

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÕES EXATAS PARA O PROBLEMA DE  
TRANSPORTE SIMULTÂNEO DE CALOR E MASSA EM ELEMENTOS  
POROSOS UNIDIMENSIONAIS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

ARISTEU DA SILVEIRA NETO

FLORIANÓPOLIS (SC), SETEMBRO - 1985

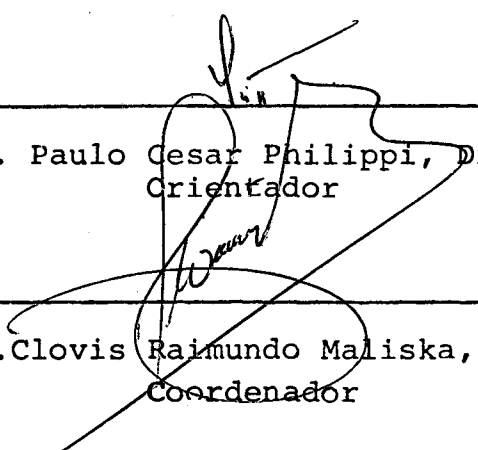
SOLUÇÕES EXATAS PARA O PROBLEMA DE  
TRANSPORTE SIMULTÂNEO DE CALOR E MASSA EM ELEMENTOS  
POROSOS UNIDIMENSIONAIS

ARISTEU DA SILVEIRA NETO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE

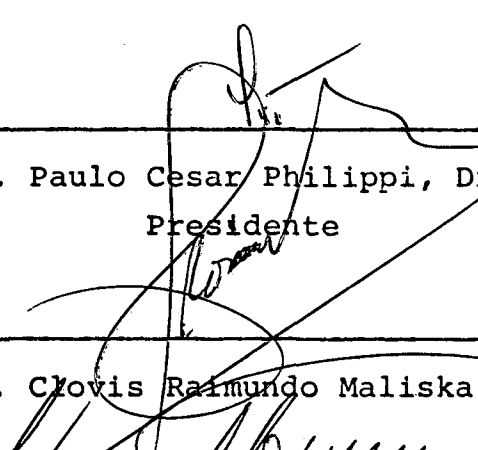
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA  
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO

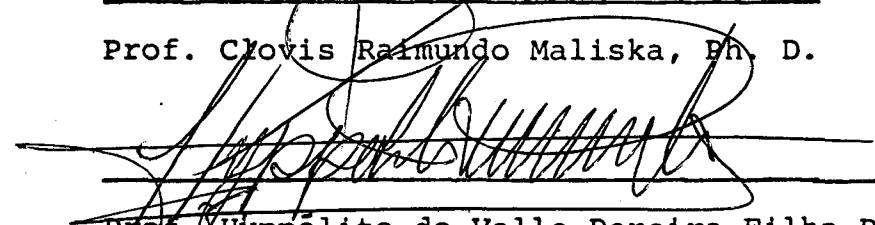
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.  
Orientador

\_\_\_\_\_  
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph. D.  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.  
Presidente

\_\_\_\_\_  
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph. D.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Hyppólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.

À  
minha esposa e  
minha família

## AGRADECIMENTOS

- Ao professor Paulo Cesar Philippi, pela sua dedicação, pelo apoio técnico-científico e pelos exemplos de trabalho ao longo do desenvolvimento desta dissertação;
- À datilógrafa, Iara, pelo seu precioso trabalho;
- Ao desenhista, Haferman, pelo seu precioso trabalho;
- Ao Sr. Almén, gerente da divisão de pesquisa da CONSUL, por todo o apoio que deu ao longo do desenvolvimento;
- Aos amigos que muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho e
- À CNEN (Comissão Nacional de Engenharia Nuclear) pelo apoio financeiro.

## SUMÁRIO

Página

## LISTA DE FIGURAS

## SIMBOLOGIA

## RESUMO

## ABSTRACT

1.	INTRODUÇÃO .....	1
2.	FUNDAMENTOS .....	7
2.1	- Considerações Básicas .....	7
2.2	- Equação para Migração de Líquido .....	8
2.3	- Equação para Migração de Vapor .....	9
2.4	- Migração Paralela de Líquido e Vapor .....	11
2.5	- Equação da Conservação da Energia .....	13
2.6	- Equações Simplificadas .....	18
2.7	- Condições de Contorno .....	19
2.8	- Condições Iniciais .....	22
3.	TRATAMENTO MATEMÁTICO E OBTENÇÃO DAS EXPRESSÕES PARA OS CAMPOS DE TEMPERATURA E CONTEÚDO DE UMIDADE E <u>PA</u> <u>RA</u> OS FLUXOS DE CALOR E DE MASSA .....	23
3.1	- Campos não Permanentes de Temperatura e de <u>Con</u> <u>teúdo</u> de Umidade e Densidades de Fluxos de Ca- lor e Massa. Placa Infinita com Condições de Simetria e Condições de Contorno de Terceira <u>Es</u> <u>pécie</u> .....	24
3.1.1	- Processo de Umidificação e Aquecimento ..	43

3.1.2 - Processo de Desumidificação e Aquecimento .....	47
3.1.3 - Placa Inicialmente em Equilíbrio com o Meio Ambiente em Termos de Conteúdo de Umidade e Submetida a uma Diferença de Temperatura .....	50
3.1.4 - Casos nos quais as Difusibilidades $\alpha$ e $D_T$ são muito maiores que a Difusibilidade $D_\theta$ .....	56
3.1.5 - Casos nos quais a Difusibilidade Térmica $\alpha$ é Predominante sobre as Difusibilidades Mássicas $D_\theta$ e $D_T$ .....	63
3.2 - Campos não Permanentes de Temperatura e de Conteúdo de Umidade e Densidade de Fluxos de Calor e Massa. Placa Infinita com Condições de Simetria e Condições de Contorno de Dirichlet ou de Primeira Espécie Variáveis com o Tempo ....	65
3.2.1 - Processo de Umidificação e Aquecimento ..	72
3.2.2 - Processo de Desumidificação e Aquecimento .....	74
3.2.3 - Placa Inicialmente em Equilíbrio com o Meio Ambiente em termos de Conteúdo de Umidade e Submetida a uma Diferença de Temperatura .....	78
3.2.4 - Casos nos quais as Difusibilidades $\alpha$ e $D_T$ são Predominantes sobre a Difusibilidade $D_\theta$ .....	82

3.2.5 - Casos nos quais a Difusibilidade Térmica $\alpha$ é Predominante sobre as Difusibilidades Mássicas $D_\theta$ e $D_T$ .....	86
3.3 - Campos não Permanentes de Temperatura e de Conteúdo de Umidade e Densidade de Fluxos de Calor e Massa. Placa Infinita com Condições de Simetria e com Condições de Contorno de Dirichlet ou de Primeira Espécie Constantes .....	89
3.4 - Campos não Permanentes de Temperatura e de Conteúdo de Umidade e Densidade de Fluxo de Calor e de Massa. Placa Infinita com Condições de Contorno Assimétricas de Primeira Espécie ou de Dirichlet Variáveis com o Tempo .....	92
3.4.1 - Processo de Umidificação e Aquecimento ...	108
3.4.2 - Processo de Desumidificação e Aquecimento .....	114
3.4.3 - Processo no qual a Placa está, Inicialmente, em Equilíbrio de Conteúdo de Umidade com o Meio Ambiente e é Submetida a um Pulso de Temperatura .....	118
3.5 - Campos não Permanentes de Temperatura e de Conteúdo de Umidade e Densidade de Fluxo de Calor e de Massa. Placa Infinita com Condições de Contorno Assimétricas de Primeira espécie constantes ou de Dirichlet .....	123

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	127
4.1 - Caso Simétrico - Condições de Contorno de Primeira Espécie Constantes .....	128
4.2 - Caso não Simétrico - Condições de Contorno de Primeira Espécie Constantes .....	132
4.2.1 - Processo de Aquecimento e Umidificação .....	133
4.2.2 - Comparação entre os Processos de Transferência de Calor e Massa Simultâneos e o Processo de Transferência de Calor pura .....	136
4.3 - Caso Simétrico - Condições de Contorno de Primeira Espécie-Funções Senoidais do Tempo .....	140
4.3.1 - Processo de Aquecimento e Umidificação .....	140
4.3.2 - Processo de Aquecimento e Desumidificação .....	144
4.3.3 - Processo para o qual a Placa está, Inicialmente, em Equilíbrio de Conteúdo de Umidade com o Meio Ambiente .....	147



4.4 - Caso não Simétrico - Condições de Contorno de Primeira Espécie - Funções Senoidais do Tempo ...	150
4.4.1 - Processo de Aquecimento e Umidificação ..	150
4.4.2 - Processo de Transmissão de Calor e Massa em Regime Transiente Periódico - Condições de Contorno Defasadas de Meio Ciclo .....	153
4.4.3 - Processo de Transmissão de Calor e Massa - Regime Transiente - Condições de Contorno Defasadas de Meio Ciclo .....	162
4.4.4 - Processo para o qual a Placa encontrasse, Inicialmente, em Equilíbrio de Conteúdo de Umidade com o Meio Ambiente .....	166
4.4.5 - Verificação da Influência do Parâmetro de Federov sobre os Desenvolvimentos dos Campos de Temperatura e de Conteúdo de Umidade .....	169
4.5 - Caso Simétrico - Condições de Contorno de Segunda Espécie - Funções Senoidais do Tempo .....	173
4.5.1 - Processo de Umidificação e Aquecimento ..	173
4.5.2 - A Influência do Parâmetro de Luikov no Desenvolvimento dos Campos de Temperatura e de Conteúdo de Umidade .....	176
4.5.3 - As Influências dos Parâmetros $Biq$ (Biot Térmico) e $Bim$ (Biot Mássico) na Transmissão de Calor e Massa entre a Placa e o Meio Ambiente .....	178

4.5.4 - Processo de Desumidificação e Aquecimento .....	181
4.5.5 - Processo para o qual a Placa está, Inicialmente, em Equilíbrio de Conteúdo de Umidade com o Meio Ambiente .....	184
4.5.6 - Caso para o qual as Difusibilidades $\alpha$ $D_T$ Predominam sobre a Difusibilidade $D_\theta$ .....	187
4.5.7 - Comparação entre o Processo de Transmissão de Calor Pura e os Processos de Umidificação e Desumidificação .....	189
5. CAMPOS NÃO PERMANENTES DOS POTENCIAIS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA -- PLACA INFINITA SEM CONDIÇÕES DE SIMETRIA - COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO EXATA E UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA .....	192
6. CONCLUSÕES .....	205
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	208
APÊNDICES .....	212
A. Comportamento da Equação Característica $\sigma(\mu)$ e o Método da Bissecção para Determinar suas Raízes .....	213
B. Relação entre o Teorema da Convolução e o Teorema de Duhamel .....	216
C. Solução Alternativa do Caso Eckert utilizando a Transformada de Fourier .....	218

## LISTA DE FIGURAS

	Página
FIGURA 3.1 - Caso simétrico - condições de contorno de terceira espécie - funções genéricas do tempo .....	24
FIGURA 3.2 - Caso simétrico - condições de contorno de terceira espécie - funções senoidais do tempo - umidificação e aquecimento .....	43
FIGURA 3.3 - Caso simétrico - condições de contorno de terceira espécie - funções senoidais do tempo - desumidificação e aquecimento .....	47
FIGURA 3.4 - Caso simétrico - condições de contorno de terceira espécie - funções senoidais do tempo - placa em equilíbrio de conteúdo de umidade com o meio ambiente .....	51
FIGURA 3.5 - Caso simétrico - condições de contorno de primeira espécie - funções genéricas do tempo .....	65
FIGURA 3.6 - Caso simétrico - condições de contorno de primeira espécie - funções senoidais do tempo - umidificação e aquecimento .....	73
FIGURA 3.7 - Caso simétrico - condições de contorno de primeira espécie - funções senoidais do tempo - desumidificação e aquecimento .....	75
FIGURA 3.8 - Caso simétrico - condições de contorno de primeira espécie - equilíbrio inicial de conteúdo de umidade com o meio ambiente ....	78

FIGURA 3.9 - Caso simétrico - condições de contorno de primeira espécie constantes .....	89
FIGURA 3.10- Caso não simétrico - condições de contorno genéricas do tempo .....	93
FIGURA 3.11- Caso não simétrico - condições de contorno variando de acordo com funções senoidais do tempo-processo de umidificação .....	109
FIGURA 3.12- Caso não simétrico - condições de contorno variando de acordo com funções senoidais do tempo-processo de desumidificação ..	114
FIGURA 3.13- Caso não simétrico - condições de contorno relativas à temperatura variando de acordo com funções senoidais do tempo e, inicialmente, equilibrada com o meio ambiente em termos de conteúdo de umidade .....	118
FIGURA 3.14- Caso não simétrico - condições de contorno constantes - processo de umidificação ...	123
FIGURA 4.1 - Distribuição de temperatura e conteúdo de umidade - caso simétrico .....	129
FIGURA 4.2 - Densidades de fluxos de calor e de massa - caso simétrico .....	130

FIGURA 4.3 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade - influência do parâmetro de Luikov .....	131
FIGURA 4.4 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade - caso não simétrico .....	133
FIGURA 4.5 - Fluxos de calor e de massa - caso não simétrico .....	136
FIGURA 4.6 - Distribuição de temperatura - comparação entre processos de transmissão de calor puro e processos de transmissão de calor e massa simultaneamente .....	137
FIGURA 4.7 - Desenvolvimento dos perfis de temperatura .....	139
FIGURA 4.8 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade - caso simétrico - umidificação e aquecimento .....	142
FIGURA 4.9 - Densidades de fluxo de calor e massa - caso simétrico - umidificação e aquecimento .....	143
FIGURA 4.10- Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade - caso simétrico - desumidificação e aquecimento .....	145
FIGURA 4.11- Densidades de fluxo de calor e massa - caso simétrico - desumidificação e aquecimento .....	146

	Página
FIGURA 4.12 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade - caso simétrico - equilíbrio de conteúdo inicial .....	148
FIGURA 4.13 - Densidades de fluxo de calor e massa- caso simétrico - equilíbrio de conteúdo inicial .....	149
FIGURA 4.14 - Distribuição de temperatura e conteúdo de umidade - caso não simétrico - umidificação e aquecimento .....	151
FIGURA 4.15 - Densidade de fluxo de calor - caso não simétrico - umidificação e aquecimento..	153
FIGURA 4.16 - Densidade de fluxo de massa- caso não simétrico - umidificação e aquecimento .....	154
FIGURA 4.17 - Distribuição de temperatura - regime transiente cíclico - condições de contorno em fase	
FIGURA 4.18 - Distribuição de temperatura - regime transiente cíclico - condições de contorno defasadas de meio ciclo .....	156
FIGURA 4.19 - Distribuições de conteúdo de umidade- regime transiente cíclico - condições de contorno em fase .....	157
FIGURA 4.20 - Distribuições de conteúdo de umidade- regime transiente - condições de contorno defasadas de meio ciclo .....	158

FIGURA 4.21 - Densidade de fluxo de calor - condições de contorno defasadas de meio ciclo .....	159
FIGURA 4.22 - Densidade de fluxo de massa - condições de contorno defasadas de meio ciclo .....	160
FIGURA 4.23 - Distribuição de temperatura com o tempo - condições de contorno defasadas de meio ciclo .....	163
FIGURA 4.24 - Distribuição de conteúdo de umidade com o tempo - condições de contorno defasadas de meio ciclo .....	164
FIGURA 4.25 - Densidade de fluxo de calor - condições de contorno defasadas de meio ciclo .....	165
FIGURA 4.26 - Densidade de fluxo de massa - condições de contorno defasadas de meio ciclo .....	166
FIGURA 4.27 - Distribuição de temperatura e de conteúdo de umidade - caso não simétrico - equilíbrio inicial de conteúdo de umidade - .....	168
FIGURA 4.28 - Densidades de fluxos de massa - caso não simétrico - equilíbrio inicial de conteúdo de umidade .....	169
FIGURA 4.29 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade - verificação da influência do número de Federov .....	171

FIGURA 4.30 - Densidades de fluxo de calor e de massa - verificação da influência do número de $Fe$ derov .....	172
FIGURA 4.31 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade - caso simétrico - condições de contorno de terceira espécie .....	174
FIGURA 4.32 - Distribuições dos fluxos de calor e massa - caso simétrico - condições de contorno de terceira espécie .....	175
FIGURA 4.33 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade - verificação da influência do número de Luikov .....	178
FIGURA 4.34 - Distribuições de temperatura - verificação da influência do número de Biot térmico ....	179
FIGURA 4.35 - Distribuições de conteúdo de umidade - ve rificação da influência do número de Biot mássico (Bim) .....	180
FIGURA 4.36 - Distribuição de temperatura - comparação entre os processos de transferência de ca lor e massa simultâneos - umidificação e desumidificação .....	182
FIGURA 4.37 - Densidades de fluxos de calor e massa .....	183
FIGURA 4.38 - Distribuição de temperatura e conteúdo de umidade - placa inicialmente em equilíbrio de conteúdo de umidade com o meio .....	185
FIGURA 4.39 - Densidades de fluxo de calor e de massa ....	186



	Página
FIGURA 4.40 - Distribuição de temperatura e de conteúdo de umidade - Caso em que as difusibilidades $\alpha$ e $D_T$ predominam sobre a difusibilidade $D_\theta$ .....	188
FIGURA 4.41 - Densidades de fluxo de calor e de massa ..	189
FIGURA 4.42 - Distribuição de temperatura para três diferentes processos: transmissão de calor pura e umidificação e desumidificação ....	190
FIGURA 5.1 - Caso não simétrico isolado nas fronteiras quanto ao fluxo de massa - caso Eckert..	193
FIGURA 5.2 - Distribuições de conteúdo de umidade - comparação entre a solução analítica e a solução numérica .....	203
FIGURA A.1 - Comportamento de $\sigma(\mu)$ para uma situação específica .....	215
FIGURA C.1 - Caso não simétrico isolado nas fronteiras quanto ao fluxo de massa-caso Eckert solução por transformada de Fourier em Cosseno .....	219

## SIMBOLOGIA

- C - Calor específico, (J/kg.K)
- D - Difusibilidade do vapor no ar , ( $m^2/s$ )
- $D_\theta$  - Difusibilidade mássica relacionada ao campo de conteúdo de umidade, ( $m^2/s$ )
- $D_T$  - Difusibilidade mássica relacionada ao campo de temperatura ( $m^2/s K$ )
- f - Função genérica do tempo representativa da temperatura ambiente; fator de redução dos poros da matriz devido à presença de líquido, ( $kg/m^2.s$ ); frequência, (1/s)
- g - Função genérica do tempo representativa do conteúdo de umidade ambiente
- h - Entalpia específica, (J/kg)
- i - Unidade imaginária
- I - Termo fonte
- j - Densidade de fluxo de massa, ( $kg/s.m^2$ )
- $j^*$  - Densidade de fluxo de massa adimensional
- K - Condutibilidade hidráulica, (m/s)
- $k_\theta$  - Coeficiente de transferência de massa, ( $kg/m^2.s$ )
- $l$  - Largura da placa, (m)
- L - Operador transformada de Laplace
- L - Calor latente de vaporização, (J/kg)
- M - Peso molecular da água, (kg/mol)
- p - Pressão local, ( $N/m^2$ ); parâmetro da transformada de Laplace em relação à posição, (1/m)
- $p_v$  - Pressão de vapor, ( $N/m^2$ )
- q - Densidade de fluxo de calor, ( $W/m^2$ )
- $q^*$  - Densidade de fluxo de calor adimensional

$$r - r = \frac{L\rho_0}{C\rho_0}$$

Res- Notação para resíduos

s - Parâmetro da transformada de Laplace em relação ao tempo,  
(1/s)

t - Tempo, (s)

T - Temperatura, ( $^{\circ}$ C)

u - Conteúdo de umidade no meio poroso, (kg/kg)

x - Coordenada espacial, (m)

$\alpha$  - Difusibilidade térmica, ( $m^2/s$ )

$\Delta$  - Operador gradiente

$\nabla$  - Operador divergente

$\lambda$  - Condutibilidade térmica sem migração de umidade, (W/m.K)

$\lambda_e$  - Condutibilidade equivalente (leva em consideração a parcela de energia que é transportada pelo vapor), (W/m.K)

$\mu$  - Raízes reais dos polinômios característicos

$\nu$  - Raízes complexas dos polinômios característicos

$\Psi$  - Potencial capilar, (m)

$\rho$  - Densidade, ( $kg/m^3$ )

$\theta$  - Conteúdo de umidade, ( $m^3/m^3$ )

$\phi$  - Umidade relativa

## NÚMEROS ADIMENSIONAIS

$$\text{Bim} = \frac{h_{\theta} \ell}{D_{\theta}}, \text{ número de Biot mássico, Eq. (3.26)}$$

$$\text{Biq} = \frac{h \ell}{\lambda}, \text{ número de Biot térmico, Eq. (3.26)}$$

$$\text{Fe} = r \frac{D_{\theta}}{D_T}, \text{ número de Federov, Eq. (3.16)}$$

$$\text{FO} = \frac{\alpha t}{\ell^2}, \text{ número de Fourier, Eq. (3.70)}$$

$$\text{FO}_m = \frac{D_{\theta} t}{\ell^2}, \text{ número de Fourier mássico, Eq. (5.24)}$$

$$\text{K} = r \frac{D_T}{\alpha}, \text{ parâmetro K, Eq. (3.105)}$$

$$\text{KO} = r \frac{\theta_i - \theta}{T - T_i}, \text{ parâmetro de Kossovich, Eq. (3.81)}$$

$$\text{Lu} = \frac{D_{\theta}}{\alpha}, \text{ parâmetro de Luikov, Eq. (3.15)}$$

$$\text{Pd} = \frac{2\pi f \ell^2}{\alpha}, \text{ parâmetro de Predivoditelev, Eq. (3.70)}$$

$$\text{Wa} = \frac{T_a}{T_{\text{max}2} - T_i}, \text{ relação de temperaturas, Eq. (3.81)}$$

$$\text{Wa}^* = \frac{T_a}{T_{\text{min}1} - T_i}, \text{ relação de temperaturas, Eq. (3.92)}$$

$$\text{wm} = \frac{T_m - T_i}{T_{\text{max}2} - T_i}, \text{ relação de temperaturas, Eq. (3.81)}$$

$$\text{Wm}^* = \frac{T_m - T_i}{T_{\text{min}1} - T_i}, \text{ relação de temperaturas, Eq. (3.82)}$$

## SUB-ÍNDICES

- a - Ar, amplitudes das oscilações
- c - Convecção
- d - Difusão
- e - Valor de equilíbrio
- i - Condição inicial, índices
- ℓ - Líquido
- L - Transformada de Laplace em relação ao tempo
- m - Valor médio
- max - Valor máximo
- min - Valor mínimo
- o - Propriedades da matriz sólida, valores relacionados às fronteiras da placa infinita
- T - Grandeza relacionada à temperatura
- v - Vapor
- θ - Grandeza relacionada ao conteúdo de umidade
- 1 - Grandeza relacionada ao extremo esquerdo da placa infnita
- 2 - Grandeza relacionada ao extremo direito da placa infnita
- ∞ - Grandeza representativa do meio ambiente

## SUPER-ÍNDICES

- \* - Grandeza adimensional, distinção entre duas variáveis
- ' - Diferenciação em relação à posição
- - Transformada de Laplace em relação à posição

## RESUMO

Neste trabalho o problema de transferência de calor e umidade em elementos porosos unidimensionais é abordado. O processo é descrito usando-se os modelos de Luikov, Philip e de Vries. O sistema de equações diferenciais representativo do modelo foi linearizado utilizando propriedades higr-térmicas constantes.

As técnicas da transformada de Laplace, do teorema da convolução e do teorema dos resíduos de Cauchy são, em seguida, utilizadas para a resolução do sistema de equações diferenciais resultante. As distribuições internas de temperatura e conteúdo de umidade são obtidas em várias situações distintas simulando-se as situações de aquecimento/arrefecimento e umidificação/desumidificação a que estão sujeitos os elementos porosos das edificações usando condições simétricas e não simétricas.

Os resultados são, em seguida, analisados de modo a se obter o desenvolvimento dos campos de temperatura e de conteúdo de umidade e à influência do desenvolvimento de cada um desses campos sobre o outro.

## ABSTRACT

In this research work it is analysed the transfer of humidity and heat in porous unidimensional elements. the transfer process is described using Luikov and Philip and de Vries models. The system of differential equation which governs the phenomenon was linearized using constant hygro-thermal properties. The differential equation are solved using Laplace transform, convolution theorem and Cauchy's residual methods. The temperature field and humidity distribution in the porous elements are obtained for several heating, cooling, humidification and dessecation simulated situations, using symmetrical and asymmetrical conditions. The influences of humidity distribution on temperature field development is analysed taking into account the relationship of this two fields.

## C A P Í T U L O 1

## INTRODUÇÃO

O conforto térmico no interior das edificações é um requisito indispensável ao bem estar das pessoas. Considerando que as edificações estão submetidas às variações das condições ambientais, os seus interiores terão condições semelhantes com evoluções mais ou menos defasadas e/ou amortecidas dependendo dos valores dos parâmetros que caracterizam o envoltório.

As variações das condições ambientais tem, aproximadamente, um comportamento cíclico. As amplitudes destas variações são, em muitos casos, consideráveis, dependendo da região em questão, e as edificações devem ser construídas de forma a amortecer ao máximo estas oscilações, de modo que nos seus interiores, as condições térmicas sejam favoráveis do ponto de vista de conforto térmico. Os meios que o homem dispõe para se proteger dessas variações são muitos, compreendendo desde a orientação da edificação até as características internas dos compartimentos e, nos casos mais graves, a utilização de sistemas de condicionamento artificiais.

Entre as várias variáveis a serem controladas internamente às edificações estão a temperatura e a umidade relativa. A temperatura interna é, basicamente, função dos ganhos e/ou perdas de energia por parte do ambiente interno.

Usualmente os cálculos da carga térmica são feitos considerando um processo de condução de calor pura pelas paredes. No entanto, sendo as paredes construídas de materiais po



rosos e, considerando que, geralmente, elas estão úmidas ou submetidas a gradientes de umidade, espera-se que ocorra, juntamente com o processo de transmissão de calor um processo de transporte de massa.

Philip e de Vries, [18] , [6] colocam que os dois processos ocorrem simultaneamente e são interdependentes. Sabe-se que a umidade existente no meio poroso pode passar por processos de evaporação e condensação sucessivos, migrando por meio de vários mecanismos e influenciando o processo de transmissão de calor.

As interdependências existentes entre os processos de transporte de massa e calor ainda não são totalmente conhecidas. Existem muitas dificuldades em caracterizar e formular matematicamente esses processos em meios porosos, principalmente devido às irregularidades apresentadas pelos poros dos materiais, tanto no que se refere a geometria quanto às suas disposições.

Um dos pioneiros na área foi Luikov, [13] , [14] , que, pela primeira vez, conseguiu equacionar o problema interrelacionando os processos de transporte de calor e massa, utilizando a termodinâmica irreversível, obtendo um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares acopladas nas duas variáveis dependentes: a temperatura e o conteúdo de umidade do meio poroso. Philip e de Vries, [18], determinaram, também, um sistema de equações análogo àquele obtido por Luikov, utilizando a lei de Darcy para o fluxo de líquido, a lei de Fick para a difusão do vapor e a lei da conservação da energia.

Muitos trabalhos já foram realizados no sentido de

resolver o sistema de equações obtido, para as diversas situações de interesse. Devido à complexidade do sistema de equações e também das condições de contorno, geralmente funções do tempo, vários autores tem atacado o problema utilizando métodos numéricos.

Huang, Siang e Best, [10], citam a dificuldade de se resolver o sistema de equações analiticamente. Fazem opção pelo método implícito das diferenças finitas. Obtém as taxas de fluxos e a distribuição do conteúdo de umidade para vários casos de interesse.

Glausgunov, [9], utiliza o método variacional de Kantorovich para obter as soluções aproximadas do problema não linear combinado de transferência de calor e massa para condições de contorno de primeira e segunda espécie, para uma placa infinita.

Eckert e Faghri, [8], resolvem o problema de transferência de calor e massa numa placa infinita mantida à temperatura inicial num dos extremos e submetida a um pulso de temperatura no outro extremo. A placa é considerada impermeável ao fluxo de massa em ambas as laterais. Assume-se que as propriedades físicas são constantes e que o processo de transporte de massa não influencia o desenvolvimento do campo de temperatura. O sistema de equação obtido por Philip et al, [18] é então desacoplado e simplificado. Utilizam o método das diferenças finitas.

Outra forma de abordar o problema é resolvê-lo analiticamente, obtendo soluções exatas. As maiores dificuldades encontradas para a aplicação desta alternativa é a não linearidade das equações que compõem o sistema e as complexidades das geometrias dos casos práticos.

Luikov e Mikhailov, [15], supõem que as proprieda

des termo-físicas não dependem da temperatura e do conteúdo de umidade, linearizam as equações e, utilizando os recursos da transformada de Laplace e do teorema da expansão, resolvem o problema para uma placa infinita com condições de simetria no centro e com condições de contorno de terceira espécie. Consideram as condições ambientes variando linearmente e exponencialmente com o tempo.

Souza, [20], em sua dissertação de mestrado, desenvolve um método de cálculo dos potenciais e dos fluxos na fronteira de uma placa infinita utilizando o método das funções de transferência. As condições de contorno são arbitrárias e são desenvolvidas em séries de funções pulsos. O problema é analisado na sua fase transiente. Uma deficiência desse método, em termos de análise, é que não se sabe o que ocorre no interior da placa porosa, os resultados com ele obtidos sendo limitados apenas às fronteiras.

A proposta para o presente trabalho é resolver o problema de transferência de calor e massa numa placa porosa infinita não saturada submetida a condições de contorno regidas por funções genéricas do tempo. O problema deve ser considerado com e sem condições de simetria.

O sistema de equações é linearizado fazendo a hipótese que as propriedades termo-físicas são independentes da temperatura e do conteúdo de umidade.

As ferramentas utilizadas para a solução do sistema de equações são a transformada de Laplace, o teorema dos resíduos de Cauchy e teorema da convolução.

O problema simétrico é resolvido com condições de

contorno regidas por funções arbitrárias do tempo, enquanto que o problema não simétrico é resolvido para condições de contorno de primeira espécie regidas por funções também arbitrárias do tempo.

Determina-se soluções genéricas sob formas de integrais que dependem dessas funções. Para cada caso de interesse elas são especificadas, resolve-se as integrais e determina-se as distribuições de conteúdo de umidade e de temperatura e também as densidades de fluxos de calor e de massa em qualquer posição da placa e em qualquer instante. Se as funções são simples as integrais são avaliadas imediatamente. Caso sejam complicadas utiliza-se um método numérico conveniente. O problema de encontrar o campo de temperatura e de conteúdo de umidade numa placa infinita porosa reduz-se a resolver duas integrais.

O presente trabalho foi desenvolvido de forma que o caso simétrico mais complexo, condições de contorno de terceira espécie, foi resolvido e a partir destas soluções derivou-se as soluções dos casos mais simples por processos limites. Na primeira parte do capítulo 3 apresenta-se o desenvolvimento teórico relativo a este parágrafo.

Na segunda parte do capítulo 3 resolveu-se o caso não simétrico e derivou-se, por processos limites, todos os subcasos de interesse.

A apresentação e a análise dos resultados foram efetuadas no capítulo 4 seguidos da solução de um caso particular, com comparação com as soluções obtidas por Eckert et al [8], utilizando o método das diferenças finitas. Finalmente, apresentou se as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

Observa-se que o trabalho se reveste de grande gran de importância dentro do contexto científico no sentido que constitui uma importante ferramenta para fins comparativos.

Os modelos numéricos, que, na maior parte dos casos, são representativos de situações reais, carecem de suportes compara tivos tais como modelos analíticos e dados experimentais. Neste sen tido, quanto mais complexo for o caso solucionado analiticamente mais fácil e confiável se torna o processo de checagem, pois meno res serão as simplificações requeridas no modelo numérico para tal fim.

Os modelos apresentados neste trabalho têm fundamen- tal importância, também, no sentido de confirmar e processar resul- tados experimentais.

De fato, o presente trabalho se equadra dentro de um trabalho maior de simulação do comportamento térmico de edificações podendo ser acoplado a outros modelos já existentes que compõem um todo.

## C A P Í T U L O 2

### FUNDAMENTOS

#### 2.1 - Considerações Básicas

Os processos de transmissão de calor e umidade em meios porosos não ocorrem de formas independentes. Os teores de umidade do meio em estudo e do meioenvolvente podem influenciar de forma significativa o processo de transmissão de calor.

Se existe umidade no interior e/ou no exterior do meio, surgirão gradientes de conteúdo de umidade. Em função do campo de temperatura poderá ocorrer evaporação em regiões quentes e condensação em regiões frias. Com isso haverá liberação e absorção de energia influenciando o processo de transmissão de calor.

Um estudo dos processos de transmissão de calor e massa requer, inicialmente, um equacionamento que seja representativo dos processos e também da interdependência entre eles. As equações são fundadas nos princípios da conservação da energia e

conservação da massa.

## 2.2 - Equação para a Migração de Líquido

Representando-se o conteúdo de líquido num meio poroso por  $\theta_\ell$ ,  $m^3$  de líquido/ $m^3$  de meio, o problema de migração de líquido pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\frac{\partial (\rho_\ell \theta_\ell)}{\partial t} = -\nabla \cdot (j_{\ell,c} + j_{\ell,d}) + I_\ell \quad (2.1)$$

onde  $j_{\ell,c}$  é o fluxo de líquido por convecção,  $j_{\ell,d}$  é o fluxo de líquido por difusão,  $I_\ell$  é o termo fonte (condensação ou evaporação) e  $\rho_\ell$  é a densidade do líquido.

De acordo com a Eq. (2.1) a variação do conteúdo  $\theta_\ell$  com o tempo é devida à divergência da soma dos fluxos convectivos e difusivos adicionada do termo fonte  $I_\ell$ . A divergência representa a variação do fluxo de líquido num volume de controle elementar. Se a divergência é positiva (sai mais líquido que entra) então o conteúdo diminui com o tempo. O termo fonte  $I_\ell$  representa a geração/consumo de líquido por processos de mudança de fase.

Utilizando a lei de Darcy, Philip and de Vries [18] mostraram que os fluxos de líquido por convecção e por difusão podem ser representados sob uma forma única,  $j_\ell$ , e expresso em termos do potencial capilar,  $\Psi(T, \theta_\ell)$ , ou ainda:

$$j_l = -\rho_l D_{Tl} \nabla T - \rho_l D_{\theta l} \nabla \theta_l - \rho_l K k_z \quad (2.2)$$

onde  $K$  é a condutibilidade hidráulica (m/s),  $D_{Tl}$  é a difusibilidade mássica do líquido associada ao  $\nabla T$ , ( $m^2/sK$ ) e  $D_{\theta l}$  é a difusibilidade mássica do líquido ( $m^2/s$ ).

O primeiro termo da Eq. (2.2) representa a difusão do líquido devida ao gradiente de temperatura, a segunda parcela representa a difusão do líquido devida ao gradiente de conteúdo de umidade e a terceira representa a migração de líquido devida à ação da gravidade, considerada, neste trabalho, atuando na direção  $z$ .

Considerando a observação feita para a dedução da Eq. (2.2), pode-se representar as duas formas de transporte de líquido, difusão e convecção ( $j_{l,d}$  e  $j_{l,c}$ ), da Eq. (2.1) por  $j_l$  apenas, obtendo uma nova equação a partir de (2.1).

$$\frac{\partial (\rho_l \theta_l)}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho_l D_{\theta l} \nabla \theta_l + \rho_l D_{Tl} \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial \theta_l} \frac{\partial (\rho_l \theta_l)}{\partial z} + I_l \quad (2.3)$$

### 2.3 - Equação para Migração de Vapor

A densidade de fluxo de vapor em meios porosos é proporcional ao gradiente de pressão de vapor e pode ser expressa por meio da lei de Fick,



$$j_v = -f D \frac{p}{p - p_v} \frac{M}{RT} \nabla p_v \quad (2.4)$$

onde:  $D$  é a difusibilidade do vapor no ar;  $p$  é a pressão local;  $p_v$  é a pressão de vapor;  $T$  é a temperatura absoluta e  $f$  é caracterizado por Luikov [14] como sendo um fator entre 0 e 1 que caracteriza a resistência ao fluxo de vapor devido à presença de líquido reduzindo a secção de passagem dos poros da matriz sólida,  $M$  é o peso molecular da água e  $R$  é a constante dos gases perfeitos.

Geralmente

$$p_v = p_v(T, \theta_\ell) \quad (2.5)$$

e então

$$\nabla p_v = \frac{\partial p_v}{\partial T} \nabla T + \frac{\partial p_v}{\partial \theta_\ell} \nabla \theta_\ell \quad (2.6)$$

substituindo a Eq. (2.6) na Eq. (2.4) obtém-se,

$$j_v = -f D \frac{p}{p - p_v} \frac{M}{RT} \frac{\partial p_v}{\partial T} \nabla T - f D \frac{p}{p - p_v} \frac{M}{RT} \frac{\partial p_v}{\partial \theta_\ell} \nabla \theta_\ell \quad (2.7)$$

Fazendo as seguintes notações:  $D_{\theta v} = \frac{f D}{\rho_\ell} \frac{p}{p - p_v} \frac{M}{RT} \frac{\partial p_v}{\partial \theta_\ell}$  (difusibilidade

de mássica de vapor);  $D_{Tv} = \frac{f D}{\rho_\ell} \frac{p}{p - p_v} \frac{M}{RT} \frac{\partial p_v}{\partial T}$  (difusibilidade mássica de vapor associada ao  $\nabla T$ ) obtém-se a seguinte equação para a densidade de fluxo de vapor:

$$\underline{j}_v = -\rho_l D_{\theta v} \nabla \theta_l - \rho_l D_{Tv} \nabla T \quad (2.8)$$

A Eq.(2.8) diz que a densidade de fluxo de vapor ocorre de duas formas: uma parte é proporcional ao gradiente de conteúdo de líquido e a outra, proporcional ao gradiente de temperatura.

Uma vez caracterizada a densidade de fluxo do vapor, Eq.(2.8), pode-se obter a equação da conservação da massa, para o vapor, fazendo um balanço em um volume de controle elementar em termos do conteúdo volumétrico de vapor,  $\theta_v$ , m<sup>3</sup> de vapor/m<sup>3</sup> de matriz, obtendo:

$$\frac{\partial (\rho_v \theta_v)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}_v + I_v \quad (2.9)$$

Todas as equações obtidas até aqui serão utilizadas nos próximos itens.

#### 2.4 - Migração Paralela de Líquido e Vapor

As Eqs. (2.1) e (2.9) representam a conservação do líquido e do vapor respectivamente, logo tem-se:

$$\frac{\partial (\rho_l \theta_l)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}_l + I_l \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\rho_v \theta_v)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}_v + I_v \quad (2.11)$$

Somando as Eqs. (2.10) e (2.11), considerando que  $\rho_v \theta_v \ll \rho_\ell \theta_\ell$  e que  $I_\ell + I_v = 0$ , tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial(\rho_\ell \theta_\ell)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}_\ell - \nabla \cdot \underline{j}_v \quad (2.12)$$

Conforme a Eq. (2.2)

$$\underline{j}_\ell = -\rho_\ell D_{\theta\ell} \nabla \theta_\ell - \rho_\ell D_{T\ell} \nabla T - \rho_\ell K \underline{k} \quad (2.13)$$

e conforme a Eq. (2.8)

$$\underline{j}_v = -\rho_\ell D_{\theta v} \nabla \theta_\ell - \rho_\ell D_{Tv} \nabla T \quad (2.14)$$

Substituindo as Eqs. (2.13) e (2.14) na Eq. (2.12),  
obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_\ell \theta_\ell)}{\partial t} &= \nabla \cdot (\rho_\ell D_{\theta\ell} \nabla \theta_\ell + \rho_\ell D_{T\ell} \nabla T) \\ &+ \nabla \cdot (\rho_\ell D_{\theta v} \nabla \theta_\ell + \rho_\ell D_{Tv} \nabla T) + \rho_\ell \frac{\partial K}{\partial z} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial (\rho_\ell \theta_\ell)}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho_\ell D_\theta \nabla \theta_\ell + \rho_\ell D_T \nabla T) + \rho_\ell \frac{\partial K}{\partial z} \quad (2.15)$$

onde

$$D_\theta = D_{\theta\ell} + D_{\theta v} \quad (2.16)$$

$$D_T = D_{T\ell} + D_{Tv} \quad (2.17)$$

A Eq. (2.15) representa a conservação da massa em meios porosos com migração de vapor e líquido simultaneamente. O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.15) representa o fluxo da fase líquida pela superfície de controle de um elemento infinitesimal, promovido pelos gradientes de temperatura e de conteúdo de líquido. O segundo termo representa a migração de líquido promovida pelo campo gravitacional.

## 2.5 - Equação da Conservação da Energia

Os componentes do meio poroso em estudo são: líquido ( $\ell$ ), vapor ( $v$ ), sólido ( $o$ ) e ar ( $a$ ).

Fazendo um balanço de energia num volume de controle elementar obtém-se a equação da conservação da energia;

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o h_o + \rho_\ell \theta_\ell h_\ell + \rho_v \theta_v h_v + \rho_a \theta_a h_a) = -\nabla \cdot (q + h_\ell j_\ell + h_a j_a + h_v j_v) \quad (2.18)$$

onde  $h_i$  é a entalpia específica do componente  $i$  ( $i = l, v, o, a$ ). A Eq. (2.18) é equivalente a dizer que a soma da variação do nível energético de cada componente é igual ao recíproco do fluxo líquido de energia pelas fronteiras de um volume de controle elementar.

Definindo a fração mássica do componente  $i$  como sendo

$$u_i = \frac{\text{massa do componente } i}{\text{massa da matriz sólida}}$$

observa-se que  $\rho_i \theta_i = \rho_o u_i$ . Sendo a conservação da massa, para o componente  $i$ , regida pela equação seguinte:

$$\frac{\partial (\rho_i \theta_i)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}_i + I_i$$

obtém-se uma expressão para  $\nabla \cdot \underline{j}_i$  que será utilizada posteriormente:

$$\nabla \cdot \underline{j}_i = I_i - \frac{\partial (\rho_i \theta_i)}{\partial t} = I_i - \frac{\partial (\rho_o u_i)}{\partial t} \quad (2.20)$$

Tomando o primeiro membro da Eq. (2.18) e utilizando o fato que  $h_i = C_i T$  onde  $C_i$  é o calor específico do componente  $i$ , e  $T$  é a temperatura absoluta, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_o h_o + \rho_\ell \theta_\ell h_\ell + \rho_v \theta_v h_v + \rho_a \theta_a h_a) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\rho_o C_o + \sum_i \rho_o u_i C_i) T \right] \quad (2.21)$$

Definindo o calor específico equivalente como

$C = C_o + \sum_i C_i u_i$  e substituindo este resultado na Eq. (2.21), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (\rho_o C_o + \sum_i \rho_o u_i C_i) T \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o C T) \quad (2.22)$$

Utilizando a Eq. (2.20) e trabalhando com o segundo membro da Eq. (2.18), tem-se:

$$\begin{aligned} -\nabla \underline{q} - \nabla \cdot (\sum_i h_i \underline{j}_i) &= -\nabla \underline{q} - \nabla \cdot (\sum_i C_i T \underline{j}_i) = \\ &= -\nabla \underline{q} - \sum_i C_i T \nabla \cdot \underline{j}_i - \sum_i \underline{j}_i \cdot \nabla (C_i T) = -\nabla \underline{q} - \sum_i C_i T \left( I_i - \frac{\partial (\rho_o u_i)}{\partial t} \right) - \sum_i \underline{j}_i \cdot \nabla (C_i T) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Conforme Luikov [14], p. 239, na ausência do processo de filtração (migração de líquido por pressão hidrostática), pode-se desprezar a parcela de energia transportada por convecção, ou seja, pode-se desprezar o termo  $\sum_i \underline{j}_i \cdot \nabla (C_i T)$ . Substituindo as Eqs. (2.22) e (2.23) na Eq. (2.18) tem-se:

$$\frac{\partial (\rho_o C T)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{q} - \sum_i C_i T I_i + \sum_i C_i T \frac{\partial (\rho_o u_i)}{\partial t}$$

Utilizando a regra da cadeia e rearranjando os termos convenientemente obtêm-se:

$$\rho_o C \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{q} - \sum_i h_i \Gamma_i$$

Considerando que  $I_a = 0$  (fonte de ar) e que  $I_\ell = -I_v$ , então

$$\rho_o C \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta \cdot \underline{q} - h_v I_v - h_\ell I_\ell = -\Delta \cdot \underline{q} - (h_v - h_\ell) I_v = -\nabla \cdot \underline{q} - L I_v$$

donde

$$\rho_o C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - L I_v \quad (2.24)$$

Para equacionar o termo fonte  $I_v$ , utiliza-se a equação da conservação da massa para o vapor, Eq. (2.11):

$$\frac{\partial (\rho_v \theta_v)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}_v + I_v$$

Considerando que  $\rho_v \theta_v \ll 1$ , obtêm-se:

$$I_v = \nabla \cdot \underline{j}_v = -\nabla \cdot (\rho_\ell D_{\theta v} \nabla \theta_\ell + \rho_\ell D_{Tv} \nabla T) \quad (2.25)$$

Substituindo a Eq. (2.25) na Eq. (2.24), tem-se:

$$\rho_0 C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + L \nabla \cdot (\rho_\ell D_{Tv} \nabla T) + L \nabla \cdot (\rho_\ell D_{\theta v} \nabla \theta_\ell) \quad (2.26)$$

O primeiro termo do segundo membro da Eq. (2.26) representa a condução líquida de calor pela superfície de controle de um volume elementar. Esta parcela de energia é proporcional à condutibilidade térmica  $\lambda$  representativa do material sem migração de umidade. Neste ponto deve-se ressaltar que o fluxo de calor total é dado por  $\lambda \nabla T$  acrescido de uma parcela transportada com o vapor que migra. Para expressar o fluxo de calor total é necessário definir uma condutividade equivalente  $\lambda_e$  que leva em conta as duas parcelas de transporte de energia.

As duas últimas parcelas representam o transporte de energia com a migração de umidade.

As Eqs. (2.15) e (2.26) são reescritas abaixo deixando evidente um sistema fechado de duas equações e duas incógnitas:  $T$  e  $\theta_\ell$ .

$$\frac{\partial (\rho_\ell \theta_\ell)}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho_\ell D_{\theta} \nabla \theta_\ell + \rho_\ell D_{T} \nabla T) - \rho_\ell \frac{\partial K}{\partial z} \quad (2.27)$$

$$\rho_0 C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + L \nabla \cdot (\rho_\ell D_{Tv} \nabla T) + L \nabla \cdot (\rho_\ell D_{\theta v} \nabla \theta_\ell) \quad (2.28)$$



Os processos físicos de transporte de energia e de massa que ocorrem no interior de um meio poroso são interdependentes. A transmissão de calor afeta o transporte de massa e vice-versa. O sistema de Eqs. (2.27) e (2.28) que representa estes processos também são interdependentes. As equações são acopladas. Não se consegue encontrar o campo de temperatura de forma independente do campo de conteúdo de umidade, e vice-versa.

Posteriormente ver-se-á que estas equações serão desacopladas com a utilização da transformada de Laplace, porém, surgem parâmetros adimensionais, em ambas as soluções que são dependentes das características higró-térmicas, condições iniciais e de contorno que ditam o desenvolvimento de ambos os campos mantendo a interdependência dos dois.

## 2.6 - Equações Simplificadas

Para que seja possível encontrar soluções exatas do problema proposto, as equações deduzidas devem ser simplificadas mediante as seguintes hipóteses: (a) propriedades higró-térmicas constantes; (b) problema unidimensional; c) considera-se que não há migração de massa na direção  $z$ .

Utiliza-se as notações das pelas Eqs. (2.16) e (2.17) ou seja:

$$D_{\theta} = D_{\theta v} + D_{\theta \ell} \quad (2.29)$$

$$D_T = D_{Tv} + D_{T\ell} \quad (2.30)$$

Com estas hipóteses as Eqs. (2.27) e (2.28) reduzem-se a:

$$\frac{\partial \theta_{\ell}}{\partial t} = D_{\theta} \frac{\partial^2 \theta_{\ell}}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \alpha + \frac{L\rho_{\ell}}{C\rho_o} D_T \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{L\rho_{\ell}}{C\rho_o} D_{\theta} \frac{\partial^2 \theta_{\ell}}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

Estas equações encontram-se nas formas em que serão resolvidas no próximo capítulo sob as diversas condições de contorno de interesse.

## 2.7 - Condições de Contorno

O problema de transmissão de calor e massa numa placa porosa infinita pode ser subdividido em dois casos básicos: (a) caso simétrico e (b) caso não simétrico. O caso (a) por sua vez é caracterizado pela existência de condições de contorno iguais em ambos os lados da placa. O caso (b) é caracterizado pela existência de condições de contorno diferentes em ambos os lados da

placa.

As condições de contorno em ambos os casos podem ser subdivididas em: (1) condições de contorno de primeira espécie ou condições de Dirichlet (temperatura e conteúdo prescritos), (2) condições de contorno de segunda espécie ou de Newman (fluxos prescritos) e, (3) condições de contorno de terceira espécie ou de Robbin (convecção na fronteira). As condições de contorno (1) são estabelecidas prescrevendo-se os potenciais nas fronteiras do elemento considerado, enquanto que as condições de contorno do tipo (2) são estabelecidas prescrevendo-se os fluxos de calor e de massa nas fronteiras.

As condições de contorno de terceira espécie são as que melhor representam as condições reais do problema que será resolvido neste trabalho e são obtidas por meio de balanços de calor e massa nas fronteiras da placa.

A Fig. (2.1) mostra um diagrama para um balanço de energia em um volume de controle envolvendo uma fronteira da placa a ser estudada.

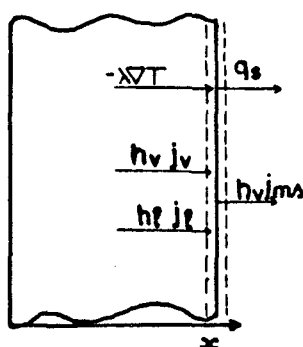


Figura 2.1

Fazendo um balanço de energia no volume de controle representado pelas linhas tracejadas tem-se:

$$q_s + \lambda \nabla T + L(1 - \xi) j_{ms} = 0 \quad (2.33)$$

onde  $q_s = h[T(x=l, t) - T_\infty]$ ;  $j_{ms} = k_\theta [\theta_\ell(x=l, t) - \theta_{\ell e}]$ ;  $\xi$  é o coeficiente de mudança de fase que dá o grau de importância do processo de migração de líquido por mudança de fase em relação ao processo de convecção, introduzido por Luikov 14;  $k_\theta$  é o coeficiente de convecção de massa;  $\theta_{\ell e}$  corresponde ao conteúdo de líquido que o material adquiriria se estivesse em equilíbrio com o meio ambiente,  $\theta_{\ell e} = f(T, \phi, \text{meio poroso})$ .

O presente trabalho estuda o problema sem levar em consideração a migração de líquido, ou seja  $\xi = 1$ . Com isso a Eq. (2.33) reduz-se a:

$$h[T(x=l, t) - T_\infty] + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=l, t) = 0 \quad (2.34)$$

Com raciocínio análogo encontra-se a condição de contorno para o conteúdo de umidade  $\theta_\ell$ .

$$k_\theta [\theta_\ell(x=l, t) - \theta_{\ell e}] + D_T \frac{\partial T(x=l, t)}{\partial x} + D_\theta \frac{\partial \theta(x=l, t)}{\partial x} \quad (2.35)$$

Nas Eqs. (2.34) e (2.35),  $T_\infty$  e  $\theta_{le}$ , geralmente, são funções do tempo.

## 2.8 - Condições Iniciais

Para todos os casos que serão estudados serão consideradas as condições iniciais constantes:

$$T(x,0) = T_i \quad (2.36)$$

$$\theta(x,0) = \theta_i \quad (2.37)$$

Dessa forma, ficam colocadas as equações e as condições de contorno para problemas que envolvem migração simultânea de calor e massa unidimensionais. Nos próximos capítulos serão apresentados os métodos utilizados e as soluções de casos específicos. Apresenta-se também resultados sob forma de gráficos e as respectivas análises.

## C A P Í T U L O 3

TRATAMENTO MATEMÁTICO E OBTENÇÃO DAS EXPRESSÕES PARA OS  
CAMPOS DE TEMPERATURA E CONTEÚDO DE UMIDADE E  
PARA OS FLUXOS DE CALOR E DE MASSA

O processo de transmissão de calor e massa num meio poroso não saturado é regido pelas Eqs. (2.31) e (2.32) aqui reescritas, eliminando-se o índice  $\ell$  por conveniência:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_e \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r D_{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

onde  $r = \frac{L\rho_{\ell}}{C\rho_0}$  e  $\alpha_e = \alpha + rD_T$

Nos itens seguintes são apresentadas as soluções para cada caso específico, caracterizadas pelas condições de contorno respectivas.

3.1 - Campos não Permanentes de Temperatura e de  
Conteúdo de Umidade e Densidades de Fluxos de  
Calor e Massa. Placa Infinita com Condição de  
Simetria e Condições de Contorno de Robin  
ou de Terceira Espécie

A Fig. 3.1 ilustra o problema proposto neste item.

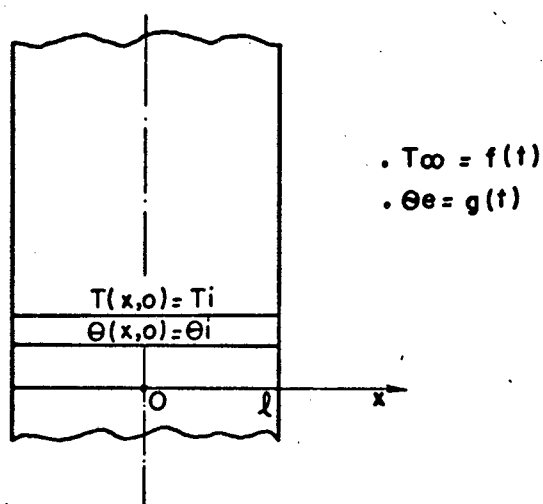


Figura 3.1

Conforme as Eqs. (2.34) e (2.35) e por questão de simetria, as condições de contorno são dadas por:

$$h[T(x=l,t) - T_\infty] + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=l,t) = 0 \quad (3.3)$$

$$k_\theta [\theta(x=l,t) - \theta_e] + D_T \frac{\partial T}{\partial x}(x=l,t) + D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}(x=l,t) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x=0,t) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x=0, t) = 0 \quad (3.6)$$

onde as condições ambientais  $T_{\infty}$  e  $\theta_e$  são funções genéricas do tempo,

$$T_{\infty} = f(t) \quad (3.7)$$

$$\theta_e = g(t) \quad (3.8)$$

As condições iniciais são dadas pelas Eqs.(2.36) e (2.37).

$$T(x, t=0) = T_i \quad (3.9)$$

$$\theta(x, t=0) = \theta_i \quad (3.10)$$

O problema proposto é encontrar as soluções exatas que satisfaçam ao sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem lineares, obedecendo às condições de contorno e iniciais dadas pelas Eqs.(3.3) a (3.10). Essas soluções serão obtidas utilizando-se a transformada de Laplace, o teorema da convolução e o teorema dos resíduos de Cauchy.

Aplicando a transformada de Laplace às Eqs. (3.1) e (3.2) em relação ao tempo e utilizando-se as condições iniciais (3.9) e (3.10), obtém-se:



$$s\theta_L = D_\theta \theta_L'' + D_T T_L'' + \theta_i \quad (3.11)$$

$$sT_L = rD_\theta \theta_L'' + \alpha_e T_L'' + T_i \quad (3.12)$$

Manipulando estas equações obtêm-se:

$$T_L^{(4)} - \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{D_\theta} + r \frac{D_T}{D_\theta} \right) T_L'' + \frac{s T_L - s T_i}{\alpha D_\theta} = 0 \quad (3.13)$$

A Eq. (3.13) é uma equação diferencial ordinária linear de 4<sup>a</sup> ordem não homogênea em  $T_L$ . Pode-se resolvê-la utilizando a transformada de Laplace e o teorema dos resíduos.

Aplicando a transformada de Laplace na Eq. (3.13) em relação a  $x$  e ordenando os termos:

$$\bar{T}_L(p, s) = \frac{c_1 p^4 + c_2 p^3 + c_3 p^2 + c_4 p + (s T_i / \alpha D_\theta)}{p \left[ p^4 - p^2 \left( \frac{s}{\alpha} + \frac{s}{D_\theta} + s r \frac{D_T}{\alpha D_\theta} \right) + \frac{s^2}{\alpha D_\theta} \right]} \quad (3.14)$$

onde  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  são funções de  $s$ , a barra indica a transformada em relação a  $x$  e  $p$  é o parâmetro de transformação associado.

Define-se os seguintes parâmetros adimensionais:

. Número de Luikov

$$Lu = \frac{D_{\theta}}{\alpha} \quad (3.15)$$

. Número de Federov

$$Fe = r \frac{D_T}{D_{\theta}} = \frac{L \rho \ell}{C \rho_0} \frac{D_T}{D_{\theta}} \quad (3.16)$$

Dessa forma, o denominador da Eq. (3.14) pode ser reescrito na forma:

$$\Psi(p, s) = p \left[ p^4 - \frac{s}{\alpha} (1 + Fe + \frac{1}{Lu}) p^2 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{Lu} \right] \quad (3.17)$$

De modo que:

$$\bar{T}_L(p, s) = \frac{\phi(p, s)}{\Psi(p, s)} \quad (3.18)$$

onde  $\phi(p, s) = c_1 p^4 + c_2 p^3 + c_3 p^2 + c_4 p + (s T_i / \alpha D_{\theta})$  (3.19)

Utilizando-se o teorema dos resíduos, particulariza do para o teorema da expansão por Luikov, [1], tem-se:

$$L^{-1} \left[ \frac{\phi(p,s)}{\Psi(p,s)} \right] = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\phi(p,s)}{\Psi(p,s)} e^{px} dp = \sum_j \text{Res}(p_j, f(x,p,s)) \quad (3.20)$$

onde:  $f(x,p,s) = \frac{\phi(p,s)}{\Psi(p,s)} e^{px}$  e  $p_j$  são os polos do integrando, ou seja, as raízes de:

$$\Psi(p,s) = p(p^4 - \frac{s}{\alpha}(1 + F_e + \frac{1}{Lu}) + (\frac{s}{\alpha})^2 \frac{1}{Lu}) = 0 \quad (3.21)$$

ou ainda,

$$p = 0 \quad \text{ou}$$

$$p_j^2 = \frac{1}{2} \frac{s}{\alpha} \left[ \left(1 + F_e + \frac{1}{Lu}\right) \pm \sqrt{\left(1 + F_e + \frac{1}{Lu}\right)^2 - \frac{4}{Lu}} \right]$$

Definindo,

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left[ \left(1 + F_e + \frac{1}{Lu}\right) + (-1)^i \sqrt{\left(1 + F_e + \frac{1}{Lu}\right)^2 - \frac{4}{Lu}} \right], i=1,2 \quad (3.22)$$

tem-se que as raízes que satisfazem à Eq. (3.21) são:

$$p_j = \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i \quad \text{com } i=1,2 \quad \text{e } j=1,2$$

$$p_j = -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i \quad \text{com } i=1,2 \quad \text{e } j=3,4$$

Calculando-se os resíduos correspondentes aos polos  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  e substituindo-se na Eq. (3.20):

$$T_L(x, s) - \frac{T_i}{s} = d_1 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x} + d_2 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x} + d_3 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x} + d_4 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x} \quad (3.23)$$

Voltando-se às Eqs. (3.11) e (3.12) encontra-se uma relação do tipo  $\theta_L = \theta_L(T_L, T_L'')$  e, utilizando-se a Eq. (3.23), determina-se  $\theta_L$  na forma seguinte:

$$\theta_L - \frac{\theta_i}{s} = \frac{1}{r} (1 - v_1^2) d_1 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x} + \frac{1}{r} (1 - v_2^2) d_2 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x} + \frac{1}{r} (1 - v_1^2) d_3 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x} + \frac{1}{r} (1 - v_2^2) d_4 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x} \quad (3.24)$$

As constantes que aparecem nas Eqs. (3.23) e (3.24) podem ser determinadas utilizando as condições de contorno, Eqs. (3.3)-(3.6). Aplicando a transformada de Laplace às Eqs. (3.3)-(3.6) e fazendo algumas manipulações obtêm-se:

$$T_L(x, s) - \frac{T_i}{s} = - \frac{(G_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - G_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x) (f_L - \frac{T_i}{s})}{F_2 G_1 - F_1 G_2} + \frac{(F_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - F_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x) r (g_L - \frac{\theta_i}{s})}{F_2 G_1 - F_1 G_2} \quad (3.25)$$

$$\theta_L(x,s) - \frac{\theta_i}{s} = - \frac{[(1-v_1^2)G_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - (1-v_2^2)G_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x] \frac{1}{r} (f_L - \frac{T_i}{s})}{F_2 G_1 - F_1 G_2} +$$

$$+ \frac{[(1-v_1^2)F_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - (1-v_2^2)F_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x] (g_L - \frac{\theta_i}{s})}{F_2 G_1 - F_1 G_2} \quad (3.26)$$

onde:  $F_i(s) = \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i \ell + \frac{1}{Bi_q} \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i \ell \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i \ell ;$

$$G_i(s) = (1-v_i^2) \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i \ell + [Fe + (1-v_i^2)] \frac{1}{Bi_m} \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i \ell \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i \ell ;$$

$Bi_q = h\ell/\lambda$  (Biot térmico);

$Bi_m = h_\theta \ell / D_\theta$  (Biot mássico)

e  $i = 1, 2.$

As Eqs. (3.25) e (3.26) podem ser reescritas nas formas seguintes:

$$T_L - \frac{T_i}{s} = s(f_L - \frac{T_i}{s}) A_L + s(g_L - \frac{\theta_i}{s}) B_L \quad (3.27)$$

$$\theta_L - \frac{\theta_i}{s} = s(f_L - \frac{T_i}{s}) C_L + s(g_L - \frac{\theta_i}{s}) D_L \quad (3.28)$$

onde

$$A_L(x,s) = - \frac{G_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - G_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x}{s(F_2 G_1 - F_1 G_2)} = \frac{\xi_A(x,s)}{\sigma(s)} \quad (3.29)$$

$$B_L(x,s) = \frac{r [F_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - F_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x]}{s (F_2 G_1 - F_1 G_2)} = \frac{\xi_B(x,s)}{\sigma(s)} \quad (3.30)$$

$$C_L(x,s) = - \frac{\frac{1}{r} [(1-v_1^2) G_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - (1-v_2^2) G_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x]}{s (F_2 G_1 - F_1 G_2)} = \frac{\xi_C(x,s)}{\sigma(s)} \quad (3.31)$$

$$D_L(x,s) = \frac{[(1-v_1^2) F_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - (1-v_2^2) F_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x]}{s (F_2 G_1 - F_1 G_2)} = \frac{\xi_D(x,s)}{\sigma(s)} \quad (3.32)$$

A partir das propriedades da transformada de Laplace, sabe-se que:

$$sf_L(s) = L[f'(t)] + f(0) \quad (3.33)$$

e que

$$sg_L(s) = L[g'(t)] + g(0). \quad (3.34)$$

Substituindo as Eqs. (3.33) e (3.34) nas Eqs. (3.27) e (3.28) tem-se:

$$\begin{aligned} T_L - \frac{T_i}{s} &= [f(0) - T_i] A_L(x,s) + [g(0) - \theta_i] B_L(x,s) + L[f'(t)] A_L(x,s) + \\ &+ L[g'(t)] B_L(x,s) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\theta_L - \frac{\theta_i}{s} = [f(0) - T_i] C_L(x, s) + [g(0) - \theta_i] D_L(x, s) + L [f'(t)] C_L(x, s) + L [g'(t)] D_L(x, s) \quad (3.36)$$

Utilizando o teorema da convolução e a linearidade da transformada de Laplace:

$$T(x, t) - T_i = [f(0) - T_i] A(x, t) + [g(0) - \theta_i] B(x, t) + \int_0^t A(x, \lambda) \frac{d}{dt} f(t - \lambda) d\lambda + \int_0^t B(x, \lambda) \frac{d}{dt} g(t - \lambda) d\lambda \quad (3.37)$$

$$\theta(x, t) - \theta_i = [f(0) - T_i] c(x, t) + [g(0) - \theta_i] D(x, t) + \int_0^t C(x, \lambda) \frac{d}{dt} f(t - \lambda) d\lambda + \int_0^t D(x, \lambda) \frac{d}{dt} g(t - \lambda) d\lambda \quad (3.38)$$

Para que  $T(x, t)$  e  $\theta(x, t)$  fiquem determinados,  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$ ,  $C(x, t)$  e  $D(x, t)$  também devem ser determinadas a partir das Eqs. (3.29) - (3.32).

Utilizando o teorema da expansão, conforme a referência [1], p.57,

$$A(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} \frac{\xi_A(x,s)}{s\sigma(s)} ds = \frac{\xi_A(x,0)}{\sigma'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_A(x,s_n) e^{s_n t}}{\sigma'(s_n)} \quad (3.39)$$

$$B(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} \frac{\xi_B(x,s)}{s\sigma(s)} ds = \frac{\xi_B(x,0)}{\sigma'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_B(x,s_n) e^{s_n t}}{\sigma'(s_n)} \quad (3.40)$$

$$C(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} \frac{\xi_C(x,s)}{s\sigma(s)} ds = \frac{\xi_C(x,0)}{\sigma'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_C(x,s_n) e^{s_n t}}{\sigma'(s_n)} \quad (3.41)$$

$$D(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} \frac{\xi_D(x,s)}{s\sigma(s)} ds = \frac{\xi_D(x,0)}{\sigma'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_D(x,s_n) e^{s_n t}}{\sigma'(s_n)} \quad (3.42)$$

Conforme identidades estabelecidas pelas Eqs.(3.29)-(3.32),

$$\xi_A(x,s) = G_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x - G_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x \quad (3.43)$$

$$\xi_B(x,s) = r \left[ F_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - F_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x \right] \quad (3.44)$$



$$\xi_C(x,s) = \frac{1}{r} \left[ (1-v_2^2)G_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x - (1-v_1^2)G_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x \right] \quad (3.45)$$

$$\xi_D(x,s) = (1-v_1^2)F_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x - (1-v_2^2)F_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x \quad (3.46)$$

$$\sigma(s) = s(F_2 G_1 - F_1 G_2) \quad (3.47)$$

Os  $s_n$  que aparecem nas Eqs. (3.39)-(3.42) são as raízes de  $\sigma(s)=0$  que constituem polos dos integrandos destas equações, ou seja:  $s_0 = 0$  e  $s_n$ ,  $n=1,2,\dots$ , raízes de

$$F_2 G_1 - F_1 G_2 = 0 \quad (3.48)$$

Afim de fazer as raízes  $s_n$  mais precisas utiliza-se as relações  $\cosh z = \cos iz$  e  $\sinh z = i \sin iz$  e a relação

$$\mu_n = i \sqrt{\frac{s_n}{\alpha}} \ell.$$

Assim,

$$F_i(\mu_n) = \cos \mu_n v_i + \frac{1}{Biq} \mu_n v_i \operatorname{sen} \mu_n v_i \quad i = 1, 2$$

e,

$$G_i(\mu_n) = (1-v_i^2) \cos \mu_n v_i + [Fe + (1-v_i^2)] \frac{\mu_n v_i}{Bim} \operatorname{sen} \mu_n v_i \quad i = 1, 2$$

onde  $\mu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , são as raízes de

$$F_2(\mu_n)G_1(\mu_n) - F_1(\mu_n)G_2(\mu_n) = 0 \quad (3.49)$$

Das Eqs. (3.43)-(3.46) obtêm-se novas expressões em termos de  $\mu_n$ :

$$\xi_A(x, \mu_n) = G_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell} - G_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} \quad (3.50)$$

$$\xi_B(x, \mu_n) = r \left[ F_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} - F_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell} \right] \quad (3.51)$$

$$\xi_C(x, \mu_n) = \frac{1}{r} \left[ (1-v_2^2) G_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell} - (1-v_1^2) G_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} \right] \quad (3.52)$$

$$\xi_D(x, \mu_n) = (1-v_1^2) F_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} - (1-v_2^2) F_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell} \quad (3.53)$$

Voltando a atenção para as Eqs. (3.39)-(3.42), necessita-se determinar  $\xi_A(x, 0)$ ,  $\xi_B(x, 0)$ ,  $\xi_C(x, 0)$ ,  $\xi_D(x, 0)$ ,  $\sigma'(0)$  e  $\sigma'(s_n)$ .

Utilizando-se a Eq. (3.47) e as Eqs. (3.50)-(3.53) obtêm-se:

$$\xi_A(x, 0) = v_2^2 - v_1^2 \quad (3.54)$$

$$\xi_B(x, 0) = 0 \quad (3.55)$$

$$\xi_C(x,0) = 0 \quad (3.56)$$

$$\xi_D(x,0) = v_2^2 - v_1^2 \quad (3.57)$$

$$\sigma'(s) = [s(F_2G_1 - F_1G_2)]' = (F_2G_1 - F_1G_2) + s(F_2'G_1 + F_2G_1' - F_1'G_2 - F_1G_2') \quad (3.58)$$

Efetando as derivadas separadamente e relembrando que

$$(F_1G_2 - F_2G_1) \Big|_{\mu_n} = 0, \text{ obtêm-se:}$$

$$\sigma'(\mu_n) = \frac{1}{2} \mu_n \tau(\mu_n) \quad (3.59)$$

onde

$$\tau(\mu_n) = v_1G_2(\mu_n)H_1(\mu_n) + v_2F_1(\mu_n)I_2(\mu_n) - v_2G_1(\mu_n)H_2(\mu_n) - v_1F_2(\mu_n)I_1(\mu_n) \quad (3.60)$$

$$H_i(\mu_n) = \left(1 + \frac{1}{Bi_i}\right) \text{sen} \mu_n v_i + \frac{v_i \mu_n}{Bi_i} \text{cos} \mu_n v_i \quad (3.61)$$

$$I_i(\mu_n) = (1 - v_i^2) \text{sen} \mu_n v_i + \frac{Fe + (1 - v_i^2)}{Bim} (\text{sen} \mu_n v_i + \mu_n v_i \text{cos} \mu_n v_i) \quad (3.62)$$

onde  $i = 1, 2$

Da Eq. (3.59), pode-se mostrar que:

$$\sigma'(0) = v_2^2 - v_1^2 \quad (3.63)$$

Substituindo as Eqs. (3.54)-(3.63) nas Eqs. (3.39)-(3.42):

$$A(x,t) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} - G_1 \cos v_2 \mu_n \frac{x}{\ell}}{\mu_n \tau(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 FO} \quad (3.64)$$

$$B(x,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r \left[ F_2(\mu_n) \cos v_1 \mu_n \frac{x}{\ell} - F_1(\mu_n) \cos v_2 \mu_n \frac{x}{\ell} \right]}{\mu_n \tau(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 FO} \quad (3.65)$$

$$C(x,t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r \left[ (1-v_1^2) G_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} - (1-v_2^2) G_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell} \right]}{\mu_n \tau(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 FO} \quad (3.66)$$

$$D(x,t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-v_1^2) F_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} - (1-v_2^2) F_1(\mu_n) \cos \mu_n \frac{x}{\ell}}{\mu_n \tau(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 FO} \quad (3.67)$$

Desta forma as funções  $T(x,t)$  e  $\theta(x,t)$  dadas pelas Eqs. (3.37)-(3.38) ficam completamente determinadas e constituem soluções para o problema proposto, com condições ambiente regidas por funções arbitrárias do tempo,  $T_{\infty} = f(t)$  e  $\theta_e = g(t)$ .

Deve-se observar que o teorema da expansão, sendo uma particularidade do teorema dos resíduos, só pode ser empregado, nesta forma, quando se tratar de polos simples. No caso em questão essa condição fica garantida, considerando que  $\sigma(s) = s(F_2 G_1 - F_1 G_2)$  é uma função par de  $\sqrt{\frac{s}{\alpha}}$  garantindo a unicidade de  $\sigma(s)$  para cada  $\sigma_n$  e conseqüentemente para cada  $\mu_n$ .

Neste ponto especifica-se as funções  $f$  e  $g$  a fim de obter as distribuições e os fluxos para uma situação específica.

Supor que a temperatura e o conteúdo de umidade de equilíbrio do meio ambiente possam ser representados por funções senoidais:

$$T_{\infty} = f(t) = T_m + T_a \text{sen}(2\pi ft) \quad (3.68)$$

$$\theta_e = g(t) = \theta_m + \theta_a \text{sen}(2\pi ft) \quad (3.69)$$

onde  $T_m$  = temperatura média,  $\theta_m$  = conteúdo de equilíbrio médio,

$T_a$  = amplitude,  $\theta_a$  = amplitude,  $f$  = frequência

Utilizando as Eqs. (3.64)-(3.67) e as especificações das condições ambientes, Eqs. (3.68) e (3.69), pode-se avaliar as integrais que aparecem nas Eqs. (3.37) e (3.38), e definindo-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$FO = \alpha t / \ell^2 \quad (\text{Número de Fourier})$$

$$Pd = 2\pi f \ell / \alpha \quad (\text{Número de Predvoditelev}), \text{ obtém-se:}$$

$$a) \int_0^t A(x, \lambda) \frac{d}{dt} f(t-\lambda) d\lambda = T_a \left\{ \text{sen}(PdFO) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} - G_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell}}{\mu_n \tau(\mu_n)} \right. \\ \left. \cdot \left[ \frac{Pd}{Pd^2 + \mu_n^4} (\mu_n^2 \cos(P_d FO) + Pd \text{sen}(P_d FO)) - \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha t}{\ell^2}} \right] \right\} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_0^t B(x, \lambda) \frac{d}{dt} g(t-\lambda) d\lambda &= 2\theta_a \sum_{n=1}^{\infty} r \frac{[F_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} - F_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell}]}{\mu_n \tau(\mu_n)} \\
 &\left[ \frac{Pd}{Pd^2 + \mu_n^4} (\mu_n^2 \cos(PdFO) + Pd \text{sen}(PdFO)) - \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int_0^t C(x, \lambda) \frac{d}{dt} f(t-\lambda) d\lambda &= -2T_a \sum_{n=1}^{\infty} r \frac{[(1-v_1^2) G_2(\mu_n) \cos \mu_n v_1 \frac{x}{\ell} - (1-v_2^2) G_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell}]}{\mu_n \tau(\mu_n)} \\
 &\left[ \frac{P_d}{Pd^2 + \mu_n^4} (\mu_n^2 \cos(PdFO) + P_d \text{sen}(PdFO)) - \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int_0^t D(x, \lambda) \frac{d}{dt} g(t-\lambda) d\lambda &= \theta_a \left\{ \text{sen}(PdFO) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(1-v_1^2) F_2(\mu_n) \cos(\mu_n v_1 \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \right. \right. \\
 &- \left. \frac{(1-v_2^2) F_1(\mu_n) \cos \mu_n v_2 \frac{x}{\ell}}{\mu_n \tau(\mu_n)} \right) \left[ \frac{Pd}{Pd^2 + \mu_n^4} (\mu_n^2 \cos(PdFO) + Pd \text{sen}(PdFO)) \right. \\
 &\left. \left. - \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \right\} \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões correspondentes a  $A(x,t)$ ,  $B(x,t)$ ,  $C(x,t)$  e  $D(x,t)$ , ou seja, Eqs. (3.64)-(3.67) e as integrais dadas pelas Eqs. (3.70)-(3.73) nas Eqs. (3.37)-(3.38) e rear

ranjando os termos convenientemente tem-se as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade:

$$T^* = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{ sen}(PdFO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{\cos \mu_n v_i \frac{x}{\ell}}{\mu_n \tau(\mu_n)} \cdot \left[ \Gamma_{j1} \cos(PdFO) + \Gamma_{j2} \text{ sen}(PdFO) + \Gamma_{j3} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.74)$$

$$\theta^* = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\theta_{\text{máx}} - \theta_i} = \frac{(\theta_m - \theta_i) + \theta_a \text{ sen}(PdFO)}{\theta_{\text{máx}} - \theta_i} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{(1 - v_i^2) \cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_{j1}^* \cos(PdFO) + \Gamma_{j2}^* \text{ sen}(PdFO) + \Gamma_{j3}^* e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.75)$$

As raízes  $\mu_n$ ,  $n=1,2,\dots$ , da Eq. (3.49) são calculadas utilizando o método da bipartição que consiste, basicamente, em andar no eixo das abscissas até localizar a primeira raiz, refinar o valor da mesma e buscar a próxima raiz. O risco de pular uma raiz é mantido sob controle andando com incrementos muito pequenos. O comportamento da Eq. (3.49), para condições específicas, é mostrado no apêndice A.

Os coeficientes que aparecem nas Eqs. (3.74)-(3.75) são descritos a seguir:

$$\Gamma_{i1} = W_a \frac{Pd\mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} [G_i(\mu_n) + KO_a F_i(\mu_n)] \quad (3.76)$$

$$\Gamma_{i2} = W_a \frac{Pd^2}{Pd^2 + \mu_n^4} [G_i(\mu_n) + KO_a F_i(\mu_n)] \quad (3.77)$$

$$\Gamma_{i3} = W_m [G_i(\mu_n) + KO_m F_i(\mu_n)] - W_a \frac{Pd\mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} [G_i(\mu_n) + KO_a F_i(\mu_n)] \quad (3.78)$$

$$\Gamma_{i1}^* = \frac{W_a}{KO_{\max}} \frac{Pd\mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} [G_i(\mu_n) + KO_a F_i(\mu_n)] \quad (3.79)$$

$$\Gamma_{i2}^* = \frac{W_a}{KO_{\max}} \frac{Pd^2}{Pd^2 + \mu_n^4} [G_i(\mu_n) + KO_a F_i(\mu_n)] \quad (3.80)$$

$$\Gamma_{i3}^* = \frac{W_m}{KO_{\max}} [G_i(\mu_n) + KO_m F_i(\mu_n)] - \frac{W_a}{KO_{\max}} \frac{Pd\mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} [G_i(\mu_n) + KO_a F_i(\mu_n)] \quad (3.81)$$

$$i = 1, 2$$

Os parâmetros adimensionais que aparecem nas Eqs. (3.76)-(3.81) são especificados:

$$W_a = \frac{T_a}{T_{\max} - T_i}, \quad W_m = \frac{T_m - T_i}{T_{\max} - T_i} \quad \text{e} \quad T_{\max} = T_m + T_a$$



O número de Kossovich, KO, relaciona as diferenças entre as condições iniciais e as do ambiente:

$$KO_a = -r \frac{\theta_a}{T_a}, \quad KO_m = r \frac{\theta_i - \theta_m}{T_m - T_i}, \quad KO_{m\acute{a}x} = r \frac{\theta_i - \theta_{m\acute{a}x}}{T_{m\acute{a}x} - T_i}$$

Os parâmetros  $KO_m$  e  $KO_{m\acute{a}x}$  informam se o conteúdo inicial de umidade no elemento poroso é maior ou menor que as condições médias e/ou máximas do meio ambiente. Se KO for positivo o problema é caracterizado por um fluxo de massa da placa para o meio ambiente. Este é um processo de aquecimento e desumidificação, quando a temperatura do meio é maior que a temperatura da placa. Se KO é negativo e a temperatura é maior que a temperatura inicial da placa então o processo é de aquecimento e umidificação.

Se KO for nulo então a placa está, inicialmente, em equilíbrio com o meio, no que se refere ao conteúdo de umidade. Esse equilíbrio será alterado quando a placa for submetida a um campo de temperatura.

Dependendo dos números de Kossovich, pode-se ter, portanto, três situações distintas: (1) Umidificação e aquecimento, (2) desumidificação e aquecimento e (3) placa inicialmente em equilíbrio com o meio. As soluções para estes três casos são apresentadas neste capítulo.

### 3.1.1 - Processo de Umidificação e Aquecimento

Com a finalidade de tornar os resultados mais fáceis de serem analisados, serão impostas restrições sobre as condições ambientes (temperatura e conteúdo) e sobre as condições iniciais, de forma a garantir que todos os números de Kossovich sejam positivos o que garante que haverá apenas o processo de umidificação e aquecimento. É claro que as expressões apresentadas são representativas de qualquer processo desde que sejam readimensionalizadas de forma conveniente.

Para que haja aquecimento e umidificação basta garantir que:

$$T_{\min} = T_m - T_a > T_i \quad (3.82)$$

$$\theta_{\min} = \theta_m - \theta_a > \theta_i \quad (3.83)$$

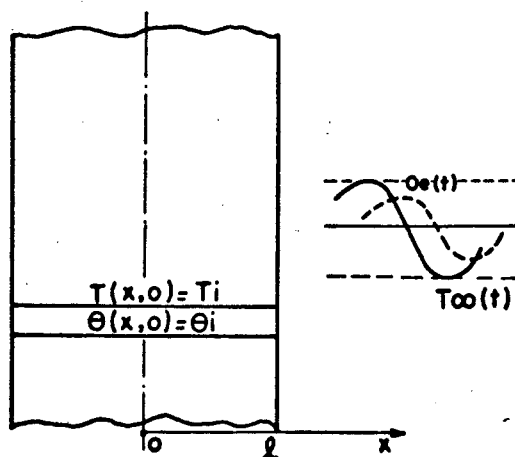


Figura 3.2

As distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade dadas pelas Eqs. (3.74) e (3.75) já são, na forma em que estão, representativas do processo de umidificação e aquecimento. São deduzidas, então, as expressões para os fluxos de calor e de umidade.

a) Distribuição de Temperatura:

$$T^* = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{\cos \mu_n v_i \frac{x}{\ell}}{\mu_n \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_{j1} \cos(PdFO) + \Gamma_{j2} \text{sen}(PdFO) + \Gamma_{j3} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.84)$$

b) Distribuição de Conteúdo de Umidade:

$$\theta^* = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\theta_{\text{máx}} - \theta_i} = \frac{(\theta_m - \theta_i) + \theta_a \text{sen}(PdFO)}{\theta_{\text{máx}} - \theta_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j=2}}^{2,1} (-1)^j \frac{(1 - v_i^2) \cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_{j1}^* \cos(PdFO) + \Gamma_{j2}^* \text{sen}(PdFO) + \Gamma_{j3}^* e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.85)$$

Observa-se pelas Eqs. (3.84)-(3.85) que:

$$T(x,t) = T_i \quad \text{e} \quad T^* = 0 \quad \text{para} \quad t = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{x}{\ell} \leq 1$$

$$\theta(x,t) = \theta_i \text{ e } \theta^* = 0 \quad \text{para } t = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{x}{\ell} \leq 1$$

Observa-se, ainda, que  $T(x,t)$  não pode ser maior que  $T_{\text{máx}} = T_m + T_a$ , e que  $\theta(x,t)$  não pode ser maior que  $\theta_{\text{máx}} = \theta_m + \theta_a$ , logo os potenciais  $T^*$  e  $\theta^*$  obedecerão as seguintes restrições:  $0 \leq T^*\left(\frac{x}{\ell}, FO\right) \leq 1$  e  $0 \leq \theta^*\left(\frac{x}{\ell}, FO\right) \leq 1$ .

c) Densidade de Fluxo de Calor:

Conforme o tratamento teórico do capítulo 2, tem-se:

$$q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{e \partial x} \quad (3.86)$$

Derivando a Eq. (3.84) e substituindo na Eq. (3.86), tem-se que:

$$q^*\left(\frac{x}{\ell}, FO\right) = \frac{q(x,t)}{\lambda \frac{(T_{\text{máx}} - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{v_i \text{sen} \mu_n v_i \frac{x}{\ell}}{\tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_{j1} \cos(\rho_n FO) + \Gamma_{j2} \text{sen}(\rho_n FO) + \Gamma_{j3} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.87)$$

d) Densidade de Fluxo de Massa:

Conforme o capítulo 2:

$$j(x,t) = -\rho_\ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \rho_\ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.88)$$

Derivando as Eqs. (3.84)-(3.85) e substituindo na Eq. (3.88) tem-se:

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^{2,1} (-1)^j \frac{\text{sen} \mu_n v_j \frac{x}{\ell}}{\tau(\mu_n)} \left[ \Delta_{ij1} \cos(PdFO) + \Delta_{ij2} \text{sen}(PdFO) + \Delta_{ij3} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.89)$$

onde:  $\Delta_{ijk} = v_j \Gamma_{ik} \frac{F_e}{KO_{\text{máx}}} + (1 - v_j^2) \Gamma_{ik}^*$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$  e  $k = 1, 2, 3$ ,

$\Gamma_{ik}$  e  $\Gamma_{ik}^*$ ,  $i=1, 2$  e  $k=1, 2, 3$  são dados pelas Eqs. (3.76) a (3.81).

### 3.1.2 - Processo de Desumidificação e Aquecimento

Para que haja processo de desumidificação e aquecimento impõe-se as seguintes restrições sobre as condições ambientais:

$$T_{\min} = T_m - T_a > T_i \quad (3.90)$$

$$\theta_{\max} = \theta_m + \theta_a < \theta_i \quad (3.91)$$

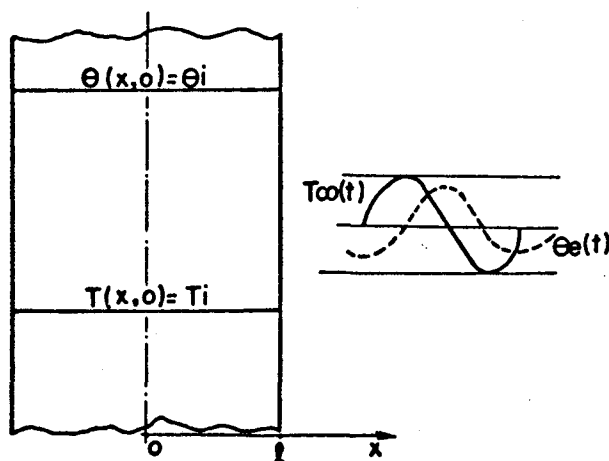


Figura 3.3

As distribuições dos potenciais  $T^*(\frac{x}{l}, FO)$  e  $\theta^*(\frac{x}{l}, FO)$  e das densidades de fluxo são apresentadas a seguir. Observa-se que as equações representativas deste processo são as mesmas apresentadas no item 3.1.1. No caso do conteúdo de umidade, faz-se necessário readimensionalisá-lo a Eq. (3.85), para obter resultados

mais fáceis de serem analisados, ou seja, de forma que, quando  $FO = 0$ , obtém-se  $\theta^* = 1$ , dizendo com isso que, no início do processo, a placa encontra com o potencial máximo e à medida que o tempo for passando ela vai se desumidificando e  $\theta^*$  vai decrescendo.

a) Distribuição de Temperatura:

Como a condição inicial é a mesma do item 3.1.1, a distribuição de temperatura pode ser dada pela Eq. (3.84).

b) Distribuição do Conteúdo de Umidade:

Transcrevendo a Eq. (3.85),

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\theta_{\max} - \theta_i} = \frac{(\theta_m - \theta_i) + \theta_a \operatorname{sen}(PdFO)}{\theta_{\max} - \theta_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{(1 - v_i^2) \cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_{j1}^* \cos(PdFO) + \Gamma_{j2}^* \operatorname{sen}(PdFO) + \Gamma_{j3}^* e^{-\mu_n^2 FO} \right]$$

observando que  $\frac{\theta - \theta_i}{\theta_{\min} - \theta_i} = \frac{\theta - \theta_i + \theta_{\min} - \theta_{\min}}{\theta_{\min} - \theta_i} = \frac{\theta - \theta_{\min}}{\theta_{\min} - \theta_i} + 1$

e substituindo este resultado na equação anterior, tem-se uma nova forma para a equação da distribuição do conteúdo de umidade,

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_{\min}}{\theta_i - \theta_{\min}} = 1.0 - \frac{(\theta_m - \theta_i) + \theta_a \operatorname{sen}(PdFO)}{\theta_{\min} - \theta_i} -$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{(1 - v_i^2) \cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_{j1}^* \cos(PdFO) + \Gamma_{j2}^* \operatorname{sen}(PdFO) + \Gamma_{j3}^* e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.92)$$

onde

$$\Gamma_{i1}^* = \frac{W_a^*}{KO_{\min}} \frac{P_d \mu_n^2}{P_d^2 + \mu_n^4} \left[ KO_a F_i(\mu_n) + G_i(\mu_n) \right]$$

$$\Gamma_{i2}^* = \frac{W_a^*}{KO_{\min}} \frac{P_d^2}{P_d^2 + \mu_n^4} \left[ KO_a F_i(\mu_n) + G_i(\mu_n) \right]$$

$$\Gamma_{i3}^* = \frac{W_m^*}{KO_{\min}} \left[ KO_m F_i(\mu_n) + G_i(\mu_n) \right] - \frac{W_a^*}{KO_{\min}} \frac{P_d \mu_n^2}{P_d^2 + \mu_n^4} \left[ KO_a F_i(\mu_n) + G_i(\mu_n) \right]$$

$$\text{com } i = 1, 2, \quad KO_m = r \frac{\theta_i - \theta_{\min}}{T_{\min} - T_i} ; \quad W_a^* = \frac{T_a}{T_{\min} - T_i} ; \quad W_m^* = \frac{T_m - T_i}{T_{\min} - T_i}$$

### c) Densidade de Fluxo de Calor:

Pode ser obtida utilizando a mesma expressão do item (3.1.1), Eq. (3.87).



d) Densidade de Fluxo de Massa:

$$j(x,t) = -\rho_\ell D_{T\theta} \frac{\partial T}{\partial x} - \rho_\ell D_{\theta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Obtendo as derivadas a partir das Eqs. (3.84) e (3.92):

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{j(x,t)}{\frac{\rho_\ell D_\theta (\theta_i - \theta_{\min})}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{\text{sen}(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\tau(\mu_n)} \left[ \Delta_{ij1} \cos(PdFO) + \right. \\ \left. + \Delta_{ij2} \text{sen}(PdFO) + \Delta_{ij3} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.93)$$

onde:  $\Delta_{ijk} = v_i \left[ \frac{F e W_{\max}}{KO_{\min}} \Gamma_{jk} + (1-v_i^2) \Gamma_{jk}^* \right]$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ ;  $k = 1, 2, 3$

### 3.1.3 - Placa Inicialmente em Equilíbrio com o Meio Ambiente em Termos de Conteúdo de Umidade e submetida a uma Diferença de Temperatura

As condições ambientes devem obedecer às seguintes restrições

$$T_{\min} = T_m - T_a > T_i \quad (3.94)$$

$$\theta_m = \theta_i \quad \text{e} \quad \theta_a = 0 \quad (3.95)$$

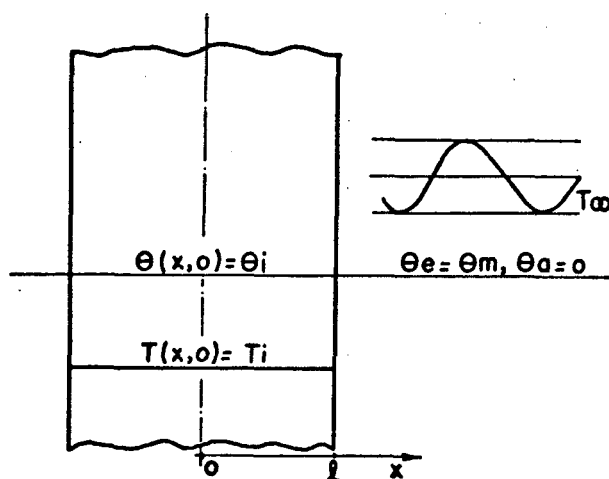


Figura 3.4

A condição de equilíbrio mássico com o meio ambiente pode ser informada ao modelo por meio dos números de Kossovich,

$$KO_a = -r \frac{\theta_a}{T_a} = 0$$

$$KO_m = r \frac{\theta_i - \theta_m}{T_m - T_i} = 0$$

$$KO_{\max} = r \frac{\theta_i - \theta_{\max}}{T_{\max} - T_i} = 0$$

As equações podem ser obtidas a partir das Eqs. (3.84) e (3.85), determinando novos coeficientes com processos limites para retirar as indeterminações geradas pelas condições de KO's nulos.

a) Distribuição de Temperatura:

É obtida a partir da Eq. (3.110) com os coeficientes modificados.

$$T^* = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{\cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \cdot \left[ \Gamma_{j1} \cos(PdFO) + \Gamma_{j2} \text{sen}(PdFO) + \Gamma_{j3} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.96)$$

onde os  $\Gamma_{ik}$  são redeterminados a partir das Eqs. (3.76) - (3.78), fazendo os KO's tenderem a zero.

$$\Gamma_{i1} = W_a \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} G_i(\mu_n)$$

$$\Gamma_{i2} = W_a \frac{Pd^2}{Pd^2 + \mu_n^4} G_i(\mu_n)$$

$$\Gamma_{i3} = \left[ W_m - W_a \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} \right] G_i(\mu_n)$$

$$i = 1, 2$$

b) Distribuição do Conteúdo de Umidade:

A distribuição do conteúdo não pode ser dada pela Eq.(3.85) diretamente pois  $KO_{\text{máx}}$  aparece nos denominadores de todos os seus coeficientes. Ela deve ser reescrita de forma a retirar as indeterminações geradas por  $KO_{\text{máx}} = 0$  nas equações dos coeficientes (3.79) - (3.81).

Tomando a Eq. (3.85), multiplicando ambos os membros por  $(\theta_{\text{máx}} - \theta_i)$ , multiplicando e dividindo o segundo membro por  $r(T_{\text{máx}} - T_i)$  ( $r = L\rho_\ell/Cp_0$ ), tem-se:

$$\theta - \theta_i = \frac{\theta_{\text{máx}} - \theta_i}{T_{\text{máx}} - T_i} r \frac{(T_{\text{máx}} - T_i)}{r} \left\{ \frac{(\theta_{\text{máx}} - \theta_i) + \theta_a \text{sen}(Pd FO)}{\theta_{\text{máx}} + \theta_i} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^2 (-1)^j \frac{(1-v_i^2) \cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_{j1}^* \cos(\mu_n Pd) + \Gamma_{j2}^* \text{sen}(Pd FO) + \Gamma_{j3}^* e^{-\mu_n^2 FO} \right] \right\} \quad (3.97)$$

Observa-se que  $r \frac{\theta_{\text{máx}} - \theta_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = -KO_{\text{máx}}$  e que

$\frac{T_{\text{máx}} - T_i}{r} = \frac{Cp_0}{L\rho_\ell} (T_{\text{máx}} - T_i)$  é um grupo adimensional. Passando, então,  $KO_{\text{máx}}$  a multiplicar todos os coeficientes  $\Gamma^*$ 's, tira-se as indeterminações e gera-se novos coeficientes  $\Gamma^{*}$ 's.

$$\theta^* = \frac{\theta - \theta_i}{\frac{C\rho_0}{L\rho_\ell}(T_{\max} - T_0)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 (-1)^j \frac{j(1 - v_i^2) \cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \cdot \left[ \Gamma_{j1}^* \cos(Pd.FO) + \Gamma_{j2}^* \sin(Pd.FO) + \Gamma_{j3}^* e^{-\mu_n FO} \right] \quad (3.98)$$

onde os novos coeficientes  $\Gamma^*$ 's são dados por:

$$\Gamma_{i1}^* = W_a \frac{Pd \cdot \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} G_i(\mu_n)$$

$$\Gamma_{i2}^* = W_a \frac{Pd^2}{Pd^2 + \mu_n^4} G_i(\mu_n)$$

$$\Gamma_i^* = \left[ W_m - W_a \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} \right] G_i(\mu_n)$$

com  $i = 1, 2.$

c) Densidade de Fluxo de Calor:

$$q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

obtendo  $\frac{\partial T}{\partial x}$  da Eq. (3.94), tem-se:

$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x, t)}{\lambda \frac{(T_{\max} - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 (-1)^j \frac{j v_i \sin(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\tau(\mu_n)} \cdot j \neq i$$

$$\cdot \left[ \Gamma_{j1} \cos(\text{Pd.FO}) + \Gamma_{j2} \text{sen}(\text{Pd.FO}) + \Gamma_{j3} \cdot e^{-\mu_n^2 \text{FO}} \right] \quad (3.99)$$

d) Densidade de Fluxo de Massa:

A densidade de fluxo de massa é dada por:

$$j(x,t) = -\rho_\ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \rho_\ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.100)$$

As derivadas são obtidas das Eqs. (3.96) e (3.98), e então,

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, \text{FO} \right) = \frac{j(x,t)}{D_\theta \frac{C_{p0}}{L}, \frac{T_{\text{máx}} - T_i}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 (-1)^j \frac{\text{sen}(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\tau(\mu_n)} \cdot \left[ \Delta_{ij1} \cos(\text{Pd.FO}) + \Delta_{ij2} \text{sen}(\text{Pd.FO}) + \Delta_{ijk} e^{-\mu_n^2 \text{FO}} \right] \quad (3.101)$$

onde

$$\Delta_{ijk} = v_i \left[ \text{Fe} \Gamma_{jk} + (1 - v_1^2) \Gamma_{jk}^* \right] \quad \text{com } i=1,2; j=1,2 \text{ e } k=1,2,3,$$

3.1.4 - Casos nos quais as Difusibilidades  $\alpha$  e  $D_T$  são muito maiores que a Difusibilidade  $D_\theta$

Este estudo foi motivado para resolver casos para os quais as soluções até aqui apresentadas podem apresentar indeterminações quando  $Lu = \frac{D_\theta}{\alpha}$  tende a zero e quando  $Fe = r \frac{D_T}{D_\theta}$  tende a infinito.

Observando as Eqs. (3.1) e (3.2) e notando que os termos que contêm  $D_T$  e  $\alpha$  predominam sobre os demais, elas reduzem-se a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.103)$$

As condições de contorno e iniciais são dadas pelas Eqs. (3.3) a (3.8).

A técnica de solução utilizada para resolver as Eqs. (3.102)- (3.103) é a mesma utilizada no início do capítulo.

a) Distribuição de Temperatura:

Aplicando a transformada de Laplace à Eq.(3.102) em relação a t tem-se:

$$T_L'' - \frac{s}{\alpha + r D_T} (T_L - \frac{T_i}{s}) = 0 \quad (3.104)$$

A equação (3.104) é uma equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem não homogênea, cuja solução é:

$$T_L(x,s) - \frac{T_i}{s} = C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} vx} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} vx} \quad (3.105)$$

onde  $v^2 = 1/(1+K)$  e  $K = r \frac{D_T}{\alpha}$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas utilizando as Eqs. (3.3) e (3.5), e então:

$$T_L(x,s) - \frac{T_i}{s} = A(x,s) \cdot s f_L(s) \quad (3.106)$$

onde

$$A(x,s) = \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} vx}{s \left[ \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} vl + \frac{1}{Bi_q} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v l \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} vl \right]} = \frac{\phi(x,s)}{\psi(x,s)} \quad (3.107)$$



utilizando a seguinte propriedade da transformada de Laplace:

$s f_L(s) = L[f'(t)] + f(0)$ , tem-se:

$$T_L(x,s) - \frac{T_i}{s} = (f(0) - T_i)A_L(x,s) + L[f'(t)]A_L(x,s).$$

Utilizando o teorema da convolução, tem-se:

$$T(x,t) - T_i = [f(0) - T_i]A(x,t) + \int_0^t A(x,\lambda) \frac{d}{d\lambda} f(t-\lambda) d\lambda \quad (3.108)$$

A função  $A(x,t)$  é determinada da Eq. (3.107) utilizando o teorema da expansão, conforme Luikov, [1].

$$A(x,t) = \frac{\phi(x,0)}{\psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(x,s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n t} \quad (3.109)$$

onde

$$\phi(x,0) = 1 \quad (3.110)$$

$$\phi(x,s_n) = \cosh \sqrt{\frac{s_n}{\alpha}} v x$$

$$\psi'(0) = 1 \quad (3.111)$$

$$\psi'(s_n) = \frac{(\sqrt{\frac{s_n}{\alpha}} v l)^2}{2Biq} \cosh \sqrt{\frac{s_n}{\alpha}} v l + (1 + \frac{1}{Biq}) \frac{\sqrt{\frac{s_n}{\alpha}} v l}{2} \sinh \sqrt{\frac{s_n}{\alpha}} v l$$

utilizando as relações  $\cosh z = \cos iz$ ,  $\sinh z = -i \operatorname{sen} iz$  e

$\mu_n = i \sqrt{\frac{s_n}{\alpha}} \ell$ , tem-se:

$$\phi(x, s_n) = \phi(x, \mu_n) = \cos \mu_n v \frac{x}{\ell} \quad (3.112)$$

$$\psi'(\mu_n) = -\frac{(\mu_n v)^2}{2 \operatorname{Bi}q} \cos \mu_n v - \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Bi}q}\right) \frac{\mu_n v}{2} \operatorname{sen} \mu_n v \quad (3.113)$$

onde os  $\mu_n$ 's são as raízes da equação

$$\cos \mu_n v - \frac{\mu_n v}{\operatorname{Bi}q} \operatorname{sen} \mu_n v = 0 \quad (3.114)$$

Substituindo as Eqs. (3.110)-(3.114) na Eq. (3.109)

tem-se:

$$A(x, t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_n v}{(\mu_n v) \tau(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 F_0} \quad (3.115)$$

onde

$$\tau(\mu_n) = \frac{(\mu_n v)}{2 \operatorname{Bi}q} \cos \mu_n v + \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Bi}q}\right) \frac{1}{2} \operatorname{sen} \mu_n v \quad (3.116)$$

Uma vez determinada a função  $A(x, t)$ , Eq. (3.115), a solução dada pela Eq. (3.108) fica completamente determinada.

Para resolver a integral que aparece na Eq. (3.108),

e obter uma distribuição específica, necessita-se estabelecer a função  $f(t)$  que rege a variação da temperatura ambiente.

Seja

$$f(t) = T_{\infty}(t) = T_m + T_a \text{sen}(2\pi ft) \quad (3.117)$$

Substituindo a Eq. (3.117) na Eq. (3.108), determinando a integral e rearranjando os termos tem-se:

$$T^* = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(Pd.FO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_n \nu \frac{x}{\ell}}{(\mu_n \nu) \tau(\mu_n)} \cdot \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.118)$$

$$\text{onde, } \Gamma_1 = W_a \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4}, \Gamma_2 = W_a \frac{Pd^2}{Pd^2 + \mu_n^4}, \Gamma_3 = W_m - W_a \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4}$$

e  $W_a$ ,  $W_m$  e  $Pd$  são definidos na solução geral do início do capítulo.

#### b) Distribuição do Conteúdo de Umidade:

Para que a solução do problema fique completa a distribuição do conteúdo de umidade deve ser determinada.

Derivando a Eq. (3.118) duas vezes em relação a  $x$ , substituindo o resultado na Eq. (3.103), e integrando em rela

ção ao tempo, tem-se:

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{D_T \frac{(T_{\max} - T_i)}{\alpha}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_n v \frac{x}{\ell}}{(\mu_n v) \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_1^* \cos(Pd \cdot FO) + \Gamma_2^* \sin(Pd \cdot FO) + \Gamma_3^* e^{-\mu_n^2 FO} + \Gamma_4^* \right] \quad (3.119)$$

$$\text{onde: } \Gamma_1^* = -W_a \frac{v^2 Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4}, \quad \Gamma_2^* = W_a \frac{v^2 \mu_n^4}{Pd^2 + \mu_n^4}, \quad \Gamma_3^* = v^2 \left[ W_a \frac{Pd \mu_n^2}{Pd^2 + \mu_n^4} - W_m \right],$$

$$\Gamma_4^* = v^2 W_m, \quad v^2 = \frac{1}{1+K}, \quad K = r \frac{D_T}{\alpha} \quad \text{e } W_a, W_m \text{ e } Pd \text{ obedecem às}$$

definições do início do capítulo.

### c) Densidade de Fluxo de Calor:

A densidade de fluxo de calor é dada por:

$$q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Determinando  $\frac{\partial T}{\partial x}$  da Eq. (3.118), tem-se:

$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\lambda \frac{(T_{\max} - T_i)}{\alpha}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \mu_n v \frac{x}{\ell}}{\tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_1 \cos(Pd FO) + \Gamma_2 \sin(Pd FO) + \Gamma_3 e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.120)$$

Os coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são como definidos neste item.

d) Densidade de Fluxo de Massa:

A densidade de fluxo de massa é dada por:

$$j(x, t) = -\rho_\ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \rho_\ell D_T \frac{\partial T}{\partial x}$$

Notando que  $D_T \gg D_\theta$  vê-se que o segundo termo do lado direito da equação predomina sobre o primeiro e então o fluxo pode ser obtido da equação seguinte:

$$j(x, t) = -\rho_\ell D_T \frac{\partial T}{\partial x}$$

Determinando  $\frac{\partial T}{\partial x}$  a partir da Eq. (3.118) e substituindo na Eq. acima, tem-se:

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{j(x, t)}{\rho_\ell D_T \frac{(T_{\max} - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \mu_n v \frac{x}{\ell}}{\tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_1 \cos(Pd FO) + \Gamma_2 \text{sen}(Pd FO) + \Gamma_3 e^{-\mu_n^2 FO} \right]$$

(3.121)

3.1.5 - Casos nos quais a Difusibilidade Térmica  $\alpha$  predomina sobre as Difusibilidades Mássicas  $D_\theta$  e  $D_T$ :

Este caso é caracterizado por haver difusão de calor pura e portanto as equações devem se reduzir a equação da difusão simples.

A solução deste caso pode ser determinada a partir das soluções do item anterior fazendo os limites necessários.

a) Distribuição de Temperatura:

Do item anterior,  $v^2 = 1/(1+K)$  e  $K = r \frac{D_T}{\alpha}$ .

Como  $\alpha \gg D_T$ , tem-se que  $K \rightarrow 0$  e  $v^2 \rightarrow 1$ . A distribuição de temperatura é, então, determinada a partir da Eq. (3.118) fazendo  $v = 1$ ,

$$T^* = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(Pd.FO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_n \frac{x}{\ell}}{\mu_n \tau(\mu_n)} \cdot \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.122)$$

Os coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são os mesmos especificados para a Eq. (3.118), com  $v^2 = 1$ .

b) Distribuição do Conteúdo de Umidade:

Multiplicando ambos os membros da Eq. (3.119) por  $\frac{D_T (T_{\text{máx}} - T_i)}{\alpha}$  e observando que  $\frac{D_T}{\alpha} \rightarrow 0$ , tem-se que:  $\theta(x,t) = \theta_i$

Este resultado era esperado pois as hipóteses sobre as difusibilidades reduzem o problema a condução de calor pura, logo o conteúdo deve permanecer constante como mostra a Eq. acima.

c) Densidade de Fluxo de Calor:

Pode ser obtida da Eq. (3.120) fazendo  $v^2=1$ .

$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\lambda \frac{(T_{\text{máx}} - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \mu_n \frac{x}{\ell}}{\tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_1 \cos(\text{Pd} \cdot FO) + \Gamma_2 \text{sen}(\text{Pd} \cdot FO) + \Gamma_3 e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.123)$$

onde os coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são os mesmos da Eq. (3.118).

d) Densidade de Fluxo de Massa:

A difusibilidade de calor predomina sobre as duas difusibilidades mássicas  $D_\theta$  e  $D_T$  e como mostra o item b o conteúdo de umidade permanece constante. Assim, o fluxo de massa de

ve ser nulo para qualquer tempo e qualquer posição:  $j(x,t) = 0$ .

3.2 - Campos não Permanentes de Temperatura e de Con  
teúdo de Umidade e Densidades de Fluxos de Ca  
lor e Massa. Placa Infinita com Condição de  
Simetria e Condições de Contorno de Dirichlet  
ou de Primeira Espécie Variáveis com o Tem  
po

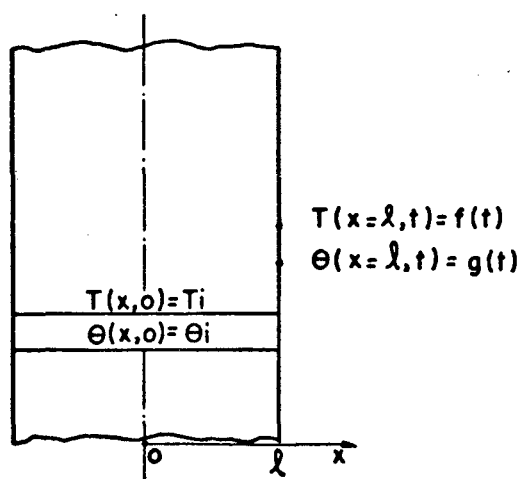


Figura 3.5

As equações que regem o fenômeno de transferência de calor e massa são as mesmas estabelecidas no item 3.1, Eqs. (3.1) e (3.2). As condições de contorno são estabelecidas a seguir:

$$T(x=l,t) = f(t) \quad (3.124)$$

$$\theta(x=l,t) = g(t) \quad (3.125)$$



$$\frac{\partial T(x=0, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.126)$$

$$\frac{\partial \theta(x=0, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.127)$$

É interessante notar que as condições de contorno de primeira espécie dadas pelas Eqs. (3.124) e (3.125) podem ser obtidas a partir das condições de contorno de terceira espécie dadas pelas Eqs. (3.3) e (3.4), fazendo  $B_{i1}$  e  $B_{i2}$  tenderem a infinito.

As condições iniciais são as mesmas dadas pelas Eqs. (3.9) e (3.10):  $T(x, t=0) = T_i$  e  $\theta(x, t=0) = \theta_i$ .

As soluções para o sistema de Eqs. (3.1) e (3.2) submetido às condições dadas pelas Eqs. (3.124) - (3.127) podem ser obtidas a partir das soluções correspondentes ao problema com condições de contorno de terceira espécie, fazendo os limites das expressões, com  $B_{i1}$  e  $B_{i2}$  tendendo a infinito. Observa-se que as funções  $f(t)$  e  $g(t)$  devem ser especificadas como nas Eqs. (3.68) e (3.69).

Para facilidade de raciocínio transcreve-se as soluções gerais e todos os seus coeficientes, Eqs. (3.74) e (3.75).

$$T^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(Pd.FO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2,1} (-1)^j \frac{\cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \cdot \left[ \Gamma_{j1} \cos(Pd.FO) + \Gamma_{j2} \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_{j3} e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.128)$$

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{(\theta_m - \theta_i) + \theta_a \operatorname{sen}(Pd.FO)}{\theta_{\max} - \theta_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2,1} (-1)^j \frac{(1 - v_i)^2 \cos(\mu_n v_i \frac{x}{\ell})}{\mu_n \tau(\mu_n)} \cdot \left[ \Gamma_{j1}^* \cos(Pd.FO) + \Gamma_{j2}^* \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Gamma_{j3}^* e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.129)$$

onde,

$$\tau(\mu_n) = v_1 G_2(\mu_n) H_1(\mu_n) + v_2 F_1(\mu_n) I_2(\mu_n) - v_2 G_1(\mu_n) H_2(\mu_n) - v_1 F_2(\mu_n) I_1(\mu_n) \quad (3.130)$$

$$H_i(\mu_n) = \left(1 + \frac{1}{Biq}\right) \operatorname{sen} \mu_n v_i + \frac{v_i \mu_n}{Biq} \cos \mu_n v_i \quad (3.131)$$

$$I_i(\mu_n) = (1 - v_i^2) \operatorname{sen} \mu_n v_i + \frac{Fe + (1 - v_i^2)}{Bim} (\operatorname{sen}(\mu_n v_i) + \mu_n v_i \cos \mu_n v_i) \quad (3.132)$$

$$F_i(\mu_n) = \cos(\mu_n v_i) + \frac{1}{Biq} \mu_i v_i \operatorname{sen} \mu_i v_i \quad (3.133)$$

$$G_i(\mu_n) = (1 - v_i^2) \cos \mu_n v_i + \left[ Fe + (1 - v_i^2) \right] \frac{\mu_n v_i}{Bim} \operatorname{sen} \mu_n v_i \quad (3.134)$$

com  $i = 1, 2$

Os  $\mu_n$  são as raízes da equação

$$F_2(\mu_n) G_1(\mu_n) - F_1(\mu_n) G_2(\mu_n) = 0 \quad (3.135)$$

Fazendo os limites com  $Biq$  e  $Bim$  tendendo a infiniti

to, tem-se:

$$F_i(\mu_n) = \cos \mu_n v_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.136)$$

$$G_i(\mu_n) = (1 - v_i^2) \cos \mu_n v_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.137)$$

Substituindo as Eqs. (3.136) e (3.137) na Eq. (3.135),  
tem-se:

$$(v_2^2 - v_1^2) \cos \mu_n v_1 \cos \mu_n v_2 = 0 \quad (3.138)$$

Assim,  $\cos(\mu_n v_1) \cos(\mu_n v_2) = 0$ , ou ainda,

$$\cos(\mu_{n1} v_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(\mu_{n2} v_2) = 0$$

Logo, tem-se a união de dois conjuntos de raízes:

$$\mu_{n1} v_1 = \frac{(2n-1)\pi}{2} \rightarrow \mu_{n1} = \frac{(2n-1)\pi}{2v_1} \quad (3.139)$$

$$\mu_{n2} v_2 = \frac{(2n-1)\pi}{2} \rightarrow \mu_{n2} = \frac{(2n-1)\pi}{2v_2} \quad (3.140)$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$

Das Eqs. (3.131) e (3.132), quando  $B_{iq}$  e  $B_{im}$  vão a infinito,

$$H_i(\mu_n) = \text{sen} \mu_n v_i \quad (3.141)$$

$$I_i(\mu_n) = (1 - v_i^2) \text{sen} \mu_n v_i \quad (3.142)$$

Substituindo as Eqs. (3.136), (3.137), (3.141) e (3.142), na Eq. (3.71), tem-se:

$$\tau(\mu_n) = (v_1^2 - v_2^2) \left[ v_1 \cos \mu_n v_2 \text{sen} \mu_n v_1 + v_2 \cos \mu_n v_1 \text{sen} \mu_n v_2 \right] \quad (3.143)$$

Considerando a existência de dois conjuntos de raízes, (3.139) e (3.140) e aplicando o princípio da superposição na Eq. (3.128), tem-se:

$$\begin{aligned} T^* = & \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(Pd.FO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos \mu_{n1} v_1 \frac{x}{\ell}}{\mu_{n1} \tau(\mu_{n1})} \left[ \Gamma_{21}(\mu_{n1}) \cos(Pd.FO) \right. \right. \\ & \left. \left. + \Gamma_{22}(\mu_{n1}) \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_{23}(\mu_{n1}) \cdot e^{-\mu_{n1}^2 FO} \right] - \frac{\cos \mu_{n1} v_2 \frac{x}{\ell}}{\mu_{n1} \tau(\mu_{n1})} \left[ \Gamma_{11}(\mu_{n1}) \cos(Pd.FO) \right. \right. \\ & \left. \left. + \Gamma_{12}(\mu_{n1}) \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_{13}(\mu_{n1}) \cdot e^{-\mu_{n1}^2 FO} \right] + \frac{\cos \mu_{n2} v_1 \frac{x}{\ell}}{\mu_{n2} \tau(\mu_{n2})} \left[ \Gamma_{21}(\mu_{n2}) \cos(Pd.FO) \right. \right. \\ & \left. \left. + \Gamma_{22}(\mu_{n2}) \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_{23}(\mu_{n2}) \cdot e^{-\mu_{n2}^2 FO} \right] - \frac{\cos \mu_{n2} v_2 \frac{x}{\ell}}{\mu_{n2} \tau(\mu_{n2})} \left[ \Gamma_{11}(\mu_{n2}) \cos(Pd.FO) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \Gamma_{12}(\mu_{n2}) \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Gamma_{13}(\mu_{n2}) e^{-\mu_{n2}^2 FO} \right\} \quad (3.144)$$

Substituindo  $\mu_{n1}$  e  $\mu_{n2}$  na Eq. (3.143), redeterminando os coeficientes  $\Gamma_{ij}$  a partir das Eqs. (3.76)-(3.78), tem-se:

$$\begin{aligned} T^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = & \frac{(T_m - T_i) + T_a \operatorname{sen}(Pd.FO)}{(T_{\max} - T_i)} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}}{(2n-1)} \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) \right. \\ & \left. + \Gamma_2 \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} - \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \end{aligned} \quad (3.145)$$

onde

$$\Gamma_1 = \frac{W_a}{b_3} \left\{ \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2} [b_2 + KO_a] - \frac{Pd a_2}{Pd^2 + a_2^2} [b_1 + KO_a] \right\};$$

$$\Gamma_2 = \frac{W_a}{b_3} \left\{ \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_1^2} [b_2 + KO_a] - \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_2^2} [b_2 + KO_a] \right\};$$

$$\Gamma_3 = \frac{W_m}{b_3} (b_2 + KO_m) - \frac{W_a}{b_3} \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2} (b_2 + KO_a);$$

$$\Gamma_4 = \frac{W_m}{b_3} (b_1 + KO_m) - \frac{W_a}{b_3} \frac{Pd a_2}{Pd^2 + a_2^2} (b_1 + KO_a);$$

$$a_1 = \left( \frac{2n-1}{2v_1} \pi \right)^2; \quad a_2 = \left( \frac{2n-1}{2v_2} \pi \right)^2; \quad b_1 = (1 - v_1^2); \quad b_3 = v_2^2 - v_1^2 \quad e$$

os demais parâmetros  $W_m$ ,  $KO_m$ ,  $KO_a$  e  $Pd$  permanecem com o definidos nos itens anteriores.

Utilizando as equações simplificadas com os procesos limites, obtêm-se, também, a distribuição de conteúdo de umidade com o mesmo raciocínio seguido para determinar a distribuição de temperatura, ou seja:

$$\theta^* = \frac{(\theta_m - \theta_i) + \theta_a \text{sen}(Pd.FO)}{\theta_{\text{máx}} - \theta_i} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}}{2n-1} \left[ \Gamma_1^* \cos(Pd.FO) + \Gamma_2^* \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3^* e^{-a_1 FO} - \Gamma_4^* e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.146)$$

onde

$$\Gamma_1^* = \frac{b_1 W_a}{b_3 KO_{\text{máx}}} \frac{Pda_1}{Pd^2 + a_1^2} (1 + b_2) - \frac{b_2 W_a}{b_3 KO_{\text{máx}}} \frac{Pda_2}{Pd^2 + a_2^2} (1 + b_1)$$

$$\Gamma_2^* = \frac{b_1 W_a}{b_3 KO_{\text{máx}}} \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_1^2} (1 + b_2) - \frac{b_2 W_a}{b_3 KO_{\text{máx}}} \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_2^2} (1 + b_1)$$

$$\Gamma_3^* = \frac{b_1 W_m}{b_3 KO_{\text{máx}}} (KO_m + b_2) - \frac{b_1 W_a}{b_3 KO_{\text{máx}}} \frac{Pda_1}{Pd^2 + a_1^2} (KO_a + b_2)$$

$$\Gamma_4^* = \frac{b_2 W_m}{b_3 KO_{\text{máx}}} (KO_m + b_1) - \frac{b_2 W_a}{b_3 KO_{\text{máx}}} \frac{Pda_2}{Pd^2 + a_2^2} (KO_a + b_2)$$

As Eqs. (3.145) e (3.146) são as soluções do problema proposto no item 3.2, ou seja, são representativas dos processos de transmissão de calor e massa simultânea, numa placa infinita de meio poroso não saturado, com condições de simetria, condições de contorno de primeira espécie e condições ambientes regidas por funções senoidais do tempo.

As soluções,  $T(x,t)$  e  $\theta(x,t)$ , juntamente com densidades de fluxo são apresentadas nos itens seguintes de formas distintas, dependendo do caso a ser estudado.

### 3.2.1 - Processo de Umidificação e Aquecimento

Os parâmetros adimensionais que controlam a natureza do processo são os números de Kossovich. Para que haja um processo de umidificação e aquecimento simultaneamente é necessário que as condições iniciais sejam próprias, ou seja, que a placa esteja, inicialmente, menos aquecida e menos úmida que o meio. Isto pode ser garantido fazendo  $KO_{\min} = r \frac{\theta_i - \theta_{\min}}{T_{\min} - T_i} < 0$ .

É importante que as soluções sejam adimensionalizadas de forma que os resultados permaneçam entre 0 e 1, para facilidade de análise. As Eqs. (3.145) e (3.146), estão adimensionalizadas de forma adequada para este processo.

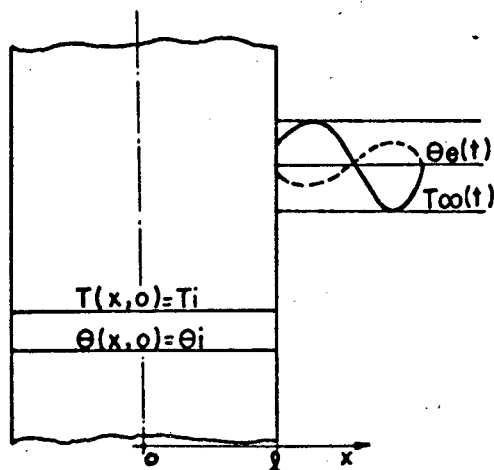


Figura 3.6

a) Distribuição de Temperatura:

É dada pela Eq. (3.145).

b) Distribuição de Conteúdo de Umidade:

É dada pela Eq. (3.146).

c) Densidade de Fluxo de Calor:

A densidade de fluxo de calor é dada por:

$$q = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x}$$

obtendo  $\frac{\partial T}{\partial x}$  da Eq. (3.145), tem-se:



$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\frac{\lambda (T_{\text{máx}} - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{sen} \left[ \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right] \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) \right. \\ \left. + \Gamma_2 \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} - \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.147)$$

d) Densidade de Fluxo de Massa:

A densidade de fluxo de massa é dada por:

$j(x,t) = -\rho \ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$ . Determinando as derivadas das Eqs. (3.145) e (3.146), tem-se:

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{j(x,t)}{\frac{\rho \ell D_\theta (\theta_{\text{máx}} - \theta_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{sen} \left[ \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right] \left[ \Delta_1 \cos(Pd.FO) + \Delta_2 \text{sen}(Pd.FO) \right. \\ \left. + \Delta_3 e^{-a_1 FO} - \Delta_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.148)$$

onde:  $\Delta_j = \Gamma_j^* + \frac{Fe}{KO_{\text{máx}}} \Gamma_j$ ,  $KO_{\text{máx}} = r \frac{\theta_i - \theta_{\text{máx}}}{T_{\text{máx}} - T_i}$  e  $j = 1, 2, 3, 4$ .

### 3.2.2 - Processo de Desumidificação e Aquecimento

Neste item, as condições iniciais devem ser estabelecidas de forma que o processo seja de desumidificação e aquecimento. Esta situação é controlada, no modelo, pelos parâmetros de

Kossovich, no caso,  $KO's > 0$ , exceto  $KO_a$  que é sempre negativo.

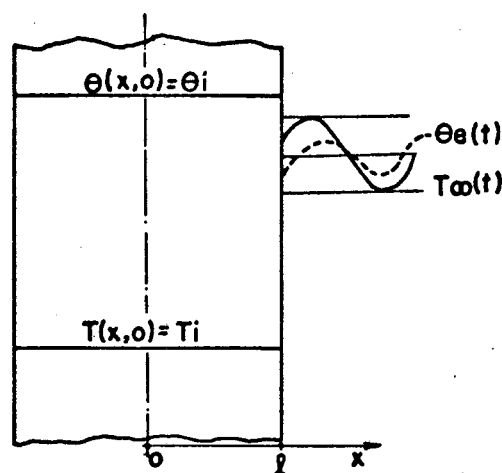


Figura 3.7

Para obter as soluções deste item, basta readimensionalizar, convenientemente, as Eqs. (3.145) e (3.146).

a) Distribuição de Temperatura:

A Eq. (3.145) representa a distribuição de temperatura para um processo de aquecimento ou seja, a temperatura inicial é inferior à temperatura mínima ambiente.

Neste item, o processo continua sendo de aquecimento e portanto a distribuição de temperatura deve ser a mesma.

b) Distribuição do Conteúdo de Umidade:

Como o processo é de desumidificação ( $\theta_i > \theta_{\max}$ ) e como é de interesse obter uma adimensionalização que ofereça facilidade nas análises, é interessante que se readimensionalise a Eq.

(3.146) em relação ao maior valor de referência. No caso, observando a Fig. 3.7, vê-se que o maior valor de referência é  $\theta_i - \theta_{\min}$ .

Dividindo ambos os membros da Eq. (3.146), por  $(\theta_i - \theta_{\min})$ , multiplicando ambos os membros da mesma por  $(\theta_{\max} - \theta_i)$  e fazendo algumas manipulações tem-se:

$$\theta^* = \frac{\theta - \theta_{\min}}{\theta_i - \theta_{\min}} = 1 - \frac{(\theta_m - \theta_i) + \theta_a \operatorname{sen}(Pd.FO)}{\theta_{\min} - \theta_i} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \cdot$$

$$\cdot \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} - \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.149)$$

onde:

$$\Gamma_1 = \frac{W_a^*}{KO_{\min}} \left\{ \frac{b_1}{b_3} \frac{Pda_1}{Pd^2 + a_1^2} \left[ b_2 - KO_a \right] - \frac{b_2}{b_3} \frac{Pda_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ b_1 - KO_a \right] \right\};$$

$$\Gamma_2 = \frac{W_a^*}{KO_{\min}} \left\{ \frac{b_1}{b_3} \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_1^2} \left[ b_2 - KO_a \right] - \frac{b_2}{b_3} \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ b_1 - KO_a \right] \right\};$$

$$\Gamma_3 = \frac{W_m^*}{KO_{\min}} \frac{b_1}{b_3} (b_2 + KO_m) + \frac{W_a^*}{KO_{\min}} \frac{b_1}{b_3} \frac{Pda_1}{Pd^2 + a_1^2} (KO_a + b_2);$$

$$\Gamma_4 = - \frac{W_m^*}{KO_{\min}} \frac{b_2}{b_3} (b_1 + KO_m) + \frac{W_a^*}{KO_{\min}} \frac{b_2}{b_3} \frac{Pda_2}{Pd^2 + a_2^2} (KO_a + b_1);$$

$$KO_{\min} = r \frac{\theta_i - \theta_{\min}}{T_{\min} - T_i}, \quad W_a^* = \frac{T_a}{T_{\min} - T_i} \quad e \quad W_m^* = \frac{T_m - T_i}{T_{\min} - T_i}.$$

É importante observar a estrutura da Eq. (3.149).

Nota-se que  $\theta^* = 1$  - variações temporais - variações locais.

Se  $FO = 0$  todas as variações se anulam e  $\theta^* = 1$ , ou seja  $\theta(x,t) = \theta_i$  (condição inicial). Se  $\frac{x}{\ell} = 1$  todo o somatório se anula e  $\theta(x,t) = \theta_m + \theta_a \text{sen}(Pd.FO)$  que é a condição de contorno.

Para  $FO \neq 0$  o fator 1 será corroído pelos demais fatores, caracterizando um processo de desumidificação.

c) Densidade de Fluxo de Calor:

É dada pela Eq. (3.147).

d) Densidade de Fluxo de Massa:

É dada por:  $j(x,t) = -\rho \ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$ ,

ou

$$j^* = \frac{j(x,t)}{\rho \ell D_\theta (\theta_i - \theta_{\min})} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}}{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}} \left[ \Delta_1 \cos(Pd.FO) + \Delta_2 \text{sen}(Pd.FO) + \Delta_3 e^{-a_1 FO} - \Delta_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.150)$$

onde

$$\Delta_i = W_{\max} \frac{Fe}{KO_{\min}} \Gamma_i - \Gamma_i^*, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

3.2.3 - Placa Inicialmente em Equilíbrio com o Meio Ambiente em Termos de Conteúdo de Umidade e Submetida a uma Diferença de Temperatura

A Fig. 3.8 ilustra o caso simulado em termos das condições iniciais e de contorno.

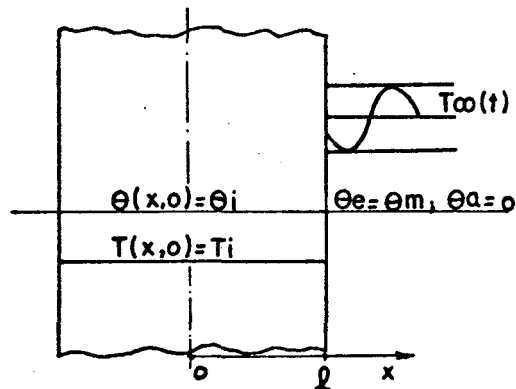


Figura 3.8

O modelo é informado sobre as condições do processo por meio dos parâmetros de Kossovich:  $KO_a = -r \frac{\theta_a}{T_a} = 0$  ( $\theta_a = 0$ ),  
 $KO_m = r \frac{\theta_i - \theta_m}{T_m - T_i} = 0$  ( $\theta_m = \theta_i$ ) e  $KO_{\max} = r \frac{\theta_i - \theta_{\max}}{T_{\max} - T_i} = 0$  ( $\theta_{\max} = \theta_m = \theta_i$ ).

As distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade são determinadas a partir das Eqs. (3.145) e (3.146) fazendo os limites dos coeficientes  $\Gamma_i$  e  $\Gamma_i^*$  quando os parâmetros  $KO$ 's tendem a zero.

a) Distribuição de Temperatura:

Da Eq. (3.145),

$$T^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(Pd.FO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos \left[ \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right]}{2n-1} \cdot \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} - \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.151)$$

Os coeficientes  $\Gamma_i$  são determinados a partir dos coeficientes da Eq. (3.145)

$$\Gamma_1 = \frac{W_a}{b_3} \left[ b_2 \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2} - b_1 \frac{Pd a_2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_2 = \frac{W_a}{b_3} \left[ b_2 \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_1^2} - b_1 \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_3 = W_m \frac{b_2}{b_3} - W_a \frac{b_2}{b_3} \frac{a_1 Pd}{Pd^2 + a_1^2}$$

$$\Gamma_4 = W_m \frac{b_1}{b_3} - W_a \frac{b_1}{b_3} \frac{a_2 Pd}{Pd^2 + a_2^2}$$

b) Distribuição do Conteúdo de Umidade:

Trabalhando com a Eq. (3.146) e relembrando que

$$KO_{\text{máx}} = r \frac{\theta_i - \theta_{\text{máx}}}{T_{\text{máx}} - T_i}, \text{ tem-se:}$$

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{r(T_{\text{máx}} - T_i)} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \left[ \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right]}{2n-1} \left[ \Gamma_1^* \cos(Pd.FO) \right. \\ \left. + \Gamma_2^* \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3^* e^{-a_1 FO} - \Gamma_4^* e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.152)$$

onde:

$$\Gamma_1 = W_a \frac{b_1 b_2}{b_3} \left[ \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2} - \frac{Pd a_2^2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_2 = W_a \frac{b_1 b_2}{b_3} \left[ \frac{Pd^2}{Pd + a_1^2} - \frac{Pd^2}{Pd + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_3 = \frac{b_1 b_2}{b_3} \left[ W_m - W_a \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2} \right]$$

$$\Gamma_4 = \frac{b_1 b_2}{b_3} \left[ W_m - W_a \frac{Pd a_2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

c) Densidade de Fluxo de Calor:

A densidade de fluxo de calor é dada por:

$$q(x,t) = -\lambda e \frac{\partial T}{\partial x}$$

ou

$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\lambda e (T_{\max} - T_i)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} - \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.153)$$

d) Densidade de Fluxo de Massa:

$$\text{Sabe-se que } j(x,t) = -\rho \ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Determinando as derivadas a partir das Eqs. (3.151)

e (3.152), tem-se:

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{j(x,t)}{\frac{D_\theta C \rho_0}{L} \frac{T_{\max} - T_i}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \left[ \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right] \left[ \Delta_1 \cos(Pd.FO) + \Delta_2 \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Delta_3 e^{-a_1 FO} + \Delta_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.154)$$

onde:  $\Delta_i = Fe \Gamma_i + \Gamma_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .



### 3.2.4 - Casos nos quais as Difusibilidades $\alpha$ e $D_T$ são muito maiores que a Difusibilidade $D_\theta$

Sendo os parâmetros  $Lu = \frac{D_\theta}{\alpha}$  e  $Fe = r \frac{D_T}{D_\theta}$ , este item é caracterizado por resolver o problema de indeterminações:  $Lu \rightarrow 0$  e  $Fe \rightarrow \infty$ . Este problema já foi resolvido para o caso de condições de contorno de 3ª espécie. Pode-se reduzir a solução daquele caso à solução deste caso fazendo o parâmetro  $Bi_q$  tender a infinito.

As Eqs. (3.118) e (3.119) são transcritas para facilidade de análise:

$$T^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(Pd.FO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n v \frac{x}{\ell})}{(\mu_n v) \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-\mu_n^2 FO} \right] \quad (3.155)$$

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\frac{D_T (T_{\text{máx}} - T_i)}{\alpha}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_n v \frac{x}{\ell}}{(\mu_n v) \tau(\mu_n)} \left[ \Gamma_1^* \cos(Pd.FO) + \Gamma_2^* \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3^* e^{-\mu_n^2 FO} + \Gamma_4^* \right] \quad (3.156)$$

Onde os coeficientes serão determinados posteriormente e os  $\mu_n$ 's são as raízes da Eq. (3.114), ou seja,

$$\cos \mu_n v - \frac{\mu_n v}{Bi_q} \text{sen} \mu_n v = 0 \quad (3.157)$$

Fazendo  $Bi_q$  tender a infinito, reduz-se a Eq. (3.157), equação característica do problema com condições de contorno no 3<sup>a</sup> espécie, a uma equação simplificada, característica do mesmo problema com condições de contorno de 1<sup>a</sup> espécie,  $\cos \mu_n v = 0$  cujas raízes são:  $\mu_n = \frac{2n-1}{2v} \pi$ .

A função  $\tau(\mu_n)$  que aparece nas Eqs. (3.155) e (3.156) é dada pela Eq. (3.116). Fazendo o limite com  $Bi_q \rightarrow \infty$ , tem-se:  $\tau(\mu_n) = \frac{1}{2} \text{sen} \mu_n v$ .

Substituindo estes resultados nas Eqs. (3.155) e (3.156), tem-se:

a) Distribuição de Temperatura:

$$T^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(Pd.FO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \left( \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right)}{(2n-1)} \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} \right] \quad (3.158)$$

Onde  $a_1 = \left( \frac{2n-1}{2v} \pi \right)^2$  e os coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i=1,2,3$ , são determinados a partir dos  $\Gamma$ 's relativos a Eq. (3.118), substituindo os  $\mu_n$ 's que lá aparecem pelas  $\mu_n$ 's aqui determinados:

$$\Gamma_1 = W_a \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2}$$

$$\Gamma_2 = W_a \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_1^2}$$

$$\Gamma_3 = W_m - W_a \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2}$$

b) Distribuição do Conteúdo de Umidade:

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{D_T (T_{\max} - T_i)} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}\right)}{(2n-1)} \left[ \Gamma_1^* \cos(Pd.FO) + \Gamma_2^* \sin(Pd.FO) \right. \\ \left. + \Gamma_3^* e^{-a_1 FO} - \Gamma_4^* \right] \quad (3.159)$$

Onde os coeficientes  $\Gamma_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , são obtidos dos coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , relativos à Eq. (3.119).

$$\Gamma_1^* = -W_a v^2 \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2}$$

$$\Gamma_2^* = W_a v^2 \frac{a_1^2}{Pd^2 + a_1^2}$$

$$\Gamma_3^* = v^2 \left[ W_a \frac{Pd a_1}{Pd^2 + a_1^2} - W_m \right]$$

$$\Gamma_4^* = -v^2 W_m$$

O parâmetro  $v$  que aqui aparece é específico deste item e é dado por:  $v^2 = 1/(1+K)$ ,  $K = r \frac{D_T}{\alpha}$ .

c) Densidade de Fluxo de Calor:

$$q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Obtendo  $\frac{\partial T}{\partial x}$  da Eq. (3.158), tem-se:

$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\lambda \frac{(T_{\max} - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \left( \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right) \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} \right] \quad (3.160)$$

onde os  $\Gamma_i$ ,  $i=1,2,3$  são os mesmos especificados para a Eq.(3.158).

d) Densidade de Fluxo de Massa:

$$j(x,t) = -\rho \ell^D \frac{\partial \theta}{\partial x} - \rho \ell^D \frac{\partial T}{\partial x}$$

Obtendo as derivadas a partir das Eqs.(3.158)-(3.159) e notando que  $\frac{\partial \theta}{\partial x} \rightarrow 0$ , tem-se:

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{j(x,t)}{\rho \ell^D \frac{(T_{\max} - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \left( \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right) \left[ \Gamma_1^* \cos(Pd.FO) + \Gamma_2^* \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3^* e^{-a_1 FO} \right] \quad (3.161)$$

A equação do fluxo de massa  $j^*$  é idêntica à equação do fluxo de calor  $q^*$ . Os fluxos  $j(x,t)$  e  $q(x,t)$  diferem, então, apenas pelos valores de referência. Isso era esperado pois sendo  $\alpha$  e  $D_T$  predominantes sobre  $D_\theta$ , o fluxo de massa é promovido pela mesma força que o fluxo de calor: o gradiente de temperatura.

### 3.2.5 - Casos nos quais a Difusibilidade Térmica $\alpha$ Predomina Sobre as Difusibilidades Mássicas $D_T$ e $D_\theta$

Se há uma predominância da difusibilidade térmica sobre as difusibilidades mássicas, conclui-se que o problema reduz-se ao problema de difusão de calor simples.

As equações diferenciais representativas do problema de transporte de massa e calor simultâneo, reduzem-se a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.162)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (3.163)$$

As condições de contorno são:

$$T(\ell, t) = T_\infty(t) \quad (3.164)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (3.165)$$

Condição inicial:

$$T(x,0) = T_i \quad (3.166)$$

A solução da Eq. (3.162) sujeita às condições (3.164)-(3.166), pode ser obtida rapidamente utilizando o método da transformada de Laplace. No entanto sua solução será derivada da solução do caso anterior, item 3.2.4, fazendo o parâmetro  $K = r \frac{D_T}{\alpha}$  tender a zero, donde o parâmetro  $v = 1/(1+K)$  tende a 1 e a distribuição de temperatura para este item é obtida da Eq. (3.158).

a) Distribuição de Temperatura:

$$T^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}} - T_i} = \frac{(T_m - T_i) + T_a \text{sen}(Pd.FO)}{T_{\text{máx}} - T_i} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}\right)}{2n-1} \cdot \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \text{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} \right] \quad (1.167)$$

Os coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são os mesmos da Eq. (3.158), com a diferença que  $a_1 = \left(\frac{2n-1}{2} \pi\right)^2$ .

b) Distribuição de conteúdo de Umidade:

Da Eq. (3.163), tem-se:

$$\theta(x,t) = C = \theta_i \quad (3.168)$$

Este resultado era previsto pois as duas difusibilidades  $D_\theta$  e  $D_T$  são desprezíveis em presença de  $\alpha$ .

c) Densidade de Fluxo de Calor:

Pode-se obter a densidade de fluxo de calor da Eq. (3.160), fazendo  $v=1$ , ou seja,  $a_1 = \left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2$

$$q^*\left(\frac{x}{\ell}, FO\right) = \frac{q(x,t)}{\lambda \frac{(T_{\max} - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1 \cos(Pd.FO) + \Gamma_2 \operatorname{sen}(Pd.FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} \right] \quad (3.169)$$

Os coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i=1,2,3$ , são os mesmos especificados para a Eq. (3.160).

d) Densidade de Fluxo de Massa:

Como o conteúdo de umidade permanece constante com o tempo, o fluxo de massa deve ser nulo:

$$j(x,t) = 0 \quad (3.170)$$

3.3 - Campos não Permanentes de Temperatura e de  
Conteúdo de Umidade e Densidades de Fluxos de  
Calor e Massa. Placa Infinita com Condições de  
de Simetria e Condições de Contorno de Diri-  
chlet ou de Primeira Espécie Constantes

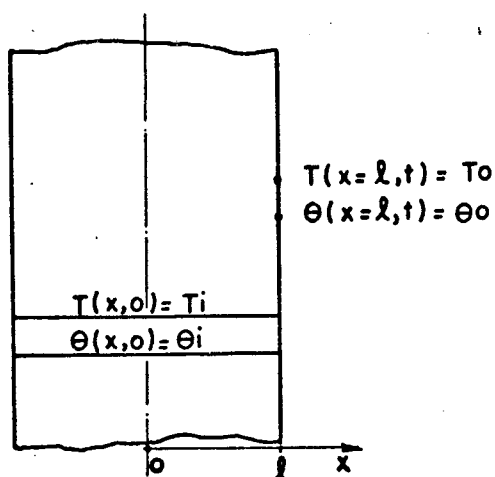


Figura 3.9

As equações que regem os processos de transferência de calor e massa são as Eqs. (3.1) e (3.2). As condições de contorno são dadas pelas Eqs. (3.124) - (3.127), onde  $f(t) = T_0$  (constante) e  $g(t) = \theta_0$  (constante).

Este problema difere daquele resolvido no item 3.2 apenas pelas condições de contorno. No item 3.2 as condições ambientais variam com o tempo de acordo com funções senoidais e neste item são mantidas constantes.

As soluções deste caso podem ser obtidas a partir das Eqs. (3.145) e (3.146), fazendo as amplitudes e as frequências das oscilações nulas, ou seja,  $T_a = 0$ ,  $\theta_a = 0$  e  $f = 0$ , e com isso reduz-se as condições ambientais a constantes. Pode-se, então, identificar  $T_m$  e  $\theta_m$ , que lá aparecem, com  $T_0$  e  $\theta_0$  que representam as



condições de contorno deste item.

Com estas simplificações tem-se:  $Pd = 0$ ,  $W_a = 0$ ,  
 $T_{\text{máx}} = T_0$  e  $\theta_{\text{máx}} = \theta_0$ . A partir das Eqs. (3.145) e (3.146) com os seus  
 respectivos coeficientes tem-se:

a) Distribuição de Temperatura:

$$T^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{T(x,t) - T_i}{T_0 - T_i} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}}{2n-1} \left[ \Gamma_1 e^{-a_1 FO} - \Gamma_2 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.171)$$

$$\text{onde: } \Gamma_1 = \frac{b_2 + KO_0}{b_3}, \quad \Gamma_2 = \frac{b_1 + KO_0}{b_3} \quad \text{e} \quad KO_0 = r \frac{\theta_i - \theta_0}{T_0 - T_i}.$$

b) Distribuição de Conteúdo de Umidade:

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\theta_0 - \theta_i} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \left( \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right)}{2n-1} \left[ \Gamma_1^* e^{-a_1 FO} - \Gamma_2^* e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.172)$$

onde:

$$\Gamma_1^* = \frac{b_1 (b_2 + KO_0)}{b_3}; \quad \Gamma_2^* = \frac{b_2 (b_1 + KO_0)}{b_3} \quad \text{e} \quad KO_0 = r \frac{\theta_i - \theta_0}{T_0 - T_i}$$

c) Densidade de Fluxo de Calor:

$$q(x,t) = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x}, \text{ donde}$$

$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\lambda_e \frac{(T_0 - T_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1 e^{-a_1 FO} - \Gamma_2 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.173)$$

d) Densidade de Fluxo de Massa:

$$j(x,t) = -\rho \ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \text{ donde}$$

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{j(x,t)}{\rho \ell D_\theta \frac{(\theta_0 - \theta_i)}{\ell}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \left( \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right) \cdot \left[ \Delta_1 e^{-a_1 FO} - \Delta_2 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.174)$$

$$\text{onde: } \Delta_1 = \Gamma_3^* + \frac{Fe}{KO_0} \Gamma_3 \text{ e } \Delta_2 = \Gamma_4^* + \frac{Fe}{KO_0} \Gamma_4$$

Com isto encerra-se a parte de formulação do problema simétrico. No próximo item inicia-se a formulação dos casos não simétricos.

3.4 - Campos não Permanentes de Temperatura e de Conteúdo de Umidade e Densidades de Fluxos de Calor e Massa. Placa Infinita com Condições de Contorno Assimétricas de Primeira Espécie ou de Dirichlet

Os processos de transferência de calor e massa em meios porosos não saturados são regidos pelo sistema de equações diferenciais dado pelas Eqs. (2.31) e (2.32) conforme comentários tecidos ao longo daquele capítulo. Estas equações são transcritas para este capítulo para facilitar os desenvolvimentos.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.175)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\alpha + rD_T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + rD_{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.176)$$

As equações diferenciais (3.175) e (3.176) regem os processos que ocorrem no interior da placa. Deseja-se estudar as ocorrências ao longo do tempo e portanto, o estudo deve começar em determinado momento quando se conhece as condições iniciais da placa. O desenvolvimento dos campos de temperatura e de conteúdo de umidade depende também das condições ambientes onde a placa será estudada. As soluções a serem determinadas devem, então, ser vinculadas às condições de contorno além das condições iniciais.

Nos itens 3.1, 3.2 e 3.3 o mesmo problema foi resolvido considerando condições de simetria, e condições de contor

no de terceira e de primeira espécie. Neste item, esse problema é resolvido sem considerar condições de simetria e com condições de contorno de primeira espécie. Dentre as condições de primeira espécie analisadas, considera-se condições variáveis com o tempo e constantes.

A Fig. 3.10 ilustra as condições de contorno e iniciais que são escritas a seguir:

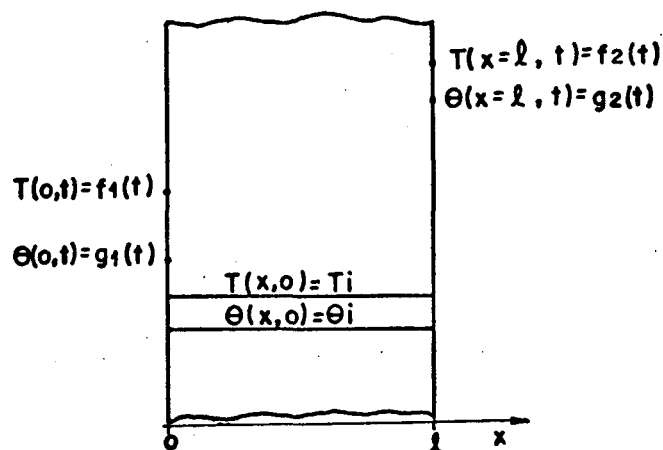


Figura 3.10

$$T(x=0,t) = f_1(t) \quad (3.177)$$

$$\theta(x=0,t) = g_1(t) \quad (3.178)$$

$$T(x=l,t) = f_2(t) \quad (3.179)$$

$$\theta(x=l,t) = g_2(t) \quad (3.180)$$

$$T(x,t=0) = T_i \quad (3.181)$$

$$\theta(x,t=0) = \theta_i \quad (3.182)$$

O problema proposto é encontrar as soluções analíticas do sistema de equações diferenciais parciais lineares, Eqs. (3.175) e (3.176) sujeito às condições de contorno e iniciais dadas pelas Eqs. (3.177) - (3.182).

O problema é resolvido, de modo semelhante ao item 3.1, utilizando a transformada de Laplace, o teorema dos resíduos de Cauchy e o teorema da convolução, diferindo apenas pelas condições de contorno. As soluções de ambos são idênticas até o ponto no qual tais condições são requeridas no decorrer da solução. Conforme o item 3.1, as condições de contorno são requeridas para determinar as constantes  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$  das Eqs. (3.23) e (3.24).

Sendo assim, a solução do problema proposto neste capítulo pode partir destas equações que representam as transformadas de Laplace do campo de temperatura e do campo de conteúdo de umidade em relação ao tempo. Estas equações são transcritas neste ponto:

$$T_L(x,s) - \frac{T_i}{s} = d_1 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x} + d_2 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x} + d_3 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x} + d_4 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x} \quad (3.183)$$

$$\theta_L(x,s) - \frac{\theta_i}{s} = \frac{1}{r} \left[ (1 - v_1^2) d_1 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x} + (1 - v_2^2) d_2 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x} + (1 - v_1^2) d_3 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 x} + (1 - v_2^2) d_4 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 x} \right] \quad (3.184)$$

onde  $v_i, i = 1, 2$  são dados pela Eq. (3.22) e  $r = \frac{L\rho}{C\rho_0}$ .

Para facilitar o desenvolvimento, são adotadas as seguintes notações:  $a_i = \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_i$  e  $b_i = (1 - v_i^2), i = 1, 2$ . Aplicando a

transformada de Laplace nas Eqs. (3.177) - (3.180), obtêm-se novas relações envolvendo  $T_L(0,s)$ ,  $T_L(\ell,s)$ ,  $\theta_L(0,s)$  e  $\theta_L(\ell,s)$ . Submetendo as Eqs. (3.183) e (3.184) a estas relações gera-se um sistema de 4 equações a 4 incógnitas:  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$ .

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = f_{1L}(s) - \frac{T_i}{s} \quad (3.185)$$

$$d_1 e^{a_1 \ell} + d_2 e^{a_2 \ell} + d_3 e^{-a_1 \ell} + d_4 e^{-a_2 \ell} = f_{2L}(s) - \frac{T_i}{s} \quad (3.186)$$

$$d_1 b_1 + d_2 b_2 + d_3 b_3 + d_4 b_4 = g_{1L}(s) - \frac{\theta_i}{s} \quad (3.187)$$

$$d_1 b_1 e^{a_1 \ell} + d_2 b_2 e^{a_2 \ell} + d_3 b_3 e^{-a_1 \ell} + d_4 b_4 e^{-a_2 \ell} = g_{2L}(s) - \frac{\theta_i}{s} \quad (3.188)$$

Resolvendo este sistema de equações determina-se as constantes. Substituindo-as nas Eqs. (3.183) e (3.184) tem-se as transformadas  $T_L(x,s)$  e  $\theta_L(x,s)$ .

$$\begin{aligned} T_L(x,s) - \frac{T_i}{s} &= s A_{1L}(x,s) \left[ f_{1L}(s) - \frac{T_i}{s} \right] + s A_{2L}(x,s) \left[ f_{2L}(s) - \frac{T_i}{s} \right] \\ &+ s A_{3L}(x,s) \left[ g_{1L}(s) - \frac{\theta_i}{s} \right] + s A_{4L}(x,s) \left[ g_{2L}(s) - \frac{\theta_i}{s} \right] \end{aligned} \quad (3.189)$$

$$\begin{aligned} \theta_L(x,s) - \frac{\theta_i}{s} &= s B_{1L}(x,s) \left[ f_{1L}(s) - \frac{T_i}{s} \right] + s B_{2L}(x,s) \left[ f_{2L}(s) - \frac{T_i}{s} \right] \\ &+ s B_{3L}(x,s) \left[ g_{1L}(s) - \frac{\theta_i}{s} \right] + s B_{4L}(x,s) \left[ g_{2L}(s) - \frac{\theta_i}{s} \right] \end{aligned} \quad (3.190)$$

$$\text{onde: } A_{iL}(x,s) = \frac{\phi_i(x,s)}{sD(s)} ; \quad B_i(x,s) = \frac{\psi_i(x,s)}{sD(s)} ; \quad i=1,2,3,4.$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x,s) = & 4[(b_1b_2 - b_2^2) \sinh a_1(l-x) \sinh a_2 l + \\ & + (b_1b_2 - b_1^2) \sinh a_2(l-x) \sinh a_2 l] / \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.191)$$

$$\phi_2(x,s) = 4[(b_1b_2 - b_2^2) \sinh a_2 l \sinh a_1 x + (b_1b_2 - b_1^2) \sinh a_1 l \sinh a_2 x] / \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2 \quad (3.192)$$

$$\phi_3(x,s) = 4r(b_2 - b_1) [\sinh a_2 l \sinh a_1(l-x) - \sinh a_1 l \sinh a_2(l-x)] / \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2 \quad (3.193)$$

$$\phi_4(x,s) = 4r(b_2 - b_1) [\sinh a_2 l \sinh a_1 x - \sinh a_1 l \sinh a_2 x] / \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2 \quad (3.194)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x,s) = & \frac{4}{r} \left[ b_1(b_1b_2 - b_2^2) \sinh a_2 l \sinh a_1(l-x) \right. \\ & \left. + b_2(b_1b_2 - b_1^2) \sinh a_1 l \sinh a_2(l-x) \right] / \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.195)$$

$$\psi_2(x,s) = \frac{4}{r} \left[ b_1(b_1b_2 - b_2^2) \sinh a_2 l \sinh a_1 x + b_2(b_1b_2 - b_1^2) \sinh a_1 l \sinh a_2 x \right] / \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2 \quad (3.196)$$

$$\psi_3(x,s) = 4 \left[ b_1(b_2 - b_1) \sinh a_2 l \sinh a_1(l-x) - b_2(b_2 - b_1) \sinh a_1 l \sinh a_2(l-x) \right] / \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2 \quad (3.197)$$

$$\psi_4(x,s) = 4 \left[ b_1(b_2 - b_1) \sinh a_2 l \sinh a_1 x - b_2(b_2 - b_1) \sinh a_1 l \sinh a_2 x \right] / \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2 \quad (3.198)$$

$$D(s) = 4(b_2 - b_1)^2 \operatorname{senh} a_1 \ell \operatorname{senh} a_2 \ell / \left( \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right)^2 \quad (3.199)$$

Observando que:  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ , pode-se escrever as Eqs. (3.189) e (3.190), nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} T_L(x,s) - \frac{T_i}{s} &= [f_1(0) - T_i] A_{1L}(x,s) + [f_2(0) - T_i] A_{2L}(x,s) + [g_1(0) - \theta_i] A_{3L}(x,s) \\ &+ [g_2(0) - \theta_i] A_{4L}(x,s) + \mathcal{L}\{f'_1(t)\} A_{1L}(x,s) + \mathcal{L}\{f'_2(t)\} A_{2L}(x,s) \\ &+ \mathcal{L}\{g'_1(t)\} A_{3L}(x,s) + \mathcal{L}\{g'_2(t)\} A_{4L}(x,s) \end{aligned} \quad (3.200)$$

$$\begin{aligned} \theta_L(x,s) - \frac{\theta_i}{s} &= [f_1(0) - T_i] B_{1L}(x,s) + [f_2(0) - T_i] B_{2L}(x,s) \\ &+ [g_1(0) - \theta_i] B_{3L}(x,s) + [g_2(0) - \theta_i] B_{4L}(x,s) + \mathcal{L}\{f'_1(t)\} B_{1L}(x,s) \\ &+ \mathcal{L}\{f'_2(t)\} B_{2L}(x,s) + \mathcal{L}\{g'_1(t)\} B_{3L}(x,s) + \mathcal{L}\{g'_2(t)\} B_{4L}(x,s) \end{aligned} \quad (3.201)$$

Utilizando o teorema da convolução e a linearidade da transformada de Laplace, obtêm-se as transformadas inversas:

$$\begin{aligned} T(x,t) - T_i &= [f_1(0) - T_i] A_1(x,t) + [f_2(0) - T_i] A_2(x,t) + [g_1(0) - \theta_i] A_3(x,t) \\ &+ [g_2(0) - \theta_i] A_4(x,t) + \int_0^t A_1(x,\lambda) \frac{d}{d\lambda} f_1(t-\lambda) d\lambda \\ &+ \int_0^t A_2(x,\lambda) \frac{d}{d\lambda} f_2(t-\lambda) d\lambda + \int_0^t A_3(x,\lambda) \frac{d}{d\lambda} g_1(t-\lambda) d\lambda + \\ &+ \int_0^t A_4(x,\lambda) \frac{d}{d\lambda} g_2(t-\lambda) d\lambda \end{aligned}$$



$$+ \int_0^t A_4(x, \lambda) \frac{d}{dt} g_2(t-\lambda) d\lambda \quad (3.202)$$

$$\begin{aligned} \theta(x, t) - \theta_i = & [f_1(0) - T_i] B_1(x, t) + [f_2(0) - T_i] B_2(x, t) + [g_1(0) - \theta_i] B_3(x, s) \\ & + [g_2(0) - \theta_i] B_4(x, s) + \int_0^t B_1(x, \lambda) \frac{d}{dt} f_1(t-\lambda) d\lambda + \int_0^t B_2(x, \lambda) \frac{d}{dt} f_2(t-\lambda) d\lambda \\ & + \int_0^t B_3(x, \lambda) \frac{d}{dt} g_1(t-\lambda) d\lambda + \int_0^t B_4(x, \lambda) \frac{d}{dt} g_2(t-\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (3.203)$$

As integrais que compõem as Eqs. (3.202) e (3.203), são conhecidas como fórmulas de Duhamel, obtidas neste trabalho por meio do teorema da convolução. No apêndice B apresenta-se a equivalência entre os dois teoremas.

Cabe observar que as funções  $A_i$  e  $B_i$  que aparecem nas Eqs. (3.202) e (3.203), ainda não são conhecidas, apenas suas transformadas o são. Suas transformadas inversas são determinadas utilizando o teorema dos resíduos nos tópicos seguintes:

a) Determinação da Transformada Inversa de  $A_{1L}(x, s)$ :

$$A_{1L}(x, s) = \frac{\phi_1(x, s)}{sD(s)} = \frac{\phi_1(x, s)}{\tau(s)} \quad (3.204)$$

Utilizando o teorema dos resíduos, tem-se que:

$$A_1(x,t) = \frac{\phi_1(x,0)}{\tau'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_1(x,s_n)}{\tau'(s_n)} e^{s_n t} \quad (3.205)$$

onde os  $s_n$  são as raízes de  $\tau(s)=0$ , onde  $\tau(s) = sD(s)$  e  $D(s)$  é dado pela Eq. (3.198), ou seja,  $s=0$  ou as raízes de

$$\frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 l \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 l}{\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2} = 0 \quad (3.206)$$

As raízes da Eq. (3.206) são complexas e por isso utiliza-se as seguintes relações para determinar as raízes reais correspondentes:  $\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_j l = -i \operatorname{sen} i \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_j l$ ,  $\cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_j l = \cos \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_j l$  e  $\mu_{nj} = i \sqrt{\frac{s_{nj}}{\alpha}} v_j l$ , onde  $j=1,2$  e  $i$  é a unidade imaginária.

Assim,

$$\frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 l \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 l}{\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^2} = 0 \Rightarrow \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_1 l = 0 \quad \text{ou} \quad \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} v_2 l = 0$$

donde:

$$\operatorname{sen} \mu_{n1} v_1 = 0, \quad \mu_{n1} = \frac{n\pi}{v_1}, \quad n=1,2,\dots \quad (3.207)$$

$$\operatorname{sen} \mu_{n2} v_2 = 0, \quad \mu_{n2} = \frac{n\pi}{v_2}, \quad n=1,2,\dots \quad (3.208)$$

Observa-se que  $s = 0$  não é uma raiz da Eq. (3.206), pois, fazendo o limite com  $s \rightarrow 0$  encontra-se a unidade.

Utilizando as relações citadas e aplicando o princípio da superposição, para os dois conjuntos de raízes, sobre a Eq. (3.205), tem-se:

$$A_1(x,t) = \frac{\phi_1(x,0)}{\tau'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_1(x,\mu_{n1})}{\tau'(\mu_{n1})} e^{-\mu_{n1}^2 \frac{at}{\ell^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_1(x,\mu_{n2})}{\tau'(\mu_{n2})} e^{-\mu_{n2}^2 \frac{at}{\ell^2}} \quad (3.209)$$

Utilizando a Eq. (3.191), para  $\phi_1$ , tem-se:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi_1(x,s)}{\tau'(s)} = 1 - \frac{x}{\ell} \quad (3.210)$$

$$\phi_1(x,\mu_{n1}) = - \frac{(b_1 b_2 - b_2^2) \ell^2 \operatorname{senn} \pi (1 - \frac{x}{\ell}) \operatorname{senn} \pi \frac{v_2}{v_1}}{(\frac{n\pi}{v_1})^2} \quad (3.211)$$

$$\phi_1(x,\mu_{n2}) = - \frac{(b_1 b_2 - b_1^2) \ell^2 \operatorname{senn} \pi (1 - \frac{x}{\ell}) \operatorname{senn} \pi \frac{v_1}{v_2}}{(\frac{n\pi}{v_2})^2} \quad (3.212)$$

$$\tau'(\mu_{n1}) = - \frac{(b_2 - b_1)^2 (-1)^n \ell^2 v_1 \operatorname{senn} \pi \frac{v_2}{v_1}}{2 (\frac{n\pi}{v_1})^2} \quad (3.213)$$

$$\tau'(\mu_{n2}) = - \frac{(b_2 - b_1)^2 (-1)^n \ell^2 v_2 \operatorname{senn} \pi \frac{v_1}{v_2}}{(\frac{n\pi}{v_2})^2} \quad (3.214)$$

Substituindo as Eqs. (3.210)-(3.214) na Eq.(3.209),

tem-se:

$$A(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n\pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left[ P_2 e^{-\left(\frac{n\pi}{v_1}\right)^2 FO} + P_1 e^{-\left(\frac{n\pi}{v_2}\right)^2 FO} \right] \quad (3.215)$$

Onde  $FO = \frac{\alpha t}{\ell^2}$  é o número de Fourier que representa o tempo adimensional, e,

$$P_i = (b_i^2 - b_1 b_2) / b_3^2, \quad b_3 = b_2 - b_1, \quad i = 1, 2.$$

b) Determinação da Transformada Inversa de  $A_{2L}(x,s)$ :

$$A_{2L}(x,s) = \frac{\phi_2(x,s)}{sD} = \frac{\phi_2(x,s)}{\tau(s)}$$

Conduzindo a solução com os mesmos passos do item a, obtêm-se:

$$A_2(x,t) = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n\pi \frac{x}{\ell} \left[ P_2 e^{-\left(\frac{n\pi}{v_1}\right)^2 FO} + P_1 e^{-\left(\frac{n\pi}{v_2}\right)^2 FO} \right] \quad (3.216)$$

c) Transformada Inversa de  $A_{3L}(x,s)$ :

$$A_3(x,t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n\pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left[ \frac{r}{b_3} \left( e^{-\left(\frac{n\pi}{v_1}\right)^2 FO} - e^{-\left(\frac{n\pi}{v_2}\right)^2 FO} \right) \right] \quad (3.217)$$

d) Transformada Inversa de  $A_{4L}(x,s)$ :

$$A_4(x,t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{senn} \pi \frac{x}{\ell} \left[ \frac{r}{b_3} \left( e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_1} t} - e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_2} t} \right) \right] \quad (3.218)$$

e) Transformada Inversa de  $B_{1L}(x,s)$ :

$$B_1(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{senn} \pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left[ \frac{b_1 p_2}{r} e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_1} t} + \frac{b_2 p_1}{r} e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_2} t} \right] \quad (3.219)$$

f) Transformada Inversa de  $B_{2L}(x,s)$ :

$$B_2(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{senn} \pi \frac{x}{\ell} \left[ \frac{b_1 p_2}{r} e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_1} t} + \frac{p_2 b_1}{r} e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_2} t} \right] \quad (3.220)$$

g) Transformada Inversa de  $B_{3L}(x,s)$ :

$$B_3(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{senn} \pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left[ \frac{b_1}{b_3} e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_1} t} - \frac{b_2}{b_3} e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_2} t} \right] \quad (3.221)$$

h) Transformada Inversa de  $B_{4L}(x,s)$ :

$$B_4(x,t) = \frac{x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{senn} \pi \frac{x}{\ell} \left[ \frac{b_1}{b_3} e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_1} t} - \frac{b_2}{b_3} e^{-\frac{(n\pi)^2}{v_2} t} \right] \quad (3.222)$$

Desta forma os campos de temperatura e de conteúdo de umidade, Eqs. (3.202) e (3.203), ficam completamente determinados. É importante notar que as transformadas inversas foram determinadas sem a necessidade de se especificar as condições ambientais, graças ao teorema da convolução.

Neste ponto especifica-se as funções que representam as condições de contorno a fim de obter as soluções para um caso específico. Supõe-se que tais condições variem de acordo com funções senoidais:

$$f_1(t) = T_{m1} + T_{a1} \text{sen}(2\pi ft) \quad (3.223)$$

$$f_2(t) = T_{m2} + T_{a2} \text{sen}(2\pi ft) \quad (3.224)$$

$$g_1(t) = \theta_{m1} + \theta_{a1} \text{sen}(2\pi ft) \quad (3.225)$$

$$g_2(t) = \theta_{m2} + \theta_{a2} \text{sen}(2\pi ft) \quad (3.226)$$

onde:  $f$  = frequência;  $m$  = indica médio;  $a$  = indica amplitude;

$1$  = indica o lado esquerdo da placa e  $2$  = indica o lado direito da placa.

Com estas especificações pode-se avaliar as integrais que aparecem nas Eqs. (3.202) e (3.203). Para facilitar as notações, estas integrais serão denotadas por  $I_i$  quando, no integrando aparecer  $A_i(x, \lambda)$  e por  $J_i$  quando no integrando aparecer  $B_i(x, \lambda)$ . As funções  $A_i(x, t)$  e  $B_i(x, t)$  são dadas pelas Eqs. (3.215)-(3.222).

$$I_1 = \int_0^t A_1(x, \lambda) \frac{d}{dt} f_1(t-\lambda) d\lambda$$

$$I_1 = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) T_{a1} \text{sen}(PdFO) + T_{a1} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{senn} \pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^{2,1} \frac{Pd P_i}{Pd^2 + a_i^2} \left[ a_i \cos(PdFO) + Pd \text{sen}(PdFO) \right] - \frac{a_i p_j Pd}{Pd^2 + a_i^2} e^{-a_i FO} \right\} \quad (3.227)$$

$$I_2 = \int_0^t A_2(x, \lambda) \frac{d}{dt} f_2(t-\lambda) d\lambda = \frac{x}{\ell} T_{a2} \text{sen}(PdFO) + T_{a2} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{senn} \pi \frac{x}{\ell} \cdot \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^{2,1} \frac{Pd P_i}{Pd^2 + a_i^2} \left[ a_i \cos(PdFO) + Pd \text{sen}(PdFO) \right] - \frac{a_i p_j Pd}{Pd^2 + a_i^2} e^{-a_i FO} \right\} \quad (3.228)$$

$$I_3 = \int_0^t A_3(x, \lambda) \frac{d}{dt} g_1(t-\lambda) d\lambda = -\theta_{a1} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{senn} \pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{r}{b_2 - b_1} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left\{ \frac{Pd}{Pd^2 + a_i^2} \left[ a_i \cos(PdFO) + Pd \text{sen}(PdFO) \right] - \frac{a_i Pd}{Pd^2 + a_i^2} e^{-a_i FO} \right\} \right\} \quad (3.229)$$

$$I_4 = \int_0^t A_4(x, \lambda) \frac{d}{dt} g_2(t-\lambda) d\lambda = -\theta_{a_2} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n \pi \frac{x}{\ell} \frac{r}{b_2 - b_1}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left[ \frac{Pd}{Pd^2 + a_i^2} \left[ a_i \cos(PdFO) + Pd \operatorname{sen}(PdFO) \right] - \frac{a_i Pd}{Pd^2 + a_i^2} e^{-a_i FO} \right] \right\}$$

(3.230)

$$J_1 = \int_0^t B_1(x, \lambda) \frac{d}{dt} f_1(t-\lambda) d\lambda = T_{a_1} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n \pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=1}^{2,1} \sum_{j=2} \frac{b_{ij} P Pd}{r(Pd^2 + a_i^2)} \left[ a_i \cos(PdFO) + Pd \operatorname{sen}(PdFO) \right] - \frac{b_{ij} P a_i Pd}{r(Pd^2 + a_i^2)} e^{-a_i FO} \right\}$$

(3.231)

$$J_2 = \int_0^t B_2(x, \lambda) \frac{d}{dt} f_2(t-\lambda) d\lambda = T_{a_2} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n \pi \frac{x}{\ell}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=1}^{2,1} \sum_{j=2} \frac{b_{ij} P Pd}{r(Pd^2 + a_i^2)} \left[ a_i \cos(PdFO) + Pd \operatorname{sen}(PdFO) \right] - \frac{b_{ij} P a_i Pd}{r(Pd^2 + a_i^2)} e^{-a_i FO} \right\}$$

(3.232)

$$J_3 = \int_0^t B_3(x, \lambda) \frac{d}{dt} g_1(t-\lambda) d\lambda = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \theta_{a_1} \operatorname{sen}(PdFO) - \theta_{a_1} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n \pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{b_i}{b_2 - b_1} \left[ \frac{Pd}{Pd^2 + a_i^2} \left[ a_i \cos(PdFO) + Pd \operatorname{sen}(PdFO) \right] - \frac{a_i Pd}{Pd^2 + a_i^2} e^{-a_i FO} \right] \right\}$$

(3.233)



$$J_4 = \int_0^t B_4(x, \lambda) \frac{d}{dt} g_2(t-\lambda) d\lambda = \frac{x}{\ell} \theta_{a2} \text{sen}(PdFO) - \theta_{a2} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{sen} n\pi \frac{x}{\ell} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i+1} b_i}{b_2 - b_1} \left[ \frac{Pd}{Pd^2 + a_i^2} \left[ a_i \cos(PdFO) + Pd \text{sen}(PdFO) \right] - \frac{a_i Pd}{Pd^2 + a_i^2} e^{-a_i FO} \right] \right\}$$

(3.234)

Calculando  $f_1(0)$ ,  $f_2(0)$ ,  $g_1(0)$  e  $g_2(0)$  por meio das Eqs. (3.223) - (3.226) e substituindo os resultados juntamente com as integrais dadas pelas Eqs. (3.227) - (3.234) nas Eqs. (3.202) e (3.203), determina-se as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade.

$$T^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{T(x, t) - T_i}{T_{\text{máx}2} - T_i} = \frac{(T_{m1} - T_i) + T_{a1} \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx}2} - T_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{sen} n\pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[ \Gamma_{11} \cos(PdFO) + \Gamma_{12} \text{sen}(PdFO) + \Gamma_{13} e^{-a_1 FO} + \Gamma_{14} e^{-a_2 FO} \right]$$

$$+ \frac{(T_{m2} - T_i) + T_{a2} \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx}2} - T_i} \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{sen} n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_{21} \cos(PdFO) \right.$$

$$\left. + \Gamma_{22} \text{sen}(PdFO) + \Gamma_{23} e^{-a_1 FO} + \Gamma_{14} e^{-a_2 FO} \right]$$

(3.235)

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x, t) - \theta_i}{\theta_{\text{máx}2} - \theta_i} = \frac{(\theta_{m1} - \theta_i) + \theta_{a1} \text{sen}(PdFO)}{\theta_{\text{máx}2} - \theta_i} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{sen} n\pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[ \Gamma_{11}^* \cos(PdFO) + \Gamma_{12}^* \text{sen}(PdFO) + \Gamma_{13}^* e^{-a_1 FO} + \Gamma_{14}^* e^{-a_2 FO} \right] +$$

$$+ \frac{(\theta_{m2} - \theta_i) + \theta_{a2} \operatorname{sen}(PdFO)}{(\theta_{\max 2} - \theta_i)} \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{senn} n \pi \frac{x}{\ell}.$$

$$\cdot \left[ \Gamma_{21}^* \cos(PdFO) + \Gamma_{22}^* \operatorname{sen}(PdFO) + \Gamma_{23}^* e^{-a_1 FO} + \Gamma_{24}^* e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.236)$$

onde:

$$\Gamma_{i1} = W_{ai} \left\{ \frac{Pda_1}{Pd^2 + a_1^2} \left[ P_2 + \frac{KO_{ai}}{b_2 - b_1} \right] + \frac{Pda_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ P_1 - \frac{KO_{ai}}{b_2 - b_1} \right] \right\};$$

$$\Gamma_{i2} = W_{ai} \left\{ \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_1^2} \left[ P_2 + \frac{KO_{ai}}{b_2 - b_1} \right] + \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ P_1 - \frac{KO_{ai}}{b_2 - b_1} \right] \right\};$$

$$\Gamma_{i3} = W_{mi} \left[ P_2 + \frac{KO_{mi}}{b_2 - b_1} \right] - W_{ai} \frac{Pda_1}{Pd^2 + a_1^2} \left[ P_2 + \frac{KO_{ai}}{b_2 - b_1} \right];$$

$$\Gamma_{i4} = W_{mi} \left[ P_1 - \frac{KO_{mi}}{b_2 - b_1} \right] - W_{ai} \frac{Pda_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ P_1 - \frac{KO_{ai}}{b_2 - b_1} \right]$$

$$\Gamma_{i1}^* = \frac{W_{ai}}{(b_2 - b_1) KO_{\max 2}} \left\{ \frac{Pda_2 b_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ KO_{ai} - P_1 \right] - \frac{Pda_1 b_1}{Pd^2 + a_1^2} \left[ KO_{ai} + P_2 \right] \right\};$$

$$\Gamma_{i2}^* = \frac{W_{ai}}{(b_2 - b_1) KO_{\max 2}} \left\{ \frac{Pd^2 b_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ KO_{ai} - P_1 \right] - \frac{Pd^2 b_1}{Pd^2 + a_1^2} \left[ KO_{ai} + P_2 \right] \right\};$$

$$\Gamma_{i3}^* = \frac{W_{ai}}{KO_{\max 2}} \frac{Pd a_1 b_1}{Pd^2 + a_1^2} \left[ \frac{KO_{ai}}{b_2 - b_1} + P_2 \right] - \frac{W_{mi}}{KO_{\max 2}} \left[ \frac{b_1}{b_2 - b_1} KO_{mi} + P_2 b_1 \right];$$

$$\Gamma_{i4}^* = \frac{W_{ai}}{KO_{\max 2}} \frac{Pd a_2 b_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ P_1 - \frac{KO_{ai}}{b_2 - b_1} \right] - \frac{W_{mi}}{KO_{\max 2}} \left[ \frac{b_2}{b_2 - b_1} KO_{mi} + P_1 b_2 \right];$$

$$W_{ai} = \frac{T_{ai}}{T_{\max 2} - T_i}; \quad W_{mi} = \frac{T_{mi} - T_i}{T_{\max 2} - T_i}; \quad KO_{ai} = -r \frac{\theta_{ai}}{T_{ai}}; \quad KO_{mi} = r \frac{\theta_i - \theta_{mi}}{T_{mi} - T_i};$$

$$KO_{\max 2} = r \frac{\theta_i - \theta_{\max 2}}{T_{\max 2} - T_i}; \quad r = \frac{Lp \ell}{Cp_0}; \quad i = 1, 2$$

De forma semelhante ao que foi feito nos itens anteriores, o problema será resolvido de acordo com os processos: (a) Umidificação e aquecimento, (b) desumidificação e aquecimento e (c) equilíbrio de conteúdo de umidade com o meio.

### 3.4.1 - Processos nos quais ocorrem Aquecimento e Umidificação

Esses processos são controlados, no modelo, por meio do número de Kossovich que relaciona as condições iniciais com as condições ambientes. A Fig. 3.11 ilustra a situação inicial e as condições de contorno.

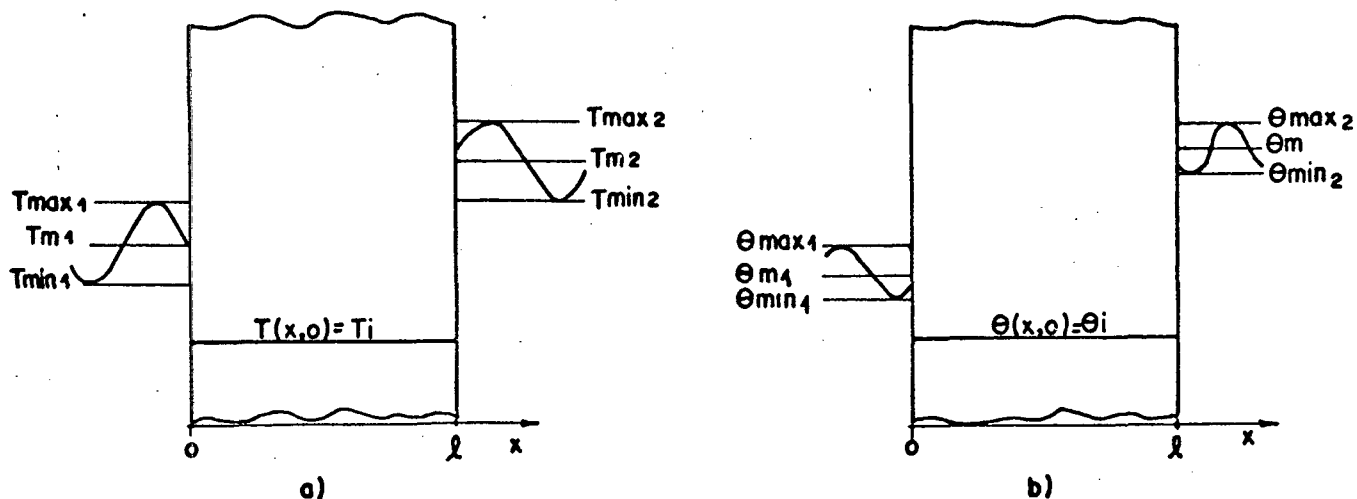


Figura 3.11

As Eqs. (3.235) - (3.236), estão adimensionalizadas de forma conveniente para este item, pois as maiores diferenças de potenciais para referência são  $(T_{\text{máx}2} - T_i)$  e  $(\theta_{\text{máx}2} - \theta_i)$ , como ilustra a Fig. 3.11.

As Eqs. (3.235) e (3.236), podem ser simplificadas rearranjando os termos dos dois somatórios e utilizando a seguinte identidade:  $\text{sen } n\pi(1 - \frac{x}{l}) = (-1)^{n+1} \text{sen } n\pi \frac{x}{l}$ . Com este procedimento e manipulando estas equações tem-se:

a) Distribuição de Temperatura:

$$T^*\left(\frac{x}{l}, FO\right) = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}2} - T_i} = \frac{(T_{m1} - T_i) + T_{a1} \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx}2} - T_i} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{(T_{m2} - T_i) + T_{a2} \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx}2} - T_i} \cdot \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen } n\pi \frac{x}{l} \left[ \Gamma_1 \cos(PdFO) + \Gamma_2 \text{sen}(PdFO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} + \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.237)$$

Os novos coeficientes que aparecem são combinações dos coeficientes da Eq. (3.235) e são descritos a seguir.

$$\Gamma_1 = \Gamma_{11} - (-1)^n \Gamma_{21} = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ W_{ai} \left[ \frac{Pda_1 P_2}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd P_1 a_2}{Pd^2 + a_2^2} \right] + \frac{W_{ai} KO_{ai}}{b_3} \left[ \frac{Pda_1}{Pd^2 + a_1^2} - \frac{Pda_2}{Pd^2 + a_2^2} \right] \right\}$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_{12} - (-1)^n \Gamma_{22} = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ W_{ai} \left[ \frac{Pd^2 P_2}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd^2 P_1}{Pd^2 + a_2^2} \right] + \frac{W_{ai} KO_{ai}}{b_3} \left[ \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_1^2} - \frac{Pd^2}{Pd^2 + a_2^2} \right] \right\}$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_{13} - (-1)^n \Gamma_{23} = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ W_{mi} \left[ P_2 + \frac{KO_{mi}}{b_3} \right] - W_{ai} \frac{Pda_1}{Pd^2 + a_1^2} \left[ P_2 + \frac{KO_{ai}}{b_3} \right] \right\}$$

$$\Gamma_4 = \Gamma_{14} - (-1)^n \Gamma_{24} = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ W_{mi} \left[ P_1 - \frac{KO_{mi}}{b_3} \right] - W_{ai} \frac{Pda_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ P_1 - \frac{KO_{ai}}{b_3} \right] \right\}$$

onde  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ ,  $\delta_{ij}$  é conhecido como  $\delta$  de Kronecker

e  $b_3 = b_2 - b_1$

A Eq. (3.237) representa a distribuição de temperatura para o problema proposto, num processo de aquecimento e umidificação.

b) Distribuição do Conteúdo de Umidade:

Após reagrupar os termos da Eq. (3.236) com o procedimento do item a, tem-se:

$$\begin{aligned} \theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) &= \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\theta_{\text{máx}2} - \theta_i} = \frac{(\theta_{m1} - \theta_i) + \theta_{a1} \text{sen}(PdFO)}{\theta_{\text{máx}2} - \theta_i} \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) \\ &+ \frac{(\theta_{m2} - \theta_i) + \theta_{a2} \text{sen}(PdFO)}{\theta_{\text{máx}2} - \theta_i} \frac{x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen } n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1^* \cos(PdFO) \right. \\ &\left. + \Gamma_2^* \text{sen}(PdFO) + \Gamma_3^* e^{-a_1 FO} + \Gamma_4^* e^{-a_2 FO} \right] \end{aligned} \quad (3.238)$$

onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^* = \Gamma_{12}^* - (-1)^n \Gamma_{12}^* &= \frac{2}{\sum_{i=1}^n} \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \frac{W_{ai}}{KO_{\text{máx}2}} \left\{ \frac{KO_{ai}}{b_3} \left[ \frac{Pdb_2 a_2}{Pd^2 + a_2^2} - \frac{Pdb_1 a_1}{Pd^2 + a_1^2} \right] \right. \\ &\left. - \left[ \frac{PdP_2 b_1 a_1}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{PdP_1 b_2 a_2}{Pd^2 + a_2^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\Gamma_2^* = \Gamma_{12}^* - (-1)^n \Gamma_{22}^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \frac{W_{ai}}{KO_{\max 2}} \left\{ \frac{KO_{ai}}{b_3} \left[ \frac{Pd^2 b_2}{Pd^2 + a_2^2} - \frac{Pd^2 b_1}{Pd^2 + a_1^2} \right] - \left[ \frac{Pd^2 P b_1}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd P b_1^2}{Pd^2 + a_2^2} \right] \right\}$$

$$\Gamma_3^* = \Gamma_{13}^* - (-1)^n \Gamma_{23}^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ \frac{W_{ai}}{KO_{\max 2}} \frac{Pd a_1 b_1}{(Pd^2 + a_1^2)} \left[ \frac{KO_{ai}}{b_3} + P_2 \right] - \frac{W_{mi}}{KO_{\max 2}} b_1 \left[ \frac{KO_{mi}}{b_3} + P_2 \right] \right\}$$

$$\Gamma_4^* = \Gamma_{14}^* - (-1)^n \Gamma_{24}^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ \frac{W_{ai}}{KO_{\max 2}} \frac{Pd a_2 b_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ P_1 - \frac{KO_{ai}}{b_3} \right] - \frac{W_{mi}}{KO_{\max 2}} b_2 \left[ \frac{KO_{mi}}{b_3} - P_1 \right] \right\}$$

c) Densidade de Fluxo de Calor:

A densidade de fluxo de calor é dada por:

$$q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{e \partial x}, \text{ onde } \frac{\partial T}{\partial x} \text{ é obtida da Eq. (3.237).}$$

$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\lambda \frac{(T_{\max 2} - T_i)}{e}} = \frac{(T_{m1} - T_i) + T_{a1} \text{ sen}(PdFO)}{T_{\max 2} - T_i} - \frac{(T_{m2} - T_i) + T_{a2} \text{ sen}(PdFO)}{T_{\max 2} - T_i} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1 \cos(PdFO) + \Gamma_2 \text{ sen}(PdFO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} + \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.239)$$

Os coeficientes  $\Gamma_i$  da Eq. (3.239) são os mesmos especificados para a Eq. (3.237).

d) Densidade de Fluxo de Massa:

A densidade de fluxo de massa é dada por:

$j(x,t) = -\rho_\ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} - \rho_\ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$ . Determinando os gradientes a partir das Eqs. (3.237) e (3.238) e adimensionalizando a densidade de fluxo de forma conveniente, tem-se:

$$\begin{aligned}
 j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = & \frac{j(x,t)}{L_0 \rho_\ell D_\theta \frac{(\theta_{\max 2} - \theta_i)}{\ell}} = - \frac{Fe}{KO_{\max 2}} \left[ \frac{(T_{m1} - T_i) + T_{a1} \text{sen}(PdFO)}{T_{\max 2} - T_i} \right. \\
 & - \left. \frac{(T_{m2} - T_i) + T_{a2} \text{sen}(PdFO)}{T_{\max 2} - T_i} \right] + \left[ \frac{(\theta_{m1} - \theta_i) + \theta_{a1} \text{sen}(PdFO)}{\theta_{\max 2} - \theta_i} \right. \\
 & - \left. \frac{(\theta_{m2} - \theta_i) + \theta_{a2} \text{sen}(PdFO)}{\theta_{\max 2} - \theta_i} \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Delta_1 \cos(PdFO) + \Delta_2 \text{sen}(PdFO) \right. \\
 & \left. + \Delta_3 e^{-a_1 FO} + \Delta_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.240)
 \end{aligned}$$

onde:  $\Delta_j = \frac{Fe}{KO_{\max 2}} \Gamma_j - \Gamma_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .



### 3.4.2 - Processos nos quais ocorrem Aquecimento e Desumidificação

A Fig. 3.12 ilustra as condições ambientais e iniciais para esses tipos de processos. Ilustra também o fato que, neste capítulo, o referencial máximo para a temperatura permanece ( $T_{\text{máx}2} - T_i$ ) e para o conteúdo de umidade ele é dado por  $(\theta_i - \theta_{\text{min}1})$ . Em função disto, tem-se:

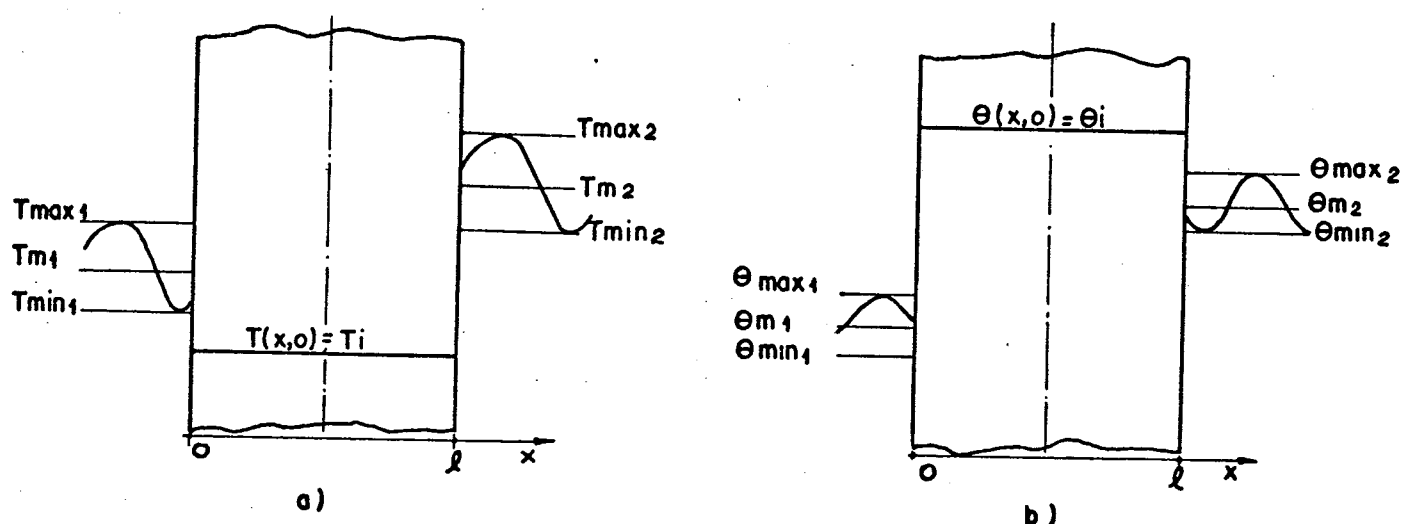


Figura 3.12

#### a) Distribuição de Temperatura:

Como o valor de referência  $T_{\text{máx}2} - T_i$  permanece o mesmo do item 3.4.1, a distribuição de temperatura pode ser representada pela Eq. (3.237).

b) Distribuição de conteúdo de Umidade:

A distribuição de conteúdo de umidade para este caso pode ser obtida a partir da Eq. (3.238) readimensionalizando-a de forma conveniente. Para tanto, o valor de referência deve ser o máximo, ou seja:  $\theta_i - \theta_{\min 1}$ .

Multiplicando ambos os membros da Eq. (3.238) por

$\frac{\theta_{\max 2} - \theta_i}{\theta_{\min 1} - \theta_i}$  e notando que  $\frac{\theta - \theta_i}{\theta_{\min 1} - \theta_i} = \frac{\theta - \theta_{\min 1}}{\theta_{\min 1} - \theta_i} + 1$ , tem-se a nova expressão para o conteúdo de umidade:

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_{\min 1}}{\theta_i - \theta_{\min 1}} = 1 - \frac{(\theta_{\min 1} - \theta_i) + \theta_{a1} \operatorname{sen}(PdFO)}{\theta_{\min 1} - \theta_i} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) - \frac{(\theta_{\min 1} - \theta_i) + \theta_{a2} \operatorname{sen}(PdFO)}{\theta_{\min 1} - \theta_i} \cdot \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1^* \cos(PdFO) + \Gamma_2^* \operatorname{sen}(PdFO) + \Gamma_3^* e^{-a_1 FO} + \Gamma_4^* e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.241)$$

Os coeficientes  $\Gamma_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , assumem novos valores a partir dos antigos, relativos à Eq. (3.238), modificados da relação  $\frac{\theta_{\max 2} - \theta_i}{\theta_{\min 1} - \theta_i}$ .

$$\Gamma_1^* = \frac{2}{\sum_{i=1}^2} \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ \frac{W_{ai}}{b_3} \frac{KO_{ai}}{KO_{\min 1}} \left[ \frac{Pd b_2 a_2}{Pd^2 + a_2^2} - \frac{Pd b_1 a_1}{Pd^2 + a_1^2} \right] - \frac{W_{ai}}{KO_{\min 1}} \left[ \frac{Pd P b_1 a_1}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd P b_2 a_2}{Pd^2 + a_2^2} \right] \right\}$$

$$\Gamma_2^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ \frac{W_{ai}^*}{b_3} \frac{KO_{ai}^*}{KO_{minl}} \left[ \frac{Pd^2 b_2}{Pd^2 + a_1^2} - \frac{Pd^2 b_1}{Pd^2 + a_1^2} \right] - \frac{W_{ai}^*}{KO_{minl}} \left[ \frac{Pd^2 P_2 b_1}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd^2 P_1 b_2}{Pd^2 + a_1^2} \right] \right\}$$

$$\Gamma_3^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ \frac{W_{ai}^*}{KO_{minl}} \frac{Pd a_1 b_1}{Pd^2 + a_1^2} \left[ \frac{KO_{ai}^*}{b_3} + P_2 \right] - \frac{W_{mi}^*}{KO_{minl}} b_1 \left[ \frac{KO_{mi}^*}{b_3} + P_2 \right] \right\}$$

$$\Gamma_4^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left\{ \frac{W_{ai}^*}{KO_{minl}} \frac{Pd a_2 b_2}{Pd^2 + a_2^2} \left[ P_1 - \frac{KO_{ai}^*}{b_3} \right] - \frac{W_{mi}^*}{KO_{minl}} b_2 \left[ P_1 - \frac{KO_{mi}^*}{b_3} \right] \right\}$$

$$\text{onde: } W_{aj}^* = \frac{T_{aj}}{T_{minl} - T_i}; \quad W_{mj}^* = \frac{T_{mj} - T_i}{T_{minl} - T_i}; \quad KO_{minl} = r \frac{\theta_i - \theta_{min}}{T_{minl} - T_i},$$

$$j = 1, 2$$

A Eq. (3.241) representa a distribuição de conteúdo de umidade para uma situação na qual a placa está inicialmente com um conteúdo máximo  $\theta_i$ . Em  $FO = 0$  todos os termos se anulam, tendo como resultado  $\theta^* = 1$  ou seja  $\theta(x, 0) = \theta_i$ . Em  $\frac{x}{\ell} = 0$  tem-se  $\theta^*(\frac{x}{\ell}, FO) = 1 - \frac{(\theta_{m1} - \theta_i) + \theta_{a1} \text{sen}(Pd FO)}{\theta_{minl} - \theta_i}$ , ou seja  $\theta(0, t) = \theta_{m1} + \theta_{a1} \text{sen}(Pd FO)$  e de forma análoga verifica-se que  $\theta(\ell, t) = \theta_{m2} + \theta_{a2} \text{sen}(Pd FO)$ , mostrando que a expressão fecha com as condições iniciais e de contorno.

c) Densidade de Fluxo de Calor:

Como a distribuição de temperatura não sofreu nenhuma alteração, o mesmo ocorre com o fluxo de calor. A Eq. (3.239) continua sendo válida.

Cabe observar que, apesar da equação ser a mesma, as distribuições são diferentes pois no item 3.2.1 os parâmetros de Kossovich eram negativos e neste item eles são positivos.

d) Densidade de Fluxo de Massa:

A densidade de fluxo de massa é dada por:

$j(x,t) = -\rho_{\ell} D_T \frac{\partial T}{\partial x} - \rho_{\ell} D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ . As derivadas são determinadas a partir das Eqs. (3.237) e (3.238), obtendo-se a equação da densidade de fluxo de massa correspondente a este tipo de simulação: desumificação e aquecimento.

$$\begin{aligned}
 j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) &= \frac{j(x,t)}{L_{\theta} D_{\theta} \frac{(\theta_i - \theta_{\min 1})}{\ell}} = \frac{Fe}{KO_{\min 1}} \frac{1}{W_{\min 1}} \left[ \frac{(T_{m1} - T_i) + T_{a1} \text{sen}(Pd FO)}{T_{\max 2} - T_i} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(T_{m2} - T_i) + T_{a2} \text{sen}(Pd FO)}{T_{\max 2} - T_i} \right] - \frac{(\theta_{m1} - \theta_i) + \theta_{a1} \text{sen}(Pd FO)}{\theta_{\min 1} - \theta_i} \\
 &\quad + \frac{(\theta_{m2} - \theta_i) + \theta_{a2} \text{sen}(Pd FO)}{\theta_{\min 1} - \theta_i} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Delta_1 \cos(Pd FO) + \Delta_2 \text{sen}(Pd FO) \right. \\
 &\quad \left. + \Delta_3 e^{-a_1 FO} + \Delta_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.242)
 \end{aligned}$$

onde:  $\Delta_j = \frac{1}{W_{\min 1}} \frac{Fe}{KO_{\min 1}} \Gamma_j - \Gamma_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  e  $W_{\min 1} = \frac{T_{\min 1} - T_i}{T_{\max 2} - T_i}$

3.4.3 - Processos para os quais a Placa esta Inicialmente em Equilíbrio com o Meio Ambiente no que se Refere ao Conteúdo de Umidade

A Fig. 3.13 ilustra as condições iniciais e de contorno deste item.

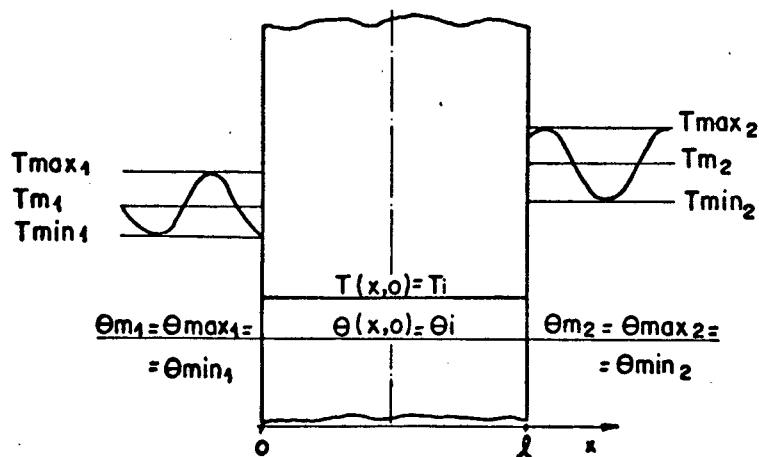


Figura 3.13

Este tipo de problema é caracterizado pelo fato da placa estar, inicialmente, em equilíbrio com o meio, ou seja, todos os parâmetros de Kossovich são nulos. Este fato traz simplificações e também indeterminações para os coeficientes  $\Gamma_i$ 's. Por isso as Eqs. (3.237) e (2.378) precisam ser retrabalhadas a fim de que possam representar os processos físicos deste item.

a) Distribuição de Temperatura:

A Eq. (3.237) é transcrita e seus coeficientes  $\Gamma_i$ 's são apenas simplificados, uma vez que os parâmetros de Kossovich aparecem nos numeradores não gerando indeterminações.

$$T^*\left(\frac{x}{\ell}, FO\right) = \frac{T(x,t) - T_i}{T_{\text{máx}2} - T_i} = \frac{(T_{m1} - T_i) + T_{a1} \text{sen}(Pd FO)}{T_{\text{máx}2} - T_i} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{(T_{m2} - T_i) + T_{a2} \text{sen}(Pd FO)}{T_{\text{máx}2} - T_i} \cdot \frac{x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen} n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1 \cos(Pd FO) + \Gamma_2 \text{sen}(Pd FO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} + \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.243)$$

onde:

$$\Gamma_1 = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] W_{ai} \left[ \frac{Pd P_2 a_1}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd P_1 a_2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_2 = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] W_{ai} \left[ \frac{Pd^2 P_2}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd^2 P_1}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_3 = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left[ W_{mi} P_2 - W_{ai} \frac{Pd P_2 a_1}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_4 = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left[ W_{mi} P_1 - W_{ai} \frac{Pd P_1 a_2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

A diferença básica entre as Eqs. (3.243) e (3.237) é a ausência de parâmetros de Kossovich. Isto significa que as condições inicial e de contorno, no que se refere ao conteúdo de umidade, não influenciam a distribuição de temperatura, já que, inicialmente, a placa encontra-se em equilíbrio com o meio ambiente.

A distribuição de temperatura fica submetida à influência das condições inicial e de contorno referentes à temperatura. Esta influência é informada ao modelo por meio dos parâmetros  $W_a$  e  $W_m$  que aparecem nos coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

b) Distribuição do conteúdo de Umidade:

A distribuição de conteúdo deste item é obtida da Eq. (3.238), mediante algumas manipulações a fim de retirar as indeterminações dos coeficientes  $\Gamma_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , gerados por  $KO_{\max 2}$  tendendo a zero.

Multiplicando ambos os membros da Eq. (3.238) por  $(\theta_{\max 2} - \theta_0)$ , multiplicando o segundo membro por

$$\frac{T_{\max 2} - T_0}{T_{\max 2} - T_0} \frac{L\rho_\ell C_{p0}}{C_{p0} L\rho_\ell}, \text{ notando que } \frac{C_{p0}}{L\rho_\ell} (T_{\max 2} - T_i) \text{ é adimensional e}$$

relembrando que  $KO_{\max 2} = KO_a = KO_m = 0$ , tem-se a nova distribuição de conteúdo de umidade:

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\frac{C_{p0}}{L\rho_\ell} (T_{\max 2} - T_i)} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(n\pi \frac{x}{\ell}) \left[ \Gamma_1^* \cos(Pd FO) + \Gamma_2^* \text{sen}(Pd FO) + \Gamma_3^* e^{-a_1 FO} + \Gamma_4^* e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.244)$$

onde os coeficientes  $\Gamma_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  adquirem novas formas:

$$\Gamma_1^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] W_{ai} \left[ \frac{Pd P_2 b_1 a_1}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd P_1 b_2 a_2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_2^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] W_{ai} \left[ \frac{Pd^2 P_2 b_1}{Pd^2 + a_1^2} + \frac{Pd^2 P_1 b_2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

$$\Gamma_3^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left[ W_{mi} P_2 b_1 - W_{ai} \frac{Pd P_2 a_1 b_1}{Pd^2 + a_1^2} \right]$$

$$\Gamma_4^* = \sum_{i=1}^2 \left[ \delta_{i1} - (-1)^n \delta_{i2} \right] \left[ W_{mi} P_1 b_2 - W_{ai} \frac{Pd P_1 a_2 b_2}{Pd^2 + a_2^2} \right]$$

Nota-se, também, que a distribuição de conteúdo de umidade só depende das condições inicial e de contorno em termos de temperatura por meio dos parâmetros  $W_{ai}$  e  $W_{mi}$ .

### c) Densidade de fluxo de Calor:

Sabe-se que:  $q(x, t) = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x}$ , onde  $\frac{\partial T}{\partial x}$  é obtida da Eq. (3.243) e então



$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\lambda \frac{(T_{\text{máx2}} - T_i)}{\ell}} = \frac{(T_{m1} - T_i) + T_{a1} \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx2}} - T_i} - \frac{(T_{m2} - T_i) + T_{a2} \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx2}} - T_i} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1 \cos(PdFO) + \Gamma_2 \text{sen}(PdFO) + \Gamma_3 e^{-a_1 FO} + \Gamma_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.245)$$

os coeficientes  $\Gamma_i$ ,  $i=1,2,3,4$  são os mesmos da Eq. (3.243)

d) Densidade de Fluxo de Massa:

$$\text{Sabe-se que: } j(x,t) = -\rho \ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Determinando  $\frac{\partial T}{\partial x}$  da Eq. (3.243) e  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  da Eq. (3.244), substituindo na equação acima e rearranjando os termos tem-se:

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = Fe \left[ \frac{(T_{m1} - T_i) + T_{a1} \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx2}} - T_i} - \frac{(T_{m2} - T_i) + T_{a2} \text{sen}(PdFO)}{T_{\text{máx2}} - T_i} \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Delta_1 \cos(PdFO) + \Delta_2 \text{sen}(PdFO) + \Delta_3 e^{-a_1 FO} + \Delta_4 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.246)$$

$$\text{onde: } \Delta_j = Fe * \Gamma_j + \Gamma_j^*$$

### 3.5 - Condições de Contorno de Dirichlet ou de Primeira Espécie Mantidas Constantes e Assimétricas

Este tipo de problema é caracterizado pelo fato que tanto a temperatura quanto o conteúdo de umidade são prescritos nas fronteiras da placa, como ilustra a Fig. 3.14. As equações diferenciais que regem os fenômenos físicos são as mesmas dos itens precedentes e as condições de contorno são colocados a seguir.

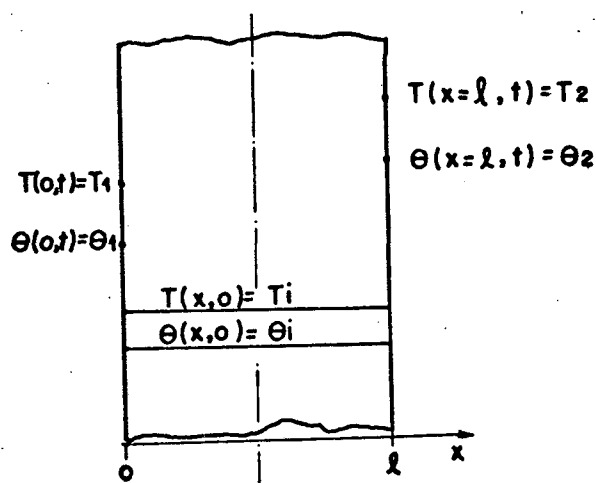


Figura 3.14

$$T(x=0,t) = T_1 \quad (3.247)$$

$$\theta(x=0,t) = \theta_1 \quad (3.248)$$

$$T(x=l,t) = T_2 \quad (3.249)$$

$$\theta(x=l,t) = \theta_2 \quad (3.250)$$

As condições iniciais são:  $T(x, t = 0) = T_i$  e  $\theta(x, t = 0) = \theta_i$ .

O problema proposto é encontrar as soluções para as Eqs. (3.175) e (3.176) sujeitas às condições de contorno e iniciais dadas pelas Eqs. (3.247) - (3.250).

As diferenças entre o problema aqui proposto e o problema resolvido no item 3.4 são as condições de contorno. Lá, as condições de contorno eram regidas por funções arbitrárias do tempo, que, posteriormente, foram especificadas como funções senoidais. Aqui as condições de contorno são mantidas constantes. Sendo assim, as soluções para o problema aqui proposto podem ser obtidas das soluções obtidas no item 3.4 fazendo a frequência e as amplitudes das oscilações nulas e identificando as temperaturas e conteúdos médios com as condições de contorno deste item, ou seja:  $T_{m1} = T_1$ ,  $T_{m2} = T_2$ ,  $\theta_{m1} = \theta_1$  e  $\theta_{m2} = \theta_2$ . Introduzindo estas simplificações nas Eqs. (3.235) e (3.237), obtém-se:

a) Distribuição de Temperatura:

$$T^*\left(\frac{x}{\ell}, FO\right) = \frac{T(x, t) - T_i}{T_2 - T_i} = \frac{T_1 - T_i}{T_2 - T_i} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi \frac{x}{\ell} \cdot \left[ \Gamma_1 e^{-a_1 FO} + \Gamma_2 e^{-a_2 FO} \right]$$

(3.251)

b) Distribuição de conteúdo de Umidade:

$$\theta^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\theta_2 - \theta_i} = \frac{\theta_1 - \theta_i}{\theta_2 - \theta_i} \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + \frac{x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi \frac{x}{\ell} \cdot \left[ \Gamma_1^* e^{-a_1 FO} + \Gamma_2^* e^{-a_2 FO} \right]$$

(3.252)

onde:

$$\Gamma_1 = \sum_{j=1}^2 \left[ \delta_{j1} - (-1)^n \delta_{j2} \right] W_j \left[ P_2 + \frac{KO_j}{b_3} \right]$$

$$\Gamma_2 = \sum_{j=1}^2 \left[ \delta_{j1} - (-1)^n \delta_{j2} \right] W_j \left[ P_1 - \frac{KO_j}{b_3} \right]$$

$$\Gamma_1^* = - \sum_{j=1}^2 \left[ \delta_{j1} - (-1)^n \delta_{j2} \right] \frac{W_j}{KO_2} b_1 \left[ \frac{KO_j}{b_3} + P_2 \right]$$

$$\Gamma_2^* = - \sum_{j=1}^2 \left[ \delta_{j1} - (-1)^n \delta_{j2} \right] \frac{W_j}{KO_2} b_2 \left[ \frac{KO_j}{b_3} - P_1 \right]$$

$$W_j = \frac{T_j - T_i}{T_2 - T_i} ; \quad KO_j = r \frac{\theta_i - \theta_j}{T_j - T_i} ; \quad P_j = \frac{b_i^2 - b_1 b_2}{b_3^2}$$

$$b_j = (1 - v_j^2) , \quad j = 1, 2, \quad b_3 = b_2 - b_1$$

c) Densidade de fluxo de Calor:

Sabe-se que  $q(x,t) = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x}$ , onde  $\frac{\partial T}{\partial x}$  é determinado a partir da Eq. (3.251).

$$q^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{q(x,t)}{\lambda_e (T_2 - T_1)} = \left( \frac{T_1 - T_i}{T_2 - T_1} - 1 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Gamma_1 e^{-a_1 FO} + \Gamma_2 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.253)$$

os coeficientes  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são os mesmos especificados para a Eq. (3.251).

d) Densidade de fluxo de Massa:

Sabe-se que  $j(x,t) = -\rho \ell D_T \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \ell D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$ , onde  $\frac{\partial T}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  são obtidos das Eqs. (3.251) e (3.252).

$$j^* \left( \frac{x}{\ell}, FO \right) = \frac{j(x,t)}{\rho \ell D_\theta (\theta_2 - \theta_i)} = \frac{\theta_1 - \theta_i}{\theta_2 - \theta_i} - \frac{Fe}{KO_2} \frac{T_1 - T_i}{T_2 - T_i} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \left[ \Delta_1 e^{-a_1 FO} + \Delta_2 e^{-a_2 FO} \right] \quad (3.254)$$

onde:  $\Delta_j = \frac{Fe}{KO_2} \Gamma_j - \Gamma_j^*$ ,  $j = 1, 2$ .

No Capítulo 4 apresenta-se os resultados sob forma de gráficos e as respectivas análises relativos às equações deduzidas neste capítulo.

## C A P Í T U L O 4

## APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

No capítulo 3 desenvolveu-se as equações para os potenciais de transporte de calor e de massa e também para os fluxos de calor e de massa, para dois tipos básicos de problemas: (a) simétrico e (b) não simétrico. Para cada um deles foram determinadas soluções generalizadas, cujas condições de contorno são regidas por funções genéricas do tempo. Posteriormente, essas funções foram especificadas e também particularizadas, obtendo-se, desta forma, uma gama de soluções representativas de diferentes situações e processos.

Devido à complexidade das equações diferenciais e das condições de contorno associadas, as soluções adquiriram formas bastante complexas e longas impedindo uma interpretação física imediata das mesmas. Sendo assim, cada caso resolvido foi representado em um programa de computador, em linguagem FORTRAN IV, obtendo-se uma coletânea de dados numéricos que são apresentados, neste capítulo, sob forma de gráficos.

A apresentação é feita em ordem crescente de complexidade dos casos.

Todas as informações necessárias para as simulações são dadas por meio dos vários parâmetros adimensionais inerentes às soluções.

#### 4.1 - Caso Simétrico - Condições de Contorno de Primeira Espécie Constantes

A presente seção tem a finalidade de estudar as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade numa placa porosa infinita submetida às condições de contorno constantes. Inicialmente, estuda-se o caso em que ocorre aquecimento e desumidificação e posteriormente analisa-se a influência do parâmetro de Luikov sobre os campos de temperatura e de umidade. Na seção 4.5 este problema é analisado para o caso no qual as condições de contorno são de terceira espécie e funções periódicas do tempo.

As curvas de temperatura e conteúdo de umidade apresentadas na Fig. 4.1 são representativas da situação em que ocorre umidificação e aquecimento da placa porosa, relativas às Eqs. (3.171) e (3.172):

Observa-se que a difusão de calor é visivelmente predominante, o que pode ser explicado pelo valor do parâmetro  $Lu$  informando que a difusibilidade térmica  $\alpha$  é 10 vezes maior que a difusibilidade mássica  $D_{\theta}$ .

A curva de temperatura para  $FO = 1,0$  mostra que  $T^*$  atinge valores superiores a 1,0 ou seja  $T(x,t) > T_0$ , indicando que a temperatura da placa atinge valores superiores à temperatura ambiente. Observa-se que isto ocorre em consequência do vapor das regiões de maiores conteúdos de líquido migrar para o centro da placa, condensando e liberando energia, tornando a placa mais aquecida que o meio ambiente. À medida que o tempo passa, a distribuição do conteúdo de líquido tende a uniformizar-se, tendendo a 1,0 e ao mesmo tempo o perfil de temperatura atinge o estado de

equilíbrio com o meio ambiente.

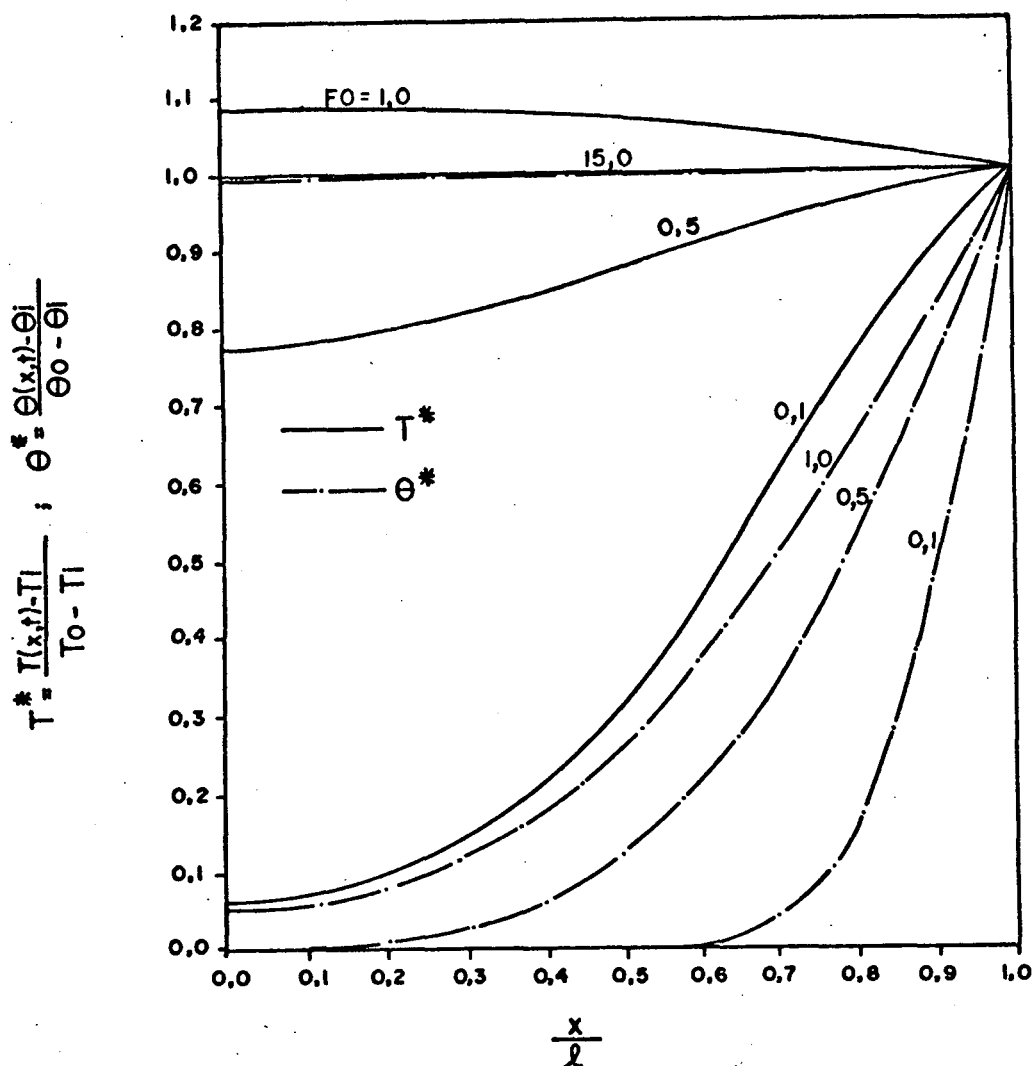


Figura 4.1 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade para

$$K0_0 = -2,0 ; Fe = 0,1 \text{ e } Lu = 0,1.$$

A Fig. 4.2 mostra as densidades de fluxo de calor e de massa. O fluxo de calor é negativo para pequenos FO, indicando que existe condução de calor para o interior da placa. Para FO=1,0 ocorre um fluxo de calor positivo, da placa para as extremidades, concordando com o fato que para esse instante a placa encontra-se a uma temperatura superior à dos extremos.



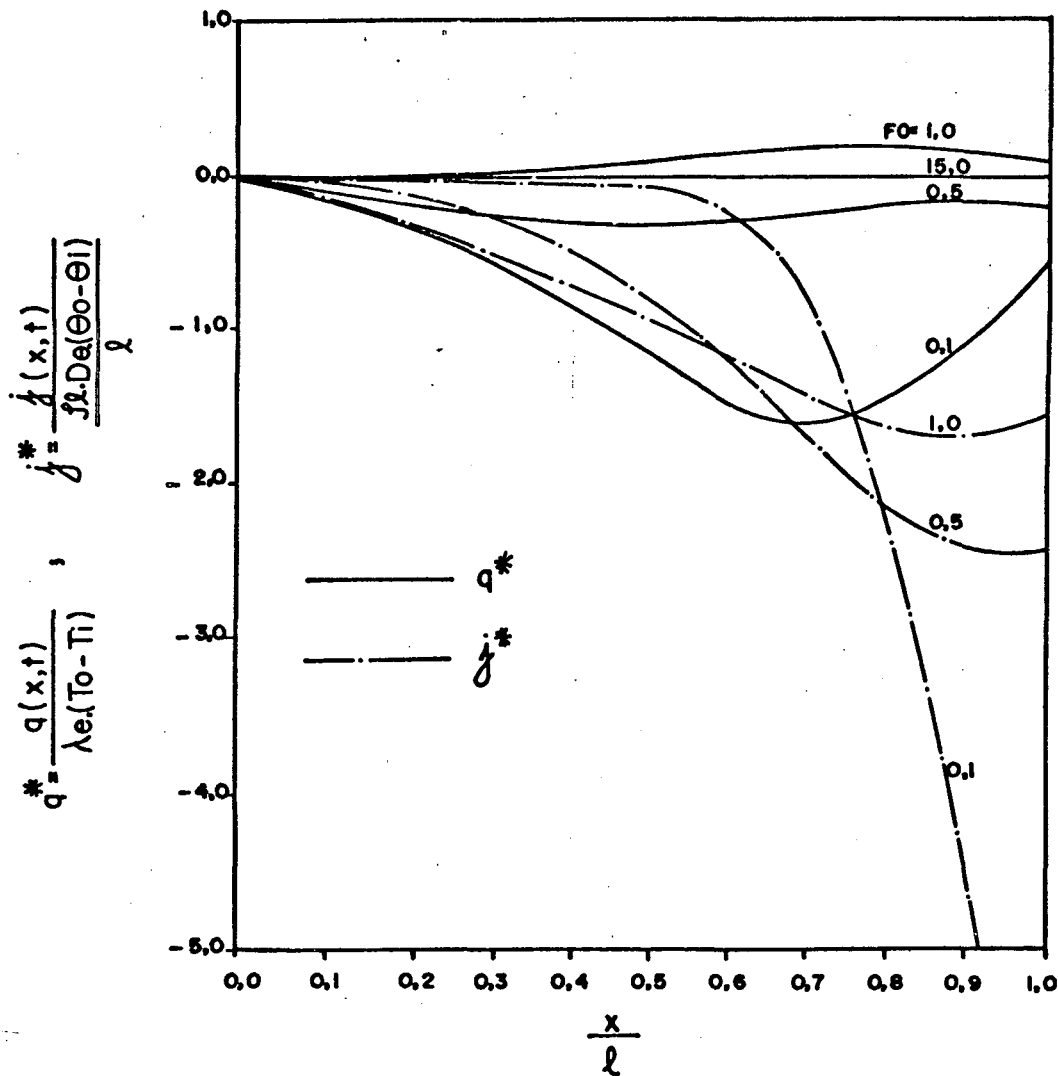


Figura 4.2 - Densidades de fluxo de calor e de massa para  $KO_0 = -2,0$ ,  $Fe = 0,1$  e  $Lu = 0,1$ .

Inicialmente, observa-se um alto fluxo de massa para o interior da placa devido aos altos gradientes de temperatura e de conteúdo de umidade. Posteriormente, para  $FO = 0,5$ , ocorre uma sensível redução neste fluxo pois a placa já está entrando em equilíbrio térmico, e então o fluxo de massa passa a ser promovido apenas pelo gradiente de conteúdo de umidade.

A Fig. 4.3 mostra a influência do parâmetro de Luikov,  $Lu = \frac{D_\theta}{\alpha}$ , sobre o desenvolvimento dos perfis de temperatura e

do conteúdo de umidade.

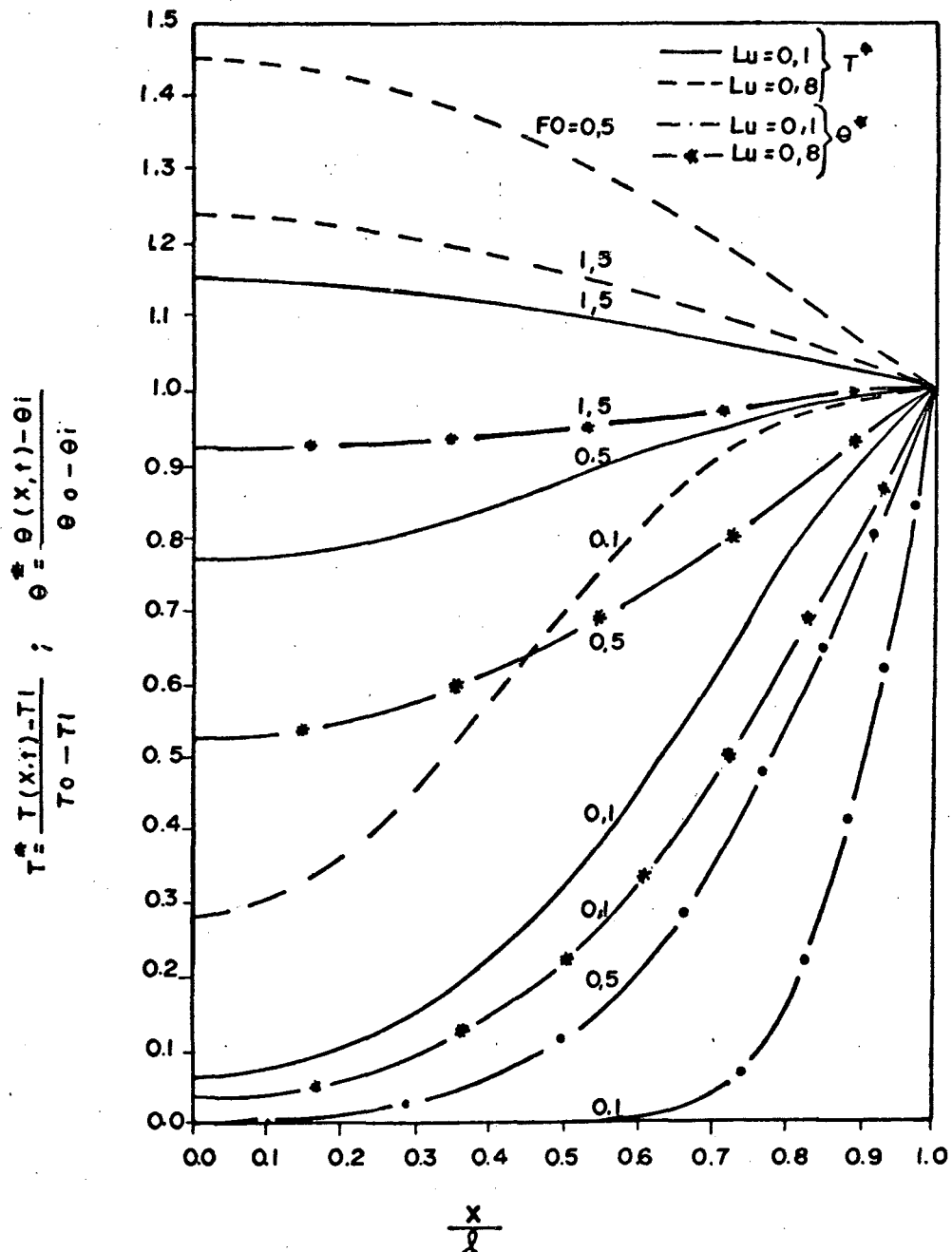


Figura - 4.3 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade para  $KO_0 = -2,0$  e  $Fe = 0,1$ .

Para  $FO = 0,5$ , por exemplo, nota-se que o perfil de conteúdo de umidade para  $Lu = 0,8$  atingiu, no centro da placa, o

valor de 0,52 enquanto que para  $Lu = 0,1$ , atingiu apenas 0,01. A influência sobre o desenvolvimento do perfil de temperatura também é visível. Para  $FO = 0,5$  e  $Lu = 0,8$ ,  $T^*$  atingiu 1,45, o que significa que o centro da placa está 45% mais aquecido que a superfície. Os valores altos de temperatura são explicados pelo fato que, para  $Lu = 0,8$ , o fluxo de massa é mais intenso, possibilitando maior condensação e liberação de energia no centro da placa.

Assim, fica clara a influência do parâmetro de Luikov no desenvolvimento dos perfis de temperatura e de conteúdo de umidade. A influência do parâmetro Federov será analisada no item 4.4.4.

#### 4.2 - Caso não Simétrico - Condições de Contorno de Primeira Espécie Constantes

Nesta seção, serão apresentadas as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade relativas a um processo de aquecimento e umidificação.

Será feito também um estudo comparativo entre os processos de transmissão de calor para com os processos que envolvem migração de massa: umidificação e desumidificação.

#### 4.2.1 - Processo de Aquecimento e Umidificação

Os resultados que são apresentados neste item são relativos às Eqs. (3.251) e (3.252). As condições ambientes são as seguintes:  $T_i = 50^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 60^\circ\text{C}$ ,  $\theta_i = 0,1 \text{ m}^3/\text{m}^3$ ,  $\theta_1 = 0,2 \text{ m}^3/\text{m}^3$ ,  $\theta_2 = 0,4 \text{ m}^3/\text{m}^3$ .

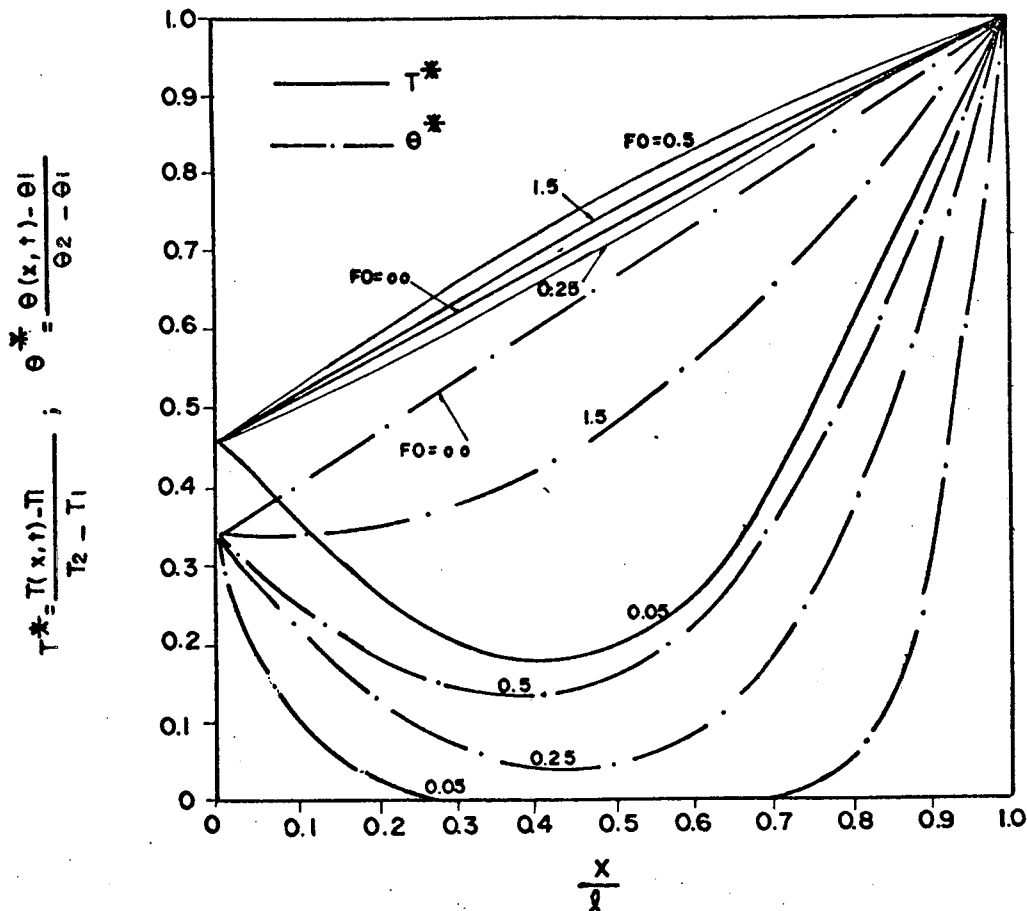


Figura 4.4 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO's < 0$ .

Nota-se que as linhas de temperatura e de conteúdo de umidade sobem com o tempo, caracterizando o processo de aquecimento e umidificação. Observa-se que a distribuição de temperatura, para  $FO = 0,5$ , atinge valores superiores aos da linha correspondente ao regime permanente, ou seja, a reta que une os pontos

correspondentes às temperaturas dos extremos ( $\frac{x}{l} = 0$  e  $\frac{x}{l} = 1$ ). Isto é explicado pelo fato que o vapor migra das regiões aquecidas (laterais) para a região menos aquecida (centro) condensando e liberando energia, tornando a região central da placa mais aquecida. Observa-se que para  $FO = 1,5$ , o perfil de conteúdo de umidade já está bem próximo da linha de regime permanente, situação em que a taxa de condensação é contrabalanceada, em cada ponto do meio poroso, por uma taxa idêntica de evaporação e, de forma coerente, a linha de temperatura se aproxima da linha do regime permanente.

Quando o tempo for suficientemente grande, atinge-se a situação de regime permanente. Tomando as Eqs. (3.175) e (3.176), sob esta condição, tem-se que

$$D_{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$(\alpha + rD_T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + rD_{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

Resolvendo este sistema em  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  tem-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad T(x) = ax + b \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta(x) = cx + d.$$

Estas duas equações mostram que, em regime permanente, as distribuições são duas retas, concordando com a ilustração da Fig. 4.4.

A Fig. 4.5 ilustra os fluxos de massa e de calor correspondentes às distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade da Fig. 4.4. A curva de fluxo de calor correspondente à  $FO = 0,05$  evidencia o aquecimento inicial da placa com fluxo positivo (da esquerda para a direita) e negativo (da direita para a esquerda). As outras curvas de fluxo de calor mostram um fluxo líquido da direita para a esquerda.

As curvas de fluxo de massa, Fig. 4.5, mostram que para os instantes  $FO = 0,05$  ;  $0,25$  e  $0,5$  está ocorrendo umidificação da placa, já que no extremo esquerdo ( $\frac{x}{l} = 0$ ) o fluxo é positivo e no extremo direito o fluxo é negativo, ou seja, em ambos os extremos ocorre fluxo de massa do ambiente para o interior da placa. Para estes mesmos instantes a Fig. 4.4 mostra que o conteúdo de umidade da placa está aumentando com o tempo.

A curva de fluxo para  $FO = 1,5$  mostra que, neste instante, existe fluxo de massa no extremo direito apenas. O fluxo no extremo esquerdo é nulo pois  $j^* = f(\nabla\theta^*, \nabla T^*)$ .

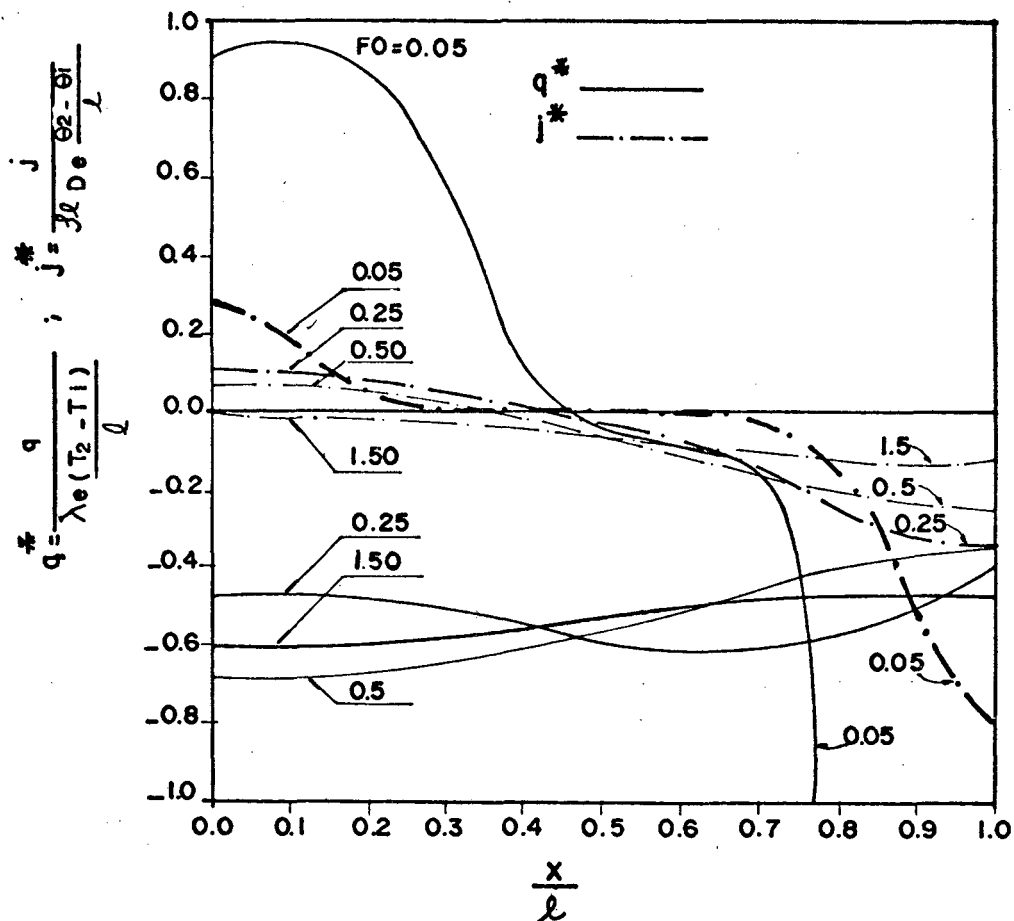


Figura 4.5 - Fluxos de massa e de calor para  $Fe=0,1$ ,  $Lu=0,1$  e  $KO's < 0$ .

#### 4.2.2 - Comparação entre os Processos de Transmissão de Calor Pura e os Processos de Transmissão de Calor e Massa Simultâneos

Na presente seção faz-se um estudo qualitativo da influência do transporte de massa sobre o processo de transferência de calor. Analisa-se o comportamento das distribuições de temperatura em três tipos de processos: (a) transferência de calor

pura, (b) transferência de calor e massa num processo de aquecimento e umidificação e (c) transferência de calor e massa num processo de aquecimento e desumidificação. As condições de contorno especificadas são as mesmas do item 4.2.1 sendo que no processo de desumidificação admitiu-se conteúdo inicial  $\theta_i = 0,4$ .

A Fig. 4.6 mostra as distribuições de temperatura para os três tipos de processos e para dois instantes:  $FO = 0,05$  e  $FO = 0,1$ .

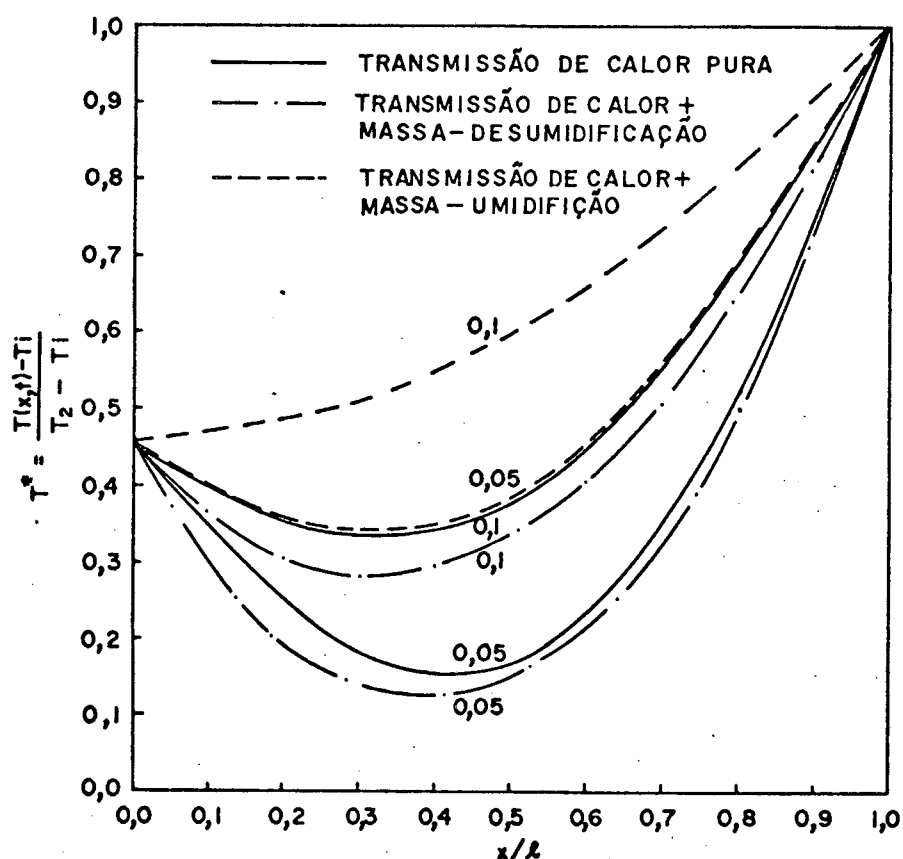


Figura 4.6 - Distribuições de temperatura para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$ .

Observa-se, na Fig. 4.6, que os perfis de temperatura relativos ao processo de transmissão de calor e massa-umidificação se desenvolvem com maior rapidez que os demais. Fixando um



instante,  $FO = 0,1$  e uma posição,  $\frac{x}{l} = 0,5$  vê-se que a temperatura ( $T^*$ ) no processo de umidificação atinge o valor 0,59 enquanto que, no processo de transmissão de calor pura, atinge 0,35. Isto mostra uma diferença de 68% entre os dois processos. Esta diferença é fisicamente coerente pois, no processo de umidificação, ocorre condensação no interior da placa liberando energia, contribuindo para um desenvolvimento mais rápido do campo de temperatura.

Para este mesmo instante e posição, compara-se o processo de transmissão de calor pura e o processo de desumidificação: a temperatura relativa ao primeiro processo (transmissão de calor pura) é 22% superior à temperatura do segundo processo (desumidificação). Este fato também é coerente, já que, no processo de desumidificação ocorre evaporação no interior da placa consumindo energia e retardando o desenvolvimento das distribuições de temperatura.

Observa-se que as diferenças entre os processos que envolvem transporte de massa e o processo de transmissão de calor pura não é a mesma. Ela é inferior quando se compara os processos de desumidificação e transmissão de calor pura.

Relembrando que o transporte de massa é promovido por dois gradientes,  $\frac{\partial \theta^*}{\partial (\frac{x}{l})}$  e  $\frac{\partial T^*}{\partial (\frac{x}{l})}$ , e considerando que no processo de aquecimento e umidificação estes gradientes são favoráveis e que no processo de aquecimento e desumidificação eles são contrários, conclui-se que o transporte de massa no primeiro caso deve ser eficiente, e, portanto, sua influência deve ser maior sobre o desenvolvimento do campo de temperatura.

A Fig. 4.7 mostra os desenvolvimentos dos perfis de temperatura com o tempo para os três processos, na posição

central da placa.

Observa-se que o tempo de desenvolvimento do perfil de temperatura no processo de umidificação é  $FO_d = 0,3$ ,

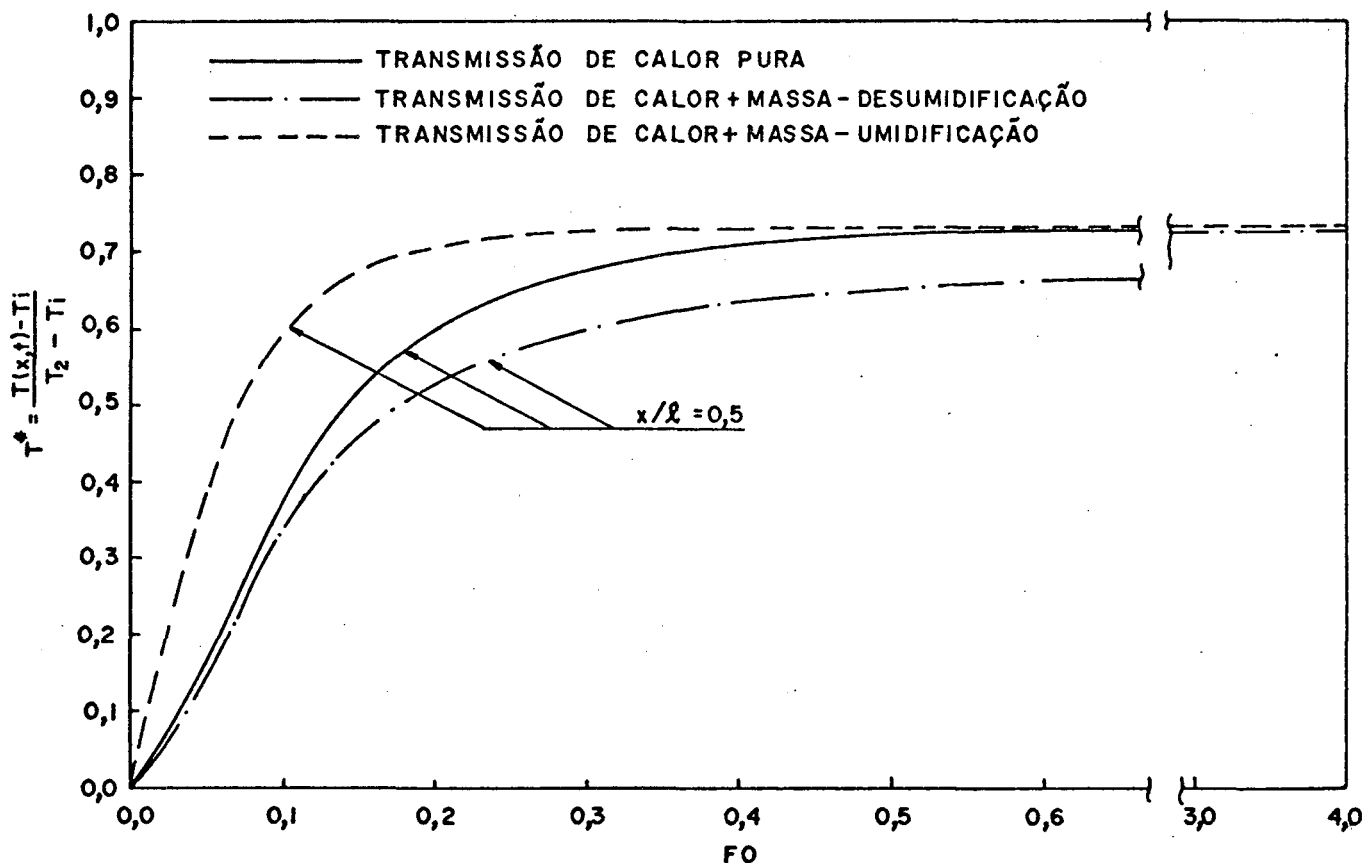


Figura 4.7 - Desenvolvimento dos perfis de temperatura para os três processos em análise -  $Lu = 0,1$  e  $Fe = 0,1$ .

para o processo de transmissão de calor pura é  $FO_d = 0,5$  e para o processo de desumidificação é  $FO_d = 3,0$ . As diferenças são consideráveis.

A conclusão desta análise é que, em regime transiente, os perfis de temperatura se desenvolvem mais rapidamente quando o processo é de aquecimento e umidificação.

#### 4.3 - Caso Simétrico - Condições de Contorno de Primeira Espécie Funções do Tempo

Nesta seção serão apresentadas as curvas relativas aos desenvolvimentos feitos na seção 3.2. Trata-se das soluções para os casos nos quais a placa fica submetida a condições de contorno que variam com o tempo de acordo com funções senoidais.

Os objetivos da presente análise prendem-se a: i) de terminar as distribuições de temperatura e de umidade, quando as condições de contorno oscilam periodicamente (representando as oscilações diárias e/ou sazonais das condições dos ambientes quando estes interagem com elementos porosos das edificações); ii) determinar a influência de uma distribuição sobre o desenvolvimento da outra e, conseqüentemente, sobre os processos de transmissão de calor e umidade, em condições de regime transitório periódico.

A presente seção é dedicada ao caso simétrico. O caso não simétrico será tratado na seção 4.4.

##### 4.3.1 - Processo de Aquecimento e Umidificação

A Fig. 4.8 mostra as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade em função da posição para vários valores de

FO (tempo adimensional), relativas às Eqs. (3.145) e (3.146). As características físicas são mantidas constantes por meio dos parâmetros  $Lu = \frac{D_\theta}{\alpha}$  e  $Fe = r \frac{D_T}{D_\theta}$ . A frequência das oscilações são controladas por meio do parâmetro  $Pd = \frac{2\pi f L^2}{\alpha}$ . Para este exemplo a frequência é de 1/24h. Os números de Kossovich são negativos e determinados a partir das seguintes condições ambientes:  $T_i = 5^\circ\text{C}$ ,  $T_m = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_a = 10^\circ\text{C}$ ,  $\theta_i = 0,1$ ,  $\theta_m = 0,3$  e  $\theta_a = 0,1$ .

Observa-se que as curvas de temperatura desenvolvem-se mais rapidamente que as curvas de conteúdo de umidade. Por exemplo, as curvas de  $T^*$  e  $\theta^*$  para  $FO = 1,0$  mostram uma grande diferença nas velocidades de propagação das ondas de temperatura e de umidade. A impressão que se tem é que as ondas de umidade são amortecidas nas primeiras camadas de material.

Pode-se dar duas explicações básicas para este comportamento: (a) o processo é de aquecimento e umidificação. O vapor que migra para o interior da placa logo condensa liberando energia no interior da mesma, contribuindo para o seu aquecimento. Por outro lado, o vapor migra devido a dois gradientes: gradiente de umidade e de conteúdo. Como a placa se aquece rapidamente, logo surgem gradientes de temperatura negativos e contrários aos gradientes de conteúdo de umidade, influenciando a migração de vapor (b). Outro fator que influencia o transporte de massa é o parâmetro  $Lu = 0,1$  utilizado neste exemplo, informando que  $\alpha = 10 \cdot D_\theta$ , logo o processo de difusão de calor deve ser mais eficiente realmente.

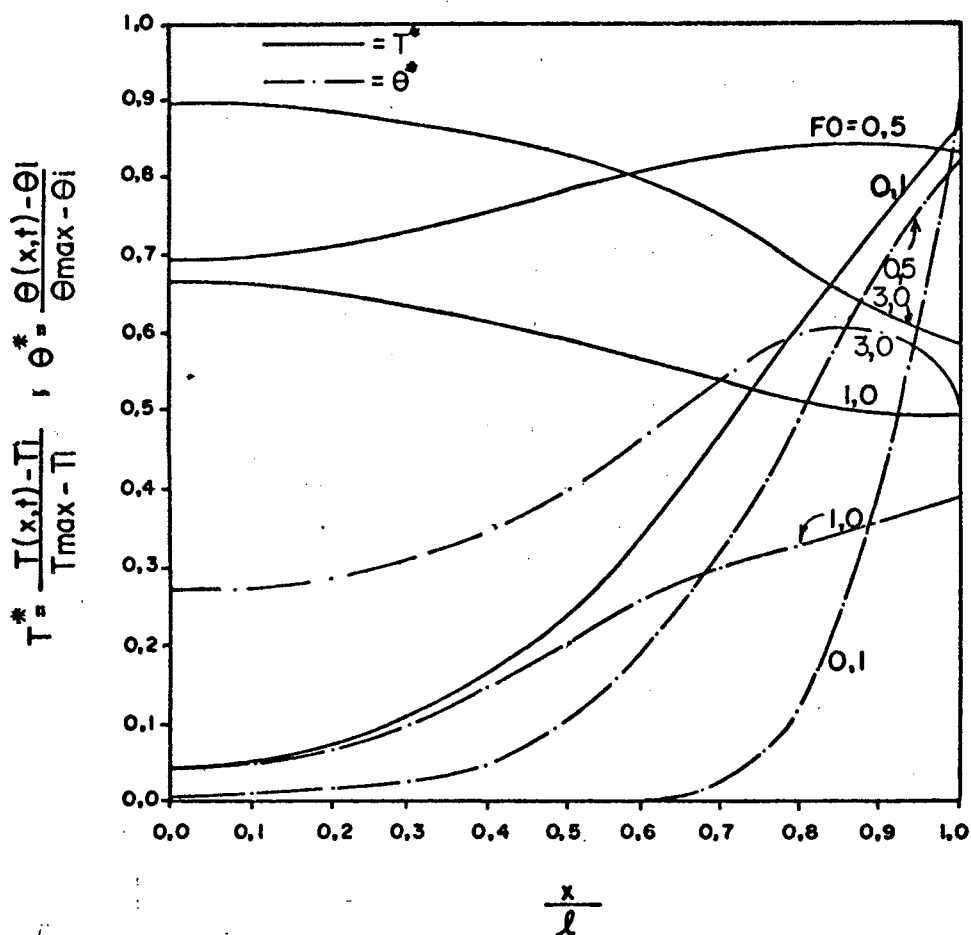


Figura 4.8 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO's < 0$ .

A Fig. 4.9 apresenta as densidades de fluxos de massa e calor, relativas às Eqs. (3.147) e (3.148).

Um fato que chama a atenção diz respeito à curva de fluxo de massa correspondente a  $FO=1,0$ . Nas proximidades de  $\frac{x}{l} = 0,7$  o fluxo diminui em valor absoluto, mesmo com o gradiente de conteúdo não tendo mudado de sinal, pois o gradiente de temperatura negativo aumenta, prejudicando o fluxo de massa. Em seguida, a partir de  $\frac{x}{l} = 0,8$ , o fluxo de massa aumenta em valor absoluto pois o gradiente contrário de temperatura se anula, permanecendo apenas o gradiente de conteúdo de umidade.

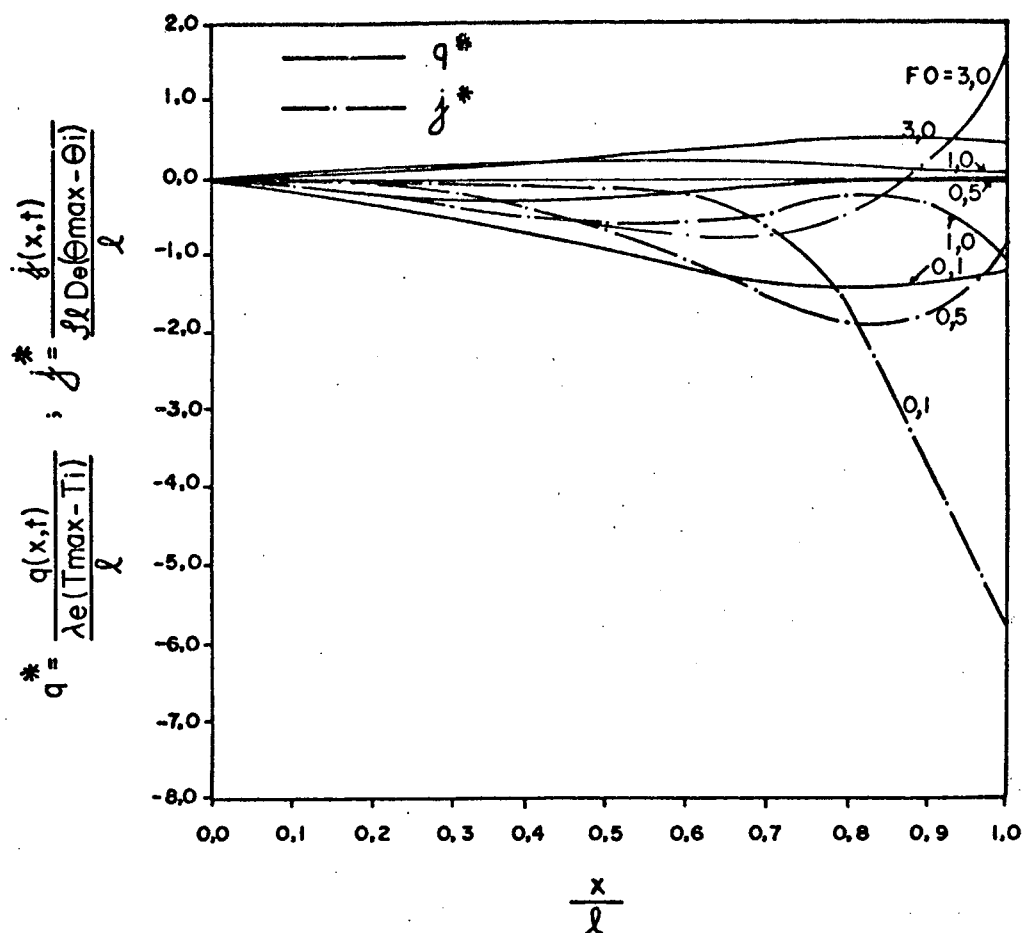


Figura 4.9 - Densidades de fluxo de massa e de calor para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO' < 0$ .

Para  $FO = 0,5$  ocorre um comportamento contrário. O fluxo de massa aumenta nas proximidades de  $\frac{x}{l} = 0,8$  em virtude de um aumento no gradiente de  $\theta^*$ , diminuindo para valores maiores de  $\frac{x}{l}$  devido à uma redução no gradiente de  $\theta^*$  e também devido à presença de um pequeno gradiente contrário de  $T^*$ .

#### 4.3.2 - Processo de Aquecimento e Desumidificação

As distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade, relativas às Eqs. (3.145) e (3.149), podem ser vistas na Fig. 4.10. As condições de contorno são as mesmas do item 4.3.1 exceto para o conteúdo de umidade:  $\theta_i = 0,5$ ,  $\theta_a = 0,1$ ,  $\theta_m = 0,3$ . As propriedades físicas são iguais também.

Observando a Fig. 4.10, vê-se que as curvas de temperatura sobem com o tempo até que a condição de contorno começa a cair. É possível, neste caso, que a placa fique mais aquecida que o meio devido a inércia térmica, (a distribuição de temperatura para  $FO = 0,9$ , apresenta valores superiores à condição de contorno).

O processo de desumidificação fica visivelmente caracterizado quando se observa as curvas de conteúdo caírem com o tempo à medida que a condição na superfície limitante cai também. Ocorre um fato curioso quando  $FO = 0,1$ : o conteúdo de umidade  $\theta^*$ , assume valores maiores que 1 entre  $\frac{x}{\ell} = 0,2$  e  $\frac{x}{\ell} = 0,65$ , ou seja, para este instante, o conteúdo de umidade da placa fica superior ao conteúdo inicial,  $\theta_i$ . Isto é fisicamente coerente pois, para  $FO = 0,1$ , o perfil de temperatura da Fig. 4.10 indica que a placa está, nesse momento, aquecida na periferia e fria na região central. O líquido evapora na região quente, migrando para o exterior e para o interior da placa. A parcela que migra para o interior encontra uma região mais fria e condensa, aumentando o conteúdo de umidade.

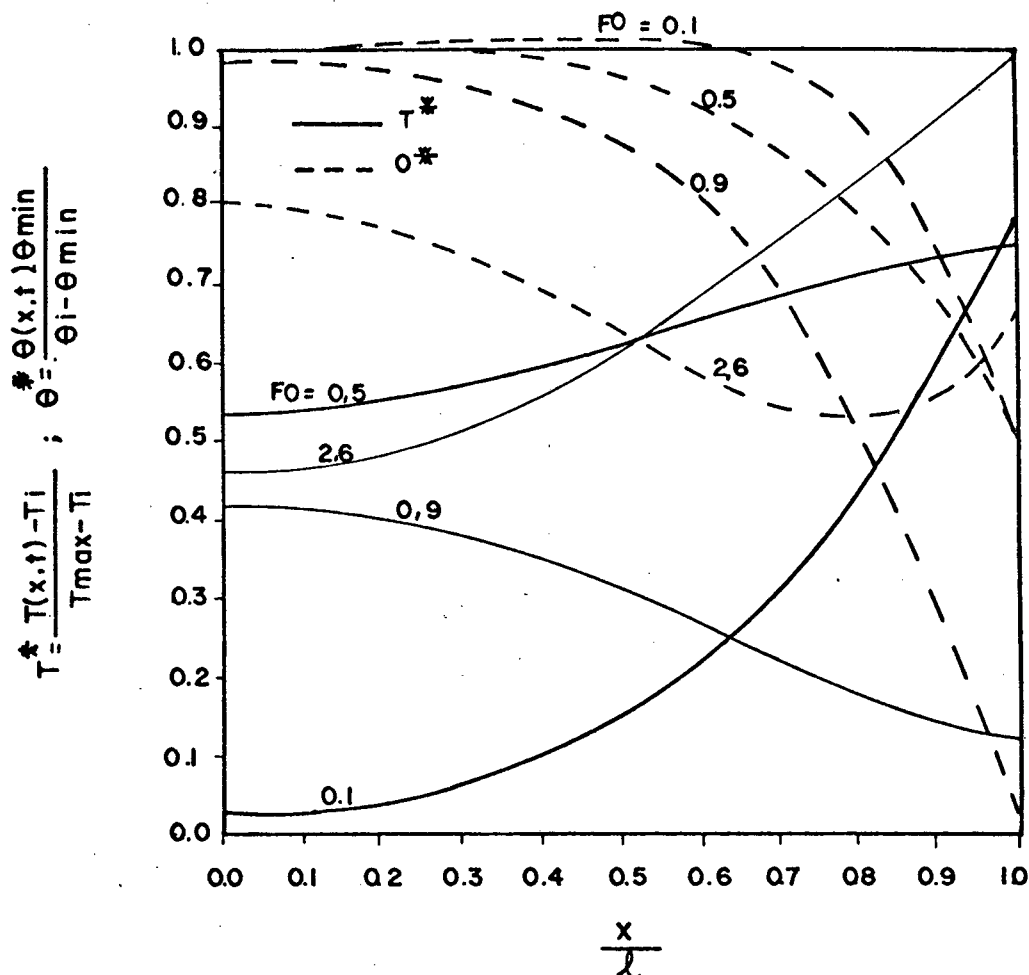


Figura 4.10 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO's > 0$ .

O comportamento das demais curvas são de fácil compreensão, caracterizando o aquecimento, a desumidificação e as oscilações das condições de contorno.

A Fig. 4.11 apresenta as densidades de fluxos de massa e de calor relativas às Eqs. (3.147) e (3.150).

A curva do fluxo de massa correspondente a  $FO = 0,1$  ilustra o comentário anterior, quando mostra a existência de fluxo de massa negativo (para o interior da placa) até  $\frac{x}{l} = 0,6$ , ficando positivo para  $\frac{x}{l} > 0,6$  devido a existência de gradiente de conteúdo entre a placa e a condição de contorno.



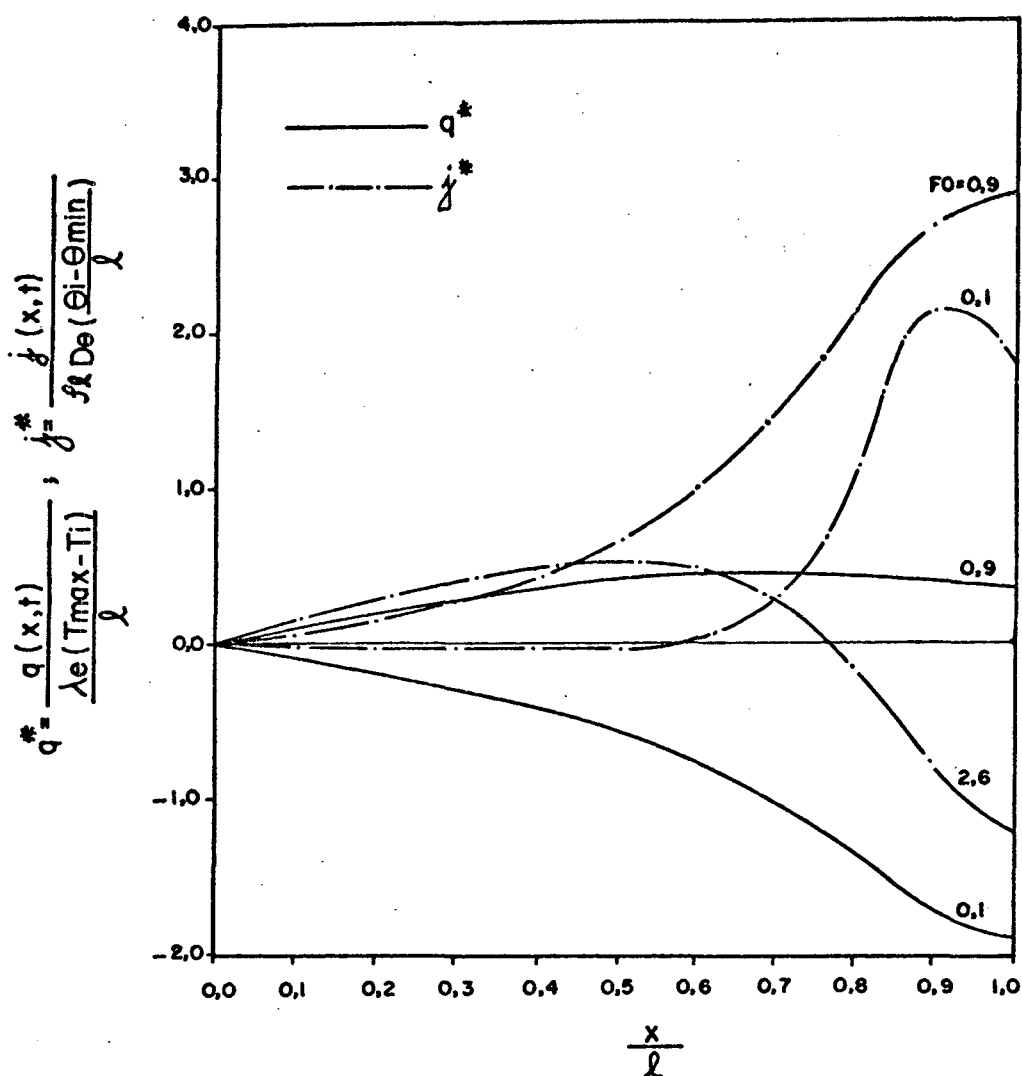


Figura 4.11 - Distribuições das densidades de fluxos de massa calor para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO's > 0$ .

A curva de fluxo de massa corresponde a  $FO = 2,6$ , in forma que o fluxo de massa é positivo (do interior para o exterior) até  $\frac{x}{l} = 0,75$  devido à predominância do gradiente de conteúdo. A partir de então os gradientes de temperatura e de conteúdo são favoráveis à existência de fluxo negativo, justificando o comportamento desta curva.

4.3.3 - Processo para o qual a Placa está, Inicialmente, em Equilíbrio de Conteúdo de Umidade com o Ambiente e é Submetida a uma Diferença de Temperatura

Este tipo de processo é informado ao modelo por meio dos parâmetros de Kossovich. Quando  $KO = 0$  significa que existe um estado de equilíbrio inicial entre a placa e as condições de contorno em termos de conteúdo de umidade.

A Fig. 4.12 contém as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade, relativas às Eqs. (3.151) e (3.152), para as mesmas condições dos itens anteriores exceto no que se refere ao conteúdo de umidade:

$$\theta_i = \theta_m \quad \text{e} \quad \theta_a = 0, \quad \text{ou seja,} \quad KO_m = 0 \quad \text{e} \quad KO_a = 0.$$

Como  $\theta^* = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{r(T_{\max} - T_i)}$ , e como em  $\frac{x}{\ell} = 1$  tem-se uma condição de conteúdo prescrito,  $\theta(x = \ell, t) = \theta_m = \theta_i$ , tem-se que  $\theta^* = 0$  em  $\frac{x}{\ell} = 1$  para qualquer instante, como ilustra a Fig. 4.12. Este exemplo pode ser interpretado, também, como sendo o de uma placa colocada em contato com um reservatório de umidade (existe sempre fluxo de massa na fronteira de modo a manter a condição de fronteira inalterada).

A curva de conteúdo para  $FO = 0,1$  mostra o surgimento de uma onda de conteúdo nas proximidades de  $\frac{x}{\ell} = 1$  em consequência do aquecimento da placa. Esta onda se propaga com o tempo para o interior da placa, uniformizando os perfis de conteúdo, como pode ser visto para  $FO = 0,5$  e  $FO = 0,7$ .

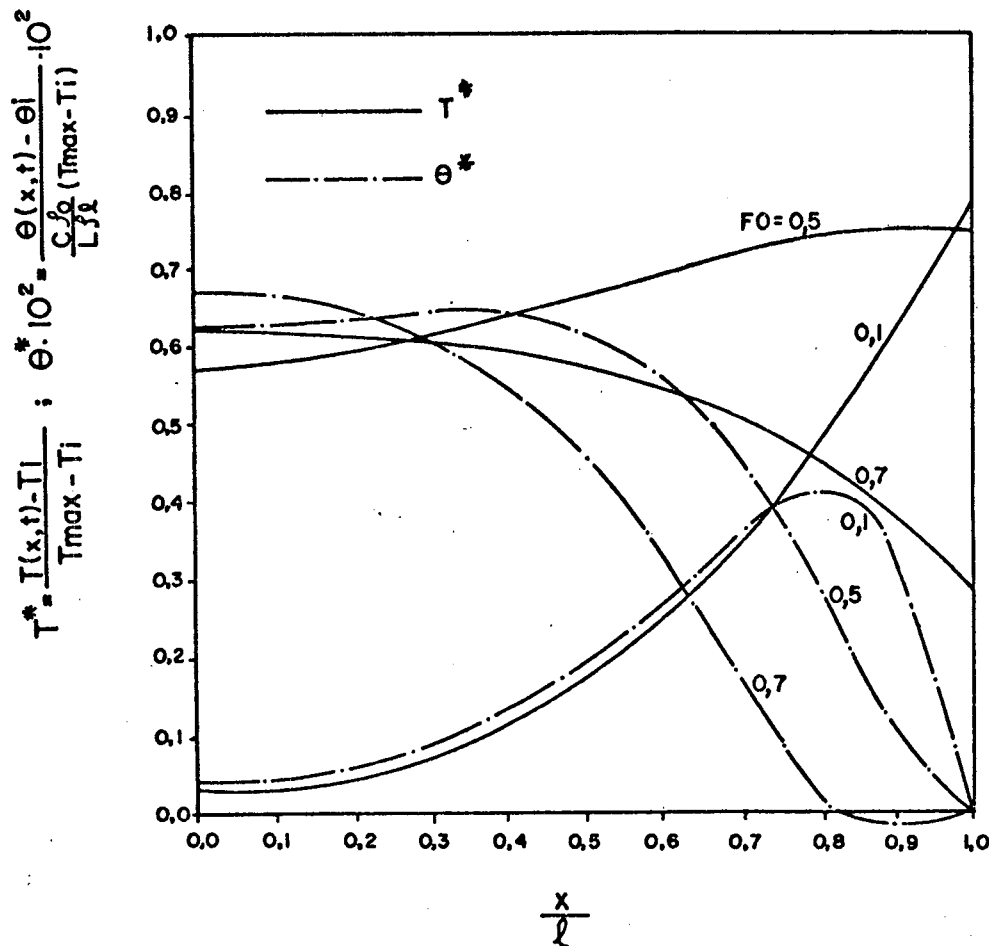


Figura 4.12 - Distribuição de temperatura e de conteúdo de umidade para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO's = 0$ .

Observa-se que o conteúdo de umidade, para  $FO = 0,5$  e  $FO = 0,7$ , diminui muito nas proximidades de  $\frac{x}{\ell} = 1,0$ . Isto ocorre devido à temperatura ambiente estar caindo neste intervalo de tempo, surgindo, então, um fluxo de massa do interior para o exterior como pode ser visto na Fig. 4.13 (curvas de fluxo de massa).

A Fig. 4.13 contém as curvas das densidades de fluxo de calor e de umidade relativas às Eqs. (3.153) e (3.154). As curvas de fluxo de massa relativas a  $FO = 0,5$  e  $FO = 0,7$  mostram que, nesses instantes, está ocorrendo um fluxo de massa da placa para o reservatório. Isto é coerente com o fato que, para esses valores de  $FO$ , o reservatório está a temperaturas inferiores à da placa. Isto explica também a presença do pequeno vale em  $\frac{x}{\ell} = 0,9$

e  $FO = 0,7$  mostrando  $\theta^* < 0$ , ou seja  $\theta(x,t) < \theta_i$ .

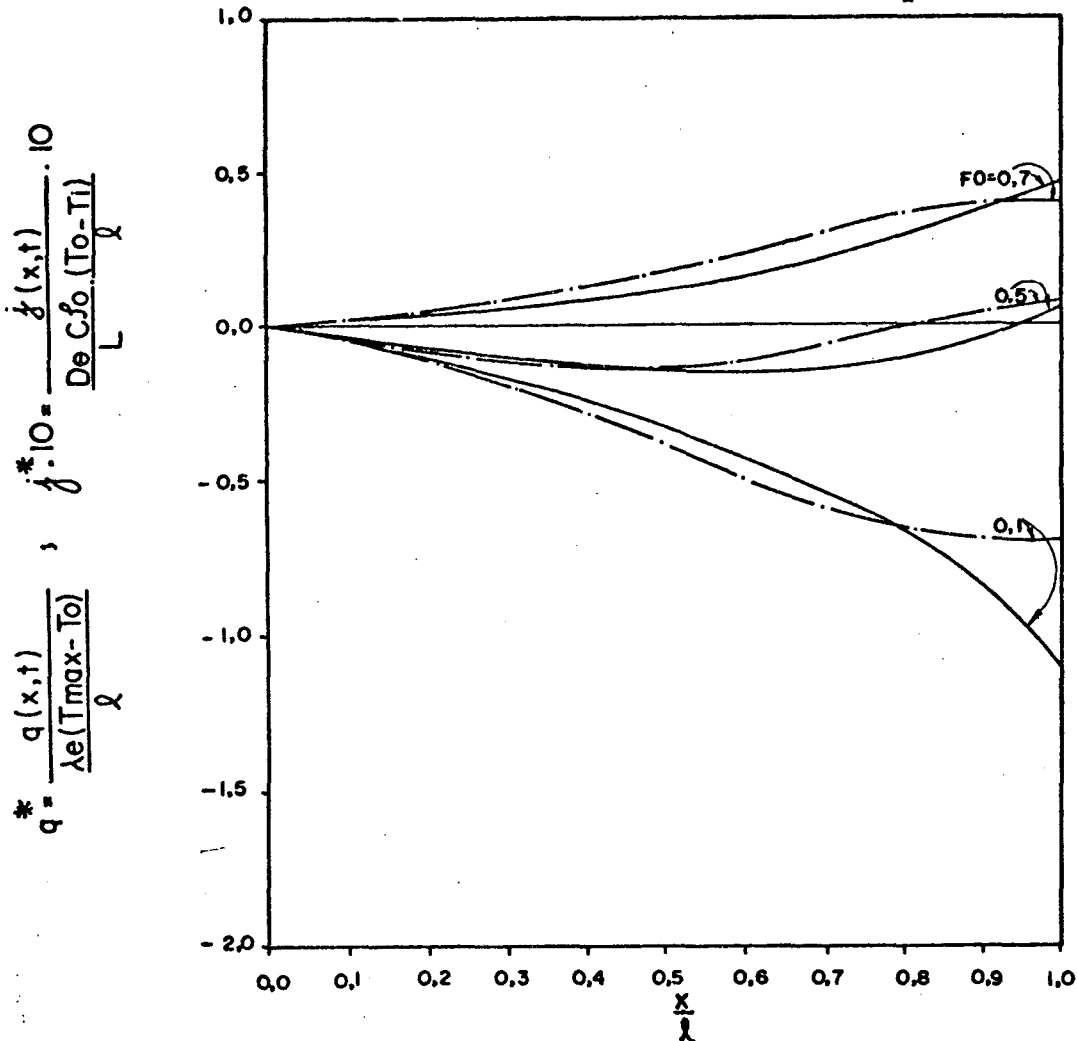


Figura 4.13 - Distribuições das densidades de fluxo de massa e de calor para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO's = 0$ .

Na seção 4.5 serão analisados também os casos para os quais  $\alpha \gg D_\theta$  e  $D_T \gg D_\theta$  e também o caso de transmissão de calor pura, ou seja,  $\alpha \gg D_\theta$  e  $\alpha \gg D_T$ .

#### 4.4 - Caso não Simétrico - Condições de Contorno de Primeira Espécie - Funções Senoidais do Tempo

Os resultados que serão apresentados na presente seção são referentes ao desenvolvimento da seção 3.4 serão apresentados resultados relativos a vários tipos de processos determinados pelos parâmetros de Kossovich.

Valores positivos de KO caracterizam um processo de desumidificação, valores negativos de KO caracterizam um processo de umidificação, e valores nulos de KO caracterizam um processo no qual a placa encontra-se, inicialmente, em equilíbrio de conteúdo de umidade com o meio ambiente. Serão apresentados também, casos com as condições de contorno oscilando em fase e, alternativamente, defasadas de um extremo da placa para o outro.

##### 4.4.1 - Processo de Aquecimento e Umidificação

Os resultados que são apresentados a seguir são referentes às Eqs. (3.237) e (3.238). Fixou-se vários dos parâmetros nelas contidos, permitindo a variação apenas da posição e do tempo, para que fosse possível obter curvas de análise mais fácil. Estas curvas podem ser vistas na Fig. 4.14. As condições de contorno são caracterizadas por:  $T_i = 10^\circ\text{C}$ ,  $T_{m1} = 25\text{ C}$ ,  $T_{a1} = 5^\circ\text{C}$ ,  $T_{m2} = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_{a2} = 5^\circ\text{C}$ ,  $\theta_i = 0,1$ ,  $\theta_{m1} = 0,3$ ,  $\theta_{a1} = 0,1$ ,  $\theta_{m2} = 0,4$ ,  $\theta_{a2} = 0,1$ , frequência = (1/24h). Observa-se que as curvas de tempo

ratura evoluem mais rapidamente que as curvas de umidade, o que pode ser explicado pelo valor do parâmetro de Luikov,  $Lu = 0,1$ , ou seja, a difusibilidade mássica é muito inferior à difusibilidade térmica.

Observa-se também que, sendo o processo de umidificação, ocorre fluxo de vapor das laterais para o centro da placa, condensando e liberando energia e contribuindo para o desenvolvimento dos perfis de temperatura.

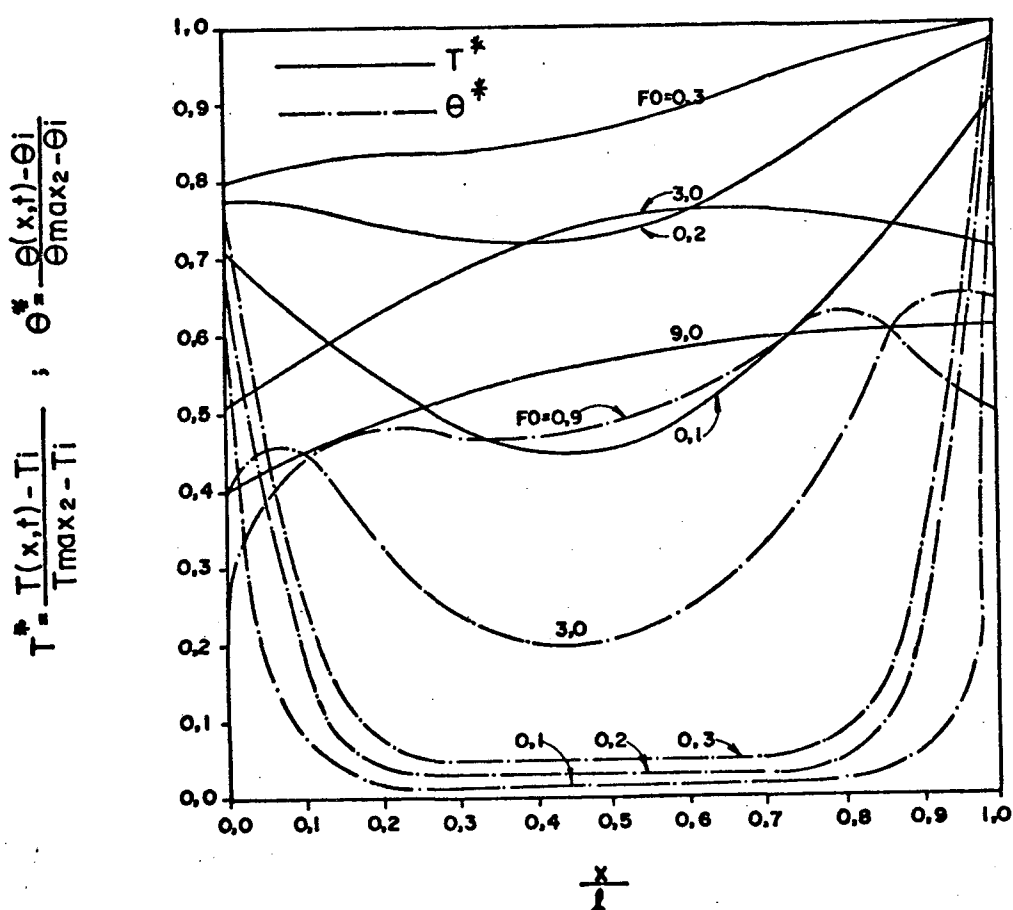


Figura 4.14 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade para  $Fe = 2,0$ ,  $Lu = 0,05$  e  $KO's < 0$ .

Em  $FO = 0,3$  o perfil de temperatura já se apresenta bastante uniforme, enquanto que o perfil de conteúdo de umidade encontra-se em fase de desenvolvimento. Em  $FO = 3,0$  o perfil de con

teúdo de umidade continua em desenvolvimento e o perfil de temperatura oscila acompanhando as condições de contorno. Quando  $FO=9,0$  o perfil de conteúdo mostra-se bastante desenvolvido e iniciando a oscilar, acompanhando as condições de contorno. Percebe-se, ou trossim, o quanto o desenvolvimento do campo de conteúdo de umidade é mais lento comparado com o desenvolvimento do campo de temperatura.

As Figs. 4.15 e 4.16 ilustram as densidades dos fluxos de calor e de massa, relativos às Eqs. (3.239) e (3.240), para vários valores de  $FO$ .

A Fig. 4.15 mostra que para  $FO=0,1$  ocorre um alto fluxo de calor, a partir de ambas as laterais da placa aquecendo-a, em consequência. Para instantes posteriores,  $FO=0,3$  por exemplo, predomina um fluxo de calor negativo evidenciando que existe um fluxo líquido atravessando a placa da direita para a esquerda. Isso se deve ao fato que a temperatura do extremo direito é superior à temperatura do extremo esquerdo.

Observando-se a Fig. 4.16 vê-se que, de forma análoga ao processo de transmissão de calor, nos instantes iniciais ocorre fluxo de massa para o interior da placa, proveniente de ambas as laterais, umidificando-a.

Para valores maiores de  $FO$ , por exemplo  $FO=3,0$  a placa começa a perder umidade para o ambiente, caracterizando um processo de desumidificação temporário.

Os processos de umidificação e desumidificação que ocorrem ao longo do tempo tem um comportamento cíclico não periódico pois o primeiro predomina sobre o segundo até que a placa atinja a condição de umidificação completa. A partir de então o

processo passa a ter um comportamento transiente periódico.

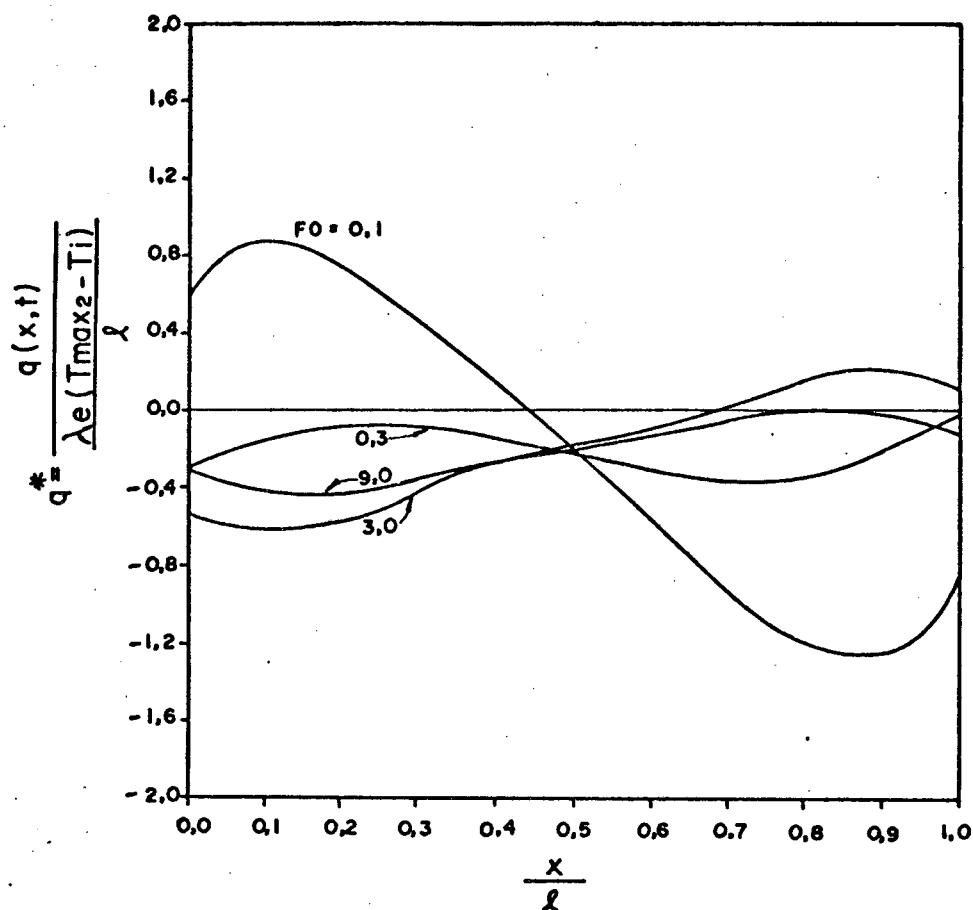


Figura 4.15 - Densidade de fluxo de calor para  $Fe = 2,0$ ,  $Lu = 0,05$  e  $KO's < 0$ .

#### 4.4.2 - Processo de Transmissão de Calor e Massa em Regime Transitório Periódico - Condições de Contorno Defasadas de Meio Ciclo

Nesta seção, analisa-se o processo de transmissão de calor e massa numa placa porosa, em regime transitório periódico, quando as condições de contorno estão defasadas de meio ciclo.

A Fig. 4.17 mostra as distribuições de temperatura



para o caso em que as condições de contorno estão em fase. No ins

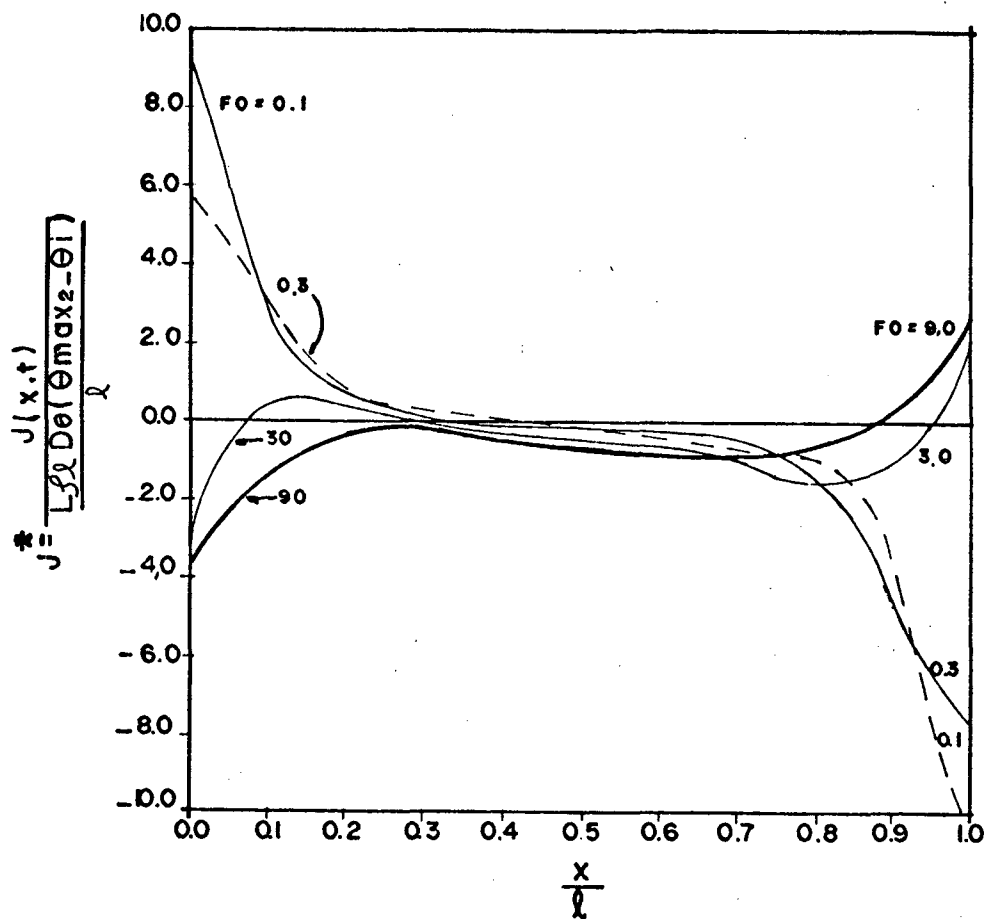


Figura 4.16. - Densidade de fluxo de massa para  $Fe = 2,0$ ,  $Lu = 0,05$  e  $KO's < 0$ .

tante  $FO = 30,1$  inicia-se um ciclo, quando a temperatura da placa começa a subir. A partir deste instante todas as linhas ( $FO = 30,1, \dots, FO = 30,6$ ) têm um comportamento semelhante, diferindo entre si por uma translação, caracterizando o processo transitório cíclico. Em  $FO = 30,7$  o ciclo começa a inverter e a temperatura começa a cair. As linhas tracejadas mostram a continuação do ciclo.

A Fig. 4.18 ilustra o comportamento das distribuições de temperatura para o caso no qual as condições de contorno estão defasadas de meio ciclo. Acompanhando as curvas a partir de

$FO = 30$ , observa-se que em  $\frac{x}{\ell} = 1,0$  a placa está sendo aquecida em quanto em  $\frac{x}{\ell} = 0,0$  ela está sendo resfriada. Isso ocorre devido às condições de contorno estarem defasadas.

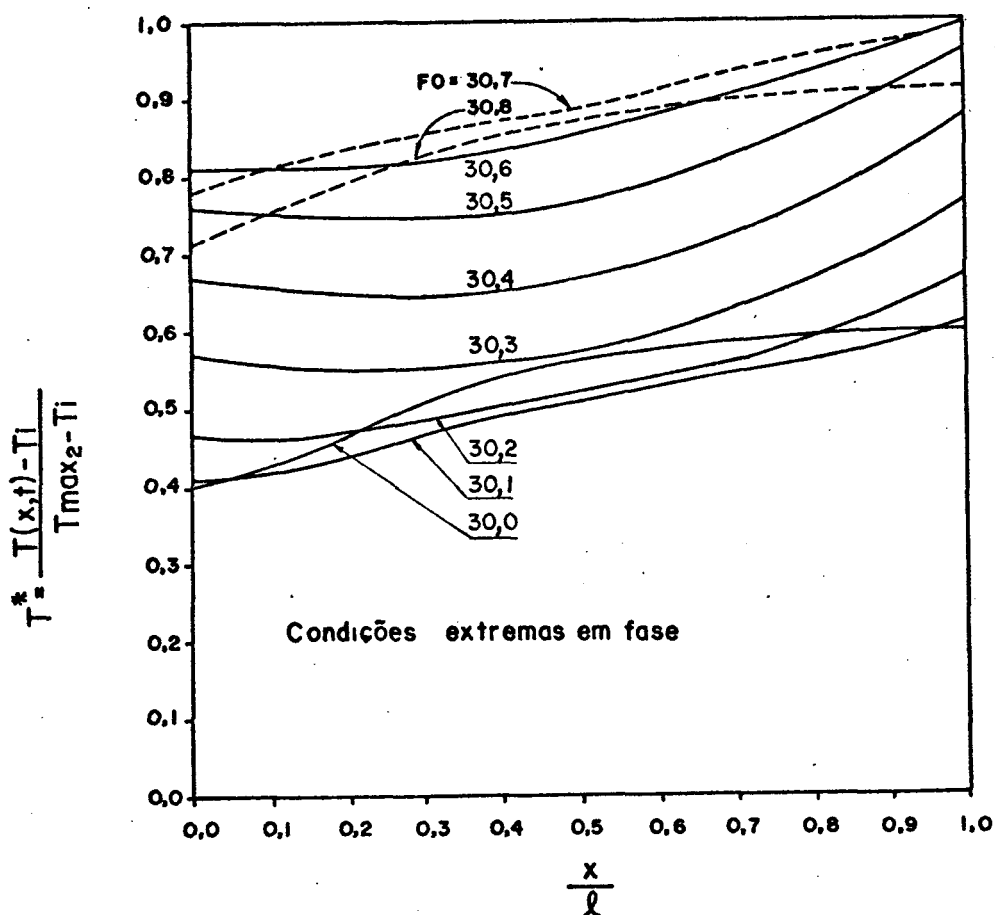


Figura 4.17 - Distribuições de temperatura - regime transiente cíclico -

$$Fe = 2,0, \quad Lu = 0,05, \quad KO's < 0 - T_{m1} = 25^{\circ}C, \quad T_{m2} = 30^{\circ}C,$$

$$T_{a1} = T_{a2} = 5^{\circ}C, \quad \theta_{m1} = 0,3, \quad \theta_{m2} = 0,4, \quad \theta_{a1} = \theta_{a2} = 0,1.$$

Nos instantes  $FO = 30,0$  e  $FO = 30,1$  as duas distribuições são muito próximas uma da outra, indicando o início do ciclo, quando a variação da temperatura com o tempo é pequena. O ciclo se desenvolve até  $FO = 30,6$  quando começa a ser invertido. As linhas tracejadas,  $FO = 30,7$  e  $FO = 30,8$  representam a continuação do ciclo.

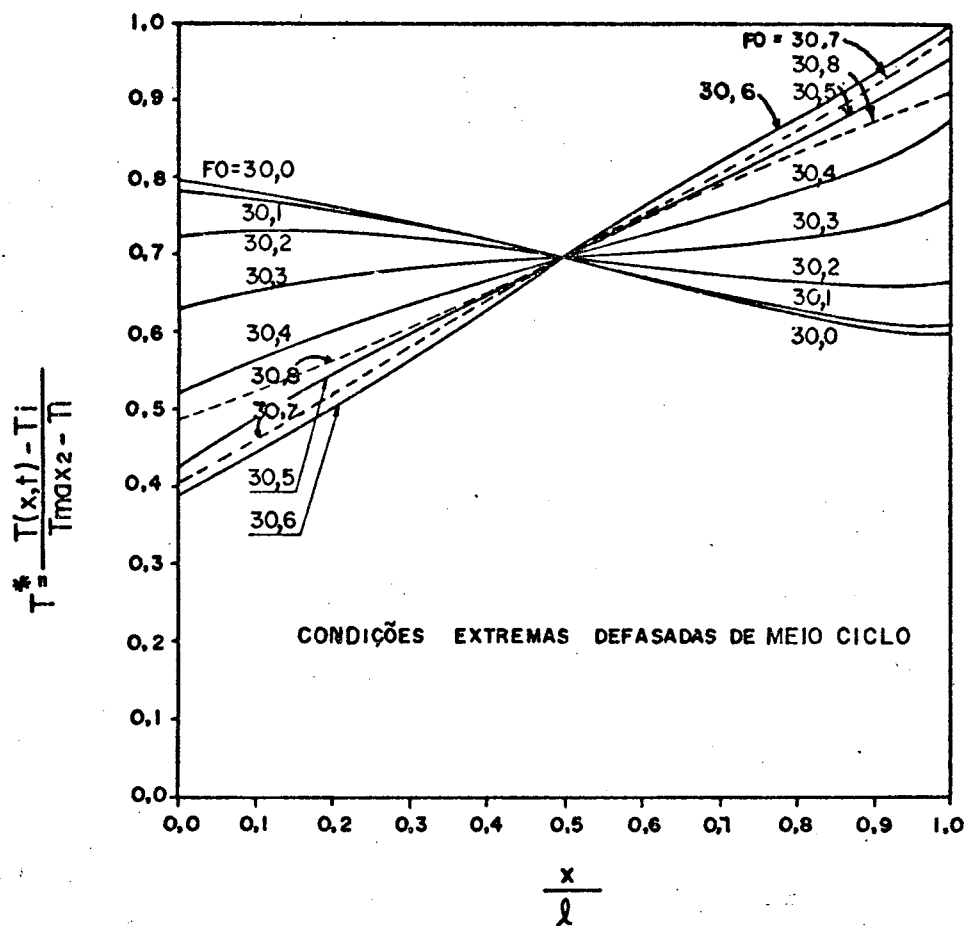


Figura 4.18 - Distribuições de temperatura - regime transiente -  
 $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

A Fig. 4.19 ilustra as distribuições de conteúdo de umidade relativas ao caso em que as condições de contorno estão em fase. Os perfis de conteúdo a partir de  $FO = 30,0$  sobem com o tempo acompanhando as condições de contorno até  $FO = 30,6$  quando o ciclo começa a inverter. As linhas tracejadas mostram a continuidade do ciclo, quando as condições de contorno começam a cair com o tempo.

Observa-se que os efeitos das oscilações das condições de contorno não atingem todo o interior da placa.

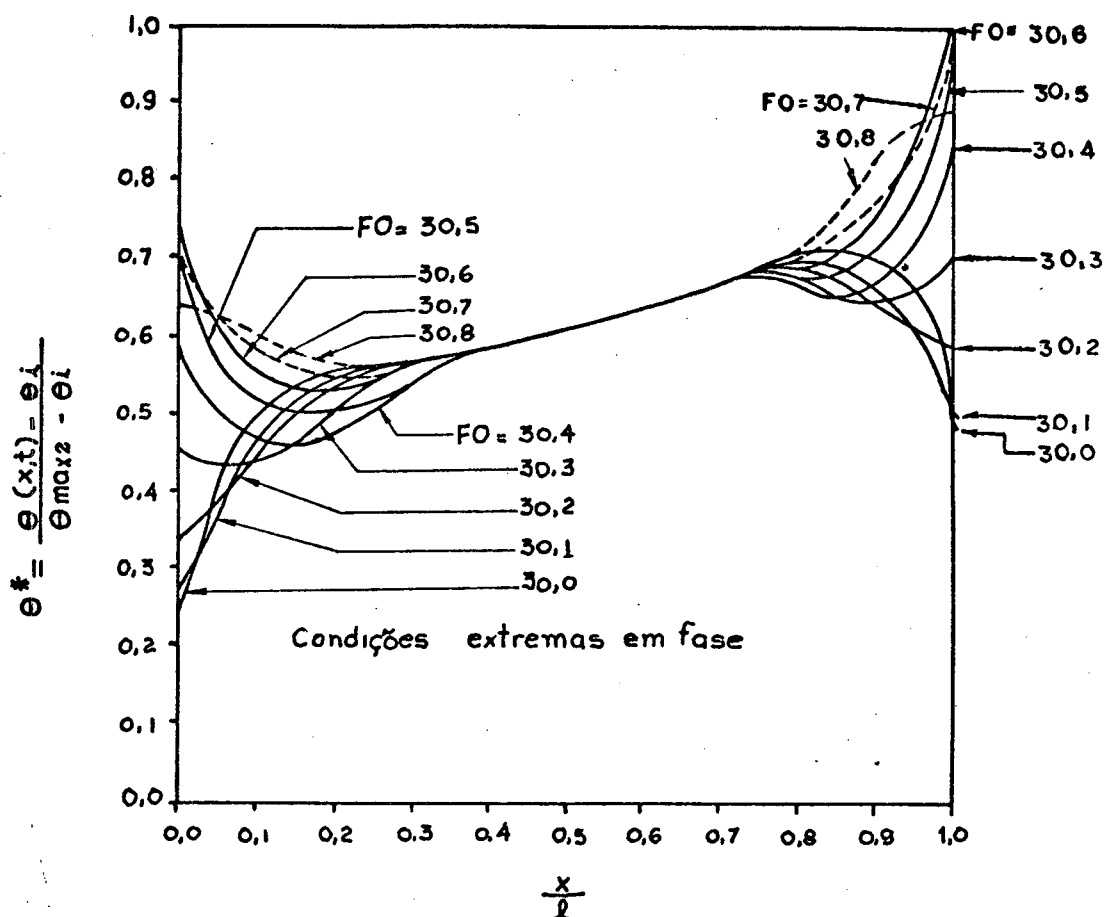


Figura 4.19 - Distribuições de conteúdo de umidade - regime transiente -  $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

As oscilações penetram até certo ponto, quando todas se reduzem a uma reta. O campo de temperatura da Fig. 4.18 mostra que todas as curvas se interceptam num ponto,  $\frac{x}{l} = 0,5$ . Estes comportamentos são explicados pelo fato que a difusibilidade mássica é muito inferior à difusibilidade térmica do material, o que impede que os efeitos das ondas de conteúdo de umidade atinjam a região central da placa.

Observa-se, ainda na Fig. 4.19, que o trecho de reta que constitui as interseções de todas as curvas é bastante semelhante à reta correspondente ao regime permanente do caso não simé

trico com condições de contorno constantes, como pode ser visto na Fig. 4.4, para  $FO = \infty$ . Inference-se que ao diminuir o número de Luikov, diminuindo a difusibilidade mássica esse trecho de reta se estenderá no sentido das laterais até que, no limite, com  $Lu \rightarrow 0$ , as distribuições de conteúdo de umidade para os casos de condições de contorno variáveis com o tempo se reduzirão às distribuições do caso em que as condições de contorno são constantes.

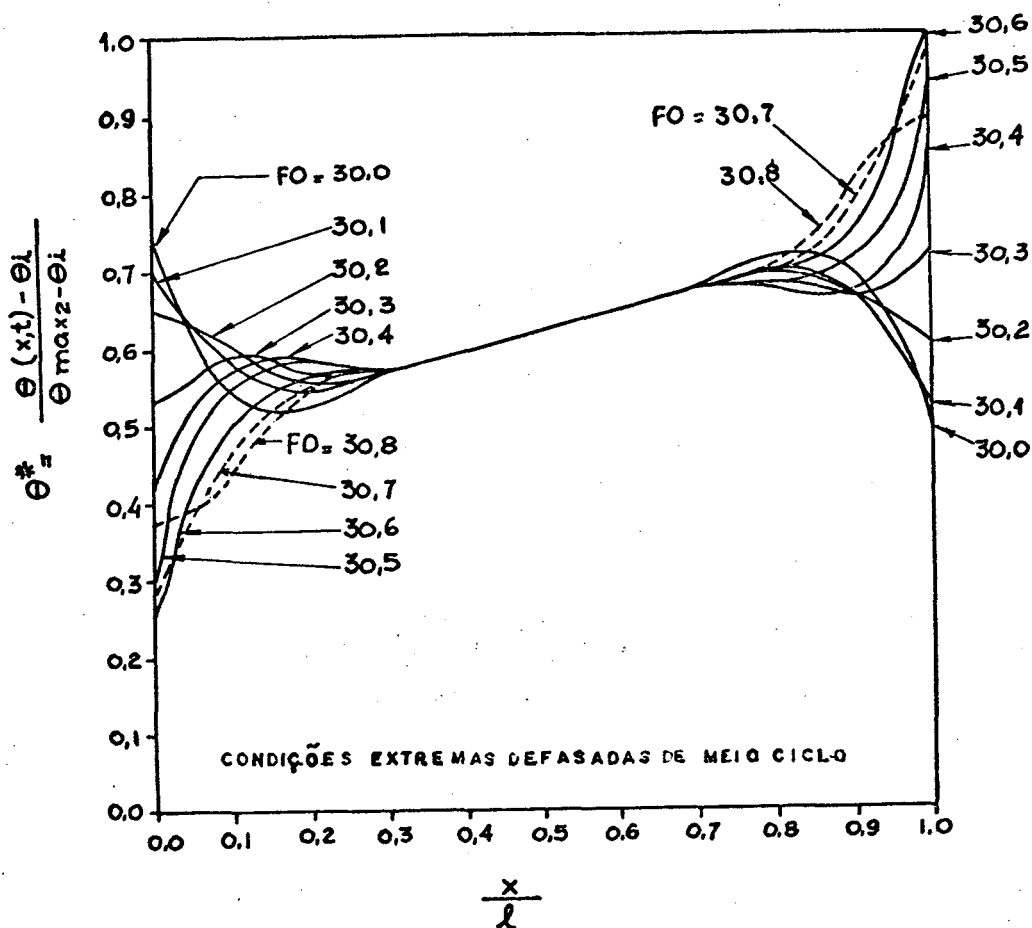


Figura 4.20 - Distribuições de conteúdo de umidade -  
 $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

A Fig. 4.20 representa as distribuições de conteúdo de umidade para o caso em que as condições de contorno estão defasadas de meio ciclo. O comportamento é análogo ao comportamento do caso cujas condições de contorno estão em fase. A diferença está no fato que, neste caso, ocorre um aumento de temperatura em  $\frac{x}{l} = 1,0$ , ao

mesmo tempo em que ocorre redução de temperatura em  $\frac{x}{\ell} = 0,0$ . Naquele caso, em ambos os lados as distribuições sobem e descem em fase.

A Fig. 4.21 mostra os fluxos de calor nas fronteiras da placa para os dois casos, a saber: (a) condições de contorno em fase (linhas cheias) e (b) condições de contorno defasadas de meio ciclo (linhas tracejadas). Observa-se que no primeiro caso, as temperaturas nos contornos estão em fase, os fluxos permanecem defasados. No segundo caso, as temperaturas dos extremos da parede estão defasados, os fluxos permanecem em fase e iguais. Estes fatos podem ser entendidos observando as derivadas das distribuições de temperatura nos extremos da placa, em  $\frac{x}{\ell} = 0,0$  e  $\frac{x}{\ell} = 1,0$ . Observan

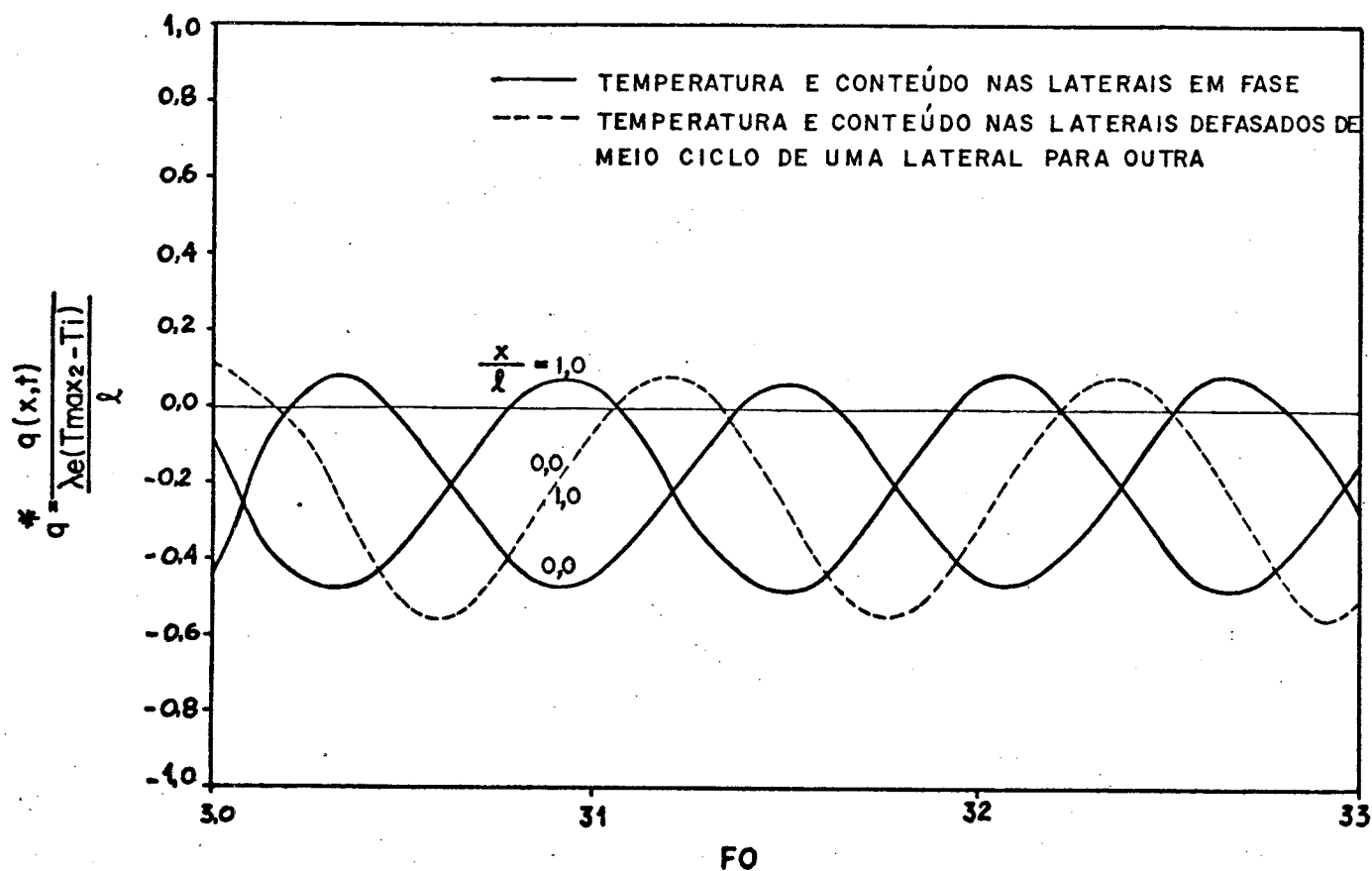


Figura 4.21 - Densidade fluxo de calor para  $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

do a Fig. 4.21 vê-se que as áreas acima do eixo e abaixo das curvas cheias são iguais e que a área abaixo do eixo e acima da curva tracejada é maior que a área abaixo do eixo e acima das curvas cheias ou seja, o fluxo médio de calor é maior quando as condições extremas estão defasadas. Por outro lado, a Fig. 4.22 mostra que ocorre o contrário em termos de fluxo de massa: o fluxo médio de massa é maior para as linhas cheias (condições em fase) em relação às linhas tracejadas (condições defasadas).

Na situação em que ocorre maior fluxo de massa ocorre, necessariamente, maior consumo de energia e isto explica porque o fluxo médio de calor é inferior quando as condições extremas estão em fase.

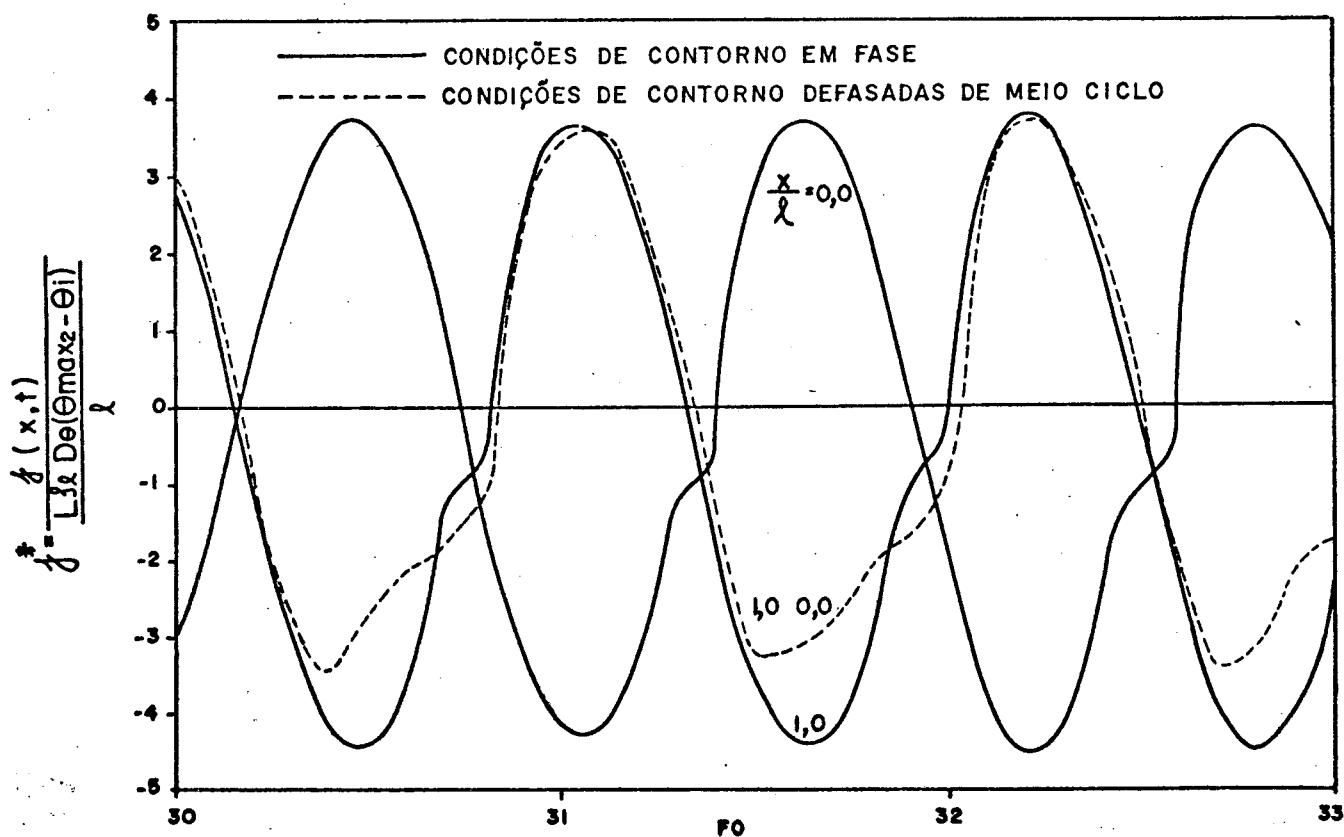


Figura 4.22 - Densidade de fluxo de massa para  $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

Observando-se a Fig. 4.22,  $\frac{x}{\ell} = 1,0$ , nota-se uma anomalia na curva do fluxo de massa no intervalo de tempo entre  $FO = 30,7$  e  $FO = 30,8$ . Com efeito, observa-se, nesse intervalo, uma redução na variação do fluxo de massa, ou seja o fluxo diminui menos rapidamente. Observando as curvas de temperatura na Fig. 4.17, vê-se que neste intervalo de tempo a temperatura da placa começa a cair resfriando as laterais. Por outro lado, observa-se na Fig. 4.19 que nesse intervalo de tempo os perfis de conteúdo de umidade começam a cair também. Os dois efeitos são prejudiciais ao fluxo de massa da placa para o meio ambiente, acarretando uma brusca redução do mesmo.

Para o extremo  $\frac{x}{\ell} = 0$  e neste mesmo intervalo de tempo não ocorreu esta anomalia no fluxo pois houve inversão do gradiente de conteúdo de umidade apenas. O gradiente de temperatura, nesta lateral, se conservou muito próximo de zero durante todo o intervalo de tempo pouco influenciando no fluxo de massa.

Observando-se, ainda, a Fig. 4.22, nota-se uma irregularidade semelhante no fluxo de massa, para o caso com condições de contorno defasadas. Essa irregularidade é, nesse caso, mais acentuada, iniciando em  $FO = 30,4$ . Este fato pode ser entendido, observando que nas Figs. 4.18 e 4.20, ambos os gradientes de temperatura e de conteúdo de umidade são reduzidos a partir de  $FO = 30,4$ . Estas reduções nos gradientes se prolongam, até o momento no qual ocorrem as inversões dos mesmos. O efeito sobre o fluxo de massa pode ser visto na Fig. 4.22.

Observa-se, ainda, que os fluxos de calor e massa ficam defasados quando as condições de contorno estão em fase e ficam em fase quando as condições de contorno estão defasadas.



Estes fatos são facilmente entendidos observando os comportamentos dos gradientes correspondentes a cada caso. No caso em fase, Fig. 4.17, por exemplo, os gradientes nos extremos têm sinais contrários durante todo o tempo, portanto quando numa face o fluxo é positivo na outra ele é negativo; quando numa face o gradiente muda de positivo para negativo, na outra face ocorre o contrário e assim sucessivamente.

#### 4.4.3 - Processo de Transmissão de Calor e Massa - Regime Transiente - Temperatura e Conteúdo de Umidade Defasados de Meio Ciclo de um Extremo da Placa para o outro.

No item anterior analisou-se este problema em regime transiente periódico. Nesta seção, mostra-se os resultados e as análises correspondentes ao regime transiente.

A Fig. 4.23 mostra a evolução das distribuições de temperatura com o tempo e para algumas posições distintas. Observa-se que a partir de  $FO = 0,6$  o campo de temperatura já está em regime transiente.

Para os instantes iniciais, já se observa a tendência das distribuições. A distribuição relativa a  $\frac{x}{L} = 0,1$ , por exemplo, desde  $FO = 0,1$  já acompanha a distribuição do extremo  $\frac{x}{L} = 0$ . Por outro lado a distribuição para  $\frac{x}{L} = 0,8$  acompanha o outro extremo,  $\frac{x}{L} = 1,0$ . Em  $\frac{x}{L} = 0,5$ , desde cedo a distribuição de temperatura assume um valor constante  $T^* = 0,73$ . Este comportamento constante em  $\frac{x}{L} = 0,5$  é explicado pelas amplitudes e frequências iguais em

ambos os lados da placa.

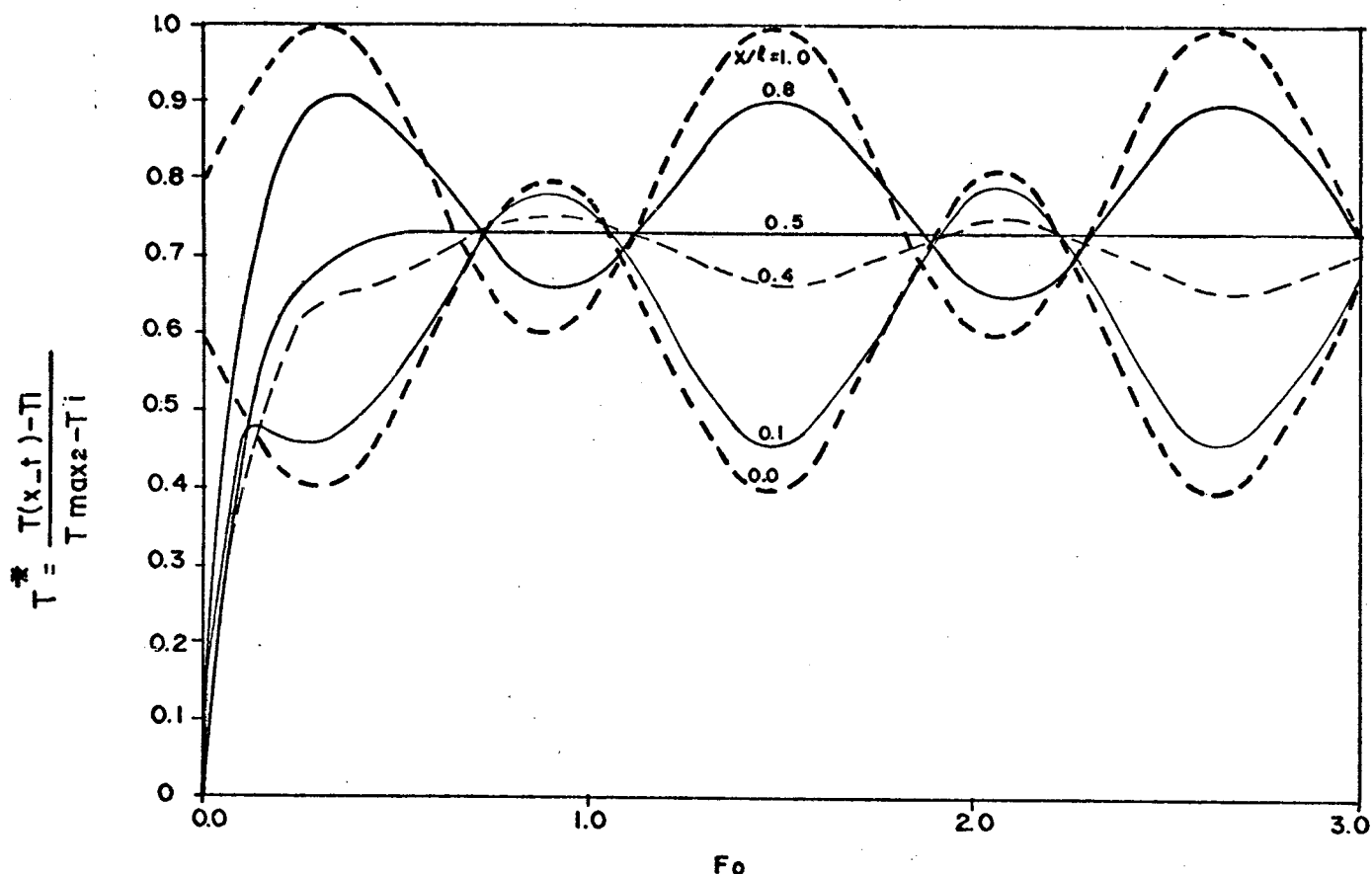


Figura 4.23 - Distribuição de temperatura para  $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

A Fig. 4.24 mostra as distribuições do conteúdo de umidade com o tempo para várias posições. Mostra as condições extremas,  $\frac{x}{l} = 0,0$  e  $\frac{x}{l} = 1,0$ , oscilando defasadas e também a evolução das distribuições para algumas posições. Na posição  $\frac{x}{l} = 0,1$ , que é bem próxima do extremo  $\frac{x}{l} = 0$ , percebe-se um desenvolvimento mais rápido do perfil de conteúdo de umidade pois, por ser próximo do extremo, recebe as influências das condições de contorno com maior rapidez.

Comparando as Figs. 4.23 e 4.24, nota-se o quanto o desenvolvimento do campo de umidade é mais lento que o campo de temperatura, o que é coerente com o fato que a difusibilidade

mássica é menor que a difusibilidade térmica.

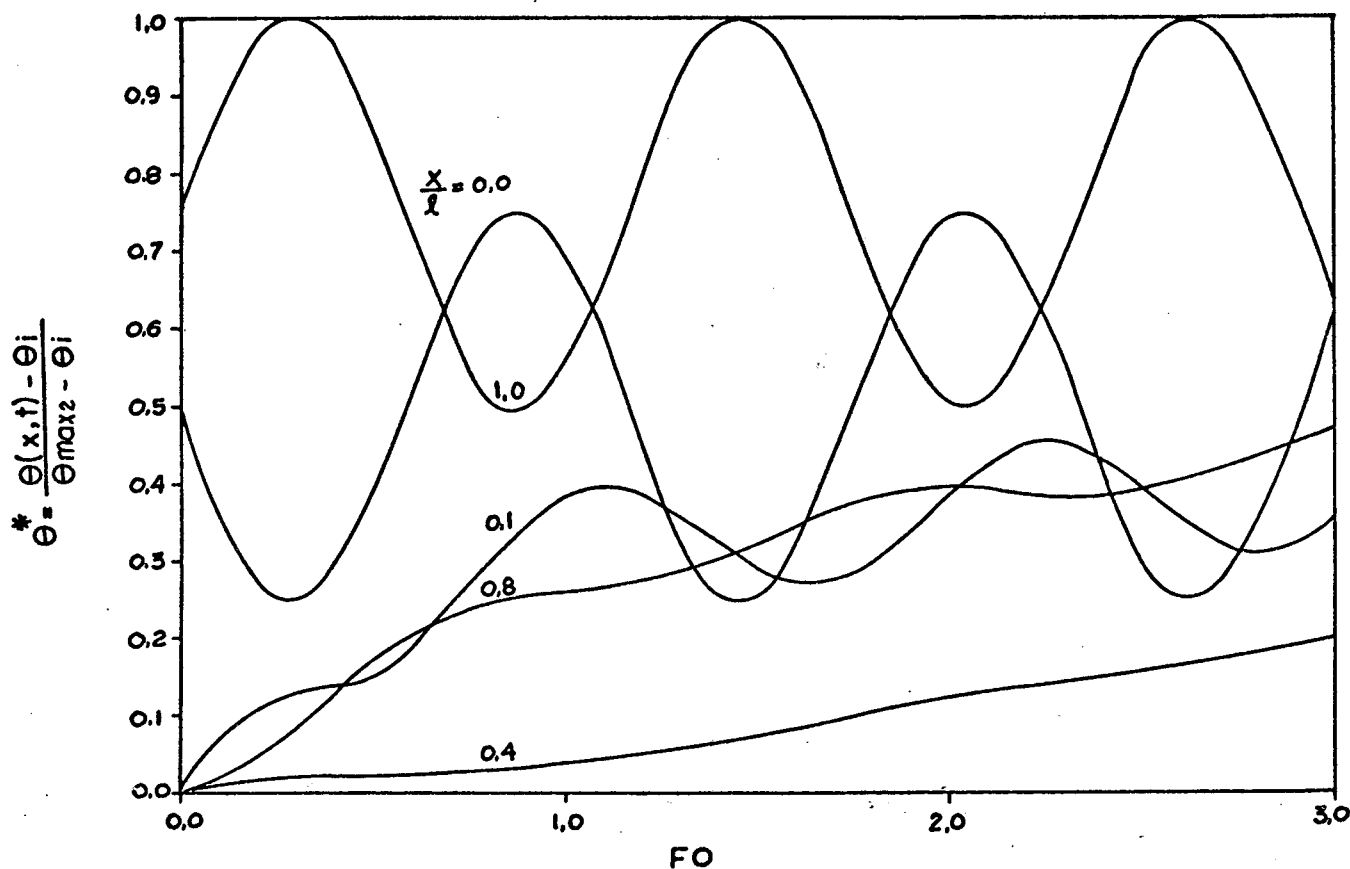


Figura 4.24 - Distribuições de conteúdo de unidade para  $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

Analisando a Fig. 4.25. observa-se que as ondas de calor são ampliadas no interior da placa, quando se compara os fluxos nas posições internas com os fluxos nos extremos. Isto ocorre em consequência do campo de conteúdo de unidade não estar ainda desenvolvido. O vapor migra para o interior da placa condensando e liberando energia.

Os fluxos de calor negativos são predominantes resultando um fluxo líquido de calor do lado direito para o lado esquerdo da placa.

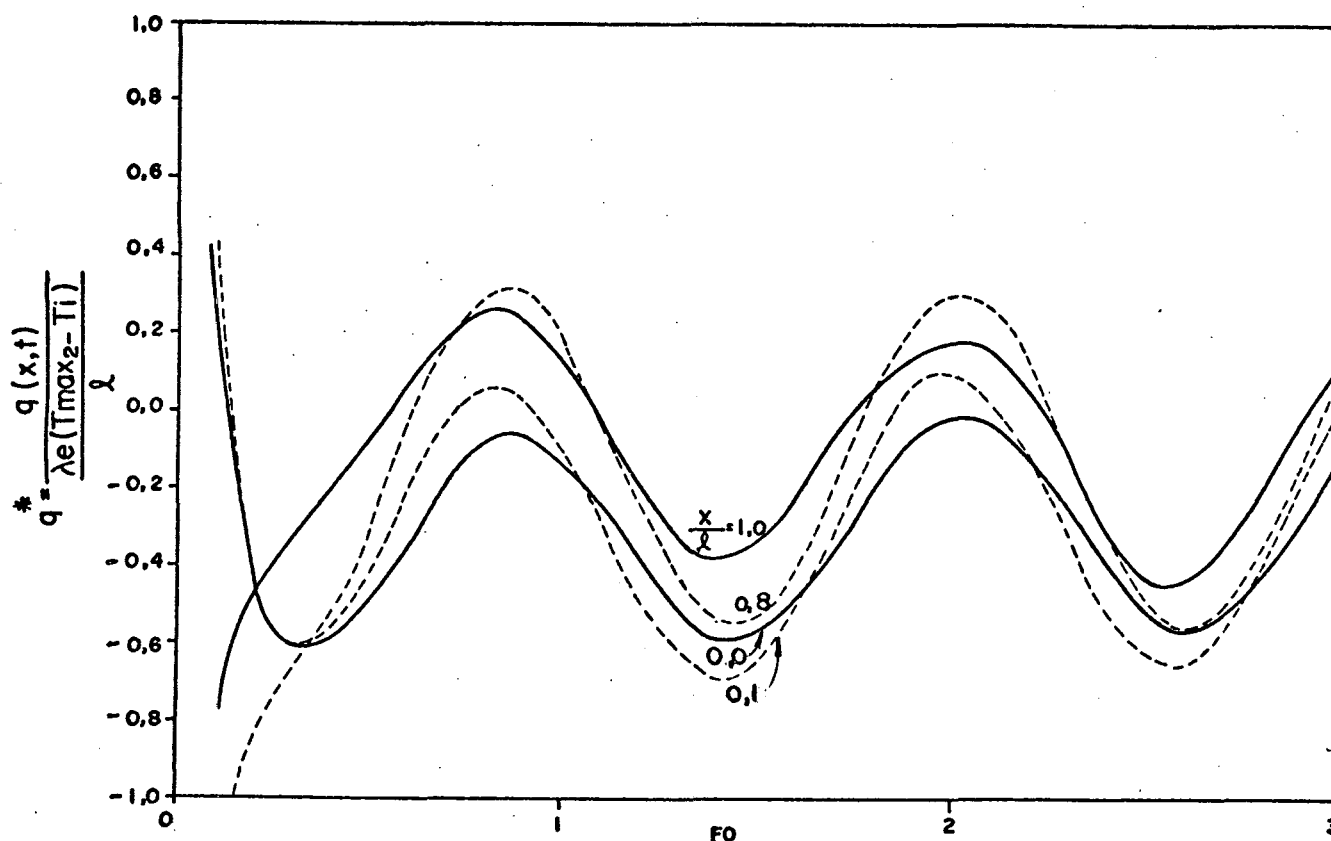


Figura 4.25 - Densidade de fluxo de calor para  $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

Nota-se na Fig. 4.26 que em  $\frac{x}{\ell} = 0,0$  o fluxo de massa é predominantemente positivo e em  $\frac{x}{\ell} = 1,0$  ele é predominantemente negativo, caracterizando um processo de umidificação com entrada de massa pelas duas laterais.

Observa-se ainda na Fig. 4.26 que as ondas de fluxo de massa são amortecidas ao penetrarem no material, ao contrário das ondas de calor que são ampliadas devido ao processo de mudança de fase.

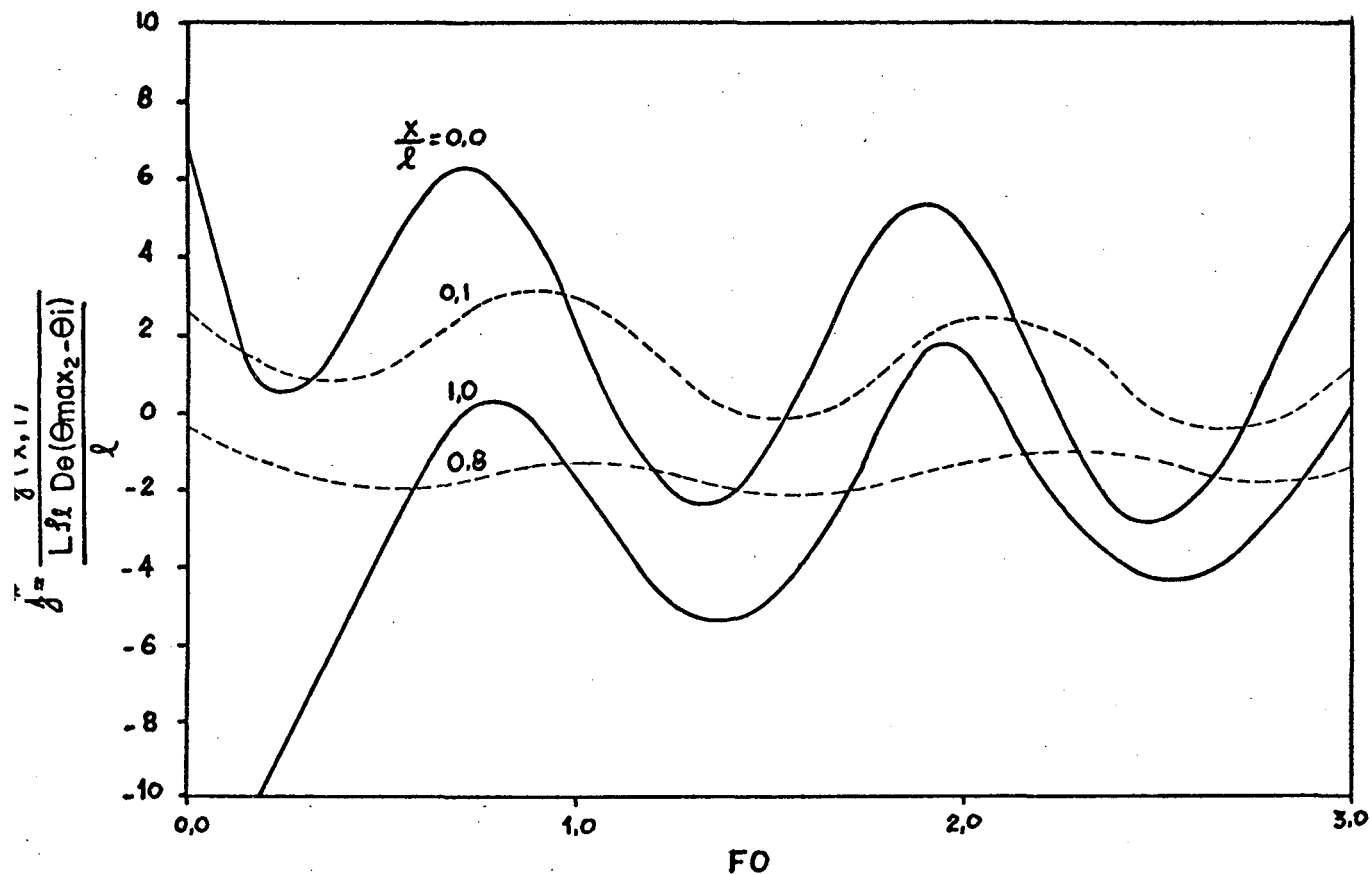


Figura 4.26 - Densidade de fluxo de massa para  $Lu = 0,05$ ,  $Fe = 2,0$  e  $KO's < 0$ .

4.4.4 - Processo para o qual a Placa Encontra-se, Inicialmente, em Equilíbrio de Conteúdo de Umidade com o Meio Ambiente e é Submetida a um Pulso de Temperatura

Os resultados que serão apresentados nesta seção são referentes às Eqs. (3.243) e (3.244) da seção 3.4.3. Este tipo de processo é caracterizado pelo fato que o desenvolvimento dos campos de temperatura e de conteúdo de umidade não dependem do estado inicial da placa com relação ao conteúdo de umidade. O modelo é informado deste fato por meio dos parâmetros de Kossovich.

As condições iniciais e ambientes são iguais aos itens anteriores com relação à temperatura. Quanto ao conteúdo de umidade especificou-se que:  $\theta_i = \theta_{m1} = \theta_{m2}$  e  $\theta_{a1} = \theta_{a2} = 0$ . Estas condições implicam em que todos os KO's sejam nulos.

A Fig. 4.27 contém as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade para vários valores do parâmetro FO.

Quando FO é pequeno as distribuições estão próximas das situações iniciais. Em FO = 0,1 a distribuição de temperatura já se "descolou" da distribuição inicial, ou seja, a placa começa a sentir os efeitos das condições ambientes: inicia-se o processo de aquecimento.

À medida que as ondas de calor se propagam pela placa porosa, surgem ondas de umidade em consequência da alteração do estado inicial pela nova distribuição de temperatura. As partes externas da placa se aquecem, o líquido evapora e migra para o interior devido à diferença de pressão de vapor. O vapor encontra regiões mais frias e condensa. Observa-se que nas fronteiras as condições impostas ( $\theta^* = 0$  em  $\frac{x}{\chi} = 0$  e  $\frac{x}{\chi} = 1$ ) são mantidas pelas distribuições de conteúdo.

Observa-se, ainda, na Fig. 4.27 que as ondas de umidade vão se propagando para o interior (região mais fria) da placa, atingindo um máximo na região central em FO = 0,3. Quando a temperatura ambiente cai a placa fica mais aquecida do centro para as laterais, e então o processo de migração de umidade é invertido. Em FO = 3,0, por exemplo, o conteúdo de umidade se encontra bastante reduzido na placa evidenciando a ocorrência do processo de desumidificação.

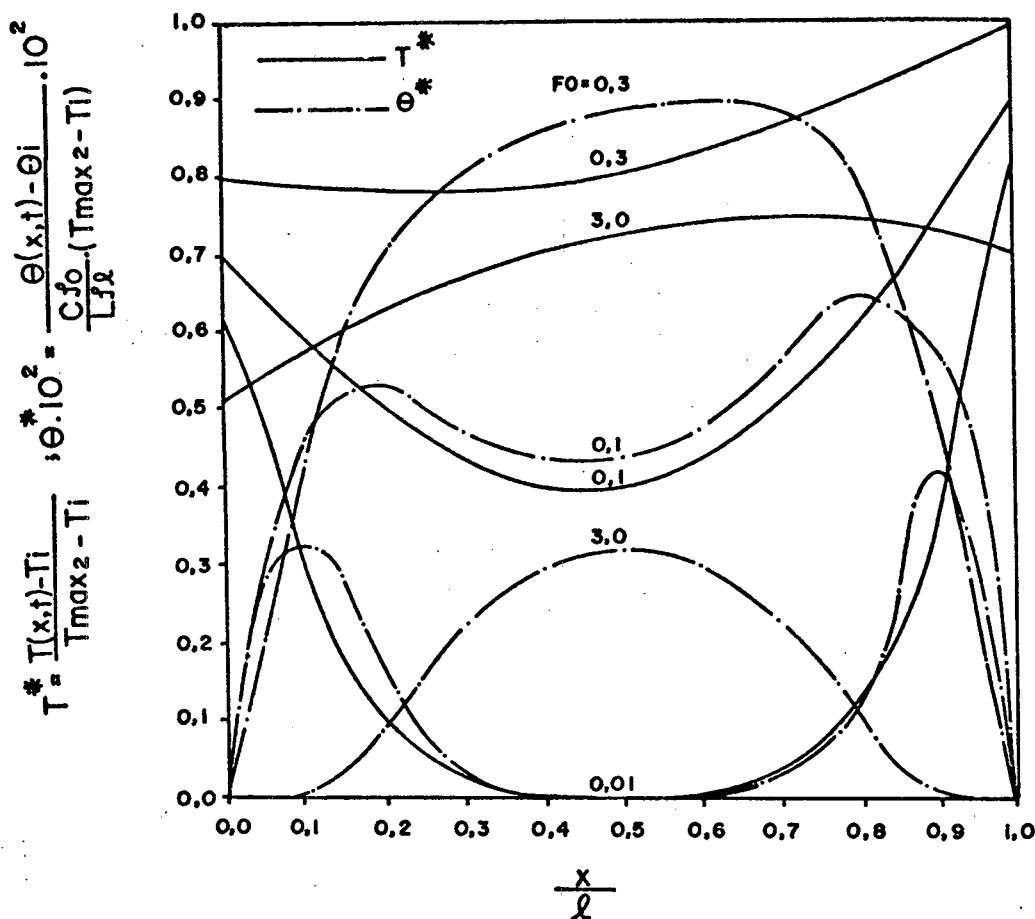


Figura 4.27 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade para  $Lu = 0,1$ ,  $Fe = 0,1$  e  $KO's = 0$ .

Apesar da condição de contorno impor  $\theta^* = 0$  nas fronteiras o fluxo de massa é não nulo em qualquer instante. Este caso pode ser interpretado como sendo o de uma placa colocada em contato com um reservatório de umidade, pois o fluxo de umidade existe de forma a manter o conteúdo de umidade constante nas fronteiras da placa.

Na próxima seção apresenta-se um estudo da influência do número de  $Fe$  sobre os campos de umidade e de temperatura, para um caso no qual a placa é colocada em contato com um reservatório de umidade.

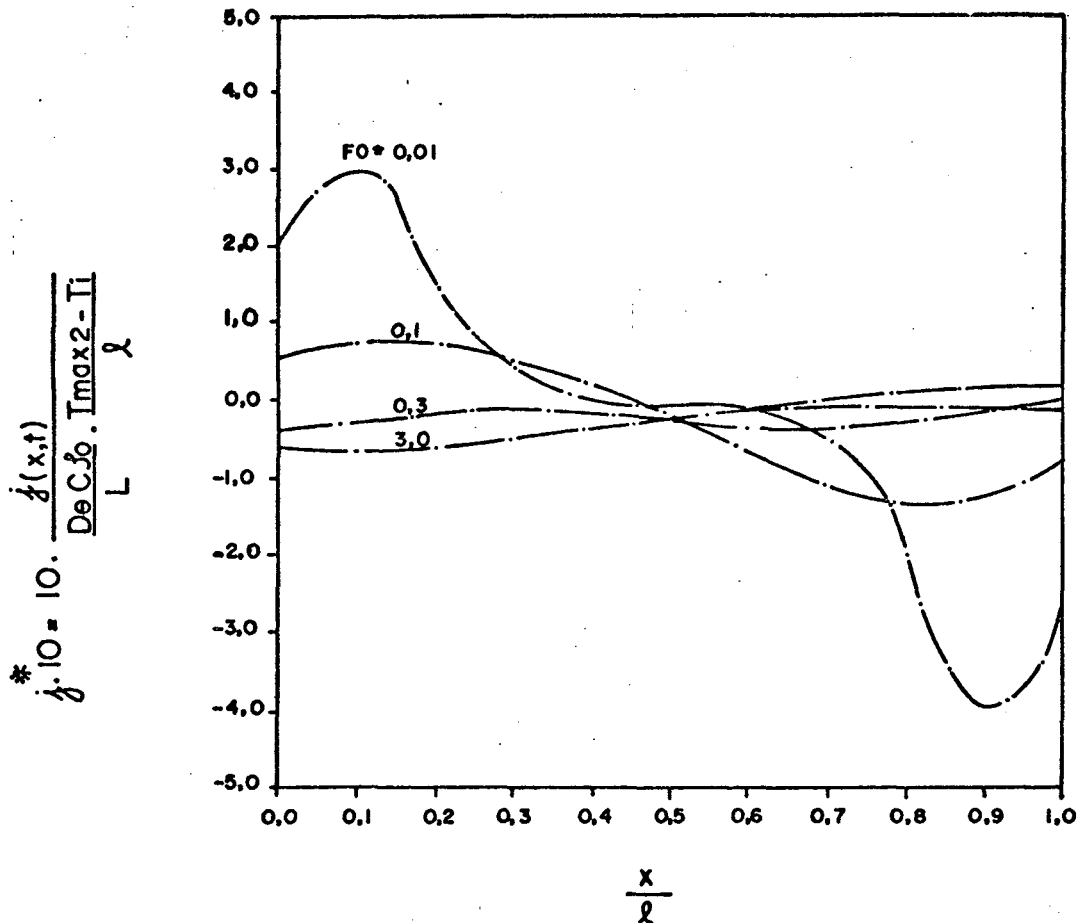


Figura 4.28 - Distribuições da densidade de fluxo de massa para  $Lu = 0,1$ ,  $Fe = 0,1$  e  $KO's = 0$ .

#### 4.4.5 - Verificação da Influência do Parâmetro de Federov Sobre os Desenvolvimentos dos Campos de Temperatura e de Conteúdo de Umidade

Os resultados apresentados neste item são relativos às mesmas equações citadas no item 4.4.1 e têm a finalidade de verificar a influência do parâmetro Federov sobre os desenvolvimentos dos campos de temperatura e de conteúdo de umidade e também sobre os fluxos de massa e de calor.



A Fig. 4.29 apresenta as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade em função da posição e do número Federov para um tempo fixo:  $FO = 0,5$ . Observa-se que o campo de temperatura não sofreu nenhuma alteração com a variação do parâmetro de Federov. Este fato pode ser explicado, analisando a equação da conservação da energia, Eq. (3.176). Adimensionalizando-a obtêm-se:

$$\frac{\partial T^*}{\partial (FO)} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial \left(\frac{x}{\ell}\right)^2} + Lu \left[ Fe \frac{\partial^2 T^*}{\partial \left(\frac{x}{\ell}\right)^2} - KO \frac{\partial^2 T^*}{\partial \left(\frac{x}{\ell}\right)^2} \right]$$

Analisando esta equação vê-se  $T^*$  é também dependente dos parâmetros Luikov e Kossovich. Como  $Lu = 0,005$ ,  $Fe$  é moderado e  $KO = 0$  verifica-se que o segundo membro desta equação tem pouca influência sobre o desenvolvimento do campo de temperatura explicando a independência de  $T^*$  em relação a  $Fe$  como mostra a Fig. 4.29.

As curvas de conteúdo de umidade atingem maiores valores, para maiores valores do parâmetro de Federov.

De fato, as soluções apresentadas neste trabalho levam em conta dois processos de difusão de massa: (a) difusão de massa promovida pelo gradiente de temperatura, cuja difusibilidade de mássica associada é  $D_T$ ; (b) difusão de massa promovida pelo gradiente de conteúdo de umidade, cuja difusibilidade associada é  $D_\theta$ .

O parâmetro de Federov indica o grau de importância do processo de difusão de massa devido ao gradiente de temperatura, em relação ao processo de difusão de massa devido ao gradiente de conteúdo de umidade. Dessa forma, valores mais altos de  $Fe$

indicam uma maior influência do campo de temperatura sobre o campo de conteúdo de umidade.

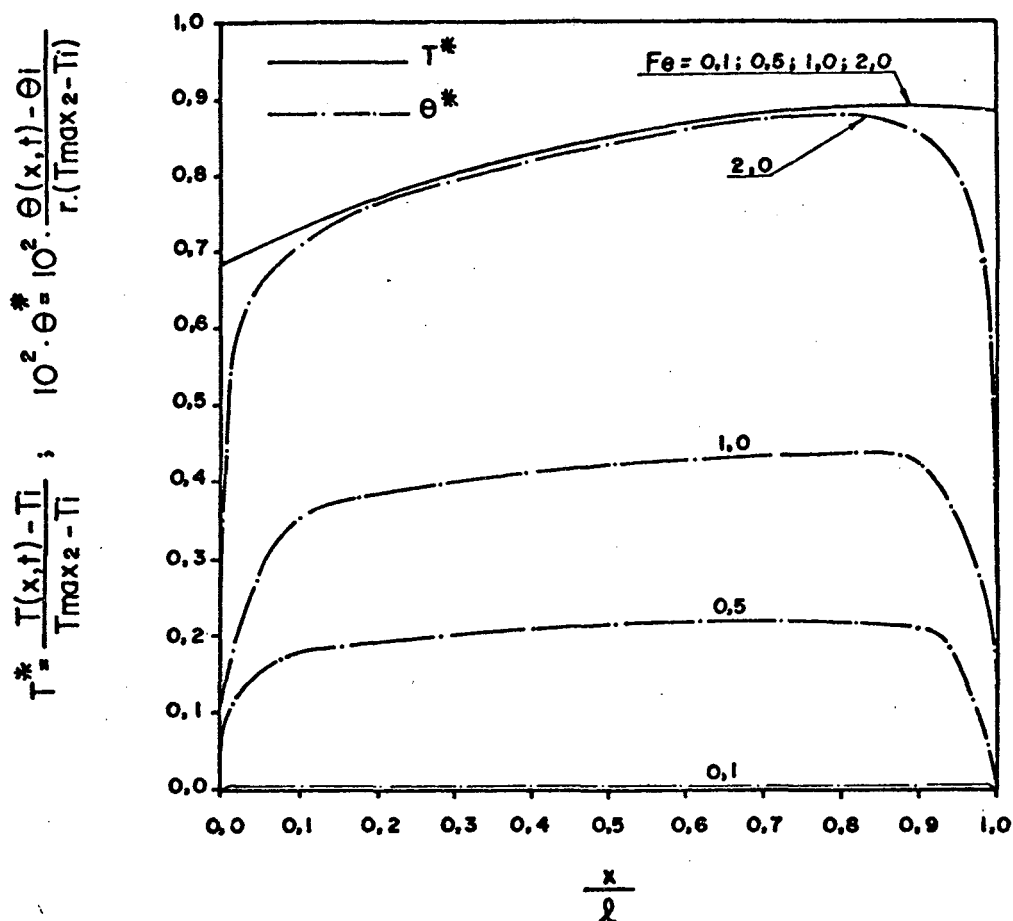


Figura 4.29 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade para  $Lu = 0.005$ ,  $KO's = 0$  e  $FO = 0.5$ .

A presente seção refere-se ao caso no qual a placa está, inicialmente, em equilíbrio de conteúdo de umidade com o reservatório. Sendo assim, o fluxo de massa é promovido, predominantemente, pelos gradientes de temperatura e, para um mesmo instante, quanto maior o valor de  $Fe$ , mais desenvolvidos serão os perfis de conteúdo de umidade como ilustra a Fig. 4.29.

A Fig. 4.30 ilustra os fluxos de calor e de massa.

Observa-se que o fluxo de calor é também invariável com o parâmetro de Fe, já que o campo de temperatura não varia com este parâmetro.

Esta análise é representativa do instante  $FO = 0,5$ , quando está ocorrendo desumidificação em consequência da placa estar mais aquecida que o meio envolvente. Quanto maior o parâmetro Fe maiores serão os fluxos e portanto mais eficiente será o processo de desumidificação ou umidificação dependendo da temperatura da placa em relação ao contorno.

Dessa forma, quanto maior o valor de Fe mais eficiente é o processo de migração de umidade num meio poroso.

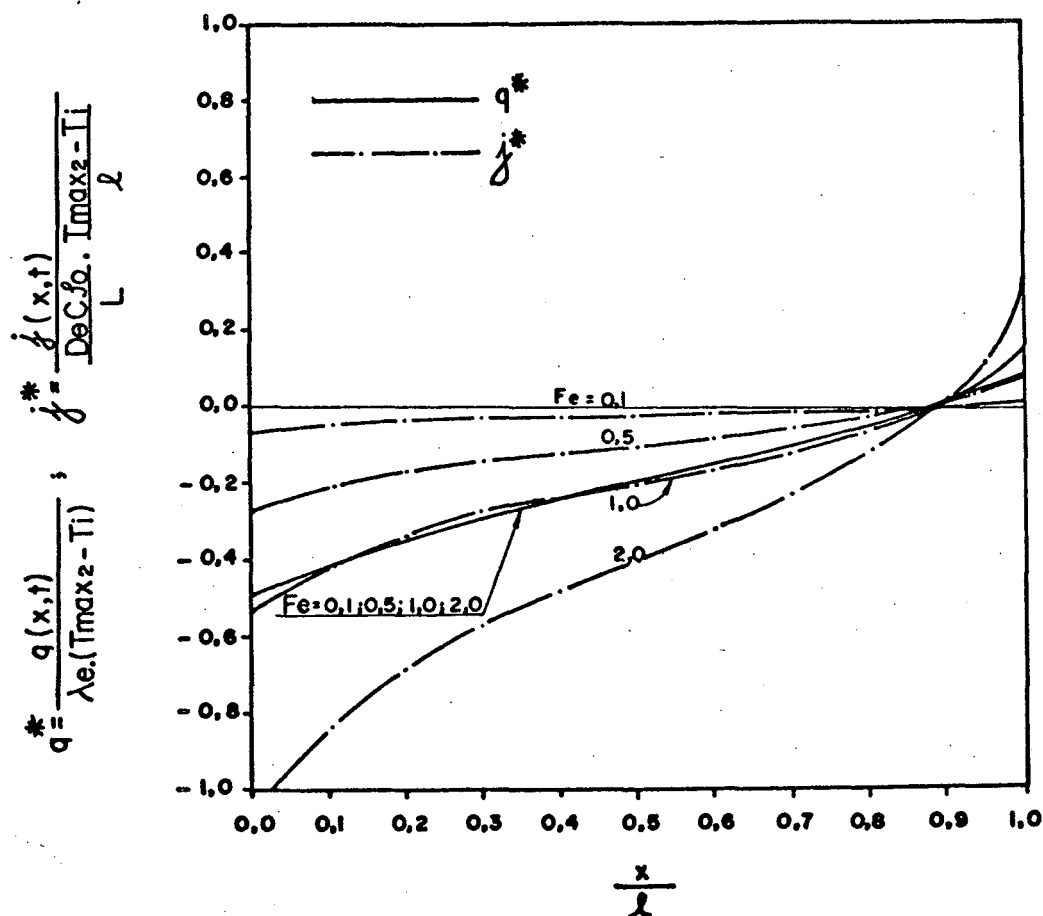


Figura 4.30 - Densidades de fluxo de calor e de massa para  $Lu = 0,005$ ,  $KO's = 0$  e  $FO = 0,5$ .

#### 4.5 - Caso Simétrico - Condições de Contorno de Terceira Espécie - Funções Senoidais do Tempo

Os resultados que serão apresentados e analisados nesta seção são referentes aos desenvolvimentos da seção 3.1. De forma semelhante ao item 4.4 serão analisados diferentes processos dependendo dos parâmetros de Kossovich e também das magnitudes das difusibilidades  $\alpha$ ,  $D_T$  e  $D_\theta$ . É analisada também a influência do parâmetro de Luikov, do parâmetro de Biot térmico e também Biot mássico.

##### 4.5.1 - Processo de Umidificação e Aquecimento

Os resultados apresentados nesta seção são relativos às Eqs. (3.84), (3.85), (3.87) e (3.89) no que diz respeito aos campos de temperatura, conteúdo de umidade, fluxo de calor e fluxo de massa respectivamente.

A Fig. 4.31 apresenta as distribuições de temperatura e conteúdo de umidade em função da posição normalizada,  $x/\ell$ , para vários parâmetros adimensionais. Devido ao processo ser de aquecimento e umidificação observa-se que, inicialmente, as linhas de  $T^*$  (temperatura) e  $\theta^*$  (conteúdo de umidade) partem das condições iniciais ( $T^* = 0$  e  $\theta^* = 0$  p/  $\frac{x}{\ell} < 1$ ) e sobem acompanhando as condições ambientes.

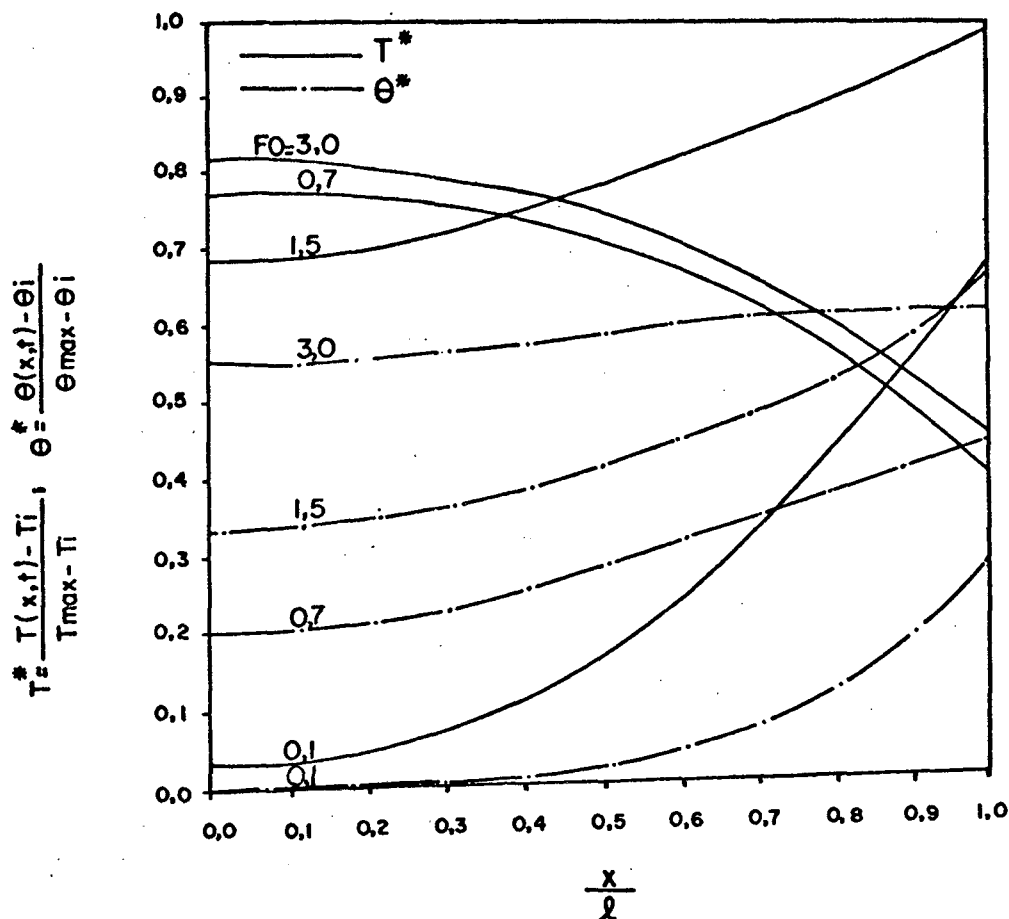


Figura 4.31 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade para  $Lu = 0,5$ ,  $Fe = 0,1$ ,  $Bi_q = 10,0$ ,  $Bim = 2,0$  e  $KO's < 0,0$ .

As linhas de temperatura sobem com maior rapidez que as linhas de conteúdo de umidade. Esse fato é explicado pelo valor do parâmetro  $Lu = \frac{D_\theta}{\alpha} = 0,5$  indicando que a difusibilidade mássica é apenas 50% da difusibilidade térmica. Por outro lado, o processo sendo de umidificação, haverá evaporação de líquido próximo à fronteira e condensação na região central, liberando energia nesta região. Este fato fica evidente por meio da comparação, estabelecida na Fig. 4.36, entre duas curvas de temperatura para as mesmas condições físicas e ambientes e para dois processos distintos: umidificação e desumidificação.

A linha de temperatura corresponde a  $FO = 0,7$  mostra que a temperatura ambiente está diminuindo e a placa começa a sentir este fato na sua periferia. No centro, a temperatura permanece maior que a temperatura ambiente por um certo tempo devido à inércia térmica do material.

A Fig. 4.32 mostra as densidades de fluxo de calor e de massa. Uma primeira observação é que as densidades de fluxos podem atingir valores superiores a 1, o que é explicado pelo fato que os gradientes reais podem ser maiores que os gradientes de referência,  $(T_{\text{máx}} - T_i)/l$  e  $(\theta_{\text{máx}} - \theta_i)/l$ .

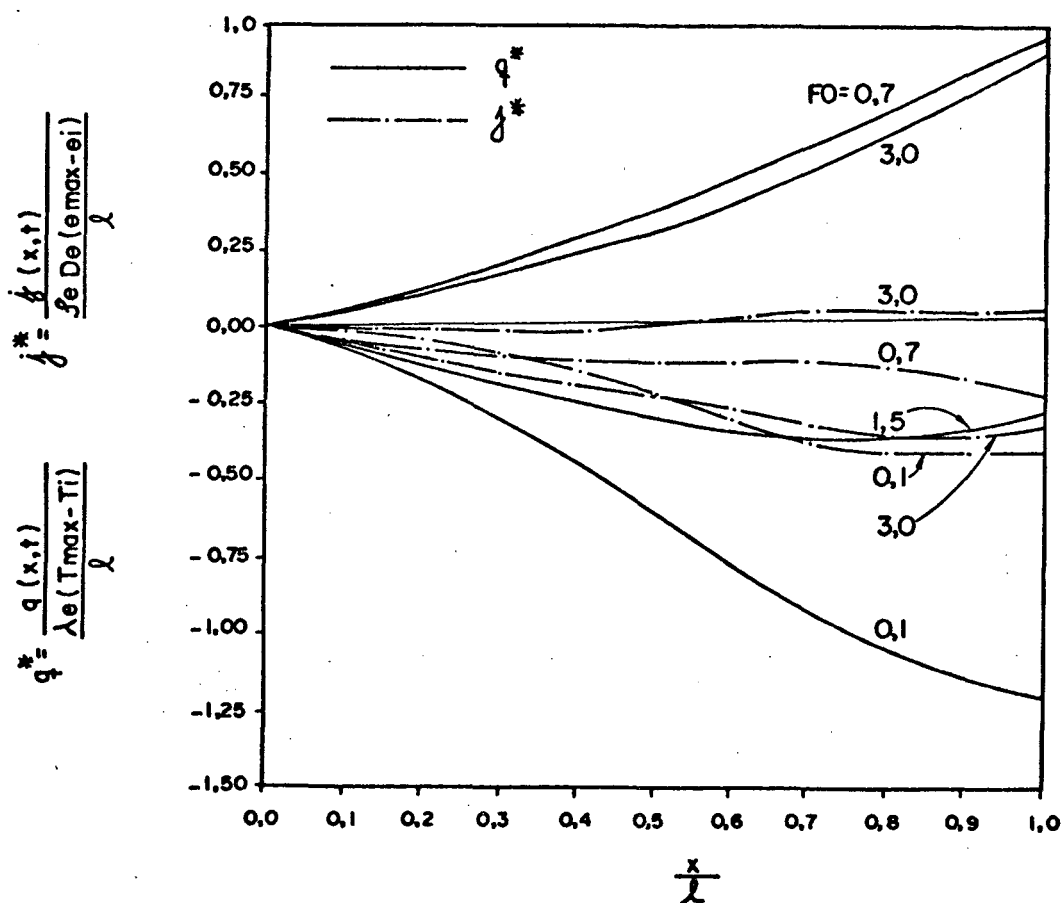


Figura 4.32 - Distribuições dos fluxos de calor e massa, para  $Lu = 0,5$ ,  $Fe = 0,1$ ,  $Biq = 10,0$ ,  $Bim = 2,0$  e  $KO's < 0,0$ .

De fato, os gradientes de referência são as retas  $T^*(\frac{x}{\ell}, FO)$  e  $\theta^*(\frac{x}{\ell}, FO)$  que unem os pontos  $(0,0)$  e  $(1,1)$ , Fig. 4.31. Observa-se pela curva  $T^*(\frac{x}{\ell}, FO)$ , para  $FO = 0,1$ , que o gradiente  $\frac{\partial T^*}{\partial x}$  é superior a  $(T_{\max} - T_i)/\ell$  para  $\frac{x}{\ell} > 0,75$ , aproximadamente, e a curva da densidade de fluxo de calor, Fig. 4.21, para  $FO = 0,1$ , indica valores de  $q^* > 1,0$ .

A curva de  $j^*(\frac{x}{\ell}, FO)$  (densidade de fluxo de massa) correspondente a  $FO = 0,1$  indica que  $j^*$  permanece aproximadamente constante para  $\frac{x}{\ell} > 0,7$ . De fato, os gradientes  $\frac{\partial T^*}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \theta^*}{\partial x}$ , Fig. 4.20, tendem a valores constantes.

A curva de  $j^*$  correspondente a  $FO = 0,7$  indica uma predominância do processo de transporte de massa devido ao gradiente de conteúdo de umidade pois a Fig. 4.31 mostra que os gradientes  $\frac{\partial T^*}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \theta^*}{\partial x}$  são contrários e mesmo assim predomina o fluxo de massa para o interior da placa ( $j^* < 0$ ). Este fato é justificado pelo parâmetro  $Fe = 0,1$ , que relaciona as difusibilidades  $D_T$  e  $D_\theta$ . Este valor pode ser traduzido no fato que  $D_\theta$  é muito maior que  $D_T$ , ou seja, a migração de umidade ocorre predominantemente por ação de gradientes de conteúdo de umidade.

#### 4.5.2 - A Influência do Parâmetro de Luikov no Desenvolvimento dos Campos de Temperatura e de Conteúdo de Umidade

O parâmetro de Luikov indica a influência do processo de transporte de massa em relação ao processo de transferência de calor,  $Lu = \frac{D_\theta}{\alpha}$ . No item 4.1, Fig. 4.3 foi feita uma análise

de tal influência e neste item será feita outra, visando entender melhor a influência deste parâmetro.

As condições ambientes utilizadas neste item são as seguintes:  $T_i = 5^\circ\text{C}$  (temperatura inicial),  $T_m = 30^\circ\text{C}$  (temperatura média),  $T_a = 20^\circ\text{C}$  (amplitude das oscilações),  $\theta_i = 0,1$  (conteúdo inicial),  $\theta_m = 0,3$  (conteúdo médio) e  $\theta_a = 0,1$  (amplitude das oscilações).

A Fig. 4.33 mostra as distribuições de temperatura e conteúdo de umidade em função do tempo, para a posição  $\frac{x}{\ell} = 0,5$  e para dois valores do parâmetro  $Lu$  ( $Lu = 0,1$  e  $Lu = 0,5$ ). Observa-se que as distribuições evoluem oscilando, respondendo às oscilações ambientes. Progridem para um valor médio quando o tempo for suficientemente grande quando ocorrerá um regime transiente periódico. Quanto maior o parâmetro  $Lu$  mais rápido é o desenvolvimento das distribuições.

A frequência de oscilação é controlada pelo parâmetro  $Pd = 2\pi fL^2/\alpha$  (número de Predivoditelev); observa-se que as cristas e os vales das distribuições de temperatura e de conteúdo coincidem, ou seja, as frequências são as mesmas, o que é explicado pelo fato que as frequências das condições ambientes são iguais, tanto para a temperatura quanto para o conteúdo de umidade.

As amplitudes das ondas de temperatura e de conteúdo de umidade ambientes são amortecidas pelo material. Esse amortecimento é mais eficiente quando  $Lu$  é menor, já que pequenos  $Lu$  implicam em redução na capacidade de transportar massa. Como no processo de umidificação, o transporte de massa implica num aumento da condução de calor, as ondas de temperatura são também amortecidas de forma mais eficiente para menores valores de  $Lu$ .



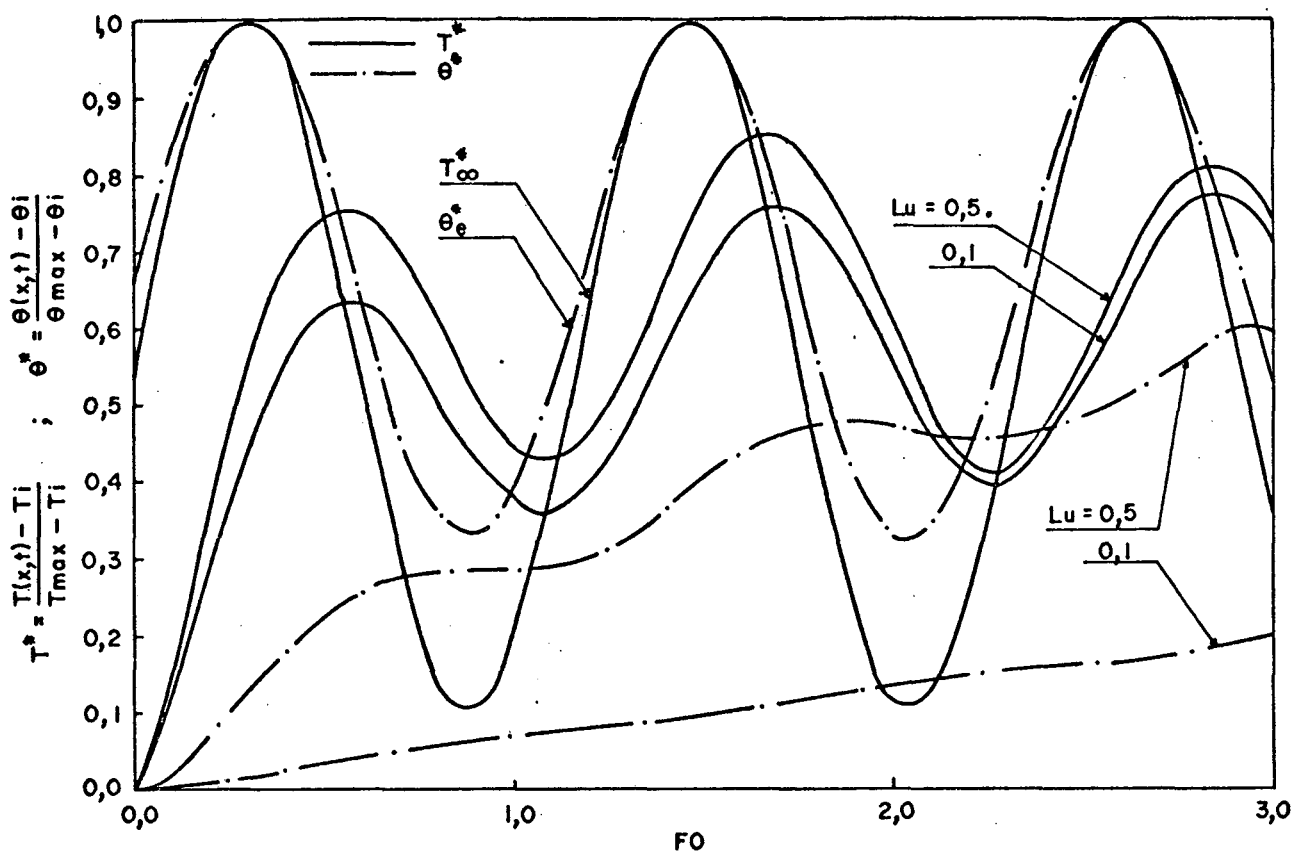


Figura 4.33 - Distribuição de temperatura e conteúdo de umidade para a posição  $\frac{x}{\ell} = 0,5$ ,  $Fe = 0,5$ ,  $Biq = 10,0$ ,  $Bim = 2,0$ ,  $KO's < 0,0$ .

#### 4.5.3 - As Influências dos Parâmetros Biq (Biot térmico) e Bim (Biot mássico) na Transmissão de Calor e Massa entre a Placa e o Ambiente

O número de Biot relaciona a eficiência de um processo do meio ambiente até a placa com a eficiência do processo no interior da placa, seja processo de transmissão de calor ou de massa. Neste item analisa-se as influências dos parâmetros Biq e

Bim.

As Figs. 4.34 e 4.35 mostram as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade na posição  $\frac{x}{\ell} = 1$ , em função do tempo (FO), para três valores dos números de Biot térmico e mássico respectivamente.

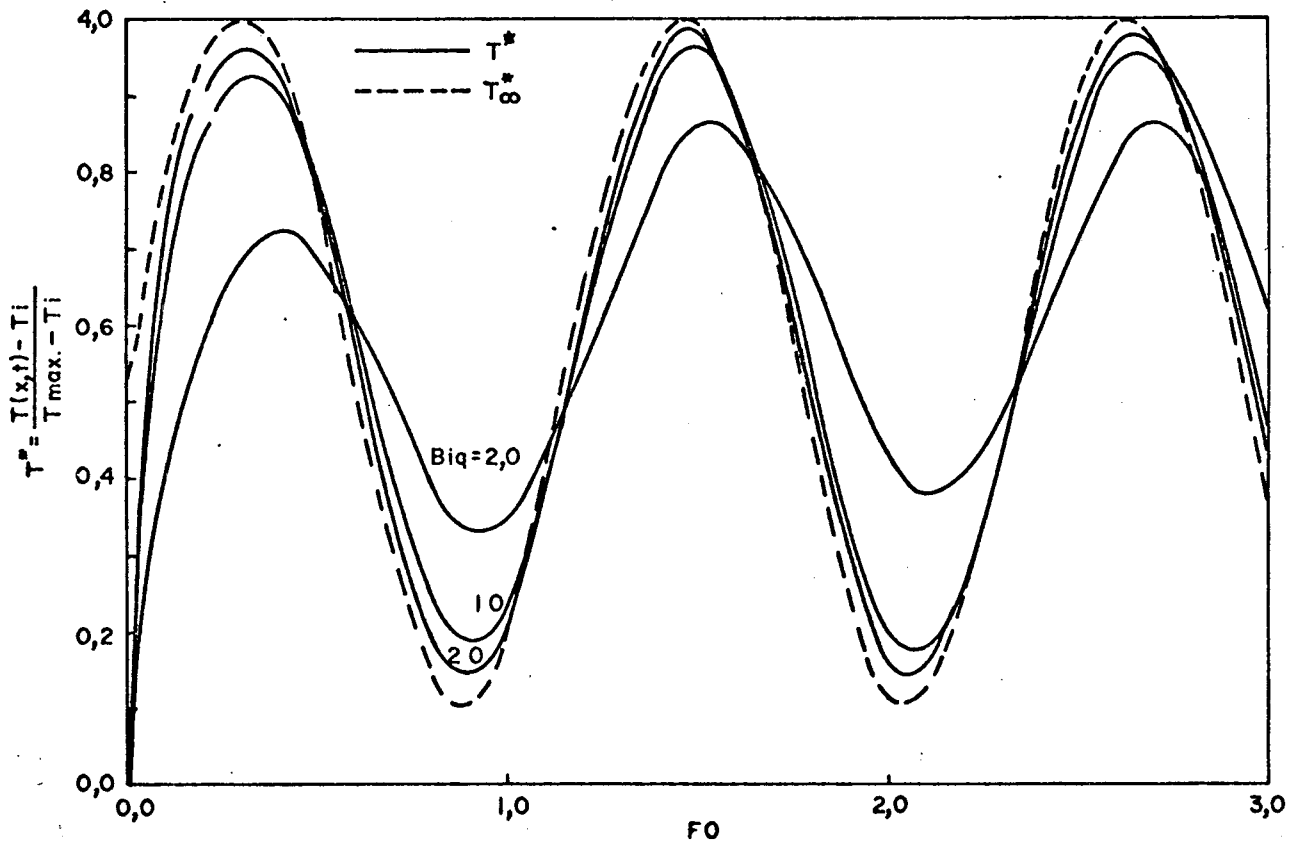


Figura 4.34 - Distribuição de temperatura na posição  $\frac{x}{\ell} = 1,0$ , para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,5$ ,  $KO's < 0$ ,  $Bim = 2,0$ ,  $T_\infty^*$  (temperatura ambiente).

Observa-se que quanto maior for Biot mais rapidamente o material (meio poroso) recebe a informação do meio ambiente pois os picos e vales ocorrem para menores FO. Isto está coerente pois se a resistência à convecção fosse zero, ou seja  $Biot = \infty$  a placa receberia as informações do ambiente instantaneamente.

Outro fato importante é que as amplitudes das ondas de temperatura e de conteúdo de umidade recebidas são maiores para maiores Biot. Isto também está de acordo com o fato que, quanto menor a resistência à convecção mais eficaz é o processo de transmissão de calor e de massa do meio ambiente para a placa.

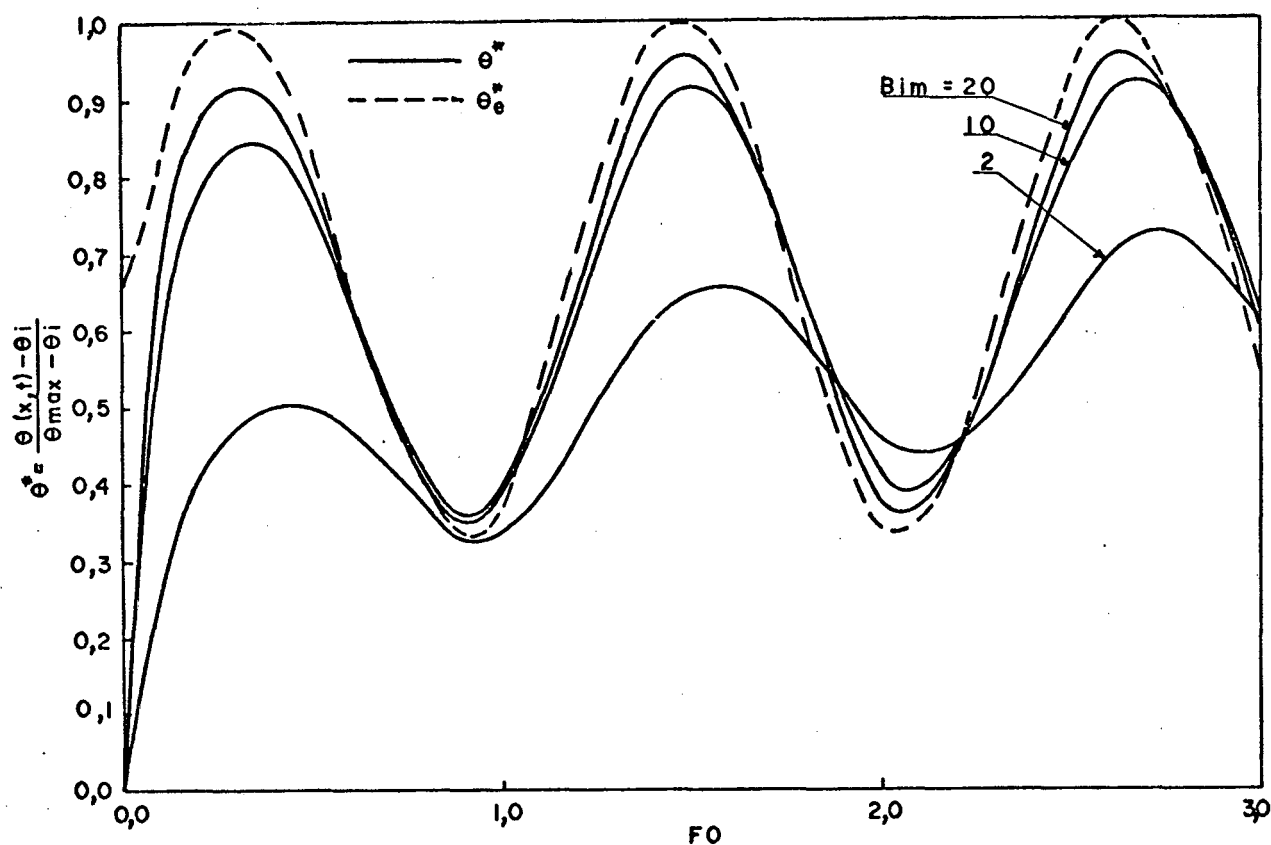


Figura 4.35 - Distribuição do conteúdo de umidade na posição  $\frac{x}{\ell} = 1,0$ ,  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,5$ ,  $KO's < 0$ ,  $Biq = 2,0$ ,  $\theta_e^*$  (conteúdo de umidade de equilíbrio do ambiente).

Observa-se nas Figs. 4.34 e 4.35 que à medida que  $Biq$  e  $Bim$  crescem as curvas de temperatura e de conteúdo de umidade se aproximam mostrando que os processos de troca de calor e massa entre o ambiente e a placa já estão aproximando do máximo

em eficiência ( $Biq = \infty$  e  $Bim = \infty$ ), ou seja, as distribuições tendem às condições ambientes.

#### 4.5.4 - Processo de Desumidificação e Aquecimento

Os resultados que serão apresentados neste item são relativos às Eqs. (3.84), (3.92), (3.87) e (3.93) para os campos de temperatura, conteúdo de umidade, densidade de fluxo de calor e de massa respectivamente. Será feita uma comparação entre uma curva de temperatura do processo de desumidificação e outra do processo de umidificação.

A Fig. 4.36 apresenta as distribuições de temperatura ( $T^*$ ) e de conteúdo de umidade ( $\theta^*$ ) para as seguintes condições:  $T_i = 5^\circ\text{C}$ ,  $T_m = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_a = 20^\circ\text{C}$ ,  $\theta_i = 0,5$ ,  $\theta_m = 0,3$  e  $\theta_a = 0,1$ .

No caso do processo de desumidificação e aquecimento os fluxos de massa e de calor ocorrem em sentidos contrários. De fato, as curvas de  $T^*$  da Fig. 4.36 sobem e as curvas de  $\theta^*$  descem com o tempo. Para que haja fluxo de massa do interior da placa para o exterior é necessário que ocorra evaporação no centro da mesma e necessariamente consumindo a energia que é conduzida de fora para dentro.

A curva tracejada que aparece na Fig. 4.36, correspondente a  $FO = 0,8$ , refere-se à distribuição de temperatura do processo de umidificação sob as mesmas condições ambientes em termos de temperatura. Observa-se que para o mesmo tempo,  $FO = 0,8$ , a curva tracejada (umidificação) está 20% acima da curva corres

pondente ao processo de desumidificação. Estes argumentos mostram que num processo de desumidificação e aquecimento o processo de condução de calor fica beneficiado pelo processo de transporte de massa. O contrário ocorre num processo de desumidificação e aquecimento.

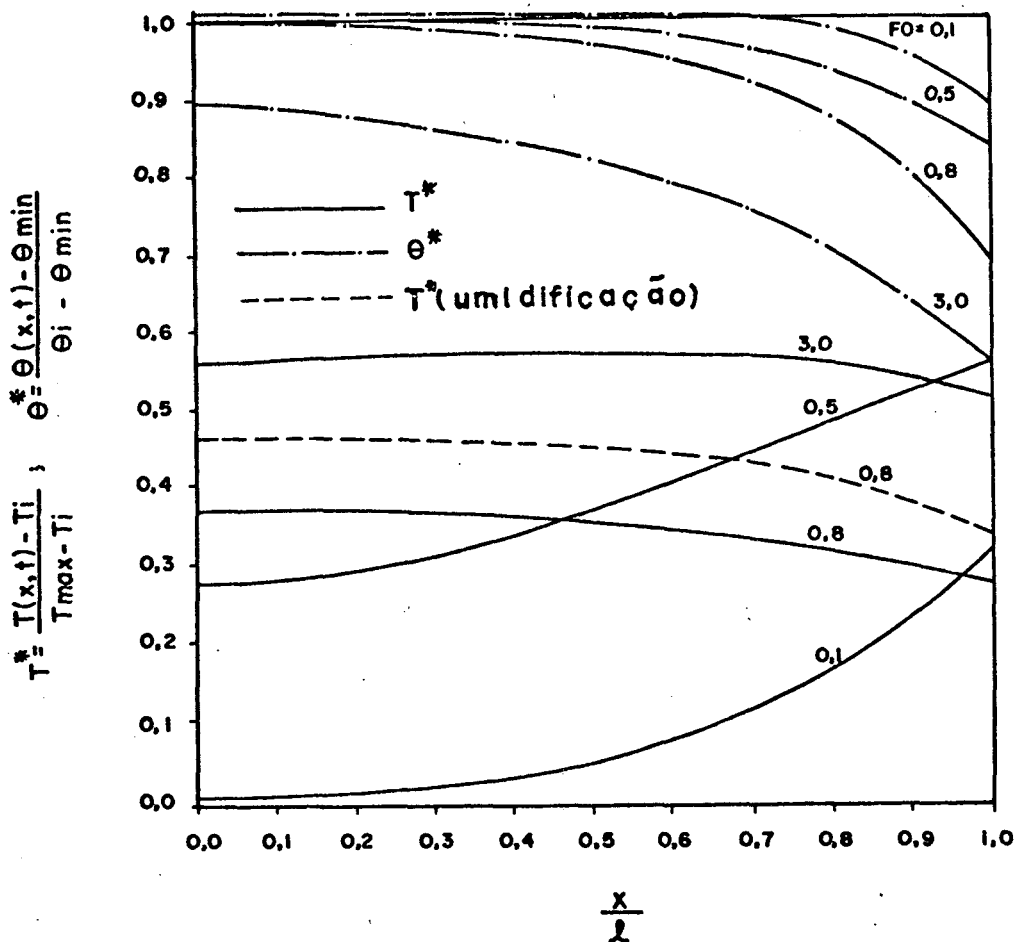


Figura 4.36 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$ ,  $Biq = 2,0$ ,  $Bim = 2,0$  e  $KO's > 0,0$ .

A Fig. 4.37 mostra as densidades de fluxos de calor e de massa. O fluxo de massa correspondente a  $FO = 0,1$  apresenta valores positivos para  $\frac{x}{l} > 0,7$ , em concordância com a distribuição de  $\theta^*$ , Fig. 4.36. Para  $\frac{x}{l} < 0,7$  existe fluxo negativo de massa, ou seja flui massa para o interior da placa. Isto ocorre porque a placa é aquecida na lateral aumentando a pressão de

vapor. Como ainda não existe gradiente de conteúdo de umidade o vapor migra devido ao gradiente de temperatura. Isto explica porque, para  $FO = 0,1$ , a curva de  $\theta^*$  na Fig. 4.36 apresenta valores maiores que 1, ou seja  $\theta(x,t) > \theta_i$ , para  $\frac{x}{l} < 0,5$ .

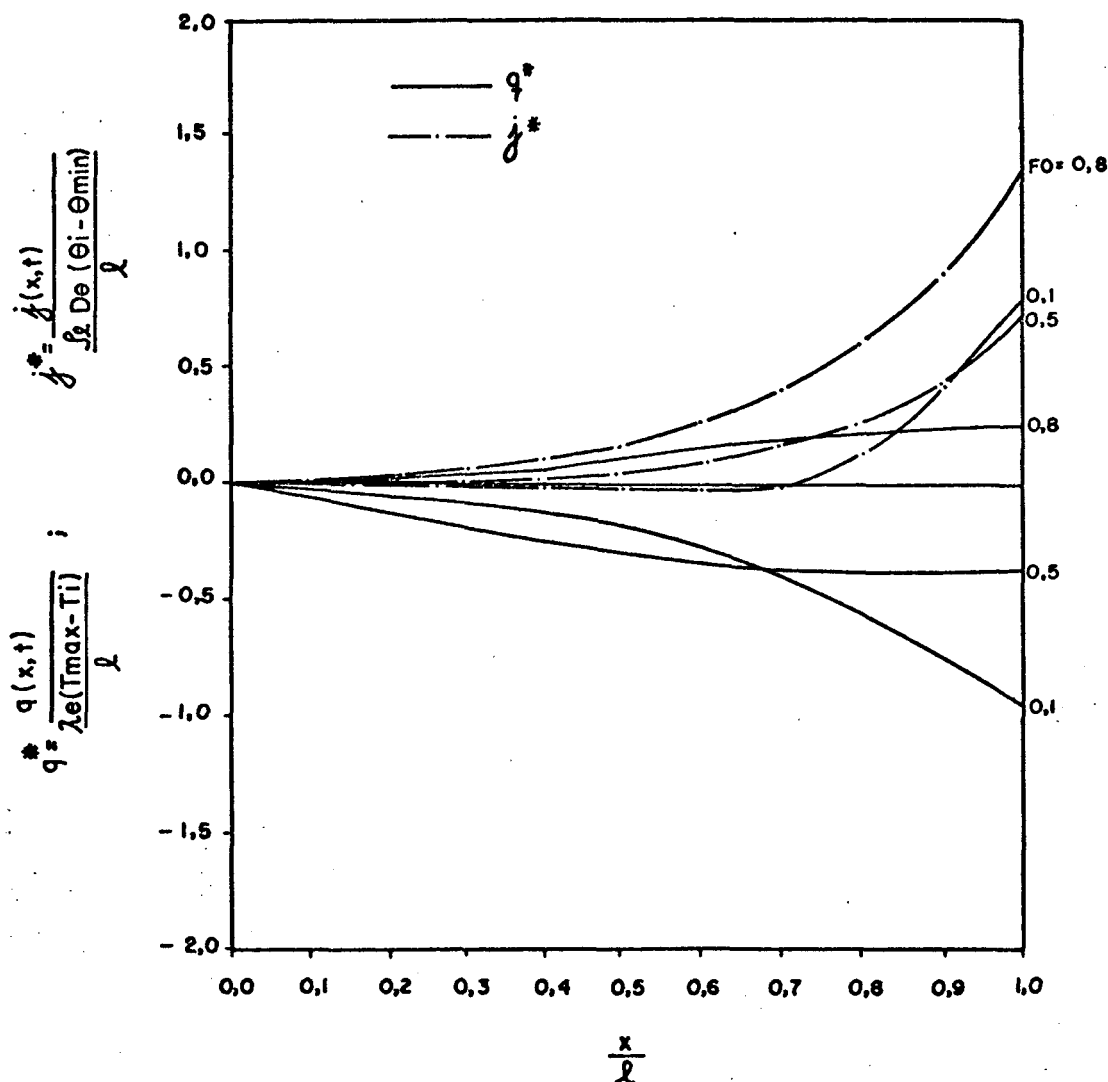


Figura 4.37 - Densidades de fluxos de calor e de massa para  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,1$ ,  $Bi_q = 2,0$ ,  $Bi_m = 0,2$  e  $KO's > 0,0$ .

Para  $FO = 0,8$  o fluxo de massa é positivo para todo  $\frac{x}{l}$ , concordando com o fato que  $\frac{\partial \theta^*}{\partial x}$  e  $\frac{\partial T^*}{\partial x}$  são negativos para todo  $\frac{x}{l}$ . As demais curvas de fluxos são coerentes com as distribuições de temperatura e conteúdo de umidade.

4.5.5 - Caso para o qual a Placa está Inicialmente em Equilíbrio de Conteúdo de Umidade com o Meio Ambiente e é Submetida a uma Diferença de Temperatura

Os resultados deste item dizem respeito às Eqs. (3.96), (3.98), (3.99) e (3.102) relativas às distribuições de temperatura, conteúdo de umidade, fluxo de calor e fluxo de umidade de respectivamente.

A Fig. 4.38 apresenta as distribuições de  $T^*$ , temperatura, e  $\theta^*$ , conteúdo de umidade, para as condições de temperatura descritas no item 4.5.4 e para as seguintes condições de conteúdo de umidade:  $\theta_i = \theta_m$  e  $\theta_a = 0$ .

Para os instantes iniciais,  $FO = 0,1$  e  $FO = 0,5$ , a lateral da placa fica com conteúdo de umidade inferior ao conteúdo inicial, ou seja,  $\theta^* < 0$ . Isto é fisicamente coerente pois, ao observar os perfis de temperatura correspondentes, vê-se que a placa encontra-se mais aquecida na lateral que no centro, o líquido da lateral é evaporado e começa a migrar e a condensar nas regiões mais frias. Para  $FO = 0,1$ , por exemplo, uma crista de conteúdo se forma em  $\frac{x}{l} = 0,7$ , ilustrando uma "onda" de massa que se propaga da zona aquecida para a zona fria, e em  $FO = 0,5$  esta onda já atingiu o centro da placa elevando o nível de conteúdo de umidade nesta região.

Para  $FO = 1,0$  e  $FO = 3,0$  a temperatura da lateral da placa cai, ocorrendo condensação de vapor nesta região e, em consequência, aumentando o conteúdo de umidade como mostram as curvas de  $\theta^*$  para estes instantes.

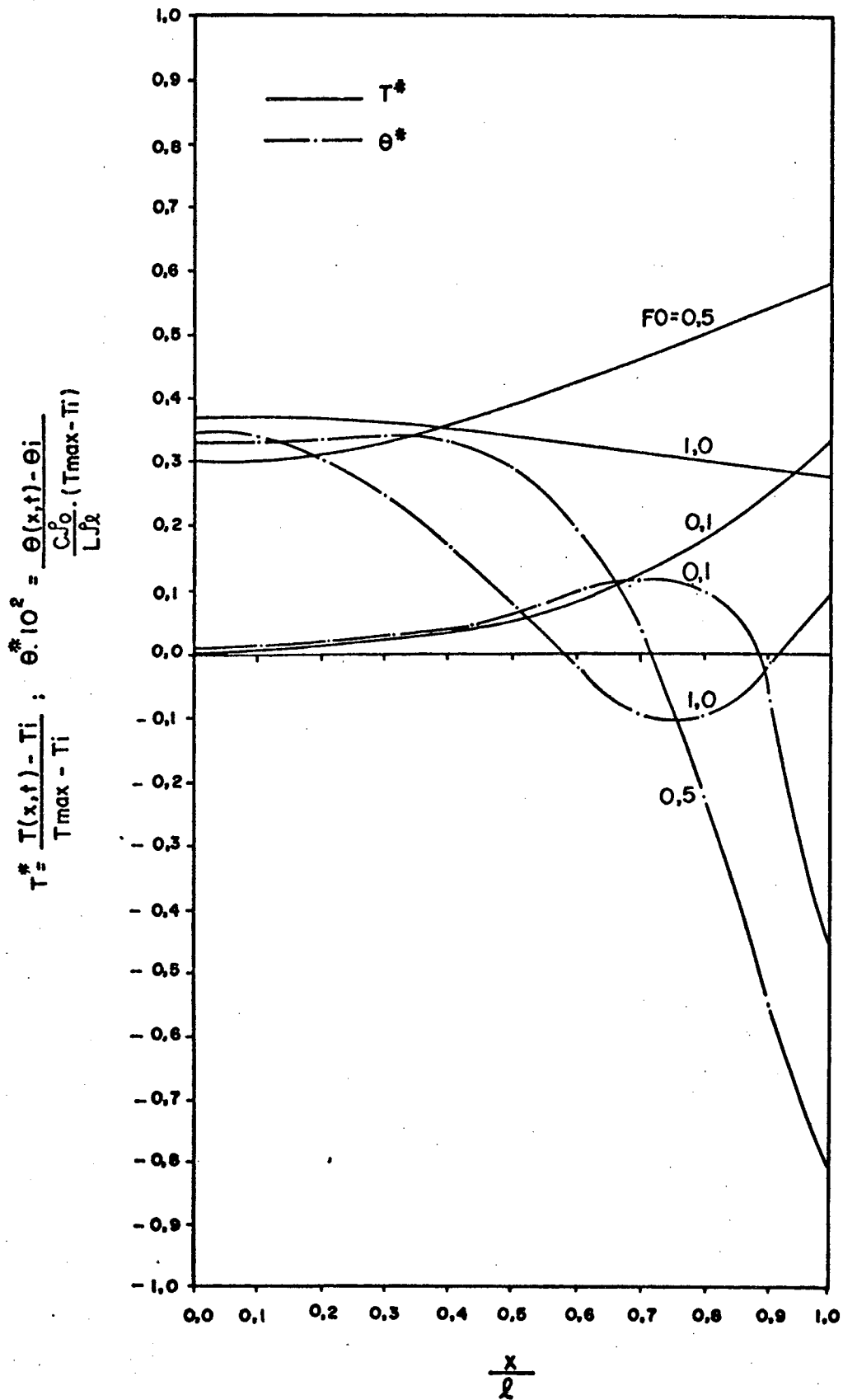


Figura 4.38 - Distribuições de temperatura e conteúdo de umidade para  $Fe = 0,1$ ,  $Bi_q = 2,0$ ,  $Bi_m = 2,0$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO's = 0,0$ .



A Fig. 4.39 mostra as densidades de fluxo de calor e massa correspondentes à Fig. 4.38.

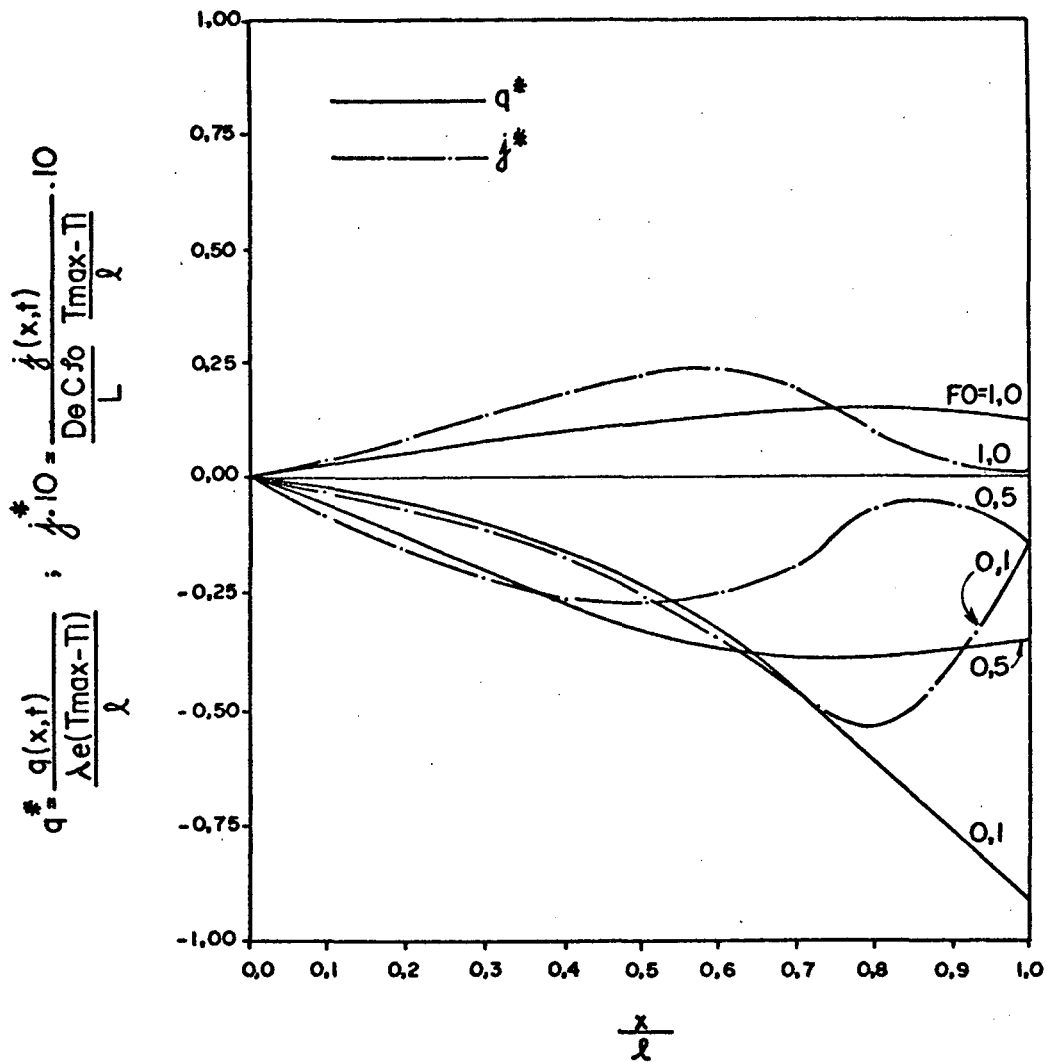


Figura 4.39 - Densidades de fluxos de calor e massa para  $Fe = 0,1$ ,  $Bi_q = 2,0$ ,  $Bi_m = 2,0$ ,  $Lu = 0,1$  e  $KO's = 0,0$ .

A curva de  $j^*$  correspondente ao instante  $FO = 0,1$  apresenta um comportamento descendente até  $\frac{x}{l} \sim 0,8$ , a partir de onde começa a crescer. Este comportamento está de acordo com as curvas de  $T^*$  e  $\theta^*$  que apresentam gradientes positivos até  $\frac{x}{l} \sim 0,8$ , a partir de onde o gradiente de  $\theta^*$  muda de sinal, justificando o decréscimo de  $j^*$  em termos absolutos.

Para  $FO = 0,5$  e para  $\frac{x}{L} > 0,5$ , o gradiente de conteúdo se acentua bastante e então o fluxo de massa sofre uma redução em valor absoluto apesar do gradiente de temperatura ser sempre positivo. Ainda para  $FO = 0,5$ , o fluxo de massa sofre um aumento novamente, devido a uma pequena redução do gradiente do conteúdo de umidade.

#### 4.5.6 - Caso para o qual as Difusibilidades $\alpha$ e $D_T$ são muito maiores que $D_\theta$

Este tipo de problema já foi exposto e resolvido no item 3.1.4. Os resultados aqui apresentados são referentes às Eqs. (3.118), (3.119), (3.120) e (3.121), relativas às distribuições de temperatura, conteúdo de umidade, fluxo de calor e fluxo de massa respectivamente.

Observa-se na Fig. 4.40 que as curvas de temperatura oscilam com o tempo em consequência das oscilações ambientes. As distribuições do conteúdo de umidade acompanham as distribuições de temperatura já que, pelas hipóteses,  $\alpha \gg D_\theta$  e  $D_T \gg D_\theta$ , ou seja, o transporte de massa só ocorre devido à difusibilidade  $D_T$ , ficando, portanto, em dependência exclusivamente dos gradientes de temperatura.

A Fig. 4.41 mostra as densidades de fluxo de calor e de massa correspondentes à Fig. 4.40. Vê-se que os valores adimensionalizados dos fluxos  $q^*$  e  $j^*$  são iguais para qualquer tempo e posição. Este fato já era esperado, já que os processos de transporte de calor e massa dependem apenas do gradiente de tempe

ratura.

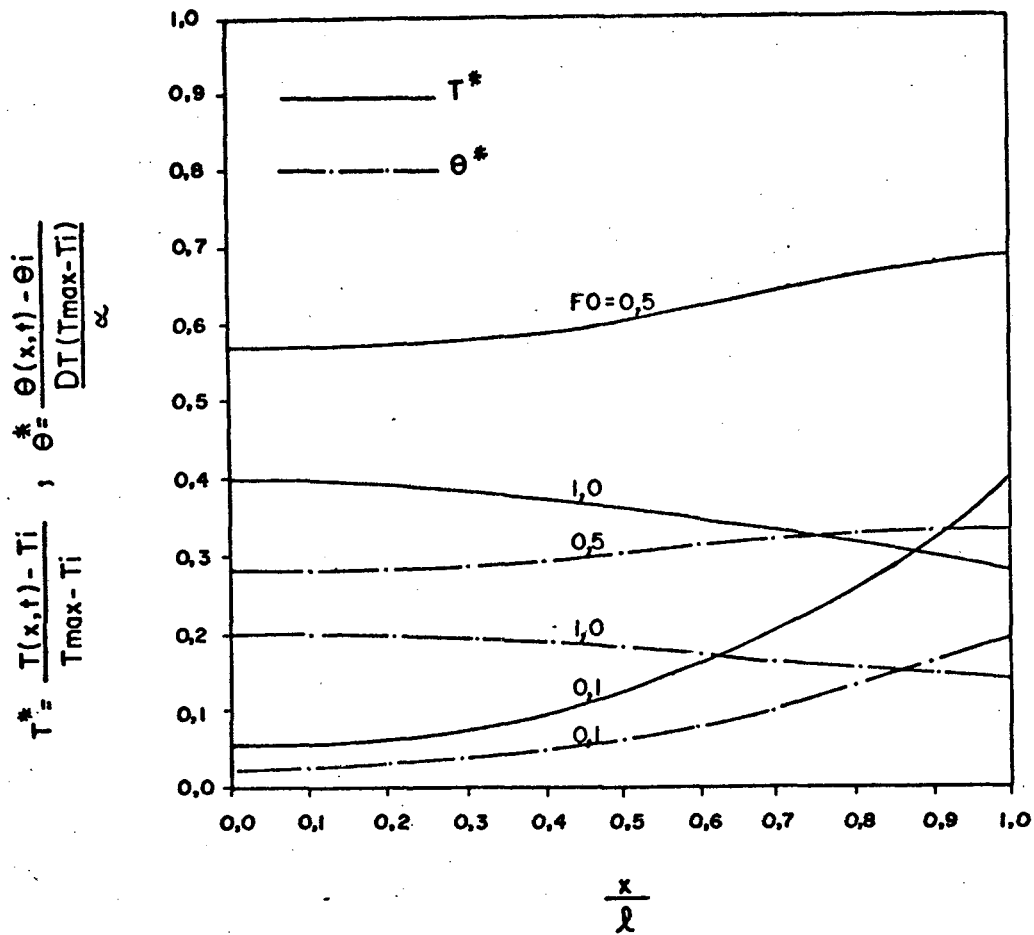


Figura 4.40 - Distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade para

$$K = r \frac{D_T}{\alpha} = 1,0.$$

Os fluxos reais  $j(x,t)$  e  $q(x,t)$  são diferentes pois os fluxos de referência utilizados na adimensionalização são distintos.

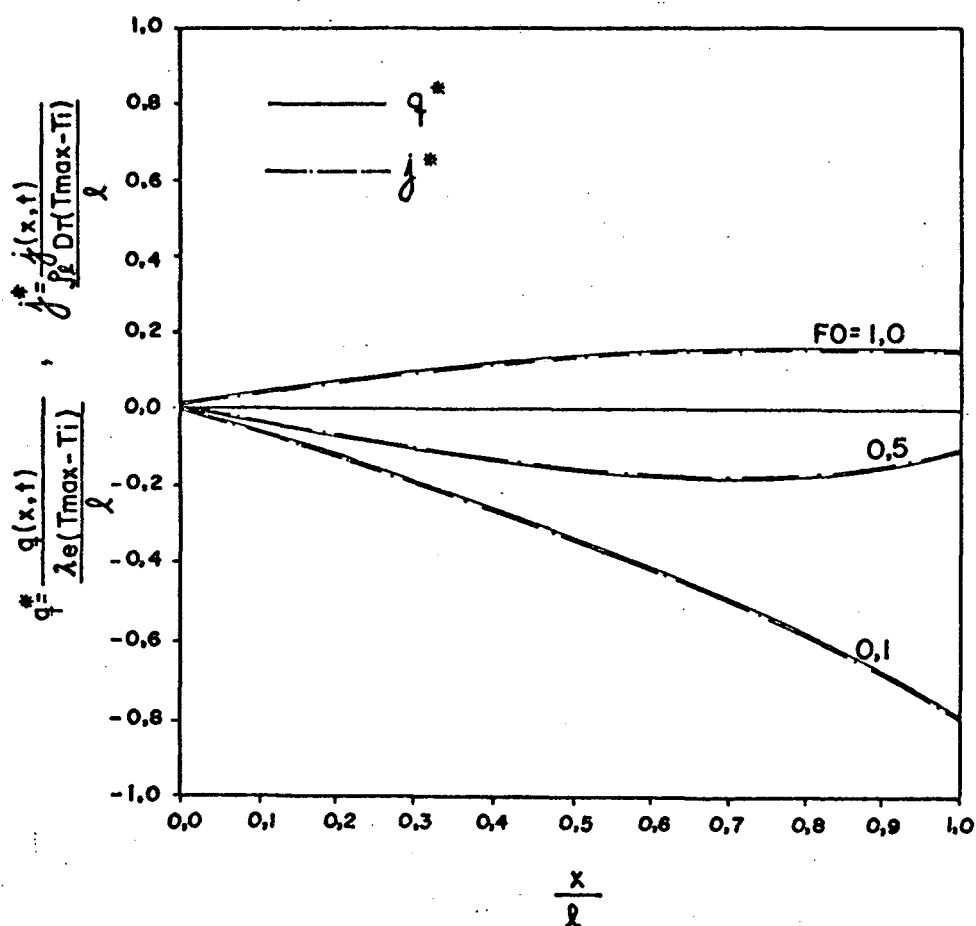


Figura 4.41 - Densidades dos fluxos de massa e de calor para as condições de temperatura estabelecidas e para  $K = r \frac{DT}{\alpha} = 1,0$ .

#### 4.5.7 - Comparação entre o Processo de Transporte de Calor Puro, Processo de Umidificação e Aquecimento e o Processo de Desumidificação e Aquecimento

Os resultados apresentados neste item são relativos ao desenvolvimento do item 3.1.5, cujas Eqs. são (3.122) e (3.123), relativas a distribuição de temperatura e ao fluxo de calor respectivamente. Apresenta-se também uma comparação entre os três tipos de processos colocados no título deste item.

A Fig. 4.42 apresenta as distribuições de temperatura referentes aos seguintes itens:

- (a) transmissão de calor pura; (b) transmissão de calor e massa num processo de umidificação e aquecimento e (c) transmissão de calor e massa num processo de desumidificação e aquecimento.

As condições ambientais referentes aos processos são:

- (a)  $T_i = 5^\circ\text{C}$ ,  $T_m = 30^\circ\text{C}$  e  $T = 20^\circ\text{C}$ ; (b) mesmas condições de temperatura do item a e  $\theta_i = 0,1$ ,  $\theta_m = 0,3$  e  $\theta_a = 0,1$ ; (c) mesmas condições de temperatura do item a e  $\theta_i = 0,5$ ,  $\theta_m = 0,3$  e  $\theta_a = 0,1$ .

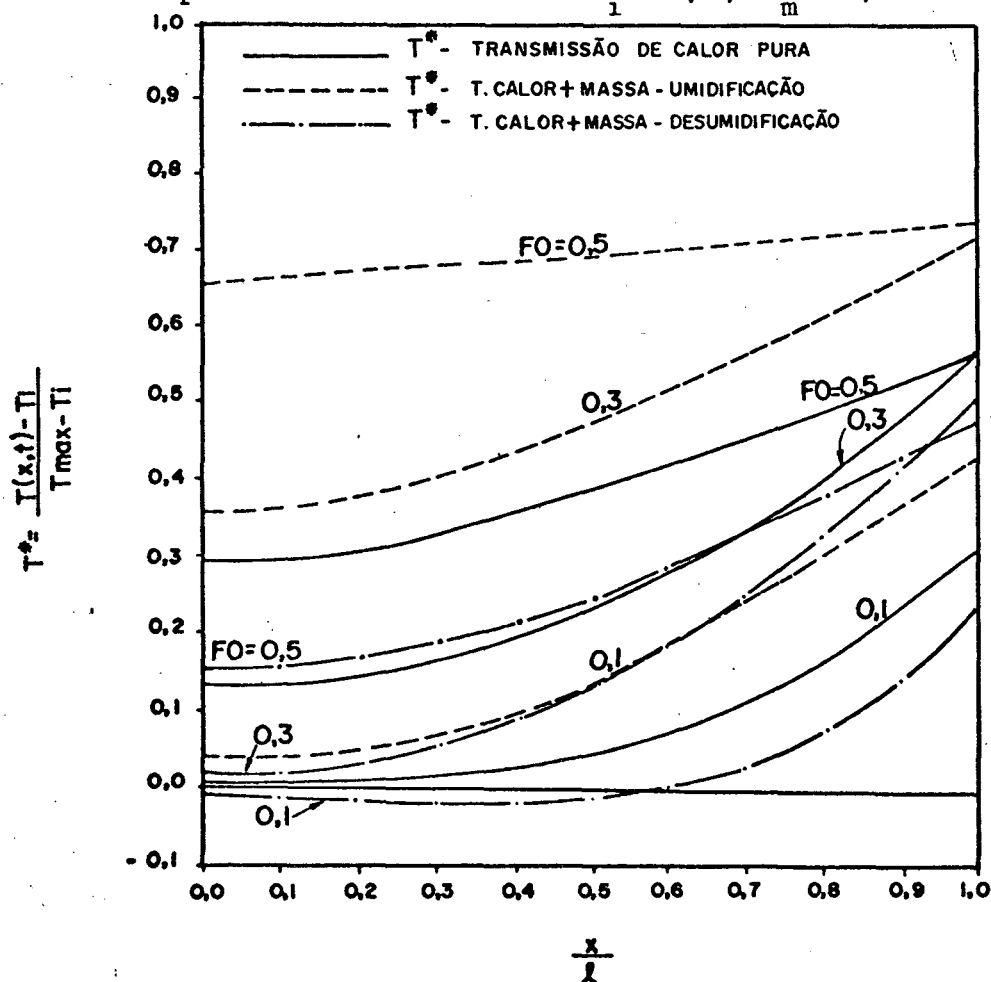


Figura 4.42 - Distribuição de temperatura para três tipos diferentes de processos: Transmissão de calor pura, transmissão de calor e umidade simultaneamente: umidificação e desumidificação,  $Fe = 0,1$ ,  $Lu = 0,8$ .

No processo de transmissão de calor e massa simultâneos ocorrendo umidificação e aquecimento o vapor flui no mesmo sentido do fluxo de calor. Ocorre condensação do vapor nas regiões mais frias liberando energia. Este raciocínio explica porque as curvas tracejadas (processo de umidificação) evoluem mais rapidamente que as curvas cheias (condução de calor pura). Tomando por exemplo  $\frac{x}{\ell} = 0,0$  e  $FO = 0,5$ , a relação entre as temperaturas dos dois casos é de 116%, mostrando a influência do processo de transmissão de massa no processo de transmissão de calor quando comparados com o processo de transmissão de calor pura.

Por outro lado, num processo de desumidificação o líquido tende a evaporar-se na parte central da placa, consumindo energia no processo de evaporação. Por esta razão vê-se, na Fig. 4.42, que o desenvolvimento do campo de temperatura de um processo de desumidificação e aquecimento, curvas traço-ponto, é mais lento que no caso de transmissão de calor pura.

No próximo capítulo será resolvido um caso específico e a solução é comparada com uma solução numérica de outro autor.

## C A P Í T U L O 5

CAMPOS NÃO PERMANENTES DOS POTENCIAIS DE TRANSFERÊNCIA DE  
CALOR E DE MASSA - PLACA INFINITA SEM CONDIÇÕES DE  
SIMETRIA

O problema proposto é o seguinte: resolver o problema de transmissão de calor e massa numa placa infinita de meio poroso não saturado, sem considerar simetria, condições de contorno de primeira espécie na temperatura e de segunda espécie no conteúdo de umidade.

Este problema foi resolvido, por [8], numericamente, utilizando a técnica das diferenças finitas, sob as condições comentadas acima. A solução foi utilizada para, juntamente com informações experimentais, determinar as difusibilidades do material.

Aqui, o problema é resolvido, analiticamente, utilizando a transformada de Laplace e o teorema dos resíduos de Cauchy. Os resultados obtidos analiticamente são comparados com os resultados obtidos numericamente.

As equações que regem os processos físicos são obtidos das Eqs. (2.33) e (2.34) mediante a hipótese que  $\alpha \gg D_T$  e  $\alpha \gg D_\theta$ , ou seja o processo de transferência de calor predomina sobre o processo de transporte de massa. No entanto o processo de

transferência de calor permanece influenciado pelo processo de mudança de fase.

As equações representativas do processo são:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

As condições de contorno e iniciais aqui utilizadas são as mesmas utilizadas por [8], e ilustradas pela Fig. 5.1.

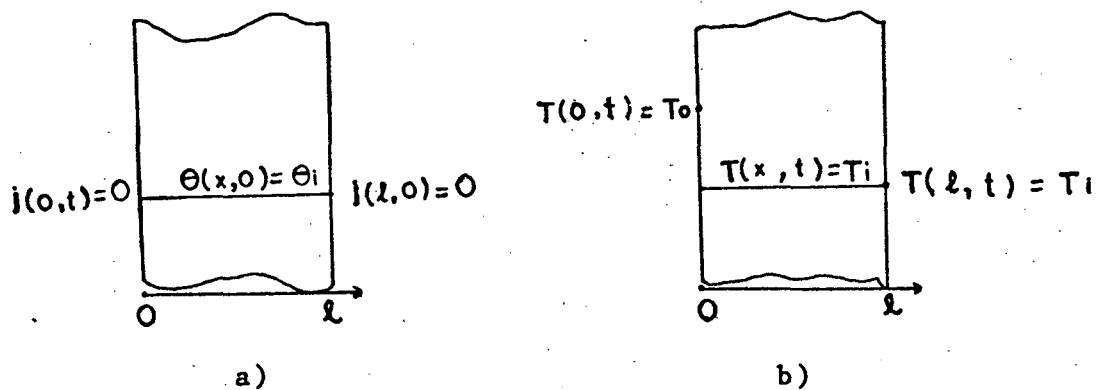


Figura 5.1

Condições de contorno:

$$T(0,t)=T_0 \quad (5.3)$$



$$T(\ell, t) = T_i \quad (5.4)$$

$$D_T \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (5.5)$$

$$D_T \frac{\partial T}{\partial x}(\ell, t) + D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad (5.6)$$

Condições iniciais:

$$T(x, 0) = T_i \quad (5.7)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_i \quad (5.8)$$

A Eq. (5.1) independe do conteúdo, o que simplifica a solução, podendo-se determinar o campo de temperatura independentemente do campo de conteúdo de umidade.

A transformada de Laplace da Eq. (5.1) com relação ao tempo, utilizando a condição inicial 5.7, é, conforme a rotina dos itens anteriores, dada por:

$$T_L(x, s) - \frac{T_i}{s} = C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x} \quad (5.9)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas utilizando as condições de contorno dadas pelas Eqs. (5.3) e (5.4). Substituindo-se os resultados na Eq. (5.9) obtêm-se:

$$\frac{T_L(x,s) - \frac{T_i}{s}}{T_o - T_i} = \frac{\text{sen h} \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (l-x)}{s \cdot \text{sen h} \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l} \quad (5.10)$$

Utilizando o teorema dos resíduos tem-se que:

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_o - T_i} = \frac{\phi(x,0)}{\psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(x,s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n t} \quad (5.11)$$

onde:

$$\phi(x,s) = \frac{\text{sen h} \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (l-x)}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}}; \quad \psi(s) = \frac{s \cdot \text{sen h} \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}}; \quad \text{e } s_n \text{ são as raízes de}$$

$$\psi(s) = 0.$$

Utilizando as relações  $\mu_n = i \sqrt{\frac{s_n}{\alpha}} l$  e  $\text{sen h} \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l = -i \text{sen } i \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l$ , e o procedimento adotado no capítulo 3, obtêm-se o campo de temperatura:

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_o - T_i} = \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{sen } n\pi \left(1 - \frac{x}{l}\right) e^{-(n\pi)^2 \frac{t}{\alpha l^2}} \quad (5.12)$$

Aplicando a transformada de Laplace em relação ao tempo à Eq. (5.2), considerando a condição inicial (5.8), tem-se:

$$s\theta_L(x,s) - \theta_i = D_\theta \theta_L''(x,s) + D_T T_L''(x,s).$$

Das Eqs. (5.1) e (5.7) determina-se  $T_L''(x,s)$ ,

$$T_L''(x,s) = \frac{sT_i(x,s) - \frac{T_i}{s}}{\alpha} \quad (5.13)$$

logo

$$\theta_L'' - \frac{1}{D_\theta}(s\theta_L - \theta_i) + \frac{s}{D_\theta} \frac{D_T}{\alpha} (T - \frac{T_i}{s}) = 0 \quad (5.14)$$

Aplicando a transformada de Laplace, na Eq. (5.14), em relação a  $x$  tem-se

$$\bar{\theta}_L(p,s) - \frac{\theta_i}{ps} = C_1(s) \frac{p}{p^2 - \frac{s}{D_\theta}} + C_2(s) \frac{1}{p^2 - \frac{s}{D_\theta}} - \frac{\frac{s}{D_\theta}}{p^2 - \frac{s}{D_\theta}} \frac{D_T}{\alpha} (\bar{T}_L(p,s) - \frac{T_i}{ps})$$

onde a barra indica a transformada de Laplace em relação a  $x$  e  $p$  é o parâmetro de transformação associado.

Assim,

$$\theta_L(x,s) - \frac{\theta_i}{s} = C_1 L^{-1} \left[ \frac{p}{p^2 - \left(\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}\right)^2} \right] + \frac{C_2}{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}} L^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}}{p^2 - \left(\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}\right)^2} \right] - \frac{D_T}{\alpha} \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} L^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}}{p^2 - \left(\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}\right)^2} \left( \bar{T}_L(p,s) - \frac{T_i}{ps} \right) \right] \quad (5.15)$$

As transformadas inversas que aparecem na Eq. (5.15) referem-se ao parâmetro  $p$ . As duas primeiras inversas são conhecidas em termos de cossenos e senos hiperbólicos. A 3ª inversa é determinada utilizando o teorema da convolução, ou seja:

$$L^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}}{p^2 - \left(\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}\right)^2} \left( \bar{T}_L(p,s) - \frac{T_i}{ps} \right) \right] = \int_0^x A(x-z,s) B(z,s) dz \quad (5.16)$$

onde,

$$A(x,s) = L^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}}{p^2 - \left(\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}\right)^2} \right] = \text{sen h} \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x \quad (5.17)$$

$$B(x, s) = L^{-1} \left[ \bar{T}_L(p, s) - \frac{T_i}{ps} \right] = T_L(x, s) - \frac{T_i}{s} \quad (5.18)$$

onde  $T_L(x, s) - \frac{T_i}{s}$  é dada pela Eq. (5.10).

Substituindo as Eqs. (5.10), (5.17) e (5.18) em (5.16), efetuando a integração e retornando à Eq. (5.15), tem-se:

$$\theta_L(x, s) - \frac{\theta_i}{s} = C_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x + C_2 \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x}{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}}} + \frac{D_\theta T_o}{2\alpha} \cdot$$

$$\left[ \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (\ell - x) - \sinh \left[ \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x + \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \ell \right]}{(1 + \sqrt{Lu}) s \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \ell} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sinh \left[ \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (\ell - x) \right] - \sinh \left[ \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \ell - \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x \right]}{(1 - \sqrt{Lu}) s \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \ell} \right] \quad (5.19)$$

Utilizando as condições de contorno (5.5) e (5.6) determina-se as constantes  $C_1$  e  $C_2$  obtendo-se a transformada do conteúdo de umidade:

$$\frac{\theta_L(x,s) - \frac{\theta_i}{s}}{\frac{D_T}{D_\theta}(T_o - T_i)} = \frac{l}{\alpha(1 - Lu)} \left\{ \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x - \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l \cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} (l-x)}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l \sinh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} l} + \right. \\ \left. + \frac{Lu \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (l-x)}{(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}) \sinh(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} l)} \right\} \quad (5.20)$$

Neste ponto, necessita-se determinar a transforma da inversa da Eq. (5.20), que pode ser desmembrada numa soma de transformadas inversas.

Seguindo um procedimento análogo ao adotado para encontrar a Eq. (4.42), obtêm-se:

$$L^{-1} \left[ \frac{\alpha Lu \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (l-x)}{s \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l} \right] = \alpha Lu \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n \pi \left(1 - \frac{x}{l}\right) e^{-(n\pi)^2 \frac{l-x}{l}} \right] \quad (5.21)$$

Utilizando o teorema dos resíduos pode-se determinar a transformada inversa da primeira parcela que aparece na Eq. (5.20).

$$\begin{aligned}
& L^{-1} \left[ \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x - \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l \cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} (l-x)}{\frac{l^2}{\alpha D_\theta} s^2 \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} l} \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} l}{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}} l}} \right] = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} \frac{\left[ \cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x - \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l \cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} (l-x) \right] ds}{\frac{l^2}{\alpha D_\theta} s^2 \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} l} \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} l}{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}} l}} = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{P(s) ds}{\frac{l^2}{\alpha D_\theta} s^2 Q(s) R(s)} = \frac{1}{\left(\frac{l^2}{\alpha D_\theta}\right)} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\text{Res}(s_n)) + \sum_{m=1}^{\infty} \text{Res}(s_m) + \text{Res}(0) \right] \\
& = \frac{1}{\left(\frac{l^2}{\alpha D_\theta}\right)} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(s_n)}{s_n^2 \left(\frac{dQ}{ds}\right)_{s_n}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P(s_m)}{s_m Q(s_m) \left(\frac{dR}{ds}\right)_{s_m}} + \text{Res}(0) \right] \tag{5.22}
\end{aligned}$$

onde  $s_n$  e  $s_m$  são as raízes de  $Q(s) = 0$  e  $R(s) = 0$ , respectivamente, e  $Q(s)$  e  $R(s)$  são obtidos da identidade estabelecida pela Eq. (5.22).

Observa-se que  $s=0$  é um polo de ordem 2, logo:

$$\text{Res}(0) = \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{ds} (s^2 f(s)) \right\}_{s=0}, \quad \text{onde } f(s) = \frac{P(s)}{s^2 Q(s) R(s)}.$$

Logo,

$$\text{Res}(0) = \alpha \left\{ \frac{x}{\ell} - \frac{1}{2} - \frac{Lu}{2} \right\} \quad (5.23)$$

Determinando as derivadas de  $R(s)$  e de  $Q(s)$  e substituindo na Eq. (5.22) juntamente com a Eq. (5.23), tem-se a transformada procurada:

$$L^{-1} \left[ \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} x - \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \ell \cosh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} (\ell - x)}{\frac{\ell^2}{\alpha D_\theta} s^2 \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \ell}{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}} \ell} \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{D_\theta}} \ell}{\sqrt{\frac{s}{D_\theta}} \ell}} \right] =$$

$$= \alpha \left\{ \frac{x}{\ell} - \frac{1}{2} - \frac{Lu}{2} \right\} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{Lu}}{(n\pi)} \left[ \frac{\cos \frac{n\pi}{\sqrt{Lu}} \frac{x}{\ell} - (-1)^n \cos \frac{n\pi}{\sqrt{Lu}} (1 - \frac{x}{\ell})}{\sin \frac{n\pi}{\sqrt{Lu}}} e^{-(n\pi)^2 FO} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos n\pi \frac{x}{\ell} - \cos n\pi \sqrt{Lu} \cos n\pi (1 - \frac{x}{\ell})}{\sin n\pi \sqrt{Lu}} e^{-(n\pi)^2 FO_m} \right] \quad (5.24)$$

Onde  $FO = \frac{\alpha t}{\ell^2}$  é o número de Fourier associado à difusibilidade térmica  $\alpha$  e  $FO_m = \frac{D_\theta t}{\ell^2}$  é o número de Fourier associado à difusibilidade mássica  $D_\theta$ .

Substituindo as Eqs. (5.21) e (5.24) em (5.20) tem-se:



$$\frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\frac{D_T}{D_\theta}(T_o - T_i)} = \left(\frac{x}{\ell} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n\pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{Lu}{1-Lu} e^{-(n\pi)^2 FO}$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[ \phi_1 \left(\frac{x}{\ell}\right) e^{-(n\pi)^2 FO} + \left(\frac{x}{\ell}\right) e^{-(n\pi)^2 FO_m} \right] \quad (5.25)$$

onde:

$$\phi_1 \left(\frac{x}{\ell}\right) = \frac{\sqrt{Lu}}{1-Lu} \left[ \frac{\cos \frac{n\pi}{\sqrt{Lu}} \frac{x}{\ell} - (-1)^n \cos \frac{n\pi}{\sqrt{Lu}} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{\sqrt{Lu}}} \right]$$

$$\phi_2 \left(\frac{x}{\ell}\right) = \frac{\sqrt{Lu}}{1-Lu} \left[ \frac{\cos n\pi \frac{x}{\ell} - \cos(n\pi\sqrt{Lu}) \cos n\pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}{\operatorname{sen} n\pi\sqrt{Lu}} \right]$$

A Eq. (5.12) representa o campo de temperatura, en quanto a Eq. (5.25) representa o campo de conteúdo de umidade.

A Fig. 5.2 apresenta algumas distribuições do con teúdo de umidade para  $Lu = 0,004$  e  $Lu = 0,1$  e para vários  $FO_m$  e  $FO$ . Apresenta ainda as curvas da solução numérica de [8]. Estas es tão levemente deslocadas para fins de clareza, mas, na realidade, as curvas são coincidentes.

Fica, dessa forma, estabelecida uma comparação en tre as soluções obtidas por dois métodos diferentes, mostrando uma excelente concordância.

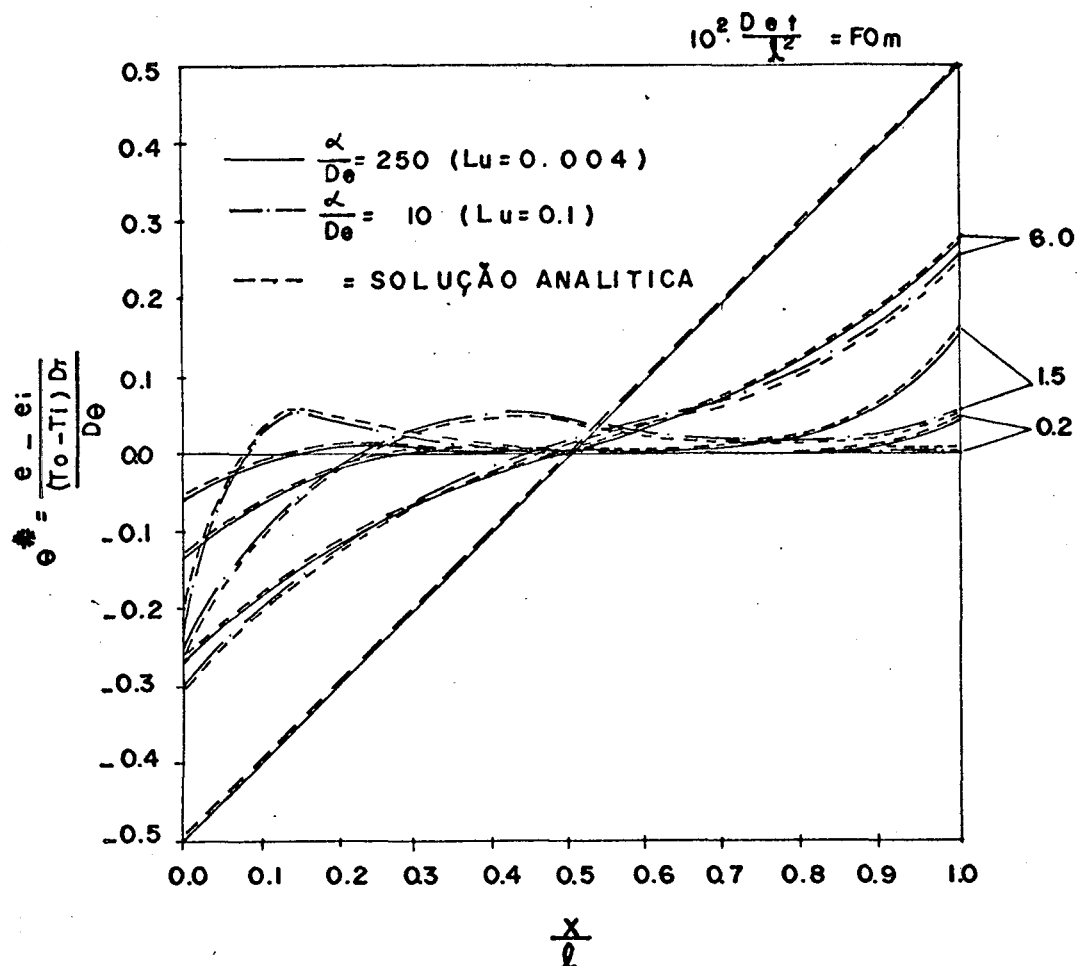


Figura 5.2 - Distribuições do conteúdo de umidade para as soluções analítica e numérica.

A Fig. 5.2 mostra o parâmetro adimensional  $\theta^*$  em função da posição adimensional  $\frac{x}{l}$ . As linhas cheias referem-se a um processo no qual  $Lu = \frac{D_\theta}{\alpha} = 0,004$ , as linhas traço-ponto referem-se a  $Lu = 0,1$  e as linhas tracejadas são as curvas correspondentes obtidas numericamente por Eckert [2]. Cada grupo de curvas é relativo a um tempo adimensional  $FO_m = \frac{D_\theta t}{L^2}$ . Cabe observar que, na Fig. 5.2,  $FO_m$  iguais não significa tempos iguais, pois a difusibilidade  $D_\theta$  é variável.

O fluxo de massa é promovido por dois gradientes:

$\frac{\partial T}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ . Inicialmente  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$  e então o fluxo fica proporcional apenas ao primeiro,  $\frac{\partial T}{\partial x}$ . À medida que o tempo passa o vapor que é

gerado em  $\frac{x}{\ell} = 0$  migra e condensa nas posições seguintes, originando gradientes de conteúdo de umidade de sinal contrário ao gradiente de temperatura. A parcela do fluxo de massa que é promovida por  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  é também proporcional à difusibilidade  $D_\theta$ . Por isso esta parcela fica mais relevante à medida que  $Lu = \frac{D_\theta}{\alpha}$  cresce. Como  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial T}{\partial x}$  são de sinais contrários surgem dois fluxos contrários, sendo que, aquele proporcional a  $\frac{\partial T}{\partial x}$  deve ser predominante uma vez que os perfis de conteúdo de umidade crescem com o tempo.

Este modelo foi idealizado e resolvido com o objetivo básico de determinar a difusibilidade mássica  $D_\theta$ , correlacionando os tratamentos teóricos com os resultados experimentais.

$$\text{De acordo com a Fig. 5.2, vê-se que } \frac{\frac{\Delta \theta}{D_\theta}}{\frac{\Delta T}{D_T}} = -1,$$

logo,  $\frac{D_\theta}{D_T} = - \frac{dT^*}{d\theta^*}$ , em regime permanente. Esta relação foi determinada por Eckert impondo a condição de fluxo de massa nulo,  $\dot{m} = 0$ , ou seja regime permanente. O segundo membro desta equação pode ser determinado experimentalmente  $D_T$  pode ser determinado em função da curva de pressão de vapor, conforme comentários após a Eq. (2.7). Enfim,  $D_\theta$  pode ser então determinado usando a Eq. acima. Eckert determina  $D_\theta$  para o caso de um cilindro de 30cm de comprimento, preenchido de areia úmida com partículas de 0,2mm. O cilindro foi submetido a uma diferença de temperatura de 50°C entre os extremos por um período de 5 meses. Após este período os conteúdos locais para várias posições foram determinados. Como resultado obteve-se  $D_\theta = 1,2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  para  $D_T = 0,95 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{sK}$ . Determinou-se também que o tempo necessário para atingir o regime permanente seria de aproximadamente 4 meses.

## CAPÍTULO 6

## CONCLUSÕES

A formulação apresentada no capítulo 2 apoia-se em algumas hipóteses simplificativas fundamentais que permitiram obter um sistema de equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem acopladas.

Obteve-se um modelo completo para o problema simétrico. Ele é representativo dos sistemas e processos reais, no sentido que as condições de contorno são de 3ª espécie, ou de Robin, e as funções envolvidas são funções genéricas do tempo. Esse modelo apresenta as deficiências relacionadas com as hipóteses simplificativas que as originaram. A hipótese mais forte diz respeito às propriedades termo-físicas, consideradas constantes.

O modelo é, no entanto, de grande utilidade, no sentido que permite conhecer os campos de temperatura e de conteúdo de umidade no interior dos materiais, sendo possível analisar os regimes transiente e permanente, obtendo-se assim uma compreensão clara das influências entre os processos simultâneos de transporte de massa e calor.

Para o problema não simétrico, obteve-se um modelo para os processos nos quais as condições de contorno são consideradas de primeira espécie. Para os objetivos deste trabalho esta solução é satisfatória pois constitui uma ferramenta importante à análise dos processos internos que ocorrem em meios porosos.

Na parte relativa a análise dos resultados, procurou-se dar ênfase à compreensão das influências que o processo de transmissão de massa exerce sobre o processo de transmissão de calor e vice-versa. Analisou-se também as diferentes condições de contorno, inclusive os casos nos quais essas condições oscilavam

com o tempo, em fase e defasadas.

Analisou-se igualmente as influências dos parâmetros adimensionais que relacionam as propriedades termo-físicas, sobre a evolução dos sistemas.

Em todos os tópicos analisados, os modelos mostraram-se consistentes e os resultados apresentaram coerência física.

O problema não simétrico foi resolvido apenas com condições de contorno de primeira espécie regidas por funções arbitrárias do tempo. A solução para este caso (não simétrico) com condições de contorno de 3ª espécie não foi apresentada neste trabalho, devido a sua complexidade. O próximo passo na sequência deste trabalho será o aperfeiçoamento desta solução por ser a que melhor simularia o processo de transmissão de calor e massa em paredes de edificações, onde as condições de contorno são da terceira espécie e, internamente diferentes do lado externo.

Outro ponto fundamental, nesta área de pesquisa, é o conhecimento das propriedades físicas dos diversos materiais aplicáveis na construção civil, bem como o levantamento de informações sobre as variações relacionadas às condições ambientais.

É de grande interesse conhecer o comportamento higr-térmico em coletores solares com aplicação em sistemas a adsorção. Sugere-se estudos nesta área, extendendo as equações diferenciais de forma a levar em conta os efeitos de adsorção e de desorção, os efeitos de capilaridade e também de reações químicas.

Enfim, o modelo apresentado neste trabalho é de grande importância para a compreensão das interrelações existentes entre os processos de transporte de calor e massa simultâneos e pode ser extendido de forma a tornar-se representativo dos pro-

cessos que ocorrem em meios de geometrias diferentes de uma placa infinita, por exemplo uma esfera, um cilindro, etc. Outros efeitos como a migração por capilaridade, o processo de reações químicas podem também ser considerados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1 ] - ARPACI, V.S. Conduction heat transfer. Reading, Massachusetts, Adison-Wesley Publishing Company, 1966. 550 p.
- [ 2 ] - AVILA, G.S.S. Funções de uma variável complexa. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, Ed. da Universidade de Brasília, 1974. 142 p.
- [ 3 ] - CLAEISSON, J. Fundamentals of moisture and energy flow in Capillary - porous building materials. In: Energy conservation in Heating, Cooling and Ventilating Buildings. Whashington, C.J. Hoogendoorn and N.H.Afgan, Hemisphere Publishing Corporation, 1978. p. 59-69.
- [ 4 ] - CARSLAW, H.S. & JAEGER, J.C., Conduction of heat in solids. Oxford at the Clarendon Press, Oxford, 1959. Original in glês.
- [ 5 ] - COURANT, R. & HILBERT, D., Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers, New York, 1962. Original inglês.
- [ 6 ] - DE VRIES, D.A. Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media. Transactions American Geophysical Union, 1958. v. 39, p. 909-916.

- [ 7 ] - DINULESCU, H.A. & ECKERT, E.R.G. Analysis of the one-dimensional moisture migration caused by temperature gradients in a porous medium. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1980. v. 23, p. 1069-1078.
- [ 8 ] - ECKERT, E.R.G. & FAGHRI, M. A general analysis of moisture migration caused by temperature differences in an unsaturated porous medium. International Journal Heat Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1980. v.23, p.1613-1623.
- [ 9 ] - GLAUSGUNOV, Yu.T. The variational method for the solution of combined heat and mass transfer problems. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1983, v. 26, p.1815-1822.
- [10] - HUANG, C.L.D.; SIANG, H.H.; BEST, C.H. Heat and moisture transfer in concret slabs. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1979. v.22, p.257-266.
- [11] - KAPLAN, W. Cálculo Avançado. Trad. Frede Tsu, São Paulo, Ed. Edgard Blücher Ltda., 1972. v.2, p.341-750. Original inglês.
- [12] - KREIDER, D.L.; KULLER, R.G.; OSTBERG, D.R.; PERKINS, F.W. Introdução à Análise Linear. Trad. Genésio Lima dos Reis, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1972, 3v.,v.1, 330 p. Original inglês.



- [13] - LUIKOV, A.V., Analytical heat difusion theory. Academic Press, New York, 1968. Original inglês.
- [14] - LUIKOV, A.V. Heat and mass transfer. Trad.T. Kortneva, Moscou, Mir Publishers, 1980. 623 p. Original russo.
- [15] - LUIKOV, A.V. & MIKHAT, Yu.A. Theory of energy and mass transfer. Trad. L.A. Fenn, Oxford, Pergamon Press, 1965. 523 p. Original inglês.
- [16] - LUIKOV, A.V.; SHASHKOV, A.G.; VASILIEV, L.L.; FRAIMAN, Yu.E. Thermal conductivity of porous systems. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1968. v. 11, p. 117-140.
- [17] - MOORE, ROSS E. Water conduction from shallow water tables. Hilgardia, 1939. v. 12, n.6, p.383-426.
- [18] - PHILIP, J.R. & DE VRIES, D.A. Moisture movement in porous materials under temperature gradients. Transactions American Geophysical Union, 1957. v. 38, p.222-232.
- [19] - SHAH, D.J.; RAMSEY J.M. & WANG, M. An experimental determination of heat and mass transfer coefficients in moist, unsaturated soils. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1984. v.27, p.1075-1085.

- [20] - SOUZA, H.A. Transporte simultâneo de calor e umidade em meios porosos: método das funções de transferência. Dissertação de mestrado, Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1985.
- [21] - WYLIE. C.R., Advanced Engineering Mathematics. McGraw-Hill Book Company, New York, 1966. Original inglês.

## A P Ê N D I C E S

## APÊNDICE A

A - Comportamento da Equação característica  $\sigma(\mu)$  e o Método da Bissecção para determinar suas raízes

A solução do caso simétrico com condições de contorno de terceira espécie foi conseguida por meio da transformada de Laplace, teorema da convolução e teorema dos resíduos.

O teorema dos resíduos foi utilizado para determinar as transformadas inversas de Laplace. Para tanto tornou-se necessário calcular as raízes do polinômio característico da solução, denominado  $\sigma(\mu)$ .

Conforme o item 3.1, tem-se:

$$\sigma(\mu) = F_2(\mu)G_1(\mu) - F_1(\mu)G_2(\mu)$$

onde:

$$\# F_i(\mu) = \cos \mu v_i + \frac{1}{Biq} \mu v_i \operatorname{sen} \mu v_i \quad i = 1, 2$$

$$\# G_i(\mu) = (1 - v_i^2) \cos \mu v_i + \left[ Fe + (1 - v_i^2) \right] \frac{\mu v_i}{Bim} \operatorname{sen} \mu v_i \quad i = 1, 2$$

$$\# v_i^2 = \frac{\left[ (1 + Fe + \frac{1}{Lu}) \pm \sqrt{(1 + Fe + \frac{1}{Lu}) - \frac{4}{Lu}} \right]}{2} \quad i = 1, 2$$

$$\# \text{ Biq} = \frac{h \cdot \ell}{\lambda}$$

$$\# \text{ Bim} = \frac{h_{\theta} \ell}{D_{\theta}}$$

$$\# \text{ Fe} = r \frac{D_T}{D_{\theta}}$$

$$\# \text{ Lu} = \frac{D_{\theta}}{\alpha}$$

$$\# r = \frac{L_{\rho} \ell}{C_{\rho 0}}$$

A Fig. A.1 representa o comportamento de  $\sigma(\mu)$  para os seguintes valores dos grupos adimensionais envolvidos:  $\text{Fe} = 0,1$ ;  $\text{Lu} = 0,1$ ;  $\text{Biq} = 2,0$ ;  $\text{Bim} = 2,0$ .

As raízes do polinômio  $\sigma(\mu)$  podem ser determinadas utilizando o método aproximado da bissecção, que consiste em utilizar pequenos passos pelo eixo das abcissas, à procura da primeira raiz. Uma vez detectada, refina-se o seu valor e se parte à procura da próxima. Mantém-se o controle para não pular nenhuma raiz utilizando passos bem pequenos cuja ordem de grandeza é inerente ao caso em questão. No caso apresentado na Fig. A.1, um passo de 0,01 foi julgado suficiente para determinar todas as raízes que se fizessem necessárias.

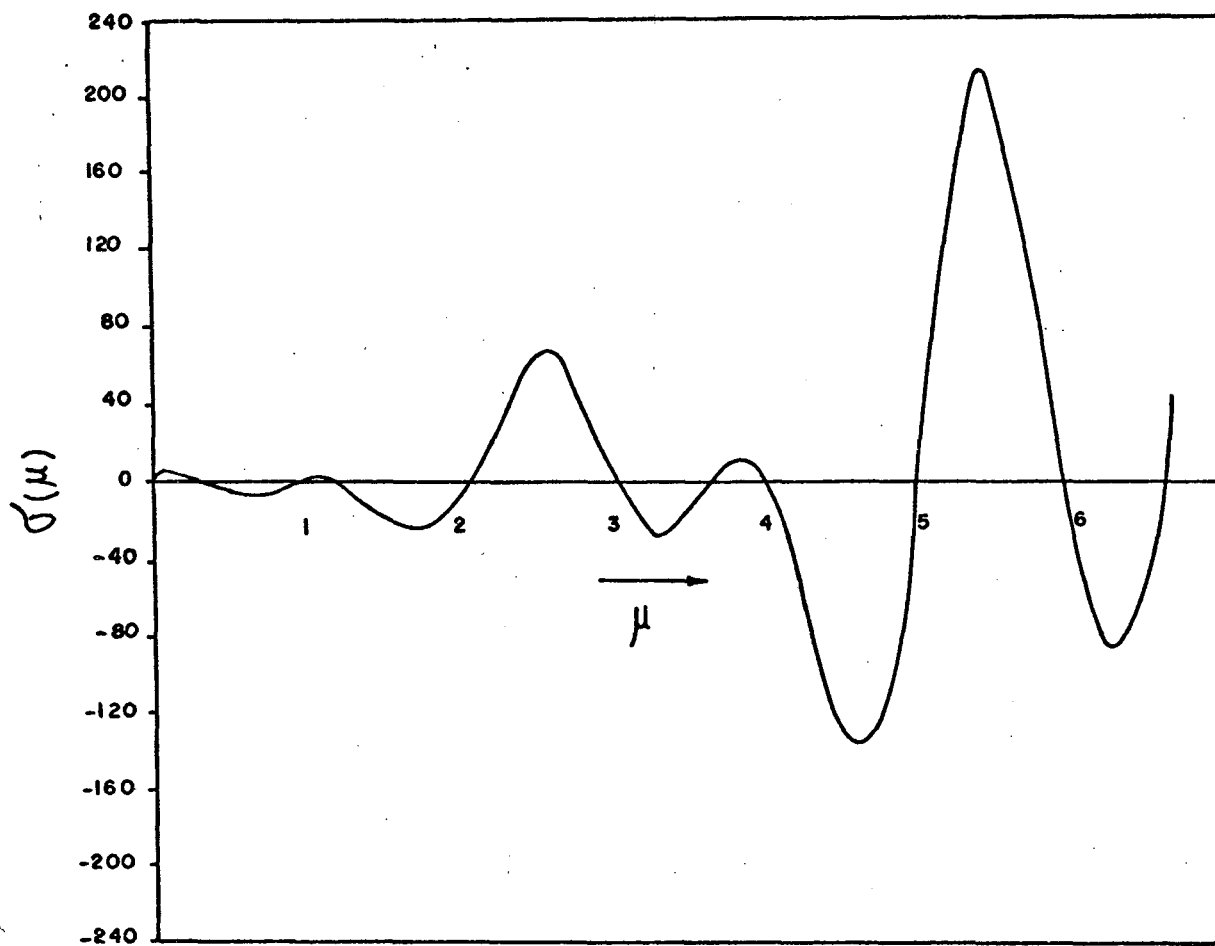


Figura A.1 - Comportamento de  $\sigma(\mu)$  para uma situação específica.

## APÊNDICE B

B - Relação entre o Teorema da Convolação e o Teorema de Duhamel

Os problemas de natureza transiente podem aparecer freqüentemente, devido a: geração interna, mudança na temperatura do meio que envolve o sistema, etc.

Estas causas podem ser denominadas de distúrbios do sistema e representados por  $D(t)$  quando são funções do tempo. Para resolver estes tipos de problema a transformada de Laplace e o teorema de Duhamel constituem importantes ferramentas.

O teorema de Duhamel estabelece que, se a solução transiente representativa de um sistema, com condição inicial constante e submetido a um distúrbio unitário, for conhecida, pode-se determinar a solução para o sistema quando o distúrbio for uma função genérica do tempo a partir da solução conhecida para o distúrbio unitário.

Seja  $\psi(x,t)$  a solução do caso em que  $D(t) = 1$ , então a solução  $\phi(x,t)$  correspondente ao caso no qual  $D(t)$  é uma função genérica do tempo é dada por:

$$\phi(x,t) = \int_0^t D(s) \frac{\partial \psi(x,t-s)}{\partial t} ds \quad (\text{B.1})$$

Esta integral, Eq. B.1, é conhecida como integral de Duhamel. A demonstração desta relação encontra-se na referência [1], p. 306-309.

Utilizando a regra da diferenciação de Leibnitz na Eq. B.1, pode-se mostrar que:

$$\phi(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t D(s) \psi(x,t-s) ds \quad (\text{B.2})$$

Esta equação estabelece que a solução  $\phi(x,t)$  para o sistema submetido a um distúrbio genérico pode também ser determinada pela diferenciação da integral da convolução. Desta forma, fica demonstrada a equivalência entre os dois teoremas quando se trata da solução de um problema transiente.



## APÊNDICE C

C - Solução Alternativa do caso Eckert, utilizando a Transformada de Fourier

Este problema foi proposto e resolvido no capítulo 5, utilizando a transformada de Laplace e o teorema dos resíduos de Cauchy. O mesmo foi resolvido, originalmente, por Eckert, Referência [8], utilizando o método numérico das diferenças finitas.

Com o objetivo de ilustrar a aplicabilidade da transformada de Fourier na solução de problemas transientes, apresenta-se outra solução para o mesmo problema utilizando esta técnica.

O problema proposto é o mesmo resolvido no capítulo 5: encontrar a solução exata para o problema de transmissão de calor e massa simultânea numa placa porosa infinita submetida a um pulso de temperatura numa lateral, mantida à condição inicial no outro lado e isolada ao fluxo de massa em ambos os lados. A Fig. C.1 ilustra o problema.

É interessante a utilização da transformada de Fourier neste tipo de problema pois esta técnica exige o conhecimento das derivadas das variáveis dependentes ao longo da solução. Como este é um problema cujas condições de contorno diz respeito a um fluxo de massa nulo, vê-se que é viável a sua aplicação.

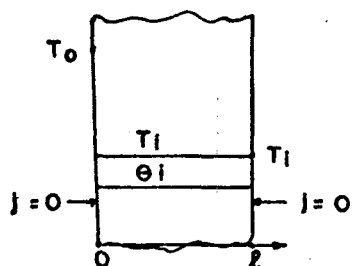


Figura C.1

Conforme exposto no capítulo 5, as equações diferenciais representativas do sistema são:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{C.2})$$

As condições de contorno ilustradas na Fig. C.1 são:

$$T(0,t) = T_0, \quad T(l,t) = T_i, \quad D_{\theta} \frac{\partial \theta(0,t)}{\partial x} + D_T \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{e}$$

$$D_{\theta} \frac{\partial \theta(l,t)}{\partial x} + D_T \frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = 0.$$

As condições iniciais são:  $T(x,0) = T_i$  e  $\theta(x,0) = \theta_i$ .

A solução da Eq. C.1 pode ser obtida utilizando,

por exemplo, transformada de Laplace e o teorema dos resíduos de Cauchy.

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_0 - T_i} = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} n\pi \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) e^{-(n\pi)^2 \frac{t}{\ell^2}} \quad (\text{C.3})$$

A Eq. (C.2) pode ser integrada utilizando a transformada de Fourier.

Multiplicando ambos os membros da Eq. (C.2) por  $\cos n\pi \frac{x}{\ell}$ , integrando no intervalo  $[0, \ell]$ , utilizando as condições de contorno obtêm-se uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem não homogênea em termos da transformada de Fourier em cosseno:

$$\frac{d\theta_F(n,t)}{dt} + D_\theta \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \theta_F(n,t) = -D_T \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 T_F(n,t) \quad (\text{C.4})$$

onde:

$$\theta_F(n,t) = \int_0^{\ell} \theta(x,t) \cos n\pi \frac{x}{\ell} dx \quad (\text{C.5})$$

$$T_F(n,t) = \int_0^{\ell} T(x,t) \cos n\pi \frac{x}{\ell} dx \quad (\text{C.6})$$

A solução da Eq. (C.4) é:

$$\theta_F(n, t) = C e^{-\frac{(n\pi)^2 F O m}{D_T} - \frac{(n\pi)^2}{\ell^2} \frac{D_\theta t}{\ell^2}} \int T_F(n, t) e^{\frac{(n\pi)^2}{\ell^2} \frac{D_\theta t}{\ell^2}} dt \quad (C.7)$$

onde  $F O m = \frac{D_\theta t}{\ell^2}$  (Fourier mássico).

A inversa da transformada de Fourier é dada, conforme [13], por:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\ell} \theta_F(0, t) + \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_F(n, t) \cos n\pi \frac{x}{\ell} \quad (C.8)$$

Utilizando a Eq. (C.7) determina-se  $\theta_F(n, t)$  e, após uma série de manipulações, chega-se à conclusão que:

$$\begin{aligned} \theta^* &= \frac{\theta(x, t) - \theta_i}{(T_0 - T_i) \frac{D_T}{D_\theta}} = \frac{x}{\ell} - \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m^2} e^{-\frac{(m\pi)^2 F O}{\ell^2}} \cos m\pi \frac{x}{\ell} \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \delta_{mn} \frac{(-1)^m - 1}{m^2} + (1 - \delta_{mn}) \frac{2}{n} \left[ \frac{(-1)^{m+n} - 1}{n+m} + \frac{(-1)^{n-m} - 1}{n-m} \right] \right. \\ &\left. \cdot \frac{m^2}{\frac{n^2}{Lu} - m^2} \right\} \left[ e^{-\frac{(n\pi)^2 F O}{\ell^2}} - e^{-\frac{(m\pi)^2 F O m}{\ell^2}} \right] \cos m\pi \frac{x}{\ell} \quad (C.9) \end{aligned}$$

Observa-se que esta solução fecha tanto com o resultado analítico do capítulo 5 quanto com o resultado numérico de ECKERT, Ref. [8] quando se faz o limite com FO e FOm tendendo a infinito obtendo como resultado:  $\theta^* = \frac{x}{\ell} - \frac{1}{2}$ . Esta é a solução assintótica do capítulo 5 e também da solução numérica.