dirichlet prescritas em todas as fronteiras [26].

O sistema de equações elípticas que deve ser resolvido para este objetivo é

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (3.14)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (3.15)$$

onde $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ são funções de controle que regulam a densidade de linhas e pontos coordenados (ξ, η) .

Considere-se o caso da geração de um sistema natural

de coordenadas que se adapte às fronteiras do domínio simplesmente conexo da Figura 5.

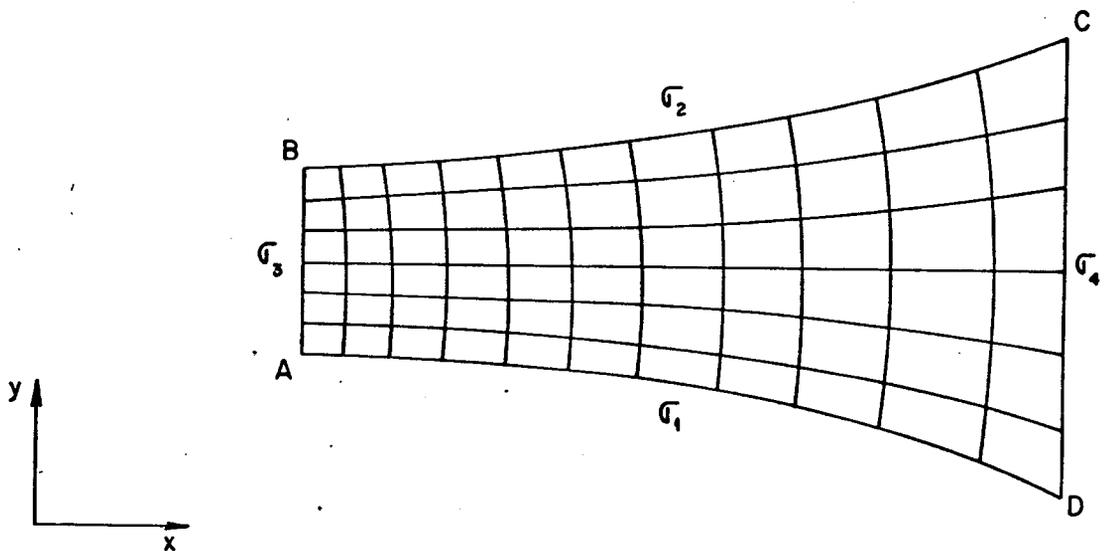


Figura 5 - Domínio físico com sistema natural de coordenadas.

O sistema gerado no plano físico é representado pelas Equações (3.14) e (3.15), com as seguintes condições de contorno de Dirichlet.

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta_1 = \text{constante em } \sigma_1 \\
 \eta &= \eta_2 = \text{constante em } \sigma_2 \\
 \xi &= \xi_1 = \text{constante em } \sigma_3 \\
 \xi &= \xi_2 = \text{constante em } \sigma_4
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

A solução das Equações (3.14) e (3.15) com as condições de contorno (3.16) fornece as funções $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$, que são as coordenadas não-ortogonais, usadas na solução das equações diferenciais do problema.

Como a solução precisa ser numérica e o domínio de

cálculo é irregular, o problema da discretização já aparece na geração do sistema de coordenadas. Realizada a discretização das equações dadas na forma cartesiana, encontra-se o problema das interpolações nas condições de contorno.

Desta maneira intercambiam-se as variáveis dependentes e independentes daquelas equações, solucionando-as em um plano retangular fixo, segundo a Figura 6.

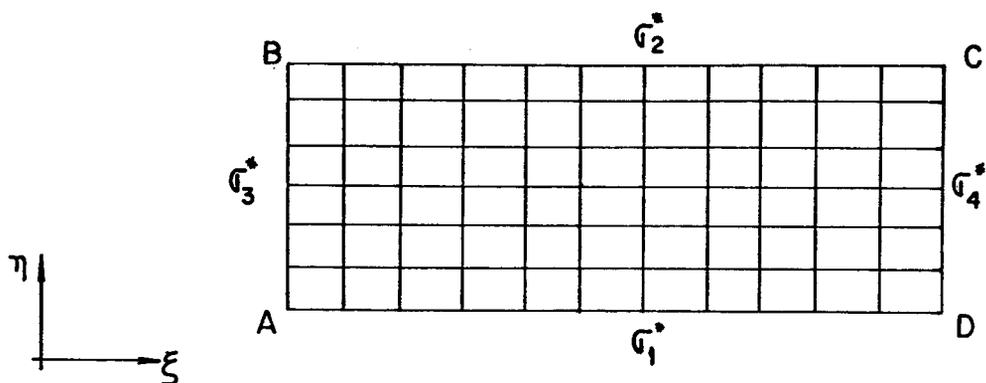


Figura 6 - Domínio transformado.

Nesse plano especificam-se as condições de contorno sobre linhas retas, evitando-se as interpolações e escolhendo-se as células da malha em forma quadrangular, com lados de comprimento unitário por conveniência.

Os passos da transformação das Equações (3.14) e (3.15) de geração de malhas, do plano físico para o plano transformado, são dados em [26], mesmo para tratamento de domínios duplamente conexos.

As equações transformadas resultantes são:

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \quad (3.17)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \quad (3.18)$$

onde os subíndices ξ e η indicam as primeiras e segundas derivadas com as seguintes condições de contorno tipo Dirichlet.

$$\begin{aligned} x &= f_1(\xi, \eta_1) \text{ sobre } \sigma_1^* \\ y &= f_2(\xi, \eta_1) \text{ sobre } \sigma_1^* \\ x &= g_1(\xi, \eta_2) \text{ sobre } \sigma_2^* \\ y &= g_2(\xi, \eta_2) \text{ sobre } \sigma_2^* \\ x &= f_3(\xi_1, \eta) \text{ sobre } \sigma_3^* \\ y &= f_4(\xi_1, \eta) \text{ sobre } \sigma_3^* \\ x &= g_3(\xi_2, \eta) \text{ sobre } \sigma_4^* \\ y &= g_4(\xi_2, \eta) \text{ sobre } \sigma_4^* \end{aligned} \quad (3.19)$$

Os coeficientes de acoplamento entre as Equações(3.17) e (3.18) são as componentes do tensor métrico g_{ij} mostrado em |26|.

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (3.20)$$

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (3.21)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (3.22)$$

As funções $f_1, f_2, g_1, g_2, f_3, f_4, g_3, g_4$ são determinadas pela forma do domínio físico e pelas distribuições ξ e η , respectivamente, desejadas nas fronteiras.

As Equações (3.17) e (3.18), apesar de mais complicadas em sua solução que as Equações (3.14) e (3.15), têm por vantagem condições de contorno mais facilitadas, já que são especificadas sobre um contorno reto, evitando-se assim o problema de interpolações.

Pelo uso das equações transformadas, todo o trabalho de computação necessário para gerar o sistema de coordenadas e, posteriormente, para resolver o problema físico, será executado sobre uma malha quadrangular fixa, independente da forma do domínio físico e independente do espaçamento escolhido entre as linhas coordenadas. A grande vantagem desse procedimento é que o código computacional fica independente da geometria considerada. Com a equação no plano transformado ela é aproximada em diferenças finitas.

3.4 - Controle de Espaçamento entre Linhas e Pontos Coordenados

Como $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ são as funções de controle que regulam o espaçamento entre linhas e pontos coordenados, é possível produzir grandes concentrações de coordenadas como desejado.

Faz-se uso, nesta dissertação, do critério adotado por Thompson et al. [26], que sugerem que P e Q sejam calculados por somas de funções exponenciais que regulam a atração ou repulsão para linhas em seus primeiros termos e atração ou repulsão para pontos nos segundos termos, respectivamente. Tais funções têm por valor

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^m a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) e^{-c_i |\xi - \xi_i|} - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) e^{-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}} \quad (3.23)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^m a_i \operatorname{sgn}(\eta - \eta_i) e^{-c_i |\eta - \eta_i|} - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\eta - \eta_j) e^{-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}} \quad (3.24)$$

Para o caso de $P(\xi, \eta)$, que regula as interações entre as linhas ξ em seu primeiro termo, o coeficiente a_i junto com o expoente c_i dará a atração para uma linha definida ξ , onde valores crescentes positivos do coeficiente para um mesmo expoente produzem maior atração para a dita linha. Agora, se o expoente aumenta com um mesmo coeficiente, as linhas mais afastadas da linha ξ de referência refletirão menor atração. Se o coeficiente for negativo, produz-se uma repulsa entre as linhas.

No segundo termo a função $P(\xi, \eta)$ regula a atração para pontos por seu coeficiente b_j e seu expoente d_j . Se maior é o coeficiente b_j e também seu expoente d_j , dar-se-á maior atração para o ponto desejado e vice-versa.

Estas mesmas considerações são avaliadas para o caso das linhas η , reguladas pela função $Q(\xi, \eta)$.

Os sinais sgn são introduzidos por efeitos computacionais, devido à descontinuidade de P e Q , que podem tomar o valor de 1, 0, ou -1, dependendo de o valor de x ser positivo, zero ou negativo.

Valores dos coeficientes a , b como dos expoentes c e d para uma malha em particular são dados no Capítulo 8 dos resultados.

CAPÍTULO 4

TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

4.1 - Introdução

Obtido o novo sistema de coordenadas, é necessário transformar as equações governantes do sistema dado originalmente, para o novo, o que é feito neste capítulo.

Discutem-se aspectos referentes às variáveis dependentes adequadas nas equações de conservação da quantidade de movimento e consideram-se alguns aspectos das componentes cartesianas do vetor velocidade.

Mostra-se ainda que as equações transformadas mantêm sua forma conservativa, evitando o surgimento de novas fontes e/ou sumidouros das propriedades transportadas nas fronteiras dos volumes de controle elementares.

4.2 - Variáveis Dependentes para as Equações Transformadas

Lembrando que ϕ na Equação (2.5) representa u , v , T ou qualquer outro escalar, uma decisão deve ser tomada com relação à escolha das componentes do vetor velocidade que serão mantidas como variáveis dependentes no plano transformado $(\xi-\eta)$.

Por ser o vetor velocidade uma grandeza vetorial, ele apresenta, além do seu módulo, uma direção com suas duas componentes e um sentido, os quais devem ficar relacionados ao sistem

tema de coordenadas utilizadas. Assim, seja V o vetor velocidade atuando em um escoamento bidimensional em coordenadas generalizadas, como se mostra na Figura 7. O referido vetor velocidade pode ser representado pelas componentes cartesianas u e v , pelas componentes contravariantes V^1 e V^2 , e pelas componentes covariantes V_1 e V_2 , respectivamente.

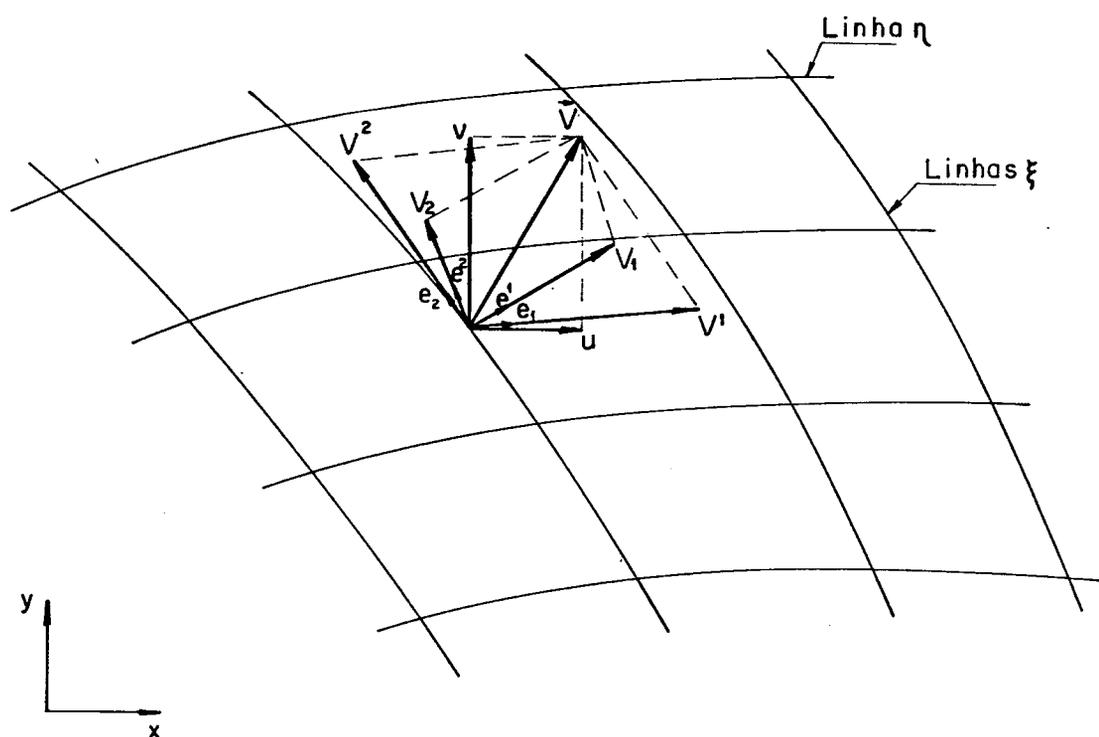


Figura 7 - Componentes cartesianas, covariantes e contravariantes do vetor velocidade \vec{V} .

Depreende-se da Figura 7 que, devido à não ortogonalidade do sistema, as velocidades covariantes e contravariantes não são coincidentes. Para o sistema cartesiano, em particular, devido à sua ortogonalidade, as componentes covariantes e contravariantes são coincidentes; assim, as componentes do vetor velocidade em tal sistema são denominadas componentes cartesianas simplesmente. Maiores detalhes com relação à geração das

componentes covariantes e contravariantes podem ser encontrados em [17].

A questão que se apresenta, então, é quanto à escolha das componentes mais adequadas do vetor velocidade para utilização nas equações transformadas do movimento. Esta escolha está baseada no critério de que apenas uma das componentes seja responsável pelo fluxo de massa, devendo a outra ter direção tangencial a essas linhas, para de fato poder haver uma equação da continuidade com a mesma estrutura do sistema cartesiano.

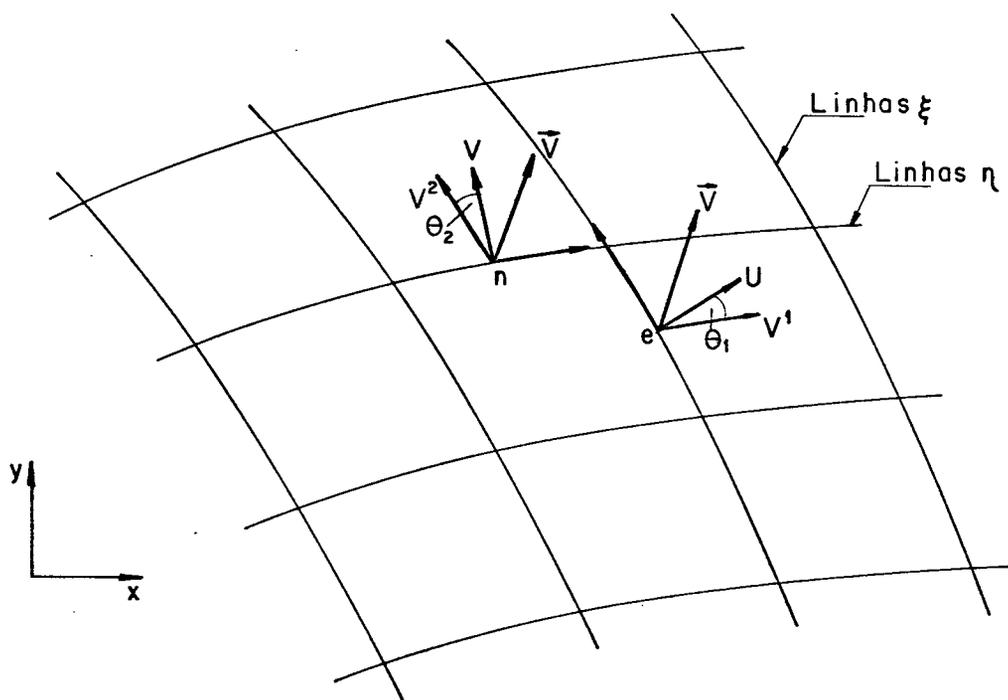


Figura 8 - Componentes contravariantes, e contravariantes sem normalização métrica.

Pela Figura 7 verifica-se que a componente contravariante V^1 satisfaz este critério, pois a componente V^2 não

transporta massa através das linhas coordenadas ξ . Contudo, a grandeza da componente contravariante V^1 não representa a grandeza da componente que transporta fisicamente a massa, uma vez que a mesma está referenciada a um sistema coordenado cujos vetores de base não são unitários.

Desta maneira, a Figura 8 mostra as componentes U e V , responsáveis pelo transporte de massa, onde U é a componente normal às linhas de ξ constantes; e V a componente normal às linhas de η constantes.

Então, da Figura 8 se pode observar

$$U = V^1 \cos \theta_1 \quad (4.1)$$

$$V = V^2 \cos \theta_2 \quad (4.2)$$

onde U e V são as próprias componentes contravariantes a menos de um fator multiplicativo inerente ao sistema de coordenadas (ξ, η) . Elas são denominadas componentes contravariantes sem normalização métrica do vetor velocidade. Doravante denominar-se-ão simplesmente componentes contravariantes da velocidade.

Deve-se indicar que estas velocidades contravariantes fazem com que a equação da continuidade no plano transformado apresente uma estrutura semelhante àquelas para sistemas de coordenadas ortogonais, o que é mostrado no Apêndice A.

Como as componentes contravariantes da velocidade são as responsáveis pelo fluxo de massa através das superfícies dos volumes de controle, seria natural escolhê-las como variáveis dependentes no plano transformado. Esta escolha, entretanto,

acarreta equações transformadas muito complexas, dificultando a interpretação física dos termos resultantes [17].

Por este motivo, neste trabalho optou-se por manter as componentes cartesianas do vetor velocidade como variáveis dependentes, obtendo-se equações transformadas bastante simples e de fácil manipulação numérica.

4.3 - Transformação das Equações Governantes

Antes de fazer as transformações das equações governantes é preciso evidenciar alguns parâmetros que têm relação com tais equações.

Da mesma maneira que as componentes covariantes e contravariantes de um vetor podem ser correlacionadas num dado sistema de coordenadas $\{e_i\}$, elas também podem ser relacionadas a outras componentes desse vetor, definidas num outro sistema cartesiano de coordenadas $\{u_i\}$. Uma vez estabelecidas aquelas relações, ter-se-á executado uma transformação de sistemas de coordenadas. Assim, as componentes covariantes do vetor velocidade \vec{V} sobre esse novo sistema têm por valor. (Ver Apêndice A).

$$U_i = \vec{V} \cdot \vec{u}_i \quad (4.3)$$

Considerando o valor de \vec{V} associado às componentes contravariantes no sistema generalizado (ξ, η) , mostra-se que

$$U_i = g_{ij} V^j \quad (4.4)$$

onde

$$g_{ij} = \vec{e}_j \cdot \vec{u}_i \quad (4.5)$$

O tensor métrico g_{ij} é a matriz que define a transformação de sistemas coordenados com

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde

$$g_{11} = \alpha \quad (4.7)$$

$$g_{12} = g_{21} = \beta \quad (4.8)$$

$$g_{22} = \gamma \quad (4.9)$$

As expressões destas componentes foram definidas pelas Equações (3.20), (3.21), e (3.22), respectivamente, no Capítulo 3.

Comentários mais específicos sobre tensor métrico em bases covariantes e contravariantes podem ser encontrados em [27].

No Apêndice A são calculados os comprimentos e áreas do domínio físico em função destas métricas.

Aplicando a transformação geral definida pelas Equações (3.1) e (3.2) sobre a equação genérica cartesiana (2.5), po

de-se reescrevê-la para o domínio transformado mantendo sua forma fortemente conservativa (ver Apêndice A), como

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\eta}} + \hat{p}^\phi = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{\eta}} + \hat{S}^\phi \quad (4.10)$$

$$\hat{q} = \frac{q}{J} \quad (4.11)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{J}(\xi_x E + \xi_y F) \quad (4.12)$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J}(\eta_x E + \eta_y F) \quad (4.13)$$

$$\hat{R} = \frac{1}{J}(\xi_x R + \xi_y S) \quad (4.14)$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J}(\eta_x R + \eta_y S) \quad (4.15)$$

$$\hat{p}^\phi = \frac{P^\phi}{J} \quad (4.16)$$

$$\hat{S}^\phi = \frac{S^\phi}{J} \quad (4.17)$$

A Tabela 2 mostra as grandezas \hat{S}^ϕ e \hat{P}^ϕ , que são os termos fontes e de pressão para as equações governantes transformadas.

Tabela 2 - Grandezas \hat{S}^ϕ , \hat{P}^ϕ para as equações governantes transformadas.

	Equação da Continuidade	Equação de Movimento em u	Equação de Movimento em v	Equação da Energia
Grandeza	$\phi = 1$	$\phi = u$	$\phi = v$	$\phi = T$
\hat{S}^ϕ	0	$\frac{S_F^u + S_S^u}{J}$	$\frac{S_F^v + S_S^v}{J}$	$\frac{S_F^T + S_S^T}{J c_p}$
\hat{P}^ϕ	0	$(\frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi) d$	$(\frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta) d$	0

Inserindo as Equações (4.11) a (4.17) na equação (4.10) e substituindo os valores de q, E, F, R e S segundo as Equações (2.6) a (2.10), após alguma manipulação algébrica obtêm-se

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi d) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi d) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi d) + \hat{P}^\phi = \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \hat{S}^\phi$$

Esta formulação transformada mantém uma estrutura semelhante à da equação dada no sistema cartesiano.

Os coeficientes da Equação (4.18) têm por valor

$$C_1 = \alpha J \Gamma^\phi d \quad (4.19)$$

$$C_2 = C_5 = -\beta J \Gamma^\phi d \quad (4.20)$$

$$C_4 = \gamma J \Gamma \phi d \quad (4.21)$$

No Apêndice A mostra-se que as componentes contravariantes do vetor velocidade têm por expressão

$$U = (y_\eta u - x_\eta v) \quad (4.22)$$

$$V = (x_\xi v - y_\xi u) \quad (4.23)$$

Portanto, as equações que governam o problema de convecção forçada bidimensional, com aplicação ao lago de geometria arbitrária e profundidade d variável são

Continuidade

$$\frac{\partial(Ud)}{\partial \xi} + \frac{\partial(Vd)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.24)$$

Movimento para u

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u d) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U u d) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V u d) = & \left(-\frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi\right) d + \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C_4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \hat{S}^u \end{aligned} \quad (4.25)$$

Movimento para v

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v d) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U v d) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V v d) = & \left(-\frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi + \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta\right) d + \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C_4 \frac{\partial v}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \hat{S}^v \end{aligned} \quad (4.26)$$

Energia

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho T d) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U T d) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V T d) = \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \xi}) + \hat{S}^T \quad (4.27)$$

Pode-se notar que, nas Equações (4.25) a (4.27), diferentemente do que ocorre nas equações no plano cartesiano, apresentam-se os termos difusivos em derivadas cruzadas, que correspondem a termos não ortogonais envolvendo o coeficiente C_2 , o que será analisado do Capítulo 5.

É importante observar que é também possível definir uma nova velocidade contravariante como

$$\bar{U} = U d \quad (4.28)$$

$$\bar{V} = V d \quad (4.29)$$

o que coloca as Equações (4.24) a (4.27) na mesma forma daquela mostrada em [17]. Neste caso, \bar{U} continuaria representando o valor numérico da vazão volumétrica.

CAPÍTULO 5

METODO DOS VOLUMES FINITOS APLICADO ÀS EQUAÇÕES GOVERNANTES NO PLANO TRANSFORMADO

5.1 - Introdução

Uma vez escritas no plano transformado, as equações governantes são discretizadas e integradas sobre um volume elementar, resultando em um esquema conservativo.

Inicialmente, integra-se a forma diferencial sobre o volume elementar, para os volumes internos. Em seguida são feitas as aproximações numéricas, obtendo-se as equações algébricas para os volumes finitos para um campo genérico ϕ . As condições de contorno ficarão incorporadas, na medida em que sejam realizado balanços nos volumes elementares do contorno, de acordo com a condição de contorno existente na fronteira em questão.

5.2 - Disposição das Variáveis Dependentes na Malha

Como o problema em estudo apresenta mais de uma incógnita, é necessário definir a posição relativa das mesmas na malha computacional. Uma discussão detalhada a respeito pode ser encontrada em [17]. Mostra-se que a disposição mais adequada é aquela onde as velocidades responsáveis pelo cálculo do fluxo da propriedade, estão localizadas no centro das quatro faces dos volumes de controle para a continuidade. Ou seja, as veloci

dades devem ser localizadas onde são necessárias para realizar os balanços de massa, evitando o cálculo de médias de velocidades na equação da continuidade.

Quanto às pressões, devem ser localizadas na malha de forma tal que as velocidades sejam controladas por gradientes de pressão fisicamente consistentes [28]. Para conseguir isto, elas são armazenadas no centro das células, enquanto que as velocidades o são nas superfícies. Outros escalares, como temperatura, propriedades físicas, etc., são armazenados conjuntamente com a pressão, como se mostra na Figura 9.

Observa-se aí que, para a pressão, é mantida a mesma disposição prevista para sistemas ortogonais. Em tal caso, como a equação do movimento possui gradientes de pressão em duas direções, aquela para a pressão resulta em um esquema de nove pontos.

No próximo capítulo se desenvolverá a equação para a pressão.

Como se indicara, na seção (4.2), sobre a conveniência de utilizar um procedimento de que participem tanto as velocidades cartesianas como as contravariantes, faz-se necessário, em tal formulação, o conhecimento das duas componentes cartesianas e contravariantes do vetor velocidade em cada face dos volumes de controle para a continuidade. Assim, a Figura 9 mostra a disposição dos volumes de controle para estas velocidades através das equações de movimento, e dos volumes de controle para as equações de continuidade e energia. Em modelos mais recentes em desenvolvimento [29], apenas u e U são armazenados nas faces este e oeste, e, v e V nas faces norte e sul.

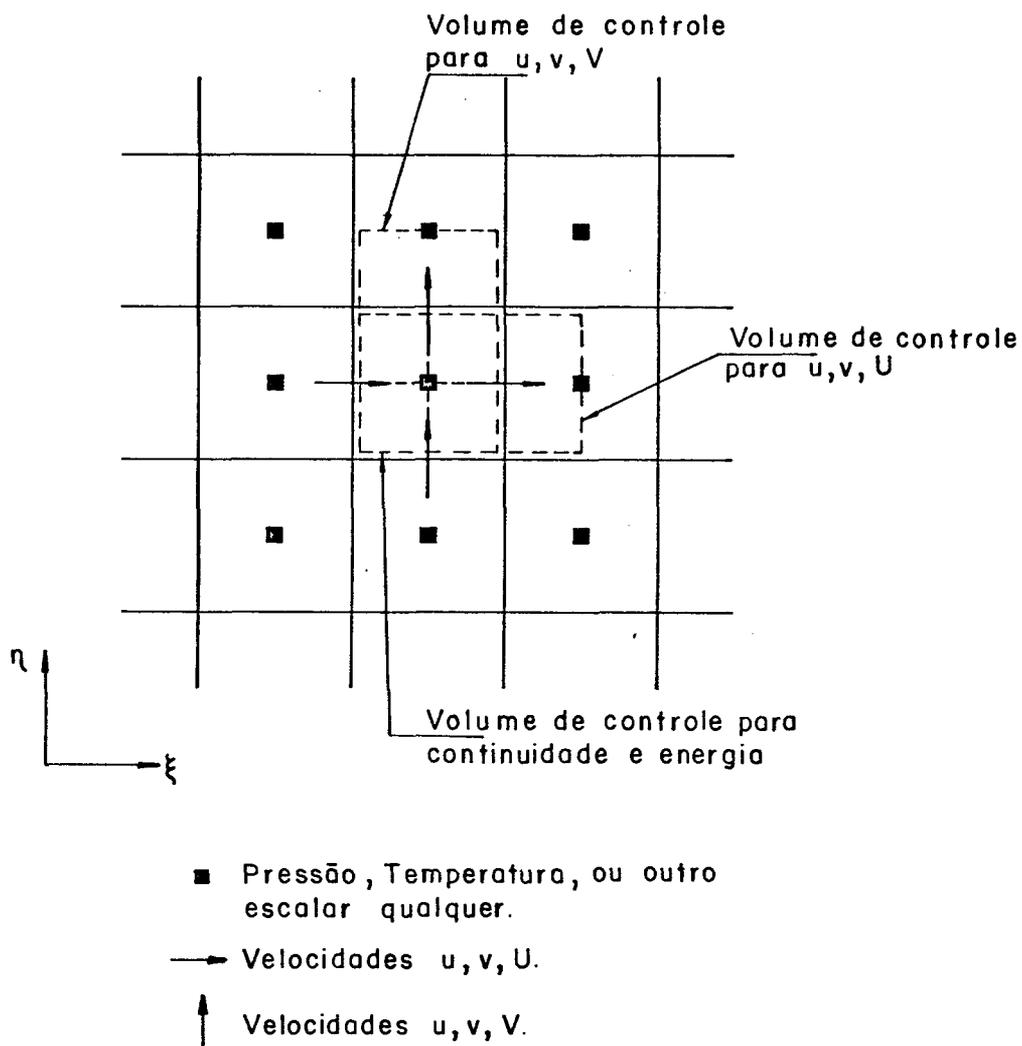


Figura 9 - Posição das variáveis na malha adotada.

5.3 - Equações Aproximadas no Plano Transformado

Na equação diferencial parcial em sua forma genérica, no plano transformado, aplica-se o método dos volumes finito a cada célula do domínio, como se mostra na Figura 10.

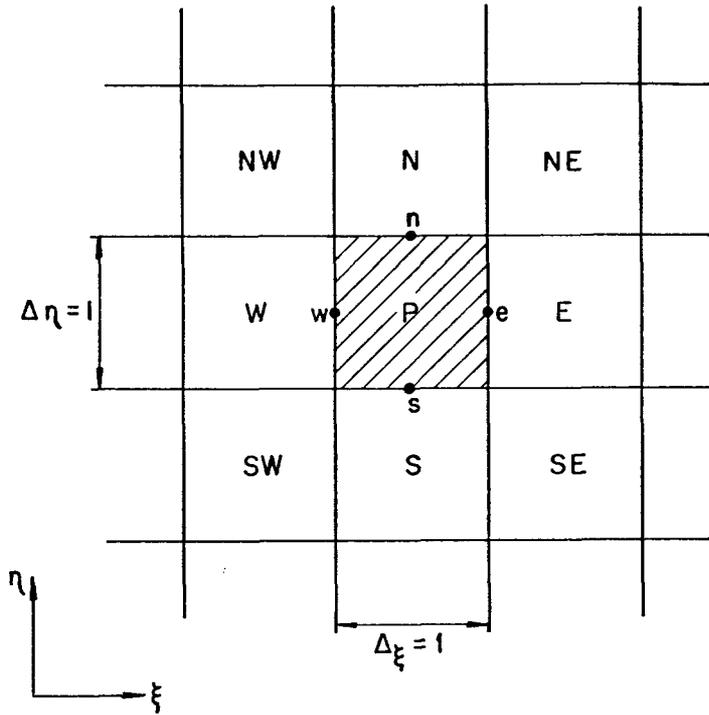


Figura 10 - Volume de controle elementar no plano transformado.

Como a equação diferencial nos apresenta a conservação da massa, quantidade de movimento, energia, etc., sobre volumes de controle infinitesimais, da mesma maneira, ao fazer a integração em dita equação diferencial, ela nos representa a conservação das propriedades sobre volumes de controle finitos. Isto é, a conservação é conseguida via balanços dos termos da equação diferencial com suas respectivas aproximações em diferenças finitas.

Antes da integração da Equação (4.18), é preciso proceder a um ordenamento da mesma, da maneira seguinte:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi d) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U \phi d) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V \phi d) + \hat{P} \phi = \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \hat{S}T \phi \quad (5.1)$$

onde

$$\hat{S}T \phi = \hat{S} \phi + \frac{\partial}{\partial \xi}(C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) \quad (5.2)$$

Este novo termo fonte contém os termos de derivadas cruzadas não ortogonais. Optamos neste trabalho, em manter os termos com derivadas cruzadas no termo fonte. Na realidade, os mesmos poderiam ser tratados implicitamente, dando origem a um esquema de 9 pontos, que não apresenta nenhuma dificuldade para a sua solução. A manutenção, ou não, dos mesmos no termo fonte depende de suas magnitudes. Quando a malha utilizada é quase-ortogonal estes termos podem ser mantidos no termo fonte sem problemas de qualquer espécie. Para malhas altamente não ortogonais, cuidados devem ser tomados.

Muitos trabalhos realizados pelo Grupo de Simulação Numérica da UFSC, mostram, entretanto que, mesmo em casos bastante não ortogonais a manutenção dos mesmos no termo fonte não apresentaram problemas de convergência.

Fazendo as integrações no espaço e tempo nos termos da Equação (5.1) sobre o volume de controle da Figura 10, tem-se

$$\int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{J} \{ |\rho \phi d|^{t+\Delta t} - |\rho \phi d|^t \} d\eta d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \{ |\rho U \phi d|_e - |\rho U \phi d|_w \} d\eta dt + \\
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \{ |\rho V \phi d|_n - |\rho V \phi d|_s \} d\xi dt + \\
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{p} \phi d\eta d\xi dt = \\
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \{ |C_{1\frac{\partial\phi}{\partial\xi}}|_e - |C_{1\frac{\partial\phi}{\partial\xi}}|_w \} d\eta dt + \tag{5.3} \\
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \{ |C_{4\frac{\partial\phi}{\partial\eta}}|_n - |C_{4\frac{\partial\phi}{\partial\eta}}|_s \} d\xi dt + \\
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{S}T \phi d\eta d\xi dt
\end{aligned}$$

onde t é o nível do tempo e Δt é o avanço de tempo. Por conveniência, representa-se o nível de tempo t por n , $t+\Delta t$ por $n+1$ e $t+\theta\Delta t$ por $n+\theta$, com θ variando entre zero e um. Quando se tem θ igual a zero, diz-se que a formulação resultante está na forma explícita; quando θ é diferente de zero a formulação se diz implícita.

Como é imperativa a avaliação do valor da propriedade e do valor de sua derivada normal nas interfaces do volume de controle, usam-se aproximações baseadas no "Esquema de Diferenças Ponderadas a Montante" (WUDS) de Raithby & Torrance [30]. Deve-se notar que os valores de ϕ são conhecidos nos centros dos volumes elementares, e, portanto, funções de interpolações são assumidas de acordo com a física do problema. Desta maneira, as funções aproximadas nas faces dos volumes elemen

tares são:

$$\phi_e = \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right| \phi_E \quad (5.4)$$

$$\phi_w = \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right| \phi_W \quad (5.5)$$

$$\phi_n = \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right| \phi_N \quad (5.6)$$

$$\phi_s = \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right| \phi_S \quad (5.7)$$

e as aproximações para os termos difusivos

$$C_{1\frac{\partial\phi}{\partial\xi}}|_e = C_{1e} \bar{\beta}_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta\xi} \quad (5.8)$$

$$C_{1\frac{\partial\phi}{\partial\xi}}|_w = C_{1w} \bar{\beta}_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta\xi} \quad (5.9)$$

$$C_{4\frac{\partial\phi}{\partial\eta}}|_n = C_{4n} \bar{\beta}_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta\eta} \quad (5.10)$$

$$C_{4\frac{\partial\phi}{\partial\eta}}|_s = C_{4s} \bar{\beta}_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta\eta} \quad (5.11)$$

onde $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são funções peso determinadas de acordo com a importância dos processos convectivos e difusivos do problema. Raithby & Torrance [30] apresentam expressões que são as mais correntemente utilizadas para estes esquemas - chamados híbridos-, que foram posteriormente modificados por Raithby [31], e serão as utilizadas neste trabalho.

$$|\bar{\alpha}_e| = \frac{r_e^2}{10 + 2r_e^2} \quad (5.12)$$

$$\bar{\beta}_e = \frac{1 + 0.005r_e^2}{1 + 0.05r_e^2} \quad (5.13)$$

com $r_e = \frac{\rho U \Delta \xi}{\Gamma J \alpha} \Big|_e \quad (5.14)$

sendo r_e o número de Peclet baseado no $\Delta \xi$ correspondente às componentes contravariantes e avaliado na face "e" para este caso. Um estudo detalhado sobre os efeitos convectivos e difusivos é proporcionado por Spalding [32].

Assim, os coeficientes $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são funções do campo de velocidades, podendo mudar de um esquema WUDS para um esquema de "Diferenças Centrais" quando as velocidades são pequenas, com difusão dominante, e levar de um esquema WUDS para um esquema de "Diferenças a Montante" para casos altamente convectivos.

Rearranjando os termos da equação integrada e introduzida nesta, a equação da continuidade em sua forma de diferenças finitas

$$\{|\rho U d|_e - |\rho U d|_w\} \Delta \eta + \{|\rho V d|_n - |\rho V d|_s\} \Delta \xi = 0 \quad (5.15)$$

resulta a seguinte equação:

$$\frac{1}{J} \rho_P d_P \phi_P^{n+1} \frac{\Delta V}{\Delta t} + A_P^* \phi_P^{n+\theta} = A_e \phi_E^{n+\theta} + A_w \phi_W^{n+\theta} + A_n \phi_N^{n+\theta} + A_s \phi_S^{n+\theta} + \frac{1}{J} \rho_P d_P \phi_P^n \frac{\Delta V}{\Delta t} - L |\hat{P}^\phi| \Delta V + L |\hat{S}^\phi| \Delta V \quad (5.16)$$

com ΔV como o produto de $\Delta \eta$ por $\Delta \xi$, que deve ser igual a "um" , e só é mantido para visualizar melhor as interpretações físicas da expressão.

$L|\hat{P}^\phi|$ e $L|S\hat{T}^\phi|$ são os termos de pressão e fonte, desenvolvidos em diferenças centrais através do operador L .

Os valores dos coeficientes são

$$A_e = - M_e \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) + \bar{\beta}_e D_e \quad (5.17)$$

$$A_w = M_w \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \bar{\beta}_w D_w \quad (5.18)$$

$$A_n = - M_n \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + \bar{\beta}_n D_n \quad (5.19)$$

$$A_s = M_s \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) + \bar{\beta}_s D_s \quad (5.20)$$

$$A_p^* = A_e + A_w + A_n + A_s \quad (5.21)$$

onde a parte convectiva é dada por

$$M_e = \rho U d \left|_e^{n+\theta} \Delta \eta \quad (5.22)$$

$$M_w = \rho U d \left|_w^{n+\theta} \Delta \eta \quad (5.23)$$

$$M_n = \rho V d \left|_n^{n+\theta} \Delta \xi \quad (5.24)$$

$$M_s = \rho V d \left|_s^{n+\theta} \Delta \xi \quad (5.25)$$

e os termos difusivos por

$$D_e = C_{1e} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (5.26)$$

$$D_w = C_{1w} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (5.27)$$

$$D_n = C_{4n} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (5.28)$$

$$D_s = C_{4s} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (5.29)$$

Fazendo $\theta=0$ na Equação (5.16), a equação resultante avança a variável ϕ de um modo explícito. Com esta condição e para garantir a positividade dos coeficientes deve-se respeitar [28],

$$\Delta t \leq \frac{\rho_P \Delta V d_P}{A_P^* J} = \Delta t_{\max} \quad (5.30)$$

onde Δt_{\max} é o valor máximo de avanço que pode ter Δt , sendo ele variável em cada volume de controle.

Quando se tem interesse no transiente real, o valor de Δt usado é o mesmo para todas as equações e todos os volumes de controle. Neste caso Δt deve observar a seguinte expressão

$$\Delta t = E \Delta t_{\max} \quad (5.31)$$

Onde E é um fator multiplicativo de tempo, menor ou igual à unidade para formulação explícita. Portanto, na Equação (5.16) introduzindo o valor de E temos a formulação explícita

$$\frac{A_P^*}{E} \phi_P^{n+1} = A_P^* \frac{(1-E)}{E} \phi_P^n + A_e \phi_E^n + A_w \phi_W^n + A_n \phi_N^n + A_s \phi_S^n - L|\hat{P}^\phi| \Delta V + L|\hat{S}\hat{T}^\phi| \Delta V \quad (5.32)$$

Quando se tem interesse no regime permanente, pode-se usar fatores de relaxação para uma convergência mais rápida.

Fazendo $\theta=1$, obtém-se a formulação implícita, onde o valor de E pode ser maior que a unidade, e atingir mais rapidamente a solução do problema. A equação para a formulação implícita é

$$A_P \phi_P^{n+1} = \frac{A_P}{(1+E)} \phi_P^n + A_e \phi_E^{n+1} + A_w \phi_W^{n+1} + A_n \phi_N^{n+1} + A_s \phi_S^{n+1} - L|\hat{P}^\phi| \Delta V + L|\hat{S}\hat{T}^\phi| \Delta V \quad (5.33)$$

com

$$A_P = A_P^* + \frac{\rho_P \Delta V d_P}{J \Delta t} \quad (5.34)$$

usando-se as equações (5.30) e (5.31)

$$\frac{\rho_P \Delta V d_P}{J \Delta t} = \frac{A_P^*}{E} \quad (5.35)$$

e

$$A_P = A_P^* \frac{(1+E)}{E} \quad (5.36)$$

Como o valor de ϕ_P na formulação explícita tem restrição de avanço, é recomendável usar a formulação implícita. Nes-

te caso, precisa-se de um sistema de equações lineares para sua solução, que pode ser obtida através dos métodos linhas por linha, solução direta, ou ponto por ponto - que é utilizado nesta dissertação.

As equações governantes na formulação u-v para os volumes finitos, na forma implícita, para as equações de movimento e energia, são

Continuidade

$$\{|\rho U d|_e - |\rho U d|_w\} \Delta \eta + \{|\rho V d|_n - |\rho V d|_s\} \Delta \xi = 0 \quad (5.37)$$

Movimento para u

$$A_P u_P^{n+1} = A_e u_E^{n+1} + A_w u_W^{n+1} + A_n u_N^{n+1} + A_s u_S^{n+1} + \frac{A_P}{(1 + E)} u_P^n - L |\hat{P}^u| \Delta V + L |\hat{S}T^u| \Delta V \quad (5.38)$$

Movimento para v

$$A_P v_P^{n+1} = A_e v_E^{n+1} + A_w v_W^{n+1} + A_n v_N^{n+1} + A_s v_S^{n+1} + \frac{A_P}{(1 + E)} v_P^n - L |\hat{P}^v| \Delta V + L |\hat{S}T^v| \Delta V \quad (5.39)$$

Energia

$$A_P T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + \frac{A_P}{(1 + E)} T_P^n + L |\hat{S}T^T| \Delta V \quad (5.40)$$

Para resolver este sistema de equações em forma iterativa, há que se obter a equação para a pressão, o que se fará no próximo capítulo.

CAPÍTULO 6

ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO

6.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentadas as equações do movimento em termos das componentes contravariantes do vetor velocidade.

Apresenta-se ainda um método iterativo para tratar do acoplamento pressão-velocidade, apresentando suas equações próprias para correção de velocidades e atualização da pressão, bem como, a técnica para obter a equação para a pressão.

6.2 - Equações do Movimento em Termos de U e V

Como definido no Capítulo 4, as componentes cartesianas do vetor velocidade são as variáveis dependentes do problema. Como se está tratando aqui com volumes finitos arbitrários, para a realização de balanços de massa nas fronteiras destes volumes, é necessário o conhecimento de u e v no mesmo ponto, já que nem u e nem v são normais às faces. Do ponto de vista computacional, contudo, não é interessante ter-se que resolver as equações do movimento para u e v no mesmo ponto.

Ficou mostrado também, no Capítulo 4, que a componente contravariante U é a responsável pelo fluxo de massa nas faces Este e Oeste, e V a responsável para as faces Norte e Sul.

Portanto, é recomendável que as equações do movimento sejam resolvidas também para estas variáveis, que são as que fazem parte da equação da continuidade. As equações do movimento são, então, escritas para as variáveis contravariantes.

Uma análise detalhada pode ser encontrada em [17].

Fazendo uso das Equações (5.38) e (5.39) em combinação com as Equações (4.28) e (4.29) obtêm-se as equações do movimento para as variáveis U-V.

$$\bar{U}_P = \hat{U}_P - \left| \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\alpha \Delta V d^2}{A_P^U} \right|_P + \left| \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\beta \Delta V d^2}{A_P^U} \right|_P \quad (6.1)$$

$$\bar{V}_P = \hat{V}_P - \left| \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\gamma \Delta V d^2}{A_P^V} \right|_P + \left| \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\beta \Delta V d^2}{A_P^V} \right|_P \quad (6.2)$$

Onde os valores de \hat{U}_P e \hat{V}_P são dados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \hat{U}_P = & \frac{A_e^U}{A_P^U} |u_{E d_P y_{\eta P}} - v_{E d_P x_{\eta P}}| + \frac{A_w^U}{A_P^U} |u_{W d_P y_{\eta P}} - v_{W d_P x_{\eta P}}| + \\ & \frac{A_n^U}{A_P^U} |u_{N d_P y_{\eta P}} - v_{N d_P x_{\eta P}}| + \frac{A_s^U}{A_P^U} |u_{S d_P y_{\eta P}} - v_{S d_P x_{\eta P}}| + \\ & \frac{\bar{B}_P^U}{A_P^U} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\hat{V}_P = \frac{A_e^V}{A_P^V} |v_{E d_P x_{\xi P}} - u_{E d_P y_{\xi P}}| + \frac{A_w^V}{A_P^V} |v_{W d_P x_{\xi P}} - u_{W d_P y_{\xi P}}| +$$

$$\frac{A_n^V}{A_P^V} \left| v_{N^d_P} x_{\xi P} - u_{N^d_P} y_{\xi P} \right| + \frac{A_s^V}{A_P^V} \left| v_{S^d_P} x_{\xi P} - u_{S^d_P} y_{\xi P} \right| +$$

$$\frac{\bar{B}_P^V}{A_P^V} \quad (6.4)$$

e os novos termos fontes são

$$\bar{B}_P^U = \left| \frac{A_P^u}{1+E} u_P + L |\hat{S}T^u| \Delta V \right| d_P y_{\eta P} -$$

$$\left| \frac{A_P^v}{1+E} v_P + L |\hat{S}T^v| \Delta V \right| d_P x_{\eta P} \quad (6.5)$$

$$\bar{B}_P^V = \left| \frac{A_P^v}{1+E} v_P + L |\hat{S}T^v| \Delta V \right| d_P x_{\xi P} -$$

$$\left| \frac{A_P^u}{1+E} u_P + L |\hat{S}T^u| \Delta V \right| d_P y_{\xi P} \quad (6.6)$$

É necessário indicar que os coeficientes para um mesmo ponto em particular, em um volume de controle, são idênticos, ou seja:

$$A_P^u = A_P^v = A_P^U \quad \text{para volume de controle de U}$$

$$A_P^u = A_P^v = A_P^V \quad \text{para volume de controle de V} \quad (6.7)$$

Observe-se, portanto, que, apesar de as equações apresentarem nomenclatura diferente para os coeficientes acima men-

cionados, eles ocupam o mesmo espaço de armazenagem no computador.

Como se pode ver nas Equações (6.3) e (6.4), estas componentes contravariantes ficam ainda em função das componentes cartesianas. Para prescindir desta situação é possível fazer uso das relações inversas das Equações (4.22), (4.23), que são

$$u = Jd(Ux_{\xi} + Vx_{\eta}) \quad (6.8)$$

$$v = Jd(Uy_{\xi} + Vy_{\eta}) \quad (6.9)$$

e converter toda a equação em função das componentes de velocidades contravariantes.

Tal procedimento, entretanto, não é atraente, pois tornaria a equação excessivamente complexa, conforme já comentado no Capítulo 4, quando se optou pelo uso das componentes $u - v$ como variáveis dependentes. O procedimento adotado neste trabalho é, pois a manutenção destas componentes nas equações, sendo as mesmas recalculadas a cada iteração através do uso das Equações (6.8) e (6.9).

6.3 - Método para Tratar o Acoplamento Pressão - Velocidade

Conforme indicado no Capítulo 2, quando a massa específica é constante no domínio ou é função da temperatura ape-

nas, a equação de estado não poderá mais ser usada para a determinação da pressão; passará a ser uma equação que determinará a massa específica. Desta maneira, não existe mais uma equação para avançar os valores de pressão durante o ciclo iterativo. Os esquemas numéricos criados para avançar os valores de pressão são os chamados métodos que tratam o acoplamento pressão-velocidade.

Existem vários métodos e uma análise deles pode ser apreciada em [18]. Neste trabalho usa-se o método PRIME - "Pressure Implicit Momentum Explicit" -, conforme descrito em [17], que simplifica o ciclo iterativo, eliminando o procedimento usual de dois passos, fazendo a correção da velocidade e o cálculo da pressão em um único passo.

Isto é conseguido fazendo-se uso das Equações (6.3) e (6.4), onde as velocidades \hat{U}_p e \hat{V}_p são conhecidas em função das velocidades da iteração anterior, e são inseridas na equação da conservação da massa, conduzindo à equação da pressão. Este novo campo de pressão avançado é substituído novamente nas Equações (6.1) e (6.2) para corrigir as velocidades.

Portanto, o processo iterativo para a resolução do sistema de equações governantes discretizadas, pela utilização do método PRIME, é o seguinte:

- (1) - Estimar os campos de pressão $P(\xi, \eta)$, de temperatura $T(\xi, \eta)$ e de velocidade $u(\xi, \eta)$ e $v(\xi, \eta)$ no domínio.
- (2) - Calcular os coeficientes das equações de movimento para u e para v , que são os mesmos para

U e V.

- (3) — Calcular as velocidades \hat{U} e \hat{V} das Equações (6.3) e (6.4), com o campo de velocidades cartesianas da iteração anterior.
- (4) — Resolver a equação para a pressão. (Ver próxima Seção).
- (5) — Corrigir as velocidades U e V com este novo campo de pressões, usando as Equações (6.1) e (6.2).
- (6) — Calcular U e V, não exigida para satisfazer a continuidade, usando as equações abaixo. (ver Figura 11).

$$U = (U_A + U_B + U_C + U_D)/4 \quad (6.10)$$

$$V = (V_A + V_B + V_C + V_D)/4 \quad (6.11)$$

- (7) — Calcular as velocidades u e v usando as Equações (6.8) e (6.9).
- (8) — Voltar ao item (2) até convergir o campo de velocidades. Estas iterações são necessárias pela não-linearidade e pelo acoplamento entre as equações.
- (9) — Calcular os coeficientes para a equação da energia.

- (10) Resolver a equação (5.40) da energia para calcular a temperatura.

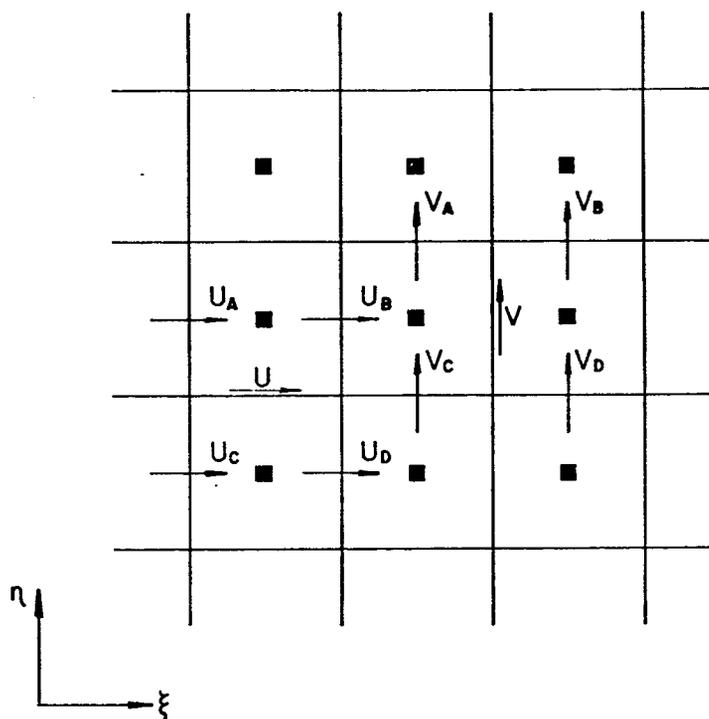


Figura 11 - Determinação das componentes contravariantes U e V não necessárias para satisfazer a conservação da massa.

Deve-se ressaltar que os sistemas de equações para as velocidades não são resolvidos diretamente. Elas são avançadas durante o ciclo iterativo de uma forma semelhante a utilizada no método de Jacobi, que é uma técnica ponto por ponto e daí a semelhança com o método explícito; só uma equação da pressão é resolvida em cada iteração.

6.4 - Obtenção da Equação para a Pressão

Chega-se a esta equação introduzindo-se as equações de movimento discretizadas para as faces do volume de controle, na equação da continuidade.

As equações de movimento nas faces para o volume de controle da Figura 12, com as velocidades que participam no balanço de massa, são da mesma estrutura que as Equações (6.1) e (6.2).

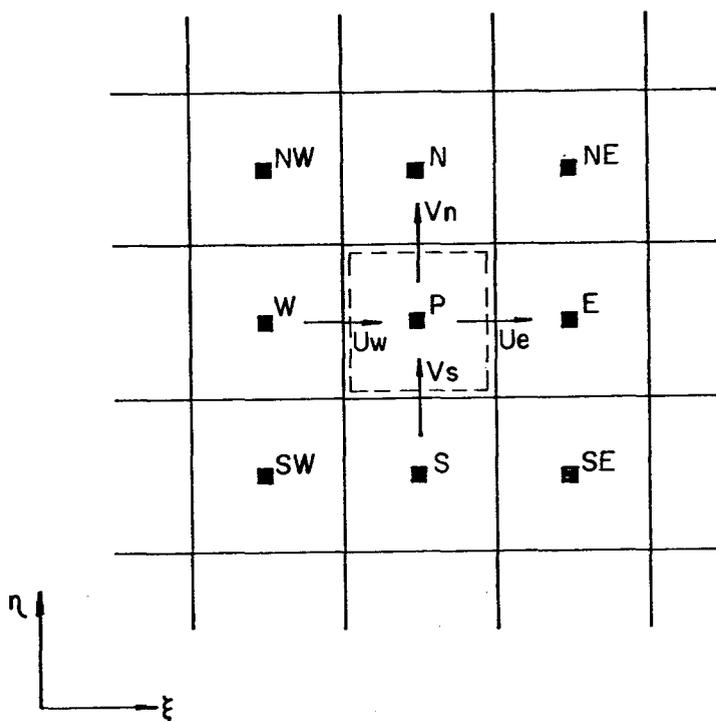


Figura 12 - Volume de controle da continuidade, com as velocidades que participam no balanço de massa.

De acordo com a Equação (6.1), com as velocidades participantes no balanço de massa segundo a Figura 12, têm-se as

seguintes expressões com aproximações de segunda ordem para os gradientes de pressão:

$$\bar{U}_e = \hat{U}_e - \left| \frac{\alpha \Delta V d^2}{A_P U \Delta \xi} \right|_e (P_E - P_P) + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_P U \Delta \eta} \right|_e (P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE}) \quad (6.12)$$

$$\bar{U}_w = \hat{U}_w - \left| \frac{\alpha \Delta V d^2}{A_P U \Delta \xi} \right|_w (P_P - P_W) + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_P U \Delta \eta} \right|_w (P_N + P_{NW} - P_S - P_{SW}) \quad (6.13)$$

$$\bar{V}_n = \hat{V}_n - \left| \frac{\gamma \Delta V d^2}{A_P V \Delta \eta} \right|_n (P_N - P_P) + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_P V \Delta \xi} \right|_n (P_E + P_{NE} - P_W - P_{NW}) \quad (6.14)$$

$$\bar{V}_s = \hat{V}_s - \left| \frac{\gamma \Delta V d^2}{A_P V \Delta \eta} \right|_s (P_P - P_S) + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_P V \Delta \xi} \right|_s (P_E + P_{SE} - P_W - P_{SW}) \quad (6.15)$$

Substituindo as Equações (6.12) a (6.15) na equação da continuidade Equação (5.37) e reordenando os termos, tem-se a seguinte, denominada "Equação de Poisson para a Pressão"

$$A_P P_P = A_e P_E + A_w P_W + A_n P_N + A_s P_S + A_{ne} P_{NE} + A_{nw} P_{NW} + A_{se} P_{SE} + A_{sw} P_{SW} + B \quad (6.16)$$

onde

$$A_p = \left| \frac{\alpha \Delta V d^2}{A_p U \Delta \xi} \right|_w + \left| \frac{\alpha \Delta V d^2}{A_p U \Delta \xi} \right|_e + \left| \frac{\gamma \Delta V d^2}{A_p V \Delta \eta} \right|_n + \left| \frac{\gamma \Delta V d^2}{A_p V \Delta \eta} \right|_s \quad (6.17)$$

$$A_e = \left| \frac{\alpha \Delta V d^2}{A_p U \Delta \xi} \right|_e - \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p V \Delta \xi} \right|_n + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p V \Delta \xi} \right|_s \quad (6.18)$$

$$A_w = \left| \frac{\alpha \Delta V d^2}{A_p U \Delta \xi} \right|_w + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p V \Delta \xi} \right|_n - \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p V \Delta \xi} \right|_s \quad (6.19)$$

$$A_n = \left| \frac{\gamma \Delta V d^2}{A_p V \Delta \eta} \right|_n + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p U \Delta \eta} \right|_w - \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p U \Delta \eta} \right|_e \quad (6.20)$$

$$A_s = \left| \frac{\gamma \Delta V d^2}{A_p V \Delta \eta} \right|_s - \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p U \Delta \eta} \right|_w + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p U \Delta \eta} \right|_e \quad (6.21)$$

$$A_{ne} = - \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p U \Delta \eta} \right|_e - \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p V \Delta \xi} \right|_n \quad (6.22)$$

$$A_{se} = \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p U \Delta \eta} \right|_e + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p V \Delta \xi} \right|_s \quad (6.23)$$

$$A_{nw} = \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p U \Delta \eta} \right|_w + \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p V \Delta \xi} \right|_n \quad (6.24)$$

$$A_{sw} = - \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p U \Delta \eta} \right|_w - \left| \frac{\beta \Delta V d^2}{4 A_p V \Delta \xi} \right|_s \quad (6.25)$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\vec{V}} = \hat{U}_w - \hat{U}_e + \hat{V}_s - \hat{V}_n \quad (6.26)$$

Demonstra-se facilmente das expressões dos coeficientes que

$$A_p = A_e + A_n + A_w + A_s$$

$$A_{ne} + A_{se} + A_{nw} + A_{sw} = 0$$

Os coeficientes encontrados são válidos exclusivamente no domínio interno do volume de controle. Para o caso da fronteira o procedimento é similar, onde as velocidades contra-variantes presentes nas faces que participam do balanço de massa são inseridas na equação da continuidade para obter a equação de Poisson com seus respectivos coeficientes. Isto é realizado no Apêndice B.

A equação de Poisson nos mostra que a pressão tem uma dependência de 9 pontos. Se a malha é semelhante a uma do tipo ortogonal, então a pressão mantém uma forte ligação com os pontos W, E, S e N, e uma débil dependência com os pontos SW, SE, NW e NE da Figura 12. Se a malha é ortogonal com $\beta=0$, tem-se um esquema de 5 pontos. Quanto mais não-ortogonal é a malha, maior a ligação entre a pressão e os pontos diagonais, não deixando, entretanto, de manter sempre a ligação forte com os pontos paralelos, uma característica importante da metodologia aqui utilizada.

CAPÍTULO 7

CONDIÇÕES DE CONTORNO

7.1 - Introdução

Até o momento, apenas a equação diferencial discretizada governante do fenômeno foi estabelecida. Para completar a formulação do problema, é necessário especificar as condições de contorno e implementá-las de forma discretizada no plano transformado. A implementação destas condições é de fundamental importância num método numérico, pois são um dos principais fatores que produzem o avanço da solução quando se trata de um processo iterativo. O processo de aplicação das condições de contorno está ligado à localização das variáveis na malha, as quais podem estar ou não sobre a fronteira.

Neste capítulo, mostram-se as condições de contorno de um ponto de vista geral para todas as variáveis no plano transformado.

Discute-se a aplicação da técnica do ponto fictício que, neste caso, será usado apenas para as velocidades.

Avaliam-se também as condições de contorno para a pressão, determinando suas equações correspondentes mediante a aplicação dos balanços de massa.

Os balanços de calor, por sua vez, se aplicam os volumes das fronteiras, de tal forma que as condições de contorno fiquem incorporadas na equação da energia resultante. Quando ne

cessários, são determinados os gradientes de temperaturas nas faces.

7.2 - Considerações Gerais sobre as Condições de Contorno

Consideram-se, a seguir, alguns aspectos gerais sobre as condições de contorno em um domínio transformado.

Em primeiro lugar, o domínio é simplesmente conexo, convertendo-se suas quatro fronteiras em um retângulo no plano transformado. Assim, as condições de contorno no domínio transformado são as mesmas encontradas no plano físico, que serão mapeadas sobre os quatro lados do retângulo.

As condições de contorno, dependem em geral, da posição das variáveis, que poderão estar ou não sobre as fronteiras do domínio de cálculo. A seguir são exemplificadas diversas possibilidades para aplicação dessas condições.

Uma das técnicas, a do uso dos volumes fictícios, facilita a aplicação das condições de contorno e estabelece uma única equação para representar todos os pontos do domínio, a qual é obtida através das condições de contorno, mediante a seguinte equação geral:

$$\phi_N = A \phi_{N-1} + B \quad (7.1)$$

Para o caso mostrado na Figura 13, temos

$$\phi_W = A_w \phi_P + B_w \quad (7.2)$$

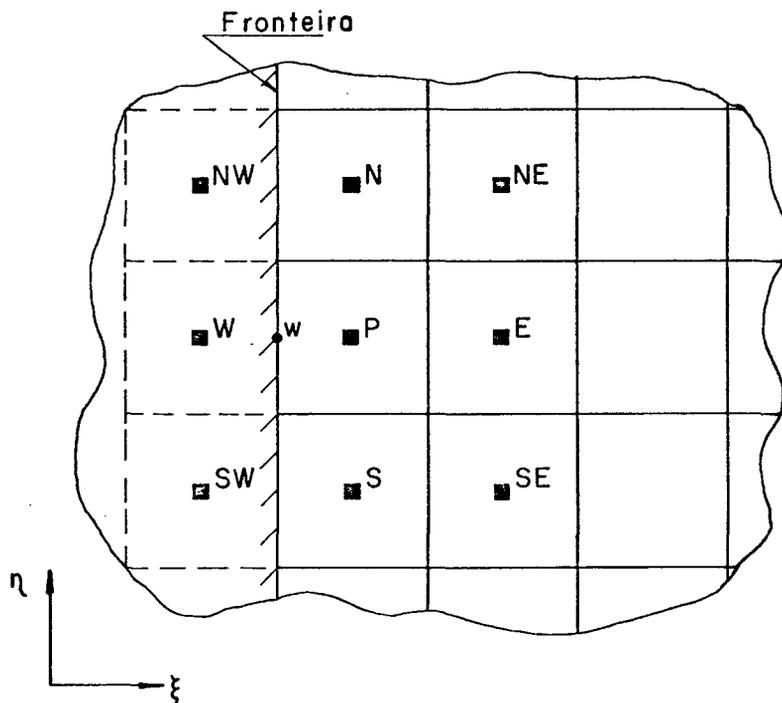


Figura 13 - Volume de controle fictício no domínio transformado

onde A_w e B_w são funções das condições de contorno. Desta forma, a expressão acima é a equação algébrica para o ponto fictício.

a) Tipo Dirichlet. Usando ϕ na parede como uma média ponderada entre os vizinhos

$$\phi_w = \left(\frac{1}{2} + \alpha_w\right)\phi_W + \left(\frac{1}{2} - \alpha_w\right)\phi_P \quad (7.3)$$

que, colocando na forma da Equação (7.2), resulta

$$\phi_w = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \alpha_w\right)}{\left(\frac{1}{2} + \alpha_w\right)}\phi_P + \frac{\phi_w}{\left(\frac{1}{2} + \alpha_w\right)} \quad (7.4)$$

b) Tipo Neumann. Com fluxo ϕ prescrito na fronteira.

A equação para o fluxo ϕ por difusão é dada por

$$q'' = -k \left. \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right|_w \quad (7.5)$$

Este caso depende do tipo de malha, ou seja,

b1) Se a malha é ortogonal,

$$q'' = -k \left. \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right|_w = -\beta_w k \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi} \quad (7.6)$$

Colocando na forma da Equação (7.2),

$$\phi_W = \phi_P + \frac{q'' \Delta x}{\beta_w k} \quad (7.7)$$

b2) Se a malha é não-ortogonal, o gradiente de temperatura no plano transformado tem a seguinte forma (Ver Apêndice C):

$$q'' = -k \left. \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right|_w = -k \left| \alpha^{1/2} J \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \alpha^{-1/2} \beta J \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_w \quad (7.8)$$

que, colocada na forma da Equação (7.2), resulta

$$\phi_W = \phi_P + \frac{\beta}{4\alpha} (\phi_{NW} + \phi_N - \phi_{SW} - \phi_S) - \frac{q''}{k\alpha^{1/2} J} \quad (7.9)$$

Esta forma difere quando se trata de malha ortogonal, porque a equação do ponto fictício passa a depender dos novos pontos NW e SW, também fictícios, conforme a Figura 13; portanto, não é

recomendável usar esta técnica para malhas não-ortogonais.

c) Tipo Robin. Se a condição na fronteira é de convecção de ϕ , a condição de contorno é expressa por

$$-k \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \Big|_w = h(\phi_w - \phi_\infty) \quad (7.10)$$

onde, novamente, os dois casos anteriores se apresentam.

Desta maneira, justifica-se o uso da técnica de pontos fictícios só para as velocidades, uma vez que geralmente são conhecidas nas fronteiras. Como a pressão e a temperatura ficam armazenadas da mesma forma (não sobre a fronteira) e não se usarão pontos fictícios para estas variáveis, as condições de contorno são obtidas através de balanços de massa e de energia para as células de fronteira. Desta forma as condições de contorno ficam incorporadas na equação algébrica do ponto de fronteira.

7.3 - Condição de Contorno da Velocidade

De acordo com o que se mostrou na Seção anterior, faz-se uso da técnica do ponto fictício para as velocidades contra variantes, quando não são coincidentes com as fronteiras, aplicando-se a Equação (7.1). Isto é válido também, para velocidades prescritas ou de derivada nula na saída, mas deve-se ter cuidado quando são aplicadas estas condições de tipo parabólico para a velocidade, já que a malha deve estar alinhada, na

saída, com o vetor velocidade $|35|$. Se esta condição não é satisfeita, pode originar-se um problema de divergência numérica, consequência da não conservação da massa.

7.4 - Determinação dos Gradientes de Pressão nos Volumes de Controle das Velocidades Situados na Fronteira

Como as equações de movimento discretizadas são função do gradiente de pressão, é preciso avaliá-lo quando se está trabalhando num elemento de fronteira.

Seja a Figura 14 onde se quer avaliar o gradiente de pressão $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ para o volume de controle de V, no ponto 3, mediante uma aproximação de segunda ordem.

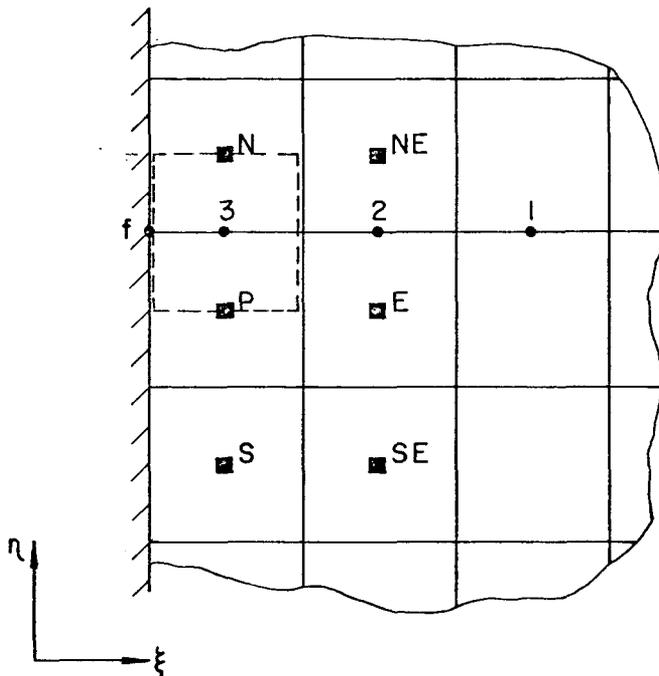


Figura 14 - Volume de controle da velocidade V na fronteira. Avaliação do gradiente $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ em 3.

Tal aproximação de segunda ordem, utilizada em [17] tem como perfil, no plano ξ - P o indicado na Figura 15.

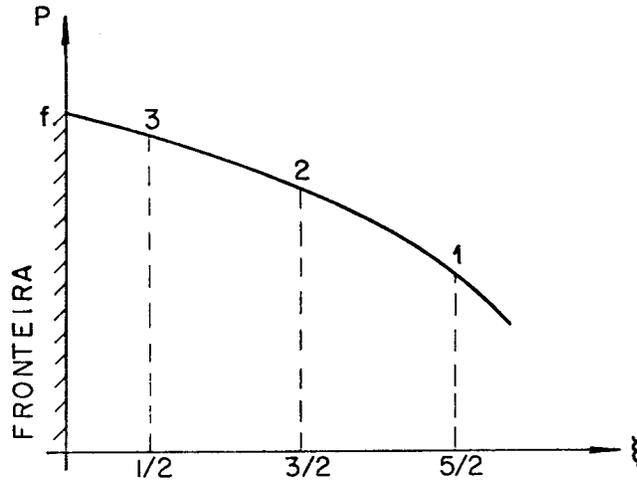


Figura 15 - Aproximação do perfil de pressão na fronteira.

Portanto

$$P(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \quad (7.11)$$

Fazendo algumas operações,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_3 = \frac{P_2 - P_3}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_f \quad (7.12)$$

O gradiente na fronteira é determinado passando a parábola pelo terceiro ponto, obtendo-se

$$a_0 = \frac{3}{8} P_1 - \frac{5}{4} P_2 + \frac{15}{8} P_3 \quad (7.13)$$

$$a_1 = -P_1 + 3P_2 - 2P_3 \quad (7.14)$$

$$a_2 = \frac{P_1}{2} - P_2 + \frac{P_3}{2} \quad (7.15)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_f = a_1 \quad (7.16)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_3 = -\frac{3}{2}P_3 + 2P_2 - \frac{P_1}{2} \quad (7.17)$$

Deve-se atentar para a localização dos eixos com relação à seqüência dos pontos na parábola segundo a fronteira, uma vez que se origina uma troca de sinais. No Apêndice B mostram-se os valores dos gradientes de pressão para outras fronteiras.

Com o uso destes gradientes é possível determinar as equações do movimento para as fronteiras onde eles estão presentes, e fazer o balanço de massa respectivo para obter a equação da pressão.

7.5 - Condições de Contorno para a Pressão

Como foi mencionado na Seção (7.2), não se faz uso do ponto fictício para a pressão, inserindo-se diretamente as velocidades contravariantes, que atuam nas faces do volume de controle, sobre a equação da continuidade [17], originando a equação de Poisson respectiva, que atualiza o campo das pressões e corrige o campo das velocidades.

Apresenta-se, agora, o caso de uma fronteira Oeste; os outros casos podem ser vistos no Apêndice B.

Considere-se a Figura 16, onde a condição de contorno na fronteira é de velocidade prescrita U_w . Este volume de controle será identificado pela letra L.

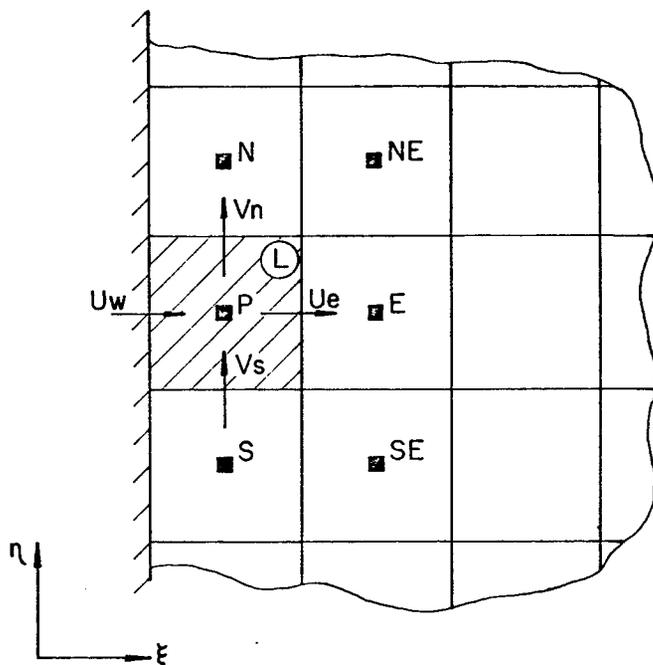


Figura 16 - Volume de controle da continuidade, com suas velocidades contravariantes, que participam no balanço de massa na fronteira.

Aplica-se a Equação (6.1) para o volume elementar de fronteira. Como a velocidade na parede é U_w prescrita, a mesma não necessitará ser corrigida, e, portanto,

$$\bar{U}_w = \hat{U}_w \quad (7.18)$$

$$\bar{U}_e = \hat{U}_e - \left| \frac{\alpha d^2}{A_p U} \right|_e (P_E - P_P) + \left| \frac{\beta d^2}{4A_p U} \right|_e |P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE}| \quad (7.19)$$

$$\bar{V}_n = \hat{\bar{V}}_n - \left| \frac{\gamma d^2}{A_P V} \right|_n (P_N - P_P) + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_n |P_E + P_{NE} - P_P - P_N + 2(\Delta P_f)_n| \quad (7.20)$$

$$\bar{V}_s = \hat{\bar{V}}_s - \left| \frac{\gamma d^2}{A_P V} \right|_s (P_P - P_S) + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_s |P_E + P_{SE} - P_P - P_S + 2(\Delta P_f)_s| \quad (7.21)$$

onde

ΔP_f é o gradiente de pressão no ponto da fronteira correspondente a sua face, e é dado pela Equação (7.16).

Inserindo estas velocidades na equação da continuidade de Equação (5.37), obtêm-se as expressões abaixo para o coeficiente e termo fonte para este volume de controle, onde a equação para a pressão no ponto de fronteira tem a mesma forma da Equação (6.16). Para este volume

$$A_w = A_{sw} = A_{nw} = 0 \quad (7.22)$$

e

A_e , A_{ne} , A_{se} permanecem inalterados com respeito aos valores para volume interior,

$$A_n = \left| \frac{\gamma d^2}{A_P V} \right|_n - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_e + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_n \quad (7.23)$$

$$A_s = \left| \frac{\gamma d^2}{A_p V} \right|_s + \left| \frac{\beta d^2}{4A_p U} \right|_e - \left| \frac{\beta d^2}{4A_p V} \right|_s \quad (7.24)$$

$$A_p = A_e + A_n + A_s + A_{ne} + A_{se} \quad (7.25)$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\vec{V}} + K_v)_s - K_v)_n \quad (7.26)$$

$$K_v = \frac{\beta d^2}{2A_p V} \Delta P_f \quad (7.27)$$

Da expressão do termo fonte B aparecem novos termos, provenientes do gradiente de pressão, que se derivam quando se trata de 9 pontos; para uma malha ortogonal, então, estes termos são nulos.

Se a condição de contorno na fronteira da Figura 16 for de derivada nula, mantêm-se as mesmas considerações anteriores para as fronteiras norte e sul, enquanto que seus coeficientes ficam inalterados; a condição que muda é a das velocidades nas fronteiras Este e Oeste que tomam o valor

$$\bar{U}_w = \bar{U}_e \quad (7.28)$$

onde são realizados os mesmos passos indicados acima para a obtenção dos coeficientes e termo fonte. O mesmo procedimento é adotado para todas as outras fronteiras, e os resultados estão mostrados no Apêndice B.

7.6 - Determinação dos Gradientes de Temperatura nos Volumes de Controle Situados na Fronteira

No Apêndice C mostra-se como são avaliados, no plano transformado os fluxos de calor, que são necessários para os balanços de calor nos volumes de controle na fronteira. Como no caso da pressão, estes gradientes levam em consideração as derivadas nas duas direções coordenadas. As expressões utilizadas para estes perfis são iguais àquelas calculado para a pressão, ou seja, parabólicas. Obviamente que aproximações lineares poderão ser adotadas, principalmente porque para malhas refinadas a aproximação parabólica ou linear na fronteira conduz aos mesmos resultados.

O fato de que tanto a pressão como a temperatura sejam armazenadas no mesmo ponto faz com que o gradiente de temperatura tenha a mesma expressão que o gradiente de pressão - Equação (7-17).

De acordo com a Figura 17,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_3 = -\frac{3}{2} T_3 + 2T_2 - \frac{T_1}{2} \quad (7.29)$$

É preciso conhecer, ainda, o gradiente de temperatura na parede, no caso de se ter uma temperatura prescrita, para avaliar o fluxo. O valor é desenvolvido tal como para a pressão, onde se tira uma parábola que passe pelos pontos w, P e E, da Figura 17. O resultado encontrado é

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_w = 3T_P - \frac{8}{3} T_w - \frac{T_E}{3} \quad (7.30)$$

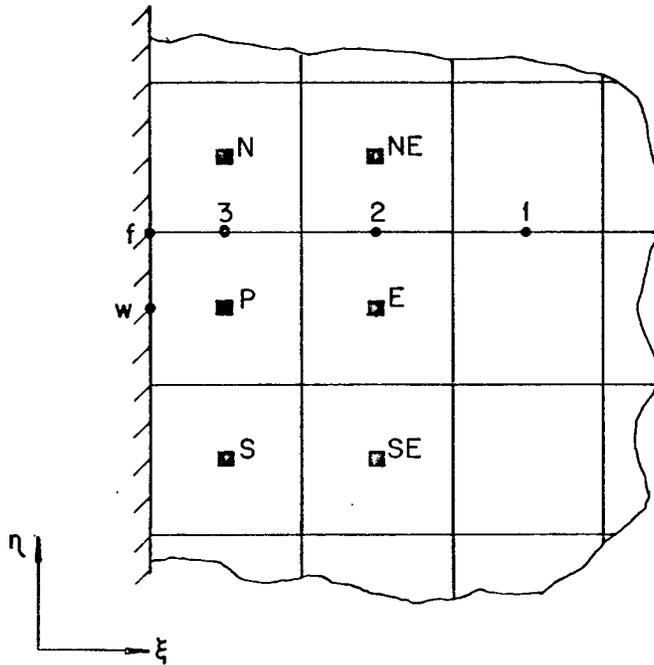


Figura 17 - Volume de controle para avaliar os gradientes de temperatura na fronteira.

Esta equação é válida para as fronteiras Oeste e Sul, devendo-se substituir a simbologia para esta última.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_s = 3T_P - \frac{8}{3}T_S - \frac{T_N}{3} \quad (7.31)$$

Os gradientes para as demais fronteiras aparecem no Apêndice C.

7.7 - Condições de Contorno para a Temperatura

Antes de mostrar os balanços de energia nos volumes

de controle na fronteira, faz-se necessário, para efeito de compreensão do fenômeno, aplicá-los a um volume de controle interno. Deve-se evidentemente obter a Equação (5.40) em sua forma implícita.

Considere-se a Figura 18, onde o volume de controle interno, com seus respectivos fluxos de calor, é representado.

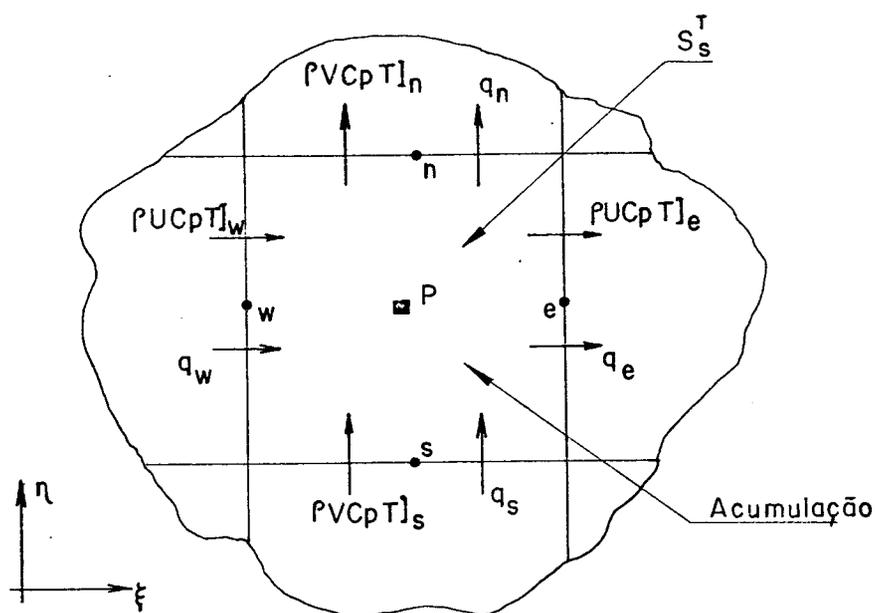


Figura 18 - Volume de controle de temperatura com seus fluxos de calor para o balanço.

A profundidade d do domínio vai implícito na área em que atua cada termo segundo a face.

O termo S_S^T representa, como já indicado no Capítulo 2, o termo fonte produto do efeito difusivo na superfície. Neste ponto, é conveniente colocar que a difusão do fundo do domínio se fez igual a zero, ou seja, $S_F^T = 0$.

A partir daí, fazendo o balanço, tem-se:

$$\begin{aligned} & |(q_w + \rho UC_p T) \Delta \eta d|_w + |(q_s + \rho VC_p T) \Delta \xi d|_s - \\ & |(q_e + \rho UC_p T) \Delta \eta d|_e - |(q_n + \rho VC_p T) \Delta \xi d|_n - \\ & \frac{S_S^T}{J} \Delta \eta \Delta \xi = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta \eta \Delta \xi d C_p T) \end{aligned} \quad (7.32)$$

No Apêndice C apresentam-se os valores dos fluxos de calor no plano transformado, de acordo com sua fronteira de aplicação.

Sustituindo os valores dos fluxos na equação acima, obtêm-se

$$\begin{aligned} & -k \left| \alpha J d \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta J d \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_w \Delta \eta - k \left| \gamma J d \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta J d \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_s \Delta \xi + \\ & k \left| \alpha J d \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta J d \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_e \Delta \eta + k \left| \gamma J d \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta J d \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_n \Delta \xi + \\ & (\rho UC_p T \Delta \eta d)_w + (\rho VC_p T \Delta \xi d)_s - (\rho UC_p T \Delta \eta d)_e - \\ & - (\rho VC_p T \Delta \xi d)_n - \frac{S_S^T}{J} \Delta \eta \Delta \xi = \frac{\rho d C_p}{J} (T^{n+1} - T^n) \Delta \eta \Delta \xi \end{aligned} \quad (7.33)$$

Empregando os valores atribuídos às constantes dadas pelas Equações (4.19) a (4.21); colocando as aproximações para os perfis de temperaturas na forma híbrida, Equações (5.4) a (5.11), e inserindo a Equação (5.37) da continuidade, obtêm-se

$$A_P T_P^{n+1} = A_W T_W^{n+1} + A_E T_E^{n+1} + A_S T_S^{n+1} + A_N T_N^{n+1} + STT \quad (7.34)$$

onde o termo fonte da temperatura STT, diferentemente do termo fonte da Equação (5.2), contém adicionalmente o termo transiente no nível iterativo anterior. Este termo, na Equação (7.34), ordena o nível de iteração.

Então:

$$STT = \left| C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_e + \left| C_5 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_n - \left| C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_w - \left| C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_s + \frac{S_S^T}{J C_P} + \frac{A_P}{(1+E)} T_P^n \quad (7.35)$$

O coeficiente A_P é dado por

$$A_P = (A_W + A_E + A_S + A_N) \frac{(1+E)}{E} \quad (7.36)$$

Para aplicar o balanço de calor no volume de controle na fronteira, o procedimento é similar ao aplicado ao volume interno.

Seja a Figura 19 onde mostra-se um volume de controle na fronteira Oeste, onde a temperatura é prescrita com um fluxo de massa também prescrito.

Uma vez feito o balanço de energia no volume de controle, a equação resultante é

$$A_P T_P^{n+1} = A_E T_E^{n+1} + A_S T_S^{n+1} + A_N T_N^{n+1} + STT \quad (7.37)$$

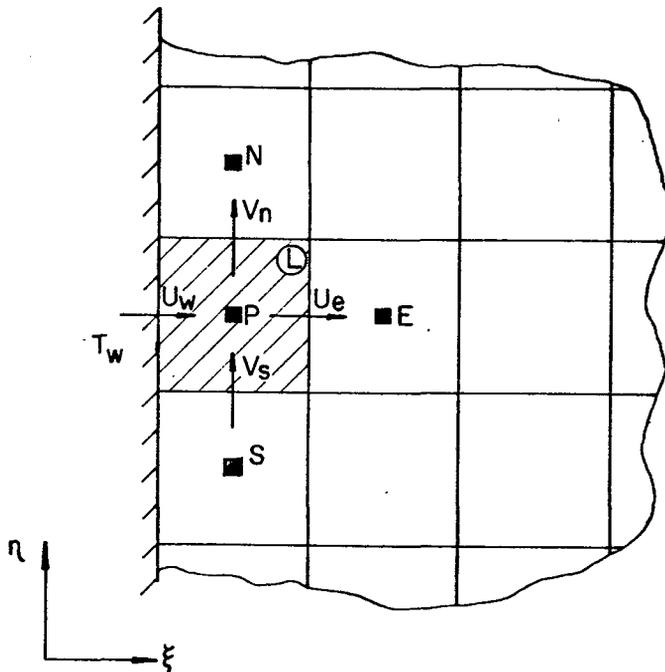


Figura 19 - Volume de controle identificado por L para a temperatura na fronteira

onde

$$STT = C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n - C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s + \frac{q}{C_p})_w + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_P}{1+E} T_P^n \quad (7.38)$$

com a condição de contorno

$$\frac{q}{C_p})_w = - \left| C_{1\frac{\partial T}{\partial \xi}})_w + C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w \right| + M_w T_w \quad (7.39)$$

$$M_w = \rho U_w d_w \quad (7.40)$$

onde os gradientes de fronteira na Equação (7.39) são avalia-

dos com os valores da temperatura da última iteração e com

$$A_p = (A_e + A_s + A_n + M_w) \frac{(1+E)}{E} \quad (7.41)$$

Desta forma, pode-se ter, nas fronteiras, variadas condições de contorno, o que, por sua vez, implicará diferentes termos fontes e coeficientes A_p . Seja, por exemplo:

a) Fronteira sólida com fluxo de calor prescrito

$$\frac{q}{C_p} = q_{\text{prescrito}} \quad (7.42)$$

$$M = \rho U d = 0 \quad (7.43)$$

b) Fronteira sólida com temperatura prescrita

$$\frac{q}{C_p} = - \left| C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{n,s} \quad (7.44)$$

$$\frac{q}{C_p} = - \left| C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{w,e} \quad (7.45)$$

$$M = 0 \quad (7.46)$$

c) Fronteira com temperatura e fluxo de massa prescritos

$$\left. \frac{q}{C_p} \right|_w = - \left| C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_w + M_w T_w$$

$$\frac{q}{C_p} \Big|_s = - \left[C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_s + M_s T_s$$

Nestas equações indicou-se que as condições de entrada acontecem na fronteira w ou na fronteira s, com saída n ou e. Se a fronteira de saída tem uma condição do tipo parabólico, a temperatura de saída na face E, é igual à temperatura na face W, em um volume de controle.

Todos os coeficientes e termos fontes para os diferentes volumes de controle na fronteira são mostrados no Apêndice C.

CAPÍTULO 8

RESULTADOS

8.1 - Introdução

Neste capítulo constam os exemplos numéricos feitos para testar o modelo numérico que será usado para a solução do problema da convecção forçada bidimensional com descarga térmica.

Primeiramente, alguns testes hidrodinâmicos são aplicados com o objetivo de comparar os resultados com aqueles obtidos por outros autores. O problema escolhido é o do escoamento bidimensional em um canal com uma expansão suave, e os resultados são comparados com a solução padrão apresentada por Napolitano & Orlandi [15]. Várias comparações são efetuadas para este canal para determinados números de Reynolds, mostrando-se os diferentes resultados por tabelas e gráficos.

Em seguida, dentro dos testes hidrodinâmicos, é resolvido o problema de um canal com profundidade unitária, onde se prescreve a velocidade de entrada.

Posteriormente, neste mesmo canal variam-se as profundidades linearmente, com o objetivo de testar a parte do programa que envolve a variação da profundidade.

Mostra-se também o caso de um domínio arbitrário com uma descarga térmica havendo perda de calor na superfície por convecção, com diferentes temperaturas de descargas e diver-

sas razões de fluxos entre o escoamento principal e a descarga térmica do jato.

Finalmente, são mostrados os resultados do problema bidimensional do lago de geometria e profundidade variável, considerando suas condições de contorno adequadas - resultados que são comparados qualitativamente com os de Elliott [14], mostrando-se os campos de velocidades e temperaturas obtidos com a solução.

8.2 - Testes Hidrodinâmicos

Como mencionado, antes de se resolver o problema da descarga térmica resolvem-se os problemas hidrodinâmicos, com o objetivo de testar o modelo numérico com resultados disponíveis na literatura.

8.2.1 - Escoamento em um Canal com Expansão

O primeiro problema escolhido para teste foi o do escoamento laminar em um canal com uma expansão, conforme mostrado na Figura 20. Este problema foi escolhido pelo Grupo de Trabalho em Simulação de Escoamentos, da Associação Internacional para Pesquisas Hidráulicas, como um teste apropriado para verificação da robustez dos métodos numéricos atuais. Os resultados obtidos por 15 participantes são apresentados e comparados com uma solução padrão (benchmark solution) em [15], em termos da vorticidade e pressão na parede do canal.

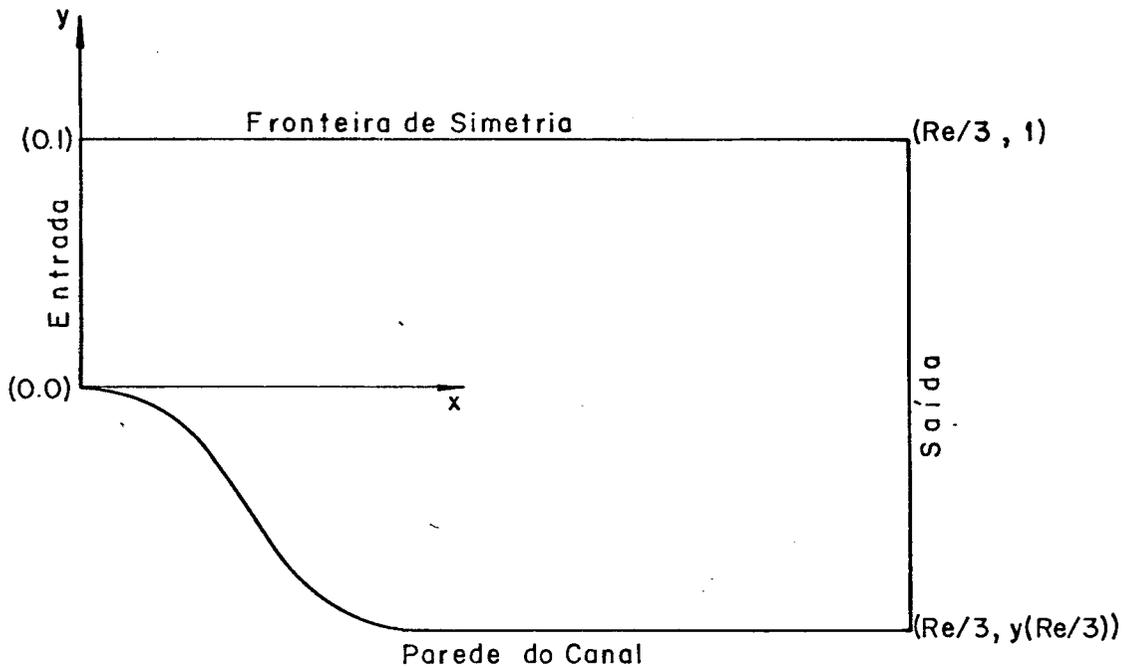


Figura 20 - Geometria do canal para $Re = 10$.

O problema é resolvido para número de Reynolds igual a 10 e 100, sendo a geometria do canal dependente deste número de acordo com a seguinte expressão:

$$y = |\tanh(2 - 30x/Re) - \tanh(2)|/2 \quad \text{para} \\ 0 \leq x \leq x_{saída} = Re/3 \quad (8.1)$$

As demais condições são

$$y = 1 \quad \text{no contorno superior} \quad (8.2)$$

e as componentes cartesianas da velocidade na entrada são

$$u = 3(y - y^2/2) \quad e \quad v = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (8.3)$$

Observe-se que a expansão é modificada com o número de Reynolds.

Como é imprescindível determinar a vorticidade, tem-se para ela a seguinte expressão no sistema x-y

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8.4)$$

No plano transformado, pela regra da cadeia, com velocidade da parede igual a zero, tem-se

$$\omega = - J \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} y_{\xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} x_{\xi} \right) \quad (8.5)$$

Os trabalhos relatados em |15| utilizam o sentido dos ponteiros do relógio como positivo para a vorticidade, ao contrário, portanto, da definição dada pela Equação (8.4). Todos os resultados apresentados nesta dissertação seguem a convenção de |15|.

Para calcular os gradientes de velocidade, necessárias na Equação (8.5), admite-se um perfil parabólico para a velocidade, sendo a derivada obtida deste ajuste para três pontos de velocidades, conforme Figura 21.

É importante salientar que o presente problema, apesar de sua aparente simplicidade, apresenta uma região de recirculação que muitos métodos utilizados não conseguiram captar.

Propondo o seguinte perfil para u

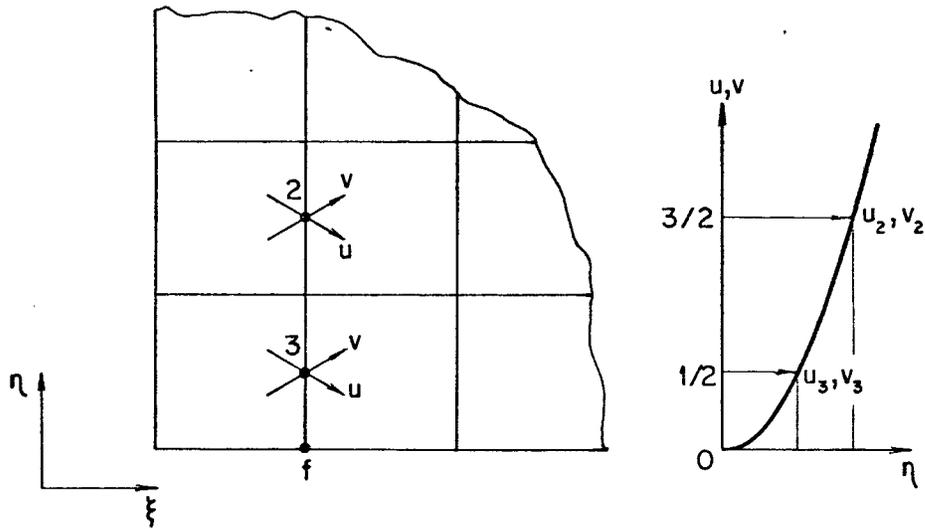


Figura 21 - Volume de controle para u e v no cálculo de seus gradientes.

$$u(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 \quad (8.6)$$

temos

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_f = a_1 = 3u_3 - \frac{u_2}{3} \quad (8.7)$$

Da mesma forma

$$v(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 \quad (8.8)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_f = b_1 = 3v_3 - \frac{v_2}{3} \quad (8.9)$$

Como se dispõe de todo o campo de velocidades cartesianas, são avaliadas as vorticidades na parede; os resultados são mostrados nesta seção.

Para determinar a pressão na parede, nos pontos onde isso se faz necessário, de acordo com [15], foram usadas médias dos valores disponíveis, conforme Figura 22

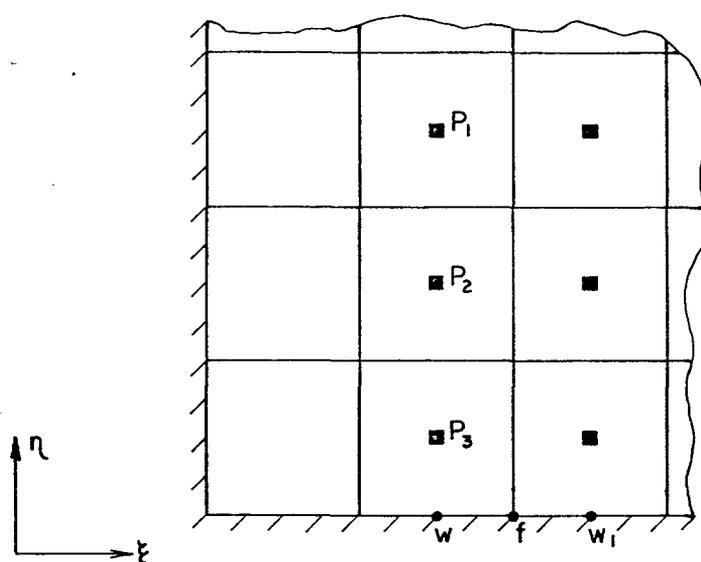


Figura 22 - Volume de controle da pressão para calcular seus gradientes nos pontos f.

Com o uso da Equação (B.8) podemos calcular P_w e P_{w1} por

$$P_w = \frac{15}{8} P_3 - \frac{5}{4} P_2 + \frac{3}{8} P_1 \quad (8.10)$$

O valor no ponto f é então determinado por

$$P_f = \frac{P_w + P_{w1}}{2} \quad (8.11)$$

Considerando as condições dadas, foi decidido, em |15|, tomar como pressão de referência igual a zero o valor correspondente a $x/x_{saída} = 0.5$, ou seja, na metade do canal. Isto foi feito pelas singularidades produzidas nos extremos, devido às diferentes condições de contornos tomadas pelos autores.

O problema foi resolvido com a utilização das técnicas dos volumes finitos, com as aproximações híbridas correspondentes no plano transformado, de acordo com o já exposto. Malhas não ortogonais 20x20 foram tratadas com uma grande concentração de linhas η perto da parede, e da mesma forma se procurou atração de linhas ξ de modo a deixar uma malha quasi-ortogonal; este caso é denominado TEST 2.

Para as comparações foram usados dois tipos de malha. Uma tem valores dados porcentualmente na direção y , para a seção de entrada, com valores pequenos perto da parede para obter concentrações, e com valores para a direção x , distribuídos sem atração nas linhas ξ (Figura 23). Este é o caso denominado TEST 1 onde a malha não tem o tratamento adotado por |26|, e é gerada algebricamente.

A outra malha utiliza o método descrito em |26| e corresponde a TEST 2. Mostrada na Figura 24, esta malha foi construída com atrações tanto para as linhas η e ξ como para pontos, procurando-se obter uma malha quasi-ortogonal.

Nesta malha os valores de x , y são fornecidos apenas para os contornos do domínio, entendendo-se logicamente que no contorno inferior os valores de y são funções de x dados pela

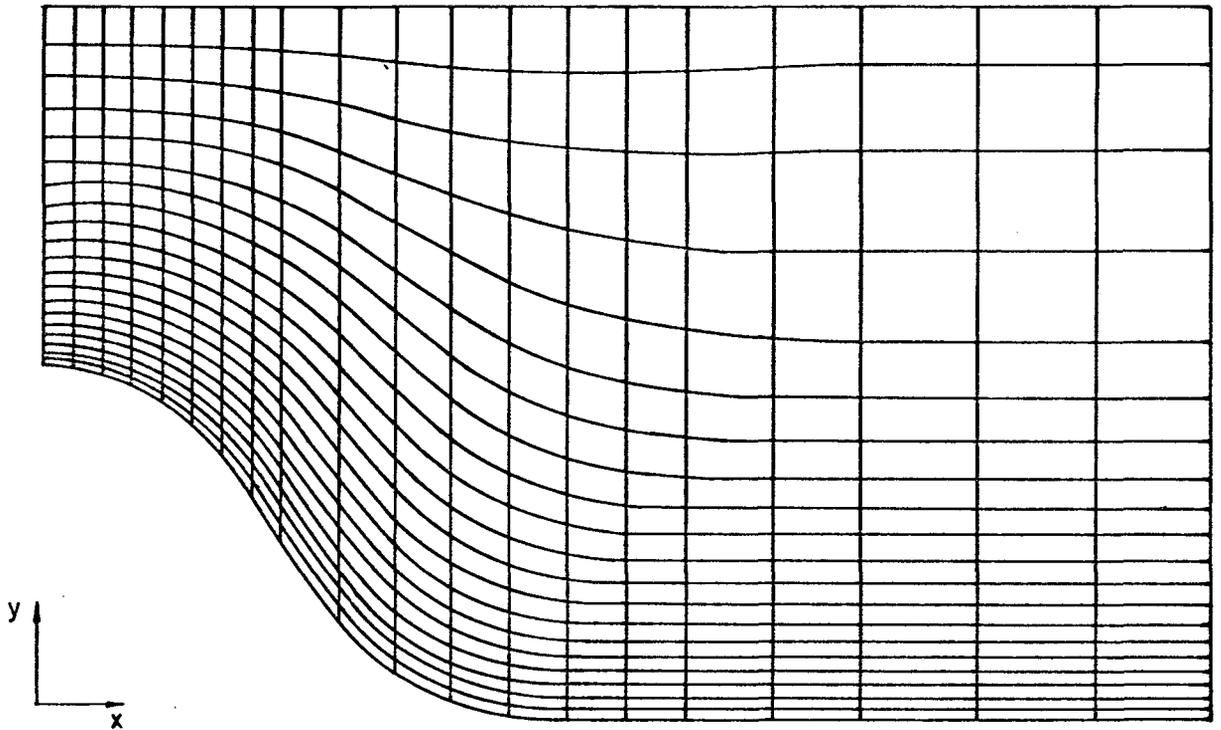


Figura 23 - Malha utilizada no problema canal com $Re = 10$. Caso TEST 1.

Equação (8.1). Os valores internos são calculados via programa computacional, onde as atrações dadas foram as seguintes, de acordo com as Equações (3.23) e (3.24).

Atração para linhas

Linha η	Coefficiente	Expoente
2	100	0.10
22	40	0.15
Linha ξ		
12	10	0.10
22	10	0.10

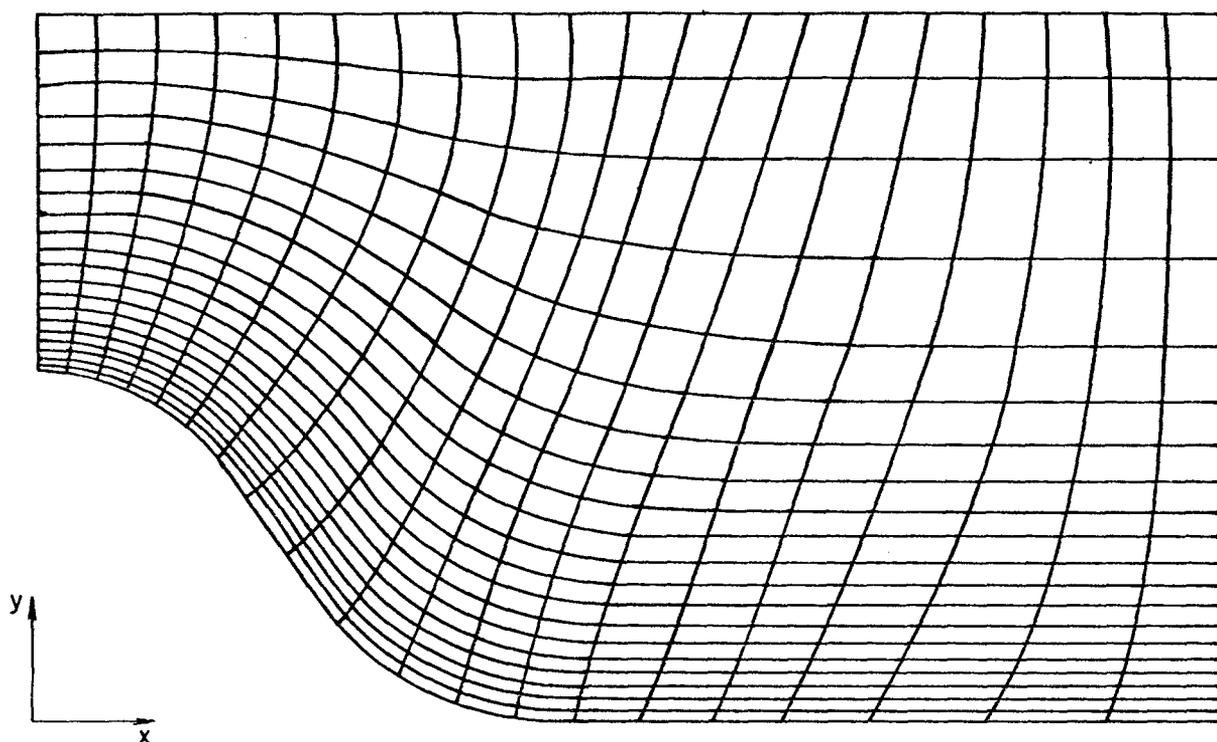


Figura 24 - Malha utilizada no problema canal com $Re = 10$. Caso TEST 2.

Atração para pontos

Pontos n	Coefficiente	Expoente
(2,3)	45	0.05
(2,4)	45	0.05
(2,5)	45	0.05
(22,16)	25	0.05

Deve-se mencionar que esta malha foi construída num microcomputador PC, através do aplicativo GERMAL - Gerador de Malhas [34]. A malha final foi transferida para o programa prin

principal no computador IBM 4341, onde todos os casos foram desenvolvidos.

As equações governantes do problema do canal com expansão foram resolvidas no plano transformado. O método das Sobre-Relaxações Sucessivas (S.O.R) foi aplicado com base no critério de convergência adotado em [33], onde o valor para a velocidade foi de $\epsilon=1.0E-04$ e a pressão foi sobre-relaxada com valor de $w = 1.5$. Isto foi feito para as duas malhas.

As condições de contorno são as indicadas na Figura 25.

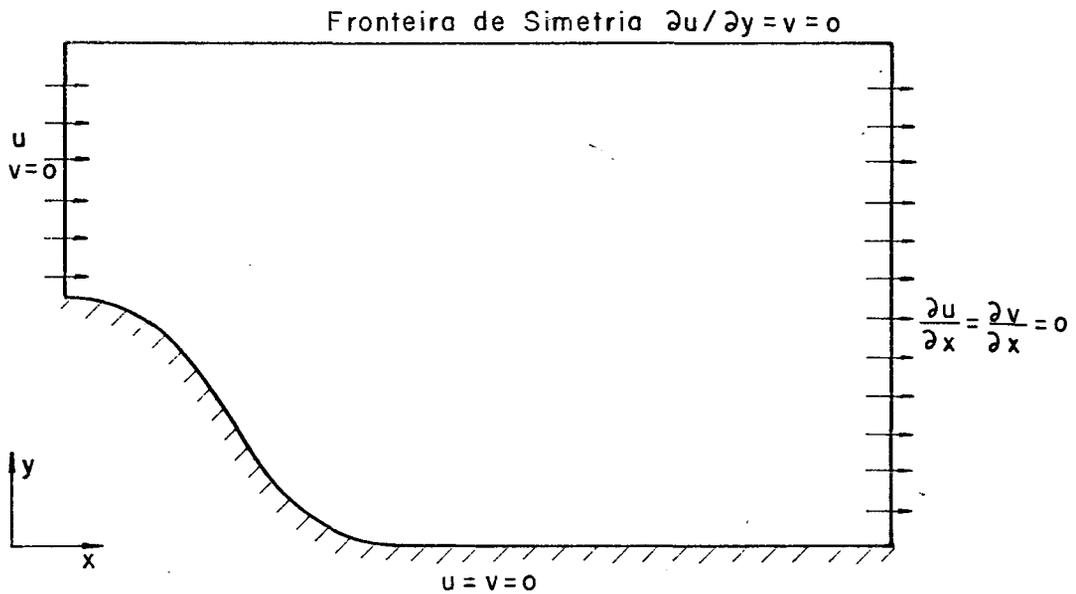


Figura 25 - Domínio do canal com as condições de contorno utilizadas.

Em [15], ficou a critério dos participantes a especificação da condição de contorno na saída. Neste trabalho usa-se

a condição fraca de derivada nula.

O tempo de CPU empregado no caso de TEST 1 foi de 20 min, aproximadamente, com 330 iterações e no caso de TEST 2 foi de 25 min, com 235 iterações.

Antes de expor os resultados é conveniente indicar que o outro caso de comparação é com $Re = 100$, onde a malha construída foi similar ao caso de TEST 1, com algumas variações na porcentagem de cálculo da ordenada y . As demais condições se repetem: condições de contorno e critério de convergência. O tempo de CPU foi de 35 min, com 370 iterações. Chamou-se a este caso TEST 3, para efeito de comparação.

Nas Tabelas 3, 4, 5 e 6 aparecem os valores da vorticidade e da pressão na parede para $Re = 10$ e $Re = 100$, obtidos neste trabalho, e aqueles obtidos em alguns casos mais representativos, para efeito de comparação, encontrados em [15]. Os resultados são mostrados com seus valores numéricos para maior fidelidade na comparação. As características fundamentais dos modelos utilizados serão descritas após os resultados.

Tabela 3 - Vorticidade na parede para $Re = 10$

$X/X_{saída}$	CJG	H	R	WA 2	TEST 1	TEST 2
0.00	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000
0.05	2.5750	2.5760	2.4000	2.5660	2.5920	2.6040
0.10	1.7060	1.6977	1.4660	1.8200	1.6780	1.6700
0.15	0.3990	0.3923	0.0600	0.9330	0.3005	0.3598
0.20	-0.1000	-0.0924	-0.0800	0.1520	-0.1254	-0.0996
0.25	-0.1350	-0.1311	-0.1000	0.0160	-0.2399	-0.1483
0.30	-0.1080	-0.1074	-0.1220	-0.0510	-0.1070	-0.1234
0.35	-0.1060	-0.1043	-0.1240	-0.0002	-0.1130	-0.1139
0.40	-0.1030	-0.1015	-0.1034	-0.0450	-0.1094	-0.1162
0.45	-0.0790	-0.0772	-0.0620	0.0640	-0.0869	-0.0991
0.50	-0.0330	-0.0293	0.0000	0.0900	-0.0356	-0.0407
0.55	0.0270	0.0327	0.0660	0.1330	0.0230	0.0290
0.60	0.0920	0.1009	0.1320	0.1830	0.0930	0.0814
0.65	0.1570	0.1705	0.2000	0.2360	0.1483	0.1439
0.70	0.2170	0.2384	0.2320	0.2900	0.2037	0.2066
0.75	0.2720	0.3034	0.2660	0.3450	0.2517	0.2533
0.80	0.3190	0.3652	0.3000	0.4050	0.2996	0.3000
0.85	0.3570	0.4230	0.3320	0.4740	0.3172	0.3188
0.90	0.3850	0.4753	0.3320	0.5590	0.3347	0.3375
0.95	0.4020	0.5152	0.3320	0.6610	0.3347	0.3375
1.00	0.4080	0.5317	0.3320	0.7530	0.3347	0.3375

Tabela 4 - Pressão na parede para $Re = 10$

$X/X_{saída}$	CJG	H	R	WA 2	TEST 1	TEST 2
0.00	-0.6650	-0.4154	-0.1625	-0.0450	-0.3300	-0.3212
0.05	-0.3170	-0.3187	-0.1450	-0.0500	-0.3159	-0.3187
0.10	-0.3400	-0.3386	-0.1250	-0.0640	-0.3285	-0.3367
0.15	-0.2620	-0.2602	-0.0750	-0.0480	-0.2593	-0.2629
0.20	-0.1510	-0.1497	-0.0375	-0.0350	-0.1481	-0.1609
0.25	-0.0920	-0.0933	-0.0225	-0.0200	-0.0996	-0.0977
0.30	-0.0680	-0.0683	-0.0175	-0.0090	-0.0667	-0.0731
0.35	-0.0530	-0.0529	-0.0125	-0.0080	-0.0516	-0.0564
0.40	-0.0370	-0.0358	-0.0100	-0.0060	-0.0353	-0.0397
0.45	-0.0180	-0.0178	-0.0050	-0.0030	-0.0175	-0.0204
0.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.55	0.0160	0.0165	0.0075	0.0040	0.0157	0.0184
0.60	0.0300	0.0302	0.0125	0.0070	0.0320	0.0293
0.65	0.0410	0.0413	0.0200	0.0100	0.0403	0.0398
0.70	0.0500	0.0504	0.0220	0.0170	0.0485	0.0502
0.75	0.0570	0.0574	0.0270	0.0180	0.0546	0.0566
0.80	0.0620	0.0613	0.0310	0.0160	0.0606	0.0629
0.85	0.0660	0.0636	0.0330	0.0160	0.0649	0.0685
0.90	0.0680	0.0634	0.0350	0.0140	0.0691	0.0740
0.95	0.0700	0.0603	0.0370	0.0080	0.0727	0.0800
1.00	0.0710	0.0560	0.0380	-0.0030	0.0763	0.0859

Tabela 5 - Vorticidade na parede para $Re = 100$

$X/X_{saída}$	CJG	H	R	WA 2	TEST 3
0.00	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000
0.05	2.5016	2.5109	2.5000	2.3730	2.9580
0.10	1.7216	1.7082	1.8600	1.6770	1.7440
0.15	0.7315	0.7284	1.0000	1.0490	1.0850
0.20	0.1018	0.1116	0.3320	0.3810	0.0330
0.25	-0.0954	-0.0898	-0.1320	0.2720	-0.0824
0.30	-0.1280	-0.1237	-0.2000	0.1960	-0.1671
0.35	-0.0981	-0.0936	-0.1320	0.1550	-0.0664
0.40	-0.0320	-0.0273	-0.0600	0.1230	-0.0380
0.45	0.0513	0.0568	0.0600	0.2770	0.0924
0.50	0.1386	0.1449	0.2000	0.3420	0.1452
0.55	0.2220	0.2285	0.0266	0.4000	0.2621
0.60	0.2973	0.3043	0.4000	0.4510	0.3039
0.65	0.3638	0.3713	0.4660	0.4870	0.3950
0.70	0.4223	0.4296	0.6000	0.5420	0.4230
0.75	0.4729	0.4799	0.6400	0.5790	0.4930
0.80	0.5156	0.5232	0.5000	0.6140	0.5110
0.85	0.5524	0.5599	0.4660	0.6440	0.5652
0.90	0.5843	0.5910	0.5200	0.6720	0.5765
0.95	0.6101	0.6162	0.5340	0.7000	0.6190
1.00	0.6210	0.6378	0.5600	0.7250	0.6190

Tabela 6 - Pressão na parede para $Re = 100$

$x/x_{saída}$	CJG	H	R	WA 2	TEST 3
0.00	-0.2147	-0.2114	-0.1050	-0.0010	-0.2148
0.05	-0.2357	-0.2359	-0.1050	-0.0060	-0.2271
0.10	-0.2275	-0.2281	-0.1000	-0.0110	-0.2354
0.15	-0.1836	-0.1848	-0.0925	-0.0150	-0.2091
0.20	-0.1339	-0.1342	-0.0725	-0.0130	-0.1610
0.25	-0.0979	-0.0985	-0.0500	-0.0100	-0.1162
0.30	-0.0717	-0.0723	-0.0375	-0.0070	-0.0823
0.35	-0.0494	-0.0500	-0.0250	-0.0050	-0.0551
0.40	-0.0304	-0.0304	-0.0150	-0.0030	-0.0324
0.45	-0.0135	-0.0137	-0.0075	-0.0020	-0.0141
0.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.55	0.0105	0.0108	0.0030	0.0010	0.0106
0.60	0.0185	0.0190	0.0075	0.0020	0.0184
0.65	0.0245	0.0249	0.0100	0.0020	0.0239
0.70	0.0287	0.0288	0.0100	0.0020	0.0275
0.75	0.0303	0.0311	0.0050	0.0030	0.0294
0.80	0.0313	0.0320	0.0025	0.0030	0.0301
0.85	0.0313	0.0317	0.0050	0.0040	0.0297
0.90	0.0294	0.0305	0.0075	0.0040	0.0285
0.95	0.0273	0.0285	0.0100	0.0030	0.0262
1.00	0.0253	0.0258	0.0100	0.0030	0.0231

São as seguintes as características dos métodos cujos resultados foram comparados com os do presente trabalho.

- CJG, Cliffe et al. |15| - Método dos elementos finitos, com elementos isoparamétricos de 9 pontos, utilizando as variáveis primitivas u , v e P . Usa malha independente na solução.
- H, A.G. Hutton |15| - Usa a técnica dos elementos finitos através do método de Galerkin, com continuidade incorporada pelo método de multiplicadores de Lagrange, para resolver as equações de Navier-Stokes. Resolve com u , v , P .
- R, A.K. Rasgoti |15| - Para a solução do problema usa diferenças finitas nas equações de Navier-Stokes em coordenadas curvilíneas ortogonais. Na solução da malha usa a equação de Laplace em diferenças centrais. Emprega a integração sobre os volumes elementares para solução das equações de continuidade e momento, e aproximações híbridas para os termos difusivos e convectivos. O problema é solucionado com as variáveis u , v , P .
- WA 2, A. Wada & K. Adachi |15| - Na solução das equações de Navier-Stokes adota-se a técnica de diferenças finitas com utilização das variáveis u , v , P . Desenvolvem-se as equações em um sistema de coordenadas cartesianas com interpolações para as condições de contorno.

Os valores mostrados nas tabelas anteriores são também apresentados nas Figuras 26, 27, 28 e 29, a seguir. Para número de Reynolds igual a 100, apenas a solução padrão de Cliffe et al. é mostrada, comparada com a obtida neste trabalho.

Napolitano e Orlandi |15| adotaram os seguintes crité-

rios para medir a precisão das diversas soluções apresentadas.

$$\epsilon_{\omega} = \frac{100}{19} \sum_{i=2}^{20} \left| \frac{\omega_i - \omega_{i\text{CJG}}}{\omega_{i\text{CJG}}} \right| \quad (8.12)$$

$$\epsilon_p = \frac{100}{18} \sum_{i=2}^{20} \left| \frac{P_i - P_{i\text{CJG}}}{P_{i\text{CJG}}} \right| \quad (8.13)$$

onde ϵ_{ω} e ϵ_p são os erros médios para o cálculo da vorticidade e da pressão, respectivamente; ω_i e P_i são vorticidades e pressões ao longo da parede em pontos igualmente espaçados, e o subscrito CJG indica a solução padrão de Cliffe et al.

De acordo com as expressões dadas pelas Equações (8.12) e (8.13), os resultados encontrados são resumidos na Tabela 7.

Tabela 7 - Resumo dos resultados

GRUPO	Re = 10		Re = 100	
	ϵ_{ω}	ϵ_p	ϵ_{ω}	ϵ_p
CJG	0.0	0.0	0.0	0.0
H	9.22	2.24	3.70	1.50
R	30.14	61.25	43.11	61.16
WA 2	111.92	78.92	135.48	90.43
TEST 1	12.83	2.98	-	-
TEST 2	10.00	5.52		
TEST 3	-	-	18.60	6.96

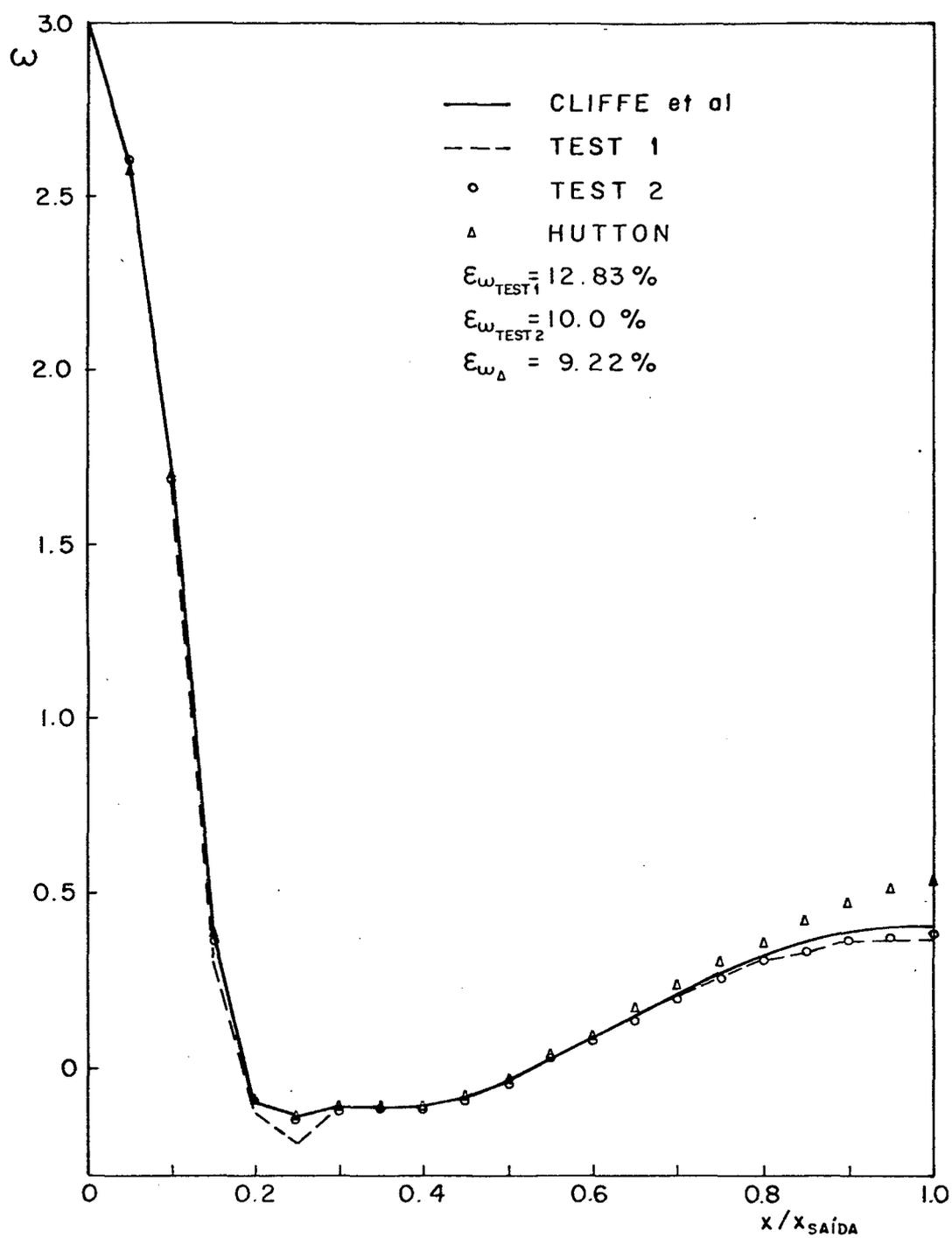


Figura 26 - Distribuição da vorticidade na parede para $Re = 10$.

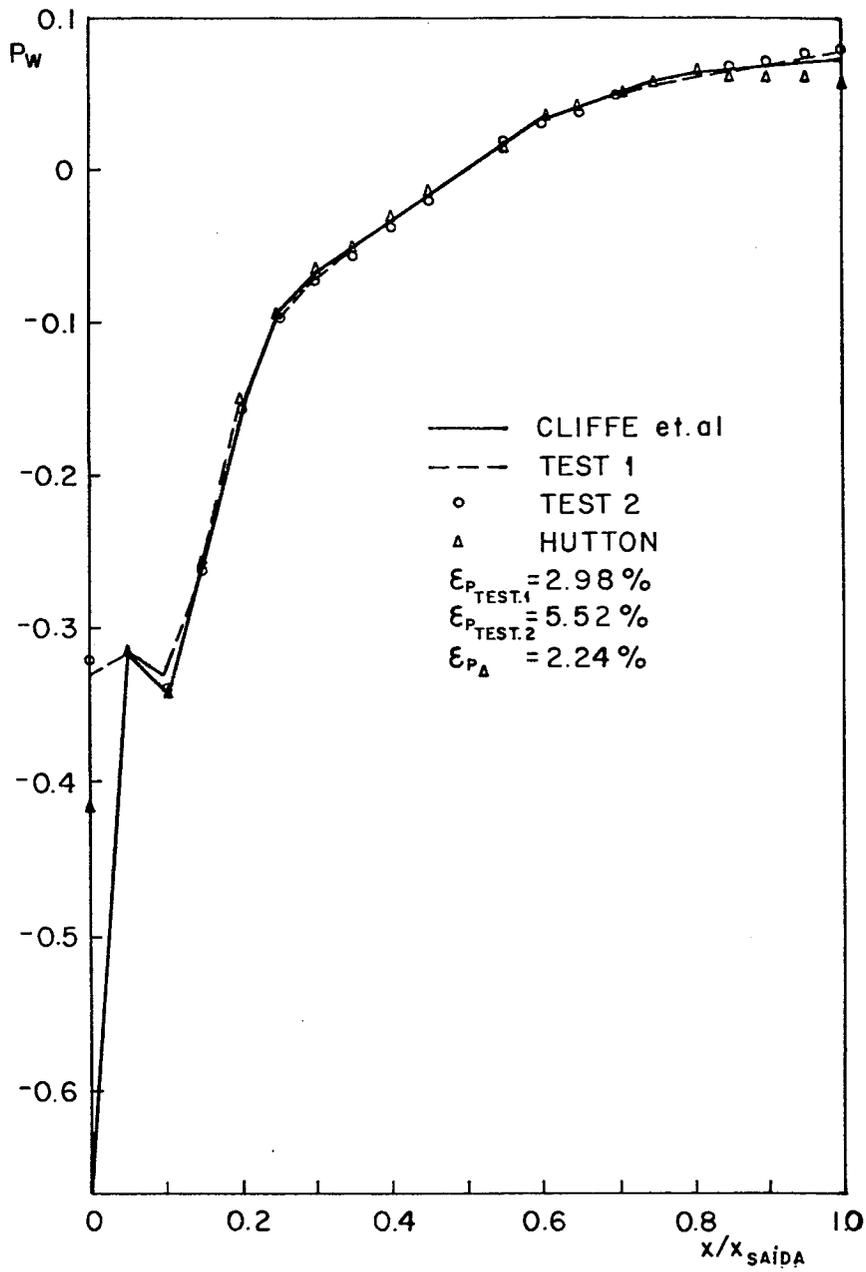


Figura 27 - Distribuição da pressão na parede para $Re = 10$.

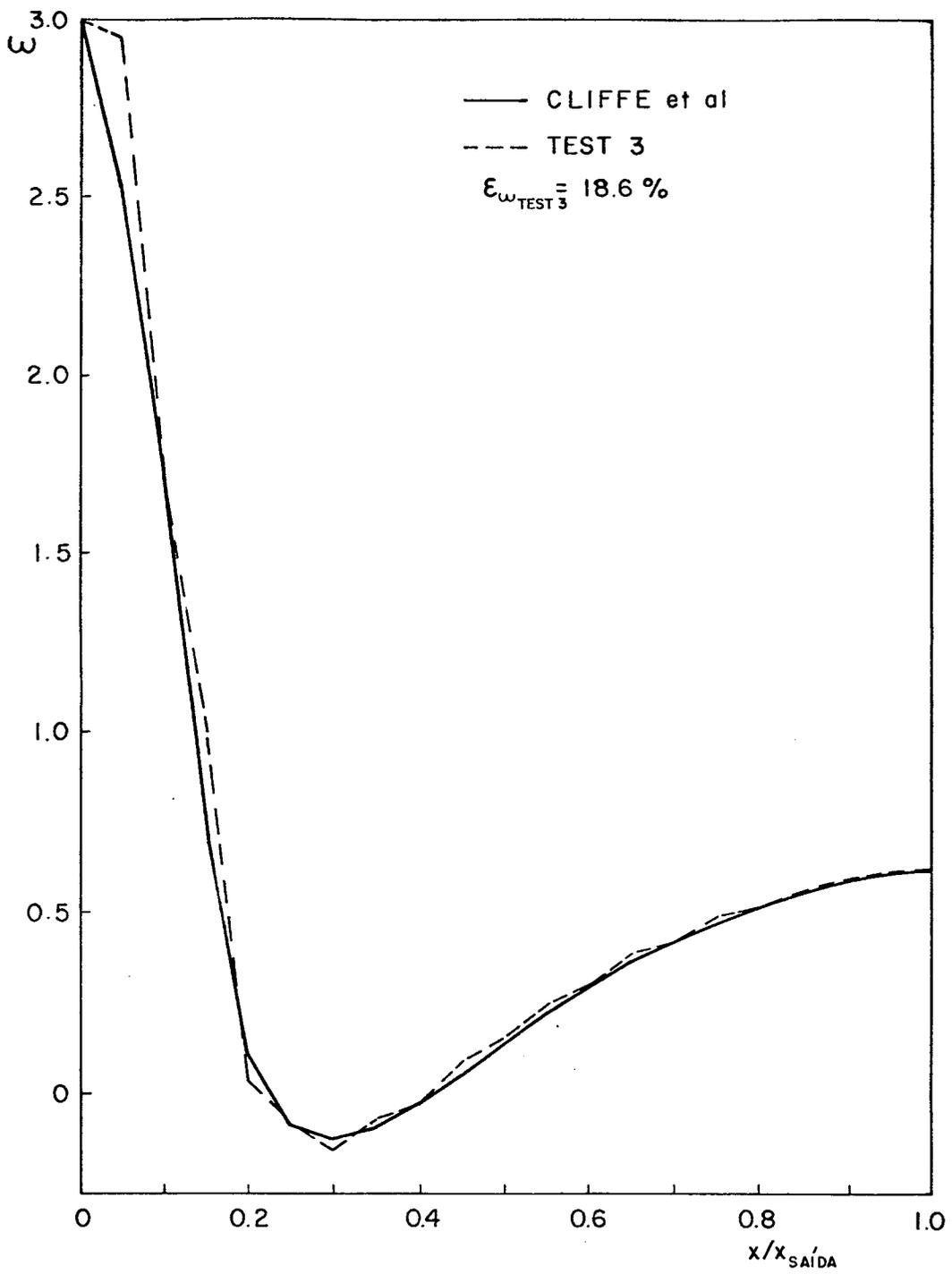


Figura 28 - Distribuição da vorticidade na parede para $Re = 100$.

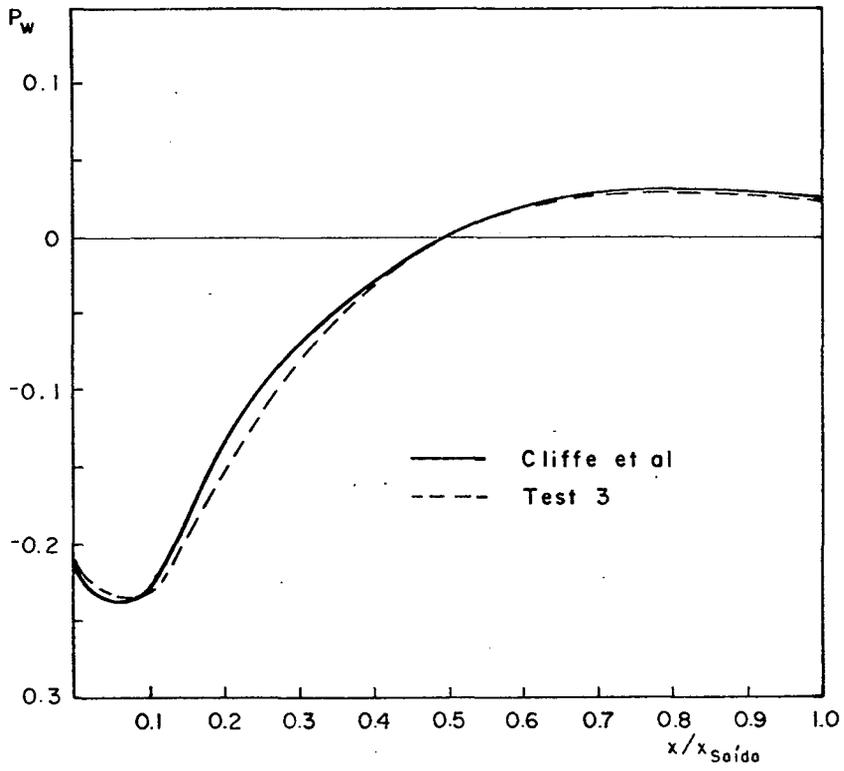


Figura 29 - Distribuição da pressão na parede para $Re = 100$.

Observando a Tabela 7, constata-se que os resultados TEST 1 e TEST 2 (obtidos com diferentes malhas, mas ambas com 20x20 elementos), para $Re = 10$, são bastante bons se comparados com aqueles de Hutton (H). É importante mencionar que os resultados de Hutton são os melhores apresentados no trabalho comparativo de [15]. Para $Re = 100$, obtido com uma malha com a mesma característica daquela do TEST 1, os resultados no cálculo da pressão e da vorticidade não apresentam a mesma performance. Entretanto, se comparados com aqueles das outras quinze soluções propostas, classifica-se entre os oito primeiros. Nenhum esforço foi feito para melhorar estes resultados, uma vez que já ficara demonstrada a eficácia do método. Basta observar, em [15], que existem valores em ϵ_ω iguais até 135, e para ϵ_p iguais até 90. A primeira providência para aprimorar os resultados para $Re = 100$ é concentrar ainda mais as linhas coordenadas junto à fronteira, cujos espaçamentos foram semelhantes a aqueles usados para $Re = 10$.

Convém ainda observar que, apesar de o método de Hutton apresentar desempenho levemente superior ao do presente método, a Figura 26 mostra que os valores da vorticidade na saída do canal, calculados neste trabalho, melhor concordam com a solução padrão de Cliffe et al. do que os resultados de Hutton.

Também é interessante comparar os resultados deste trabalho com os de Rasgoti, uma vez que este usa técnicas semelhantes na solução do problema (volumes finitos), com coordenadas ortogonais coincidentes com a fronteira. Os valores de ϵ_ω e ϵ_p encontrados por Rasgoti para $Re = 10$ e $Re = 100$ são bem mais elevados do que os encontrados na presente dissertação, confor-

me Tabela 7.

Convém ainda tecer comentários a respeito do método WA 2, que utiliza coordenadas cartesianas com interpolação das condições de contorno na fronteira. Os resultados obtidos para esse método são os piores apresentados, e, de acordo com [15], é claramente inadequado para a solução de escoamentos em geometrias complexas. Por exemplo, para $Re = 100$ o método não capturou a recirculação existente.

A análise dos resultados acima permite concluir que o método empregado neste trabalho é comparável aos melhores descritos em [15] e, portanto, é confiável e adequado para ser utilizado na previsão de descargas térmicas em rios ou lagos com profundidade variável.

8.2.2 - Canal com Profundidade Variando Linearmente

Como o problema de interesse é definido em domínios com profundidade variável, resolve-se o problema hidrodinâmico bidimensional do escoamento em um canal reto com profundidade variável para fins de teste do algoritmo.

O propósito deste teste é verificar a conservação da massa através das variações do campo de velocidade. Duas situações com respeito à profundidade são analisadas. Os dois casos são testados com Re baixos, ou seja, com efeitos difusivos dominantes.

No primeiro caso, trata-se de um canal reto, onde as paredes Norte e Sul são consideradas fronteiras de simetria.

A malha utilizada neste caso foi de 10x20, do tipo ortogonal, igualmente espaçada nas direções x e y, respectivamente. As medidas adimensionais são de 0.5x2 e as condições de contorno estão indicadas na Figura 30, onde não foram consideradas as tensões de atrito no fundo nem na superfície do canal, ou seja, $S_S^u = S_F^u = S_S^v = S_F^v = 0$

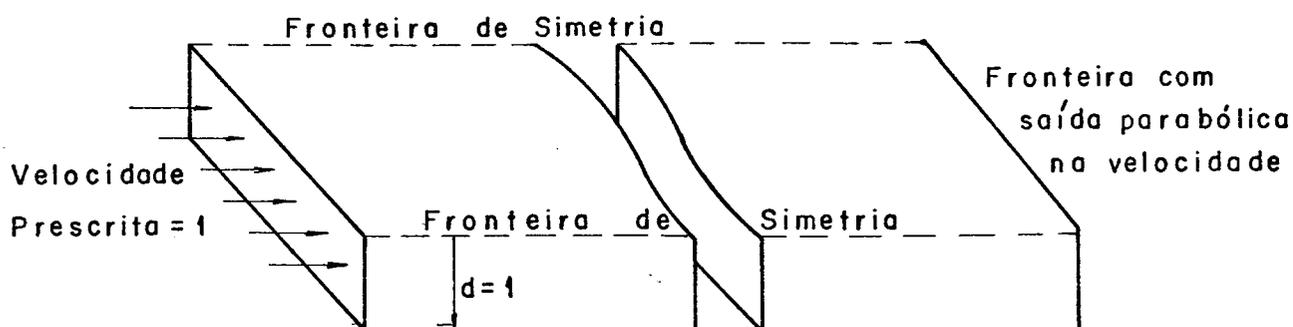


Figura 30 - Canal reto com profundidade constante no domínio.

Obviamente o resultado deste problema é $u = 1$, constante para todo o domínio. Entretanto, como o processo é iterativo e as velocidades iniciais foram feitas iguais a zero, todas as velocidades devem convergir para a unidade sem oscilações, o que foi observado.

No segundo caso, trata-se do mesmo canal, porém com a profundidade variando linearmente, partindo de um valor unitário na entrada, até duplicar-se no centro do canal, e novamente

diminuindo até a saída, como é mostrado na Figura 31.

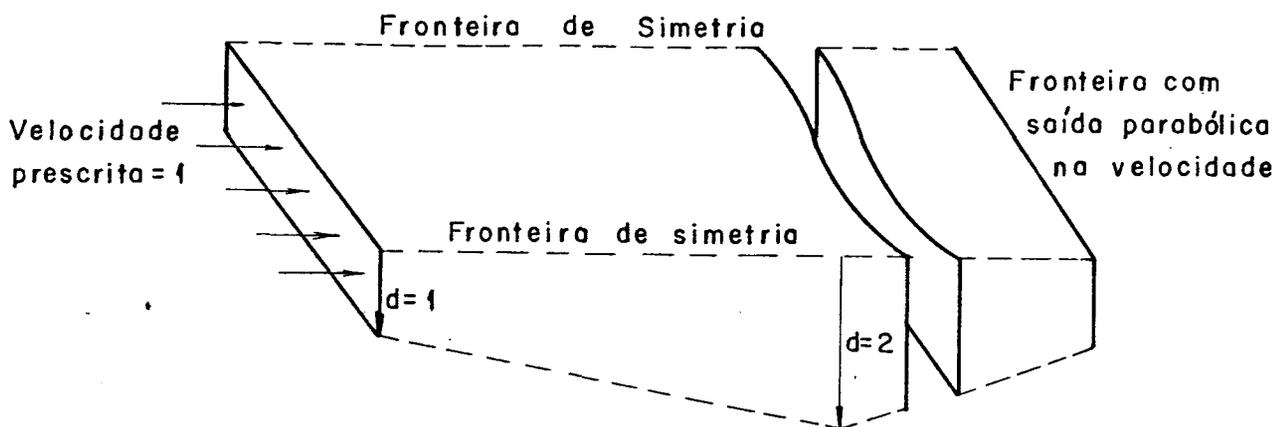


Figura 31 - Canal reto com profundidade variável linearmente.

As condições de contorno são mantidas, como aparece na Figura 31. A malha empregada é a mesma - 10x20 ortogonal -, desenvolvendo-se as equações no plano transformado e levando-se em conta a profundidade variável do domínio.

O objetivo principal deste caso foi testar os termos que envolvem a variável d (profundidade) nas equações de conservação, resolvendo-se um problema cuja solução é conhecida. De fato, a velocidade média no centro do canal respeitou a conservação da massa e atingiu ao valor 0.5.

8.3 - Testes Envolvendo Transferência de Calor

A seguir, com o objetivo de testar qualitativamente a equação da energia envolvendo o termo de troca de calor pela superfície, o problema da descarga de um jato em um canal arbitrário é resolvido para diferentes relações de vazão do canal e do jato, com diferentes temperaturas de descargas.

8.3.1 - Teste em uma Geometria Variável com Jato e Perda de Calor na Superfície

Nesta primeira situação é considerado um domínio arbitrário, como indica a Figura 32, afetado pela descarga de um jato quente, levando-se em consideração a perda de calor em toda a superfícies do lago. O regime é considerado laminar.

Resolve-se o problema em uma malha não ortogonal de 12x36, adotando-se o critério dado por [26], onde atrações para as linhas η e ξ foram usadas, resultando a malha indicada na Figura 33.

As condições de contorno adotadas correspondem às mostradas na Figura 32, que são introduzidas nas equações discretizadas, via balanços de conservação nos volumes elementares de fronteira.

Leva-se em conta uma perda de calor na superfície como produto das diferenças de temperaturas entre o fluido e o ar, a qual é calculada na forma convectiva mediante a expressão conhecida

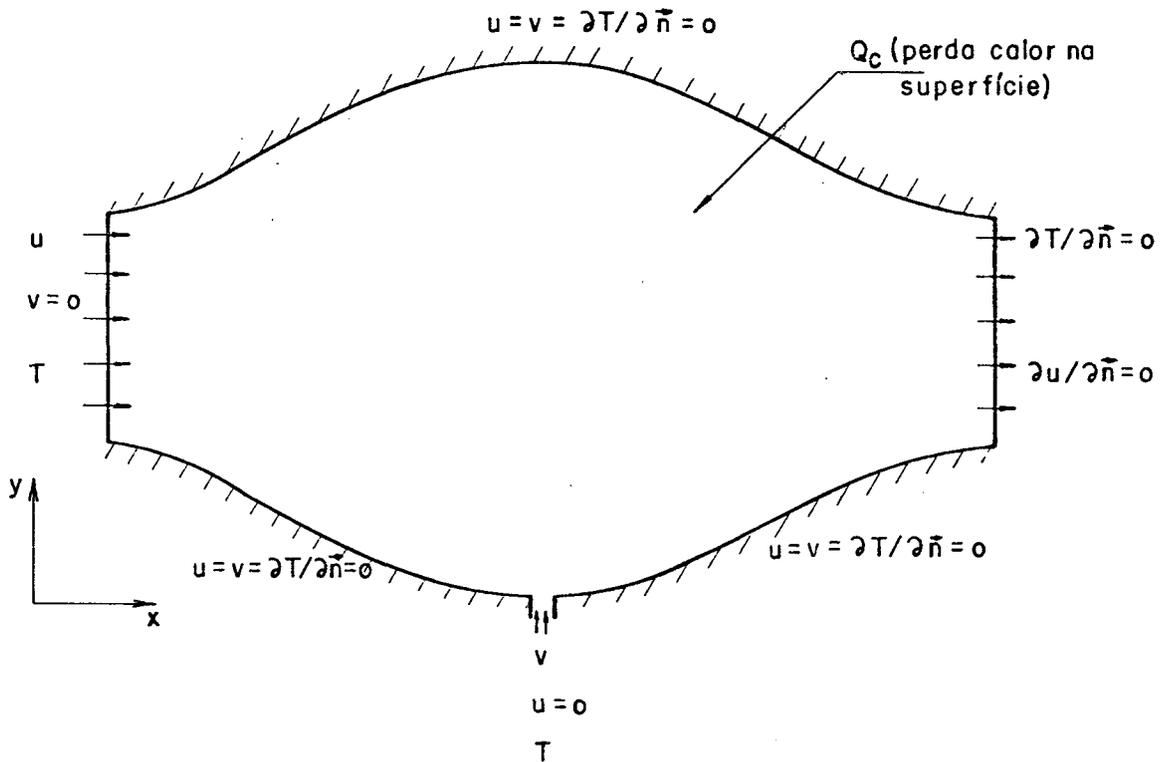


Figura 32 - Domínio físico de uma geometria variável com suas condições de contorno.

$$Q_c = H(T - T_{amb}) \quad (8.14)$$

que atua como termo fonte nos balanços de cada célula dos volumes elementares e corresponde ao valor de S_S^T na equação (2.4) da temperatura. Outras troca de calor através da superfície como evaporação e radiação podem ser levadas em consideração sem a menor dificuldade.

Com isto, deu-se desenvolvimento ao problema, chegando-se aos resultados mostrados nas Figuras 34 e 35 onde

$$R = \frac{Q_R}{Q_J} = \frac{\text{Vazão do escoamento principal}}{\text{Vazão do Jato}} \quad (8.15)$$

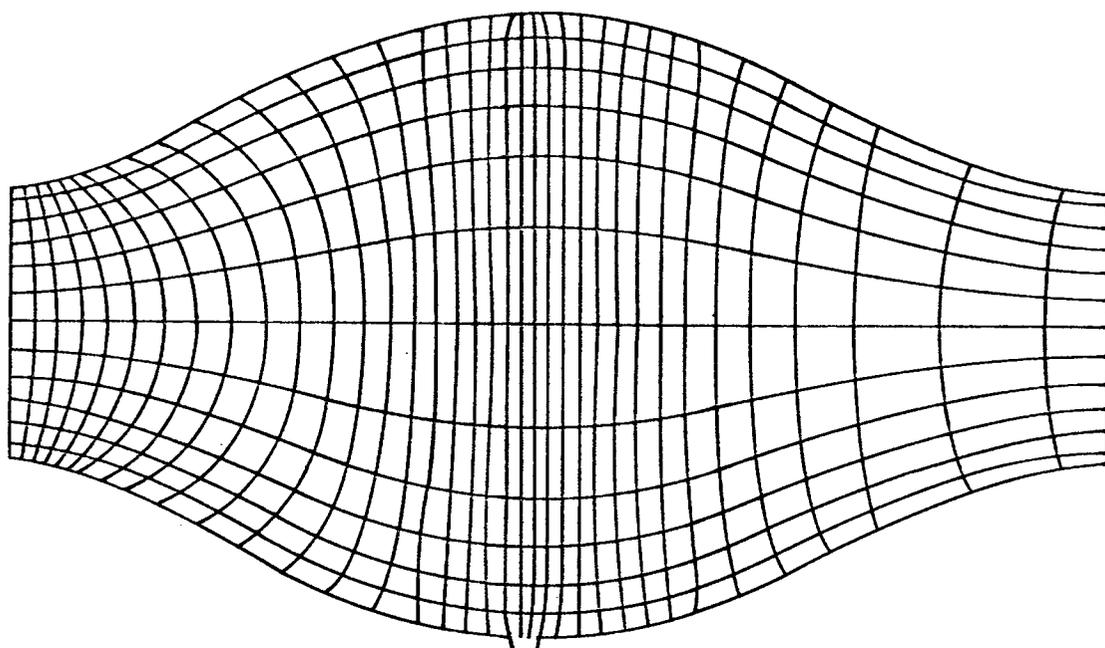


Figura 33 - Malha não ortogonal usada na geometria variável no plano físico.

Pela Figura 34, pode-se observar que os resultados das isothermas estão de acordo com a física do problema, ou seja, à medida que a temperatura do jato aumenta, para uma mesma temperatura ambiente e mesma razão R , as isothermas têm uma maior penetração no domínio.

Por outro lado, a Figura 35 mostra o resultado das isothermas para uma mesma temperatura do jato com duas razões distintas, $R = 4$ e $R = 8$. Novamente acontece o fenômeno esperado, porquanto as isothermas com menor razão aumentam sua penetração no interior do domínio.

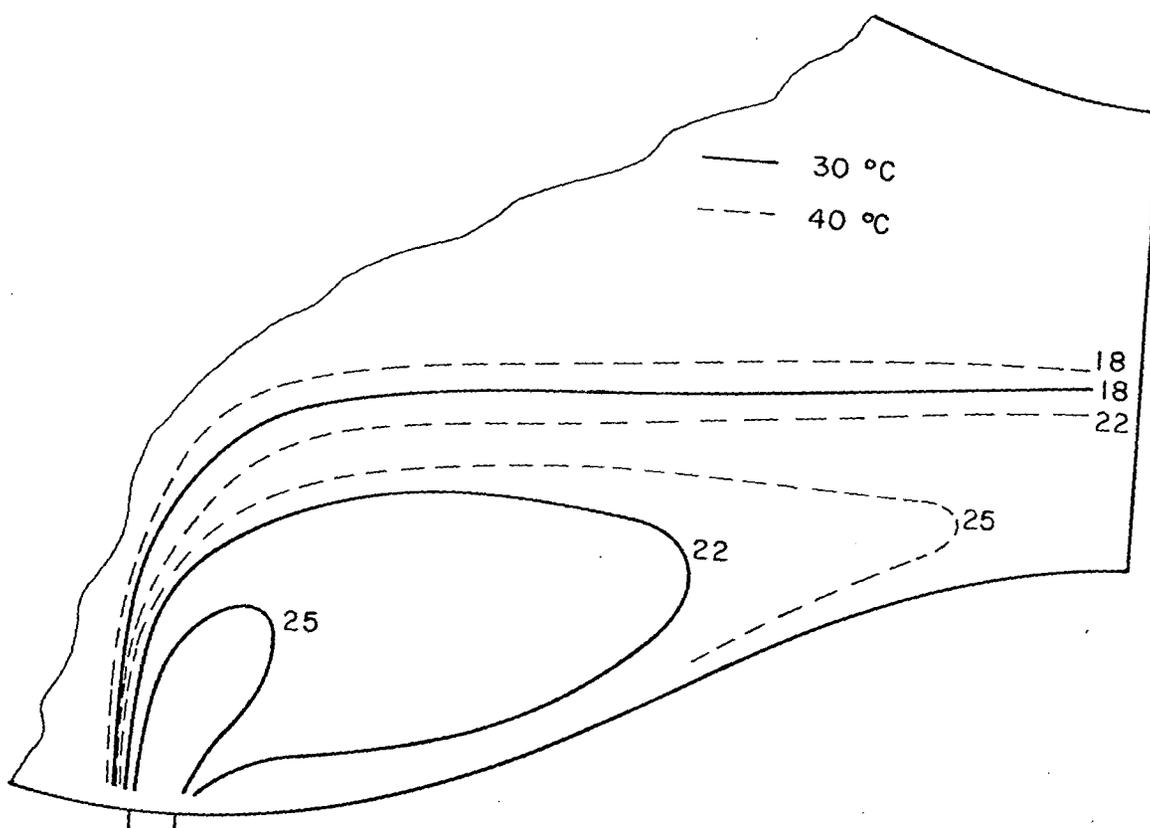


Figura 34 - Isothermas com temperaturas de descarga de 30°C e 40°C para $R = 4$.

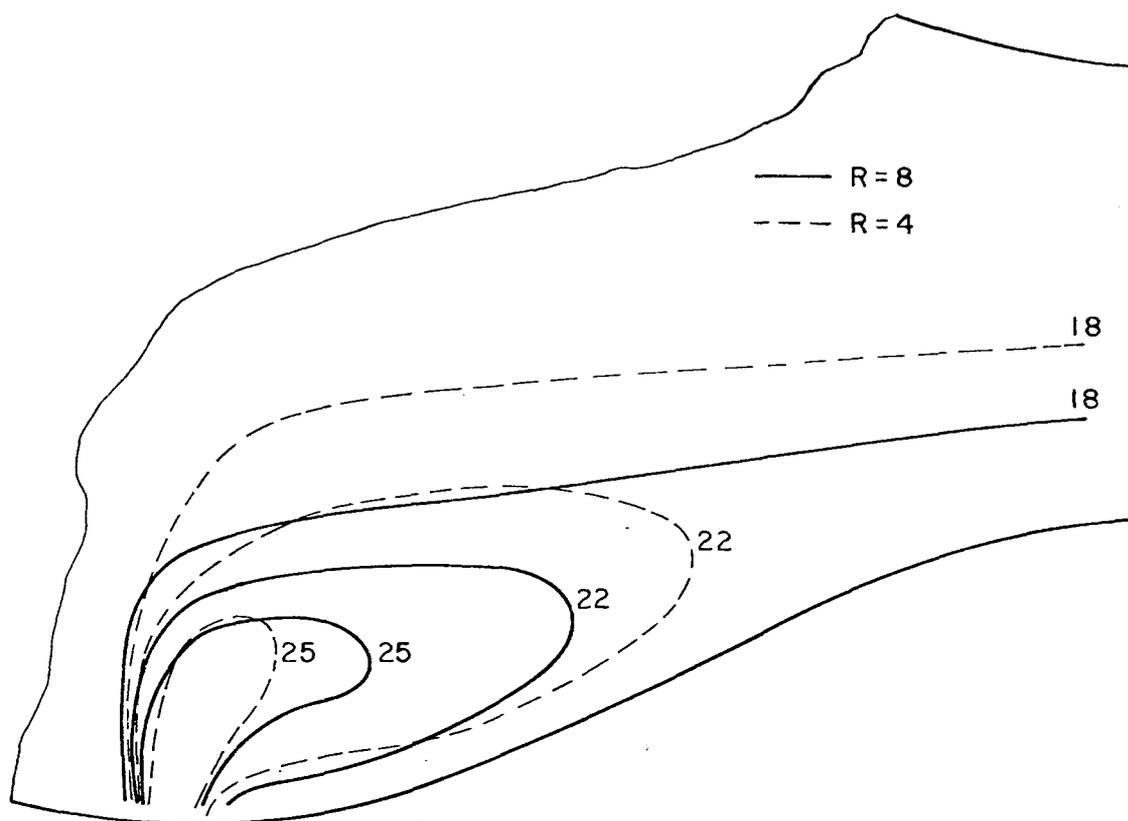


Figura 35 - Isotermas com temperaturas de descarga de 30°C para $R = 4$ e $R = 8$.

Também foi detectado que, para uma mesma razão, elevando-se a temperatura, os efeitos difusivos aumentam a montante. Igual situação se produz para menores números de Reynolds, com uma mesma temperatura de descarga e mesma razão.

8.3.2 - Escoamento Bidimensional com Descargas Térmicas em um Lago de Geometria e Profundidade Variáveis

O objetivo principal desta dissertação é a determinação dos campos de velocidades e temperaturas produzidos em um lago ou rio de geometria arbitrária, pelo efeito da descarga de um jato quente em fluxo cruzado.

Os resultados são comparados qualitativamente com os apresentados por Elliott [14], cujo modelo é tridimensional, e que resolveu o problema da descarga de um jato quente no lago Ontário, no Canadá, cuja geometria variável, juntamente com a batimetria, a posição de descarga da água de condensação e o nível do contorno do lago em relação ao nível do mar são mostrados na Figura 36.

Na Figura 37 o domínio utilizado na solução numérica é indicado, com uma discretização com 16 x 27 volumes elementares do tipo não-ortogonal. As linhas foram concentradas com maior intensidade nos lugares de altos gradientes e no lugar da descarga do jato quente, conforme pode ser observado na Figura 38.

Como se optou neste trabalho, por um modelo bidimensional, e a profundidade é levada em consideração, é recomendá-

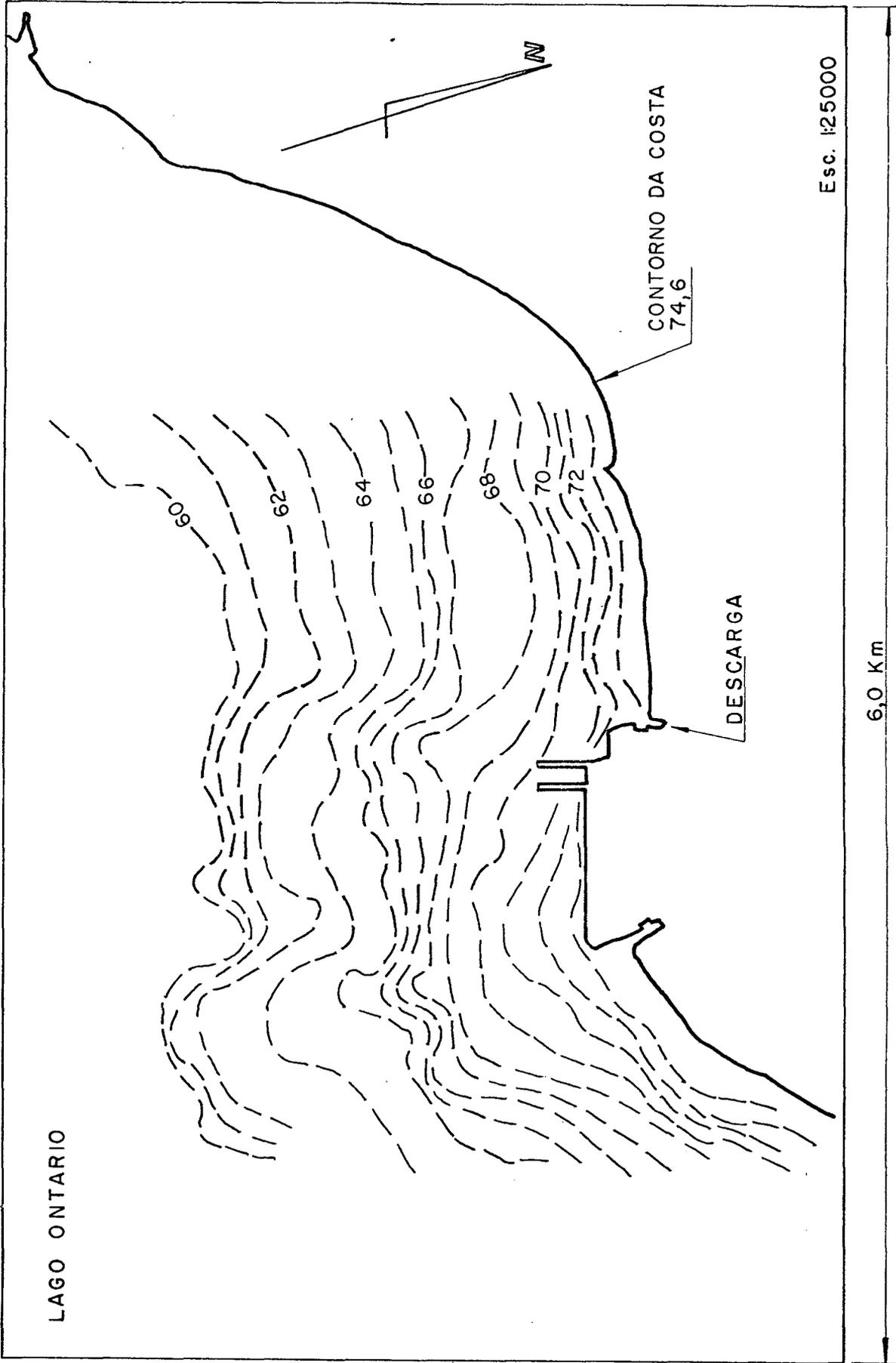


Figura 36 - Domínio Físico do Lago Ontário com suas profundidades e contorno.

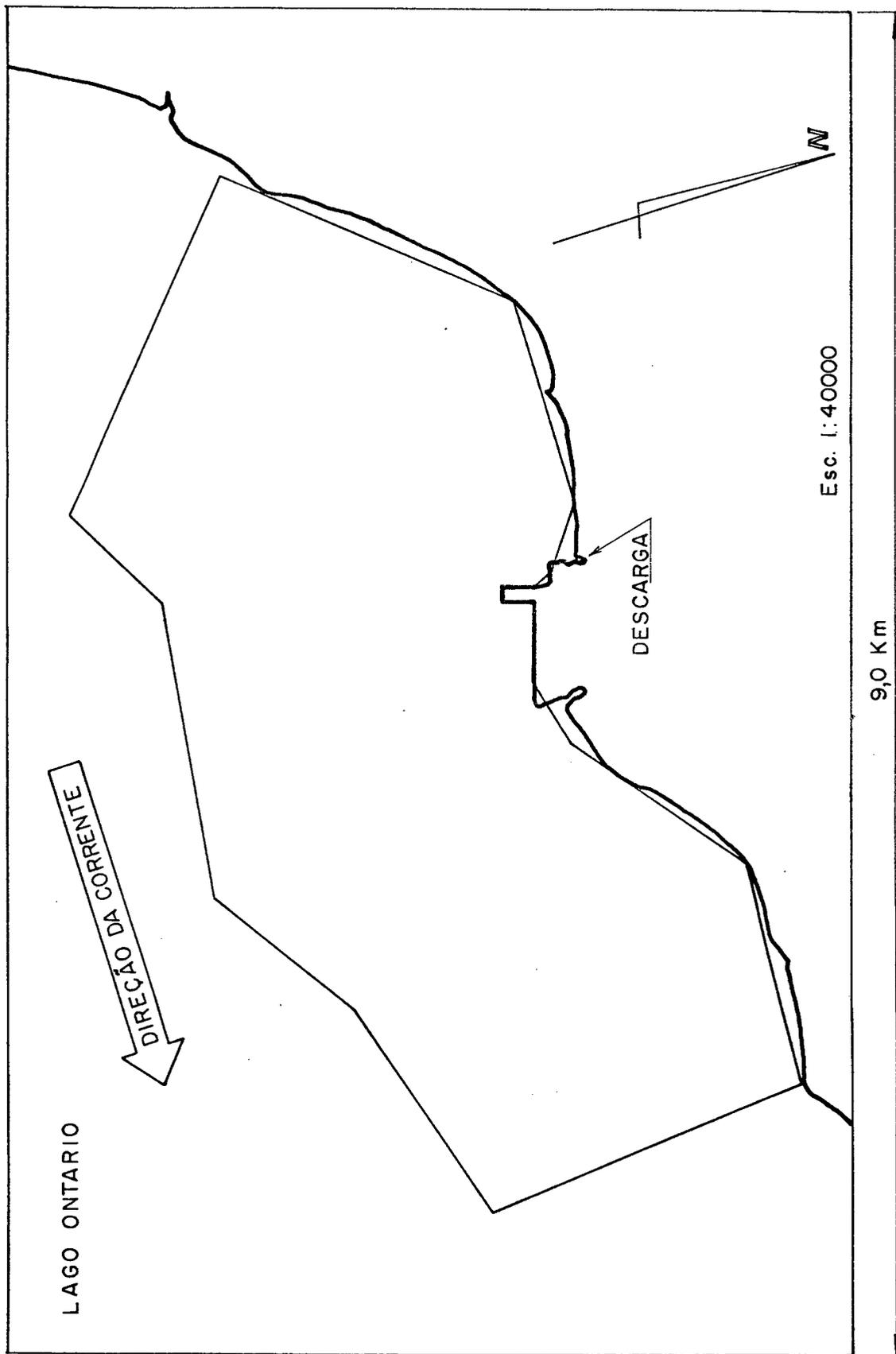


Figura 37 - Domínio de cálculo utilizado.

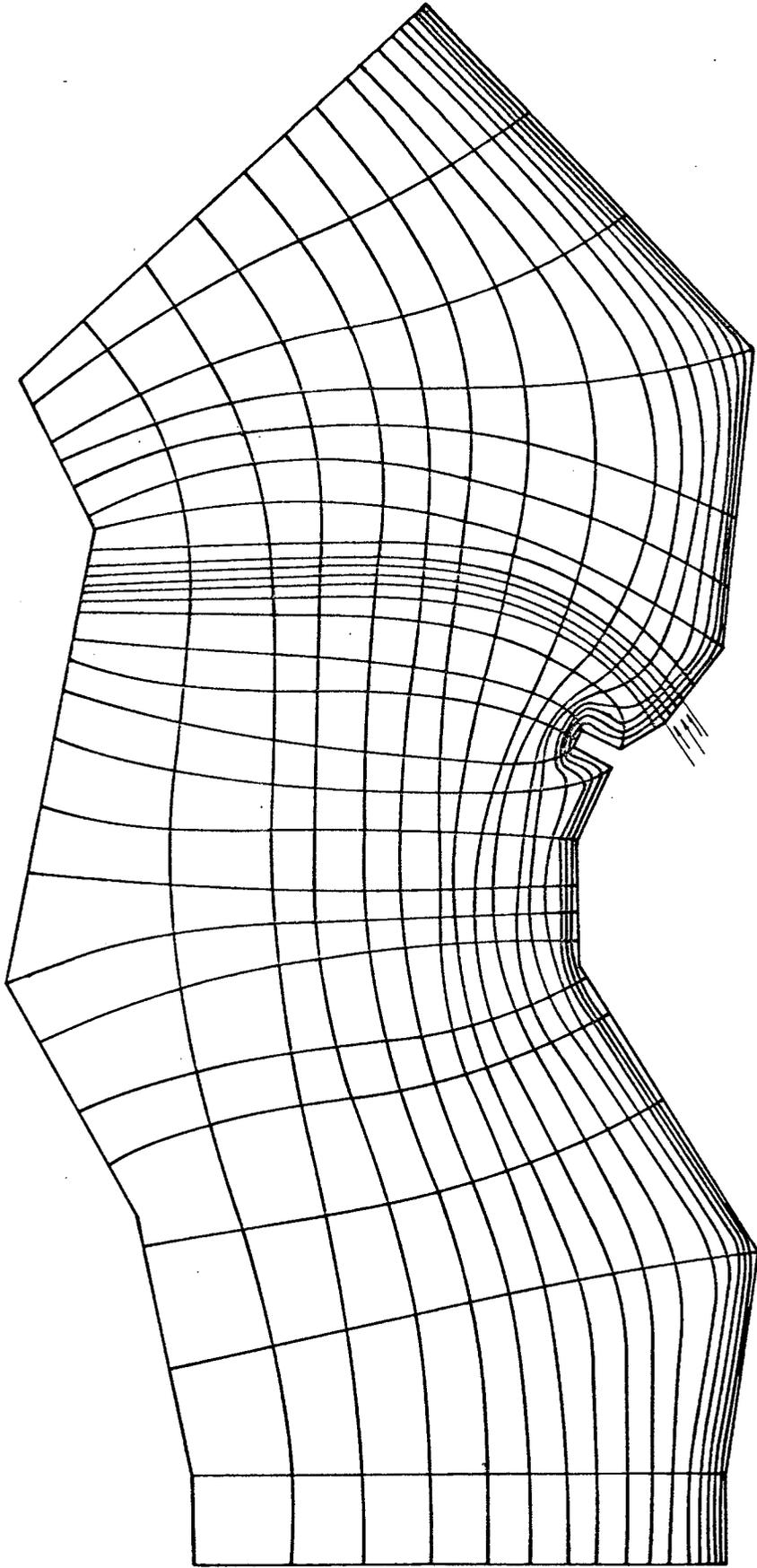


Figura 38 - Grade computacional de 16x27 volumes usada no modelo matemático para simulação da descarga térmica no lago.

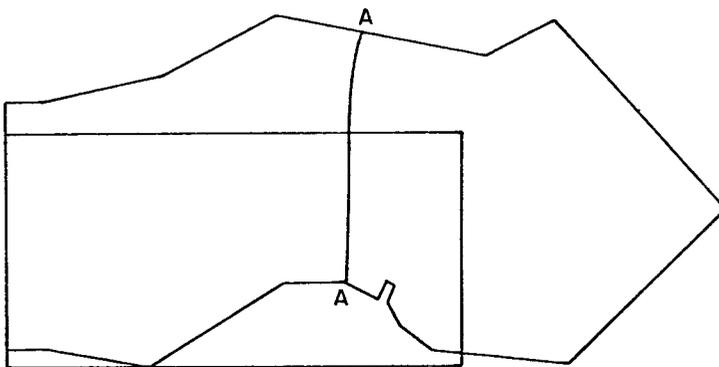
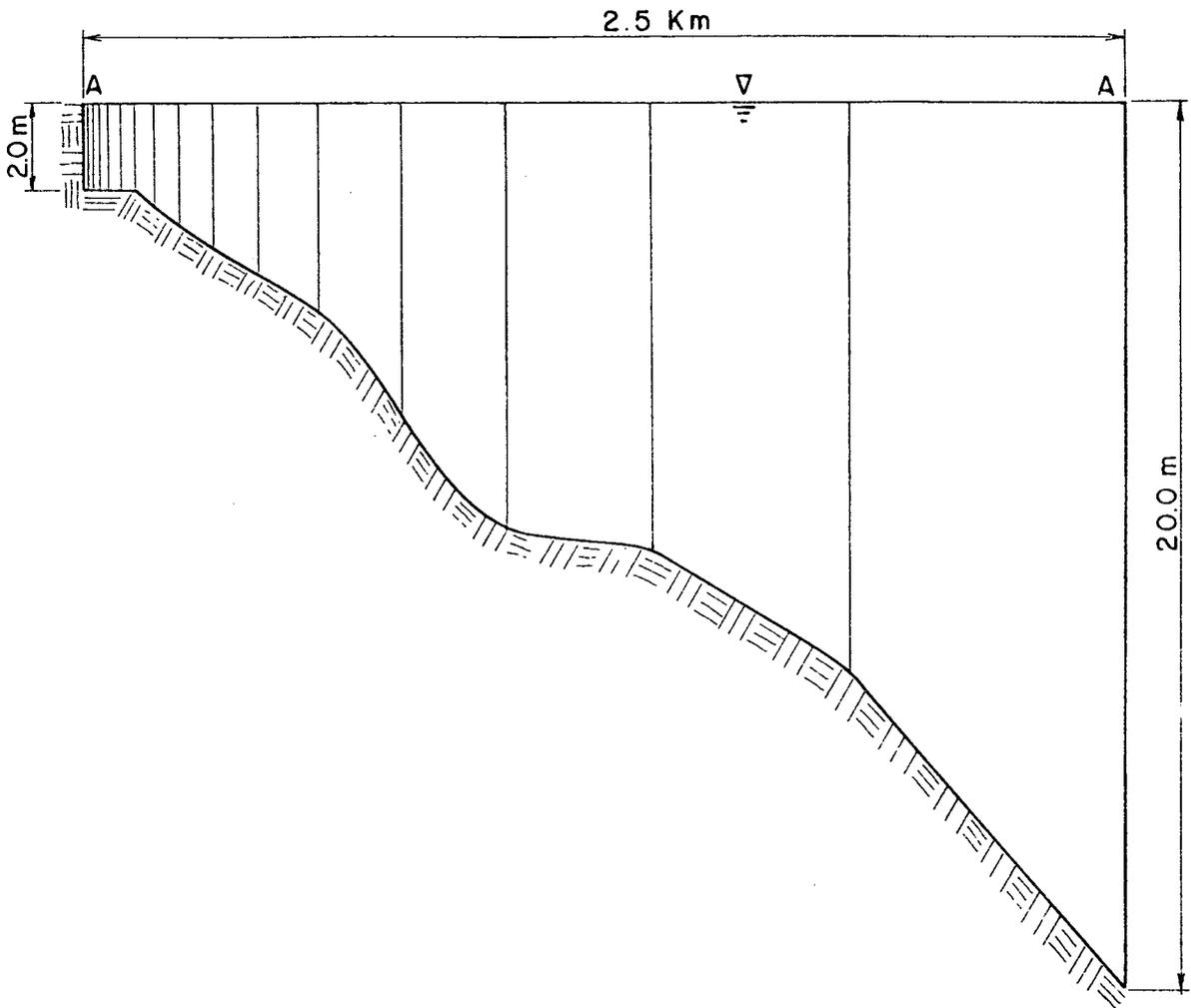


Figura 39 - Perfil do fundo do lago para uma seção A-A.

vel mostrar o perfil do fundo do lago, correspondente a uma seção A-A, como indicado na Figura 39. Cabe observar que a Figura 39 não corresponde à escala normal, já que, por tratar-se de águas não muito profundas, isto prejudicaria o entendimento da figura. Assim, a cada volume elementar corresponde uma profundidade determinada. As profundidades são fornecidas ao programa computacional nos quatro vértices de um volume elementar para a temperatura. Em quaisquer outras partes do volume de controle - para a temperatura ou para outra variável - que a profundidade seja necessária, ela é determinada através de média, utilizando-se os quatro pontos conhecidos.

Além das hipóteses simplificativas expostas no Capítulo 2, não foram consideradas as tensões produzidas por atrito no fundo, e na superfície - esta produzida pelo vento. Igualmente não se considerou o valor da perda de calor na superfície do lago, pois a contribuição deste termo é pequena em relação à dos outros processos envolvidos, como, por exemplo, a incorporação de fluido frio ao jato ("entrainment"), principalmente perto da descarga.

Assim, de acordo com o exposto, temos

$$S_S^u = S_S^v = 0 \quad (8.15)$$

$$S_F^u = S_F^v = 0 \quad (8.16)$$

$$S_S^T = 0 \quad (8.17)$$

As condições de contorno utilizadas no presente traba

lho foram:

- . Fronteira Este - fronteira de entrada do escoamento principal do lago com velocidade da corrente de 0.11 m/s normal à fronteira, com temperatura de 16°C.
- . Fronteira Sul - consideram-se velocidades e fluxo de calor prescrito igual a zero. Para os volumes localizados na descarga do jato, tem-se uma vazão de 114 m³/s em uma área conhecida. O vetor velocidade do jato tem a direção indicada na Figura 40, enquanto que a temperatura do jato é de 27°C.
- . Fronteira Norte - é uma fronteira considerada impermeável de livre deslizamento; seu contorno se aproxima da forma das linhas de corrente do fluxo [13]. Isto leva a considerar uma componente da velocidade respeitando o deslizamento, enquanto que a outra componente normal toma o valor zero. Com respeito à temperatura, a condição preservada é de fluxo prescrito igual a zero em toda a fronteira.
- . Fronteira Oeste - nesta fronteira, paralela ao eixo y, foram consideradas três condições de contorno para a velocidade.

a) Condição de derivada nula na componente da velocidade normal à fronteira de saída; a outra componente foi mantida com valor zero. Tal condição transmitiu efeitos de recirculação existentes até a saída. Este fenômeno se deve ao fato de haver um alto número de Peclet no domínio, transmitindo, então, para a saída, os efeitos de recirculação o que não concordava com a condição de contorno localmente parabólica, destruindo a solução. Exatamente o mesmo problema é relatado por Raithby [13].

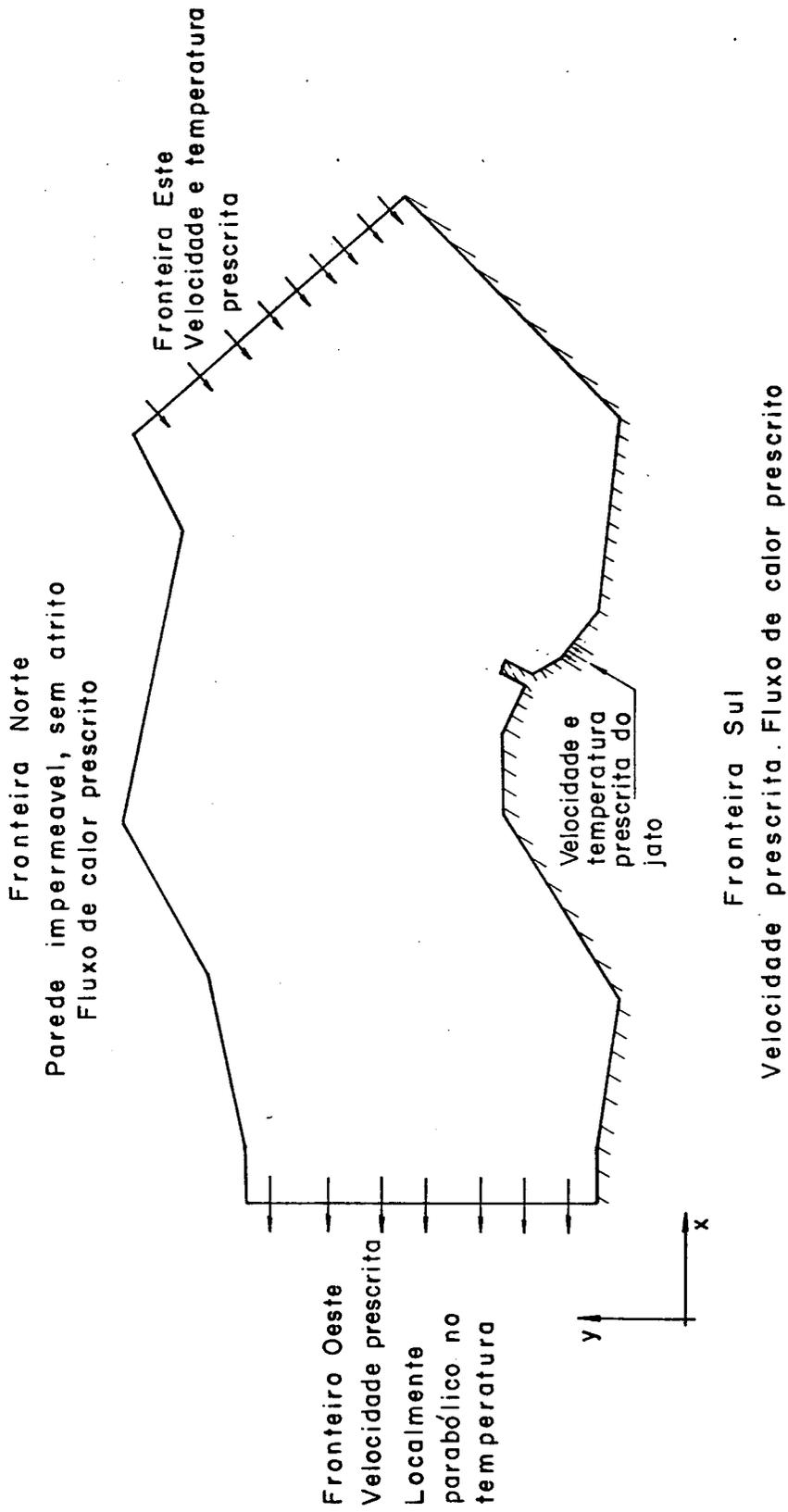


Figura 40 - Condições de contorno usadas no domínio do lago.

b) Velocidade prescrita constante na saída, como uma maneira de evitar os efeitos de recirculação na saída, onde a conservação da massa era mantida. Esta condição também foi considerada em |13|.

c) Também velocidade prescrita na saída, mas variando linearmente com y desde a fronteira Sul até a fronteira Norte. O objetivo desta condição de contorno foi testar os resultados das condições de contorno dadas por b) e as condições de c); não foram encontradas maiores variações, o que dava validade à condição de contorno considerada. A não influência da condição de contorno na saída já era esperada, devido ao alto número de Peclet e Reynolds, do escoamento, como foi comentado.

Para o caso da temperatura foi considerada a condição de contorno fraca, de derivada nula.

As condições de contorno são resumidas na Figura 40.

Deve-se observar que os dados utilizados correspondem ao caso denominado "Normal" no artigo de Elliott |14|.

Para tentar reproduzir os resultados encontrados em |14|, um modelo de turbulência constante, também usado em |14| foi usado para as equações de movimento e energia. Em tal situação, usa-se uma viscosidade absoluta turbulenta igual a cem ($\mu_t = 100 \text{ kg/m-s}$), que é o valor recomendado em |13| e em |36|, para este tipo de problema. Automaticamente, utilizando o número de Prandtl turbulento, igual a 0.7, o valor da condutividade térmica é dado por

$$P_{rt} = \frac{\mu_t/\rho}{\alpha_t} = \frac{\mu_t}{k_t} C_p \quad (8.18)$$

$$k_t = \frac{100 \text{ (kg/m-s)}}{0.7} C_p \quad (8.19)$$

Na solução dos sistemas de equações usou-se a técnica S.O.R. para regime permanente. O critério de convergência foi de $\epsilon = 5.0E-04$, atuando na velocidade sem relaxação na pressão, enquanto que para a temperatura o coeficiente de relaxação foi de 0.8, com um erro máximo de $ERT = 1.0 E -05$. O tempo de CPU ocupado no modelo numérico foi de 18 min, aproximadamente, convergindo em 180 iterações para a velocidade e em 190 iterações para a temperatura.

Na seqüência, as diferentes figuras mostram os resultados dos campos de velocidades e temperaturas obtidos neste trabalho, bem como os apresentados em |14|, efetuando-se uma comparação qualitativa.

No modelo descrito em |14| as tensões de cisalhamento produzidas pelo vento são consideradas.

Uma grande diferença entre os resultados dos dois modelos é que, no modelo tridimensional, a descarga do jato é afetada pelos efeitos da convecção natural, levando o jato em direção à superfície, o que faz com que haja uma maior penetração do jato no corpo d'água. Já no modelo deste trabalho, o jato penetra em toda a área normal à descarga, devido à consideração da profundidade, e como não tem efeitos de flutuação, sua penetração no domínio é menor, pois se dá ao longo de toda a profundidade. Estes efeitos de penetração do jato são mostrados nas Figuras 41 e 42.

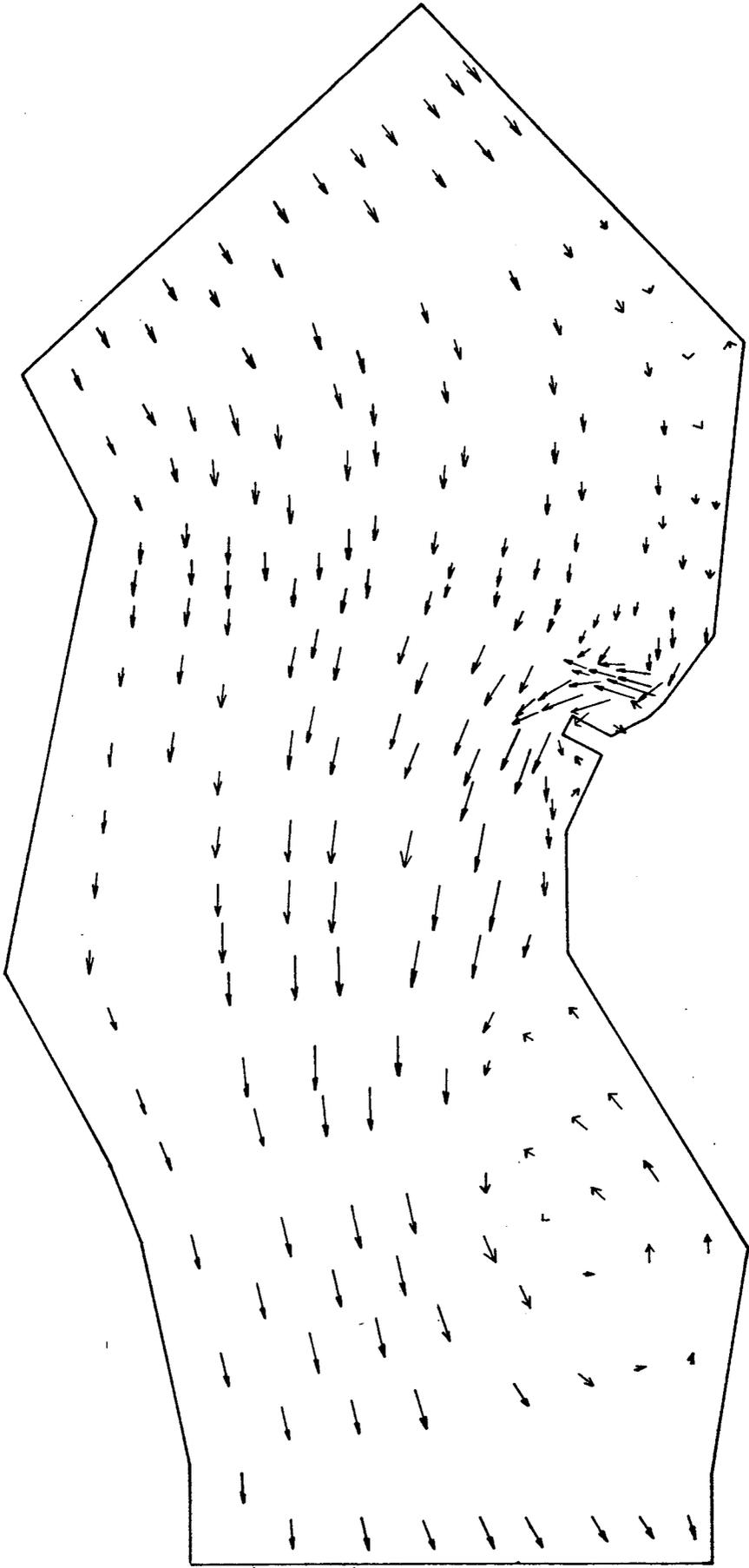


Figura 41 - Campo de velocidade do modelo deste trabalho.

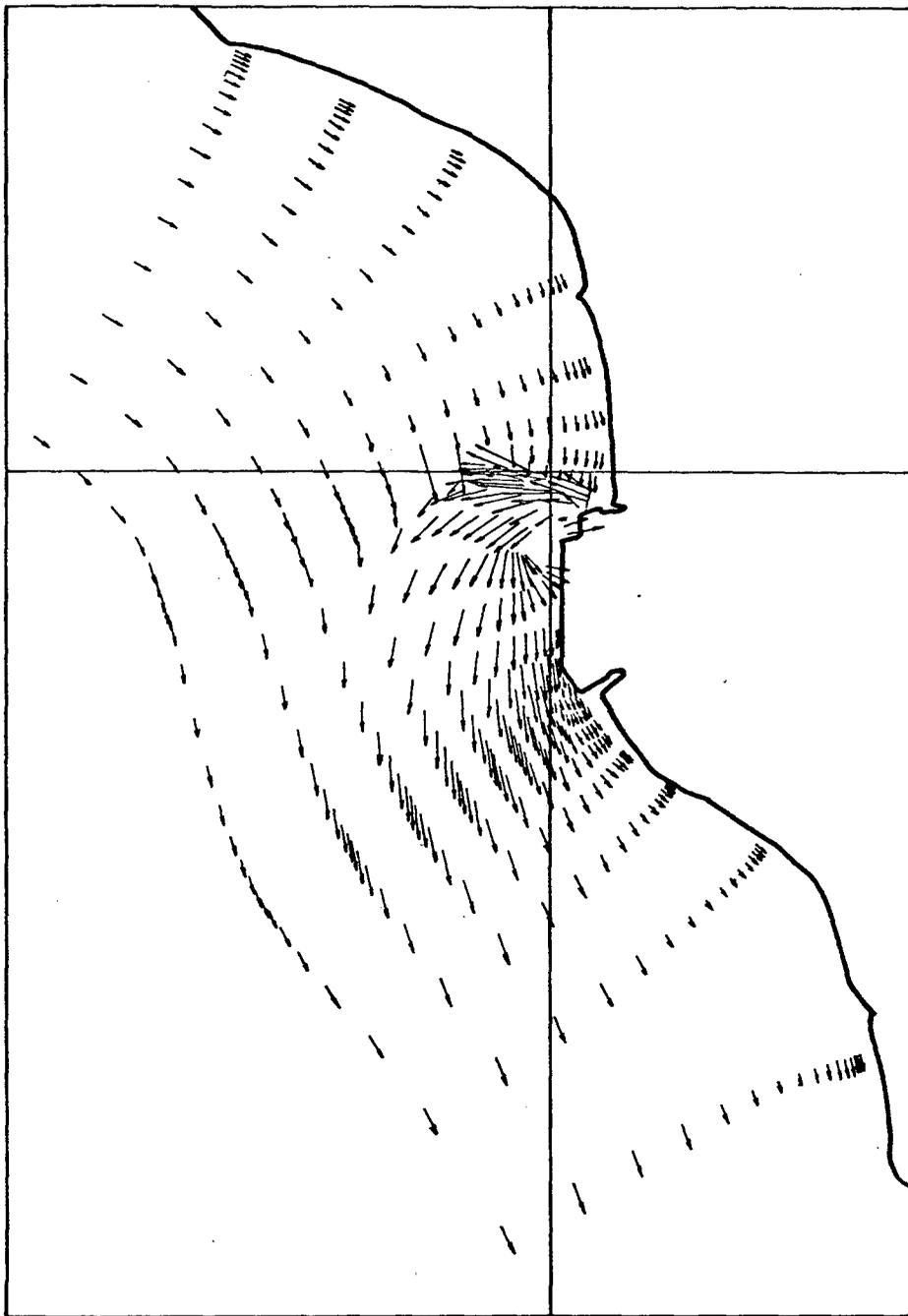


Figura 42 - Campo de velocidade modelo |14|.

Por outro lado, a Figura 41 retrata a existência de efeitos de recirculação, que, de acordo com a geometria do lago, são fisicamente esperados. Estes efeitos não são captados em |14|, como a Figura 42 registra.

Nas Figuras 43, 44, 45 e 46 são mostradas as isotermas obtidas com os dois modelos.

O modelo descrito em |14| é dividido em cinco níveis de profundidade, desde um valor dado por $k=1$ para a superfície até $k=5$ para o fundo; nas Figuras 44 e 45 aparecem as isotermas para os níveis $k=2$ e $k=3$. Mostram-se apenas os níveis de isotermas para $k=2$ e $k=3$ por que as isotermas para $k=1$ são praticamente iguais às aquelas para $k=2$. Quanto às isotermas para $k=4$ e $k=5$, são similares às de $k=3$.

Comparando-se as Figuras 43 e 44, observam-se as diferenças entre as isotermas obtidas com os dois modelos, resultando também da diferente penetração dos jatos devido ao efeito já explicado. Ou seja, com o jato tem uma maior penetração no modelo |14|, suas isotermas têm um raio de ação maior que no caso do modelo deste trabalho.

Na Figura 46 aparecem as isotermas de 17°C , correspondentes ao modelo |14|, para $k=2$ e $k=3$, ao lado da isoterma obtida neste trabalho, colocando-se esta entre as duas anteriores. Portanto, as isotermas deste modelo representam os valores médios do modelo |14|, ou seja, para k entre 2 e 3, como era esperado, já que o presente modelo representa a média na profundidade.

Com estes resultados, observa-se que os efeitos de flutuação do jato são os principais responsáveis pelas diferen-

ças entre os dois modelos. É importante observar também que, do ponto de vista de estratificação do campo de temperatura, o lago considerado em [14] não pode ser caracterizado como de águas rasas. Para um problema que considerasse um corpo d'água de menos profundidade os resultados obtidos com este modelo certamente representariam ainda melhor os diversos níveis de profundidade.

Finalmente, pode-se concluir que o modelo mostrado nesta dissertação apresenta resultados qualitativamente muito bons, quando comparados aos de Elliott [14], já que todas as tendências físicas foram captadas pelo modelo dentro da média esperada. Para além desta comparação, é recomendável testar este modelo com dados experimentais obtidos em águas não profundas. Esta última etapa não foi objeto deste trabalho; realizá-la fica como recomendação para atividades futuras, que poderão incorporar também testes considerando malhas mais refinadas.

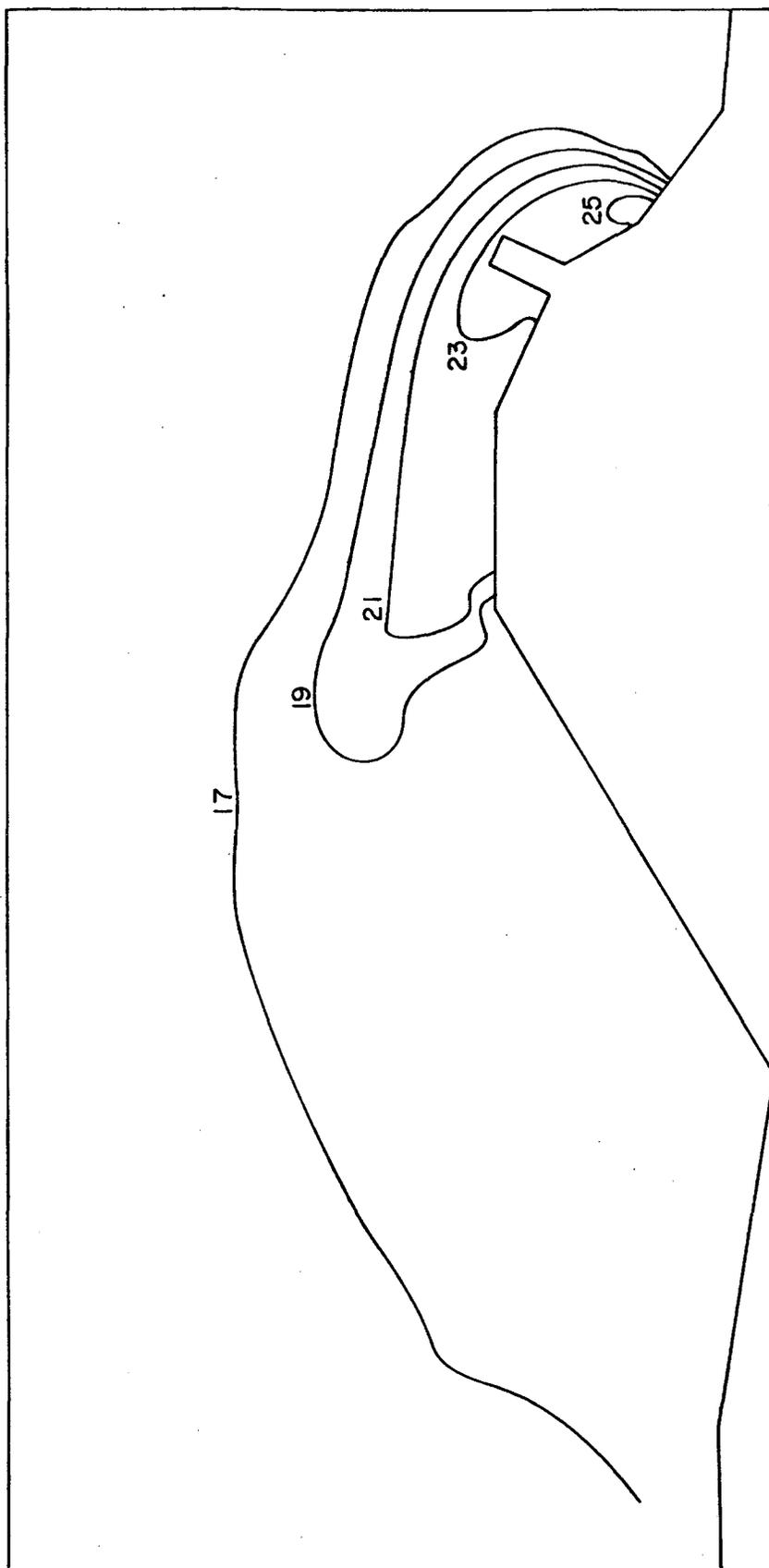


Figura 43 - Isotermas do modelo deste trabalho.

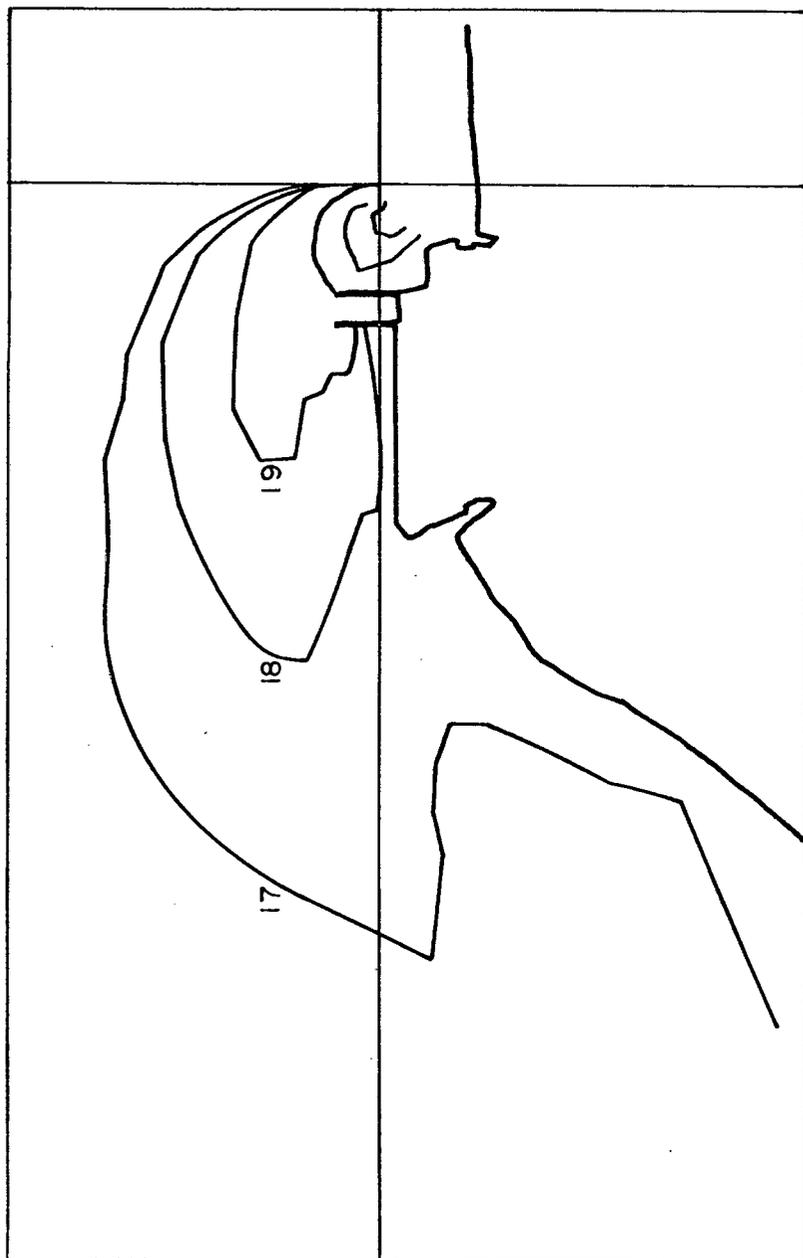


Figura 44 - Isotermas modelo |14| com $k = 2$.

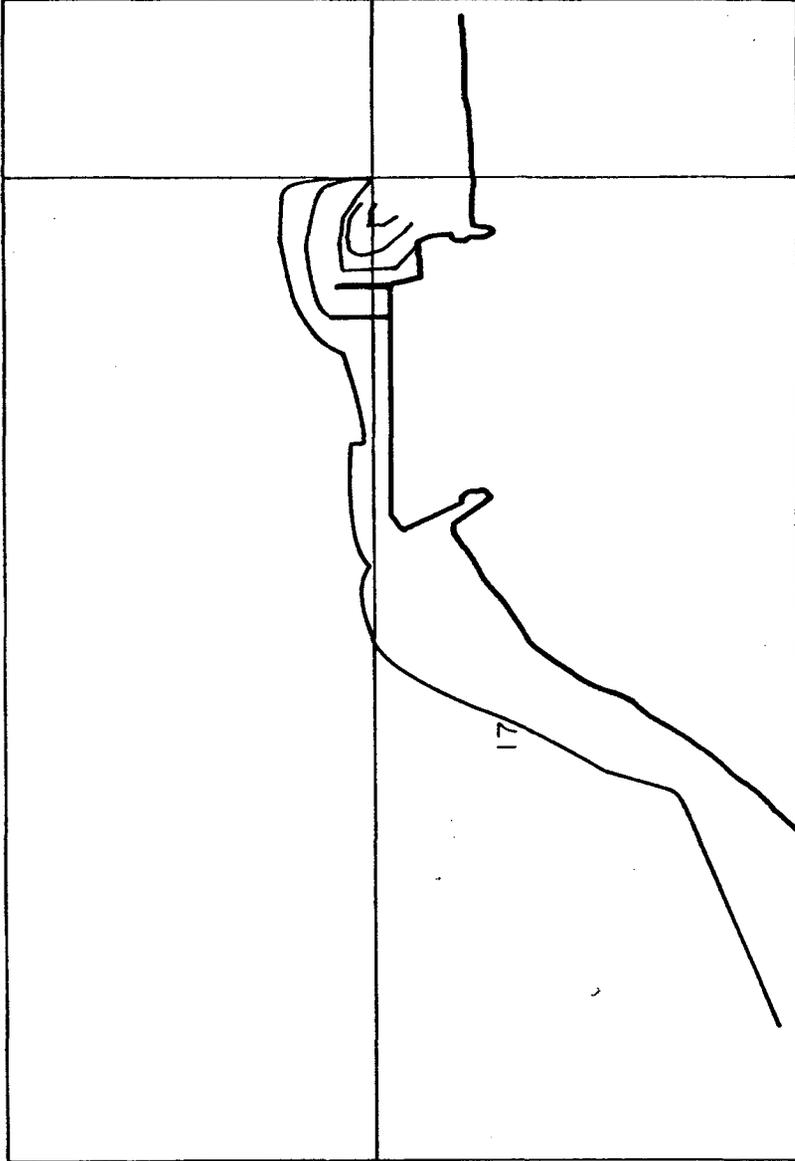


Figura 45 - Isotermas modelo |14| com $k = 3$.

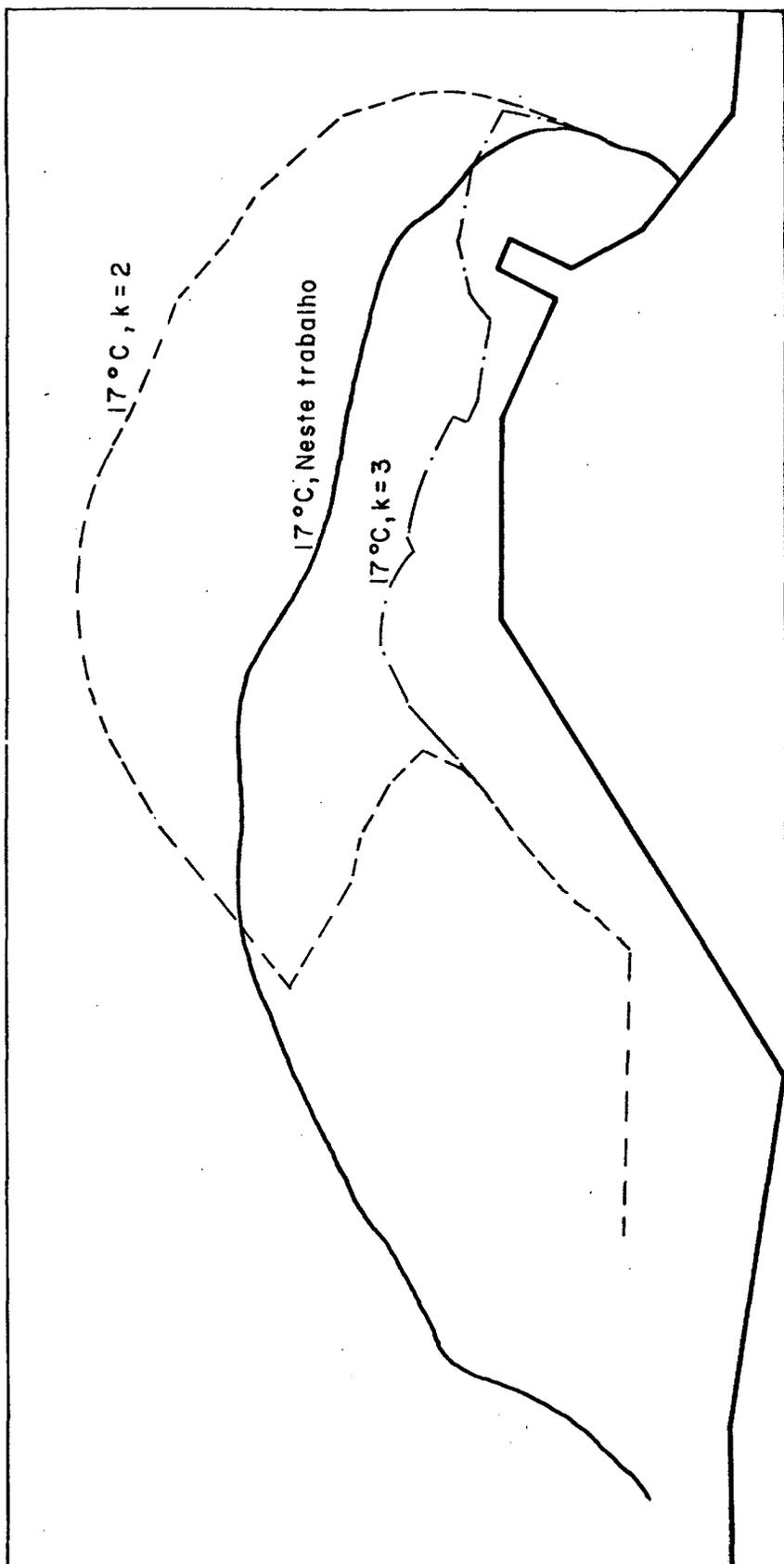


Figura 46 - Isotermas 17°C superpostas, do modelo [14] com $k = 2$, $k = 3$ e do modelo deste trabalho.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES

No presente trabalho foi desenvolvido um modelo numérico bidimensional elíptico para a solução do problema da descarga térmica em um lago de geometria e profundidade variáveis.

O modelo utiliza sistemas de coordenadas generalizadas, que se adaptam à geometria do domínio, transformando-se posteriormente num domínio retangular, que fica independente da geometria inicial. Isto confere grande generalidade ao modelo.

No teste hidrodinâmico efetuado, resolvendo-se o problema de um canal com expansão, o método demonstrou muito bom desempenho, apresentando resultados que o classificam entre os melhores dos analisados em |15|.

O modelo também foi testado para o caso de uma descarga térmica num lago de geometria e profundidade variáveis, considerando-se a descarga de um jato quente em escoamento cruzado. Estes resultados foram comparados qualitativamente àqueles obtidos com o modelo tridimensional descrito em |14|, encontrando-se os valores médios esperados.

Devido aos altos números de Peclet da malha, as regiões de recirculação perto da saída do domínio propagam-se até esta saída quando a condição de derivada nula é utilizada. O problema foi resolvido prescrevendo-se a velocidade na saída e comparando-se os resultados para duas condições diferentes. Con

forme comentado, os mesmos problemas foram encontrados no modelo tridimensional descrito em |13|, que é o mesmo modelo usado em |14|.

Os objetivos perseguidos nesta dissertação foram alcançados plenamente, resultando no desenvolvimento de uma metodologia que é aplicável a problemas de descargas de jatos em águas rasas, onde os efeitos de flutuação não são significativos. Muitos outros problemas bidimensionais da Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor podem ser resolvidos aplicando-se este modelo. O uso de coordenadas coincidentes com a fronteira o torna ainda mais geral.

Como continuação deste trabalho é necessário comparar o modelo com resultados experimentais medidos em descargas em águas rasas e com resultados numéricos obtidos através de programas bidimensionais com médias nas profundidades.

Recomendável é ainda a inclusão de um modelo de turbulência que apresente adequadamente as trocas de calor e a quantidade de movimento entre o jato e o corpo d'água. Para águas profundas com efeitos de flutuação do jato é necessário o uso de um modelo tridimensional completo. O desenvolvimento de um programa desta natureza é uma etapa que deve seguir-se ao presente trabalho, a exemplo do que foi realizado nos países desenvolvidos, para que aperfeiçoamentos e crescimento científico sejam alcançados na área de previsão numérica de descargas térmicas em corpos d'água.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. DUNN, W.E., POLICASTRO, A.J. & PADDOCK, R.A., Surface thermal plumes: evaluation of mathematical models for the near and complete field, Argonne National Laboratory Report No. ANL/WR-75-3, Illinois, 1975.
2. JIRKA, G.H., ABRAHAM, G. & HARLEMANN, D.R.F., An assesement of techniques for hidrothermal prediction, Ralph M. Parson Laboratory for Water Resources and Hidrodynamics, Report No. 203, Massachusetts Institute of Technology, 1975.
3. MCGUIRK, J. & RODI, W., Calculation of three-dimensional heated surface jets, Proceedings of the 1976 ICHMT Seminar on Turbulent Buoyant Convection, Dubrovnik, Yugoslavia, pp. 275-288, 1976.
4. POLICASTRO, A.J. & DUNN, W.E., Numerical modeling of surface thermal plumes, Argonne National Laboratory. Thermal effluent disposal from power generation. A publication of the International Centre for Heat and Mass Transfer, Belgrade, pp. 61-98, 1978.
5. RAITHBY, G.D. & SCHNEIDER, G.E., The prediction of surface discharge jets by a three-dimensional finite-difference model. Journal of Heat Transfer, V. 102, No. 1, 1980.
6. EDINGER, J.E., BUCHAK, E.M., KAPLIN, E. & SOCRATOUS, G., Generic emergency cooling pond analysis, Report on Contract No. At (11-1)-2224, Atomic Energy Commission, Washington, 1972.
7. YEH, G.T., VERMA, A.P. & LAI, F.H., Unsteady temperature prediction for cooling ponds. Water Research V. 9, No. 6, 1973.

8. LOZIUK, L.A., ANDERSON, J.C. & BELYTACKKO, T., Transient hydrothermal analysis of small lakes. Journal of Power Division. ASCE, 1973.
9. VASILIEV, O.F., Two-dimensional numerical models for hydrothermal analysis of water bodies. Academy of Sciences, Novosibirsk. Thermal effluent disposal from power generation. A publication of the International Centre of Heat and Mass Transfer, Belgrade, pp. 133-149, 1978.
10. TRIBESS, A. & MALISKA, C.R., Um modelo numérico para a previsão da transferência de calor em escoamentos cruzados. Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, S.J. Campos, SP, 1985.
11. ELLIOTT, R.V. & RAITHBY, G.D., A three-dimensional finite-difference model for the prediction of thermal discharges. Third conference on Waste Heat Management and Utilization, Miami Beach, Florida, 1981.
12. RAITHBY, G.D. & ELLIOTT, R.V., The prediction of a thermal discharge entering a crossflow. Symposium on refined modelling of flows, Paris, France, 1982.
13. RAITHBY, G.D., Predictions of thermal plumes at the Bruce nuclear power development. Thermal Science Ltd. Waterloo, Canadá, 1984.
14. ELLIOTT, R.V., Use of the Raithby mathematical model to study the effects of tempering on thermal plume behaviour. Geotechnical and Hydraulic Engineering Department Desing, Toronto, Ontario, 1986.
15. NAPOLITANO, M. & ORLANDI, P., Laminar flow in a complex geometry: a comparison. International Journal for Numerical Methods in Fluids, V. 5, pp. 667-683, 1985.

16. VINOKUR, M., Conservation equations of gasdynamics in curvilinear coordinate systems. Journal of Computational Physics., V. 14, pp. 105-125, 1974.
17. MALISKA, C.R., A solution method for three-dimensional parabolic fluid flow problems in nonorthogonal coordinates. Ph.D. thesis, Waterloo Univ., Ontario, Canada, 1981.
18. RAITHBY, G.D. & SCHNEIDER, G.E., Numerical solution of problems in incompressible fluid flow: treatment of the velocity - pressure coupling. Numerical Heat Transfer, V. 2, p. 417-440, 1979.
19. MALISKA, C.R. & RAITHBY, G.D., A method for computing three dimensional flows using non-orthogonal boundary - fitted co-ordinates. International Journal for Numerical Methods in Fluids, V. 4, pp. 519-537, 1984.
20. THOMPSON, J.F. & WARSI, Z.U.A. & MASTIN, C.W., Numerical Grid Generation. Foundations and Applications. Ed. North-Holland, 1985.
21. MALISKA, C.R. & SILVA, A.F.C., Local effects of highly non-orthogonal grids in the solution of heat transfer problems in cusped corners. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, Eds. J. Höuser e C. Taylor, pp. 679-690, Pineridge Press, 1986.
22. MALISKA, C.R., Solução numérica de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos em coordenadas generalizadas. I Congresso Brasileiro de Engenharia em Ciências Térmicas (ENCIT), Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1986.
23. RAITHBY, G.D. & GALPIN, P.F. & VAN DOORMAAL, J.P., Prediction of heat and fluid flow in complex geometries using general orthogonal coordinates. J. Numerical Heat Transfer, V. 9, pp. 125-142, 1986.

24. THOMPSON, J.F. & THAMES, F.C. & MASTIN, C.W., Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics*, V. 15, pp. 299-319, 1974.
25. TAYLOR, A.E. & MANN, W.R., *Advanced Calculus*. John Wiley & Sons Inc., Caps. 8 e 9, 1972.
26. THOMPSON, J. F. & THAMES, F.C. & MASTIN, C.W., Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. NASA Langley Research Center Cr-2729, 1976.
27. SOKOLNIKOFF, I.S., *Tensor Analysis Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, John Wiley & Sons, 1962.
28. PATANKAR, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Books Company, 1980.
29. SILVA, A.F.C. & MALISKA, C.R., *Comunicação Pessoal*, Maio 1987.
30. RAITHBY, G.D. & TORRANCE, K.E., Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow. *Computers and Fluids*, V. 2, pp.191-206, 1974.
31. RAITHBY, G.D., Precision of dispersion by surface discharge. Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada, 1976.
32. SPALDING, D.B., A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. Journal Numerical Methods in Engineering*,

V. 4, pp. 551-559, 1972.

33. VAN DOORMAAL, J.P. & RAITHBY, G.D., Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. Numerical Heat Transfer, V. 7, pp. 147-163, 1984.
34. GERMAL, Gerador de Malhas Bidimensionais, SINMEC, Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor, Depto. Engenharia Mecânica UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.
35. TRIBESS, A., Solução numérica de problemas de transferência de calor em escoamentos confluentes em geometrias arbitrárias. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. de Engenharia Mecânica, 1986.
36. CSANADY, G.T., Turbulent Diffusion in the Environment, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, pp. 106-107, 1973.

APÊNDICE A

COMPRIMENTO NO DOMÍNIO FÍSICO
EQUAÇÕES GOVERNANTES NO PLANO TRANSFORMADO

A.1 - Introdução

Neste Apêndice apresenta-se:

- o cálculo dos comprimentos e áreas dos volumes de controle no plano físico, em função das métricas.
- a relação entre as componentes cartesianas e as componentes contravariantes.
- A determinação das equações governantes no plano transformado, mostrando-se a invariabilidade da equação de conservação da massa quanto a sua estrutura.
- A manutenção da estrutura conservativa da equação genérica governante no plano transformado.

A.2 - Comprimentos e Áreas no Plano Transformado

As expressões para calcular comprimentos e áreas do domínio físico são aqui obtidas em função das métricas da transformação.

De acordo com a Figura A1, pelo teorema de Pitágoras, e fazendo uso das expressões das métricas, obtém-se

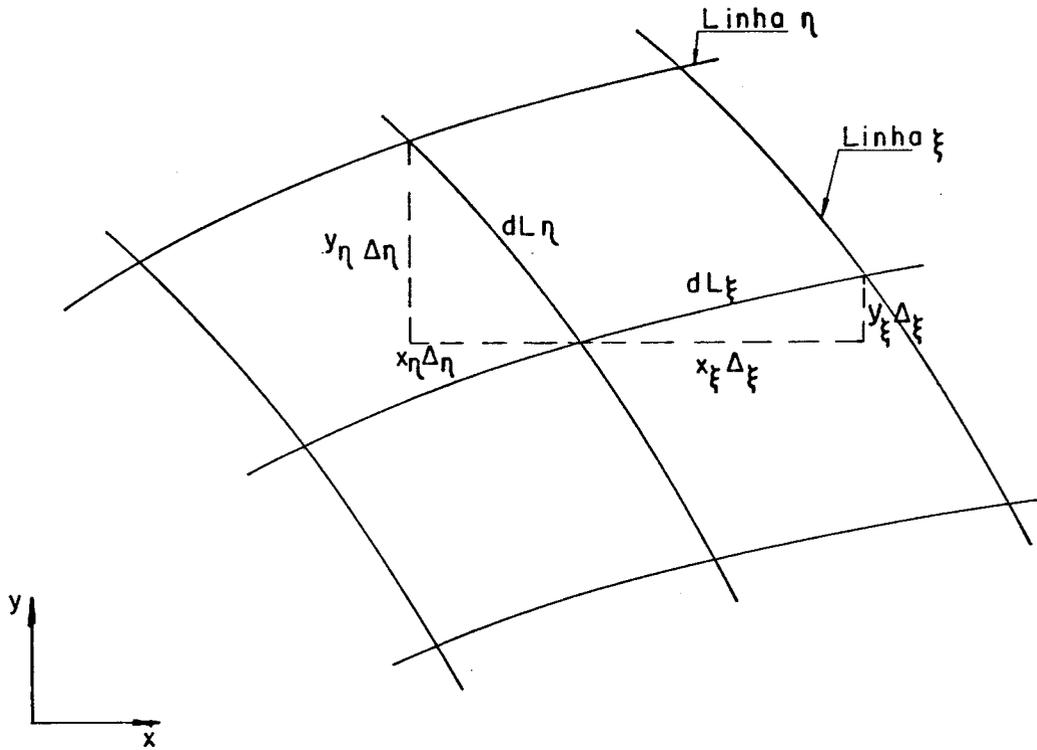


Figura A.1 - Comprimento no domínio físico.

$$|d\vec{L}_\xi| = \Delta\xi \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} = \sqrt{\gamma} \Delta\xi \quad (\text{A.1})$$

$$|d\vec{L}_\eta| = \Delta\eta \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} = \sqrt{\alpha} \Delta\eta \quad (\text{A.2})$$

A área correspondente ao plano físico é

$$d\vec{S} = d\vec{L}_\xi \times d\vec{L}_\eta \quad (\text{A.3})$$

onde, no sistema cartesiano,

$$d\vec{L}_\xi = x_\xi \Delta\xi \vec{u}_1 + y_\xi \Delta\xi \vec{u}_2 \quad (\text{A.4})$$

$$d\vec{L}_\eta = x_\eta \Delta\eta \vec{u}_1 + y_\eta \Delta\eta \vec{u}_2 \quad (\text{A.5})$$

Assim sendo a área

$$dS = |d\vec{S}| = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta \quad (\text{A.6})$$

Como $\Delta\xi \Delta\eta$ representa a área no domínio transformado, e o termo entre parênteses é o inverso do Jacobiano, visto no Capítulo 3, deduz-se

$$dS = \frac{\Delta\xi \Delta\eta}{J} \quad (\text{A.7})$$

Ou seja, o Jacobiano quantifica a relação entre as áreas nos dois domínios.

A.3 - Transformação da Equação de Conservação da Massa no Plano Transformado

É necessário, antes de mostrar esta transformação, procurar a relação que existe entre as componentes cartesianas e as componentes contravariantes.

Da Figura A.2 se depreende facilmente que a velocidade contravariante U é igual à soma dos fluxos que acarretam as velocidades cartesianas u e v .

$$U = (uy_\eta - vx_\eta) \quad (\text{A.8})$$

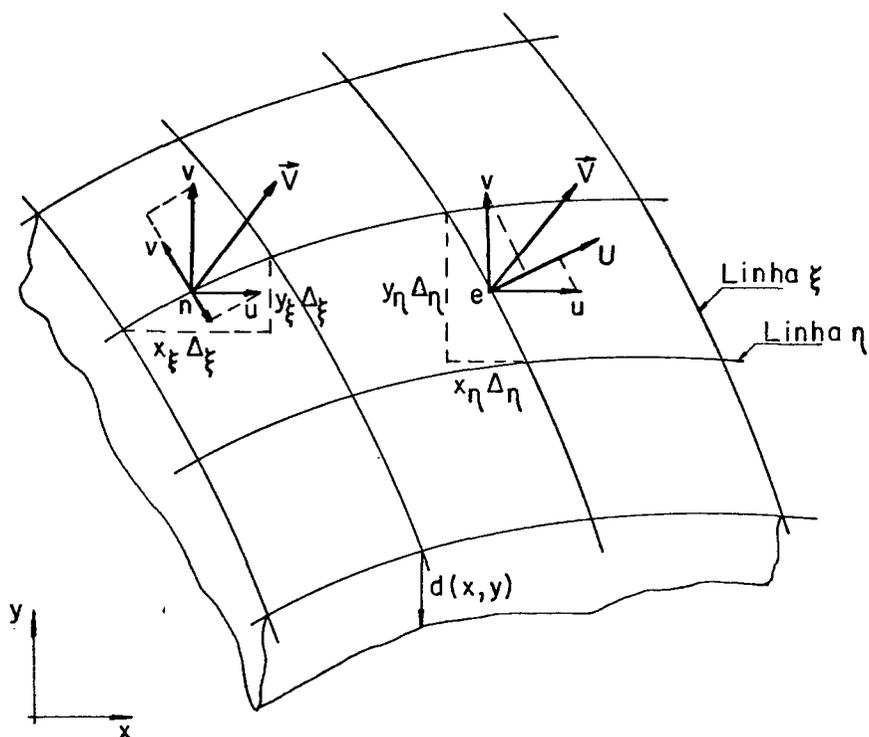


Figura A.2 - Relação entre as velocidades cartesianas e as contravariantes.

com $\bar{U} = Ud$ (A.9)

Do mesmo modo, para a velocidade contravariante V

$$V = (vx_{\xi} - uy_{\xi}) \quad (A.10)$$

$$\bar{V} = Vd \quad (A.11)$$

onde d é a profundidade variável em cada ponto.

Vejamos agora a transformação da equação de conserva-

ção da massa, que no sistema cartesiano é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x}(ud) + \frac{\partial}{\partial y}(vd) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Pela regra da cadeia

$$\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi}(ud) + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}(ud) + \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi}(vd) + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}(vd) = 0 \quad (\text{A.13})$$

Fazendo uso das Equações (3.10) e (3.11)

$$y_\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(ud) - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta}(ud) - x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(vd) + x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta}(vd) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Com algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left| \underbrace{y_\eta(ud) - x_\eta(vd)}_{Ud} \right| - \frac{\partial x_\eta}{\partial \xi}(ud) + \frac{\partial x_\eta}{\partial \xi}(vd) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left| \underbrace{x_\xi(vd) - y_\xi(ud)}_{Vd} \right| - \frac{\partial x_\xi}{\partial \eta}(vd) + \frac{\partial y_\xi}{\partial \eta}(ud) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Logo,

$$\frac{\partial(Ud)}{\partial \xi} + \frac{\partial(Vd)}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{A.16})$$

A.4 - Transformação da Equação Genérica Governante no Plano Transformado

A equação genérica, para a variável ϕ , escrita no sistema cartesiano, é

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + p\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + S\phi \quad (\text{A.17})$$

Para mostrar que ela mantém sua forma conservativa só o primeiro membro da equação, é trabalhado, já que os passos para o segundo são idênticos.

Pela regra da cadeia, e fazendo o segundo membro igual a uma variável auxiliar D, tem-se

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial E}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta_y + p\phi = D \quad (\text{A.18})$$

Substituindo os valores de ξ_x , ξ_y , η_x e η_y dadas pelas Equações (3.10) e (3.11), e fazendo operações algébricas, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta E - x_\eta F) - \cancel{\frac{\partial y}{\partial \xi} \eta_x E} + \cancel{\frac{\partial y}{\partial \eta} \xi_x E} + \cancel{\frac{\partial x}{\partial \xi} \eta_y F} - \cancel{\frac{\partial x}{\partial \eta} \xi_y F} - \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\xi E - x_\xi F) + \frac{p\phi}{J} = D \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q}{J} \right)}_{\hat{q}} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left| \underbrace{\frac{1}{J} (\xi_x E + \xi_y F)}_{\hat{E}} \right| + \frac{\partial}{\partial \eta} \left| \underbrace{\frac{1}{J} (\eta_x E + \eta_y F)}_{\hat{F}} \right| + \underbrace{\frac{p\phi}{J}}_{p\phi} = D \quad (\text{A.20})$$

ou

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + p\phi = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{S}\phi \quad (\text{A.21})$$

Esta é a equação usada ao longo do presente trabalho.

APÊNDICE B

DETERMINAÇÃO DE GRADIENTES DE PRESSÃO, COEFICIENTES E TERMOS FONTES PARA VOLUMES DE CONTROLE DA CONTINUIDADE NA FRONTEIRA

B.1 - Introdução

Como indicado na Seção (7.4), neste Apêndice tem-se:

- a determinação dos gradientes de pressão nos volumes de controle na fronteira, necessários na equação de Poisson.
- Os coeficientes e termos fontes da equação de Poisson para os volumes de controle de velocidade U na fronteira, para diferentes condições de contornos que se apresentam.

B.2 - Determinação dos Gradientes de Pressão nas Fronteiras

Considere-se a Figura B.1, onde se quer determinar os gradientes de pressão nos volumes de controle na fronteira.

Como a distribuição do perfil é parabólica, apresentaram-se os seguintes casos, segundo a fronteira:

a) Fronteiras Norte e Este.

De acordo com a Figura B.2,

$$P(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 \quad (\text{B.1})$$

Após algumas operações e considerando as pressões nos

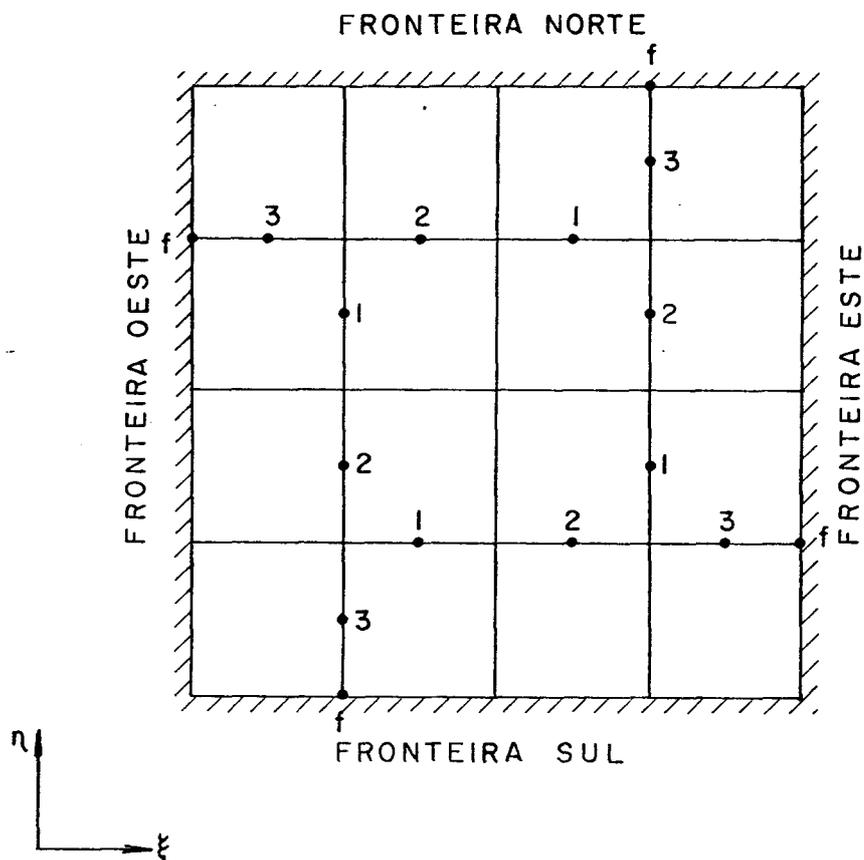


Figura B.1 - Volume de controle de fronteira onde são avaliados os gradientes de pressão.

pontos indicados, chega-se a

$$a_0 = \frac{15}{8} P_3 - \frac{5}{4} P_2 + \frac{3}{8} P_1 \quad (\text{B.2})$$

$$a_1 = 2 P_3 - 3 P_2 + P_1 \quad (\text{B.3})$$

$$a_2 = \frac{P_3}{2} - P_2 + \frac{P_1}{2} \quad (\text{B.4})$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_3 = \frac{P_3 - P_2}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_f \quad \text{Para a fronteira Norte.} \quad (\text{B.5})$$

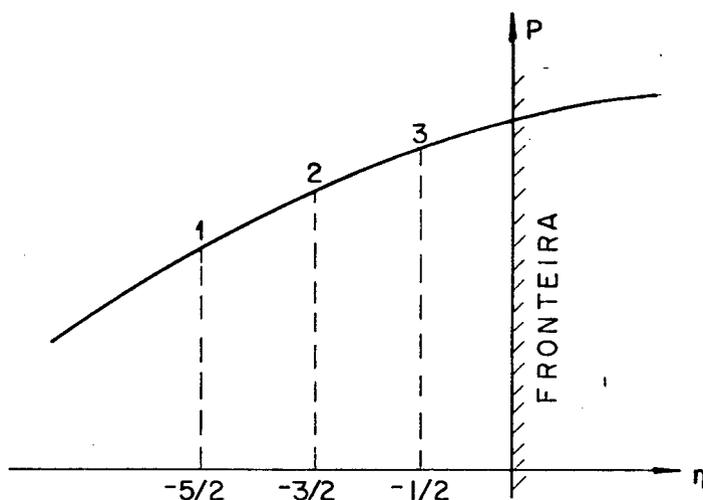


Figura B.2 - Perfil parabólico da pressão assumido para calcular seu gradiente nas fronteiras Norte e Este.

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)_f = a_1 \quad (\text{B.6})$$

O gradiente $\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)_f$ é avaliado em relação à fronteira. Para o gradiente da face Este é usada a mesma Equação (B.5) com

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_3 = \frac{P_3 - P_2}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_f \quad \text{Para a fronteira Este.} \quad (\text{B.7})$$

b) Fronteira Sul e Oeste.

O caso é idêntico ao anterior

$$P(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \quad (\text{B.8})$$

com

$$a_0 = \frac{15}{8} P_3 - \frac{5}{4} P_2 + \frac{3}{8} P_1 \quad (\text{B.9})$$

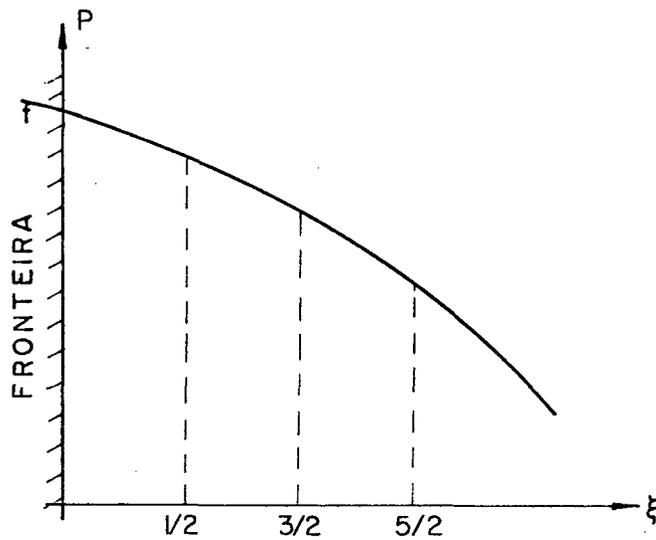


Figura B.3 - Perfil da pressão para avaliar seu gradiente nas fronteiras Sul e Oeste.

$$a_1 = -2 P_3 + 3 P_2 - P_1 \quad (\text{B.10})$$

$$a_2 = \frac{P_3}{2} - P_2 + \frac{P_1}{2} \quad (\text{B.11})$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_3 = \frac{P_2 - P_3}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_f \quad \text{Fronteira Oeste} \quad (\text{B.12})$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_f = a_1 \quad (\text{B.13})$$

Para o gradiente da face Sul

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_3 = \frac{P_2 - P_3}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_f \quad \text{Fronteira Sul} \quad (\text{B.14})$$

Atualmente, em alguns programas desenvolvidos pelo

grupo de Simulação Numérica do Dpto. de Engenharia Mecânica da UFSC, estas aproximações são tomadas linearmente sem perda da qualidade dos resultados.

B.3 - Coeficientes e Termos Fontes da Equação de Pressão para Volume de Controle da Continuidade na Fronteira

Apresentam-se aqui os coeficientes e termos fontes obtidos para os volumes de controle da continuidade na fronteira.

Na Seção (7.5) foram determinados os coeficientes e termos fontes para um elemento interno e de fronteira. O procedimento para os volumes de controle da Figura (B.4) é similar, assumindo-se as condições de contorno indicadas.

Para as condições de contorno indicada, são os seguintes os valores de coeficientes e termos fontes para os volumes de controle na fronteira, a serem utilizados na equação de pressão:

ELEMENTO L

$$A_w = A_{nw} = A_{sw} = 0$$

A_e , A_{ne} , A_{se} permanecem inalterados em relação aos coeficientes para volumes internos.

$$A_n = \left| \frac{\gamma d^2}{A_V^V} \right|_n - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P^U} \right|_e + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P^V} \right|_n \quad (B.15)$$

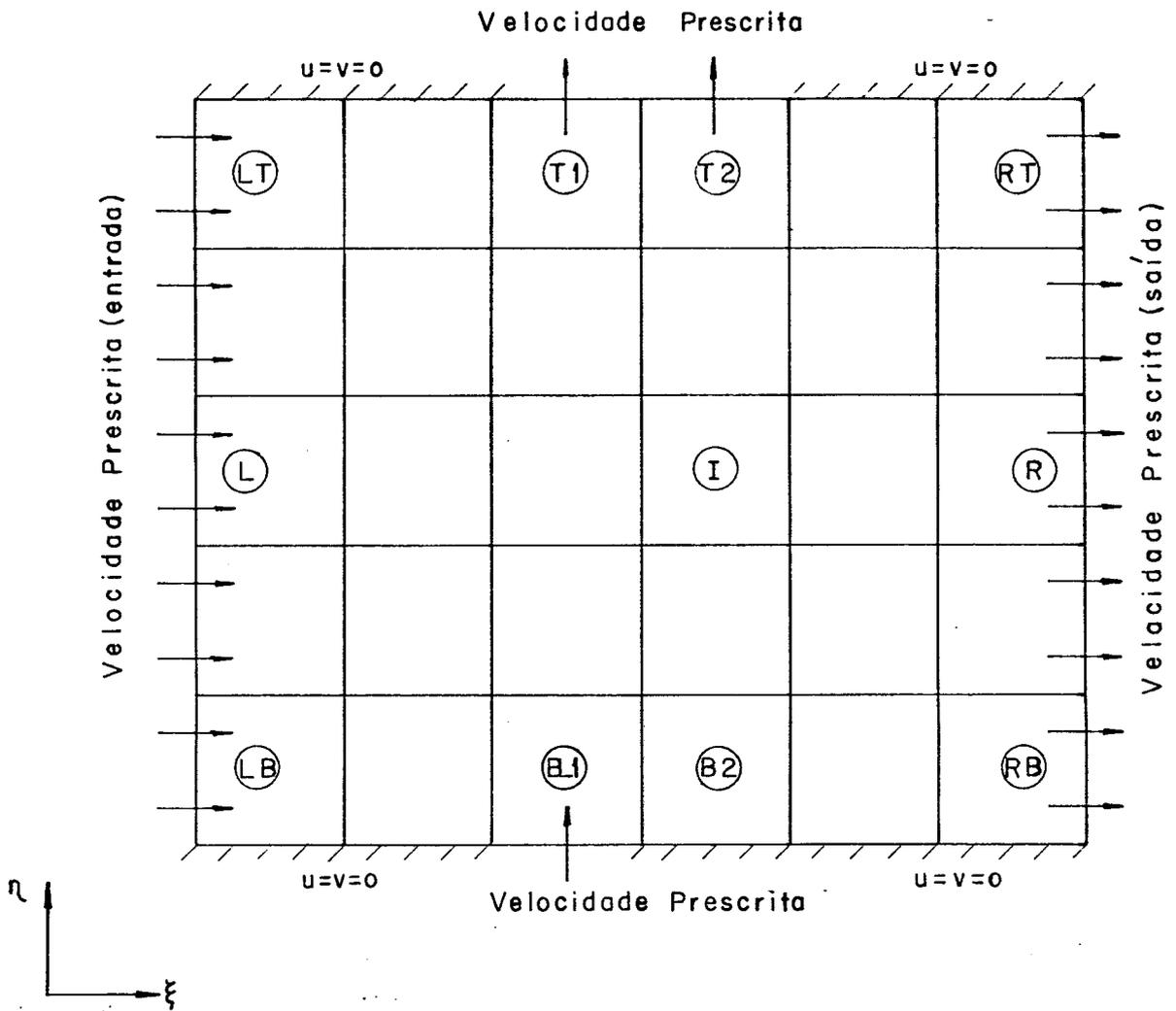


Figura B.4 - Volume de controle de fronteira para a continuidade com condições de contorno no plano transformado.

$$A_s = \left| \frac{\gamma d^2}{A_P^V} \right|_s + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P^U} \right|_e - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P^V} \right|_s \quad (\text{B.16})$$

$$B = \nabla \cdot \hat{V} + K_V)_s - K_V)_n \quad (\text{B.17})$$

Onde

$$K_V = \frac{\beta d^2 \Delta P_f}{2A_P^V} \quad (\text{B.18})$$

ΔP_f é gradiente de pressão avaliado no ponto da fronteira da face onde é calculado

ELEMENTO LT

$$A_w = A_{sw} = A_{nw} = A_n = A_{ne} = 0$$

A_{se} inalterado

$$A_e = \left| \frac{\alpha d^2}{A_U} \right|_e - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P} \right|_e + \left| \frac{\beta d^2}{4A_V} \right|_s \quad (\text{B.19})$$

$$A_s = \left| \frac{\gamma d^2}{A_V} \right|_s + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P} \right|_e - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P} \right|_s \quad (\text{B.20})$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\vec{V}} - K_U)_e + K_V)_s \quad (\text{B.21})$$

$$K_U = \frac{\beta d^2 \Delta P_f}{2A_P} \quad (\text{B.22})$$

ELEMENTO T1

$$A_n = A_{nw} = A_{ne} = 0$$

A_{sw} , A_s , A_{se} inalterados

$$A_e = \left| \frac{\alpha d^2}{A_P U} \right|_e - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_e + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_s \quad (\text{B.23})$$

$$A_w = \left| \frac{\alpha d^2}{A_P U} \right|_w + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_w - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_s \quad (\text{B.24})$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\vec{V}} - K_U)_e + K_U)_w \quad (\text{B.25})$$

O Elemento T2 é igual ao Elemento T1, por ter velocidade prescrita na fronteira.

ELEMENTO RT

$$A_n = A_{ne} = A_{nw} = A_e = A_{se} = 0$$

A_{sw} inalterado

$$A_w = \left| \frac{\alpha d^2}{A_P U} \right|_w + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_w - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_s \quad (\text{B.26})$$

$$A_s = \left| \frac{\gamma d^2}{A_P V} \right|_s - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_w + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_s \quad (\text{B.27})$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\vec{V}} + K_U)_w + K_V)_s \quad (\text{B.28})$$

ELEMENTO R

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = 0$$

$$A_w = A_{nw} = A_{sw} \quad \text{inalterados}$$

$$A_n = \left| \frac{\gamma d^2}{A_P V} \right|_n + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_w - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_n \quad (\text{B.29})$$

$$A_s = \left| \frac{\gamma d^2}{A_P V} \right|_s - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_w + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_s \quad (\text{B.30})$$

$$B = \nabla \cdot \hat{V} - K_V)_n + K_V)_s \quad (\text{B.31})$$

ELEMENTO RB

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = A_s = A_{sw} = 0$$

$$A_{nw} \quad \text{inalterados}$$

$$A_w = \left| \frac{\alpha d^2}{A_P U} \right|_w - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_w + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_n \quad (\text{B.32})$$

$$A_n = \left| \frac{\gamma d^2}{A_P V} \right|_n - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P V} \right|_n + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P U} \right|_w \quad (\text{B.33})$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\vec{V}} + K_U)_w - K_V)_n \quad (\text{B.34})$$

ELEMENTO B2

$$A_s = A_{sw} = A_{se} = 0$$

A_n, A_{nw}, A_{ne} inalterado

$$A_w = \left| \frac{\alpha d^2}{A_U} \right|_w - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P} \right|_w + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P} \right|_n \quad (\text{B.35})$$

$$A_e = \left| \frac{\alpha d^2}{A_U} \right|_e + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P} \right|_e - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P} \right|_n \quad (\text{B.36})$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\vec{V}} + K_U)_w - K_U)_e \quad (\text{B.37})$$

O Elemento B1 é igual ao Elemento B2, por ter velocidade prescrita na fronteira.

ELEMENTO LB

$$A_w = A_{sw} = A_{nw} = A_s = A_{se} = 0$$

A_{ne} inalterado

$$A_e = \left| \frac{\alpha d^2}{A_P^U} \right|_e + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P^U} \right|_e - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P^V} \right|_n \quad (\text{B.38})$$

$$A_n = \left| \frac{\gamma d^2}{A_P^V} \right|_n - \left| \frac{\beta d^2}{4A_P^U} \right|_e + \left| \frac{\beta d^2}{4A_P^V} \right|_n \quad (\text{B.39})$$

$$B = \nabla \cdot \hat{V} - K_U)_e - K_V)_n \quad (\text{B.40})$$

Se os elementos de saída RT, R e RB são de derivada nula na velocidade, então o procedimento se repete, ou seja, no balanço de massa só se deve substituir $\bar{U}_e = \bar{U}_w$, obtendo-se seus coeficientes e termos fontes.

Os coeficientes e termo fonte para o Elemento I estão listados na seção 6.5.

APÊNDICE C

DETERMINAÇÃO DE FLUXO DE CALOR, GRADIENTES DE
TEMPERATURAS E EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA
ENERGIA PARA VOLUMES DE CONTROLE NAS FRONTEIRAS

C.1 - Introdução

Neste Apêndice apresenta-se:

- o cálculo de fluxo de calor produzido no plano transformado, devido à condição de temperatura prescrita.
- A determinação dos gradientes de temperaturas, nas faces das fronteiras, para volumes de controle da conservação de energia. É considerada a mesma condição parabólica estabelecida para a pressão, por serem coincidentes os pontos no arranjo da grade utilizada.
- A determinação das equações para cada volume de controle de energia localizado nas fronteiras. São incorporadas as condições de contorno de cada fronteira em seus respectivos termos fontes, que passam a ser integrantes da equação da energia.

C.2 - Determinação dos Fluxos de Calor

Os fluxos de calor são avaliados nos volumes de controle da temperatura no plano x-y para o plano transformado. A presença de uma temperatura prescrita faz com que se obtenha

um gradiente generalizado que determinará o fluxo na face.

Segundo a Figura C.1, o valor do fluxo de calor que se origina é

$$Q = Q_x y_n \Delta n d - Q_y x_n \Delta n d \quad (C.1)$$

onde o sinal negativo é produto da métrica x_n .

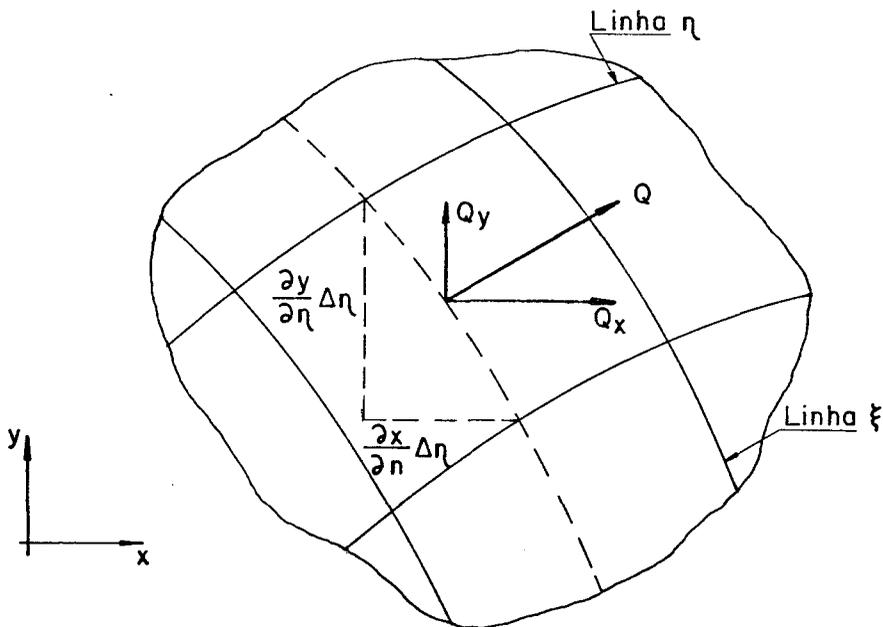


Figura C.1 - Volume de controle para determinar o fluxo de calor nas fronteiras Este e Oeste.

Fazendo uso da expressão do calor difusivo de Fourier, e mediante a regra da cadeia, obtém-se

$$Q = -k \left| \frac{\partial T}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial T}{\partial \eta} \eta_x \right| y_n \Delta n d + k \left| \frac{\partial T}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial T}{\partial \eta} \eta_y \right| x_n \Delta n d \quad (C.2)$$

Através das equações para ξ_x , ξ_y , η_x e η_y , dados no

Capítulo 3, e de rearrançamento, encontra-se

$$Q_{e,w} = -k \left| \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right| J \Delta \eta d \quad \text{Para as fronteiras} \quad (C.3) \\ \text{Este e Oeste}$$

Como em geral o fluxo é

$$Q_{e,w} = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} dL_{\eta} d = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \sqrt{\alpha} \Delta \eta d \quad (C.4)$$

obtêm-se da igualdade

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}})_{e,w} = \left| \alpha^{1/2} J \frac{\partial T}{\partial \xi} - \alpha^{-1/2} J \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{e,w} \quad (C.5)$$

Da mesma forma é obtido o fluxo de calor para as faces Norte e Sul.

De acordo com a Figura C.2, o fluxo de calor responsável pelo transporte difusivo é

$$Q = -Q_x y_{\xi} \Delta \xi d + Q_y x_{\xi} \Delta \xi d \quad (C.6)$$

Retomando os passos anteriores, encontra-se

$$Q_{n,s} = -k \left| \gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right| J \Delta \xi d \quad \text{Para as fronteiras} \quad (C.7) \\ \text{Norte e Sul}$$

com

$$Q_{n,s} = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} dL_{\xi} d = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \sqrt{\gamma} \Delta \xi d \quad (C.8)$$

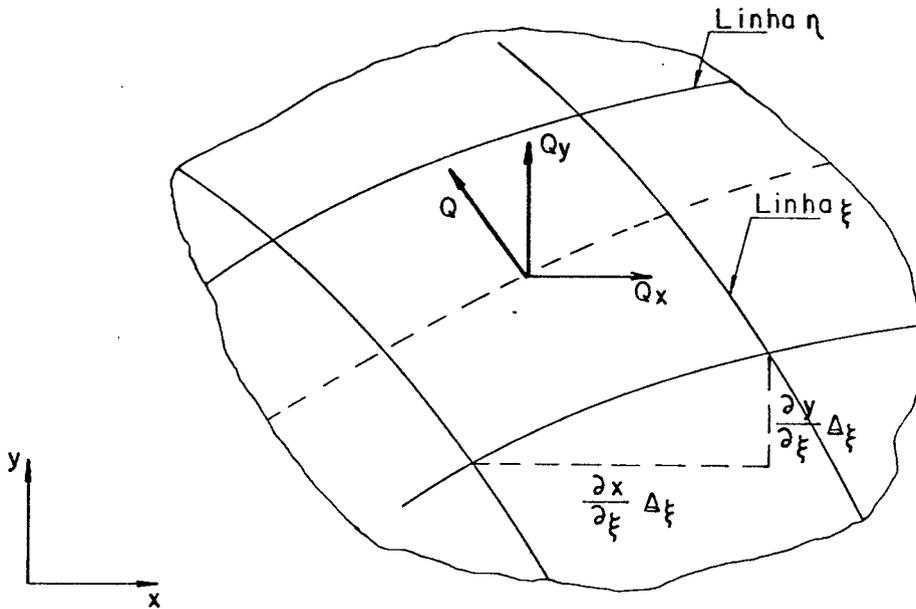


Figura C.2 - Volume de controle para determinar o fluxo de calor nas fronteiras Norte e Sul

de onde resulta

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n,s} = \left| J\gamma^{1/2} \frac{\partial T}{\partial \eta} - J\gamma^{-1/2} \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{n,s} \quad (C.9)$$

Agora é necessário avaliar os gradientes de temperatura nas faces dos volumes de controle para determinar o fluxo de calor.

C.3 - Determinação dos Gradientes de Temperatura nos Volumes de Controle na Fronteira

A partir da Figura C.3 dá-se uma listagem dos gradientes de temperaturas para os volumes de controle na fronteira.

Como indicado no Capítulo 7, os gradientes para a temperatura têm o mesmo comportamento dos gradientes de pressão, no sentido de considerar o perfil parabólico, pelo que pode-se dispensar a repetição destas operações, indicando-se apenas os valores dos gradientes correspondentes a cada face.

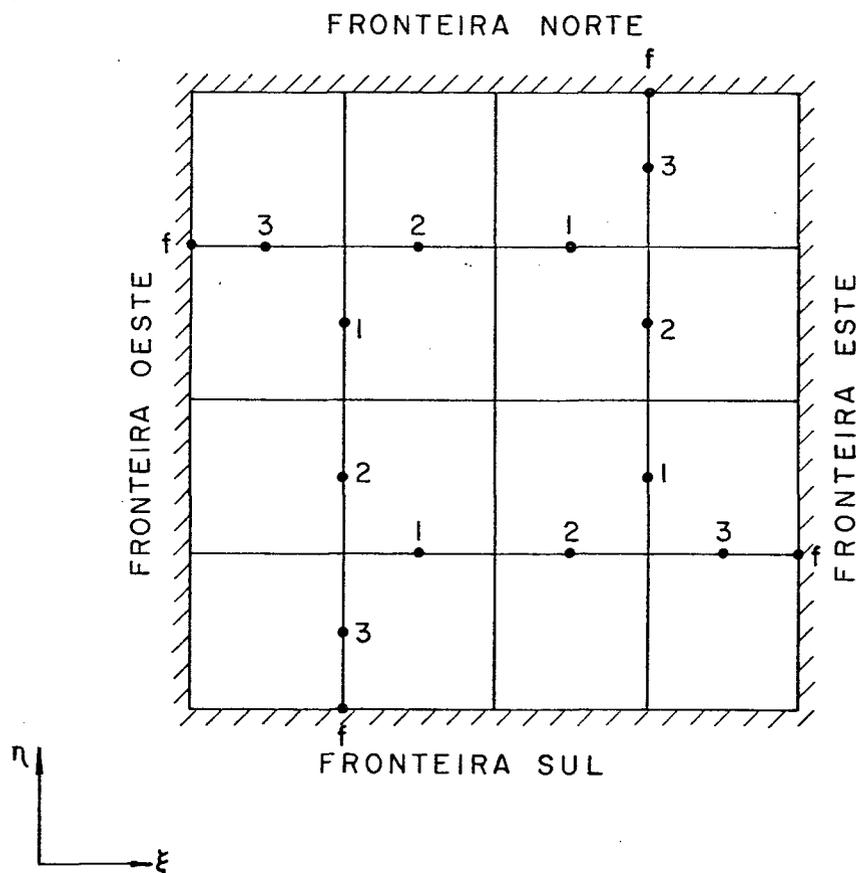


Figura C.3 - Volume de controle de fronteira onde são avaliados os gradientes de temperaturas.

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_3 = -\frac{3}{2} T_3 + 2 T_2 - \frac{T_1}{2} \quad \text{Fronteira Oeste} \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_3 = -\frac{3}{2} T_3 + 2 T_2 - \frac{T_1}{2} \quad \text{Fronteira Sul} \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_3 = \frac{3}{2} T_3 - 2 T_2 + \frac{T_1}{2} \quad \text{Fronteira Norte} \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_3 = \frac{3}{2} T_3 - 2 T_2 + \frac{T_1}{2} \quad \text{Fronteira Este} \quad (\text{C.13})$$

Sendo necessário conhecer os gradientes nos pontos w, usa-se novamente aproximação parabólica, considerando os pontos indicados na Figura C.4.

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_w = -\frac{8}{3} T_w + 3 T_p - \frac{T_E}{3} \quad \text{Fronteira Oeste} \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w = -\frac{8}{3} T_w + 3 T_p - \frac{T_N}{3} \quad \text{Fronteira Sul} \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w = \frac{8}{3} T_w - 3 T_p + \frac{T_S}{3} \quad \text{Fronteira Norte} \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_w = \frac{8}{3} T_w - 3 T_p + \frac{T_W}{3} \quad \text{Fronteira Este} \quad (\text{C.17})$$

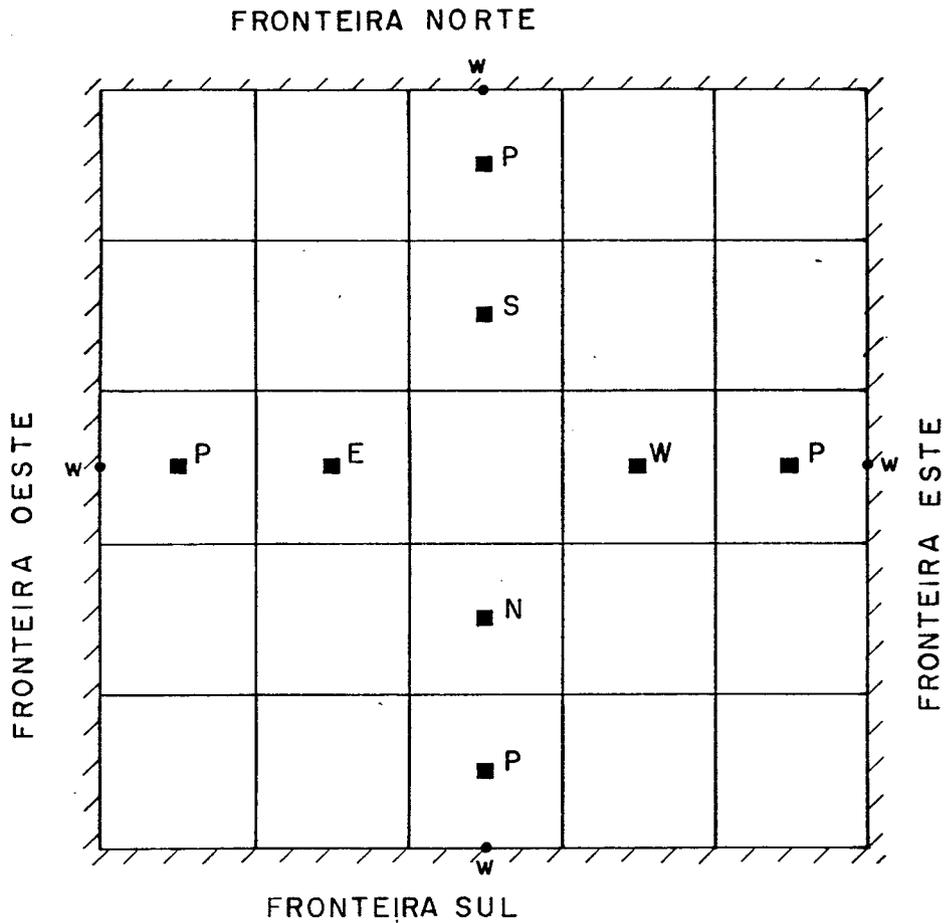


Figura C.4 - Volume de controle para avaliação dos gradientes de temperaturas, nos pontos w nas faces de fronteira.

C.4 - Equações e Termos Fontes para a Temperatura, para Volume de Controle nas Fronteiras

Apresentam-se aqui todas as equações para cada volume de controle de energia localizado na fronteira.

Tal como se trabalhou, no Capítulo 7, para volume de controle interno I, assim se faz para os volumes de fronteira, como indicado na Figura C.5, com suas condições de contorno respectivas.

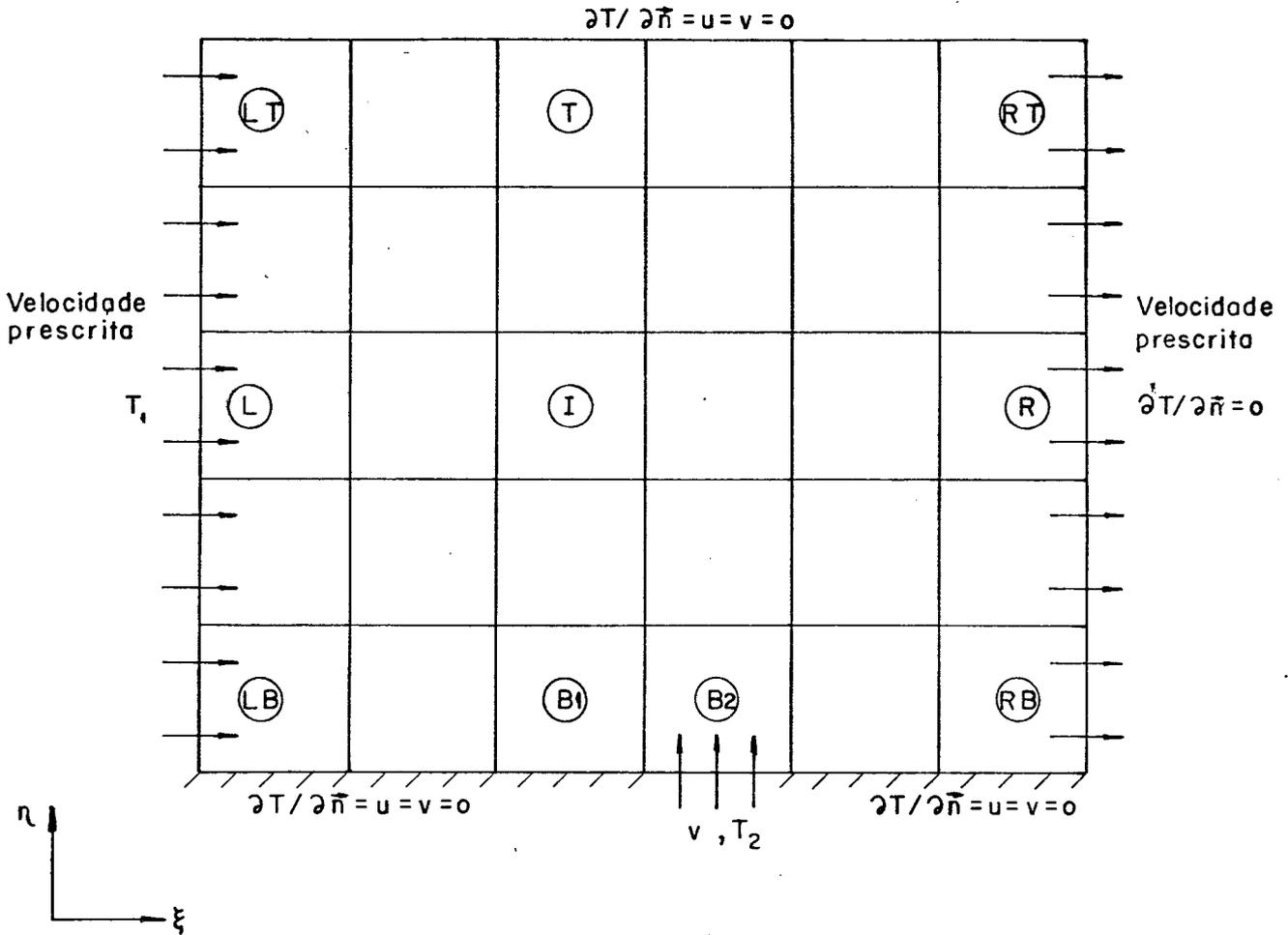


Figura C.5 - Volume de controle de fronteira e condições de contorno para a temperatura no plano transformado, para avaliação de equações e termos fontes.

As diferentes condições de contorno são incorporadas em seus respectivos termos fontes, uma vez feitos os balanço de calor em cada volume. Os resultados obtidos são:

ELEMENTO L

$$A_P T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STT \quad (C.18)$$

com

$$STT = C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_n - C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_s - \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \Big|_w +$$

$$M_w T_w + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_P}{1+E} T_P^n \quad (C.19)$$

e

$$M_w = \rho U_w d_w \quad (C.20)$$

$$A_P = (A_e + A_n + A_s + M_w) \left(\frac{1+E}{E} \right) \quad (C.21)$$

onde

S_S^T é o termo fonte devido à perda de calor difusivo na superfície do domínio.

ELEMENTO LT

$$A_P T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STT \quad (C.22)$$

com

$$STT = C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e - C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_s - \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \Big|_w +$$

$$M_w T_w + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_P}{1+E} T_P^n \quad (C.23)$$

e

$$A_P = (A_e + A_s + M_w) \left(\frac{1+E}{E} \right) \quad (C.24)$$

ELEMENTO T

$$A_P T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STT \quad (C.25)$$

com

$$STT = C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e - C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w - C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_P}{1+E} T_P^n \quad (C.26)$$

e

$$A_P = (A_e + A_w + A_s) \left(\frac{1+E}{E}\right) \quad (C.27)$$

ELEMENTO RT

$$A_P T_P^{n+1} = A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STT \quad (C.28)$$

com

$$STT = - C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w - C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s - M_e T_e + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_P}{1+E} T_P^n \quad (C.29)$$

e

$$A_P = (A_w + A_s - M_e) \left(\frac{1+E}{E}\right) \quad (C.30)$$

ELEMENTO R

$$A_P T_P^{n+1} = A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STT \quad (C.31)$$

com

$$STT = C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n - C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w - C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s - M_e T_e + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_p}{1+E} T_P^n \quad (C.32)$$

e

$$A_p = (A_w + A_s + A_n - M_e) \left(\frac{1+E}{E}\right) \quad (C.33)$$

ELEMENTO RB

$$A_p T_P^{n+1} = A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STT \quad (C.34)$$

com

$$STT = C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n - C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w - M_e T_e + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_p}{1+E} T_P^n \quad (C.35)$$

e

$$A_p = (A_w + A_n - M_e) \left(\frac{1+E}{E}\right) \quad (C.36)$$

ELEMENTO B2

$$A_p T_P^{n+1} = A_w T_W^{n+1} + A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STT \quad (C.37)$$

com

$$STT = C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n - C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w - \left| C_{4\frac{\partial T}{\partial \eta}} + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}} \right|_s + M_s T_s + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_p}{1+E} T_P^n \quad (C.38)$$

e

$$A_p = (A_w + A_e + A_n + M_s) \left(\frac{1+E}{E}\right) \quad (C.39)$$

ELEMENTO B1

$$A_p T_P^{n+1} = A_w T_W^{n+1} + A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STT \quad (C.40)$$

com

$$STT = C_{2\partial\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e + C_{5\partial\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_n - C_{2\partial\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_p}{1+E} T_P^n \quad (C.41)$$

e

$$A_p = (A_w + A_e + A_n) \left(\frac{1+E}{E} \right) \quad (C.42)$$

ELEMENTO LB

$$A_p T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STT \quad (C.43)$$

com

$$STT = C_{2\partial\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e + C_{5\partial\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_n - \left[C_{1\partial\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_w + C_{2\partial\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w + M_w T_w + \frac{S_S^T}{Jc_p} + \frac{A_p}{1+E} T_P^n \right] \quad (C.44)$$

e

$$A_p = (A_e + A_n + M_w) \left(\frac{1+E}{E} \right) \quad (C.45)$$