

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE CONDUÇÃO
ANISOTRÓPICA EM GEOMETRIAS ARBITRÁRIAS**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

ANDRÉ LUIZ SEIXLACK

FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 1986.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE CONDUÇÃO
ANISOTRÓPICA EM GEOMETRIAS ARBITRÁRIAS

ANDRÉ LUIZ SEIXLACK

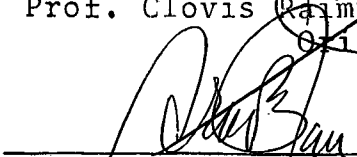
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONHECIMENTO CIÊNCIAS
TÉRMICAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO

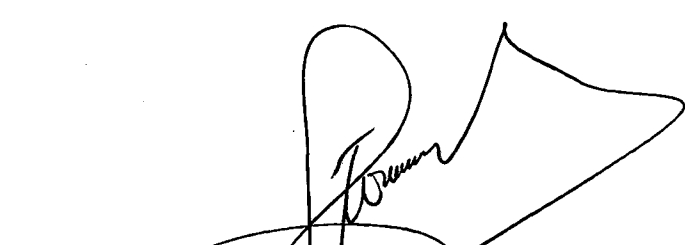


Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Orientador

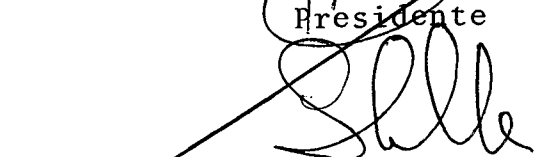


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador do Curso

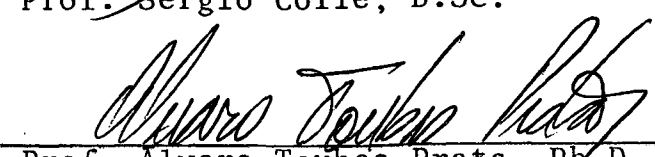
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Presidente



Prof. Sérgio Colle, D.Sc.



Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.

Aos meus pais
Hélio e Nilza
e a meus irmãos.

À Ana Lúcia

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Clóvis Raimundo Maliska pela orientação e constante dedicação.

Ao Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva pela disposição em auxiliar.

À Vera Lúcia Sodré Teixeira (Verinha), Gilmar Guimarães e Sebastião Carlos da Costa pela amizade e apoio.

ÍNDICE

| | Pág. |
|--|------|
| LISTA DE FIGURAS | viii |
| LISTA DE TABELAS | xii |
| SIMBOLOGIA | xiii |
| RESUMO | xvii |
| ABSTRACT | xix |
| | |
| CAPÍTULOS | |
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 - Preliminares | 1 |
| 1.2 - Revisão Bibliográfica | 5 |
| 1.3 - Esboço da Dissertação | 8 |
| 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA | 11 |
| 2.1 - Introdução | 11 |
| 2.2 - Fundamentos | 11 |
| 2.3 - Equação Governante | 13 |
| 2.4 - Condições Inicial e de Contorno | 14 |
| 2.5 - Parâmetros Adimensionais Usados | 15 |
| 2.6 - Resumo e Conclusões | 17 |
| 3. GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS | 18 |
| 3.1 - Introdução | 18 |
| 3.2 - Transformação de Coordenadas..... | 19 |
| 3.3 - Geração do Sistema de Coordenadas Naturais | 22 |
| 3.4 - Controle do Espaçamento Entre as Coordenadas | 29 |
| 3.5 - Resumo e Conclusões | 29 |

| | |
|--|----|
| 4. TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE E OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS | 31 |
| 4.1 - Introdução | 31 |
| 4.2 - Transformação da Equação Governante | 31 |
| 4.3 - Obtenção das Equações Aproximadas | 33 |
| 4.3.1 - Transiente Real e Transiente Distorcido | 38 |
| 4.3.2 - Equação Aproximada para os Volumes de Fronteira. | 40 |
| 4.4 - Consideração das Condições de Contorno | 46 |
| 4.5 - Resumo e Conclusões | 51 |
| 5. RESULTADOS | 52 |
| 5.1 - Introdução | 52 |
| 5.2 - Regimes Transiente e Permanente com Temperaturas Prescritas | 54 |
| 5.3 - Regime Permanente - Caso Anisotrópico e Heterogêneo | 65 |
| 5.4 - Regime Permanente Com Fluxos de Calor Prescritos.. | 76 |
| 5.5 - Regime Permanente Para a Condição de Contorno de Convecção | 85 |
| 5.6 - Resumo e Conclusões | 86 |
| 6. CONCLUSÕES | 90 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 93 |
| APÊNDICE | 97 |

LISTA DE FIGURAS

| | Pág. |
|---|------|
| Figura 2.1 - Domínio físico | 15 |
| Figura 2.2 - Geometria considerada | 16 |
| Figura 3.1 - Domínio D, no sistema cartesiano - plano físico | 20 |
| Figura 3.2 - Domínio retangular - plano transformado | 21 |
| Figura 3.3 - Domínio físico - sistema natural de coordenadas | 25 |
| Figura 3.4 - Domínio transformado | 26 |
| Figura 3.5 - Exemplo de um sistema de coordenadas ortogonais para uma região duplamente conexa | 27 |
| Figura 3.6 - Exemplo de um sistema de coordenadas não-ortogonais para uma região duplamente conexa .. | 28 |
| Figura 4.1 - Volume de controle no domínio físico | 34 |
| Figura 4.2 - Volume de controle no domínio transformado .. | 36 |
| Figura 4.3 - Elemento da fronteira interna | 42 |
| Figura 4.4 - Elemento da fronteira externa | 44 |
| Figura 4.5 - Volume de controle da fronteira | 47 |
| Figura 4.6 - Perfil assumido para o cálculo do gradiente de temperatura na fronteira | 48 |
| Figura 5.1 - Perfil de temperaturas T^* do regime permanente; soluções analítica e numérica com malhas ortogonais | 56 |

- Figura 5.2 - Perfil de temperaturas T^* do regime permanente; soluções analítica e numérica com malhas não-ortogonais 57
- Figura 5.3 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica explícita com malha 9×40 ortogonal 59
- Figura 5.4 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica explícita com malha 17×40 ortogonal 60
- Figura 5.5 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica explícita com malha não-ortogonal 61
- Figura 5.6 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica implícita com malha ortogonal 63
- Figura 5.7 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica implícita com malha não-ortogonal 64
- Figura 5.8 - Perfis de temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malha ortogonal; caso isotrópico ($k = 0.72$) 67
- Figura 5.9 - Perfis de temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malha ortogonal; caso ortotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 0$, $k_{\theta\theta} = 0.36$) .. 68
- Figura 5.10 - Perfis de temperatura T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malha ortogonal; caso anisotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 0.18$, $k_{\theta\theta} = 0.36$). 69

| | |
|--|----|
| Figura 5.11 - Perfis de temperaturas T^* ; soluções analítica 3 e numérica com malha não-ortogonal; caso isotrópico ($k = 0.72$) | 70 |
| Figura 5.12 - Perfis de Temperaturas T^* ; soluções analítica 3 e numérica com malha não-ortogonal; caso ortotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_r = 0$, $k_{\theta\theta} = 0.36$).. | 71 |
| Figura 5.13 - Perfis de Temperaturas T^* ; soluções analítica 3 e numérica com malha não-ortogonal; caso anisotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 0.18$, $k_{\theta\theta} = 0.36$) | 72 |
| Figura 5.14 - Região anular com fluxos de calor prescritos nas fronteiras interna (q''_1) e externa (q''_2)..... | 77 |
| Figura 5.15 - Perfil de temperaturas T^* ; fluxos de calor prescritos nas fronteiras; soluções analítica e numérica com malha ortogonal | 78 |
| Figura 5.16 - Perfil de temperaturas T^* ; fluxos de calor prescritos nas fronteiras; soluções analítica e numérica com malha não-ortogonal | 79 |
| Figura 5.17 - Domínio retangular com furo circular | 80 |
| Figura 5.18 - Malha 17 x 40 para uma região retangular com furo circular | 82 |
| Figura 5.19 - Malha 17 x 40 não-ortogonal com espaçamentos não-uniformes entre as linhas coordenadas | 84 |

- Figura 5.20 - Perfis de temperaturas T^* ; temperatura prescrita na face interna e convecção na face externa; soluções analítica |21| e numérica com malha ortogonal 87
- Figura 5.21 - Perfis de temperaturas T^* ; temperatura prescrita na face interna e convecção na face externa; soluções analítica |21| e numérica com malha não-ortogonal 88

APÊNDICE

- Figura 1 - Componentes covariantes e contravariantes de um vetor q 99
- Figura 2 - Elemento para a determinação de áreas e comprimentos no domínio físico 101

LISTA DE TABELAS

| | Pág. |
|---|------|
| Tabela 5.1 - Temperaturas T^* do regime permanente; soluções analítica e numérica com malhas não-ortogonais; temperaturas prescritas nas fronteiras | 58 |
| Tabela 5.2 - Temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica explícita com malhas não-ortogonais | 62 |
| Tabela 5.3 - Temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malhas não-ortogonais; caso isotrópico ($k = 0.72$) | 73 |
| Tabela 5.4 - Temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malhas não-ortogonais; caso ortotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 0$, $k_{\theta\theta} = 0.36$) | 74 |
| Tabela 5.5 - Temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malhas não-ortogonais; caso anisotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 18$, $k_{\theta\theta} = 0.36$) | 75 |
| Tabela 5.6 - Temperaturas T^* para uma região retangular com furo circular | 81 |
| Tabela 5.7 - Temperaturas T^* segundo o mesmo R^* e θ variável; malhas não-ortogonais: A- espaçamentos uniformes; B- espaçamentos não-uniformes | 83 |

SIMBOLOGIA

| | |
|--|--|
| q | - Vetor fluxo de calor. |
| q_x, q_y | - Componentes do vetor fluxo de calor no sistema de coordenadas cartesianas. |
| q^ξ, q^η | - Componentes do vetor fluxo de calor no sistema de coordenadas generalizadas. |
| Q^ξ, Q^η | - Quantidade de calor trocada, especificada no sistema de coordenadas generalizadas. |
| κ | - Tensor condutividade térmica. |
| $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ | - Componentes cartesianas do tensor condutividade térmica. |
| $k_{rr}, k_{r\theta}, k_r, k_{\theta\theta}$ | - Componentes cilíndricas do tensor condutividade térmica. |
| T | - Temperatura. |
| ρ | - Massa específica. |
| c_p | - Calor específico. |
| t | - Coordenada tempo. |
| x, y | - Coordenadas cartesianas. |
| ξ, η | - Coordenadas generalizadas. |
| r, θ | - Coordenadas polares. |
| u''' | - Taxa de geração de energia por unidade de tempo e volume. |
| \mathbf{r} | - Vetor posição. |

- q, R, S, F^T - Grandezas definidas pela equação (2.8).
- $\hat{R}, \hat{S}, \hat{F}^T$ - Grandezas definidas pelas equações (4.2) a (4.4).
- ∂D_i - Fronteiras do domínio de cálculo.
- $\partial D_{in}, \partial D_{ex}$ - Fronteiras interna e externa do domínio duplamente conexo, respectivamente.
- T_{fi} - Temperatura da fronteira ∂D_i .
- T_∞ - Temperatura do ambiente.
- h - Coeficiente de transferência de calor por convecção.
- R^* - Coordenada raio adimensional.
- T^* - Temperatura adimensional.
- F_0 - Número de Fourier.
- a - Difusibilidade térmica.
- B_i - Número de Biot.
- J - Jacobiano da transformação definida pelas equações (3.1) e (3.2).
- J^* - Jacobiano da transformação definida pelas equações (3.5) e (3.6).
- P, Q - Termos fonte das equações (3.14) e (3.15).
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ - Fronteiras do domínio físico, mostrado na figura 3.3.
- $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*, \sigma_4^*$ - Fronteiras do domínio transformado, mostrado na figura 3.4.

- g_{ij}, g^{ij} - Tensor métrico covariante e contravariante, respectivamente.
- g_i, g^i - Vetores da base covariante e contravariante, relativas ao sistema ξ - η .
- α, β, γ - Componentes do tensor métrico covariante.
- a_i, b_i, c_i, d_i - Coeficientes das equações (3.23) e (3.24).
- C_1, C_2, C_3, C_4 - Coeficientes definidos pelas equações (4.6) a (4.8).
- Δt - Avanço de tempo.
- E - Multiplicador de tempo, dado pela equação (4.32).
- e, w, n, s - Indicadores das faces leste, oeste, norte e sul dos volumes de controle.
- P - Indicador do volume de controle.
- E, W, N, S
 NE, NW, SE, SW
 NNE, NN, NNW
 SSE, SS, SSW - Indicadores dos volumes de controle vizinhos àquele P .
- $A_p^*, A_e, A_w, \dots, A_{sw}$ - Coeficientes das equações aproximadas.
- $\Delta V_{fi}, \Delta V_t$ - Volumes elementares nos planos físico e trans formado, respectivamente.
- dA - Área elementar no plano físico.
- dS - Elemento de arco.
- dL_ξ, dL_η - Comprimentos elementares no plano físico.
- $\Delta \xi, \Delta \eta$ - Comprimentos elementares no plano transforma do.

D_1, D_2, D_3, D_4 - Coeficientes dados pelas equações (4.42) a (4.45).

SUBÍNDICES

x, y, ξ, η - Derivadas de primeira ordem.

P, E, W, \dots, SSW - Pontos onde as variáveis são avaliadas.

e, w, n, s - Pontos onde as variáveis são avaliadas.

I, S - Fronteiras inferior e superior, respectivamente, do plano transformado.

SUPERÍNDICES

$n, n+1, n+\theta$ - Níveis de tempo $t, t+\Delta t$ e $t+\theta\Delta t$, respectivamente.

$\hat{}$ - Indica quantidades transformadas.

$*$ - Refere-se à quantidades adimensionais, exceto para A_p^* dado pela equação (4.28).

RESUMO

Neste trabalho, é desenvolvido um modelo numérico para a solução de problemas de condução de calor transiente em geometrias irregulares duplamente conexas, considerando os efeitos de anisotropia. O método transforma a equação da condução do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas generalizadas, cujas linhas coordenadas são coincidentes com a fronteira do domínio irregular. Dessa maneira evitam-se as interpolações nas fronteiras para a aplicação das condições de contorno, possibilitando o desenvolvimento de um código computacional independente da geometria do problema físico.

As equações aproximadas são obtidas pelo método do volume de controle e são resolvidas no plano transformado retangular com células quadrangulares de lados unitários. Ênfase é dada na obtenção de um esquema numérico conservativo a nível de volumes elementares, tanto para as células interiores como para aquelas de fronteira.

O tratamento dado às três espécies de condições de contorno consideradas, confere generalidade ao modelo e facilita na mudança das mesmas.

As formulações explícita e implícita são usadas na solução das equações aproximadas. Obtém-se as distribuições de temperaturas dos regimes transiente e permanente, para malhas ortogonais e não-ortogonais com diferentes resoluções.

A solução do regime transiente para o caso isotrópico, é obtida em uma região anular com temperaturas prescritas constantes nas fronteiras. A anisotropia e a heterogeneidade

são incluídas, considerando as condições de contorno do problema anterior com a temperatura prescrita na fronteira externa, variável angularmente. Nesse caso a região anular é anisotrópica e homogênea em coordenadas cilíndricas. No sistema generalizado o problema é resolvido com a região anular anisotrópica e heterogênea, possibilitando o teste completo do método e comparando-se os resultados com as soluções analíticas. Obtêm-se as soluções para os casos isotrópico, ortotrópico e anisotrópico. Determinam-se as distribuições de temperaturas do regime permanente para a região anular isotrópica, com as condições de contorno de fluxos de calor prescritos e de convecção. Todos os resultados anteriores são comparados com as respectivas soluções analíticas e obtêm-se um desvio máximo de 12% para temperaturas da ordem de 10^{-2} da máxima e desvios inferiores a 1% para temperaturas da mesma ordem da máxima.

A solução do regime permanente para a região anular com fluxos de calor prescritos nas fronteiras, usando uma malha não-ortogonal com espaçamentos não-uniformes, e a distribuição de temperaturas para uma região retangular com furo circular, são também obtidas.

O código computacional desenvolvido, também está preparado para resolver problemas onde a condutividade térmica seja variável com a temperatura.

ABSTRACT

In this research work a numerical method is developed to analyse the heat conduction problem in arbitrary doubly-connected domains considering the effects of anisotropy. The method transforms the governing equations from the cartesian coordinate system to a general curvilinear coordinate system. The coordinate lines in the new system are boundary-fitted allowing the development of computer codes which are independent of the geometry in the physical domain.

The approximate equations are derived using the control volume approach and they are solved in a fixed rectangular domain. Emphasis is placed on the development of a numerical model which is conservative at control volume level.

The treatment given to the boundary conditions application render to the method easyness in changing them.

Implicit and explicit formulation are adopted and orthogonal and nonorthogonal grids are used.

The method is tested solving the heat conduction equation in an annular region for an heterogeneous anisotropic medium using nonorthogonal and orthogonal discretization. Problems considering boundary conditions of prescribed heat flux and convection are also solved. All numerical results agree very well with the analytical results.

It is also considered the problem when the discretization is nonuniform using orthogonal and nonorthogonal grids.

Important conclusions are drawn from these tests.

The computer codes is also able to handle problems where the thermal conductivity is a function of temperature.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - PRELIMINARES

O estudo da condução de calor em materiais que apresentam a condutividade térmica variável com a posição, devido às suas importantes aplicações nos vários setores da ciência e engenharia, tem recebido grande atenção dos pesquisadores. A anisotropia é característica de alguns materiais que apresentam estruturas fibrosas, como a madeira e o asbesto. Apresenta-se também nos cristais e rochas sedimentares, assim como artificialmente em placas laminadas, estruturas de fibras reforçadas, materiais eletrônicos, cabos, cilindros, tubos, materiais isolantes para veículos espaciais e vários outros. Em placas laminadas, a condutividade térmica apresenta diferentes valores ao longo e transversalmente às laminações. Para a madeira, a condutividade é diferente nas direções axial, radial e circunferencial. Os metais submetidos a forte resfriamento também apresentam anisotropia. A heterogeneidade é encontrada em materiais de estruturas porosas, como a lã e a cortiça.

A complexidade dos problemas de condução de calor que tratam com geometrias arbitrárias e materiais anisotrópicos e/ou heterogêneos, com condições de contorno não-homogêneas e não-uniformes, tem exigido cada vez mais o uso de métodos numéricos em suas soluções. Desses os mais usados são o método dos elementos no contorno, dos elementos finitos e das diferenças finitas.

O método dos elementos no contorno é uma ferramenta poderosa que, no momento, recebe muita atenção dos pesquisadores. A grande vantagem desse método é a necessidade de discretização apenas das fronteiras e não do domínio interno. Entretanto, para problemas não-lineares e anisotrópicos essa metodologia é mais complexa do que aquelas que trabalham com a discretização de todo o domínio.

O método dos elementos finitos possui grande aplicação no tratamento de geometrias arbitrárias, devido à flexibilidade na adaptação dos elementos ao domínio irregular. Entretanto, os métodos usados na aproximação das equações não respeitam o princípio de conservação a nível de elementos. Procura-se remover essa dificuldade com uma versão do método, conhecida por elementos finitos baseados em volume de controle, na qual as equações são obtidas por balanços de energia.

A técnica de diferenças finitas juntamente com o uso de coordenadas que se adaptam às fronteiras, apresenta grande versatilidade no tratamento de geometrias arbitrárias e tem sido muito aplicada a problemas de engenharia nos últimos anos. Além disso, as equações governantes do problema físico são obtidas pelo método do volume de controle, gerando-se esquemas numéricos conservativos a nível de volumes elementares. A aproximação por diferenças finitas apresenta também flexibilidade no tratamento de problemas não-lineares.

Quando se trabalha com diferenças finitas em domínios arbitrários, é importante a escolha do sistema de coordenadas onde serão solucionadas as equações governantes do problema. Escolhendo-se um sistema simples, por exemplo o cartesiano, são

necessárias interpolações na aplicação das condições de contorno, pois as linhas coordenadas podem não coincidir com as fronteiras da região em estudo. A solução poderá ser imprecisa, pois as condições de contorno são responsáveis pelo estabelecimento da mesma. Além disso, o código computacional fica dependente da geometria. É conveniente, portanto, o uso de um sistema de coordenadas cujas linhas adaptam-se à geometria, coincidindo com as fronteiras do domínio físico. Tal sistema é conhecido como sistema natural de coordenadas. Esse sistema pode ser ortogonal ou não-ortogonal. Neste trabalho opta-se por sistemas não-ortogonais em busca de generalidade.

O método para a geração do sistema natural de coordenadas considera a solução de um sistema de equações de Poisson em um plano retangular fixo, usando condições de contorno de Dirichlet. As linhas coordenadas podem ser concentradas em regiões de interesse no domínio, através de funções similares a termos de geração de calor na equação da difusão.

A solução das equações governantes do problema físico, constitui uma etapa independente da geração de coordenadas. Tais equações são transformadas para o sistema natural de coordenadas e também solucionadas no plano retangular fixo. As equações transformadas tornam-se mais complexas, mas as condições de contorno ficam especificadas sobre linhas retas.

Nesta dissertação analisam-se problemas de condução de calor transientes em geometrias arbitrarias, bidimensionais e duplamente conexas usando diferenças finitas juntamente com sistemas de coordenadas generalizadas. O modelo considera o tensor condutividade térmica variando não só com a direção, mas

também ponto-a-ponto no espaço. A equação da condução, inicialmente no sistema de coordenadas cartesianas, é transformada para o sistema generalizado e aproximada para os volumes finitos (obtenção das equações algébricas), pelo método do volume de controle. Esse método obtém as equações aproximadas expressando o princípio de conservação para a energia a nível de volumes elementares, permitindo uma análise física do problema e originando um esquema numérico conservativo. A maioria dos trabalhos encontrados na bibliografia não usam essa metodologia.

Incluem-se no modelo três tipos de condições de contorno que são de interesse em problemas da engenharia. Tais condições, expressas em termos de fluxos de calor, são englobadas ao termo fonte da equação da condução, através de balanços de conservação de energia nas fronteiras. Ao contrário do que acontece com a maioria dos trabalhos já realizados, esse procedimento mantém constantes os coeficientes das equações aproximadas com a mudança das condições de contorno. Com isso, obtém-se um esquema numérico de grande versatilidade e simplicidade na aplicação de diferentes condições de contorno.

Para testar o modelo escolhe-se uma região anular, resolvendo-se problemas transientes e permanentes, anisotrópicos e heterogêneos. Malhas ortogonais e não-ortogonais são usadas com as formulações explícita e implícita. A geometria usada nos testes apesar de simples, não compromete o desempenho do modelo, pois as malhas empregadas, sendo não-ortogonais, permitem que todos os termos da formulação, envolvendo tanto a ortogonalidade como a não-ortogonalidade, sejam testados. Escolhe-se essa geometria pelo fato de se dispor de soluções analíticas para

comparação com os resultados numéricos.

Obtêm-se boa concordância entre as soluções analítica e numérica, estando ainda o esquema numérico, apto para tratar problemas com geração de calor e condutividade térmica variando com a temperatura.

Para verificar a influência da forma da malha na precisão dos resultados, um detalhe importante em modelos não-ortogonais, obtêm-se a solução do regime permanente para uma região anular com fluxos de calor prescritos nas fronteiras, usando uma malha não-ortogonal com espaçamentos não-uniformes entre as linhas coordenadas. Para mostrar a generalidade do método, a solução do regime permanente para uma região retangular com furo circular e condições de contorno de fluxos prescritos, é obtida.

1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A bibliografia apresenta vários métodos de solução para problemas de condução de calor. Valiosas contribuições com soluções analíticas, são fornecidas por Chang et al. [1-3], Poon et al. [4] e Huang e Chang [5]. Em [1], obtêm-se as funções de Green para a solução de problemas de condução de calor anisotrópicos nos regimes permanente e transiente em regiões infinitas e semi-infinitas, considerando condições de contorno de Dirichlet, Neumann e do tipo mista. Em [2,3], determinam-se as funções de Green para problemas transientes e permanentes em regiões anisotrópicas e homogêneas no sistema de coordenadas cilíndricas. Consideram-se condições de contorno de três espê-

cies para um cilindro, uma região anular de comprimentos finitos e infinitos e regiões infinitas delimitadas internamente por uma superfície cilíndrica. Mostra-se em [4] que problemas de condução de calor em regiões semi-infinitas e infinitas anisotrópicas e homogêneas em coordenadas cilíndricas e cartesianas, podem ser transformados para isotrópicos usando-se transformações de coordenadas. Esse mesmo procedimento é usado em [5] para cilindros elípticos e regiões em forma de setores circulares.

Dentre outras contribuições com soluções analíticas, Özisik e Shouman [6], obtêm soluções de problemas transientes e anisotrópicos para regiões cilíndricas tridimensionais, sujeitas a condições de contorno do terceiro tipo. O problema é resolvido aplicando-se a técnica de transformação integral.

Métodos numéricos tem sido muito usados em problemas de condução de calor. Chang et al. [7], apresentam um estudo sobre funções de Green associadas com a condução de calor isotrópica e anisotrópica e aplicam o método de equações integrais no cálculo das distribuições de temperatura e fluxo de calor em um domínio quadrangular, um cilindro e uma região anular excêntrica. Shaw [8], aplica o mesmo método para problemas de difusão em meios isotrópicos com fontes de energia e condições de contorno arbitrárias, incluindo não-linearidades. Nesse trabalho algumas comparações entre os métodos de equações integrais e diferenças finitas, são feitas.

Padovan [9], emprega o método de elementos finitos no tratamento de problemas de condução de calor permanentes, em materiais anisotrópicos e heterogêneos nos quais o tensor con-

ductividade térmica pode variar no espaço, assim como depender da temperatura. Nesse trabalho, Padovan desenvolve elementos para meios descritos por coordenadas cartesianas e cilíndricas e compara os resultados para um cilindro anisotrópico e uma região anular excêntrica, com as respectivas soluções exatas.

A idéia de gerar um sistema de coordenadas cujas linhas adaptam-se à geometria da região em estudo, foi inicialmente aplicada por Winslow [10] e Chu [11], para regiões bidimensionais e simplesmente conexas. Posteriormente, Thompson, Thames e Mastin [12,13] estenderam-na para regiões múltiplamente conexas contendo um número qualquer de corpos com geometrias arbitrárias. Esse método é descrito no capítulo três.

Usando diferenças finitas, McWhorter e Sadd [14] estudam a condução de calor permanente e anisotrópica em geometrias bidimensionais arbitrárias, empregando o sistema natural de coordenadas. Nesse trabalho aproxima-se a equação da condução no sistema curvilíneo generalizado, pela substituição direta das derivadas por suas expressões em diferenças finitas (diferenças centrais), solucionando-a no plano retangular transformado. Os resultados são comparados com aqueles obtidos por Chang et al. [7].

Algumas extensões do método de geração de coordenadas naturais são empregadas para meios compostos múltiplamente conexas. Projahan, Rieger e Beer [15], apresentam um trabalho sobre a condução de calor permanente e anisotrópica, em meios compostos de geometrias arbitrárias, empregando coordenadas generalizadas. O domínio físico é dividido em macro-elementos, que tornam-se retangulares no plano transformado. Nesse trabalho,

os autores verificam a influência da anisotropia, através de linhas isoterma e distribuição de fluxo de calor, em estruturas compostas. Uchikawa e Takeda [16], analisam a condução de calor transiente e isotrópica em regiões heterogêneas, multip^lamente conexas, de geometrias bidimensionais e arbitrárias. Os autores aplicam o método para uma simulação numérica da solidificação de aço em moldes de fundição.

Goldman e Kao [17], discutem a aplicação de transformações de coordenadas usando planos transformados retangulares e cilíndricos na solução de problemas de condução de calor permanente e isotrópica.

A solução da equação da condução transiente, isotrópica e bidimensional no sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas não-ortogonais, é obtida por Robertson [18]. A formulação em diferenças finitas por ele usada, permite a inclusão de condições de contorno não-lineares e de propriedades físicas variáveis com o espaço e com a temperatura.

A metodologia aplicada neste trabalho segue aquela usada por Maliska [19] na solução de problemas de escoamentos de fluidos.

1.3 - ESBOÇO DA DISSERTAÇÃO

Os capítulos seguintes desenvolvem-se como se segue.

CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA. Neste capítulo apresentam-se os princípios fundamentais da análise da condução de calor, necessários ao desenvolvimento desta dissertação. A equação da condução no sistema de coordenadas cartesianas com as condições

de contorno e os parâmetros adimensionais usados, são mostrados.

CAPÍTULO 3 - GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS. Dedicase este capítulo à descrição do método de geração do sistema natural de coordenadas. Mostram-se as funções usadas no controle do espaçamento entre as linhas coordenadas e exemplos de sistemas de coordenadas generalizadas ortogonais e não-ortogonais em uma geometria duplamente conexa.

CAPÍTULO 4 - TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE E OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS. Neste capítulo a equação da condução é transformada do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas generalizadas. Em seguida a equação diferencial é aproximada para os volumes finitos pelo método do volume de controle.

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS. Este capítulo mostra os resultados obtidos nos testes do modelo numérico. Inicialmente, os resultados para os regimes transiente e permanente para uma região anular isotrópica com temperaturas prescritas constantes nas fronteiras, são mostrados. Seguem os resultados para o regime permanente em uma região anular: a) anisotrópica e heterogênea com temperaturas prescritas nas fronteiras; b) isotrópica com condições de contorno de fluxos de calor prescritos e convecção. Todos os resultados anteriores são obtidos usando malhas ortogonais e não-ortogonais e são comparados com as soluções analíticas. A distribuição de temperaturas para uma região retangular com furo circular e condições de contorno de fluxos de calor prescritos, é obtida. Os resultados para uma região anular com fluxos de calor prescritos, usando uma malha não-ortogonal com

espaçamentos não-uniformes entre as linhas coordenadas, também são mostrados neste capítulo.

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES. Neste capítulo estão as principais conclusões obtidas durante o desenvolvimento deste trabalho.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - INTRODUÇÃO

Alguns fundamentos da análise de problemas de condução de calor, são introduzidos neste capítulo. Apresenta-se a equação da condução no sistema de coordenadas cartesianas em sua forma conservativa, para regimes transientes em domínios bi dimensionais, anisotrópicos e heterogêneos. Consideram-se a condutividade térmica não só dependente do espaço mas também da temperatura e uma taxa de geração de energia por unidade de tempo e volume como função do espaço e do tempo. Introduzem-se as condições de contorno e os parâmetros adimensionais usados.

2.2 - FUNDAMENTOS

O fluxo de calor nos meios contínuos isotrópicos obedece a lei de Fourier, dada por

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.1)$$

onde a condutividade térmica k independe da direção e o vetor fluxo de calor \mathbf{q} é normal à superfície isotérmica em uma posição espacial considerada.

Para os meios anisotrópicos, cada componente do vetor fluxo de calor em um ponto é função de uma combinação linear de todas as componentes do gradiente de temperatura nesse ponto.

Com isso, para o caso bidimensional, as componentes do vetor fluxo de calor nas direções 1 e 2 de um sistema de coordenadas ortogonais são

$$q_1 = -k_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} - k_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} \quad (2.2)$$

$$q_2 = -k_{21} \frac{\partial T}{\partial x_1} - k_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} \quad (2.3)$$

A direção do vetor fluxo de calor, nesse caso, não é necessariamente normal à superfície isotérmica passando através de um ponto considerado. Em um meio anisotrópico bidimensional o tensor, de segunda ordem, condutividade térmica κ envolve quatro componentes k_{ij} , mostradas nas equações (2.2) e (2.3). Essas componentes expressam os valores da condutividade térmica em cada direção, podendo variar com a temperatura e com o espaço.

Mostra-se do princípio de Onsager, da termodinâmica dos processos irreversíveis, Prigogine [20], que se os fluxos q_i e os gradientes de temperatura $\partial T/\partial x_i$ relacionam-se linearmente, como dado pelas equações (2.2) e (2.3), as componentes k_{ij} obedecem a uma relação de reciprocidade, ou seja

$$k_{ij} = k_{ji} \quad , \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.4)$$

Além disso, como se mostra na referência [20], de acordo com os princípios da irreversibilidade termodinâmica, as componentes k_{ii} são positivas e as componentes k_{ij} , para $i \neq j$, podem ser positivas ou negativas sendo suas magnitudes limitadas pela re-

lação

$$k_{ii} k_{jj} - k_{ij}^2 > 0, \text{ para } i \neq j \quad (2.5)$$

Maiores discussões sobre os fundamentos da teoria da condução de calor podem ser encontrados em Carslaw e Jaeger [21], Özisik [22] e em Arpaci [23].

2.3 - EQUAÇÃO GOVERNANTE

A equação diferencial da condução de calor para meios anisotrópicos e heterogêneos com geração de energia, é dada por

$$\rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [\kappa \cdot \nabla T(\mathbf{r}, t)] + u''''(\mathbf{r}, t) \quad (2.6)$$

A equação acima considera o tensor condutividade térmica como função do espaço e/ou dependente da temperatura. u'''' é a taxa de geração de energia por unidade de tempo e volume que pode ser função do espaço e/ou do tempo.

Para domínios bidimensionais no sistema cartesiano, a Equação (2.6) é escrita como

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + F^T \quad (2.7)$$

onde

$$q = \rho c_p T \quad F^T = u''''$$

$$R = k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$S = k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y}$$

2.4 - CONDIÇÕES INICIAL E DE CONTORNO

Com o objetivo de tratar os mais diversos problemas da engenharia, os três tipos de condições de contorno, aplicados ao domínio mostrado na Figura 2.1, são abordados.

i) Temperatura prescrita. Especifica-se a temperatura constante ou função do espaço e/ou do tempo, ao longo das fronteiras ∂D_i , para $t > 0$. No caso geral, tem-se,

$$T = f_i(x,y,t) \quad (2.9)$$

ii) Fluxo de calor prescrito. Especifica-se o fluxo de calor constante ou função da posição e/ou do tempo, ao longo das fronteiras ∂D_i para $t > 0$, como

$$\pm k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_j = \pm q''(x,y,t) \quad , \quad (i,j) = 1,2 \quad (2.10)$$

onde q'' é a densidade escalar de fluxo de calor (W/m^2) na fronteira e n_j é a cosseno diretor. Assume-se que o sinal positivo representa calor entrando e sinal negativo, calor saindo da fronteira.

iii) Convecção na fronteira. A transferência de calor por convecção na fronteira ∂D_i , para $t > 0$ é dada por,

$$\pm k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_j - h(T_{fi} - T_\infty) = 0 \quad , \quad (i,j) = 1,2 \quad (2.11)$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor, T_{fi} a temperatura na fronteira ∂D_i e T_∞ a temperatura ambiente.

Para obter a solução do regime transiente, a distri -

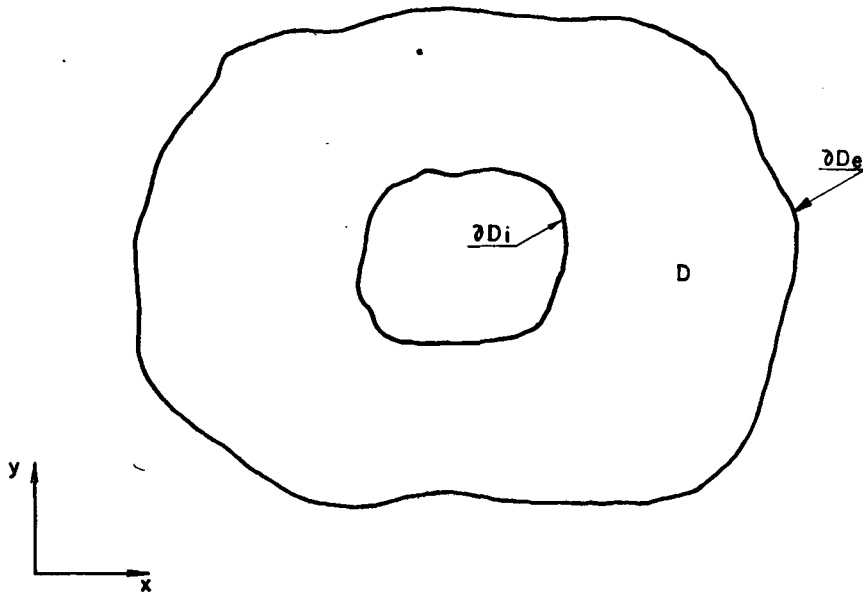


Figura 2.1 - Domínio físico.

buição de temperaturas no domínio considerado é conhecida no instante em que se estabelece a origem da coordenada tempo, como

$$T = f(x, y, 0) \quad (2.12)$$

Se o interesse é somente a solução do regime permanente, a técnica do transiente distorcido é usada, partindo-se de uma distribuição arbitrária de temperaturas. Nessa técnica usam-se diferentes avanços de tempo em todo o domínio, acelerando-se a convergência para o regime permanente. Caso o interesse seja a solução do regime transiente, a equação (2.12) representa a condição inicial do problema.

2.5 - PARÂMETROS ADIMENSIONAIS USADOS

A região anular, mostrada na Figura (2.2) é escolhi-

da como geometria de testes e os resultados obtidos estão expressos em termos de parâmetros adimensionais dados a seguir

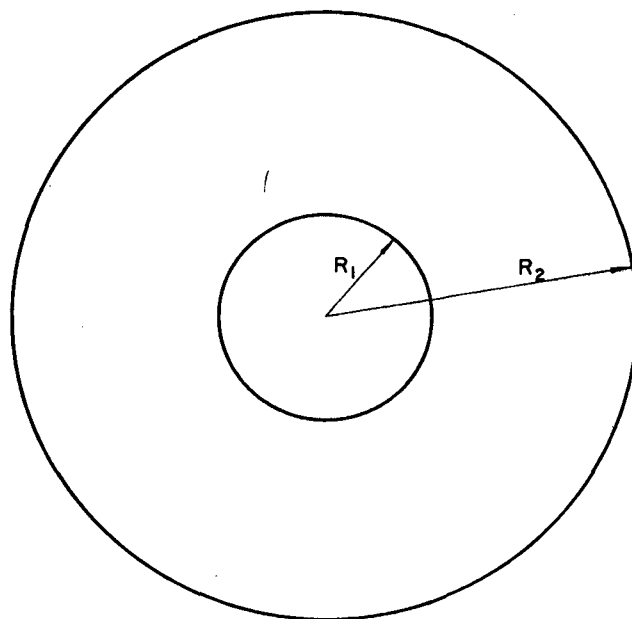


Figura 2.2 - Geometria considerada.

i) Coordenada R^* adimensional,

$$R^* = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \quad (2.13)$$

onde os subíndices 1 e 2 indicam as fronteiras interna e externa da região anular, respectivamente.

ii) Temperatura adimensional,

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (2.14)$$

iii) Número de Fourier ou tempo adimensional,

$$F_0 = \frac{at}{R_2^2} \quad (2.15)$$

onde $a = k/\rho c_p$ é a difusividade térmica.

iv) Número de Biot,

$$Bi = \frac{h R_2}{k_0} \quad (2.16)$$

onde $k_0 = \frac{1}{2}(k_{11} + k_{22})$. Observa-se que $(k_{11} + k_{22})$ é invariante com a transformação de coordenadas.

2.6 - RESUMO E CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentou-se a parte fundamental da teoria da condução de calor, necessária ao desenvolvimento deste trabalho. As referências [21], [22] e [23] foram recomendadas para maiores detalhes. A equação da condução de calor no sistema de coordenadas cartesianas, com as condições de contorno e os parâmetros adimensionais usados na apresentação dos resultados, foram introduzidos.

CAPÍTULO 3

GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

3.1 - INTRODUÇÃO

No método de volumes finitos para a solução de equações diferenciais, a discretização do domínio fica intimamente ligada ao sistema de coordenadas empregado, pois os volumes elementares são formados pelas linhas coordenadas.

O tratamento de domínios irregulares com o uso de sistemas ortogonais convencionais, como por exemplo o cartesiano, é prejudicado devido à necessidade de interpolações na aplicação das condições de contorno e do grande número de células nas fronteiras para uma melhor representação da geometria. É importante lembrar que são nas fronteiras onde se calculam os parâmetros de interesse. Além disso, o código computacional fica dependente da geometria do problema.

A obtenção de um sistema de coordenadas cujas linhas adaptam-se à geometria, coincidindo com todas as fronteiras do domínio físico (sistema natural), tornam desnecessárias as interpolações das condições de contorno.

Dentre os métodos de geração de sistemas não-ortogonais, apresenta-se neste capítulo, aquele devido a Winslow [10] e Chu [11], que trabalham com domínios bidimensionais simplesmente conexos e Thompson et al. [12,13], que estendem o método para regiões múltiplamente conexas. Nesse método obtêm-se as coordenadas naturais pela solução de um sistema de equações e-

lípticas, usando condições de contorno de Dirichlet em todas as fronteiras. O uso de funções adequadas permitem o controle do espaçamento entre as linhas coordenadas, concentrando-as em regiões de maior interesse do domínio. Obtidas as coordenadas, qualquer sistema de equações diferenciais parciais, associado às condições de contorno, é transformado e solucionado nesse novo sistema.

Todos os cálculos para geração do sistema de coordenadas bem como para a solução das equações diferenciais de interesse, são realizados em um domínio retangular fixo, independente da geometria e do espaçamento entre as linhas coordenadas.

O procedimento matemático para a geração do sistema de coordenadas naturais é descrito a seguir.

3.2 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

O método consiste em transformar um domínio D , bidimensional, de geometria arbitrária e definido no sistema cartesiano, mostrado na figura 3.1, em um domínio retangular D^* no sistema natural, mostrado na figura 3.2.

A transformação geral do plano físico $x-y$, para o transformado $\xi-\eta$, é dada por:

$$\xi = \xi(x,y) \quad (3.1)$$

$$\eta = \eta(x,y) \quad (3.2)$$

A matriz Jacobiana para essa transformação é dada por

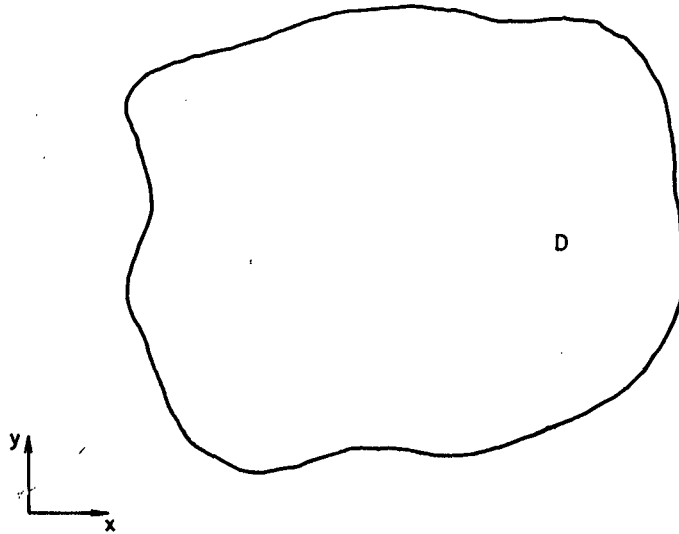


Figura 3.1 - Domínio D, no sistema cartesiano - plano físico.

$$[J] = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

os subíndices indicam diferenciação parcial. O determinante Jacobiano da transformação é dado por

$$J = \det [J] = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (3.4)$$

A transformação inversa de (3.1) e (3.2), caso exista, é dada por

$$x = x(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

com a matriz Jacobiana, dada por

$$[J^*] = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e o determinante Jacobiano, como

$$J^* = \det[J^*] = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (3.8)$$

A relação entre as matrizes Jacobianas (3.3) e (3.7) é

$$[J] = [J^*]^{-1} \quad (3.9)$$

Garante-se a existência dessa transformação, usando-se o teorema da função inversa. Se as funções (3.1) e (3.2) são

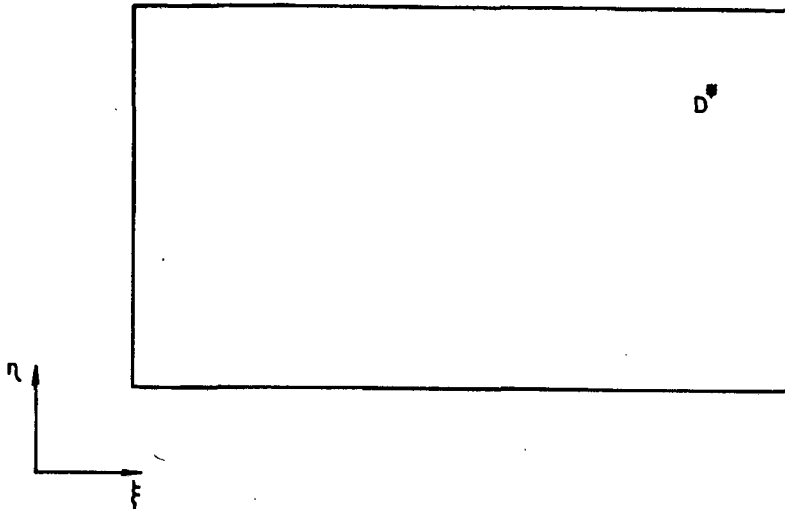


Figura 3.2 - Domínio retangular - plano transformado.

continuamente diferenciáveis em um ponto, como (x_0, y_0) e a matriz Jacobiana (3.3) não é singular nesse ponto, então existe uma região N_0 sobre (x_0, y_0) , tal que as funções inversas (3.5) e (3.6) existam e a relação (3.9) seja válida para todos os pontos (x, y) em N_0 . Com isso, obtêm-se as seguintes relações, ([12], apêndice B),

$$\xi_x = y_\eta J \quad \xi_y = -x_\eta J \quad (3.10)$$

$$\eta_x = -y_{\xi} J \quad \eta_y = x_{\xi} J \quad (3.11)$$

Transformam-se as derivadas parciais, utilizando-se a regra da cadeia

$$f_x = f_{\xi} \xi_x + f_{\eta} \eta_x \quad (3.12)$$

$$f_y = f_{\xi} \xi_y + f_{\eta} \eta_y \quad (3.13)$$

onde f representa uma função diferenciável de x e y . Aplicando-se sucessivamente as equações (3.12) e (3.13), obtêm-se as derivadas de ordem superior.

3.3 - GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS NATURAIS

O objetivo agora é obter o novo sistema de coordenadas, ou seja, obter a transformação (3.1) e (3.2). Um método para gerar automaticamente as coordenadas desse sistema, é fazer com que as funções $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$ sejam as soluções de um sistema de equações elípticas, possuindo condições de contorno de Dirichlet para todas as fronteiras. Tal sistema é dado por

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (3.14)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (3.15)$$

onde $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ são as funções que controlam o espaçamento entre as linhas coordenadas, concentrando-as em regiões de interesse.

As condições de contorno associadas às equações (3.14)

e (3.15), são

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta_1 = \text{constante sobre } \sigma_1 \\
 \xi &= \xi_1(x,y) = \text{função prescrita sobre } \sigma_1 \\
 \eta &= \eta_2 = \text{constante sobre } \sigma_2 \\
 \xi &= \xi_2(x,y) = \text{função prescrita sobre } \sigma_2
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

onde σ_1 e σ_2 são respectivamente as fronteiras interna e externa de um domínio bidimensional arbitrário e duplamente conexo, mostrado na figura 3.3. As funções $\xi_1(x,y)$ e $\xi_2(x,y)$ especificam o contorno da região física, ou seja, a geometria do problema.

A solução das equações (3.14) e (3.15) com as condições de contorno dadas pelas equações (3.16), fornecem as funções $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$, que são as coordenadas não-ortogonais, usadas na solução das equações diferenciais do problema.

A escolha de equações elípticas deve-se ao fato de que um vasto campo de problemas regidos por esse tipo de equações, possuem soluções que podem ser tomadas como linhas coordenadas. Além disso, essas soluções são funções harmônicas que possuem derivadas contínuas de todas as ordens e obedecem a um princípio de máximo. Esse princípio estabelece que os valores máximos e mínimos de uma função, ocorrem nas fronteiras de uma região D. Não ocorrendo extremos no interior de D, as primeiras derivadas da função não se anulam simultaneamente e portanto, o Jacobiano não se anula devido à presença de um extremo. O princípio de máximo garante ainda, a unicidade das funções $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$.

A solução das equações (3.14) e (3.15), entretanto, não é trivial e geralmente recorre-se às técnicas numéricas. Surge então, o problema da discretização do domínio, pois o uso do sistema cartesiano requer interpolações das condições de contorno. Problema esse que se procura evitar. Com isso, intercambia-se as variáveis dependentes e independentes daquelas equações, solucionando-as em um plano retangular fixo. Nesse plano especificam-se as condições de contorno sobre linhas retas, evitando-se as interpolações e escolhendo-se as células da malha em forma quadrangular, com lados escolhidos por conveniência iguais à unidade.

As equações transformadas são dadas por

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (P x_{\xi} + Q x_{\eta}) = 0 \quad (3.17)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (P y_{\xi} + Q y_{\eta}) = 0 \quad (3.18)$$

com as condições de contorno de Dirichlet transformadas

$$\begin{aligned} x &= f_1(\xi, \eta_1) \text{ sobre } \sigma_1^* \\ y &= f_2(\xi, \eta_1) \text{ sobre } \sigma_1^* \\ x &= f_3(\xi, \eta_2) \text{ sobre } \sigma_2^* \\ y &= f_4(\xi, \eta_2) \text{ sobre } \sigma_2^* \end{aligned} \quad (3.19)$$

Os coeficientes de acoplamento entre as equações acima, são as componentes do tensor métrico g_{ij} , mostrado no apêndice e são dadas por

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (3.20)$$

$$\beta = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} \quad (3.21)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (3.22)$$

Essas componentes, conhecidas como as métricas da transformação de coordenadas, contêm as informações referentes à geometria do plano físico.

Para o domínio mostrado na figura 3.3, as linhas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e σ_4 no plano físico, são transformadas para $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ e σ_4^* respectivamente, no plano transformado, conforme a figura 3.4. σ_1 e σ_2 , são linhas constantes no domínio físico e permanecem assim no plano transformado. σ_3 e σ_4 estão sobre a mesma linha ξ no plano físico.

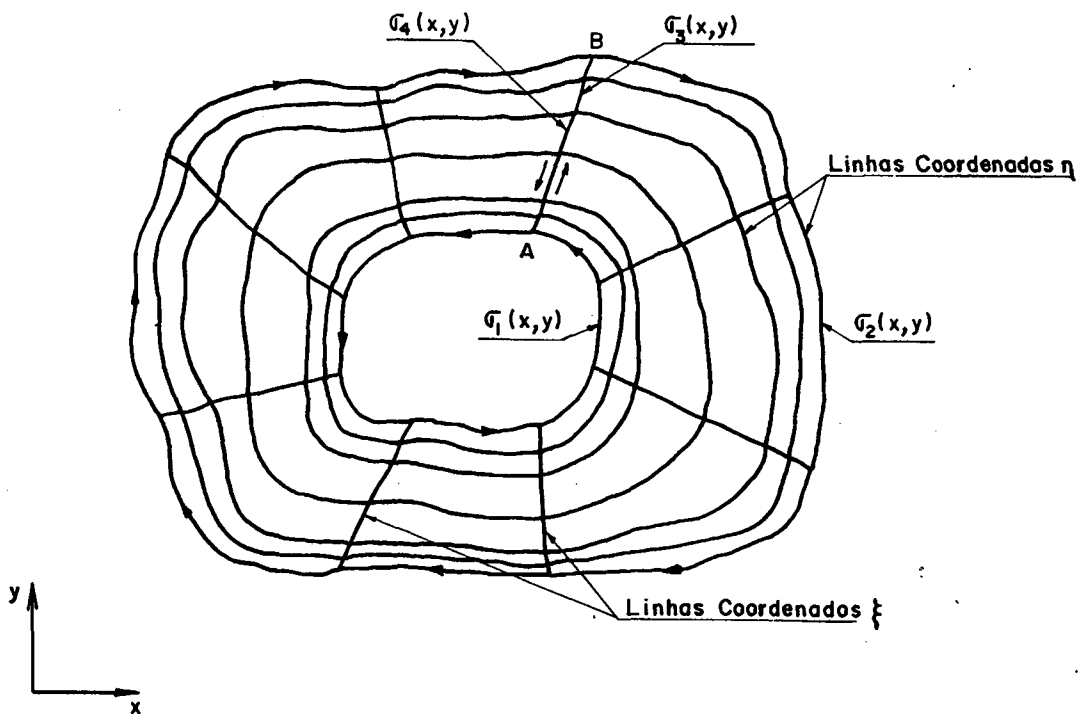


Figura 3.3 - Domínio físico - sistema natural de coordenadas.

Conhecida a forma dos contornos σ_1 e σ_2 e a distribui-

ção desejada de ξ nas fronteiras, determinam-se as funções f_1 , f_2 , f_3 e f_4 . É desnecessário especificar as funções para x e y ao longo de σ_3 e σ_4 , pois $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ são periódicas nessa região, ou seja como σ_3 e σ_4 são coincidentes, as condições de contorno no plano transformado são então, repetitivas.

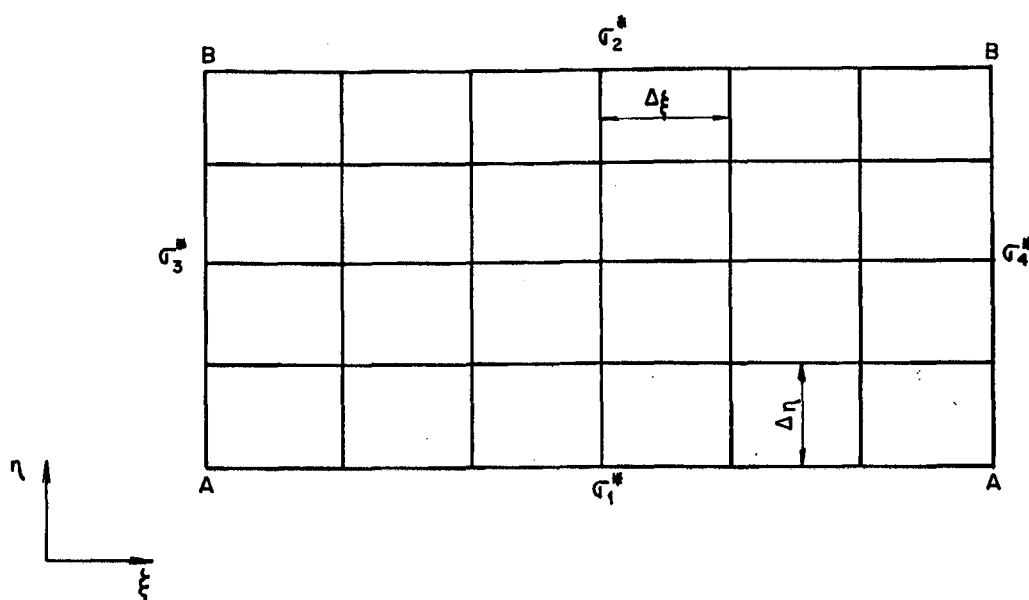


Figura 3.4 - Domínio transformado.

O sistema dado pelas equações (3.17) e (3.18), é mais complexo do que aquele dado pelas equações (3.14) e (3.15). Entretanto, no plano transformado especificam-se as condições de contorno sobre linhas retas, evitando-se interpolações e imprecisões. O sistema de coordenadas obtido pela solução das equações (3.17) e (3.18), possui uma linha η constante e coincidente com cada uma das fronteiras no plano físico. A atribuição dos valores das coordenadas ξ aos pontos (x, y) sobre as fronteiras, através das funções f_1 , f_2 , f_3 e f_4 é arbitrá-

ria, permitindo que o espaçamento entre essas coordenadas seja como aquele desejado.

Na referência [12], apêndice B, mostram-se os passos da transformação das equações (3.14) e (3.15), no plano físico, para as equações (3.17) e (3.18), no plano transformado.

Com as equações transformadas, os cálculos para a geração do sistema coordenado e solução das equações diferenciais do problema físico realizam-se em uma malha retangular fixa, independente da geometria da região física e do espaçamento escolhido entre as linhas coordenadas. As figuras 3.5 e 3.6, mostram exemplos de sistemas de coordenadas ortogonais e não-ortogonais, para domínios duplamente conexos.

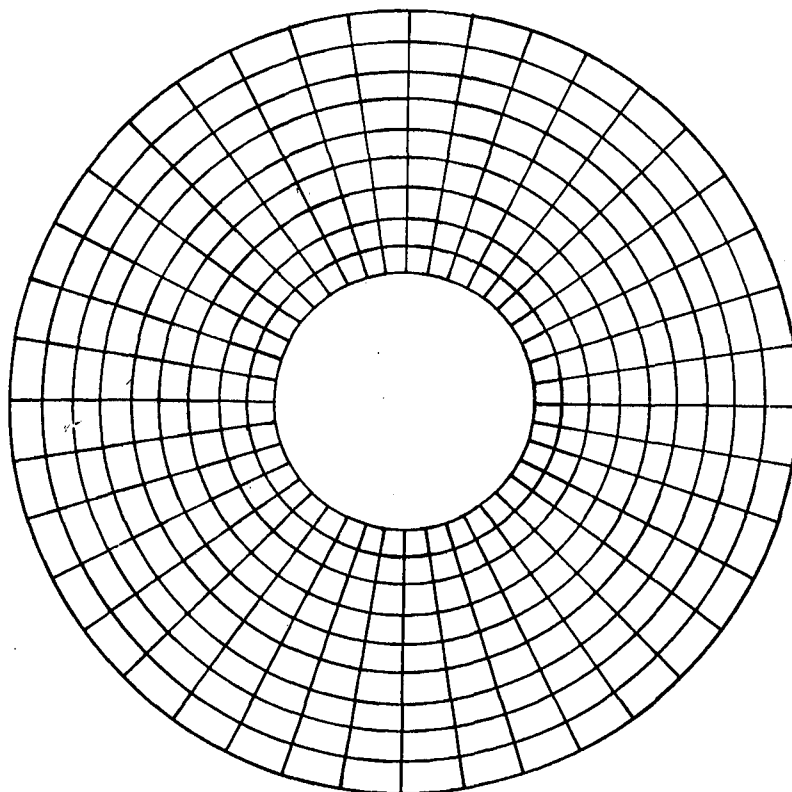


Figura 3.5 - Exemplo de um sistema de coordenadas ortogonais para uma região duplamente conexa.

O procedimento anterior estende-se para regiões sim-

plesmente conexas [13]. Para essas regiões, o sistema generalizado é gerado subdividindo-se a fronteira da região física em quatro segmentos, sendo cada um destes uma face da região retangular no plano transformado. Dois segmentos possuem linhas η constantes e dois, linhas ξ constantes. Outra maneira de geração de sistemas para regiões simplesmente conexas, é fazer σ_2 tender a zero. Nesse caso, surge um ponto de singularidade, que é a origem do sistema de coordenadas, onde para todas as linhas ξ, x e y possuem o mesmo valor. As funções $f_3(\xi, \eta_1)$ e $f_4(\xi, \eta_2)$ se reduzem a $f_3(\xi) = X_p = \text{cte}$ e $f_4(\xi) = Y_p = \text{cte}$, onde (X_p, Y_p) é a origem, não acrescentando dificuldades. Dessa maneira pode-se gerar o sistema de coordenadas com a origem onde desejado.

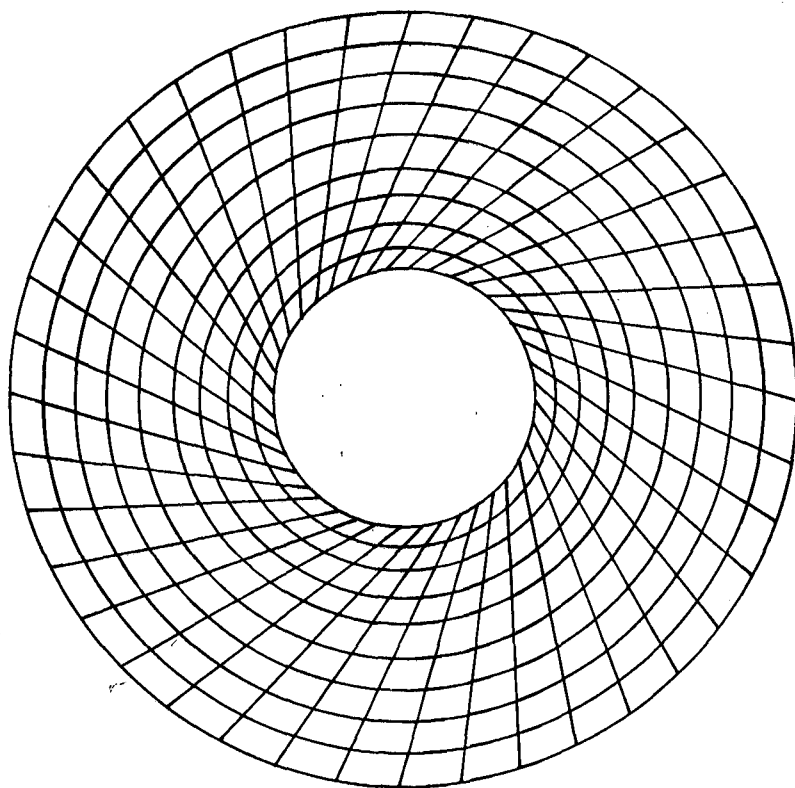


Figura 3.6 - Exemplo de um sistema de coordenadas não-ortogonais para uma região duplamente conexa.

3.4 - CONTROLE DO ESPAÇAMENTO ENTRE AS COORDENADAS

Nas regiões de maiores gradientes é importante concentrar as linhas coordenadas. Isso é possível usando-se as funções $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$, que representam termos fontes para as equações (3.14) e (3.15). Thompson et al. [13], utilizam P e Q dadas por

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^m a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) e^{-c_i |\xi - \xi_i|} - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) e^{-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 - (\eta - \eta_j)^2}} \quad (3.23)$$

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^m a_i \operatorname{sgn}(\eta - \eta_i) e^{-c_i |\eta - \eta_i|} - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\eta - \eta_j) e^{-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 - (\eta - \eta_j)^2}} \quad (3.24)$$

o primeiro termo da equação (3.23), atrai as linhas constantes ξ para aquelas $\xi = \xi_i$. O segundo, atrai as linhas $\xi =$ constantes para os pontos (ξ, η) . O mesmo se dá para as linhas η na equação (3.24). Define-se a função $\operatorname{sgn}(x)$ igual a 1, 0 ou -1, caso o valor de x for positivo, zero ou negativo, respectivamente.

3.5 - RESUMO E CONCLUSÕES

Dedicou-se este capítulo à descrição do método de geração automática do sistema de coordenadas naturais, cujas linhas adaptam-se à geometria do domínio. A transformação de

coordenadas do sistema cartesiano para o generalizado, considerando geometrias bidimensionais e as funções necessárias ao controle do espaçamento entre as linhas coordenadas, foram mostradas.

Todos os cálculos para gerar a malha são feitos em um plano com células quadrangulares e unitárias, independente da geometria, do número de fronteiras do plano físico e do espaçamento entre as linhas coordenadas. É necessário que se forneçam as coordenadas dos pontos de fronteira e as informações relativas à concentração das linhas coordenadas.

O método aplica-se a regiões multiplamente conexas, contendo cavidades de geometrias arbitrárias.

CAPÍTULO 4

TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE E OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS

4.1 - INTRODUÇÃO

A equação da condução é, neste capítulo, transformada do sistema cartesiano para o sistema natural de coordenadas. A equação transformada permanece em sua forma conservativa, evitando a geração de fontes e/ou sumidouros nas fronteiras dos volumes de controle elementares.

No sistema generalizado, a equação diferencial é aproximada para os volumes finitos pelo método do volume de controle, resultando em um esquema numérico conservativo a nível de volumes elementares. O vetor fluxo de calor no sistema generalizado é função de suas componentes cartesianas e dos vetores da base contravariante. As condições de contorno são englobadas ao termo fonte da equação aproximada, através de balanços de energia nos volumes das fronteiras. Apresentam-se as aproximações usadas para as três espécies de condições de contorno.

4.2 - TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE

A equação (2.7) sujeita à transformação de coordenadas definida pelas equações (3.1) e (3.2), mantendo sua forma conservativa, é dada por

$$\frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{F} \quad (4.1)$$

onde,

$$\hat{R} = \frac{1}{J} |\xi_x R + \xi_y S| \quad (4.2)$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J} |\eta_x R + \eta_y S| \quad (4.3)$$

$$\hat{F}^T = \frac{u'''}{J} \quad (4.4)$$

Onde R e S são dados pelas equações (2.8). A equação (4.1) pode ser obtida pela regra da cadeia seguida de uma manipulação algébrica.

Inserindo as equações (4.2) e (4.3) na equação (4.1), obtém-se

$$\frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_3 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \hat{F}^T \quad (4.5)$$

onde os coeficientes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 contêm as informações com respeito à anisotropia e à geometria no plano físico, sendo dados por

$$C_1 = J(k_{11} y_\eta^2 - 2k_{12} x_\eta y_\eta + k_{22} x_\eta^2) \quad (4.6)$$

$$C_2 = C_3 = -J[k_{11} y_\xi y_\eta - k_{12} (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) + k_{22} x_\xi x_\eta] \quad (4.7)$$

$$C_4 = J(k_{11} y_\xi^2 - 2k_{12} x_\xi y_\xi + k_{22} x_\xi^2) \quad (4.8)$$

Observa-se que os termos não-ortogonais estão envolvidos nos coeficientes C_2 e C_3 .

A forma conservativa em que se apresenta a equação (4.5), evita a geração de fontes e/ou sumidouros de energia nas interfaces dos volumes elementares. Isso significa que o fluxo de calor que sai de um volume de controle é o mesmo que entra em outro adjacente.

4.3 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS

O método do volume de controle é usado para obter a aproximação da equação (4.5) para os volumes finitos. Nesse método as equações são obtidas através de balanços de conservação da propriedade envolvida. Com isso, a aproximação da equação diferencial não é uma simples aproximação numérica das derivadas, mas considera as peculiaridades do problema físico.

O domínio é dividido em volumes de controle, sendo cada um centrado em um ponto da malha, como mostrado na figura 4.1, onde a temperatura é armazenada. Para os pontos interiores do domínio obtém-se a equação (4.5) aproximada, partindo-se de sua forma integral ou integrando a forma diferencial no volume elementar, o que equivale à realização de um balanço de energia na célula. Para os pontos de fronteira promovem-se balanços de conservação naqueles volumes, considerando a condição de contorno existente. Com isso, as condições de contorno são automaticamente incorporadas às equações para as células de fronteira. A equação aproximada expressa o princípio de conservação para a energia a nível de volumes finitos, enquanto a equação diferencial o faz a nível de volumes infinitesimais. O método, portanto, baseia-se na análise física do problema originando, com isso, esquemas numéricos conservativos. A metodologia permi

te que as funções de interpolação entre os pontos sejam arbit_uriamente escolhidas.

Como os cálculos são realizados no plano transformado, integra-se a equação (4.5) no tempo e no espaço sobre cada volume de controle desse plano, mostrados na figura 4.2, resultando

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left[\left(\frac{\rho^c T_P}{J} \right)^{t+\Delta t} - \left(\frac{\rho^c T_P}{J} \right)^t \right] d\eta d\xi = \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left[\left(C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_e - \left(C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w \right] d\eta dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left[\left(C_3 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_n - \left(C_3 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_s \right] d\xi dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{F}^T d\eta d\xi dt
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

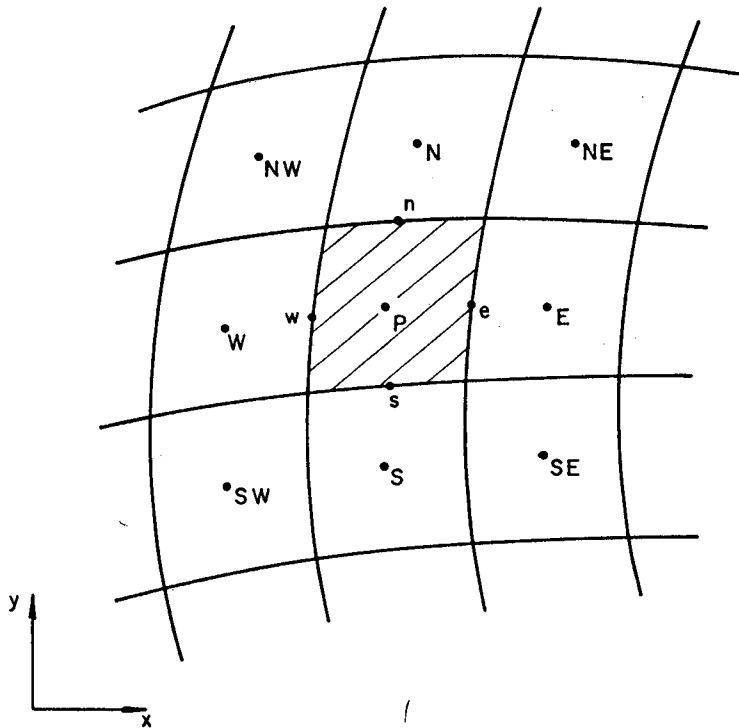


Figura 4.1 - Volume de controle no domínio físico.

onde, t é o nível de tempo e Δt é o avanço de tempo.

Denota-se por conveniência, o nível de tempo t por n , $t+\Delta t$ por $n+1$ e $t+\theta\Delta t$ por $n+\theta$. θ é um fator que varia entre zero e um, com extremos caracterizando a faixa entre as formulações explícita e totalmente implícita, respectivamente. Para que a formulação seja implícita, basta que θ seja diferente de zero.

Algumas aproximações são introduzidas para realizar as integrações da equação (4.9). Para a integração no espaço, consideram-se os termos difusivos constantes nas interfaces dos volumes elementares. Os gradientes de temperatura nas interfaces são aproximados usando-se diferenças centrais, como

$$C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_e = C_{1e} \frac{(T_E - T_P)}{\Delta \xi} \quad (4.10)$$

$$C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e = C_{2e} \frac{(T_{NE} + T_N - T_{SE} - T_S)}{4\Delta \eta} \quad (4.11)$$

$$C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_w = C_{1w} \frac{(T_P - T_W)}{\Delta \xi} \quad (4.12)$$

$$C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w = C_{2w} \frac{(T_N + T_{NW} - T_S - T_{SW})}{4\Delta \eta} \quad (4.13)$$

$$C_3 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_n = C_{3n} \frac{(T_E + T_{NE} - T_W - T_{NW})}{4\Delta \xi} \quad (4.14)$$

$$C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_n = C_{4n} \frac{(T_N - T_P)}{\Delta \eta} \quad (4.15)$$

$$C_3 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_s = C_{3s} \frac{(T_E + T_{SE} - T_W - T_{SW})}{4\Delta \xi} \quad (4.16)$$

$$C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_s = C_{4s} \frac{(T_P - T_S)}{\Delta \eta} \quad (4.17)$$

Os índices indicam as faces e os pontos centrais dos volumes elementares, mostrados na figura 4.2. Apesar de unitários, mantêm-se os comprimentos $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ nas equações (4.10) a (4.17) para facilitar a interpretação física de cada termo.

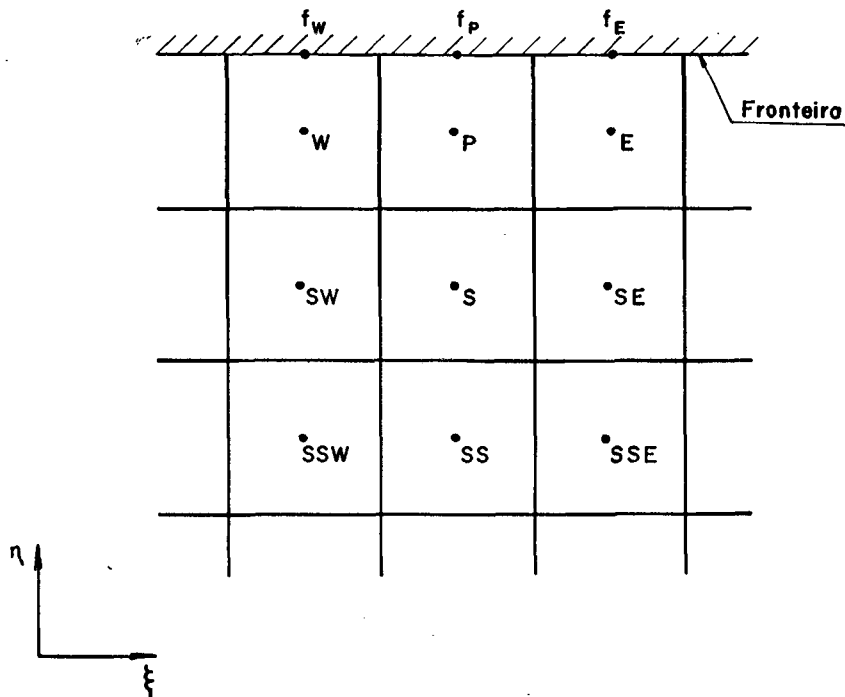


Figura 4.2 - Volume de controle no domínio transformado.

Para realizar as integrais no tempo, necessita-se conhecer o comportamento da temperatura no intervalo de n a $n+1$. Usa-se um valor adequado que represente T nesse intervalo, avaliando-a no instante de tempo $n+\theta$. Adota-se para esse valor, uma aproximação linear, dada por

$$T^{n+\theta} = \theta T^{n+1} + (1-\theta)T^n \quad (4.18)$$

Essa aproximação pode não ser adequada para representar a variação de temperatura com o tempo em problemas onde os transientes sejam muito rápidos. Nesse caso, diminui-se o avanço no

tempo para obter uma melhor avaliação.

O termo fonte \hat{F}^T , também é considerado constante no volume de controle elementar.

Realizando as integrações da equação (4.9), com as hipóteses acima, a equação aproximada para os volumes finitos interiores do domínio resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho c_p \Delta V_t}{J \Delta t}\right) T_P^{n+1} + A_P^* T_P^{n+\theta} = A_e T_E^{n+\theta} + A_w T_W^{n+\theta} + A_n T_N^{n+\theta} + A_s T_S^{n+\theta} + \\ + A_{ne} T_{NE}^{n+\theta} + A_{nw} T_{NW}^{n+\theta} + A_{se} T_{SE}^{n+\theta} + A_{sw} T_{SW}^{n+\theta} + \left(\frac{\rho c_p \Delta V_t}{J \Delta t}\right) T_P^n + \hat{F}^T \Delta V_t \end{aligned} \quad (4.19)$$

Onde ΔV_t é o volume de uma célula no plano transformado. Os coeficientes A_i são dados por

$$A_e = \frac{1}{4}(C_{2n} - C_{2s}) + C_{1e} \quad (4.20)$$

$$A_w = \frac{1}{4}(C_{2s} - C_{2n}) + C_{1w} \quad (4.21)$$

$$A_n = \frac{1}{4}(C_{2e} - C_{2w}) + C_{4n} \quad (4.22)$$

$$A_s = \frac{1}{4}(C_{2w} + C_{2e}) + C_{4s} \quad (4.23)$$

$$A_{ne} = \frac{1}{4}(C_{2e} + C_{2n}) \quad (4.24)$$

$$A_{nw} = -\frac{1}{4}(C_{2w} + C_{2n}) \quad (4.25)$$

$$A_{se} = -\frac{1}{4}(C_{2e} + C_{2s}) \quad (4.26)$$

$$A_{sw} = \frac{1}{4}(C_{2W} + C_{2S}) \quad (4.27)$$

$$A_p^* = A_e + A_w + A_n + A_s \quad (4.28)$$

A equação (4.19) envolve nove pontos devido ao uso do sistema de coordenadas não-ortogonais, reduzindo-se para cinco pontos no caso de sistemas ortogonais. Nesse caso os coeficientes diagonais são identicamente nulos. Observa-se que o termo A_p^* é influenciado apenas pelos coeficientes paralelos.

4.3.1 - Transiente real e transiente distorcido

Na solução do regime transiente, aqui denotada por transiente real, o avanço de tempo necessita ser o mesmo para todas as células da malha. Caso o interesse seja somente a solução do regime permanente, pode-se acelerar a convergência usando-se diferentes avanços de tempo no domínio. Nesse caso, a solução avança no tempo de uma maneira distinta de célula para célula da malha e o transiente é chamado de distorcido.

Para $\theta=0$ na equação (4.19), o campo de temperaturas é obtido explicitamente, ou seja, no instante de tempo $n+1$ as temperaturas são determinadas em função daquelas conhecidas do instante de tempo n . Nesse caso para garantir a positividade dos coeficientes, como mostrado por Patankar [24], é necessário respeitar a condição dada por

$$A_p^* \leq \frac{\rho c_p \Delta V_t}{J \Delta t} \quad (4.29)$$

ou

$$(\Delta t)^P \leq \frac{\rho c_P \Delta V_t}{JA_p^*} \equiv (\Delta t)_{\text{m\`ax}}^P \quad (4.30)$$

onde o super\u00edndice indica que Δt varia de c\u00e9lula para c\u00e9lula no dom\u00ednio. Assim, $(\Delta t)_{\text{m\`ax}}^P$ \u00e9 o avan\u00e7o m\u00e1ximo de tempo estabelecido pela formula\u00e7\u00e3o expl\u00edcita para uma determinada c\u00e9lula.

Na solu\u00e7\u00e3o do transiente real, a solu\u00e7\u00e3o avan\u00e7a com um intervalo de tempo de modo que todas as c\u00e9lulas satisfa\u00e7am o crit\u00e9rio dado pela equa\u00e7\u00e3o (4.30). Esse intervalo \u00e9 dado por

$$(\Delta t)^P = \min(\Delta t)_{\text{m\`ax}}^P \quad (4.31)$$

Genericamente, pode-se escrever

$$(\Delta t)^P = E(\Delta t)_{\text{m\`ax}}^P \quad (4.32)$$

Onde E \u00e9 um multiplicador de tempo. Escrevendo a equa\u00e7\u00e3o (4.19) na forma expl\u00edcita e inserindo o multiplicador E , resulta

$$\begin{aligned} \frac{A_p^*}{E} T_P^{n+1} &= A_p^* \frac{(1-E)}{E} T_P^n + A_e T_E^n + A_w T_W^n + A_n T_N^n + A_s T_S^n + \\ &+ A_{ne} T_{NE}^n + A_{nw} T_{NW}^n + A_{se} T_{SE}^n + A_{sw} T_{SW}^n + \hat{F}^T \Delta V_t \end{aligned} \quad (4.33)$$

Onde, nesse caso E n\u00e3o pode exceder \u00e0 unidade.

Com isso, para obter a solu\u00e7\u00e3o do transiente real, E deve ser vari\u00e1vel de c\u00e9lula para c\u00e9lula da malha. O transiente distorcido \u00e9 obtido fazendo E constante e menor do que a unidade no dom\u00ednio.

Para $\theta=1$ na equa\u00e7\u00e3o (4.19), o campo de temperaturas \u00e9 determinado implicitamente, como

$$\begin{aligned}
A_P^* \frac{(1+E)}{E} T_P^{n+1} = & \frac{A_P^*}{E} T_P^n + A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + \\
& + A_{ne} T_{NE}^{n+1} + A_{nw} T_{NW}^{n+1} + A_{se} T_{SE}^{n+1} + A_{sw} T_{SW}^{n+1} + \hat{F}^T \Delta V_t
\end{aligned} \quad (4.34)$$

Nesse caso, um sistema de equações lineares deve ser resolvido, não havendo restrições quanto ao valor de E ($E > 0$). Observa-se que nessa formulação o valor de Δt na solução do transiente real não se relaciona com a estabilidade da solução, como no caso explícito, mas sim com a precisão da mesma. Esse valor no qual a solução avança, é análogo à discretização no espaço em termos de precisão, ou seja, a solução obtida em um avanço de tempo pode não corresponder à real, analogamente àque-la obtida com uma malha grosseira. Com isso, o avanço de tempo, que é controlado pelo valor de E, deve ser tal que o termo $\frac{A_P^*}{E} T_P^n$ consiga manter a informação da iteração anterior. Dentre os métodos de solução de sistemas lineares, existem os iterativos ponto-por-ponto, linha-por-linha ou solução direta. O método ponto-por-ponto é usado neste trabalho. Não se procurou otimizar os tempos de computação usando outros métodos, embora isso deva ser feito caso se deseja usar a presente metodologia para o desenvolvimento de um código computacional geral para usuários.

4.3.2 - Equação aproximada para os volumes de fronteira

Para os volumes que possuem alguma face coincidente com as fronteiras promovem-se balanços de energia, onde os termos que representam as trocas de calor na fronteira são incluídos ao termo fonte. Com isso, a mesma estrutura dos pontos in-

ternos é mantida para todos os coeficientes dos volumes de fronteira.

As Figuras 4.3 e 4.4 mostram os volumes de controle nas fronteiras do plano físico. Observa-se que as geometrias tratadas neste trabalho são duplamente conexas e, portanto, as condições de contorno aplicam-se apenas às fronteiras interna e externa no plano físico, ou inferior e superior no plano transformado. Neste plano as condições de contorno para as fronteiras laterais do domínio retangular, assim como na solução das equações (3.14) e (3.15) na geração da malha, são repetitivas pois tais fronteiras são coincidentes no plano físico.

O balanço de conservação de energia no volume de controle é dado por

$$(E_{en} - E_{sd}) + u'''' \Delta V_{fi} = \rho c_p \Delta V_{fi} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.35)$$

Onde E_{en} é a energia conduzida para dentro do volume, E_{sd} é a energia conduzida para fora do volume e $\Delta V_{fi} = \frac{\Delta V}{J} \Delta t$ é o volume elementar no plano físico. Para os volumes da fronteira interna E_{en} e E_{sd} são dados por

$$E_{en} = Q_w + Q_f \quad (4.36)$$

$$E_{sd} = Q_e + Q_n \quad (4.37)$$

E para os volumes da fronteira externa

$$E_{en} = Q_w + Q_s \quad (4.38)$$

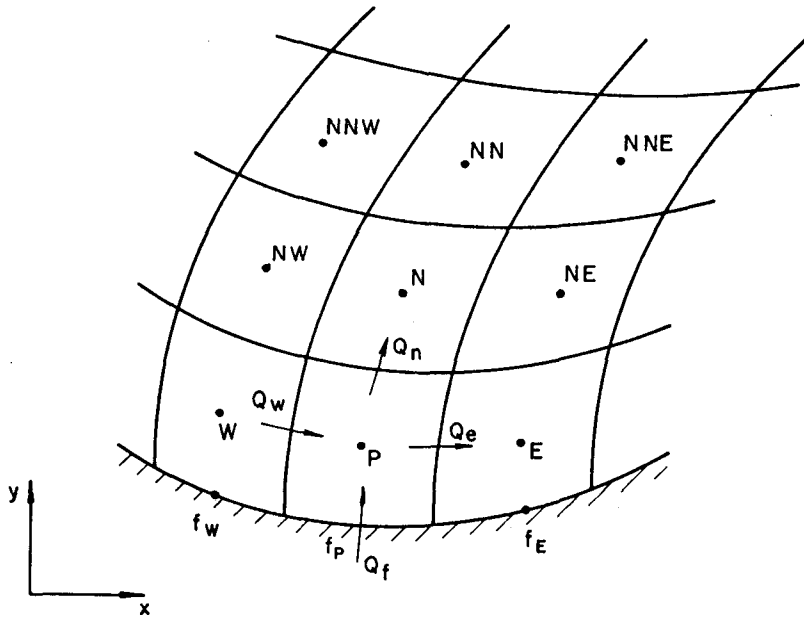


Figura 4.3 - Elemento da fronteira interna.

$$E_{sd} = Q_e + Q_f \quad (4.39)$$

O subíndice f indica a fronteira do domínio de cálculo. Q_f é a quantidade de calor trocada na face das células coincidentes com a fronteira.

Os fluxos de calor do elemento de contorno para os elementos internos, em função das componentes do vetor fluxo de calor no sistema cartesiano e da base de vetores contravariantes relativa ao sistema ξ - η , como mostrado no apêndice, são dados por:

$$Q_{(e,w)}^{\xi} = (D_1 y_{\eta} - D_2 x_{\eta}) T_{\xi} \Big|_{(e,w)} + (D_2 x_{\xi} - D_1 y_{\xi}) T_{\eta} \Big|_{(e,w)} \quad (4.40)$$

$$Q_{(n,s)}^{\eta} = (D_3 y_{\eta} - D_4 x_{\eta}) T_{\xi} \Big|_{(n,s)} + (D_4 x_{\xi} - D_3 y_{\xi}) T_{\eta} \Big|_{(n,s)} \quad (4.41)$$

onde,

$$D_1 = J(x_\eta \Delta \eta k_{21} - y_\eta \Delta \eta k_{11}) \quad (4.42)$$

$$D_2 = J(x_\eta \Delta \eta k_{22} - y_\eta \Delta \eta k_{12}) \quad (4.43)$$

$$D_3 = J(y_\xi \Delta \xi k_{11} - x_\xi \Delta \xi k_{21}) \quad (4.44)$$

$$D_4 = J(y_\xi \Delta \xi k_{12} - x_\xi \Delta \xi k_{22}) \quad (4.45)$$

Inserindo as equações (4.40) e (4.41) em (4.36) e (4.37) e estas na equação (4.35), obtêm-se a equação aproximada para os volumes da fronteira inferior, dada por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho c_p \Delta V}{J \Delta t} \right) T_P^{n+1} + A_P T_P^{n+\theta} = A_e T_E^{n+\theta} + A_w T_W^{n+\theta} + A_n T_N^{n+\theta} + \\ & + A_{ne} T_{NE}^{n+\theta} + A_{nw} T_{NW}^{n+\theta} + (\hat{F}^T)_I + \left(\frac{\rho c_p \Delta V}{J \Delta t} \right) T_P^n \end{aligned} \quad (4.46)$$

Onde os coeficientes A_i são dados por

$$A_e = \frac{1}{4}(C_{2n} - 3C_{2e}) + C_{1e} \quad (4.47)$$

$$A_w = \frac{1}{4}(3C_{2w} - C_{2n}) + C_{1w} \quad (4.48)$$

$$A_n = C_{2e} - C_{2w} + C_{4n} \quad (4.49)$$

$$A_{ne} = \frac{C_{2n}}{4} + C_{2e} \quad (4.50)$$

$$A_{nw} = -\frac{C_{2n}}{4} - C_{2w} \quad (4.51)$$

$$A_P = \frac{3}{4}(C_{2e} - C_{2w}) + C_{1e} + C_{1w} + C_{4n} \quad (4.52)$$

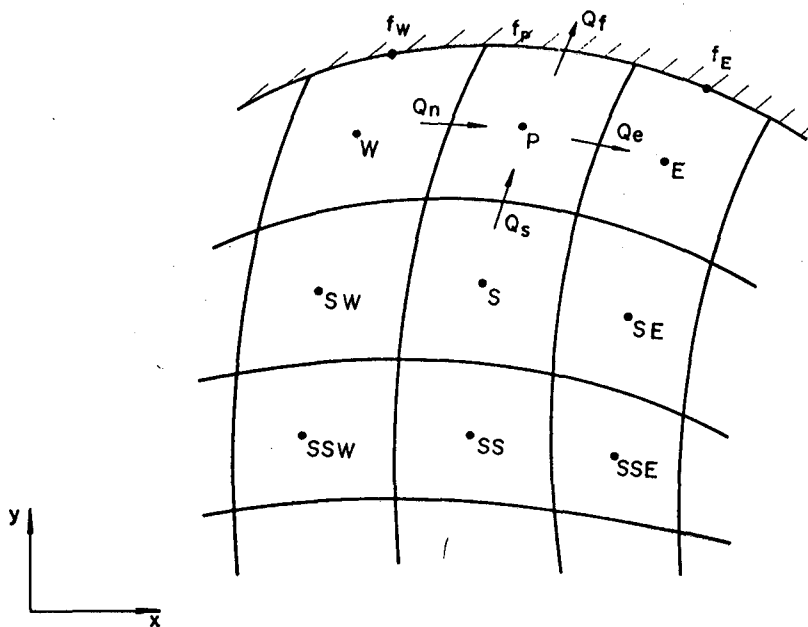


Figura 4.4 - Elemento da fronteira externa.

$(\hat{F}^T)_I$ é o termo fonte para as células da fronteira inferior, da do por

$$(\hat{F}^T)_I = Q_f + C_{2e}(CI)_e - C_{2w}(CI)_w + \frac{u'''}{J} \Delta V_t \quad (4.53)$$

Os coeficientes CI envolvem as temperaturas adjacentes T_{NN} , T_{NNE} e T_{NNW} provenientes da avaliação do gradiente T_η nas faces "e" e "w" das células da fronteira inferior, mostrada na figura 4.3, e são dados por

$$(CI)_e = -\frac{1}{4}(T_{NN} + T_{NNE}) \quad (4.54)$$

$$(CI)_w = -\frac{1}{4}(T_{NN} + T_{NNW}) \quad (4.55)$$

Procede-se da maneira anterior na obtenção da equa-

ção aproximada para os volumes da fronteira superior, resultan-
do

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho c_P \Delta V_t}{J \Delta t}\right) T_P^{n+1} + A_P T_P^{n+\theta} = A_e T_E^{n+\theta} + A_w T_W^{n+\theta} + A_s T_S^{n+\theta} + \\ + A_{se} T_{SE}^{n+\theta} + A_{sw} T_{SW}^{n+\theta} + (\hat{F}^T)_S + \left(\frac{\rho c_P \Delta V_t}{J \Delta t}\right) T_P^n \end{aligned} \quad (4.56)$$

Onde os coeficientes A_i e o termo fonte são dados por

$$A_e = \frac{1}{4}(3C_{2e} - C_{2s}) + C_{1e} \quad (4.57)$$

$$A_w = \frac{1}{4}(C_{2s} - 3C_{2w}) + C_{1w} \quad (4.58)$$

$$A_s = C_{2w} - C_{2e} + C_{4s} \quad (4.59)$$

$$A_{se} = -\frac{C_{2s}}{4} - C_{2e} \quad (4.60)$$

$$A_{sw} = \frac{C_{2s}}{4} + C_{2w} \quad (4.61)$$

$$A_P = \frac{3}{4}(C_{2w} - C_{2e}) + C_{1e} + C_{1w} + C_{4s} \quad (4.62)$$

$$(\hat{F}^T)_S = -Q_f + C_{2e}(CS)_e - C_{2w}(CS)_w + \frac{u''' \Delta V_t}{J} \quad (4.63)$$

Os coeficientes CS, similares àqueles dados pelas equações
(4.54) e (4.55), são

$$(CS)_e = \frac{1}{4}(T_{SS} + T_{SSE}) \quad (4.64)$$

$$(CS)_w = \frac{1}{4}(T_{SS} + T_{SSW}) \quad (4.65)$$

Os pontos SS, SSW e SSE são mostrados na figura 4.4.

Observa-se que os coeficientes A_i mudam segundo a fronteira em consideração, sendo A_{se} , A_{sw} e A_s nulos para a fronteira inferior e A_{ne} , A_{nw} e A_n nulos para a fronteira superior.

4.4 - CONSIDERAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são dadas em termos da quantidade de calor trocada na fronteira Q_f . No código computacional deve-se especificar Q_f que é calculada para três espécies de condições de contorno, mostradas a seguir.

i) Temperatura prescrita

Como se conhece a temperatura da fronteira, Q_f pode ser calculada pela equação (4.41), avaliando-se os gradientes de temperatura $T_\xi|_{fP}$ e $T_\eta|_{fP}$. $T_\xi|_{fP}$ é obtido por diferenças centrais, como

$$T_\xi|_{fP} = \frac{T_{fE} - T_{fW}}{2\Delta\xi} \quad (4.66)$$

Onde os pontos f_E e f_W são mostrados na figura 4.5. O gradiente $T_\eta|_{fP}$ é avaliado por uma aproximação de segunda ordem, considerando-se os pontos f_P , P e S mostrados na figura 4.5 para a fronteira superior. De acordo com a figura 4.6 que mostra os pontos da figura 4.5 em um gráfico Tx_η , a equação para o perfil de segunda ordem é dado por

$$T(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 \quad (4.67)$$

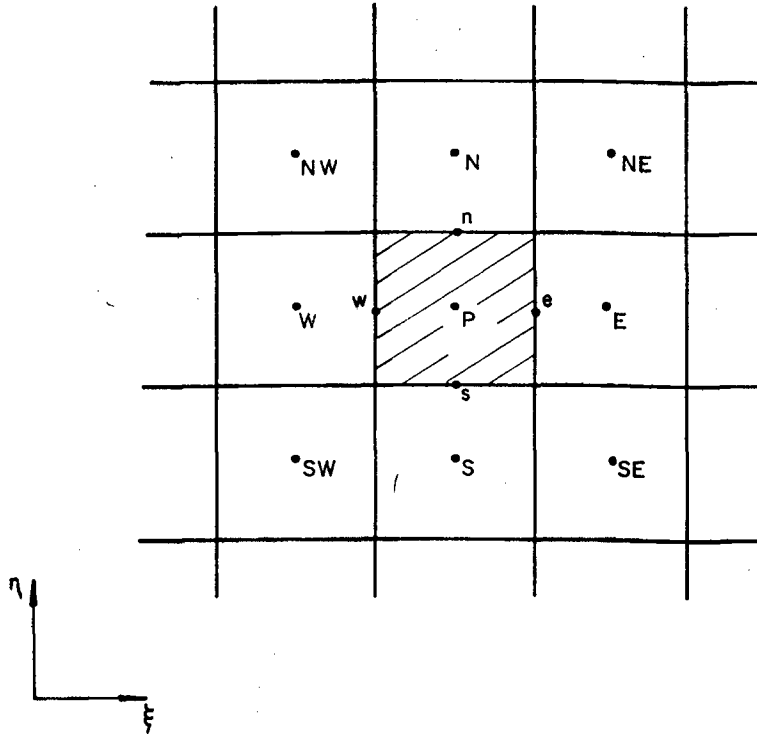


Figura 4.5 - Volume de controle da fronteira.

Obtendo-se as constantes da equação acima, o gradiente de temperatura com relação à coordenada η na fronteira superior é avaliado por

$$T_{\eta}|_{fP} = \frac{8}{3}T_{fP} - 3T_P + \frac{1}{3}T_S \quad (4.68)$$

Substituindo as equações (4.66) e (4.68) na equação (4.41), a quantidade de calor na fronteira superior para a condição de temperatura prescrita, é dada por

$$Q_f = C_{2f}(T_{fW} - T_{fE}) - C_{4f}\left(\frac{8}{3}T_{fP} - 3T_P + \frac{1}{3}T_S\right) \quad (4.69)$$

Por um procedimento similar ao anterior, determina-se Q_f para a fronteira inferior, como

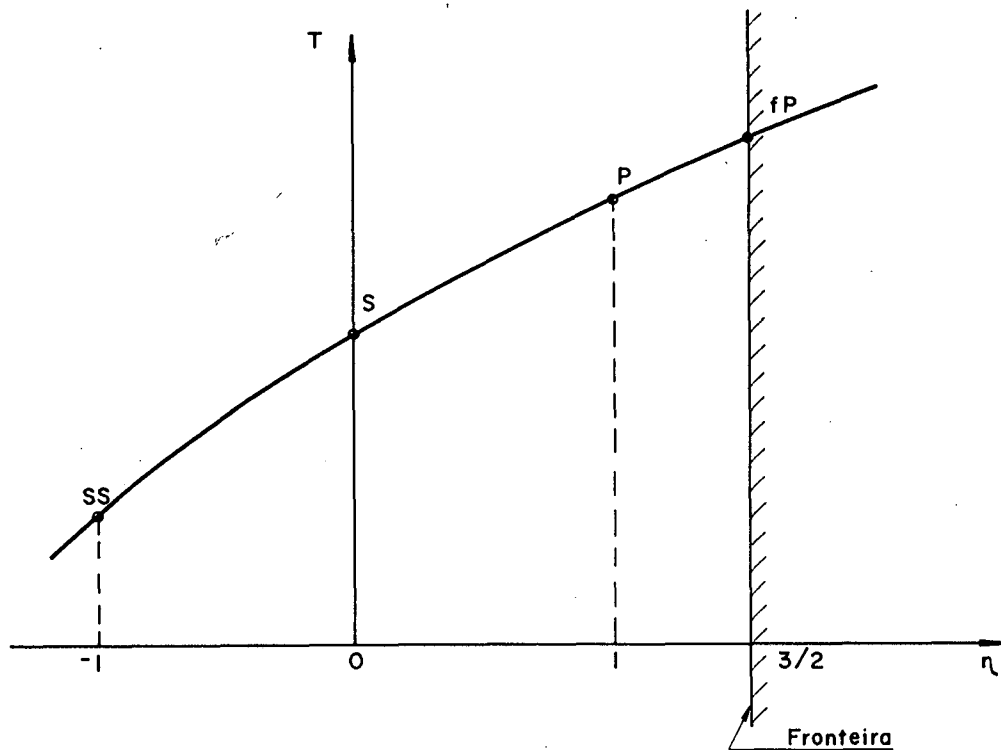


Figura 4.6 - Perfil assumido para o cálculo do gradiente de temperatura na fronteira.

$$Q_f = C_{2f}(T_{fW} - T_{fE}) + C_{4f}\left(\frac{8}{3} T_{fP} - 3T_P + \frac{1}{3} T_N\right) \quad (4.70)$$

ii) Fluxo de calor prescrito

Neste caso, obtêm-se Q_f apenas multiplicando-se o fluxo de calor conhecido na fronteira, pela respectiva área da face do volume elementar, resultando

$$Q_f = q'' |dL_{\xi}|_f \quad (4.71)$$

onde q'' é a densidade de fluxo de calor (W/m^2) na fronteira e $|dL_{\xi}|_f$ é o comprimento da face do volume elementar, mostrado

no apêndice.

iii) Convecção

Considerando-se conhecido o coeficiente de transferência de calor por convecção, h , a quantidade de calor trocada é dada por

$$Q_f = h |dL_\xi|_f (T_{fP} - T_\infty) \quad (4.72)$$

Onde T_{fP} é a temperatura da fronteira e T_∞ é a temperatura do ambiente. Para determinar Q_f avalia-se a temperatura na fronteira por uma aproximação de segunda ordem pelos pontos P, S e SS para a fronteira superior, conforme a figura 4.5, resultando

$$T_{fP} = \frac{15}{8} T_P - \frac{5}{4} T_S + \frac{3}{8} T_{SS} \quad (4.73)$$

Substituindo a equação (4.73) na equação (4.72), Q_f para a fronteira superior é dada por

$$Q_f = h \Delta \xi \sqrt{\gamma} \left(\frac{15}{8} T_P - \frac{5}{4} T_S + \frac{3}{8} T_{SS} - T_\infty \right) \quad (4.74)$$

e com um procedimento similar ao anterior, Q_f para a fronteira inferior é dada por

$$Q_f = h \Delta \xi \sqrt{\gamma} \left(\frac{15}{8} T_P - \frac{5}{4} T_N + \frac{3}{8} T_{NN} - T_\infty \right) \quad (4.75)$$

Outra maneira de obter Q_f , é expressando T_{fP} na equação (4.72), pela avaliação dos gradientes de temperatura $T_\xi|_{fP}$ e $T_\eta|_{fP}$ da equação (4.41). Avalia-se $T_\eta|_{fP}$, por uma aproximação

de segunda ordem através dos pontos f_p , P e S para a fronteira superior, como no ítem (i), resultando a mesma equação (4.68). Para avaliar $T_\xi|_{fP}$ usa-se uma expansão desse gradiente pela série de Taylor, dada por

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}|_{fP} = \frac{\partial T}{\partial \xi}|_P + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}|_P \right) \frac{\Delta \eta}{2} \quad (4.76)$$

onde,

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}|_P = \frac{T_E - T_W}{2\Delta \xi} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}|_P \right) = \frac{T_\xi|_{fP} - T_\xi|_S}{\Delta \eta} \quad (4.78)$$

resultando,

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}|_{fP} = \frac{3}{4} T_E - \frac{3}{4} T_W - \frac{1}{4} T_{SE} + \frac{1}{4} T_{SW} \quad (4.79)$$

Substituindo as equações (4.68) e (4.79) em (4.41), encontra-se Q_f para a fronteira superior, como

$$Q_f = h\Delta \xi \sqrt{\gamma} \left[\frac{C_{4f} \left(3T_P - \frac{T_S}{3} \right) - C_{2f} \left(\frac{3}{4} T_E - \frac{3}{4} T_W - \frac{T_{SE}}{4} + \frac{T_{SW}}{4} \right)}{(h\Delta \xi \sqrt{\gamma} + \frac{8}{3} C_{4f})} + \left(\frac{h\Delta \xi \sqrt{\gamma}}{h\Delta \xi \sqrt{\gamma} + \frac{8}{3} C_{4f}} - 1 \right) T_\infty \right] \quad (4.80)$$

Com um procedimento similar ao anterior, Q_f para a fronteira inferior, é dada por

$$Q_f = h\Delta \xi \sqrt{\gamma} \left[\frac{C_{4f} \left(3T_P - \frac{T_N}{3} \right) + C_{2f} \left(\frac{3}{4} T_E - \frac{3}{4} T_W - \frac{T_{NE}}{4} + \frac{T_{NW}}{4} \right)}{(h\Delta \xi \sqrt{\gamma} + \frac{8}{3} C_{4f})} + \left(\frac{h\Delta \xi \sqrt{\gamma}}{h\Delta \xi \sqrt{\gamma} + \frac{8}{3} C_{4f}} - 1 \right) T_\infty \right] \quad (4.81)$$

As condições de contorno englobadas ao termo fonte , tornam-se de simples adaptação e permitem que os coeficientes da equação aproximada sejam os mesmos para as diferentes condições. Com isso, obtém-se um esquema numérico generalizado, onde a inclusão de diferentes tipos de condições de contorno (não-lineares e/ou variando no espaço) não apresenta dificuldades adicionais para o programa computacional.

4.5 - RESUMO E CONCLUSÕES

Neste capítulo a equação da condução foi transformada do sistema cartesiano para o sistema generalizado. Nesse sistema a equação foi aproximada para os volumes finitos pelo método do volume de controle, respeitando o princípio de conservação de energia. Para os volumes interiores integrou-se a equação diferencial em sua forma conservativa e para os volumes da fronteira, realizaram-se balanços de energia considerando a condição de contorno aplicada. Os fluxos de calor no sistema generalizado, foram determinados em função das componentes cartesianas e dos vetores da base contravariante relativa ao sistema $\xi-\eta$. Aproximações parabólicas foram usadas na avaliação dos gradientes e das temperaturas nas fronteiras.

O esquema numérico resultante é conservativo a nível de volumes elementares e possui grande versatilidade na aplicação de condições de contorno.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1 - INTRODUÇÃO

Para testar o modelo numérico, uma região anular, mostrada na figura 2.2, é utilizada. São obtidas as soluções dos regimes transiente e permanente de problemas anisotrópicos e heterogêneos com as três espécies de condições de contorno. Cada problema avalia uma parte do modelo. A solução do regime transiente é obtida explícita e implicitamente. Na solução do regime permanente usa-se a técnica S.O.R. (Sucessive Over Relaxation) ou Método das Relaxações Sucessivas. Para todos os casos consideram-se malhas ortogonais e não-ortogonais com diferentes resoluções.

O problema transiente considera a região anular isotrópica com temperaturas constantes prescritas nas fronteiras. Obtêm-se as soluções transiente e permanente usando-se malhas 9×40 e 17×40 .

Na avaliação de um modelo numérico é importante que as soluções obtidas numericamente sejam comparadas com as soluções exatas, obtidas analiticamente. Sendo o modelo numérico bem sucedido nesta comparação, pode-se afirmar que, para aquele problema, a aproximação numérica representa com fidelidade a equação diferencial. Obviamente, as soluções a serem comparadas devem ser de um problema que represente a classe de problemas que a metodologia pretende resolver. Nesta dissertação é necessário,

portanto, obter a solução de um problema anisotrópico e heterogêneo, utilizando coordenadas generalizadas, e comparar a solução obtida com a respectiva analítica.

Chang et al. [3], resolveram o problema de condução de calor anisotrópica e homogênea em uma região anular definida no sistema cilíndrico. Esse problema definido no sistema de coordenadas cartesianas resulta anisotrópico e heterogêneo. Com mais uma transformação de coordenadas, desta vez do sistema cartesiano para o generalizado, incluem-se os termos não-ortogonais. Com isso, é possível comparar a solução numérica de um problema anisotrópico e heterogêneo, usando malhas generalizadas, com a respectiva solução analítica. Para esse problema, os resultados são obtidos para os casos isotrópico, ortotrópico e anisotrópico com malhas 17×40 e 19×60 ortogonais e não-ortogonais.

São também obtidas, as soluções do regime permanente para os problemas isotrópicos com fluxos de calor prescritos nas fronteiras e temperatura prescrita constante internamente e convecção externamente.

Comparam-se todos os resultados anteriores com as soluções analíticas.

A distribuição de temperaturas para uma região retangular com furo circular e condições de contorno de fluxos de calor prescritos constantes é também obtida, com o objetivo de apenas mostrar a generalidade do modelo.

Verifica-se a influência da não-uniformidade dos espaçamentos entre as linhas coordenadas na precisão das soluções para a região anular com fluxos prescritos nas fronteiras. Usan-

do-se uma malha 17 x 40.

5.2 - REGIMES TRANSIENTE E PERMANENTE COM TEMPERATURAS PRESCRITAS

Inicialmente comparam-se as soluções numérica e analítica que é devida a Carslaw e Jaeger [3], de um problema unidimensional no regime transiente para a região anular isotrópica, com razão de diâmetros de $D_2/D_1 = 3$. Nesse caso a equação (2.6) em coordenadas cilíndricas e as condições inicial e de contorno, são dadas por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad R_1 < r < R_2 \quad (5.1)$$

$$T(r, \theta, 0) = T_0 \quad (5.2)$$

$$T(R_1, \theta, t) = T_1 \quad (5.3)$$

$$T(R_2, \theta, t) = T_2 \quad (5.4)$$

Onde os subíndices 1 e 2 referem-se às superfícies interna e externa da região anular, respectivamente.

As soluções são obtidas para os regimes transiente e permanente usando as malhas 9 x 40, mostradas nas figuras 3.5 e 3.6, e 17 x 40, igualmente espaçadas, ortogonais e não-ortogonais. A malha 17 x 40, possui maior número de pontos na direção radial, por ser essa a direção do gradiente de temperaturas. Nesse problema todos os termos que envolvem as não-ortogonalidades são testados.

As figuras 5.1 e 5.2 mostram os resultados do regime permanente com malhas 9 x 40 e 17 x 40 ortogonais e não-ortogonais, respectivamente. A tabela 5.1 apresenta os valores numéricos para as malhas não-ortogonais, sendo que a primeira temperatura refere-se a solução analítica e a segunda, à numérica. Observa-se a boa concordância entre os resultados, com desvios inferiores a 0,5% para temperaturas próximas à máxima. Os desvios aumentam para temperaturas baixas. Um desvio máximo, de 12%, ocorre próximo à fronteira externa para temperaturas da ordem de 10^{-2} da máxima temperatura. Observa-se que para essa ordem de grandeza, o desvio apresentado já está ligado à precisão de cálculo. O tempo de computação necessário para a malha 9 x 40 ortogonal é de 1,17 min. e 1,33 min. para a 9 x 40 não-ortogonal. A malha 17 x 40 ortogonal necessita de 3,12 min. e a 17 x 40 não-ortogonal, 3,18 min.. Neste trabalho não se procura a otimização desses tempos, através de parâmetros como avanço de tempo e coeficientes de relaxação. Apenas é importante observar que os tempos de computação são praticamente os mesmos para os dois sistemas de coordenadas usados.

Nas figuras 5.3 a 5.7 são mostrados as distribuições de temperatura analítica e numérica do regime transiente para três posições radiais, próximo à fronteira interna, central e próximo à fronteira externa. As figuras 5.3 e 5.4 apresentam os resultados obtidos explicitamente para as malhas ortogonais 9 x 40 e 17 x 40 respectivamente. A concordância entre as soluções é muito boa sendo que no início do transiente ocorrem os maiores desvios com temperaturas da ordem de 10^{-2} da máxima temperatura. A figura 5.5 mostra os resultados obtidos pelo método explícito

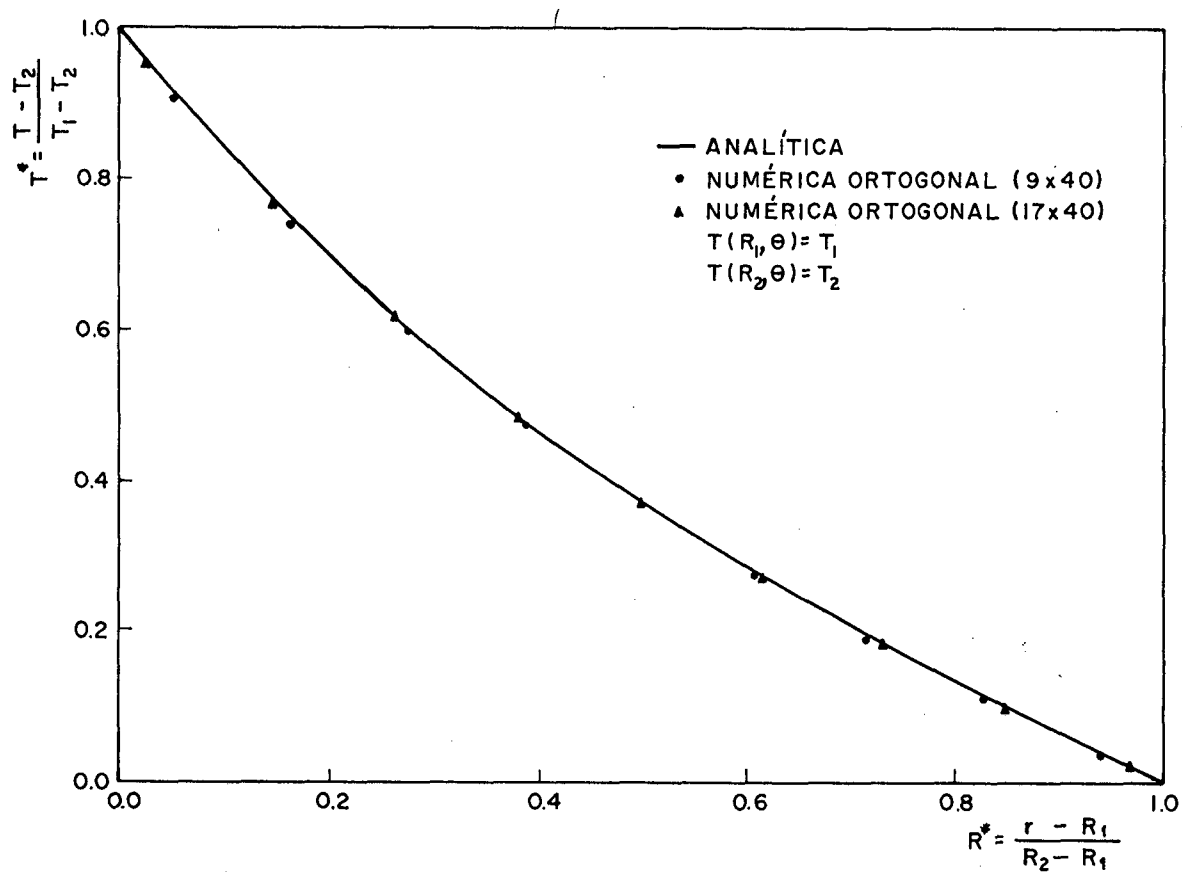


Figura 5.1 - Perfil de temperaturas T^* do regime permanente; soluções analítica e numérica com malhas ortogonais.

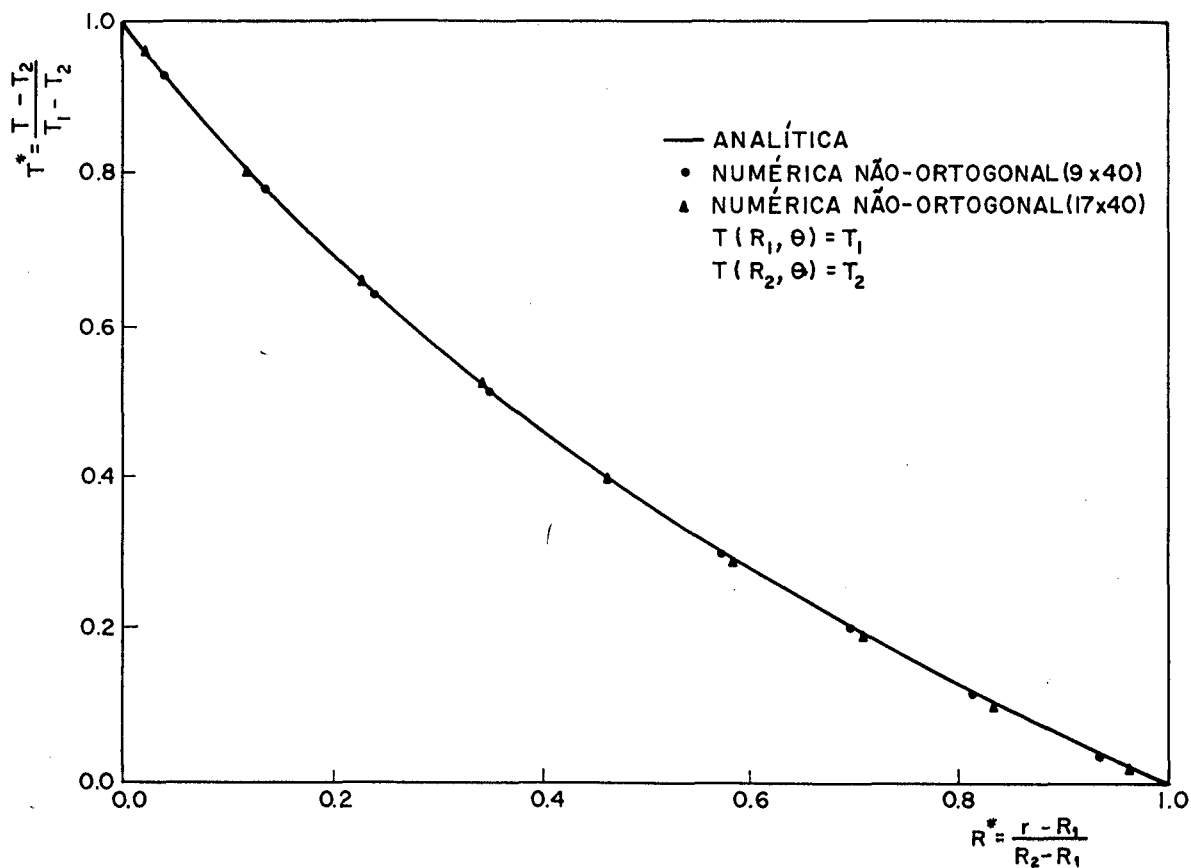


Figura 5.2 - Perfil de temperaturas T^* do regime permanente; soluções analítica e numérica com malhas não-ortogonais.

TABELA 5.1

Temperaturas T^* do regime permanente; soluções analítica e numérica com malhas não-ortogonais; temperaturas prescritas nas fronteiras.

| 9 x 40 | | 17 x 40 | |
|--------|--------|---------|--------|
| R^* | T^* | R^* | T^* |
| 0.040 | 0.9296 | 0.020 | 0.9643 |
| | 0.9275 | | 0.9616 |
| 0.134 | 0.7836 | 0.117 | 0.8090 |
| | 0.7810 | | 0.8061 |
| 0.238 | 0.6461 | 0.225 | 0.6617 |
| | 0.6433 | | 0.6588 |
| 0.347 | 0.5201 | 0.341 | 0.5272 |
| | 0.5173 | | 0.5243 |
| 0.461 | 0.4057 | 0.461 | 0.4057 |
| | 0.4029 | | 0.4028 |
| 0.577 | 0.3018 | 0.584 | 0.2960 |
| | 0.2990 | | 0.2931 |
| 0.695 | 0.2071 | 0.709 | 0.1965 |
| | 0.2043 | | 0.1936 |
| 0.814 | 0.1203 | 0.835 | 0.1058 |
| | 0.1176 | | 0.1029 |
| 0.935 | 0.0405 | 0.963 | 0.0226 |
| | 0.0377 | | 0.0198 |

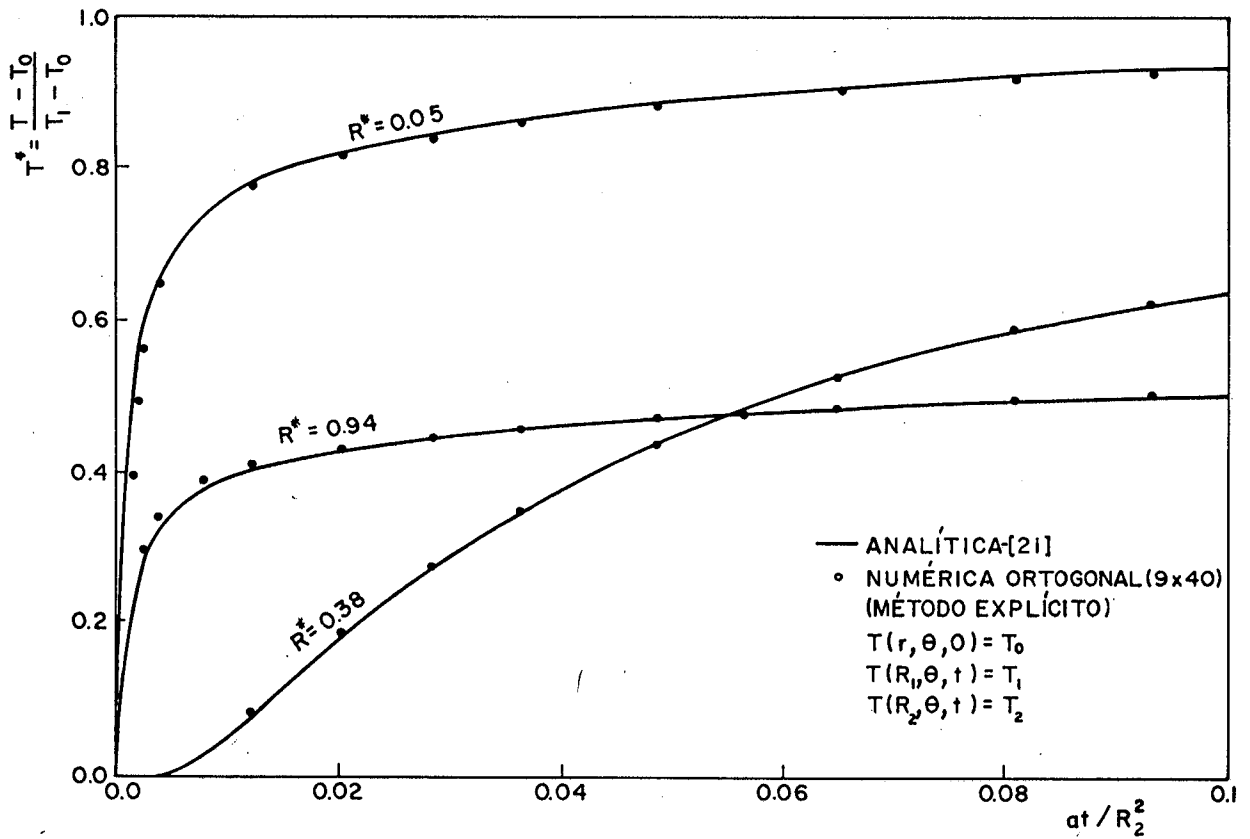


Figura 5.3 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica explícita com malha 9 x 40 ortogonal.

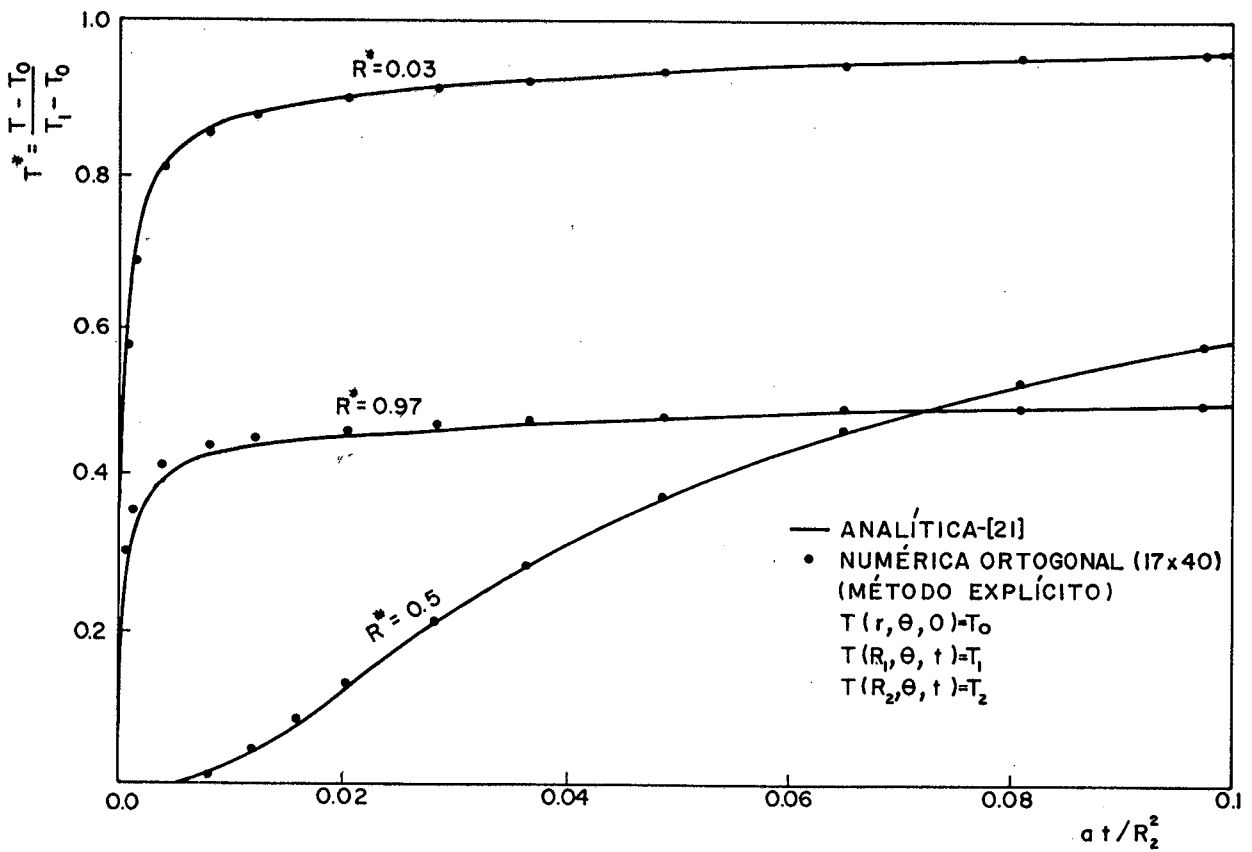


Figura 5.4 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica explícita com malha 17 x 40 ortogonal.

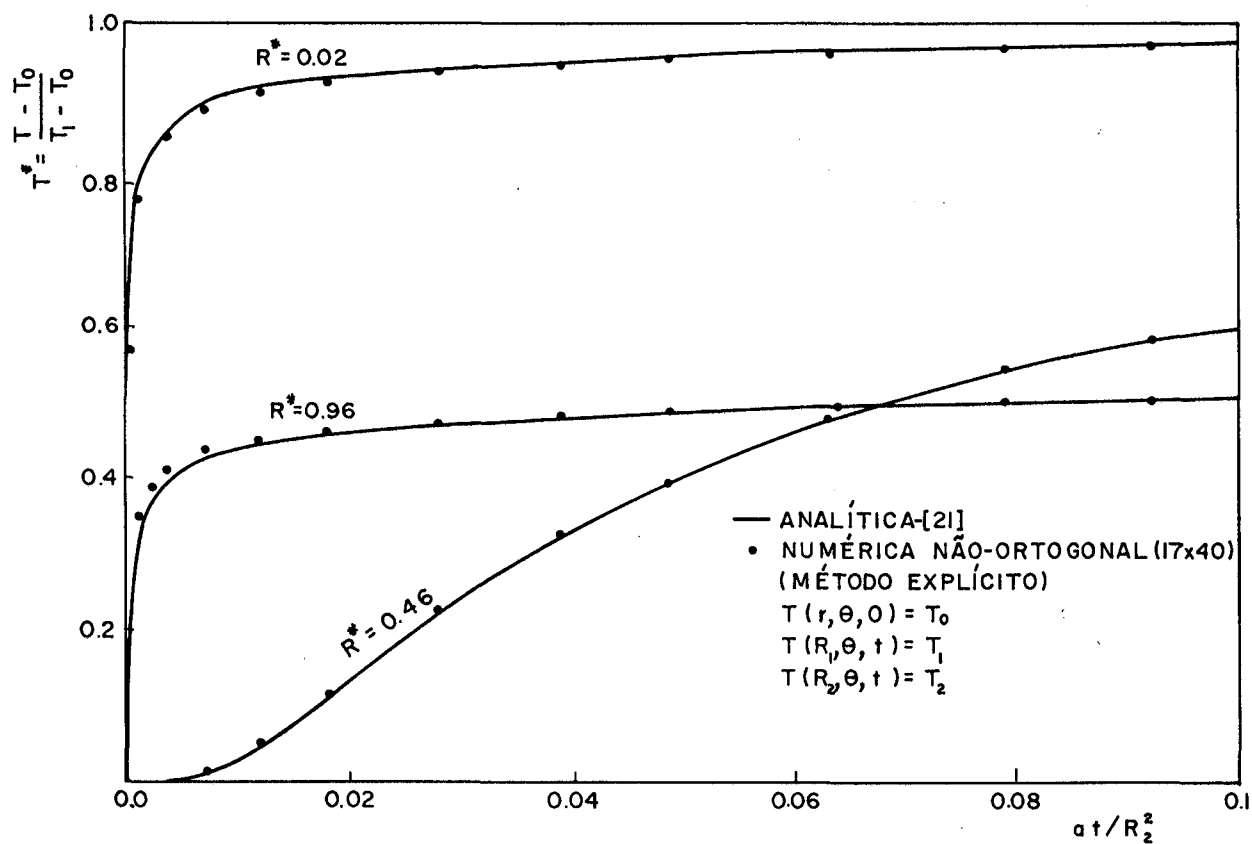


Figura 5.5 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica explícita com malha não-ortogonal.

TABELA 5.2

Temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica explícita com malhas não-ortogonais.

| $F_0 \times 10^2 R^*$ | 9 x 40 | | | 17 x 40 | | |
|-----------------------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|
| | 0.04 | 0.34 | 0.93 | 0.02 | 0.46 | 0.96 |
| 0.36 | 0.7242 | 0.0048 | 0.3107 | 0.8584 | 0.0 | 0.3911 |
| | 0.7301 | 0.0077 | 0.3244 | 0.8526 | 0.0 | 0.4085 |
| 1.58 | 0.8484 | 0.1559 | 0.4122 | 0.9223 | 0.0853 | 0.4506 |
| | 0.8464 | 0.1572 | 0.4205 | 0.9178 | 0.0865 | 0.4574 |
| 2.43 | 0.8728 | 0.2569 | 0.4330 | 0.9353 | 0.1801 | 0.4650 |
| | 0.8709 | 0.2579 | 0.4393 | 0.9310 | 0.1817 | 0.4675 |
| 4.01 | 0.9004 | 0.4015 | 0.4580 | 0.9494 | 0.3278 | 0.4764 |
| | 0.8989 | 0.4021 | 0.4622 | 0.9460 | 0.3293 | 0.4797 |
| 4.86 | 0.9112 | 0.4610 | 0.4682 | 0.9548 | 0.3897 | 0.4821 |
| | 0.9098 | 0.4613 | 0.4715 | 0.9518 | 0.3911 | 0.4847 |
| 5.59 | 0.9189 | 0.5039 | 0.4756 | 0.9588 | 0.4346 | 0.4863 |
| | 0.9176 | 0.5042 | 0.4782 | 0.9561 | 0.4359 | 0.4883 |
| 6.80 | 0.9294 | 0.5622 | 0.4857 | 0.9641 | 0.4956 | 0.4919 |
| | 0.9281 | 0.5622 | 0.4874 | 0.9617 | 0.4965 | 0.4932 |
| 7.78 | 0.9360 | 0.5991 | 0.4922 | 0.9675 | 0.5342 | 0.4955 |
| | 0.9348 | 0.5989 | 0.4933 | 0.9653 | 0.5349 | 0.4963 |
| 8.26 | 0.9389 | 0.6149 | 0.4949 | 0.9689 | 0.5507 | 0.4971 |
| | 0.9377 | 0.6146 | 0.4958 | 0.9668 | 0.5513 | 0.4977 |
| 9.96 | 0.9467 | 0.6589 | 0.5026 | 0.9729 | 0.5968 | 0.5014 |
| | 0.9456 | 0.6583 | 0.5028 | 0.9711 | 0.5970 | 0.5014 |

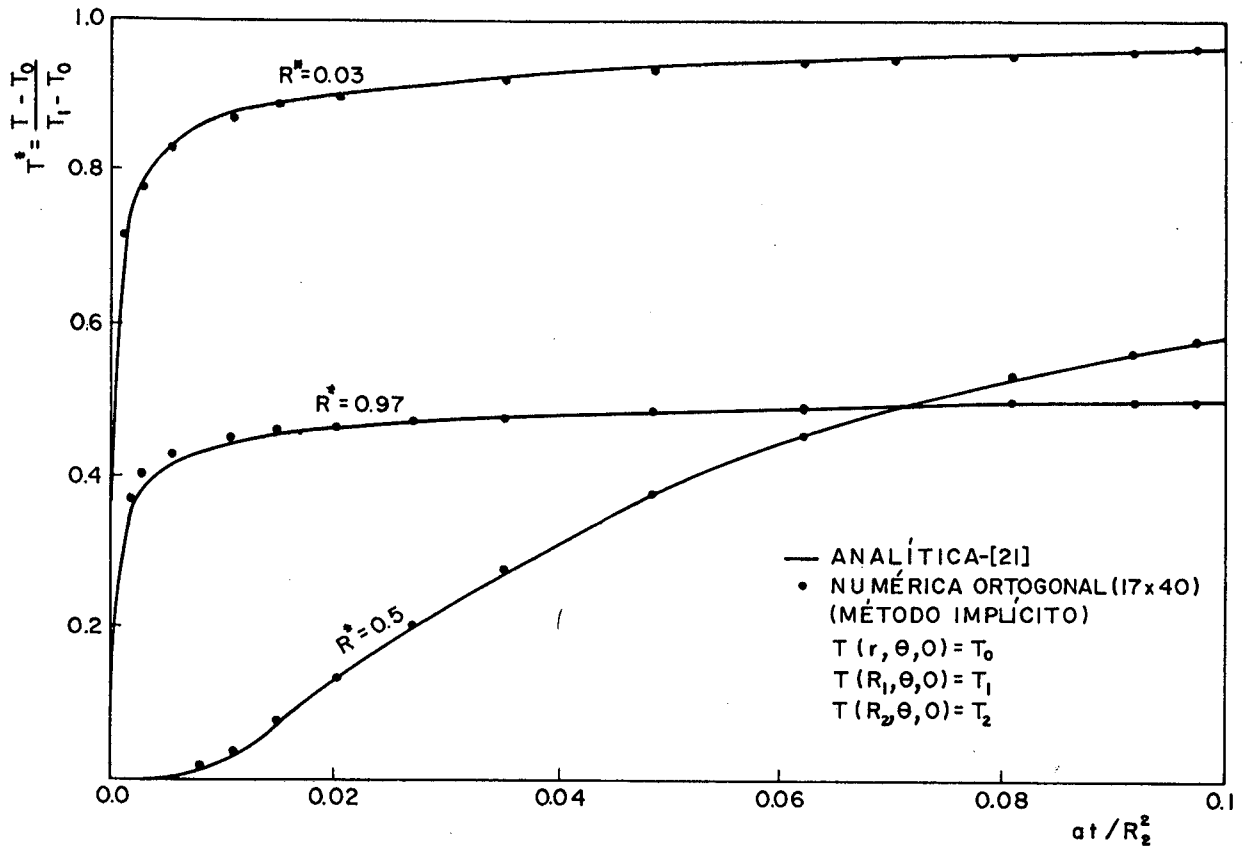


Figura 5.6 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica implícita com malha ortogonal.

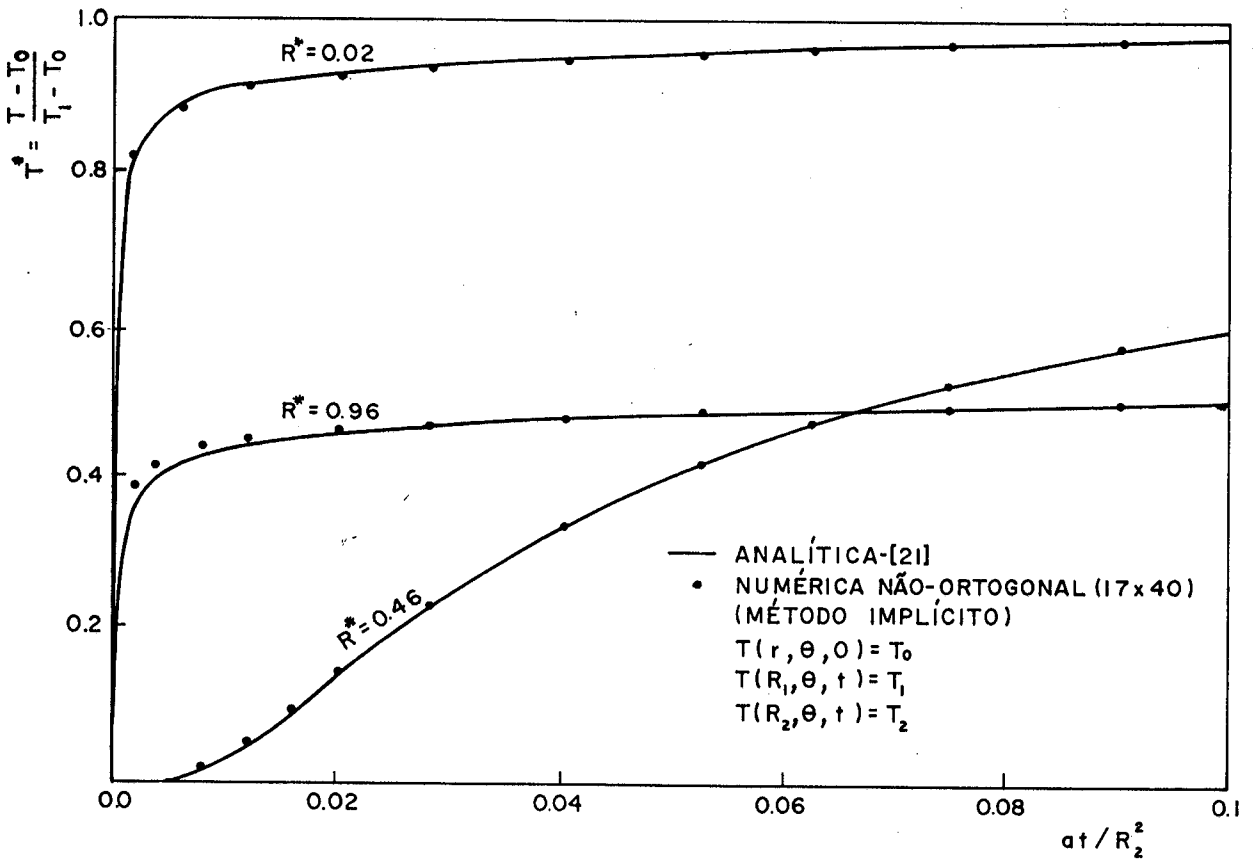


Figura 5.7 - Perfis de temperaturas T^* do regime transiente; soluções analítica [21] e numérica implícita com malha não-ortogonal.

para a malha 17 x 40 não-ortogonal e a tabela 5.2 apresenta os respectivos valores numéricos de temperaturas adimensionais para alguns intervalos de tempo no início do transiente, até 40 segs. As figuras 5.6 e 5.7 mostram as soluções implícitas para a malha 17 x 40 ortogonal e não-ortogonal, respectivamente. Os desvios são de mesma ordem daqueles para o caso explícito ortogonal, para os dois tamanhos de malhas. Observa-se que no caso explícito o avanço de tempo usado é de 0.5 seg. e no caso implícito é de 0.15 seg.

5.3 - REGIME PERMANENTE - CASO ANISOTRÓPICO E HETEROGÊNEO

Neste teste, é considerado um problema no regime permanente para a região anular anisotrópica e homogênea, com razão de diâmetros de $D_2 / D_1 = 10$ e temperaturas prescritas constante na face interna e variável angularmente na face externa. A formulação desse problema, bidimensional cuja solução analítica é devida a Chang e Tsou [3], é dada por

$$\frac{k_{rr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 2 \frac{k_{r\theta}}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} + \frac{k_{\theta\theta}}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.5)$$

$$T(R_1, \theta) = T_1 \quad (5.6)$$

$$T(R_2, \theta) = T_2 \text{ SEN} \theta \quad (5.7)$$

Para obter a solução numérica, como as equações (4.6) a (4.8) requerem as componentes do tensor condutividade térmica no sistema cartesiano, é necessário transformar esse tensor do sistema cilíndrico para o cartesiano. Para isso utiliza-se a lei da álgebra de tensores, dada por

$$k_{ij}^{(x,y)} = k_{mn}^{(r,\theta)} \ell_{im} \ell_{jn} \quad (5.8)$$

Onde os superíndices indicam os sistemas coordenados; ℓ_{ij} são os cossenos diretores dos eixos do sistema antigo com relação ao novo, neste caso do cilíndrico com relação ao cartesiano. Com isso obtêm-se

$$k_{11} = k_{rr} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) - k_{r\theta} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) + k_{\theta\theta} \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (5.9)$$

$$k_{12} = k_{21} = (k_{rr} - k_{\theta\theta}) \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) + k_{r\theta} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (5.10)$$

$$k_{22} = k_{rr} \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) + k_{r\theta} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) + k_{\theta\theta} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (5.11)$$

Das equações (5.9) a (5.11) observa-se que $k_{11} + k_{22} = k_{rr} + k_{\theta\theta}$ ou seja $(k_{rr} + k_{\theta\theta})$ é invariante com a transformação de coordenadas; as componentes do tensor condutividade no sistema cartesiano variam ponto-a-ponto em cada direção espacial, caracterizando portanto, um problema heterogêneo. Com isso o problema homogêneo em coordenadas cilíndricas passa a ser heterogêneo em coordenadas cartesianas, conforme discutido, e é portanto, um problema que testa completamente o método numérico para o problema proposto.

As soluções são obtidas para os casos isotrópico, ortotrópico e anisotrópico usando-se malhas ortogonais e não-ortogonais 17 x 40 e 19 x 60. As figuras 5.8 a 5.13 apresentam os resultados para os três casos, segundo três posições angulares com a malha 19 x 60 ortogonal e não-ortogonal. A concordância com a solução analítica é muito boa, apresentando desvios inferiores a 0,8% para temperaturas da mesma ordem da máxima. Para temperaturas da ordem de 10^{-3} da máxima, ocorrem os máximos desvios, de

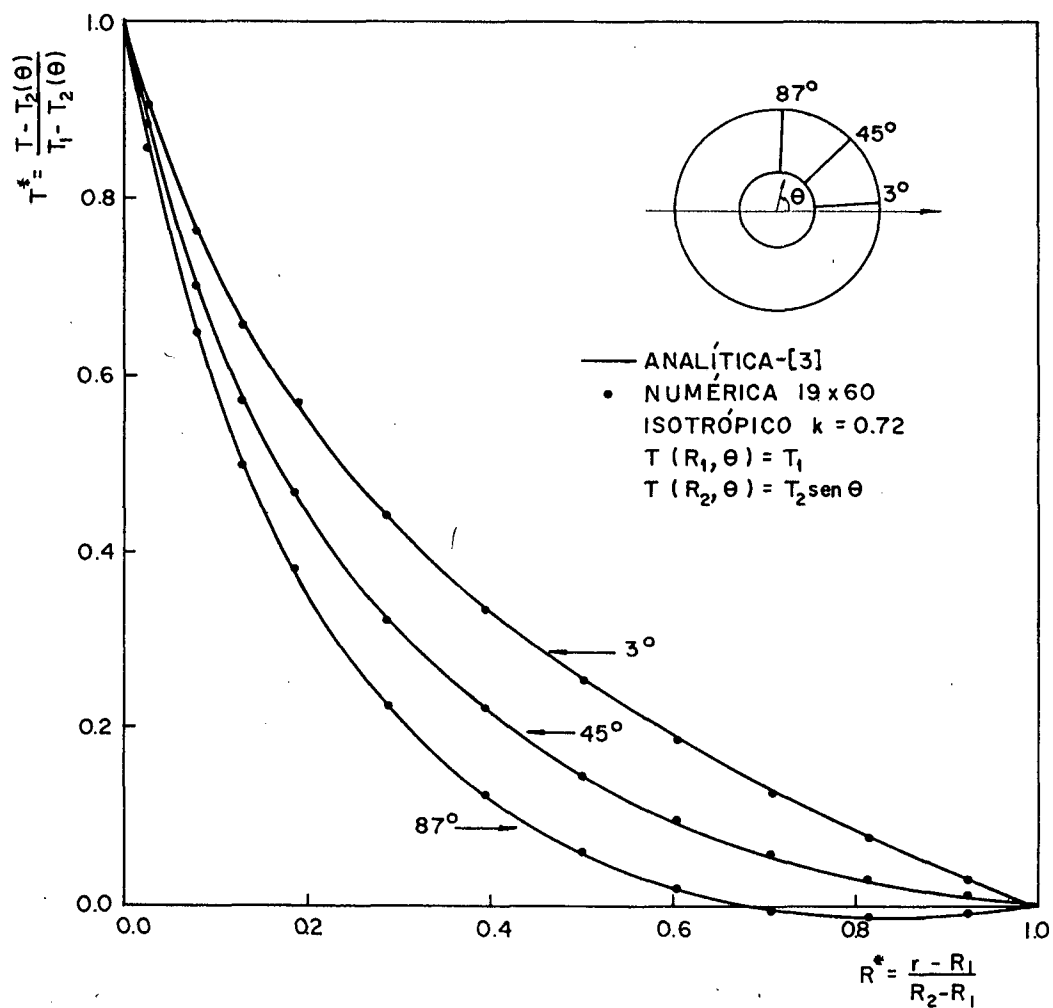


Figura 5.8 - Perfis de Temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malha ortogonal; caso isotrópico ($k = 0.72$).

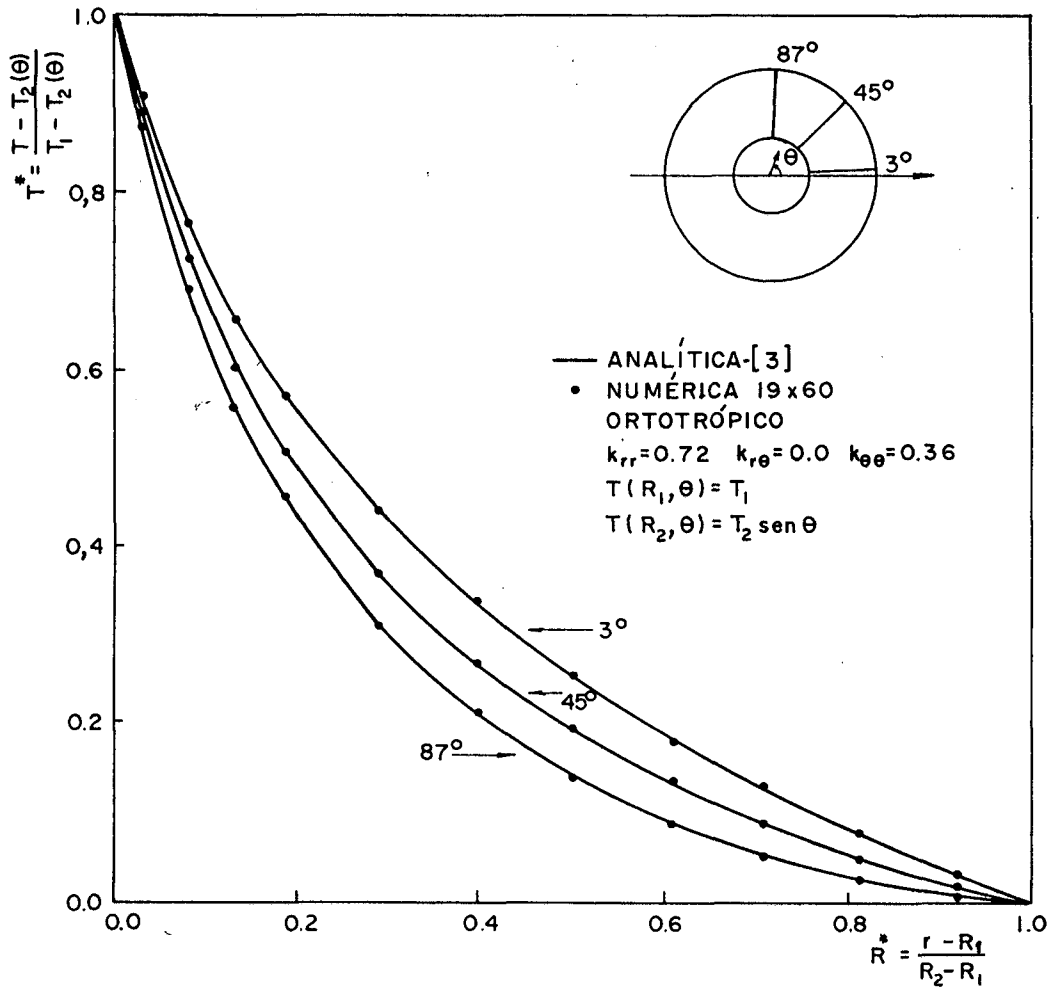


Figura 5.9 - Perfis de temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malha ortogonal; caso ortotrópico ($k_{rr} = 0,72$, $k_{r\theta} = 0,0$, $k_{\theta\theta} = 0,36$).

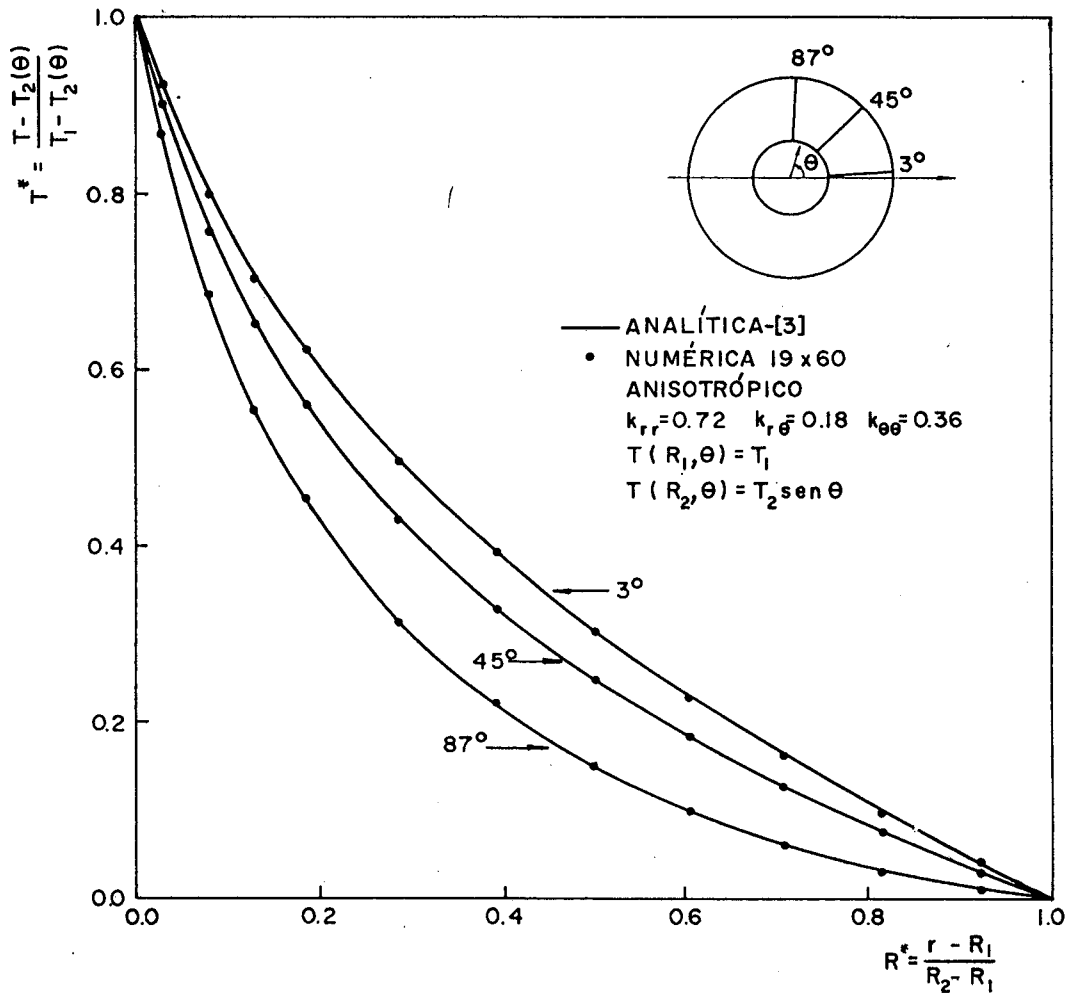


Figura 5.10 - Perfis de Temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malha ortogonal; caso anisotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 0.18$, $k_{\theta\theta} = 0.36$).

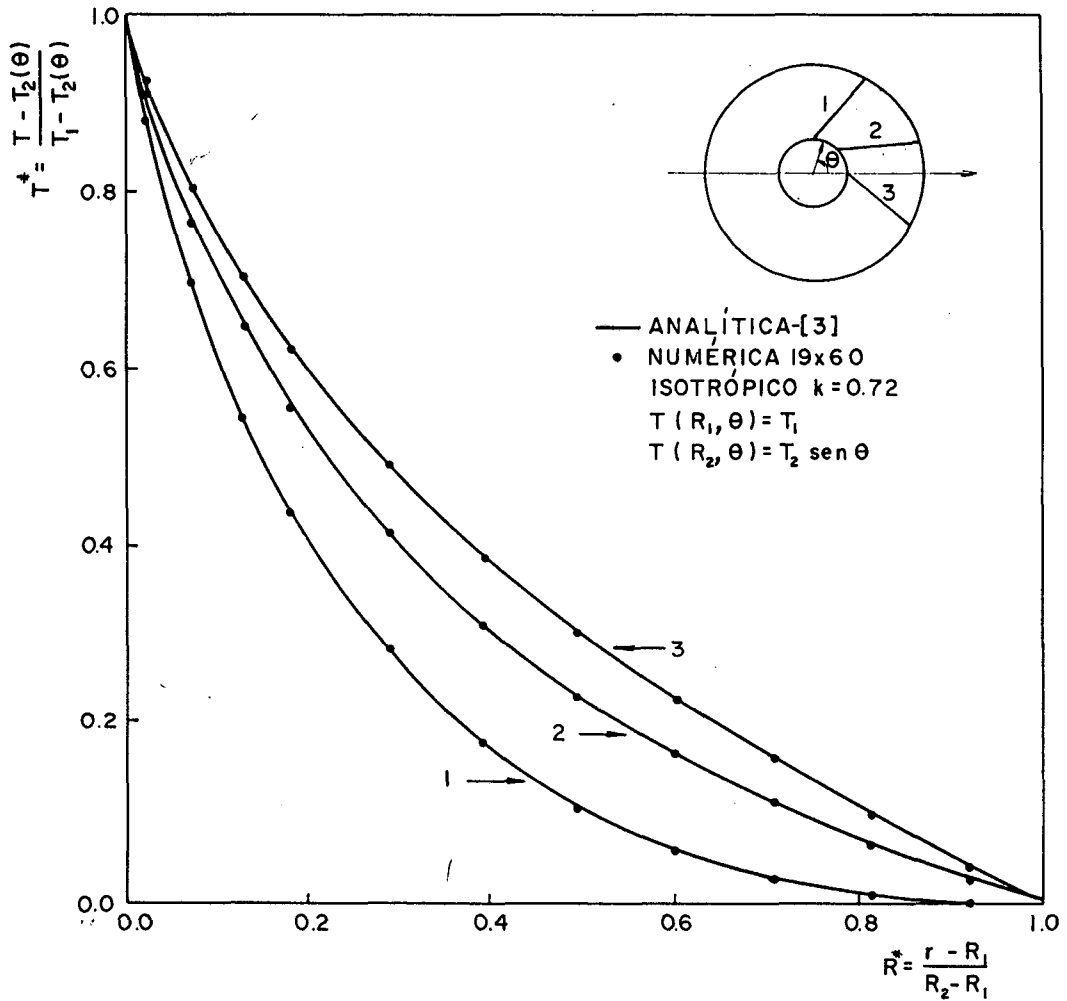


Figura 5.11 - Perfis de temperaturas T^* ; soluções analítica[3] e numérica com malha não-ortogonal; caso isotrópico ($k = 0.72$).

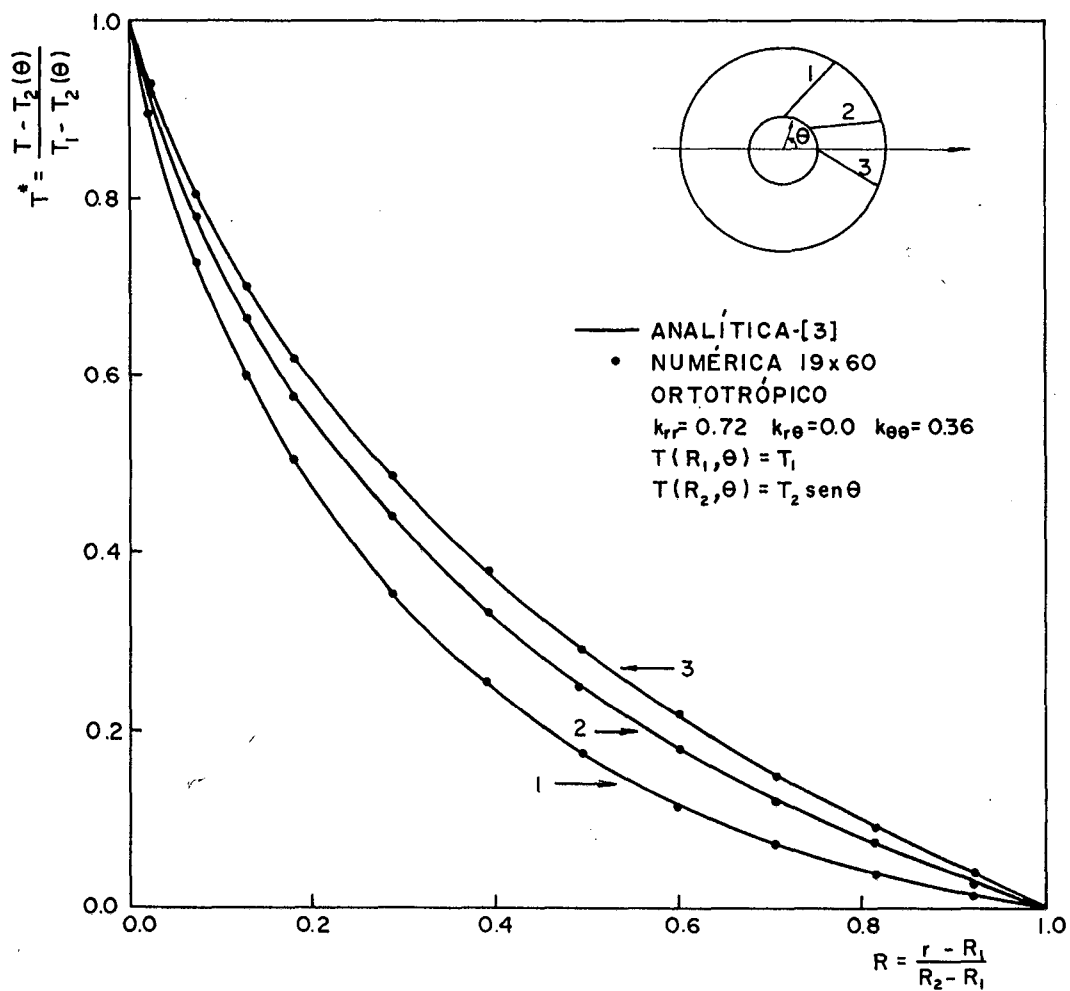


Figura 5.12 - Perfis de temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malha não-ortogonal; caso ortotró

pico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 0.0$, $k_{\theta\theta} = 0.36$).

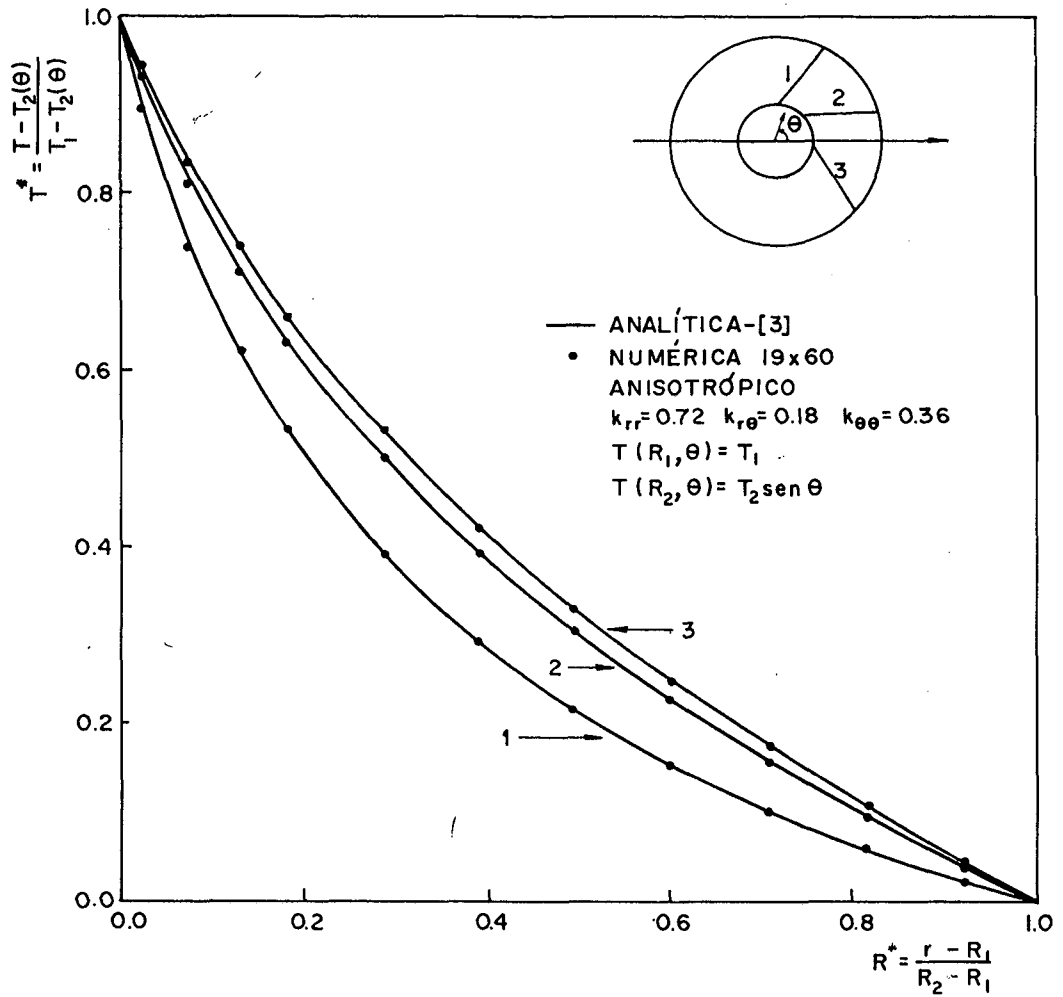


Figura 5.13 - Perfis de temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malha não-ortogonal; caso anisotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 0.18$, $k_{\theta\theta} = 0.36$).

6% para os casos isotrópico e ortotrópico e 9% para o caso anisotrópico. Observa-se o bom desempenho do modelo não-ortogonal em todos os casos.

Nas tabelas 5.3 a 5.5 são mostrados os valores numéricos das temperaturas adimensionais. Novamente, o primeiro valor refere-se a solução analítica e o segundo à numérica. Os resultados para os três casos (isotrópico, ortotrópico e anisotrópico) com malhas não-ortogonais 17 x 40 e 19 x 60, são mostrados. Esses valores referem-se a diferentes posições radiais e angulares segundo a direção 2 mostrada nas figuras 5.11 a 5.13. Nota-se a melhoria da precisão dos resultados com o aumento do tamanho da malha. Observar que nessas tabelas os pontos de cálculo para cada tamanho de malha são diferentes.

5.4 - REGIME PERMANENTE COM FLUXOS DE CALOR PRESCRITOS

Para testar a condição de contorno de fluxo prescrito, a solução do problema de condução de calor no regime permanente para a região anular com esse tipo de condição em ambas as fronteiras, é obtida. A formulação desse problema é dada por

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad , \quad R_1 < r < R_2 \quad (5.12)$$

$$-k \frac{dT}{dr} = q_1'' \quad , \quad r = R_1 \quad (5.13)$$

$$-k \frac{dT}{dr} = q_2'' \quad , \quad r = R_2 \quad (5.14)$$

onde q_1'' e q_2'' são as densidades de fluxo de calor (W/m^2) nas

TABELA 5.3

Temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malhas não-ortogonais; caso isotrópico ($k = 0.72$).

| R^* | 17 x 40 | R^* | 19 x 60 |
|-------|------------------|-------|------------------|
| 0.078 | 0.7721 0.7711 | 0.024 | 0.9116 0.9103 |
| 0.135 | 0.6545 0.6534 | 0.126 | 0.6504 0.6495 |
| 0.251 | 0.4792 0.4781 | 0.231 | 0.4813 0.4806 |
| 0.370 | 0.3528 0.3517 | 0.389 | 0.3113 0.3106 |
| 0.488 | 0.2557 0.2545 | 0.495 | 0.2295 0.2288 |
| 0.608 | 0.1776 0.1764 | 0.601 | 0.1635 0.1629 |
| 0.727 | 0.1129 0.1117 | 0.707 | 0.1092 0.1086 |
| 0.847 | 0.0581 0.0569 | 0.866 | 0.0436 0.0431 |
| 0.967 | 0.0109 0.0097 | 0.972 | 0.0079 0.0074 |

TABELA 5.4

Temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malhas não-ortogonais; caso ortotrópico ($k_{rr} = 0,72$, $k_{r\theta} = 0$, $k_{\theta\theta} = 0,36$).

| R^* | 17 x 40 | R^* | 19 x 60 |
|-------|------------------|-------|------------------|
| 0.078 | 0.7854 0.7846 | 0.024 | 0.9183 0.9173 |
| 0.135 | 0.6706 0.6697 | 0.126 | 0.6694 0.6686 |
| 0.251 | 0.4963 0.4953 | 0.231 | 0.5037 0.5031 |
| 0.370 | 0.3687 0.3676 | 0.389 | 0.3334 0.3328 |
| 0.488 | 0.2693 0.2681 | 0.495 | 0.2495 0.2489 |
| 0.608 | 0.1885 0.1873 | 0.601 | 0.1805 0.1799 |
| 0.727 | 0.1207 0.1195 | 0.707 | 0.1224 0.1219 |
| 0.847 | 0.0626 0.0614 | 0.866 | 0.0500 0.0495 |
| 0.967 | 0.0119 0.0107 | 0.972 | 0.0093 0.0087 |

TABELA 5.5

Temperaturas T^* ; soluções analítica [3] e numérica com malhas não-ortogonais; caso anisotrópico ($k_{rr} = 0.72$, $k_{r\theta} = 0.18$, $k_{\theta\theta} = 0.36$).

| R^* | 17 x 40 | R^* | 19 x 60 |
|-------|------------------|-------|------------------|
| 0.078 | 0.8167 0.8152 | 0.024 | 0.9302 0.9292 |
| 0.135 | 0.7157 0.7138 | 0.126 | 0.7143 0.7132 |
| 0.251 | 0.5537 0.5517 | 0.231 | 0.5618 0.5607 |
| 0.370 | 0.4269 0.4248 | 0.389 | 0.3931 0.3920 |
| 0.488 | 0.3221 0.3201 | 0.495 | 0.3040 0.3028 |
| 0.608 | 0.2322 0.2301 | 0.601 | 0.2267 0.2256 |
| 0.727 | 0.1529 0.1508 | 0.707 | 0.1582 0.1570 |
| 0.847 | 0.0814 0.0794 | 0.866 | 0.0675 0.0662 |
| 0.967 | 0.0162 0.0141 | 0.972 | 0.0131 0.0118 |

fronteiras interna e externa, respectivamente, mostradas na figura 5.14. Este problema simples é escolhido pois o objetivo, como dito acima, é simplesmente testar o tipo de condição de contorno.

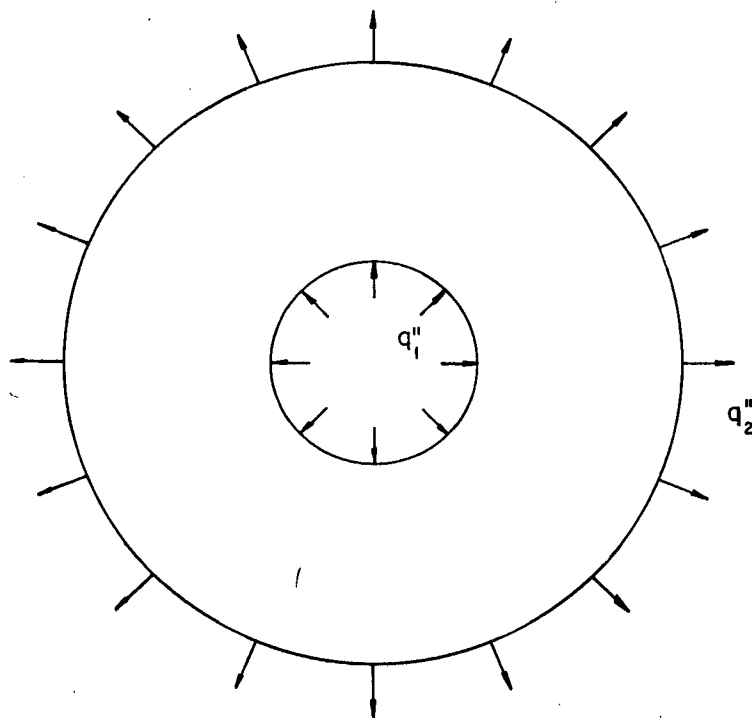


Figura 5.14 - Região anular com fluxos de calor prescritos nas fronteiras interna (q_1'') e externa (q_2'').

Os resultados numéricos obtidos com uma malha 17×40 ortogonal e não-ortogonal comparados aos analíticos, são mostrados nas figuras 5.15 e 5.16, respectivamente. Para um coeficiente de relaxação de 1.8, a solução usando a malha 17×40 ortogonal necessita de um tempo de computação de 3,05 min. e 3,11 min. para a malha 17×40 não-ortogonal.

A solução analítica é obtida arbitrando-se uma constante e referindo-se o campo de temperaturas a pontos de mesmo raio e θ variável cujas temperaturas tomam-se como nulas.

Todos os desvios, com malhas ortogonais e não-ortogo-

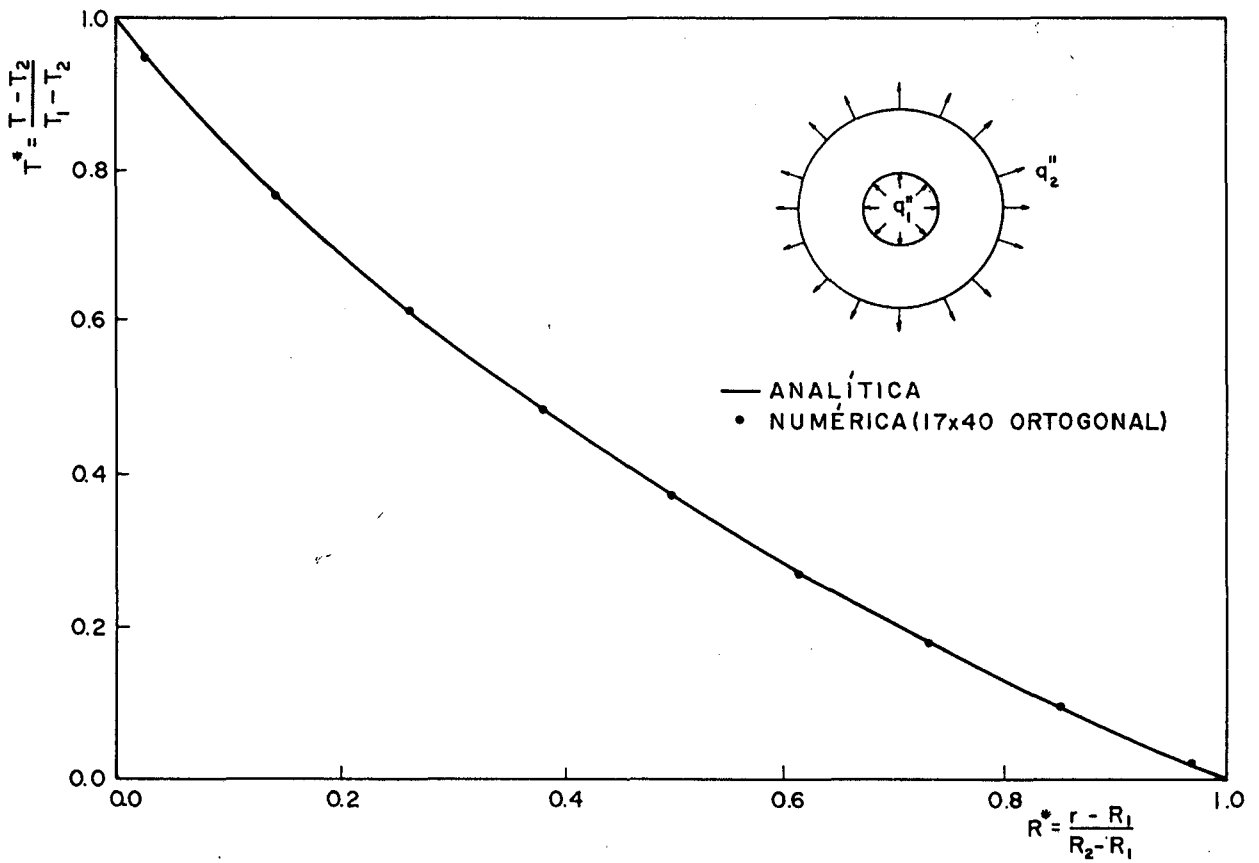


Figura 5.15 - Perfil de temperaturas T^* ; fluxos de calor prescritos nas fronteiras; soluções analítica e numérica com malha ortogonal.

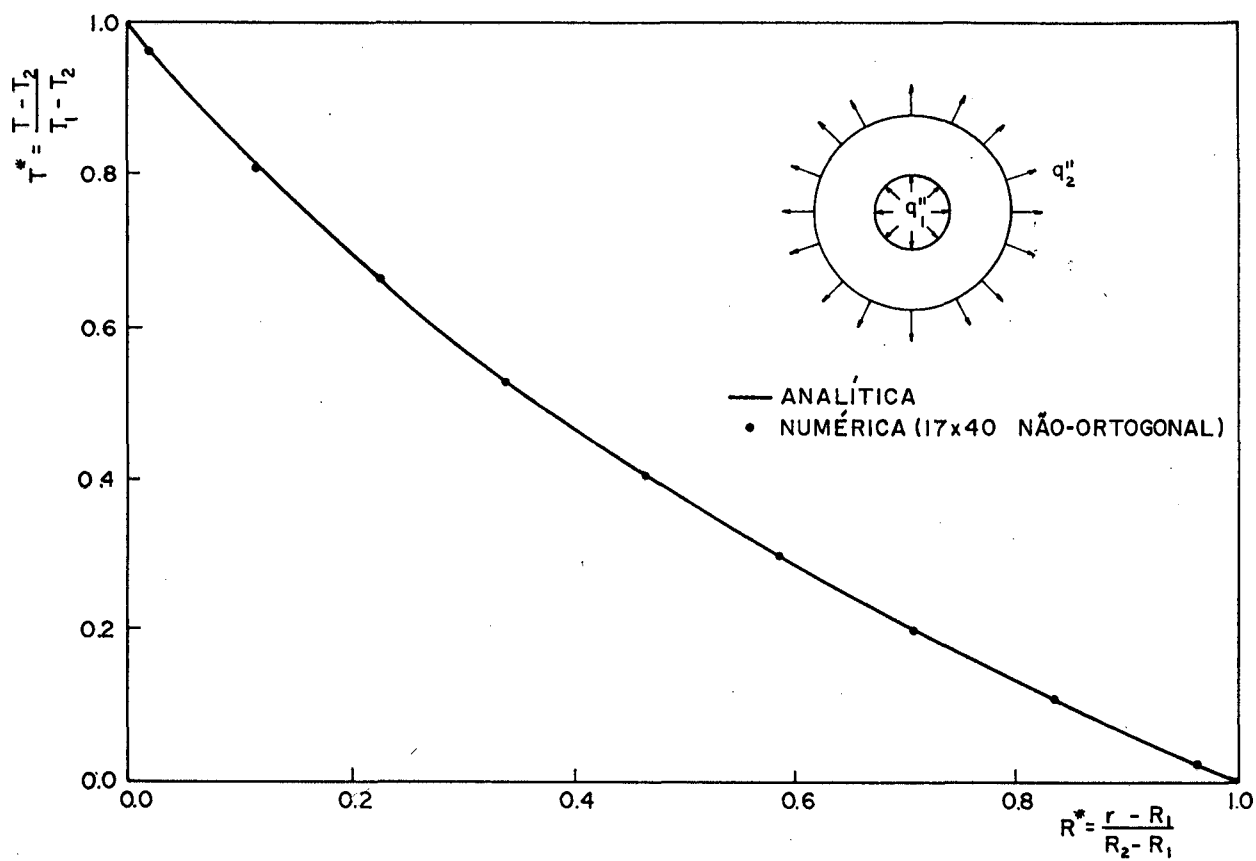


Figura 5.16 - Perfil de temperaturas T^* ; fluxos de calor prescritos nas fronteiras; soluções analítica e numérica com malha não-ortogonal.

nais, para temperaturas da ordem de 10^{-1} da máxima temperatura são menores do que 1% e o máximo desvio, de 5,77%, ocorre para temperaturas baixas, da ordem de 10^{-2} da máxima.

A solução do regime permanente para uma região retangular com furo circular e condições de fluxos de calor prescritos contantes nas fronteiras, mostrada na figura 5.17, é também obtida. Este teste objetiva mostrar a generalidade do método. A figura 5.18 mostra a malha 17×40 usada e a tabela 5.6 apresenta os resultados obtidos, onde se observa a simetria do campo de temperaturas. Nenhuma comparação é feita com outras soluções neste caso.

Quando se trabalha com modelos não-ortogonais, da mesma maneira que o tamanho da malha, a não-ortogonalidade entre as linhas coordenadas pode afetar a precisão dos resultados. Para que isso seja verificado, obtêm-se a solução do problema dado pelas equações (5.12) a (5.14), usando-se uma malha 17×40 não-ortogonal com espaçamentos não-uniformes, mostrada na figura 5.19.

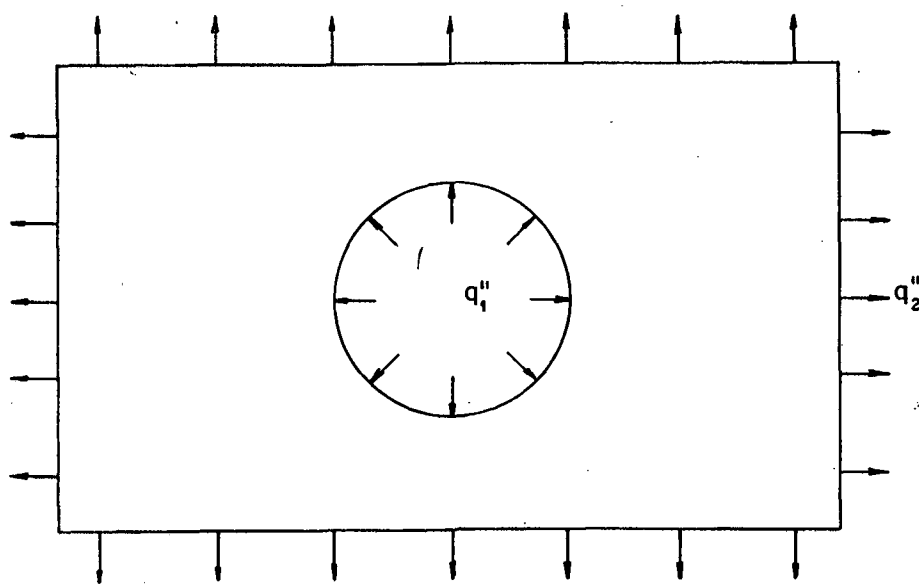


Figura 5.17 - Domínio retangular com furo circular.

A tabela 5.7 mostra os resultados comparados com aqueles para a malha de mesmo tamanho não-ortogonal uniformemente espaçada, segundo diferentes posições radiais. Nessa tabela as temperaturas adimensionais T^* são mostradas na vertical abaixo de R^* . É importante notar que, para a malha com espaçamentos uniformes as temperaturas são constantes para qualquer θ e um determinado R^* . Para a malha não-uniformemente espaçada, isso não acontece. Segundo Ferreri [25], esse problema deve-se à alta distorção da malha, sendo que o erro cresce indefinidamente quando o Jacobiano da transformação tende a zero e a transformação torna-se singular. O controle do valor máximo de todo ângulo interno de qualquer célula da malha, pode evitar esse problema, [25].

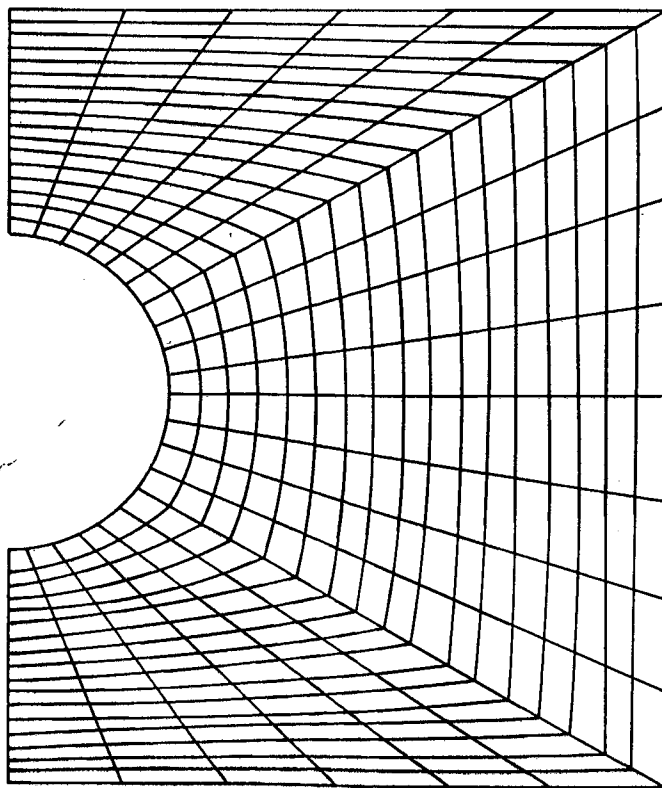


Figura 5.18 - Malha 17 x 40 para uma região retangular com furo circular.

Maliska e Silva [26] avaliam os efeitos locais da não-

TABELA 5.6

Temperaturas T^* para uma região retangular com furo circular.

| θ | T^* | θ | T^* | θ | T^* | θ | T^* |
|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| 15.33 | 0.9408 | 17.92 | 0.8072 | 21.21 | 0.5883 | 22.29 | 0.4960 |
| 34.60 | 0.8906 | 38.45 | 0.7049 | 42.62 | 0.3955 | 43.84 | 0.2511 |
| 51.68 | 0.8251 | 53.97 | 0.5794 | 56.08 | 0.2000 | 56.64 | 0.0466 |
| 68.07 | 0.8215 | 68.68 | 0.5821 | 69.25 | 0.2188 | 69.40 | 0.0726 |
| 85.56 | 0.8296 | 85.62 | 0.6045 | 85.69 | 0.2601 | 85.71 | 0.1238 |
| 94.44 | 0.8296 | 94.38 | 0.6045 | 94.31 | 0.2601 | 94.29 | 0.1238 |
| 111.93 | 0.8215 | 111.32 | 0.5821 | 110.75 | 0.2188 | 110.60 | 0.0726 |
| 128.32 | 0.8251 | 126.03 | 0.5794 | 123.92 | 0.2000 | 123.36 | 0.0466 |
| 145.40 | 0.8906 | 141.55 | 0.7049 | 137.38 | 0.3955 | 136.16 | 0.2511 |
| 164.67 | 0.9408 | 162.08 | 0.8072 | 158.79 | 0.5883 | 157.71 | 0.4960 |

ortogonalidade e algumas questões relacionadas com o uso de modelos não-ortogonais. Nesse trabalho resolve-se um problema de condução de calor em uma região anular com geração de calor e temperaturas constantes prescritas nas fronteiras. São usados diferen

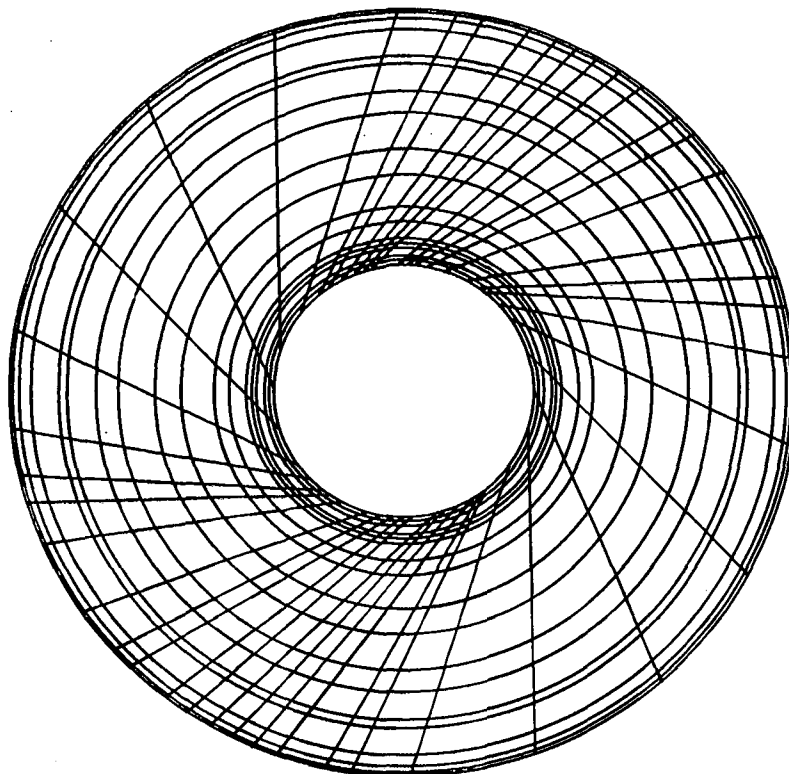


Figura 5.19 - Malha 17 x 40 não-ortogonal com espaçamentos não uniformes entre as linhas coordenadas.

tes tipos de discretização, malhas ortogonais e não-ortogonais com espaçamentos uniformes e não-uniformes. Constata-se que o fluxo de calor local não é constante angularmente para malhas com espaçamentos não-uniformes, sejam as mesmas ortogonais ou não-ortogonais. Verifica-se que a não-uniformidade entre as linhas coordenadas leva a um consecutivo erro no cálculo da métrica β na interface dos volumes elementares. Essa métrica é obtida assumindo-se linhas retas entre os pontos coordenados e quando a malha possui espaçamentos uniformes, esse procedimento ori

TABELA 5.7

Temperaturas T^* segundo o mesmo raio R^* e θ variável; malhas não-ortogonais: A - espaçamentos uniformes, B - espaçamentos não-uniformes.

| A | | B | | A | | B | |
|----------|--------------|----------|--------------|----------|---------------|----------|---------------|
| θ | $R^* = 0.02$ | θ | $R^* = 0.07$ | θ | $R^* = 0.899$ | θ | $R^* = 0.964$ |
| 1.65 | 0.9529 | 7.74 | 0.9406 | 5.56 | 0.0548 | 10.26 | 0.0190 |
| 10.65 | 0.9529 | 25.78 | 0.9289 | 14.56 | 0.0548 | 21.96 | 0.0136 |
| 28.65 | 0.9529 | 46.66 | 0.9021 | 32.56 | 0.0548 | 39.96 | 0.0117 |
| 46.65 | 0.9529 | 58.36 | 0.9041 | 50.56 | 0.0548 | 50.72 | 0.0095 |
| 64.65 | 0.9529 | 76.36 | 0.9030 | 68.56 | 0.0548 | 59.79 | 0.0065 |
| 82.65 | 0.9529 | 86.28 | 0.9021 | 86.56 | 0.0548 | 67.02 | 0.0078 |
| 97.35 | 0.9529 | 91.68 | 0.9011 | 104.56 | 0.0548 | 76.05 | 0.0084 |
| 115.35 | 0.9529 | 106.80 | 0.9068 | 113.56 | 0.0548 | 87.75 | 0.0065 |
| 133.35 | 0.9529 | 117.52 | 0.9098 | 131.56 | 0.0548 | 121.05 | 0.0310 |
| 151.35 | 0.9529 | 128.32 | 0.9202 | 149.56 | 0.0548 | 161.52 | 0.0447 |
| 169.5 | 0.9529 | 151.65 | 0.9357 | 167.56 | 0.0548 | 178.59 | 0.0469 |
| 178.5 | 0.9529 | 169.69 | 0.9546 | 176.56 | 0.0548 | 190.26 | 0.0302 |

gina um valor de β correto, caso A mostrado na tabela 5.7. Se a malha possui espaçamentos não-uniformes introduz-se uma não-ortogonalidade artificial, ou numérica, no cálculo dessa métrica nas interfaces. Para os pontos centrais verifica-se que o valor de β é obtido corretamente. Uma nova maneira de se calcular essa métrica nas interfaces, como a média de seus valores nos pontos centrais, melhora sensivelmente o problema para a malha ortogonal, pois seu valor torna-se nulo para todos os pontos centrais e da interface. Para o caso não-ortogonal o uso da estratégia anterior reduz pouco o problema. Isso porque não se obtém os mesmos valores de β nas interfaces, pois seus valores nos pontos centrais não são nulos como no caso ortogonal. Além disso, as métricas α e γ participam do cálculo de β , como mostrado na referência [26]. Este é um ponto que começa a receber atenção dos pesquisadores que utilizam grades não-ortogonais.

5.5 - REGIME PERMANENTE PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE CONVECÇÃO

A solução de um problema no regime permanente para a região anular isotrópica com a temperatura da face interna mantida constante e a face externa trocando calor por convecção com o meio ambiente, é obtida. A formulação desse problema é dada por

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad , \quad R_1 < r < R_2 \quad (5.15)$$

$$T(R_1, \theta) = T_1 \quad (5.16)$$

$$\frac{dT}{dr} + \frac{h}{k} (T - T_\infty) \quad , \quad r = R_2 \quad (5.17)$$

Onde h é o coeficiente de transferência de calor e T_{∞} é a temperatura do ambiente.

A solução é obtida, calculando-se a quantidade de calor trocada nas fronteiras (Q_f) tanto pelas equações (4.74) e (4.75) como pelas equações (4.80) e (4.81), obtendo-se boa concordância com a solução analítica em ambos os casos. Nas figuras 5.20 e 5.21 são mostrados os resultados numéricos comparados aos analíticos, para três casos de $Bi = 0.28, 0.42$ e 0.56 usando a malha 17×40 ortogonal e não-ortogonal. A solução com a malha 17×40 ortogonal necessita de um tempo de computação de 3,13 min. e a malha 17×40 não-ortogonal de 3,47 min., sendo que a aproximação com a solução analítica apresenta desvio máximo de 0.17%.

5.6 - RESUMO E CONCLUSÕES

Neste capítulo, o modelo numérico foi testado considerando-se problemas transientes e permanentes, isotrópicos, anisotrópicos e heterogêneos com as três espécies de condições de contorno. Apresentaram-se os resultados numéricos comparados com as soluções analíticas, usando-se malhas ortogonais e não-ortogonais de diferentes tamanhos. A aproximação entre as soluções é muito boa.

A distribuição de temperaturas do regime permanente para uma região retangular com furo circular e fluxos de calor mantidos constantes nas fronteiras, foi obtida mostrando-se a generalidade do método.

Verificou-se a influência da não-uniformidade dos espaçamentos entre as linhas coordenadas na precisão das soluções.

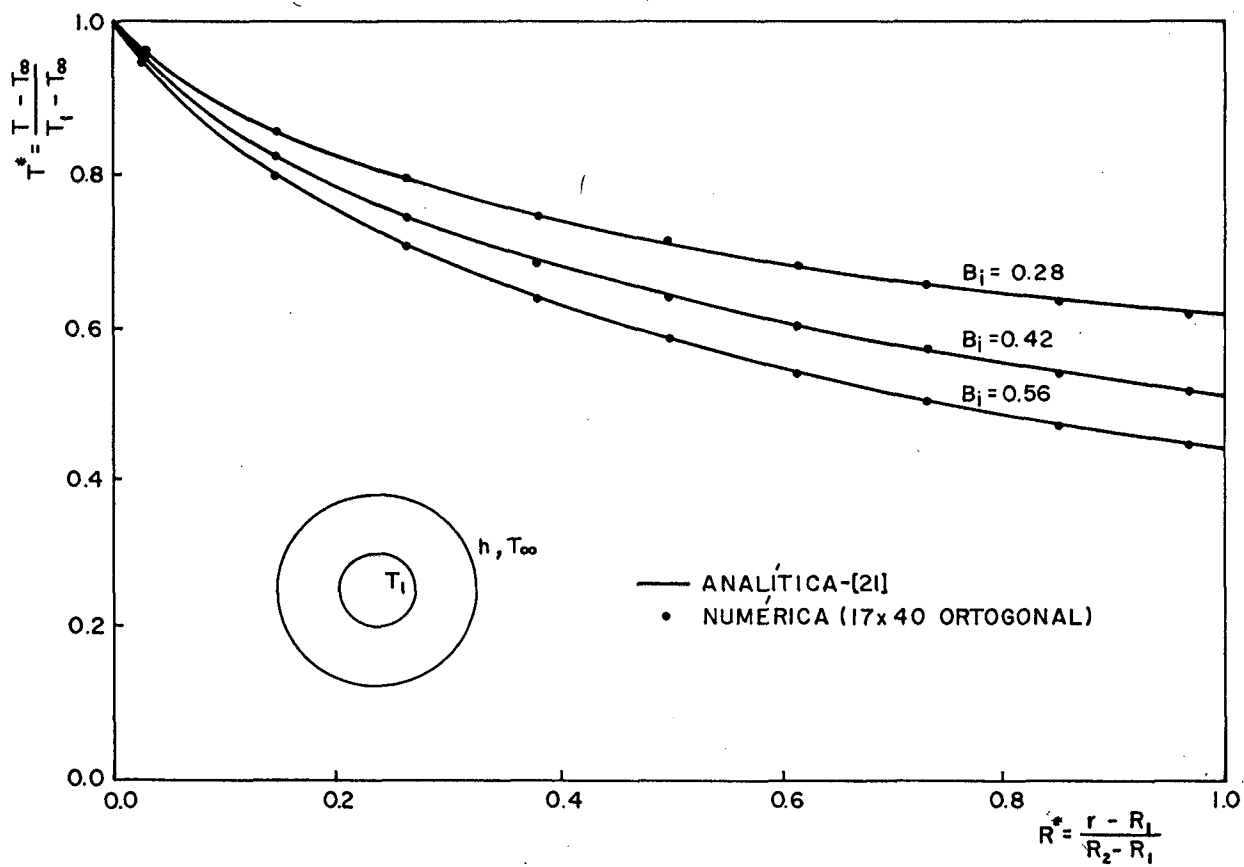


Figura 5.20 - Perfis de temperaturas T^* ; temperatura prescrita na face interna e convecção na face externa; soluções analítica [21] e numérica com malha ortogonal.

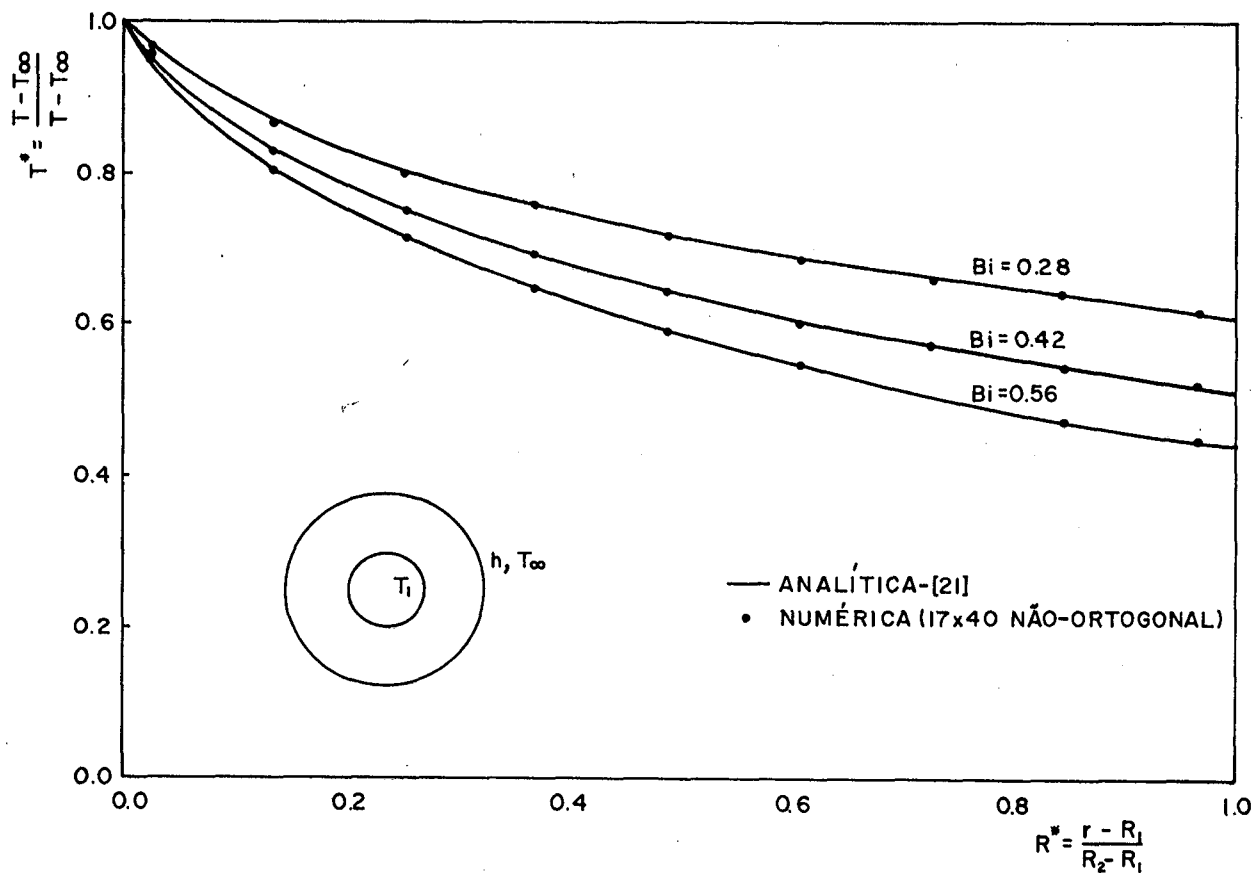


Figura 5.21 - Perfis de temperaturas T^* ; temperatura prescrita na face interna e convecção na face externa; soluções analítica [21] e numérica com malha não-ortogonal.

Para isso, foi obtida a solução de um problema com fluxos de calor prescritos nas fronteiras interna e externa de uma região anular, usando-se malha altamente não-ortogonal com espaçamentos não-uniformes entre as linhas coordenadas. Destacam-se alguns aspectos para a melhoria da não-uniformidade apresentada pelo campo de temperaturas.

Observou-se a grande versatilidade do modelo quanto à adaptação das condições de contorno.

Apesar de simples a geometria usada nos testes (região anular) o uso de malhas não-ortogonais permitiu, além da comparação com o modelo ortogonal, os testes de todos os termos da formulação que envolvem as não-ortogonalidades.

O modelo não foi otimizado quanto ao consumo de tempo de computação, envolvendo avanço de tempo, coeficientes de relaxação e outros parâmetros, pois trata-se de um código computacional de interesse apenas acadêmico científico.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

No modelo aqui desenvolvido, o método dos volumes finitos juntamente com o sistema de coordenadas generalizadas, cujas linhas adaptam-se à geometria do domínio, foram aplicados a problemas de condução de calor transientes em meios anisotrópicos e heterogêneos, definidos em geometrias bidimensionais arbitrárias, duplamente conexas. Os testes do modelo para os três tipos de condições de contorno, com malhas ortogonais e não-ortogonais, apresentam bons resultados comparados com as soluções analíticas. Esses resultados comprovam o bom desempenho do modelo não-ortogonal desenvolvido.

As condições de contorno, englobadas às equações aproximadas através de balanços de energia nos volumes de fronteira, tornam o esquema numérico muito versátil quanto à aplicação de diferentes condições de contorno. Além disso, mantêm-se constantes os coeficientes da equação aproximada com a mudança da condição de contorno. Essas, são características do presente modelo, não encontradas em outros trabalhos que usam coordenadas generalizadas.

O modelo foi completamente testado resolvendo-se problemas nos regimes transiente e permanente, isotrópicos, anisotrópicos e heterogêneos, usando-se malhas não-ortogonais. Os resultados obtidos apresentam concordância muito boa com as soluções exatas.

A presente metodologia pode ser adaptada para o estu-

do de problemas gerais de difusão, como por exemplo, aqueles que envolvam o transporte simultâneo de massa e calor em meios porosos.

Além de problemas de condução de calor transientes, anisotrôpicos e heterogêneos, o modelo está apto para tratar problemas onde a condutividade térmica e/ou as condições de contorno variem com a temperatura, sobre os quais os trabalhos experimentais e soluções analíticas são bastante limitados.

É importante salientar que o uso de discretização não-ortogonal coincidente com a geometria do domínio, elimina o problema da geometria irregular, tornando o método dos volumes finitos uma opção atraente para a solução de problemas de transferência de calor. Além disso, as considerações físicas usadas no desenvolvimento do método conferem ao mesmo características não encontradas em outras técnicas numéricas. Um exemplo, é o fato das equações de conservação serem satisfeitas a nível de volumes elementares.

Como o uso de coordenadas não-ortogonais não impõe restrições quanto à forma do volume elementar, malhas excessivamente distorcidas podem estar presentes na discretização do domínio. Essas malhas originam termos não-ortogonais significativos nas equações de conservação, podendo ocasionar imprecisões nas soluções. Critérios para limitar o grau de não-ortogonalidade das malhas não são ainda conhecidos e poucos são os trabalhos na literatura disponíveis nesse sentido. Esse assunto deve merecer, portanto, atenção dos pesquisadores no futuro.

O método não é restrito a duas dimensões e é importante sua expansão para domínios tridimensionais, necessitando-se

avaliar a inclusão de mais uma variável espacial na equação da condução e a geração de malhas tridimensionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CHANG, Y. P., Analytical Solution for Heat Conduction in Anisotropic Media in Infinite, Semi-Infinite and Two-Plane-Bounded Regions, Int. J. Heat Mass Transfer, v. 20, pp. 1019-1028, 1977.
- [2] CHANG, Y. P. e TSOU, R.C.H., Heat Conduction in an Anisotropic Medium Homogeneous in Cylindrical Regions-Unsteady State, J. of Heat Transfer - ASME, v. 1, pp. 41-46, 1977.
- [3] CHANG, Y. P. e TSOU, R.C.H., Heat Conduction in an Anisotropic Medium Homogeneous in Cylindrical Regions-Steady State, J. of Heat Transfer - ASME, v.1, pp. 132-134, 1977.
- [4] POON, K. C., TSOU, R.C.H. e CHANG, Y. P., Solution of Anisotropic Problems of First Class by Coordinate - Transformation, J. of Heat Transfer - ASME, v. 101, pp. 340-345, 1979.
- [5] HUANG, S. C. e CHANG, Y. P., Heat Conduction in Anisotropic Wedge Elliptic Cylinders, J. of Heat Transfer - ASME, v. 105, pp. 674-677, 1983.
- [6] OZISIK, M.N. e SHOUMAN, S.M., Transient Heat Conduction in an Anisotropic Medium in Cylindrical Coordinates, J. of the Franklin Institute, v. 309, pp. 457-472, 1980.
- [7] CHANG, Y. P., KANG, C. S. e CHEN, D. J., The use of Fundamental Green's Functions for the Solution of Problems of Heat Conduction in Anisotropic Media, Int. J. Heat Mass Transfer, v. 16, pp. 1905-1918, 1973.
- [8] SHAW, R. P., An Integral Equation Approach to Diffusion, Int. J. Heat Mass Transfer, v. 17, pp. 693-699, 1974.

- [9] PADOVAN, J., Steady Conduction of Heat in Linear and Non-linear Fully Anisotropic Media By Finite Elements, J. of Heat Transfer - ASME, v. 3, pp. 313-318, 1974.
- [10] WINSLOW, A. M., Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh, J. Comp. Physics, v. 2, pp. 149-172, 1967.
- [11] CHU, W. H., Development of a General Finite Difference Approximation for a General Domain - Part I: Machine Transformation, J. of Comp. Physics, v. 8, pp. 392-408, 1971..
- [12] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C. e MASTIN, C. W., Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, J. of Comp. Physics, v. 15, pp. 299-319, 1974.
- [13] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C. e MASTIN, C. W., Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, NASA - Langley Research Center, CR-2729, 1976.
- [14] McWHORTER III, J. C., SADD, M. H., Numerical Anisotropic Heat Conduction Solutions Using Boundary-Fitted Coordinate Systems, J. of Heat Transfer, v. 102, pp. 308-311, 1980.
- [15] PROJAHN, U., RIEGER, H. e BEER, H., Heat Conduction in Anisotropic Composites of Arbitrary Shape (a Numerical Analysis), Wärme und Stoffübertragung, v. 15, pp. 223-232, 1981.

- [16] UCHIKAWA, S. e TAKEDA, R., Use of a Boundary-Fitted Coordinate Transformation for Unsteady Heat Conduction Problems in Multiconnected Regions With Arbitrarily Shaped Boundaries, J. of Heat Transfer - ASME, v. 107, pp. 494-498, 1985.
- [17] GOLDMAN, A. e KAO, Y. C., Numerical Solution to a Two-Dimensional Conduction Problem Using Rectangular and Cylindrical Body-Fitted Coordinate Systems, J. of Heat Transfer - ASME, v. 103, pp. 753-758, 1981.
- [18] ROBERTSON, S. R., A Finite-Difference Formulation of the Equation of Heat Conduction in Generalized Coordinates, Numerical Heat Transfer, v. 2, pp. 61-80, 1979.
- [19] MALISKA, C. R., A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates, Ph.D. Thesis, Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, 1981.
- [20] PRIGOGINE, I., Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes, Interscience Publishers-John Wiley & Sons, 1967.
- [21] CARSLAW, H. S. e Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, Oxford Clarendon Press, 1959.
- [22] OZISIK, M. N., Heat Conduction, Wiley-Interscience Publication - John Wiley & Sons, 1980.
- [23] ARPACI, V. S., Conduction Heat Transfer, Addison - Wesley Publishing Company, 1966.
- [24] PATANKAR, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation McGraw - Hill Book Company, 1980.

- [25] FERRERI, J. C. e VENTURA, M. A., On the Accuracy of Boundary-Fitted Finite-Difference Calculations, Int. J. For Num. Meth. in Fluids, v. 4, pp. 359-375, 1984.
- [26] MALISKA, C. R. e SILVA, A. F. C., Local Effects of Highly Nonorthogonal Grids in the Solution of Heat Transfer Problems in Cusped Corners, Proceedings of the First International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, Landshut, West Germany, Julho 1986.
- [27] SOKOLNIKOFF, I. S., Tensor Analysis Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua, John Wiley & Sons, 1962.

APÊNDICE

TENSOR MÉTRICO

RELAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO FÍSICO

FLUXO DE CALOR NO SISTEMA GENERALIZADO

1. INTRODUÇÃO

Neste apêndice, a obtenção das métricas da transformação de coordenadas, a relação entre as áreas no plano físico e no plano transformado e os comprimentos no plano físico, são mostrados. A obtenção do fluxo de calor no sistema curvilíneo generalizado, em função de suas componentes cartesianas e dos vetores da base contravariante, também é mostrada. O fluxo de calor, nesse sistema, é usado no balanço de energia realizado nos volumes de fronteira, mostrado no capítulo 4.

2. TENSOR MÉTRICO E BASES COVARIANTES E CONTRAVARIANTE

No sistema de coordenadas cartesianas x^i , considerando o espaço Euclidiano bidimensional E_2 , o elemento de arco dS , como mostrado na referência [27], é dado por:

$$dS^2 = dx^i dx^i, \quad i = (1,2) \quad (1)$$

Com a transformação de coordenadas para um sistema curvilíneo generalizado y^i , dada por

$$x^i = x^i(y^1, y^2) \quad (2)$$

é possível escrever a equação (1) como:

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j \quad (3)$$

onde o conjunto de coeficientes g_{ij} são funções das variáveis y^i . Esse conjunto de funções $g_{ij}(y)$, representa um tensor simétrico chamado de tensor métrico, dado por

$$g_{ij}(y) = \frac{\partial x^m}{\partial y^i} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \quad (4)$$

Com a equação (4) as componentes do tensor métrico α , β e γ , mostradas nas equações (3.20) a (3.22), podem ser obtidas.

O tensor métrico é também escrito como:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (5)$$

onde \mathbf{g}_i são os vetores da base covariante, tangentes à coordenada curvilínea y^i , dados por

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \mathbf{e}_j \quad (6)$$

onde \mathbf{e}_j são os vetores da base unitária do sistema cartesiano. Os vetores dados pela equação (6), em geral, não são unitários. Um conjunto recíproco àquele da equação (6) é dado por:

$$\mathbf{g}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_j \quad (7)$$

onde \mathbf{g}^i são os vetores da base contravariante e são normais à coordenada y^i . Com isso o tensor métrico, também pode ser dado por:

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad (8)$$

e é conhecido por tensor métrico contravariante.

Um vetor \mathbf{q} no sistema de coordenadas curvilíneas, mostrado na figura 1, pode ser decomposto com relação à base de vetores covariantes, como

$$\mathbf{q} = q^i \mathbf{g}_i \quad (9)$$

e também com relação à base contravariante, como

$$\mathbf{q} = q_i \mathbf{g}^i \quad (10)$$

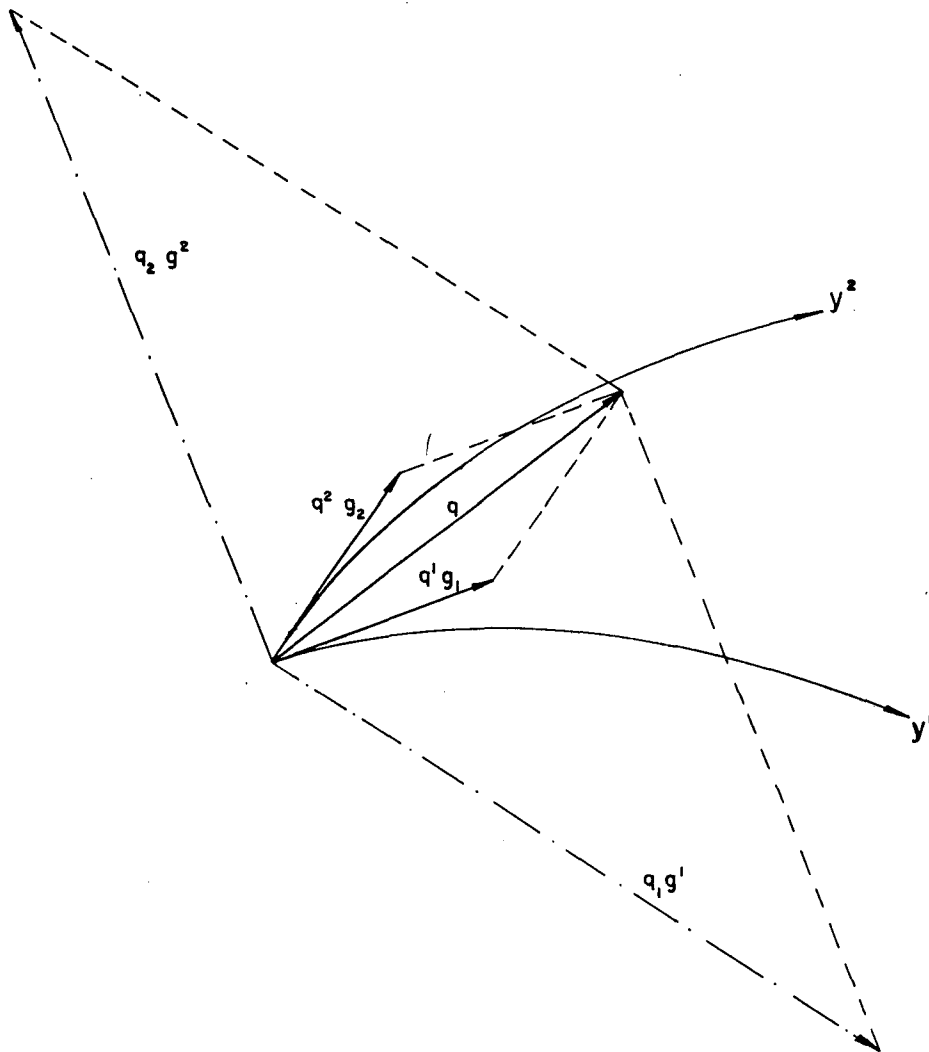


Figura 1 - Componentes covariantes e contravariantes de um vetor \mathbf{q} .

3. COMPRIMENTOS E ÁREAS NO PLANO FÍSICO

Considerando as linhas coordenadas $\xi - \eta$ no plano físico, mostradas na figura 2, pode-se obter as expressões para calcular os comprimentos e as áreas com suas relações com as métricas da transformação. Usando o teorema de Pitágoras os comprimentos $|\mathbf{dL}_\xi|$ e $|\mathbf{dL}_\eta|$, mostrados na figura 2, são obtidos como:

$$|\mathbf{dL}_\xi| = \Delta\xi\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} = \Delta\xi\sqrt{\gamma} \quad (11)$$

$$|\mathbf{dL}_\eta| = \Delta\eta\sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} = \Delta\eta\sqrt{\alpha} \quad (12)$$

A área no plano físico, é dada por:

$$dA = dL_\xi \times dL_\eta \quad (13)$$

No sistema cartesiano os vetores dados pelas equações (11) e (12), são representados por:

$$\mathbf{dL}_\xi = x_\xi \Delta\xi \mathbf{e}_x + y_\xi \Delta\xi \mathbf{e}_y \quad (14)$$

$$\mathbf{dL}_\eta = x_\eta \Delta\eta \mathbf{e}_x + y_\eta \Delta\eta \mathbf{e}_y \quad (15)$$

e o produto vetorial é dado por:

$$\mathbf{dA} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_\xi \Delta\xi & y_\xi \Delta\xi & 0 \\ x_\eta \Delta\eta & y_\eta \Delta\eta & 0 \end{bmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta \mathbf{e}_z \quad (16)$$

Com isso a área elementar dA , no plano físico, é a magnitude do

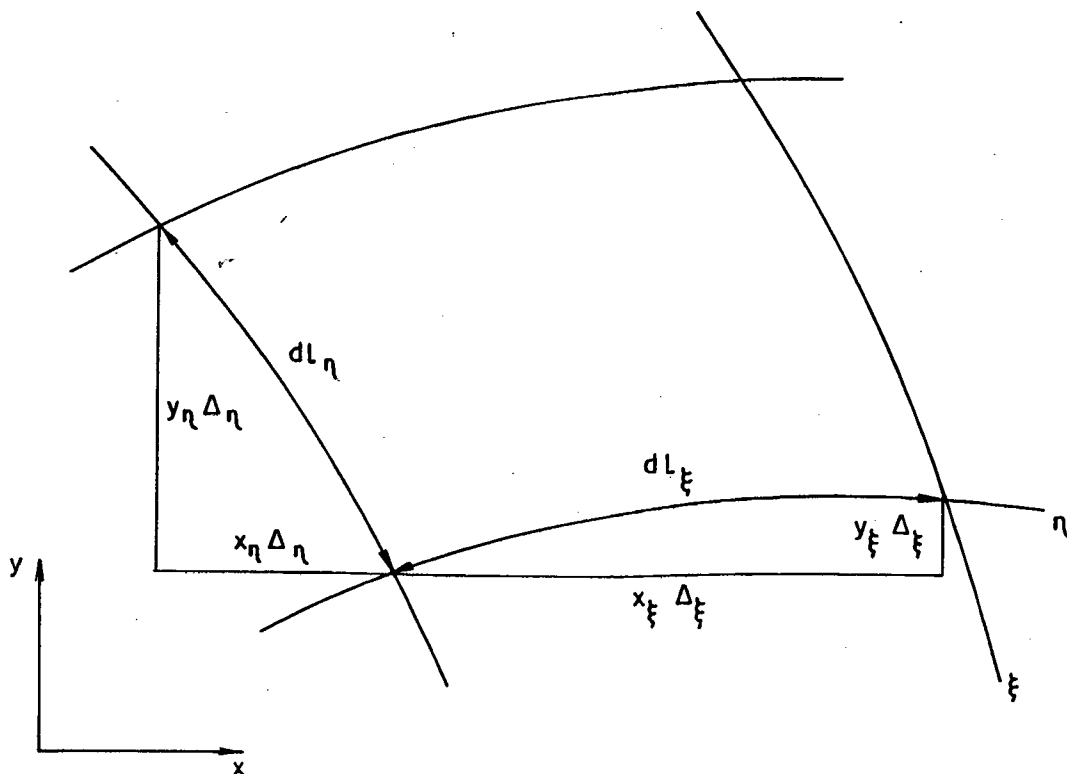


Figura 2 - Elementos para a determinação de áreas e comprimentos no domínio físico.

vetor $d\mathbf{A}$, dado por:

$$|d\mathbf{A}| = dA = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta = \frac{\Delta\xi \Delta\eta}{J} \quad (17)$$

Na equação (17), observa-se que a área elementar no plano físico relaciona-se com a área no plano transformado, pelo inverso do Jacobiano da transformação de coordenadas. É importante salientar que a magnitude da área no plano transformado pode ser escolhida arbitrariamente.

4. FLUXO DE CALOR NO SISTEMA GENERALIZADO

O fluxo de calor no sistema curvilíneo generalizado, é necessário para a realização do balanço de energia nos volumes das fronteiras do plano físico. Esse fluxo, através das linhas ξ ou η , é calculado como

$$q^i = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^i, \quad i = (\xi, \eta) \quad (18)$$

onde \mathbf{q} é o vetor fluxo de calor no sistema cartesiano,

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{e}_x + q_y \mathbf{e}_y \quad (19)$$

e \mathbf{v}^i são os vetores unitários normais às linhas coordenadas, dados por,

$$\mathbf{v}^i = \frac{\mathbf{g}^i}{\sqrt{\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^i}} = \frac{\mathbf{g}^i}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (20)$$

Substituindo a equação (7) na equação (20), obtêm-se os vetores \mathbf{v}^i normais às linhas ξ e η , respectivamente, por

$$\mathbf{v}^\xi = \frac{y_\eta}{\sqrt{\alpha}} \mathbf{e}_x - \frac{x_\eta}{\sqrt{\alpha}} \mathbf{e}_y \quad (21)$$

$$\mathbf{v}^\eta = \frac{-y_\xi}{\sqrt{\gamma}} \mathbf{e}_x + \frac{x_\xi}{\sqrt{\gamma}} \mathbf{e}_y \quad (22)$$

O fluxo de calor q^i é obtido para as quatro faces do volume elementar, substituindo as equações (19), (21) e (22) na equação (18), resultando

$$q_{(e,w)}^{\xi} = \frac{y_{\eta}}{\sqrt{\alpha}} q_{x(e,w)} - \frac{x_{\eta}}{\sqrt{\alpha}} q_{y(e,w)} \quad (23)$$

$$q_{(n,s)}^{\eta} = \frac{x_{\xi}}{\sqrt{\gamma}} q_{y(n,s)} - \frac{y_{\xi}}{\sqrt{\gamma}} q_{x(n,s)} \quad (24)$$

Obtêm-se a quantidade de calor trocada, Q^i , através das quatro faces do volume elementar, multiplicando-se q^i pela área dessa face,

$$Q_{(e,w)}^{\xi} = q_{(e,w)}^{\xi} |dL_{\eta}| \quad (25)$$

$$Q_{(n,s)}^{\eta} = q_{(n,s)}^{\eta} |dL_{\xi}| \quad (26)$$

Substituindo as equações (11), (12), (23) e (24) nas equações (25) e (26), resulta:

$$Q_{(e,w)}^{\xi} = y_{\eta} \Delta\eta q_{x(e,w)} - x_{\eta} \Delta\eta q_{y(e,w)} \quad (27)$$

$$Q_{(n,s)}^{\eta} = x_{\xi} \Delta\xi q_{y(n,s)} - y_{\xi} \Delta\xi q_{x(n,s)} \quad (28)$$

As componentes cartesianas do vetor fluxo de calor são dadas pelas equações (2.2) e (2.3), identificando 1 como o eixo x e 2 como o eixo y, resulta

$$q_x = -k_{11} T_x - k_{12} T_y \quad (29)$$

$$q_y = -k_{21} T_x - k_{22} T_y \quad (30)$$

Substituindo as equações (29) e (30) nas equações (27)

e (28), com os gradientes T_x e T_y transformados pela regra da cadeia, dada pelas equações (3.12) e (3.13), obtêm-se

$$Q_{(e,w)}^\xi = (D_1 y_\eta - D_2 x_\eta) T_\xi \Big|_{(e,w)} + (D_2 x_\xi - D_1 y_\xi) T_\eta \Big|_{(e,w)} \quad (31)$$

$$Q_{(n,s)}^\eta = (D_3 y_\eta - D_4 x_\eta) T_\xi \Big|_{(n,s)} + (D_4 x_\xi - D_3 y_\xi) T_\eta \Big|_{(n,s)} \quad (32)$$

onde,

$$D_1 = J(x_\eta \Delta \eta k_{21} - y_\eta \Delta \eta k_{11}) \quad (33)$$

$$D_2 = J(x_\eta \Delta \eta k_{22} - y_\eta \Delta \eta k_{12}) \quad (34)$$

$$D_3 = J(y_\xi \Delta \xi k_{11} - x_\xi \Delta \xi k_{21}) \quad (35)$$

$$D_4 = J(y_\xi \Delta \xi k_{12} - x_\xi \Delta \xi k_{22}) \quad (36)$$