

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DE UM ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISE DE TENSÕES EM SISTEMAS ESTRUTURAIS DE TUBULAÇÕES PRESSURIZADAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE " MESTRE EM ENGENHARIA "

FELIX CHRISTIAN GUIMARÃES SANTOS

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1986

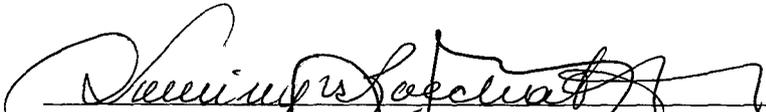
ESTUDO DE UM ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISE DE TENSÕES EM SISTEMAS ESTRUTURAIS DE TUBULAÇÕES PRESSURIZADAS

FELIX CRISTIAN-GUIMARÃES SANTOS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

" MESTRE EM ENGENHARIA "

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

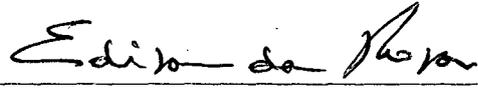
  
DOMINGOS BOECHAT ALVES  
ORIENTADOR

  
CLÓVIS RAIMUNDO MALISKA  
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:

  
DOMINGOS BOECHAT ALVES (D.Sc.)  
PRESIDENTE

  
CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS (Ph.D.)

  
EDISON DA ROSA (M.Sc.)



### AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Domingos não só pela orientação, mas também pela troca de idéias sobre a vida.

Extendo os meus agradecimentos à todos aqueles que de alguma forma contribuíram para o término deste trabalho.

## Í N D I C E

### 1º CAPÍTULO - FUNDAMENTOS

1.1 - Introdução.....	01
1.2 - Revisão Bibliográfica.....	05
1.2.1 - Teoria de Teodor Von Kármán.....	07
1.2.2 - Teoria de Irwin Vigness.....	20
1.2.3 - Extensão de Pardue-Vigness para Tubos de Pequenos Raios de Curvatura do Eixo Médio.....	32
1.2.4 - Extensão de Gross e Ford.....	37
1.2.5 - Extensão de Kafka e Dunn.....	41
1.3 - Definição da Proposição.....	46

### 2º CAPÍTULO - METODOLOGIA

2.1 - Objetivos e Considerações Gerais.....	48
2.2 - Critérios para Análise de Resultados.....	53
2.2.1 - Fator de Flexibilidade (K).....	53
2.2.2 - Fator de Intensificação de Tensões (So)....	54

### 3º CAPÍTULO - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO VIGA-TUBO

3.1 - Considerações Gerais.....	55
3.2 - Comportamento de Viga.....	58
3.2.1 - Elemento Viga-Tubo Curvo.....	64
3.2.2 - Elemento Viga-Tubo Reto.....	79

3.3 - Comportamento de Casca.....	86
3.3.1 - Elemento Viga-Tubo Curvo.....	88
3.3.2 - Elemento Viga-Tubo Reto.....	94
3.4 - Superposição dos Comportamentos de Viga e de Casca do Elemento.....	97
3.5 - Restrições no Contorno do Elemento ou Efeitos de Interação.....	100
3.5.1 - Introdução das Restrições.....	105
3.5.2 - Restrição Fixa.....	106
3.5.3 - Continuidade Inter-Elementos.....	109
3.6 - Pressão Interna.....	112
4º CAPÍTULO - FORMULAÇÃO NUMÉRICA E ANÁLISE DE CASOS	
4.1 - Formulação Numérica.....	117
4.1.1 - Integração Numérica.....	120
4.1.2 - O PASET.....	121
4.2 - Análise de Casos.....	123
4.2.1 - Efeitos das Hipóteses Restritivas.....	123
4.2.2 - Efeito da Continuidade dos Deslocamentos Seccionais.....	130
4.2.2.1 - Elemento Reto.....	132
4.2.2.2 - Elemento Curvo.....	139
5º CAPÍTULO - CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE NOVOS TRABALHOS	
5.1 - Conclusão.....	155
5.2 - Sugestão de Trabalhos.....	158

APÊNDICE I - CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DO ELEMEN- TO VIGA-TUBO.....	160
APÊNDICE II - DESCRIÇÃO DO PASET.....	165
BIBLIOGRAFIA.....	176

## N O M E N C L A T U R A

$\phi$	determina um ponto na seção transversal do tubo.
$\Delta y$	deslocamento de um elemento de linha paralelo ao eixo médio do tubo e localizado sobre a superfície média da mesma.
$\theta$	setor angular entre faces do tubo curvo analisado.
$F_R$	força cuja direção é paralela ao plano de simetria do tubo curvo. Esta força é resultante dos esforços resistentes de membrana na direção longitudinal.
$R$	raio de curvatura do eixo médio da curva tubular.
$\tilde{a}$	raio de curvatura da seção transversal do tubo.
$h$	espessura do tubo.
$W_\phi$	deslocamento de um ponto material da superfície média do tubo na direção circunferencial
$W_\zeta$	deslocamento de um ponto material da superfície média do tubo na direção longitudinal.
$\rho(\theta)$	parcela da deformação da superfície média do tubo na direção longitudinal, devido ao comportamento da viga do tubo.
$\psi(\theta)$	parcela da mudança de curvatura da superfície

$\{\varepsilon_{\phi}^0 \quad \varepsilon_{\theta}^0 \quad \varepsilon_{\phi\theta}^0\}^t$	vetor cujos elementos são os termos não desprezados do tensor de formação da superfície média do tubo.
$K_{\phi}, K_{\theta}$	mudanças de curvatura, não desprezadas, da superfície média do tubo.
$r_2$	raio de curvatura da superfície média do tubo na direção longitudinal.
$r_1$	raio de curvatura da superfície média do tubo na direção circunferencial.
$r_0$	projeção de $r_2$ sobre o plano de simetria da curva tubular.
$dS_0$	elemento de linha na direção longitudinal, antes da deformação.
$dS_1$	$dS_0$ após a deformação.
$\Delta d\theta$	mudança do setor angular $\theta$ após a deformação considerando a deformação da seção transversal do tubo.
$R_1$	raio de curvatura do eixo médio da curva tubular após a deformação.
$r'_0$	curvatura do eixo médio da tubo antes da deformação.
$\Gamma_1$	curvatura do eixo médio do tubo após a deformação.
$M_{\theta}, M_{\phi}$	movimentos seccionais na superfície média do tubo.

$N_\phi, N_\theta$	esforços de membrana da superfície média do tubo.
$V_N$	parcela da densidade de energia de deformação devido aos esforços de membrana.
$V_F$	parcela da densidade de energia de deformação devido aos esforços de flexão da casca do tubo.
$V$	energia de deformação total do tubo curvo.
$\Delta\phi d\theta$	mudança do setor angular $\theta$ após a deformação, sem considerar a deformação da seção transversal do tubo.
$K$	fator de flexibilidade do tubo.
$\beta_1$	fator de intensificação da tensão longitudinal.
$\gamma$	fator de intensificação da tensão circumferencial.
$\lambda$	$\frac{hR}{a^2}$ , fator de Hovgaard
$F$	força longitudinal atuante num elemento de linha.
$\Delta L_R$	alongamento aparente de um elemento de linha na direção longitudinal e no plano de simetria do tubo.
$L_n$	comprimento do eixo neutro da curva tubular.
$\rho$	mudança de curvatura do eixo médio do tubo curvo, na direção perpendicular ao seu plano de simetria.
$\Delta L_\rho$	alongamento aparente de um elemento de linha na direção longitudinal e perpendicular

	ao plano de simetria do tubo curvo.
$\theta$	ângulo entre faces medido perpendicularmente ao plano de simetria do tubo curvo, devido à flexão fora deste plano.
$\Delta L$	alongamento aparente total de um elemento de linha na direção longitudinal.
$E$	módulo de Young.
$X$	distância de um ponto material arbitrário até o plano de simetria do tubo curvo.
$M$	momento atuante nos extremos do tubo curvo.
$I$	momento de inércia da seção transversal do tubo.
$I_1$	momento de inércia da parede do tubo por unidade de comprimento.
$e$	deformação da casca de um tubo curvo, podendo estar fletido no plano de simetria ou fora dele.
$z$	distância de um ponto material à superfície média do tubo.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$n_L$	força de membrana longitudinal.
$n_C$	força de membrana circunferencial.
$m_C$	momento seccional na direção longitudinal.
$\delta$	deslocamento do eixo médio do tubo no plano de simetria do tubo curvo.
$Q$	força cortante normal à casca do tubo.
$\gamma$	$\frac{R}{a}$

Z	$\frac{I}{a}$
P	pressão interna atuante no tubo.
$\Omega$	$\frac{a}{h}$
$\psi$	$\frac{PR^2}{Eah}$
$\underline{K}$	matriz de rigidez do elemento.
$\underline{U}$	vetor dos graus de liberdade nodais do elemento.
$\underline{R}$	vetor carga nodal efetiva.
$\underline{B}$	matriz deformação-deslocamento.
$\underline{C}$	matriz constitutiva do material.
$h_K$	funções de interpolação isoparamétricas.
$v_{pi}^K$	componente i do vetor unitário na direção p, no ponto nodal K, $\ell=0$ sistema indeformado $\ell=1$ sistema deformado
r, s, t	coordenadas isoparamétricas.
$\{U_1^K, U_2^K, U_3^K, \theta_1^K, \theta_2^K, \theta_3^K, c_1^K, c_2^K, c_3^K, d_1^K, d_2^K, d_3^K\}$	vetor dos valores nodais do nodo K, $\underline{U}^K$ .
$\{\epsilon_\phi, \epsilon_\theta, \gamma_{\phi\theta}, \gamma_{\theta\zeta}\}^t$	vetor cujos elementos são os termos do tensor deformação não desprezados na formulação do elemento finito viga-tubo curvo. Para o elemento reto o símbolo $\theta$ é trocado por x.
$\underline{B}^K$	submatriz da matriz deformação-deslocamento que descreve a deformação devida ao comportamento de viga do elemento.
$\underline{B}_{=OV1}^K, \underline{B}_{=OV2}^K, \underline{B}_{=OV3}^K$ e $\underline{B}_{=OV4}^K$	submatrizes da matriz deformação-deslocamen <u>to</u>

	to que descrevem a deformação devida ao <u>com</u> portamento de casca do elemento.
$\alpha_L, \beta_L$	coeficientes de Lamé nas direções circunferencial e longitudinal respectivamente.
$\pi$	função penalidade.
$U$	energia de defomação total.
$W$	potencial das cargas externas.
$\alpha$	parâmetro penalidade.
$\theta_n$	ângulo entre faces do enésimo elemento.
$R_n$	raio de curvatura do eixo médio do enésimo elemento.
$\sigma_\phi^*$	fator de intensificação da tensão circunferencial (o mesmo que $\gamma'$ ).
$\sigma_\theta^*$	fator de intensificação da tensão longitudi <u>n</u> al (o mesmo que $\beta_1$ ).
$L_n$	comprimento do enésimo elemento.

## R E S U M O

Desde o início deste século vários modelos para análise e projeto de estruturas de tubulações foram desenvolvidos, tendo em vista as características peculiares deste tipo de elemento estrutural, principalmente no que tange à deformabilidade de sua seção transversal. Estas abordagens vão desde o modelo de Vón Kármán, utilizando o método variacional de Rayleigh-Ritz, em uma formulação mais primitiva, até modelos sofisticados de elementos finitos.

Este trabalho pretende analisar um elemento finito recentemente desenvolvido, utilizado para análise estrutural de sistemas de tubulações pressurizadas ou não. Trata-se do elemento finito viga-tubo. O estudo realizado busca delinear as limitações e potencialidades do modelo em questão, tentando relacioná-las com as hipóteses e técnicas numéricas utilizadas. Quanto a esta última parte, um esforço maior é direcionado para a análise do comportamento da função penalidade, elaborada com o fim de introduzir compatibilidade  $C^1$  ao longo da casca do tubo nos contornos inter-elementos.

Um sistema computacional chamado PASET (Programa para Análise de Sistemas Estruturais de Tubulações) foi desenvolvido para obter-se os resultados apresentados neste trabalho.

A B S T R A C T

Since the beginning of this century many models for piping structures design and analysis were developed, having in mind the special characteristics of this kind of structural component, mainly concerning to its transversal section deformability. These approaches depart from Von Kármán's model, that use the Rayleigh-Ritz variational method, in a more simplistic formulation, up to very sophisticated finite element models.

This work intends to analyse a recently developed finite element to be used in pressurized piping systems structural analysis. It is a beam-pipe finite element. The accomplished work look for outline the limitations and potentialities of this model, trying to relate them to the used hypothesis and numerical technics. Concerning to this last part, a greater effort is directed to the behaviour analysis of the penalty function constructed to introduct  $C^1$  compatibility along the pipe shell on inter-element boundaries.

A computational system called PASET (Programa para Análise de Sistemas Estruturais de Tubulações) was developed to obtain the results presented in this work.

## 1.1 - INTRODUÇÃO

Os sistemas de tubulações se revestem de importância diferenciada, dependendo do tipo de indústria que os utiliza. Por exemplo, na indústria química, quando há a presença de substâncias corrosivas, tóxicas ou inflamáveis; nas usinas termelétricas ou nas usinas nucleares exige-se critérios de projeto mais rigorosos, pois a falha estrutural de algum componente pode ocasionar graves danos ao meio ambiente ou ao suprimento de energia elétrica, por tempo bastante prolongado. Consequentemente, o custo destes equipamentos torna-se muito elevado, remetendo o analista de estruturas a modelos mais sofisticados de cálculo que prevejam de forma mais eficaz os principais modos de deformação de um sistema de tubulações. No bojo deste processo várias teorias tem surgido, verificando-se, hoje em dia, um esforço considerável no aperfeiçoamento da análise deste elemento estrutural que é o tubo.

Em 1910, Bantlin (2) comprova experimentalmente que a flexibilidade de um tubo curvo é maior do que se podia prever pela teoria das vigas de Euler-Bernoulli e, em 1911, Von Kármán (1) desenvolve um modelo teórico para o cálculo dos deslocamentos, de

formações e tensões em tubos com grandes raios de curvatura do eixo médio e pequenas espessuras (comparados aos raios das seções transversais). Este modelo só previa esforços de momentos fletores no plano de curvatura da linha média do tubo (plano de curvatura do tubo). Além disso, o momento resistente deveria ser constante na direção axial. Só em 1942, Vigness (3) propôs um modelo no qual o carregamento pudesse estar fora do plano de curvatura. Pardue e Vigness (4), em 1950, desenvolvem uma teoria onde se relaxa a restrição na relação entre os raios de curvatura longitudinal e o circunferencial, surgindo uma abordagem que pudesse ser aplicada a tubos com pequenos raios de curvatura. Gross e Ford (5) complementam este modelo e verificam sua faixa de utilização em um grande número de experimentos. Em 1956, Kafka e Dunn introduzem o efeito da pressão interna na análise da rigidez de tubos quando solicitados por momento fletor no plano de curvatura do tubo. Rodabaugh e George (7), no mesmo ano, incorporam, a esta teoria, a análise de tubos curvos pressurizados submetidos a momentos fletores fora do plano de curvatura. É importante citar os trabalhos de Clark, Reissner e Gylroy (15, 16) em 1952 e 1957, Beskin (17) em 1944 e Cheng e Thailer (18) em 1968 que utilizando a teoria clássica para cascas finas, obtiveram resultados bem próximos dos valores experimentais e teóricos já citados.

Em 1956, Turner e Ford (8) fazem uma análise comparativa da abrangência e precisão dos diversos modelos teóricos existentes àquela época; estabelecendo faixas de utilização e opções de uso entre as diversas teorias existentes. A este trabalho seguiu-se, mais tarde e com maior requinte, a publicação de Smith e Ford (9), permitindo, já, uma análise de tubulações submetidas

a momento resistente variável na direção axial. Em 1972, Dogde e Moore fazem uma nova comparação entre teorias e apresentam farto material para análise experimental e teórica.

Apesar de todo o esforço dispendido nestes trabalhos citados, algumas deficiências mostravam-se insuperáveis com os métodos até então empregados:

- O carregamento não pode ser variável (as soluções apresentadas para carregamento variável não se demonstraram satisfatórias(9));
- Não há possibilidade de levar-se em conta efeitos de interação que restrinjam a ovalização do tubo.

Estas dificuldades, aliadas a outras (por exemplo, a impossibilidade de análise de estruturas tubulares mais complexas) levou à introdução do método de elementos finitos no estudo destes tipos de sistemas estruturais.

Foram desenvolvidos basicamente três (03) tipos de abordagem pelo método dos elementos finitos (18, 19, 21, 28, 29):

- Elementos tridimensionais;
- Elementos gerais de casca;
- Elementos especiais.

Segundo análise de Almeida (14) os dois primeiros tipos estão além do estado da arte dos meios de computação atuais, devido ao grande número de graus de liberdade envolvido e ao custo do processamento numérico para uma análise estrutural de um sistema de tubulações típico. O terceiro tipo constitui o objeto de estudo deste trabalho, mais especificamente o elemento viga-tubo desenvolvido por Bathe e Almeida (11, 12, 13). Porém, existem

outros elementos já desenvolvidos, merecendo destaque aqueles descritos sinteticamente por Lazzeri, Scala e Agrone (29).

## 1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Serão desenvolvidos, aqui, somente as hipóteses e desenvolvimento teórico resumido dos principais modelos construídos para o cálculo de tensões em tubos curvos. Uma análise mais detalhada do alcance destes métodos está fora do escopo deste trabalho, entretanto, na bibliografia presente ao final do texto, o leitor interessado encontrará abordagens bem criteriosas das diversas teorias citadas.

Toda viga, cuja seção transversal se deforma facilmente, possui um comportamento diferente daquele previsto pela teoria usual das vigas (Timoshenko-Bernoulli), principalmente se a curvatura do seu eixo médio é diferente de zero. Todos os modelos para tubos curvos levam em consideração essa peculiaridade deste elemento estrutural, que será descrita a seguir.

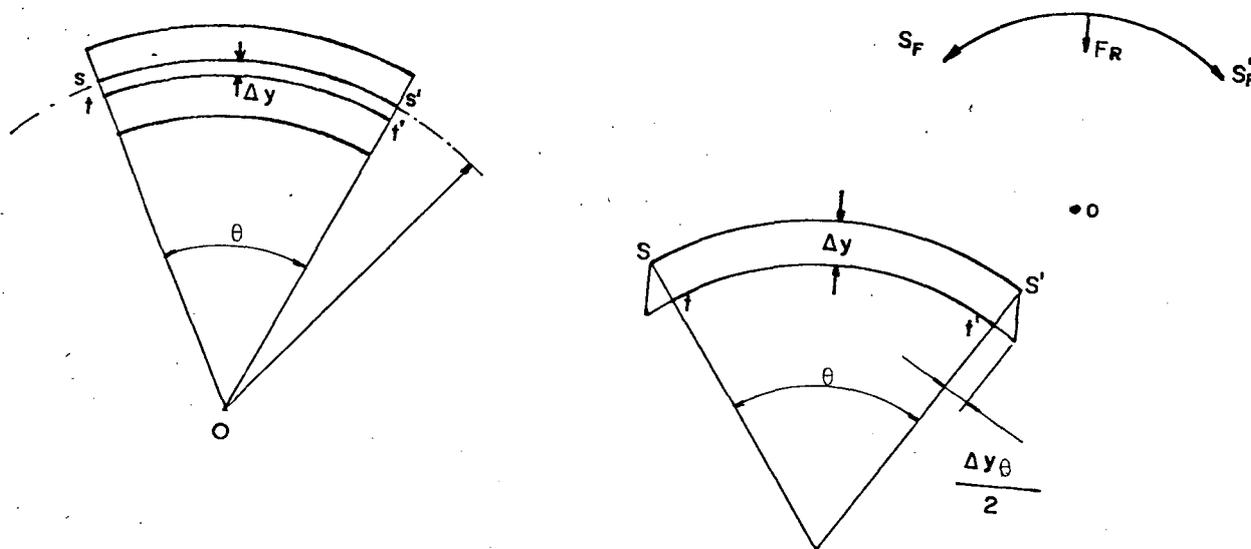


Figura 1. Elemento de linha de um tubo curvo e diagrama de equilíbrio na direção longitudinal.

Considere o filamento  $s-s'$  tomado segundo a direção longitudinal do tubo (fig. 1) e suponha que existam forças de tração ou compressão  $F$  atuando em seus extremos. Consequentemente, irá aparecer uma componente  $F_R$ , na direção radial que irá arrastar o filamento na direção do centro de curvatura do tubo (no caso de tração). Considere, ainda, que o filamento  $s-s'$  vá ocupar o espaço de  $t-t'$ , deslocando-se de  $\Delta y$ . Se for levado em consideração o setor angular  $\theta$ , isto corresponderá a um acréscimo de  $\theta \Delta y$  (para pequenos valores de  $\Delta y$  e  $\theta$ ), que irá aliviar a tração solicitante em  $t-t'$ . Como todos os filamentos do tubo possuem esta mesma tendência, haverá uma maior flexão do tubo do que seria de se prever pela teoria clássica de vigas. Analisando a figura 2 - que descreve o que ocorre com a seção transversal de um tubo curvo - nota-se que a parte tracionada (setor  $AB'A'$ ) se aproxima do centro de curvatura do tubo, enquanto que a parte comprimida se afasta do mesmo. As figuras 2-a e 2-b mostram o comportamento analisado, quando o tubo é solicitado por momento fletor no plano de curvatura e fora do plano de curvatura, respectivamente.

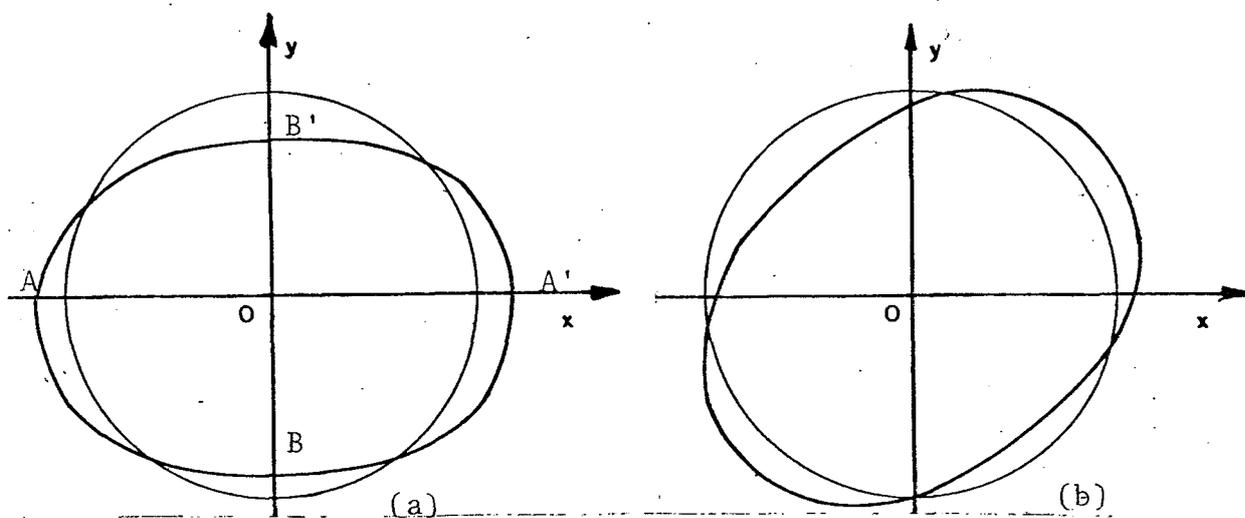


Figura 2. Ovalização do tubo: a) para carregamentos no plano de curvatura do eixo médio; b) para carregamento fora do plano de curvatura.

Serão descritas, a seguir, as principais abordagens que buscaram resolver o problema de determinação das tensões em tubos curvos (levando em consideração o comportamento ilustrado anteriormente), desde Von Kármán em 1911, até hoje.

### 1.2.1 - Teoria de Theodor Von Kármán

Von Kármán (1) propôs algumas hipóteses simplificadas, que lhe permitiram calcular os deslocamentos dos pontos materiais do tubo curvo, quando submetido à momento fletor constante. Ele considerou duas abordagens complementares:

- i) O comportamento de casca da estrutura;
- ii) O comportamento de viga.

As hipóteses foram as seguintes:

- 1 - O raio da seção transversal do tubo ( $a$ ) quando comparado ao raio de curvatura do tubo ( $R$ ) ( $R/a \gg 1$ ) é considerado pequeno;
- 2 - As deformações longitudinais são consideradas constantes através da espessura da parede do tubo ( $h$ ). ( $h/a \ll 1$ );
- 3 - As tensões circunferenciais se devem, somente, a flexão;
- 4 - As deformações circunferenciais se devem, somente, a flexão;
- 5 - As tensões circunferenciais devidas à flexão são distribuídas linearmente, através da espessura do tubo;
- 6 - O coeficiente de Poisson é desprezado;
- 7 - As tensões de cisalhamento transversais são desprezadas;
- 8 - Todas as tensões radiais são desprezadas;

9 - As seções transversais originalmente planas e perpendiculares ao eixo médio do tubo, permanecerão tais, após a deformação.

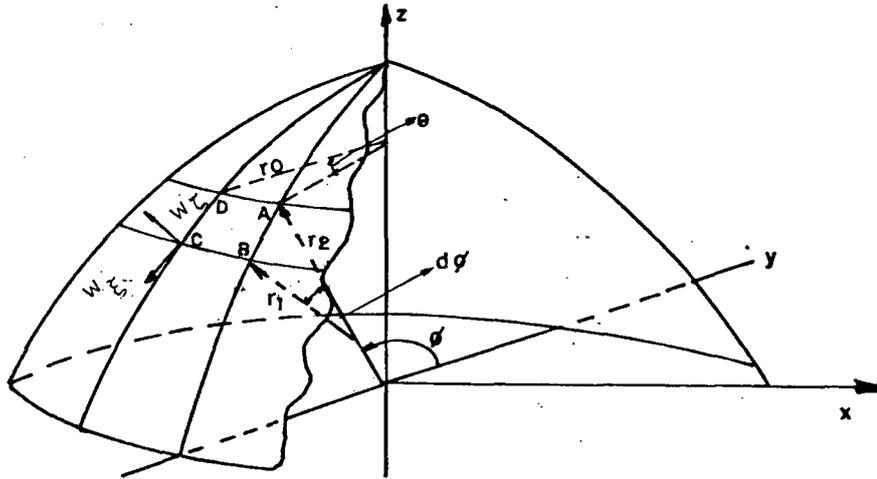


Figura 3. Superfície de revolução qualquer.

Devido às hipóteses 2, 7, 8 e 9 pode-se usar as relações deformação-deslocamento usuais para cascas finas, cuja superfície média é de revolução (22).

$$\epsilon_{\xi\xi}^0 = \frac{1}{r_1} \frac{dW_\xi}{d\phi} + \frac{W_\zeta}{r_1} \quad (1.1)$$

$$\epsilon_{\xi\xi}^0 = - \frac{W_\xi}{r_2} \operatorname{tg}\phi + \frac{W_\zeta}{r_2} \quad (1.2)$$

$$K_\xi = \frac{1}{r_1} \left[ \frac{d}{d\phi} \left( \frac{W_\xi}{r_1} \right) - \frac{1}{r_1} \frac{dW_\zeta}{d\phi} \right] \quad (1.3)$$

$$K_\theta = - \frac{1}{r_1} \left( W_\xi - \frac{dW_\zeta}{d\phi} \right) \frac{\operatorname{tg}\phi}{r_2} \quad (1.4)$$

Sendo as equações (1.1) e (1.2) deformações da superfície média do tubo e (1.3) e (1.4) mudanças de curvatura da mesma.

Considere, agora, uma porção desta superfície de revolução como sendo um setor de torus definido pelo ângulo  $\theta$  (fig. 4). Pelo comportamento de viga da estrutura, quando submetida a um momento  $M$  no plano de curvatura, o ângulo  $\theta$  irá aumentar para  $\theta + \Delta\theta$  (considerando a hipótese 9) (Fig. 5). Este comportamento irá produzir uma deformação longitudinal e uma mudança de curvatura,  $\rho(\theta)$  e  $\psi(\theta)$  respectivamente, que serão superpostas às equações (1.2) e (1.4), respectivamente.

Logo, para o torus deformado pelo momento fletor, teremos:

$$\epsilon_{\phi}^o = \frac{1}{a^2} \left( \frac{dW_{\phi}}{d\phi} + W_{\zeta} \right) \quad (1.5)$$

$$\epsilon_{\theta}^o = \frac{\cos\phi}{R} (W_{\phi} \operatorname{tg}\phi - W_{\zeta}) + \rho(\theta) \quad (1.6)$$

$$K_{\phi} = \frac{1}{a^2} \frac{d}{d\phi} \left( W_{\phi} - \frac{dW_{\zeta}}{d\phi} \right) \quad (1.7)$$

$$K_{\theta} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{Ra} \left( W_{\phi} - \frac{dW_{\zeta}}{d\phi} \right) + \psi(\theta) \quad (1.8)$$

$$\epsilon_{\phi\theta}^o = 0 \text{ pela hipótese (7)}$$

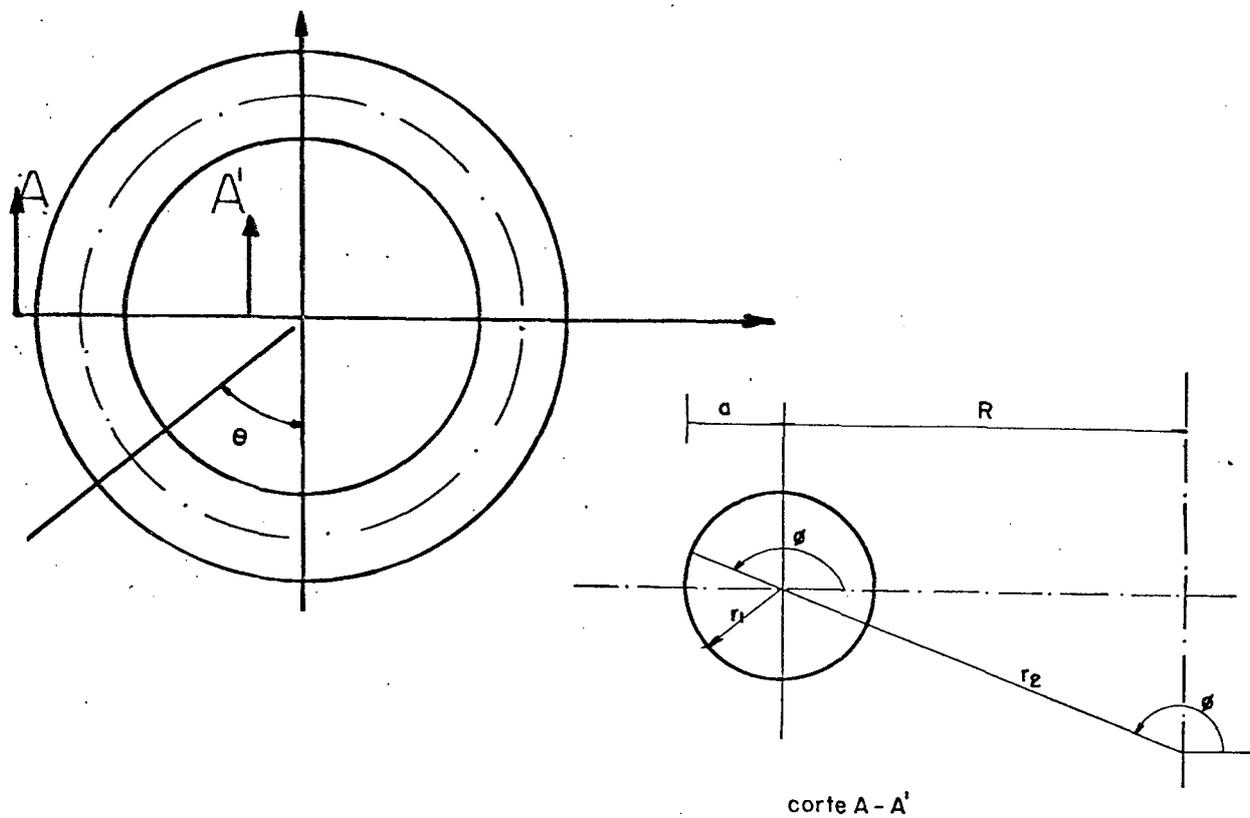


Figura 4. Um torus "perfeito" representará uma curva tubular.

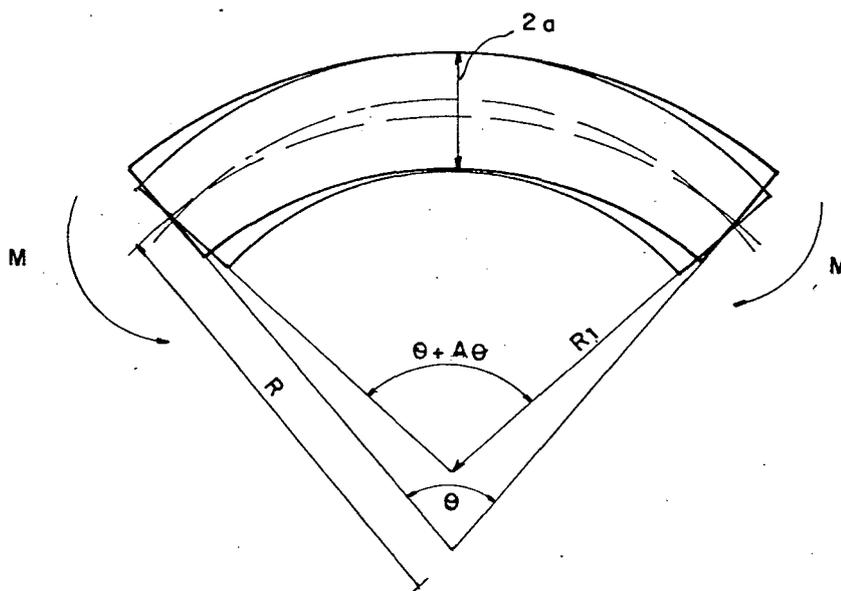


Figura 5. Curva tubular submetida a um momento  $M$  no plano de curvatura do eixo médio.

e, partindo das seguintes considerações:

i) A hipótese (1) nos permite fazer

$$r_0 = R - a \cos \phi \cong R \quad (1.9)$$

e

$$r_2 = - \frac{R - a \cos \phi}{\cos \phi} = - \frac{R}{\cos \phi} + a \cong - \frac{R}{\cos \phi} \quad (1.10)$$

ii)  $r_1 = a \quad (1.11)$

pode-se calcular, agora, as funções  $\rho(\theta)$  e  $\psi(\theta)$ , lembrando que estes termos correspondem ao comportamento de viga do tubo curvo.

O comprimento de um elemento de linha longitudinal antes da deformação é

$$dS_0 = (R - a \cos \phi) d\theta \quad (1.12)$$

Após a deformação, o comprimento do mesmo elemento será

$$dS_1 = (R_1 - a \cos \phi) (d\theta + \Delta d\theta) \quad (1.13)$$

como  $\frac{a}{R} \ll 1$  considera-se que o eixo central seja o eixo neutro, logo

$$Rd\theta = R_1(d\theta + \Delta d\theta) \quad (1.14)$$

Então, a deformação adicional será

$$\rho(\theta) = \frac{dS_1 - dS_0}{dS_0} = - \frac{a \cos \phi}{(R - a \cos \phi)} \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \cong - \frac{a \cos \phi}{R d\theta} \Delta d\theta \quad (1.15)$$

A curvatura de um elemento de linha longitudinal era, originalmente,

$$\Gamma_0 = \frac{d\theta}{dS} \cong \frac{d\theta}{R d\theta} = \frac{1}{R} \quad (1.16)$$

Depois da deformação a curvatura será (utilizando equações (1.12) e (1.13))

$$\Gamma_1 = \frac{d\theta + \Delta d\theta}{dS_1} \cong \frac{d\theta + \Delta d\theta}{R d\theta [1 + \rho(\theta)]} \quad (1.17)$$

A mudança de curvatura, então, é (equação (1.15) e hipótese 1)

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 = \frac{d\theta + \Delta d\theta}{R d\theta [1 + \rho(\theta)]} - \frac{1}{R} \cong \frac{1}{R} \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \quad (1.18)$$

onde  $\rho(\theta)$  foi desprezado, assim como os termos em  $(\frac{1}{R})$ .

Pela geometria diferencial obtém-se

$$\frac{1}{r_2} = - \frac{\cos \phi}{r_0} \quad (1.19)$$

Assim,

$$\psi(\theta) = -(\Gamma_1 - \Gamma_0) \cos \phi = - \frac{\cos \phi}{R} \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \quad (1.20)$$

Algumas hipóteses serão, agora, satisfeitas da seguinte forma:

i) Pela hipótese (4) e utilizando a equação (1.5) obtém-se

$$W_{\zeta} = - \frac{dW_{\phi}}{d\phi} \quad (1.21)$$

o que permite escrever

$$\epsilon_{\theta}^0 = \frac{\cos \phi}{R} (W_{\phi} \operatorname{tg} \phi + \frac{dW_{\phi}}{d\phi}) \quad (1.22)$$

$$K_{\phi} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{dW_{\phi}}{d\phi} + \frac{d^3 W_{\phi}}{d\phi^3} \right) \quad (1.23)$$

$$K_{\theta} = \frac{\operatorname{sen} \phi}{Ra} \left( W_{\phi} + \frac{d^2 W_{\phi}}{d\phi^2} \right) \quad (1.24)$$

ii) Pela hipótese (2), tem-se que

$$K_{\theta} = 0 \quad (1.25)$$

e

$$M_{\theta} = -D[K_{\theta} + \nu K_{\phi}] = 0 \quad (1.26)$$

$$N_{\phi} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\phi} + \nu \varepsilon_{\theta}] = 0 \quad (1.27)$$

(segundo (i) e (ii))

$$N_{\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\theta} + \nu \varepsilon_{\phi}] \quad (1.28)$$

$$M_{\phi} = -D[K_{\phi} + \nu K_{\theta}] \quad (1.29)$$

Agora, já há informação suficiente para o cálculo da densidade de energia de deformação:

i) Devido às forças normais, pelas equações (1.6), (1.15), (1.21) e (1.28).

$$\begin{aligned} V_N &= \frac{1}{2} N_{\theta} \varepsilon_{\theta} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \varepsilon_{\theta}^2 = \\ &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)R^2} \left( W_{\zeta} \sin\phi + \frac{dW_{\phi}}{d\phi} \cos\phi - a \cos\phi \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

ii) Devido à flexão seccional da parede do tubo

$$V_F = \frac{1}{2} M_{\phi} K_{\phi} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{D}{2a^2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left( \frac{dW_\phi}{d\phi} + \frac{d^3W_\phi}{d\phi^3} \right) + \frac{v}{R} \left[ \left( W_\phi + \frac{d^2W_\phi}{d\phi^2} \right) \frac{\sin\phi}{a} - \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \cos\phi \right] \right\} \cong \\
&\cong -\frac{D}{2a^4} \left( \frac{dW_\phi}{d\phi} + \frac{d^3W_\phi}{d\phi^3} \right) \quad (1.31)
\end{aligned}$$

Logo, a energia armazenada na parede do tubo, por Unidade de Comprimento,  $\bar{e}$ , aproximadamente

$$V = \int_0^{2\pi} V_N a d\phi + \int_0^{2\pi} V_F a d\phi \quad (1.32)$$

Como pode-se notar pelo modelo proposto para a ovalização da seção transversal do tubo, quando submetido a um momento fletor no plano de curvatura (figura 6), a ovalização é simétrica em relação aos dois eixos, implicando em  $W_\phi = 0$  nos pontos 1, 2, 3 e 4.

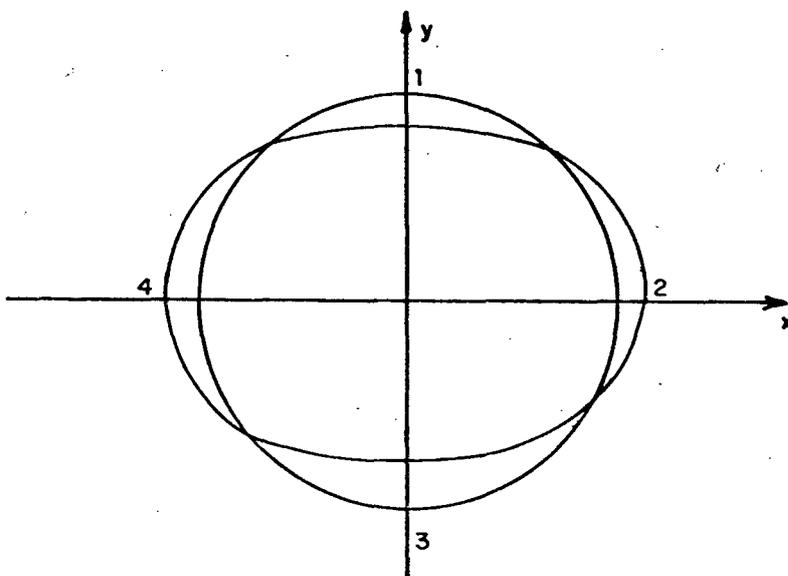


Figura 6. Simetria da ovalização para carregamentos no plano de curvatura do eixo médio.

Uma série trigonométrica que satisfaz esta exigência é

$$W_{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} 2n\phi \quad (1.33A)$$

Como o trabalho realizado pelas forças externas (M) não depende dos  $C_n$ 's da equação (1.33A), o Princípio do Trabalho Mínimo requer que

$$\frac{\partial V}{\partial C_m} = 0 \quad V_m \quad (1.33B)$$

onde m representa o número de termos que limita o somatório da equação (1.33A). Uma vez encontrados os  $C_m$ 's, o mínimo de V deve ser tal que

$$V_{\min} = \frac{1}{2} M \frac{\Delta d\theta}{R d\theta} \quad (1.34)$$

de onde  $\frac{\Delta d\theta}{d\theta}$  é calculado em função de M.

Considere, agora, um tubo reto de seção transversal e comprimento iguais ao do tubo curvo e com o mesmo momento M atuando em seus extremos.

Supondo que seja válida a teoria das membranas para tensões num tubo reto e, também válida a hipótese (9), a rotação por unidade de comprimento será (supondo, também, que não haja ovalização da seção transversal).

$$\frac{\Delta_0 d\theta}{R d\theta} = \frac{(1-\nu^2)M}{EI} \quad (1.35)$$

onde  $I = \pi a^3 h$

A razão

$$K = \frac{\Delta d\theta}{\Delta_0 d\theta} \quad (1.36)$$

calculada a partir das equações (1.34) e (1.35) é chamada de FATOR DE FLEXIBILIDADE.

O cálculo da tensão máxima de flexão será feito como se segue; Considerando somente o 1º termo da equação (1.33)

$$\sigma_\theta = \frac{N\theta}{h} \quad (1.37)$$

com

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} (W_\phi \operatorname{sen}\phi - W_\xi \operatorname{cos}\phi - a \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \operatorname{cos}\phi) \quad (1.38)$$

e com as equações (28) e (57), obtêm-se

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\Delta d\theta}{R d\theta} \left( -a \operatorname{cos}\phi + \frac{2B}{A} \operatorname{cos}^3 \phi \right) \quad (1.39)$$

onde

$$A = \frac{5}{2} \frac{Eha}{R^2} + \frac{36D}{a^3} \quad (1.40)$$

$$B = \frac{3}{2} \frac{Eha^2}{R^2}$$

utilizando somente o primeiro termo para  $W_\phi$  e as equações (1.35) e (1.39), tem-se

$$\sigma_\theta = \frac{MK}{I} \left( -a \cos \phi + \frac{2B}{A} \cos^3 \phi \right) \quad (1.41)$$

que possui o máximo

$$\sigma_{\theta \text{ máx}} = \frac{Ma}{I} \beta_1 \quad (1.42)$$

com

$$\beta_1 = \frac{2}{3} K \sqrt{aA/6B} \quad (1.43)$$

para

$$\frac{6B}{A} > a \quad (1.44)$$

e

$$\sigma_{\theta_{\text{m\acute{a}x}}} = \frac{Ma}{I} \beta_1 \quad (1.45)$$

Com

$$\beta_1 = K \left( 1 - \frac{2B}{aA} \right) \quad (1.46)$$

para

$$\frac{6B}{A} < a \quad (1.47)$$

Os termos definidos em (1.43) e (1.46) são chamados "FATORES DE INTENSIFICAÇÃO DE TENSÃO". Pode-se colocá-los na seguinte forma mais conveniente:

$$\beta_1 = \frac{12\lambda^2 - 2}{12\lambda^2 + 1} \quad \text{para } \lambda > 1.472 \quad (1.48)$$

e

$$\beta_1 = \frac{(12\lambda^2 + 10)^{3/2}}{9(12\lambda^2 + 1)} \quad \text{para } \lambda < 1.472$$

onde

$$\lambda = \frac{hR}{a^2} \quad (1.49)$$

chamado FATOR DE HOVGAARD.

Assim, a máxima tensão de flexão atuante no tubo pode ser calculada, bastando multiplicar os resultados obtidos pela

teoria usual de vigas por  $\beta_1$ . Esta solução, apresentada por Von Kármán, demonstrou boa coerência com os dados experimentais obtidos por Bantlin (2).

### 1.2.2 - Teoria de Irwin Vigness

Vigness (3) desenvolveu, para momentos de flexão fora do plano de curvatura do tubo, o que Von Kármán havia desenvolvido para movimentos de flexão no plano de curvatura; além de demonstrar que não há modificação na rigidez torsional de um tubo reto quando comparado a um tubo curvo.

Considere a figura (7), onde  $R$  é o raio de curvatura do eixo médio do tubo;  $\theta R$  é seu comprimento,  $h$  é a espessura e  $a$  é o raio médio da seção transversal do tubo.

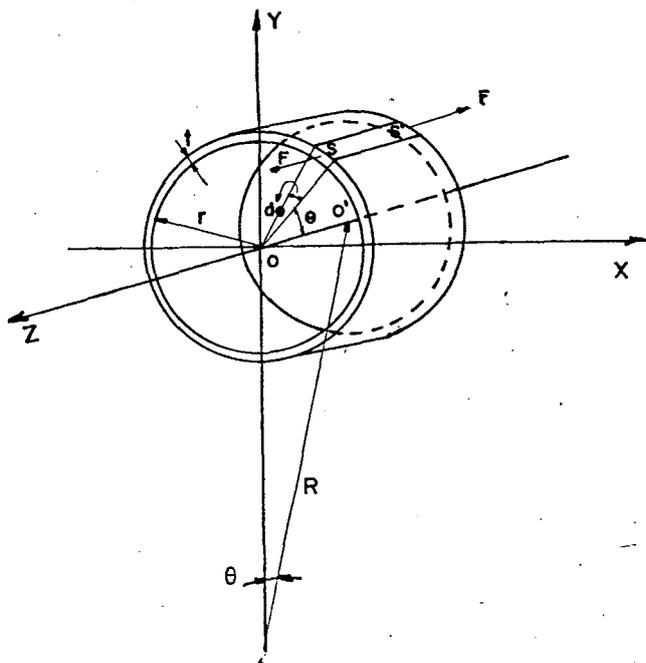


Figura 7. Representação de uma curva tubular.

Assuma, agora, uma força longitudinal  $F$ , atuando sobre o filamento  $ss'$ . Se  $\sigma_\theta$  é a força por unidade de área, então, (figura 8)

$$dF = \sigma_\theta h a d\phi \quad (1.50)$$

Como o filamento é curvo, há uma componente de força  $f_R'$  ao longo do raio de curvatura do tubo. Para pequenos valores de  $\theta$ , tem-se que

$$dF_R' = -\sigma_\theta h a \theta d\phi \quad (1.51)$$

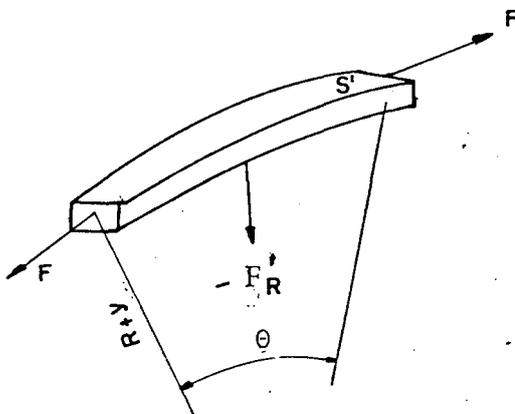


Figura 8. Elemento de linha retirado do tubo descrito na figura 7.

O termo  $\sigma_\theta$  é positivo quando o filamento está tensionado e  $F_R'$  é positivo quando na direção positiva do eixo  $y$ .

A distorção da parede do tubo devido à  $F_R'$  fará com que o filamento se desloque de uma distância  $\Delta y$  (figura 9) na direção radial. Se o tubo está sujeito à uma tensão de flexão em qualquer plano, tal que o filamento  $ss'$  fique sujeito à uma ten-

são longitudinal, este filamento se moverá para a posição  $s_1 s_1'$  e a deformação do filamento será aliviada por um montante de

$$\Delta L_R = \theta \Delta y \quad (1.52)$$

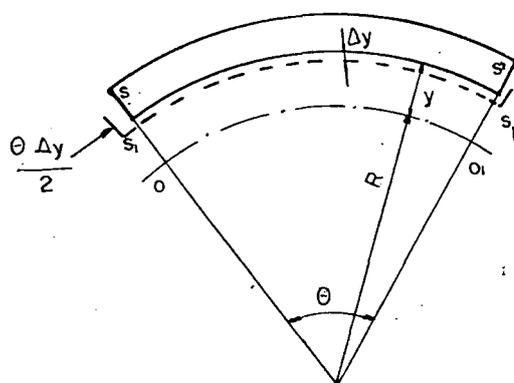


Figura 9. Deslocamentos no elemento de linha.

onde  $\Delta L_R$  é o alongamento aparente do filamento devido ao seu deslocamento na direção radial.

O comprimento do eixo neutro compreendido pelo ângulo  $\theta$  é

$$L_n = R\theta \quad (1.53)$$

Um plano perpendicular ao plano que contém a curvatura (em qualquer ponto do eixo médio) é mostrado na figura 10. As linhas curvas representam o tubo depois dele ter sido fletido para um raio de curvatura  $\rho$ , e por um momento atuando perpendicularmente ao plano de curvatura do tubo não deformado.

O comprimento do eixo neutro compreendido pelo mesmo

ângulo do filamento agora é expresso como

$$L_n = \rho \theta \quad (1.54)$$

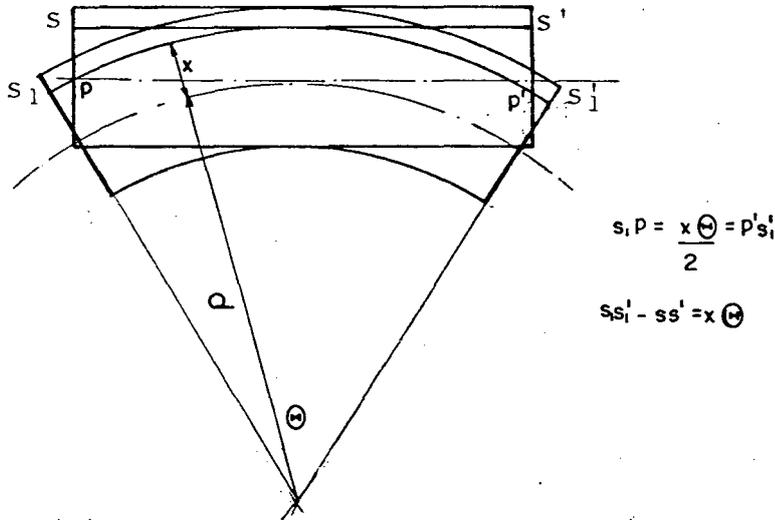


Figura 10. Flexão do tubo fora do plano de curvatura do eixo médio.

Se R e  $\rho$  são grandes, quando comparados a  $\underline{a}$  e, se os ângulos  $\theta$  e  $\theta$  são pequenos, pode-se, através das equações (1.53) e (1.54), obter

$$R\theta = \rho\theta \quad (1.55)$$

Se não houve nenhuma mudança de posição de  $ss_1'$  ao longo da direção radial, a mudança de comprimento do filamento durante a flexão para o raio de curvatura  $\rho$  (figura 10) será

$$\Delta L_\rho = x\theta \quad (1.56)$$

No entanto, devido ao movimento do filamento na direção radial, a variação real de comprimento será

$$\Delta L = \Delta L_{\rho} + \Delta L_R \quad (1.57)$$

ou

$$\Delta L = x\theta + \theta\Delta y \quad (1.58)$$

A variação de comprimento do filamento por unidade de comprimento do eixo neutro do tubo será

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\Delta L}{L_n} = \frac{x}{\rho} + \frac{\Delta y}{R} \quad (1.59)$$

e a tensão no filamento

$$\sigma_{\theta} = E\epsilon_{\theta} = E\left(\frac{x}{\rho} + \frac{\Delta y}{R}\right) \quad (1.60)$$

onde  $E$  é o módulo de Young.

A força radial sobre o filamento, segundo as equações (1.51) e (1.60) será

$$dF_R' = -hEa\left(\frac{x}{\rho} + \frac{\Delta y}{R}\right) \theta d\phi \quad (1.61)$$

Se a força radial por unidade de comprimento do tubo

for considerada, a relação  $\theta R = 1$  é satisfeita e

$$dF_R' = \frac{hEa}{R} \left( \frac{x}{\rho} + \frac{\Delta y}{R} \right) d\phi \quad (1.62)$$

A partir deste ponto, o desenvolvimento é semelhante àquele proposto por Von Kármán. Sejam  $W_\zeta$  o deslocamento normal do filamento  $ss'$  e  $W_\phi$  o deslocamento tangencial (figura 11), então,

$$\Delta y = W_\phi \operatorname{sen} \phi - W_\zeta \operatorname{cos} \phi \quad (1.63)$$

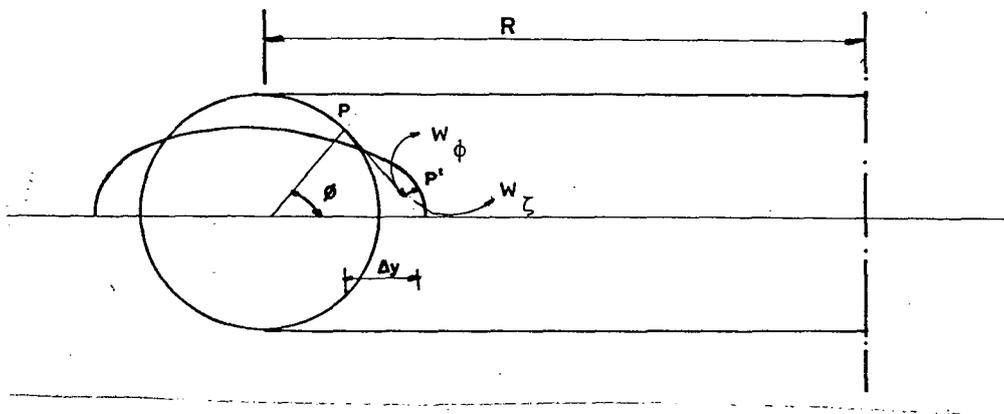


Figura 11. Deslocamentos da seção transversal do tubo durante a deformação.

Com

$$x = a \operatorname{sen} \phi \quad (1.64)$$

a equação (1.62) fica

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \left( \frac{aR}{\rho} \operatorname{sen} \phi + W_\phi \operatorname{sen} \phi - W_\zeta \operatorname{cos} \phi \right) \quad (1.65)$$

os deslocamentos tangencial e normal são relacionados pela equação (vide seção 1.2.1) que representa a inextensibilidade da seção.

$$\frac{dW_\phi}{d\phi} + W_\zeta = 0 \quad (1.66)$$

podendo a equação (1.65) ser escrita na forma

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \left( \frac{aR}{\rho} \operatorname{sen}\phi + W_\phi \operatorname{sen}\phi + \frac{dW_\phi}{d\phi} \cos\phi \right) \quad (1.67)$$

Uma equação, que relaciona o deslocamento  $\Delta y$  do filamento  $ss'$  e o ângulo  $\phi$ , pode ser obtida ao se minimizar o funcional da energia potencial devido à flexão do tubo. A condição de flexão considerada será aquela em que o momento fletor é perpendicular ao plano de curvatura do tubo. A energia de deformação consiste de duas partes:

- i) Aquela devido à deformação da seção transversal do tubo e
- ii) Aquela devido ao comportamento de viga do tubo (flexão do eixo médio sem deformação da seção transversal)

A energia considerada em (i) pode ser escrita como

$$V_F = \int_0^{2\pi} \frac{M_\phi^2 a d\phi}{2EI_1} \quad (1.68)$$

com

$$I_1 = \frac{h^3}{12} \quad (1.69)$$

sendo o momento de inércia de uma seção da parede do tubo de largura unitária

$$M_{\phi} = -\frac{EI_1}{a^2} \left( \frac{d^2 W_{\xi}}{d\phi^2} + W_{\xi} \right) \quad (1.70)$$

é o momento atuante na parede do tubo.

Combinando as equações (1.66), (1.68) e (1.70) obtêm-se

$$V_{\Gamma} = \frac{Eh^3}{24a^3} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^3 W_{\phi}}{d\phi^3} + \frac{dW_{\phi}}{d\phi} \right)^2 d\phi \quad (1.71)$$

Considerando, agora, o item (ii), tem-se

$$V_N = \frac{1}{2} \int_A \sigma_{\theta} \epsilon_{\theta} dA \quad (1.72)$$

onde  $\sigma_{\theta}$  é a força por unidade de área atuante no filamento de seção transversal de área  $dA$ , responsável pelo alongamento  $\epsilon_{\theta}$ .

Assim,

$$\sigma_{\theta} = E\epsilon_{\theta} \quad (1.73)$$

$$dA = ha d\phi \quad (1.74)$$

e a equação (1.67) fornece uma expressão para  $\epsilon_{\theta}$  que leva a

$$V_N = \frac{Eha}{2R^2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{aR}{\rho} \sin\phi + W_\phi \sin\phi + \frac{dW_\phi}{d\phi} \cos\phi \right)^2 d\phi \quad (1.75)$$

A energia de deformação total será

$$V = V_F + V_N = \frac{Eha}{2R^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left( \frac{aR}{\rho} \sin\phi + W_\phi \sin\phi + \frac{dW_\phi}{d\phi} \cos\phi \right)^2 d\phi \right. \\ \left. + \frac{h^2 R^2}{12a^4} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^3 W_\phi}{d\phi^3} + \frac{dW_\phi}{d\phi} \right)^2 d\phi \right\} \quad (1.77)$$

Utilizando as mesmas considerações que Von Kármán utilizou na determinação das funções de interpolação para  $W_\phi$ , só que deslocadas de  $\pi/2$ , Vigness propõe

$$W_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos 2n\phi \quad (1.78)$$

suponha que

$$W_\phi = C \cos 2\phi \quad (1^\circ \text{ aprox.}) \quad (1.79)$$

que, substituindo no funcional da energia de deformação total e impondo condições de mínimo, obtém-se

$$C = - \frac{aR}{\rho} \left( \frac{3}{R + 6\lambda^2} \right) \quad (1.80)$$

onde  $\lambda$  é descrito na equação (1.49)

Logo

$$\Delta y = \frac{aR}{y} \left( \frac{3}{R+6\lambda^2} \right) (\cos 2\phi \sin \phi - 2 \sin 2\phi \cos \phi) \quad (1.81)$$

Com o momento resistente

$$M = \int_0^{2\pi} a \sin \phi \sigma_{\phi} dA \quad (1.82)$$

pode-se obter

$$M = \frac{\pi h E a^3}{\rho} \left( \frac{12\lambda^2 + 1}{12\lambda^2 + 10} \right) = \frac{EI}{\rho} \left( \frac{12\lambda^2 + 1}{12\lambda^2 + 10} \right) \quad (1.83)$$

que, comparando com a teoria clássica de vigas, corresponde a um fator de flexibilidade

$$K = \frac{12\lambda^2 + 1}{12\lambda^2 + 10} \quad (1.84)$$

que é idêntico ao encontrado por Von Kármán para momento atuando no plano de curvatura do tubo.

A tensão circunferencial na superfície do tubo é

$$\sigma_{\phi} = \frac{M_{\phi} h}{2I_1} \quad (1.85)$$

e, conseqüentemente,

$$\sigma_{\phi} = \frac{18\lambda a M_{\phi} \text{sen}2\phi}{I_1(12\lambda^2 + 1)} = \frac{\gamma' Ma}{I_1} \text{sen}2\phi \quad (1.86)$$

Com

$$\gamma' = \frac{18\lambda}{12\lambda^2 + 1} \quad (1.87)$$

que é o fator de multiplicação da tensão circunferencial (idêntico ao desenvolvido por Von Kármán).

A tensão longitudinal pode facilmente ser obtida na forma

$$\sigma_{\phi} = \frac{4aM}{I} \left[ \frac{(3\lambda^2 - 2) \text{sen}\phi + 3\text{sen}^3\phi}{12\lambda^2 + 1} \right] \quad (1.88)$$

cujo máximo é

$$\sigma_{\phi \text{ máx.}} = \frac{aM}{I} \left( \frac{12\lambda^2 + 4}{12\lambda^2 + 1} \right) \quad (1.89)$$

Com o coeficiente de intensificação da tensão longitudinal

$$\beta_1 = \frac{12\lambda^2 + 4}{12\lambda^2 + 1} \quad (1.90)$$

Um mínimo interessante é observado para  $\text{sen}^2\theta=(2-3\lambda^2)/9$  para cujo valor a tensão longitudinal é

$$\sigma_{\theta\text{min.}} = - \frac{8aM}{9I} \left( \frac{2 - 3\lambda^2}{12\lambda^2 + 1} \right)^{3/2} \quad (1.91)$$

Uma análise relacionando o desenvolvimento da teoria de Vigness com a de Von Kármán mostra uma intimidade muito grande entre os dois modelos. É o que é feito a seguir:(veja seção 1.2.1)

- Hipótese 1 - Foi aplicada na passagem da equação (1.54) para a equação (1.55);
- Hipótese 2 - Na equação (1.59) não está incluída a deformação por flexão da parede do tubo;
- Hipótese 3 - Na equação (1.85) o único termo responsável pela tensão  $\sigma_{\phi}$  é o momento atuante na parede do tubo M;
- Hipótese 4 - A relação (1.66) garante a aplicação desta hipótese. A parcela relativa à flexão é incluída na equação (1.70);
- Hipótese 5 - Na equação (1.70) o momento M é constante ao longo da parede do tubo, garantindo deformações (e, conseqüentemente, tensões, pois  $\frac{R}{a} \gg 1$  e  $\frac{h}{a} \ll 1$ ) aí distribuídas linearmente;
- Hipótese 6 - Nas equações (1.69), (1.70), (1.71), (1.73) e (1.85) o coeficiente de Poisson foi desprezado;
- Hipótese 7 - Estas tensões são desprezadas;
- Hipótese 8 - O mesmo para tensões radiais;

Hipótese 9 - Todos os cálculos de mudanças de curvatura se basearam nesta hipótese.

Isto demonstra a compatibilidade entre as duas abordagens.

### 1.2.3. - Extensão de Pardue-Vigness para Tubos de Pequenos Raios de Curvatura do Eixo Médio

Pardue e Vigness (4) desenvolveram uma extensão às duas teorias apresentadas anteriormente, na qual a hipótese 1 (vide seção 1.2.1) é relaxada, permitindo incluir aqueles tubos cuja relação  $(a/R)$  não seja desprezível. A hipótese 6 também é retirada.

No mesmo trabalho foram feitos experimentos, que demonstram que a variação da ovalização da seção transversal depende das restrições aos extremos do tubo, curvo e da razão  $(a/R)$ .

Symonds (25) contribuiu bastante para o desenvolvimento da extensão de Pardue e Vigness. Eles preservaram todas as hipóteses de Von Kármán, exceto as 1 e 6. Sendo assim, as deformações e tensões normais podem ser escritas na seguinte forma (figura 12)

$$\epsilon_{\theta} = e \quad (a)$$

$$\epsilon_{\phi} = zK_{\phi} \quad (b)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (e + z\nu K_{\phi}) \quad (c)$$

$$\sigma_{\phi} = \frac{E}{1-\nu^2} (zK_{\phi} + \nu e) \quad (d)$$

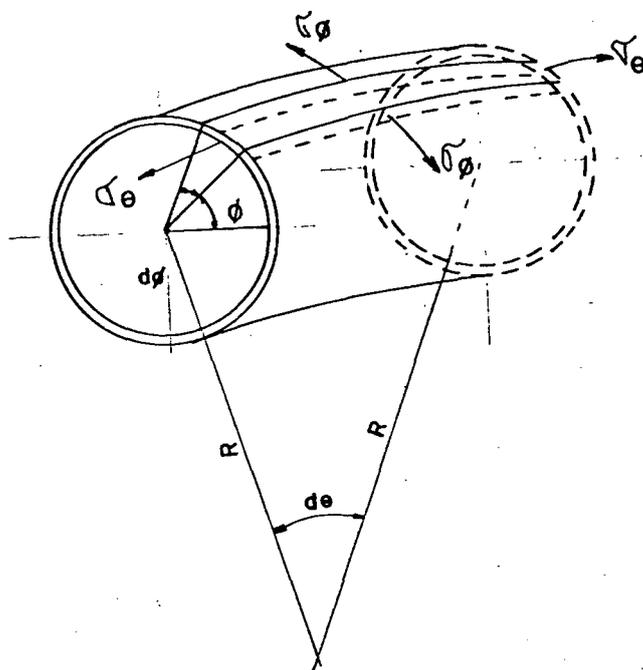


Figura 12. Principais tensões atuantes no tubo curvo.

Utilizando as hipóteses descritas a expressão da energia de deformação do tubo pode ser

$$V = \int_0^{\theta} \int_0^{2\pi} \frac{EhRa}{2(1-\nu^2)} \left( e^2 + \frac{h^2 K_{\phi}^2}{12} \right) \left( 1 - \frac{h^2 K_{\phi}^2}{12} \right) \left( 1 - \frac{a}{R} \cos\phi \right) d\phi d\theta \quad (1.93)$$

que se aplica para qualquer tipo de carregamento, tendo em vista que, o que depende do carregamento são as expressões das deformações ( $e$  e  $K_{\phi}$ ).

Para o caso de flexão no plano de curvatura (o momento fletor, aqui, é considerado uniforme ao longo do tubo), a deformação longitudinal pode ser expressa por (04), (10)

$$e_p = e(\phi) = \left[ \frac{C(\delta - a \cos \phi) + \frac{1}{R}(-W_\xi \cos \phi + W_\phi \sin \phi)}{1 - \frac{a}{R} \cos \phi} \right] \quad (1.94)$$

onde  $W_\xi$  e  $W_\phi$  são os deslocamentos de um elemento da parede do tubo nas direções normal e tangencial à superfície média do tubo e  $\delta$  é o deslocamento do eixo neutro (deslocamento no plano de flexão, obviamente).

No caso de flexão fora do plano de curvatura, a deformação longitudinal pode ser escrita como

$$e_{tc} = e(\phi, \theta) = \left[ \frac{C_t(\theta) a \sin \phi + \frac{1}{R}(-W_\xi \cos \phi + W_\phi \sin \phi)}{1 + \frac{a}{R} \cos \phi} \right] \quad (1.95)$$

onde  $C_t$  é a mudança de curvatura do eixo médio na direção transversal ao plano de curvatura do tubo.

Para os dois tipos de carregamento, a mudança de curvatura  $K$ , da seção transversal será

$$K = - \frac{1}{a^2} (W_\xi + \frac{d^2 W_\xi}{d\phi^2}) \quad (1.96)$$

Pela hipótese 4

$$W_{\zeta} = - \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} \quad (1.97)$$

Usando estes resultados, as energias de deformação nos dois casos podem ser expressas como

a - Flexão no Plano de Curvatura

$$V = \frac{EhRa\theta}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ \frac{C(\delta - a\cos\phi) + \frac{1}{R}(W_{\phi} \cdot \sin\phi + \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} \cdot \cos\phi)}{1 - \frac{a}{R}\cos\phi} \right]^2 + \frac{h^2}{12a^4} \left( \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial^3 W_{\phi}}{\partial \phi^3} \right)^2 \left(1 - \frac{a}{R}\cos\phi\right) \right\} d\phi \quad (1.98)$$

b - Flexão Fora do Plano de Curvatura

$$V = \frac{EhRa}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\theta} \int_0^{\pi} \left\{ \left[ \frac{C_t a \sin\phi + \frac{1}{R}(W_{\phi} \cdot \sin\phi + \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} \cdot \cos\phi)}{1 - \frac{a}{R}\cos\phi} \right]^2 + \frac{h^2}{12a^2} \left( \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial^3 W_{\phi}}{\partial \phi^3} \right)^2 \left(1 - \frac{a}{R}\cos\phi\right) \right\} d\phi d\theta \quad (1.99)$$

O método utilizado na determinação de  $W_{\phi}$  e  $W_{\zeta}$  é baseado no teorema da energia potencial mínima. As séries trigonométricas que mais se adequam às características do deslocamento  $W_{\phi}$  são

a - Flexão no Plano de Curvatura

$$W_{\phi} = -aRC \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \sin 2m\phi + b_m \cos(2m+1)\phi] \quad (1.100)$$

## b - Flexão Fora do Plano de Simetria

$$W_{\phi} = -aRC_t(\theta) \sum_{m=1}^{\infty} a'_m \cos 2m\phi + b'_m \sin(2m-1)\phi \quad (1.101)$$

Os parâmetros adimensionais  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $a'_m$  e  $b'_m$  são agora determinados inserindo as equações acima em (1.98) e (1.99), respectivamente e resolvendo simultaneamente o conjunto de equações obtidas no processo de minimização. No caso de flexão no plano de curvatura, uma equação adicional, expressando o fato da força axial resultante ser zero, é necessária para a determinação da variação do eixo neutro,  $\delta$ .

Os momentos de flexão podem ser calculados pelas relações

## a -- Flexão no Plano de Curvatura

$$M_p = - \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^{2\pi} e_p h a^2 \cos \phi d\phi \quad (1.102)$$

## b - Flexão Fora do Plano de Curvatura

$$M_t = \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^{2\pi} e_t h a^2 \sin \phi d\phi \quad (1.103)$$

que podem ser colocados nas formas

$$a - \quad M_p = \frac{EIC}{K_p} \quad (1.104)$$

$$b - \quad M_t = \frac{EIC_t}{K_t} \quad (1.105)$$

Aqui, os fatores  $K_p$  e  $K_t$  são os fatores de correção da flexibilidade devido à flexão no plano de curvatura e fora deste plano, respectivamente.

#### 1.2.4. - Extensão de Gross e Ford

Gross (26) (verificando que, a medida que a razão  $(a/R)$  ia aumentando, a tensão circunferencial ia se tornando mais e mais importante, principalmente para tubos de espessura fina) generalizou ainda mais a abordagem de Pardue e Vigness.

Supondo que a análise de Von Kármán determina corretamente a força de membrana longitudinal e o momento de flexão seccional na direção circunferencial, Gross determinou a força de membrana circunferencial necessária para satisfazer as condições de equilíbrio estático. O que se segue é uma generalização desta sua análise (10).

Considere os dois corpos livres A e B da figura 13. Eles são obtidos de um segmento de tubo curvo de comprimento de arco  $\theta$ , passando planos longitudinais pelos pontos determinados por valores fixos de  $\phi$ . A força de membrana longitudinal será chamada de  $n_L$ ;  $m_C$  será o momento de flexão seccional na direção circunferencial e  $Q$  a força de cisalhamento transversal. Só será con-

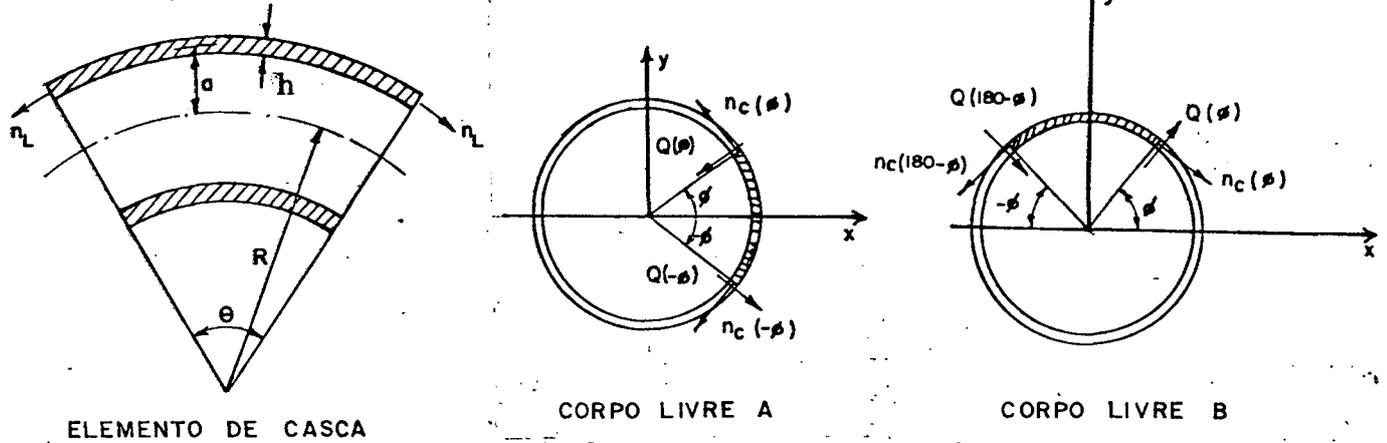


Figura 13. Diagramas de equilíbrio na direção circunferencial do tubo curvo.

siderada a superfície média do tubo.

Para flexão no plano de curvatura, a força de membrana longitudinal será obtida a partir da equação (1.38) generalizada (veja referência 13).

$$n_L(\phi) = \frac{h \left( \frac{1}{1+d_1(3/2)} \right)}{1-\nu^2} \cdot \frac{aM_\phi}{I_1} \left[ \left(1 + \frac{3}{2}d_1\right) \text{sen}\phi + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N A_m \text{sen}(2m+1)\phi \right] \quad (1.106)$$

onde

$$d_1 = \frac{C_1}{R} \quad (1.107)$$

Com  $C_1$  dado pela equação do primeiro coeficiente da série trigonométrica (1.33) e  $A_m$  será

$$A_m = (1-2m)d_m + (2m+3)d_{m+1} \quad (1.108)$$

(veja referência 10)

A força de cisalhamento transversal  $Q$ , obtida da equação para  $\sigma_\phi$  generalizada será

$$Q(\phi) = \frac{d_m c}{a d \phi} = - \frac{\lambda h^2}{6a} \sum_{m=1}^N m B_m \operatorname{sen} 2m\phi \quad (1.109)$$

onde

$$B_m = (2m - 8m^3) d_m$$

com

$$d_m = \frac{C_m}{R} \quad (1.110)$$

Então

$$Q(180-\phi) = - \frac{\lambda h^2}{6a} \sum m B_m \operatorname{sen} 2m(180-\phi) = -Q(\phi) \quad (1.111)$$

também

$$Q(-\phi) = - \frac{\lambda h^2}{6a} \sum m B_m \operatorname{sen} 2m(-\phi) = -Q(\phi) \quad (1.112)$$

No corpo livre A, a soma das forças na direção  $y$  deve ser zero

$$\sum F_y = 0 = R \theta \{ -[Q(\phi) + Q(-\phi)] \operatorname{sen} \phi + [n_c(+\phi) + n_c(-\phi)] \cos \phi \} \quad (1.113)$$

Mas, de (111)

$$Q(\phi) = -Q(-\phi) \quad (1.114)$$

Então

$$n_c(\phi) = n_c(-\phi) \quad (1.115)$$

A soma das forças na direção x também deve ser zero

$$\Sigma F_x = 0 = R\theta \{ [Q(\phi) + Q(180-\phi)] \cos\phi + [n_c(\phi) - n_c(180-\phi)] \operatorname{sen}\phi \} \quad (1.116)$$

Então

$$n_c(\phi) = n_c(180-\phi) \quad (1.117)$$

além disso,

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \int_{\phi}^{180-\phi} n_L d\xi + R\theta [Q(\phi) - Q(180-\phi)] \operatorname{sen}\phi \\ &- R\theta [n_c(\phi) + n_c(180-\phi)] \cos\phi \end{aligned} \quad (1.118)$$

$$\begin{aligned} 2a\left(\frac{\phi}{2}\right) \int_{\phi}^{\pi/2} n_L d\xi &= R\theta [Q(\phi) \operatorname{sen}\phi - n_c(\phi) \cos\phi] \\ &= -R\theta n_c(\phi) \frac{[\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi]}{\cos\phi} \end{aligned} \quad (1.119)$$

Substituindo a expressão para  $n_L$  dada pela equação (1.106) e executando a integração indicada em (1.119), obteremos

$$n_c(\phi) = -\left(\frac{1}{1+\frac{3}{2}d_1}\right) \frac{M_1 h}{\gamma Z(1-\nu^2)} \left\{ \left(1-\frac{2}{2}d_1\right) \cos\phi + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{(2m-1)} \cos(2m+1)\phi \right\} \cos\phi \quad (1.120)$$

Com

$$\gamma = \frac{R}{a} \quad ; \quad z = \frac{l}{a} \quad (1.121)$$

Realizando uma análise semelhante para flexão fora do plano de curvatura obteremos a força de membrana

$$n_c(\phi) = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{2}d_1\right)} \frac{M_0 t}{\gamma Z(1-\nu^2)} \left\{ \left(1+\frac{3}{2}d_1\right) \sin\phi + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)} \sin(2m+1)\phi \right\} \sin\phi \quad (1.122)$$

No desenvolvimento acima, foram utilizadas as mesmas hipóteses de Pardue/Vigness, relaxando somente a de número 4 (pg. 31).

#### 1.2.5 - Extensão de Kafka e Dunn

Kafka e Dunn, aproveitando o desenvolvimento inicial de Von Kármán (referência (1)) acrescentaram a parcela energia por unidade de comprimento do tubo devido ao efeito da pressão in

terna à equação por este desenvolvida (equação (1.32)). O acréscimo foi

$$V^* = - \int PdA \quad (1.123)$$

onde  $dA$  é a variação infinitesimal da seção transversal do tubo devido à pressão interna. O cálculo de  $dA$  é feito da seguinte forma, de acordo com a figura (14): Considere os pontos A e B antes da deformação do tubo e, estes mesmos pontos, em A' e B', respectivamente, após a deformação.

A mudança de área da seção transversal é a área do quadrilátero ABB'A'. Eixos de coordenadas auxiliares, x e y, são estabelecidos conforme a figura. As coordenadas dos pontos A, B, A' e B' são:

$$[A] = (a, 0) \quad (1.124)$$

$$[B] = (a \cos \phi, a \sin \phi) \quad (1.125)$$

$$[B'] = ([a + (W_\xi + dW_\xi) - (W_\phi + dW_\phi) \operatorname{tg} \phi] \cos \phi,$$

$$[(W_\phi + dW_\phi) + (a + W_\xi + dW_\xi) \operatorname{tg} \phi] \cos \phi) \quad (1.126)$$

$$[A'] = (a + W_\xi, W_\phi) \quad (1.127)$$

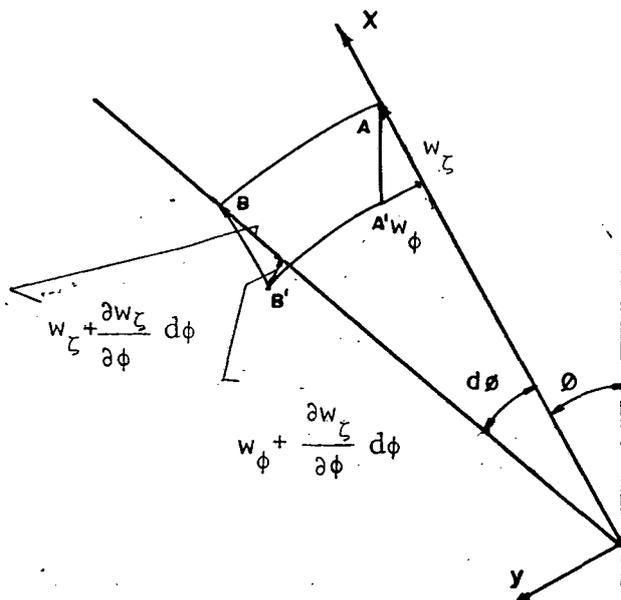


Figura 14. Deformação infinitesimal da seção transversal,  $dA$ .

A área pretendida é a soma dos triângulos  $ABB'$  e  $AB'A'$ , ou seja,

$$dA = \frac{1}{2} |\underline{AB'} \times \underline{A'B}| \quad (1.128)$$

o que, juntamente com (1.124), (1.125), (1.126) e (1.127) fornece

$$dA = \frac{1}{2} \left\{ 2aW_\zeta + W_\zeta \left( W_\zeta + \frac{dW_\phi}{d\phi} \right) + (W_\phi)^2 - W_\phi \frac{dW_\zeta}{d\phi} \right\} d\phi \quad (1.129)$$

Devido à inextensibilidade da superfície média na direção circunferencial

$$\|\underline{AB'}\|^2 = \|\underline{A'B}\|^2 \quad (1.130)$$

e

$$W_{\xi} = - \frac{dW_{\phi}}{d\phi} \quad (1.131)$$

obtém-se então,

$$W_{\phi}^2 = 2W_{\phi} \frac{dW_{\xi}}{d\phi} - \left( \frac{dW_{\phi}}{d\phi} \right)^2 \quad (1.132)$$

donde

$$dA = \frac{1}{2} \left\{ 2aW_{\xi} + W_{\phi} \frac{dW_{\xi}}{d\phi} - \left( \frac{dW_{\phi}}{d\phi} \right)^2 \right\} d\phi \quad (1.133)$$

que, substituído em (1.123), fica

$$V^* = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} P \left[ 2a \frac{dW_{\phi}}{d\phi} - \frac{d^2 W_{\phi}}{d\phi^2} \left( W_{\phi} + \frac{d^2 W_{\phi}}{d\phi^2} \right) \right] d\phi \quad (1.134)$$

Substituindo

$$W_{\phi} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \operatorname{sen} 2m\phi \quad (1.135)$$

e, integrando, obtém-se

$$V^* = -2\pi P \sum_{m=1}^{\infty} (4m^4 - m^2) C_m^2 \quad (1.136)$$

que é o acréscimo a ser feito na equação (1.32) (referência (6)).

Rodabaugh e George simplesmente incorporam (1.136) ao

funcional da energia devido à flexão fora do plano de curvatura  
(ref. (7)).

### 1.3 - DEFINIÇÃO DA PROPOSTIÇÃO

Todas as teorias apresentadas sumariamente nas seções anteriores mostram a complexidade da análise estrutural de sistemas tubulares, abrindo caminho à aplicação de métodos mais aperfeiçoados, como é o caso do método de elementos finitos. São vários os trabalhos sobre a aplicação deste método ao cálculo estrutural de tubulações (21, 27, 28, 29), apresentando soluções mais abrangentes e precisas que seus predecessores. O escopo deste trabalho trata de um tipo especial de elemento finito, o elemento viga-tubo desenvolvido recentemente por K.J. Bathe e C.A. Almeida.

Bathe e Almeida (11, 12, 13) propõem um elemento finito isoparamétrico de viga com quatro nós de até doze graus de liberdade: cada, os quais representam os deslocamentos axiais, torsionais e de flexão e, também, as deformações de ovalização, todos variando cubicamente ao longo do elemento. Este elemento mostrou ser eficaz na determinação dos principais modos de deformação em alguns casos apresentados pelos autores.

Resta, porém, como dizem os próprios criadores do elemento viga-tubo, um estudo mais detalhado das faixas de aplicação deste elemento, restringida, obviamente, pelas hipóteses envolvidas em sua formulação, assim como pelos métodos numéricos empregados no cálculo da matriz de rigidez e na solução do sistema linear de equações.

Sendo assim, o presente trabalho tem como objetivo dar início ao estudo da abrangência da formulação do elemento finito

viga-tubo, comparando os resultados teóricos daí obtidos com da dos experimentais e valores advindos da aplicação de outros modelos e métodos. Este estudo será feito de forma mais incisiva no que diz respeito às classes de tubos e condições de contorno e interação. A seguir segue, com mais detalhes a metodologia empregada neste estudo.

## 2º CAPÍTULO - METODOLOGIA

### 2.1 - OBJETIVOS E CONSIDERAÇÕES GERAIS

Na análise de um modelo, quando estão envolvidas várias variáveis de projeto, cujas mudanças de magnitude provocam alterações sensíveis no funcionamento do sistema, torna-se necessário formalizar uma metodologia que facilite e simplifique a realização e estudo de casos. Uma das formas utilizadas é a utilização de valores adimensionais que, ao relacionarem várias variáveis de projeto, representem de fato uma situação específica e que possa ser considerada completamente definida (única) dentro das hipóteses utilizadas na constituição do modelo.

No caso de tubos curvos, as equações desenvolvidas por Von Kármán (1) (seção 1.2.1) levaram ao estabelecimento do valor adimensional

$$\lambda = \frac{Rh}{a^2} \quad (2.1)$$

como capaz de definir uma classe de tubos curvos que teriam sua rigidez alterada pelo mesmo fator (quando comparado ao tubo reto). Acontece que dentre as hipóteses utilizadas por Von Kármán estão

considerações que relacionam as variáveis  $R$ ,  $a$  e  $h$ , ou seja

$$\gamma = \frac{R}{a} \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

$$\Omega = \frac{a}{h} \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Sendo assim, (2.1), (2.2) e (2.3) conjuntamente é que representam uma classe de tubos, quando as condições (2.2) e (2.3) não estão dadas (é evidente que surgem, aí, também consequências diferentes daquelas previstas por Von Kármán). A validade desta afirmação é confirmada por (4), (5) e (8) dentre outros. Quando o coeficiente de Poisson não é considerado nulo, (8)

$$\lambda = \frac{Rh}{\sqrt{1-\nu^2} a^2} \quad (2.4)$$

Se houver a presença de pressão interna, Dodge e Moore (10) propuseram o valor adimensional

$$\psi = \frac{PR^2}{Eah} \quad (2.5)$$

tendo em vista as equações desenvolvidas por Kafka, Dunn, George e Rodabaugh ((6), (7)).

Estando estabelecido os valores adimensionais que irão distinguir as classes de tubos, resta organizar os estudos

de casos de acordo com as intenções, que serão explicitadas a seguir. Deseja-se,

- i) - Verificar a extensão e influência das hipóteses que serviram de base para a construção do modelo;
- ii) Verificar o comportamento do elemento sob diversos tipos de carregamentos isolados e combinados;
- iii) Verificar o comportamento do elemento finito quanto à convergência e compatibilidade inter-elementos.

Como estas intenções são objetivos gerais é necessário explicitá-las:

A - Turner e Ford (8) desenvolveram uma análise na qual eles supõem que:

- A.1. O carregamento constitui-se somente de um momento aplicado nos extremos, tendendo a diminuir o raio de curvatura do eixo médio do tubo. Pressão ou outros tipos de carregamento não são considerados;
- A.2. A curva tubular é "perfeita", sendo que as tensões e deformações não são afetadas por restrições nos extremos dos tubos ou pelo comprimento do arco representado pelo eixo médio do tubo;
- A.3. As seções permanecem planas, porém, o eixo neutro do tubo não precisa permanecer no centro da seção transversal;
- A.4. Tensões radiais são desprezadas;
- A.5. Todas as tensões e deformações são proporcionais à deflexão do tubo, ou seja, somente a teoria das pequenas deflexões é utilizada;

A.6. Nem  $\gamma$  nem  $\Omega$  "tendem a infinito".

Estas hipóteses tornam esta teoria muito mais abrangente do que qualquer outra, considerando-se somente o carregamento descrito em A.1. Isto permite a análise proposta, apesar de não haver possibilidade de submeter o modelo de Turner e Ford às situações de cargas diversas e combinadas, o que permitiria uma visualização maior dos efeitos restritivos das hipóteses utilizadas no modelo do elemento viga-tubo.

Uma outra vantagem do modelo de Turner e Ford é a possibilidade de introduzir os efeitos das hipóteses utilizadas nas outras formulações, permitindo a visualização da influência de cada hipótese em separado.

B - Pardue e Vigness (4) ao confrontarem os resultados experimentais obtidos em tubos de  $\gamma$  e  $\Omega$  pequenos, com os resultados teóricos, notaram que os tubos retos colocados nas extremidades da curva enrijeciam a estrutura, devido à resistência à ovalização por eles provocada. Como há necessidade destes segmentos retos para a aplicação adequada do carregamento, teve-se que repensar o confronto teoria-experiência. As teorias clássicas consideram que o tubo se ovaliza por igual, não permitindo variação da ovalização na direção longitudinal, o que constitui-se em um fato que limita as conclusões sobre tais formulações. No entanto, o elemento finito viga-tubo permite esta variação, porém dificultando a compatibilidade de rotações seccionais entre o elemento reto e o tubo. O que se fez foi obter uma satisfação fraca desta compatibilidade através de funções penalidade, necessitando-se, pois, de uma análise para verificar de que forma isto limita a eficácia do modelo.

Como todos trabalhos experimentais à disposição, que utilizam tipos diversos de carregamento, possuem a característica descrita acima, propõem-se unir ambos os aspectos, ou seja, a compatibilidade de rotações seccionais inter-elementos e o comportamento sob cargas variadas e isoladas, dando mais peso ao primeiro, como será feito e justificado posteriormente.

Sendo assim, os trabalhos utilizados para esta parte da análise serão os elaborados por Dodge e Moore (10), Vigness (3), Smilh e Ford (9), Sobel (27), Bathe e Almeida (11), (12) e (13) e Rodabaugh e George (7).

C - Bathe e Almeida (12) fizeram um estudo onde demonstram a influência do número de elementos nas rotações seccionais no contorno dos elementos. Incluiremos este mesmo estudo, abrangendo a convergência como um todo da formulação em análise. Algumas considerações sobre o processo de integração numérica serão feitas.

Basicamente, será utilizada somente a técnica de refinamento da malha nos seguintes locais

- em toda a estrutura;
- no contorno da estrutura;
- onde houver problemas de compatibilidade.

## 2.2 - CRITÉRIOS PARA ANÁLISE DE RESULTADOS

A análise de resultados se dará, basicamente, em relação a dois parâmetros adimensionais, já descritos no capítulo anterior, mas que descrever-se-ã a seguir, de forma mais abrangente. Estes dois parâmetros são utilizados na análise de tensões em sistemas estruturais tubulares compostos de tubos curvos e retos. Assim, a teoria clássica de vigas de seção indeformável é utilizada a fim de se obter valores que sirvam de referência na adimensionalização da flexibilidade e das tensões da estrutura. Desta forma, a partir de uma teoria mais simples, pode se quantificar os esforços e deslocamentos num sistema mais complexo que é a curva tubular.

### 2.2.1 - Fator de Flexibilidade (K)

O fator de flexibilidade é classicamente definido como sendo "a razão entre a flexibilidade do tubo curvo e aquela correspondente a um tubo reto com as mesmas dimensões, material e carregamento". Mas, quando nem sempre for possível fazer esta relação de forma exata, ou por simplicidade, utilizar-se-ã um deslocamento padrão em algum ponto da estrutura, para adimensionalizar os resultados desejados, tentando satisfazer a definição acima. Normalmente, este ponto já é sugerido em publicações de resultados experimentais, que serão seguidos pela metodologia que aqui

se propõem. Em cada caso estudado, será identificado o deslocamento referencial utilizado.

Sendo assim,

$$K = \frac{\text{Desloc. Padrão}}{\text{Desloc. do Tubo Reto}} \quad (2.6)$$

### 2.2.2 - Fator de Intensificação de Tensões (So)

O fator de intensificação de tensões é "a razão entre determinada tensão, que realmente surge em algum ponto da estrutura, e a mesma tensão calculada considerando um tubo reto com as mesmas dimensões, material e solicitação".

Logo,

$$S_o = \frac{\text{Tensão Padrão}}{\text{Tensão do Tubo Reto}} \quad (2.7)$$

Nos estudos de casos estes procedimentos serão esclarecidos com a clarificação das variáveis e cálculos, relacionados à alguma estrutura específica.

### 3º CAPÍTULO - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO VIGA-TUBO

#### 3.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

O elemento finito viga-tubo é um elemento subparamétrico com 04 nodos de até 12 graus de liberdade cada; sendo 06 graus de liberdade para os deslocamentos do eixo médio do tubo e 00 (zero) a 06 graus de liberdade para descrever a ovalização da seção transversal. As funções de interpolação são funções lagrangeanas cúbicas, o que permite uma variação da ovalização ao longo do eixo do tubo.

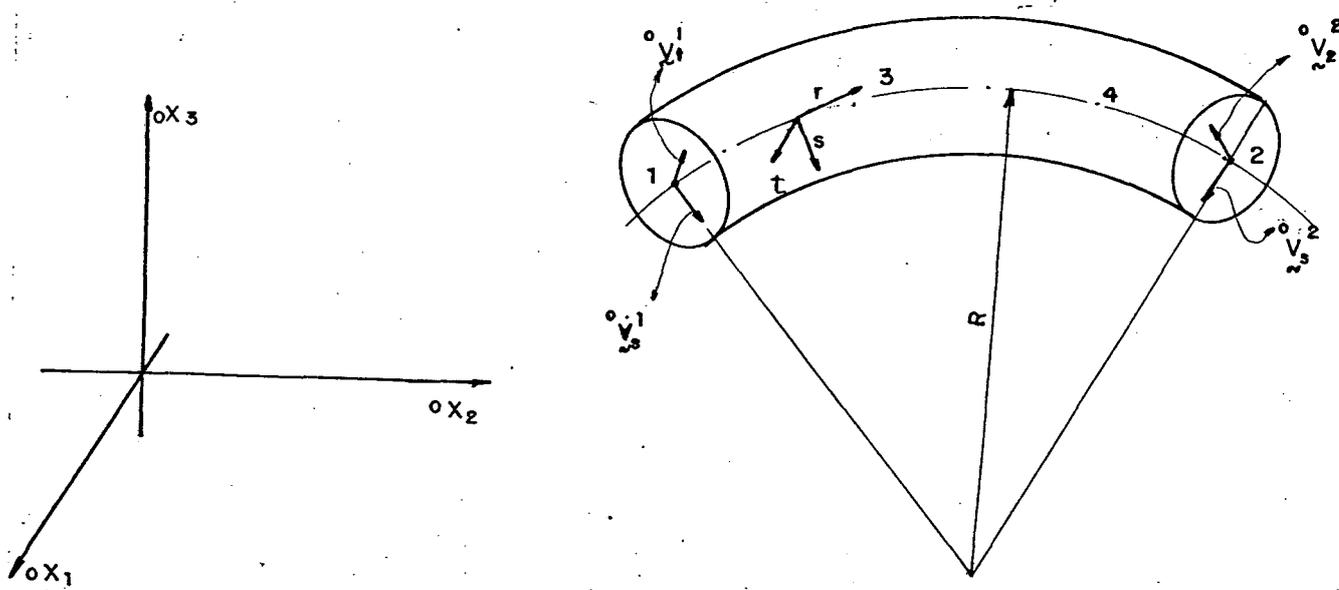


Figura 15. Representação esquemática do elemento finito viga-tubo.

Bathe e Almeida (1) utilizaram o princípio da energia potencial mínima para a obtenção das equações de equilíbrio em um elemento  $e$ , posteriormente, de acordo com a discretização da tubulação, a montagem da matriz de rigidez é efetuada, calculando-se os deslocamentos nodais  $e$ , daí, obtendo-se as tensões ao longo da estrutura. De acordo com o Princípio da Energia Potencial Mínima, num sistema linear de resposta, para um elemento finito geral, obtem-se (30), (31)

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}} \quad (3.1)$$

onde  $\underline{\underline{K}}$  - Matriz de rigidez do elemento finito;  
 $\underline{\underline{U}}$  - Vetor dos graus de liberdade nodais;  
 $\underline{\underline{R}}$  - Vetor que descreve a configuração de forças nodais (vetor carga nodal efetiva).

Sendo que

$$\underline{\underline{K}} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} dV \quad (3.2)$$

Com  $\underline{\underline{B}}$  - Matriz deformação-deslocamento;  
 $\underline{\underline{C}}$  - Matriz constitutiva do material.

Inicialmente, será calculada a matriz  $\underline{\underline{B}}$ . Para tal, tomar-se-á como base inicial as hipóteses de Von Kármán, listadas no 1º Capítulo, eliminando-se as hipóteses de número 1 (até onde permitem as considerações de Gross e Ford (5) e Pardue e Vigness (4), no que tange ao aparecimento de tensões circunferenciais de magni

tude considerável na superfície média do tubo); 3 ; 6 ; 7 ; 8 e 9.

(Considera-se somente que as seções transversais permanecerão planas após a deformação). Sendo assim, teremos as seguintes hipóteses remanescentes:

- 1 - As deformações longitudinais são consideradas constantes através da espessura da parede do tubo ( $h$ ) (logo  $\Omega \rightarrow \infty$ ). Esta hipótese só será considerada quando houver necessidade de satisfação de continuidade  $C^1$  nos deslocamentos de casca.
- 2 - As deformações circunferenciais se devem à flexão somente;
- 3 - As tensões de flexão circunferenciais são distribuídas linearmente através da espessura do tubo;
- 4 - As seções transversais planas, permanecem planas após a deformação.

Estas hipóteses (principalmente a 4), como será visto mais tarde, permitem dividir o deslocamento dos pontos materiais do tubo em dois tipos desacoplados:

- Aquele devido ao comportamento de viga do tubo, onde considerar-se-á que não há deformação da seção transversal e
- Aquele que irá provocar a deformação (ovalização) da seção transversal.

### 3.2 - COMPORTAMENTO DE VIGA

Considerando que não haja deformação da seção transversal do tubo, podemos descrever a localização de seus pontos materiais, em relação ao sistema global, por (11)

$${}^0x_i(r,s,t) = \sum_{K=1}^4 h_K(r) ({}^0x_i^K + t a_K {}^0v_{ti}^K + s a_K {}^0v_{si}^K) \quad (3.3)$$

e, após a deformação, por

$${}^1x_i = \sum_{K=1}^4 h_K(r) ({}^1x_i^K + t a_K {}^1v_{ti}^K + s a_K {}^1v_{si}^K) \quad (3.4)$$

- onde
- $r, s, t$  - Coordenadas do sistema intrínseco;
  - ${}^{\ell}x_i$  - Coordenadas cartesianas de qualquer ponto material do tubo, em relação ao sistema global (veja figura 15).
  - $\ell = 0$  - Estado não deformado;
  - $\ell = 1$  - Estado deformado
  - $h_K(r)$  - Funções de interpolação lagrangeanas;
  - ${}^{\ell}x_i^K$  - Coordenadas cartesianas do ponto nodal K em relação ao sistema global;
  - $a_K$  - Raio médio da seção transversal do tubo no ponto nodal K;
  - ${}^{\ell}v_{pi}^K$  - Componente i do vetor unitário na direção p, no ponto nodal K.

As funções de interpolação utilizadas são

$$h_1(r) = (-9r^3 + 9r^2 + r - 1)/16$$

$$h_2(r) = (9r^3 + 9r^2 - r - 1)/16$$

(3.5)

$$h_3(r) = (27r^3 - 9r^2 - 27r + 9)/16$$

$$h_4(r) = (-27r^3 - 9r^2 + 27r + 9)/16$$

Quando for processada a integração em (3.2) os parâmetros  $\tilde{s}$  e  $\tilde{t}$  deverão se limitar à restrição

$$\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2 \leq \tilde{s}^2 + \tilde{t}^2 \leq 1 \quad (3.6)$$

Isto se deve ao fato de não se considerar a ovalização da seção transversal do tubo nesta primeira parte da abordagem.

Ao definir-se

$$U_i = 1_{x_i} - 0_{x_i}$$

$$U_{i..}^K = 1_{x_i}^K - 0_{x_i}^K$$

$$V_{ti}^K = 1_{V_{ti}}^K - 0_{V_{ti}}^K$$

$$\underline{V}_{si}^K = \underline{1}_{\underline{V}_{si}}^K - \underline{0}_{\underline{V}_{si}}^K$$

tem-se a seguinte expressão para o deslocamento dos pontos materiais do tubo:

$$U_i = \sum_{K=1}^4 h_K(r) (U_i^K + t a_{Kti} V_{ti}^K + s a_{Ksi} V_{si}^K) \quad (3.7)$$

As variações dos vetores unitários  $\underline{0}_{\underline{V}_t}^K$  e  $\underline{0}_{\underline{V}_s}^K$  para os vetores unitários  $\underline{1}_{\underline{V}_t}^K$  e  $\underline{1}_{\underline{V}_s}^K$ , respectivamente, foram provocadas por rotações (já que ambos são unitários) que podem ser expressas através de suas três componentes no sistema global. Assim,

$$\underline{V}_{\underline{t}}^K = \underline{\theta}^K \underline{X} \underline{0}_{\underline{V}_{\underline{t}}}^K \quad (3.8)$$

$$\underline{V}_{\underline{s}}^K = \underline{\theta}^K \underline{X} \underline{0}_{\underline{V}_{\underline{s}}}^K$$

Com

$$\underline{\theta}^K = \left\{ \begin{array}{c} \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) em (3.7), obtém-se

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^4 h_K(r) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (g)_{11}^K & (g)_{21}^K & (g)_{31}^K \\ 0 & 1 & 0 & (g)_{12}^K & (g)_{22}^K & (g)_{32}^K \\ 0 & 0 & 1 & (g)_{13}^K & (g)_{23}^K & (g)_{33}^K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^K \\ U_2^K \\ U_3^K \\ \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

onde

$$\underline{\underline{g}}_K = \underline{\underline{t}}_K + \underline{\underline{s}}_K \quad (3.11)$$

$$\underline{\underline{t}}_K = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{V_{t3}}^K & \alpha_{V_{t2}}^K \\ \alpha_{V_{t3}}^K & 0 & -\alpha_{V_{t1}}^K \\ -\alpha_{V_{t2}}^K & \alpha_{V_{t1}}^K & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{s}}_K = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{V_{s3}}^K & \alpha_{V_{s2}}^K \\ \alpha_{V_{s3}}^K & 0 & -\alpha_{V_{s1}}^K \\ -\alpha_{V_{s2}}^K & \alpha_{V_{s1}}^K & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\underline{\underline{g}}_K = \underline{\underline{t}}_K + \underline{\underline{s}}_K \quad (3.12)$$

Sinteticamente o elemento finito viga-tubo pode ser descrito como na figura 16A., em relação ao seu comportamento de viga.

A partir de (3.10) pode-se escrever

$$U_i(r,s,t) = \sum_{K=1}^4 h_K(r) \left[ U_i^K + \sum_{m=1}^3 (\underline{\underline{t}}_{mi}^K \theta_m^K + \underline{\underline{s}}_{mi}^K \theta_m^K) \right] \quad (3.13)$$

logo

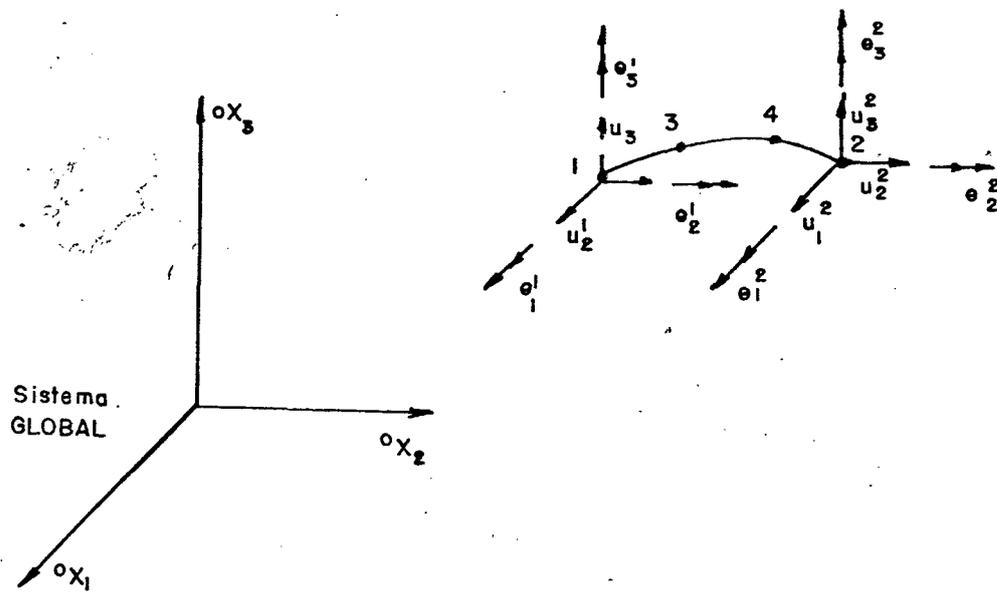


Figura 16.A. Deslocamentos de viga do elemento finito viga-tubo, generalizado.

$$\frac{\partial U_i}{\partial r} = \sum_{K=1}^4 h_{K,r} (U_i^K + \sum_{m=1}^3 g_{mi}^K \theta_m^K) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial s} = \sum_{K=1}^4 h_K \sum_{m=1}^3 \tilde{g}_{mi}^K \theta_m^K \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \sum_{K=1}^4 h_K \sum_{m=1}^3 \tilde{g}_{mi}^K \theta_m^K \quad (3.16)$$

e tem-se, também, que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_i}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial U_i}{\partial^0 x_2} \\ \frac{\partial U_i}{\partial^0 x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial s}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial t}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial s}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial t}{\partial^0 x_2} \\ \frac{\partial r}{\partial^0 x_3} & \frac{\partial \bar{s}}{\partial^0 x_3} & \frac{\partial t}{\partial^0 x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_i}{\partial r} \\ \frac{\partial U_i}{\partial s} \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

(3.14), (3.15), (3.16) podem ser escritos sinteticamente por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_i}{\partial r} \\ \frac{\partial U_i}{\partial s} \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} \end{pmatrix} = \sum_K \begin{pmatrix} h_{K,r} (1 \quad g_{1i}^K \quad g_{2i}^K \quad g_{3i}^K) \\ h_K (0 \quad \hat{g}_{1i}^K \quad \hat{g}_{2i}^K \quad \hat{g}_{3i}^K) \\ h_K (0 \quad \bar{g}_{1i}^K \quad \bar{g}_{2i}^K \quad \bar{g}_{3i}^K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^K \\ \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Introduzindo (3.18) em (3.17) obtêm-se a relação

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_i}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial U_i}{\partial^0 x_2} \\ \frac{\partial U_i}{\partial^0 x_3} \end{pmatrix} = \sum_K \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial s}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial t}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial s}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial t}{\partial^0 x_2} \\ \frac{\partial r}{\partial^0 x_3} & \frac{\partial \bar{s}}{\partial^0 x_3} & \frac{\partial t}{\partial^0 x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{K,r} (1 \quad g_{1i}^K \quad g_{2i}^K \quad g_{3i}^K) \\ h_K (0 \quad \hat{g}_{1i}^K \quad \hat{g}_{2i}^K \quad \hat{g}_{3i}^K) \\ h_K (0 \quad \bar{g}_{1i}^K \quad \bar{g}_{2i}^K \quad \bar{g}_{3i}^K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^K \\ \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

ou, de forma mais apropriada

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \sum_k \{ h_{K,j} \quad (G1)_{ij}^K \quad (G2)_{ij}^K \quad (G3)_{ij}^K \} \begin{Bmatrix} U_i^K \\ \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

onde

$$h_{K,j} = h_{K,r} J_{j1}^{-1} \quad (3.21)$$

$J_{j1}^{-1}$  sendo um termo genérico da primeira coluna da matriz jacobiana inversa (3.17)

$$(Gm)_{ij}^K = (J_{j1}^{-1} (g)_{mi}^K) h_{K,r} + (J_{j2}^{-1} (\hat{g})_{mi}^K + J_{j3}^{-1} (\bar{g})_{mi}^K) h_K \quad (3.22)$$

O modelo até este estágio apresenta-se bastante amplo e geral. Nos próximos passos ele será particularizado para modelar o elemento curvo e o elemento reto.

### 3.2.1 - Elemento Viga-Tubo Curvo

Considere a figura 16.B

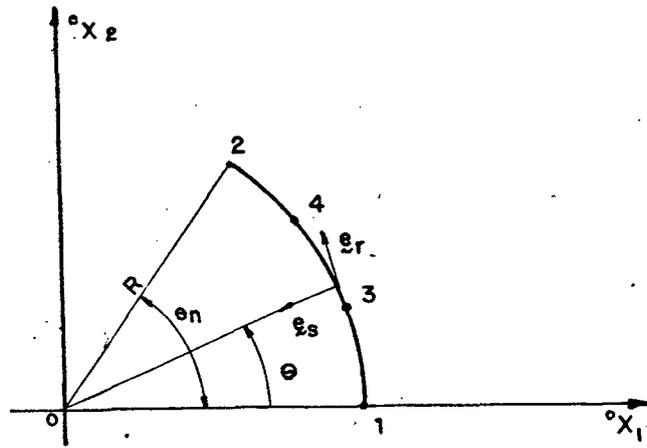


Figura 16.B. Representação do elemento finito viga-tubo no plano.

cuja parametrização, tendo em vista a equação (3.3), é

$${}^0x_1 = (R-as) \sum_{K=1}^4 h_K(r) \cos \theta^K$$

$${}^0x_2 = (R-as) \sum_{K=1}^4 h_K(r) \sin \theta^K \quad (3.23)$$

$${}^0x_3 = at$$

onde  $\theta^K$  é o ângulo que define a posição do nó K de acordo com a figura 16.B.

As particularizações realizadas são as seguintes

- O tubo real é substituído por um segmento de toro;
- Considera-se que não haja alteração de magnitude do raio (a) do tubo, ao longo do elemento;
- O elemento é restrito ao plano definido pelos eixos  ${}^0x_1$  e  ${}^0x_2$ .

Assim, a matriz jacobiana estará na forma

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} (R-as)A_1 & (R-as)A_3 & 0 \\ -aA_2 & -aA_4 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde

$$A_1 = \sum_{K=1}^4 h_{K,r} \cos\theta^K$$

$$A_2 = \sum_{K=1}^4 h_K \cos\theta^K$$

(3.25)

$$A_3 = \sum h_{K,r} \sin\theta^K$$

$$A_4 = \sum h_K \sin\theta^K$$

O jacobiano será

$$\underline{\underline{|J|}} = a^2 (R-as) (A_2 A_3 - A_1 A_4) \quad (3.26)$$

Calculando o inverso da matriz jacobiana tem-se

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-A_4}{(R-as)(A_2A_3-A_4A_1)} & \frac{-A_3}{a(A_2A_3-A_4A_1)} & 0 \\ \frac{A_2}{(R-as)(A_2A_3-A_4A_1)} & \frac{A_1}{a(A_2A_3-A_4A_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

De acordo com a Figura 16.B e utilizando as relações (3.11) e (3.12)

$${}_{100}^K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} a \quad (3.28)$$

$${}_{100}^K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sen}\theta^K \\ 0 & 0 & -\text{cos}\theta^K \\ -\text{sen}\theta^K & \text{cos}\theta^K & 0 \end{bmatrix} a \quad (3.29)$$

Através de (3.21) e (3.27) conclue-se que

$$h_{K,3} = 0 \quad (3.30)$$

$$h_{K,1} = J_{11}^{-1} h_{K,r}$$

$$h_{K,2} = J_{21}^{-1} h_{K,r}$$

E, utilizando (3.12), (3.21), (3.22), (3.28), (3.29) e (3.30) tem-se

$$(G1)_{11}^K = 0$$

$$(G1)_{21}^K = -J_{11}^{-1} h_{K,r} a$$

$$(G1)_{31}^K = \text{sen}\theta^K (J_{11}^{-1} h_{K,r}^s + J_{12}^{-1} h_K) a$$

$$(G1)_{12}^K = 0$$

$$(G1)_{22}^K = -J_{21}^{-1} h_{K,r} a$$

(3.31)

$$(G1)_{32}^K = \text{sen}\theta^K (J_{21}^{-1} h_{K,r}^s + J_{22}^{-1} h_K) a$$

$$(G1)_{13}^K = 0$$

$$(G1)_{23}^K = -J_{33}^{-1} h_K a$$

$$(G1)_{33}^K = 0$$

$$(G2)_{11}^K = J_{11}^{-1} h_{K,r} a$$

$$(G2)_{21}^K = 0$$

$$(G2)_{31}^K = -\cos\theta^K (J_{11}^{-1} h_{K,r}^s + J_{12}^{-1} h_K) a$$

$$(G2)_{12}^K = J_{21}^{-1} h_{K,r} a$$

$$(G2)_{22}^K = 0$$

$$(G2)_{32}^K = -\cos\theta^K (J_{21}^{-1} h_{K,r}^s + J_{22}^{-1} h_K) a$$

$$(G2)_{13}^K = J_{33}^{-1} h_K a$$

$$(G2)_{23}^K = 0$$

$$(G2)_{33}^K = 0$$

(3.31)

$$(G3)_{11}^K = -\sin\theta^K (J_{11}^{-1} h_{K,r}^s + J_{12}^{-1} h_K) a$$

$$(G3)_{21}^K = \cos\theta^K (J_{11}^{-1} h_{K,r}^s + J_{12}^{-1} h_K) a$$

$$(G3)_{31}^K = 0$$

$$(G3)_{12}^K = -\sin\theta^K (J_{21}^{-1} h_{K,r}^s + J_{22}^{-1} h_K) a$$

$$(G3)_{22}^K = \cos\theta^K (J_{21}^{-1} h_{K,r}^s + J_{22}^{-1} h_K) a$$

$$(G3)_{32}^K = 0$$

$$(G3)_{13}^K = 0$$

$$(G3)_{23}^K = 0$$

$$(G3)_{33}^K = 0$$

Utilizando as relações clássicas da teoria linear da elasticidade (34), (35)

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1^0}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2^0}; \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3^0}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1^0} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2^0}; \quad \gamma_{13} = \frac{\partial U_1}{\partial x_3^0} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1^0} \quad (3.32a)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3^0} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2^0}$$

obtêm-se a seguinte relação, empregando-se, ainda, as expressões (3.20) e (3.31)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \sum_{K=1}^4 H^K \begin{pmatrix} U_1^K \\ U_2^K \\ U_3^K \\ \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{pmatrix} \quad (3.32b)$$

onde, pela (3.31)

$$\approx H^K = \begin{bmatrix}
 h_{K,1} & 0 & 0 & \cancel{(G1)_{11}^K} & (G2)_{11}^K & (G3)_{11}^K \\
 0 & h_{K,2} & 0 & (G1)_{22}^K & \cancel{(G2)_{22}^K} & (G3)_{22}^K \\
 0 & 0 & h_{K,3} & \cancel{(G1)_{33}^K} & \cancel{(G2)_{33}^K} & \cancel{(G3)_{33}^K} \\
 h_{K,2} & h_{K,1} & 0 & \cancel{(G1)_{12}^K + (G1)_{21}^K} & (G2)_{12}^K + \cancel{(G2)_{21}^K} & (G3)_{12}^K + (G3)_{21}^K \\
 h_{K,3} & 0 & h_{K,1} & \cancel{(G1)_{13}^K + (G1)_{31}^K} & (G2)_{13}^K + \cancel{(G2)_{31}^K} & \cancel{(G3)_{13}^K + (G3)_{31}^K} \\
 0 & h_{K,3} & h_{K,2} & \cancel{(G1)_{23}^K + (G1)_{32}^K} & (G2)_{23}^K + \cancel{(G2)_{32}^K} & \cancel{(G3)_{23}^K + (G3)_{32}^K}
 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Logo, tendo em vista a nulidade dos termos indicados em (3.33)

$$\approx H^K = \begin{bmatrix}
 h_{K,1} & 0 & 0 & 0 & (G2)_{11}^K & (G3)_{11}^K \\
 0 & h_{K,2} & 0 & (G1)_{22}^K & 0 & (G3)_{22}^K \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 h_{K,2} & h_{K,1} & 0 & (G1)_{21}^K & (G2)_{12}^K & (G3)_{12}^K + (G3)_{21}^K \\
 0 & 0 & h_{K,1} & (G1)_{31}^K & (G2)_{13}^K + (G2)_{31}^K & 0 \\
 0 & 0 & h_{K,2} & (G1)_{23}^K + (G1)_{32}^K & (G2)_{32}^K & 0
 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

As deformações obtidas nesta primeira parte da formulação (considerando que as seções transversais do tubo não se deformam) serão superpostas aquelas que serão obtidas mais à frente (considerando somente a deformação da seção transversal). Porém, para tal há a necessidade de explicitarmos bem os diferentes sistemas de coordenadas utilizadas. Ou seja

- O Sistema Global ou Inercial;
- O Sistema intrínseco;
- O Sistema de Casca.

O Sistema intrínseco é o sistema definido pelas direções  $r$ ,  $s$  e  $t$  de acordo com a parametrização (3.23). O Sistema de Casca é definido pela parametrização abaixo

$$\begin{aligned} {}^0x_1 &= (R - a \cos \phi) \cos \theta \\ {}^0x_2 &= (R - a \cos \phi) \sin \theta \\ {}^0x_3 &= a \sin \phi \end{aligned} \tag{3.35}$$

que representa um toro perfeito, como ilustrado na figura 17.

A equação (3.32) fornece a representação tensorial do tensor deformação de acordo com o sistema global, restando, para maior simplicidade (como se verá mais a frente), transformá-la para o sistema de casca, onde serão aplicadas as hipóteses descritas no início deste capítulo.

A transformação da representação tensorial se dá atra

vês do somatório abaixo

$$\epsilon_{ij} = \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} \epsilon_{i'j'} \quad (3.36)$$

onde os índices (ij) identificam a representação da componente ij do tensor deformação no novo sistema e (i'j') no velho sistema.

(34), (36).

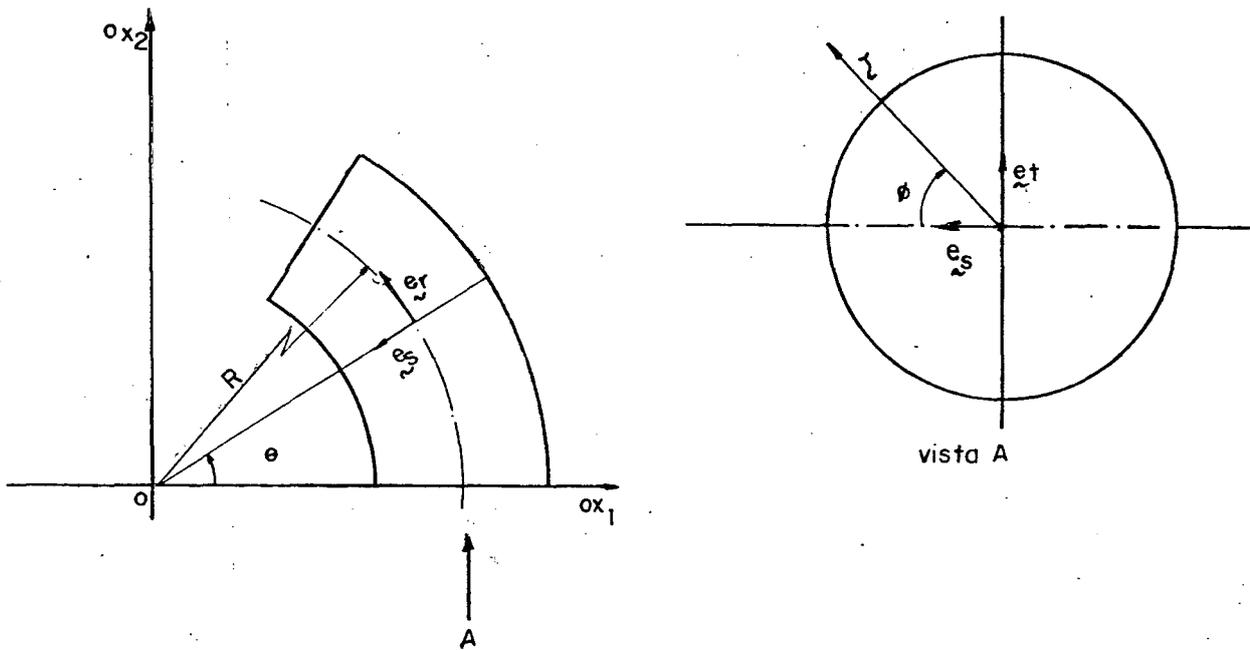


Figura 17. Coordenadas isoparamétricas e de casca.

Ainda,

$$\beta_{*}^i = \frac{\partial^0 x_i}{\partial^*} \quad (3.37)$$

onde, de acordo com a figura 17, \* representa uma das direções  $\theta$ ,

$\phi$  ou  $\zeta$  e  $i$  representa uma das direções 1, 2 ou 3.

Assim

$$\beta_{\phi}^1 = -\text{sen}\phi \cos\theta$$

$$\beta_{\phi}^2 = -\text{sen}\phi \text{sen}\theta$$

$$\beta_{\phi}^3 = \cos\phi$$

$$\beta_{\theta}^1 = \text{sen}\theta$$

$$\beta_{\theta}^2 = -\cos\theta \tag{3.38}$$

$$\beta_{\theta}^3 = 0$$

$$\beta_{\zeta}^1 = \cos\theta \cos\phi$$

$$\beta_{\zeta}^2 = \text{sen}\theta \cos\phi$$

$$\beta_{\zeta}^3 = \text{sen}\phi$$

Através de (3.32), (3.34), (3.36) e (3.38) obtêm-se a nova representação do tensor deformação que é a que se segue

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{\phi} \\ \epsilon_{\theta} \\ \epsilon_{\zeta} \\ \gamma_{\phi\theta} \\ \gamma_{\phi\zeta} \\ \gamma_{\theta\zeta} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \epsilon_{\phi} & \epsilon_{\phi} & \epsilon_{\phi} & \epsilon_{\phi} & \epsilon_{\phi} & \epsilon_{\phi} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \epsilon_{\theta} & \epsilon_{\theta} & \epsilon_{\theta} & \epsilon_{\theta} & \epsilon_{\theta} & \epsilon_{\theta} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \epsilon_{\zeta} & \epsilon_{\zeta} & \epsilon_{\zeta} & \epsilon_{\zeta} & \epsilon_{\zeta} & \epsilon_{\zeta} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \gamma_{\phi\theta} & \gamma_{\phi\theta} & \gamma_{\phi\theta} & \gamma_{\phi\theta} & \gamma_{\phi\theta} & \gamma_{\phi\theta} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \gamma_{\phi\zeta} & \gamma_{\phi\zeta} & \gamma_{\phi\zeta} & \gamma_{\phi\zeta} & \gamma_{\phi\zeta} & \gamma_{\phi\zeta} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \gamma_{\theta\zeta} & \gamma_{\theta\zeta} & \gamma_{\theta\zeta} & \gamma_{\theta\zeta} & \gamma_{\theta\zeta} & \gamma_{\theta\zeta} \end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix} U_1^K \\ U_2^K \\ U_3^K \\ \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

O subscripto  $v$ , do vetor, denota a origem desta parcela da deformação, ou seja, aquela devida ao comportamento de viga (sem ovalização) do tubo. Entretanto, é necessário aplicar algumas restrições, a fim de que seja mantida a devida coerência com as hipóteses estabelecidas no início do capítulo. Então,

- Pela hipótese 2 e considerando que nesta etapa da formulação a deformação da seção transversal seja desprezada, tem-se  $\epsilon_{\phi v} = 0$ ;
- Considerando a inextensibilidade da normal à superfície média do tubo (hipótese importante na teoria de cascas finas), anula-se  $\epsilon_{\zeta v}$  também;
- Não havendo condições de contorno ao longo da superfície externa e interna do tubo na direção  $\phi$  e desprezando a variação da deformação cisalhante ao longo da espessura do tubo - devido a casca ser considerada fina - faz-se  $\gamma_{\phi\zeta v} = 0$ ;
- A deformação cisalhante  $\gamma_{\theta\zeta v}$  ocorre de forma significativa, porque há variação de momento fletor ao longo do comprimento do tubo;
- As componentes do tensor deformação restantes estão presentes

porque são importantes para os esforços de membrana mais significativos.

Logo, restam somente as deformações  $\epsilon_{\theta V}$ ,  $\gamma_{\phi\theta V}$  e  $\gamma_{\theta\epsilon V}$ , cujas expressões são, tendo em vista as relações (3.27), (3.31), (3.32), (3.34) e (3.39)

$$\epsilon_{\theta}^1 = \frac{\text{sen}\theta}{(R-a\bar{s})} (J_{11}^{-1} \text{sen}\theta + J_{21}^{-1} \text{cos}\theta) h_{K,r}$$

$$\epsilon_{\theta}^2 = -\frac{\text{cos}\theta}{(R-as)} (J_{11}^{-1} \text{sen}\theta + J_{21}^{-1} \text{cos}\theta) h_{K,r}$$

$$\epsilon_{\theta}^3 = 0$$

$$\epsilon_{\theta}^4 = \frac{at \text{cos}\theta}{(R-as)} (J_{11}^{-1} \text{sen}\theta + J_{21}^{-1} \text{cos}\theta) h_{K,r} \quad (3.40)$$

$$\epsilon_{\theta}^5 = \frac{at \text{sen}\theta}{(R-as)} (J_{11}^{-1} \text{sen}\theta + J_{21}^{-1} \text{cos}\theta) h_{K,r}$$

$$\epsilon_{\theta}^6 = \frac{as}{(R-as)} (\text{cos}\theta \text{cos}\theta^K + \text{sen}\theta \text{sen}\theta^K) (J_{11}^{-1} \text{sen}\theta + J_{21}^{-1} \text{cos}\theta) h_{K,r}$$

$$+ (\text{sen}\theta \text{sen}\theta^K + \text{cos}\theta \text{cos}\theta^K) (\text{sen}\theta J_{12}^{-1} + \text{cos}\theta J_{22}^{-1}) h_k$$

$$\gamma_{\phi\theta}^1 = -\frac{\text{sen}\phi}{(R-as)} [2J_{11}^{-1} \text{cos}\theta \text{sen}\theta + (\text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta) J_{21}^{-1}] h_{K,r}$$

$$\gamma_{\phi\theta}^2 = \frac{\text{sen}\phi}{(R-as)} [-2J_{21}^{-1} \text{sen}\theta \cos\theta + (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) J_{11}^{-1}] h_{K,r}$$

$$\gamma_{\phi\theta}^3 = - \frac{\cos\phi}{(R-as)} (\text{sen}\theta J_{11}^{-1} + \cos\theta J_{21}^{-1}) h_{K,r}$$

$$\gamma_{\phi\theta}^4 = \frac{1}{(R-as)} \{ \text{at} [2\text{sen}\theta \cos\theta J_{21}^{-1} - (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) J_{11}^{-1}] \text{sen}\phi$$

$$+ as(\text{sen}\theta J_{11}^{-1} + \cos\theta J_{21}^{-1}) \text{sen}\theta^K \cos\phi \} h_{K,r}$$

$$+ \cos\phi [\text{sen}\theta \text{sen}\theta^K J_{12}^{-1} + \cos\theta (J_{22}^{-1} \text{sen}\theta^{K-1})] h_K$$

(3.41)

$$\gamma_{\phi\theta}^5 = - \frac{1}{(R-as)} \{ \text{sen}\phi \text{at} [2\cos\theta \text{sen}\theta J_{11}^{-1} + (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) J_{21}^{-1}]$$

$$+ \cos\phi as(\text{sen}\theta J_{11}^{-1} + \cos\theta J_{21}^{-1}) \cos\theta^K \} h_{K,r}$$

$$- \cos\phi [\text{sen}\theta (1 + \cos\theta^K J_{12}^{-1}) + \cos\theta \cos\theta^K J_{22}^{-1}] h_K$$

$$\gamma_{\phi\theta}^6 = - \frac{as \text{sen}\phi}{(R-as)} \{ 2\text{sen}\theta \cos\theta (\text{sen}\theta^K J_{11}^{-1} - \cos\theta^K J_{21}^{-1})$$

$$+ (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) (\cos\theta^K J_{11}^{-1} + \text{sen}\theta^K J_{21}^{-1}) \} h_{K,r}$$

$$- \text{sen}\phi \{ 2\text{sen}\theta \cos\theta (\text{sen}\theta^K J_{12}^{-1} - \cos\theta^K J_{22}^{-1})$$

$$+ (\cos^2\theta - \sin^2\theta) (J_{12}^{-1} \cos\theta^K + J_{22}^{-1} \sin\theta^K) \} h_K$$

$$\gamma_{\theta\zeta}^1 = \frac{\cos\phi}{(R-as)} [2\sin\theta \cos\theta J_{11}^{-1} - (\sin^2\theta - \cos^2\theta) J_{21}^{-1}] h_{K,r}$$

$$\gamma_{\theta\zeta}^2 = \frac{\cos\phi}{(R-as)} [2\sin\theta \cos\theta J_{21}^{-1} + (\sin^2\theta - \cos^2\theta) J_{11}^{-1}] h_{K,r}$$

$$\gamma_{\theta\zeta}^3 = - \frac{\sin\phi}{(R-as)} (\sin\theta J_{11}^{-1} + \cos\theta J_{21}^{-1}) h_{K,r}$$

$$\gamma_{\theta\zeta}^4 = \frac{1}{(R-as)} \{-at \cos\phi [2\sin\theta \cos\theta J_{21}^{-1} + (\sin^2\theta - \cos^2\theta) J_{11}^{-1}]$$

$$+ \sin\theta as (J_{11}^{-1} \sin\theta + J_{21}^{-1} \cos\theta) \sin\theta^K \} h_{K,r}$$

$$+ \sin\phi [\sin\theta \sin\theta^K J_{12}^{-1} + \cos\theta (J_{22}^{-1} \sin\theta^K - 1)] h_K$$

(3.42)

$$\gamma_{\theta\zeta}^5 = \frac{1}{(R-as)} \{at \cos\phi [2\sin\theta \cos\theta J_{11}^{-1} - (\sin^2\theta - \cos^2\theta) J_{21}^{-1}]$$

$$- as \sin\theta (\sin\theta J_{11}^{-1} + \cos\theta J_{21}^{-1}) \cos\theta^K \} h_{K,r}$$

$$- \sin\phi [\sin\phi (1 + J_{12}^{-1} \cos\theta^K) + \cos\theta \cos\theta^K J_{22}^{-1}] h_K$$

$$\gamma_{\theta\zeta}^6 = \frac{as \cos\phi}{(R-as)} \{2\sin\theta \cos\theta (\sin\theta^K J_{11}^{-1} - \cos\theta^K J_{21}^{-1})$$

$$- (\text{sen}^2\theta - \text{cos}^2\theta) (\text{cos}\theta^K J_{11}^{-1} + \text{sen}\theta^K J_{21}^{-1}) h_{K,r}$$

$$+ \text{cos}\phi \{ 2\text{sen}\theta \text{cos}\theta (J_{12} \text{sen}\theta^K - J_{22}^{-1} \text{cos}\theta^K) \}$$

$$- (\text{sen}^2\theta - \text{cos}^2\theta) (J_{12}^{-1} \text{cos}\theta^K + J_{22}^{-1} \text{sen}\theta^K) h_K$$

Assim, constitui-se a matriz  $B^K$

$$B^K = \begin{bmatrix} \epsilon_{\theta}^1 & \epsilon_{\theta}^2 & \epsilon_{\theta}^3 & \epsilon_{\theta}^4 & \epsilon_{\theta}^5 & \epsilon_{\theta}^6 \\ \gamma_{\phi\theta}^1 & \gamma_{\phi\theta}^2 & \gamma_{\phi\theta}^3 & \gamma_{\phi\theta}^4 & \gamma_{\phi\theta}^5 & \gamma_{\phi\theta}^6 \\ \gamma_{\theta\zeta}^1 & \gamma_{\theta\zeta}^2 & \gamma_{\theta\zeta}^3 & \gamma_{\theta\zeta}^4 & \gamma_{\theta\zeta}^5 & \gamma_{\theta\zeta}^6 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

### 3.2.2 - Elemento Viga-Tubo Reto

Tendo em vista a equação (3.3) que descreve a geometria de um elemento genérico e considerando a figura 18, pode-se descrever as coordenadas de qualquer ponto material do elemento reto por

$${}^0x_1 = \sum_{K=1}^4 h_K(r) {}^0x_1^K$$

$${}^0x_2 = \text{as} \quad (3.44)$$

$${}^0x_3 = \text{at}$$

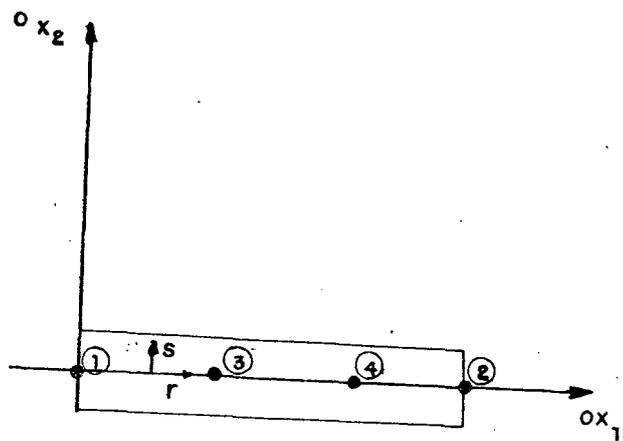


Figura 18. Elemento viga-tubo reto.

o que fornece

$${}_{1100}^T \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad (3.45)$$

$${}_{1001}^T \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad (3.46)$$

permitindo a construção do campo de deslocamentos, ou seja, a equação (3.13). A matriz jacobiana, devido à (3.44) será

$${}_{1111}^T \mathbf{J} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

com

$$Z = \sum_{K=1}^4 h_{K,r} {}^0x_1^K \quad (3.48)$$

onde  ${}^0x_1^K$  é a posição do nó  $K$  ao longo do eixo  ${}^0x_1$  (veja figura 18). O inverso da matriz jacobiana é

$$\underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Fazendo os mesmos procedimentos que aqueles realizados para o elemento curvo, obtêm-se

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}^K = \begin{bmatrix} Zh_{K,r} & 0 & 0 & 0 & Zath_{K,r} & -Zash_{K,r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Zh_{K,r} & 0 & -Zath_{K,r} & 0 & -h_K \\ 0 & 0 & Zh_{K,r} & Zash_{K,r} & h_K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^K \begin{Bmatrix} U_1^K \\ U_2^K \\ U_3^K \\ \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Ainda de acordo com a figura 18, obtêm-se a seguinte parametrização para a superfície média do tubo

$${}^0x_1 = x$$

$${}^0x_2 = a \cos\phi \quad (3.51)$$

$${}^0x_3 = a \sin\phi$$

Consequentemente, levando-se em conta as equações (3.36) e (3.37),

$$\beta_{\phi}^1 = 0$$

$$\beta_{\phi}^2 = -\sin\phi$$

$$\beta_{\phi}^3 = \cos\phi$$

$$\beta_x^1 = 1$$

$$\beta_x^2 = 0$$

$$\beta_x^3 = 0$$

$$\beta_{\zeta}^1 = 0$$

$$\beta_{\zeta}^2 = \cos\phi$$

(3.52)

$$\beta_{\zeta}^3 = \text{sen}\phi$$

Logo, transformando representação do tensor de deformação do sistema global para o sistema de casca, obtêm-se

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \gamma_{\phi x} \\ \gamma_{x\zeta} \end{array} \right\} \begin{array}{c} K \\ \\ V \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \epsilon_x & \epsilon_x & \epsilon_x & \epsilon_x & \epsilon_x & \epsilon_x \\ \gamma_{\phi x} & \gamma_{\phi x} \\ \gamma_{x\zeta} & \gamma_{x\zeta} & \gamma_{x\zeta} & \gamma_{x\zeta} & \gamma_{x\zeta} & \gamma_{x\zeta} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} U_1^K \\ U_2^K \\ U_3^K \\ \theta_1^K \\ \theta_2^K \\ \theta_3^K \end{array} \right\} \begin{array}{c} K \\ V \\ V \end{array} \end{array} \quad (3.53)$$

onde

$$\epsilon_x^1 = Zh_{K,r}$$

$$\epsilon_x^2 = 0$$

$$\epsilon_x^3 = 0$$

$$\epsilon_x^4 = 0$$

$$\epsilon_x^5 = Zath_{K,r}$$

$$\epsilon_x^6 = -Z \operatorname{sh} h_{K,r}$$

$$\gamma_{\phi x}^1 = 0$$

$$\gamma_{\phi x}^2 = -Z \operatorname{sen} \phi h_{K,r}$$

$$\gamma_{\phi x}^3 = Z \operatorname{cos} \phi h_{K,r}$$

$$\gamma_{\phi x}^4 = (a+\zeta) Z h_{K,r}$$

$$\gamma_{\phi x}^5 = \operatorname{cos} \phi h_K$$

(3.54)

$$\gamma_{\phi x}^6 = \operatorname{sen} \phi h_K$$

$$\gamma_{x\zeta}^1 = 0$$

$$\gamma_{x\zeta}^2 = Z \operatorname{cos} \phi h_{K,r}$$

$$\gamma_{x\zeta}^3 = Z \operatorname{sen} \phi h_{K,r}$$

$$\gamma_{x\zeta}^4 = 0$$

$$\gamma_{x\zeta}^5 = \operatorname{sen} \phi h_K$$

$$\gamma_{x\zeta}^6 = -\cos\phi h_K$$

### 3.3 - COMPORTAMENTO DE CASCA

O comportamento do elemento tubular, uma estrutura formada por uma casca toroidal (no caso do elemento curvo) ou cilíndrica (no caso do elemento reto), será analisado sob a ótica da teoria das cascas finas (32), (33), (34), (37); o que é possível tendo em vista que  $\frac{h}{a} \ll 1$ . É importante lembrar que nesta etapa da abordagem não há deslocamento do eixo médio do tubo e que somente a seção transversal se deforma no próprio plano, por ela definido.

Pela teoria clássica das cascas finas obtêm-se as seguintes relações deformação-deslocamento

$$\begin{aligned} \epsilon_{\xi}^0 &= \frac{1}{A_{\xi}} \frac{\partial W_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{W_{\eta}}{A_{\xi} A_{\eta}} \frac{\partial A_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{W_{\zeta}}{R_{\xi}} \\ \epsilon_{\eta}^0 &= \frac{1}{A_{\eta}} \frac{\partial W_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{W_{\xi}}{A_{\xi} A_{\eta}} \frac{\partial A_{\eta}}{\partial \xi} + \frac{W_{\zeta}}{R_{\eta}} \\ \gamma_{12}^0 &= \frac{A_{\eta}}{A_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{W_{\eta}}{A_{\eta}} \right) + \frac{A_{\xi}}{A_{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{W_{\xi}}{A_{\xi}} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Com as direções  $\xi$  e  $\eta$  sendo as direções principais da superfície média da casca e

$$A_{\xi} = \sqrt{E}$$

(3.56)

$$A_{\eta} = \sqrt{G}$$

onde E e G são componentes da primeira forma fundamental (32), (34)  $\epsilon_i^0$  e  $\gamma_{ij}^0$  são deformações da superfície média do tubo e  $\zeta$  é a direção normal a esta, orientada para fora da estrutura.

$$K_{\xi} = \frac{1}{A_{\xi}} \frac{\partial \beta_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\beta_{\eta}}{A_{\xi} A_{\eta}} \frac{\partial A_{\xi}}{\partial \eta}$$

$$K_{\eta} = \frac{1}{A_{\eta}} \frac{\partial \beta_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\beta_{\xi}}{A_{\xi} A_{\eta}} \frac{\partial A_{\eta}}{\partial \xi} \quad (3.57)$$

$$\sigma = \frac{A_{\eta}}{A_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\beta_{\eta}}{A_{\eta}} \right) + \frac{A_{\xi}}{A_{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\beta_{\xi}}{A_{\xi}} \right)$$

com

$$\beta_{\xi} = \frac{W_{\xi}}{R_{\xi}} - \frac{1}{A_{\xi}} \frac{\partial W_{\zeta}}{\partial \xi}$$

(3.58)

$$\beta_{\eta} = \frac{W_{\eta}}{R_{\eta}} - \frac{1}{A_{\eta}} \frac{\partial W_{\zeta}}{\partial \eta}$$

onde  $K_i$  e  $\sigma$  são as mudanças de curvatura da superfície média do tubo.

As deformações totais, de acordo com a hipótese 3 (pg. 57), são

$$\epsilon_{\xi} = \epsilon_{\xi}^0 + zK_{\xi}$$

$$\epsilon_{\eta} = \epsilon_{\eta}^0 + zK_{\eta} \quad (3.59)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \gamma_{\xi\eta}^0 + z\sigma$$

onde  $z$  é a coordenada do ponto ao longo da normal em relação a superfície média do tubo

### 3.3.1 - Elemento Viga-Tubo Curvo

A partir da parametrização definida em (3.35) obtêm-se os raios de curvatura e componentes da primeira forma fundamental, respectivamente,

$$R_{\phi} = a$$

$$R_{\theta} = \frac{(R - a \cos \phi)}{\cos \phi} \quad (3.60)$$

$$A_{\phi} = a$$

$$A_{\theta} = R - a \cos \phi$$

Então, as equações (3.55) e (3.57) ficam na forma

$$\varepsilon_{\phi}^0 = \frac{1}{a} (W_{\phi,\phi} + W_{\zeta})$$

$$\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{1}{R - a \cos \phi} (W_{\theta,\theta} + W_{\phi} \operatorname{sen} \phi - W_{\zeta} \cos \phi)$$

$$\gamma_{\phi\theta}^0 = \frac{1}{a} W_{\theta,\phi} + \frac{1}{R - a \cos \phi} (W_{\phi,\theta} - W_{\theta} \operatorname{sen} \phi)$$

$$K_{\phi} = \frac{1}{a^2} (W_{\phi,\phi} - W_{\zeta,\phi\phi})$$

(3.61)

$$K_{\theta} = - \frac{1}{(R - a \cos \phi)^2} (W_{\theta,\theta} \cos \phi + W_{\zeta,\theta\theta}) + \frac{1}{a(R - a \cos \phi)} (W_{\phi} - W_{\zeta,\phi}) \operatorname{sen} \phi$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{R \cos \phi}{a(R - a \cos \phi)^2} W_{\theta} - \frac{\cos \phi}{a(R - a \cos \phi)} W_{\theta,\phi} + \frac{1}{a(R - a \cos \phi)} W_{\phi,\theta} \\ &+ \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{(R - a \cos \phi)^2} W_{\zeta,\phi} - \frac{2}{a(R - a \cos \phi)} W_{\zeta,\phi\theta} \end{aligned}$$

Quando as hipóteses, estabelecidas no início do capítulo, são aplicadas, algumas consequências aparecem:

- Pela hipótese 2 conclui-se que  $\varepsilon_{\phi}^0 = 0$  o que fornece, a partir de (3.61)

$$W_{\zeta} = -W_{\phi,\phi} \quad (3.62)$$

- Como, nesta parte da formulação, somente há deslocamento dos pontos materiais do tubo nos planos das seções transversais e, devido a hipótese 4, considera-se que  $W_{\theta} = W_{\theta,\theta} = W_{\theta,\theta}$ .

Logo, a partir de (3.61)

$$\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{1}{(R-a\cos\phi)} (W_{\phi} \operatorname{sen}\phi + W_{\phi,\phi} \cos\phi)$$

$$\gamma_{\phi\theta}^0 = \frac{1}{R-a\cos\phi} W_{\phi,\theta}$$

$$K_{\phi} = \frac{1}{a^2} (W_{\phi,\phi} + W_{\phi,\phi\phi\phi}) \quad (3.63)$$

$$K_{\theta} = \frac{1}{(R-a\cos\phi)^2} W_{\phi,\theta\theta\phi} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{a(R-a\cos\phi)} (W_{\phi} + W_{\phi,\phi\phi})$$

$$\sigma = \frac{1}{a(R-a\cos\phi)} W_{\phi,\theta} - \frac{2\operatorname{sen}\phi}{(R-a\cos\phi)^2} W_{\phi,\phi\theta} + \frac{2}{a(R-a\cos\phi)} W_{\phi,\phi\phi\theta}$$

De acordo com (3.59) e (3.62)

$$\varepsilon_{\theta} = zK_{\phi} \quad (3.64)$$

A hipótese 1 nos remete a

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}^0 \quad (3.65)$$

o que equivale a desprezar o momento seccional devido à mudança de curvatura  $K_\theta$ , Beskin (17), Cheng e Thailer (18) e Turner e Ford (8) demonstraram matematicamente que, para tubos de paredes delgadas esta hipótese é perfeitamente razoável. Turner e Ford fizeram um bom estudo sobre a influência do momento seccional longitudinal. Na formulação do elemento finito viga-tubo, considerar-se-a, mais a frente, o efeito deste momento para obter-se compatibilidade de rotação seccional no contorno do elemento. Kafka e Dunn (6) utilizam a hipótese 1 para desenvolver a formulação que inclui os efeitos da pressão interna na rigidez de tubulações.

Ainda, pela hipótese 1, pode-se fazer

$$\gamma_{\phi\theta} = 0 \quad (3.66)$$

como demonstram Bathe e Almeida (11), a não ser quando há problemas de compatibilidade no contorno do elemento, o que será visto mais a frente.

Como se pode observar desde (3.63), as deformações dependem somente do deslocamento circunferencial  $W_\phi$  e algumas de suas derivadas. Visando permitir a variação da ovalização da seção transversal do tubo e sua continuidade na direção longitudinal, Bathe e Almeida (11) propuseram a seguinte interpolação para  $W_\phi$ :

$$W_\phi = \sum_{K=1}^4 h_K(r) \left( \sum_{m=1}^{Nc} c_m^K \sin 2m\phi + \sum_{m=1}^{Nd} d_m^K \cos 2m\phi \right) \quad (3.67)$$

As justificativas para este procedimento são semelhan

tes àquelas tratadas no 1º Capítulo, com a ressalva de que, apesar da ovalização em cada seção ser considerada independente das outras seções transversais, as funções isoparamétricas cúbicas,  $h_K$  garantem a continuidade deste tipo de deformação ao longo do elemento e através de seu contorno. As constantes  $N_c$  e  $N_d$  representam o número de modos de ovalização que são desejados, o que depende do tipo de carregamento e da geometria do elemento, podendo ser de 0 a 3.  $c_m^K$  e  $d_m^K$  são deslocamentos generalizados desconhecidos e, juntamente com  $U_1^K, U_2^K, U_3^K, \theta_1^K, \theta_2^K, \theta_3^K$ , formam o vetor deslocamento nodal, a ser obtido na resolução do problema.

Define-se, pois,

$$\tilde{U}^{KT} = \{U_1^K, U_2^K, U_3^K, \theta_1^K, \theta_2^K, \theta_3^K, c_1^K, c_2^K, c_3^K, d_1^K, d_2^K, d_3^K\} \quad (3.68)$$

Substituindo (3.67) em (3.64) e (3.65) tendo em vista (3.63), obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\phi\theta} \\ \gamma_{\theta\zeta} \\ \varepsilon_\phi \end{Bmatrix}_{ov} = \sum_{K=1}^4 \begin{bmatrix} B_{\approx ov1}^K & B_{\approx ov3}^K \\ B_{\approx ov2}^K & B_{\approx ov4}^K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1^K \\ c_2^K \\ c_3^K \\ d_1^K \\ d_2^K \\ d_3^K \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

com

$$K_{\approx OV_1}^B = \begin{bmatrix} K_{b_{OV_1}}^{11} & K_{b_{OV_1}}^{12} & K_{b_{OV_1}}^{13} \\ K_{b_{OV_1}}^{21} & K_{b_{OV_1}}^{22} & K_{b_{OV_1}}^{23} \\ K_{b_{OV_1}}^{31} & K_{b_{OV_1}}^{32} & K_{b_{OV_1}}^{33} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

onde

$$K_{b_{OV_1}}^{lm} = \frac{hK}{R \cdot \text{acos}\phi} (\text{sen}\phi \text{ sen}2m\phi + 2m \text{ cos}\phi \text{ cos}2m\phi); m=1,3 \quad (3.71)$$

os demais termos são nulos

$$K_{\approx OV_3}^B = \begin{bmatrix} K_{b_{OV_3}}^{11} & K_{b_{OV_3}}^{12} & K_{b_{OV_3}}^{13} \\ K_{b_{OV_3}}^{21} & K_{b_{OV_3}}^{22} & K_{b_{OV_3}}^{23} \\ K_{b_{OV_3}}^{31} & K_{b_{OV_3}}^{32} & K_{b_{OV_3}}^{33} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

onde

$$K_{b_{OV_3}}^{lm} = \frac{hK}{R \cdot \text{acos}\phi} (\text{sen}\phi \text{ cos}2m\phi - 2m \text{ cos}\phi \text{ sen}2m\phi); m=1,3 \quad (3.73)$$

$$K_{\approx OV_2}^B = [K_{b_{OV_2}}^1 \quad K_{b_{OV_2}}^2 \quad K_{b_{OV_2}}^3] \quad (3.74)$$

onde

$$K_{b_{OV2}}^m = - \frac{2m(4m^2-1)}{a^2} h_K z \cos 2m\phi ; m=1,3 \quad (3.75)$$

$$B_{OV4}^K = [K_{b_{OV4}}^1 \quad K_{b_{OV4}}^2 \quad K_{b_{OV4}}^3] \quad (3.76)$$

onde

$$K_{b_{OV4}}^m = \frac{2m(4m^2-1)}{a^2} h_K z \sin 2m\phi ; m=1,3 \quad (3.77)$$

A relação (3.69) deverá ser superposta à relação (3.43).

### 3.3.2 - Elemento Viga-Tubo Reto

O procedimento será análogo ao realizado para o outro elemento, porém, tendo em vista a parametrização descrita em (3.51),

Conseqüentemente,

$$A_\phi = a$$

$$A_x = 1$$

(3.78)

$$R_\phi = a$$

$$R_x \rightarrow \infty$$

As relações (3.55) e (3.57) se tornam

$$\varepsilon_{\phi}^0 = \frac{1}{a} (W_{\phi, \phi} + W_{\zeta})$$

$$\varepsilon_x^0 = W_{x, x}$$

$$\gamma_{x\phi} = \frac{1}{a} W_{x, \phi} + W_{\phi, x}$$

(3.79)

$$K_{\phi} = \frac{1}{a^2} (W_{\phi, \phi} - W_{\zeta, \phi\phi})$$

$$K_x = -W_{\zeta, xx}$$

$$\sigma = \frac{1}{a} (W_{\phi, x} - 2W_{\zeta, \phi x})$$

Aplicando as mesmas considerações que na seção anterior;

$$\varepsilon_{\phi}^0 = 0$$

$$\varepsilon_x^0 = 0$$

$$\gamma_{\phi X} = W_{\phi, X}$$

$$K_{\phi} = \frac{1}{a^2} (W_{\phi, \phi} - W_{\zeta, \phi\phi})$$

(3.80)

$$K_X = -W_{\zeta, XX}$$

$$\sigma = \frac{1}{a} (W_{\phi, X} + 2W_{\zeta, \phi X})$$

logo, ainda seguindo os raciocínios da seção 3.2.1

$$\epsilon_{\phi} = zK_{\phi}$$

$$\epsilon_X = 0 \quad (3.81)$$

$$\gamma_{\phi X} = 0$$

Em consequência, os termos (3.71) e (3.73) se tornam

$$K_{b_{OV_1}^{mn}} = 0 \quad m=1,3 ; n=1,3 \quad (3.82)$$

$$K_{b_{OV_3}^{mn}} = 0 \quad m=1,3 ; n=1,3 \quad (3.83)$$

sendo que os termos (3.75) e (3.77) permanecem inalterados.

### 3.4 - SUPERPOSIÇÃO DOS COMPORTAMENTOS DE VIGA E DE CASCA DO ELEMENTO

Nas seções 3.1 e 3.2 foram desenvolvidas as formulações para o comportamento de viga e o comportamento de casca da estrutura, respectivamente. Resta agora estabelecer a superposição destes dois aspectos do funcionamento do modelo. Isto será feito segundo a montagem abaixo,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta} \\ \gamma_{\phi\theta} \\ \gamma_{\theta\zeta} \\ \varepsilon_{\phi} \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^4 \begin{bmatrix} B_{\approx}^K & B_{\approx OV_1}^K & B_{\approx OV_3}^K \\ \phi & B_{\approx OV_2}^K & B_{\approx OV_4}^K \end{bmatrix} \underline{U}^K \quad (3.84)$$

onde  $B_{\approx}^K$ ,  $B_{\approx OV_1}^K$ ,  $B_{\approx OV_3}^K$ ,  $B_{\approx OV_2}^K$ ,  $B_{\approx OV_4}^K$  são as expressões definidas por (3.43) e (3.69) e o vetor  $\underline{U}^K$  é dado por (3.68).

Quanto à relação tensão-deformação, será adotado o sistema plano de tensões (30), (31), (32), (33), (34), (35), para material isotrópico e homogêneo, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta} \\ \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{\phi} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{\theta} \\ \gamma_{\phi\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \epsilon_{\phi} \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez do elemento finito viga-tubo utiliza-se a equação (3.2), onde a matriz  $\underline{B}$  é aquela representada em (3.84).

Logo,

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & & & \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} & & \\ \underline{K}_{31} & \underline{K}_{32} & \underline{K}_{33} & \\ \underline{K}_{41} & \underline{K}_{42} & \underline{K}_{43} & \underline{K}_{44} \end{bmatrix} \quad \text{SIM.} \quad (3.86)$$

onde

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \frac{E}{1-\nu} \int_V \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}^{iT} \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{B}}^j & \underline{\underline{B}}^{iT} \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{B}}^j + \underline{\underline{B}}^{iT} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{B}}^j \\ \underline{\underline{B}}^{i\text{OV}_1 T} \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{B}}^j & \underline{\underline{B}}^{i\text{OV}_1 T} \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{B}}^j + \underline{\underline{B}}^{i\text{OV}_1 T} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{B}}^j \\ \underline{\underline{B}}^{i\text{OV}_2 T} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{B}}^j & \underline{\underline{B}}^{i\text{OV}_2 T} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{B}}^j + \underline{\underline{B}}^{i\text{OV}_2 T} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}}^j \end{bmatrix} dv \quad (3.87)$$

onde

$$i = 1,4 \quad e \quad j = 1,4$$

$$dv = |\underline{\underline{J}}| dr ds dt$$

com  $|\underline{\underline{J}}|$  sendo o jacobiano, definido nas secções anteriores

$$\underline{\underline{C}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{N}}^T = [0 \quad 0 \quad \nu]$$

Avaliadas as integrais em (3.87) estará pronta a matriz de rigidez do elemento finito viga-tubo. Porém, algumas restrições devem ser impostas à modelagem da estrutura, quando algumas situações se fizerem presentes. É o que será visto a seguir.

### 3.5 - RESTRIÇÕES NO CONTORNO DO ELEMENTO OU EFEITOS DE INTERAÇÃO

Quando um modelo matemático, devido à hipóteses simplificativas, não é capaz de expressar corretamente o fenômeno, surgem duas opções básicas na tentativa de solucionar o problema.

- Ou a formulação intrínseca do modelo é modificada, à fim de relacionar corretamente as variáveis em jogo;
- Ou introduz-se restrições à formulação existente de forma que o modelo, pelo menos em média, satisfaça as exigências de comportamento das variáveis envolvidas no fenômeno real.

Como pode ser observado pelo desenvolvimento anterior, algumas condições de contorno e compatibilidade inter-elementos não podem ser modeladas. Ambas tem a ver com a incapacidade da formulação, até aqui apresentada, de impor restrições ao comportamento da casca da estrutura, a não ser no que diz respeito ao deslocamento  $W_\phi$ . Por exemplo, o modelo, elaborado nas seções anteriores, não pode garantir compatibilidade da deflexão  $W_{\zeta, \theta}$  no contorno do elemento, o que é fundamental para satisfazer as restrições impostas por um flange rígido, ou engastamento, ou mesmo impor maior compatibilidade entre elementos em regiões de maior perturbação (para melhor convergência) ( $W_\zeta$  possui compatibilidade  $C^0$ ).

Para penetrar mais fisicamente no problema, basta analisar a figura abaixo, onde está representado o contorno entre dois elementos antes da deformação e uma possível configuração (pela formulação das seções anteriores) do sistema deformado.

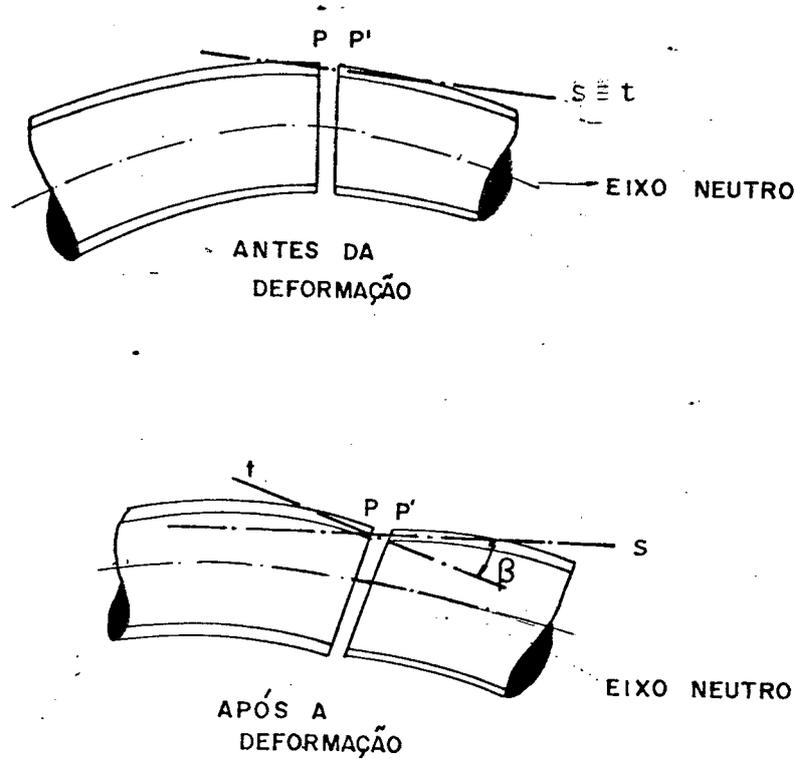


Figura 19. Deslocamentos possíveis sem a incorporação dos efeitos de interação inter-elementos.

Seja  $t$  e  $s$  tangentes à superfície média, na direção longitudinal, passando pelos pontos  $P$  e  $P'$  respectivamente, localizados nos contornos dos elementos conforme figura 19.

Se antes da deformação  $s \equiv t$ , após a deformação, nada impede que haja um ângulo  $\beta$  entre  $s$  e  $t$ , mesmo havendo compatibilidade das rotações do eixo neutro do elemento. Para que tal ocorra, antes de mais nada, deve ser introduzido no funcional da energia do elemento, um termo que contenha derivada de  $W_\zeta$  de segunda ordem, a fim de que se possa introduzir compatibilidade  $C^1$  para este deslocamento (12), (30), (31), (40).

Conclue-se que os efeitos de interação inter-elementos ou entre elemento e o contorno da estrutura surgem como uma deficiência da formulação, devido às simplificações utilizadas

nas abordagens anteriores. Esta deficiência provoca, em algumas circunstâncias, distorções na conformidade do elemento. Esta conformidade pode ser alcançada, de acordo com as duas formas básicas colocadas no início da seção, que concretamente são:

- Introduzir novos graus de liberdade no elemento, alcançando uma forte compatibilidade;
- Introduzir restrições nos atuais graus de liberdade alcançando uma configuração estacionária ou de mínimo mesmo, com satisfação em média destas restrições.

Bathe e Almeida (12) optaram pela segunda opção, principalmente devido ao fato de que a outra acarretaria um aumento, já grande, número de graus de liberdade por nó, inviabilizando a utilização prática do elemento. Analisar-se-á, mais a frente, os casos para os quais, são significativos os erros introduzidos com a falta de compatibilidade das rotações seccionais e aqueles casos que, para serem modelados, precisam restringir estas rotações.

Antes, porém, é necessário introduzir alterações nas relações deformação-deslocamento para modificar o funcional da energia do elemento, como já foi mencionado.

As modificações propostas por Bathe e Almeida(12) são,

$$(\epsilon_{\theta})^I = - \frac{z}{R - a \cos \phi} \frac{d^2 W_{\xi}}{d\theta^2} \quad (3.88)$$

$$(\gamma_{\phi\theta})^I = \frac{1}{R - a \cos \phi} \frac{dW_{\phi}}{d\theta} \quad (3.89)$$

que podem ser obtidas a partir das equações (3.61) ou (3.63). A letra I indica que estes termos sã serão considerados quando os efeitos de interação não forem desprezíveis.

Através de (3.88) introduz-se a derivada de 2ª ordem do deslocamento  $W_\zeta$ , sendo que, para garantirmos a compatibilidade do elemento deve-se exigir continuidade  $C^1$  do mesmo (30), (31), (40), já que a continuidade  $C^0$  é garantida por (3.62) e (3.67).

Através de (3.62), (3.67), (3.88) e (3.89) obtêm-se, para elementos curvos

$$(\epsilon_\theta)^I = \sum_{K=1}^4 \left[ \frac{2}{\theta_n (R_n - a \cos \phi)} \right]^2 \left( \sum_{m=1}^{N_c} m c_m^K \cos 2m\phi - \sum_{m=1}^{N_d} m d_m^K \sin 2m\phi \right) 2z h_{K,rr} \quad (3.90)$$

$$(\gamma_{\phi\theta})^I = \sum_{K=1}^4 \frac{2}{\theta_n (R_n - a \cos \phi)} \left( \sum_{m=1}^{N_c} c_m^K \sin 2m\phi + \sum_{m=1}^{N_d} d_m^K \cos 2m\phi \right) h_{K,r} \quad (3.91)$$

No desenvolvimento das equações acima, utilizou-se a seguinte simplificação

$$\frac{dh_K}{d\theta} = \frac{dh_K}{dr} \frac{dr}{d\theta} \cong \frac{dh_K}{dr} \frac{\Delta r}{\Delta \theta} = h_{K,r} \frac{2}{\theta_n}$$

e

(3.92)

$$\frac{d^2 h_K}{d\theta^2} \cong \left( \frac{2}{\theta_n} \right)^2 h_{K,rr}$$

onde  $n$  indica o número do elemento,  $\theta_n$  e  $R_n$  representam o ângulo entre faces e o raio do eixo médio do elemento  $n$ .

Note que estas expressões acima são válidas para elementos curvos, devendo o termo  $(R_n - a \cos \phi) \theta_n$  ser substituído pelo comprimento  $L_n$  quando se tratar de elementos retos.

As consequências de (3.90) e (3.91) nas equações (3.71) e (3.73) ou (3.82) e (3.83) são, respectivamente,

$$\left( K_{b_{ov1}}^{1m} \right)^I = 2mzh_{K,rr} \left[ \frac{2}{\theta_n (R_n - a \cos \phi)} \right]^2 \cos 2m\phi \quad (3.93)$$

$$\left( K_{b_{ov}}^{2m} \right)^I = \frac{2}{n (R_n - a \cos \phi)} h_{K,r} \operatorname{sen} 2m\phi$$

e

$$\left( K_{b_{ov3}}^{1m} \right)^I = -2mzh_{K,rr} \left[ \frac{2}{\theta_n (R_n - a \cos \phi)} \right]^2 \operatorname{sen} 2m\phi \quad (3.95)$$

$$\left( K_{b_{ov3}}^{2m} \right)^I = \frac{2}{\theta_n (R_n - a \cos \phi)} h_{K,r} \cos 2m\phi \quad (3.96)$$

Para o elemento reto, basta substituir o termo  $\theta_n (R_n - a \cos \phi)$  por  $L_n$  (comprimento do elemento).

Observa-se que, devido à introdução de (3.88) a hipótese 1 não é mais considerada. (pg. 57). Note-se ainda, que a ob-

tenção das expressões (3.92) limita a parametrização do sistema, de tal forma, que os nós globais dos elementos devem se situar equidistantes.

### 3.5.1 - Introdução das Restrições

Para a satisfação das exigências de continuidade, Bathe e Almeida (12) propõem uma função penalidade exterior (38), (39). O método consiste, basicamente, em penalizar as restrições através de um parâmetro,  $\alpha$ , suficientemente grande, dentro do funcional de energia (formando a função penalidade), de modo a satisfazer os requerimentos de acuidade dos resultados. Isto foi feito considerando a satisfação no contorno do elemento via integração (satisfação em média); como num tipo de função penalidade integrada (39).

O contorno do elemento é a área da seção transversal, cujo diferencial é  $\alpha_L d\phi dz$  ( $\alpha_L$  é o coeficiente de Lamé). Assim, como as restrições não dependem de  $z$ , como será visto à frente, tem-se que

$$\alpha \int_A f(\phi) \alpha_L d\phi dz = \alpha \text{ constante} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \quad (3.97)$$

$\alpha_L$ , como já foi visto, não depende de  $\phi$ . As restrições serão consideradas na forma

$$(\text{RESTRIÇÕES}) = 0 \quad (3.98)$$

permitindo a construção da função penalidade

$$\pi = U - W + \frac{\alpha}{2} \int_0^{2\pi} (\text{RESTRIÇÃO})^2 d\phi \quad (3.99)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro penalidade;  $U$  a energia de deformação total;  $W$  o potencial das cargas externas e  $Z = 2$  (proposto por Bathe e Almeida (12)).

Minimizando (3.99) para valores de  $\alpha$  adequadamente elevados, obtém-se uma solução de mínimo para o funcional com a satisfação desejada das restrições. Resta, pois, modelar as condições, onde são importantes os efeitos de interação.

### 3.5.2 - União Fixa

Considere, como na figura 20, um elemento de número  $n$  submetido à uma união fixa como um flange rígido ou um engastamento. A coordenada  $x$  representa uma coordenada curvilínea ao longo da superfície média do tubo, na direção longitudinal.

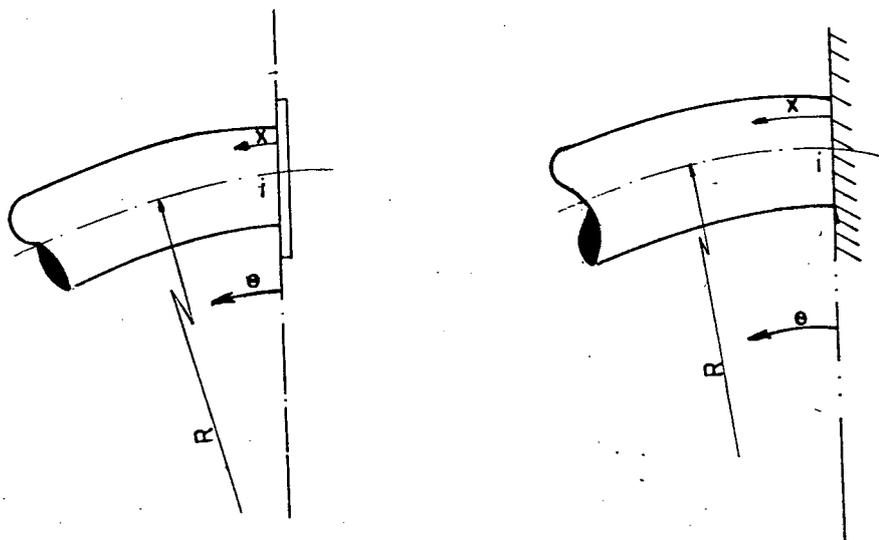


Figura 20. Elemento flangeado e engastado.

Pode-se notar que não há ovalização no ponto  $x = 0$  (ligação completamente rígida) e, portanto,

$$c_m^i = d_m^i = 0 \quad \forall m \quad (3.100)$$

onde  $i$  é o nó do contorno rígido.

Além disso, devido à rigidez da união

$$\left. \frac{dW_\zeta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.101)$$

ou

$$\left. \frac{2}{\theta_n (R_n - a \cos \phi)} \frac{dW_\zeta}{dr} \right|_{r=-1} = 0 \quad (3.102)$$

pois

$$dx = \beta_L d\theta = (R - a \cos \phi) d\theta = \frac{\theta_n (R - a \cos \phi)}{2} dr \quad (3.103)$$

onde  $\beta_L$  é o coeficiente de Lamé, calculado sobre a superfície média do tubo.

As restrições (3.100) são introduzidas diretamente, durante a resolução do sistema, enquanto a (3.101) será implantada via função penalidade, com a expressão

$$\text{(RESTRIÇÃO)} = \frac{2}{\theta_n (R - a \cos \phi)} \frac{dW_\zeta}{dr} \Big|_{r=-1} - 0$$

com

$$\frac{dW_\zeta}{dr} \Big|_{r=-1} = \sum_{K=1}^4 h_{K,r} \Big|_{r=-1} \left( \sum_{m=1}^{N_c} -2m c_m^K \cos 2m\phi + \sum_{m=1}^{N_d} 2m d_m^K \sin 2m\phi \right) \quad (3.104)$$

Introduzindo (3.104) em (3.99) e realizando o processo de minimização, obtém-se, como parcela a ser acrescentada à matriz de rigidez primária, o seguinte termo

$$\underset{\approx P}{K}^F = \alpha \int_0^{2\pi} \underset{\approx F}{G}^T \left[ \frac{2}{\theta_n (R_n - a \cos \phi)} \right]^2 \underset{\approx F}{G} d\phi \quad (3.105)$$

onde

$$\underset{\approx F}{G}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3] \quad (3.106)$$

com

$$a_m = -h_{K,r} \Big|_{r=-1} 2m \cos 2m\phi \quad (3.107)$$

$$b_m = h_{K,r} \Big|_{r=-1} 2m \sin 2m\phi \quad (3.108)$$

A alteração representada por  $K_p^F$  tem relação somente com os graus de liberdade  $c_n^K$  e  $d_m^K$ ,  $n = 1, N_c$ ,  $m = 1, N_d$ , correspondentes ao elemento em questão.

### 3.5.3 - Continuidade Inter-Elementos

Uma outra situação em que os efeitos de interação são importantes, forçando as modificações anteriormente descritas, aparece, quando há mudança do raio de curvatura do eixo médio do tubo de um elemento para outro adjacente. Considere a figura 21.

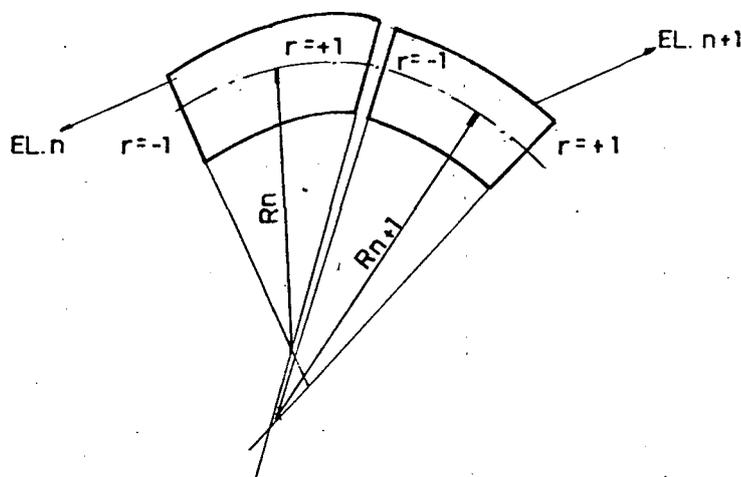


Figura 21. Elementos adjacentes com raios de curvatura diferentes.

Pode-se formular a restrição como

$$\frac{2}{\theta_n (R_n a \cos \phi)} W_{\zeta, r} \Big|_{r=+1} - \frac{2}{\theta_{n+1} (R_{n+1} a \cos \phi)} W_{\zeta, r} \Big|_{r=-1} = 0 \quad (3.109)$$

e, utilizando os procedimentos contidos na seção anterior, tem-se

$$\underset{\approx P}{K}^C = \alpha \int_0^{2\pi} \underset{\approx C}{G}^T \underset{\approx C}{G} d\phi \quad (3.110)$$

onde

$$\underset{\approx C}{G}^T = [\bar{a}_1 K(n) \quad \bar{a}_2 K(n) \quad \bar{a}_3 K(n) \quad \bar{b}_1 K(n) \quad \bar{b}_2 K(n) \quad \bar{b}_3 K(n) \dots \bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \bar{a}_3 \quad \bar{b}_1 \quad \bar{b}_2 \quad \bar{b}_3 \dots \bar{a}_1 K(n+1) \quad \bar{a}_2 K(n+1) \quad \bar{a}_3 K(n+1) \quad \bar{b}_1 K(n+1) \quad \bar{b}_2 K(n+1) \quad \bar{b}_3 K(n+1)] \quad (3.111)$$

Com

$$\bar{a}_m K(n) = \frac{4m}{\theta_n(R_n - a \cos \phi)} \frac{dh_K^{(n)}}{dr} \Big|_{r=+1} \cos 2m\phi \quad p/ K \neq 2 \quad (3.112)$$

$$\bar{b}_m K(n) = \frac{4m}{\theta_n(R_n - a \cos \phi)} \frac{dh_K^{(n)}}{dr} \Big|_{r=+1} \text{sen} 2m\phi$$

$$\bar{a}_m K(n+1) = \frac{4m}{\theta_{n+1}(R_{n+1} - a \cos \phi)} \frac{dh_K^{(n+1)}}{dr} \Big|_{r=-1} \cos 2m\phi \quad p/ K \neq 1 \quad (3.113)$$

$$\bar{b}_m K(n+1) = \frac{-4m}{\theta_{n+1}(R_{n+1} - a \cos \phi)} \frac{dh_K^{(n+1)}}{dr} \Big|_{r=-1} \text{sen} 2m\phi$$

$$\bar{a}_m = \left\{ - \frac{2}{\theta_n(R_n - a \cos \phi)} \frac{dh_2^{(n)}}{dr} \Big|_{r=+1} \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\theta_{n+1}(R_{n+1} - a \cos \phi)} \frac{dh_1^{(n+1)}}{dr} \Big|_{r=-1} \right\} 2m \cos 2m\phi \quad (3.114)$$

$$\bar{b}_m = \left\{ \frac{2}{\theta_n (R_n - a \cos \phi)} \frac{dh_K^{(n)}}{dr} \Big|_{r=+1} - \frac{2}{\theta_{n+1} (R_{n+1} - a \cos \phi)} \frac{dh_K^{(n+1)}}{dr} \Big|_{r=-1} \right\} 2m \sin 2m\phi \quad (3.115)$$

A matriz  $K_p^C$  tem relação com os graus de liberdade  $c_m^{K(n)}$ ,  $m=1, N_c$ ;  $d_m^{K(n)}$ ,  $m=1, N_d$ ;  $c_m$ ,  $m=1, N_c$  e  $d_m$ ,  $m=1, N_d$  para o nó comum;  $c_m^{K(n+1)}$ ,  $m=1, N_c$ ;  $d_m^{K(n+1)}$ ,  $m=1, N_d$ .

Para o cálculo do parâmetro penalidade,  $\alpha$ , Bathe e Almeida (12) propõem, como método automático, igualá-lo ao termo de maior magnitude da matriz de rigidez, correspondente aos modos de ovalização.

3.6 - PRESSÃO INTERNA

Bathe e Almeida (12) utilizaram basicamente os desenvolvimentos de Kafka e Rodabaugh (6), (7). Considere, pois, um tubo submetido à pressão interna. Durante a deformação deste tubo pressurizado, o trabalho realizado pela pressão atuante deverá ser considerado da seguinte forma (veja figura 22).

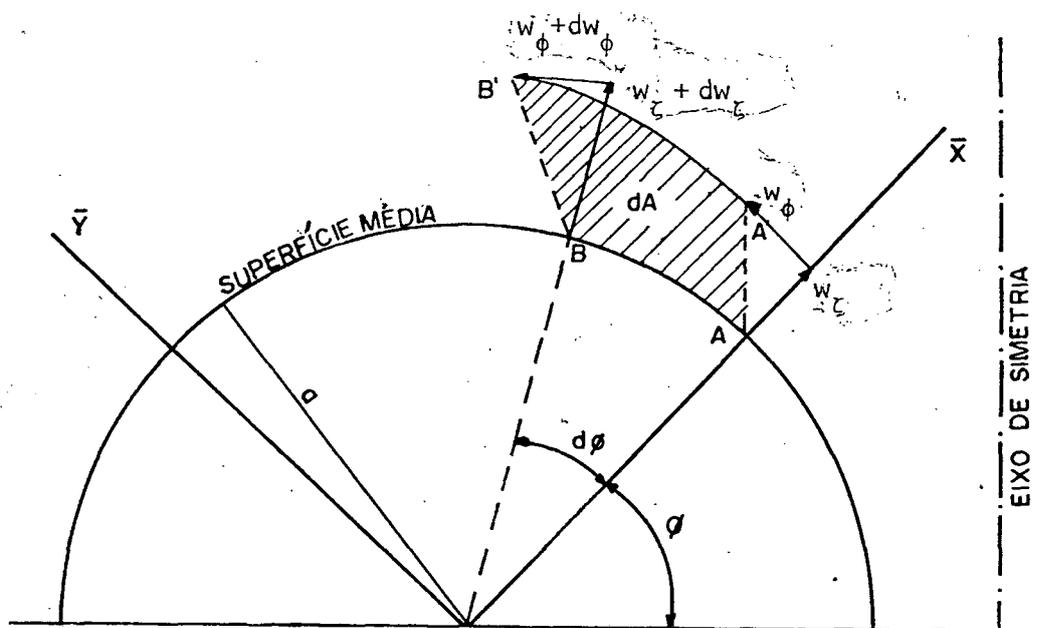


Figura 22. Deformação infinitesimal da seção transversal,  $dA$ .

$$W_{pr} = - \int_V P dv$$

onde  $P$  é a pressão atuante, podendo ser reescrito como

$$W_{pr} = - \int_0^{\theta_n} (R_n - a \cos \phi) \int_0^{2\pi} P dA(r, \phi) \beta_L d\theta \quad (3.116)$$

onde  $\theta_n(R_n - a \cos \phi)$  é o comprimento do tubo sobre um filamento de casca ao longo do eixo médio e  $\beta_L$  é o coeficiente de Lamé.

Utilizando as simplificações embutidas em (3.103) pode-se reescrever (3.116) na forma

$$W_{pr} = - \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} P \frac{\theta_n(R_n - a \cos \phi)}{2} dA(r, \phi) dr \quad (3.117)$$

$dv$  - Variação infinitesimal de volume devido à ovalização;

$dA(r, \phi)$  - Variação infinitesimal da seção transversal do tubo na direção longitudinal;

$\theta_n$  - Ângulo entre faces do n-ésimo elemento;

$P$  - Pressão interna atuante.

Para calcular  $dA(r, \phi)$  basta analisar o ocorrido com o segmento indeformado  $\overline{AB}$ ; quando ele se desloca para a posição definida por  $\overline{A'B'}$ , durante a deformação. Assim, pode-se concluir que

$$dA(r, \phi) = \frac{1}{2} |\overline{AB'} \times \overline{A'B}| \quad (3.118)$$

e, conseqüentemente, como já foi visto no 1º Capítulo, se transforma em

$$dA(r, \phi) = \frac{1}{2} \left[ 2aW_\zeta + W_\zeta \left( W_\zeta + \frac{dW_\phi}{d\phi} \right) + W_\phi^2 - W_\phi \frac{dW_\zeta}{d\phi} \right] \quad (3.119)$$

Termo 1    Termo 2    Termo 3

que, após as seguintes considerações pode ser bem simplificada.

- Como os modos de ovalização são simétricos, implica que a integração de  $W_\zeta$  sobre o domínio  $[0, 2\pi]$  será nula, justificando a retirada do termo 1.
- Como a deformação da casca do tubo, na direção circunferencial é inextensional, o termo 2 também se anulará.
- Completando a segunda consideração, tem-se de impor que  $\|\underline{AB}\| = \|\underline{A'B'}\|$ . Isto permite afirmar que

$$W_\phi \frac{dW_\zeta}{d\phi} = \frac{1}{2} \left[ W_\phi^2 + \left( \frac{d^2 W_\phi}{d\phi^2} \right)^2 \right] \quad (3.120)$$

Considerando, para tal, termos de até 2ª ordem (6), (7), (13). Substituindo (3.120) em (3.119) e o resultado em (3.117), obtêm-se

$$W_{pr} = -\frac{p_0 n}{8} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left[ W_\phi^2 - \left( \frac{d^2 W_\phi}{d\phi^2} \right)^2 \right] (R - a \cos \phi) d\phi \quad (3.121)$$

É interessante observar que,

- O trabalho realizado pela pressão interna depende exclusivamente do deslocamento circunferencial  $W_\phi$ .
- A natureza física do potencial elástico é afirmada pela expressão (3.121) que é função quadrática dos deslocamentos circunferenciais que descrevem a ovalização da seção transversal. (13).

As modificações a serem introduzidas na matriz de rigidez do elemento finito viga-tubo serão calculadas através da

inclusão de (3.121) no funcional de energia e a sua posterior minimização.

As modificações a serem somadas à matriz de rigidez (sem o efeito da pressão interna) serão

$$\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{p}}}^r = \frac{P}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left[ \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{p}}_1}^T \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{p}}_1} - \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{p}}_2}^T \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{p}}_2} \right] \frac{\theta_n (R_n - a \cos \phi)}{2} d\phi dr \quad (3.122)$$

onde

$$\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{p}}_1}^T = [a_1^K \quad a_2^K \quad a_3^K \quad b_1^K \quad b_2^K \quad b_3^K] \quad (3.123)$$

com

$$a_m^K = -(2m)^2 h_K \operatorname{sen} 2m\phi \quad (3.124)$$

$$b_m^K = -(2m)^2 h_K \operatorname{cos} 2m\phi$$

e

$$\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{p}}_2}^T = [a_1^{-K} \quad a_2^{-K} \quad a_3^{-K} \quad b_1^{-K} \quad b_2^{-K} \quad b_3^{-K}] \quad (3.125)$$

com

$$\bar{a}_m^K = h_K \operatorname{sen} 2m\phi \quad (3.126)$$

$$\bar{b}_m^K = h_K \operatorname{cos} 2m\phi$$

Nota-se que estas alterações só se relacionam com os graus de liberdade que descrevem a ovalização.

## 4º CAPÍTULO - FORMULAÇÃO NUMÉRICA E ANÁLISE DE CASOS

### 4.1 - FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O elemento finito viga-tubo foi implementado em um sistema computacional, doravante denominado PASET - Programa Analisador de Sistemas Estruturais de Tubulações. Este sistema utiliza algumas rotinas do SIMELF (Sistema Modular de Elementos Finitos), basicamente, no que diz respeito à montagem e resolução do sistema de equações (45).

Um fluxograma básico do sistema pode ser organizado como o proposto por Mithaiwala (41) (vide quadro 1), cujos passos serão comentados a seguir:

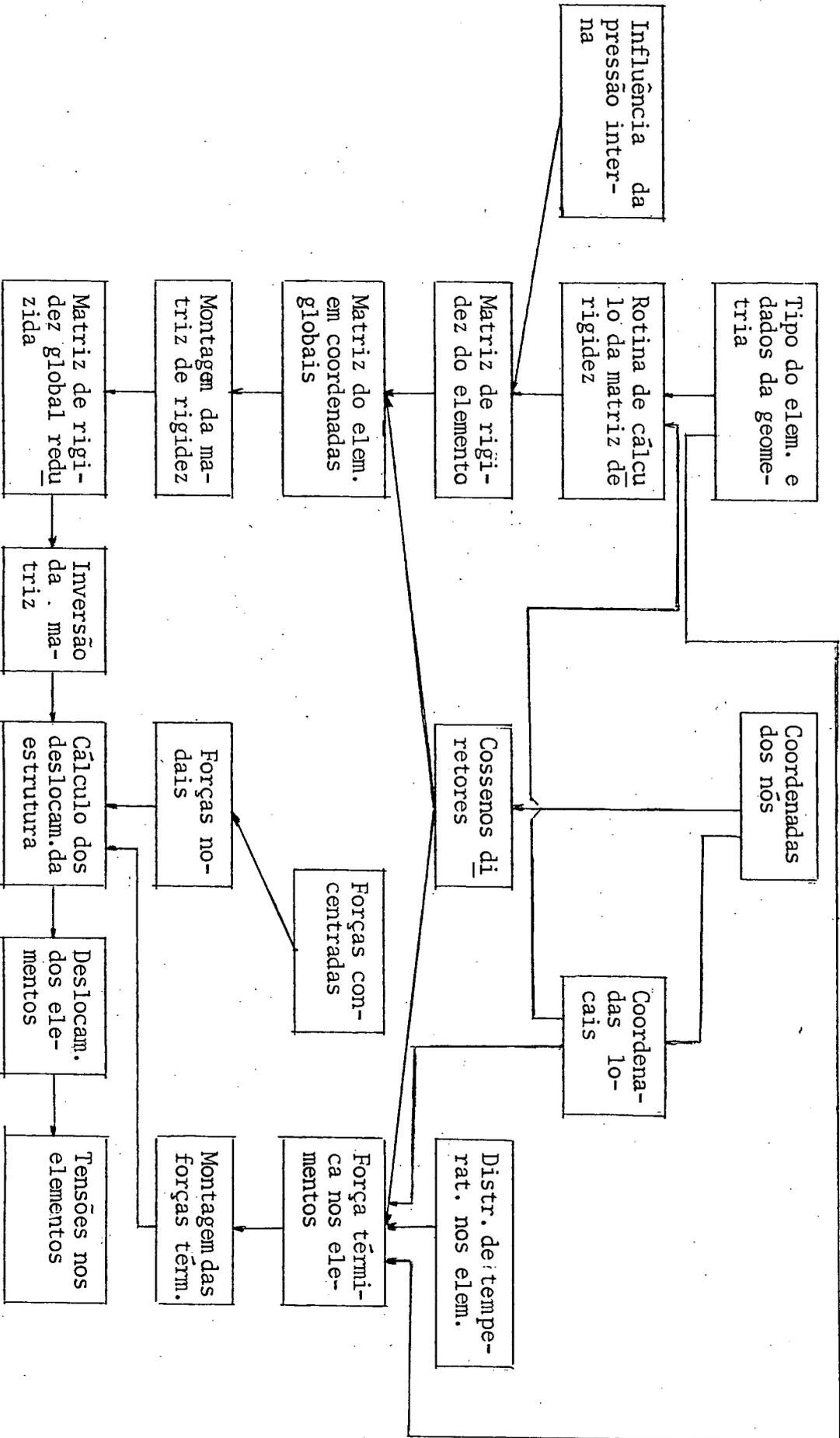
- 1 - Os dados que descrevem a modelagem da estrutura (topologia da estrutura) podem ser introduzidos via
  - . Coordenadas dos nós;
  - . Relacionamento entre nós e entre nós-elementos.

que juntamente com as características geométricas e do material de cada elemento, constituem os dados básicos para a idealização da estrutura.

- 2 - Determinação das coordenadas locais. No PASET, o sistema de

coordenadas locais já é definido "a priori";

- 3 - Cálculo da matriz de rigidez em relação ao sistema de coordenadas locais;
- 4 - Conversão da pressão em seu efeito de enrijecimento da estrutura;
- 5 - Determinação dos cossenos diretores. No PASET, os cossenos diretores são dados de entrada, eliminando-se, parcialmente, o passo 1;
- 6 - Transformação da matriz de rigidez do sistema local para o sistema global de coordenadas;
- 7 - Montagem da matriz de rigidez do elemento na matriz global do sistema (armazenada em banda no PASET);
- 8 - Eliminação dos graus de liberdade de corpo rígido, para obter-se a matriz de rigidez reduzida;
- 9 - Inversão da matriz de rigidez global (eliminação de Gauss);
- 10- Cálculo das forças térmicas nodais do elemento;
- 11- Montagem das forças térmicas no vetor força global;
- 12- Montagem das forças nodais do elemento, provenientes do carregamento mecânico da estrutura, no vetor força global;



13 - Cálculo dos deslocamentos nodais da estrutura e, logo, os deslocamentos nos elementos e as respectivas tensões.

Os passos 10 e 11 ainda não estão introduzidos no PASET, por estarem além dos objetivos propostos anteriormente.

No Apêndice II encontra-se uma descrição mais minuciosa do PASET.

#### 4.1.1 - Integração Numérica

As equações obtidas em (3.87) são por demais complexas para serem integradas analiticamente em todas as três direções. Bathe e Almeida (11) propõem o emprego das fórmulas de Newton-Cotes da seguinte forma:

- Três pontos de integração através da parede do tubo;
- Cinco pontos de integração ao longo do tubo;
- Trapezoidal composta com doze pontos ao longo da circunferência para carregamento no plano de flexão e vinte e quatro pontos para carregamento fora do plano de flexão.

No entanto, na atual formulação, visando unicamente o tempo de processamento, todos os elementos da matriz de rigidez foram integrados analiticamente na direção normal à superfície média do tubo, menos, obviamente os termos correspondentes aos efeitos de interação e ao efeito da pressão interna.

Foram feitas integrações utilizando-se pontos de Gauss, da seguinte forma

- Composta com dois intervalos de quatro pontos cada ao longo do

tubo;

- Composta com até dezesseis intervalos de quatro pontos cada ao longo da circunferência do tubo.

Porém, os resultados foram bem próximos quando comparados com aqueles obtidos por Bathe e Almeida. A comprovação destes resultados foi importante, uma vez que é difícil avaliar a distribuição da função-integrando ao longo do domínio.

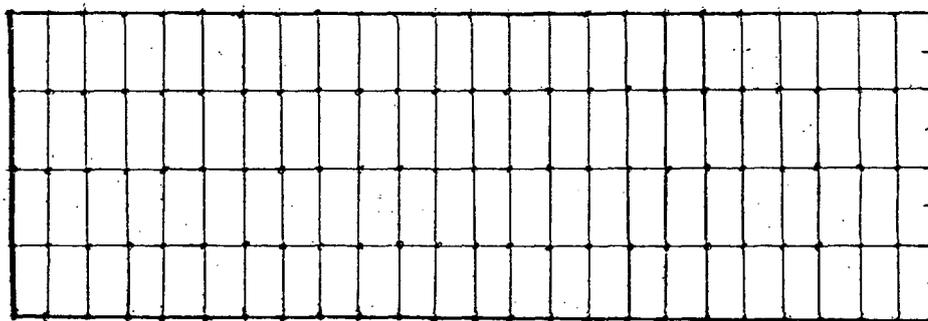


Figura 23. Distribuição dos pontos utilizados para integração numérica. Superfície média do tubo reto desenvolvida.

#### 4.1.2 - O PASET

O PASET é um sistema computacional acadêmico que possui as seguintes características

- 1 - Utiliza elementos contidos num plano;
- 2 - Inclue somente o efeito enrijecedor da pressão interna;

- 3 - Permite a modelagem de estruturas tridimensionais;
- 4 - Armazena a matriz de rigidez global em banda;
- 5 - A inversão da matriz global é feita por eliminação de Gauss;
- 6 - Calcula os balanços energético e de forças do sistema;
- 7 - Calcula as tensões em qualquer elemento e em qualquer ponto de integração;
- 8 - Fornece todos os dados relativos a modelagem e comportamento da estrutura (geometria, material, valores adimensionais, condições de contorno, carregamento, deslocamentos, balanços energético e de forças e tensões desejadas);
- 9 - A principal limitação do sistema é de memória, pois não há alocação dinâmica em disco da matriz de rigidez global. Além disso, o sistema exige um esforço computacional razoável, devido, principalmente, à integração numérica realizada.

## 4.2 - ANÁLISE DE CASOS

A análise de casos seguirá, em linhas gerais, a metodologia proposta no 2º Capítulo, dando ênfase à continuidade dos deslocamentos seccionais ( $W_{\zeta}$  e suas derivadas); o que fornecerá uma dimensão do grau de perturbação provocada pelo carregamento e/ou restrições. Bathe e Almeida (12) apresentaram um estudo semelhante utilizando um tubo reto engastado por um de seus extremos, submetido à modos de ovalização prescritos no outro extremo.

Inicialmente será feito um estudo dos efeitos das hipóteses restritivas introduzidas na formulação matemática, procurando demonstrar qualitativamente algumas limitações do elemento finito em estudo.

### 4.2.1 - Efeitos das Hipóteses Restritivas

O objetivo desta seção é o estudo dos efeitos das hipóteses restritivas (vide 3º Capítulo) sobre o comportamento do tubo. Duas hipóteses básicas serão analisadas:

- 1 - Inextensibilidade da superfície média do tubo na direção circunferencial;
- 2 - Desconsideração da variação da tensão longitudinal ao longo da espessura da parede do tubo.

1 - Von Kármán ao propor esta hipótese tinha ciência de que isto

limitava algumas dimensões do seu modelo (2), pois, a partir dela era gerada uma inconsistência no equilíbrio de um elemento diferencial do tubo. Gross (26) demonstrou que a tensão circunferencial de membrana em um tubo curvo submetido a flexão era proporcional à razão  $(a/R)$  e, conseqüentemente, quando esta razão não é desprezível, a tensão circunferencial de membrana deve ser considerada.

O elemento finito viga-tubo considera a superfície imediatamente do tubo inextensional na direção circunferencial, durante a deformação, e, conseqüentemente, não pode ser aplicado em tubos com a razão  $(a/R)$  (ou  $1/\gamma$ ) acima de determinada magnitude, sem aplicar-se um coeficiente de segurança maior, principalmente no que diz respeito às "tensões circunferenciais de pico" (apesar dos termos dependentes de  $a/R$  estarem presentes na formulação).

Utilizando o trabalho de Turner e Ford (8), descrito no 2º Capítulo, e comparando com os resultados obtidos com o elemento finito viga-tubo, pode-se tirar algumas conclusões. A figura 24 mostra que, apesar do elemento finito viga-tubo descrever bem, qualitativamente, o comportamento das tensões circunferenciais, nota-se que a tensão máxima prevista está cerca de 10% menor que a calculada pela teoria mais abrangente de Turner e Ford.

Comparando as figuras 24 e 25 conclui-se que a importância das tensões circunferenciais de membrana residem na magnitude do termo  $a/R$  ( $1/\gamma$ ), pois os parâmetros  $\Omega$  e  $\lambda$  pouca influência demonstram na grandeza destas tensões.

Para  $a/R$  pequeno, Bathe e Almeida (11) já demonstra-

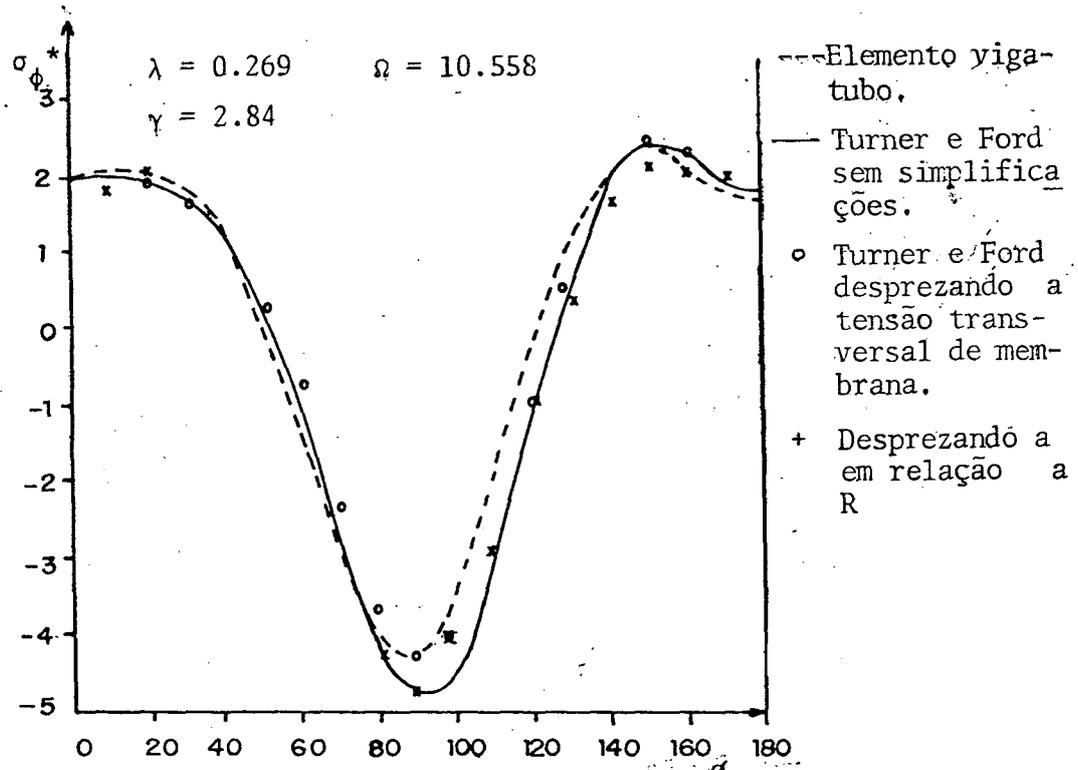


Figura 24. Fator de intensificação da tensão circunferencial interna.

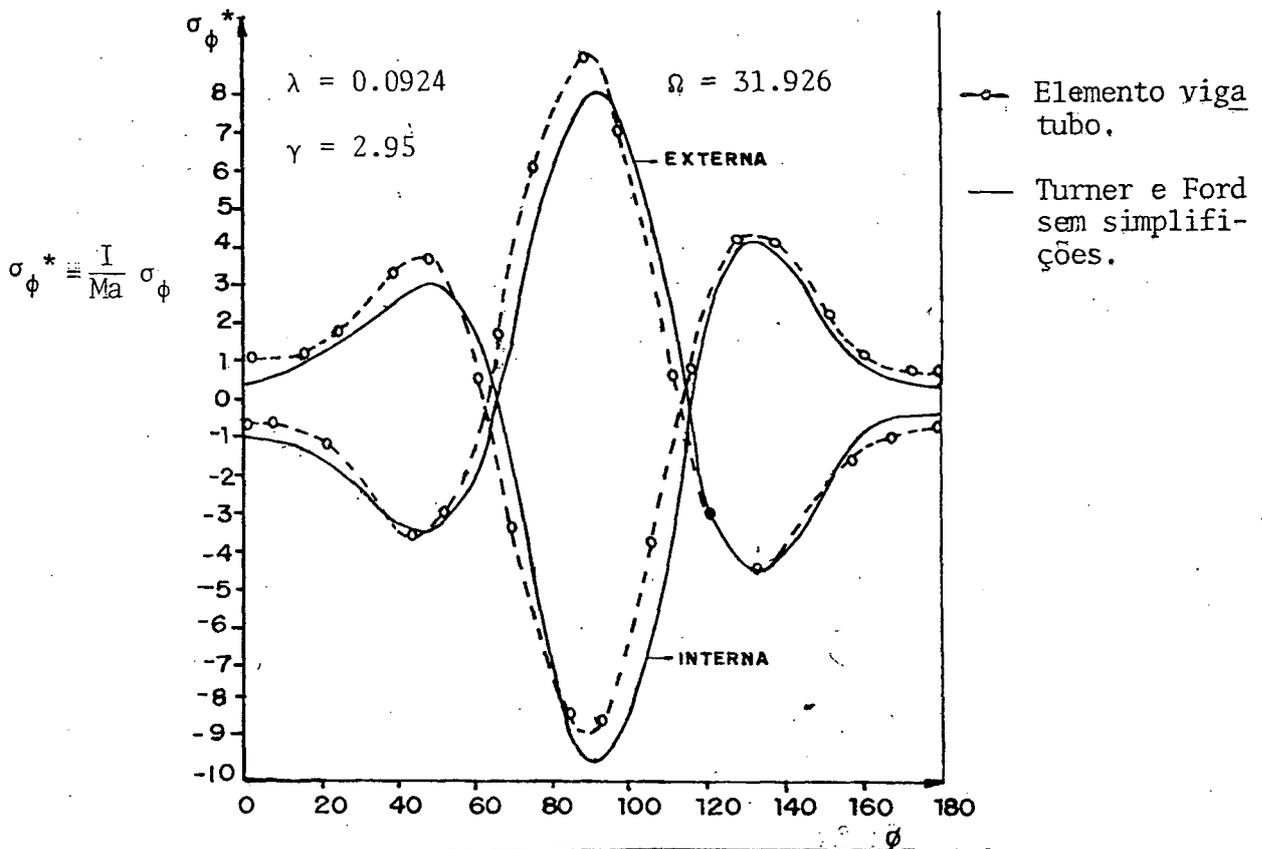


Figura 25. Fator de intensificação da tensão circunferencial

ram a eficácia do elemento finito viga-tubo.

2 - Aqui, são necessárias duas observações básicas:

- a. Na abordagem, feita no 3º Capítulo, que descreve o comportamento de viga do tubo, permite-se que a tensão longitudinal varie através da espessura;
- b. Na abordagem que descreve o comportamento de casca do tubo não se permite a variação da tensão longitudinal através da espessura, a não ser, quando os efeitos de interação forem importantes.

Estas considerações tornam a análise do comportamento do elemento viga-tubo um pouco complexa, mas pode-se permitir comparações.

Na figura 26, considerando os resultados de Turner e Ford como valor-padrão, pode-se concluir que a diferença (para menos) dos resultados, utilizando o elemento finito viga-tubo, é devido ao "pico de tensão", proporcionado pelo momento seccional da casca do tubo (momento surgido com a mudança de curvatura  $K_0$ , descrita no 3º Capítulo), a qual é desprezada neste caso.

No caso da figura 28, pode-se notar comportamento semelhante ao se comparar as duas formulações, porém, aí surge um fato novo. Os experimentos de Vissat e Del Buono (citado por Turner e Ford) demonstram que este pico de tensão longitudinal (neste caso particular) não é muito importante. É de se supor, obviamente, que para tubos de maior espessura ( $\Omega$  pequeno), o pico de tensão provocado pela mudança de curvatura  $K_0$  seja de magnitude considerável. Um desenho esquemático do

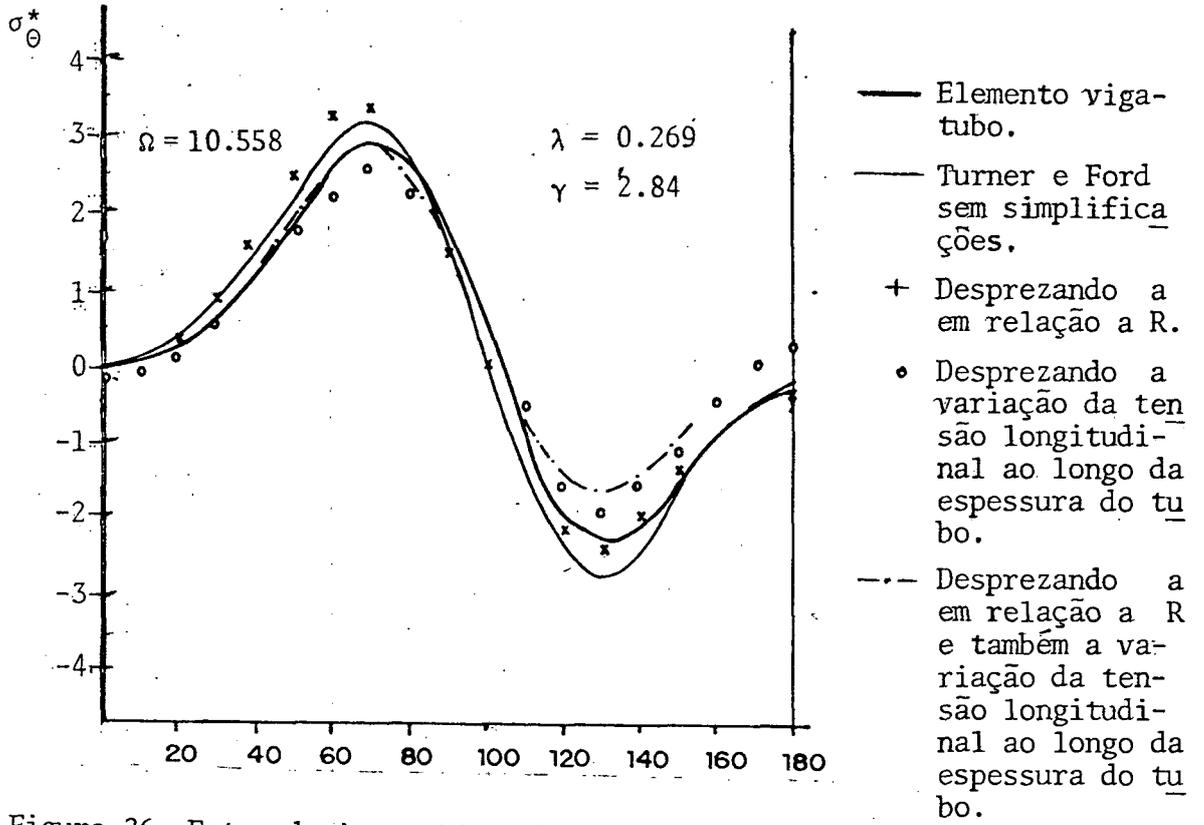


Figura 26. Fator de intensificação da tensão longitudinal.

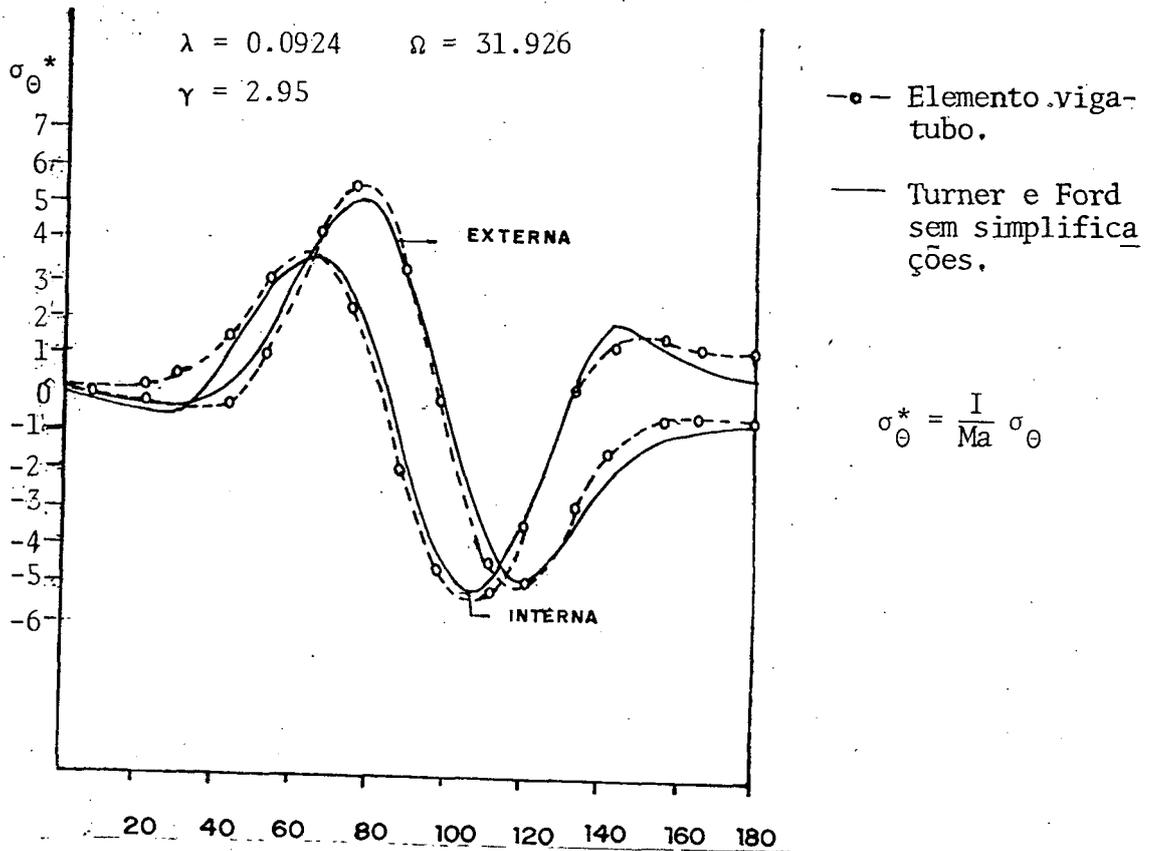


Figura 27. Fator de intensificação da tensão longitudinal.

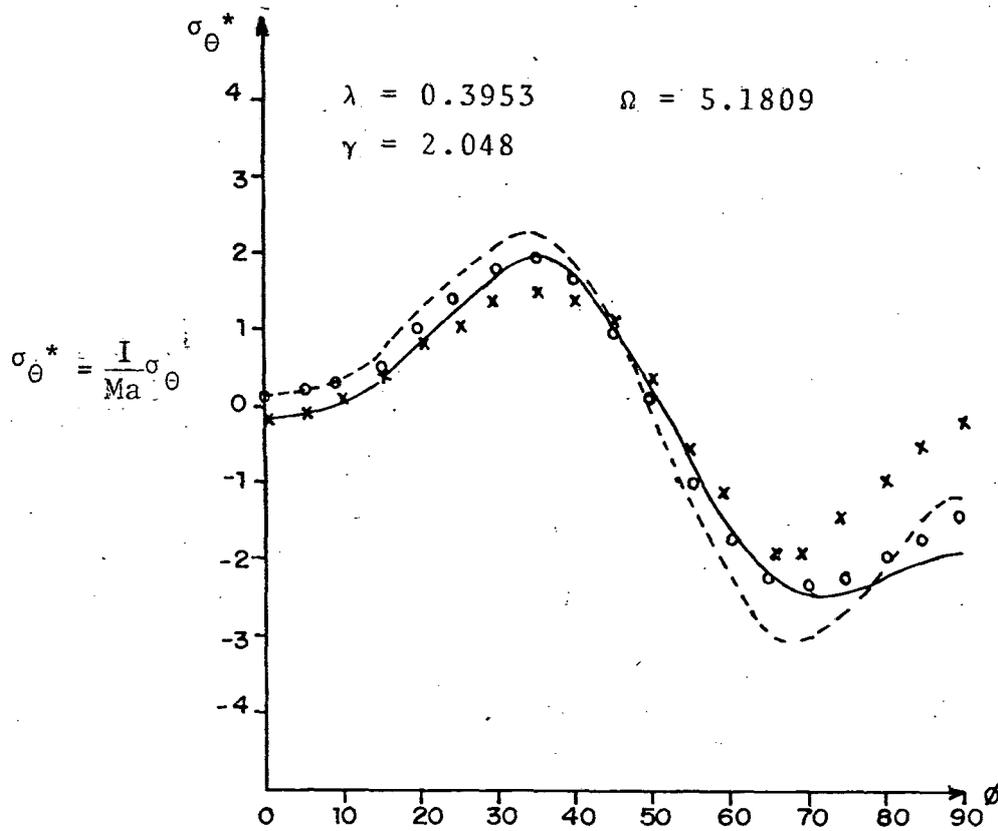


Figura 28. Fator de intensificação da tensão longitudinal externa

— Elemento viga-tubo.

○ Experimental (Vissat e Del Buono, citado por Turner e Ford).

+ Desprezando a variação da tensão longitudinal ao longo da espessura do tubo.

--- Turner e Ford sem simplificações

que foi dito acima pode ser visto na figura 29. Quando os efeitos de interação não são importantes, o elemento finito viga-tubo só prevê as tensões (A+B).

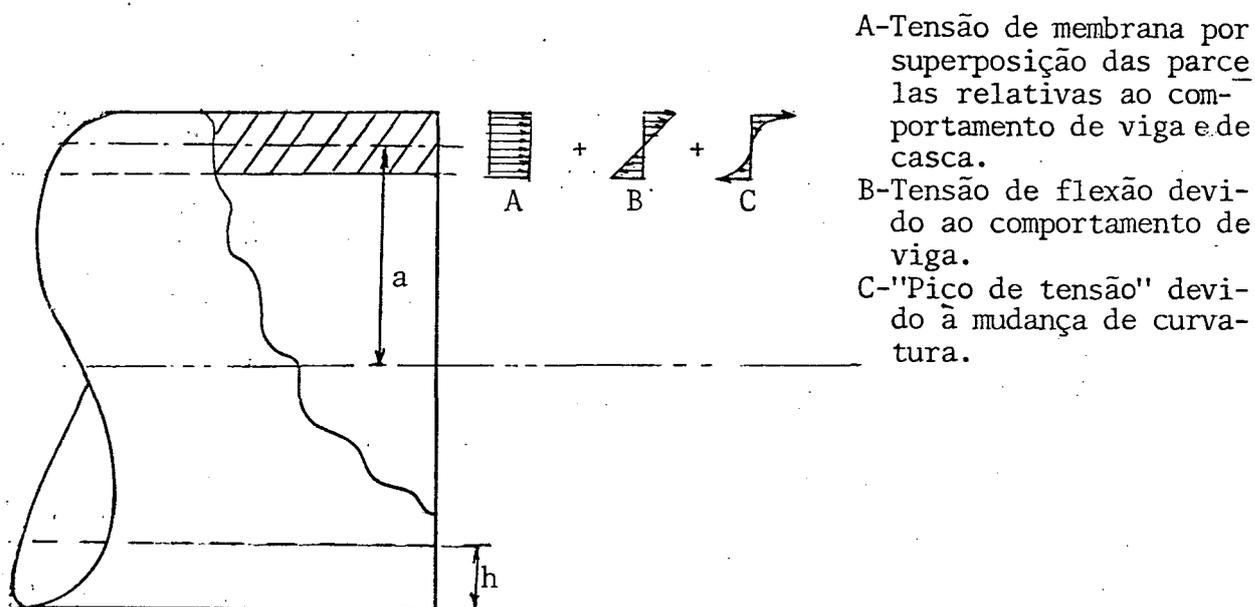


Figura 29. Tensões longitudinais atuantes na seção transversal do tubo.

Quanto ao efeito da espessura, descrito acima, pode-se notá-lo claramente, pelo confronto entre as figuras 26, 27 e 28 (esta afirmação, obviamente, se respalda na comparação dos resultados do elemento finito viga-tubo com os resultados teóricos de Turner e Ford).

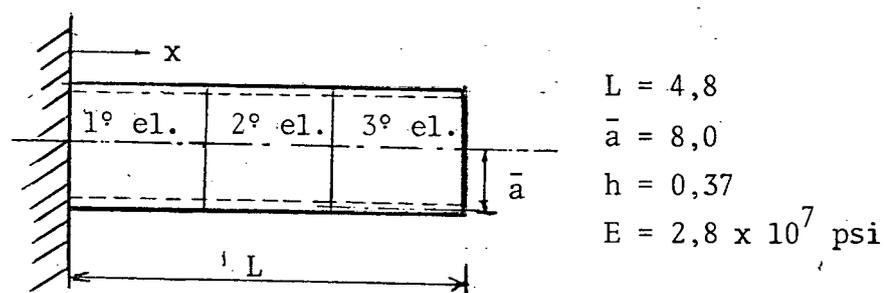
#### 4.2.2 - Efeito da Continuidade dos Deslocamentos Seccionais

Como já foi dito, para forçar a satisfação da exigência de continuidade de rotação seccional da casca do tubo (continuidade  $C^1$ ), ou para impor restrições a este deslocamento, lançou-se mão do método das funções penalidade.

Bathe e Almeida estudaram de duas formas o comportamento da função penalidade proposta no capítulo anterior, ou seja, considerando o que ocorre com os resultados, quando

- 1 - Aumenta-se o parâmetro penalidade;
- 2 - Há um refinamento da malha.

Porém, o caso estudado só representa uma parte bem limitada do espectro de situações, como já foi descrito no início deste capítulo e descreve a figura 30.



$$\text{em } x = 0$$

$$W_{\zeta} = 0$$

$$\frac{dW_{\zeta}}{dx} = 0$$

$$\text{em } x = L$$

$$W_{\zeta} = 1 \text{ em } \phi = 0$$

Figura 30. Tubo reto em balanço.

Verificando que, para qualquer tamanho do parâmetro penalidade (abaixo daquele que torna a matriz de rigidez global quasi-singular), entre o primeiro e o segundo elemento havia um salto nos valores de  $W_{\zeta,xx}$ . Forçando a que o valor da parcela da deformação longitudinal  $\epsilon_{\theta}$ , que depende de  $W_{\zeta,xx}$  seja menor ou igual à deformação cisalhante  $\gamma_{x\phi}$  (única que é função de  $W_{\zeta,x}$ ) chegou-se à conclusão que a relação

$$\frac{L}{h} < 4 \quad (4.1)$$

deve ser satisfeita se deseja-se continuidade  $C^2$  nos deslocamentos da casca do elemento.

Quanto ao parâmetro penalidade, há uma limitação ao seu valor o qual não pode elevar-se muito sob pena da matriz de rigidez global tornar-se quasi-singular. Isto acontece quando os termos penalizados passam a ter magnitude muito superior ao do resto da matriz de rigidez degradando sobremaneira os resultados.

Tendo isto posto, resta analisar algumas situações para que se tenha uma boa compreensão do comportamento do elemento finito viga-tubo. A seguir far-se-á um estudo das seguintes situações:

- 1 - Tubo Reto:- Influência da espessura na satisfação das restrições impostas pela função penalidade;
  - Influência do valor do parâmetro penalidade quando a relação (4.1) não for satisfeita;
  - Influência da pressão.

- 2 - Tubo Curvo:- Influência da pressão na satisfação das restrições impostas pela função penalidade;
- Influência do parâmetro  $\lambda$  na satisfação das restrições impostas pela função penalidade (inclusive quando houver descontinuidade do raio de curvatura do eixo médio do tubo, entre dois elementos adjacentes);
  - Influência do valor do parâmetro penalidade quando a relação (4.1) não for satisfeita.

É importante observar que, em todos os modelos idealizados a seguir, todos os graus de liberdade que descrevem a ovalização estão presentes, mesmo em situações nas quais alguns fossem descartáveis.

#### 4.2.2.1 - Elemento Reto

A estrutura analisada é a mesma utilizada por Bathe e Almeida (12), descrita na figura 30. Nota-se, para este caso

$$\Omega_1 = \frac{a}{h} = 21.12 \quad (4.2)$$

o que caracteriza razoavelmente bem uma casca fina. A "ovalização unitária" ( $W_\zeta = 1$  em  $\phi = 0$ ) no extremo não engastado será descrita prescrevendo os seguintes valores para os 3 primeiros modos de ovalização

$$c_1 = 0.1667$$

$$c_2 = 0.0833 \quad (4.3)$$

$$c_3 = 0.0555$$

e, quanto aos outros, serão prescritos o valor zero. A fim de que os efeitos da espessura sejam analisados, aumentaremos, num segundo caso, a espessura para  $h = 1,37$  e, conseqüentemente

$$\Omega_2 = 5.70 \quad (4.4)$$

os resultados para o deslocamento normal  $W_\zeta$ ; a rotação  $W_{\zeta,x}$  e a mudança de curvatura  $W_{\zeta,xx}$  para o ângulo  $\phi = 0$ , estão expostos nas figuras 31 e 32. Para uma visão quantitativa a Tabela 4.1 fornece as informações necessárias.

Os parâmetros penalidade utilizados nestes dois casos foram os recomendados por Bathe e Almeida (12), como já foi descrito no capítulo anterior. Pode-se notar que a penalização utilizada é mais eficiente para tubos de parede espessa do que para tubos de parede delgada, no que concerne a compatibilidade  $C^2$  na fronteira dos elementos. Analisando as curvas de rotação e mudança de curvatura pode-se concluir que isto esteja relacionado a mudanças de curvatura mais bruscas a que é submetida a casca do tubo de parede fina, devido à sua pouca resistência a flexão.

Quanto a magnitude do parâmetro penalidade, optou-se por considerar a possibilidade de penalizar cada restrição a que

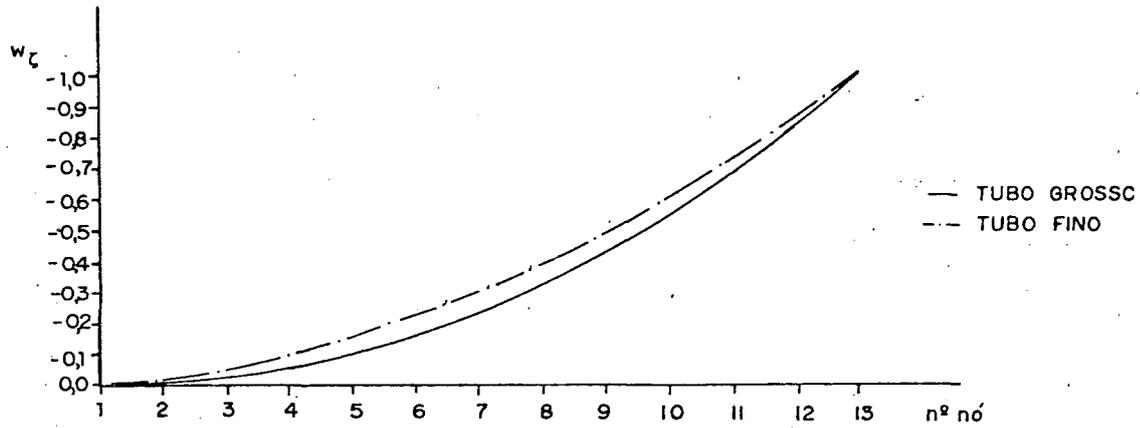


Figura 31. Influência da espessura no deslocamento  $w_\zeta$ .

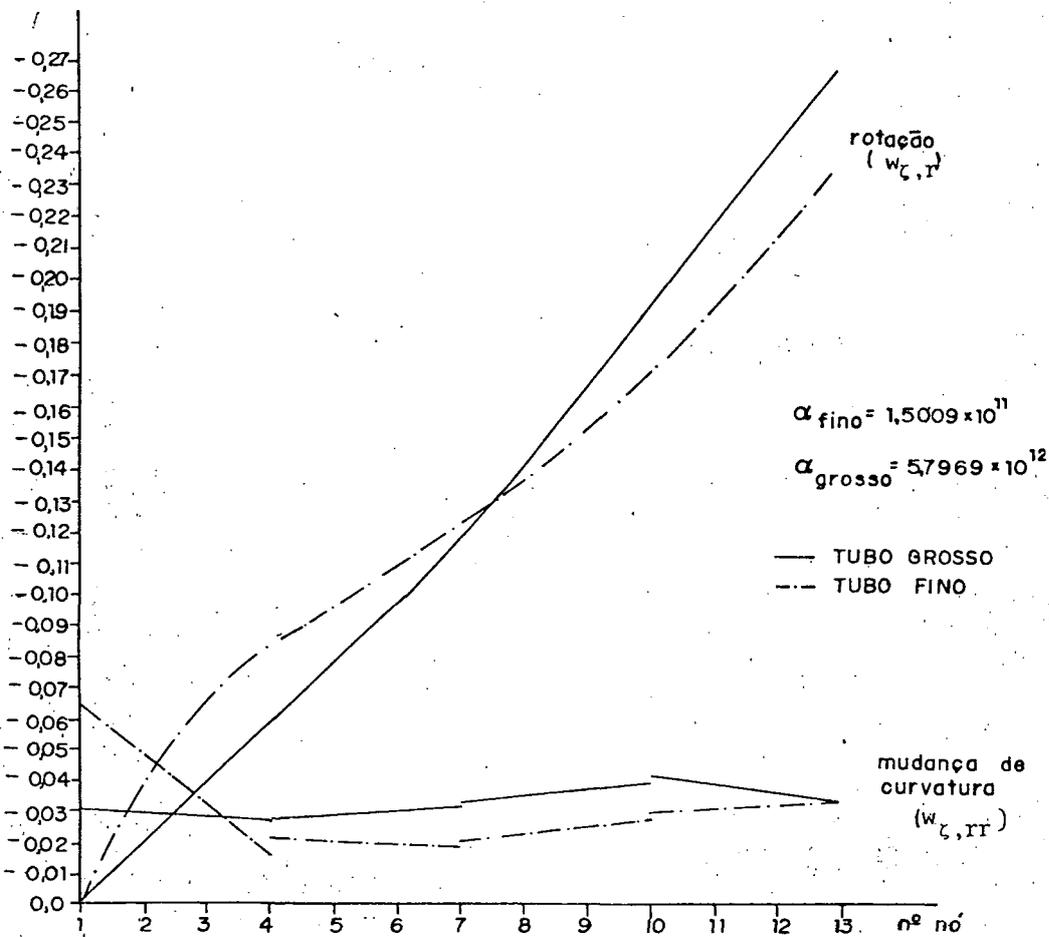


Figura 32. Influência da espessura na rotação  $w_{\zeta,r}$  e na mudança de curvatura  $w_{\zeta,rr}$ .

TABELA 4.1

	EL./NO	1/1	1/4	2/1	2/4	3/1	3/4	4/1	4/3
Tubo Fino	$W \times 10^{-1}$	0,000	-1.206	-1.206	-3.428	-3.428	-6.214	-6.214	-10.000
		0.000	-0.597	-0.597	-2.348	-2.348	-5.410	-5.410	-10.000
Tubo Fino	$W_{\xi, x} \times 10^{-1}$	0.000	-0.976	-0.976	-1.224	-1.224	-1.604	-1.604	-2.202
		0.000	-0.585	-0.585	-1.181	-1.181	-1.905	-1.905	-2.661
Tubo Grosso	$W_{\xi, xx} \times 10^{-1}$	-0.834	-0.142	-0.157	-0.091	-0.128	-0.252	-0.268	-0.330
		-0.310	-0.274	-0.276	-0.320	-0.327	-0.397	-0.415	-0.341

é submetida a estrutura, de forma diferenciada, buscando com isto verificar a possibilidade de uma "penalização ideal" para a modelagem em questão. O que deseja-se é diminuir ao máximo a diferença de mudança de curvatura nos contornos dos elementos, evitando, evidentemente, que o parâmetro penalidade se eleve a ponto de degradar os resultados. Na figura 33 tem-se as mudanças da curvatura para 2 tipos de penalizações. A curva  $\alpha_1$  representa o comportamento da estrutura penalizada segundo Bathe e Almeida, enquanto  $\alpha_2$  representa o comportamento da mesma estrutura. Com as seguintes constantes multiplicadas pelo parâmetro anterior:

- Para o engastamento da casca  $\alpha_2 = \alpha_1 \times 10^7$ ;
- Para a interação do 1º elemento com o 2º  $\alpha_2 = \alpha_1 \times 10^9$ ;
- Para a interação do 2º elemento com o 3º  $\alpha_2 = \alpha_1 \times 10^8$ ;
- Para a interação do 3º elemento com o 4º  $\alpha_2 = \alpha_1 \times 10^6$ .

Pode-se notar, a uma primeira vista, que, para a curva  $\alpha_1$ , bastaria penalizar mais a interação entre o 1º e 2º elementos, mas isto não provocou mudanças substanciais, pelo menos até a degradação dos resultados, forçando a uma tentativa de mudança global de todos os parâmetros, buscando obter um ótimo. Com  $\alpha_2$  já se conseguiu uma melhor compatibilidade  $C^2$  próximo ao contorno da estrutura, porém a interação do 2º elemento com o 3º ficou prejudicada.

Quanto ao efeito da pressão interna no tubo reto, pode-se dizer que não piora a satisfação da compatibilidade de mudança de curvatura entre os elementos, mas, pelo contrário, provoca uma leve melhora (veja figura 35). Isto se deve provavelmente ao claro enrijecimento da estrutura provocado pela pressão inter-

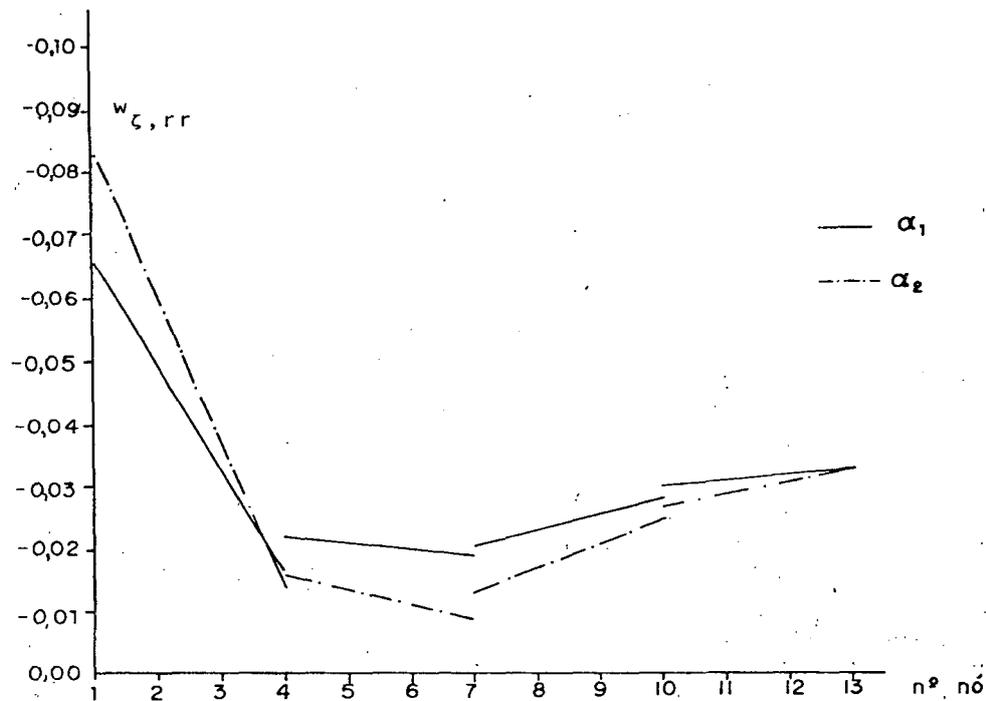


Figura 33. Influência da penalização da estrutura na satisfação de continuidade  $C^2$  inter-elementos.

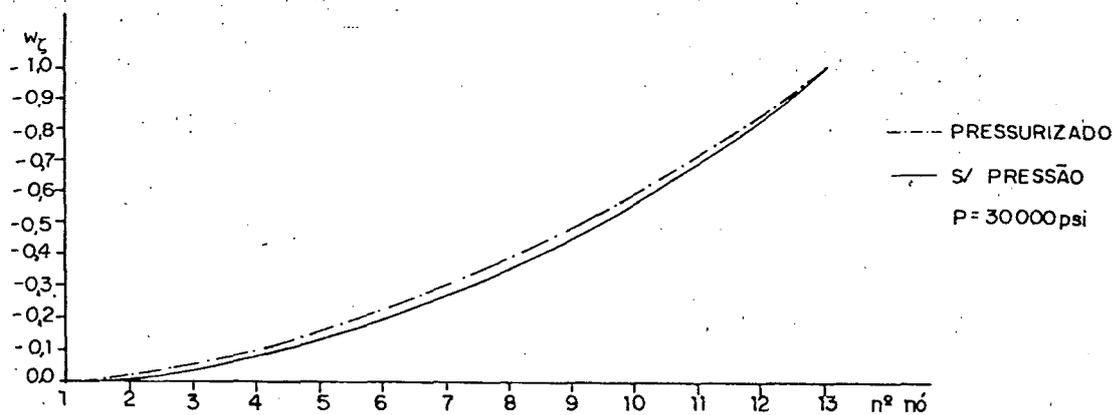


Figura 34. Influência da pressão interna no deslocamento  $w_{\zeta}$ .

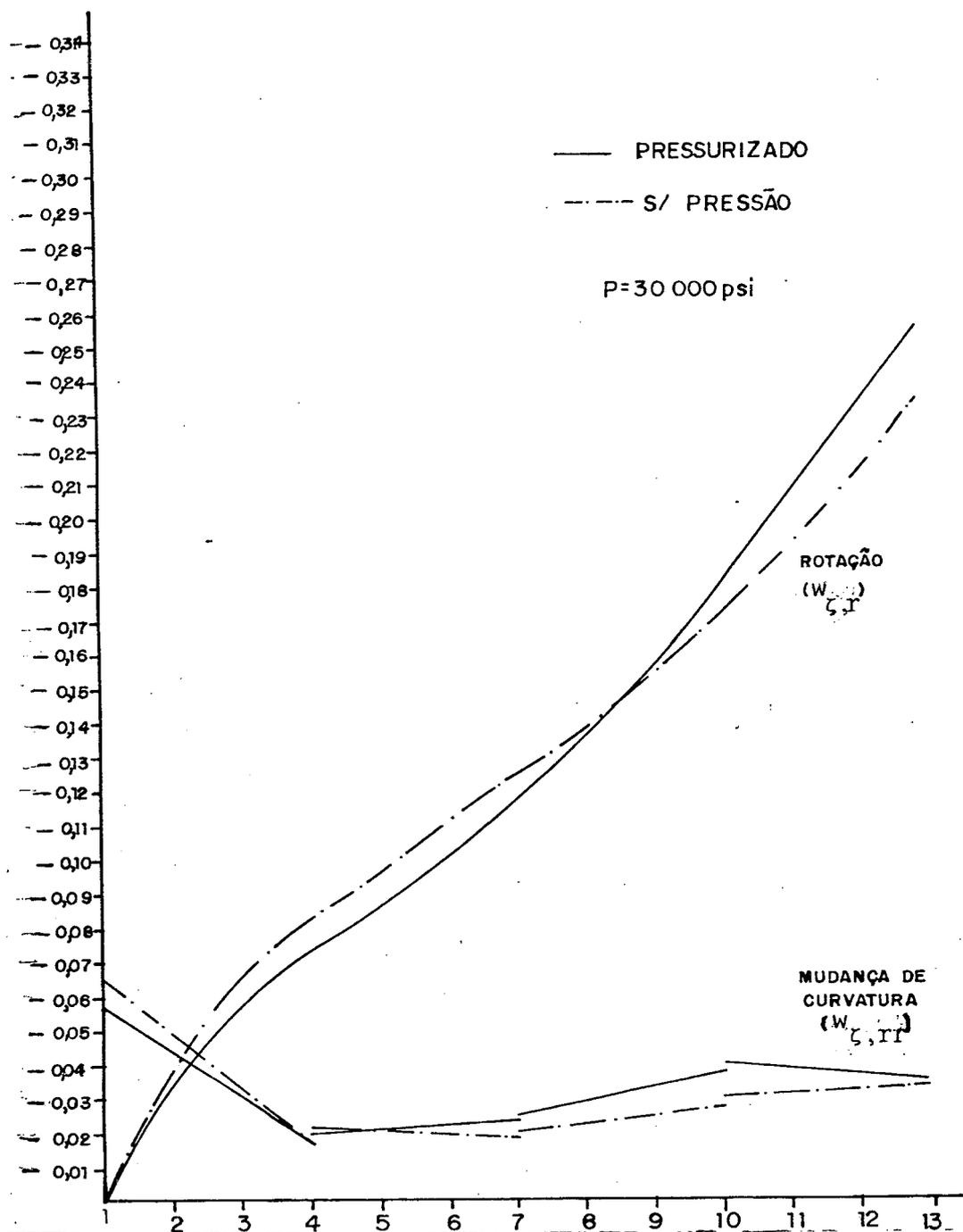


Figura 35. Influência da pressão na rotação  $W_{\zeta, X}$  e na mudança de curvatura  $W_{\zeta, XX}$ .

na, como pode ser notado nas figuras 34 e 35.

#### 4.2.2.2 - Elemento Curvo

Serão dois os tipos de estrutura analisados nesta seção, de acordo com o mostrado na figura 36.

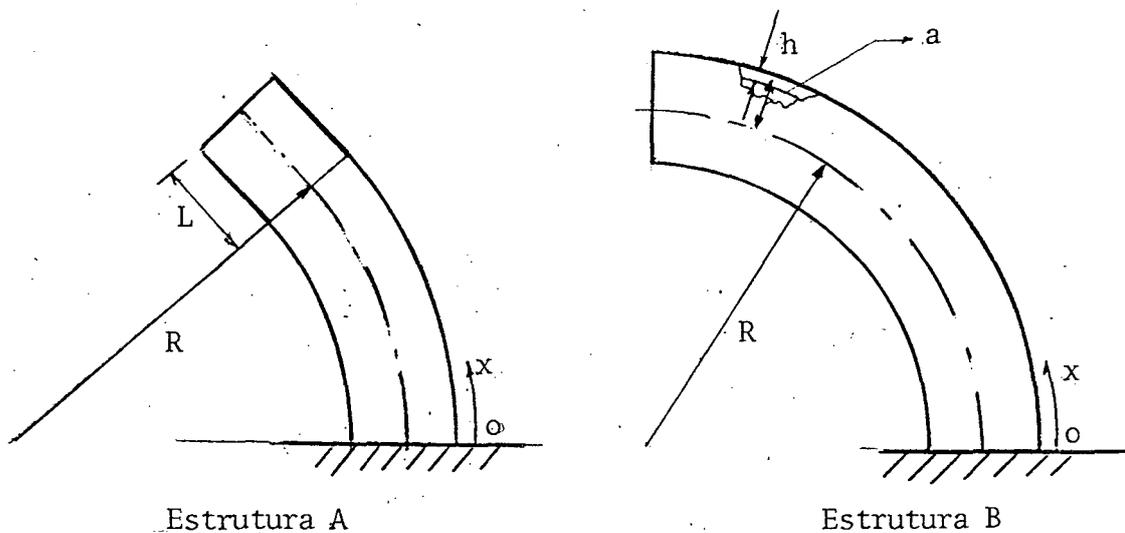


Figura 36. Estruturas analisadas para estudar o comportamento do elemento curvo.

Para facilitar comparações entre os casos analisados e possibilitar a organização de algumas conclusões acerca da influência das dimensões do tubo sobre o comportamento do elemento, os tubos estudados terão as seguintes características geométricas (em alguns casos as dimensões serão alteradas, porém, isto será ressaltado no momento adequado)

$$a = 7.815$$

$$R_1 = 50 \quad (\gamma = 6.398)$$

$$R_2 = 20 \quad (\gamma = 2.559)$$

$$h_1 = 0.09 \quad (\Omega = 86.833) \quad (4.5)$$

$$h_2 = 0.37 \quad (\Omega = 21.122)$$

$$h_3 = 1.37 \quad (\Omega = 5.704)$$

$$L = 2$$

A combinação adequada destas dimensões permitirão abranger o estudo do elemento tendo em vista aspectos particulares de sua conformação geométrica.

Inicialmente, a estrutura B foi subdividida em 4 elementos iguais, com a condição de contorno  $W_{\zeta, x} = 0$  em  $x = 0$  e forçando, via função penalidade, a compatibilidade  $C^1$  entre os elementos. A solicitação, a que é submetida a estrutura, é a mesma utilizada na análise do tubo reto.

1 - Influência do Parâmetro  $\lambda$  - Os resultados indicaram que quanto menor o valor de  $\lambda$ , pior a satisfação das restrições impostas pelo parâmetro penalidade, tomado segundo o proposto por Bathe e Almeida. Desta forma, para  $\lambda$  muito pequeno há a necessidade de um incremento no parâmetro penalidade. Por outro lado, como pode ser visto na figura 37.B, quanto menor o valor

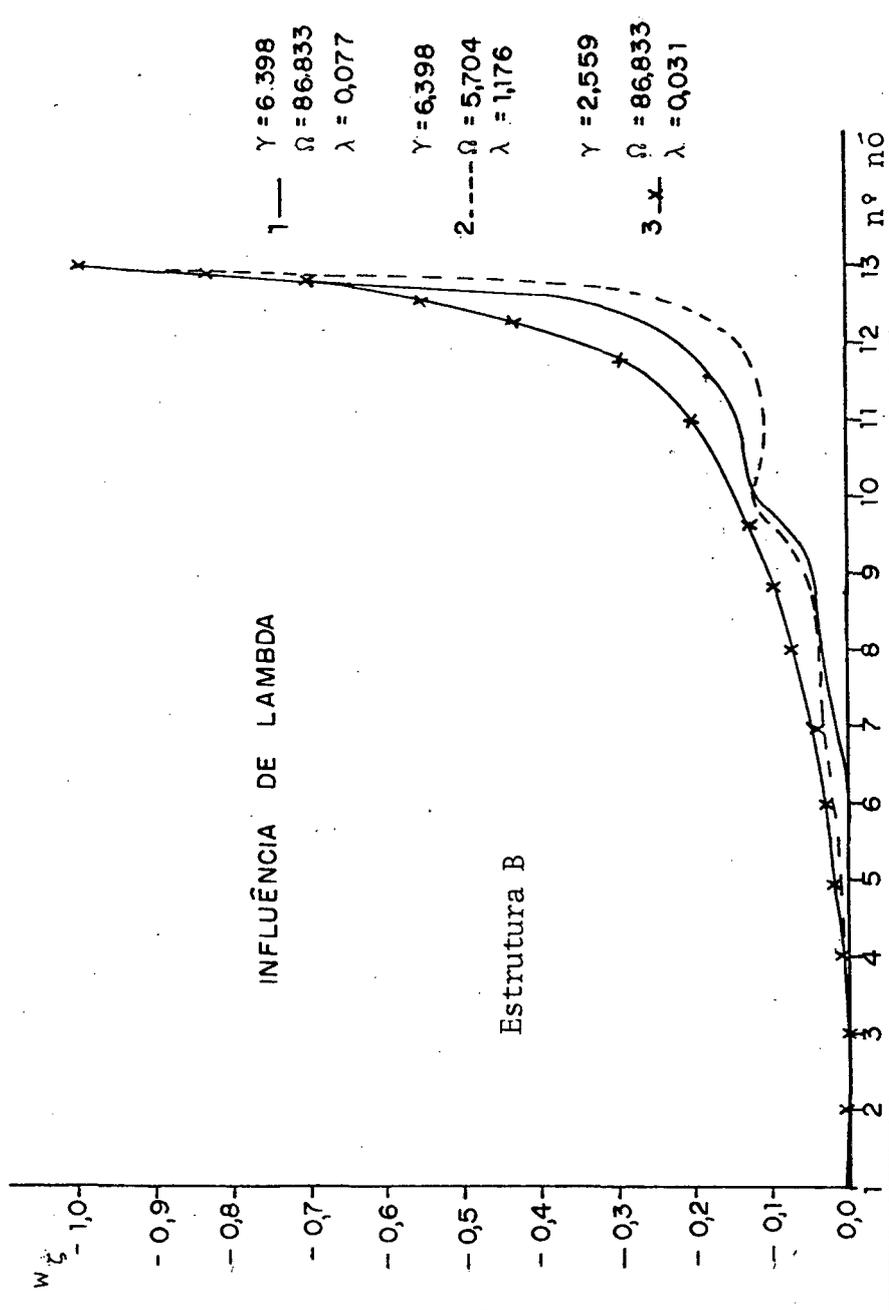


Figura 37.A. Influência do parâmetro adimensional  $\lambda$  no deslocamento  $W_z$ .

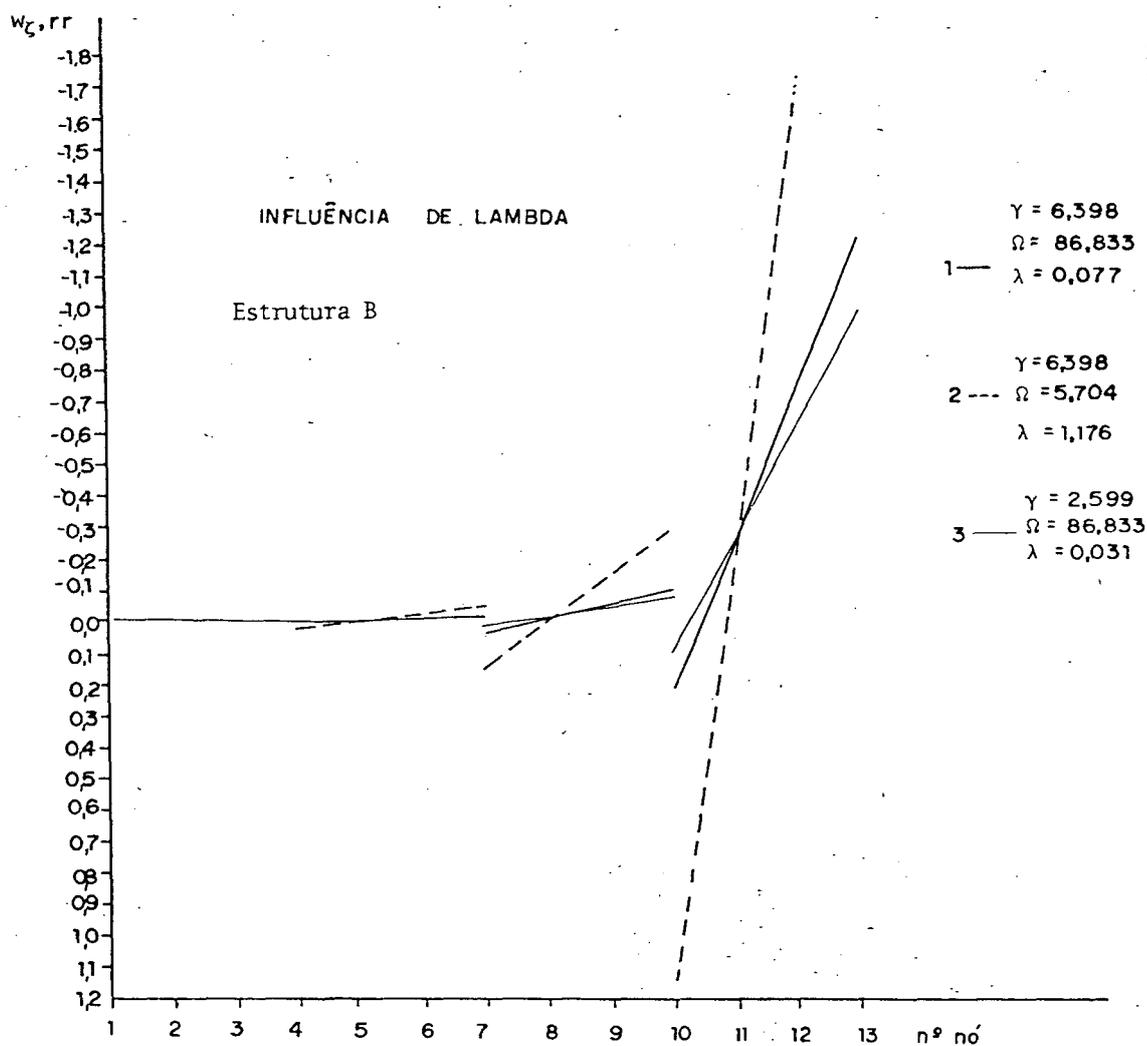


Figura 37.B. Influência do parâmetro adimensional  $\lambda$  na mudança de curvatura  $W_{\zeta, \Gamma\Gamma}$ .

de  $\lambda$ , menor será a diferença dos valores da mudança de curvatura entre um elemento e outro.

Algumas conclusões podem ser extraídas se considerarmos que

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{\gamma}{\Omega} \quad (4.6)$$

Assim, quando empregado o elemento finito viga-tubo, é importante verificar a relação  $\gamma/\Omega$  para que se confie mais ou menos nos valores das tensões próximas a grandes perturbações. Esta relação joga principalmente com a dimensão do raio de curvatura do eixo médio do tubo e com a espessura da parede do tubo, de forma a permitir avaliar o "grau de deformabilidade" da seção transversal do tubo. No caso do tubo curvo as mudanças mais bruscas da curvatura são notadas nos tubos com grandes valores de  $\lambda$ . A figura 37.A busca mostrar a influência do parâmetro  $\lambda$  sobre o deslocamento normal à casca do tubo.

Quando há descontinuidade do raio de curvatura do eixo médio do tubo, entre um elemento e outro, até a satisfação da continuidade  $C^1$  inter-elementos vai depender dos valores de  $\lambda$  de cada elemento. Este fato está fortemente ligado às funções de interpolação utilizadas para a representação de  $W_\xi$ . Von Kármán (1) propôs que o número de termos da série, usada para interpolar  $W_\xi$ , deveria depender de  $\lambda$  segundo a seguinte tabela.

TABELA 4.2

	NÚMERO DE FUNÇÕES
$\lambda \geq 0.5$	1
$0.16 \leq \lambda < 0.5$	2
$0.08 \leq \lambda < 0.16$	3
$0.04 \leq \lambda < 0.08$	4

Intuitivamente, pode-se imaginar que tubos curvos com  $\lambda$ 's pequenos requerem maior complexidade na representação dos deslocamentos dos seus pontos materiais. Assim, é de se esperar que fortes descontinuidades de  $\lambda$  entre dois elementos possam trazer alguma dificuldade na satisfação de continuidade  $C^1$  na casca no contorno inter-elementos. Uma outra forma de enxergar este problema é analisando a restrição imposta pela função penalidade, ou seja,

$$\frac{2W_{\zeta,r} \Big|_{r=-1}}{\theta_{n+1}(R_{n+1}-a\cos\phi)} - \frac{2W_{\zeta,r} \Big|_{r=+1}}{\theta_n(R_n-a\cos\phi)} = 0 \quad (4.7)$$

ou seja

$$\frac{2W_{\zeta,r} \Big|_{r=-1}}{\theta_{n+1}R_{n+1}\left(1-\frac{1}{\gamma_{n+1}}\cos\phi\right)} - \frac{2W_{\zeta,r} \Big|_{r=+1}}{\theta_nR_n\left(1-\frac{1}{\gamma_n}\cos\phi\right)} = 0 \quad (4.8)$$

Onde  $\gamma_n = (R_n/a)$  e  $\gamma_{n+1} = (R_{n+1}/a)$ .

Se considerar-se que o comprimento do eixo médio do elemento "n+1", seja igual ao do elemento "n", tem-se

$$\theta_n R_n = \theta_{n+1} R_{n+1} \quad (4.9)$$

Como já foi visto, a restrição é introduzida de forma "fraca", ou seja, proporcionará uma satisfação em média da equação (4.7) ao longo da circunferência do tubo. Assim, nota-se que, quanto maior a diferença entre os valores de  $\gamma_{n+1}$  e  $\gamma_n$  maior complexidade será exigida da representação de  $W_{\zeta,r}$ . Outrossim, pode-se notar que, quanto maiores os valores de  $\gamma_{n+1}$  e  $\gamma_n$  o peso da diferença entre ambos diminui. Ora, para maiores  $\gamma$ 's, maiores  $\lambda$ 's (veja equação (4.6)), o que significa que, quando ambos os elementos adjacentes possuem  $\gamma$ 's elevados, a diferença de curvatura entre ambos não provoca dificuldades de satisfação da continuidade  $C^1$  na casca no contorno inter-elementos. Porém, se o valor de um dos  $\gamma$ 's for pequeno, ou os valores de ambos o forem, a satisfação de (4.7) será dificultada. As figuras 38.A e 38.B demonstram bem este comportamento do modelo analisado.

Quando se tenta penalizar mais a satisfação da restrição (4.7) no ponto onde haja descontinuidade acentuada de  $\lambda$ , a solução assume valores para a rotação seccional da casca entre os elementos que se aproxima de zero a medida que o parâmetro penalidade cresce. Como já foi visto, isto é bem mais acentuado para pequenos valores de  $\lambda$ . Nestas situações, o ideal é refinar a malha próximo ao ponto de descontinuidade.

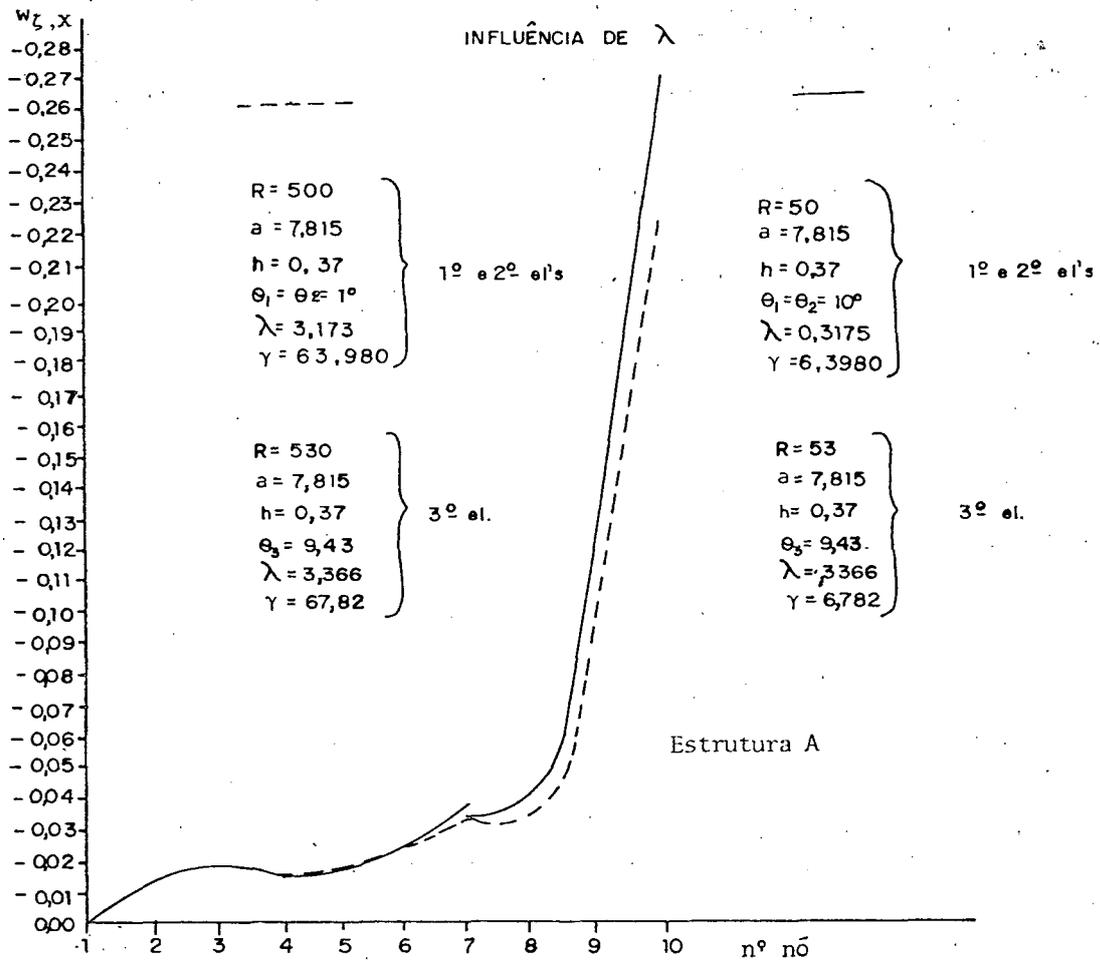


Figura 38.A. Influência de  $\lambda$  na satisfação de continuidade  $C^1$  inter-elementos quando há descontinuidade de raio de curvatura.

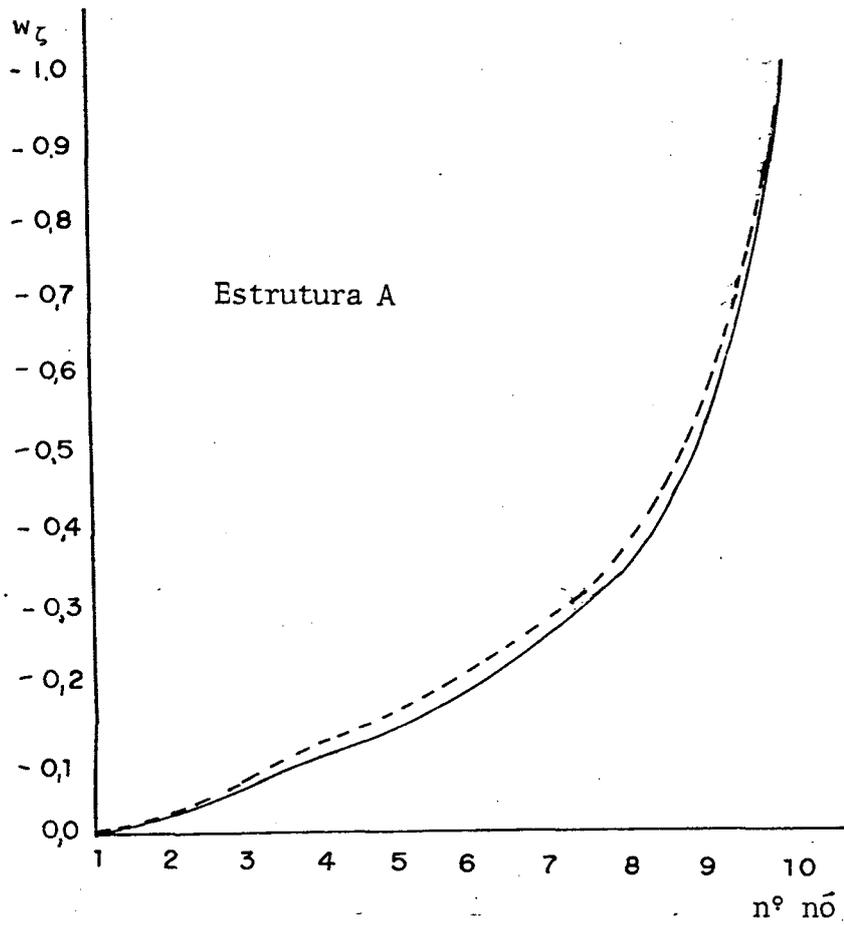


Figura 38.B. Influência de  $\lambda$  no deslocamento  $w_\zeta$  quando há descontinuidade de raio de curvatura (mesma estrutura que mostra a figura 38.A).

Esta alternativa melhora os resultados, apesar de que o valor da rotação seccional da casca no contorno inter-elementos perturbado tenda a zero à medida que a malha é refinada. Assim, nem sempre o refino condiz com resultados mais aceitáveis, como pode ser visto de maneira um pouco primitiva na figura 39. No entanto, resultados aparentemente mais eficazes são obtidos modificando a penalização proposta por Bathe e Almeida, aliado a um maior refino. O que ocorre, é que o refino faz com que os termos da matriz de rigidez do elemento próximo à região perturbada aumentem de valor e, conseqüentemente, o parâmetro penalidade também aumenta (a estrutura analisada na figura 40 é a mesma da figura 39). Este fenômeno é mais uma razão para introduzir-se algoritmos que racionalizem a escolha dos parâmetros penalidade, mesmo que  $W_{\zeta,x}$  não seja contínua em algum ponto de descontinuidade geométrica (como acontece na figura 40).

- 2 - Influência da Pressão Interna - Enrijecendo a seção transversal do tubo curvo e, portanto, dificultando sua deformação, a pressão interna termina por acentuar ainda mais a diferença entre as tensões nos contornos dos elementos adjacentes. A figura 41.B expressa este comportamento para dois valores de  $\lambda$ , demonstrando ainda, que o efeito da pressão interna é maior para menores valores de  $\lambda$ . A figura 41.A ilustra a influência da pressão interna sobre o deslocamento normal à casca do tubo.
- 3 - Influência do Parâmetro Penalidade - O parâmetro penalidade proposto por Bathe e Almeida deve ser incrementado no tubo curvo. Isto se deve à dois fatores que se completam. Primeiramente, ficou demonstrado que o tubo curvo é sujeito a variações

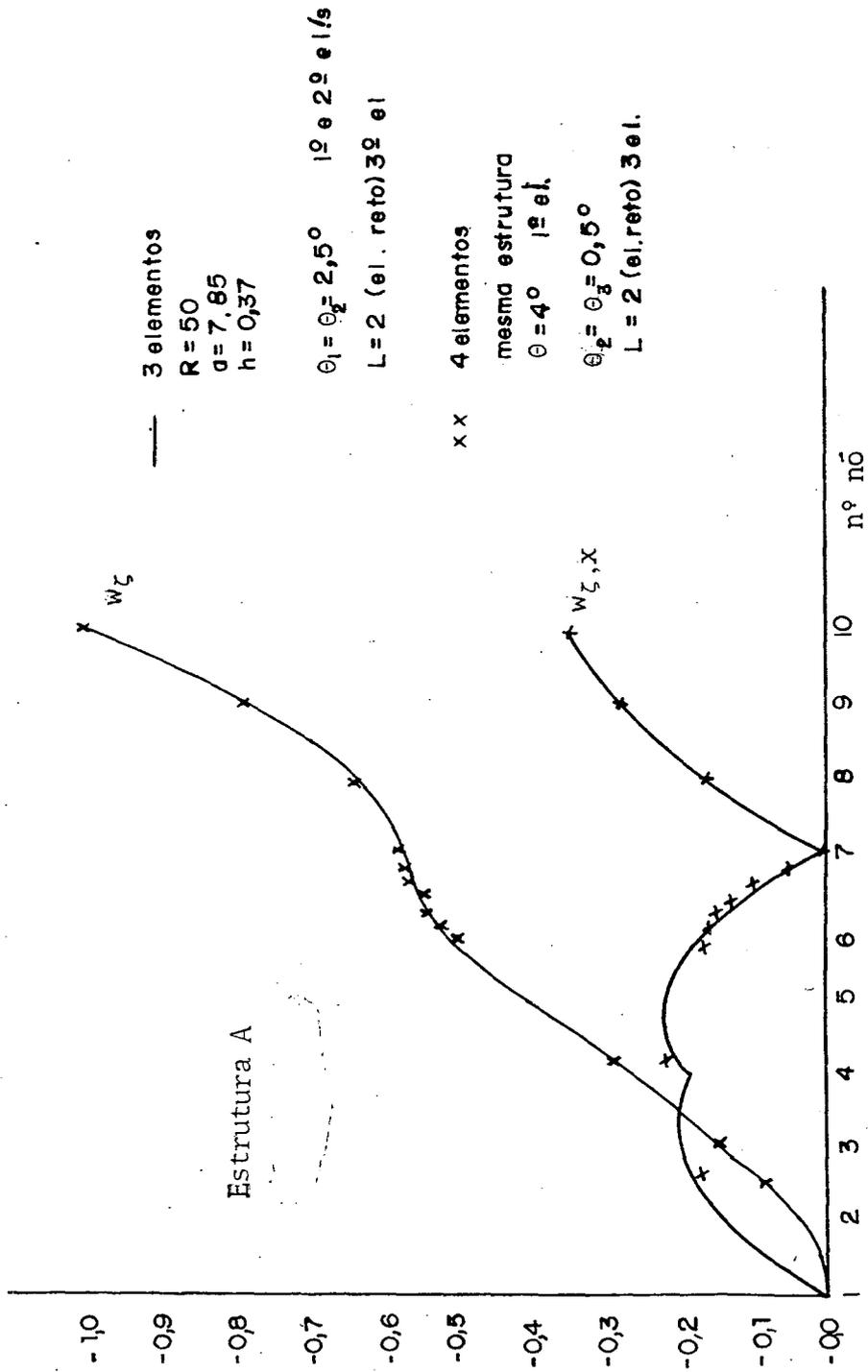


Figura 39. Influência da discretização quando há descontinuidade geométrica.

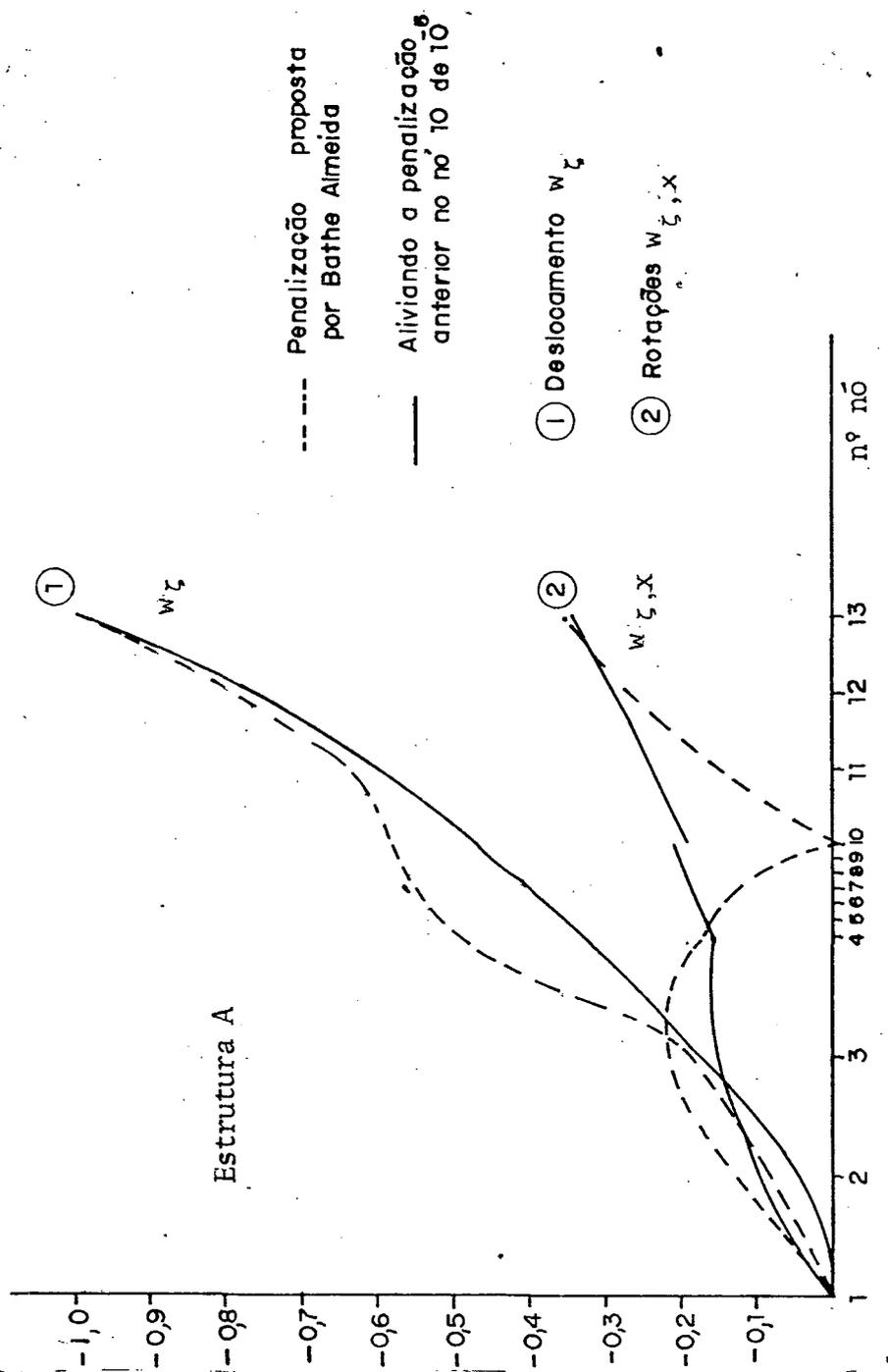


Figura 40. Efeitos da penalização no deslocamento  $w_z$  e na rotação  $w_{z,x}$ .

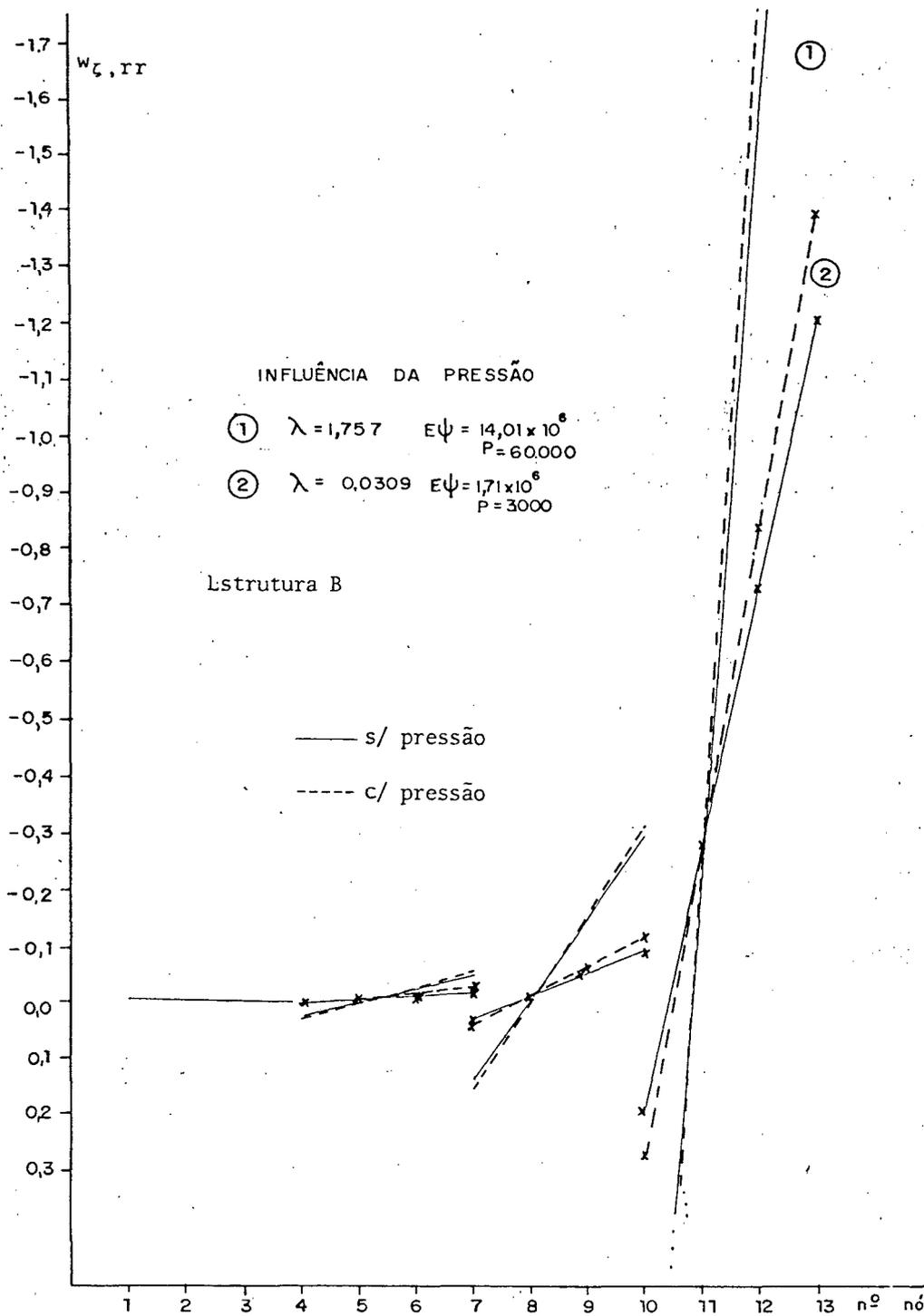


Figura 41.A. Influência da pressão interna na mudança de curvatura  $W_{\zeta, \eta\eta}$ .

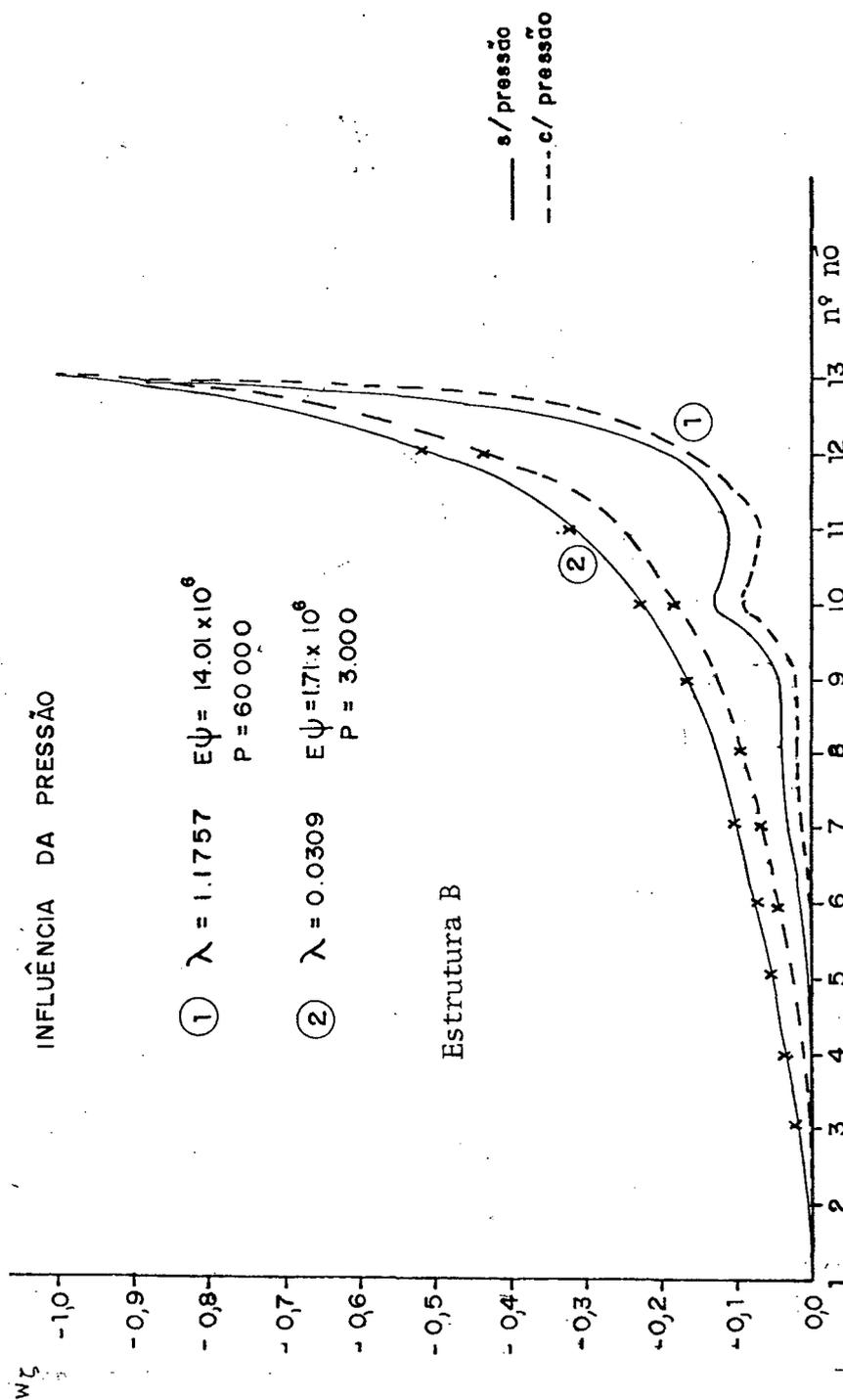


Figura 41.B. Influência da pressão interna na rotação  $W_{z,x}$  em função de  $\lambda$ .

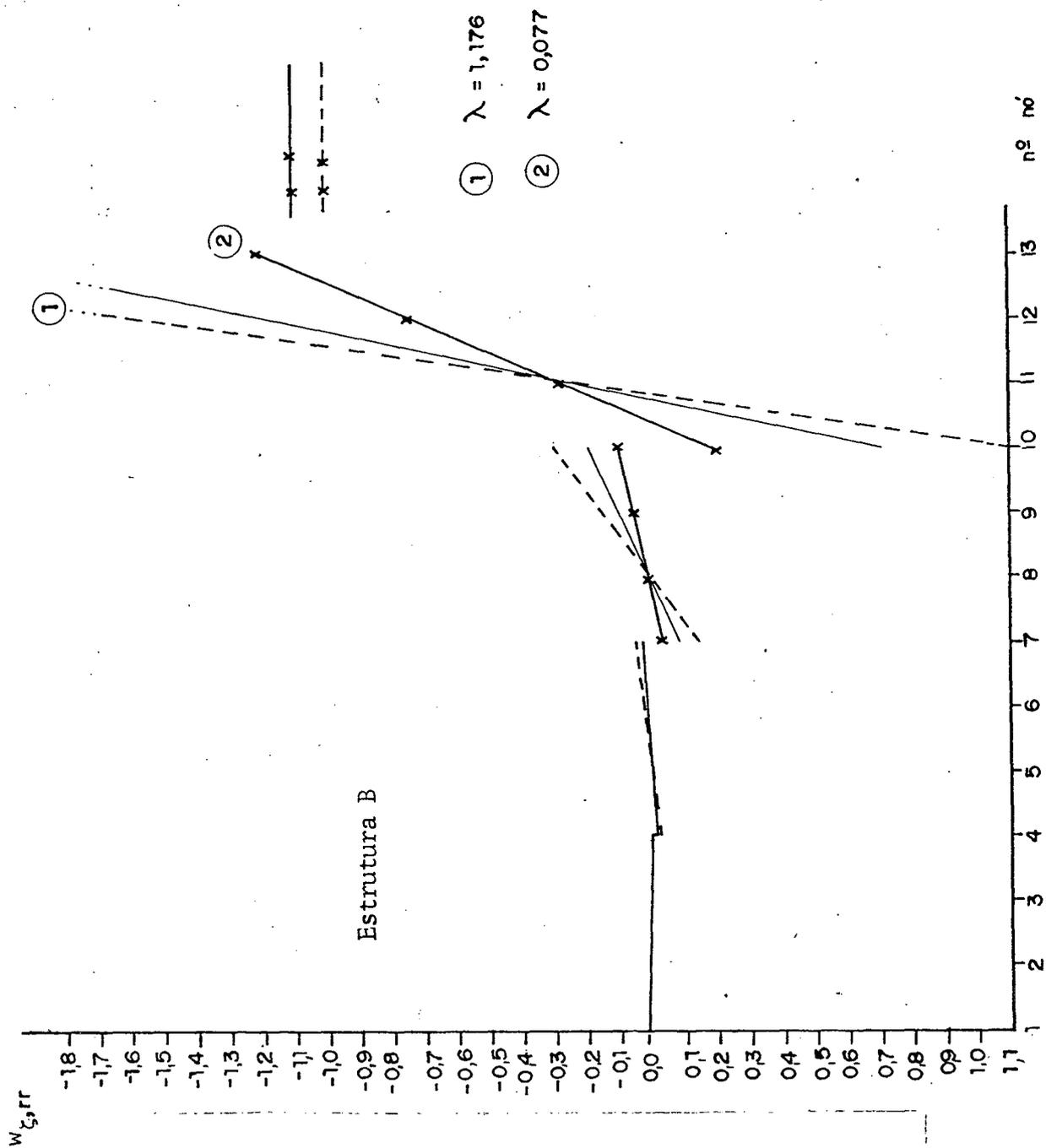


Figura 42. Efeito da penalizaç~ao

— x — e — sobre-penalizado  
 — + — e — penalizado segundo Bathe e Almeida.

mais bruscas de curvatura do que o tubo reto e, em segundo lugar, os termos da matriz de rigidez correspondentes aos graus de liberdade de ovalização são proporcionalmente menores nos tubos curvos do que nos tubos retos. Se, nos tubos retos, o parâmetro penalidade escolhido conforme o proposto por Bathe e Almeida dava bons resultados, o mesmo não se aplica aos tubos curvos, provocando perturbações nos contornos dos elementos maiores do que seria de se esperar. A figura 42 expõe de forma mais direta este problema, acrescentando outro complicador. Para  $\lambda$  menores a sobre-penalização não afeta as curvas de mudança de curvatura, apesar de alterá-las consideravelmente a medida que  $\lambda$  for aumentando.

## 5º CAPÍTULO - CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE NOVOS TRABALHOS

### 5.1 - CONCLUSÃO

Nos capítulos anteriores foi feita uma retrospectiva sintética dos avanços científicos que se desenvolveram desde os experimentos de Bantlin (2) e a elaboração teórica de Von Kármán, para posteriormente desaguar na construção e análise do modelo do elemento finito viga-tubo, já então devidamente localizado nas bases teóricas que historicamente propiciaram o seu desenvolvimento.

Este estudo buscou analisar aspectos singulares neste tipo de elemento e suas influências no comportamento do modelo, a fim de que ele possa ser utilizado de forma criteriosa na análise estrutural de casos práticos. Foi feito um estudo dos efeitos das hipóteses restritivas - explicitadas no início do terceiro capítulo - somente no que se refere a tensões e tendo como solicitações estruturais carregamentos bastante simplificados. Isto foi feito por dois motivos:

- Bathe e Almeida ((11), (12), e (13)) já haviam analisado o comportamento do elemento quanto a deslocamentos de tal forma, que este estudo pouco teria a contribuir;

- Quase todos os trabalhos, nos quais esta dissertação se embasou, primaram por simular (experimental e teoricamente) carregamentos simples;
- O comportamento do elemento quando a estrutura é submetida à pressão interna também já foi estudado por Bathe e Almeida (13).

As observações suscitadas nesta parte do estudo são as seguintes:

- O elemento prevê com considerável acuidade as tensões que atuam em sistemas de tubulações, tornando-se um instrumento dos mais eficazes para análise das tensões que ocorrem neste tipo de estrutura, assim como análise de todo o seu comportamento;
- O elemento finito viga-tubo não prevê com precisão aceitável as tensões circunferenciais máximas, que surgem quando  $\gamma$  é pequeno (por exemplo,  $\gamma < 3$ ), devido ao aparecimento de tensões circunferenciais de membrana;
- Devido à formulação do comportamento de viga deste elemento ser pouco restritiva, os resultados das tensões longitudinais se aproximam bastante dos resultados experimentais.

Um outro aspecto da formulação que foi analisado é o comportamento do elemento finito viga-tubo, quando tenta-se forçar a continuidade  $C^1$  na casca do tubo, através da função penalidade apresentada no terceiro capítulo. Esta função é necessária quando há regiões na estrutura muito perturbadas, como contornos rígidos ou descontinuidades de raios de curvatura do eixo médio. A formulação mostrou-se eficaz quanto à satisfação da continuidade  $C^1$  inter-elementos, porém, em regiões perturbadas (principalmente nas partes curvas) o salto do valor da mudança de curvatura longi

tudinal (que é proporcional à tensão longitudinal) no contorno entre os elementos assume, às vezes, grande magnitude. Há de se pensar a importância do parâmetro  $\lambda$  quando se desejar analisar a discretização da estrutura.

Um aspecto importante é que, apesar do parâmetro penalidade proposto por Bathe e Almeida (12), apresentar bons resultados, há a possibilidade de obter-se uma "penalização ideal" para a estrutura modelo, de forma a otimizar a satisfação de continuidade  $C^2$  nos contornos inter-elementos, sem particionar o domínio em muitos elementos. Requer-se então um balanço discretização x penalização, obtendo-se, talvez, uma solução ótima.

No geral, o elemento finito viga-tubo demonstrou bom comportamento naqueles aspectos analisados neste trabalho, faltando, ainda, analisar o seu comportamento frente a dados experimentais mais complexos, verificando-se, se possível, maneiras de aperfeiçoar a sua formulação.

## 5.2 - SUGESTÕES DE TRABALHOS

Por se tratar de uma formulação relativamente complexa, este modelo exige uma análise criteriosa para que se possa realmente alcançar seu potencial e suas limitações. Ao longo desta dissertação algumas questões intrigantes surgiram e podem ser colocadas como necessárias num processo de continuidade do presente trabalho. São elas:

- Análise do erro cometido com o processo de integração numérica;
- Viabilizar a otimização da discretização e da penalização da estrutura modelada para evitar-se ao máximo a necessidade da relação 4.1 ser satisfeita, caso seja desejável uma melhor satisfação da continuidade  $C^2$  inter-elementos;
- Realizar experimentos para analisar a acuidade das tensões calculadas em regiões perturbadas, como aquelas descritas na seção anterior e, assim melhor poder-se inferir sobre a efetividade do elemento finito viga-tubo;
- Analisar o comportamento dinâmico deste elemento, verificando se ele descreve adequadamente os modos de vibração principais de uma estrutura de tubulações;
- Completar a formulação para englobar as curvas segmentadas, como o realizado em (42).
- Utilizar outros métodos variacionais, além do Princípio da Energia Potencial Mínima, a fim de evitar-se alguns problemas como:

- . necessidade de um refino intenso para obtenção de continuidade  $C^2$  nos contornos dos elementos;
- . incapacidade de satisfação da compatibilidade  $C^1$  entre elementos, em pontos de descontinuidades geométricas.

Estes trabalhos, se realizados, permitiriam uma boa visualização do comportamento deste elemento finito, propiciando, provavelmente, a geração de idéias aplicáveis em outros tipos de formulação ou problema.

## A P Ê N D I C E I

### CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DO ELEMENTO VIGA-TUBO

O elemento viga-tubo é um elemento finito subparamétrico de 4 nós, possuindo até 12 graus de liberdade por nó, sendo que, 6 descrevem as translações e rotações no espaço e os restantes são utilizados para descrever a deformação da seção transversal da estrutura. A modelagem é feita como se o elemento fosse um elemento finito de viga qualquer.

É necessário, no entanto, tomar alguns cuidados para evitar modelagens incorretas:

- 1 - Normalmente, quando o sistema de coordenadas global não coincide (direção e/ou sentido diferentes) com o sistema de coordenadas local, há necessidade de aplicar uma transformação à matriz de rigidez do elemento para que haja compatibilidade nos valores nodais do sistema global.

Considerando o conjunto vetorial  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  como sendo uma base do sistema de referência local e o conjunto vetorial  $(\underline{e}_g^1, \underline{e}_g^2, \underline{e}_g^3)$  uma base do sistema de referência global a transformação da matriz de rigidez do elemento será, com  $\underline{K}^*$  sendo

a "nova" matriz e  $\underline{\underline{K}}$  sendo a "velha".

$$\underline{\underline{K}}^* = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{T}} \quad (1.1)$$

onde  $\underline{\underline{T}}$  terá a seguinte forma

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_1 & \underline{\underline{T}}_2 & \underline{\underline{T}}_1 & \underline{\underline{T}}_2 & \underline{\underline{T}}_1 & \underline{\underline{T}}_2 & \underline{\underline{T}}_1 & \underline{\underline{T}}_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

onde

$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_\Delta & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_\Delta \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\underline{\underline{T}}_\Delta = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_g^1 & \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_g^2 & \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_g^3 \\ \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_g^1 & \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_g^2 & \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_g^3 \\ \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_g^1 & \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_g^2 & \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_g^3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Pode-se notar que  $\underline{\underline{T}}_1$  é o responsável pela rotação dos termos que possuem relação com os graus de liberdade de viga do elemento. Para a determinação de  $\underline{\underline{T}}_2$  é necessário analisar a equação que expande o deslocamento circunferencial em termos de senos e cossenos, ou seja,

$$W_{\xi} = \sum_{K=1}^4 h_K \sum_{m=1}^3 (c_m^K \operatorname{sen} 2m\phi + d_m^K \operatorname{cos} 2m\phi) \quad (1.5)$$

Verifica-se que  $W_{\xi}$  s3 perder3 compatibilidade caso o 3ngulo  $\phi$  de um elemento n3o esteja em fase com o do outro elemento adjacente. Suponha que  $\phi^*$  seja um 3ngulo qualquer em rela33o ao sistema global;  $\phi$  determina o mesmo ponto em rela33o ao sistema local e  $\alpha$  seja

$$\alpha = \phi^* - \phi \quad (1.6)$$

Assim, para que haja compatibilidade no sistema global

$$\sum_{m=1}^3 (c_m^K \operatorname{sen} 2m\phi + d_m^K \operatorname{cos} 2m\phi) = \sum_{m=1}^3 (c_m^{K^*} \operatorname{sen} 2m\phi^* + d_m^{K^*} \operatorname{cos} 2m\phi^*) \quad \forall K \quad (1.7)$$

j3 que  $h_K(r)$  n3o se anula para todo  $r$ .

$c_m^{K^*}$  e  $c_m^K$  representam os valores nodais no sistema de coordenadas global e local, respectivamente.

Desenvolvendo a equa33o (1.7) chega-se a

$$\begin{Bmatrix} c_1 K \\ c_2 K \\ c_3 K \\ d_1 K \\ d_2 K \\ d_3 K \end{Bmatrix} = T2 \approx \begin{Bmatrix} c_1 K^* \\ c_2 K^* \\ c_3 K^* \\ d_1 K^* \\ d_2 K^* \\ d_3 K^* \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

onde

$$T2 \approx \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & 0 & 0 & -\sin 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\alpha & 0 & 0 & -\sin 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos 6\alpha & 0 & 0 & -\sin 6\alpha \\ \sin 2\alpha & 0 & 0 & \cos 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin 4\alpha & 0 & 0 & \cos 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin 6\alpha & 0 & 0 & \cos 6\alpha \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Como pode ser notado, s3o quando  $\alpha \neq 0$  3e que h3a necessidade de rotacionar os graus de liberdade de ovaliza33o. Isto s3o ocorre quando a estrutura n3o pode ser modelada inteiramente em um plano, sendo portanto uma estrutura espacial.

- 2 - Quando a estrutura for espacial todos os graus de liberdade de ovaliza33o devem ser utilizados;
- 3 - Os par3ametros penalidade n3o devem ser escolhidos com valores muito elevados ou muito d3sparaes entre si, sob pena de grande

perda de acuidade nos resultados. Os valores propostos por Bathe e Almeida (12) apresentam bons resultados, porém pode-se otimizar a compatibilidade de tensões entre os elementos sem subdividir muito a malha, escolhendo apropriadamente os parâmetros penalidade. Isto exige um processo iterativo.

## A P Ê N D I C E . . . I I

### DESCRIÇÃO DO PASET

Uma descrição genérica das etapas performadas por cada rotina do PASET será feita a seguir, com uma descrição das entradas de dados, quando houver.

- PROGRAMA PRINCIPAL: Executa as rotinas TRANSF, GIRIG, SORIT, ROTITR, CKONT, IMB, ENEI, TENSAL e NORMAL.

As entradas de dados são as seguintes:

- a - READ (5,1010) CFELT, POISON
- READ (5,1030) NEL, LEL, NGL, NDENO, LB, NC, NP
- READ (5,1040) NK, ME, NGLN, NNOE
- READ (5,1060) (NDONO(I), I = 1, IEL)
- READ (5,1070) (ANROT(I), I = 1, NEL)
- READ (5,1080) (ICRG(I), I = 1, NEL)

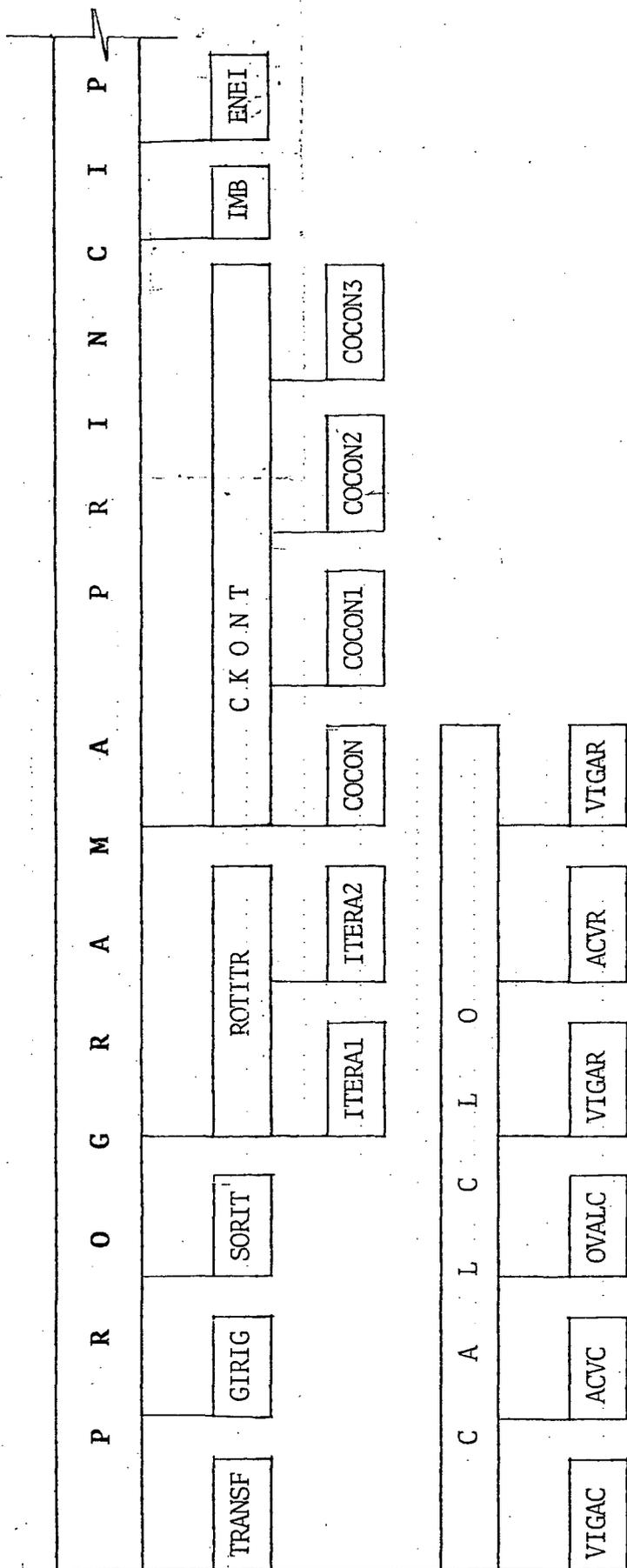
1010 FORMAT (2D16.9)

1030 FORMAT (7I5)

1040 FORMAT (8I5)

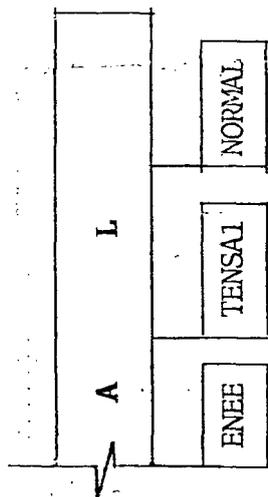
1060 FORMAT (25I3)

1070 FORMAT (3D16.9)



ROTINAS AUXILIARES

- MCB
- DINF
- DUPPER
- IMPER
- ENERI
- TRFRFC
- MONT
- ZERAD



1080 FORMAT (30I2)

CFELT - Módulo de elasticidade do material

POISSON - Coeficiente de Poisson

NEL - Número de elementos

LEL - Indica a dimensão da matriz de rigidez do elemento

NGL - Número de graus de liberdade por nó

NDENO - Número de nós por elemento

LB - Largura da banda da matriz de rigidez global

NC - Número de graus de liberdade de toda a estrutura

NP - Número de pontos onde se deseja calcular as tensões

NK - Número de carregamentos

ME = 1

NGLN = 3

NNOE = 16

TEL = NDENO\*NEL

NDONO - Relaciona o nó local ao nó global

ANROT - Armazena os ângulos de rotação dos elementos

ICRG - Armazena apontadores de carregamento

ICRG(L) = 0 Não há carregamento no elemento L

ICRG(L) = 1 Há carregamento no elemento L

b - READ(5,1200) ITP, IMAT, ITER

1200 FORMAT (3I5)

ITP = 1 A matriz de rigidez já foi calculada e está no endereço IMAT

ITP = 2 A matriz de rigidez deve ser calculada, porém, não será re-utilizada

ITP = 3 A matriz de rigidez deve ser calculada e será re

utilizada.

IMAT - É igual ao número do elemento (ou ordem em que é calculada a sua matriz de rigidez) que possui as mesmas características geométricas do atual.

ITER = 1 Existe efeito de interação  
 = 0 Não existe efeito de interação

Estes termos devem existir em número igual ao número de elementos presentes na estrutura.

c - Quando ITP for igual a 2 ou 3, logo após deve ser lido o que se segue

```
READ (5,1020) RC, RT, DELT, TETA, COMP, PRES
1020 FORMAT (3D16.9,/,3D16.9)
```

RC - Raio de curvatura do eixo médio

RT - Raio da seção transversal do tubo

DELT - Espessura do tubo

TETA - ângulo entre faces do elemento

COMP - Comprimento do elemento, caso seja reto

PRES - Pressão interna, caso exista

Caso haja carregamento no elemento em questão deve-se acrescentar o que se exige a seguir

```
READ (5,1090) IQTO
READ (5,1050) IGRLB, VCARG
1090 FORMAT (1I1)
1050 FORMAT (I2,D16.9)
```

IQTO - Número de carregamentos presentes no elemento

IGRLB - Número do grau de liberdade em cuja direção está

aplicada a força

VCARG - Magnitude do carregamento.

O segundo READ deve ser satisfeito quantas vezes indicar IQTO.

d - READ (5,1200) ITAM

1200 FORMAT (3I5)

ITAM - Caso haja efeito de interação em algum nó inter-elemento ITAM=3570, senão; ITAM=1176. Estes valores reservam a memória adequada para armazenar os termos a serem acrescentados à matriz de rigidez global, devido à consideração dos efeitos de interação.

e - READ (5,1030) ITSN

ITSN = 0 Não haverá cálculo de tensões

ITSN = 1 Haverá cálculo de tensões

- TRANSF: Executa a rotina CALCLO e transfere a matriz de rigidez do elemento, originalmente armazenada na parte triangular superior, para a parte triangular inferior.
- CALCLO: Executa as rotinas, VIGAC, ACVC e OVALC ou VIGAR, ACVR e OVALR, dependendo se o elemento é curvo ou reto, e constroa a matriz de rigidez do elemento.
- VIGAC - Calcula a parte da matriz de rigidez correspondente aos graus de liberdade de viga do elemento curvo.

- VIGAR: Idem elemento reto.
- ACVC: Calcula a parte da matriz de rigidez correspondente ao acoplamento dos graus de liberdade de viga e de ovalização do elemento curvo.
- ACVR: Idem elemento reto.
- OVALC: Calcula a parte da matriz de rigidez correspondente aos graus de liberdade de ovalização do elemento curvo.
- OVALR: Idem elemento reto.
- ROTITR: Executa as rotinas ITERA1, caso o efeito de interação seja de união rígida, e ITERA2, caso o efeito de interação seja de continuidade  $C^1$  inter-elementos, e soma os resultados na matriz de rigidez global. Nesta rotina há as seguintes entradas de dados.

```

READ(5,15) IQT
15 FORMAT (I5)

```

Quantas vezes IQT comandar, deverão ser lidos os seguintes cartões (inclusive aqueles lidos nas rotinas ITERA1 e ITERA2).

```

READ (5,15) ITER
ITER - 1 Interação elemento-união rígida
      2 Interação inter-elementos
      0 Não há efeito de interação

```

Caso ITER=1, os seguintes dados devem ser lidos

```
READ (5,25) (NDONO(I), I=1,4)
```

```
READ (5,30) RN, RT, TTAN, COMP
```

```
25 FORMAT (4I3)
```

```
30 FORMAT (3D16.9,/,D16.9)
```

NDONO: - Relação nó global/nó local

RN - Raio de curvatura do eixo médio do tubo

RT - Raio de curvatura da seção transversal do tubo

TTAN - Setor angular entre faces do elemento em graus

COMP - Comprimento do elemento, caso seja reto

Caso ITER=2, os dados são

```
READ (5,40) (NDONO(I), I=1,7)
```

```
READ (5,50) R1, R2, TTA1, TTA2, RT, COMP, ITIP
```

```
40 FORMAT (7I3)
```

```
50 FORMAT (3D16.9,/,3D16.9,/,I5)
```

NDONO - Relação nó global/nó local

R1 - Raio de curvatura do eixo médio do elemento anterior

R2 - Raio de curvatura do eixo médio do elemento posterior

TTA1 - Ângulo entre faces do elemento anterior

TTA2 - Ângulo entre faces do elemento posterior

RT - Raio de curvatura da seção transversal do tubo

COMP - Comprimento do elemento, caso haja algum elemento reto envolvido. Caso os dois elementos sejam retos, o comprimento do anterior estará em R1 e o do posterior em COMP.

ITIP - Indica a posição dos elementos

ITIP = 1 Indica que são dois elementos curvos

ITIP = 2 Indica que o anterior é um elemento curvo e o poste

rior é reto

ITIP = 3 Indica o contrário de ITIP=2

ITIP = 4 Indica que ambos os elementos são retos

- ITERA1: Calcula os efeitos de interação elemento-união rígida. Aqui só há uma entrada, ou seja

READ (5,1111) ALFA1

1111 FORMAT (D16.9)

ALFA1 - Valor que se deseja multiplicar o parâmetro penalidade

- ITERA2: Calcula os efeitos de interação inter-elementos. Também aqui, só há uma entrada

READ (5,1111) ALFA2

1111 FORMAT (D16.9)

ALFA2 - Valor que se deseja multiplicar o parâmetro penalidade

- CKONT-COCON-COCON1-COCON2-COCON3 - Introduzem as condições de contorno no sistema. As entradas de dados estão de acordo com o manual do SIMELF (45), por serem módulos extraídos deste sistema.

- IMB: Resolve o sistema de equações, calculando os valores nodais da estrutura. Original do SIMELF.

- ENEI: Calcula a energia interna da estrutura. Original do SIMELF.

- ENEE: Faz o balanço de forças e calcula a energia fornecida ao sistema pelas forças externas. Original do SIMELF.

- TENSA1: Calcula tensões nos pontos de integração desejados. Exige os seguintes dados.

READ (5,11) NUMEL, ITER, RN, RT, DEL, TTAN

READ (5,01) NITLG1, NITGL2

READ (5,01) NITCR1, NITCR2

READ (5,01) JTR1, JTR2

READ (5,01) ITPTS

01,FORMAT (4I5)

11 FORMAT (2I5,/,4D16.9)

NUMEL - Número do elemento onde as tensões serão calculadas.

ITER - Indicam se os efeitos de interações são considerados ou não

ITER = 0 Não são considerados

ITER = 1 São considerados

RN - Raio de curvatura do eixo médio do elemento

RT - Raio de curvatura da seção transversal do tubo

DEL - Espessura da parede do tubo

TTAN - Ângulo entre faces do elemento em graus

NITLG1-NITLG2 - Indicam o intervalo na direção longitudinal onde deseja-se calcular as tensões

NITCR1-NITCR2 - Indicam o intervalo na direção normal

ITPTS - Indica o tipo de tensão a ser calculada

ITPTS = 1  $\epsilon_{\theta}$  é calculada

ITPTS = 2  $\gamma_{\phi\theta}$  é calculada

ITPTS = 3  $\gamma_{\theta\zeta}$  é calculada

ITPTS =  $4 \epsilon_{\phi}$   $\bar{e}$  calculada

- NORMAL: Calcula  $W_{\zeta}$ ,  $W_{\zeta,x}$  e  $W_{\zeta,xx}$  nos nós de cada elemento e em qualquer ponto da seção transversal. Aqui são lidos os seguintes dados:

READ (5,10) IQT

10 FORMAT (I5)

Quantas vezes determinar IQT, devem ser lidos os dados

READ (5,20) PFI,IT

20 FORMAT (D16.9,I5)

PFI - ângulo, em graus, localizando uma curva na direção longitudinal do tubo, onde serão calculados os deslocamentos já descritos

IT - Determina se a mudança de curvatura,  $W_{\zeta,xx}$ , também deve ser calculada

IT = 0 Não

IT = 1 Sim

- MCB: Multiplica duas matrizes quaisquer. Original do SIMELF.
- DINF: Imprime qualquer matriz triangular inferior em dupla precisão. Original do SIMELF.
- DUPPER: Imprime qualquer matriz triangular superior em dupla precisão. Original do SIMELF.
- IMPER: Imprime a matriz banda em dupla precisão.

- ENERI: Calcula o somatório das energias internas de todos os elementos, quando não houver efeitos de interação entre elementos.
- TRFRC: Transfere a matriz global singular para outra área de memória, a fim de que a energia interna do sistema e o balanço de forças possam ser calculados após a resolução do sistema de equações.
- MONT: Armazena a matriz rotacionada de todos os elementos para o uso em ENERI.
- ZERAD: Zera áreas de memória em dupla precisão. Original do SIMELF.
- GTRIG: Transforma as matrizes de rigidez dos elementos do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global. Original do SIMELF (foi modificada).
- SORIT: Faz a montagem das matrizes dos elementos na matriz de rigidez global. Original do SIMELF.

B I B L I O G R A F I A

- |01| VON KÄRMÁN, T., "Über die Formänderung Dünwandiger Rohre, Insbesondere Federnder Susgleichrohre", Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Vol. 55, 1911, pp. 1889-1895;
- |02| BANTLIN, A., "Formänderung and Beanspruchung Federnder Ausgleichrohre", Zetschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Vol. 54, 1910, 43-49;
- |03| VIGNESS, I., "Elastic Properties of Curved Tubes", TRANS. ASME, Vol. 65(2), 1943, pp. 105-120;
- |04| PARDUE, T.E., VIGNESS, I., "Properties of Thin-Walled Curved Tubes of Short-Bend Radius", TRANS. ASME, Vol. 73, 1951, pp. 74-84;
- |05| GROSS, N., FORD, H., "The Flexibility of Short-Radius Pipe Bend", Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, 1952-1953, pp. 480-491;
- |06| KAFKA, P.G., DUNN, M.B., "Stiffness of Curved Circular Tubes, with Internal Pressure", TRANS. ASME, Vol. 78, 1956, pp. 247-254;

- |07| RODABAUGH, E.C., GEORGE, H.H., "Effect of Internal Pressure on Flexibility and Stress Intensification Factors of Curved Pipe or Welding Elbows", TRANS. ASME, Vol. 79, 1957, pp. 939-948;
- |08| TURNER, C.E., FORD, H., "Examination of the Theories for Calculating the Stresses in Pipe Bends Subjected to in-plane Bending", Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol. 171, 1957, pp. 513-515;
- |09| SMITH, R.T., FORD, H., "Experiments on Pipelines and Pipe Bends Subjected to Three-Dimensional Loading", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 9(2), 1967, pp. 124-137;
- |10| DODGE, W.G., MOORE, S.E., "Stress Indices and Flexibility Factors for Moment Loadings on Elbows and Curved Pipe", Welding Research Council Bulletin, Vol. 179, Dez. 1972;
- |11| BATHE, K.J., ALMEIDA, C.A., "A Simple and Effective Pipe Elbow Element-Linear Analysis", Vol. 47, 1980, pp. 93-100;
- |12| BATHE, K.J., ALMEIDA, C.A., "A Simple and Effective Pipe Elbow Element-Interaction Effects", Vol. 49, 1982, pp. 165-171;
- |13| ALMEIDA, C.A., "Efeitos da Pressão Interna no Comportamento Geral de Tubulações - o elemento viga-tubo", Revista Bra-

- sileira de Ciências Mecânicas", Vol. VI(2), 1984, pp. 95-103;
- [14] ALMEIDA, C.A., "Progressos Recentes na Análise Geral de Tubulações", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol. VI(2), 1984, pp. 85-94;
- [15] CLARK, R.A., REISSNER, E., "Bending of Curved Tubes", Advances in Applied Mechanics, Vol. 2, 1951, 93-122;
- [16] CLARK, R.A., GILROY, T.I., REISSNER, E., "Stresses and Deformations of Toroidal Shells of Elliptical Cross-Section", TRANS. ASME, Vol. 19, 1952, pp. 37-48;
- [17] BESKIN, L., "Bending of Curved Thin Tubes", TRANS. ASME, Vol. 12, 1945, A1-A7;
- [18] CHENG, D.H., THAILER, H.J., "On bending of Curved Circular Tubes", TRANS. ASME, Fev. 1970, pp. 62-66
- [19] SHIMIZU, T., et al, "Some experiences on Elastic-Plastic Analysis of Shell Structures", Proceedings of ADINA Conference, Ag. 1977;
- [20] IWATA, K. et al., "A Solution for the IAEA International Piping Benchmark Problem", Cooperative International Efforts, ORNL, Jun. 1979;

- |21| OHTSUBO, H., WATANABE, O., "Stress Analysis of Pipe Bends by Ring Elements", TRANS. ASME, Vol. 100, Fev. 1978, pp. 112-122;
- |22| TIMOSHENKO, STEPHEN, P., KRIEGER, S., WOINOWSKY, "Theory of Plates and Shells", Second Edition, McGraw-Hill Book Company, 1959;
- |23| TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.M., "Theory of Elasticity", Second Edition, 1951;
- |24| TIMOSHENKO, STEPHEN, P., "Strength of Materials", Part II, Third Edition, 1956;
- |25| SYMONDS, P.S., PARDUE, T.E., "Characteristics of Short-Radius Tube Bends", Second Partial Report, Naval Research Laboratory Report 0-2761, 1946;
- |26| GROSS, N., "Experiments on Short-Radius Pipe Bends", Proceedings of Institution of Mechanical Engineer, Vol. 1(B), 1952-53, pp. 465-479;
- |27| SOBEL, L.H., "In Plane Bending of Elbows", Journal of Computers and Structures, Vol. 7, 1977, pp. 701-715;
- |28| PASQUANTONIO, F. DI, MACCHI, A., VILLA, A., "Calcolo col Metodo Degli Elementi Finiti del Coefficienti di Flessibilitá dei Tubi Curvi Piani", L'energia Elétrica,

Vol. 4, 1977, pp. 177-183;

- | 29| LAZZERI, L., SCALA, M., AGRONE, M., "On the 3-D Nonlinear Analysis of Piping", Nuclear Engineering and Design, Vol. 61, 1980, pp. 209-222;
  
- | 30| BATHE, K.J., WILSON, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976;
  
- | 31| ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method", Third Edition, McGraw-Hill Book Company Limited, 1977;
  
- | 32| ALVES, D.B., "Teoria das Cascas", Apostila do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, 1983;
  
- | 33| KRAUS, H., "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, Inc. New York, 1967;
  
- | 34| LOVE, A.E.H., "Mathematical Theory of Elasticity", Fourth Edition;
  
- | 35| ALVES, D.B., "Teoria da Elasticidade", Apostila do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, 1983;
  
- | 36| NOVOHZILOV, V.V., "Thin Shell Theory", Translated by P.G. Lowe, P. Noordhoff Ltd., Gronigen, Netherlands, 1964;

- [37] LANGHAAR, H.L., "Energy Methods in Applied Mechanics John Wiley & Sons, Inc., 1962;
- [38] FOX, R.L., "Optimization Methods for Engineering Design", Addison-Wesley Publishing Company, 1970;
- [39] ZANGWILL, W.I., "Nonlinear Programming via Penalty Functions", Man. Science, Vol. 13(5), 1967, 344-358;
- [40] BREBBIA, C.A., CONNOR, J.J., "Fundamentals of Finite Elements Techniques - for Structural Engineers", London/Butler Worths, 1975;
- [41] MITHAIWALA, A., "Piping Design and Stresses", UCLA-USA, Out. 1979, pp. 08-12;
- [42] ALMEIDA, C.A., SALLES, A.C.S.L., "Analysis of Pipe Mitred Bends Through a Modified Beam Model- FE Approach", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol. VII, 1985, pp. 53-70;
- [43] COOK, R.D., "Concepts and Applications of Finite Elements Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1974;
- [44] CARNAHAN, B., LUTHER, H.A., WILKES, J.O., "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, Inc., 1969;
- [45] BARCELLOS, C.S., ROSA, E., "Sistema Modular de Elementos Fi-

nitos - SIMELF", Versão/79, CNEN/UFSC, 14/79.