

DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS
APLICADA A UM PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA OFERTA DE
CARVÃO MINERAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS
APLICADA A UM PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA OFERTA DE CARVÃO MINERAL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA



UFSC-BU

RALPH CARVALHO GROSZEWICZ

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
DEZEMBRO DE 1985

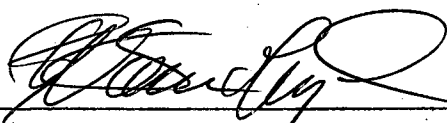
DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS
APLICADA A UM PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA OFERTA DE CARVÃO MINERAL

RALPH CARVALHO GROSZEWICZ

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

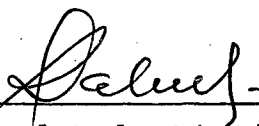
"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E APROVADA EM
SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

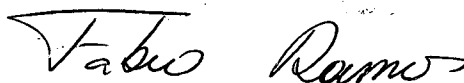


Prof. Robert Wayne Samohyl, Ph.D.
Coordenador

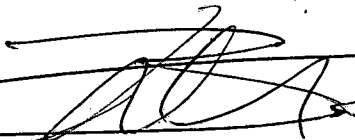
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Raul Valentim da Silva, M.Sc.
Presidente



Prof. Fábio Ramos, Ph.D.



Prof. Ricardo Miranda Barcia, Ph.D.

ã Elizabeth e Mariana

AGRADECIMENTOS

Este trabalho conclui uma etapa da vida do autor, que iniciou com o curso de graduação. Naquela época, a idéia do pós-graduação já era acalentada. Durante este tempo todo, muitas pessoas ajudaram-no, incentivaram-no, acreditaram nele, investiram na sua pessoa.

Nelson Suga despertou-lhe o interesse pela Pesquisa Operacional e o incentivou a fazer o curso de pós-graduação.

Seu pai e família apoiaram-no e ajudaram-no sempre, inclusive financeiramente, durante o curso, juntamente com o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Paulo Renécio Nascimento despertou-lhe o interesse pelo assunto de expansão de capacidade.

Fábio Ramos orientou e incentivou o autor desde os primórdios deste trabalho. Foi o grande cúmplice. Através do Centro de Hidráulica e Hidologia Prof. Parigot de Souza (CEHPAR), assistiu no início, provendo espaço físico e apoio à pesquisa bibliográfica. O autor deve muito da realização deste trabalho a ele.

Wilhelm Rodder foi sempre muito objetivo e acertado, no espaço de tempo em que orientou o autor.

Prof. Raul Valentim da Silva orientou o autor na fase final do trabalho e foi sempre eficaz na solução dos problemas que surgiram.

Carlos Jorge Zimmermann e Luis César Miara deram seu apoio pessoal e o da Companhia Paranaense de Energia (COPEL), que permitiu o uso do seu computador para a avaliação do estudo de caso e edição do texto

Os amigos sempre incentivaram-no; no mínimo com a pergunta: como é que está a tese, já terminou ?

Maria Sueli dos Santos, Eliana Maria Pereira e Lucimar de Oliveira ajudaram-no na datilografia do texto.

Todos participaram em algum instante, com alguma intensidade. Elizabeth porém, esteve sempre presente, em toda esta etapa, com amor e carinho.

RESUMO

O problema de planejamento da oferta de carvão mineral é de difícil solução. É um problema de programação matemática de grande porte, devido a fatores como: i) o complexo inter-relacionamento entre as fases de produção, beneficiamento, transporte e utilização do carvão; ii) o fato de o carvão ser um recurso exaurível, forçando uma inter-relação entre os períodos de planejamento; e iii) a grande diversidade de tipos de carvão que devem ser tratados simultaneamente. Além disso, a consideração de economias de escala o tornam um problema não-convexo, para os quais é praticamente impossível provar que um dado algoritmo achará a solução ótima global.

Este trabalho apresenta uma solução ao problema, ainda que não ótima, onde são utilizados decomposição de Benders e uma aproximação para as funções de custos côncavas, através da linearização por partes.

Usando os códigos computacionais para programação matemática de Land e Powell, um estudo de caso para o sistema brasileiro de carvão é apresentado e a performance do algoritmo de Benders é avaliada. Os resultados sugerem que o método de Benders é melhor que o simples uso de programação linear mista, sem decomposição, mesmo num caso onde não se pode tirar proveito de estruturas especiais, como de transportes ou redes de fluxo.

ABSTRACT

The problem of mineral coal supply planning is one of difficult solution. It is a large scale problem due to: i) the complex interrelationship among the phases of production, preparation, transport and utilization, ii) the fact that coal is non-renewable resource which requires an interrelation among the planning periods and iii) the wide variety of coal types being treated simultaneously. In addition, the existence of economies of scale result in a non-convex problem for which it is practically impossible to prove that a given algorithm will yield the global optimum solution.

The study presents a solution to the problem - not the optimum one - using Benders' Decomposition and piecewise linear approximation of concave cost functions.

Through the use of Land and Powell's computational codes on mathematical programming, a case study on the Brazilian coal system is presented and Benders' algorithm performance is evaluated. The result suggests that Benders' method is better than the solution usually obtained through mixed integer programming, without decomposition, even in a case when it is impossible to get the benefits of special structures like transport or network ones.

SUMÁRIO

1.0	INTRODUÇÃO	1
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO	2
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	3
2.0	PLANEJAMENTO DA OFERTA DE CARVÃO MINERAL	5
2.1	DESCRIÇÃO DE UM PROBLEMA GENÉRICO	5
2.1.1	Formulação Matemática	6
2.2	PECULIARIDADES DO CARVÃO MINERAL	12
2.2.1	Mineração	13
2.2.2	Beneficiamento	16
2.2.3	Transportes	18
2.2.4	Utilização	20
2.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA OFERTA PARA O CARVÃO MINERAL	21
3.0	MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA	24
3.1	DESCRIÇÃO DO MODELO	25
3.1.1	Restrições	26
3.1.2	Lista de Índices e Variáveis	35
3.1.3	Função Objetivo	39
3.2	CARACTERIZAÇÃO DO MODELO	44
4.0	TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO	50
4.1	PRINCIPAIS LINHAS DE ABORDAGEM	51
4.2	DECOMPOSIÇÃO MATEMÁTICA	53
4.2.1	Estrutura do modelo de planejamento	55

4.2.2	Decomposição orientada por preço	65
4.2.3	Decomposição orientada por recurso	66
4.2.4	Decomposição Heurística de Yaged	69
4.2.5	Decomposição de Benders	73
4.3	PROGRAMAÇÃO LINEAR MISTA	80
4.4	TÉCNICA ADOTADA	88
4.5	DESCRIÇÃO DO ALGORITMO DE BENDERS	90
4.6	FORMULAÇÃO DO MODELO SEGUNDO BENDERS	97
4.6.1	Solução do Subproblema	108
4.6.2	Solução do Supervisor	114
5.0	ESTUDO DE CASO	116
5.1	APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE CASO	116
5.1.1	Definição e Coleta de Dados	116
5.1.2	Formulação Matemática	131
5.1.3	Implantação dos Problemas	139
5.2	ALGORITMOS COMPUTACIONAIS	141
5.2.1	Algoritmos Básicos	143
5.2.2	Algoritmo de Benders	151
5.3	OBTENÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	161
5.3.1	Resultados Obtidos	161
5.3.2	Análise dos Resultados	168
6.0	CONCLUSÃO	179
6.1	CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO MODELO MATEMÁTICO	179
6.2	CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO ALGORITMO DE BENDERS	181
6.3	CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DOS CÓDIGOS DE LAND & POWELL	183
6.4	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	184
APÊNDICE 1 - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DA LINEARIZAÇÃO		191

RELAÇÃO DE FIGURAS

Figura 1. Funções de custo	11
Figura 2. Fluxo Físico do Carvão Mineral	14
Figura 3. Estrutura Regional e Rotas de Transportes	19
Figura 4. Etapas do Transporte de Carvão	40
Figura 5. Estrutura do modelo matemático	46
Figura 6. Miscigenação dos tipos de carvão	49
Figura 7. Rede de Transbordo ("Transshipment")	58
Figura 8. Fluxo de Energia no Estado do Paraná	59
Figura 9. Representação através de Rede de Fluxo	60
Figura 10. Atendimento a uma Demanda Energética	62
Figura 11. Representação do Beneficiamento através de Redes	63
Figura 12. Algoritmo de Decomposição de Yaged	72
Figura 13. Linearização por Partes	81
Figura 14. O Método Lambda de Linearização	82
Figura 15. O Método Delta de Linearização	85
Figura 16. Fluxograma de Algoritmo de Benders	93
Figura 17. Linearização por partes em dois segmentos	106
Figura 18. Determinação do Raio Extremo no Problema Global	112
Figura 19. Elementos do Estudo de Caso	120
Figura 20. Parâmetros da Linearização	123
Figura 21. Estrutura do Protótipo por Inteiro	140
Figura 22. Fluxograma da Sub-rotina BNDRS	157
Figura 23. Solução do Pequeno Linear por Benders	162
Figura 24. Tempos nas soluções inviável e ilimitada	164
Figura 25. Limites ao Valor da Função Objetivo (Benders).	165
Figura 26. Tempo Acumulado de Processamento (Benders).	166

Figura 27. Tempos de CPU do subproblema e supervisor . . .	173
Figura 28. Variáveis da Linearização	192

RELAÇÃO DE TABELAS

Tabela 1.	Rendimentos no beneficiamento.	17
Tabela 2.	Tipos de Carvão	17
Tabela 3.	Detalhe da demanda energética	33
Tabela 4.	Problemas Fundamentais do Algoritmo de Benders	94
Tabela 5.	Conteúdo dos Vetores B e FY	110
Tabela 6.	Variáveis Binárias do Protótipo	119
Tabela 7.	Dados de Mineração	122
Tabela 8.	Tipos de Carvão	124
Tabela 9.	Rendimentos no Beneficiamento	125
Tabela 10.	Dados de Beneficiamento	126
Tabela 11.	Demanda de Carvão Metalúrgico (10^3 ton)	127
Tabela 12.	Demanda do Carvão Vapor (10^3 ton)	128
Tabela 13.	Demanda de Carvão Vapor (cont.)	129
Tabela 14.	Custos de Transportes Intra-regionais	130
Tabela 15.	Capacidade do Portos	130
Tabela 16.	Custos e Tipos de Transportes	131
Tabela 17.	Dimensões de um Bloco do Dual do Subproblema.	136
Tabela 18.	Resultados Interpretados do Sistema do Carvão	142
Tabela 19.	Sub-rotinas do Algoritmo de Benders	155
Tabela 20.	Blocos de Dados do Algoritmo de Benders	156
Tabela 21.	Resultados da solução por Benders.	167
Tabela 22.	Resultados da Solução por Branch and Bound.	168
Tabela 23.	Expansões e Folgas de Capacidade de Mineração	169
Tabela 24.	Tolerâncias do Sistema	175
Tabela 25.	Tolerâncias Recomendadas	175
Tabela 26.	Tolerâncias Utilizadas	177

Tabela 27. Resumo dos resultados de Benders	182
Tabela 28. Parâmetros da Linearização	193

1.0 INTRODUÇÃO

As crises de petróleo, na década passada, despertaram um interesse muito grande pelos assuntos relativos à planejamento energético. Determinaram uma maior agilidade na análise de decisões e uma visão integrada do problema. A necessidade surgiu e consolidou-se.

Neste contexto, a Companhia Paranaense de Energia (COPEL), com a consultoria do Centro de Hidráulica e Hidrologia Prof. Parigot de Souza (CEHPAR), em meados de 1981, iniciou o projeto de modelagem do sistema energético paranaense. A idéia inicial previa uma modelagem através de redes de fluxo, com intenções de otimização. Entretanto, com o intuito de formar uma base de dados consistida e adquirir sensibilidade a respeito do problema, desenvolveu-se antes um modelo de simulação, cujo propósito é o de avaliar cenários futuros: caracterizá-los econômica e fisicamente [CEHPAR, 1982]. Esta modelagem considerou os insumos energéticos todos de forma praticamente idêntica, sem considerar os detalhes peculiares a cada um.

Agora, este trabalho analisa em detalhes o problema de planejamento da oferta de um insumo energético isolado. O problema é descrito e modelado, as alternativas de solução ao modelo matemático são consideradas e uma das alternativas é avaliada.

Dentre os insumos energéticos considerados na modelagem do sistema energético paranaense, pareceu mais adequado

a um estudo detalhado o carvão mineral. Ele possui algumas características coincidentes com os outros insumos, sob o aspecto de modelagem matemática, e possui outras que lhe são exclusivas, tornado o problema abrangente e extrapolando sua utilidade a outras áreas que não o planejamento energético.

O problema de planejamento da oferta envolve decisões quanto à expansão de capacidade do sistema, ao longo de um horizonte de planejamento, e quanto a operação deste sistema em cada período. O problema do carvão mineral, em especial, é de grande porte, devido a fatores como: (i) o complexo inter-relacionamento entre as fases de produção, beneficiamento, transporte e utilização do carvão; (ii) o fato de o carvão ser um recurso exaurível, forçando uma inter-relação entre os períodos de planejamento; e (iii) a grande diversidade de tipos de carvão que devem ser tratados simultaneamente. Além disso, a consideração de economias de escala, comprovadamente existentes no setor de carvão mineral, o tornam um problema não-convexo.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

O estudo detalhado do problema de planejamento da oferta do carvão mineral, conduziu o autor a optar pela técnica de decomposição de Benders, como sendo a linha mestra da solução. A disponibilidade na COPEL dos códigos computacionais de programação matemática de Land e Powell [LAND & POWELL, 1973] e a falta de experiência da empresa na sua utilização, determinaram o autor a empregá-los neste trabalho.

Neste contexto, este trabalho busca: (i) avaliar a possibilidade de modelar o problema todo, ou parte dele, através de redes de fluxo; (ii) avaliar o potencial da técnica de decomposição de Benders; e (iii) apreciar o desempenho dos códigos de programação matemática de Land e Powell, quando aplicados a problemas de médio porte.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho divide-se em seis capítulos, incluindo esta introdução.

No capítulo 2, define-se o problema de planejamento da oferta de um produto genérico, apresentam-se os aspectos relevantes de um sistema de carvão mineral e define-se o problema de planejamento para o caso particular do carvão mineral.

No capítulo 3, o problema descrito é modelado como um problema de programação matemática, de grande porte e não-convexo.

Definidos problema e modelo matemático, no capítulo 4 são consideradas as técnicas de solução ao modelo. Avaliam-se as técnicas promissoras, estuda-se a possibilidade da modelagem através de redes de fluxo e faz-se a opção pela técnica de Benders. O algoritmo de Benders é detalhado e o modelo, definido no capítulo 3, é reestruturado para adequar-se à técnica de Benders.

O capítulo 5 apresenta um estudo de caso, baseado no sistema brasileiro de carvão mineral, para avaliar o desempenho do algoritmo de Benders e dos códigos de programação matemática de Land e Powell. Define-se a estrutura, dimensões e dados para o caso, discute-se a implantação e desenvolvimento dos programas computacionais desenvolvidos e conclui-se com uma avaliação dos resultados obtidos.

No último capítulo, resumem-se as conclusões e enumeram-se sugestões para pesquisas futuras.

2.0 PLANEJAMENTO DA OFERTA DE CARVÃO MINERAL

Planejar a oferta de um bem qualquer, consiste em determinar a melhor alternativa de atendimento à demanda deste bem, ao longo de um período de tempo. A estrutura do problema de planejamento da oferta e as decisões básicas envolvidas são comuns a maioria dos bens. O carvão mineral, pela diversidade de tipos com que se apresenta e a complexa inter-relação entre as fases de mineração, beneficiamento, transporte e utilização, faz com que o problema do seu planejamento apresente aspectos interessantes, em especial quanto a sua dimensão.

A descrição do Problema da Oferta de Carvão Mineral far-se-á apresentando primeiro um caso genérico, para um bem qualquer, e depois o caso particular do carvão mineral.

2.1 DESCRIÇÃO DE UM PROBLEMA GENÉRICO

Dado m produtores de um determinado bem e n consumidores, procura-se as alternativas de atendimento a uma demanda crescente e conhecida e as opções de expansões de capacidade do sistema, que minimizem os custos inerentes aos dois processos ao longo de um horizonte de planejamento.

O problema dentro de cada período consiste na decisão de quais produtores atenderão quais consumidores e em que quantidades. O processo de atendimento ocorre em três etapas: produção, transporte e utilização. Fixadas as capacidades de

produção e transportes, a decisão fica influenciada somente pelos custos de cada etapa e, se estes forem lineares, resulta no clássico problema de transportes; descrito na literatura de Pesquisa Operacional.

As capacidades de produção e transporte, entretanto, também são decisões inerentes ao problema. Dada as capacidades iniciais, procura-se determinar em que período elas devem ser expandidas e em quanto, para que se mantenha o atendimento à demanda.

A busca da solução deve considerar os problemas de atendimento à demanda e expansão de capacidade de forma integrada, e em geral é orientada pela minimização dos custos de operação e expansão do sistema. Há situações em que a caracterização da melhor alternativa extrapola a minimização de custos, exigindo outros atributos, como, por exemplo, os riscos de não atendimento.

2.1.1 Formulação Matemática

O problema genérico, na forma descrita acima, pode ser modelado como um problema de programação matemática e descrito como tal através de suas variáveis, restrições e função objetivo.

Variáveis

As variáveis são agrupadas em exógenas - aquelas cujos valores o decisor não tem controle, são fixados pelo mercado, por exemplo - e de decisão - cujos valores são determinado pelo modelo e o decisor tem controles.

Variáveis de Decisão

FLU_{st} fluxo do bem que escoo pela rota s, no período t (t = 1, 2, ..., T onde T define o horizonte do planejamento).

PRO_{jt} quantidade produzida no centro de produção j, no período t.

EKT_{st} expansão da capacidade de transporte da rota s, no período t.

EKP_{jt} expansão da capacidade de produção do centro j, no período t.

Variáveis Exógenas

DEM_{qt} demanda do centro de consumo q, no período t.

KTI_s capacidade inicial de transporte da rota s.

KPI_j capacidade inicial de produção do centro j.

\underline{FD}_t Fator de Desconto do capital para o período t.

$$\underline{FD}_t = (1 + \text{TAXA DE JURO})^{-t}$$

Restrições

Atendimento à demanda nos centros de consumo q .

$$\sum_{s \in D} \text{FLU}_{st} \geq \underline{\text{DEM}}_{qt} \quad \forall q, t$$

$$D = \{ s \mid \text{destino da rota k seja o centro q} \}$$

Quantidades ofertadas pelo centro de produção j .

$$\sum_{s \in O} \text{FLU}_{st} \leq \text{PRO}_{jt} \quad \forall j, t$$

$$O = \{ s \mid \text{origem da rota k seja o centro j} \}$$

Capacidade das rotas de transportes s .

$$\text{FLU}_{st} \leq \underline{\text{KTI}}_s + \sum_{a=1}^t \text{EKT}_{at} \quad \forall s, t$$

Capacidade dos centros de produção j .

$$\text{PRO}_{jt} \leq \underline{\text{KPI}}_j + \sum_{a=1}^t \text{EKP}_{at} \quad \forall j, t$$

Não-negatividades.

$$FLU_{st}, PRO_{jt}, EKT_{st}, EKP_{jt} \geq 0 \quad \forall s, j, t$$

Função Objetivo.

Para o problema de planejamento da oferta, em geral, busca-se minimizar a soma dos custos de cada período, corrigidos para o início horizonte de planejamento:

$$\min \sum_t FD_t [\text{custos operacionais} + \text{investimentos}]_t$$

onde os custos operacionais são o de produção (\underline{CUP}_j) e transporte (\underline{CUT}_s) e os investimentos são os de expansões das capacidades de produção (\underline{CEP}_j) e de transporte (\underline{CET}_s). Representando os custos por funções genéricas das variáveis de decisão PRO_{jt} , FLU_{st} , EKP_{jt} e EKT_{st} , respectivamente, pode-se resumir, para um período t :

$$\begin{aligned} \text{custos operacionais} &= \sum_j \underline{CUP}_j (PRO_{jt}) + \sum_s \underline{CUT}_s (FLU_{st}) \\ \text{investimentos} &= \sum_j \underline{CEP}_j (EKP_{jt}) + \sum_s \underline{CET}_s (EKT_{st}) \end{aligned}$$

As funções utilizadas para exprimir os custos, têm papel importante na definição do problema.

Quanto mais realistas são as representações, maiores são as dificuldades impostas à solução.

A representação mais simples é a linear. Por exemplo, dentro de certos limites de peso, o custo de transporte de um produto pode ser bem representado por uma função linear do próprio peso. Seja CT o custo total, CUN o custo por unidade de peso e P o peso do produto transportado. A função que representa o custo é:

$$CT(P) = CUN P \quad \text{para} \quad Li \leq P \leq Ls$$

onde Li e Ls limitam os valores de P para os quais valem a função. A Figura 1 mostra a representação da equação acima.

Uma representação mais real, considera um custo fixo inicial associado ao CT . Neste caso a função deixa de ser linear apresentando uma descontinuidade e é representada por:

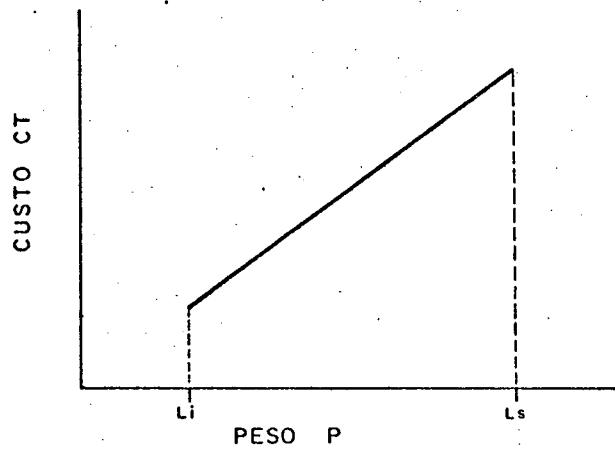
$$CT(P) = \begin{cases} 0 & \text{para } P = 0 \\ CFI + CUN P & \text{para } 0 < P \leq Ls \end{cases}$$

onde CFI é o custo fixo inicial.

Outra situação comum é o caso de economias de escala. O custo unitário é menor para pesos maiores, i.e., um custo marginal decrescente. Uma forma genérica de representação da função, incluindo o custo fixo inicial, é:

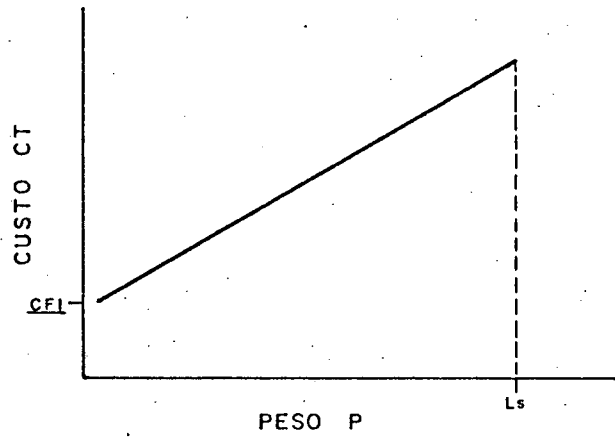
CUSTO LINEAR

$$CT(P) = \underline{CUN} \times P$$



CUSTO FIXO INICIAL

$$CT(P) = \underline{CFI} + \underline{CUN} \times P$$



ECONOMIA DE ESCALA

$$CT(P) = \underline{CFI} + \underline{CUN} \times P^b$$

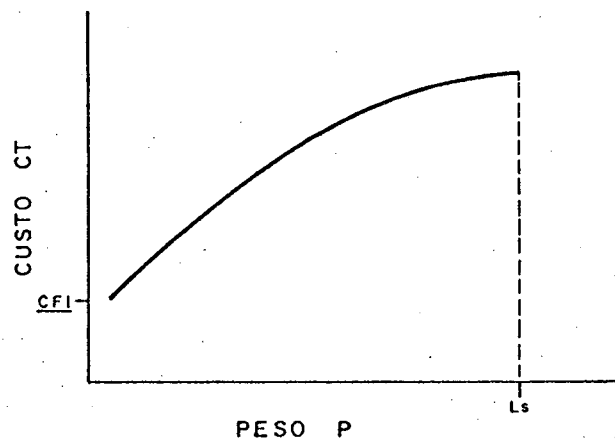


Figura 1. Funções de custo

$$CT(P) = \begin{cases} 0 & \text{para } P = 0 \\ \underline{CFI} + \underline{CUN}^+ \cdot P^b & \text{para } 0 < P \leq Ls \end{cases}$$

onde b é o índice que determina a economia ou deseconomia de escala, segundo ele seja menor ou maior que a unidade. e \underline{CUN}^+ é o custo unitário quando P for igual a 1. Esta função, por exemplo, pode representar bem os custos de implantação de uma nova unidade, de produção. Porém, por sua não convexidade impõem bastante dificuldade à solução de problemas semelhantes ao descrito aqui.

2.2 PECULIARIDADES DO CARVÃO MINERAL

O carvão mineral distingue-se de um produto qualquer, pela diversidade de tipos com que se apresenta e pelo inter-relacionamento complexo entre os setores de produção, transportes e utilização.

Ao se planejar sua oferta, na verdade se planeja a de múltiplos produtos interligados. Cada produto vem de locais diferentes, destina-se à aplicações distintas e tem características próprias apesar de todos serem carvão, apenas de tipos diferentes. Eles caracterizam-se, entre outros parâmetros, pelos teores de cinzas e de enxofre, granulometria e resistência a abrasão e compressão. Suas características irão abilitá-los a uma ou outra utilização. Os vários tipos ou são encontrados na própria natureza, em estado bruto, ou são produzidos por beneficiamento.

O setor de produção inclui a prospecção, mineração e o beneficiamento. Em estado bruto ou beneficiado, o carvão é transportado ao local de uso onde poderá ser consumido diretamente ou convertido em gás ou líquido. A integração física das etapas de mineração, beneficiamento, transportes e utilização está representada de forma esquemática na Figura 2 na pag. 14

Nos próximos parágrafos far-se-á um detalhamento de cada uma das etapas, ao limite necessário à compreensão do modelo matemático a ser formulado posteriormente. Será tomado como base o sistema de carvão mineral no Brasil, descrito em detalhes em duas referências. A primeira, [FINEP, 1981], apresenta um estudo minucioso do setor de carvão mineral e dados compilados para viabilizar a implementação do MOCAM - Modelo de Otimização para o Carvão Mineral. A segunda, [MODIANO & TOURINHO, 1982], descreve superficialmente o MOCAM e apresenta resultados de sua utilização, com os dados preliminares, da referência anterior.

2.2.1 Mineração

A mineração de uma jazida se faz até a exaustão de 50 a 95% de sua reserva. As reservas brasileiras estão avaliadas em cerca de 20 bilhões de toneladas das quais 2,5 bilhões são medidas, 3,6 bilhões indicadas e o restante apenas inferidas. O Rio Grande do Sul detém 73% das reservas e Santa Catarina praticamente o resto.

Os processos de mineração classificam-se em duas categorias: a céu aberto e subterrâneo. O primeiro, recupera até

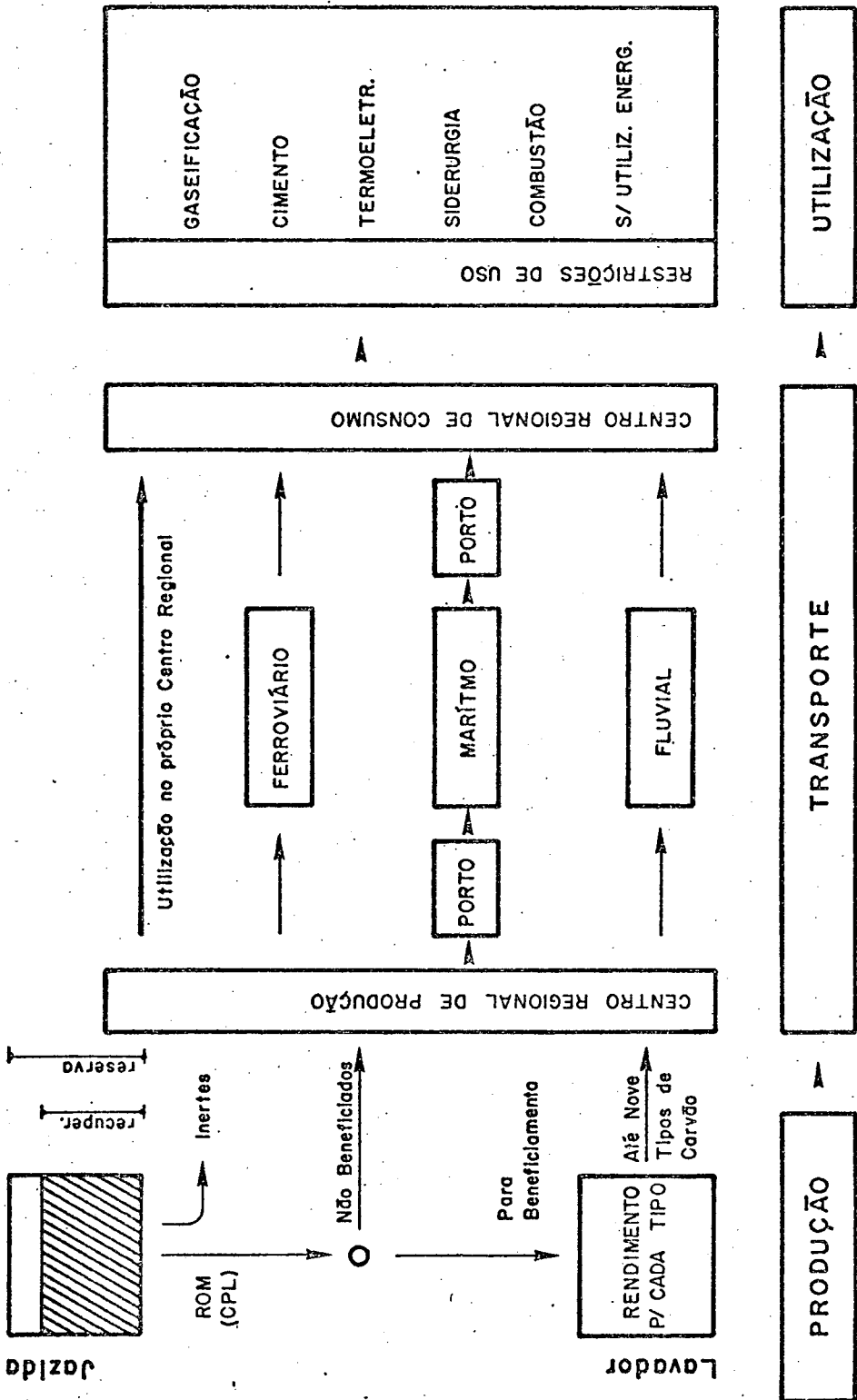


Figura 2. Fluxo Físico do Carvão Mineral

95% das reservas e é empregado em jazidas cuja profundidade não ultrapasse 30 metros, sua eficiência fica prejudicada para profundidades maiores.

A mineração subterrânea permite a extração do carvão a profundidades bem maiores. Na mina Fazenda Lauro Muller, por exemplo, em Santa Catarina, chega-se a profundidades de 500 metros [FINEP, 1981]. Os processos mais utilizados na mineração subterrânea são: "câmeras e pilares" e "longwall". No primeiro, a camada de carvão é minerada deixando-se "pilares", do próprio carvão, para sustentar o teto formado. A necessidade dos pilares resulta num aproveitamento baixo das reservas: cerca de 50-60%. O processo "longwall" utiliza, durante a mineração, suportes hidráulicos para a sustentação do teto. Após a extração do carvão, eles são retirados, provocando um desabamento uniforme do teto da mina. O aproveitamento da reserva é de até 80%.

O material minerado é composto de inertes (material estéril) e de carvão ao qual denomina-se "run-of-mine" (ROM). Ele destina-se ou ao consumo direto, em bruto, ou aos lavadores para beneficiamento. Em Santa Catarina, devido a grande quantidade de rejeitos do ROM, impõe-se um beneficiamento primário em pré-lavadores, na boca da mina, que fornece carvão pré-lavado (CPL), carvão metalúrgico e rejeitos piritosos [VILAÇA, 1981]

2.2.2 Beneficiamento

O beneficiamento visa compatibilizar a qualidade do carvão ROM com a exigida pelo mercado. Em geral, o objetivo é a

redução do teor de cinzas e/ou enxofre. Os processos de beneficiamento produzem duas frações a partir do carvão ROM : a nobre, ou flutuada, com teor de cinzas inferior ao do carvão alimentado; e a não-nobre, ou afundada, com teor de cinzas superior.

São dois os processos mais usados: jig e meio denso. Ambos baseiam-se na força da gravidade para promover a separação das frações. O jig - um método gravimétrico propriamente dito - aproveita a diferença de aceleração provocada pela ação de um fluido pulsante, em geral água. O meio denso utiliza um líquido de densidade intermediária entre as duas espécies que se deseja separar, de modo que uma flutue e a outra afunde.

O processo de meio denso tem um rendimento maior que o jig a um custo também maior. A Tabela 1 mostra os resultados de um beneficiamento pelos dois processos. O carvão ROM, de alimentação, possui 43% de cinzas e será beneficiado para produzir uma fração nobre com 30% de cinza. Pelo processo de meio denso, o beneficiamento produzirá 63 toneladas de fração nobre para cada 100 toneladas alimentada e pelo jig, somente 58 toneladas. Produzirá também, 37 toneladas de uma fração afundada com 65% de cinzas, pelo meio denso, e 42 toneladas, com 61% de cz, pelo jig. Os rendimentos de beneficiamento são características do processo e do carvão.

Os tipos de carvão podem, de forma simplificada, ser caracterizados apenas pelo teor de cinzas. Com base nos teores dos carvões minerados e utilizados no Brasil, Modiano e Tourinho [MODIANO & TOURINHO, 1982] definiram nove tipos de carvão para

Tabela 1: Rendimentos no beneficiamento.

Processo	ROM		NOBRE		NÃO-NOBRE	
	ton	%cz	ton	%cz	ton	%cz
jig	100	42	58	30	42	61
meio denso	100	42	63	30	37	65

fins de modelagem matemática, discriminados na Tabela 2. Os tipos com menor teor de cinzas tem um poder calorífico maior, e são de melhor qualidade.

Tabela 2: Tipos de Carvão

Tipos	Teor de cinzas típico (%)	Faixa de teor de cinzas (%)	Poder calorífico (Gcal/ton)
1	18	18 - 18	>6700
2	20	18 - 22	6300
3	25	23 - 27	5900
4	30	28 - 32	5400
5	35	33 - 37	4900
6	40	38 - 43	4500
7	47	44 - 49	3900
8	54	50 - 59	3500
9	64	60 - 69	2500
0	--	> 70	----

No exemplo da Tabela 1, considerando a discretização, o carvão alimentado é do tipo 6, a fração nobre tipo 4 e a não nobre tipo 9.

2.2.3 Transportes

O transporte do carvão se faz em duas dimensões: intra-regional e inter-regional. Pode-se indentificar no Brasil 11 regiões que produzem e/ou consomem carvão, entre as quais haverá transporte do produto: Rio Grande do Sul, Santa Catarina e Paraná são simultâneamente produtoras e consumidoras; São Paulo, Santos, Rio de Janeiro, Espírito Santo e Minas Gerais representam os principais centros de consumo de carvão mineral; e o exterior, que estabelece conexão com os outros países, representa hoje a fonte de importação do carvão metalúrgico. Na região do Rio Grande do Sul é importante identificar três polos: Bagé, Porto Alegre e Rio Grande. Os dois primeiros, consomem e produzem carvão e o porto de Rio Grande tem sua importancia como elo de ligação para o escoamento da produção de carvão do Rio Grande do Sul.

As possibilidades de transporte inter-regionais são múltiplas e totalizam 19 rotas, principais, nas quais escoam múltiplos tipos de carvão simultaneamente: 8 ferroviárias; 10 marítimas; e uma fluvial. No transporte marítimo deve-se considerar os portos, uma vez que eles podem causar estrangulamento ao fluxo de carvão devido a uma capacidade limitada de carga e descarga. A Figura 3 mostra as regiões e as ligações entre elas.

O transporte de carvão intra-regional se faz principalmente por correias transportadoras e rodovias. É o transporte utilizado entre as minas e lavadores e para acesso aos centros regionais. Em Santa Catarina, devido a distância das

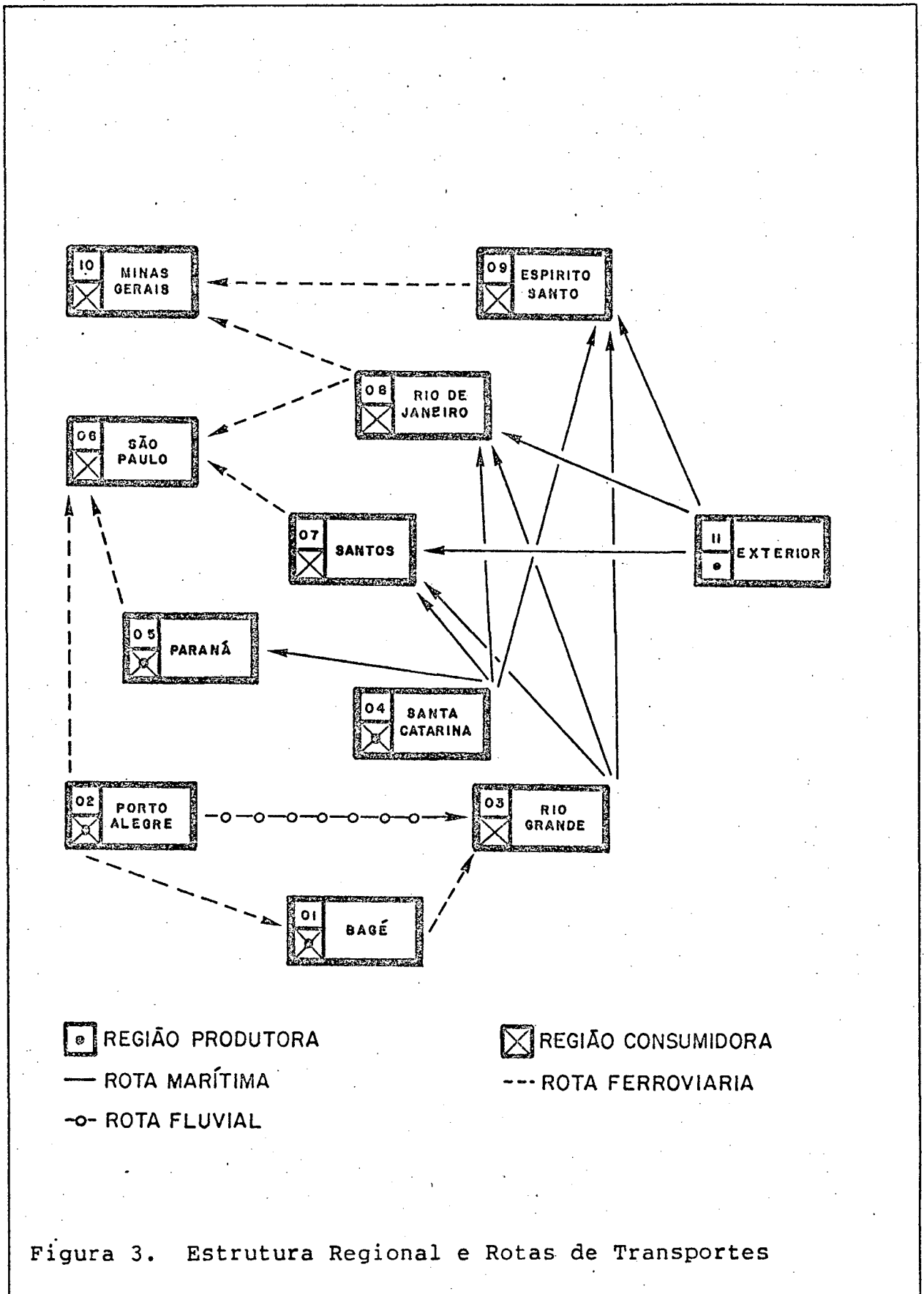


Figura 3. Estrutura Regional e Rotas de Transportes

minas ao lavador Capivari, que centraliza o beneficiamento, o transporte do carvão pré-lavado é feito através de ferrovias.

2.2.4 Utilização

Destacam-se duas principais classes de utilização: a do carvão metalúrgico e a do carvão vapor. O primeiro, é usado para a produção de coque, que será o elemento redutor no processo de obtenção do ferro gusa, processo utilizado pelos três grandes produtores de laminados planos: CSN, Cosipa, e Usiminas. O carvão para a produção de coque deve ter características especiais a respeito do teor de cinzas (max 12%), do teor de enxofre, da granulometria e de resintência a abrasão e compressão [VILAÇA, 1981]. O carvão metalúrgico nacional fica aquém das especificações mínimas exigidas, tendo em vista as instalações existentes, e vêm sendo misturado ao carvão importado, de melhor qualidade, na proporção de 20% nacional e 80% imoportado.

O carvão vapor é destinado a produção de calor. Mesmo as exigências de qualidade sendo menores, devem ser observados o teor de cinzas e, em alguns casos, o de enxofre. A gaseificação, por exemplo, necessita de carvão com teor de cinzas entre 20 e 25% e as cerâmicas permitem, para queima direta, carvão com teores acima de 40%.

A utlização de carvão no Brasil fica bem representada por cinco setores: combustão; indústria de cimento; siderurgia; termoeletricidade; e gaseificação. A siderurgia consome carvão vapor e metalúrgico; os demais, somente carvão vapor.

O carvão metalúrgico tem sua demanda expressa em unidade de massa e somente o carvão tipo 1 (vide Tabela 2) pode atendê-la. A demanda do carvão vapor, para uma determinada aplicação, pode ser suprida por vários tipos de carvão, respeitado o limite máximo de cinzas permitido. A gaseificação, por exemplo, poderia consumir carvão do tipo 2 e 3; o tipo 1 é exclusivo ao uso metalúrgico e a partir do tipo 4, os teores de cinzas são maiores que o permitido ao setor.

2.3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA OFERTA PARA O CARVÃO MINERAL

O problema de planejamento da oferta do carvão mineral consiste em determinar a melhor alternativa de atendimento à demanda, ao longo de um horizonte de planejamento. Na caracterização da melhor alternativa estão envolvidos aspectos técnicos, econômicos, financeiros, sociais, ambientais e políticos. Este trabalho, aborda o problema através de seus componentes quantitativos. Só uma análise integrada, considerando os aspectos quantitativos e qualitativos poderá definir a melhor alternativa.

Uma alternativa de atendimento é caracterizada por decisões nos setores de mineração, beneficiamento, transporte e utilização. São decisões relativas a operação do sistema em cada período, às alterações de capacidade dos elementos ao longo dos períodos e a escolha de processos da mineração e beneficiamento.

Um primeiro nível de decisão seria a escolha dos processos de mineração e beneficiamento a serem utilizados nas novas minas e lavadores. Após analisadas as implicações técnicas, deve-se considerar o aspecto econômico de cada processo, em relação aos seus rendimentos.

Uma etapa posterior diz respeito a capacidade inicial com que devem ser instalados os novos elementos do sistema. Os equipamentos de mineração, beneficiamento e portos tem seus custos por unidade de capacidade decrescentes com o seu porte, i.e. , apresentam economias de escala [O'HARA, 1980]. Este aspecto incentiva a instalação de elementos super-dimensionados, com uma grande reserva de capacidade. Em contrapartida, o custo do capital pressiona o os investimentos a serem postergados, ou seja, que a capacidade seja a mínima possível, quando necessária. A decisão resultará de um equilíbrio entre a economia de escala, o custo do capital e as restrições financeiras. Além disto, as capacidades devem ser tais que as demandas sejam atendidas em todos os períodos. As mesmas considerações são válidas para as expansões de capacidade dos elementos já instalados.

Definidas as capacidades de mineração, beneficiamento, transportes e portos, resta a escolha das alternativas de atendimento dentro de cada período.

A demanda de carvão metalúrgico é suprida apenas por um tipo de carvão. A decisão de quais centros de produção devem atender quais centros de consumo, fica influenciada apenas pelas capacidades e custos de cada etapa do fluxo. A demanda de carvão vapor pode ser suprida por mais de um tipo de carvão, respeitados

os limites máximos de cinzas. Assim, a decisão de usar um carvão de melhor ou pior qualidade resulta do equilíbrio entre os custos de beneficiamento e de transporte - beneficiar mais implica em transportar menos cinzas.

As decisões relativas a escolha de processos, expansão de capacidades e atendimentos à demanda, apesar de terem sido apresentadas separadamente, são interligadas e exigem uma visão global e simultânea para a solução do problema.

Deve-se notar que o problema apresentado não é apenas um problema de expansão da capacidade - definição da época em que um elemento deve ser expandido e a capacidade a ser adicionada; este é apenas um dos aspectos do problema. Considerando-se conhecidas as demandas dos vários tipos de carvão nos diversos locais, o problema é realmente de planejar a melhor forma de atendê-la com todas as implicações já colocadas. Deseja-se planejar todo o setor da oferta do carvão mineral.

Por outro lado, não é um problema amplo no sentido de considerar definições de níveis de oferta e demanda em função de preços do produto - problemas do equilíbrio econômico. No caso em estudo, considera-se a demanda conhecida e inelástica. O problema da sua quantificação, ao longo do horizonte do planejamento, não está no contexto deste trabalho.

3.0 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA

O modelo formulado para utilização neste trabalho é muito semelhante ao MOCAM - Modelo de Otimização para o Carvão Mineral - que "foi concebido para ser usado como instrumento de planejamento e análise econômica do setor de carvão mineral no Brasil. Ele descreve com detalhes a complexa inter-relação entre mineração, beneficiamento, transporte e uso final do carvão, permitindo uma avaliação integrada da escolha do processo, localização e capacidade para estas atividades, ao longo dos vários períodos de planejamento " [MODIANO & TOURINHO, 1982] .

Algumas simplificações foram feitas, no trabalho de Modiano e Tourinho [MODIANO & TOURINHO, 1982], eliminando-se decisões desnecessárias ao propósito de utilizar o modelo para avaliar o desempenho de uma técnica de solução.

A escolha dos processos de mineração e beneficiamento não são feitas pelo modelo. Incluir tal decisão, praticamente multiplica o número de variáveis de decisão pelas alternativas de processo. Um lavador, por exemplo, seria representado por dois elementos: um lavador operando com o processo jig e outro com o meio denso.

Não serão consideradas também, para que se reduza a dimensão do modelo, as expansões de capacidade dos portos e das rotas de transportes. Os resultados preliminares de utilização do MOCAM, mostraram que os investimentos em transportes e portos, no período 1981-2000, representam 30% do total; o restante

pertence à mineração e beneficiamento do carvão. Além disso, os setores de mineração e beneficiamento são os mais afetos ao problema de carvão.

Estas duas simplificações reduzem bastante o tamanho do modelo, sem prejudicar sua estrutura e características.

Foram mantidos os aspectos dinâmico, setorial e regional do MOCAM. O aspecto dinâmico permite considerar, além das expansões de capacidade, a exaustão das reservas de carvão das jazidas. A desagregação setorial da demanda possibilita modelar as restrições de utilização em cada aplicação. E, pela regionalização, consegue-se verificar as necessidades de troca entre regiões e avaliar os estrangulamentos que possam ocorrer ao fluxo do carvão.

Em relação ao MOCAM, este trabalho incluiu a consideração de economias de escala, alterou a modelagem do setor de utilização do carvão vapor e detalhou a função objetivo.

3.1 DESCRIÇÃO DO MODELO

Nos próximos parágrafos serão descritas as restrições, variáveis e função objetivo do modelo. As variáveis serão descritas a medida que surgirem nas restrições. Posteriormente, as variáveis e índices serão listados ordenadamente com uma breve descrição.

3.1.1 Restrições

O carvão minerado em uma jazida, ou é consumido em bruto, ou vai aos lavadores para beneficiamento. Será denotado por CNB_{jt} a parcela produzida na jazida j , no período t , que não sofrerá beneficiamento. O restante da produção irá em parcelas menores aos lavadores; uma parcela para cada tipo de fração nobre a ser produzida. A variável CBN_{jvit} representará a parcela produzida na jazida j , que será beneficiada no lavador v , para produzir uma fração nobre tipo i , no ano t . Não havendo decisão a respeito do processo de beneficiamento, o que implicaria ter tantos lavadores quantos fossem os processos alternativos, cada mina manda carvão para um único lavador. Mesmo assim, para manter a generalizade as variáveis serão indexadas pelo índice v . Desta forma, o carvão que sai de uma jazida, num dado período, fica representado pela expressão:

$$(CNB_{jt} + \sum_i CBN_{jvit}) \quad \forall j,t$$

Exaustão das jazidas

O carvão minerado na jazida j , durante todo o período de planejamento, não deve exceder a reserva RESTOT_j, remanescente no início do horizonte de planejamento. A percentagem da reserva que será recuperada é função do processo de mineração, decidido a priori, representada pelo índice de recuperação IRE_j.

$$(\text{CNB}_{jt} + \sum_i \text{CBN}_{jvit}) \leq \underline{\text{IRE}}_j \underline{\text{RESTOT}}_j$$

ou,

$$(1/\underline{\text{IRE}}_j) (\sum_t (\text{CNB}_{jt} + \sum_i \text{CBN}_{jvit})) \leq \underline{\text{RESTOT}}_j \quad \forall j \quad (01)$$

Produção das minas

A quantidade de material minerado (carvão mais inerte), no período t , fica limitada à capacidade de mineração instalada. Esta capacidade, no período t , é a adição da capacidade anterior ao início do horizonte de planejamento ($\underline{\text{KIM}}_j$) mais as expansões (EKM_{jt}) ocorridas até o período, inclusive. As expansões são consideradas disponíveis no início do período em que ocorrem. Denominando por $\underline{\text{PCV}}_j$ a percentagem de carvão contida no material minerado, a inequação que limita a produção fica:

$$(1/\underline{\text{PCV}}_j) (\text{CNB}_{jt} + \sum_i \text{CBN}_{jvit}) \leq \underline{\text{KIM}}_j + \sum_{a=1}^t \text{EKM}_{at} \quad \forall j,t \quad (02)$$

Produção dos lavadores

A quantidade beneficiada no período t , no lavador v , será a soma de todas as parcelas de carvão, vindas das jazidas,

para a produção dos vários tipos de frações nobres. De forma análoga a mineração, ela fica limitada a capacidade instalada e valem as mesmas considerações, alterando-se apenas os nomes das variáveis de capacidade inicial (KIB_v) e expansão (EKB_{vt}).

$$\sum_{(ij) \in Lv} CBN_{jvit} \leq KIB_v + \sum_{a=1}^t EKB_{at} \quad \forall v, t \quad (03)$$

onde $Lv = \{j \mid \text{a jazida } j \text{ beneficie carvão no lavador } v \text{ e}$
 $i \mid \text{seja produzido carvão nobre tipo } i, \text{ no}$
 $\text{lavador } v, \text{ com carvão vindo da jazida } j \}$

Parcelas produzidas no beneficiamento

A quantidade de carvão tipo i , produzida no lavador v , no ano t , (LAV_{vit}) é composta pela fração nobre obtida a partir da parcela bruta vinda da jazida j , para produção do tipo i , e pelas frações afundadas que sejam também do tipo i . Suponha o beneficiamento de um carvão ROM tipo 5 para produzir um nobre tipo 2; o afundado poderia resultar do tipo 6. No mesmo lavador, poderia ser beneficiado um carvão tipo 8 para produzir um nobre tipo 6; o afundado seria tipo 9, por exemplo. Nesta situação, a quantidade de carvão tipo 6 seria resultante de uma parcela nobre e outra afundada. A primeira, seria a quantidade de carvão ROM tipo 8 (CBN_{jvit} com $i=8$) multiplicado pelo rendimento para a produção do nobre tipo 6 (RND_{ji} com $i=6$). A segunda parcela, seria a quantidade de carvão ROM tipo 5 multiplicado pelo complemento do rendimento para a produção do tipo 2 ($1 - RND_{ji}$ com $i=2$).

De forma genérica, a parcela LAV pode ser expressa pela equação abaixo

$$LAV_{vit} = \sum_{(r,j) \in R} RND_{ji} CBN_{jvit} + \sum_{(r,j) \in R} (1 - RND_{ji}) CBN_{jvit} \quad \forall v, i, t \quad (04)$$

O conjunto R é formado pelos pares (r,j) tal que a parcela de carvão vinda da mina j para produzir o nobre r no lavador v, tenha como parcela afundada carvão do tipo i. Em algumas situações R pode ser um conjunto vazio.

Requisito Mínimo para Utilização

Seja CPU_{qikt} a quantidade mínima necessária de carvão tipo i, para ser utilizado na região q, no setor k (siderurgia, gaseificação, etc), no período t. A disponibilidade total de carvão tipo i em cada região e período deve ser maior ou igual ao somatório das quantidades de carvão do mesmo tipo i, necessárias a cada setor, nas mesmas regiões e períodos ($\sum_k CPU_{qikt}$).

A disponibilidade total acima, para um mesmo tipo, região e período, é composta de quatro parcelas: carvão beneficiado; não-beneficiado; importado; e exportado. A importação e exportação se fazem através das rotas de transportes inter-regionais, cada qual com sentido único e escoamento simultâneo dos vários tipos de carvão. A quantidade de carvão

tipo i , transportada pela rota s no período t será denotada por CTR_{sit} . A desigualdade que garante o requisito mínimo fica:

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in L} LAV_{vit} + \sum_{j \in J} CNB_{jt} + \sum_{s \in I} CTR_{sit} - \\ & \sum_{s \in E} CTR_{sit} \geq \sum_k CPU_{qikt} \end{aligned} \quad \forall q, i, t \quad (05)$$

onde, os conjuntos L , J , I e E representam:

$L = \{ \text{lavadores que produzem carvão tipo } i \text{ na região } q \}$

$J = \{ \text{jazidas cujo ROM seja do tipo } i \text{ na região } q \}$

$I = \{ \text{rotas de transportes cujo destino seja a região } q \text{ e} \\ \text{escoe carvão tipo } i \}$

$E = \{ \text{rotas de transportes cuja origem seja a região } q \text{ e} \\ \text{escoe carvão tipo } i \}$

Os valores de CPU_{qikt} irão assumir valores maiores que zero, forçados pelas restrições de demanda, ainda não discutidas.

Capacidade dos portos

Apesar de no modelo não se considerar as expansões dos portos, é importante que lhes sejam impostas restrições às suas capacidades. O movimento de um porto p é representado pela quantidade de carvão de todos os tipos que chegam ou partem por

todas as rotas ligadas a ele. O movimento, num período t , deve ser menor ou igual a sua capacidade KP_{pt}

$$\sum_{(is) \in P_p} CTR_{sit} \leq KP_{pt} \quad \forall p, t \quad (06)$$

onde,

$P_p = \{ \text{tipos de carvão } i \text{ das rotas } s \text{ que partem ou} \\ \text{chegam ao porto } p \}$

Atendimento às demandas

A utilização do carvão mineral é feita atendendo os requisitos de cada setor. O setor siderúrgico, por exemplo, utiliza carvão metalúrgico e vapor. A demanda do metalúrgico só pode ser suprida por carvão tipo 1 (vide Tabela 2) e é expressa em unidade de massa. A do carvão vapor pode ser suprida por vários tipos de carvão, simultaneamente, respeitado o limite máximo de cinzas. Por exemplo, o limite máximo para uso na siderurgia é de 35%, correspondendo ao carvão tipo 5; porém, nada impede que tipos de melhor qualidade sejam utilizados. A demanda de carvão vapor é expressa em unidade de energia, cabendo ao modelo a decisão de qual perfil de tipos irá supri-la. Será um equilíbrio entre gastar mais em beneficiamento e transportar menos cinzas ou vice-versa.

A disponibilidade de carvão numa região será garantida por restrições de demanda específica de um tipo de carvão e/ou demanda energética.

Demanda Específica: Qualquer setor, em qualquer região, pode ter necessidade de um tipo específico de carvão. A demanda de carvão metalúrgico do setor siderúrgico, entretanto, deverá ser específica ao tipo 1, sempre. Para que a demanda específica de carvão tipo i , para uso no setor k , no período t , na região q (\underline{DTON}_{qkit}) seja atendida, o carvão disponível para utilização (CPU) deve ser maior ou igual a ela.

$$\text{CPU}_{qikt} \geq \underline{DTON}_{qkit} \quad \forall q, k, i, t \quad (07)$$

Demanda Energética: A demanda energética da região q , no setor k , no período t (\underline{DENE}_{qkct}), expressa em unidades de energia, será suprida pelos tipos de carvão condizentes com o setor k . Cada tipo tem seu poder calorífico (\underline{PCA}_i), que multiplicado pela quantidade disponível para uso (CPU_{qikt}) formará a parcela de energia devida ao tipo i , para suprir a demanda do setor k . A soma das parcelas multiplicadas por um fator (\underline{EF}_k), que expresse a eficiência da utilização do carvão no setor, deve ser maior ou igual a demanda energética do setor.

$$\underline{EF}_k \left(\sum_{i \in U} \text{CPU}_{qikt} \underline{PCA}_i \right) \geq \underline{DENE}_{qkct} \quad \forall q, k, t \quad (08)$$

onde U é o conjunto dos tipos de carvão que podem suprir a demanda do setor k na região.

Normalmente, a especificação do carvão requerida por um setor é única. Entretanto, há situações em que parte da

demanda de um mesmo setor deve ser suprida por um tipo de melhor qualidade e a outra permite um maior teor de cinzas. A modelagem deste detalhe se fez através de tantas restrições, semelhantes à 08, quantas fossem as partes distintas.

Tabela 3: Detalhe da demanda energética

DENE(q,k,t) ⁽¹⁾	Tipo max de carvão	Tipos Possíveis
400	4	2,3,4
600	5	2,3,4,5

Restrição 1 CV2 + CV3 + CV4 ≥ 400
 Restrição 2 CV2 + CV3 + CV4 + CV5 ≥ 400 + 600

(¹) Região q, Setor k, Período t

A Tabela 3 mostra um exemplo em que uma parte exige 400 unidades de energia de carvão cujo teor de cinzas não seja maior que o do tipo 4 - a demanda poderia ser suprida pelos tipos 2, 3 e 4 - e a outra requer 600 unidades, que podem ser supridas pelo tipo 5, além dos anteriores. A restrição 1, garante que haverá carvão de pelo menos um dos tipos 2, 3 e 4 para suprir as 400 unidades. A segunda restrição permite que as outras 600 unidades possam ser supridas pelo tipo 5 ou também pelos outros.

Para tornar a restrição (08) mais genérica, indexou-se pela classe de demanda c, a variável exôgena $DENE_{qkct}$. Assim, no exemplo anterior para c=1, $DENE_{qkct} = 400$ e para c=2, $DENE_{qkct} = 600$. A primeira classe referem-se à parte da

demanda que exige melhor qualidade e a última, a que exige pior. A restrição, na forma genérica fica:

$$\underline{EF}_k \left(\sum_{i \in U_c} CPU_{qikt} \underline{PCA}_i \right) \geq \sum_{c=1}^C \underline{DENE}_{qkct} \quad \forall q, k, c, t \quad (09)$$

onde U_c é análogo ao conjunto U , só que específico para cada classe, e C é o número de classes na utilização k , na região q .

Mistura do carvão metalúrgico

O carvão metalúrgico para utilização na siderurgia, tendo em vista as instalações existente, deve ser uma mistura do nacional e do importado na razão 20 e 80%. A quantidade importada por uma região é a que chega a ela pela rota que a liga ao exterior. Assim, a garantia de que a proporção entre nacional e importado será verificada é conseguida impondo-se a restrição de que a quantidade que escoar pela rota (CTR_{sit}) seja igual a 80% da disponibilidade para uso (CPU_{qikt}).

$$CTR_{sit} = 0,80 CPU_{qikt} \quad (s,q) \in Q \quad \forall t \quad (10)$$

$Q = \{ \text{regiões } q \text{ com consumo de carvão metalúrgico e rotas } s \text{ que as ligam ao exterior} \}$

onde i é o tipo metalúrgico e k é o setor siderúrgico.

3.1.2 Lista de Índices e Variáveis

Os significados dos índices e variáveis já foram apresentados ao se descrever as restrições. Aqui, se fará um resumo listando-os ordenadamente, com uma breve descrição.

Índices

- c Classe da demanda energética de um setor.
- i Tipo de carvão.
- j Jazida, ou mina, de carvão.
- k Setor de utilização
- v Lavador - onde o carvão é beneficiado.
- q Região.
- s Rota de transporte inter-regional.
- t Período do horizonte de planejamento.

Variáveis de Decisão

CBN_{jvit}

Quantidade de carvão ROM, extraído da jazida j, no

período t , que será beneficiado no lavador v , para produzir uma fração nobre do tipo i .

CNB_{jt}

Quantidade de carvão ROM, extraído da jazida j , no período t , que será consumido sem beneficiamento.

CPU_{qikt}

Disponibilidade do carvão tipo i , na região q , para utilização no setor k , no período t .

CTR_{sit}

Quantidade de carvão tipo i , que escoou na rota s , no período t .

EKB_{vt}

Capacidade de beneficiamento adicionada ao lavador v , no início do período t .

EKM_{jt}

Capacidade de mineração adicionada à jazida j , no início do período t .

LAV_{vit}

Quantidade de carvão tipo i , produzida por beneficiamento no lavador v , no período t .

Variáveis Exôgenas

DENE_{qkct}

Parcela c , da demanda energética do setor k , na região q , no período t , expressa em unidade de energia. Um mesmo setor, pode ter sua demanda subdividida em parcelas, cada qual com seus requisitos de qualidade.

DTON_{qkit}

Demanda específica ao carvão tipo i , na região q , para utilização no setor k , no período t , expressa em unidade de massa.

EF_k

Eficiência do carvão mineral, em relação ao óleo combustível, quando utilizado no setor k , expressa em percentual.

IRE_j

Índice de recuperação da reserva da jazida j , expresso em frações da unidade. A percentagem recuperada é função do processo de mineração empregado.

KIB_v

Capacidade inicial, anterior ao período de planejamento, de beneficiamento do lavador v .

KIM_j

Capacidade inicial, anterior ao período de planejamento, de mineração da jazida j.

KP_{pt}

Capacidade de movimentação do porto p, no período t.

PCA_i

Poder calorífico do carvão tipo i, expresso em unidade de energia por unidade de massa.

PCV_j

Porcentagem de carvão, contido no material minerado, na jazida j, expresso em frações da unidade.

RND_{ji}

Percentual de carvão tipo i, obtido como fração nobre pelo beneficiamento do ROM vindo da jazida j, expresso em frações da unidade.

FD_t

Fator de desconto do capital.

$$\underline{FD} = (1 + \text{TAXA DE JURO})^{-t}$$

3.1.3 Função Objetivo

As alternativas de configuração e operação futura do setor de carvão, serão avaliadas pelo modelo, somente através de seus custos. Será considerada melhor alternativa, aquela que apresente o menor somatório dos custos de operação e expansão, ao longo do horizonte de planejamento, levados ao início deste horizonte pelo fator de desconto FD_t .

$$\min Z = \sum_t FD_t [\text{custo de operação} + \text{custo de expansão}]_t$$

A correção através do fator de desconto é necessária para que se considere a influência do custo do capital nas decisões. O fator é maior para períodos mais recentes, tornando-os mais penalizados.

Os custos operacionais são os dispendidos desde a extração do carvão da jazida até a entrega ao consumidor final. Devem ser computados os custos de mineração, beneficiamento e das várias etapas de transportes, que interligam minas, lavadores, portos e centros regionais (CR's), conforme mostra a Figura 4.

Os custos de expansão ocorrem ao ser implantada uma nova mina ou lavador ou quando suas capacidades já instaladas são aumentadas.

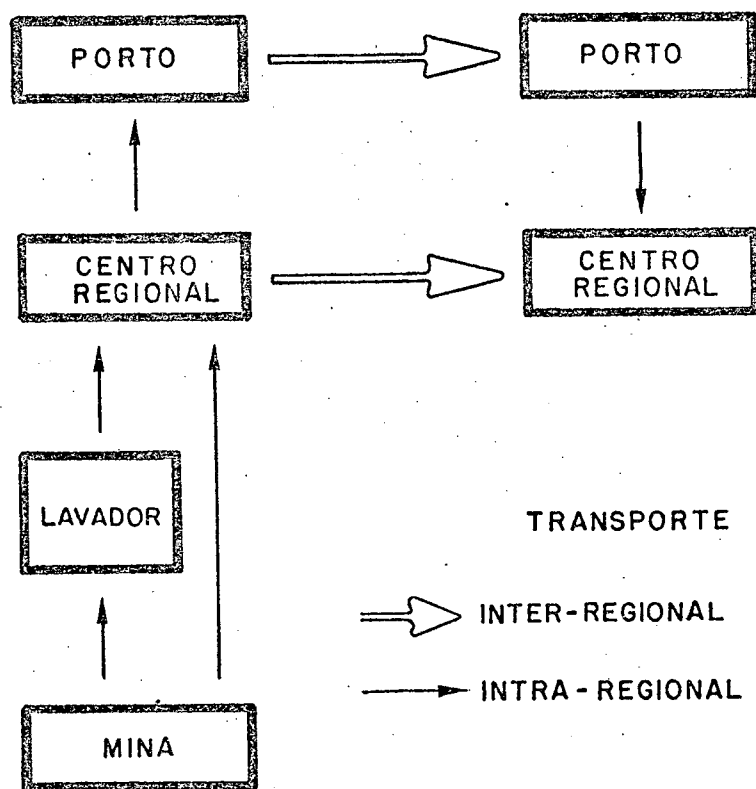


Figura 4. Etapas do Transporte de Carvão

Custos Operacionais

Os custos operacionais ficam bem representados por funções lineares das quantidades produzidas ou transportadas. Estas quantidades são traduzidas pelas variáveis CNB_{jt} , CBN_{jvit} , LAV_{vit} , e CTR_{sit} .

Mineração: O custo de mineração, na mina j , no período t , é o produto do custo unitário COM_j pela quantidade produzida ($CNB_{jt} + \sum_i CBN_{jvit}$). O custo total, no período t , será a soma daqueles

computados em cada mina.

$$\sum_i (\text{CNB}_{jt} + \sum_i \text{CBN}_{jvit}) \underline{\text{COM}}_j \quad \forall t$$

Beneficiamento: O custo de beneficiamento é o produto da produção total de um lavador v no período t ($\sum_i \text{LAV}_{vit}$), pelo custo por unidade de massa ($\underline{\text{COB}}_v$). Assim, o custo total para um período t fica:

$$\sum_v (\sum_i \text{LAV}_{vit}) \underline{\text{COB}}_v \quad \forall t$$

Portos: O custo de movimentação do carvão, dentro do porto p , será representado pela variável $\underline{\text{COP}}_p$ e a quantidade movimentada, pela soma de todos os tipos que escoam nas rotas ligadas a ele. De forma análoga aos anteriores, o custo total será:

$$\sum_p (\sum_{(is) \in Pp} \text{CTR}_{sit}) \underline{\text{COP}}_p \quad \forall t$$

Transportes: Os custos unitários e as quantidades que escoam em cada etapa do fluxo, num período t , estão mostradas abaixo:

Etapa	Variável	Quantidade	
Mina - CR	\underline{CTMC}_j	CNB_{jt}	$\forall j$
Mina - Lavador	\underline{CTML}_v	$\sum_i CBN_{jvit}$	$\forall j$
Lavador - CR	\underline{CTLC}_v	$\sum_i LAV_{vit}$	$\forall v$
CR - Porto	\underline{CTCP}_s	$\sum_{(is) \in Pp} CTR_{sit}$	$\forall p$
Porto - CR	\underline{CTPC}_s	$\sum_{(is) \in Pp} CTR_{sit}$	$\forall p$
CR - CR	\underline{CTCC}_s	$\sum_i CTR_{sit}$	$\forall s$

O custo total de transporte, para um período, será a soma das parcelas acima, para todas as minas, lavadores, portos e rotas.

Custos de Expansão

Os custos de expansão de uma mina ou lavador dependem da capacidade que será adicionada e da já instalada. Quando esta última for nula, ficará caracterizada a implantação de um novo elemento no sistema.

No custo de implantação, destaca-se uma parcela fixa, que não depende do porte da instalação, e uma que varia com a capacidade de produção a ser instalada de forma não-linear, devido as economias de escala. A primeira, pode representar, por exemplo, o custo de um ramal ferroviário, para ligar a nova mina ao tronco principal; ele praticamente não varia em função da quantidade a ser transportada.

A função abaixo, já apresentada e ilustrada na Figura 1, pode representar estes custos.

$$CT(E) = \begin{cases} 0 & \text{para } E = 0 \\ \underline{CFE} + \underline{CUN} E_b & \text{para } 0 < E \leq LS \end{cases}$$

O índice b expressa a não linearidade: se for igual a 1, a função torna-se linear, a menos do custo fixo; se menor que 1, representa o caso de economia de escala, uma função côncava; e maior que 1, deseconomia de escala, uma função convexa.

Na mineração, é razoável considerar que não haja economias de escala nos processo a céu aberto e câmeras e pilares manual [FINEP, 1981].. Já nos métodos mecanizados por câmeras e pilares e no longwall, elas existem com índices próximos de 0,7 e 0,9, respectivamente. O'Hara [O'HARA, 1980], através de análise estatística de vários itens de custo, estima índices de 0,6 para a mineração e 0,7 para o beneficiamento.

A expansão de uma capacidade já instalada, tem as mesmas características de uma nova implantação, com custos fixos iniciais menores ou até nulos.

Portanto, parece razoável representar os custos de expansão pela função genérica abaixo:

$$CT(E) = \begin{cases} 0 & \text{para } E = 0 \\ \underline{CFE} + \underline{CUN} E & \text{para } 0 < E \leq LS \\ \underline{CFI} + \underline{CFE} + \underline{CUN} E & \text{para } 0 < E \leq LS \end{cases}$$

onde: E é a capacidade a ser adicionada; CFE o custo fixo da expansão; e CFI o custo fixo, adicional, quando tratar-se de implantação.

3.2 CARACTERIZAÇÃO DO MODELO

O modelo descrito neste capítulo é não-convexo, com variáveis mistas de grande porte, com uma estrutura angular e dual angular, dinâmico e multi-produto (vários produtos escoando numa única rede).

Sua representação matricial tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & CX + f(Y) \\ & RX \leq D \\ & AX + FY \{ \leq, =, \geq \} B \\ & X \geq 0, Y \geq 0 \end{aligned}$$

onde X representa o vetor de variáveis operacionais, Y as variáveis de expansão da capacidade, RX as restrições relativas às reservas, AX a parte operacional de cada período de planejamento, $f(Y)$ os custos não lineares das variáveis de expansão e FY a parte das restrições, relativas à capacidade de produção das restrições.

Dificuldades da não-convexidade

A programação convexa é definida como sendo a minimização de uma função convexa (ou maximização de uma função côncava) sobre um conjunto de restrições convexas ($g_i(x) \leq b_i$, sendo g_i função convexa). Nela, um mínimo local coincide com o global.

O modelo formulado neste capítulo possui um conjunto de restrições convexas (as funções g_i são todas lineares). Procura, porém, minimizar um somatório de funções em que algumas são não-convexas (custos com economias de escala).

Segundo Lasdon [LASDON, 1970], é praticamente impossível provar que um dado algoritmo achará o mínimo global de um problema não linear a menos que ele seja convexo.

Estrutura e dimensões do problema

A Figura 5 na pag. 46 mostra a estrutura para um exemplo com cinco períodos de planejamento. Os blocos de cada período são interligados pelas restrições de exaustão das jazidas e pelas variáveis que representam as expansões de capacidade. Se fossem alocadas reservas em cada período e definidas as capacidades dos elementos, eles passariam a ser cinco problemas independentes.

A estrutura é denominada de primal-dual bloco angular, nas referências que tratam da teoria de decomposição em programação matemática.

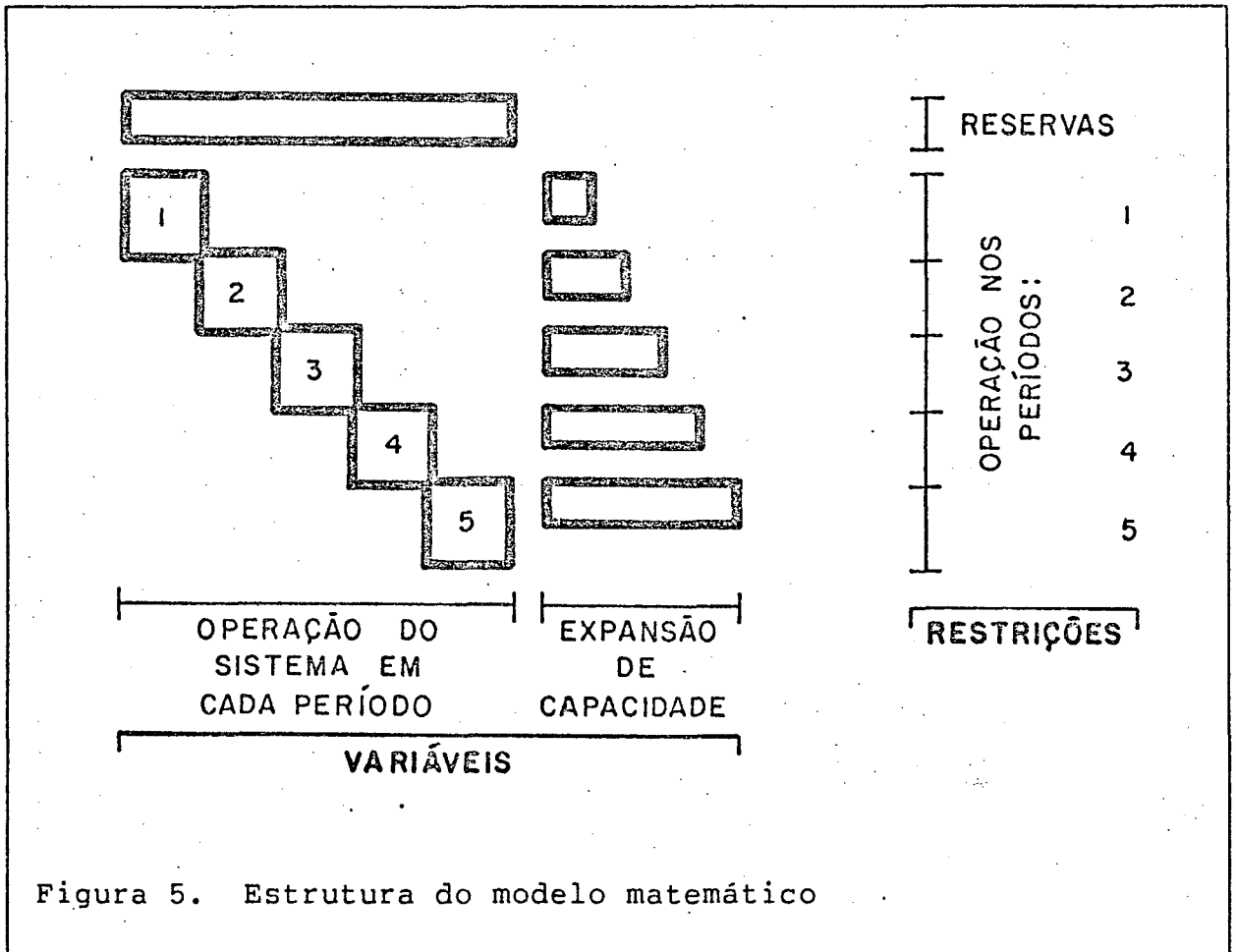


Figura 5. Estrutura do modelo matemático

A dimensão do modelo para um problema com 10 jazidas, 6 lavadores, 19 rotas, 6 portos, 7 tipos de carvão 10 regiões, 5 setores de utilização e 5 períodos de utilização, é da ordem de 1100 restrições e 2100 variáveis de decisão. Os blocos de cada período teriam cerca de 220 restrições e 400 variáveis. Modiano e Tourinho [MODIANO & TOURINHO, 1982], na representação do sistema brasileiro, consideraram 16 jazidas, 7 lavadores, 9 tipos de carvão e um horizonte de 20 anos, agrupados em 6 períodos, num modelo linear que pode ser considerado de grande porte.

Miscigenação dos tipos de carvão

Os vários tipos de carvão, que escoam no sistema simultaneamente, interligam-se nas etapas de beneficiamento e utilização e caracterizam um problema multi-produto. No beneficiamento transforma-se um dado tipo de carvão em outros, segundo proporções pré-definidas e, na utilização eles são reunidos, com proporções diversas para atender demandas energéticas.

Suponha o caso hipotético mostrado na Figura 6. Um carvão tipo 5 iria parte ao beneficiamento, para produzir um nobre tipo 2, e outra parcela direta ao consumo. No lavador ele seria separado em tipo 2 e 8, sempre na proporção 25 e 75% .O nobre 2 irá se misturar ao bruto tipo 5 para suprir a demanda de energia cada qual com sua cota: o produto da quantidade pelo poder calorífico.

A dificuldade de se lidar com um problema de grande porte pode ser contornada utilizando-se métodos de decomposição matemática. A miscigenação dos vários tipos de carvão, se impedir uma modelagem da operação do sistema, em cada período, através de rede de fluxo - cujos métodos de solução são altamente eficientes - é solúvel por programação linear. As variáveis binárias, utilizadas para caracterizar investimentos iniciais, complicam bastante a solução, mas ainda pode-se contornar, sacrificando o tempo dispendido na obtenção da mesma.

Resta o aspecto mais complicado: a não-convexidade. Para contorna-la, ou abre-se mão da otimalidade global e

contenta-se com ótimos locais e boas soluções ou simplifica-se o problema fugindo da não-convexidade.

Todos esses percalços serão avaliados e uma técnica de solução adequada aos recursos disponíveis e a complexidade do problema será recomendado no capítulo seguinte.

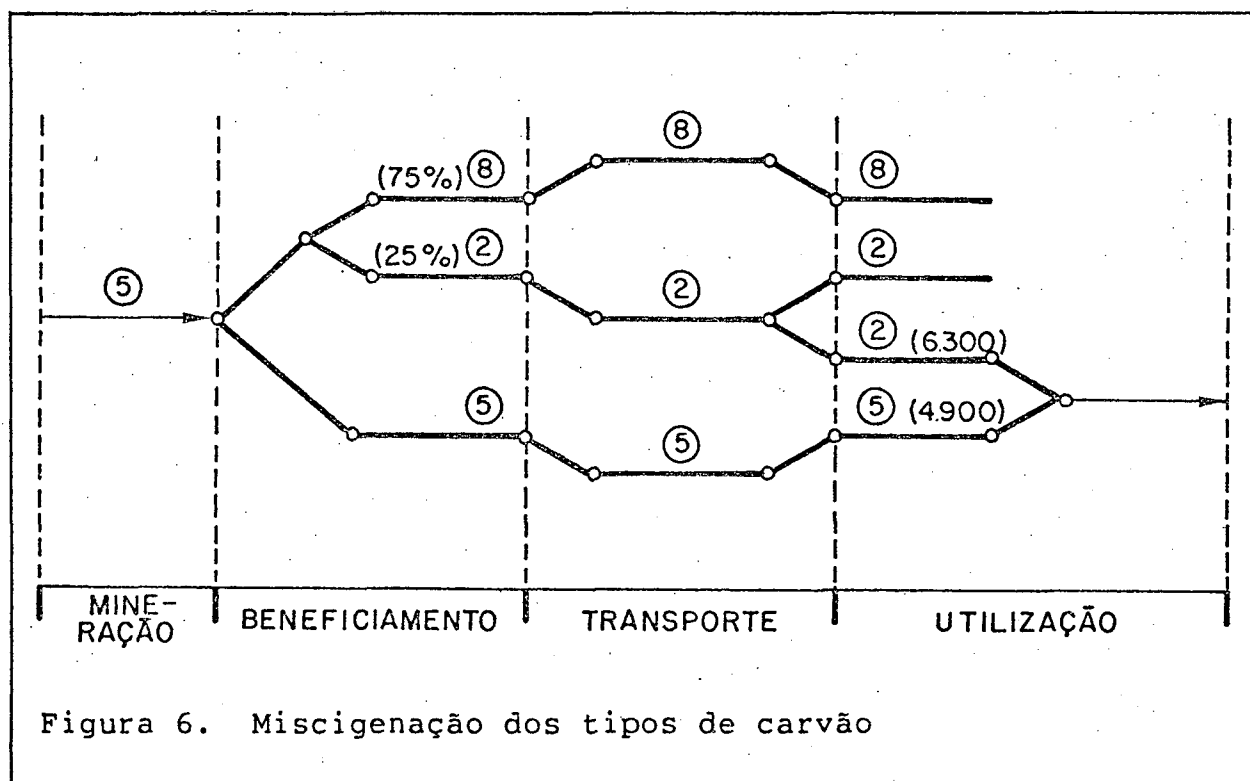


Figura 6. Miscigenação dos tipos de carvão

4.0 TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Nos capítulos anteriores procedeu-se a caracterização do problema de planeamento da oferta de carvão mineral. Neste capítulo efetuar-se-á uma avaliação das técnicas potenciais para resolver o problema, a opção de uma delas, e o detalhamento da técnica escolhida.

O problema de planeamento é complexo, pois envolve a expansão de capacidade de um sistema interligado com vários centros de produção, ao longo de um período de planeamento, considerando custos iniciais de investimento e economias de escala e como o subsistema deve ser operado em cada período.

Entre as possíveis técnicas de solução a serem utilizadas, surgem como mais promissoras as técnicas de programação linear com variáveis mistas, decomposição matemática, modelagem através de redes de fluxo, programação híbrida e alguns algoritmos de programação não-linear.

Das abordagens acima, só não será aqui detalhada a programação híbrida [GUNNER, 1979] por ela não ser exatamente uma técnica de solução do problema mas sim, um meio bastante eficaz de avaliar alternativas de expansão de capacidade de sistemas interligados e complexos. Consiste de um híbrido de programação linear e dinâmica onde a programação linear gera dados que permitem qualquer plano ser avaliado e a programação dinâmica escolhe uma gama de bons planos incluindo o ótimo. Os principais passos desta abordagem são:

- o decisor fornece as alternativas de expansão de cada unidade de produção;
- a programação linear determina a operação ótima de cada uma das configurações gerada pela combinação das diversas expansões e unidades, em cada período do horizonte de planejamento, fornecendo seus benefícios (vendas - custo) ótimos;
- são calculados os custos de investimentos de cada configuração em cada período;
- a programação dinâmica determina a sequência ótima de configurações considerando os benefícios e custos.

É importante frisar que o decisor deve fornecer alternativas de expansão, elas não são geradas automaticamente. Segundo GUNNER [GUNNER, 1979], esta abordagem substituiu com grandes vantagens um modelo de programação linear mista usado anteriormente.

4.1 PRINCIPAIS LINHAS DE ABORDAGEM

As características e porte do modelo apresentado, impõe tal dificuldade a sua solução que ainda não se deliniou técnica capaz de resolvê-lo plenamente.

A não-convexidade é sobrepujada, na maioria das abordagens, através de linearizações por partes, conduzindo a uma

representação aproximada do modelo original, solúvel com menor dificuldade teórica.

As técnicas que procuram abordar o problema original, não-convexo, limitam-se a soluções parciais, ótimos locais. Mulvihill [MULVIHILL, 1974] propôs, nesta linha, um algoritmo de solução em etapas, baseado no fato que o mínimo de uma função côncava é um ponto extremo do conjunto convexo de soluções viáveis. Ele aplicou-o em um problema de planejamento de expansão de um sistema de água e esgoto com características similares ao abordado neste trabalho. A primeira etapa do algoritmo consiste num processo iterativo no qual a função objetivo é sucessivamente linearizada e uma série de programas lineares são resolvidos. Quando esta etapa não fornece mais benefícios, pesquisa-se pontos extremos vizinhos. Se existem melhorias nesta segunda etapa, o procedimento volta a anterior. Caso contrário, o processo termina com um ótimo que não se pode garantir seja global. Entretanto, um dos requisitos deste procedimento é que a função objetivo seja contínua o que não se verifica nas funções com custos fixos iniciais, como as descritas para o modelo de carvão.

Outra abordagem interessante é a modelagem do problema como uma rede fluxo com custos não-convexos. Ela foi avaliada por Ramos [RAMOS, 1981] na solução de um problema de expansão de capacidade de redes de água. Apesar de também fornecer ótimos locais é muito eficiente por tirar proveito de algoritmos de redes.

Independente da dificuldade da não-convexidade, o porte e a estrutura dinâmica do modelo sugerem que se considere

técnicas de decomposição matemática para auxiliar a solução do problema.

Nos próximos itens, uma análise detalhada da estrutura e características de problema em estudo é apresentada, avaliam-se algumas técnicas de decomposição cabíveis, consideram-se os processos de linearização por partes juntamente com programação linear mista e conclui-se com a adoção de uma técnica de solução adequada ao problema e aos recursos disponíveis.

4.2 DECOMPOSIÇÃO MATEMÁTICA

O modelo definido no capítulo anterior é dinâmico e de grande porte. Apesar de hoje haver programas de computador capazes de manejá-lo como um todo, deve-se investigar possibilidades de explorar sua estrutura, pois existem inúmeras técnicas de decomposição matemática bem definidas, testadas e de uso prático comprovado [LASDON, 1970]. Além disso, é orientação deste trabalho limitar-se ao uso de programas de otimização de domínio acadêmico, cuja eficiência restringe-os a problemas de médio porte.

A decomposição consiste na subdivisão de um sistema em subsistemas, cada qual representando um subproblema menor e independente. Desde que os subsistemas interagem entre si, a solução isolada de cada subproblema, considerando seus objetivos particulares, não necessariamente conduzirá o sistema à melhor solução. Além disso, a solução encontrada pode nem ser viável,

visto que a resposta que corresponde a melhor solução de um subsistema, pode não ser compatível com outro subsistema a ele relacionado. Para garantir uma integração entre os subsistemas e buscar a solução segundo os interesses do sistema como um todo, há necessidade de um coordenador geral do processo de solução, um supervisor.

A carência do uso de técnicas de decomposição em programação matemática, ou em outra atividade, resulta do grande porte dos problemas ou do reconhecimento de que partes deles podem ser resolvidas, de forma mais eficiente, por técnicas diferentes. Algumas das vantagens do seu uso são:

1. A construção e validação de modelos de menor porte;
2. A combinação de técnicas de modelagem e solução que de outra forma seriam incompatíveis;
3. A disponibilidade de uma variedade de técnicas bem definidas, com extensa experiência computacional;
4. Os procedimentos de decomposição poderem ser definidos em termos matemáticos precisos;
5. A convergência dos procedimentos poder ser garantida para certos tipos de problemas;
6. A possibilidade de se estabelecer, para muitos problemas, limites superiores e inferiores ao valor ótimo da função objetivo;

7. A possibilidade de se estabelecer critérios de convergência para terminar o processo iterativo, quando determinadas condições, matematicamente bem definidas, são alcançadas;
8. O uso reduzido de espaço de memória computacional requerido para resolver o problema.

Por outro lado, a principal desvantagem é que os subproblemas devem ser resolvidos várias vezes e, conseqüentemente, o tempo de computador gasto na solução pode crescer.

Os procedimentos de decomposição agrupam-se em dois, segundo a forma pela qual o supervisor interage com os subproblemas. Ele pode coordenar impondo aos subproblemas os preços dos recursos comuns - orientação por preço - ou alocando suas quantidades diretamente - orientação por recurso .

Antes de considerar ambos os tipos, é interessante proceder-se uma análise da estrutura do modelo do planejamento da oferta de carvão, para que sejam avaliadas as possibilidades de exploração de estruturas especiais e de decomposição do problema.

4.2.1 Estrutura do modelo de planejamento

A Figura 5 mostra a estrutura do modelo de planejamento da oferta de carvão em termos dos elementos não nulos da matriz atividade (matriz A). Os blocos na diagonal, representam as restrições de operação do sistema de carvão em cada período e estão duplamente interligados: pelas restrições de

reserva, na parte superior; e pelas variáveis de capacidade, ao lado direito. Cada bloco representa, em termos de dimensão, parte substancial do problema, e as variáveis a eles associadas apresentam funções lineares de custo. Resolvê-los isoladamente seria bastante conveniente - são problemas de programação linear de pequeno porte - e para torná-los independentes basta que sejam definidas as capacidades das minas e lavadores e a porção da reserva que cada mina pode explorar, em cada período

Cada problema de operação do sistema, neste caso, é bastante similar a problemas de distribuição, que podem ser resolvidos, com vantagens, por algoritmos de redes de fluxo. Os casos lineares podem ser modelados como problemas de transbordo ('transshipment'), um caso particular de redes para os quais existem algoritmos específicos, capazes de resolvê-los cerca de 130 vezes mais rápido que o simplex, aplicado à sua formulação de programação linear [GLOVER, 1978].

O problema de transbordo, consiste na determinação do fluxo ótimo, num tipo particular de rede. Ela possui: nós fornecedores - a origem do fluxo - ; nós de demanda - o destino - ; e nós de transbordo, onde não há consumo nem produção. A ligação entre eles se faz por arcos, cada qual com seu custo e restrições de mínimo e máximo fluxo. O fluxo ótimo deve ser tal que os limites dos arcos sejam respeitados, as demandas sejam atendidas, as capacidades de fornecimento não sejam ultrapassados, e o custo global seja mínimo. A Figura 7 mostra uma rede de transbordo onde os nós A, B e C são fornecedores e F e G são nós de demanda. Suas capacidades de fornecimento e suas demandas estão indicados pelos valores dentro dos triângulos

ligados a cada um dos nós. Os custos, os limites mínimos e máximos e o fluxo atual dos arcos, estão dentro dos quadrados, parenteses e semi-elipses, respectivamente.

A modelagem de um problema, para que ele torne-se uma rede de fluxo, se faz representando todos seus elementos por arcos e nós. A Figura 8 e a Figura 9 ilustram a modelagem do problema de planejamento energético do Estado do Paraná [RAMOS & GROSZEWICZ, 1982]. Na rede, os nós representam as junções e pontos de consumo e os arcos representam os componentes do sistema, tais como: fontes de energia; estradas; centros de transformações; etc. Por exemplo, os arcos abaixo representam:

(01)-(03), mina de carvão mineral de Cambui;

(01)-(25), importação de carvão mineral através de cabotagem;

(02)-(04), transporte rodoviário entre Curitiba e Norte Velho.

A complexidade de solução de uma rede deste tipo depende das funções de custo; caso sejam lineares, é um simples problema de transbordo.

O subproblema de operação do sistema de carvão mineral em cada período, poderia ser modelado como um problema de transbordo, se não fossem dois problemas: o atendimento à uma demanda energética; e, o processo de beneficiamento.

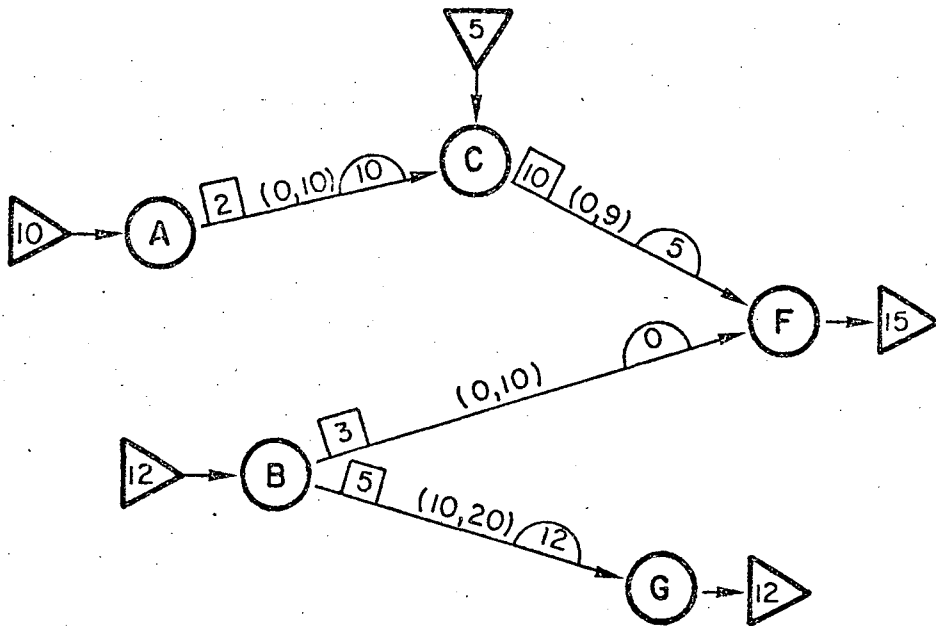


Figura 7. Rede de Transbordo ("Transshipment")

Demanda Energética

A demanda energética nos centros de consumo é expressa em unidade de energia (calorias) e o elemento que flui até eles é carvão. Há necessidade, portanto, de transformar carvão em energia, o que só é possível, utilizando-se os "multiplicadores", um recurso adicional de modelagem através de redes. Ele é uma constante, pela qual o fluxo que entra num arco será multiplicado, definindo o valor do fluxo que sai. Os multiplicadores são recursos de uma outra classe de problemas de redes, de solução mais difícil que o problema de transbordo: as redes genéricas [GLOVER, 1978]. Mesmo assim, os algoritmos de

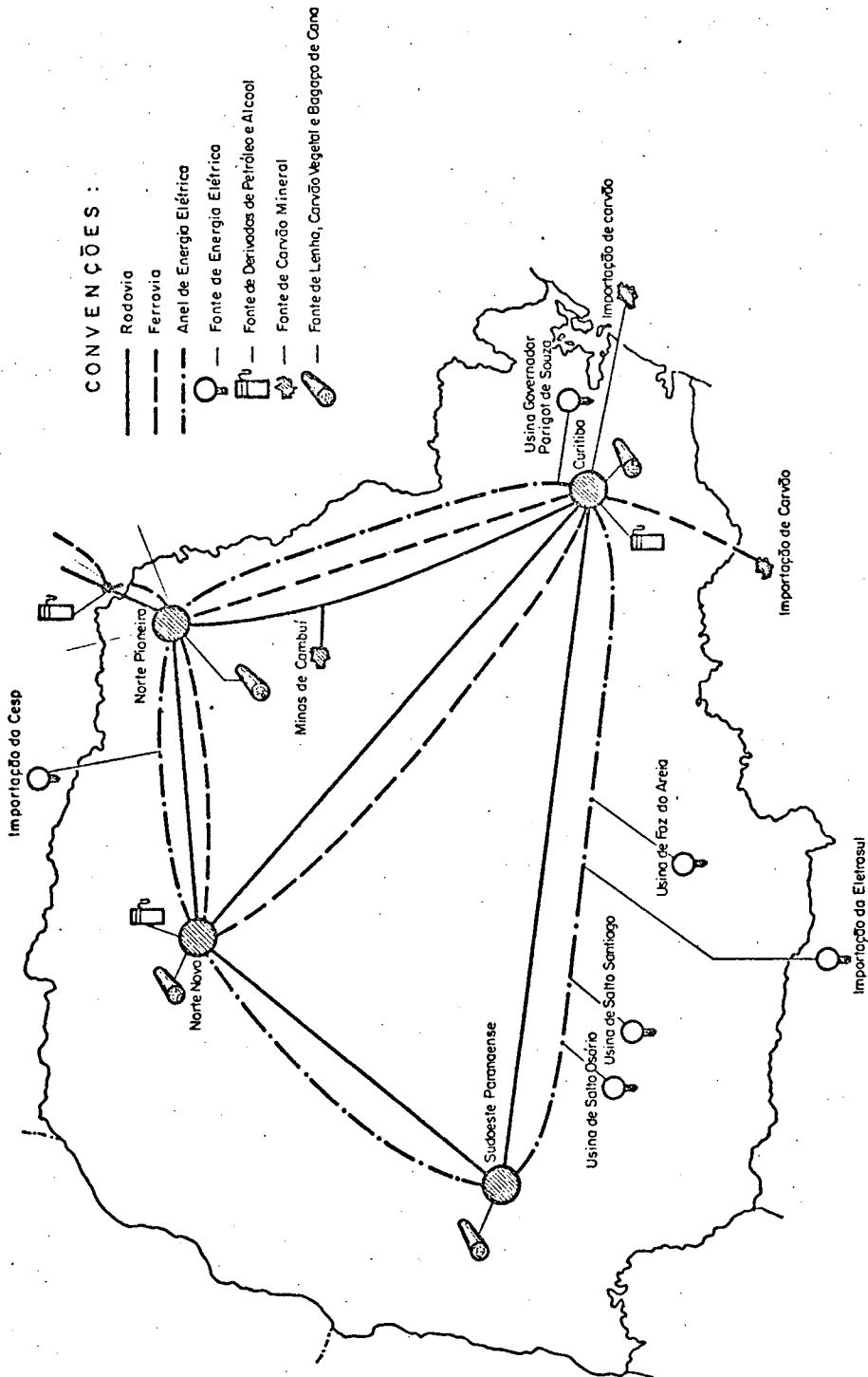


Figura 8. Fluxo de Energia no Estado do Paraná

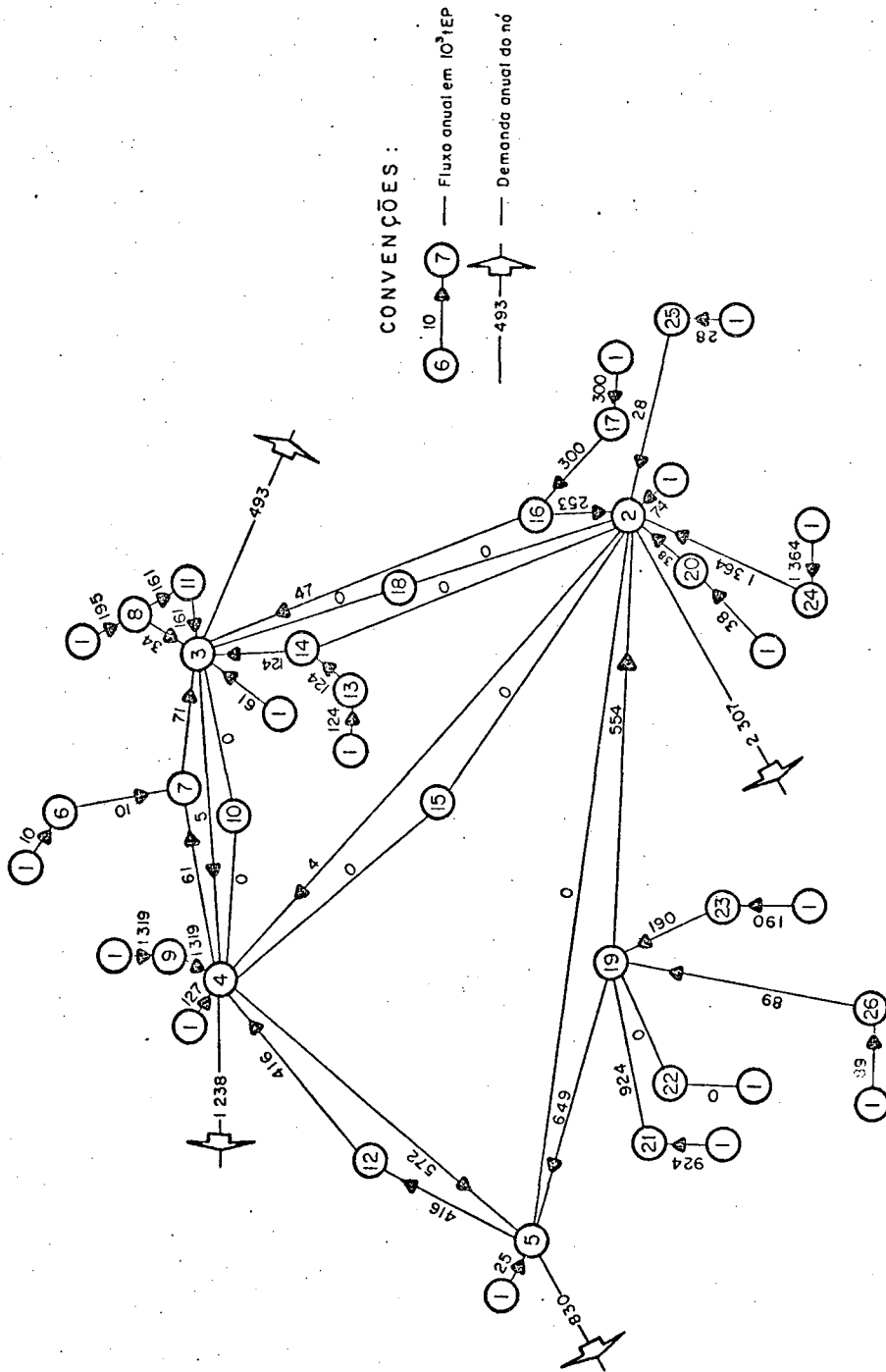


Figura 9. Representação através de Rede de Fluxo

redes resolvem-na cerca de 30 vezes mais rápido que o simplex aplicado à sua formulação de programação linear [GLOVER, 1978].

A Figura 10 mostra um exemplo em que uma demanda energética de $740,6 \times 10^6$ Gcal deve ser atendida por carvão do tipo 6 e/ou 3, com poderes caloríficos de 4500 e 5900 kcal/ton. Nos nós A e B entram carvão, expresso em 10^3 toneladas, e em C deve sair energia expressa em 1×10^6 Gcal; a transformação é realizada pelos multiplicadores 4,5 e 5,9, dentro dos triângulos. A utilização dos multiplicadores portanto, permite representar bem o problema da mistura de diferentes tipos de carvão disponíveis ao atendimento de uma demanda energética.

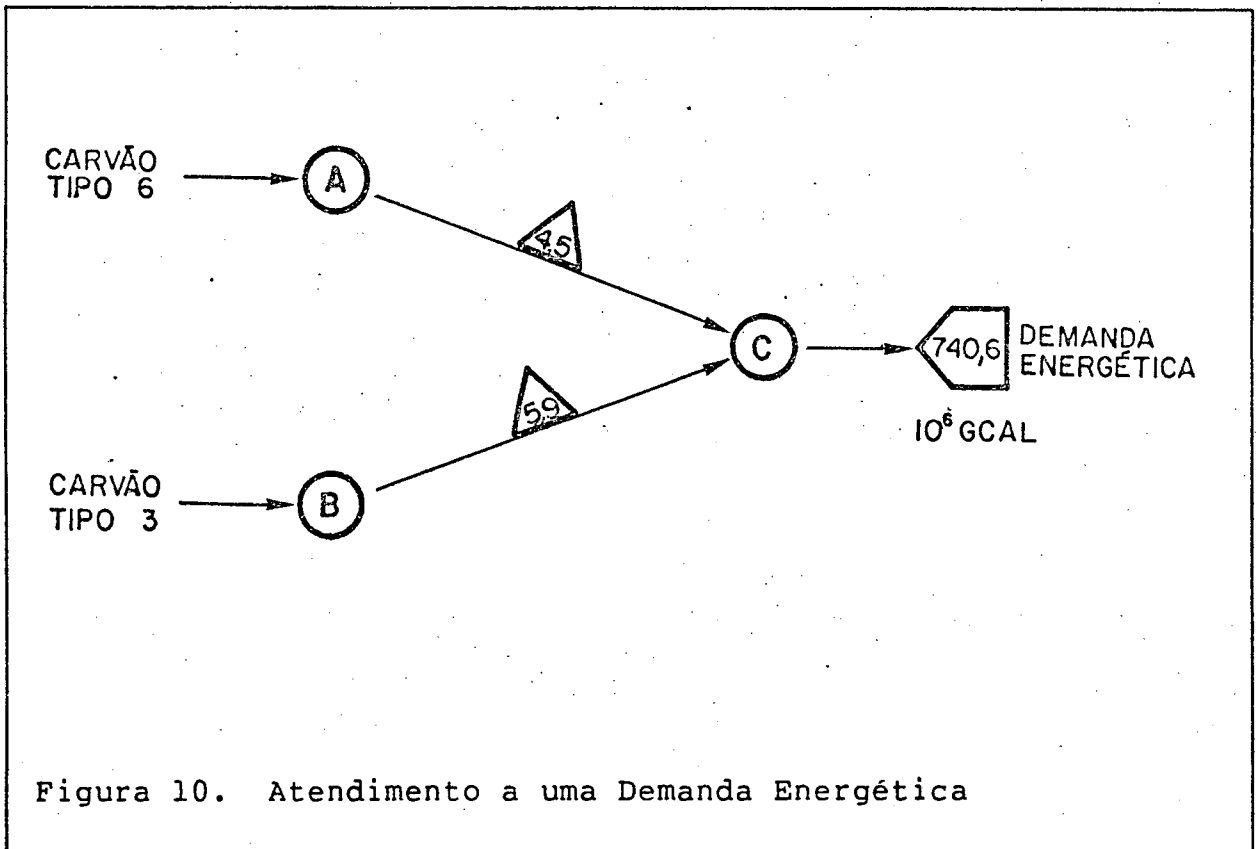


Figura 10. Atendimento a uma Demanda Energética

Processo de Beneficiamento

A dificuldade de modelagem do processo de beneficiamento é maior. Ele consiste em transformar carvão de um tipo, em dois outros: um de melhor qualidade - a fração nobre; e outra de pior qualidade - a fração afundada. A fração nobre é uma percentagem da parcela alimentada, cujo valor é função das características do carvão e do processo de beneficiamento; a fração afundada é a parcela complementar da nobre. Para um mesmo tipo de carvão e processo, as percentagens de parcelas nobre e afundada mantem-se constantes. A Figura 11 ilustra uma situação em que elas são 30% e 70%.

A modelagem do processo através de redes esbarra na impossibilidade de se garantir que o fluxo que sai de um nó seja

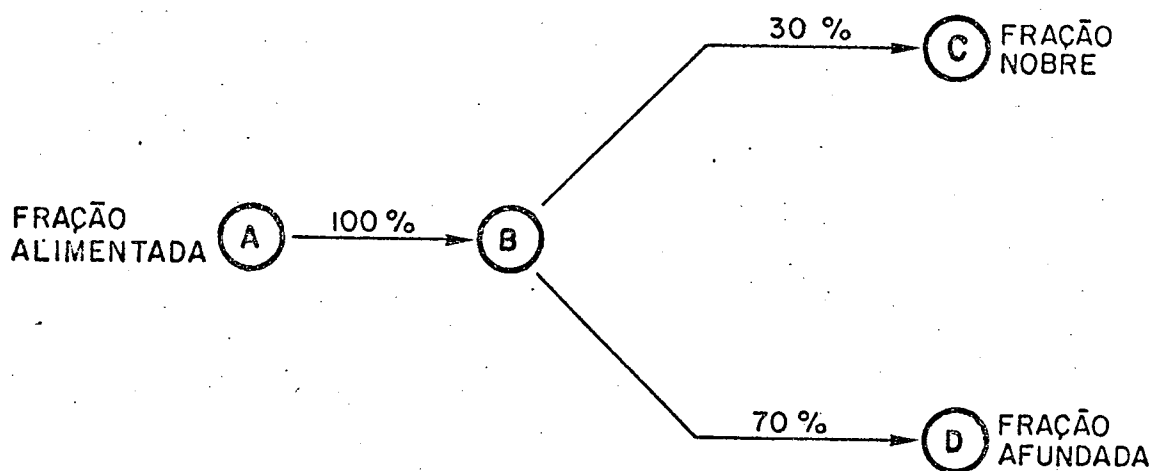


Figura 11. Representação do Beneficiamento através de Redes

sempre dividido, em proporções constantes, entre os arcos que o seguem.

Esta dificuldade, poderia ser contornada numa situação em que a parcela afundada pudesse ser desprezada. No caso do carvão brasileiro, devido ao seu alto teor de cinzas, geralmente a fração afundada tem um teor que a impede de ser utilizada para fins energéticos. A modelagem, desta forma, seria viabilizada com o emprego dos multiplicadores. Na Figura 11, por exemplo, o arco (B)-(D) desapareceria e ao arco (B)-(C) seria atribuído em multiplicador (0,30), i.e., do total de carvão que sai do no (B), só 30% chega ao (C). Excetua-se desta observação, o carvão beneficiado no Lavador Capivari, em Santa Catarina, onde produz-se como nobre o carvão metalúrgico e o afundado tem plena utilização energética.

Em resumo, o problema de operação do sistema pode ser tornado um subproblema isolado, necessitando de poucas informações do supervisor para tal. Além disso, se o processo de beneficiamento puder ser simplificado, desprezando-se a fração afundada, ele poderá ser eficientemente resolvido por algoritmos de redes genéricas.

Outro subproblema, do qual dependem os anteriores, é o de expansão da capacidade do sistema. Definida as necessidades de produção das minas e lavadores em cada período, a decisão da grandeza e época da expansão de capacidade resume-se a um problema simples. Apesar de existir o aspecto não linear, as economias de escala e os investimentos iniciais, ele pode ser resolvido isoladamente para cada elemento de produção. A solução será um compromisso entre a economia de escala e o custo de capital. Da classe de problemas de expansão, este é dos mais simples e a técnica da solução mais adequada à sua solução é a programação dinâmica.

A interação entre os subproblemas esboçados deve ser coordenada por um supervisor para que haja compatibilidade entre eles e a busca da solução seja orientada segundo os interesses do problema global. Os vários métodos de decomposição distinguem-se, basicamente, pelas diversas formas de coordenação imposta pelo supervisor.

4.2.2 Decomposição orientada por preço

Na decomposição por preço, o supervisor seleciona preços que são passados aos subproblemas, os quais respondem com quantidades e custos totais.

Um procedimento orientado por preço e amplamente difundido, é a Programação Linear Generalizada, também conhecida como Decomposição de Dantzig-Wolfe. Além de aplicado em problemas de programação linear, também presta-se a solução de problemas com componentes não lineares.

A decomposição é feita criando-se um supervisor que contém as restrições de ligação, restrições que garantem a combinação convexa entre vetores, e, potencialmente, muitas colunas adicionais. Os subproblemas são formados pelas partes separáveis da função objetivo e os subconjuntos independentes de restrições a eles associados. A decomposição é orientada com o supervisor fornecendo valores de preço aos subproblemas, os quais são resolvidos e devolvem quantidades e custos. Uma coluna representando uma nova solução viável é então adicionada ao supervisor e o processo se repete.

O supervisor é uma forma simplificada do problema completo: contém as equações de ligação e uma representação parcial da função de custo total. A função de custo é representada pela combinação convexa das soluções viáveis dos subproblemas, i.e., cada vez que um subproblema é resolvido, uma nova coluna representando as quantidades e o custo é adicionada ao supervisor. Ele então seleciona uma combinação convexa dos

vetores de solução disponíveis, para produzir o novo vetor de preço a ser transmitido aos subproblemas.

Assim, a função do custo é aproximada pelo supervisor por uma série de pontos da sua superfície. A solução ótima estará em algum lugar desta superfície. Se a função de custo é limitada, convexa e linear por partes, então qualquer ponto da sua superfície pode ser representada por uma combinação convexa finita dos pontos extremos. Se a superfície é contínua e não linear, então um ponto pode somente ser aproximado com precisão crescente pelos pontos adjacentes. Assim, teoricamente, problemas lineares podem ser resolvidos de forma exata usando um número finito de pontos, enquanto os não lineares podem ser resolvidos aproximadamente, com um dado grau de precisão [WHITE, 1980].

4.2.3 Decomposição orientada por recurso

Na decomposição orientada por recurso, o supervisor seleciona quantidades que são enviadas aos subproblemas, os quais respondem com custos marginais e totais. Se submodelos dependem de níveis de recursos para sua solução e respondem bem a quantidades que lhe são fornecidas, como em alguns modelos de produção industrial, esta é a abordagem adequada.

Um procedimento bastante conhecido e orientado por recursos é a "Decomposição de Benders". Embora melhor conhecida por seu uso em algoritmos de programação inteira, ela também proporciona uma estrutura genérica de decomposição.

A decomposição é feita criando um supervisor que contém as restrições de ligação, umas poucas colunas de variáveis adicionais mas, potencialmente, muitas linhas adicionais. Os subproblemas são formados por conjuntos independentes de linhas de restrições mais os elementos apropriados da função objetivo. A decomposição diz-se orientada por recurso porque o supervisor envia vetores de quantidade aos subproblemas, que após resolvidos retornam custos totais e marginais. Esta informação é usada para gerar uma nova linha de restrição no supervisor e o processo se repete.

O problema supervisor é uma representação parcial do problema completo, mantendo variáveis de linha e coluna selecionadas mais as adicionais linhas de restrições de Benders que vão sendo adicionadas. A função de custo é aproximada por uma série de planos subjacentes representados pelas restrições de Benders. Cada vez que um subproblema é resolvido, uma nova linha de restrições, representando o plano de custo tangente e adjacente a função do custo na solução presente, é adicionado ao supervisor. Então, cada vez que o supervisor é resolvido, um novo vetor solução é encontrado, que é ótimo para a atual aproximação.

Assim, a função do custo é montada a partir de um limite exterior, por uma série de planos sobrepostos. Cada solução do problema supervisor está em um ou mais destes planos. Se a função de custo é limitada, convexa e linear por partes, então qualquer região na sua superfície pode ser representada por um conjunto de hiperplanos. Se o custo é contínuo e não linear, a superfície pode somente ser aproximada com um grau de precisão crescente, por uma série de planos. Assim, novamente, de forma

teórica, problemas lineares podem ser resolvidos com exatidão, e os não lineares aproximadamente para um grau desejado de precisão [WHITE, 1980].

Os dois métodos esboçados, algoritmos de Benders e o de Dantzig-Wolfe, são na realidade duais um do outro no caso de problemas lineares. Dado um problema solúvel por Benders, o seu dual poderá ser resolvido por Dantzig-Wolfe. Porém, quando considerados problemas não-lineares, existem diferenças importantes entre os dois procedimentos. A mais significativa é que o algoritmo de Benders pode tratar uma variedade mais ampla de problemas do que extensões do princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe [LASDON, 1970].

Outra diferença entre decomposição por preço e recurso é que na primeira, uma solução viável só é disponível quando se atinge a convergência final. Já na segunda, é possível ter-se boas soluções viáveis em etapas intermediárias do processo. Isto é especialmente desejável em problema de grande porte onde a solução ótima pode demandar um recurso computacional proibitivo.

O esboço inicial da estrutura do problema mostrou subproblemas que dependem da definição de níveis de recursos para que eles possam ser resolvidos isoladamente. Isto sugere ser em subsistemas naturalmente recebedores de recurso e não preço.

A vantagem de soluções intermediárias viáveis e a natureza dos subproblemas, sugerem como técnica adequada os algoritmos orientados por recursos.

Avalia-se a seguir a adequacidade de duas técnicas de decomposição ao problema de planejamento da oferta: o algoritmo heurístico de Yaged [YAGED, 1971] e a decomposição de Benders.

4.2.4 Decomposição Heurística de Yaged

Ramos [RAMOS, 1981] ao estudar problemas de expansão de capacidade e operação de redes de suprimento de água, problema bastante semelhante ao de planejamento da oferta de carvão, abordou o caso dinâmico e determinístico, transformando-o em um problema de fluxo em redes, com funções de custos côncavos.

Esta abordagem é bastante atrativa, pois:

- facilita a compreensão e utilização do modelo;
- problemas de redes com custos lineares, podem ser resolvidos por algoritmos cerca de 30 a 150 vezes mais rápidos que o simplex [GLOVER, 1978];
- a solução de redes com custos côncavos tem merecido atenção nos últimos anos ([YAGED, 1971],[YAGED, 1973] e [GALLO & SODINI, 1979]), e alguns interessantes avanços têm sido alcançados.
- ela reduz problemas distintos de expansão de capacidade sempre à expansão de uma rede de fluxo.

Quando as funções de custo associadas a rede são todas lineares, a solução é simples e rápida. No entanto, se as funções de custo forem côncavas, o problema torna-se não-convexo e as dificuldades para resolvê-lo plenamente ainda não foram sobrepujadas. A técnica de solução mais promissora, para o caso dinâmico, é o algoritmo de decomposição de Yaged [RAMOS, 1981].

Yaged [YAGED, 1971] desenvolveu seu algoritmo para analisar um problema de redes de comunicação e Ramos, com alguns melhoramentos, ao problema de expansão de capacidade de redes de água. É um algoritmo de decomposição do tipo orientado por recurso e busca a melhor solução de forma heurística, não garantindo a otimalidade global. Mesmo assim, sua eficiência torna-o atrativo a problemas de grande porte e que não buscam necessariamente a otimalidade, mas nos quais entende-se que boas soluções são suficientes. Este é o caso da maioria dos problemas de planejamento.

A decomposição de Yaged [YAGED, 1971] consiste em criar dois conjuntos de subproblemas: o escoamento do fluxo a custo mínimo, nas redes correspondentes a operação do sistema em cada período, e a expansão de capacidade de cada arco.

O algoritmo que integra os subproblemas e busca a solução do problema global consiste basicamente dos seguintes passos:

passo 1, resolver os problemas de redes de cada período, propiciando um conjunto de fluxos viáveis para todo o

horizonte de planejamento - resumem-se a problemas de transbordo, lineares e estáticos;

passo 2, programar a expansão de capacidade de cada arco isoladamente, baseando-se no conjunto de fluxos já definidos - são problemas bastante simples e pequenos;

passo 3, estabelecer novos custos lineares, baseados nos resultados já encontrados e que forcem uma solução global melhor. Estes custos serão utilizados no passo 1 da iteração seguinte.

Os três passos são repetidos até o analista "suspeitar" que mais nenhum benefício vai advir de qualquer alteração ou iteração adicional. A Figura 12 ilustra o procedimento.

O problema de planejamento de carvão mineral, apesar de similar ao tratado por Ramos [RAMOS, 1981], possui duas diferenças relevantes: (1) o processo de beneficiamento, como já fora mostrado, inviabiliza a modelagem através de redes; e (2) o carvão é um bem deplecionável, impondo uma dependência entre os períodos de planejamento.

O problema de operação do sistema (o passo 1 de Yaged), inviabilizada sua modelagem através de redes por causa do processo de beneficiamento, poderia, em último caso, ser resolvido como um problema de programação linear. Isto porém, as custas de um prejuízo da eficiência do algoritmo e perda de garantia de ótimos locais, provados para o caso de redes.

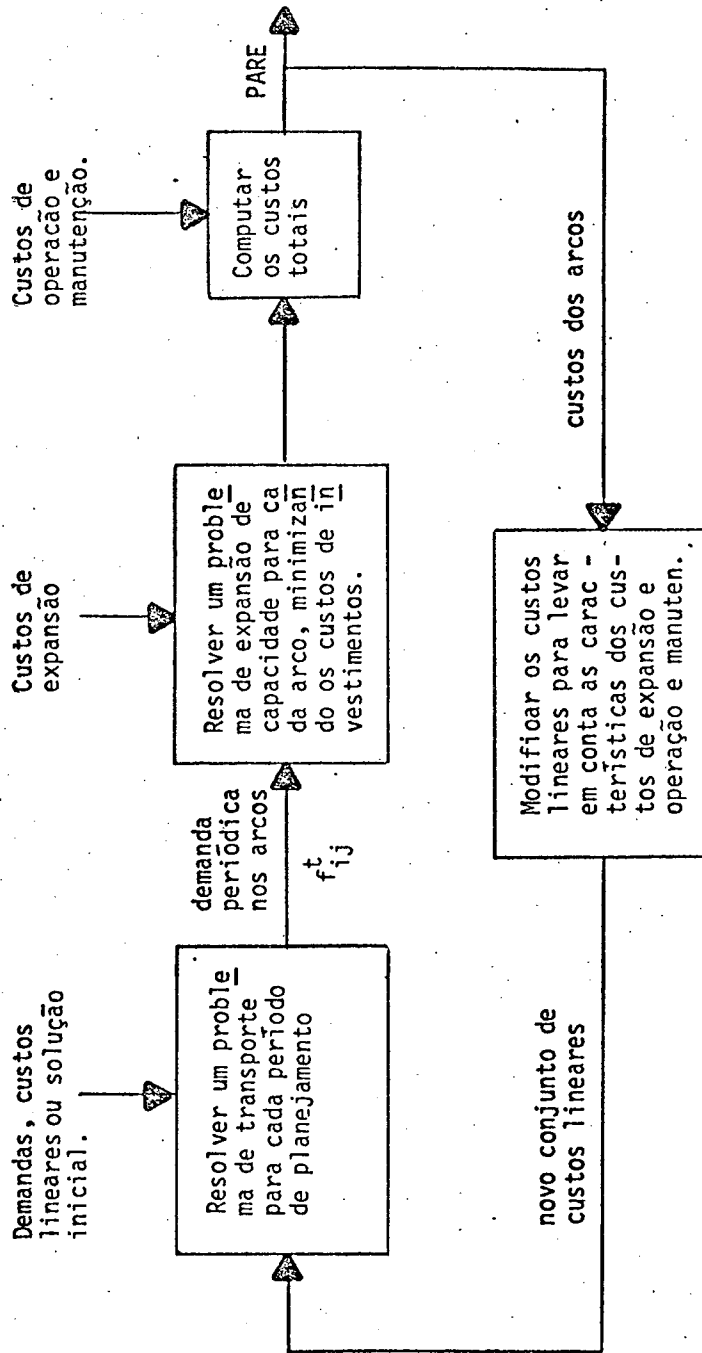


Figura 12. Algoritmo de Decomposição de Yaged

O fato do carvão ser um bem deplecionável faz com que as variáveis de produção das minas, em cada período, fiquem interligadas através das restrições de reservas das jazidas. Desta forma, uma solução viável não poderá ser conseguida resolvendo-se o problema de cada período isoladamente. A dificuldade poderia ser contornada, ainda tirando algum proveito da estrutura, utilizando técnicas de decomposição para resolver o conjunto de subproblemas de operação ou, em algum caso particular, relaxando-se as restrições de reserva.

Isto posto, pode-se sugerir que o algoritmo Yaged não é adequado por inteiro a solução do problema de planejamento de carvão. Para adequá-lo, perder-se-ia em eficiência e qualidade da solução.

4.2.5 Decomposição de Benders

Lasdon [LASDON, 1970], ao classificar problemas de grande porte, apresenta como típica a seguinte formulação:

$$\begin{array}{ll}
 \min & C'X + f(Y) & (1) \\
 \text{s.a} & AX + F(Y) \geq B & (2) \\
 & X \geq 0, Y \in S & (3)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \min \\ \text{s.a} \\ X \geq 0, Y \in S \end{array}} \right\} \text{problema P1}$$

Os vetores X e Y são variáveis com n e p elementos, A é uma matriz de constantes m por n , c e b são vetores de constantes de n e m elementos de tal forma que se Y é fixado, o problema resultante é linear. A função $f(Y)$ pode ser não linear em Y , $F(Y)$

é um vetor de m funções que também podem ser não lineares e S é um subconjunto arbitrário do espaço vetorial E de p dimensões. Especificando-se estas quantidades de maneira apropriada, um número de problemas importantes podem ser resolvidos. Se S é o conjunto de todos os vetores p , de valores discretos inteiros não negativos e F e f são lineares, o problema reduz-se a, bem conhecida programação linear mista, i.e., variáveis inteiras Y e contínuas X .

O algoritmo de Decomposição de Benders foi especialmente construído para solucionar problemas da forma acima, mesmo com f e F sendo não lineares.

Ele os resolve escolhendo um $Y^0 \in S$, solucionando o problema linear

$$\left. \begin{array}{l} \min C'X \\ \text{s.a } AX \geq B - F(Y^0) \\ \quad X \geq 0 \end{array} \right\} \text{ primal} \quad (4)$$

e usando a informação da solução dual de (4) para escolher um vetor Y que melhore a solução global ou para determinar que não há alternativa melhor. Operando desta maneira, pode-se aproveitar a vantagem da linearidade parcial do problema. Isto é particularmente importante se a matriz A tem estrutura especial, por exemplo, do tipo transporte, quando pode-se utilizar algoritmos eficientes para resolver o problema linear (4).

O modelo definido no capítulo anterior poderia ser moldado segundo a forma (1) - (3), onde:

- X seriam todas as variáveis relativas ao fluxo de carvão, em cada período;
- Y seriam as variáveis relativas a expansão de capacidade;
- A seria uma estrutura bloco angular primal;
- F(y) seriam funções lineares de y;
- C seriam os custos operacionais;
- f(y) seriam as funções de custo de expansão, não convexas, da forma:

$$f(Y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y=0 \\ \underline{CFE} + \underline{CUN} Y^b & \text{se } y>0 \end{cases}$$

onde $0 < b < 1$; e

- S subconjunto de todos os valores y, tal que $0 \leq y \leq$ limite superior.

Segundo a colocação acima, não há impedimento teórico a que aplique-se a decomposição de Benders ao problema. Porém, somente após a análise do algoritmo matemático e suas implicações práticas a aplicabilidade poderá ser ratificada.

O algoritmo

De uma forma geral, pode-se resumí-lo como abaixo.

Seja, abaixo, (1)-(3) denominado problema P1 e a forma (5)-(7), o problema P2.

$$\begin{array}{l} \min \quad C'X + f(Y) \\ \text{s.a} \quad AX + F(Y) \geq B \\ \quad \quad X \geq 0, Y \in S \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \min \\ \text{s.a} \\ \quad \quad \end{array}} \right\} \text{problema P1} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min \quad Z \\ \text{s.a} \quad Z \geq f(Y) + (B - F(Y))'P_i, \quad i=1, \dots, n_p \\ \quad \quad (b - f(Y))'R_i \leq 0, \quad i=1, \dots, n_r \\ \quad \quad Y \in S \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \min \\ \text{s.a} \\ \quad \quad \end{array}} \right\} \text{problema P2} \quad \begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array}$$

onde P_i são os n_p pontos extremos do conjunto $P = \{ P \mid A'P \leq c, P \geq 0 \}$ e R_i são os raios extremos, ou geradores do cone $C = \{ Y \mid A'Y \leq 0, Y \geq 0 \}$. Seja U o conjunto dos valores P_i e R_i . Pode-se provar [LASDON, 1970] que:

1. P2 tem uma solução viável \Leftrightarrow P1 tem uma solução viável;
2. P2 é viável sem ter uma solução ótima \Leftrightarrow P1 é viável em ter uma solução ótima;
3. Se (Z^0, Y^0) resolve P2 e X^0 resolve o problema linear

$$\begin{aligned} & \min C'X \\ & \text{s.a } AX \geq B - F(Y^0), \quad X \geq 0 \end{aligned}$$

então (X^0, Y^0) resolve P1 e $Z^0 = C'X^0 + f(Y^0)$;

4. Se (X^0, Y^0) resolve P1 e $Z^0 = C'X^0 + f(Y^0)$, então (Z^0, Y^0) resolve P2.

Enfim, pode-se provar que P1 e P2 são equivalentes.

A solução do problema original P1, pode assim ser reduzida a solução de P2 para (Z^0, Y^0) para então resolver-se o problema linear (4) obtendo-se os valores ótimos de X. Infelizmente, a solução de P2 é complicada pelo fato dele ter uma restrição para cada ponto extremo e raio extremo do poliedro P, o que pode ser um número enorme mesmo para problemas de dimensões moderadas. Contudo, somente uma pequena parcela das restrições é efetiva na solução ótima. Esta é uma situação natural para aplicar-se uma estratégia de relaxação.

Cria-se e resolve-se um problema P2 modificado, o MP2 abaixo, com poucas ou nenhuma restrição. Um teste relativamente simples é feito para verificar se esta solução satisfaz as restrições restantes. Se satisfizer, a solução é ótima. Se não, uma das restrições não satisfeitas pela solução atual é adicionada e o problema resolvido novamente.

$$\begin{array}{ll}
 \min & Z \\
 \text{s.a.} & Z \geq ((Y) + (B - F(Y))' P_i, \quad i \in I_1 \\
 & (b - F(Y))' R_i \leq 0, \quad i \in I_2 \\
 & Y \in S
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \min \\ \text{s.a.} \end{array}} \right\} \text{Problema MP2}$$

I_1 e I_2 , subconjuntos apropriados dos inteiros $1, \dots, n_p$ e $1, \dots, n_r$

O algoritmo resultante envolve a iteração entre dois problemas. O primeiro é o MP2, nas variáveis (z, y) , ao qual as restrições são sucessivamente adicionadas. O segundo é o programa linear dual (8), abaixo, ou o primal (4) que testa a otimalidade da solução de MP2 e, se necessário, fornece uma nova restrição.

$$\begin{array}{ll}
 \max & (b - F(y))' u \\
 \text{s.a.} & A' u \leq c \\
 & u \geq 0
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \max \\ \text{s.a.} \end{array}} \right\} \text{dual (8)}$$

Solução do MP2.

Embora o procedimento de Benders aplique-se, teoricamente, a uma classe ampla de problemas, sua utilização é prática somente quando o MP2 pode ser resolvido de forma eficiente. Mesmo no caso de programação linear mista, onde ele mostra-se bastante promissor, esta observação é importante.

O problema em estudo é dificultado pela função $f(Y)$, não convexa e descontínua (custo inicial fixo). A descontinuidade pode ser modelada utilizando-se variáveis binárias o que conduziria a um MP2 com variáveis mistas e restrições não-convexas do tipo (5) associadas a desigualdades do tipo menor ou igual, resultando num problema não-convexo. Lasdon [LASDON, 1970], enumera classe de problemas supervisores mais frequentes e os algoritmos que poderiam resolvê-los de forma eficiente. A situação descrita para o problema em estudo não está dentre elas e é de difícil solução.

Uma alternativa para sobrepujar as dificuldades da não-convexidade, seria representar as funções não-lineares por lineares em partes, gerando um modelo, e conseqüentemente um MP2, linear com variáveis mista. Isto resultaria num modelo aproximado em relação ao original proposto no capítulo 3, porém solúvel na prática.

Características Atrativas

Como já foi mencionado, Benders permite que se tire proveito de uma estrutura peculiar da matriz A. No modelo em estudo, se as decisões referentes a alocação das reservas das minas, ao longo do tempo, fossem transferidas ao supervisor (o MP2), a matriz A poderia ser decomposta em T (T = número de períodos de planejamento) problemas lineares menores e isolados.

Outra característica vantajosa refere-se a possibilidade de se ter, a cada iteração, limites inferior e

superior ao valor do ótimo global. O limite superior é gerado pela sequência de soluções viáveis de Pl, de modo tal que se o procedimento for interrompido antes da convergência final tem-se uma boa solução viável. No decorrer das iterações, os limites vão convergindo ao ótimo global. O teste de otimalidade é simplesmente a verificação da proximidade ou, rigorosamente, da igualdade dos limites.

4.3 PROGRAMAÇÃO LINEAR MISTA

A técnica de solução mais frequentemente adotada ([O'NEILL, 1972]; [REGEV, 1973]; [SCHERER & CHUIULLI, 1977]; e [RAMOS, 1981]) para resolver problemas de planejamento de operação e expansão não-lineares tem sido a programação linear mista. O que se resolvem não é propriamente o problema original, mas sim uma aproximação linear do mesmo. As funções não-lineares são representadas por lineares em partes, como na Figura 13, e o modelo resolvido por técnicas de programação linear ligeiramente alteradas.

Esta aproximação é ainda mais atrativa quando se depara com problemas não-convexos, para os quais é praticamente impossível provar que um determinado algoritmo achará o máximo global ([LASDON, 1970]).

A função não linear $f(x)$ será substituída por um somatório de funções lineares $f_i(x_i)$:

$$f(x) \approx f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

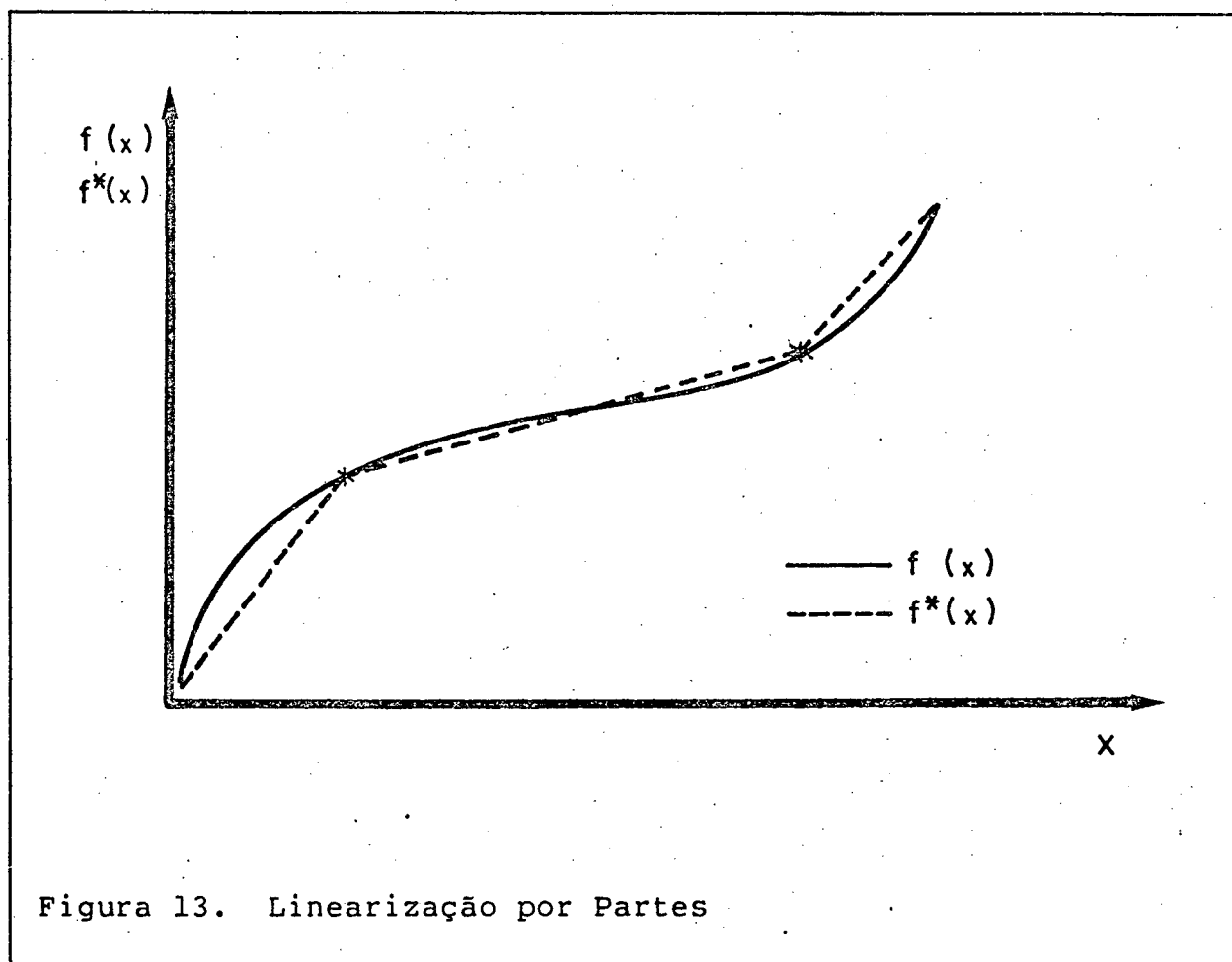


Figura 13. Linearização por Partes

Dois métodos são normalmente empregados para a linearização por partes: método lambda e método delta.

O Método Lambda

A função $f(x)$ será aproximada por $f^*(x)$, que é expressa como combinação convexa de valores discretos de $f(x)$: $f(x_1)$; $f(x_2)$; e $f(x_3)$. A combinação deve ser tal que x também seja expresso pela mesma combinação convexa em relação aos valores discretos x_1 ; x_2 ; e x_3 . A Figura 14 ilustra a situação.

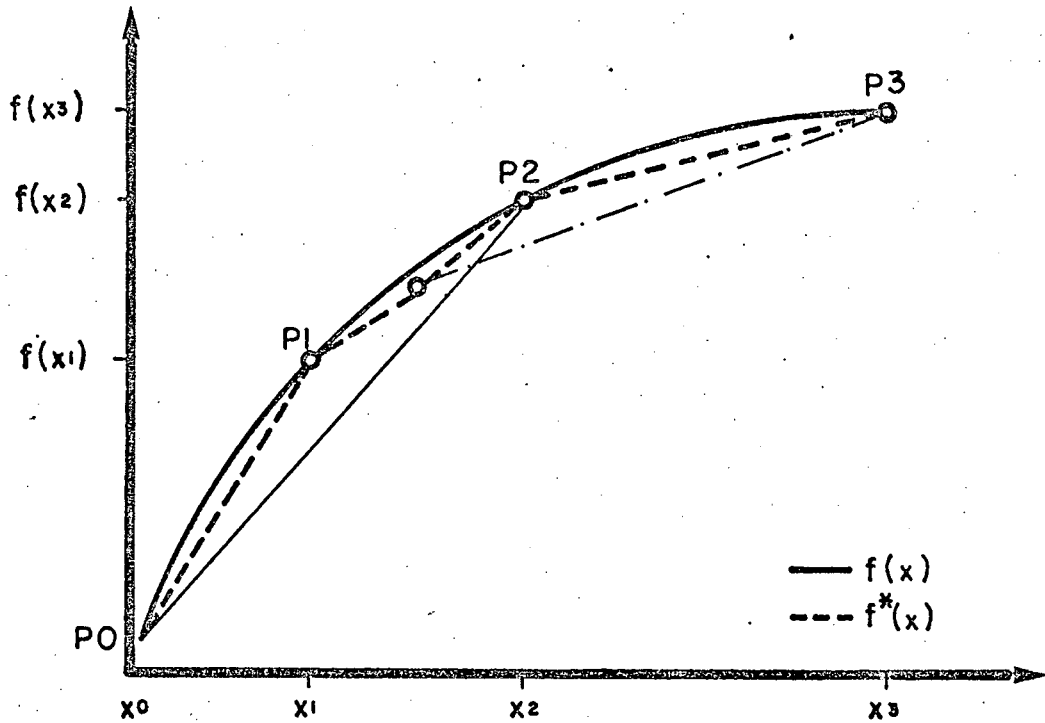


Figura 14. O Método Lambda de Linearização

$$f(x) = f^*(x) \approx L_0 f(x_0) + L_1 f(x_2) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3)$$

$$x = L_0 x_0 + L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3$$

onde:

$$L_0 + L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

$$L_0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \geq 0$$

Para garantir que tanto $f^*(x)$ como x sejam representados por uma única combinação convexa de dois pontos que lhes sejam adjacentes, as seguintes condições são necessárias:

1. no máximo dois L_j podem ser positivos; e

2. se dois são positivos eles devem ser adjacentes.

Desta forma, sempre:

$$\begin{aligned} f^*(X) &= L_j f(X_j) + L_{j+1} f(X_{j+1}) \\ X &= L_j X_j + L_{j+1} X_{j+1} \end{aligned}$$

No caso de minimização de uma função convexa ou maximização de uma côncava (programação convexa) as condições 1 e 2 verificam-se automaticamente. Tome-se como exemplo, na Figura 14, a aproximação entre os pontos X_0 e X_2 com L_0 e L_2 positivos, num problema de maximização. Pela concavidade da função sempre um ponto intermediário, como P_0 , ficará acima da linha P_0P_2 , e, logicamente, representando um valor maior da função $f(X)$. Se as funções do problema forçarem X a assumir um valor neste intervalo, a maximização forçará que ele seja representado pelas combinações (L_0, L_1) ou (L_1, L_2) positivos, que fornecerão maiores valores de $f(X)$.

A situação em que três pesos L assumem valores positivos pode ser verificada de forma análoga. Suponha L_1, L_2 e L_3 positivos. A combinação convexa $L_1 X_1 + L_2 X_2$ representa um ponto no segmento de reta $P_1 P_2$, que seria combinado com o ponto P_3 . Nesta situação, recai-se na explanação anterior.

Se o problema fosse de minimização de uma função côncava percebe-se que as condições não podem verificar-se. Na Figura 14, a combinação que aproximaria $f(x)$ seria aquela entre os pontos P_0 e P_3 ; ela fornece os mínimos valores de $f(x)$.

Nestes problemas não-convexos, em que as condições de adjacência não são automaticamente verificadas, pode-se forçá-las estabelecendo-se critérios de restrição de entrada de variáveis na base da solução do problema linear (variáveis ativas). Utiliza-se o mesmo critério do simplex, porém não se introduz uma variável L_1 na base a menos que não exista qualquer outra L ou, se existir uma, lhe seja adjacente. A pequena alteração necessária no simplex torna o método atrativo, mas não há garantia de otimalidade global.

O Método Delta

Seja $f(x)$, na Figura 15, representada por $f^*(x)$ e x pela soma das variáveis D_1 , D_2 e D_3 , como segue:

$$x = D_1 + D_2 + D_3$$

$$f(x) \approx f^*(x) = a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3$$

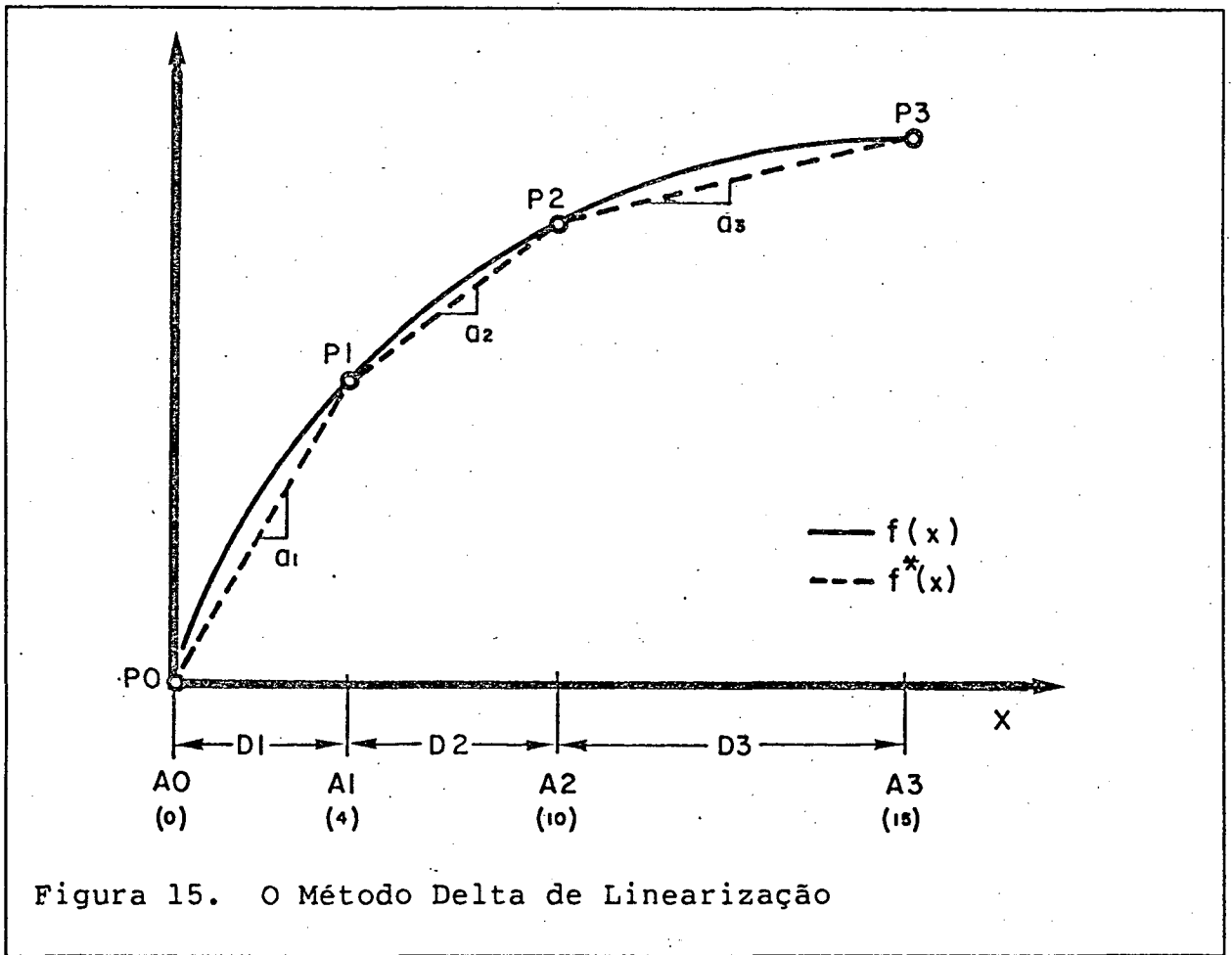
onde

$$0 \leq D_1 \leq A_1 - A_0$$

$$0 \leq D_2 \leq A_2 - A_1$$

$$0 \leq D_3 \leq A_3 - A_2$$

As variáveis D_1 , D_2 e D_3 representam as quantidades que excedem os valores A_0 , A_1 e A_2 e os coeficientes a_1 , a_2 e a_3 representam as inclinações de cada segmento de reta. Por exemplo, na figura, um valor x igual a 6 seria representado por D_1 igual a 4 e D_2 igual a 2.



Para uma representação unívoca e correta deve-se ter $D1=A1$ sempre que $D1 \geq 0$, $D2=A2-A1$ sempre que $D3 \geq 0$ e $D2=D3=0$ se $x \leq A1$.

Estas condições podem verificar-se automaticamente, novamente, no caso de programação convexa. No exemplo da figura, para um problema de maximização, um valor de x igual a 2 seria sempre representado por $D1$ igual a 2 por que é a situação de maior custo (custo marginal $a1$ e menor que $a2$ ou $a3$). A função côncava tem custos marginais decrescentes.

Para o caso de programação não-convexa, as condições podem ser garantidas através de variáveis binárias auxiliares.

Seja:

$$W_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } D_1=A_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$W_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } D_2=A_2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As restrições às variáveis D são reescritas como:

$$(A_1-A_0) W_1 \leq D_1 \leq A_1-A_0$$

$$(A_2-A_1) W_2 \leq D_2 \leq (A_2-A_1) W_1$$

$$0 \leq D_3 \leq (A_3-A_2) W_2$$

Note que se $W_1=0$, W_2 também será zero, forçada pela restrição de D_2 , resumido as restrições a:

$$0 \leq D_1 \leq A_1; \quad D_2 = 0 \text{ e } D_3 = 0 .$$

Se $W_1=1$ e $W_2=0$, as restrições reduzem-se a:

$$D_1 = A_1; \quad 0 \leq D_2 \leq (A_2-A_1) \text{ e } D_3 = 0 .$$

E, finalmente, se $W_1=1$ e $W_2=1$:

$$D_1 = A_1; \quad D_2 = (A_2-A_1) \text{ e } 0 \leq D_3 \leq (A_3-A_2).$$

Portanto, cada um dos intervalos de aproximação ficará representado de forma inambigua:

- $W_1=0, W_2=0$ corresponde a $0 \leq x \leq A_1$;
 $W_1=1, W_2=0$ corresponde a $A_1 \leq x \leq A_2$; e
 $W_1=1, W_2=1$ corresponde a $A_2 \leq x \leq A_3$.
 $W_1=0, W_2=1$ implica em uma inviabilidade.

A principal vantagem do método delta é a garantia de otimalidade global para o problema aproximado. A desvantagem é a necessidade de variáveis binárias, gerando um modelo de programação linear mista.

Características do modelo linear misto resultante

A principal desvantagem do método delta de linearização em relação ao método lambda é a necessidade de variáveis binárias auxiliares, transformando o modelo em um problema de programação linear mista. No caso em estudo, entretanto as variáveis binárias já são necessárias para modelar os custos fixos iniciais de algumas funções de custo. Desta forma a desvantagem do método delta torna-se de menor importância; suas variáveis binárias vão somente aumentar o problema, não serão a causa primordial dele. Isto, acrescido a vantagem de garantia da otimalidade, sugere que o método delta é mais adequada ao modelo de carvão.

Apesar da linearização, o modelo mantém a mesma estrutura básica:

$$\begin{aligned} \min \quad & CX + f(Y) \\ & AX + F(Y) \geq B \\ & X \geq 0, Y \in S \end{aligned}$$

onde as variáveis Y são mistas (contínuas e binárias) e as funções $f(X)$ e $F(Y)$ são lineares.

4.4 TÉCNICA ADOTADA

Resolver o modelo original por Benders é impraticável pelas características do supervisor resultante: é um problema com um conjunto de soluções viáveis não-convexo, o que o torna um problema não-convexo.

A abordagem que surge como promissora é a solução do modelo linearizado por partes através da técnica de Benders, tirando proveito da estrutura da matriz A .

Nas aplicações mais frequentes de Benders a matriz A tem uma estrutura de transporte e o problema supervisor tem somente variáveis binárias, que permitem algoritmos eficientes para a solução de ambos. Outro fator importante é a separabilidade da matriz A . Quanto maior o número de blocos isolados em que A possa ser separado, mais eficazes se tornam os métodos de decomposição. O problema de linearização não tem as características mais desejáveis. Entretanto, GIGLIO [GIGLIO & NOONAN, 1977] aplicou Benders a um problema cujos

subproblemas são lineares, sem serem de transportes, o supervisor é de programação mista e, além disso, complicado pela presença de algumas restrições não-lineares, mas ainda um conjunto de soluções convexo. O algoritmo resolveu, com recursos computacionais viáveis (426 segundos e 300K palavras octais em um CDC 6600), um problema em que o supervisor possuía 380 variáveis binárias e, 38 contínuas, a matriz A era separável em 19 problemas lineares, cada um com 255 variáveis, 23 restrições e 255 limites superiores as variáveis.

A aplicação de GIGLIO [GIGLIO & NOONAN, 1977] bem sucedida e com semelhanças ao problema de planejamento da oferta de carvão, incentiva a que se acredite na praticidade de aplicar-se Benders ao modelo linearizado. Pretende-se avaliar esta conveniência, resolvendo um estudo de caso decomposto, por Benders, e sem decompô-lo, através de programação mista.

Para a solução de problemas de programação linear mista, o método mais conhecido é o "branch-and-bound", talhado para tirar proveito da estrutura e peculiaridades de cada problema. Utiliza-se heurísticas para se ter boas soluções rápidas ou pelo menos um limite ao valor da função objetivo. Salkin [SALKIN, 1975], lembra que "única coisa melhor que um bom limite inicial ao valor da função objetivo é uma boa solução inicial, obtida barata e rapidamente através de heurística".

Porém, neste trabalho, procurando-se avaliar o desempenho do algoritmo de Benders não justifica-se investir no desempenho do algoritmo de "branch and bound" já que ele será utilizado para resolver o problema como um todo, sem decompô-lo,

e para resolver o problema supervisor resultante da decomposição por Benders.

4.5 DESCRIÇÃO DO ALGORITMO DE BENDERS

O algoritmo de Benders resolve problemas de programação matemática que se apresentam na forma do problema P1 da Tabela 4, onde os vetores x e y são variáveis com n e p elementos, A é uma matriz de constantes m por n , c e b são vetores de constantes de n e m elementos de tal forma que se y é fixado, o problema resultante é linear. A função $f(y)$ pode ser não linear em y , $F(y)$ é um vetor de m funções que também podem ser não lineares e S é um subconjunto arbitrário do espaço vetorial E de p dimensões.

Na verdade, ele resolve o problema P2, oriundo do P1, através de um método de relaxação, utilizando a interação entre o subproblema dual e o supervisor MP2.

O algoritmo pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Inicia-se com o problema MP2, onde algumas (ou nenhuma) restrições são incluídas.
2. Resolve-se o problema MP2. Se MP2 é inviável, P1 e P2 também são. Caso contrário, obtém-se uma solução ótima finita (z^0, y^0) ou a informação que a solução é ilimitada. Se ilimitada, faz-se Z^0 igual a menos infinito e Y^0 um elemento arbitrário de S . Vá para 3.

3. Resolva o programa linear dual (ou o primal se é viável). Se o dual é inviável então P1 tem uma solução ilimitada. Se o dual é ilimitado, vá para 6.
4. Se o valor da função objetivo em 3 é igual a $Z^0 - f(Y^0)$, a solução (Z^0, Y^0) resolve P2. Se X^0 resolve o primal, então (X^0, Y^0) resolve P1.
5. Se o teste de otimalidade em 3 não se verifica e o dual tem uma solução ótima finita, P^0 então

$$Z^0 < f(Y^0) + (B-F(Y^0))'P^0 \quad (i)$$

Desta forma a atual solução para MP2 não satisfaz a restrição

$$Z \geq (B-F(Y))'P^0 + f(Y) \quad (ii)$$

Adicione esta restrição em MP2 e retorne ao passo 2.

6. Se o dual tem uma solução ilimitada, o método simplex localiza um raio extremo R^0 e o ponto extremo P^0 tal que o objetivo do dual tende a infinito ao longo da semi reta

$$U = P^0 + L R^0, \quad L \geq 0 \quad (iii)$$

A desigualdade

$$(B-F(Y^0))'R^0 > 0. \quad (iv)$$

é satisfeita, assim Y^0 não satisfaz a restrição

$$(B-F(Y))' R^{\circ} \leq 0 \quad (v)$$

Adicione esta restrição em MP2. Se, além disto,

$$z^{\circ} < F(Y^{\circ}) + (B-F(Y^{\circ}))'P^{\circ} \quad (vi)$$

para o ponto extremo P° em (iii), adicione uma restrição da forma (ii) em MP2. Retorne ao passo 2.

A convergência finita do algoritmo, segue diretamente do número finito de restrições do P2, que serão tantos quantos forem os pontos e raios extremos do conjunto P. Felizmente, poucos realmente restringem a solução ótima final. A iteração do algoritmo fica mais explícita no fluxograma da Figura 16.

Nos próximos parágrafos, o funcionamento básico do algoritmo de Benders será exposto. Seja G o conjunto de restrições de P2; i.e.,

$$G = \{(z,y) \mid (z,y) \text{ satisfaz (3)-(5)}\}$$

e G' o conjunto de restrições do MP2, onde um conjunto apropriado de restrições de G foram incluídas, i.e.

$$G' = \{(x,y) \mid (z,y) \text{ satisfaz (8)-(10)}\}$$

Uma vez que nem todas as restrições estão necessariamente incluídas, G' está contido em G e MP2 minimiza o objetivo do P2

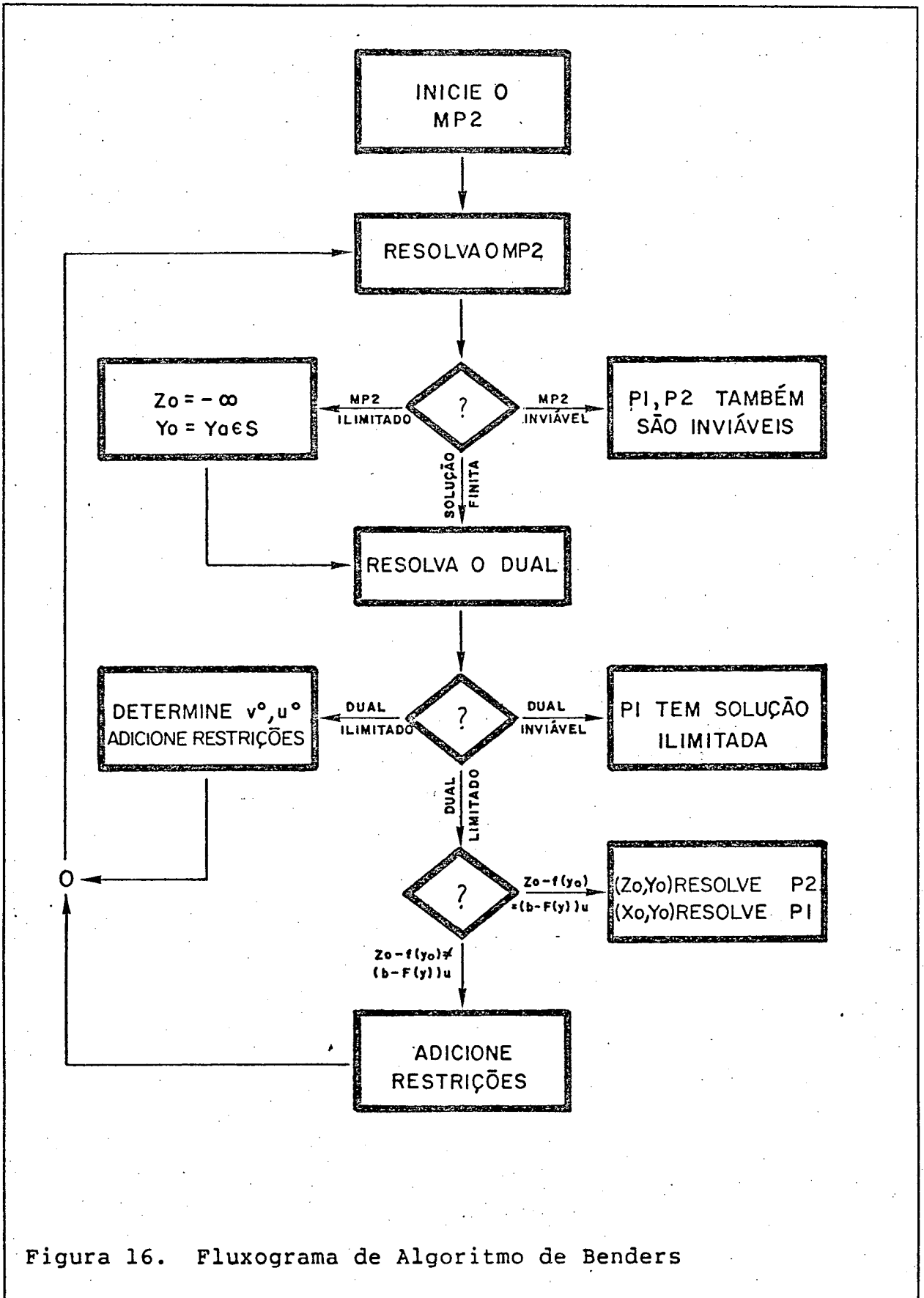


Figura 16. Fluxograma de Algoritmo de Benders

Tabela 4: Problemas Fundamentais do Algoritmo de Benders

PROBLEMA P1	$\min C'X + f(Y)$ $\text{s.a } AX + F(Y) \geq B \quad (1)$ $X \geq \emptyset, Y \in S \quad (2)$ <p>onde: S é um subconjunto do espaço vetorial E^p, fechado e limitado.</p>	
PROBLEMA P2	$\min Z$ $\text{s.a } Z \geq f(Y) + (B - F(Y))' P_i, \quad i = 1, \dots, np \quad (3)$ $(B - F(Y))' R_i \leq \emptyset, \quad i = 1, \dots, nr \quad (4)$ $Y \in S$ <p>onde: P_i são os pontos extremos do poliedro $P = \{U A'U \leq C, U \geq \emptyset\}$, R_i são os raios extremos do mesmo poliedro.</p>	
PRIMAL	$\min C'X$ $\text{s.a } AX \geq (B - F(Y)) \quad (6)$ $X \geq \emptyset$ <p>onde: $F(Y)$ é o recurso pré-fixado</p>	DUAL
		$\max (B - F(Y))'U$ $\text{s.a } A'U \leq C \quad (7)$ $U \geq \emptyset$ <p>onde: $F(Y)$ é o recurso pré-fixado.</p>
PROBLEMA MP2	$\min Z$ $\text{s.a } Z \geq f(Y) + (B - F(Y))' P_i, \quad i \in I_1 \quad (8)$ $(B - F(Y))' R_i \leq \emptyset, \quad i \in I_2 \quad (9)$ $Y \in S$ <p>onde: I_1 e I_2 são subconjuntos apropriados dos inteiros $1, \dots, np$ e $1, \dots, nr$</p>	

sobre um conjunto de restrições que está contido no conjunto do P2. Assim, uma solução para MP2 só será ótima para P2 se e somente se ela existir em G, i.e. satisfazer todas as restrições do P2. Naturalmente, estas restrições todas não estão disponíveis explicitamente desde que os pontos e raios extremos de P não

foram tabulados a priori. Isto é sobrepujado usando o programa linear (6) ou (7) para gerar as restrições de P2 que são as mais insatisfeitas na atual solução de MP2, ou para mostrar que todas as restrições são satisfeitas.

Uma solução (z^0, Y^0) de MP2 é ótima para P2 se e somente se:

$$(B-F(Y^0))'P_i \leq z^0 - f(Y^0), \quad i=1, \dots, n_p \quad (11)$$

$$(B-F(Y^0))'R_i \leq 0, \quad i=1, \dots, n_r \quad (12)$$

Considere o problema de achar a restrição (11) mais insatisfeita ou uma (12) insatisfeita. A restrição (11) mais insatisfeita é aquela com o maior valor da parcela a esquerda do sinal, i.e.

$$\max (B-F(Y^0))'P_i \quad 1 \leq i \leq n_p$$

Uma pesquisa dentre todos os pontos extremos P_i , do conjunto P, que maximizam o produto acima pode ser feita resolvendo-se o problema linear abaixo:

$$\left. \begin{array}{l} \max (B-F(Y^0))' u \\ \text{s.a. } u \in P \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{subproblema} \\ \text{linear} \end{array}$$

Este problema é o dual (7) apresentado na Tabela 4, com $Y=Y^0$.

Desde que Z^0 é assumido finito e P um conjunto não vazio [LASDON, 1970] o problema acima tem ou uma solução ótima finita ou uma solução ilimitada. Se é ilimitada, sua função

objetivo tende ao infinito ao longo da semi-reta, $P_i + L R_i \geq 0$ e neste caso:

$$(B-F(Y^0))' R_i > 0 \text{ para algum } i .$$

Isto significa que uma das restrições (12) é violada. Ambas as restrições (11) e (12) são satisfeitas se e somente se

$$[\max \{(B-F(Y^0))' U \mid A' U \leq C, U \geq 0\}] \leq Z^0 - f(Y^0) \quad (13)$$

Note contudo, que (11) deve permanecer uma igualdade para algum i se não Z^0 poderia ser reduzido sem violar qualquer restrição. Se entretanto (13) permanecer na igualdade nenhuma restrição (11) ou (12) é violada e a solução (Z^0, Y^0) do MP2 é ótima para P2 conforme fora colocado no início. Caso contrário, alguma restrição (11) - (12) não é satisfeita e

$$[\max \{(B-F(Y^0))' U \mid A' U \leq C, U \geq 0\}] > Z^0 - f(Y^0) \quad (14)$$

Se o máximo em (14) verifica-se em um ponto extremo P^0 uma restrição (11) não é satisfeita e um novo MP2 é fornecido pela adição desta restrição.

Se o subproblema linear é ilimitado, então o método simplex conduz a um ponto extremo de P, P^0 , e um raio extremo de P, R^0 , tal que $(B-F(Y^0))' U$ tende ao infinito ao longo da semi-reta

$$U = P^0 + L R^0, \quad L \geq 0$$

Para isto acontecer, R^0 deve satisfazer

$$B - F(Y^0))' R^0 > 0.$$

de modo que a restrição da forma (12) criada para o raio extremo V^0 não é satisfeita. A restrição deve ser adicionada ao MP2, para fornecer um novo problema. Neste caso pode ser que para P^0 a restrição do tipo (11) também não seja satisfeita. Assim ambas as restrições são adicionadas ao MP2.

4.6 FORMULAÇÃO DO MODELO SEGUNDO BENDERS

O modelo de planejamento de carvão, discutido no capítulo 3 e apresentado abaixo, de forma matricial, necessita algumas transformações para que possa ser resolvido pelo algoritmo de Benders.

$$\min CX + f(Y)$$

$$\text{s.a } RX \leq D \quad (1)$$

$$A^*X + FY \{ \leq, =, \geq \} B \quad (2)$$

$$X \geq 0, Y \geq 0 \quad (3)$$

A formulação requerida por Benders é muito semelhante na estrutura matricial, mas possui detalhes importantes colocados na forma a seguir (veja também o Problema P1 na Tabela 4):

$$\min CX + f(Y)$$

$$\text{s.a } AX + F(Y) \geq B \quad (4)$$

$$X \geq 0, Y \in S \quad (5)$$

O conjunto S precisa ser fechado e limitado e a função f(Y) ser contínua nele. O problema deve ser formulado de forma conveniente para que suas peculiaridades sejam exploradas, como por exemplo, a estrutura da matriz A*; são T (períodos de planejamento) blocos independentes junto a diagonal principal.

Na formulação (1)-(3), X representa as variáveis operacionais do sistema e C seus custos lineares; Y são as variáveis de expansão de capacidade e f(Y) as funções de custo não-lineares; a matriz R é formada pelos coeficientes das restrições de reserva, A constitui-se de T blocos independentes e F tem uma forma bloco triangular; os sinais de desigualdade de (2) podem ser \leq , $=$ ou \geq . A Figura 5 mostra a estrutura dos coeficientes das restrições.

As restrições, como formuladas no capítulo 3 e com todas as variáveis a esquerda do sinal como sugere (1)-(2), resumem-se a:

$$\bullet \quad (\Sigma_t (\text{CNB}_{jt} + \Sigma_i \text{CNB}_{jvit})) / \text{IRE}_j \leq \text{RESTOT}_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$\bullet \quad (\text{CNB}_{jt} + \Sigma_i \text{CNB}_{jt}) / \text{PCV}_j - \Sigma_{a=1}^t \text{EKM}_{at} \leq \text{KIM}_j \quad \forall j, t \quad (7)$$

$$\bullet \quad \Sigma_{(ij) \in L_v} \text{CNB}_{jvit} - \Sigma_{a=1}^t \text{EKB}_{at} \leq \text{KIB}_v \quad \forall v, t \quad (8)$$

$$\bullet \quad \text{LAV}_{vit} - \text{RND}_{ji} \text{CNB}_{jvit} - \Sigma_{(rj) \in R} (1 - \text{RND}_{ji}) \text{CNB}_{jvit} = 0 \quad \forall v, i, t \quad (9)$$

$$\bullet \quad \Sigma_{v \in L} \text{LAV}_{vit} + \Sigma_{j \in J} \text{CNB}_{jt} + \Sigma_{s \in I} \text{CTR}_{sit} - \Sigma_{s \in E} \text{CTR}_{sit} - \text{CPU}_{qikt} \geq 0 \quad \forall q, i, t \quad (10)$$

$$\bullet \quad \Sigma_{(is) \in P_p} \text{CTR}_{sit} \leq \text{KP}_{pt} \quad \forall p, t \quad (11)$$

$$\bullet \quad \text{CPU}_{qikt} \geq \text{DTON}_{qkit} \quad \forall q, k, i, t \quad (12)$$

$$\bullet \quad \text{CTR}_{sit} - \text{IM} \text{CPU}_{qikt} = 0 \quad (s, q) \in Q, \forall t \quad (13)$$

$$\bullet \quad \text{EF}_k (\Sigma_{i \in U_c} \text{CPU}_{qikt} \text{PCA}_i) \geq \Sigma_{c=1}^C \text{DENE}_{qkct} \quad \forall q, k, c, t \quad (14)$$

Em X, de (1)-(3), estão as variáveis CNB_{jt} , CNB_{jvit} , LAV_{vit} , CTR_{sit} e CPU_{qikt} e em Y apenas EKM_{jt} e EKB_{vt} . Os outros elementos - variáveis grifadas e com os índices entre parênteses - são exógenos ao modelo.

A matriz R é formada pelos coeficientes das restrições (6). Elas são em número reduzido, apenas j (onde j é o número de jazidas) mas interligam todos os blocos de cada período devido ao somatório em t.

A matriz A* divide-se em T grandes blocos independentes cada qual com restrições das tipos (7) à (14). A esparsidade de cada bloco é bastante alta (cerca de 2% de

elementos não nulos) e seus coeficientes são todos próximos da unidade (têm o módulo menor que 10).

A matriz F de (2) é muito esparsa, pois constitui-se dos coeficientes das variáveis EKM_{jt} e EKB_{vt} que aparecem apenas nas restrições do tipo (7) e (8). Em cada período são $(j+v)$ restrições e no total são $T(j+v)$ restrições que dão origem a linhas de F , com alguns elementos diferentes de zero. Nas demais linhas, todos os elementos são nulos. A matriz F interliga os blocos do A^* através das variáveis EKM_{jt} e EKB_{vt} e tem um formato bloco triangular devido ao somatório das variáveis de expansão que varia do 1 a t , conforme o período a que pertence a restrição.

Das transformações que levarão a formulação original à requerida por Benders, uma é conveniente - explorar a estrutura de A^* - e outras são necessárias: eliminar a descontinuidade e não-convexidade de $f(y)$; converter todas as restrições para aquelas do tipo \geq ; e fazer de S um conjunto fechado e limitado.

Na solução do problema através de Benders, a cada iteração do algoritmo, será resolvido o problema primal ou dual mostrado na Tabela 4. A matriz A , destes problemas, é a mesma do problema $P1$ e, a primeira vista, ela seria a reunião das matrizes R e A^* , de (1)-(2), resultando em uma estrutura bloco angular primal, de grandes dimensões. O problema primal (ou dual) seria conseqüentemente de grande porte e de solução custosa. Mesmo o emprego de técnicas de decomposição (Dantzig-Wolfe, no caso) não apresentaria maiores vantagens pois o número de períodos de planejamento não deve ser grande e, conseqüentemente, ter-se-ia

uma baixa separabilidade da matriz A. A alteração conveniente, que resultaria em a matriz A ter a mesma estrutura de A*, seria passar o bloco de restrições R para o lado das variáveis Y incorporando-as a matriz F. Isto pode ser feito com o emprego de algumas variáveis auxiliares.

As restrições de reserva impõe limites ao total minerado em uma jazida ao longo do horizonte de planejamento. Limites parciais (RES_{jt}) podem ser impostos a cada jazida, em cada ano, levando a inequação (6) a seguinte forma:

$$(\sum_t (CNB_{jt} + \sum_i CBN_{jvit})) / \underline{IRE}_j - RES_{jt} \leq 0 \quad \forall j,t \quad (12)$$

onde a variável RES_{jt} passa a incorporar as variáveis do tipo Y.

Aos limites parciais deve-se impor o limite total da jazida, i.e.:

$$\sum_t RES_{jt} \leq \underline{RESTOT}_j \quad \forall j \quad (13)$$

Como as restrições do tipo (13) envolvem somente variáveis do tipo Y, elas podem fazer parte da definição do conjunto S e não precisam ser explicitadas em F(Y). Assim feito, a matriz A fica com a mesma estrutura de A*, facilitando em muito a solução do problema dual.

A maior dificuldade imposta a transformação do problema original e a forma da função f(Y), quando representando os custos de uma expansão de capacidade. Relembrando o já exposto:

$$f(Y) = \begin{cases} 0 & \text{para } Y = 0 \\ \underline{CFE} + \underline{CUN} Y^b & \text{para } 0 < Y \leq LS \quad \text{na expansão} \\ \underline{CFI} + \underline{CFE} + \underline{CUN} Y^b & \text{para } 0 < Y \leq LS \quad \text{na implantação} \end{cases}$$

onde a implantação é uma situação em que há a expansão de um elemento, ainda sem capacidade alguma; existe um custo inicial CFI para colocá-lo em produção.

Segundo a colocação em (3), $Y \geq 0$, o conjunto S seria representado pelos vetores Y maiores ou iguais a zero, deixando clara a descontinuidade de $f(Y)$ em S. Para contornar esta dificuldade pode-se representar o custo de uma implantação de uma jazida (o caso mais geral) como sendo função das variáveis Y, IMM_{jt} e EXM_{jt} onde as duas últimas são variáveis binárias auxiliares. A nova função seria a soma de três outras i.e.

$$f(Y, IMM_{jt}, EXM_{jt}) = \underline{CFI} IMM_{jt} + \underline{CFE} EXM_{jt} + \underline{CUN} Y^b \quad (14)$$

A variável IMM_{jt} assume valor 1, fazendo seu custo ser computado na função objetivo, quando a jazida j adquire capacidade de produção no período t; caso contrário, forçado pela orientação de minimização permanece com valor nulo. A restrição que forçará IMM_{jt} assumir o valor 1 quando houver expansão em uma jazida será:

$$\sum_{a=1}^t \text{BIG IMM}_{jt} \geq \text{EKM}_{jt} \quad \forall j,t \quad (15)$$

onde BIG representa um número grande suficiente para não limitar EKM. Num exemplo para dois períodos de planejamento, seriam apenas duas restrições:

$$\text{BIG IMM}_{j,t=1} \geq \text{EKM}_{jt} \quad \forall j \quad (16)$$

$$\text{BIG IMM}_{j,t=1} + \text{BIG IMM}_{j,t=2} \geq \text{EKM}_{jt} \quad \forall j \quad (17)$$

Se ocorrer uma implantação no primeiro período e uma expansão no segundo, EKM_{jt} com $t=1$ e EKM_{jt} com $t=2$ teriam valores maiores que zero e, para verificar-se (16), IMM_{jt} com $t=1$ assumirá valor 1. A variável IMM_{jt} com $t=2$ permanecerá em zero pois (17) já está satisfeita com IMM_{jt} com $t=1$ igual a 1. Se ocorrer uma implantação no segundo período apenas EKM_{jt} com $t=2$ será maior que zero e IMM_{jt} com $t=2$ igual a 1. Para a verificação de (17) nesta segunda hipótese, IMM_{jt} com $t=1$ ou IMM_{jt} com $t=2$ poderiam assumir valor 1. Entretanto, IMM_{jt} com $t=2$ tem um custo menor e, devido a orientação de minimização, seria o escolhido. Seu valor de custo na função objetivo é menor devido a consideração do valor do dinheiro: implantações futuras são preferíveis, mais atrativas. O valor do dinheiro é expresso através de uma taxa de juros.

A variável EXM_{jt} assume valor 1 quando a jazida j tem sua capacidade expandida no período t . A restrição que traduz o exposto é:

$$\underline{\text{BIG}} \text{ EXM}_{jt} \geq \text{EKM}_{jt} \quad \forall j,t \quad (18)$$

Sempre que EKM_{jt} for maior que zero, EXM_{jt} deverá assumir o valor 1 e o custo fixo associado a ela será computado no valor da função objetivo. Por outro lado, desta maneira, só ocorrerá uma expansão se for absolutamente necessária.

As variáveis EXM_{jt} e IMM_{jt} são auxiliares do tipo Y e as restrições (15) a (18) envolvem somente variáveis do tipo Y, e farão, portanto, parte da definição do conjunto S.

A não-convexidade de $f(y)$ será contornada através de linearização por partes como já se discutiu em tópicos anteriores. Far-se-á uso do método Delta para o qual são necessários variáveis auxiliares binárias. Se a função (CUN Y) for substituída por apenas dois segmentos de reta, uma única variável auxiliar é necessária: EKM_{jt} para o caso de uma jazida. Na discussão de $f(y)$, a variável Y pode representar tanto EKM_{jt} como EKB_{vt} porém, por simplicidade, serão feitas as considerações apenas para EKM_{jt} . A variável Y será substituída pela soma de duas auxiliares contínuas:

$$\text{EKM}_{jt} = \text{EM1}_{jt} + \text{EM2}_{jt} \quad (19)$$

e a função CUN Y^b por duas parcelas também:

$$\underline{\text{CUN}} Y^b = \underline{\text{CUN}} \underline{A1}_j \text{EM1}_{jt} + \underline{\text{CUN}} \underline{A2}_j \text{EM2}_{jt} \quad (20)$$

onde $\underline{A1}_j$ e $\underline{A2}_j$ são as declividades dos dois segmentos de reta.

As restrições necessárias para garantir o processo de linearização podem ser incorporadas ao conjunto S e, no caso acima, dois segmentos de reta, resumem-se a:

$$(D1-D0) \text{ EKM}_{jt} \leq \text{EM1}_{jt} \quad (21)$$

$$\text{EM1}_{jt} \leq (D1-D0) \quad (22)$$

$$(D2-D1) \text{ EKM}_{jt} \geq \text{EM2}_{jt} \quad (23)$$

onde $D0$, $D1$ e $D2$ são valores de capacidade mostradas na Figura 17.

Resumindo, $f(Y)$, quando Y representa uma expansão de capacidade, toma o seguinte aspecto final:

$$\begin{aligned} f(Y) = & \text{CFI } \text{IMM}_{jt} + \text{CFE } \text{EXM}_{jt} \\ & + \text{CUN } \text{A1}_j \text{ EM1}_{jt} \\ & + \text{CUN } \text{A2}_j \text{ EM2}_{jt} \end{aligned} \quad (24)$$

As transformações necessárias para fazer com que todas as restrições fiquem com o sinal de \geq são bastante fáceis: se a restrição for do tipo \leq , multiplica-se toda a inequação por -1 ; e, se for uma igualdade, primeiro transforma-a em duas inequações, uma \geq e outra \leq , e depois multiplica-se por -1 aquela com o sinal \leq .

A última consideração refere-se ao conjunto S . As variáveis tipo Y são onze, no caso mais geral: EM1_{jt} , EM2_{jt} , EB1_{vt} , EB2_{vt} , RES_{jt} , WKM_{jt} , WKB_{vt} , IMM_{jt} , IMB_{vt} , EXM_{jt} e EXB_{vt} . As seis últimas binárias e as primeiras contínuas. Para que S

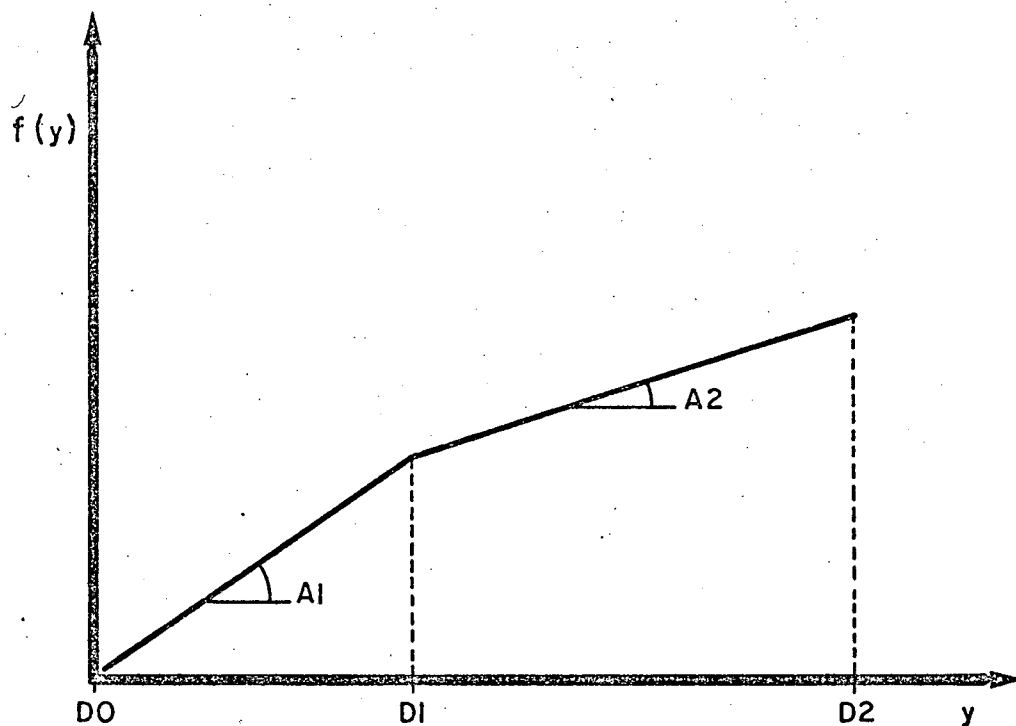


Figura 17. Linearização por partes em dois segmentos

seja limitado, as variáveis devem ficar contidas entre limites inferior e superior. As binárias podem assumir valores zero ou um, portanto, já estão limitadas. As contínuas têm o limite inferior zero, pela definição do problema, e lhes falta um limite superior. Portanto o conjunto S fica com a seguinte definição, considerando jazidas somente:

Variáveis contínuas: $RES_{jt}, EM1_{jt}, EM2_{jt}, EB1_{vt}, EB2_{vt}$

Variáveis binárias : $WKM_{jt}, IMM_{jt}, EXM_{jt}$

Restrições:

$$\bullet \quad \sum_t RES_{jt} \leq \underline{RESTOT}_j \quad \forall j \quad (25)$$

$$\bullet \quad \sum_{a=1}^t \underline{BIG} IMM_{at} \geq EM1_{jt} \quad \forall j,t \quad (26)$$

$$\bullet \quad \underline{BIG} EXM_{jt} \geq EM1_{jt} \quad \forall j,t \quad (27)$$

$$\bullet \quad (D1 - D0) WKM_{jt} \leq EM1_{jt} \quad \forall j,t \quad (28)$$

$$\bullet \quad EM1_{jt} \leq (D1 - D0) \quad \forall j,t \quad (29)$$

$$\bullet \quad (D2 - D1) WKM_{jt} \geq EM2_{jt} \quad \forall j,t \quad (30)$$

$$\bullet \quad RES_{jt}, EM1_{jt}, EM2_{jt} \geq 0 \quad (31)$$

$$\bullet \quad RES_{jt} \leq \underline{LSRES}_{jt} \quad (32)$$

Na formulação acima, por simplicidade, a linearização está formulada com dois segmentos de reta e só para as jazidas (variáveis $EM1_{jt}$ e $EM2_{jt}$). Nota-se também, que a única variável com um limite superior explícito é RES_{jt} (inequação (32)) as outras, $EM1_{jt}$ e $EM2_{jt}$, já ficaram implicitamente limitadas nas inequações (29) e (30).

Após todas as transformações apresentadas as restrições do problema original (6) - (14) passam a ter a seguinte forma:

$$\bullet \quad (\text{CNB}_{jt} + \text{CBN}_{jvit}) / \text{IRE}_j + \text{RES}_{jt} \geq 0 \quad \forall j, t \quad (33)$$

$$\bullet \quad -(\text{CNB}_{jt} + \sum_i \text{CBN}_{jvit}) / \text{PCV}_j + \sum_{a=1}^t (\text{EM1}_{at} + \text{EM2}_{jt}) \geq -\text{KIM}_j \quad \forall j, t \quad (34)$$

$$\bullet \quad -\sum_{(ij) \in L_v} \text{CBN}_{jvit} + \sum_{a=1}^t (\text{EB1}_{at} + \text{EB2}_{at}) \geq -\text{KIB}_v \quad \forall v, t \quad (35)$$

$$\bullet \quad \text{LAV}_{vit} - \text{RND}_{ji} \text{CBN}_{jvit} + \sum_{(rj) \in R} ((1 - \text{RND}_{ji}) \text{CBN}_{jvit}) \geq 0 \quad \forall v, i, t \quad (36)$$

$$\bullet \quad -\text{LAV}_{vit} + \text{RND}_{ji} \text{CBN}_{jvit} - \sum_{(rj) \in R} ((1 - \text{RND}_{ji}) \text{CBN}_{jvit}) \geq 0 \quad \forall v, i, t \quad (37)$$

$$\bullet \quad \sum_{v \in L} \text{LAV}_{vit} + \sum_{i \in J} \text{CNB}_{ij} - \sum_{s \in I} \text{CTR}_{sit} - \sum_{s \in E} \text{CTR}_{sit} - \sum_k \text{CPU}_{qikt} \geq 0 \quad \forall q, i, t \quad (38)$$

$$\bullet \quad -\sum_{i \in P_p} \text{CTR}_{sit} \geq -\frac{\text{KP}}{\text{pt}} \quad \forall p, t \quad (39)$$

$$\bullet \quad \text{CPU}_{qikt} \geq \text{DTON}_{qkit} \quad \forall q, k, i, t \quad (40)$$

$$\bullet \quad \text{CTR}_{sit} - \text{IM} \text{CPU}_{qikt} \geq 0 \quad (s, q) \in Q, \forall t \quad (41)$$

$$\bullet \quad -\text{CTR}_{sit} + \text{IM} \text{CPU}_{qikt} \geq 0 \quad (s, q) \in Q, \forall t \quad (42)$$

$$\bullet \quad \text{EF}_k (\sum_{i \in U_c} \text{CPU}_{qikt} \text{PCA}_i) \geq \sum_{c=1}^C \text{DENE}_{qkct} \quad \forall q, k, c, t \quad (43)$$

$$\bullet \quad \text{CNB}_{jt}, \text{CBN}_{jvit}, \text{LAV}_{vit}, \text{CTR}_{sit}, \text{CPU}_{qikt} \geq 0 \quad \forall j, v, i, s, q, k, t \quad (44)$$

$$\bullet \quad \text{RES}_{jt}, \text{EM1}_{jt}, \text{EM2}_{jt}, \text{EB1}_{vt}, \text{EB2}_{vt} \geq 0 \quad \forall j, v, t \quad (45)$$

onde o conjunto S já foi definido.

4.6.1 Solução do Subproblema

O subproblema do algoritmo de Decomposição de Benders neste trabalho, será o dual da Tabela 4 :

$$\max (B-FY)'U$$

$$\text{s.a } A'U \leq C$$

$$U \geq 0$$

Resolve-se o dual pela necessidade de informações quando da inviabilidade do primal. Em situações em que é muito vantajosa a situação do primal, recorre-se ao dual só em caso de inviabilidade.

A cada iteração do algoritmo, o subproblema será resolvido para um dado valor Y tornando-se a parcela $(B-FY)$ uma constante e a solução muito simples. O vetor B é formado pelos termos independentes da formulação (33)-(43) e FY são as partes das restrições relativas às variáveis RES_{jt} , $EM1_{jt}$, $EM2_{jt}$, $EB1_{vt}$ e $EB2_{vt}$, com elementos não nulos nas inequações (33)-(35) e nulos nas demais. Os valores das variáveis Y serão fornecidos ao subproblema pelo supervisor, a cada iteração. Os valores de B e FY correspondentes a cada inequação, para um período, estão mostradas na Tabela 5

O fato peculiar a ser explorado na solução do subproblema é a estrutura da matriz A . Segundo a formulação já discutida, ela resultou em T blocos independentes o que possibilita a solução de T problemas lineares de menor porte, isoladamente. Ao final, entretanto, deve-se compor um único ponto extremo e, se for o caso, raio extremo.

A solução de um dos T problemas menores pode resultar em finita, ilimitada ou inviável.

Tabela 5: Conteúdo dos Vetores B e FY

Vetor B	Vetor FY	Eq.
0	RES_{jt}	33
$-\underline{KIM}_j$	$\sum_{a=1}^t (EM1_{ja} + EM2_{ja})$	34
$-\underline{KIB}_v$	$\sum_{a=1}^t (EB1_{ja} + EB2_{ja})$	35
0	0	36
0	0	37
0	0	38
$-\underline{KP}_{pt}$	0	39
\underline{DTON}_{qkit}	0	40
0	0	41
0	0	42
$\sum_{a=1}^C \underline{DENE}_{qkat}$	0	43

Quando todos os T problemas apresentarem um resultado finito, o ponto extremo U_0 será formado pela união dos pontos extremos de cada um dos problemas menores.

$$U_0 = \{U_1, U_2, U_3, \dots, U_t\}$$

Se algum deles for inviável ou ilimitado o subproblema todo será. No caso de inviabilidade, o primal é ilimitado e o problema global também; não há nada a fazer. Se for ilimitado, há que se determinar o raio extremo V_0 .

Num problema qualquer, o raio extremo pode ser determinado a partir de informações intermediárias do algoritmo simplex, quando este deteta uma solução ilimitada. Nesta situação, visualizando um tableau simplex, existe uma variável não-básica X_s que fora selecionada para entrar na base e possui todos os elementos Y_{is} (a coluna do tableau) menores ou iguais a

zero. O raio extremo $R = (R_1, R_2, R_3, \dots, R_m)$ tem seus elementos R_k dados por:

$$R_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ igual a } s \\ -Y_{is} & \text{se } X_k \text{ é a } i\text{-ésima variável básica} \\ 0 & \text{se } X_k \text{ é não-básica e } k \text{ diferente de } s \end{cases}$$

Esta seria a determinação do raio extremo de um dos T problemas menores. Suponha que tenha sido o problema do segundo período. O raio extremo do problema dual como um todo será a união de vetores nulos com o vetor R para o segundo problema:

$$V_0 = (0, R, 0, \dots, 0)$$

Entenda-se por 0 , acima, como representando um vetor de m elementos nulos. A coluna X_s do segundo, visualizando a matriz A' inteira, tem m zeros, m valores de Y_{is} , e mais $(T-2)m$ zeros restantes, como mostra a Figura 18.

Se o dual fosse resolvido como um todo, os m primeiros e $(T-2)m$ últimos valores da coluna s permaneceriam nulos durante todas as iterações do simplex. Ao determinar os elementos do raio extremo eles teriam a forma de V_0 , apresentada acima, porque:

- Y_{is} para quaisquer variáveis básicas, que não pertençam ao segundo bloco, tem seus valores sempre iguais a zero;
- as variáveis básicas fora do segundo bloco tem o índice k diferente de s .

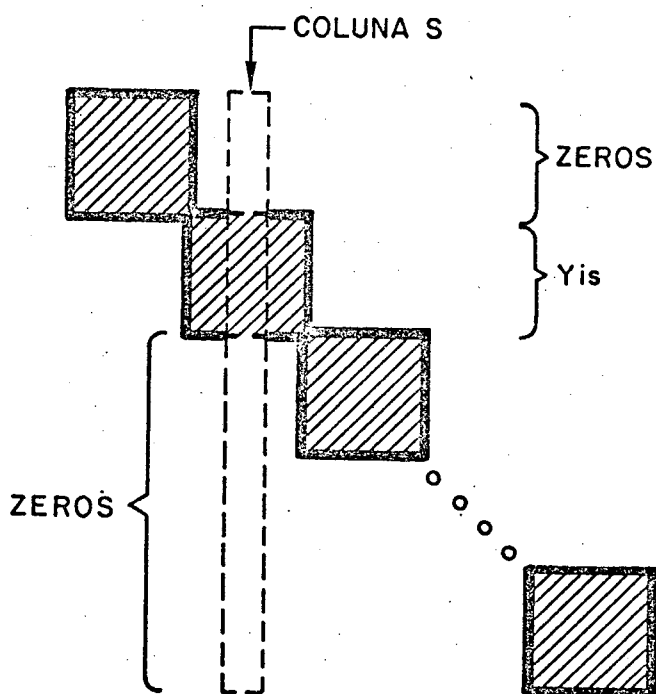


Figura 18. Determinação do Raio Extremo no Problema Global

É possível uma situação em que mais de um dos problemas menores tenha solução ilimitada, originando a determinação simultânea de vários raios extremos para o problema dual.

Na hipótese de solução ilimitada, o valor da função objetivo tende ao infinito ao longo da semi-reta.

$$U = U_0 + L V_0, \quad L \geq 0$$

Neste caso, também há necessidade da determinação de U_0 que será, novamente, a união dos pontos extremos dos problemas menores. Para aqueles que tiverem solução ilimitada, U_i será o último

ponto extremo encontrado pelo simplex, serão os valores básicos no momento em que o simplex detetou a solução ilimitada.

Outra vantagem, na solução de cada um dos T problemas menores, diz respeito às pequenas alterações introduzidas a cada iteração: mudam apenas alguns custos das variáveis da função objetivo. Isto sugere que não se resolva os problemas desde o início, novamente, mas que se aproveite a solução anterior, a base anterior.

As alterações nos custos são causadas pela alteração nos valores das variáveis Y . Suponha que os custos C sejam alterados para $C^* = C + F$. Os novos custos marginais $(Z_j - C_j)$ serão

$$Z^*_{ij} - C^*_{ij} = Z_j - C_j + F_b Y_j - F_j$$

onde F_b são os vetores de F para as variáveis básicas. Se todos os $(Z^*_{ij} - C^*_{ij})$ permanecem maiores ou iguais a zero a solução ótima não alterou-se. Porém, se algum for menor que zero deve-se prosseguir as iterações do simplex até alcançar a otimalidade novamente. Segundo HADLEY [HADLEY, 1962], se a alteração introduz uma mudança radical em C , gera um problema de programação linear completamente diferente e pode ser melhor resolver o problema modificado do início como se fosse um novo problema. Contudo, se somente uma percentagem pequena de C_j são alterados, será mais fácil continuar a partir da solução ótima anterior.

4.6.2 Solução do Supervisor

A cada iteração do algoritmo de Benders são adicionadas restrições ao supervisor, o problema MP2, para que ele atinja, passo a passo, a viabilidade e depois a otimalidade do problema global. Numa iteração qualquer ele possuía seguinte forma após as transformações:

$$\begin{aligned} \min Z \\ \text{s.a } Z &\geq CY + (B-FY)'P_i, \quad i \in I_1 \\ (B-F(Y))'R_i &\leq 0, \quad i \in I_2 \\ Y &\in S \end{aligned}$$

onde P_i e R_i são os pontos e raios extremos gerados pelo subproblema dual. as diferenças com a formulação da Tabela 4 referem-se a linearização de $f(Y)$. Os elementos $f(Y)$, $(B-FY)$ e o conjunto S já foram detalhados nos parágrafos anteriores.

Como já foi observado, a utilidade real do algoritmo de Benders em problemas lineares de variáveis mistas - é o caso em estudo, após as transformações em $f(Y)$ - dependendo fortemente da eficiência do algoritmo de programação inteira utilizado na solução do MP2. Apesar de ser possível resolver o MP2 do modelo em estudo por algoritmos especiais que, explorem suas características, ele será resolvido neste trabalho por um algoritmo simples de ramificação (branch-and-bound). Uma das propostas do trabalho é justamente avaliar a potencialidade de Benders contra a alternativa de resolver o problema inteiro, sem decompô-lo, através de "branch-and-bound" sem nenhuma especialização, como fora apresentado por Land e Doing em 1960.

Sendo assim, não se justifica buscar algoritmos especiais para resolver o MP2.

5.0 ESTUDO DE CASO

Este capítulo define o estudo de caso, apresenta os algoritmos computacionais desenvolvidos e discute os resultados obtidos.

5.1 APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE CASO

Para testar as hipóteses deste trabalho, há necessidade que se elabore um estudo de caso similar ao problema descrito no capítulo 2. Ele deve manter as características principais do problema, para dar fundamento às conclusões, e ser reduzido em dimensões, para consumir o mínimo de recursos durante sua utilização.

5.1.1 Definição e Coleta de Dados

Modiano e Tourinho [MODIANO & TOURINHO, 1982] elaboraram um caso baseado no sistema brasileiro, a fim de emitir conclusões preliminares a respeito do setor de carvão mineral e de um modelo de otimização linear desenvolvido por eles. O problema equacionado leva em conta 11 regiões de produção e/ou consumo de carvão (veja Figura 3); são previstas cinco classes de utilização para até novos tipos de carvão; são consideradas 16 jazidas, 7 lavadores, 19 rotas inter-regionais e 6 portos. São avaliadas as expansões de capacidade de mineração, beneficiamento, transportes e portos ao longo de um horizonte de

20 anos divididos em 6 períodos. O modelo resulta num problema de programação linear de grande porte.

O protótipo elaborado para utilização neste trabalho foi baseado no caso de Modiano e Tourinho, com algumas alterações para adequá-lo aos novos propósitos e com a consideração de custos não-lineares.

O recuso computacional empregado na solução de um problema de programação linear mista, como o descrito neste trabalho, é função, principalmente, do número de variáveis binárias envolvidas. Elas foram utilizadas no modelo, para representar os investimentos iniciais em implantações e expansões e como variáveis auxiliares na linearização por partes das funções de custos não-convexas. A consideração do investimento inicial, na implantação de um novo elemento, exige o emprego de uma variável binária para cada período de planejamento. No caso da expansão de um elemento já existente, são necessárias duas variáveis para cada período: uma para considerar o investimento a outra para a linearização, se forem usados dois segmentos da reta. Dado que se fará uso de programas de domínio acadêmico, adequados a problemas de médio porte, é conveniente que o número de variáveis binárias se situe em torno de 50. Isto força a que se reduza o número de elementos a serem implantados e expandidos e também os períodos de planejamento. Esta redução é a principal alteração a ser feita em relação ao caso montado por Modiano e Tourinho [MODIANO & TOURINHO, 1982] .

Considerando que 70% dos investimentos previstos nos setores de mineração, beneficiamento, transportes e portos

destinam-se aos dois primeiros e que suas gerencias influem mais no setor do carvão, foram eliminados, para fins de expansão de capacidade, os setores de transportes e portos. Além disso, o número de jazidas foi também reduzido, escolhendo-se as principais do Rio Grande do Sul e agregando-se as de Santa Catarina. Manteve-se a possibilidade de importação do exterior.

Das cinco jazidas consideradas, serão analisadas a implantação e expansão de Leão II e a expansão de Candiota, Charqueadas e Santa Catarina, assumindo-se o exterior sem restrição de produção. As reservas das jazidas de Candiota, Charqueadas, Leão II e Santa Catarina representam 88% da reserva nacional medida.

No setor de beneficiamento foi considerada a implantação do lavador de Candiota e a expansão, com custo linear, para os já existentes. A implantação do lavador de Leão II foi considerada em conjunto com a jazida.

O número de períodos de planejamento foi fixado em cinco devido a disponibilidade de dados de demanda de carvão - existem dados detalhados para os anos de 1981 à 1985.

Com estas reduções, o número de variáveis binárias fica sendo 50, conforme detalha a Tabela 6

As demais alterações efetuadas no caso básico de Modiano e Tourinho são pequenas. Os centros regionais foram mantidos os principais: Rio Grande do Sul e Santa Catarina como produtores e consumidores de carvão, o exterior apenas produtor e

os centros do Paraná, São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espírito Santo como consumidores. A Figura 19 mostra a relação entre os centros regionais, as jazidas, os lavadores e as rotas de transportes considerados.

Tabela 6: Variáveis Binárias do Protótipo

<u>MINERAÇÃO</u>	Variáveis Binárias
Minas existentes: Candiota	2
Charqueadas	2
Santa Catarina	2
Exterior	0
Minas a entrar: Leão II	3
<u>BENEFICIAMENTO</u>	
Lavadores existentes: Piratini	0
Capivari	0
Lavadores a entrar: Candiota	1
Variáveis binárias por período:	10
Períodos de planejamento:	5
TOTAL DE VARIÁVEIS: (5 x 10)	50

Nos próximos parágrafos estão detalhados os setores de mineração, beneficiamento, transportes e utilização, com vistas a elaboração do estudo de caso. A fonte básica para o levantamento dos dados foi o trabalho patrocinado pela FINEP: "Informações Técnicas e Econômicas Preliminares para a Elaboração de um Modelo de Otimização para o Carvão Mineral no Brasil" [FINEP, 1981].

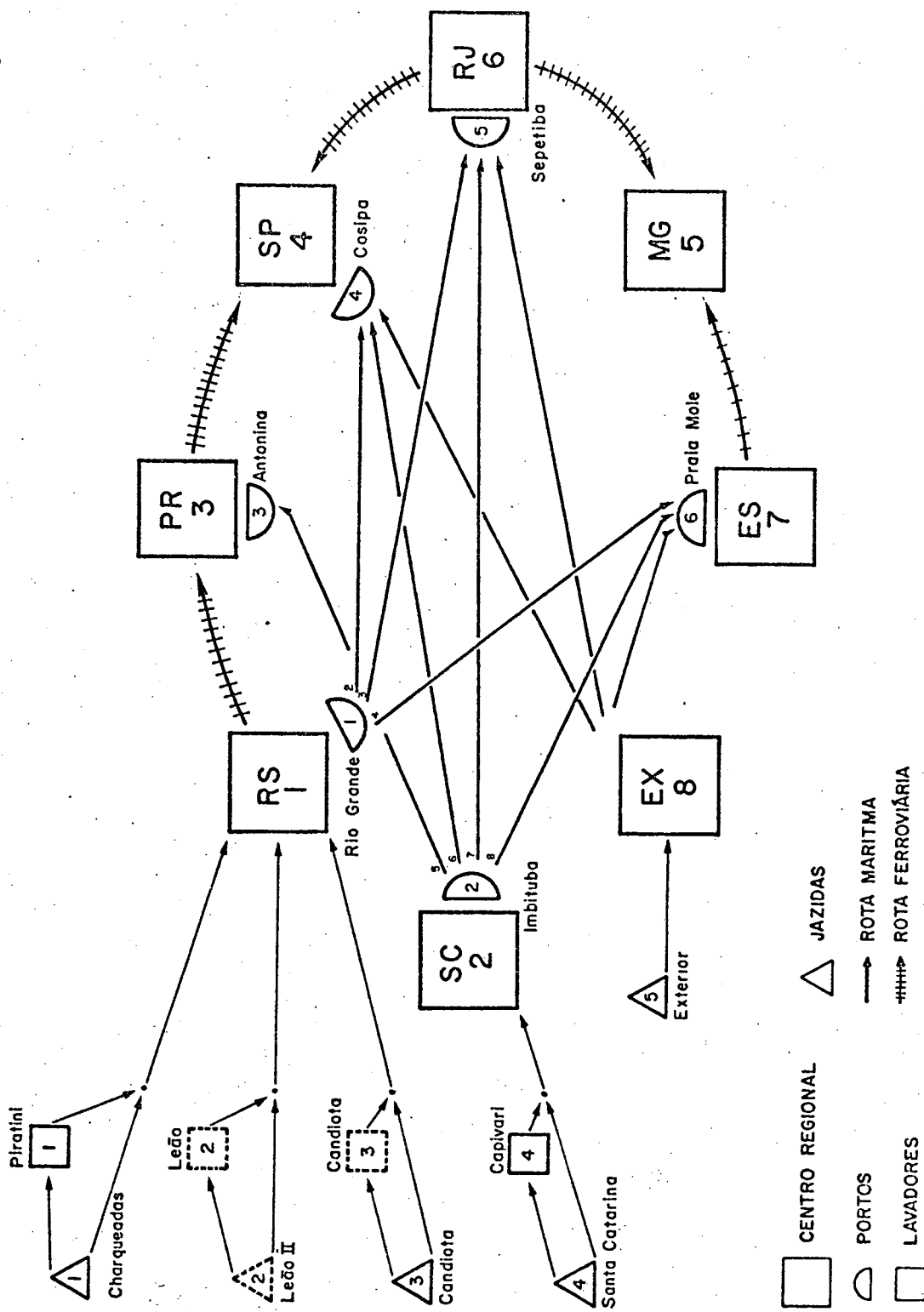


Figura 19. Elementos do Estudo de Caso

A coleta da maioria dos dados requereu apenas pesquisa nas fontes e alguns mereceram atenção especial, como a determinação dos parâmetros de linearização (Veja APÊNDICE 1).

Mineração

As decisões do modelo no setor de mineração ficarão restritas às quantidades produzidas e à capacidade instalada em cada jazida nos vários períodos. Os processos de mineração empregados serão decisões feitas a priori.

A quantidade produzida em cada período está limitada pelas reservas da jazida e pela capacidade instalada. As reservas são influenciadas pelo índice de recuperação (IRE_j) do processo empregado e a quantidade minerada pela percentagem do carvão (PCV_j) parte da massa minerada é constituída de material inerte (veja Figura 2). As jazidas já instaladas possuem uma capacidade inicial (KIM_j), diferente de zero, que poderá ser expandida.

Os custos de operação são funções lineares da quantidade produzida e os investimentos em expansão são funções côncavas da capacidade adicionada - quanto maior a expansão menor o custo unitário da capacidade adicionada - acrescidas de um custo fixo inicial. A função côncava foi linearizada em dois segmentos de reta conforme mostra a Figura 20. O processo de determinação dos parâmetros da linearização estão descritos no APÊNDICE 1 e os dados das quatro jazidas consideradas estão mostradas na Tabela 7

A quinta jazida, o exterior, possui como dado a caracterizá-la somente o custo operacional de US\$ 63,00 por tonelada.

Tabela 7: Dados de Mineração

DADOS	JAZIDAS	CHARQUEADAS	LEAO II	CANDIOTA	STA CTA
1. Reservas (RESTOT) (10 ³ TON ROM)		665000	337000	365000	701000
2. Índice de recuperação (IRE) (%)		80	85	95	73
3. Percentagem de carvão (PCV) (%)		75	80	80	29
4. Capacidade inicial (KIM) (10 ³ TON/ANO)		1000	0	1038	13060
5. Custo Operacional (COM) (US\$/TON)		25,00	15,00	4,50	9,00
6. Índice de economia de escala (b)		0,70	0,70	0,80	0,74
7. Investimento fixo inicial na expansão (10 ³ US\$)		3430	2349	1268	775
8. Investimento variável na expansão (US\$/TON)		301	206	111	68
9. Investimento fixo inicial na implantação (10 ³ US\$)		-	23493	-	-
<u>Parâmetros da Linearização</u>					
10. Primeiro limite (D1) (10 ³ TON)		570	665	1364	4413
11. Segundo limite (D2) (10 ³ TON)		3000	3500	6200	22065
12. Primeira inclinação (A1)		0,1490	0,1422	0,2361	0,1122
13. Segunda inclinação (A2)		0,0768	0,0733	0,1570	0,0640



Beneficiamento

O beneficiamento visa compatibilizar a qualidade do carvão saído das jazidas com a aquela exigida pelo mercado. Caberá ao modelo, em função das demandas de cada tipo do carvão e das capacidades de beneficiamento, definir o perfil de tipos mais adequado em cada lavador nos diversos períodos. Como na mineração, não caberá ao modelo a decisão do processo a ser empregado; escolheu-se a priori o processo de meio-denso.

Os tipos de carvão podem ser caracterizados apenas pelo teor da cinzas, uma vez que este é o principal entrave ao

uso do carvão nacional. Os tipos considerados e suas características básicas estão mostrados na Tabela 8

Tabela 8: Tipos de Carvão

TIPOS	TEOR DE CINZAS TÍPICO (%)	FAIXA DE TEOR DE CINZAS (%)	PODER CALORÍFICO (10 ³ GCAL/TON)
1	18	18	6,7
2	20	18-22	6,3
3	25	23-27	5,9
4	30	28-32	5,4
5	35	33-37	4,9
6	40	38-43	4,5
7	47	44-49	3,9
8	54	50-59	3,5
9	64	60-69	2,5
0	-	>70	-

Um determinado tipo de carvão ao chegar da mina para beneficiamento vai produzir duas parcelas - uma flutuada e a outra afundada - de melhor e pior qualidade que o carvão bruto. O carvão bruto, tipo 7, da jazida de Charqueadas, quando beneficiado para produzir um flutuado tipo 4, produz 26% deste e 74% de uma parcela afundada tipo 8. Se fosse beneficiado para produzir um flutuado tipo 5, produziria 58% deste e 42% de um afundado tipo 9. O rendimento do carvão no beneficiamento é função da sua origem (jazida) e do flutuado a ser produzido (é também função do processo de beneficiamento, que não está sendo considerado). A Tabela 9 mostra os rendimentos e os tipos afundados para cada jazida considerada.

Tabela 9: Rendimentos no Beneficiamento

DADOS	JAZIDAS	CHARQUEADAS	CANDIOTA		
			LEAO II	STA	CTA
1.Tipo de carvão bruto		7	7	8	5
2.Rendimento (%) e tipo do afundado para produzir carvão tipo:					
	1	-	30/8	10/8	33/6
	2	-	40/9	14/8	57/8
	3	7/8	53/0	20/9	81/0
	4	26/8	63/0	30/9	95/0
	5	58/9	72/0	46/9	-
	6	89/0	82/0	72/0	-
	7	-	-	93/0	-
	8	-	-	-	-
	9	-	-	-	-

Os dados correspondentes aos lavadores estão na Tabela 10 Os custos de investimentos considerados na expansão são funções lineares da capacidade adicionada.

Utilização

O carvão mineral é utilizado como carvão metalúrgico e como carvão vapor. No primeiro caso, dada uma demanda num centro regional a decisão do modelo volta-se ao aspecto de quais jazidas e que quantidades vão supri-la. Boa parte deve ser suprida pelo exterior - 80%, por causa da qualidade do carvão nacional - e o restante por jazidas que produzam carvão tipo 1, metalurgico. No segundo caso, do carvão vapor, a demanda é expressa em quantidades energéticas, cabendo ao modelo definir

Tabela 10: Dados de Beneficiamento

DADOS	LAVADORES	PIRATINI	LEÃO II	CANDIOTA	CAPIVARI
1.Capacidade inicial (KIP) (10 ³ TON/ANO)		576	0	0	3100
2.Custo operacional (COM) (US\$/TON)		1,5	1,5	1,5	1,5
3.Investimento linear na expansão (US\$/TON/ANO)		6,0	6,0	6,0	6,0
4.Investimento fixo inicial na implantação (103US\$)		-	-	10000	-

qual é a mistura adequada de tipos de carvão que irá supri-la, quais jazidas atenderão e em que quantidades. As demandas do carvão vapor podem ser atendidas por carvão do tipo 2 ao 8, inclusive, respeitando restrições de teor de cinzas da aplicação. São previstos cinco setores de utilização: combustão, indústria de cimento, siderurgia, termelétrica e gaseificação com eficiências de conversão (EF_k), relativas ao rendimento do óleo combustível na mesma utilização, de 85, 90, 90, 85 e 100%, respectivamente.

As demandas de carvão metalúrgico se dão nos três grandes produtores de laminados plano: Companhia Siderurgica Nacional (CSN) no Rio de Janeiro, COSIPA em São Paulo e USIMINAS no Espírito Santo e os dados para os anos de 81 à 85 estão mostrados na Tabela 11

Tabela 11: Demanda de Carvão Metalúrgico (10³ton)

ANO	RJ	SP	ES
81	2.144	1.786	2.025
82	3.348	2.790	3.162
83	4.248	3.540	4.012
84	4.464	3.720	4.216
85	4.428	3.690	4.182

As demandas de carvão vapor são expressas em 10⁶GCAL, com o atributo de teor máximo de cinzas aceito na utilização expresso pelo tipo de carvão. Uma mesma classe de utilização pode ter demandas com qualidades diferentes de carvão. Por exemplo, em 81 o setor cimenteiro no Rio Grande do Sul demanda 378,0 10⁶GCAL de carvão no máximo tipo 2 e mais 362,6 10⁶GCAL de carvão que pode ser suprido até pelo tipo 5, i e, tipo 2, 3, 4 e/ou 5. Desta forma fica-se com duas parcelas: uma de 378,0 para ser atendida só por carvão tipo 2 e outra de 740,6 (378,0 + 362,6) que pode ser atendida por qualquer tipo ou combinação dos tipos 2, 3, 4 e 5.

A Tabela 12 e a Tabela 13 exibem demandas para todos os centros regionais, por setor de utilização, para os anos de 81 à 85 e os tipos máximos de carvão aceitos em cada classe de aplicação.

Tabela 12: Demanda do Carvão Vapor (10³ton)

CENTRO REGIONAL utilizacao	tipo max	1981	1982	1983	1984	1985
RS						
combustao	6	450,0	1170,0	1728,0	3906,0	5256,0
	7	606,0	2106,0	3834,0	6714,0	8532,0
cimento	2	378,0	378,0	378,0	378,0	378,0
	5	740,6	740,6	1230,6	1230,6	1230,6
siderurgia	5	617,4	617,4	695,8	1166,2	1195,6
termoeletr.	6	2682,0	2826,0	2898,0	2682,0	2515,5
	8	4901,0	6203,5	7010,5	9906,0	9354,5
gaseificac.	2	0,0	0,0	819,0	1323,0	1827,0
	9	0,0	1737,5	2556,5	5293,0	5797,0
SC						
combustao	5	220,5	279,3	352,8	377,3	411,6
	6	535,5	684,3	847,8	962,9	1086,6
cimento	5	49,0	58,8	58,8	58,8	58,8
termoeletr.	6	4455,0	5125,5	5746,5	5454,0	5436,0
gaseificac.	5	0,0	2572,5	3861,2	5145,0	5145,0
PR						
cimento	5	681,1	1945,3	2160,9	2376,5	2548,0
gaseificac.	5	0,0	0,0	0,0	0,0	3920,0

Transportes

O transporte de carvão se faz em duas dimensões: intra-regional e inter-regional. O primeiro engloba os deslocamentos entre mina e centro regional, mina e lavador, lavador e centro regional e não há rotas alternativas a serem consideradas, apenas os custos devem ser acrescidos ao de

Tabela 13: Demanda de Carvão Vapor (cont.)

CENTRO REGIONAL utilizacao	tipo max	1981	1982	1983	1984	1985
SP						
combustao	6	0,0	810,0	810,0	810,0	810,0
cimento	5	4106,2	7139,3	8295,7	9275,7	9765,7
siderurgia	5	0,0	0,0	514,5	514,5	514,5
gaseificac.	5	0,0	0,0	0,0	245,0	10535,0
MG						
cimento	5	2948,0	3189,9	3787,7	4169,9	4463,9
siderurgia	5	0,0	0,0	392,0	1494,5	1631,7
RJ						
cimento	5	3581,9	4194,4	4615,8	5100,9	5458,6
siderurgia	5	0,0	0,0	0,0	1543,5	3131,1
gaseificac.	5	0,0	0,0	0,0	0,0	6615,0
ES						
cimento	5	333,2	1386,7	1675,8	1842,4	1969,8
siderurgia	5	0,0	98,0	259,7	367,5	529,2

produção do carvão bruto e beneficiado. Os custos destes itens estão mostrados na Tabela 14. No segundo caso, existem rotas alternativas e há possibilidade de estrangulamento nos portos, cabendo ao modelo decidir a forma mais conveniente de fazer o transporte.

O transporte inter-regional é composto de 10 rotas marítimas e 5 ferroviárias sem limites de capacidade (veja

Tabela 14: Custos de Transportes Intra-regionais

DADOS	MINA/LAVADOR	CHARQUEADAS PIRATINI	LEAO II LEAO	CANDIOTA CANDIOTA	STA CTA CAPIVARI
1. MINA ao CENTRO REGIONAL (CTMC) (US\$/TON)		0,6	2,4	4,3	4,3
2. MINA ao LAVADOR (CTML) (US\$/TON)		0,0	0,0	0,0	2,0
3. LAVADOR ao CENTRO REGIONAL (CTLC) (US\$/TON)		0,6	2,4	4,3	2,3

Figura 19). Foram considerados limites apenas na capacidade dos portos com valores mostrados na Tabela 15

Tabela 15: Capacidade do Portos

PORTO	CAPACIDADE INICIAL (10 ³ ton/ano)
1 RIO GRANDE/RS	240
2 IMBITUBA/SC	2.200
3 ANTONINA/PR	400
4 COSIPA/SP	6.000
5 SEPETIBA/RJ	2.600
6 PRAIA MOLE/ES	4.000

Os custos de transporte inter-regional são compostos do custo operacional de cada rota (CTCC_s) mais o custo operacional dos portos estimado em US\$1,10 por tonelada. Os

custo operacionais de transporte foram estimados em função do tipo de transporte e da extensão das rotas. A Tabela 16 mostra o custo final de cada rota, incluindo os custos portuários.

Tabela 16: Custos e Tipos de Transportes

NÚMERO DA ROTA	REGIÕES INTERLIGADAS	TIPO DE TRANSPORTE	CUSTO FINAL (US\$/TON)
1	RS-PR	FERROVIÁRIO	12,00
2	RS-SP	MARÍTIMO	17,20
3	RS-RJ	MARÍTIMO	11,80
4	RS-ES	MARÍTIMO	12,90
5	SC-PR	MARÍTIMO	6,00
6	SC-SP	MARÍTIMO	7,50
7	SC-RJ	MARÍTIMO	8,40
8	SC-ES	MARÍTIMO	9,50
9	PR-SP	FERROVIÁRIO	5,20
10	RJ-MG	FERROVIÁRIO	7,00
11	FS-MG	FERROVIÁRIO	4,00
12	EX-SP	MARÍTIMO	21,10
13	EX-RJ	MARÍTIMO	21,10
14	EX-RJ	MARÍTIMO	21,10
15	RJ-SP	FERROVIÁRIO	8,00

5.1.2 Formulação Matemática

O estudo de caso esboçado nos parágrafos anteriores deve ser formulado de duas maneiras distintas: uma para que o problema seja resolvido por decomposição, através do algoritmo de Benders e outra para que ele seja resolvido pelo algoritmo de "Branch and Bound".

Formulação Própria à Decomposição

O algoritmo de Benders resolve o problema interagindo o subproblema com o supervisor. O subproblema é o dual do problema abaixo

$$\begin{aligned} \min \quad & CX \\ \text{s.a} \quad & AX \geq (B - FY) \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

onde Y assume os valores fixados pelo supervisor a cada iteração. Para fins de apresentação do subproblema, pela já familiaridade com a forma das restrições, a formulação colocada é a do primal acima. Para fins de solução, o primal foi transformado no dual, sem muita dificuldade.

A matriz A acima, é composta de T (períodos de planejamento) submatrizes independentes que vão originar T problemas menores. As restrições dos problemas menores são semelhantes às inequações (33)-(43) do capítulo anterior, diferindo apenas em três aspectos:

1. a soma das variáveis $EB1_{vt}$ e $EB2_{vt}$, na inequação (35), será substituída pela variável EKB_{vt} uma vez que o custo de expansão de capacidade de beneficiamento será considerado linear;
2. as variáveis Y (RES_{jt} , $EM1_{jt}$, $EM2_{jt}$ e EKB_{vt}) são na verdade constantes para a solução do subproblema e serão colocadas a direita dos sinais das inequações;

3. a restrição que garante a mistura do carvão metalúrgico nacional e importado pode ser representada apenas pela inequação (42) uma vez que o custo final do carvão metalúrgico nacional revelou-se, no estudo de Modiano e Tourinho [MODIANO & TOURINHO, 1982], 36% mais caro que o importado. Portanto, basta que $CTR_{sit} \geq \underline{IM} CPU_{qikt}$.

As restrições para cada um dos T problemas menores tomam a seguinte forma final:

$$\bullet \quad -(\underline{CNB}_{jt} + \sum_i \underline{CBN}_{jvit}) / \underline{IRE}_j \geq - \underline{RES}_{jt} \quad \forall j,t \quad (1)$$

$$\bullet \quad -(\underline{CNB}_{jt} + \sum_i \underline{CBN}_{jvit}) / \underline{PCV}_j \geq -\underline{KIM}_j - \sum_{a=1}^t (\underline{EM1}_{at} + \underline{EM2}_{at}) \quad \forall j,t \quad (2)$$

$$\bullet \quad - \sum_{(ij) \in Iv} \underline{CBN}_{jvit} \geq -\underline{KIB} - \sum_{a=1}^t \underline{EKB}_{vt} \quad \forall v,t \quad (3)$$

$$\bullet \quad \underline{LAV}_{vit} - \underline{RND}_{ji} \underline{CBN}_{jvit} + \sum_{(rj) \in R} ((1 - \underline{RND}_{ji}) \underline{CBN}_{jvit}) \geq 0 \quad \forall v,i,t \quad (4)$$

$$\bullet \quad -\underline{LAV}_{vit} + \underline{RND}_{ji} \underline{CBN}_{jvit} - \sum_{(rj) \in R} ((1 - \underline{RND}_{ji}) \underline{CBN}_{jvit}) \geq 0 \quad \forall v,i,t \quad (5)$$

$$\bullet \quad \sum_{v \in L} \underline{LAV}_{vit} + \sum_{j \in J} \underline{CNB}_{jt} + \sum_{s \in I} \underline{CTR}_{sit} - \sum_{s \in E} \underline{CTR}_{sit} - \sum_k \underline{CPU}_{qikt} \geq 0 \quad \forall q,i,t \quad (6)$$

$$\bullet \quad - \sum_{(is) \in Pp} \underline{CTR}_{sit} \geq - \underline{KP}_{pt} \quad \forall p,t \quad (7)$$

$$\bullet \quad \underline{CPU}_{qikt} \geq \underline{DTON}_{qkit} \quad \forall q,k,i,t \quad (8)$$

$$\bullet \quad -\underline{CTR}_{sit} + \underline{IM} \underline{CPU}_{qikt} \geq 0 \quad (s,q) \in Q, \forall t \quad (9)$$

$$\bullet \quad \underline{EF}_k (\sum_{i \in Uc} \underline{CPU}_{qikt} \underline{PCA}_i) \geq \sum_{c=1}^C \underline{DENE}_{qkct} \quad \forall q,k,c,t \quad (10)$$

$$\bullet \quad \underline{CNB}_{jt}, \underline{CBN}_{jvit}, \underline{LAV}_{vit}, \underline{CTR}_{sit}, \underline{CPU}_{qikt} \geq 0 \quad \forall j,v,i,s,q,k,t \quad (11)$$

A função objetivo envolve as variáveis CNB_{jt} , CBN_{jvit} , LAV_{vit} e CTR_{sit} e à variável CPU_{qikt} , que é apenas uma variável auxiliar, será atribuído custo zero. Sua forma final fica sendo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \underline{FD}_t \\ & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 (\underline{COM}_j + \underline{CTMC}_j) CNB_{jt} \\ & + \sum_{j=1}^4 (\underline{COM}_j + \underline{CTML}_v) CBN_{jvit} \\ & + \sum_{v=1}^4 (\underline{COB}_v + \underline{CTL}_v) \sum_{i=1}^9 LAV_{vit} \\ & + \sum_{s \in RM} (\underline{CTCP}_s + \underline{CTCC}_s + 2 \underline{COP}_p + \underline{CTPC}_s) \sum_{i=1}^9 CTR_{sit} \\ & + \sum_{s \in RF} (\underline{CTCC}_s) \sum_{i=1}^9 CTR_{sit} \\ & + \sum_{s \in RE} (\underline{CTCC}_s + \underline{COP}_p) \sum_{i=1}^9 CTR_{sit} \end{aligned} \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

O valor \underline{FD}_t é o fator de desconto que transporta todos os custos para o valor presente, período zero:

$$\underline{FD}_t = (1 + \text{TAXA DE JUROS})^{-t}$$

onde utilizou-se a taxa de juros de 10% ao ano. As parcelas referentes às variáveis CTR_{sit} foram subdivididas em rotas marítimas (RM), rotas ferroviárias (RF) e rotas do exterior (RE), por causa do custo operacional dos portos que verificam-se de forma diferente nas três.

Aos custos dos transportes intra-regionais (\underline{CTMC}_j , \underline{CTML}_v e \underline{CTL}_v) foram acrescentados os custos operacionais de mineração e beneficiamento.

O valor das variáveis exógenas (elementos sublinhados nas restrições e na função objetiva) já foram todos apresentados nos parágrafos anteriores, quando tratou-se dos setores de mineração, beneficiamento, utilização e transportes. A variável \underline{DTON}_{qkit} na inequação (8), refere-se à demanda de carvão metalúrgico e \underline{DENE}_{qkct} na inequação (10), à demanda energética de carvão vapor. Ao elemento \underline{IM} , na inequação (9) atribuiu-se o valor 0,80 que externa a percentagem de 80% de carvão importado na mistura do metalúrgico.

A dimensão final de cada um dos T problemas menores é de 153 restrições por 227 variáveis. O primal todo, no caso de cinco períodos de planejamento fica com 765 restrições e 1.135 variáveis. Desta forma, a cada iteração de Benders deverão ser resolvidos cinco problemas lineares de 227 restrições e 153 variáveis, a partir de uma base viável da iteração anterior, em que a única alteração foram os custos de apenas 12 variáveis. A Tabela 17 detalha as dimensões de cada problema primal menor, mostrando os números por variáveis e por restrições.

Uma característica importante e desejável que resultou da formulação da matriz A são que todos seus elementos não nulos tem valores próximos a unidade. Os maiores valores tem módulos menores que 10. Isto minimiza problemas de precisão na solução dos modelos [LAND & POWELL, 1973].

O problema superior, numa iteração qualquer do algoritmo, tem a seguinte forma (veja também o problema MP2 da Tabela 4):

Tabela 17: Dimensões de um Bloco do Dual do Subproblema.

-----		-----	
VARIÁVEIS	227	RESTRIÇÕES	153
-----		-----	
CNB	5	MR Reservas	4
CBN	21	MP Produção mineração	4
LAV	29	BP Produção benefic.	4
CTR	69	LP Beneficiamento (2x29)	58
CPU	103	EQ Equilíbrio	44
		PT Capacid. dos portos	6
		RM Mistura metalurgica	3
		UM Demanda carv. metal.	3
		UV Demanda energética	27
-----		-----	

$$\min Z$$

$$\text{s.a } Z \geq CY + (B-FY)'Pi, \quad i \in I1 \quad (13)$$

$$(B-FY) Ri \leq 0, \quad i \in I2 \quad (14)$$

$$Y \in S \quad (15)$$

As variáveis Y são as variáveis RES_{jt} , $EM1_{jt}$, $EM2_{jt}$, EKB_{vt} , EKM_{jt} , EXM_{jt} , IMM_{jt} e IMB_{vt} já apresentados e C representa o valor de custos delas. Incluindo a variável Z , perfazem um total de 131 variáveis das quais 50 são binárias. Ao custo das reservas parciais (RES_{jt}) atribuíram-se um valor muito pequeno, de forma a não alterar o valor de Z , para que seus valores assumam o estritamente requerido em cada situação e não valores com folga e às variáveis auxiliares EKM_{jt} atribuiu-se valores nulos. O custo das variáveis $EM1_{jt}$ e $EM2_{jt}$, os dois segmentos da linearização, é o produto do custo variável de expansão (item 8 da Tabela 7) pela taxa de inclinação do segmento da reta (item

11 e 12 da mesma figura). O custo das variáveis EXM_{jt} representam o investimento inicial na expansão das jazidas e IMM_{jt} o investimento inicial de implantação do Leão II (itens 7 e 13 da Tabela 7); o custo de IMB_{vt} , implantação do lavador de Candiota, está no item 4 da Tabela 10

As restrições (13) e (14) são adicionadas ao problema durante as iterações de Benders. Quando a solução do subproblema é ótima adiciona-se uma do tipo (13); quando é ilimitada, pode ser uma do tipo (13) e até cinco do tipo (14). O vetor (B-FY), o custo do subproblema dual ou o requisito do primal, já apresentado, tem 765 elementos, 153 para cada um dos cinco anos. O valor FY tem somente 12 elementos diferentes de zero em cada ano e B tem 44 (veja Tabela 5). Esta esparsidade será levada em conta na implantação computacional. Os elementos não nulos de B representam as capacidades iniciais de mineração e beneficiamento de cada jazida e lavador, a capacidade dos portos e as demandas do carvão metalúrgico e energéticos.

O conjunto S irá restringir as variações de Y para que sejam considerados a exaustão das jazidas, os investimentos iniciais em expansões e implantações e a linearização por partés. As restrições tomam o seguinte aspecto final:

$$\bullet \quad \sum_{t=1}^5 \text{RES}_{jt} \leq \text{RESTOT}_j \quad \forall j \quad (16)$$

$$\bullet \quad \sum_{a=1}^t \text{BIG IMM}_{at} - \text{EM1}_{jt} \geq 0 \quad \forall t, j=2 \quad (17)$$

$$\bullet \quad \sum_{a=1}^t \text{BIG IMB}_{at} - \text{EKB}_{vt} \geq 0 \quad \forall t, v=3 \quad (18)$$

$$\bullet \quad \text{BIG EXM}_{jt} - \text{EM1}_{jt} \geq 0 \quad \forall j,t \quad (19)$$

$$\bullet \quad \text{D1}_j \text{WKM}_{jt} - \text{EM1}_{jt} \leq 0 \quad \forall j,t \quad (20)$$

$$\bullet \quad \text{EM1}_{jt} \leq \text{D1}_j \quad \forall j,t \quad (21)$$

$$\bullet \quad (\text{D2}_j - \text{D1}_j) \text{WKM}_{jt} - \text{EM2}_{jt} \geq 0 \quad \forall j,t \quad (22)$$

$$\bullet \quad \text{RES}_{jt} \leq \text{LSRES}_{jt} \quad \forall j,t \quad (23)$$

O valor das variáveis RESTOT_j , D1_j e D2_j estão mostradas na Tabela 7. Ao valor de LSRES_{jt} , limite superior das reservas parciais, atribuiu-se os mesmos valores de RESTOT_j . A variável BIG , que deveria representar um valor bastante grande, esta sendo utilizada também para limitar as variáveis EM1_{jt} e EKB_{vt} portanto, foi-lhes atribuídos valores que representam os limites físicos do EM1_{jt} e EKB_{vt}

As restrições do conjunto S, desconsiderando a (21) e (23) que podem ser formuladas como limites superiores à variáveis, perfazem um total de 74 restrições.

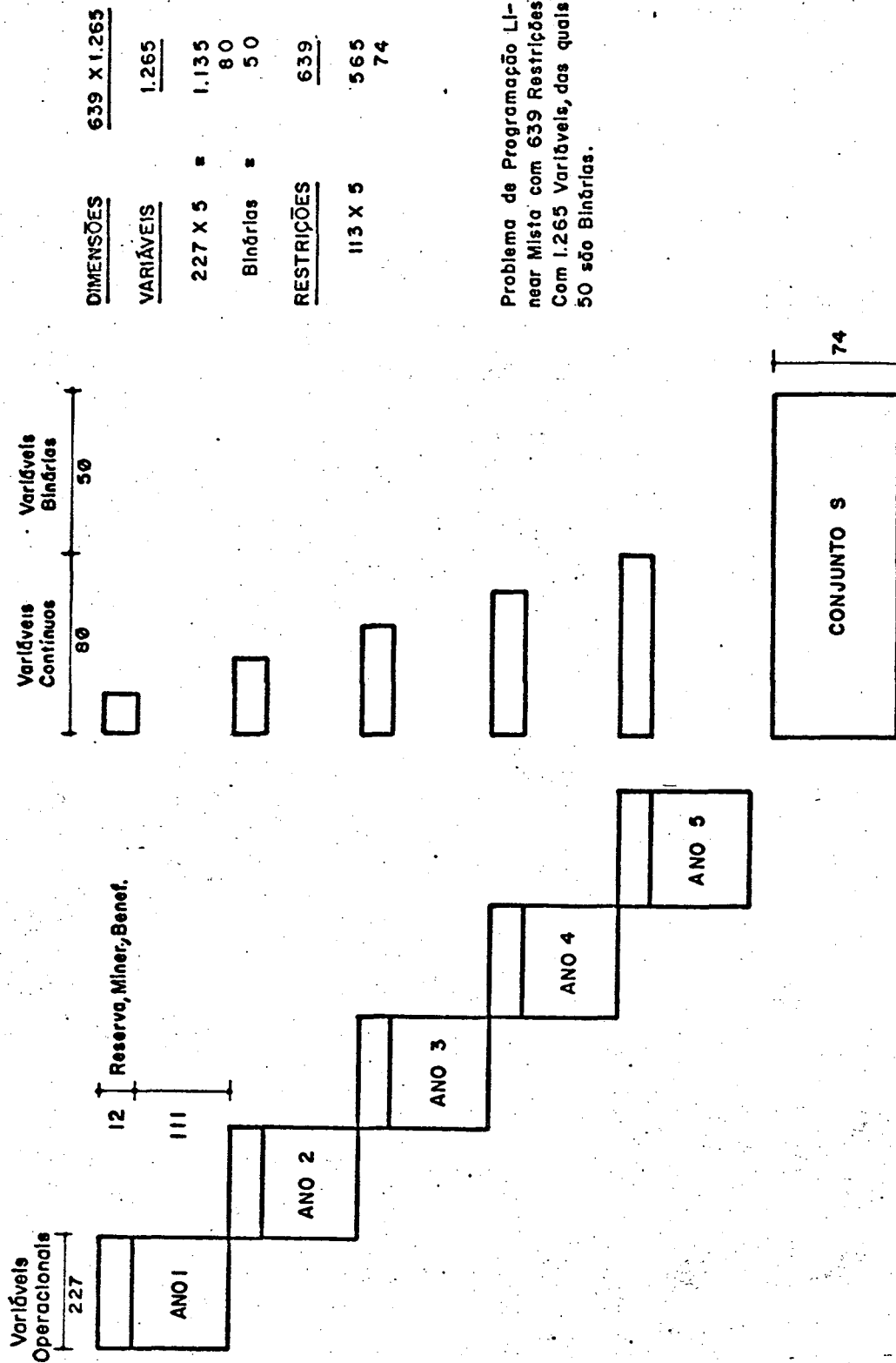
Formulação Própria à Solução por "Branch and Bound"

Esta formulação do problema difere muito pouco da apresentada anteriormente. As restrições não necessitam ser somente do tipo maior ou igual, dispensando que todas as igualdades sejam reformuladas, e pode-se eliminar uma restrição desnecessária que fora colocada na formulação por Benders: é a equação de continuidade para o carvão tipo 8 em Santa Catarina, que é uma parcela afundada do beneficiamento, não é exportada para outros estados e também não é usada em Santa Catarina. Com estas duas diferenças, a matriz A das restrições operacionais para um ano passa de 153 restrições para 123 e o número das variáveis permanece igual a 227. O demais elementos permanecem idênticos conduzindo a um problema de programação linear mista de 639 restrições com 1.265 variáveis, das quais 50 são binárias. A Figura 21 mostra a estrutura do problema segundo esta formulação.

5.1.3 Implantação dos Problemas

Alguns cuidados foram tomados para minimizar erros na formulação dos problemas e na transcrição de dados e índices de variáveis, segundo a entrada requerida pelos programas de computador.

A maioria dos registros de entrada para os programas de computador foram gerados por programas auxiliares construídos especialmente para o trabalho. Isto garantiu que não houvesse erros nos índices de variáveis e que as estruturas dos cinco anos fossem exatamente similares. Também facilitou a geração de



Problema de Programação Linear Mista com 639 Restrições. Com 1.265 Variáveis, das quais 50 são Binárias.

Figura 21. Estrutura do Protótipo por Inteiro

novas massas de dados após a descoberta de erros ou para a criação de novas alternativas.

Criou-se outro programa auxiliar para emitir a estrutura da matriz A, tanto do problema decomposto quanto do inteiro, em forma de elementos não nulos. Todos os elementos foram impressos de forma compacta para ter-se uma visão global e codificados: P - número positivo; N - número negativo; - unidade positiva; e - - unidade negativa. Isto serviu para ter-se convicção da estrutura das restrições e encontrar alguns erros.

Um último cuidado foi a solução independente de cada um do cinco problemas menores do subproblema dual, com os resultados interpretados conforme mostrado na Tabela 18. Isto permitiu verificar a realidade do modelo: se as equações de continuidade do sistema estavam sendo verificadas; se as produções não excediam as capacidades; criar soluções inviáveis e alternativas, estrangulando o fluxo nos postos; etc.. Também serviu para rodar a primeira vez o simplex do Land e Powell na instalação.

5.2 ALGORITMOS COMPUTACIONAIS

A metodologia deste trabalho requer a solução do estudo de caso através do algoritmo "Branch and Bound" e, do mesmo problema, decomposto, através do algoritmo de Benders. Benders, por sua vez, necessita de um algoritmo de programação linear para resolver o subproblema e também o "Branch and Bound" para a solução do supervisor. Portanto, vislumbra-se a

necessidade de dois algoritmos básicos, programação linear e "Branch and Bound", bastante comuns e amplamente utilizados.

Calcados na premissa inicial de utilização de programas computacionais de domínio acadêmico, fez-se uso do conjunto de programas para programação matemática desenvolvida por Land e Powell [LAND & POWELL, 1973] como fonte dos algoritmos básicos. Benders porém, foi desenvolvido exclusivamente para este trabalho, a partir dos algoritmos básicos, aproveitando a estrutura peculiar do problema e sem a pretensão de ser de uso genérico.

5.2.1 Algoritmos Básicos

O conjunto de programas desenvolvidos por Land e Powell no início dos anos 70 preencheram um vazio entre os inúmeros códigos acadêmicos existentes, pouco confiáveis e muitas vezes não testados, e os códigos comerciais somente acessíveis por alto preço. Eles foram desenvolvidos visando propiciar um conjunto de programas básicos confiáveis e adaptáveis à pessoas que precisam testar novas idéias no campo de programação matemática, sem a pretensão de serem elegantes ou eficientes mas confiáveis. Uma quantidade suficiente de verificações de precisão, procedimentos de reinversão e regras de término foram implantadas para evitar soluções ambíguas.

O conjunto de programas inclui algoritmos para solução de programação linear, programação quadrática, programação linear com todas as variáveis inteiras, programação

linear com variáveis mistas e programação paramétrica. Foram desenvolvidas em linguagem FORTRAN, são adequados a solução de problemas de médio porte e estão bem documentados em [LAND & POWELL, 1973].

Para complementar as informações a respeito dos algoritmos básicos, segue uma descrição das características principais do simplex e do "Branch and Bound".

Algoritmo Simplex

O algoritmo simplex foi projetado para iniciar a partir de qualquer base, viável ou inviável no primal, viável ou inviável no dual, e seus parâmetros de entrada e saída são passados por áreas comuns de memória de tal forma que ele possa ser usado como sub-rotina em algoritmos mais complexos.

Dada uma solução básica, o programa primeiro toma cada uma das inviabilidades e executa mudanças de base até satisfazê-las (ou até estabelecer que é impossível satisfazê-las) nunca violando qualquer restrição primal anteriormente satisfeita. Alcançada a viabilidade do primal, serão executadas mudanças de base até alcançar a otimalidade (ou até descobrir que a solução é ilimitada). Em resumo, primeiro são satisfeitas as condições de viabilidade do primal e depois as de viabilidade do dual. As mudanças de base seguem a estrutura do simplex revisado.

As variáveis originais do problema são consideradas viáveis quando estiverem entre seus limites inferior e superior e as variáveis de folga deverão ser não negativas quando associadas às restrições do tipo \leq , não positivas no caso de restrições do tipo \geq e zero quando associadas a restrições de igualdade. O programa permite que se estabeleça limites superiores às variáveis, porém, para limites inferiores deve-se reformular o problema original através de uma mudança de variáveis.

Além destes aspectos básicos alguns outros merecem destaque: Base Reduzida, Tolerâncias e Reinversão da Base.

Base Reduzida: A base reduzida permite que problemas de maior porte sejam resolvidas com requisitos de tempo e memória computacional de um problema de menor porte. Numa implementação convencional de um problema com 1000 restrições e 500 variáveis, por exemplo, o algoritmo partiria de uma base de 1000 por 1000 onde as variáveis básicas são as de folga e/ou artificiais. Na implementação de Land e Powell, as variáveis artificiais são dispensáveis e as variáveis de folga (ou excesso) não fazem parte explícita da base. O algoritmo inicia com uma base de 1 por 1 que durante o processo vai sendo aumentada para conter restrições efetivas e também sendo reduzida para eliminar variáveis de folga que já tenham alcançada a viabilidade.

A base reduzida acaba por conter somente as restrições efetivas do problema.

Tolerâncias: Com o propósito de considerar as variações de ordem de grandezas dos coeficientes de cada problema, e impedir que o desempenho e a eficácia do algoritmo sejam comprometidos, uma série de limites de tolerância são empregados ao longo de todo o algoritmo. A elas devem ser atribuídos valores convenientes com a grandeza dos coeficientes da matriz A, dos requisitos B e dos custos C da função objetivo de cada problema em particular.

São dez variáveis com aplicações distintas: BIG, SMALL, TOL(1), ..., TOL(8)

BIG Contém valor grande e representa o infinito

SMALL Contém valor muito pequeno, suficientemente pequeno que uma variável com valor menor possa ser considerada zero sem introduzir qualquer erro.

TOL(1) Testa a viabilidade das variáveis primais básicas junto ao seu nível inferior e superior.

TOL(2) Testa a viabilidade das variáveis de folga de restrições não efetivas

TOL(3) Testa a otimalidade das variáveis duais de restrições efetivas

TOL(4) Testa a otimalidade dos custos marginais das variáveis não básicas

- TOL(5) Testa se determinado pivo deveria ou não ser considerado igual a zero
- TOL(6) Testa o erro relativo das variáveis primais de uma solução, na I-ésima restrição:

$$[B(I) - FOLGA(I) - \sum A(I,J) X(J)] / B(I) \quad (FOLGA = \text{variáveis de folga})$$
- TOL(7) Testa o erro relativo das variáveis duais de uma solução, na J-ésima variável:

$$[C(J) - CSTMRG(J) - \sum Y(I) A(I,J)] / C(J) \quad (Y = \text{variáveis duais; } CSTMRG(J) = \text{custo marginal})$$
- TOL(8) Testa o tamanho do pivo proposto durante o processo de reinversão da base.

Reinversão da Base: Após o algoritmo encontrar solução ótima ou ilimitada, ou concluir que o problema é inviável, ele verifica se a precisão dos resultados encontra-se dentro das tolerâncias impostas. Basicamente são testados as diferenças $YA-C$ para todas as variáveis básicas (Y são as variáveis duais) e $(B-AX)$ menos as variáveis de folga para todas as restrições. Ambos estes valores deveriam ser nulos teoricamente. Se eles forem diferentes de zero além das tolerâncias, o algoritmo efetua uma reinversão da base na tentativa de recuperar a precisão. As imprecisões podem surgir de grande número de iterações em uma mesma base.

A reinversão consiste na reconstrução da base a partir da informação de quais são as variáveis básicas. Parte-se de uma matriz unitária com as dimensões da base anterior e

adiciona-se a ela, através de mudança de base convencional, cada uma das variáveis básicas anteriores. Reconstruída a base, são calculadas, a partir dela, os novos valores das variáveis e função objetivo. Findo o processo de reinversão, o controle volta ao simplex para que seja, se necessário, reestabelecida viabilidade e/ou otimalidade.

O número de reinversões permitida é fornecida como em parâmetro de entrada ao simplex e a necessidade de efetivá-las depende das tolerâncias. Se elas forem muito estreitas haverá necessidade de um grande número de reinversões e talvez nem se consiga solução tão precisa. Por outro lado, se as tolerâncias são grandes as reinversões tornam-se desnecessárias mas pode-se aceitar erros indesejáveis nos resultados.

Dimensões Máximas e Requisitos de Memória: A dimensão máxima de um problema a ser resolvido fica limitada, em princípio, pelas rotinas de entrada de dados. São reservadas apenas três colunas para referenciar índices de variáveis ou restrições, limitando o número de ambos em 999. As mesmas rotinas de entrada de dados do simplex é usada também pelo "Branch and Bound". Como o problema a ser resolvido tem 1.135 variáveis, houve necessidade de alterações para acomodar as novas dimensões.

Os requisitos de memória são fortemente dependentes do tamanho máximo que a base reduzida irá assumir durante o processo. Ela deve poder conter o número máximo de restrições efetivas do problema a ser resolvido. Para 600 restrições efetivas, um número razoável dado que o estudo de caso tem 765 restrições, a base ocupa cerca de 2.800 KBYTES de memória, pois

cada elemento é armazenado com precisão dupla ocupando 8 bytes. É um requisito grande, comparado com o tamanho normal de 896 KBYTES oferecido pela instalação onde foram executados os testes deste trabalho. Os requisitos de memória ainda dependem de parâmetros menos preponderantes como número de variáveis, número de restrições e elementos não nulos na matriz A.

Algoritmo "Branch and Bound"

O algoritmo "Branch and Bound" implementado por Land e Powell é baseado principalmente no original de Land e Doig, de 1960. Abaixo discute-se suas principais etapas.

Uma solução linear contínua é obtida e as variáveis que devem assumir valores discretos são examinadas. Se todas assumem valores discretos a solução é ótima senão, uma delas é escolhida para assumir valor discreto (X_r por exemplo). Os limites superiores à função objetivo, para os valores discretos de X_r acima e abaixo do valor original contínuo, são obtidos de informações do próprio tableau do simplex. Suponha que $X_r = G$ tenha o maior limite. A região viável pode ser particionada nos seguintes conjuntos convexos exclusivos e exaustivos:

- Conjunto A no qual $X_r \leq G-1$;
- Conjunto B no qual $G-1 < X_r < G$;
- Conjunto C no qual $X_r = G$;
- Conjunto D no qual $G < X_r < G+1$;
- Conjunto E no qual $X_r \geq G+1$.

Os conjuntos B e D não podem conter nenhuma solução discreta portanto, são desprezíveis. O conjunto A é dito ramo esquerdo, o C principal e o E ramo direito. O ramo principal será o primeiro a ser examinado. Um novo programa linear é definido com uma restrição adicional $-X_r = G$ e o simplex é chamado a reestabelecer a viabilidade e otimalidade. A situação é a mesma do início a menos da variável com valor discreto fixado. Se a solução ainda não é inteira, novamente seleciona-se uma variável para particionar o conjunto convexo, o nível da árvore de soluções é aumentado em mais um, os novos ramos da esquerda e direita juntamente com seus limites são registrados para uso posterior e o processo segue em diante iterativamente até alcançar um nó terminal (final de um ramo) da árvore.

Existem três tipos de situação onde chega-se a um nó terminal:

1. Solução inteira;
2. Uma solução linear contínua com o valor da função objetivo no mínimo tão baixo quanto a melhor solução já descoberta; e
3. Uma solução de programação linear inviável.

Quando um nó terminal é alcançado, os subconjuntos da região viável que foram negligenciados, a esquerda e a direita do ramo principal, devem ser investigados. Se nenhum é promissor, podem ser excluídos e o nível da árvore reduzido. Caso contrário, o ramo promissor torna-se principal e é explorado.

Se for permitido tempo suficiente o algoritmo acaba voltando ao nível zero mostrando que a solução encontrada é ótima.

Se for imposto um limite de iterações, ao alcançá-lo, o estado atual da árvore é descarregado para um arquivo magnético e o processo é interrompido. Após analisadas as soluções já encontradas, se for julgado conveniente, pode-se reinicializar do ponto de interrupção anterior.

Para resolver o problema do estudo do caso, através do "Branch and Bound", a única alteração necessária no sistema original foi a efetuada nas rotinas de entrada de dados. Já para utilizar o algoritmo como sub-rotina em Benders, foi necessária desenvolvê-lo a partir das sub-rotinas básicas usadas no algoritmo "Branch and Bound". O algoritmo não se apresenta no sistema Land e Powell como uma sub-rotina passando parâmetros de entrada e saída por variáveis comuns e emitindo códigos de retorno que indiquem o estado final da solução; ele busca os dados de entrada diretamente de registros externos (cartão ou fita) e descarrega as saídas na impressora.

5.2.2 Algoritmo de Benders

O algoritmo de Benders foi desenvolvido a partir, basicamente, do simplex e do "Branch and Bound" sugeridas por Land e Powell [LAND & POWELL, 1973], sendo complementado por rotinas programadas exclusivamente para este trabalho e moldadas ao estudo de caso.

O algoritmo foi desenvolvido com a capacidade de reinício, permitindo que sejam executadas algumas iterações, interrompa-se o processo para analisar os resultados alcançados e, se necessário, prossiga-se. Isto é desejável quando trabalha-se com problemas de grande porte e há a geração de limites superior e inferior ao valor da função objetivo. A regra de parada, no caso de Benders, é a proximidade do limite superior e inferior. Fica a critério do analista decidir o grau de otimalidade desejado. Além disso, ao implementar um algoritmo é conveniente, pelo menos no início, que se acompanhe passo a passo seu desempenho e resultados intermediários, garantindo-se seu perfeito funcionamento.

Sob o aspecto de memória computacional, optou-se por um armazenamento dinâmico em memórias auxiliares (discos magnéticos). Numa iteração do algoritmo, para o caso em estudo, é necessário resolver cinco problemas lineares, praticamente idênticos, e um problema linear misto. Guardar todas as informações de cada um dos seis problemas na memória principal simultaneamente, seria abrir mão da vantagem de economia de espaço, característica dos métodos de decomposição. Portanto, reservou-se um espaço na memória principal, capaz de armazenar o maior dos problemas, e mantem-se sempre os seis problemas armazenados em disco magnético. Para resolvê-los, cada um é carregado na memória principal, resolvido e descarregado no disco. A memória principal ficou como área de trabalho.

Foram efetuados testes para avaliar as vantagens, em tempo de processamento, de manter todos os subproblemas na memória principal. Os testes foram conduzidos com um problema

linear das mesmas dimensões do não-linear descrito aqui. O exposto abaixo resume os resultados:

	MEMÓRIA	DISCO
Espaço para execução (KBYTES)	1.528	768
Tamanho do programa (KBYTES)	1.200	531
Tempo para executar 15 iterações de Benders (Segundos)	236	274

O espaço de memória requerido, bastante menor na opção "disco", justificam os apenas 38 segundos a mais no tempo de execução; são apenas 16% a mais. Na instalação onde foram rodados os testes tem a maior partição, normal, de 896 KBYTES; partições maiores podem ser montadas à noite através de solicitação especial.

Aferiu-se também o tempo gasto para carregar do disco e descarregar nele os cinco subproblemas: são gastos 0,67 segundos por interação.

Portanto, não justifica-se realmente o armazenamento na memória.

Estrutura do Programa

O algoritmo consta do programa principal e mais 14 sub-rotinas. Algumas delas foram desenvolvidas totalmente,

outras segundo orientações de módulos desenvolvidos por Land e Powell e outros são sub-rotinas do próprio sistema Land e Powell, com ligeiras alterações. A Tabela 19 relaciona todos os módulos, sua função principal e a origem de desenvolvimento.

As áreas de dados comuns na memória principal ("COMMON"s) são em número de cinco perfazendo um requisito de aproximadamente 460 KBYTES. Boa parte desta necessidade deve-se a matriz inversa do simplex que suporta até 200 restrições efetivas na base: ela ocupa 313 KBYTES e está no bloco de dados do simplex (veja Tabela 20). Esta estrutura suporta problemas com 400 restrições, 70 variáveis inteiras e 10.000 elementos não nulos na matriz A. O conjunto de programas e blocos de dados ocupam um total de 544 KBYTES.

A seguir estão comentadas as características do programa principal e das sub-rotinas mais importantes.

Programa Principal: O programa principal inicializa variáveis e as áreas no disco, para cada problema, conforme parâmetros de entrada. Se vai ser executada a primeira iteração, são inicializados os custos e requisitos de cada subproblema. Após as inicializações, o bloco de dados BENDRS é carregado na memória e a sub-rotina BNDRS é chamada. Ao final das iterações, o bloco BENDRS é salvo em disco para uso posterior.

Os parâmetros de entrada do programa principal controlam a execução. Indicam se é uma primeira rodada ou reinício. Fornecem o número de iterações a ser executada, a tolerância para verificação de precisão dos resultados, o número

Tabela 19: Sub-rotinas do Algoritmo de Benders

MÓDULO	FUNÇÃO	ORIGEM
0.MAIN	.Inicia variáveis, carrega e salva áreas no disco e chama a sub-rotina BNDRS	.DESCP ⁽¹⁾
1.BNDRS	.Executa o algoritmo de Benders	.DESCP
2.MP2	.Resolve o problema supervisor	.DESCP
3.SPDUAL	.Resolve os subproblemas	.DESCP
4.MUDAC	.Procede alterações nos subproblemas, devido a mudança nos custos	.DESLP ⁽¹⁾
5.ADDRAY	.Adiciona raios extremos ao supervisor	.DESCP
6.ADDPTO	.Adiciona pontos extremos ao supervisor	.DESCP
7.PRODEX	.Executa o produto externo de dois vetores	.DESCP
8.SAVE	.Carrega do disco a área comum de todos os problemas	.DESCP
9.LOAD	.Salva no disco a área comum de todos os problemas	.DESCP
10.PRTINT	.Faz impressões intermediárias de Benders	.DESCP
11.LP	.Algoritmo Simplex	.ALTLP ⁽¹⁾
12.BB	.Algoritmo "Branch and Bound"	.DESLP
13.IPRINT	.Faz impressões intermediárias do simplex	.ALTLP
14.CHACC	.Verifica a precisão dos resultados	.ALTLP

(¹) DESC - Desenvolvida completamente
 DESLP - Desenv. a partir de sub-rotinas do Land & Powell
 ALTLP - Alterações em sub-rotinas do Land & Powell

de reinversões permitida nas tentativas de recuperação da precisão, número de iterações após o que, deve-se efetuar uma

verificação de precisão, tolerâncias para a solução dos subproblemas e para o supervisor e se deseja-se impressão intermediária ou não. A cada novo reinício todos estes parâmetros podem ser alterados.

Tabela 20: Blocos de Dados do Algoritmo de Benders

BLOCO	FUNÇÃO	TAMANHO (KBYTES)
BRANCO	Dados do simplex	351
BENDRS	Dados de Benders	40
BBB	Dados do "Branch and Bound"	5
AREF	Dados da matriz A	59
DADOS	Parâmetros de controle	0
TOTAL		456

Sub-rotinas BNDRS: A sub-rotina BNDRS é o próprio algoritmo de Benders, já apresentado, com um controle adicional de iterações; são realizadas tantas quantas informadas pelo programa principal. A Figura 22 mostra o fluxograma assinalando as sub-rotinas chamadas por BNDRS (elas estão entre parênteses ao lado dos blocos). A transferência dos blocos de dados do disco para a memória (DM) e da memória para o disco (MD) são feitas dentro da BNDRS para o supervisor e dentro da SPDUAL para os subproblemas. Além dos termos normais mostrados no fluxograma, podem acontecer alguns causados por erros na solução do supervisor ou dos subproblemas (por exemplo, não haver mais espaço para variáveis na base ou, mesmo após o número máximo de reinversões da base, não se conseguir a precisão desejada).

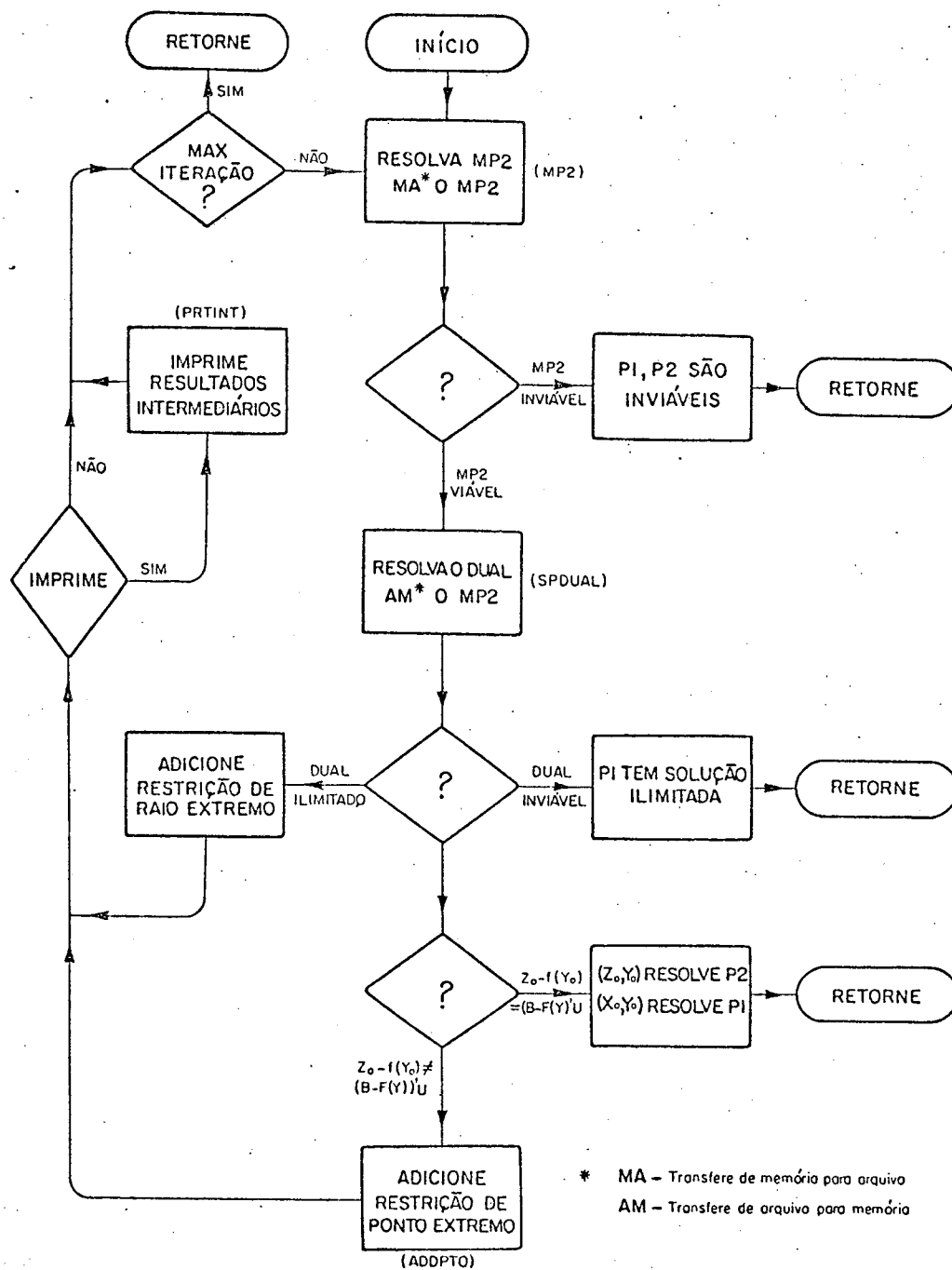


Figura 22. Fluxograma da Sub-rotina BNDRS

Sub-rotina MP2: A sub-rotina MP2 resolve o supervisor através do algoritmo "Branch and Bound". Ela simplesmente chama a sub-rotina BB e atribui valor as variáveis Z0, Y0 e FY0. A sub-rotina BB foi construída a partir de sub-rotinas disponíveis no Land e Powell porque ela não existia na forma adequada, como o simplex em que os parâmetros de entrada e saída são passados por blocos "COMMON's". Foram feitas as inicializações necessárias, impressos resultados intermediários, emitido sinal de conclusão da solução (solução ótima, inviável, e ilimitada ou problema na resolução) e passados os resultados através de bloco de variáveis comuns.

Sub-rotina SPDUAL: A solução dos subproblemas é feita, após a solução do supervisor, pela SPDUAL. Definidos os valores das variáveis Y elas já podem compor os novos custos. Para cada um dos cinco problemas duais repetem-se os seguintes passos:

- Transfere-se o problema do disco para o memória;
- Inicializam-se as variáveis afetadas pela mudança de custo para que se resolva o novo problema a partir da base anterior. (Sub-rotina MUDAC);
- Resolve-se o novo problema através de sub-rotina LP;
- Atribui-se valor ao raio extremo, ponto extremo, variáveis primais e variáveis duais;
- Salva-se o problema no disco para uso na iteração seguinte.

Após resolvidos os cinco problemas define-se o estado da solução do subproblema como um todo: solução inviável, viável ou ilimitada.

Sub-rotina LP: A sub-rotina LP tem uma única diferença com a desenvolvida por Land e Powell: a verificação de precisão e eventual reinversão não é feita sempre ao final de uma solução. Ela é feita somente de tantas em tantas iterações de Benders. O número de iterações é fornecida como parâmetro de entrada no programa principal.

Sub-rotina CHACC: A sub-rotina CHACC, que verifica as precisões, também sofreu pequena alteração para que as tolerâncias nela utilizada pudessem ser fornecidas como parâmetro de entrada do programa principal. Todos os cuidados com tolerâncias são justificáveis, pois como será visto mais tarde, elas desempenharam papel chave no funcionamento do algoritmo.

Sub-rotina MUDAC: A sub-rotina MUDAC foi desenvolvida a partir da sub-rotina PRICE utilizada por Land e Powell em programação quadrática. Seu objetivo é reestabelecer valores das variáveis do simplex que ficam alteradas quando há uma mudança nos custos da função objetivo. Reestabelecidos os valores, o simplex pode ser chamado somente para alcançar a otimalidade novamente, a partir da base anterior à mudança.

Sub-rotina ADDPTO: A sub-rotina ADDPTO é chamada quando há necessidade de adicionar ao supervisor uma restrição do tipo $Z \geq DY + (B - FY)'Pi$ onde Pi é o ponto extremo encontrado na solução

do subproblema. São determinados os coeficientes da variáveis Y , através do produto externo $(B - FY)P_i$ e soma com DY , carregado os coeficientes na matriz A e adicionada a restrição na base do supervisor.

Sub-rotina ADDRAY: A sub-rotina ADDRAY adiciona ao supervisor restrições do tipo $(B - FY)'R_i \leq 0$ onde R_i é o raio extremo encontrado na solução ilimitada do subproblema. Além dos mesmos passos executados na sub-rotina ADDPTO, ao final, se for necessário, a sub-rotina ADDPTO é chamada para adicionar a restrição do ponto extremo correspondente ao raio extremo.

Validação do Algoritmo

Para validação do algoritmo, montou-se um problema com as mesmas características do problema não-linear, já descrito neste capítulo, com duas diferenças: o primal dos blocos periódicos de operação do sistema foi reduzido de 153 restrições e 227 variáveis para apenas 13 restrições e 20 variáveis e o supervisor foi transformado em linear, ficando com 60 variáveis contínuas.

A preocupação maior na validação foi com a eficácia do algoritmo e não a eficiência. A Figura 23 mostra os resultados alcançados na solução por Benders e pelo simplex. A diferença de tempo é enorme: 160 segundos contra 2 segundos. Entretanto o valor da função objetivo alcançado por ambas é o mesmo: 881.

Apesar da baixa eficiência neste caso - o problema é muito pequeno - constatou-se que o algoritmo funciona. Resta testar problemas maiores para avaliar também a eficiência.

5.3 OBTENÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Alguns resultados parciais já foram obtidos e apresentados ao longo dos capítulos anteriores. Aqui, agora, a questão volta-se ao desempenho dos algoritmos de Benders e de "Branch and Bound", quando utilizados na solução do estudo de caso.

5.3.1 Resultados Obtidos

Benders e "Branch and Bound" foram aplicados a três versões do estudo de caso: uma que resulta em solução ótima; outra, solução inviável; e, uma terceira, solução ilimitada. A primeira é o caso original, com os dados reais levantados. A situação de inviabilidade, foi criada atribuindo-se capacidade nula aos portos, em todos os cinco períodos e o caso de solução ilimitada, gerou-se atribuindo-se custos negativos ao carvão bruto produzido nas cinco minas do sistema, no primeiro período.

A inviabilidade é detetada rapidamente pelos dois algoritmos. Benders, na primeira iteração, adiciona cinco restrições, correspondente a cinco raios extremos, com todos os coeficientes nulos. Na segunda iteração, ao tentar resolver o supervisor, resulta em solução inviável. O tempo gasto nas duas

VALOR ÓTIMO DA FUNÇÃO OBJETIVO : 881

Método	Iterações	Tempo
Simplex	30	2"
Benders	74	160"

+ LIMITE SUPERIOR
 ● LIMITE INFERIOR

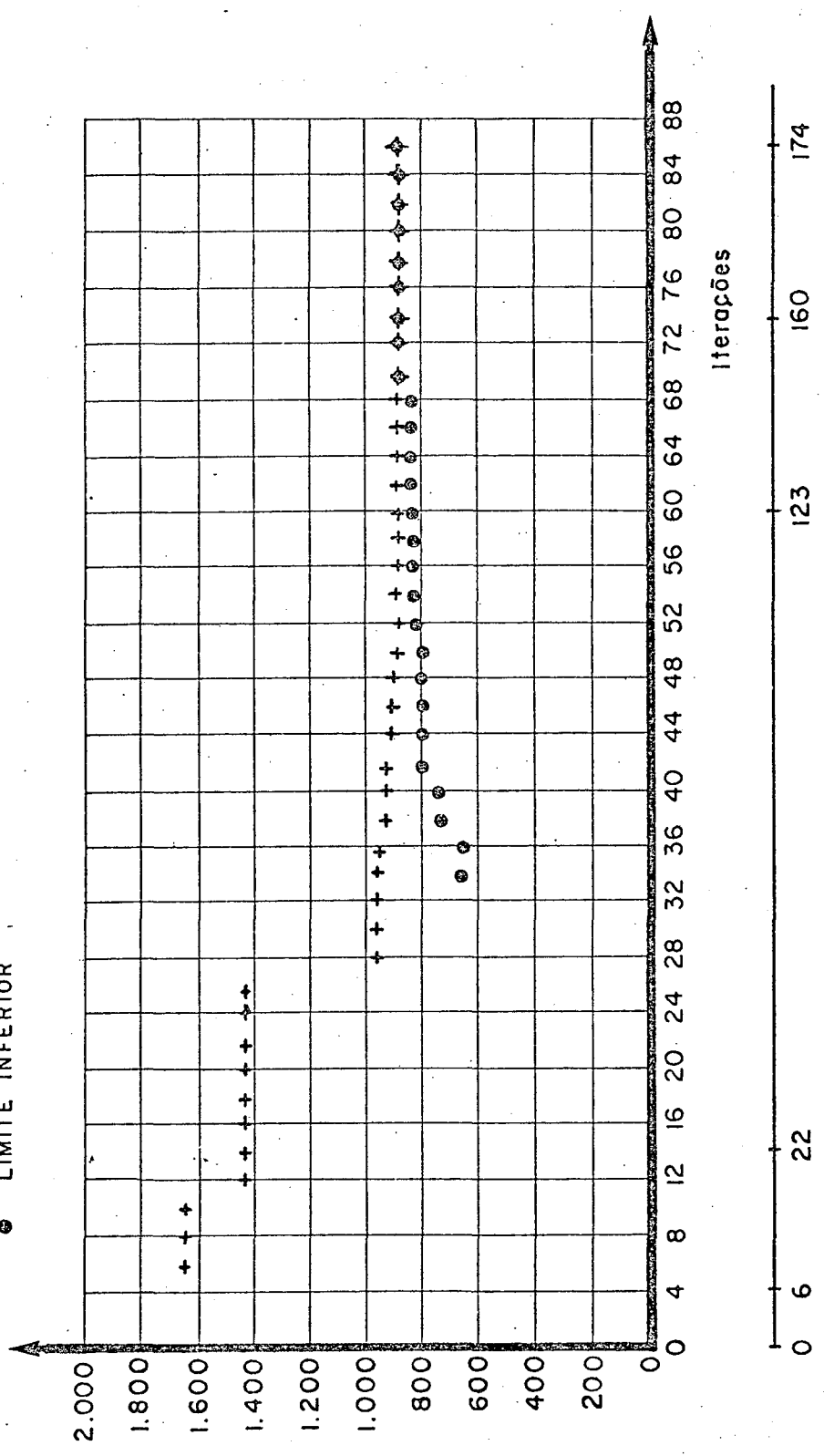


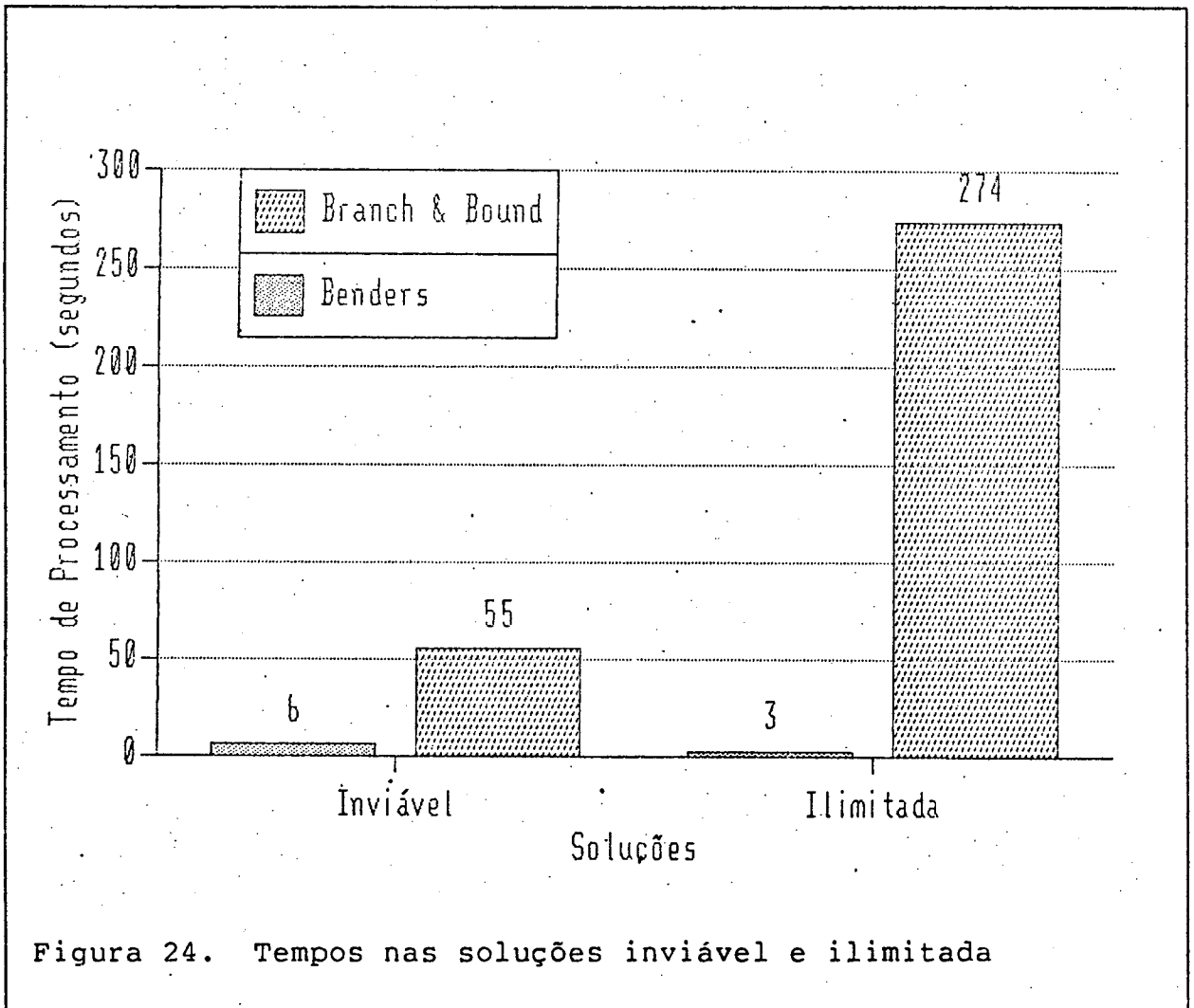
Figura 23. Solução do Pequeno Linear por Benders.

iterações foi 6 segundos (tempo de "CPU"). O algoritmo "Branch and Bound" gastou 55 segundos para detetar a inviabilidade.

No caso de solução ilimitada a diferença de tempo é bastante grande. Benders deteta a solução ilimitada logo na primeira iteração, quando obtém solução inviável para o primeiro subproblema, gastando 3 segundos. "Branch and Bound" só vai detetar a solução ilimitada após toda a fase de viabilidade, gastando 274 segundos. O algoritmo simplex do sistema Land e Powell pesquisa a viabilidade do primal e só então percebe a inviabilidade do dual. A Figura 24 resume os tempos de processamentos das situações acima.

No caso de solução ótima, nenhum dos algoritmos chega a provar a otimalidade em tempos razoáveis. Benders, na 20ª iteração, aos 260 segundos de processamento, encontra uma solução viável com um custo (valor da função objetivo) de $5.088 \cdot 10^6$ US\$. Na iteração seguinte, ele mostra que a solução ótima está acima de $4.630 \cdot 10^6$ US\$ e na de 28ª, aos 482 segundos, que está acima de $4.681 \cdot 10^6$ US\$. A partir daí, não se obtém nada melhor. A Tabela 21 mostra os resultados em detalhes ao longo de 35 iterações, a Figura 25 mostra um gráfico com a evolução dos limites inferior e superior da função objetivo e a Figura 26, o tempo de processamento acumulado, até cada iteração, gasto na solução do subproblema e do supervisor.

Para a solução do problema através do "Branch and Bound", limitou-se o tempo de processamento em 1.200 segundos. Neste tempo, ele conseguiu duas soluções inteiras com custos de $5.005 \cdot 10^6$ US\$. O valor mínimo da função objetivo, expressa pelo



valor da solução contínua, é de $4.942 \cdot 10^6$ US\$. A Tabela 22 mostra os resultados alcançados por "Branch and Bound" com maiores detalhes.

Apesar de as duas soluções terem custos praticamente iguais, elas diferem nas decisões de expansão de capacidade de mineração. As expansões e folgas de capacidade em cada período e jazida estão mostradas na Tabela 23

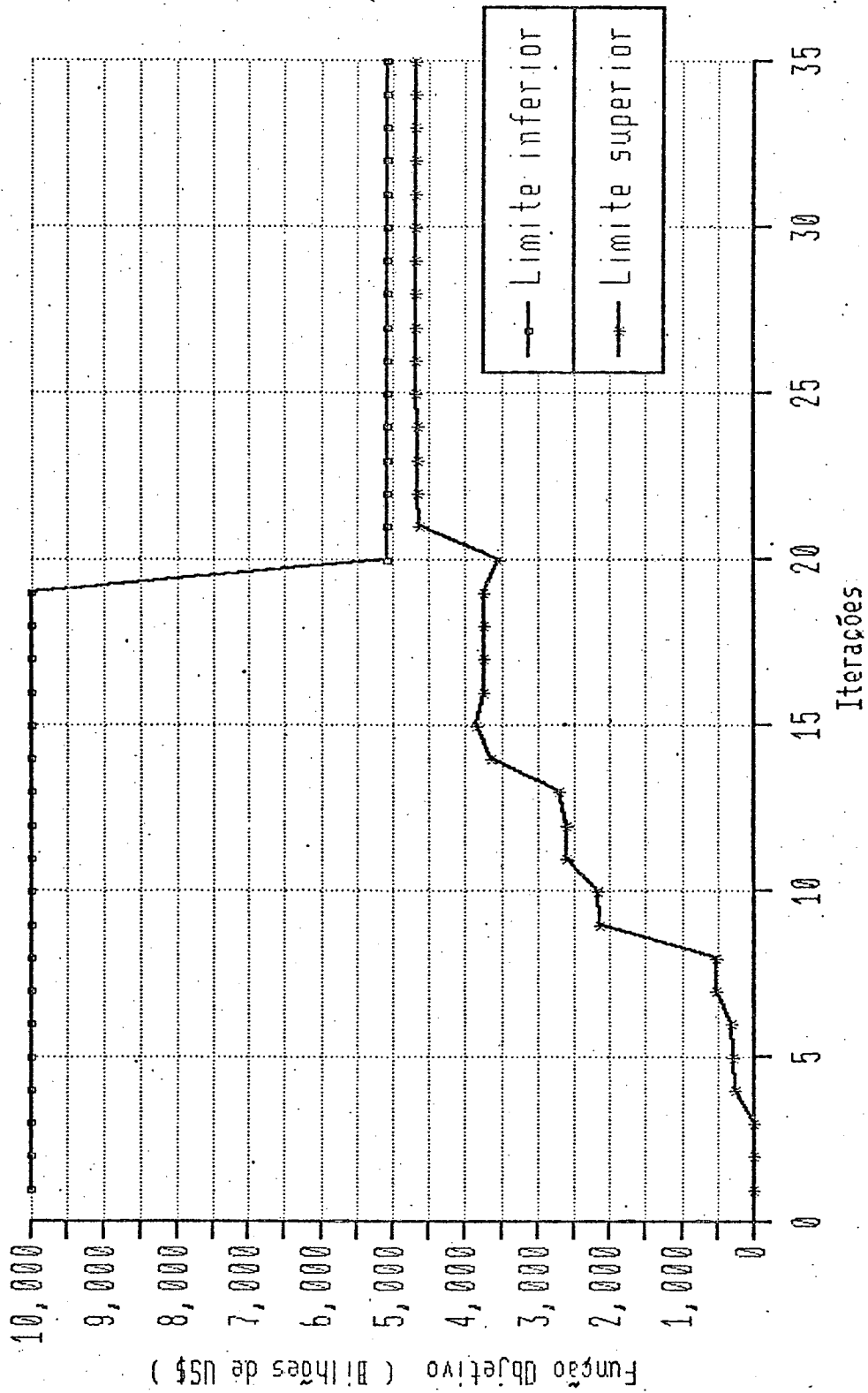


Figura 25. Limites ao Valor da Função Objetivo (Benders).

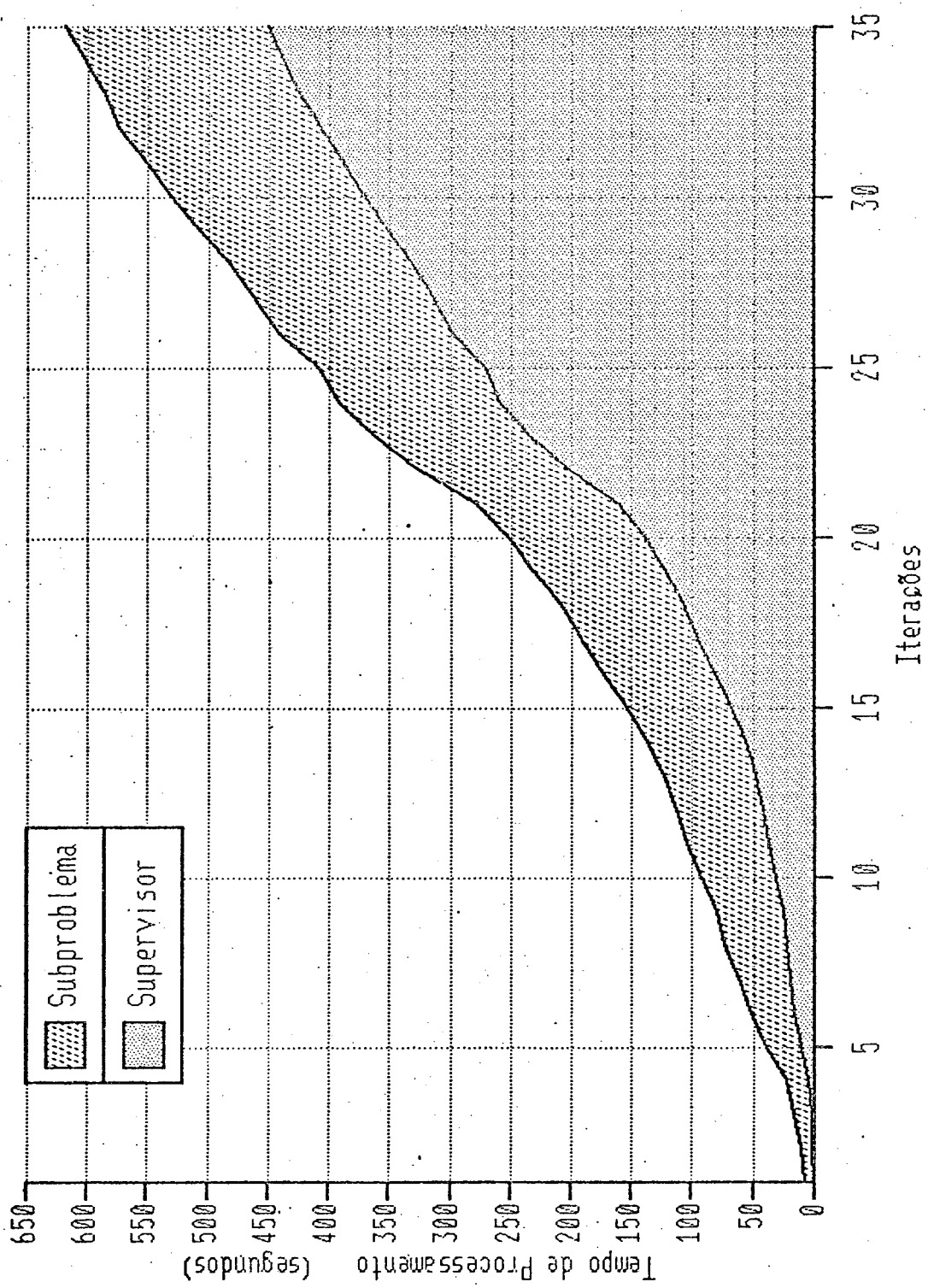


Figura 26. Tempo Acumulado de Processamento (Benders).

Tabela 21: Resultados da solução por Benders.

ITERAÇÃO	LIMITES INFERIOR	(10 ⁶ US\$) SUPERIOR	TEMPO DE CPU ACUMUL. (SEG.)
1	0	INF	8
2	0	INF	12
3	0	INF	17
4	272	INF	25
5	282	INF	41
6	302	INF	54
7	510	INF	65
8	521	INF	76
9	2132	INF	83
10	2169	INF	95
11	2592	INF	107
12	2592	INF	118
13	2705	INF	129
14	3650	INF	143
15	3869	INF	160
16	3748	INF	180
17	3750	INF	199
18	3752	INF	217
19	3752	INF	239
20	3552	5088	260
21	4630	5088	289
22	4662	5088	346
23	4668	5088	374
24	4668	5088	405
25	4694	5088	421
26	4679	5088	440
27	4679	5088	462
28	4681	5088	482
29	4681	5088	509
30	4681	5088	534
31	4681	5088	557
32	4681	5088	580
33	4681	5088	604
34	4681	5088	622
35	4681	5088	640

Tabela 22: Resultados da Solução por Branch and Bound.

ITENS	SOLUÇÕES	CONTÍNUA	1ª INTEIRA	2ª INTERIRA
FUN. OBJETIVO (10 ⁶ US\$)		4942	5005	5005
ITERAÇÕES		1038	1156	2056
TEMPO DE CPU (SEG)		239	297	738

5.3.2 Análise dos Resultados

Para que se conclua a respeito da melhor adequacidade de um ou outro algoritmo, quando empregados para resolver o problema de planejamento da oferta de carvão mineral, serão analisados os seguintes aspectos:

- Utilização de memória computacional
- Qualidade da Solução
- Controle de Precisão
- Facilidade de Utilização
- Tempo de Processamento
- Generalidade de Uso
- Sensibilidade em Relação às Tolerâncias

Utilização de Memória Computacional: Os programas computacionais dos algoritmos de Benders e "Branch and Bound" ocupam 544 e 3023 KBYTES, respectivamente. Para executá-los, são necessárias quantidades adicionais de memória para acessar os arquivos ("buffers"), elevando os requisitos a 616 e 3036 KBYTES.

Tabela 23: Expansões e Folgas de Capacidade de Mineração

-----	Jazidas					
Minas	-----	1981	1982	1983	1984	1985

Expansões de CapacidadeBranch and Bound

Charqueadas	0	0	0	0	0
Leao II	3510	3510	0	772	0
Candiota	0	6172	0	0	0
Santa Catarina	1948	0	18679	0	17877

Benders

Charqueadas	0	0	0	0	0
Leao II	3495	3495	3510	3510	3510
Candiota	0	0	0	0	0
Santa Catarina	22059	7548	4410	4410	0

Folgas de CapacidadeBranch and Bound

Charqueadas	0	1000	1000	1000	1000
Leao II	0	0	0	0	0
Candiota	882	0	0	0	0
Santa Catarina	90	0	8009	0	0

Benders

Charqueadas	967	1000	1000	1000	1000
Leao II	0	1	2	1	8
Candiota	0	0	0	0	0
Santa Catarina	20769	20244	20680	23047	10831

Obs.: Valores em 10^3 ton.

O espaço de memória normalmente disponível, na instalação onde foram executados os testes para este trabalho, é

de no máximo 896 KBYTES. Para utilização de espaços maiores, há necessidade de uma solicitação prévia para utilização a noite ou dias não úteis. Esta restrição dificulta a execução do algoritmo de "Branch and Bound".

Outro aspecto importante, diz respeito ao impacto que causa aos requisitos de memória o aumento do número de períodos do horizonte de planejamento. Os dados acima são para o caso de cinco períodos. Para esta situação, o programa de "Branch and Bound" foi implementado com uma base capaz de suportar até 600 restrições efetivas - chegou a 582 nas execuções - a qual, só ela, demanda 2830 KBYTES. Se o número de períodos fosse dobrado, é de se esperar, no mínimo, 1000 restrições efetivas o que iria requerer 8000 KBYTES. Isto é praticamente inviável. Cabe lembrar que estes requisitos são baseados na utilização do sistema de Land e Powell. O programa de Benders já não teria restrições alguma, uma vez que os blocos de cada período são armazenados em arquivos magnéticos (memória auxiliar), apenas dobraria o número de arquivos, o que não traz impacto algum.

Qualidade da solução: Um primeiro aspecto, relaciona-se ao valor da função objetivo alcançado por ambos os algoritmos num determinado tempo de processamento. O algoritmo de "Branch and Bound", para conseguir uma solução inteira viável de $5005 \cdot 10^6$ US\$, gastou 297 segundo. Benders, para chegar a uma solução inteira viável de 5088, gastou 260 segundos, com a informação de um limite inferior para o valor da função objetivo de 3552; na iteração seguinte, com mais 39 segundos, chegou a um limite inferior de 4630. A partir destes tempos, nenhum dos dois apresenta resultado significativamente melhor. Portanto, pode-se

constatar que "Branch and Bound" forneceu uma solução ligeiramente melhor, num tempo superior ao de Benders.

É importante notar, que o esforço computacional dispendido por Benders na solução de um problema muito pequeno, como o linear referido no sub-capítulo anterior (veja Figura 23), é enorme se comparado com a solução sem decomposição. Num problema maior, como o estudo de caso, o esforço é praticamente igual. Isto vem ratificar a observação de Lasdon [LASDON, 1970] de que a eficiência de Benders aumenta a medida que os problemas tornam-se mais difíceis.

Outro aspecto, diz respeito as decisões de expansão de capacidade de mineração (veja Tabela 23). A solução apresentada por Benders, tem uma folga de capacidade grande na jazida de Santa Catarina. Na iteração 3, toda a capacidade de mineração de Santa Catarina, em todos os períodos, são utilizadas. O lucro marginal para a expansão é alto, maior que o custo de expansão, levando o supervisor a expandir ao máximo as capacidades de mineração, visto que, neste ponto ainda, não há restrições que forcem uma expansão menor; elas serão adicionadas no decorrer do processo. São restrições que forçam a otimalidade.

Controle da Precisão: Ao final da solução de um problema de programação linear, a sub-rotina LP faz uma verificação da precisão e, se necessário, uma reinversão da base para tentar eliminar os eventuais erros.

A reinversão da base para o problema de um período do subproblema leva 4 segundos, pois a base é da ordem de 85×85 .

Já no "Branch and Bound", para uma base de 580 x 580, o tempo de reinversão ultrapassa 600 segundos. Isto impede que se faça controle de precisão utilizando "Branch and Bound".

Na solução através de Benders, a precisão foi controlada de 5 em 5 iterações, reinvertendo-se a base quando os erros fossem maiores que cinco vezes as tolerâncias utilizadas para efeito de cálculos do simplex. Na solução do estudo de caso, uma única reinversão ocorreu na iteração 30, na base do supervisor.

Facilidade de Utilização: A principal conveniência da utilização de Benders, é a possibilidade do acompanhamento da execução, a qualquer momento, através de pequenos passos (cinco em cinco iterações). Outra facilidade, é execução, em separado, do problema de operação de cada ano; seja para validação dos dados e de formulação, ou para teste de alternativas de operação.

Tempo de Processamento: Na solução através de Benders, o tempo gasto na solução do subproblema mantém-se mais ou menos constante a cada iteração, em média 5 segundos, e na solução do supervisor, cresce devido ao aumento constante do número de restrições; a cada iteração, adiciona-se ao supervisor, em média, 5 restrições. No estudo de caso, na 20ª iteração existiam 169 restrições, das quais apenas 53 eram efetivas. A Figura 27 mostra os tempos de CPU gastos em cada iteração, pelo subproblema e pelo supervisor.

Ao alcançar a solução viável, na 20ª iteração, o tempo acumulado na solução do subproblema representa 45% do total (subproblema mais supervisor) e na 35ª iteração, 29%. Isto,

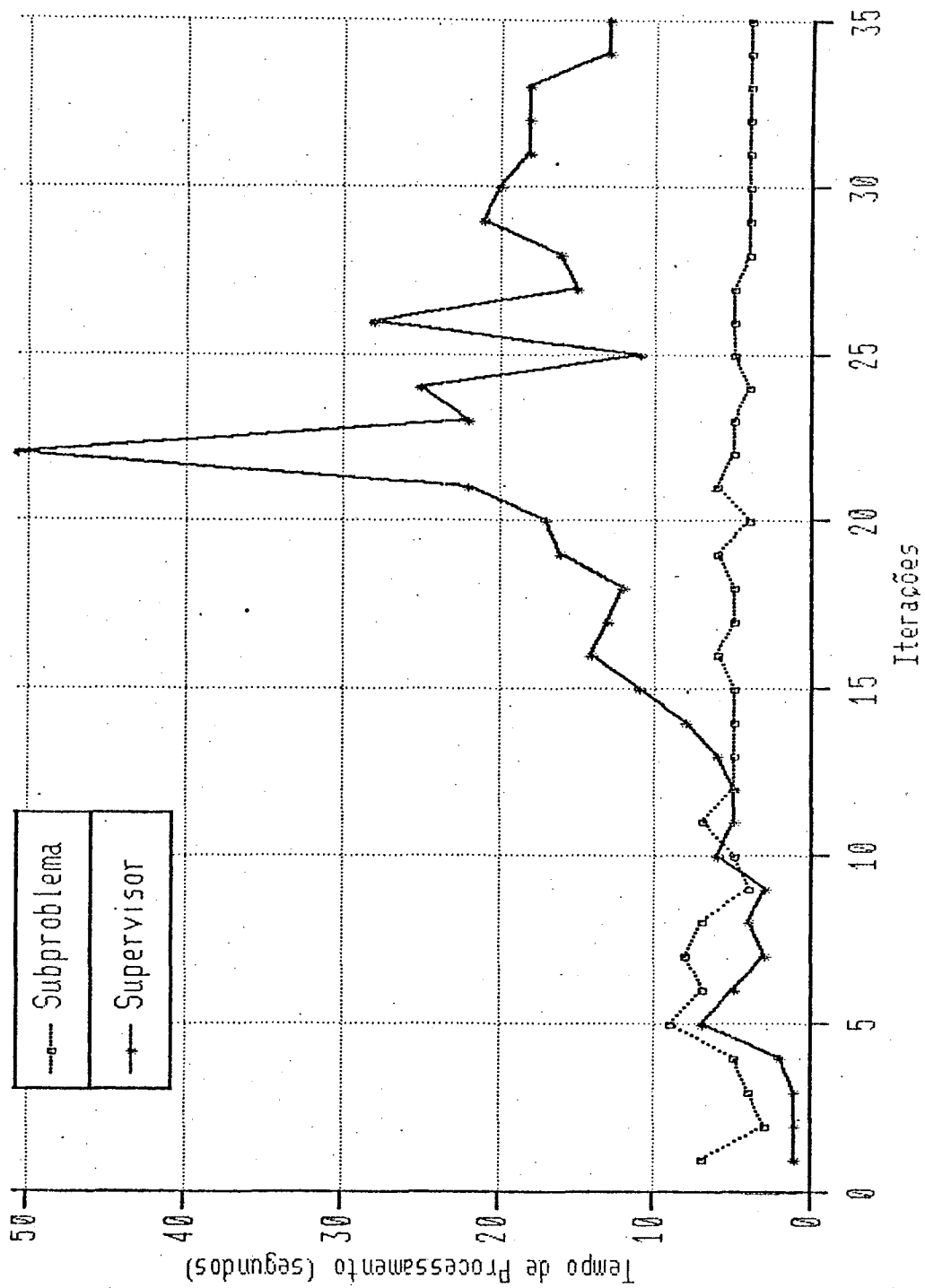


Figura 27. Tempos de CPU do subproblema e supervisor

alerta para a importância de se analisar a possibilidade da eliminação de restrições redundantes no supervisor.

O tempo gasto pelo subproblema aumentaria em torno de 91% se não for reaproveitada a base a cada iteração.

Generalidade na Utilização: Enquanto que o algoritmo "Branch and Bound" encontra-se pronto e resolve qualquer problema de variáveis mistas, Benders deve ser programado e é específico a um tipo de problema. Entre projeto, implementação e testes de Benders, foram gastas muitas horas de trabalho e minutos de computador. É um algoritmo fácil, mas tem que ser "programado".

Sensibilidade em relação às tolerâncias: O algoritmo de Benders implementado neste trabalho, demonstrou-se muito sensível às variações nos valores das tolerâncias do sistema de Land e Powell, já descritas no subcapítulo anterior. São usadas em Benders dois conjuntos de tolerância, um para o subproblema outro para o supervisor, e mais a tolerância TOLBB1, que serve para decidir se uma variável é inteira ou não.

As primeiras tentativas de resolver o problema, com as tolerâncias embutidas no sistema (veja Tabela 24), resultaram sempre em um número bastante grande de reinversões. Para minimizar este problema, as tolerâncias foram relaxadas, usando as recomendadas por Land e Powell para computadores similares ao utilizado (IBM 4341), mostradas na Tabela 25. Não melhorou significativamente. Uma segunda tentativa, foi mudar as unidades de 10^3 ton para 10^6 ton, reduzindo as grandezas de custo e quantidade em 1000 e gerando restrições para o supervisor com

coeficientes menores, mais próximos da unidade como recomenda Land e Powell. Também não melhorou muito. A solução para evitar as reinversões excessivas, foi relaxar as tolerâncias na verificação de precisão (sub-rotina CHACC). Resolve-se os problemas com as tolerâncias recomendadas e verificava-se a precisão com outras menos estreitas.

Tabela 24: Tolerâncias do Sistema

-----			-----		
TOL	SUB	SUP	TOL	SUB	SUP
-----			-----		
1	X	1E-6	5	PIV	1E-5
2	S	1E-5	6	% X	1E-5
3	Y	1E-6	7	% Y	1E-5
4	CM	1E-5	8	REINV	1E-4
-----			-----		
TOLBB1 = 1E-5			-----		
-----			-----		

Tabela 25: Tolerâncias Recomendadas

-----			-----		
TOL	SUB	SUP	TOL	SUB	SUP
-----			-----		
1	X	1E-3	5	PIV	1E-3
2	S	1E-3	6	% X	1E-3
3	Y	1E-3	7	% Y	1E-3
4	CM	1E-3	8	REINV	1E-2
-----			-----		
TOLBB1 = 1E-3			-----		
-----			-----		

O próximo problema encontrado, foi o aparecimento de repetidas soluções inviáveis. Buscou-se exaustivamente por erros

nos dados, na formulação e na implementação dos algoritmos. Nada foi encontrado que justificasse as inviabilidades. Para excluir a hipótese de erro no algoritmo, definiu-se um problema muito pequeno, linear, tal que se tivesse certeza de seu resultado e se pudesse resolvê-lo também pelo simplex, rapidamente. Os resultados alcançados, mostrados no sub-capítulo anterior (Figura 23), confirmaram que o algoritmo de Benders estava funcionando bem.

O passo seguinte foi uma análise cuidadosa dos resultados de cada iteração. Em algumas delas, os valores das variáveis primais e os coeficiente do raio extremo do subproblema tinham valores muito grandes, cerca de 1000 vezes maior que os valores normais. Isto gera restrições, a serem adicionadas ao supervisor, com coeficiente, variáveis de folga e requisito b muito grandes, fora do normal, o que poderia, por imprecisão, causar a inviabilidade. O aumento da tolerância correspondente ao pivô do subproblema, em cerca de 80 vezes, elimina o problema de valores grandes.

Outra tolerância importante no aspecto de inviabilidade, é a relativa ao teste de viabilidade da variável de folga do supervisor, tolerância 2. O supervisor tem suas restrições iniciais, do conjunto S , com variáveis de folga da ordem de 10^2 . As restrições adicionadas, correspondentes aos pontos extremos, tem variáveis de folga da ordem de 10^7 . Portanto, uma tolerância 2 muito pequena não deixará passar erros compatíveis com a grandeza 10^7 e acusa inviabilidade. Por outro lado, a tolerância 2 não pode ser muito grande, sob pena das restrições do conjunto S não serem respeitadas adequadamente.

Valores de $8E-2$ para a tolerância 5 do subproblema e $5E+2$ para a tolerância 2 do supervisor resolveram o problema de inviabilidade.

Muitas tentativas foram feitas ainda para definir valores adequados para as outras tolerâncias. Procurou-se um conjunto que no menor número de iterações fornecesse uma solução viável e limites inferiores altos.

A melhor combinação conseguida foi a que produziu os resultados mostrados na Figura 25 e seus valores estão na Tabela 26

Tabela 26: Tolerâncias Utilizadas

-----			-----		
TOL	SUB	SUP	TOL	SUB	SUP
-----			-----		
1	X	$1E-2$	5	PIV	$8E-2$
2	S	$1E-1$	6	% X	$1E+1$
3	Y	$2E-1$	7	% Y	$1E+1$
4	CM	$5E+1$	8	REINV	$1E-1$
-----			-----		
TOLBBI =		$1E-2$			
-----			-----		

Pequenas variações nas tolerâncias 1, 2, 3, 4 e 5 do subproblema ou supervisor conduzem a soluções inviáveis ou então a limites inferiores baixos e a nenhuma solução viável após um grande número de iterações.

As tolerâncias 6 e 7 são utilizadas somente na verificação de precisão, na sub-rotina CHACC. A tolerância 6

verifica o erro relativo das restrições sobre o valor do requisito b. Muitas restrições tem requisitos nulos, que para efeitos da sub-rotinas CHACC são transformados na unidade. Portanto, um erro aceitável conforme a tolerância 2 não passa pela 6, causando necessidade de reinversão. Por isso elas foram desprezadas, atribuindo-lhes valores grandes.

À tolerância TOLBB1 foi atribuído valor $1E-2$ e, por recomendação de Land e Powell, as variáveis binárias foram transformadas: ao invés de assumirem valores 0 e 1, assumem 0 e 1000. É preferível ter variáveis com valores grandes do que coeficiente da matriz A. Com a tolerância acima, são aceitos erros de 10 unidades, i.e. variáveis assumindo valores menores que 10 ou entre 990 e 1000 são aceitos como variáveis inteiras.

As tolerâncias utilizadas na solução do problema por Branch and Bound não puderam ser iguais às utilizadas no algoritmo de Benders. O simplex não converge para solução viável. Foram utilizadas as tolerâncias recomendadas por Land e Powell.

A tolerância TOLBB1 desempenha papel importante no Branch and Bound. Atribuindo-lhe valor de $1E-1$ em 20 minutos de processamento conseguiu-se 7 soluções inteiras. Porém, são aceitos como inteiras variáveis que assumem valores menores que 100 ou entre 900 e 1000, o que considerou-se um erro inaceitável.

6.0 CONCLUSÃO

O problema de planejamento da oferta do carvão mineral, pela sua dimensão, complexidade e interdependência entre as decisões dos setores de produção, beneficiamento, transporte e utilização exige uma solução integrada, uma visão sistêmica, proporcionada por uma abordagem de Pesquisa Operacional e, neste caso particular, programação matemática.

Este trabalho detalhou o problema, a partir da visão contida num trabalho da FINEP [FINEP, 1981], incluindo a consideração de economias de escala e custos fixos na implantação e expansão de capacidades. Investigou a possibilidade de modelar o problema através de redes de fluxo ([RAMOS, 1981] e [YAGED, 1971]) e de aplicar a técnica de decomposição de Benders. Utilizando um estudo de caso para o sistema brasileiro de carvão e o conjunto de códigos de programação matemática de Land & Powell [LAND & POWELL, 1973], avaliou o desempenho da técnica de Benders, comparando-a com a solução sem decomposição, e o comportamento dos códigos de Land & Powell, ao resolver problemas de médio porte.

6.1 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático do problema resultou não-convexo, de grande porte, dinâmico e multi-produto (vários produtos escoando numa mesma rede de fluxo).

Ele é não-convexo devido a consideração de economias de escala, comprovadamente existentes no setor de carvão mineral [O'HARA, 1980], além de ser não-linear devido a descontinuidade causada pelos custos fixos iniciais em implantações e expansões de capacidades.

É um problema de grande porte, com uma estrutura do tipo primal-dual bloco angular. Os blocos independentes de restrições de cada período, que modelam a operação do sistema, são interligados pelas restrições de exaustão das jazidas e pelas variáveis de expansão de capacidade do sistema. A dimensão do problema, para um caso real do sistema brasileiro, considerando 10 períodos de planejamento, é da ordem de 3000 restrições e 6000 variáveis.

A tentativa de modelar o problema através de redes de fluxo e aplicar o algoritmo de YAGED, como fizera RAMOS, foi frustrada por dois motivos:

- os problemas de operação do sistema em cada período não podem ser resolvidos isoladamente, eles estão interligados pelas restrições de exaustão das jazidas;
- o processo de beneficiamento do carvão impede uma representação através de redes de fluxo, devido ao fato de as parcelas nobre e afundada, resultantes do processo, serem produzidas em percentuais definidos e constantes. Isto também impede que os subproblemas, resultantes da decomposição de Benders, sejam resolvidos de forma bastante

mais eficiente, por algoritmos genéricos de redes de fluxo, na pior hipótese.

Na versão final do modelo matemático, a não-convexidade foi eliminada através de linearização por partes, criando-se uma versão aproximada do modelo original, e a estrutura primal-dual bloco angular foi transformada, alterando-se as restrições de exaustão das jazidas, em dual bloco angular, permitindo a aplicação da técnica de decomposição de Benders.

6.2 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO ALGORITMO DE BENDERS

As aplicações mais bem sucedidas do algoritmo de Benders tem sido aquelas em que os subproblemas e, principalmente, o supervisor resultam num problema de transporte e programação binária, respectivamente. No caso estudado, o subproblema não pode ser modelado como um problema de redes de fluxo, em função do processo de beneficiamento, resultando num problema de programação linear, e o supervisor resultou num problema de programação linear com variáveis mistas. Esta situação é semelhante a encontrada por GIGLIO [GIGLIO, 1977] numa aplicação de Benders à um problema de planejamento de geração elétrica.

Para avaliar o desempenho do algoritmo de Benders, quando aplicado ao problema do carvão mineral, o estudo de caso foi resolvido decomposto, por Benders, e sem decomposição,

através do código para programação linear mista (Branch and Bound) disponível no Land & Powell.

Apesar das adversidades para uma aplicação eficiente de Benders, seu desempenho foi comparável à solução sem decomposição. Os resultados para o estudo de caso estão resumidos na Tabela 27

Tabela 27: Resumo dos resultados de Benders				
Limites	Função Objetivo (10 ⁶ US\$)		Tempo de CPU (segundos)	
	BD	BB	BD	BB
Inferior	4630	4942	289	239
Superior	<u>5088</u>	<u>5005</u>	<u>260</u>	<u>297</u>

BD - Solução decomposta, através de Benders
BB - Solução sem decomposição, através do Branch and Bound

Os valores grifados na tabela referem-se à soluções viáveis. Ao tempo de 260 segundos, Benders alcançou uma solução viável a um custo de 5088 (10⁶US\$) e a informação de que o custo da solução ótima não era menor que 3552. Na iteração seguinte, aos 289 segundos, ele melhorou o limite inferior da solução ótima, elevando-o a 4630. Branch and Bound, aos 297 segundos, alcançou uma solução viável com um custo de 5005; aos 239 segundos, ele já tinha o limite inferior de 4942. Portanto, note-se que Benders conseguiu uma solução viável com um custo apenas 2% maior em 88% do tempo gasto pelo Branch and Bound. Os requisitos de memória de Benders são bem menores que os do Branch and Bound: 616 Kbytes

contra 3036 Kbytes. Outra conveniência da solução através de Benders, foi o controle da precisão; resolvendo o problema sem decomposição, não foi possível exercê-la.

Além dos resultados conseguidos com o estudo de caso sugerirem um bom desempenho do Benders, há o fato que o problema real de planejamento da oferta do carvão mineral, considerando 10 períodos de planejamento, é cerca de cinco vezes maior, em número de variáveis e restrições. Benders apresenta uma eficiência crescente com o porte e dificuldade dos problemas [LASDON, 1970] e os métodos de decomposição, em geral, tem um desempenho melhor quando o número de blocos em que as restrições podem ser divididas, aumentam. Portanto, no caso real de planejamento da oferta do carvão mineral, é de se esperar que Benders apresente um desempenho bem superior à solução sem decomposição.

6.3 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DOS CÓDIGOS DE LAND & POWELL

O conjunto de códigos da programação matemática de Land & Powell demonstrou ser adequado às finalidades deste trabalho. É um sistema bastante modular, tornando-se fácil a utilização de suas subrotinas para compor novos algoritmos. Além disto, está muito bem documentado em [LAND & POWELL, 1973].

Quanto ao seu desempenho, ao resolver um problema de médio porte (700 restrições e 1200 variáveis), pode-se dizer que está no limite da sua capacidade ou ultrapassa. Neste caso foi impossível exercer o controle de precisão através das reinversões da base.

Um problema encontrado, diz respeito às tolerâncias utilizadas pelos algoritmos. Foi difícil encontrar um conjunto que desse bons resultados: solução correta num tempo razoável. A dificuldade pode ser devido às características do problema ou computador utilizado. Os códigos foram desenvolvidos num computador que trabalha, normalmente, com duas vezes mais dígitos significativos que o utilizado neste trabalho.

6.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O fato deste trabalho ter escolhido para estudo o problema de planejamento da oferta do carvão mineral, não invalida seus resultados para problemas semelhantes e de mesma complexidade em outras áreas; por exemplo, as questões de expansão de capacidade de sistemas de geração e transmissão elétrica. Vale a pena lembrar, que restrições políticas, contratuais e financeiras podem ser facilmente incluídas no modelo.

Quanto a implantação computacional de Benders e a modelagem do problema, algumas questões, relacionadas abaixo, poderiam ser pesquisadas.

- Em relação à solução do problema supervisor, poderiam ser analisadas as possibilidades de eliminar restrições redundantes e aproveitar a base da iteração anterior. O algoritmo de Benders resolve o problema supervisor através de um método de relaxação que, como tal, admite a eliminação das restrições redundantes, sob certas condições. Isto seria

muito conveniente, uma vez que o número de restrições efetivas é pequeno. Poder-se-ia também, avaliar o ganho em reaproveitar a base da iteração anterior; a cada iteração a base é alterada apenas pela adição de algumas restrições.

- Em relação às tolerâncias utilizadas no Land & Powell, é importante definir as causas dos problemas encontrados. Eles surgiram com o aparecimento de valores excessivamente grandes, como resultados das variáveis duais e coeficientes dos raios extremos. Para evitá-los, passou-se a admitir como pivô, elementos com valores 80 vezes maior que o recomendado. Dever-se-ia averiguar se o problema está no algoritmo simplex do sistema de Land e Powell ou é um caso particular do estudo de caso, que mereceria algum cuidado especial na solução.
- Com respeito à modelagem, poder-se-ia avaliar o impacto na qualidade dos resultados, de se ter considerado, nos custos das expansões, as economias de escala e investimentos fixos iniciais ao invés de, simplesmente, considerá-los lineares. Da mesma forma, seria importante avaliar o prejuízo causado à qualidade da solução, pela linearização do caso não-convexo original.
- Em relação a implementação de Benders ao problema, poder-se-ia analisar soluções de decomposição alternativas, de modo a explorar as características do modelo, resultando subproblema e supervisor solúveis por algoritmos mais eficientes, como fluxo em redes e programação binária.

- Um último tópico, interessante, não analisado devidamente neste trabalho, refere-se à programação híbrida descrita por Gunner [GUNNER, 1979]. Seus resultados são muito promissores e valem a pena ser testados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- 01 - BRADLEY, S.P. et alii. Applied mathematical programming. Reading, Massachusetts. Addison-Wesley, 1977.
- 02 - CEHPAR. Projeto HG-49: modelagem do sistema energético para-
naense; relatório preliminar. Curitiba, jan. 1982.
- 03 - DOULLIEZ, P.J. & RAO, M.R. Optimal network capacity plan-
ning; a shortest-path scheme. Operations Research, 33 (4)
Aug. 1975.
- 04 - FINEP - Financiadora de Estudos e Projetos. Informações
Técnicas e Economicas preliminares para a elaboração de um
modelo da otimização para o carvão mineral no Brasil.
Brasília, 1981.
- 05 - FREIDENFELDS, J. & MCLAUGHLIN, C.D. A heuristic branch and
bound algorithm for telephone feeder capacity expansion.
Operations Research, 27 (3) May/June 1979.
- 06 - FRITZCHE, H. Programação não-linear: análise e métodos.
São Paulo, E. Edgard Blucher, 1978.
- 07 - GALO, G. & SODINI, C. Adjacent extreme flows and application
to min concave cost flow problems. Network, 9, 1979.
- 08 - GIGLIO, R.J. & NOONAN, F. Planning electric power generation:
a nonlinear mixed integer model employing Benders decom-
position. Management Science, 23 (9) May 1977.

- 09 - GLOVER, F. et alii. Improved computer-based planning techniques; part I. Interfaces, 8 (4) Aug. 1978.
- 10 - _____. Improved computer-based planning techniques; part II. Interfaces, 9 (4) Aug. 1979.
- 11 - GOTTFRIED, B.S. & WEISMAN, J. Introduction to optimization theory. New Jersey, Prentice Hall, 1973.
- 12 - GROSZEWICZ, R.C. et alii. Modelo de simulação do sistema energético paranaense. In: CONGRESSO REGIONAL DE INFORMÁTICA, 4., Anais. Curitiba, 1982.
- 13 - GUNNER, A.L.C. An alternative fo mixed integer programming - hidrid programming. In: OPERATIONAL RESEARCH '78, Anais. Netherlands, 1979.
- 14 - HADLEY, G. Linear programing. Reading, Addisson-Wesley Publishing Company, 1962.
- 15 - LAND, A.H. & POWELL, S. Fortran codes for mathematical programming: linear, quadratic and discrete. New York, J. Wiley, 1973.
- 16 - LASDON, L.S. Optimization theory for large systems. New York, MacMillan, 1970.
- 17 - LEITE, J.A.A. Metologia de elaboração de tese. São Paulo, McGraw-Hill, 1978.

- 18 - MODIANO, E.M. & TOURINHO, O.A.F. A economia do carvão mineral. Pesquisa e Planejamento Econômico, Rio de Janeiro, 12 (1) abr. 1982.
- 19 - MULVIHILL, M.E. & DRACUP, J.A. Optimal timing and sizing of a conjunctive urban water supply and wastewater system with nonlinear programming. Water Resource Research, 10 (2), Apr. 1974.
- 20 - O'HARA, A.T. Quick guides to the evaluation of orebodies. CIM Bulletin, Feb. 1980.
- 21 - O'NEILL, P.G. Mathematical programming model for planning a regional water resource system. J.Inst. Water Eng. Sci., 26 (1) 1972.
- 22 - RAMOS, F. Capacity expansion of regional urban water supply networks. Massachusetts, Institute of Technology, 1981. (Tese de doutorado).
- 23 - RAMOS, F. et alii. Modelagem do sistema energético para-
naense. In: CONGRESSO REGIONAL DE INFORMÁTICA, 4., Anais.
Curitiba, 1982.
- 24 - RAMOS, F. & GROSZEWICZ, R.C. Desenvolvimento de um modelo matemático para planejamento energético regional. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 15., Anais Rio de Janeiro, 1982.

- 25 - REGEV, U. & SCHWARTZ, A. Optimal path of inter-regional investment and allocation of water. Water Resource Research, 9 (2), 1973.
- 26 - SALKIN, H.M. Integer Programming. Reading, Addison-Wesley, 1975.
- 27 - SCHERER, C.R. & CHIULLI, R. Optimal capacity expansion with off design costs. Journal of Water Resources Planning and Management Division, New York, ASCE, 103 (2) 1977.
- 28 - SEAP - Secretaria Especial de Abastecimento e Preços. Análise do setor carvão mineral. Brasília, 1980.
- 29 - WILLE, S.A.C. Planning of dynamic capacity expansion and water allocation for urban water supply and wastewater system. Fort Collins, Colorado State University, 1981. (Tese de doutoramento).
- 30 - WHITE, D.E. The application of mathematical programming decomposition techniques to the integration of a large scale coal energy model. Massachusetts, Institute of Technology, 1981. (Tese de doutoramento).
- 31 - YAGED, B. Minimum cost routing for static network models. Network, 1, 1971.
- 32 - _____. Minimum cost routing for dynamic network models. Network, 3, 1973.

APÊNDICE 1 - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DA LINEARIZAÇÃO

Dada a função de custo $\text{CUN } Y^b$, a ser linearizada em duas partes (veja Figura 28), é necessária a determinação do melhor ponto de divisão (ponto D1 na figura). Seria desejável que a solução ótima repousasse no ponto D0, D1 ou D2 pois assim não haveria nenhuma diferença entre o valor da função original e a linearizada. Não sendo possível tais condições, adotou-se o critério de condicionar que os afastamentos máximos dos segmentos à curva (DM1 e DM2) sejam iguais para que se tenha tendência a erros equilibrados.

A diferença entre a curva e o segmento de reta para um Y qualquer é dada por DQ1 e DQ2:

$$\begin{aligned} \text{DQ1} &= (\text{CUN } Y^b) - (\text{CUN } A1 Y) \\ \text{DQ2} &= (\text{CUN } Y^b) - (\text{CUN } A2 Y + B2) \end{aligned}$$

onde B2 é o intercepto do segundo segmento e é igual a $(D1^b) - (D1 A2)$.

Os valores de Y para os quais DQ1 e DQ2 assumem valores máximos, podem ser encontrados fazendo a derivada primeira de DQ1 e DQ2, em relação a Y, serem iguais a zero.

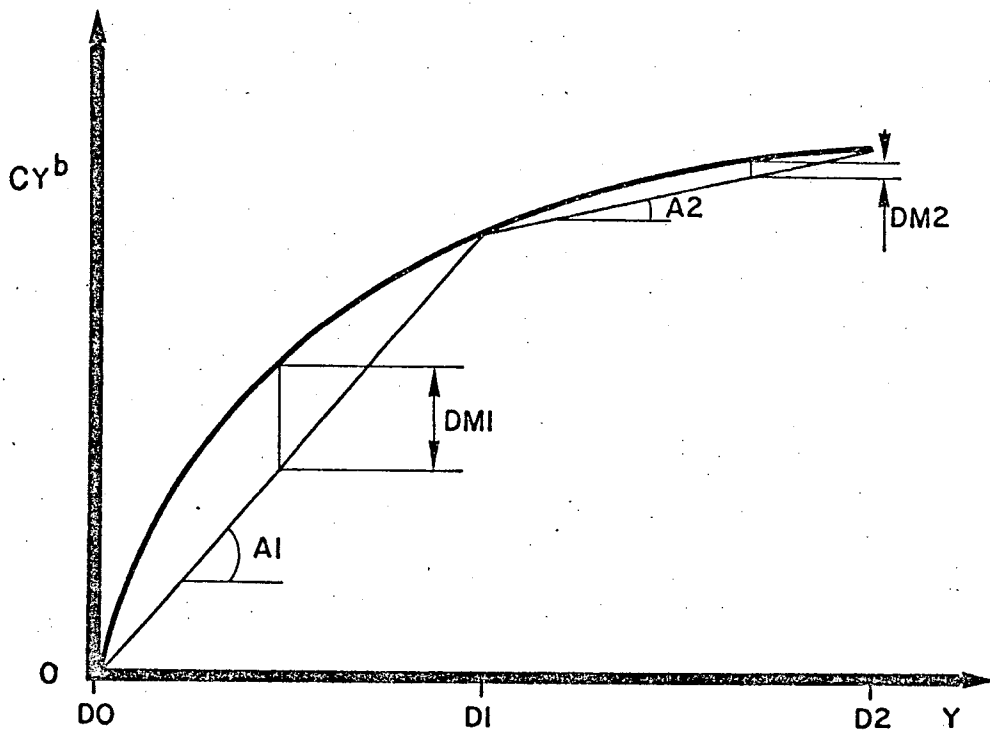


Figura 28. Variáveis da Linearização

$$DQ1' = b \text{ CUN } Y^{(b-1)} - \text{CUN } A1 = 0$$

$$\Rightarrow Y1^\circ = (A1/b)^{1/(b-1)}$$

$$DQ2' = b \text{ CUN } Y^{(b-1)} - \text{CUN } A2 = 0$$

$$\Rightarrow Y2^\circ = (A2/b)^{1/(b-1)}$$

Os valores máximos de $DQ1$ e $DQ2$ serão $DM1$ e $DM2$

$$DM1 = (\text{CUN } Y1^\circ{}^b) - (\text{CUN } A1 Y1^\circ)$$

$$DM2 = (\text{CUN } Y2^\circ{}^b) - (\text{CUN } A2 Y2^\circ + B2)$$

Expressando A_1 , A_2 e B_2 em função de D_1 , D_2 e b e igualando DM_1 a DM_2 determina-se D_1 . D_2 é o limite físico da grandeza.

$$A_1 = (D_1^b) / D_1$$

$$A_2 = ((D_2^b) - (D_1^b)) / (D_2 - D_1)$$

$$B_2 = (D_1^b) - (D_1 A_2)$$

A determinação analítica de D_1 recaiu numa equação de difícil solução. Entretanto, com as equações de DM_1 e DM_2 é fácil e rápido pesquisar um ponto tal que a relação DM_1/DM_2 seja próxima ou igual a unidade.

O resultado alcançado é que para um índice de economia de escala (b) igual a 0,75 a relação D_1/D_2 é igual a 0,20 i.e., D_1 situa-se na primeira quinta parte do segmento $D_0 D_2$. Os resultados encontrados para as quatro jazidas do estudo de caso estão mostrados na Tabela 28

Tabela 28: Parâmetros da Linearização

PARÂMETROS	JAZIDAS	CHARQUEADAS	LEÃO II	CANDIOTA	STA CTA
D_1	570	665	1364	4413	
D_2	3000	3500	6200	22065	
D_1/D_2	0,19	0,19	0,22	0,20	
b	0,70	0,70	0,80	0,74	
A_1	0,1490	0,1422	0,2360	0,1128	
A_2	0,0768	0,0733	0,1569	0,0646	