UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES EM ALTA FREQUÊNCIA EM SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM ENGENHARIA

ANTONIO MARIA FIDALGO DE BASTOS

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
FEVEREIRO - 1984

ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES EM ALTA FREQUÊNCIA
EM SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

ANTONIO MARIA FIDALGO DE BASTOS

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. José João de Espíndola, Ph.D.
Orientador

Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

BANCA EXAMINADORA

Prof. José João de Espíndola, Ph.D.
Presidente

Prof. Arcanjo Lenzi, M.Sc.
Membro

Prof. Nelson Back, Ph.D.
Membro

Dr. Sergio Sartori, Dr.Ing.
Membro

Aos meus pais,

José e Oneide.

À minha esposa,

Walnise.

Ao meu filho,

Marco Antonio.

A G R A D E C I M E N T O S

O autor deseja expressar os seguintes agradecimentos:

À UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ e CAPES, pelo suporte financeiro.

Ao Prof. José João de Espíndola, pela sua constante e valiosa orientação e ajuda durante a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Arcanjo Lenzi, pelo incentivo e colaboração no decorrer do trabalho.

À UFSC, seus professores e funcionários, pelos ensinamentos e apôio técnico.

Aos colegas Newton Soeiro, Ednardo Andrade, Antonio Turra, Nicodemus Lima e Luiz Gonzaga, pelo incentivo recebido.

Ao Prof. Renan Roberto Brazzalle, pela cooperação na parte fotográfica.

Ao Josemar Maso, pela eficiência na datilografia.

A todos que, dentro ou fora do LVA, de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

SIMBOLOGIA

Os principais símbolos usados no decorrer do texto estão listados abaixo. Subscritos de uso geral encontram-se também incluídos. Aqueles, cujo uso é específico ou, ainda, dependem de interpretação especial, não estão listados, uma vez que encontram-se explicados no decorrer do texto.

GERAL

A	Amplitude harmônica [m]. Também área da secção transversal [m²]
$[A]$	Matriz característica
a_x, a_y, a_z	Coordenadas dos isoladores, com relação ao sistema cartesiano X, Y, Z, [m]
C_L	Velocidade de Propagação da onda longitudinal [m/s]
D, d	Diâmetro [m]
E	Módulo de Young [N/m²]
F	Força [N]
$\mathcal{F}$	Indica transformada de Fourier
f	Freqüência de entrada [Hz]
f_{max}	Freqüência máxima [Hz]
G	Módulo de elásticidade ao cisalhamento [N/m²]
I	Momento de inércia axial [kg.m²]
j	Unidade imaginária [$\sqrt{-1}$]
ℓ	Comprimento [m]
$M(f)$, $M(\omega)$	Massa dinâmica [N.s²/m]
M_b	Massa ativa do isolador ou elemento resiliente [kg]

m	Massa total do corpo rígido [kg]. Também número de isoladores
M	Momento [N.m]. Também massa extrema fixa ao isolador [kg]
n	Número de onda [m^{-1}]. Também número de graus de liberdade
$(n\ell)$	Freqüência adimensional
p	Parte real da freqüência adimensional complexa. Também direção principal elástica
q	Parte imaginária da freqüência adimensional complexa. Também direção principal elástica
$\{Q(t)\}$	Vetor de forças externas generalizadas
q_j	j-ésima coordenada generalizada [m]
r	Direcão principal elástica
T	Período [s]. Transmissibilidade (adimensional)
t	Tempo [s]
u, v, w	Translacões da fundação segundo $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, respectivamente [m]
X, Y, Z	Eixos coordenados fixos a um corpo rígido, com origem no centro de gravidade
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	Sistema cartesiano inercial
x_c, y_c, z_c	Translações do corpo rígido com relação ao sistema $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, [m]
α, β	Deslocamentos angulares de um corpo rígido [rad]
γ	Razão entre a massa extrema e a massa ativa do isolador (adimensional). Também deslocamento angular de um corpo rígido [rad]
Δ	Pequena quantidade incremental em freqüência [Hz]
δ	Deflexão do isolador ou membro elástico [m]

δ_E	Fator de amortecimento associado ao módulo de elasticidade (adimensional)
ε	Deformação específica (adimensional)
λ	Autovalores de $[A]$. Também cossenos diretores
ξ	Deslocamento da secção transversal do isolador $[m]$
ρ	Densidade de massa $[kg/m^3]$
σ	Tensão (tração-compressão) $[N/m^2]$
ϕ_i	i-ésima coordenada do autovetor
ψ	Ângulo de fase $[rad]$
Ω	Freqüência natural $[rad/s]$
ω	Freqüência excitadora $[rad/s]$

OUTROS SÍMBOLOS

[ ]	Matriz quadrada $(n \times n)$
{ }	Matriz coluna $(n \times 1)$
$[\ ]^t$	Transposto de uma matriz
$[\ ]^{-1}$	Inverso de uma matriz

CONVENÇÕES

O símbolo * sobre qualquer variável indica valor complexo.

O símbolo ~ sobre qualquer variável indica comportamento harmônico.

Os símbolos ˙ ou ¨ sobre qualquer variável indicam a primeira ou segunda derivada temporal, respectivamente.

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um método computacional que permite predizer as transmissibilidades das vibrações, em baixa e alta freqüência , de um corpo rígido montado sobre isoladores elásticos, em número e direções arbitrárias.

Revê-se, inicialmente, o modelo clássico de isolamento com múltiplos graus de liberdade. Um programa para computador digital, que permite a determinação das freqüências naturais e autovetores do sistema isolado, foi escrito. Nesse programa, nenhuma restrição é feita quanto ao número e orientação dos isoladores.

Os resultados computados das freqüências naturais e modos de vibração foram verificados experimentalmente, através de um ensaio analógico.

A determinação dos parâmetros modais, via digital, também foi tentada e é aqui discutida.

Finalmente, formula-se o método computacional para o cálculo das transmissibilidades. Este método é absolutamente geral, levando em conta os efeitos dinâmicos (ondulatórios) dos isoladores. As características dinâmicas dos isoladores são verificadas experimentalmente.

Os esforços transmitidos pelos isoladores à carcaça de um compressor hermético são estudados, como exemplo, e comparados com a potência sonora irradiada por este, em faixas de 1/3 de oitava.

A B S T R A C T

This work presents the devellopment of computer oriented method capable of predicting the transmissibilities, both at low and high frequencies, of a rigid body mounted on many elastic isolators of arbitrary directions.

The classical multi degree of freedom vibration isolation model is reviewed.

A computer program for the computation of natural frequencies and modes shapes of the vibrating body was written down. No restriction was made as far as the number of isolator and its directions.

Computer results of natural frequencies and mode shapes have been verified through an analogical experiment.

The determination of modal parameters through a digital experiment has also been, athempted and is discussed.

Finally, the computer oriented method for the calculation of the transmissibilities is presented. This method is quite general for it takes into account the dynamic effects of the isolators.

These dynamic characteristics are verified experimentaly.

The forces transmitted through the isolators to the casing of a hermetic compressor are studied as an example and compared to the sound power radiated by it in 1/3 octave bands.

I N T R O D U Ç Ã O

Isolamento de vibrações, em geral, é uma forma de reduzir a transmissão de movimentos ou forças vibratórias de uma estrutura para outra. Isto é obtido através da interposição de um elemento resiliente, adequadamente projetado, entre as duas estruturas. A efetividade do isolamento, nas freqüências ressonantes, é marcadamente influenciada pela quantidade de amortecimento dos isoladores.

Existem dois aspectos a considerar, quando da aplicação das técnicas de isolamento: (1) redução das forças transmitidas por uma máquina à sua fundação e (2) redução do movimento transmitido pela fundação à maquina sobre ela montada. No primeiro aspecto, estão incluídas as máquinas rotativas em geral (motores elétricos, turbinas, etc), resilientemente montadas, cujas forças provenientes do seu funcionamento devem ser isoladas. Um equipamento eletrônico, montado resilientemente no painel de uma aeronave, exemplifica um sistema excitado pelo movimento do suporte.

Neste trabalho, o problema de isolamento é tratado sob o primeiro aspecto, com particular atenção ao estudo de compressores herméticos de refrigeração. A extensão a sistemas excitados pelo suporte, todavia, é imediata.

A figura 1.1 mostra, em duas vistas [1], o compressor hermético PW 5,5 K 11 utilizado na aplicação da formulação matemática aqui desenvolvida. Do ponto de vista vibratório, o núcleo montado à carcaça, através dos isoladores, constitui-se em um sistema forçado, amortecido, com seis graus de liberdade. Logo, trata-se de um sistema discreto, cuja formulação, geralmente, é obti da por um conjunto finito de equações diferenciais acopladas.

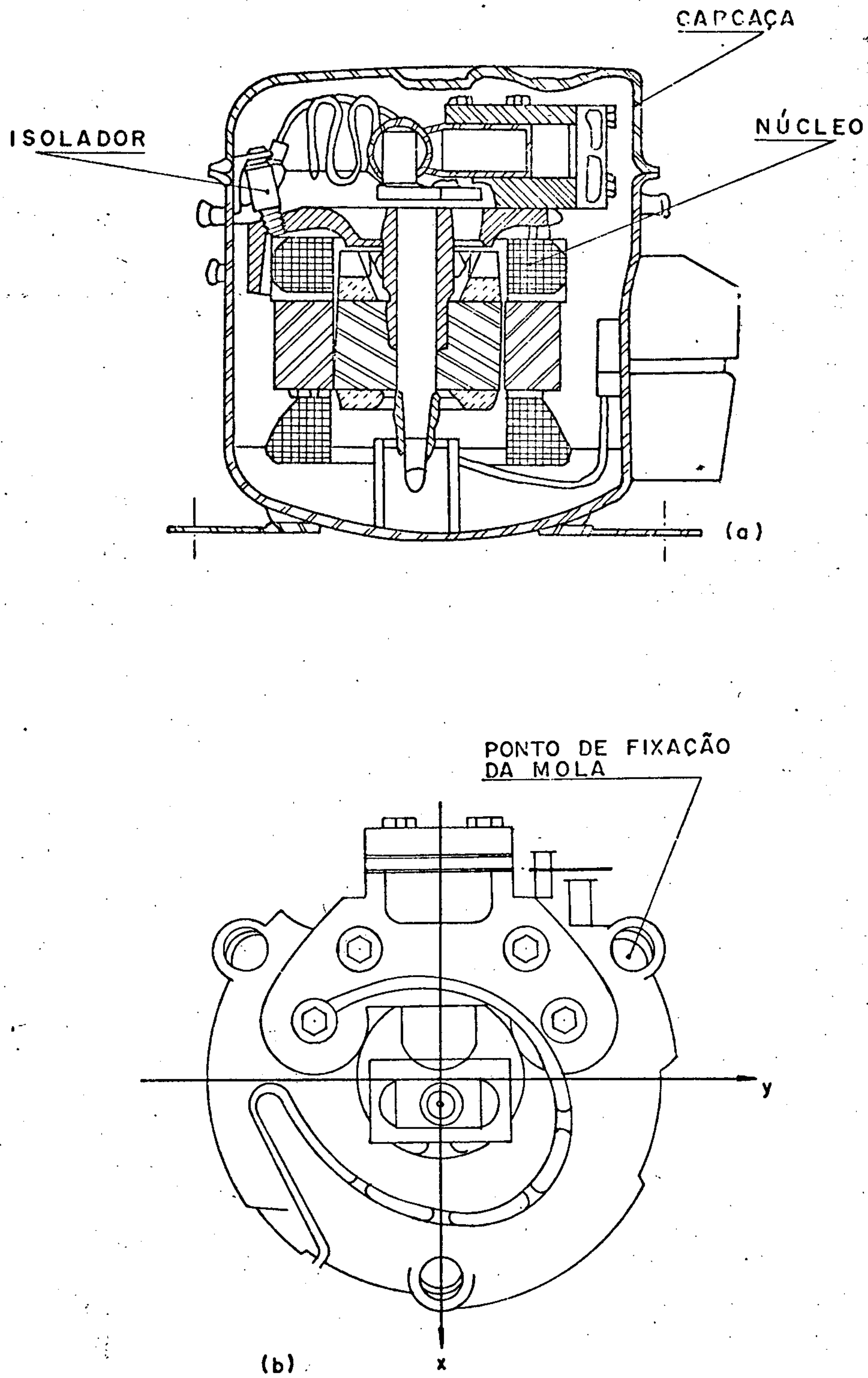


FIGURA 1.1. (a) Corte lateral do compressor
PW 5,5 K 11 (b) Vista superior com a carcaça aberta.

Em sistemas discretos, o problema de isolamento de vibrações tem sido objeto de estudo há bastante tempo. Já em 1925, TANAKA [2] realizou estudo no sentido de reduzir as vibrações em um motor aeronáutico do tipo estrela.

Tratando-se do isolamento de corpos rígidos, vibrando sobre montagem resiliente, é de fundamental importância prática o conhecimento dos modos de vibração, uma vez que cada particular sistema pode ter seu isolamento otimizado, através do projeto adequado da suspensão, o que implica na caracterização de seus modos de vibração.

O completo desacoplamento modal, usando isoladores inclinados radialmente dispostos, com vistas ao projeto de uma suspensão que proporcionasse a redução das tensões vibratórias em motores aeronáuticos, foi estudado inicialmente por TAYLOR e BROWNE [3].

Uma outra montagem, onde os isoladores são montados simetricamente nos cantos inferiores de um corpo cúbico, foi sugerida por MACDUFF [4], visando o desacoplamento parcial das coordenadas.

Mais recente, entretanto, com o surgimento de computadores digitais de alta velocidade de processamento, diversos autores têm sugerido o tratamento matricial das equações de movimento que regem o comportamento dinâmico dos corpos rígidos, proporcionando não só uma técnica compacta para a manipulação do sistema simultâneo de equações diferenciais, em sua forma mais geral, mas ainda permitindo que as condições de desacoplamento sejam facilmente determinadas por pura inspeção dos elementos fora da diagonal. Neste sentido, os trabalhos de SMOLLEN [5] e DERBY [6] mereceram especial atenção.

Neste trabalho, a proposição inicial é a elaboração de um programa computacional, que determine os modos normais e respectivas freqüências naturais de vibração, para corpos rígidos vibrando sobre montagem resiliente, através da solução do sistema de equações diferenciais em sua forma mais geral. A verificação experimental da precisão do modelo matemático, usualmente adotado, é também objeto de estudo.

Em uma primeira instância, portanto, os resultados numéricos para um dado exemplo de aplicação, forneceriam os subsídios necessários para que o problema de isolamento em baixa freqüência fosse atacado de forma clássica.

A análise de casos práticos, todavia, revela, por exemplo, que a potência sonora irradiada [7] pela carcaça de um compressor hermético apresenta níveis elevados em freqüências relativamente altas, indicando com isso a ineficiência do isolamento em alta freqüência. O fato é que, quando a freqüência de excitação torna-se relativamente alta, ondas estacionárias tendem a ocorrer ao longo do isolador e a teoria clássica de isolamento de vibrações, baseada em elementos resilientes de massa desconsiderável, pode não fornecer resultados satisfatórios. A consideração de efeitos ondulatórios em isoladores, para sistemas simples, tem sido exaustivamente discutida por diversos autores [8], [9], [10], [11].

Sob este outro enfoque, o trabalho contém o estudo de uma formulação que permite avaliar o desempenho de suspensões lineares em alta freqüência. O fato novo, ao que se conhece, reside na consideração do efeito de onda em sistemas com múltiplos graus de liberdade.

A técnica utilizada para a introdução de amortecimento à formulação, sem a computação da correspondente matriz, é outro ítem considerado.

São descritos agora os conteúdos dos Capítulos e Apêndices que aparecem na seqüência.

No Capítulo 2 é revisto um modelo matemático clássico com vistas a determinar os modos normais e freqüências naturais do núcleo do compressor. Ao final é formulado um problema de autovalores.

No Capítulo 3 é abordada a solução numérica do problema de autovalores, com aplicação ao compressor hermético. Considerações sobre a medição dos dados de entrada do programa são também feitas.

No Capítulo 4 descreve-se todo o procedimento experimental usado a fim de corroborar os resultados numéricos.

É apresentado no Capítulo 5 um estudo teórico-experimental de algumas propriedades dinâmicas importantes, quando se trata com isolamento de vibrações.

No Capítulo 6 é formulado e resolvido, via computador, o problema linear de corrente do modelo matemático atual, ou seja, considerando o efeito ondulatório nos isoladores. São calculados e analisados os espectros de força transmitida e deslocamentos dos pontos de fixação dos isoladores no corpo do compressor.

No Capítulo 7 reúne-se algumas conclusões de caráter geral, bem como sugestões para a continuidade deste estudo.

No Apêndice A estão contidas algumas notas sobre a computação dos modos normais e freqüências naturais. Um diagrama de fluxo é apresentado.

O Apêndice B contém considerações gerais sobre a computação dos espectros de esforço transmitido e deslocamentos do ponto de contato isolador-corpo.

CAPÍTULO 2

VIBRAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS MONTADOS SOBRE ISOLADORES LINEARES

2.1. INTRODUÇÃO

Neste Capítulo será revisto um modelo matemático, com a finalidade de determinar os modos normais e freqüências naturais do núcleo do compressor.

De acôrdo com as prévias considerações sobre o sistema, o núcleo do compressor pode ser interpretado como sendo um corpo rígido montado sobre isoladores lineares, estes com massa desconsiderável.

Neste contexto, são portanto necessárias seis coordenadas independentes (três rotações e três translações) para que a vibração espacial do corpo seja completamente conhecida, o que conduz a um conjunto de seis equações diferenciais ordinárias simultâneas de 2a. ordem.

Inicialmente serão discutidas algumas propriedades dos isoladores lineares, com vistas à determinação das equações do movimento do sistema, da forma mais geral possível, com base na segunda lei de Newton. Simplificações, devido a alguma simetria no corpo que porventura exista, serão também abordadas, considerando o desacoplamento das coordenadas.

Finalmente será formulado um problema de autovalores, cuja posterior solução automática, via computador digital, fornecerã os modos normais e freqüências naturais de vibração não amortecida do núcleo do compressor.

2.2. PROPRIEDADES DOS ISOLADORES LINEARES

Os suportes resilientes, ou isoladores lineares, são idealizados como elementos elásticos tri-dimensionais, com dois terminais de fixação e massa desconsiderável. As conecções, ou terminais, quando movidas relativamente em qualquer direção ocasionam uma força resistiva a este movimento no isolador. A força que resiste a tal movimento relativo é de natureza elástica, e proporcional ao mesmo, assim como a força de amortecimento é diretamente proporcional à velocidade relativa.

Em geral, para sistemas que não possuem restrições impondo a direção de deslocamento dos isoladores, a aplicação de uma força externa ao elemento resiliente causa movimento em uma direção diferente, a menos que a direção de aplicação da força seja colinear com um dos "eixos principais elásticos". Definindo formalmente: os "eixos principais elásticos", de um isolador, são aqueles eixos segundo os quais o elemento, quando sem restrições, experimenta uma deflexão colinear com a força a ele aplicada.

A representação idealizada de um isolador linear é mostrada na figura 2.1, a seguir, onde a rigidez total do isolador é idealmente representada pela combinação de três molas mutuamente perpendiculares, orientadas ao longo das direções principais elásticas do mesmo. Cada mola idealizada possui rigidez igual à rigidez principal na direção considerada.

As propriedades de amortecimento dos isoladores são concebidas de forma similar às de rigidez (figura 2.2).

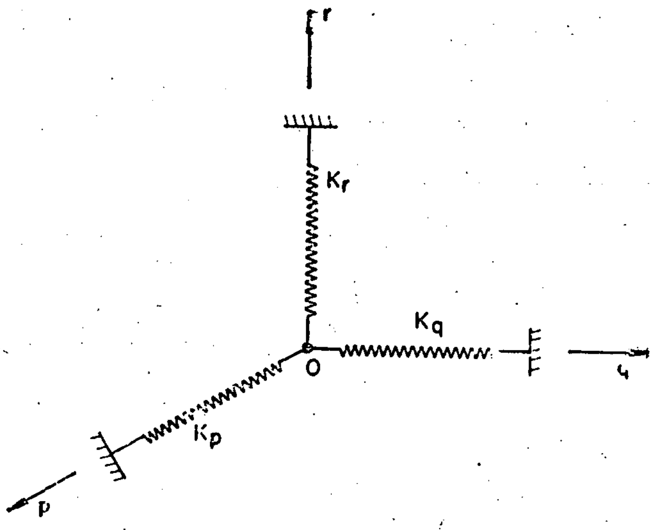


FIGURA 2.1. Representação idealizada das propriedades de um isolador linear não amortecido.

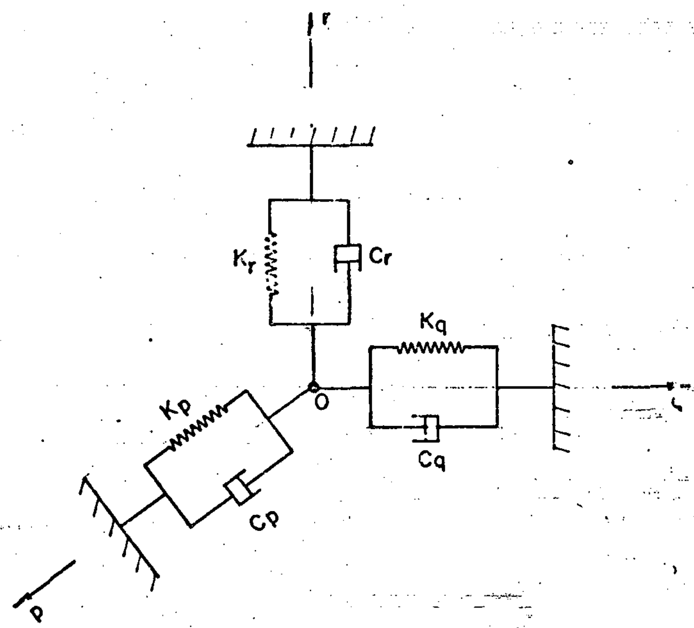


FIGURA 2.2. Idealização das propriedades de um elemento resiliente amortecido.

A idéia assumida é útil porque, em geral, a rigidez nas direções dos eixos coordenados pode ser expressa em função dos valores principais (K_p, K_q, K_r), e dos ângulos entre os eixos principais e os eixos coordenados associados ao corpo.

A determinação da rigidez principal no particular caso de molas helicoidais é relativamente simples e será discutida com detalhes no Capítulo seguinte.

O ponto O de intersecção dos eixos principais elásticos de um isolador é conhecido por "Centro Elástico". O centro elástico define a localização teórica do elemento resiliente para efeito de cálculo das forças restauradoras.

2.3. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA CORPOS RÍGIDOS COM MONTAGEM RESILIENTE

Corpos rígidos vibrando no espaço, evidentemente, consistem em sistemas com seis graus de liberdade, porquanto são necessárias seis coordenadas para que sua vibração seja espacialmente definida. A figura 2.3 mostra a idealização do núcleo do compressor suportado por isoladores inclinados.

O movimento global do corpo é referenciado a dois sistemas de coordenadas cartesianas. Um dos sistemas é fixo e representado por $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$. Outro sistema, fixo ao corpo com origem no centro de massa, e representado por X, Y, Z, é também utilizado.

As três coordenadas necessárias para descrever o movimento translacional do corpo são denotadas por x_c, y_c, z_c, e representam os deslocamentos tri-dimensionais do centro de massa, em relação ao sistema fixo $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$. O movimento rotacional é caracterizado pelos ângulos α, β, γ, de rotação dos eixos do corpo

(X,Y,Z), em torno dos inerciais $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, respectivamente.

Assume-se que os dois sistemas de coordenadas são coincidentes, com origem no centro de massa (figura 2.3), quando o corpo encontra-se em equilíbrio estático.

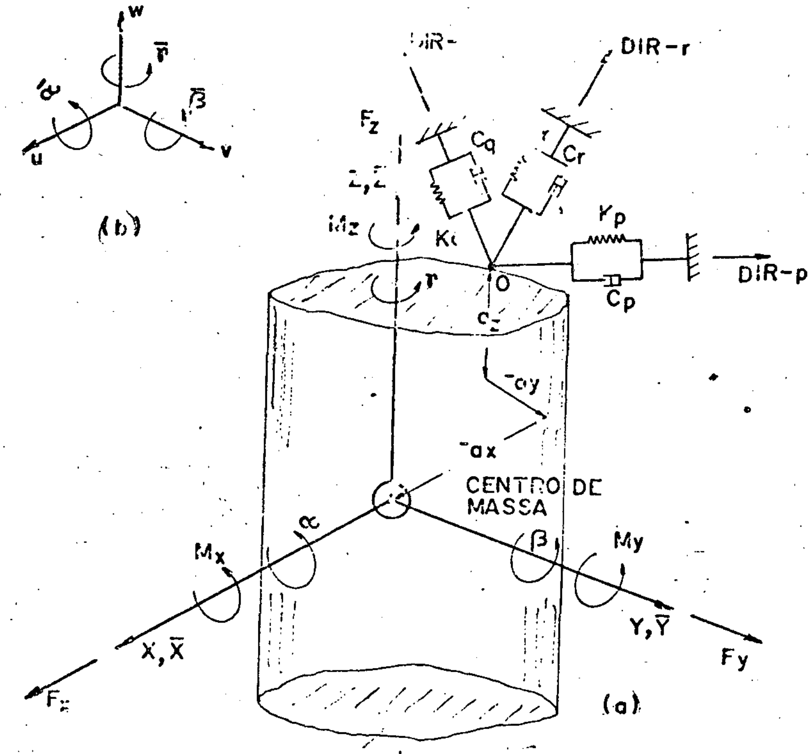


FIGURA 2.3. (a) Modelo matemático para corpos rígidos montados sobre isoladores lineares. Rotações positivas são convencionais pela "regra da mão direita"; (b) movimento aplicado pela fundação aos isoladores.

A localização dos centros elásticos é representada por suas coordenadas a_x, a_y, a_z, com relação ao conjunto fixo ao corpo (X,Y,Z).

Considera-se as forças externas F_x, F_y e F_z, aplicadas diretamente no centro de massa e, além dessas, consideram-se ainda os momentos M_x, M_y e M_z.

Foi também considerado o efeito da excitação proveniente da fundação, imaginariamente aplicada na terminação de cada conjunto resiliente tri-ortogonal presa à fundação. Esta excitação, a mais genérica possível, é considerada sob forma dos deslocamentos do suporte u, v, w, nas direções $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, respectimente, bem como os deslocamentos rotacionais $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ em torno dos mesmos eixos fixos.

É importante, neste ponto, enfatizar que as equações de movimento, cuja derivação será revista a seguir, são válidas para pequenas translações e rotações, desde que os ângulos de rotação em torno dos eixos do corpo são aproximadamente iguais àqueles em torno dos eixos inerciais.

2.3.1 DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA DE RIGIDEZ

A concepção física dos chamados "coeficientes de influência de rigidez", auxilia muito quando se procuram as equações de movimento de sistemas mais complexos. Assim sendo, faz-se necessária a determinação prévia destes, como a seguir se mostra.

Da teoria das Equações de Lagrange para sistemas linearizados, tem-se que a i-ésima força externa generalizada é dada por [9]:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} q_j \tag{2.1}$$

onde K_{ij} - coeficiente de influência de rigidez,

Q_i - i-ésima força generalizada,

n - número de graus de liberdade,

q_j - j-ésima coordenada generalizada.

Suponha-se agora que todos os q_j's são nulos, exceto diga-se, q_k que, por sua vez, é tomado igual a 1. Assim sendo, a (2.1) fica

$$Q_i^{(k)} = K_{ik} \qquad (2.2)$$

Depreende-se, portanto, analisando a (2.2) que K_{ik} é numericamente igual à força externa generalizada, associada à coordenada q_i, todas as coordenadas do sistema nulas, com exceção de q_k que é unitária. Esta interpretação é de vital importância e permite que a matriz de rigidez do sistema seja obtida por colunas.

Note-se que, quando $q_j = 0$; $j \neq k$ e $q_k = 1$, a k-ésima coluna $\{K_{ik}\}$ da matriz de rigidez pode ser facilmente computada com a variação de $i = 1, 2, \ldots, n$.

A figura 2.4 mostra a idealização dos isoladores lineares, não amortecidos, identificando os ângulos formados entre os eixos principais elásticos e o sistema inercial $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$.

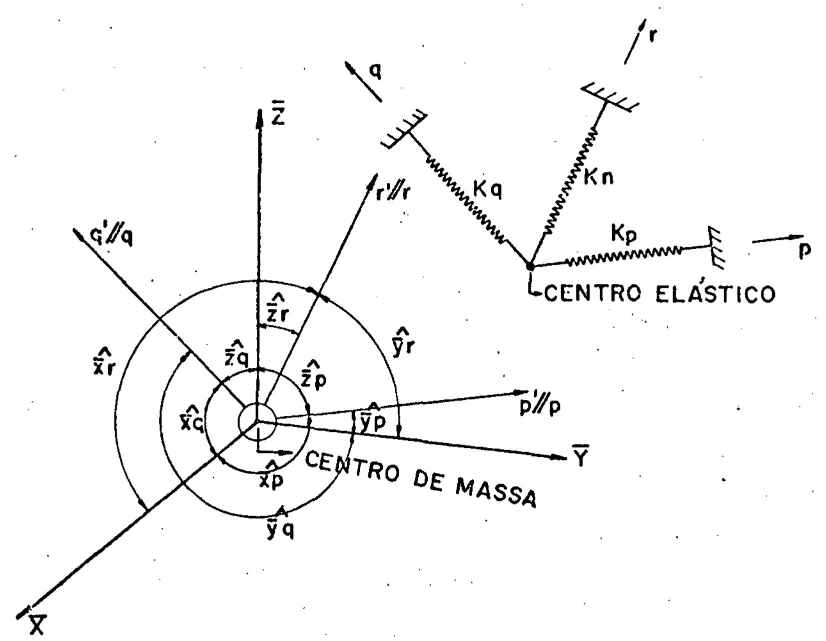


FIGURA 2.4. Ângulos entre os eixos principais elásticos p, q, r e os eixos inerciais $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$.

Fazendo uso da (2.2), tome-se inicialmente a primeira condição; para

$$x_c = 1 \quad e \quad y_c = z_c = \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

com $\qquad k = x \quad ; \; i = x, y, z,$

então $\qquad K_{ik} = K_{ix} \quad ; \; i = x, y, z$

Desta feita determina-se a força na direção de $\bar{X}$ (K_{xx}), na direção $\bar{Y}$ (K_{yx}), e na direção $\bar{Z}$ (K_{zx}), devido a um deslocamento unitário em $\bar{X}$.

Desde que $x_c = 1$, suas projeções nas direções p, q, r são

$$\cos \widehat{\bar{x}p} = \lambda_{xp} \tag{2.3}$$

$$\cos \widehat{\bar{x}q} = \lambda_{xq} \tag{2.4}$$

$$\cos \widehat{\bar{x}r} = \lambda_{xr} \tag{2.5}$$

As (2.3) a (2.5) representam a projeção do deslocamento do centro elástico sobre os eixos principais. Evidentemente, tais deflexões ocasionarão forças elásticas nas direções principais,

$$F_{mp} = K_p \, \lambda_{xp} \tag{2.6}$$

$$F_{mq} = K_q \, \lambda_{xq} \tag{2.7}$$

$$F_{mr} = K_r \, \lambda_{xr} \tag{2.8}$$

As forças (2.6) a (2.8), projetadas sobre $\bar{X}$, ficam dadas por

$$F_{mpx} = F_{mp} \cos \widehat{\bar{x}p} = K_p \lambda_{xp}^2 \tag{2.9}$$

$$F_{mqx} = F_{mq} \cos \widehat{\bar{x}q} = K_q \lambda_{xq}^2 \tag{2.10}$$

$$F_{mrx} = F_{mr} \cos \widehat{\bar{x}r} = K_r \lambda_{xr}^2 \tag{2.11}$$

A resultante em $\bar{X}$, devido a um deslocamento $x_c = 1$, (K_{xx}), é, portanto, obtida pela soma das forças (2.9) a (2.11), ou seja,

$$K_{xx} = K_p \lambda_{xp}^2 + K_q \lambda_{xq}^2 + K_r \lambda_{xr}^2 \tag{2.12}$$

Procedendo-se de maneira absolutamente similar, projetando-se (2.6), (2.7) e (2.8) nas direções $\bar{Y}$ e $\bar{Z}$ chega-se às seguintes expressões

$$K_{yx} = K_p \lambda_{xp} \lambda_{yp} + K_q \lambda_{xq} \lambda_{yq} + K_r \lambda_{xr} \lambda_{yr} \tag{2.13}$$

$$K_{zx} = K_p \lambda_{xp} \lambda_{zp} + K_q \lambda_{xq} \lambda_{zq} + K_r \lambda_{xr} \lambda_{zr} \tag{2.14}$$

Note-se que o primeiro índice do coeficiente (K_{ik}) representa a direção da força interpretada e o segundo a coordenada diferente de zero. É evidente, pelo princípio da reciprocidade de Maxwell, que $K_{ik} = K_{ki}$, qualquer que sejam i, k.

A segunda condição, ainda fazendo uso da (2.2), seria

$$\alpha = \beta = \gamma = x_c = z_c = 0 \quad \text{e} \quad y_c = 1,$$

o que de maneira análoga leva a K_{yy}, K_{xy}, K_{zy}, ou seja,

$$K_{yy} = K_p \lambda_{yp}^2 + K_q \lambda_{yq}^2 + K_r \lambda_{yr}^2 \qquad (2.15)$$

$$K_{xy} = K_{yx} \qquad (2.16)$$

$$K_{zy} = K_p \lambda_{yp} \lambda_{zp} + K_q \lambda_{yq} \lambda_{zq} + K_r \lambda_{yr} \lambda_{zr} \qquad (2.17)$$

A última condição, ou seja, $z_c = 1$ e $x_c = y_c = 0$, fornece K_{xz}, K_{yz} e K_{zz}, mantendo a mesma rotina dos casos anteriores,

$$K_{xz} = K_{zx} \qquad (2.18)$$

$$K_{yz} = K_{zy} \qquad (2.19)$$

$$K_{zz} = K_p \lambda_{zp}^2 + K_q \lambda_{zq}^2 + K_r \lambda_{zr}^2 \qquad (2.20)$$

A matriz de rigidez do sistema poderia então ser completamente determinada por este processo, caso fossem envolvidas as coordenadas angulares. Entretanto, em favor da clareza, as equações de movimento serão determinadas pela segunda lei de Newton, desde que as matrizes de massa e rigidez surgirão naturalmente.

2.3.2 DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Com base nas exposições feitas nos ítens precedentes (2.3) e (2.3.1), e considerando novamente a figura 2.3, as equações de movimento podem ser agora formulados com clareza.

As equações de movimento translacional do corpo são descritas pela segunda lei de Newton.

$$m\ddot{x}_c = F_x \tag{2.21a}$$

$$m\ddot{y}_c = F_y \tag{2.21b}$$

$$m\ddot{z}_c = F_z \tag{2.21c}$$

O movimento de rotação de corpos rígidos é descrito pelas seguintes equações [8]

$$M_x = I_{xx}\ddot{\alpha} - I_{xy}\ddot{\beta} - I_{xz}\ddot{\gamma} \tag{2.21d}$$

$$M_y = I_{yy}\ddot{\beta} - I_{xy}\ddot{\alpha} - I_{yz}\ddot{\gamma} \tag{2.21e}$$

$$M_z = I_{zz}\ddot{\gamma} - I_{xz}\ddot{\alpha} - I_{yz}\ddot{\beta} \tag{2.21f}$$

onde I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}, I_{xz}, I_{zz} e I_{yz} são os momentos e produtos de inércia do corpo com relação ao sistema X, Y, Z fixado ao corpo.

Considere-se, primeiramente, que o corpo da figura 2.3 sofra um deslocamento x_c, na direção X, em seu centro de massa. Isto provoca as forças $- K_{xx}(x_c - u)$ na direção X, $- K_{xy}(x_c - u)$ na direção Y e a força $- k_{xz}(x_c - u)$ na direção Z, desde que, como anteriormente visto, existe acoplamento entre as coordenadas. A força na direção X, entretanto, causa os momentos $K_{xx}(x_c - u)a_y$ na coordenada γ, bem como o momento $- k_{xx}(x_c - u)a_z$ na coordenada β. Analogamente, $K_{xy}(x_c - u)a_z$ na coordenada α, e $K_{xy}(x_c - u)a_x$ na coordenada γ são os momentos induzidos pela força que atua na direção Y. Os momentos $K_{xz}(x_c - u)a_x$ em torno de Y, e $-K_{xz}(x_c - u) \times a_y$ em torno de X, da mesma forma são causados pela força $- K_{xz} \times (x_c - u)$, na direção Z. Continuando de forma exatamente análoga para as restantes cinco coordenadas, e assumindo as seis condições de equilíbrio com a aplicação das expressões (2.21), em cada considerada [3], [4], [8], as equações de movimento, assumindo que existam m isoladores sobre o corpo, são

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_c &+ \sum_{i=1}^{m} K_{xx}^{i}\,(x_c - u) + \sum_{i=1}^{m} K_{xy}^{i}\,(y_c - v) + \sum_{i=1}^{m} K_{xz}^{i}\,(z_c - w) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (K_{xz}^{i}\,a_y^{i} - K_{xy}^{i}\,a_z^{i})\,(\alpha - \bar{\alpha}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (K_{xx}^{i}\,a_z^{i} - K_{xz}^{i}\,a_x^{i})\,(\beta - \bar{\beta}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (K_{xy}^{i}\,a_x^{i} - K_{yx}^{i}\,a_y^{i})\,(\gamma - \bar{\gamma}) = F_x
\end{aligned}
\qquad (2.22a)
$$

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y}_c &+ \sum_{i=1}^{m} K_{xy}^{i}\,(x_c - u) + \sum_{i=1}^{m} K_{yy}^{i}\,(y_c - v) + \sum_{i=1}^{m} K_{yz}^{i}\,(z_c - w) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (K_{yz}^{i}\,a_y^{i} - K_{yy}^{i}\,a_z^{i})\,(\alpha - \bar{\alpha}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (K_{xy}^{i}\,a_z^{i} - K_{yz}^{i}\,a_x^{i})\,(\beta - \bar{\beta}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (K_{yy}^{i}\,a_x^{i} - K_{xy}^{i}\,a_y^{i})\,(\gamma - \bar{\gamma}) = F_y
\end{aligned}
\qquad (2.22b)
$$

$$m\ddot{z}_c + \sum_{i=1}^{m} K^i_{xz}\,(x_c - u) + \sum_{i=1}^{m} K^i_{yz}\,(y_c - v) + \sum_{i=1}^{m} K^i_{zz}\,(z_c - w)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{zz}\, a^i_y - K^i_{yz}\, a^i_z)\,(\alpha - \bar{\alpha})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xz}\, a^i_z - K^i_{zz}\, a^i_x)\,(\beta - \bar{\beta})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{yz}\, a^i_x - K^i_{xz}\, a^i_y)\,(\gamma - \bar{\gamma}) = F_z \qquad (2.22c)$$

$$I_{xx}\,\ddot{\alpha} - I_{xy}\,\ddot{\beta} - I_{xz}\,\ddot{\gamma} + \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xz}\, a^i_y - K^i_{xy}\, a^i_z)\,(x_c - u)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{yz}\, a^i_y - K^i_{yy}\, a^i_z)\,(y_c - v)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{zz}\, a^i_y - K^i_{yz}\, a^i_z)\,(z_c - w)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{yy}\, {a^i_z}^2 + K^i_{zz}\, {a^i_y}^2 - 2\, K^i_{yz}\, a^i_z\, a^i_y)\,(\alpha - \bar{\alpha})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xz}\, a^i_y\, a^i_z + K^i_{yz}\, a^i_x\, a^i_z - K^i_{zz}\, a^i_x\, a^i_y - K^i_{xy}\, {a^i_z}^2)\,(\beta - \bar{\beta})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xy}\ a^i_y\ a^i_z + K^i_{yz}\ a^i_x\ a^i_y - K^i_{yy}\ a^i_x\ a^i_z$$

$$- K^i_{xz}\ a^{i\,2}_y)\ (\gamma - \bar{\gamma}) = M_x \qquad (2.22d)$$

$$I_{yy}\ \ddot{\alpha} - I_{xy}\ \ddot{\beta} - I_{yz}\ \ddot{\gamma} + \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xx}\ a^i_z - K^i_{xz}\ a^i_x)\ (x_c - u)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xy}\ a^i_z - K^i_{yz}\ a^i_x)\ (y_c - v)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xz}\ a^i_z - K^i_{zz}\ a^i_x)\ (z_c - w)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xz}\ a^i_y\ a^i_z + K^i_{yz}\ a^i_x\ a^i_z - K^i_{zz}\ a^i_x\ a^i_y - K^i_{xy}\ a^{i\,2}_z)\ (\alpha - \bar{\alpha})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xx}\ a^{i\,2}_z + K^i_{zz}\ a^{i\,2}_x - 2\ K^i_{xz}\ a^i_x\ a^i_z)\ (\beta - \bar{\beta})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xy}\ a^i_x\ a^i_z + K^i_{xz}\ a^i_x\ a^i_y - K^i_{xx}\ a^i_y\ a^i_z$$

$$- K^i_{yz}\ a^{i\,2}_z)\ (\gamma - \bar{\gamma}) = M_y \qquad (2.22e)$$

$$I_{zz}\ddot{\alpha} - I_{xz}\ddot{\beta} - I_{yz}\ddot{\gamma} + \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xy}\, a^i_x - K^i_{xx}\, a^i_y)\,(x_c - u)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{yy}\, a^i_x - K^i_{xy}\, a^i_y)\,(y_c - v)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{yz}\, a^i_x - K^i_{xz}\, a^i_y)\,(z_c - w)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xy}\, a^i_y\, a^i_z + K^i_{yz}\, a^i_x\, a^i_y - K^i_{yy}\, a^i_x\, a^i_z - K^i_{xz}\, a^{i\,2}_y)\,(\alpha - \bar{\alpha})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xy}\, a^i_x\, a^i_z + K^i_{xz}\, a^i_x\, a^i_y - K^i_{xx}\, a^i_y\, a^i_z - K^i_{yz}\, a^{i\,2}_x)\,(\beta - \bar{\beta})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K^i_{xx}\, a^{i\,2}_y + K^i_{yy}\, a^{i\,2}_x - 2\, K^i_{xy}\, a^i_x\, a^i_y)\,(\gamma - \bar{\gamma}) = M_z \qquad (2.22f)$$

As expressões (2.22) formam, portanto, um sistema de seis equações diferenciais ordinárias simultâneas, as quais regem o comportamento vibratório de corpos rígidos, da forma mais genérica possível.

As forças de amortecimento foram, por ora, desconsideradas. Entretanto, convém aqui ressaltar que pela própria concepção ideal dos isoladores, os termos que nas equações (2.22) contivessem amortecimento seriam exatamente análogos aos termos de rigidez, fazendo com que de fato a dificuldade seja nada mais do que o aumento do número de termos nas equações (2.22). Posteriormente, quando o sistema for representado matricialmente, o amortecimento será considerado.

2.4. DESACOPLAMENTO MODAL. UM PLANO DE SIMETRIA

As equações (2.22) são de caráter geral podendo, entretanto, sofrer simplificações consideráveis na maioria dos casos práticos. Tais simplificações decorrem basicamente da escolha apropriada do conjunto de referência, bem como de alguma condição de simetria resiliente do sistema. A tradução final destas particularidades é a redução no grau de acoplamento modal das coordenadas.

Desde que o sistema formado pelo núcleo do compressor, o qual se constitui no objetivo principal deste trabalho, possui um plano de simetria resiliente, as implicações deste fato no grau de acoplamento modal serão a seguir estudadas.

Para tal, tomemos o exemplo da figura 2.5, que possui as seguintes particularidades:

a) O sistema de referência (X,Y,Z) fixo ao corpo foi selecionado coincidente com os eixos principais de inércia. Então [8],

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \qquad (2.23)$$

b) Os isoladores possuem as suas direções principais elásticas (p,q,r) paralelas com os eixos $(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$. Logo, das expressões (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) e (2.17) decorre que

$$\begin{aligned} &K_{xx} = K_p \quad ; \quad K_{yy} = K_q \quad ; \quad K_{zz} = K_r \quad e \\ &K_{xy} = K_{xz} = K_{yz} = 0 \end{aligned} \qquad (2.24)$$

c) O plano YZ é um plano de simetria, assim sendo, os seguintes termos nas expressões (2.22) serão nulos

$$\sum_{i=1}^{m} K_{yy}^{i}\, a_x^{i} = \sum_{i=1}^{m} K_{zz}^{i}\, a_x^{i} = \sum_{i=1}^{m} K_{yy}^{i}\, a_x^{i}\, a_z^{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} K_{zz}^{i}\, a_x^{i}\, a_y^{i} = 0 \qquad (2.25)$$

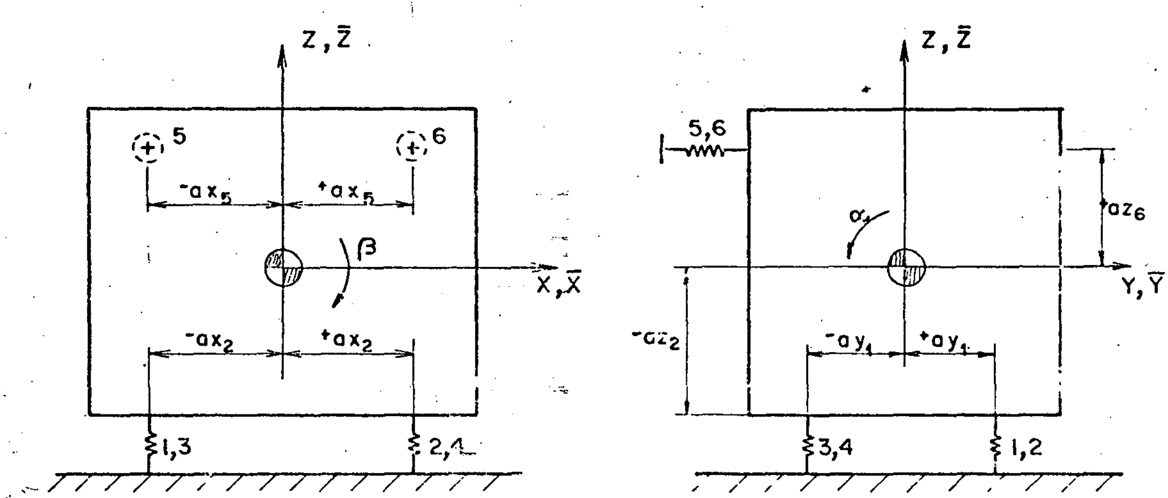


FIGURA 2.5. Exemplo de um corpo rígido, montado com um plano de simetria. O plano YZ é o plano de simetria, desde que os isoladores têm as mesmas propriedades.

As equações de movimento do sistema (2.22), tendo em conta (2.23), (2.24) e (2.25), são

$$m\ddot{x}_c + 6\, K_p\, (x_c - u) + \sum_{i=1}^{m} (K_p^{i}\, a_z^{i})\, (\beta - \bar{\beta})$$

$$- \sum_{i=1}^{m} (K_p^{i}\, a_y^{i})\, (\gamma - \bar{\gamma}) = F_x \qquad (2.26a)$$

$$m\ddot{y}_c + 6\, K_q\, (y_c - v) - \sum_{i=1}^{m} (K_q^i\, a_z^i)\, (\alpha - \bar{\alpha}) = F_y \tag{2.26b}$$

$$m\ddot{z}_c + 6\, K_r\, (z_c - w) + \sum_{i=1}^{m} (K_r^i\, a_y^i)\, (\alpha - \bar{\alpha}) = F_z \tag{2.26c}$$

$$I_{xx}\, \ddot{\alpha} - \sum_{i=1}^{m} (K_q^i\, a_z^i)\, (y_c - v)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K_r^i\, a_y^i)\, (z_c - w) = M_x \tag{2.26d}$$

$$I_{yy}\, \ddot{\beta} + \sum_{i=1}^{m} (K_p^i\, a_z^i)\, (x_c - u)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K_p^i\, a_z^{i\,2} + K_q^i\, a_x^{i\,2})\, (\beta - \bar{\beta})$$

$$- \sum_{i=1}^{m} (K_p^i\, a_y^i\, a_z^i)\, (\gamma - \bar{\gamma}) = M_y \tag{2.26e}$$

$$I_{zz}\, \ddot{\gamma} - \sum_{i=1}^{m} (K_p^i\, a_y^i)\, (x_c - u)$$

$$- \sum_{i=1}^{m} (K_p^i\, a_y^i\, a_z^i)\, (\beta - \bar{\beta})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (K_p^i\, a_y^{i\,2} + K_q^i\, a_x^{i\,2})\, (\gamma - \bar{\gamma}) = M_z \tag{2.26f}$$

Portanto, as expressões (2.26b), (2.26c) e (2.26d), envolvem somente as coordenadas y_c, z_c, α; enquanto que as demais contém, x_c, β, γ. Fisicamente, isto se traduz no chamado desacoplamento de coordenadas, ou seja, o corpo vibrará em modos envolvendo (x_c, β, γ) ou (y_c, z_c, α), com movimento no plano de simetria somente.

É importante ainda ressaltar que a condição (b) não é necessária para que o desacoplamento ocorra, sendo somente (a) e (c) suficientes. Em outras palavras, caso o sistema da figura 2.5 possuisse isoladores inclinados, ainda assim o desacoplamento se verificaria. O assunto será objeto de futuras considerações.

2.5. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES

A solução do sistema de equações (2.22) pressupõe a solução de um problema de autovalores, o qual será formulado a seguir.

Para tal, considera-se , inicialmente, as vibrações livres não amortecidas do corpo, cujas equações de movimento, neste caso, têm a seguinte representação matricial [12]

$$[M]\,\{\ddot{q}\} + [K]\,\{q\} = \{0\} \qquad (2.27)$$

onde $\{\ddot{q}\}$ e $\{q\}$ são vetores colunas n-dimensionais representativos das acelerações e deslocamentos generalizados do sistema, respectivamente. As matrizes de massa e rigidez são denotadas por $[M]$ e $[K]$.

Desta feita, o sistema (2.22) pode ser reescrito em acordo com a (2.27), ou seja,

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{z}_c \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{m} K_{xx}^{i} & \Sigma K_{xy} & \Sigma K_{xz} & \Sigma(K_{xz}a_y-K_{xy}a_z) & \Sigma(K_{xx}a_z-K_{xz}a_x) & \Sigma(K_{xy}a_x-K_{xx}a_y) \\ \Sigma K_{xy} & \Sigma K_{yy} & \Sigma K_{yz} & \Sigma(K_{yz}a_y-K_{yy}a_z) & \Sigma(K_{xy}a_z-K_{yz}a_x) & \Sigma(K_{yy}a_x-K_{xy}a_y) \\ \Sigma K_{xz} & \Sigma K_{yz} & \Sigma K_{zz} & \Sigma(K_{zz}a_y-K_{yz}a_z) & \Sigma(K_{xz}a_z-K_{zz}a_x) & \Sigma(K_{yz}a_x-K_{xz}a_y) \\ \Sigma(K_{xz}a_y-K_{xy}a_z) & \Sigma(K_{yz}a_y-K_{yy}a_z) & \Sigma(K_{zz}a_y-K_{yz}a_z) & \begin{matrix}\Sigma(K_{yy}a_z^2+K_{zz}a_y^2 \\ -2K_{yz}a_ya_z)\end{matrix} & \begin{matrix}\Sigma(K_{xz}a_ya_z+K_{yz}a_xa_z \\ -K_{zz}a_xa_y-K_{xy}a_z^2)\end{matrix} & \begin{matrix}\Sigma(K_{xy}a_ya_z+K_{yz}a_xa_y \\ -K_{yy}a_xa_z-K_{xz}a_y^2)\end{matrix} \\ \Sigma(K_{xx}a_z-K_{xz}a_x) & \Sigma(K_{xy}a_z-K_{yz}a_x) & \Sigma(K_{xz}a_z-K_{zz}a_x) & \begin{matrix}\Sigma(K_{xz}a_ya_z+K_{yz}a_xa_z \\ -K_{zz}a_xa_y-K_{xy}a_z^2)\end{matrix} & \begin{matrix}\Sigma(K_{xx}a_z^2+K_{zz}a_x^2 \\ -2K_{xz}a_xa_z)\end{matrix} & \begin{matrix}\Sigma(K_{xy}a_xa_z+K_{xz}a_xa_y \\ -K_{xx}a_ya_z-K_{yz}a_x^2)\end{matrix} \\ \Sigma(K_{xy}a_x-K_{xx}a_y) & \Sigma(K_{yy}a_x-K_{xy}a_y) & \Sigma(K_{yz}a_x-K_{xz}a_y) & \begin{matrix}\Sigma(K_{xy}a_ya_z+K_{yz}a_xa_y \\ -K_{yy}a_xa_z-K_{xz}a_y^2)\end{matrix} & \begin{matrix}\Sigma(K_{xy}a_xa_z+K_{xz}a_xa_y \\ -K_{xx}a_ya_z-K_{yz}a_x^2)\end{matrix} & \begin{matrix}\Sigma(K_{xx}a_y^2+K_{yy}a_x^2 \\ -2K_{xy}a_xa_y)\end{matrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

Inicialmente, estamos interessados em verificar se a (2.27), ou (2.28), admite uma solução separada no tempo e forma do tipo

$$q_i(t) = \phi_i \, f(t), \; i = 1, n$$

ou
$$\{q(t)\} = \{\phi\} \, f(t) \tag{2.29}$$

Aplicando-se a (2.29) na (2.27) e fazendo a pré-multiplicação de ambos os membros por $\{\phi\}^t$, segue-se que

$$\{\phi\}^t \, [M] \, \{\phi\} \, \ddot{f}(t) + \{\phi\}^t \, [K] \, \{\phi\} \, f(t) = \{0\} \tag{2.30}$$

Desde que supostamente $\{\phi\}^t [M] \{\phi\}$ é diferente de zero, a (2.30) pode ser reescrita

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\{\phi\}^t \, [K] \, \{\phi\}}{\{\phi\}^t \, [M] \, \{\phi\}} \tag{2.31}$$

Seguindo o procedimento padrão usado em separação de variáveis, os dois lados da (2.31) devem ser iguais a uma constante positiva. Fazendo a constante positiva igual a Ω^2 a (2.31), dá origem a duas outras expressões

$$\ddot{f}(t) + \Omega^2 \, f(t) = 0 \tag{2.32}$$

$$[K] \, \{\phi\} = \Omega^2 \, [M] \, \{\phi\} \tag{2.33}$$

A (2.32) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, cuja solução é

$$f(t) = A \text{ sen } (\Omega t - \psi) \tag{2.34}$$

onde A e ψ são amplitude e fase respectivamente.

Pode-se concluir, a esta altura, que caso a (2.27) admita solução do tipo (2.29), esta deve ser harmônica com freqüência Ω e fase ψ, de sorte que o movimento do sistema completo não sofre mudança em sua "forma" com o tempo. Somente a amplitude de cada coordenada varia harmonicamente com o tempo.

A questão remanescente consiste em se determinar qual a freqüência da solução (2.29). Para tal, observa-se a (2.33), rearranjada da forma

$$\left[[K] - \Omega^2 \ [M] \right] \{\phi\} = \{0\} \tag{2.35}$$

De fato, a (2.35) consiste em um sistema de n equações algébricas lineares, cuja solução não trivial é possível somente se

$$\Delta = \left| [K] - \Omega^2 \ [M] \right| = 0 \tag{2.36}$$

onde Δ é comumente conhecido como determinante característico. A solução de Δ fornece o polinômio característico de ordem n, na variável Ω^2, ou seja,

$$p_1 \lambda^n + p_2 \lambda^{n-1} + p_3 \lambda^{n-2} + \ldots p_n \lambda + p_{n+1} = 0 \tag{2.37}$$

onde $\lambda = \Omega^2$.

O problema de se determinar os valores de Ω^2 para os quais a (2.35) possui solução não trivial é conhecido como problema de autovalores. As n raízes do polinômio característico são os chamados autovalores.

Desde que $[K]$ e $[M]$ sejam simétricas e positivas definidas, mostra-se que as raízes do polinômio (2.37) são reais e positivas [9]. A raiz quadrada positiva dos autovalores são as freqüências naturais Ω_i do sistema.

A forma deformada assumida pelo sistema quando vibrando em uma de suas freqüências Ω_i, i = 1, n, caracterizada pelo autovetor $\{\phi\}_i$ recebe o nome de modo normal de vibração.

Os modos normais de vibração $\{\phi\}_i$ são obtidos a partir da (2.35), após um processo qualquer de normalização. Em soluções computacionais é usual normalizar os vetores com respeito à matriz $[M]$, fazendo $\{\phi\}_i^t \; [M] \; \{\phi\}_i = 1$.

Um programa computacional com vistas a solucionar o problema aqui formulado, ou seja, a determinação das freqüências naturais de vibração de corpos rígidos vibrando sobre isoladores lineares, será apresentado no Capítulo seguinte.

C A P Í T U L O 3

DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DOS MODOS NORMAIS E FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS

3.1. INTRODUÇÃO

A finalidade principal deste Capítulo reside na determinação das ressonâncias e modos normais de vibração do compressor em estudo, a partir da elaboração de um programa computacional com vistas a solucionar o problema de autovalores formulado no Capítulo precedente.

Primeiramente, um teste de verificação do desempenho do programa será feito, mediante a aplicação de um exemplo, cujos resultados são seguramente conhecidos

Uma vez verificado o programa, será feito o levantamento experimental dos dados de entrada necessários para o compressor e, finalmente, apresentados os resultados numéricos.

O Apêndice A contém um diagrama de fluxo (figura A.1) com os passos básicos para a computação dos modos de vibração de corpos rígidos com suspensão resiliente ideal, bem como algumas notas sobre o algorítmo de JACOBI, usado para resolver o problema de autovalores.

3.2. APRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO PARA CERTIFICAÇÃO DOS RESULTADOS

Serão, a seguir, computados numericamente os autovalores e autovetores de turbinas PTGA-28 "PRATT AND WITNEY OF CANADA", montadas sobre suspensão KLEIN.

A figura 3.1 mostra o esquema de montagem da turbina em estudo sobre isoladores ideais, não dissipativos. Os dados experimentais de rigidez, constantes inerciais e forma de montagem foram extraídos do relatório LVA-EC-81/07 [13].

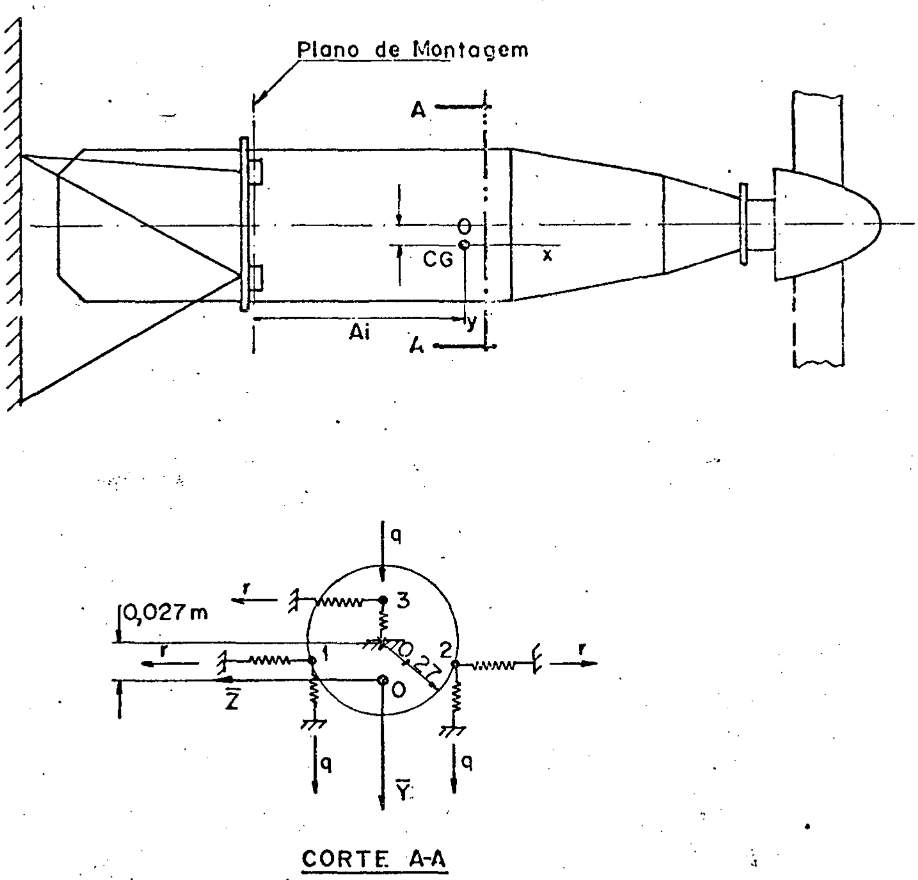


FIGURA 3.1. Esquema de montagem de um turbina PTGA-28. Os eixos principais elásticos são paralelos aos eixos inerciais. $(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$ são eixos principais de inércia.

3.2.1. RESULTADOS NUMÉRICOS DA TURBINA

Os dados de entrada do sistema, fornecidos por [13], são mostrados às páginas 33 e 34.

Resultados numéricos, representados pelas freqüências naturais e modos normais de vibração da turbina, podem ser vistos à página 35. Cada modo de vibração é representado por uma coluna da matriz de autovetores, correspondente à freqüência natural de vibração não amortecida.

3.2.2. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com base nos resultados numéricos, conclui-se, portanto, que o programa computacional satisfaz totalmente os propósitos para os quais foi elaborado, porquanto que os resultados estão exatamente em concordância com o que seria esperado para um sistema possuindo as características do exemplo usado. Neste sentido, cabe aqui ressaltar que existem três modos (1º, 2º, 6º) que só possuem movimento no plano XY de simetria, e outros três (3º, 4º, 5º) que possuem movimento em planos perpendiculares àquele.

Os resultados foram bons, também no que diz respeito à precisão dos mesmos, quando confrontados com resultados fornecidos por [13].

MASSA = 0.25500D+03

IXX = 0.11420D+02
IYY = 0.75400D+02
IZZ = 0.75350D+02
IXY = 0.0
IXZ = 0.0
IYZ = 0.0

RIGIDEZ DOS ISOLADORES SEGUNDO
OS EIXOS PRINCIPAIS ELASTICOS

ISOLADOR N. 1

KP = 0.10400D+08
KQ = 0.24200D+07
KR = 0.21000D+07

ISOLADOR N. 2

KP = 0.10400D+08
KQ = 0.24200D+07
KR = 0.21000D+07

ISOLADOR N. 3

KP = 0.91700D+07
KQ = 0.19700D+07
KR = 0.26000D+07

COORDENADAS DOS CENTROS ELASTICOS

ISOLADOR N. 1

AX = -0.21200D+00
AY = 0.13500D+00
AZ = 0.23300D+00

ISOLADOR N. 2

AX = -0.21200D+00
AY = 0.13500D+00
AZ * -0.23300D+00

ISOLADOR N. 3

AX = -0.21200D+00
AY = -0.26900D+00
AZ = 0.0

COSSENOS DIRETORES

ISOLADOR N. 1

LXP = 0.10000D+01
LXQ = 0.0
LXR = 0.0
LYP = 0.0
LYQ = 0.10000D+01
LYR = 0.0
LZP = 0.0
LZQ = 0.0
LZR = 0.10000D+01

ISOLADOR N. 2

LXP = 0.10000D+01
LXQ = 0.0
LXR = 0.0
LYP = 0.0
LYQ = 0.10000D+01
LYR = 0.0
LZP = 0.0
LZQ = 0.0
LZR = 0.10000D+01

ISOLADOR N. 3

LXP = 0.10000D+01
LXQ = 0.0
LXR = 0.0
LYP = 0.0
LYQ = 0.10000D+01
LYR = 0.0
LZP = 0.0
LZQ = 0.0
LZR = 0.10000D+01

MATRIZ DE INERCIA

0.25500D+03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.25500D+03	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.25500D+03	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.11420D+02	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.75400D+02	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.75350D+02

MATRIZ DE RIGIDEZ

0.29970D+08	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.34127D+06
0.0	0.68100D+07	0.0	0.0	0.0	-0.14437D+07
0.0	0.0	0.68000D+07	-0.13240D+06	0.14416D+07	0.0
0.0	0.0	-0.13240D+06	0.52744D+06	-0.28069D+05	0.0
0.0	0.0	0.14416D+07	-0.28069D+05	0.14348D+07	0.0
-0.34127D+06	-0.14437D+07	0.0	0.0	0.0	0.13487D+07

FREQUÊNCIAS NATURAIS

0.54577D+02
0.29169D+02
0.29092D+02
0.34397D+02
0.17260D+02
0.16658D+02

MATRIZ CONTENDO OS AUTOVETORES

0.62603D-01	-0.10125D-02	0.0	0.0	0.0	0.12065D-02
0.17932D-03	0.52239D-01	0.0	0.0	0.0	0.34534D-01
0.0	0.0	0.50150D-01	-0.10701D-01	-0.35945D-01	0.0
0.0	0.0	0.58054D-01	0.29011D+00	-0.53745D-02	0.0
0.0	0.0	0.65166D-01	-0.11293D-01	0.94279D-01	0.0
-0.28736D-02	-0.63504D-01	0.0	0.0	0.0	0.96075D-01

3.3. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A MEDIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS INERCIAIS DO NÚCLEO DO COMPRESSOR

A posição do centro de massa do núcleo e os seus momentos principais de inércia foram determinados experimentalmente em [7].

Com vistas ao aproveitamento destes resultados, bem como pelas simplificações decorrentes de se trabalhar com produtos de inércia nulos, adotou-se o sistema referencial (X,Y,Z), fixo ao corpo, coincidente com os eixos principais.

A técnica do pêndulo simples [8], [14] foi usada para a determinação da posição do centro de massa do corpo. Os momentos principais de inércia do núcleo foram obtidos por meio de um pêndulo trifilar [8], [14].

Os resultados fornecidos pelo experimento foram [7]

$$I_{XX} = 113 \text{ Kg.cm}^2$$

$$I_{YY} = 112 \text{ Kg.cm}^2$$

$$I_{ZZ} = 112 \text{ Kg.cm}^2$$

MASSA DO NÚCLEO = 5,5 Kg.

$$I_{XY} = I_{XZ} = I_{YZ} = 0$$

3.4. DETERMINAÇÃO DAS COMPONENTES PRINCIPAIS DE RIGIDEZ DOS ISOLADORES DO NÚCLEO

3.4.1. BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE O EXPERIMENTO

O valor de rigidez medido na direção de um dos eixos prin cipais elásticos de um isolador linear é a chamada rigidez principal. No presente caso, os isoladores são molas helicoidais e, como tal, possuem um dos eixos principais elásticos perpendicular à secção transversal e passando pelo centro da mesma. Assim sendo, quaisquer dois eixos perpendiculares na secção transversal da mola são eixos principais elásticos, uma vez que as molas helicoidais possuem simetria elástica transversal [14]. A figura 3.2, a seguir, mostra o que foi dito.

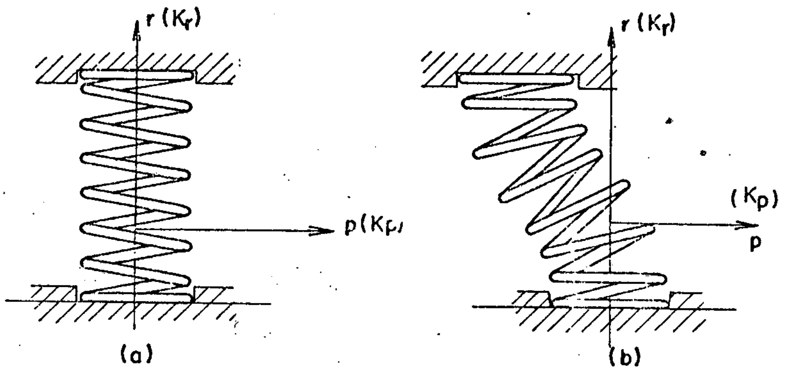


FIGURA 3.2. (a) Montagem típica de uma mola helicoidal como um isolador. As direções p e r são direções principais elásticas. (b) Deflexão lateral da mola helicoidal, na direção elástica principal.

3.4.2. MEDIÇÃO DA RIGIDEZ VERTICAL DOS ISOLADORES (K_r)

A figura 3.3 mostra o esquema do experimento realizado, a fim de se determinar a rigidez dos isoladores na direção vertical (K_r).

Com o sistema apropriadamente calibrado, o experimento consistiu em se registrar, através de (3), o sinal proveniente de (2), para cada um dos valores de carga disponíveis. Os resultados experimentais estão plotados na figura 3.4, a seguir.

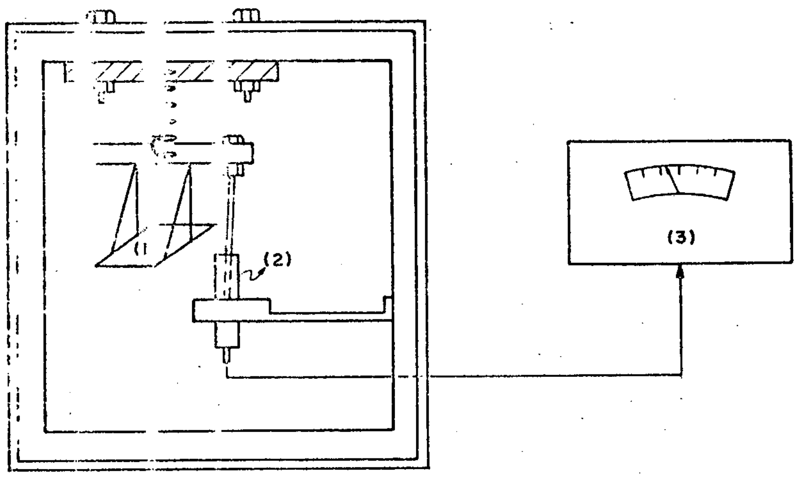


FIGURA 3.3. Esquema da montagem usada para medir a rigidez vertical dos isoladores.

(1) Massas calibradas (gramas)
(2) Transdutor de deslocamento sem contato IWT 301 VEB
(3) Medidor elétrico de deformação 4D5 VEB.

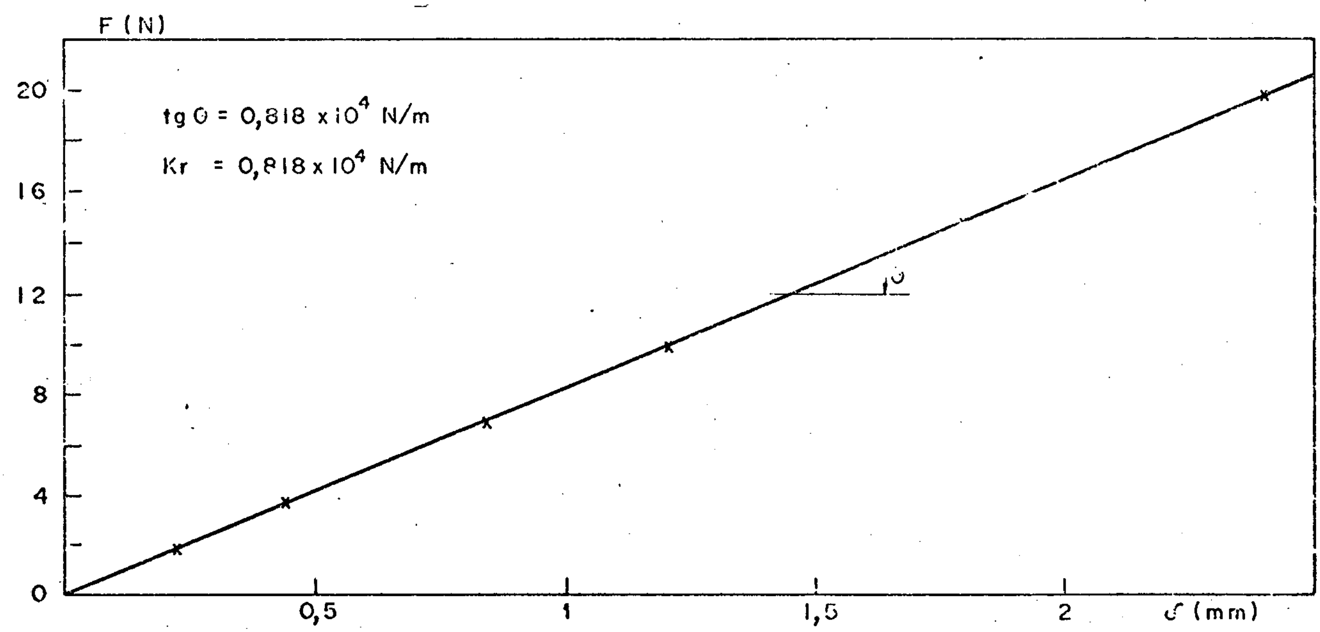


FIGURA 3.4. Resultados experimentais da rigidez vertical (K_r).

O valor da rigidez vertical (K_r) é definido como sendo [14]

$$K_r = \frac{P}{r}\ \mathrm{tg}\ \theta = 0{,}818 \times 10^4\ \mathrm{N/m} \qquad (3.1)$$

3.4.3. MEDIÇÃO DA RIGIDEZ LATERAL DOS ISOLADORES

Na figura 3.5 está esquematizado o experimento, com o qual determinou-se os valores de rigidez transversal dos isoladores (K_p, K_q). As mudanças em relação ao item anterior dizem respeito somente ao sentido do carregamento da mola, que neste caso é paralelo ao plano da secção transversal da mesma.

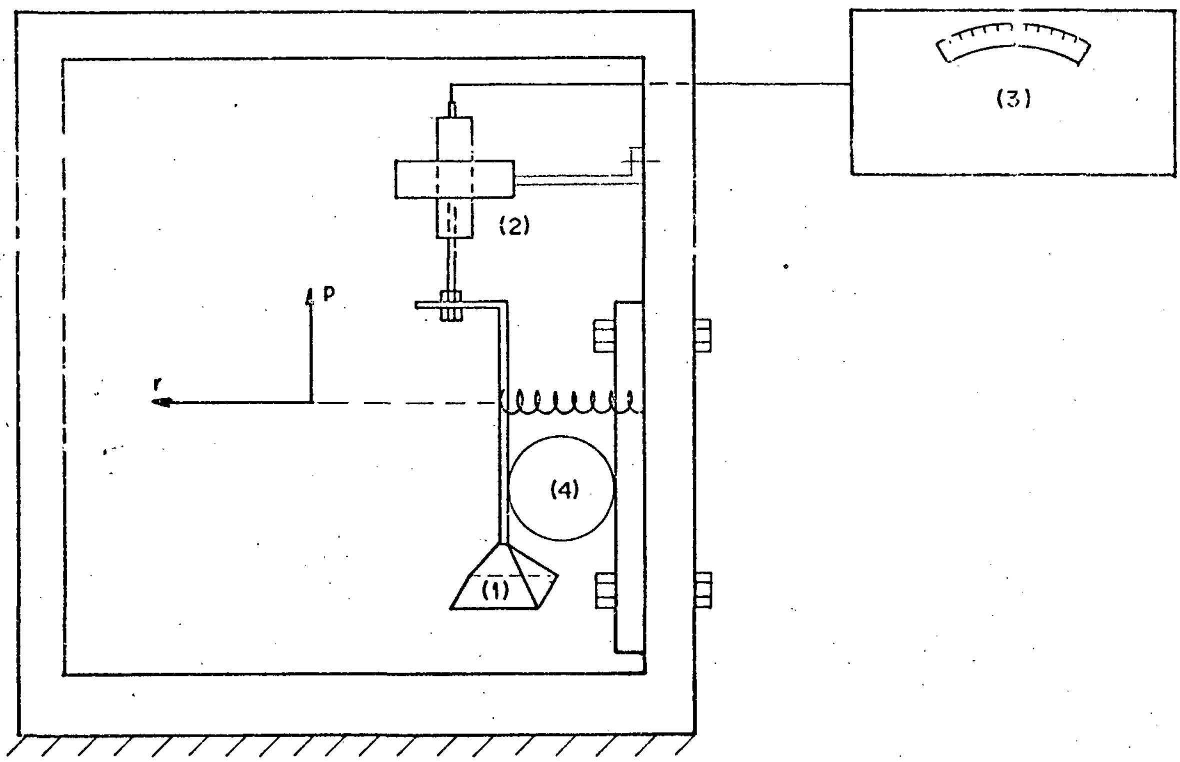


FIGURA 3.5. Esquema da montagem para medição da rigidez lateral da mola (K_p, K_q).

(1) Massa calibrada
(2) Transdutor de deslocamento IWT 301 VEB
(3) Medidor elétrico de deformação 4D3 VEB
(4) Rolete cilíndrico de madeira

Neste caso, o procedimento experimental foi exatamente similar ao item precedente. O rolete (4) foi introduzido para que as secções extremas da mola sejam forçadas a permanecer paralelas durante a deflexão, de sorte a reproduzir com a maior aproximação possível o isolador idealizado.

Os resultados experimentais obtidos estão plotados na figura 3.6, a seguir.

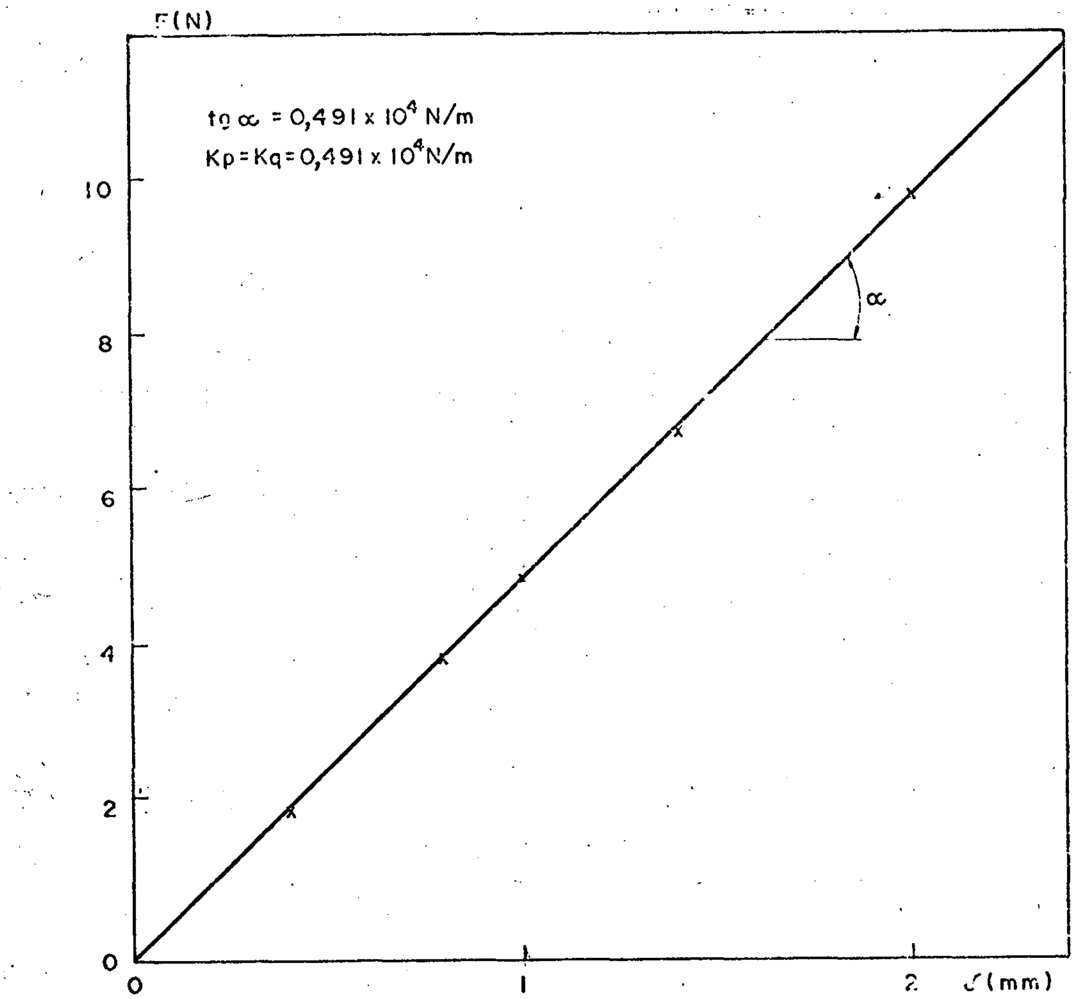


FIGURA 3.6. Resultados experimentais para a rigidez lateral dos isoladores (K_p, K_q).

A rigidez lateral é, por definição, dada pela seguinte equação [14]

$$K_p = \frac{F}{\delta_p} = tg\,\eta = 0,491 \times 10^4 \text{ N/m} \tag{3.2}$$

Mas, de acordo com referências anteriores, por razões de simetria, a seguinte relação é válida

$$K_q = K_p = 0,491 \times 10^4 \text{ N/m} \tag{3.3}$$

A esta altura, chama-se a atenção para o fato de que as retas das figuras 3.4 e 3.6 não são ajustadas, configurando assim o caráter bastante linear dos isoladores utilizados no compressor.

3.5. DETERMINAÇÃO TEÓRICA DAS CONSTANTES DE RIGIDEZ DAS MOLAS HELICOIDAIS, SEGUNDO AS DIREÇÕES PRINCIPAIS ELÁSTICAS

A rigidez de uma mola helicoidal, segundo a sua direção principal r (figura 3.2), pode ser calculada pela seguinte expressão [8], [14]

$$K_r = \frac{F_r}{\delta_r} = \frac{Gd^4}{8nD^3}, \tag{3.4}$$

onde K_r - rigidez axial

F_r - força aplicada

δ_r - deflexão axial resultante da força F_r

G - módulo de elasticidade ao cisalhamento do material da mola d - diâmetro do arame

: - diâmetro médio da espiral

- númcro de espiras ativas

Neste caso particular, obteve-se os seguintes dados

9,3

$$\begin{cases} D = 9,3 \times 10^{-3}\ m \\ d = 1,6\ 10^{-3}\ m \\ n \simeq 10 \\ G = 79,29\ GN/m^2 \end{cases}$$

Substituindo-se estes valores em (3.4), tem-se

$$K_r = \frac{79,29 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-3})^4}{8 \times 10 \times (9,296 \times 10^{-3})^3} = 8085\ N/m \qquad (3.5)$$

Para o cálculo da rigidez lateral, ou seja, na direção q, a seguinte expressão é usada [14]

$$K_p = \frac{10^6\ d^4}{nD(0,204\ h_s^2 + 0,256\ D^2)} = \frac{F_p}{\delta_p} \qquad (3.6)$$

onde K_p - rigidez lateral (ℓb/in)

F_p - força aplicada na direção p (ℓb)

δ_p - deflexão devido a força na direção p (in)

d - diâmetro do arame (in)

n - número de espiras ativas

D - diâmetro médio da espiral (in)

h_s - altura de trabalho da mola. Neste caso igual a 0,77 in.

Aplicando-se novamente os dados levantados na (3.6), tem-se que

$$K_p = \frac{10^6(0,063)^4}{10 \times 0,366(0,204(0,77)^2 + 0,256(0,366)^2)} \simeq 28,9 \quad \ell b/in$$

ou $$K_p = 5060 \text{ N/m} \tag{3.7}$$

A comparação dos resultados teóricos (3.5) e (3.7) com os obtidos experimentalmente indicam que os experimentais são muito próximos dos esperados teoricamente, com variações percentuais menores do que 5%. Na computação numérica serão usados os valores experimentais.

3.6. MEDIÇÃO DOS COSSENOS DIRETORES DOS ISOLADORES DO NÚCLEO

3.6.1. DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

Para a computação da matriz de rigidez do sistema, de acordo com às referências feitas no Capítulo precedente, são necessários os cossenos diretores dos eixos principais elásticos de cada isolador, com relação ao sistema cartesiano inercial.

Na figura 3.7 o conjunto completo de sistemas cartesianos na forma em que foi escolhido para o compressor, pode ser observado

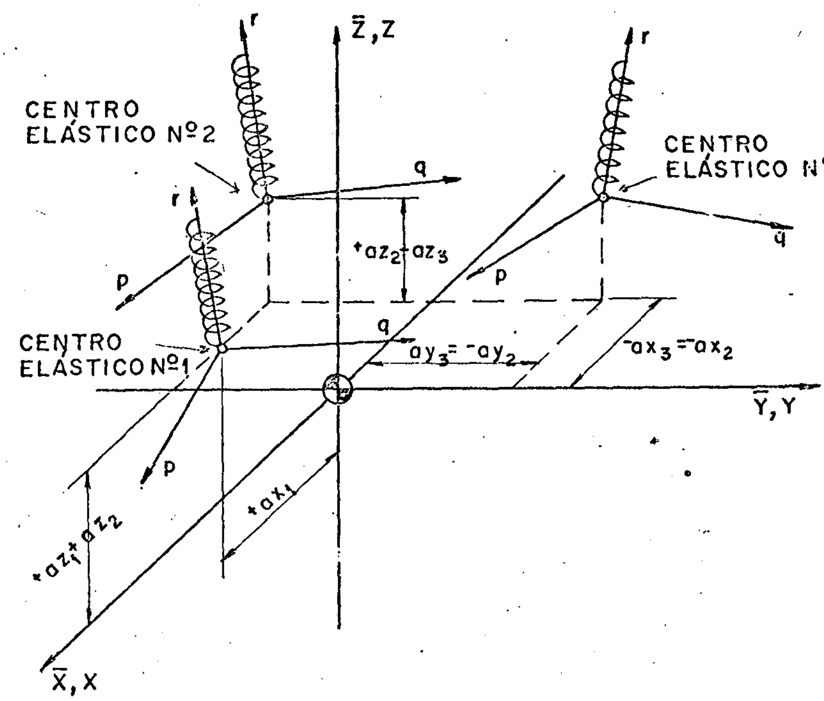


FIGURA 3.7. Conjunto de sistemas cartesianos escolhidos para o compressor. (X,Y,Z) são eixos principais de inércia.

Em face das dificuldades naturais em se determinar analiticamente os cossenos diretores, optou-se pela confecção de um modelo em madeira, semelhante à figura 3.7. A partir daí, os 27 ângulos e correspondentes cossenos diretores procurados foram, com maior facilidade, rapidez e precisão, determinados. A leitura dos ângulos foi feita com o auxílio de um transferidor ótico.

3.6.2. RESULTADOS DAS MEDIÇÕES

Os ângulos medidos, ao lado dos respectivos cossenos diretores, são mostrados na Tabela 1.

ISOLADOR Nº 1				ISOLADOR Nº 2				ISOLADOR Nº 3			
$\widehat{XP}$	11°	λ_{XP}	0,9816	$\widehat{XP}$	5°	λ_{XP}	0,9961	$\widehat{XP}$	5°	λ_{XP}	0,9961
$\widehat{XQ}$	90°	λ_{XQ}	0,0000	$\widehat{XQ}$	90°	λ_{XQ}	0,0000	$\widehat{XQ}$	90°	λ_{XQ}	0,0000
$\widehat{XR}$	79°	λ_{XR}	0,1908	$\widehat{XR}$	95°	λ_{XR}	-0,0870	$\widehat{XR}$	95°	λ_{XR}	-0,0870
$\widehat{YP}$	90°	λ_{YP}	0,0000	$\widehat{YP}$	90°	λ_{YP}	0,0000	$\widehat{YP}$	90°	λ_{YP}	0,0000
$\widehat{YQ}$	0°	λ_{YQ}	1,0000	$\widehat{YQ}$	11°	λ_{YQ}	0,9816	$\widehat{YQ}$	11°	λ_{YQ}	0,9816
$\widehat{YR}$	90°	λ_{YR}	0,0000	$\widehat{YR}$	101°	λ_{YR}	-0,1908	$\widehat{YR}$	79°	λ_{YR}	0,1908
$\widehat{ZP}$	101°	λ_{ZP}	-0,1908	$\widehat{ZP}$	85°	λ_{ZP}	0,0870	$\widehat{ZP}$	85°	λ_{ZP}	0,0870
$\widehat{ZQ}$	90°	λ_{ZQ}	0,0000	$\widehat{ZQ}$	79°	λ_{ZQ}	0,1908	$\widehat{ZQ}$	101°	λ_{ZQ}	-0,1908
$\widehat{ZR}$	11°	λ_{ZR}	0,9816	$\widehat{ZR}$	11°	λ_{ZR}	0,9816	$\widehat{ZR}$	11°	λ_{ZR}	0,9816

TABELA 1 - Cossenos diretores medidos.

3.7. RESULTADOS NUMÉRICOS. MODOS NORMAIS E FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DO NÚCLEO

Uma vez de posse dos dados necessários, determinados nos itens (3.3), (3.4) e (3.6), o programa computacional foi alimentado, fornecendo como saída os modos normais e as respectivas freqüências naturais de vibração do núcleo do compressor. Os resultados numéricos podem ser vistos a seguir.

Os modos de vibração estão impressos por coluna na matriz dos autovetores. As coordenadas modais encontram-se na mesma ordem da representação matricial adotada (veja equação 2.28).

3.8. CONCLUSÕES

Desde que o sistema referencial, fixo ao corpo, foi tomado coincidente com os eixos inerciais principais, os resultados numéricos indicam claramente a existência de um plano (XZ) de simetria, fornecendo assim confirmação para as iniciais suposições. Então, existem três modos (1º, 3º, 5º), cujos movimentos nas três coordenadas x_c, y_c, β são acoplados, mas independentes do movimento em qualquer das outras três y_c, α, γ. Consequentemente, os três demais modos (2º, 4º, 6º) possuem vibração acoplada nas coordenadas y_c, α, γ.

As freqüências naturais do sistema são, de maneira geral, muito próximas e de baixo valor, indicando uma eventual dificuldade prática em se excitar isoladamente cada modo na sua forma verdadeira.

O amortecimento na solução do sistema foi desconsiderado, posto que o objetivo relevante do Capítulo que ora se conclui foi a determinação numérica dos modos e freqüências naturais de vibração, parâmetros estes cuja sensibilidade ao amortecimento é reconhecidamente pequena.

FREQUÊNCIAS NATURAIS

0.70059D+01
0.71199D+01
0.10570D+02
0.12361D+02
0.12901D+02
0.12189D+02

MATRIZ CONTENDO OS AUTOVETORES

0.38883D+00	0.0	-0.37780D-01	0.0	0.17426D+00	0.0
0.0	0.38590D+00	0.0	-0.14158D+00	0.0	[illegible]
0.17980D-01	0.0	0.42423D+00	0.0	0.51857D-01	0.0
0.0	0.37346D+01	0.0	0.56593D+01	0.0	-0.54049D+01
-0.39186D+01	0.0	-0.37946D+00	0.0	0.85532D+01	0.0
0.0	0.24256D+00	0.0	0.64399D+01	0.0	0.69105D+01

CAPÍTULO 4

ANÁLISE MODAL

4.1. INTRODUÇÃO

A compreensão correta do comportamento dinâmico de estruturas, ou corpos elasticamente montados, tem-se constituído em uma parte importante do processo de projeto de tais sistemas mecânicos. Para tal, é necessário que se determine com precisão as propriedades dinâmicas do sistema, em geral, utilizando-se técnicas computacionais, sendo porém necessária uma verificação experimental dos resultados.

Uma vez caracterizadas tais propriedades, o comportamento do sistema em regime normal de trabalho pode ser predito e, então, controlado e otimizado.

Usualmente pode-se medir as propriedades dinâmicas de uma estrutura através da chamada Análise Modal. Esta técnica permite conhecer as propriedades dinâmicas de um sistema vibrante, por meio de identificação de seus modos de vibração.

Neste trabalho, em particular, a Análise Modal do sistema em estudo decorre principalmente da necessidade de se verificar fisicamente a acuidade do modelo matemático adotado, para predizer teoricamente o comportamento dinâmico do sistema.

Por motivos que serão posteriormente discutidos, a Análise Modal do sistema em estudo foi feita por duas técnicas distintas:

- Análise Modal via digital, utilizando-se computador HP 545 C-FOURIER ANALYZER;
- Análise Modal via analógica, utilizando-se cadeira de medição convencional.

4.2. DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DAS FREQÜÊNCIAS NATURAIS DO NÚCLEO

No Capítulo precedente, foi apresentado o cálculo numérico das freqüências naturais e modos normais de vibração de núcleo do compressor resilientemente montado.

A verificação experimental das freqüências naturais, através da medição via digital da resposta em freqüência do núcleo, será o objetivo deste item.

Na figura 4.1, a seguir, o esquema da cadeia de medição utilizada pode ser visto.

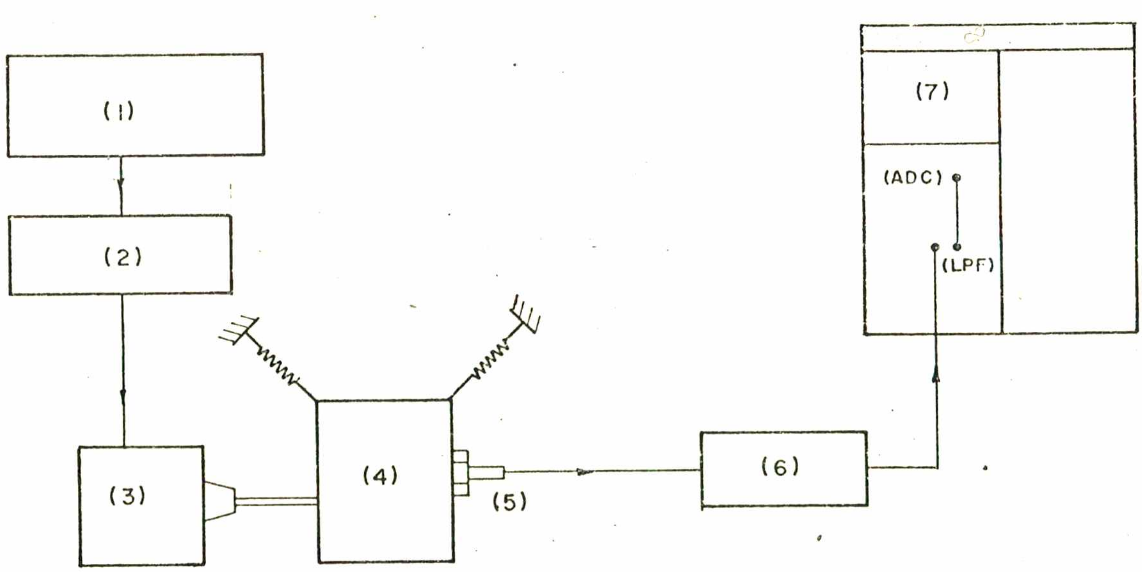


FIGURA 4.1. Cadeia de medição utilizada na medição da resposta do núcleo.

(1) Gerador de sinais Tipo 1027 B&K
(2) Amplificador de potência Tipo 2706 B&K
(3) Excitador de vibrações Tipo 4809 B&K
(4) Núcleo do compressor em sua montagem original
(5) Transdutor de sinal (acelerômetro) Tipo 4366 B&K
(6) Pré-amplificador Tipo 2626 B&K
(7) Computador HP 5451C-FOURIER ANALYZER

Com base nos resultados teóricos, sabia-se que existiam três ressonâncias envolvendo movimento em x, z, β e outras três envolvendo y, α, γ. Por este motivo, optou-se pela medição das curvas de resposta, tendo em conta o desacoplamento do sistema, ou seja, primeiramente com o eixo de sensibilidade do acelerômetro coincidente com a direção Z, e posteriormente com a direção y. Desta feita, o primeiro espectro obtido, mostrado na figura 4.2, contém as ressonâncias referentes aos modos com deslocamentos em (x, z, β), enquanto que o segundo, mostrado na figura 4.3, contém as freqüências naturais referentes aos outros três modos restantes.

Note-se que nas figuras 4.2 e 4.3 aparece um pico ressonante em torno de 3 Hz, o qual no entanto não é uma freqüência natural do núcleo, e sim do próprio excitador de vibração, em face do tipo de montagem que foi utilizada.

Na figura 4.4 está mostrada a curva de resposta do excitador em sua montagem, obtida com o transdutor diretamente a ele preso, com vistas a justificar a afirmação anterior.

Os parâmetros amostrais selecionados no FOURIER ANALYZER, com base nos resultados teóricos foram os seguintes:

a) Freqüência de corte F_C = 50 Hz
b) Freqüência máxima F_{max} = 100 Hz
c) Número de pontos N = 4096
d) Número de médias 200
e) Sinal ruído branco (2 Hz - 2 KHz)

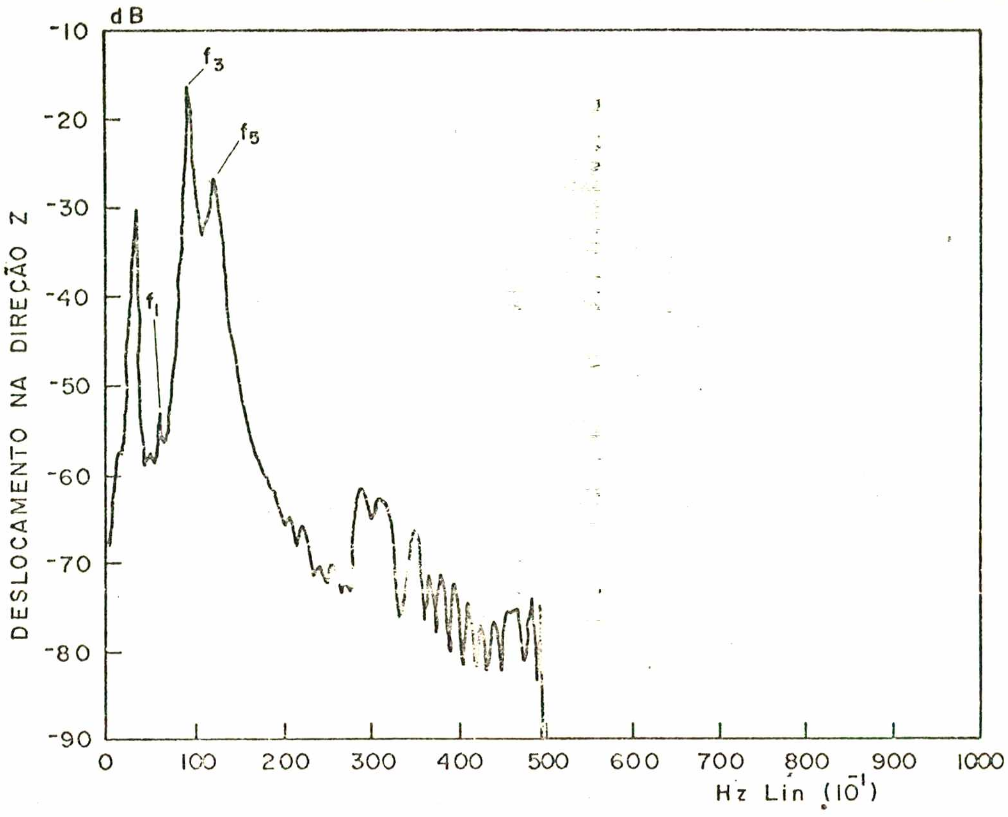


FIGURA 4.2. Espectro das vibrações do núcleo do compressor. Acelerômetro com eixo de sensibilidade na direção Z. $f_1 = 6,64$ Hz; $f_3 = 9,60$ Hz; $f_5 = 12,8$ Hz.

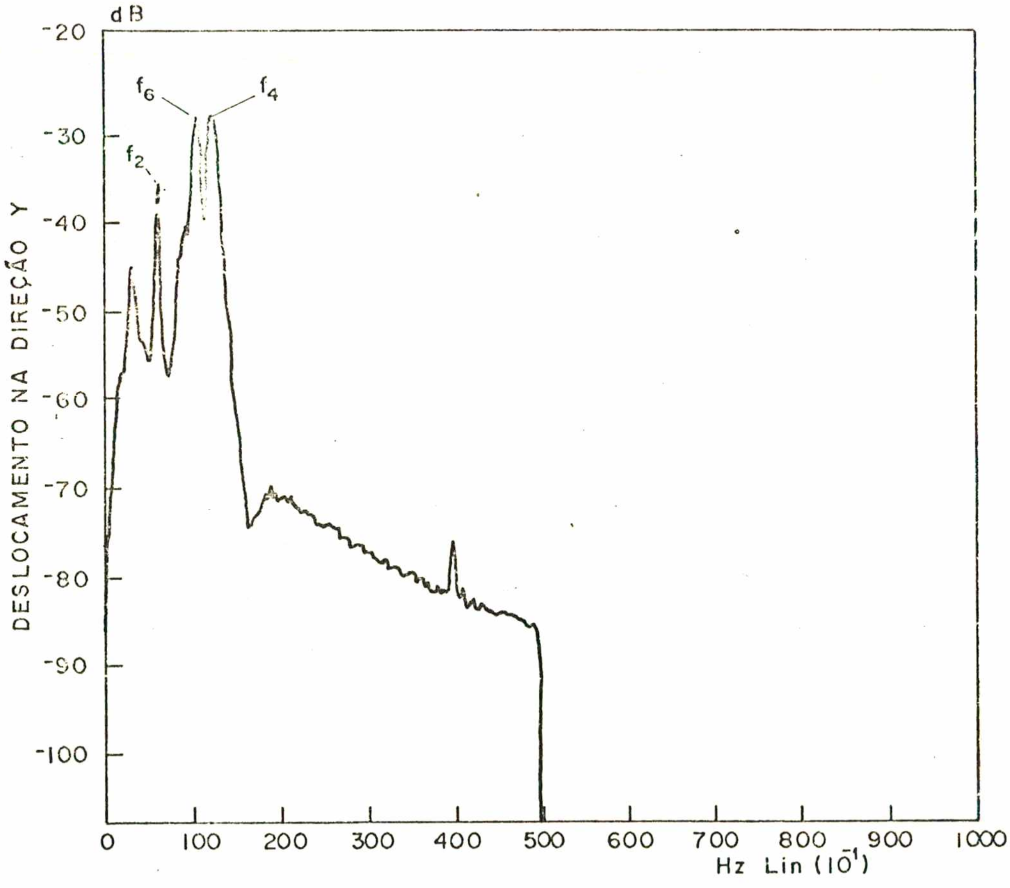


FIGURA 4.3. Espectro das vibrações do núcleo. Acelerômetro com eixo de sensibilidade na direção Y. $f_2 = 6,85$ Hz; $f_6 = 11,14$ Hz; $f_4 = 12,5$ Hz.

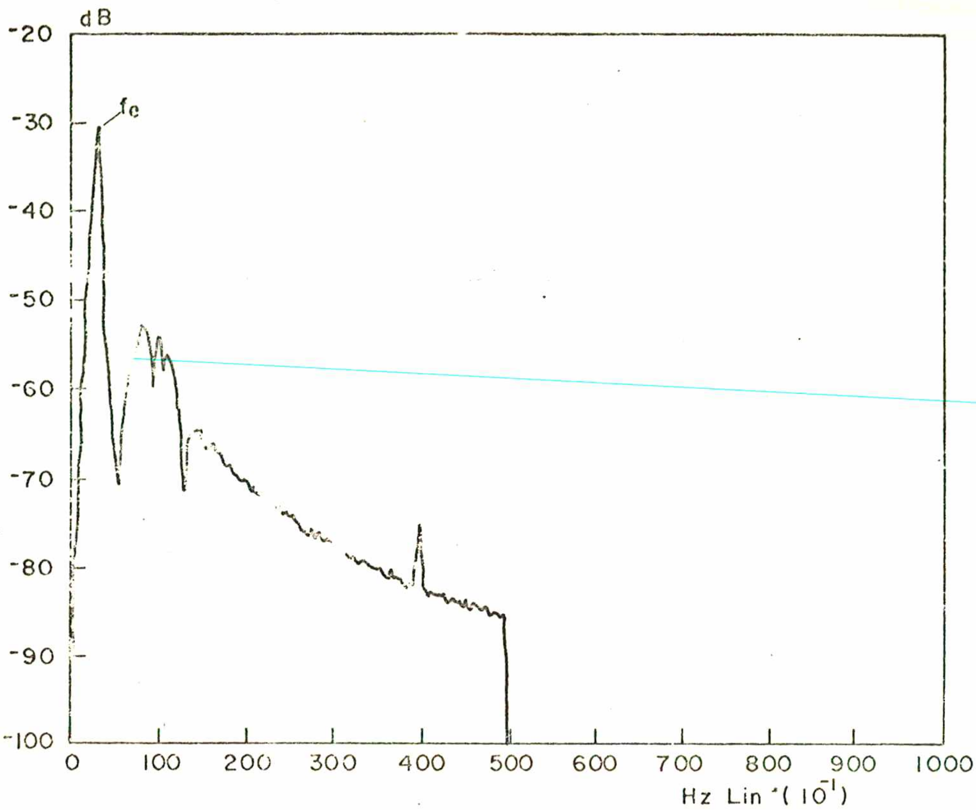


FIGURA 4.4. Espectro do sistema de excitação. Acelerômetro preso diretamente ao excitador. f_e = 3,1 Hz.

A Tabela 2, a seguir, mostra os erros percentuais entre os valores das freqüências calculadas e medidas.

MODOS		FREQÜÊNCIAS NATURAIS (Hz)		DIFERENÇA %
		VALORES CALCULADOS	VALORES MEDIDOS	
ENVOLVENDO x, z, β	f_1	7,0059	6,64	5,5
	f_3	10,57	9,6	10,1
	f_5	12,901	12,8	0,8
ENVOLVENDO y, α, γ	f_2	7,1199	6,85	3,9
	f_6	12,189	11,14	9,4
	f_4	12,361	12,5	-1,1

TABELA 2 - Erros percentuais entre as freqüências calculadas e medidas.

4.3. ANÁLISE MODAL VIA DIGITAL

A utilização do Analisador de Fourier para a identificação dos parâmetros modais de um corpo elasticamente montado é baseada na medição de funções de transferência. Tais dados medidos permitem a identificação digital dos parâmetros modais necessários para definir completamente cada modo de vibração do sistema. Esta técnica é implementada no HP 5451C FOURIER ANALYZER. O sistema funciona utilizando a técnica de excitacão em um único ponto, com espectro de banda larga, de sorte que todos os modos sejam excitados simultaneamente [15]. Tal excitação com banda larga pode ser obtida do impacto de um martelo instrumentado, ou de um excitador de vibrações acionado por um gerador de Ruído Branco.

4.3.1. ANÁLISE MODAL UTILIZANDO TÉCNICA DE IMPACTO

Em uma primeira tentativa de se fazer a Análise Modal do compressor, utilizou-se a excitação por impacto. Para tal, foi utilizado um martelo instrumentado com uma célula de força de onde provinha o sinal de excitação. A resposta do sistema foi medida nos vários pontos por meio de um acelerômetro piezoelétrico.

A cadeia de medição utilizada neste ensaio está esquematizada na figura 4.5, a seguir.

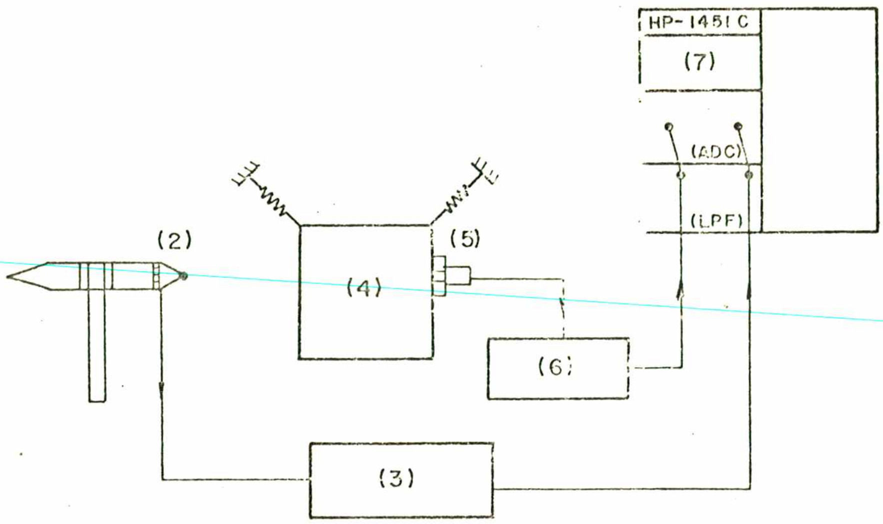


FIGURA 4.5. Esquema do sistema de medição usado na Análise Modal. Excitação por impacto.

(1) Martelo em forma de cunha
(2) Célula de força Tipo 8200 B&K
(3) Pré-amplificador Tipo 2626 B&K
(4) Núcleo do compressor na montagem original
(5) Acelerômetro $^1/_2$" Tipo 4366 B&K
(6) Pré-amplificador Tipo 2651 B&K

Escolha dos parâmetros do ensaio:

a) Banda de Interesse

A fim de evitar que seja introduzido erro de "Aliasing" [16], [17], quando da conversão do sinal analógico em valores digitais, o HP 5451C está equipado com dois filtros programáveis passa-baixa, de sorte que a freqüência de corte deve ser ajustada obedecendo à relação $f_c \leq \frac{1}{2} f_{max}$ [16] [17].

Adicionalmente à freqüência de corte dos filtros, deve ser escolhida de forma que todas as outras importantes do sistema nalisado sejam inferiores a ela.

Neste caso particular, a freqüência de corte poderia ser de 15 Hz, uma vez que, segundo os resultados teóricos, a freqüência de interesse mais alta foi de aproximadamente 13 Hz. Entretanto, desde que a menor freqüência de corte programável nos filtros é de 50 Hz, esta foi a opção adotada durante os ensaios de análise modal;

b) Número de Pontos Amostrados e de Medição

O sistema de análise modal permite que se escolha o número de pontos amostrados durante o primeiro passo do programa, até um máximo de 2048 pontos [18]. O número máximo, ou seja, N = 2048 pontos, foi escolhido visando-se ter o maior registro possível.

A fim de efetuar análise modal, via digital, é necessário que se discretize o sistema com um determinado número de pontos, de sorte que estes, quando em conjunto, forneçam uma idéia geométrica espacial mais próxima possível do corpo sob teste. Para o compressor foram selecionados 22 pontos, porquanto este é o menor número de pontos necessários à finalidade acima.

c) Reducão do Efeito do Ruído Externo

Uma das mais nocivas características de qualquer sistema digital para análise modal é o ruído externo proveniente de uma variedade de fontes, o qual é também adquirido distorcendo os reais sinais de excitação e resposta.

Para que este problema seja atenuado, o sistema permite que sejam tomadas várias médias para um mesmo ponto de medição. O efeito do número de médias sobre as funções de transferência, com a evidente redução na variância, pode ser visto na figura 4.6, a seguir.

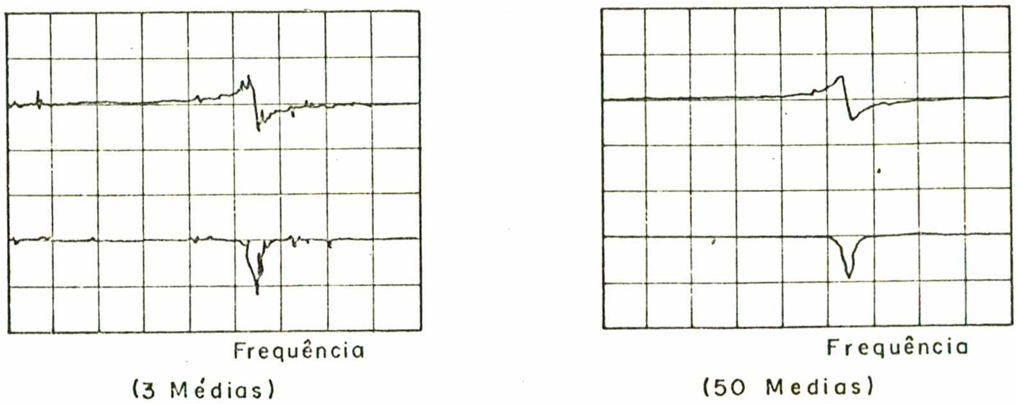


FIGURA 4.6. Efeito do número de médias no redução do ruído externo.

O problema, então, consiste em adotar-se um número adequado de médias, de sorte que o grau de contaminação das medições, por ruído ou não-linearidades, seja minimizado aumentando com isso a qualidade das funções de transferência estimadas, as quais servirão de base para toda a Análise Modal.

A influência de agentes externos ou não-linearidades e, consequentemente, o grau de qualidade das medições, pode ser quantificados por meio da função de coerência, denotada por γ^2 e definida como [15], [17]

$$\gamma^2 = \frac{\text{Potência da Resposta causada pela Excitação Aplicada}}{\text{Potência da Resposta Medida}} \qquad (4.1)$$

onde $0 \leq \gamma^2 \leq 1$.

A (4.1) indica o grau de dependência linear da resposta em relação à excitação. Coerência menor do que 1 indica que a resposta medida não é totalmente devida a excitação imposta, porque algum tipo de fonte estranha está também contribuindo para a potência da resposta. Consequentemente, coerência nula indica que a resposta média é totalmente devida a outras fontes de excitação.

Problemas Surgidos Durante o Ensaio e Conclusões:

O sistema de Análise Modal utilizado pelo HP 5451C, conforme anteriormente citado, baseia-se nas funções de transferência medidas [15].

Durante as medições feitas com o compressor não foi possível, apesar das várias tentativas com a excitação por impacto, obter-se uma coerência razoável das medições, não tendo, portanto, sentido a continuação do processo, uma vez que as funções de trans ferência medidas não eram, no sentido exposto, de boa qualidade.

Na tentativa de localizar a fonte do problema, várias possíveis causas de baixa coerência, tais como o isolamento entre o piso e o compressor, o número de médias que podia não ser suficiente, foram verificadas sem sucesso.

A conclusão chegada, para explicar a inadequação deste tipo de excitação para o compressor, baseia-se na natureza física do próprio equipamento testado, como segue.

Sendo o compressor, com aquela montagem, um sistema que, como já se sabia, possuia um espectro importante somente até aproximadamente 13 Hz, era então usual que a freqüência de corte do filtro fosse ajustada em 50 Hz, a qual é a menor disponível nos filtros. Desta feita, tem-se que o tempo de registro do sinal é dado por [17]

$$T = N\ \Delta T = \frac{N}{2F_{max}} = \frac{N}{4F_c} ,$$

onde F_c - freqüência de corte (Hz) = 50 Hz

N - número de pontos = 2048. Então,

$$T = \frac{2048}{4 \times 50} \simeq 10,3 \text{ seg}$$

Com base nestes cálculos, e levando em conta que o impacto proveniente do martelo tem uma duração de aproximadamente 2 ms, pode-se logicamente concluir que o sinal analógico adquirido durante (T) segundos era sensivelmente contaminado pelo ruído, uma vez que quase todo o período de aquisição de força era utilizado para medir sinais expúrios. Em outras palavras, dos T segundos de didos, apenas uma pequena fração correspondia efetivamente à força de interação entre o martelo e o núcleo do compressor. Daí a baixa correlação entre excitação e resposta.

O problema acima descrito foi suficiente para que se abandonasse a excitação com impacto e se tentasse outro tipo de entrada que também fosse aceita pelo sistema computacional.

4.3.2. ANÁLISE MODAL UTILIZANDO EXCITAÇÃO PERMANENTE

O programa de análise modal usado pelo HP 5451C admite ainda excitação do tipo permanente. Tal excitação pode ser obtida por meio de um excitador de vibrações conectado ao sistema sob teste, o qual, por sua vez, recebe um sinal de banda larga (Ruído Branco) proveniente de um gerador.

Este procedimento foi adotado com vistas a solucionar os problemas de baixa coerência apontados no item precedente.

Como os sinais neste caso são permanentes, a lógica do programa aplica a estes uma janela temporal tipo "Hanning" de comprimento (T), antes da excitacão e resposta serem processados pelo algorítmo FFT. Com isso reduz-se o vazamento de freqüência, que normalmente ocorreria devido a aplicacão da janela "Hanning". Após a função de transferência ser obtida, a lógica do ensaio aleatório corrige automaticamente os efeitos da aplicacão da janela de "Hanning" sobre os dados temporais.

Os parâmetros de amostragem com este novo tipo de ensaio foram, obviamente, mantidos do caso precedente.

Os resultados que eram teoricamente aguardados com esta modificação realmente apareceram com uma melhoria substancial na coerência (cerca de 50%) das 66 medições realizadas, uma vez que fo ram feitas 3 (três) medições em cada ponto, referentes às três direções do referencial, dada a necessidade de obter-se uma configuração espacial do modo.

A cadeia de medição utilizada está esquematizada na figura 4.7, a seguir.

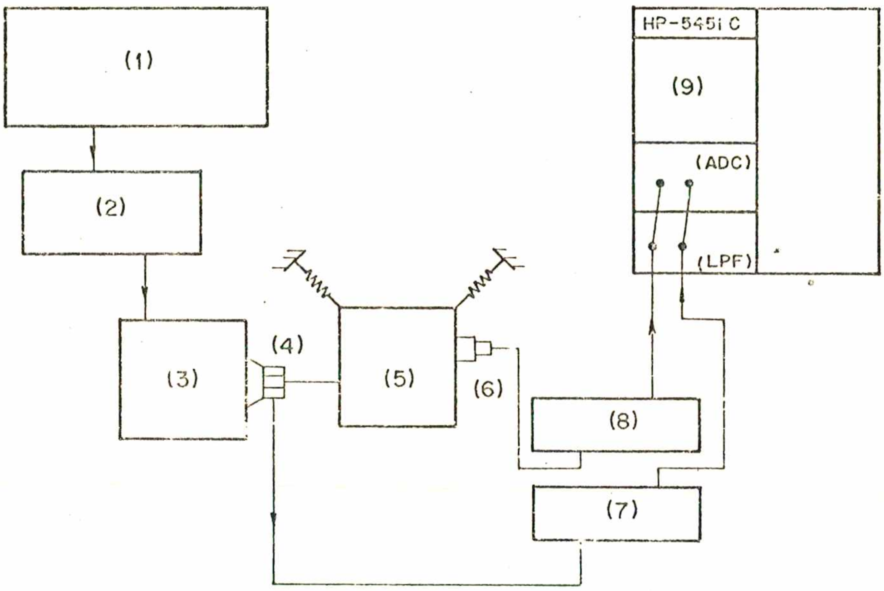


FIGURA 4.7. Esquema da cadeia de medição usada na análise modal. Excitação contínua.

(1) Gerador de Ruído Branco (2 - 2 KHz) Tipo 1027 B&K
(2) Amplificador de potência Tipo 2706 B&K
(3) Excitador de Vibração Tipo 4809 B&K
(4) Transdutor de força Tipo 8200 B&K
(5) Núcleo do compressor na montagem original
(6) Acelerômetro 1/2" Tipo 4366 B&K
(7) Pré-amplificador de carga Tipo 2651 B&K
(8) Pré-amplificador de voltagem Tipo 2626 B&K
(9) Computador HP 5451C-FOURIER ANALYZER
(ADC) Conversor Analógico-Digital
(LPF) Filtros Passa-Baixa

Problemas Surgidos:

Superado o problema de baixa coerência na banda de interesse, passou-se então para o passo seguinte na lógica do ensaio, a fim de fazer a identificação dos modos. Antes, porém, do início do processo de estimativa inicial dos parâmetros modais, e posterior adaptação para uma forma analítica das várias funções de transferência, foi feita uma cuidadosa verificação das funções no display da máquina [18].

Como já eram conhecidos os espectros de alguns pontos particulares do compressor (figuras 4.2 e 4.3), cujas ressonâncias corroboraram com boa precisão os dados teóricos, estes foram utilizados para conferência dos picos contidos nas funções de transferência atualmente medidas. Assim procedendo, poder-se-ia já identificar algum erro que porventura tivesse ocorrido.

De fato, verificou-se que as ressonâncias em alguns pontos de medição não coincidiam completamente com as anteriormente determinadas, já indicando algum tipo de problema com os dados digitais.

Mesmo assim, decidiu-se continuar a lógica do ensaio, passando para o passo de identificação dos modos e posterior obtenção da função de transferência adaptada analiticamente [18].

Apesar das freqüências não coincidirem com boa precisão, o ensaio foi concluído e os três "modos", primeiramente identificados, foram mostrados no display.

O resultado final foi frustrante, como já se esperava, uma vez que os modos identificados eram todos acoplados nas seis coordenadas, não sendo possível, portanto, concluir a principal finalidade que era a verificação prática do modelo matemático ado tado, cujos modos calculados eram totalmente desacoplados em três coordenadas.

Novamente um processo de identificação das causas do problema foi iniciado com a finalidade de solucionar o mesmo.

Finalmente, pode-se concluir que a principal causa do problema residia na baixa resolução (Δf) adotada, ou seja, a quantidade em (Hz) entre dois pontos digitais. A resolução usada pode ser obtida pela expressão [16]

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\ \Delta T} = \frac{2\ F_{max}}{N} , \qquad (4.3)$$

onde $F_{max} = 2\ F_c = 2 \times 50 = 100$ Hz. Logo,

$$\boxed{\Delta f = 0{,}1 \text{ Hz}}$$

Caso se leve em conta que, por exemplo, os dois primeiros modos teóricos estão separados entre si por 0,11 Hz, e, ainda assim, são desacoplados, pode-se facilmente concluir que as ressonâncias estimadas pelo programa de análise modal ocorriam em freqüências vizinhas das verdadeiras, razão pela qual os modos surgiram acoplados.

A solução deste problema aparentemente simples consiste, portanto, de acordo com a (4.3), em se diminuir a freqüência máxima ou aumentar o número de pontos amostrados. O número de pontos usado já era o máximo permitido pelo sistema de análise modal. A freqüência máxima poderia ser reduzida para, por exemplo, 50 Hz, o que entretanto causaria erro de "aliasing", uma vez que a menor freqüência de corte existente nos filtros "anti-aliasing" é 50 Hz, a qual nesta hipótese deveria ser menor ou igual a 25 Hz.

Cabe aqui ressaltar que, do ponto de vista teórico, não haveria problema em se proceder como anteriormente descrito, posto que a mais alta componente importante no espectro é de aproximadamente 13 Hz. Na prática, entretanto, o espectro possui componentes mais altas, devido a ressonâncias externas como, por exemplo, o sistema de sustentação do excitador de vibrações.

4.3.3. CONCLUSÕES SOBRE A ANÁLISE VIA DIGITAL

A conclusão a que se chegou, após as tentativas de fazer-se análise modal via computador digital, é que, para o compressor estudado, o sistema não funcionou satisfatoriamente, devido principalmente a dois fatores:

1) As freqüências naturais do núcleo sob a suspensão serem extremamente baixas, ocasionando uma série de problemas de ordem prática, uma vez que equipamentos, tais como o excitador de vibrações, pré-amplificador e outros, possuem sempre sua curva de resposta alterada (não plana) em freqüências muito baixas;

2) As ressonâncias do sistema encontram-se muito próximas no espectro, sendo portanto necessária uma altíssima resolução para que as mesmas sejam precisamente identificadas. Este problema é agravado ainda pelo fato de os modos de vibração serem desacoplados em três coordenadas.

Para a solução de problemas como o anteriormente torna-se necessária a instalação de um periférico conhecido por "ZOOM-FFT". Tal sistema consiste basicamente em um método através do qual a resolução pode ser aumentada sem o aumento do tamanho da amostra.

Entretanto, somente uma pequena parte correspondente a faixa original pode ser analisada no tempo. O efeito do "ZOOM-FFT" é mostrado na figura 4.8, para um fator de "ZOOM", ou seja, um aumento na resolução de 10 vezes.

a)

b)

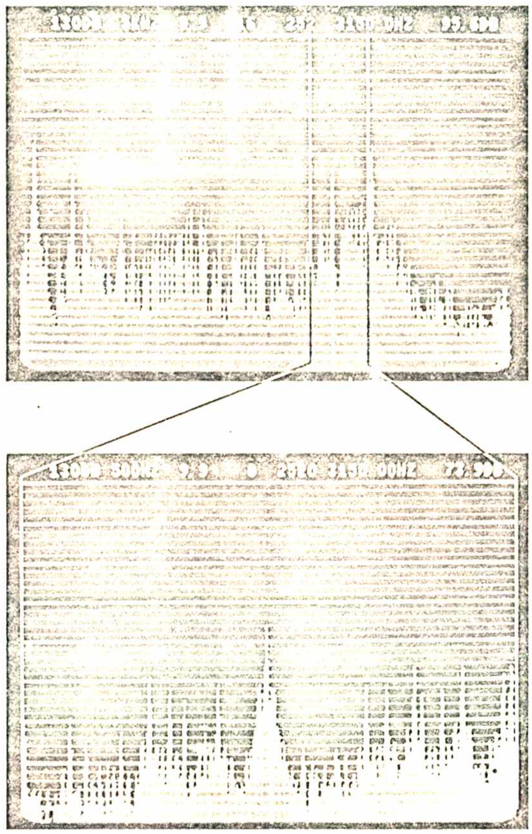


FIGURA 4.8. Efeito do "ZOOM-FFT".
(a) Espectro com banda base
(b) Espectro com alta resolução

4.4. ANÁLISE MODAL VIA ANALÓGICA

4.4.1. INTRODUÇÃO

Em face das tentativas feitas para se medir os modos de vibração do compressor via digital não terem sido bem sucedidas, optou-se pela medição destes via analógica, usando uma cadeia convencional de medição adequadamente escolhida.

Com este método os modos foram identificados através de fotografias feitas sob efeito estroboscópio, conseguido com um analisador de movimento.

4.4.2. DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

A figura 4.9 mostra o esquema da cadeia de medição usada no ensaio.

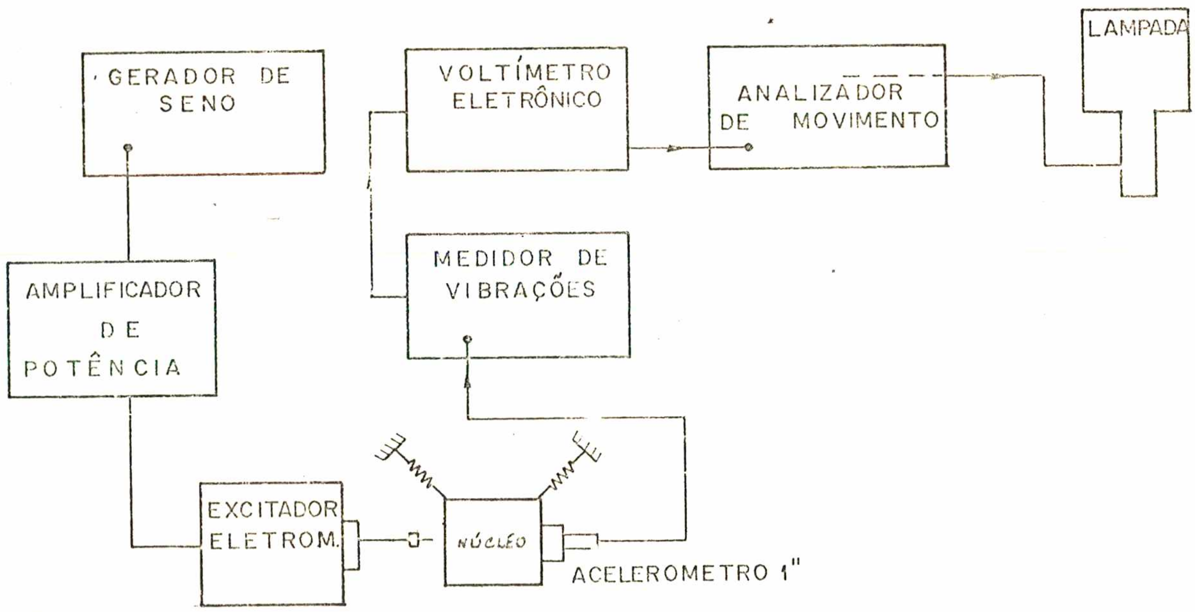


FIGURA 4.9. Esquema da cadeia de medição para análise modal via analógica.

O experimento inicialmente consistia em se excitar o sistema exatamente na freqüência de ressonância, já anteriormente medida, com um sinal senoidal. A precisão da freqüência de excitação era garantida por meio da verificação do pico de resposta na escala do voltímetro.

O sinal de resposta proveniente do transdutor, a fim de ga rantir a precisão da sintonia do gerador, após amplificado pelo medidor de vibrações, é então enviado ao analisador de movimento. O sinal de resposta que alimenta o analisador de movimento permite que o "flash" seja gerado na mesma freqüência ("flash"/seg) da vibração do corpo, fazendo com que este permaneça VISUALMENTE estático.

Ajustando-se a fase no analisador de movimento, o corpo era posicionado em uma de suas amplitudes. Uma primeira fotografia era batida. Novo ajuste de fase era feito de sorte que o corpo se posicionasse novamente na deflexão máxima, mas em sentido oposto. Outra fotografia superposta à primeira foi obtida.

O procedimento acima descrito fornece nas fotos de dupla exposição a imagem da vibração pico a pico do compressor.

O corpo foi fotografado em dois planos perpendiculares para cada modo, visando uma melhor avaliação da forma da vibração, através de suas coordenadas. As linhas de referência coladas ao corpo servem para facilitar a visualização da vibração.

4.4.3. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos finalmente corroboram com boa margem de precisão os teóricos. A interpretação dos modos experimentais segue a seguir:

1º MODO - FREQUÊNCIA = 6,64 Hz

A figura 4.10 mostra o primeiro modo de vibração no plano XZ. Verifica-se, portanto, que predominantemente o movimento se verifica na coordenada x, e rotação (β), em torno do eixo Y. O movimento em z, como previsto teórica e computacionalmente, quase não se manifesta.

A figura 4.11 permite uma vista do plano XY, com o que se verifica a inexistência de acoplamento devido a translação (y), e as rotações α e γ, em torno dos eixos X e Z, respectivamente.

As figuras 4.10 e 4.11 podem ser comparadas com o modo previsto computacionalmente.

2º MODO - FREQUÊNCIA = 6,85 Hz

A figura 4.12 mostra o segundo modo de vibração no plano YZ. Pode-se ver claramente a translação (y), acompanhada da rotação (α), em torno de X. Percebe-se, ainda, a partir da figura 4.12, a inexistência de translação ao longo de Z, bem como de rotação (β) em torno de Y.

Na figura 4.13 se observa uma ligeira rotação (γ), em torno do eixo Z, bem como a inexistência de translação no eixo X.

As figuras 4.12 e 4.13 podem ser comparadas com o segundo modo estimado teoricamente.

3º MODO - FREQUÊNCIA = 9,60 Hz

Mediante observação da figura 4.14, tem-se idéia da vibração do corpo vista no plano XZ, permitindo com isso que se observe as translações z e x, bem como a rotação (β), em torno do eixo Y. Nota-se também que tanto a fase do movimento como a grandeza relativa de suas amplitudes concordam precisamente com o modo calculado.

A figura 4.15, por sua vez, fornece informações quanto ao desacoplamento das rotações (γ) e (α), bem como da translação (y), obviamente nulas.

As figuras 4.14 e 4.15 podem ser confrontadas com o terceiro modo calculado.

4º MODO - FREQUÊNCIA = 12,5 Hz

A figura 4.16 mostra o quarto modo de vibração visto no plano YZ. Pode-se, neste referencial observar a rotação (α), em torno de X fortemente presente, bem como a translação (y).

A figura 4.17 mostra a vista do plano YX com a rotação (γ), em torno de Z, e revela que na prática existe acoplamento com a rotação (β), em torno de Y não sendo portanto caracterizado o completo desacoplamento de movimentos no plano de simetria, como se esperava teoricamente.

Comparações entre as figuras 4.16, 4.17 e o quarto modo teórico devem ser feitas.

5º MODO - FREQUÊNCIA = 12,8 Hz

A figura 4.18 dá uma visão do quinto modo no plano de referência XZ, onde se observa claramente translação na direção x, e rotação (β) em torno do eixo Y.

A figura 4.19 mostra a vibração no plano XY, onde pode-se notar uma leve manifestação da rotação (α), em torno de X.

Ficou demonstrado, portanto, que o quinto modo de vibração, como o anterior possui algum acoplamento com uma das coordenadas (α), que caracterizam o movimento fora do plano de simetria do corpo e, neste aspecto, com alguma discordância dos resultados calculados.

6º MODO - FREQUÊNCIA = 11,2 Hz

O sexto modo de vibração é também mostrado em duas vistas, do plano YZ (figura 4.20) e do plano XY (figura 4.21).

Verifica-se, portanto, que possui uma forma semelhante à teórica, a não ser pela rotação (β), em torno de Y, que novamente, ainda que discretamente, se fez presente de modo que o completo desacoplamento de coordenadas, que caracterizam movimento no plano XZ não se verificou totalmente.

4.5. CONCLUSÕES

Em face das dificuldades práticas encontradas durante a determinação das características modais do compressor, pode-se, agora concluir baseados nos resultados expostos no item (4.4.3), que o modelo matemático utilizado para o sistema mostrou ter precisão satisfatória, principalmente no que diz respeito às freqüências naturais calculadas e medidas, cujos erros em termos percentuais são considerados pequenos e inerentes á qualquer técnica experimental.

A maior dificuldade prática, sem dúvida, foi a determinação da forma do modo da vibração proveniente, principalmente, da proximidade das ressonâncias no espectro, o que torna muito difícil na prática o isolamento de um modo particular.

Discordâncias entre os resultados calculados e medidos analogicamente, certamente decorrem da característica física do sistema acima descrita, posto que, apesar de se ter posicionado a direção da força excitadora de forma a excitar modos com movimento no plano XZ de simetria e fora deste, separadamente, é admissível se conceber algumas transferência de energia vibratória, entre modos cujas freqüências naturais estejam muito próximas, causando com isso mudanças na forma de vibrar em relação à teoria prevista.

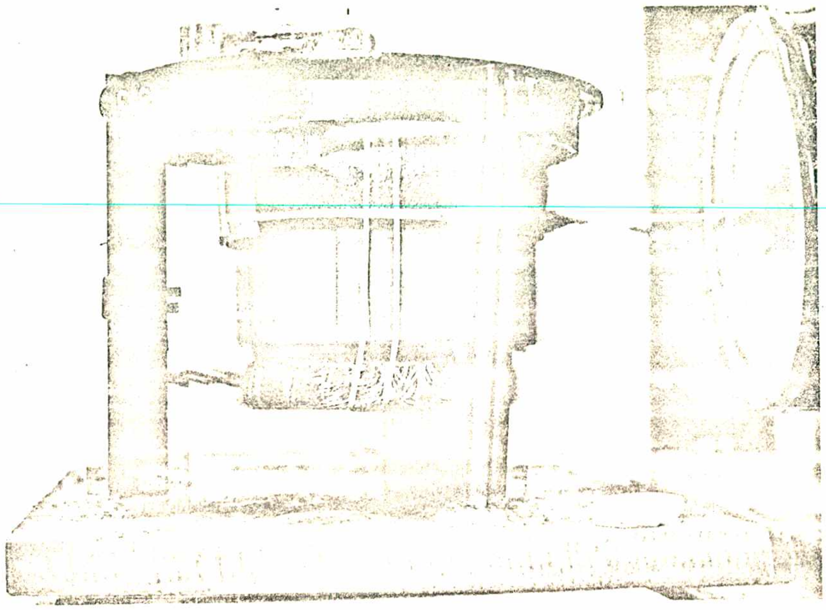


FIGURA 4.10. Primeiro modo de vibração. Vista do plano XZ. Freqüência = 6,64 Hz.

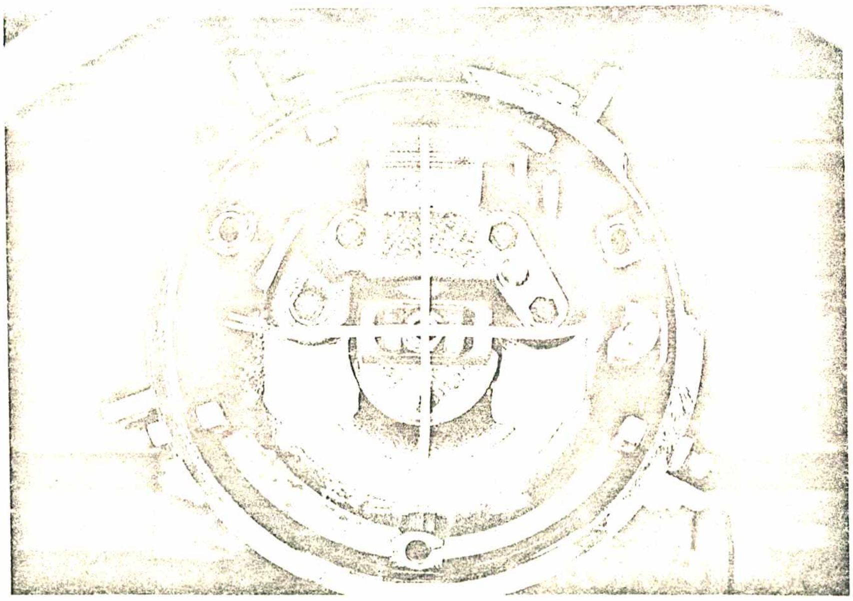


FIGURA 4.11. Primeiro modo de vibração. Vista do plano XY. Freqüência = 6,64 Hz.

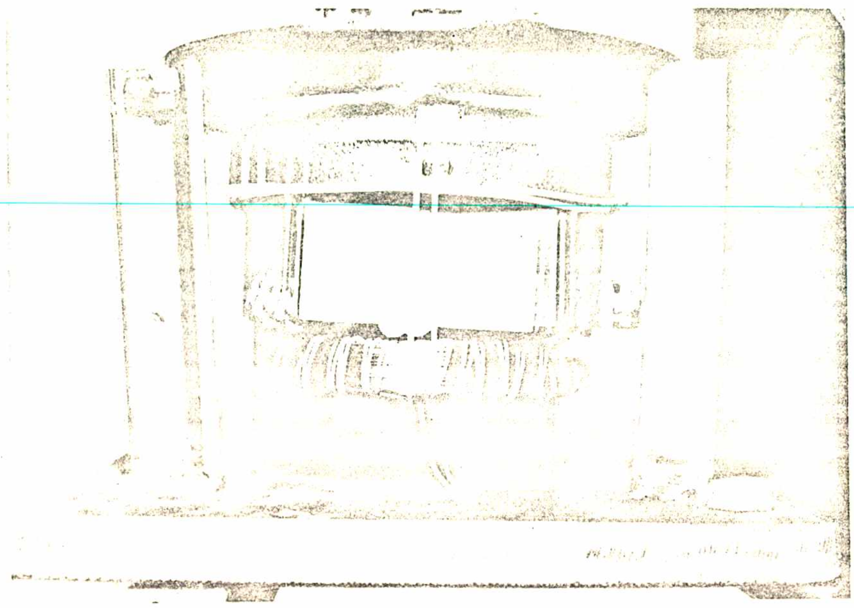


FIGURA 4.12. Segundo modo de vibração.
Vista do plano YZ. Freqüência = 6,85 Hz.

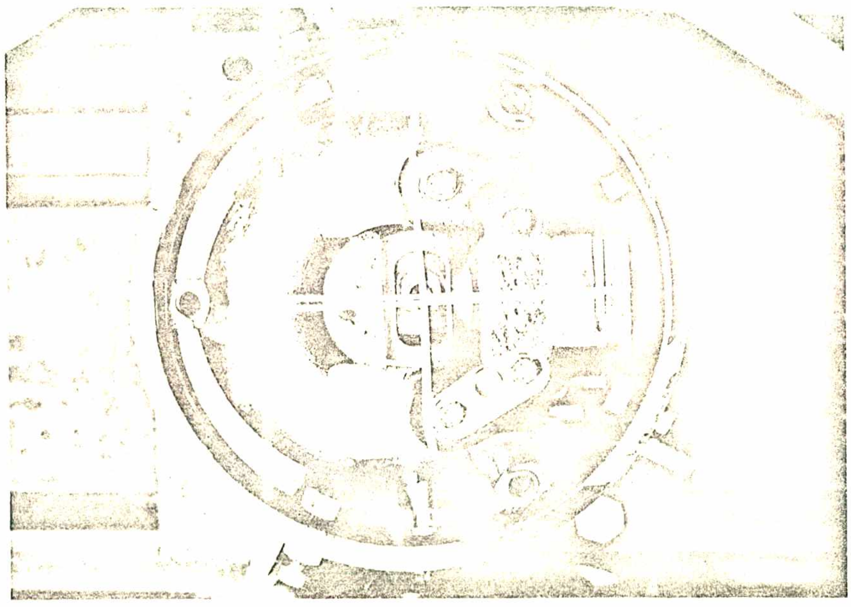


FIGURA 4.13. Segundo modo de vibração.
Vista do plano XY. Freqüência = 6,85 Hz.

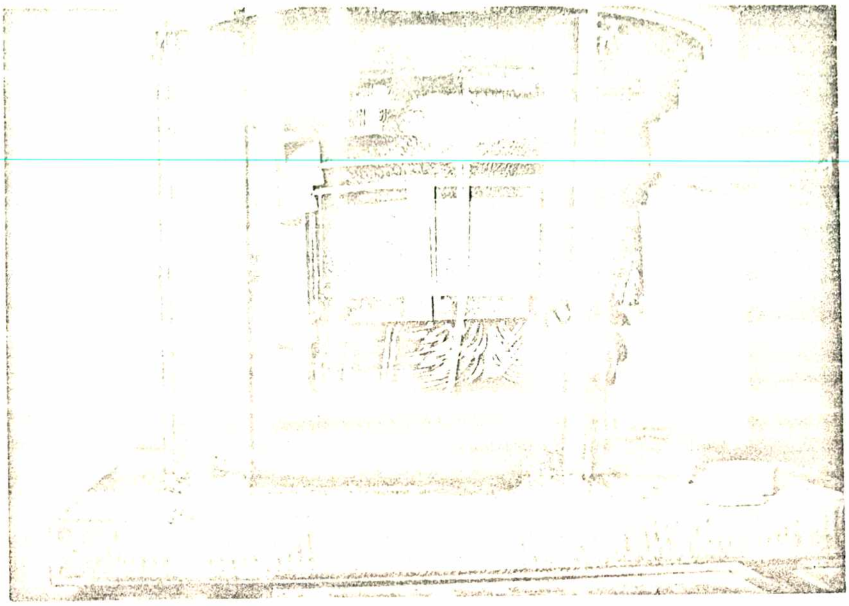


FIGURA 4.14. Terceiro modo de vibração.
Vista do plano XZ. Freqüência = 9,60 Hz.

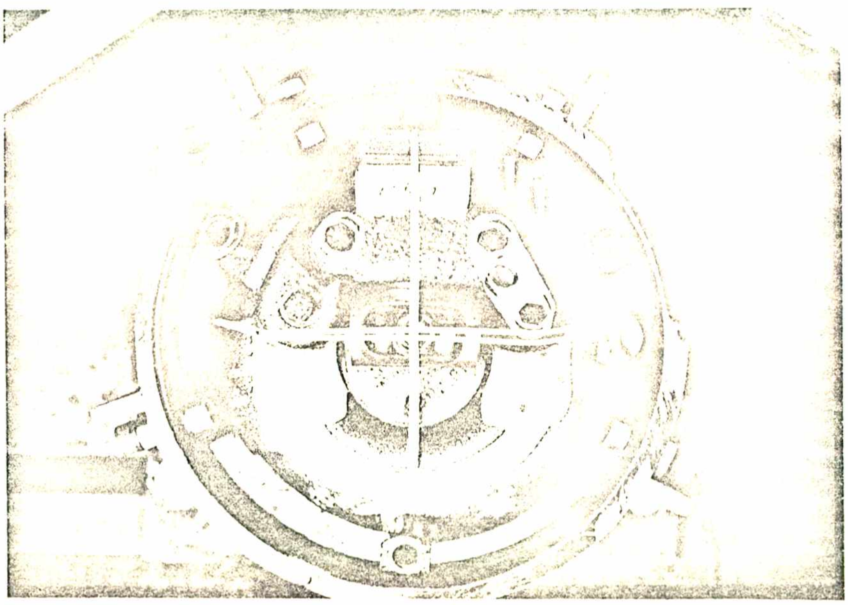


FIGURA 4.15. Terceiro modo de vibração.
Vista do plano XY. Freqüência = 9,60 Hz.

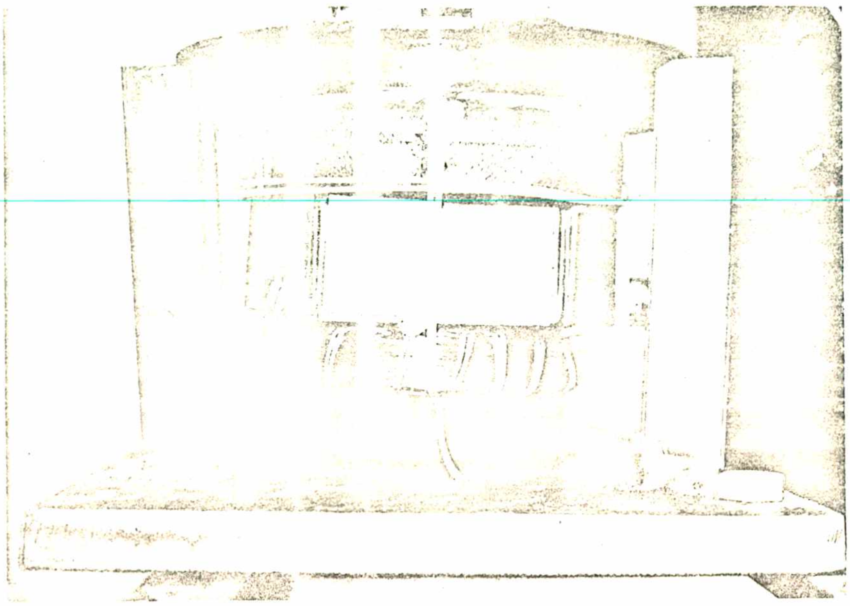


FIGURA 4.16. Quar o modo de vibração.
Vista do plano YZ. Freqüência = 12,5 Hz.

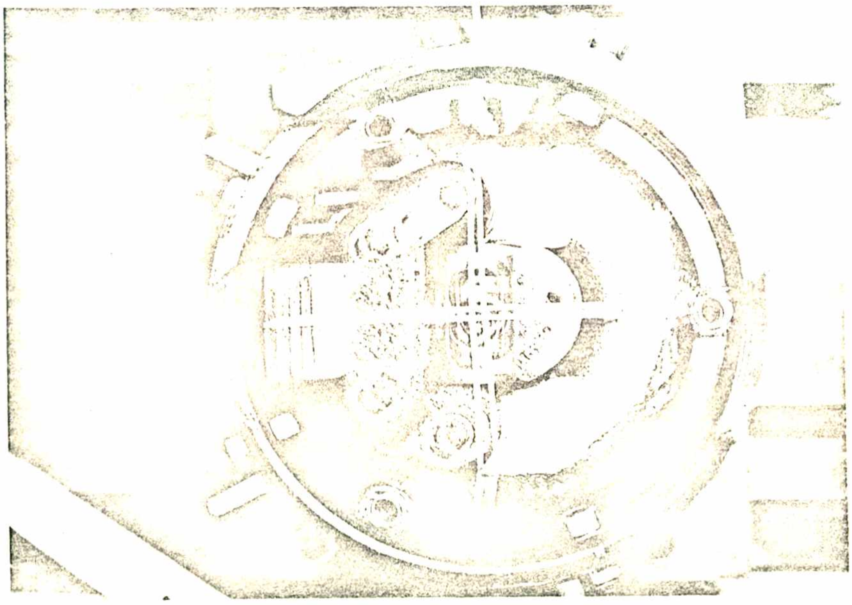


FIGURA 4.17. Quarto modo de vibração.
Vista do plano XY. Freqüência = 12,5 Hz.

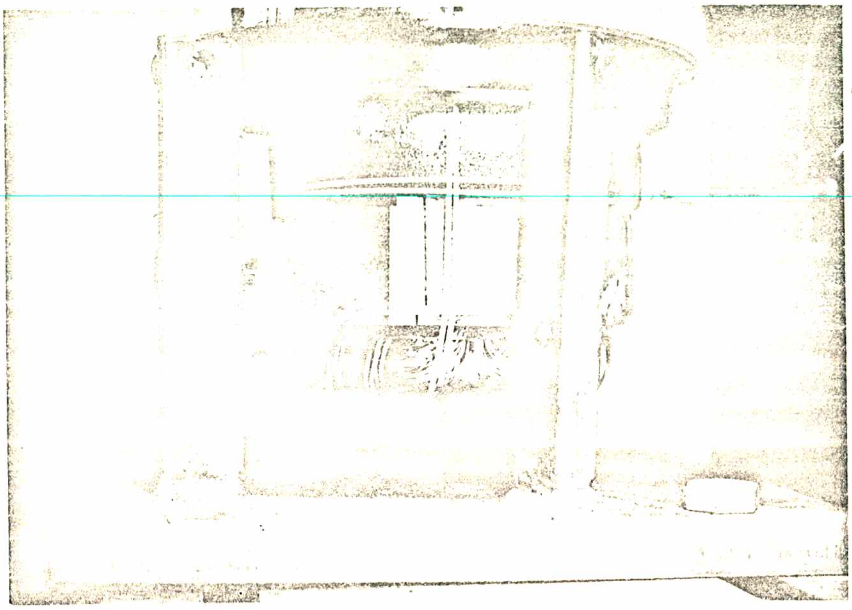


FIGURA 4.18. Quinto modo de vibração.
Vista do plano XZ. Freqüência = 12,8 Hz.

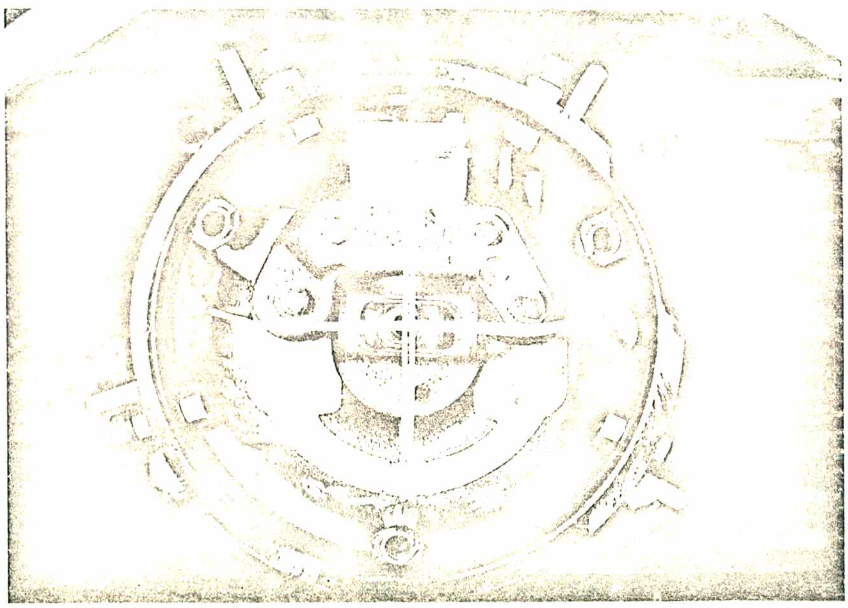


FIGURA 4.19. Quinto modo de vibração.
Vista do plano XY. Freqüência = 12.8 Hz.

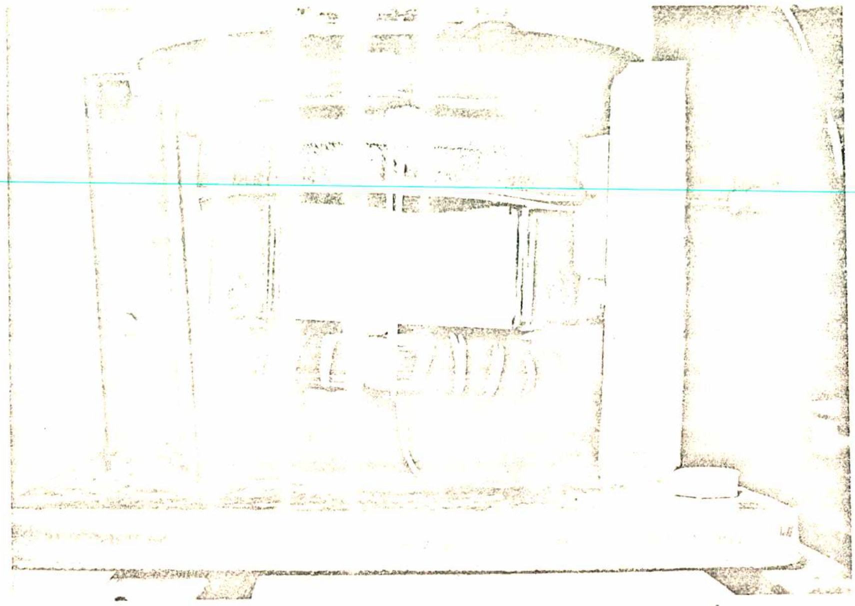


FIGURA 4.20. Sexto modo de vibração
Vista do plano YZ. Freqüência = 11,2 Hz.

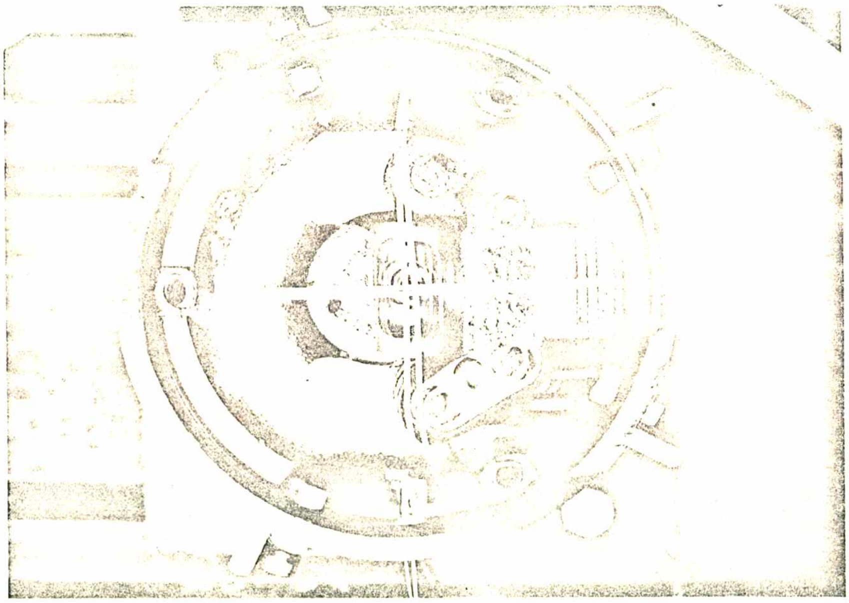


FIGURA 4.21. Sexto modo de vibração.
Vista do plano XY. Freqüência = 11,2 Hz.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ISOLADORES

5.1. INTRODUÇÃO

No presente Capítulo será feito um estudo com vistas a identificar algumas propriedades dinâmicas de isoladores, que possuam relevância quando se trata com problemas de isolamento de vibrações.

Desta feita, é inicialmente revista [10], [19] uma técnica geral de modelagem dos elementos resilientes, com aplicações à montagens particulares.

A escolha daqueles exemplos particulares tem por objetivo não só permitir a investigação experimental da precisão dos resultados teóricos, mas também, posteriormente, possibilitará um estudo mais elaborado dos sistemas mecânicos de maior interesse no presente trabalho.

5.2. CÁLCULO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS DOS ISOLADORES

5.2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste item serão revistas [10] as expressões para o cálculo da massa e rigidez dinâmica de vigas vibrando longitudinalmente, excitadas senoidalmente na mesma direção. Uma vez obtidas as expressões para as vigas, estas serão adaptadas para os isoladores helicoidais, mediante uma simples analogia barra-mola das constantes existentes na equação diferencial parcial que descreve as vibrações longitudinais em barras.

Os exemplos particulares, que serão detalhados com base na equação geral de movimento, têm por objetivo a adequação da teoria à comprovação experimental, bem como, para torná-la aplicável aos sistemas de particular interesse neste trabalho.

5.2.2. DETERMINAÇÃO DA MASSA DINÂMICA DE UMA VIGA ENGASTADA COM UMA MASSA NA EXTREMIDADE LIVRE

A figura 5.1, a seguir, mostra uma barra de comprimento (ℓ), engastada em $x = \ell$, e carregada por uma massa (M) em $x = 0$. A força senoidal de excitação na direção longitudinal da barra é ($\tilde{F}_0$), a qual é transmitida para a fundação como ($\tilde{F}_1$). O deslocamento da secção transverdal em $x = 0$ é denotado por $\tilde{\xi}_0$.

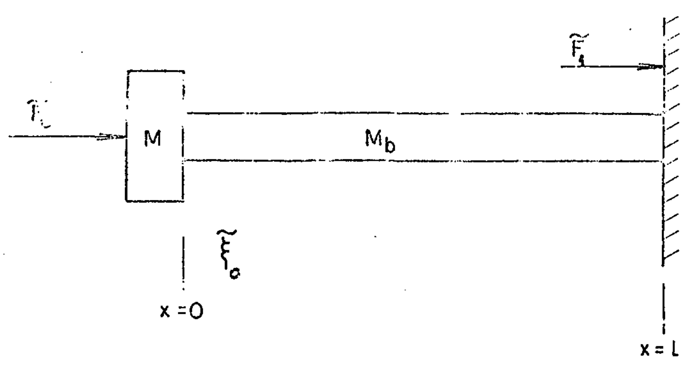


FIGURA 5.1. Viga engastada, excitada senoidalmente na extremidade livre.

Para determinar a massa dinâmica do sistema acima, é necessário que a equação diferencial que rege as vibrações longitudinais seja solucionada.

Considerando que a barra da figura 5.1 possui dimensões laterais pequenas, com relação ao comprimento da onda propagada, pode-se negligenciar o movimento radial da mesma, e a equação que descreve as vibrações longitudinais é a bem conhecida equação da onda. No caso em que se considera o amortecimento interno do material, a equação da onda é da forma [10], [11]

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial x^2} + (n^*)^2 \tilde{\xi} = 0 \ , \tag{5.1}$$

onde

$$(n^*)^2 = \frac{\omega^2 \rho}{E^*_\omega} \ , \quad \text{e} \tag{5.1a}$$

ρ é a densidade do material da viga,

$E^*_\omega = E_\omega(1 + j\delta_{E_\omega})$ representa o módulo de Young complexo do material da barra,

δ_{E_ω} é o fator de amortecimento associado com o módulo de Young dinâmico E_ω em uma dada freqüência angular ω.

A equação (5.1) pode ser solucionada de formas distintas. A solução na forma fechada será aqui adotada, por razões de simplicidade e melhor adequação às particularidades do problema. Assumindo-se que o deslocamento de partícula $(\tilde{\xi})$, na equação da onda básica, possui uma variação senoidal, este pode ser assim escrito

$$\tilde{\xi}(x,t) = \xi^*(x) \ e^{j\omega t} \tag{5.2}$$

onde $\xi^*(x)$ é uma função somente de x. A aplicação da (5.2), na (5.1), leva a

$$\frac{d^2\xi^*(x)}{dx^2} + (n^*)^2\xi^*(x) = 0 \qquad (5.3)$$

A (5.3) admite solução do tipo $\xi^*(x) = a^* e^{b^*x}$, cuja substituição acima, com as requeridas operações algébricas, mostra que a solução geral da equação da onda é

$$\xi^*(x) = C^* \text{ sen } (n^*x) + D^* \cos (n^*x) \qquad (5.4)$$

onde, logicamente, C^* e D^* são constantes arbitrárias a serem determinadas mediante conhecimento das condições de contorno. Note-se que a (5.4) expressa a amplitude do deslocamento de partícula em qualquer ponto (x), ao longo da barra. Analogamente, a deformação específica, a uma distância arbitrária (x), pode ser obtida por

$$\varepsilon^*(x) = \frac{d\xi^*(x)}{dx} = n^*\left[C^* \cos (n^*x) - D^* \text{ sen } (n^*x)\right] \qquad (5.5)$$

Em particular, para o exemplo da figura 5.1, são válidas as seguintes condições de contorno:

(a) A tensão atuante na secção em x = 0 é dada por

$$(\tilde{F}_0 + M\omega^2\tilde{\xi}_0)/A \ , \qquad (5.6)$$

ndc A é a área da secção transversal da barra;

(b) O deslocamento de partícula no engaste, ou seja, em

$= \ell$, é nulo.

$$\tilde{\xi}_1 = 0 \qquad (5.7)$$

Aplicando-se, agora, a condição (5.6) à expressão da deformação (5.5), tem-se

$$\frac{\sigma}{E^*_\omega} = -\varepsilon^*(x) = -\frac{d\xi^*(x)}{dx} = -n^*C^* \ , \qquad (5.8)$$

ou, ainda,

$$\frac{\tilde{F}_0 + M\omega^2\tilde{\xi}_0}{AE^*_\omega} = -n^*C^* \ , \qquad (5.9)$$

$$\frac{\tilde{F}_0}{A} = -n^*E^*_\omega C^* - \frac{\omega^2 M_b}{A}\gamma D^* \ , \qquad (5.10)$$

onde $\gamma = M/M_b$ representa a relação entre a massa extrema e a massa da barra. Tendo em conta a (5.1a), a (5.10) pode ser reescrita como

$$\frac{\tilde{F}_0}{A} = -(n^*C^*E^*_\omega + (n^*)^2\ell E^*_\omega\gamma D^*) \qquad (5.11)$$

De forma similar a aplicação da condição (5.7), fornece a relação

$$\xi_1^* = \xi^*(\ell) = 0 = C^* \operatorname{sen}(n^*\ell) + D^* \cos(n^*\ell) \tag{5.12}$$

Resolvendo o sistema de equações (5.11) e (5.12), as constantes arbitrárias são prontamente determinadas, ou seja,

$$C^* = -\frac{F_0}{AE_\omega^* n^* \eta^*} \cos(n^*\ell) , \tag{5.13}$$

e

$$D^* = \frac{F_0}{AE_\omega^* n^* \eta^*} \operatorname{sen}(n^*\ell) , \tag{5.14}$$

onde

$$\eta^* = \cos(n^*\ell) - \gamma \operatorname{sen}(n^*\ell) \tag{5.15}$$

Definindo massa dinâmica como sendo a relação entre a força atuante e a aceleração em um determinado ponto, tem-se, para a extremidade livre da viga (x = 0)

$$M(\omega) = \frac{\tilde{F}_0}{\ddot{\xi}_0} = -\frac{F_0}{\omega^2 \xi_0^*} = -\frac{F_0}{\omega^2 D^*} \tag{5.16}$$

Substituindo a (5.14) em (5.16), chega-se à expressão

$$M(\omega) = - \frac{AE_{\omega}^{*} n^{*} \eta^{*}}{\omega^{2} \text{ sen } (n^{*}\ell)} , \qquad (5.17)$$

que, normalizada pela massa da viga, fica

$$\frac{M(\omega)}{M_b} = - \frac{AE_{\omega}^{*} n^{*} \eta^{*}}{M_b \omega^{2} \text{ sen } (n^{*}\ell)} \left(\frac{n^{*}\ell}{n^{*}\ell}\right) = - \frac{E_{\omega}^{*} (n^{*})^{2} \ell}{M_b \omega^{2}/A} \times \frac{\eta^{*}}{(n^{*}\ell) \text{ sen } (n^{*}\ell)}$$

$$\ldots \qquad (5.18)$$

e

$$\frac{M(\Omega)}{M_b} = - \frac{\eta^{*}}{(n^{*}\ell) \text{ sen } (n^{*}\ell)} ; \qquad (5.19)$$

já que o primeiro termo à direita da igualdade em (5.18) é unitário.

Cabem aqui algumas considerações sobre a dependência em freqüência do módulo de dinâmico E_{ω} e fator de amortecimento $\delta_{E_{\omega}}$. Às vezes, acontece ser possível assumir-se o módulo dinâmico e fator de amortecimento como independentes da freqüência. Isto ocorre, por exemplo, com metais comuns, de baixo amortecimento, largamente usados na confecção de isoladores. Sendo, então, estas hipóteses observadas, E e $\delta_{E_{\omega}}$ podem ser reescritos como E e δ_{E}, denotando assim o seu comportamento essencialmente independente da freqüência.

Com vistas a facilitar a computação da equação (5.19), é conveniente que as partes real e imaginária do parâmetro $n^*\ell$ sejam determinadas. Logo, tem-se que

$$n^*\ell = p + jq = \ell\left(\frac{\omega^2\rho}{E^*}\right)^{1/2} \tag{5.20}$$

$$= \ell\left(\frac{\omega^2\rho}{E}\right)^{1/2}(1 + j\delta_E)^{-1/2} \tag{5.20a}$$

Seguindo-se o método usual para determinação da raiz quadrada de um número complexo chega-se a

$$p = \frac{n\ell}{D_E}\left(\frac{D_E + 1}{2}\right)^{1/2} \tag{5.21}$$

e

$$q = -\frac{n\ell}{D_E}\left(\frac{D_E - 1}{2}\right)^{1/2}, \tag{5.22}$$

onde

$$n = \left(\frac{\omega^2\rho}{E}\right)^{1/2} \tag{5.23}$$

e

$$D_E = (1 + \delta_E^2)^{1/2} \tag{5.24}$$

Reescrevendo, agora, a (5.19), tendo em conta a (5.20), tem-se

$$\frac{M(\omega)}{M_b} = -\frac{(\eta_R + j\,\eta_I)}{(p+jq)\ \text{sen}\ (p+jq)} = -\frac{(\eta_R + j\,\eta_I)}{(p+jq)(\text{sen}\ p\ \cosh q + j\cos p\ \text{senh}\ q)}$$

$$\frac{M(\omega)}{M_b} = -\frac{(\eta_R + j\,\eta_I)}{(p\,\text{sen}\ p\ \cosh q - q\cos p\ \text{senh}\ q) + j(p\cos p\ \text{senh}\ q + q\,\text{sen}\ p\ \cosh q)}$$

$$\ldots \quad (5.25)$$

onde η_R e η_I denotam as partes real e imaginária da (5.25) e são dadas por

$$\eta_R = \left[\cos p\ \cosh q - \gamma(p\ \text{sen}\ p\ \cosh q - q\cos p\ \text{senh}\ q)\right] \qquad (5.26)$$

$$\eta_I = \left[-\text{sen}\ p\ \text{senh}\ q - \gamma(p\cos p\ \text{senh}\ q + q\ \text{sen}\ p\ \cosh q)\right] \qquad (5.27)$$

Então, medindo-se ou assumindo-se o valor do fator de amortecimento δ_E, pode-se computar o valor absoluto $|M(\omega)/M_b|$ como função da freqüência adimensional $(n\ell)$, para um sistema com uma da relação de massas $\gamma = M/M_b$.

Analogia Barra-Mola:

A expressão (5.25) pode ser adaptada ao uso em molas helicoidais, desde que os termos análogos entre os dois sistemas sejam identificados. Para tal, os seguintes parâmetros são definidos

μ - representa a massa por unidade de comprimento da mola

m - denota a massa por espira

α - representa o número de espiras por unidade de comprimento (N/ℓ)

N - representa o número de espiras ativas da mola

A rigidez estática no sentido longitudinal (K_r) de um isolador helicoidal, como já visto, é dada por (3.4)

$$K_r = \frac{Gd^4}{8ND^3} = \frac{F_r}{\delta_r} = \frac{\sigma_r A}{\ell\varepsilon_r} = \frac{\sigma_r A}{\ell\varepsilon_r} = \frac{EA}{\ell} \quad \therefore$$

$$EA = \frac{Gd^4}{8\alpha D^3} \,, \qquad (3.28)$$

onde F_r é a força estática na direção longitudinal do isolador ou barra

δ_r é a deformação no sentido longitudinal

$\varepsilon_r = \delta_r/\ell = \sigma_r/E$ é a deformação específica na mesma direção.

A velocidade de propagação da onda longitudinal, denotada por C_L, é definida por [10], [11]

$$C_L^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{E}{M_b/\ell A} = \frac{EA}{\mu} \,,$$

ou, ainda, tendo em conta a (5.28)

$$C_L^2 = \frac{Gd^4}{8\mu\alpha D^3} = \frac{Gd^4}{8m\alpha^2 D^3} \qquad (5.29)$$

A expressão (5.23) pode agora ser reescrita em termos da (5.29) fornecendo a relação entre a freqüência adimensional ($n\ell$) e a circular (f), em Hz. Então,

$$n\ell = \ell \frac{\omega}{C_L} = \frac{2\pi f \ell}{C_L}$$

logo,

$$f = \frac{(n\ell)\, C_L}{2\pi\ell} \quad [Hz] \qquad (5.30)$$

5.2.3. DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DINÂMICA E TRANSMISSIBILIDADE PARA ISOLADORES ENGASTADOS SOB EXCITAÇÃO SENOIDAL

A figura 5.2, a seguir, mostra um isolador helicoidal excitado por uma força ($\tilde{F}_0$) senoidal na extremidade livre em (x = 0). A força transmitida para a fundação em ($x = \ell$) é ($\tilde{F}_1$).

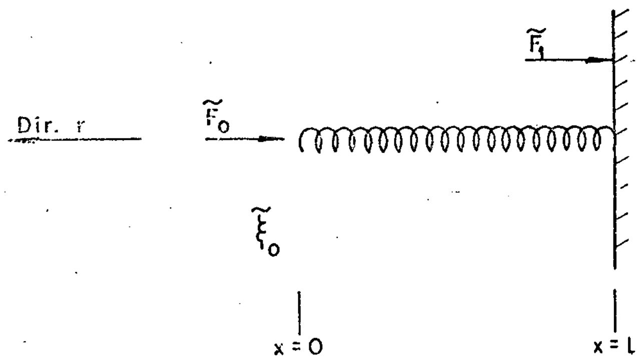


FIGURA 5.2. Isolador helicoidal engastado, excitado harmonicamente na extremidade livre.

Considerando as observações feitas no item anterior, sobre a analogia barra-mola, a rigidez dinâmica do sistema acima pode ser prontamente determinada, a partir da expressão (5.19), que trata do exemplo anterior. Definindo rigidez dinâmica, como sendo a relação entre a força impressa e o deslocamento no mesmo ponto, e denotando-a por $\bar{K}(\omega)$, tem-se que

$$K_r(\omega) = \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{\xi}_0} = -\omega^2 M(\omega) = \frac{F_0}{\xi_0^*} \qquad (5.31)$$

onde $M(\omega)$ é obtido do caso anterior, fazendo $\gamma = 0$, ou seja, $M = 0$. Neste caso, a (5.19) fica

$$\frac{M(\omega)}{M_b} = -\frac{1}{(n^*\ell)} \times \frac{\cos\,(n^*\ell)}{\mathrm{sen}\,(n^*\ell)} = -\frac{1}{(n^*\ell)} \times \mathrm{cotg}\,(n^*\ell) \qquad (5.32)$$

Aplicando a (5.32) em (5.31), e normalizando pela rigidez estática (K_r), surge a seguinte expressão

$$K_r(\omega) = \frac{M_b \omega^2}{(n^* \ell)} \times \text{cotg } (n^* \ell) \tag{5.33}$$

ou,

$$\frac{K_r(\omega)}{AE/\ell} = \frac{\omega^2}{E} \times \frac{M_b}{A\ell} \times \frac{\ell}{n^*} \times \text{cotg } (n^* \ell) \quad , \text{ ou ainda} \tag{5.34}$$

$$\frac{K_r(\omega)}{K_r} = \frac{\omega^2 \ell}{E} \times \frac{\ell}{n^*} \times \text{cotg } (n^* \ell) \tag{5.35}$$

A equação (5.1a) pode ser aplicada na (5.35), o que resulta em

$$\frac{K_r(\omega)}{K_r} = (n^* \ell)(1 + j\ \delta_E)\ \text{cotg } (n^* \ell) \quad , \quad \text{ou} \tag{5.36}$$

$$\frac{K_r(\omega)}{K_r} = (p + jq)(1 + j\delta_E) \times \left[\frac{\cos p \cosh q - j \text{ sen } p \text{ senh } q}{\text{sen } p \cosh q + j \cos p \text{ senh } q} \right] \tag{5.37}$$

A (5.37) permite o cálculo da rigidez normalizada, para isoladores engastados, com um fator de amortecimento δ_E. Os valores de p e q, logicamente, continuam dados pelas (5.21) e (5.22), como função do parâmetro $(n\ell)$, proporcional à ω. A figura 5.3, a seguir, mostra os resultados computados para $|K_r(\omega)/K_r|$ contra $(n\ell)$, para dois valores de amortecimento.

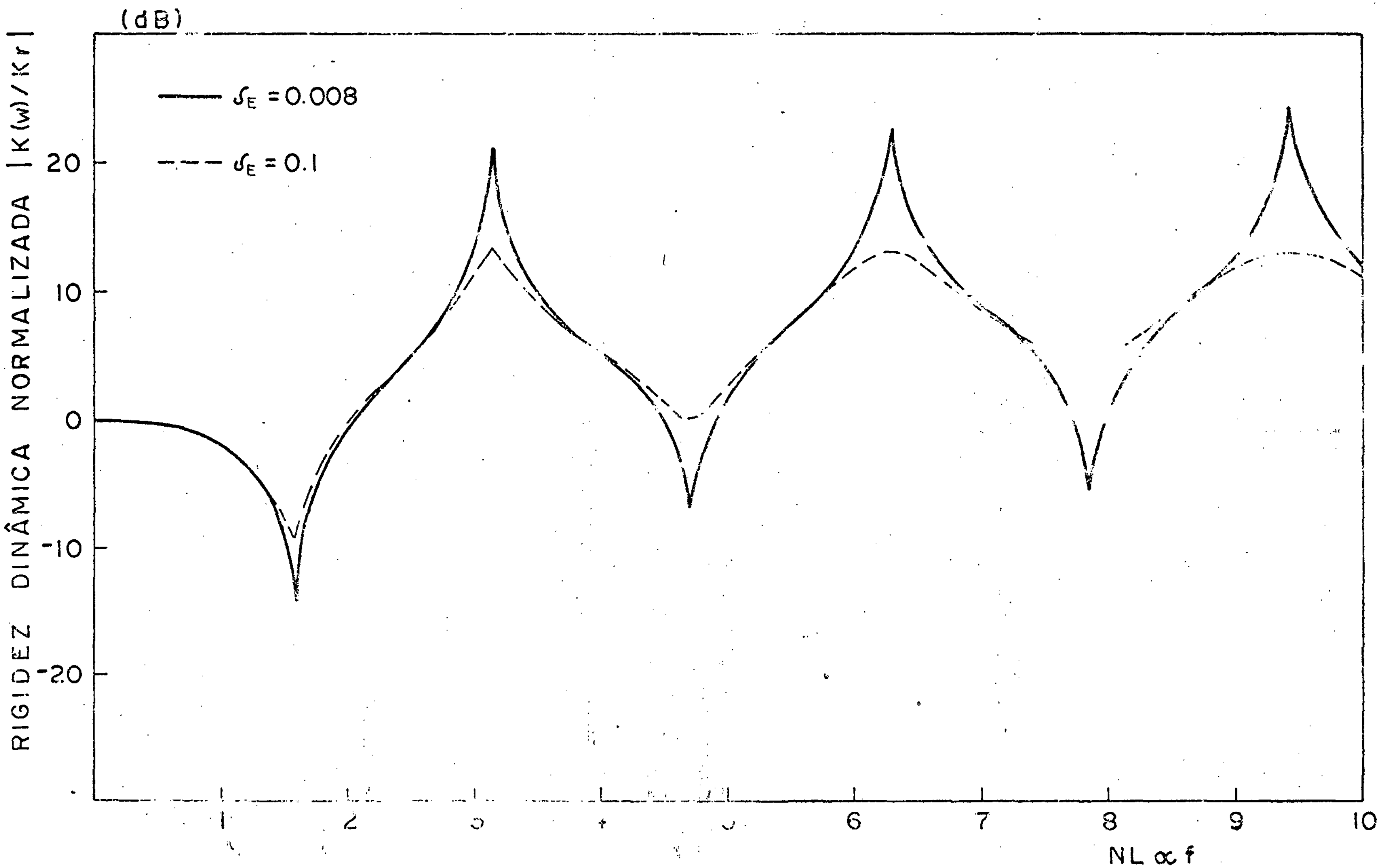


FIGURA 5.3. Rigidez normalizada para isoladores engastados com excitação senoidal, na direção longitudinal. Fator de amortecimento $\delta_E = 0.01$ e $\delta_E = 0.1$.

Define-se como transmissibilidade a relação entre a força rarsmitida através do isolador e a força impressa. Ou seja, denoando-se por (T) a transmissbilidade, tem-se que

$$T = \frac{\tilde{F}_1}{\tilde{F}_0} = \frac{F_1^* e^{i\omega t}}{F_0 e^{i\omega t}} = \frac{F_1^*}{F_0} \qquad (5.38)$$

A tensão no ponto de engaste pode ser escrita, considerando a deformação (5.5), da seguinte forma

$$\sigma_1^* = - E^* \frac{d\xi_1^*}{dx} = - E^* n^* \left[C_1^* \cos (n^*\ell) - D^* \operatorname{sen} (n^*\ell) \right] \qquad (5.39)$$

Substituindo C* e D* por seus valores (5.13) e (5.14), vem

$$F_1^* = AE^* n^* F_0 \left[\frac{\cos^2 (n^*\ell)}{AE^* n^* \eta^*} + \frac{\operatorname{sen}^2 (n^*\ell)}{AE^* n^* \eta^*} \right] \qquad (5.40)$$

ou,

$$\frac{F_1^*}{F_0} = \frac{AE^* n^*}{AE^* n^*} \left[\frac{\cos^2 (n^*\ell) + \operatorname{sen}^2 (n^*\ell)}{\eta^*} \right] \qquad (5.41)$$

Finalmente, a expressão fica

$$T = \frac{1}{\cos (n^*\ell)} \qquad (5.42)$$

5.3. VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DAS EXPRESSÕES TEÓRICAS DESENVOLVIDAS

5.3.1. ASPECTOS GERAIS

A fim de corroborar experimentalmente a precisão das expressões desenvolvidas no item precedente, foi elaborado um experimento cujo conteúdo será descrito a seguir.

A figura 5.4 mostra o esquema da cadeia de medição utilizada para medir a massa dinâmica de um isolador helicoidal, engastado em uma extremidade e carregado com uma massa em forma de cubo na extremidade livre.

O isolador usado no ensaio é o mesmo que equipa os compressores herméticos produzidos pela EMBRACO.

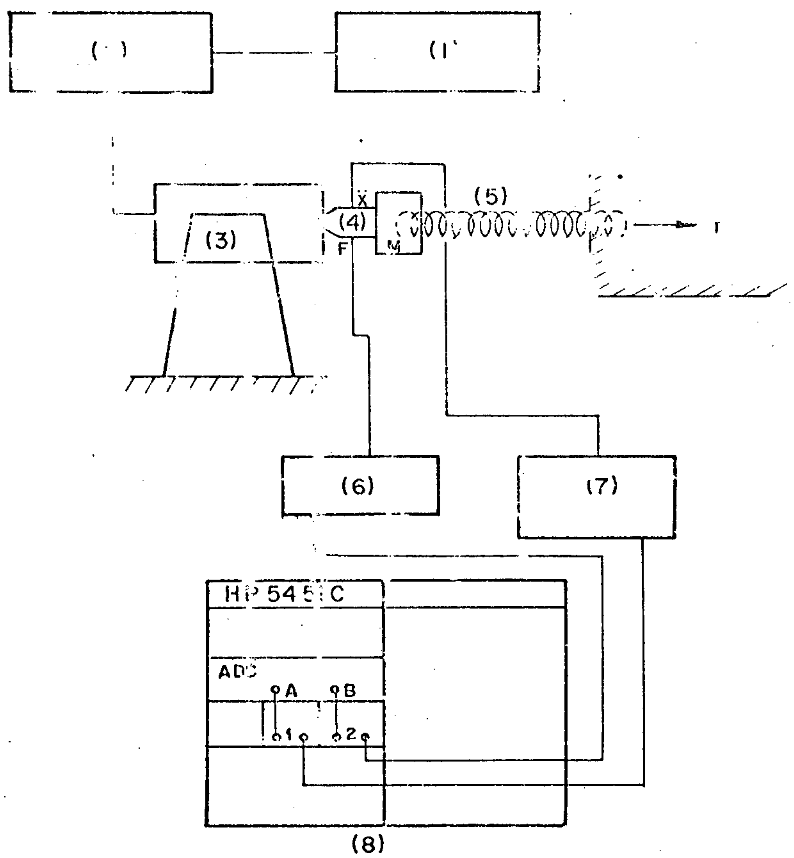


FIGURA 5.4. Esquema da cadeia utilizada na medição da massa dinâmica do isolador engastado. Foram usados os seguintes instrumentos:

(1) Gerador de sinal Tipo 1027 B&K
(2) Amplificador de potência Tipo 2707 B&K
(3) Excitador de vibrações Tipo 4812 B&K
(4) Cabeça de impedância Tipo 8001 B&K
(5) Isoladores de compressores EMBRACO
(6) Pré-amplificador Tipo 2626 B&K
(7) Medidor de vibrações Tipo 2511 B&K
(8) Analisador de Fourier Tipo 5451C HP

5.3.2. DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

O experimento consistiu em se obter dois sinais, um de força e outro de aceleração, na extremidade libre da mola, que, depois de adequadamente tratados, alimentavam o computador digital, onde eram processados.

O sinal de força gerado por (1) foi do tipo "Ruído Branco" na banda de 2 Hz a 2 kHz. Aquele sinal, depois de amplificado por (2), alimentava o excitador (3). O monitoramento da excitação foi feito mediante uma das saídas do transdutor (4), que, por sua vez, se encontrava conectado ao pré-amplificador (6), de onde o sinal já tratado era injetado no filtro passa-baixa número do computador digital.

Da outra saída da cabeça de impedância (4) provinha o sinal de aceleração que, após ser amplificado em (7), era levado ao outro canal de entrada do computador, mediante passagem pelo filtro número 1.

Uma vez estando o computador digital de posse dos dois sinais, força e aceleração, o programa "TRANSFER FUNCTION", inerente ao sistema, era acessado, a fim de que automaticamente fosse computada a razão entre a transformada de Fourier do canal 2 e a transformada de Fourier do canal 1 que, em outras palavras, representa a massa dinâmica. Ou seja,

$$M(f) = \frac{X_2(f)}{X_1(f)} ,$$

onde $X_2(f)$ denota a transformada da força

$X_1(f)$ denota a transformada da aceleração

Os parâmetros amostrais ajustados no computador foram os seguintes:

- freqüência de corte dos filtros = 1250 Hz
- freqüência máxima = 2500 Hz
- número de pontos = 2048
- número de médias = 500

A figura 5.5, a seguir, mostra os resultados experimentais da massa dinâmica obtidos para o isolador ensaiado.

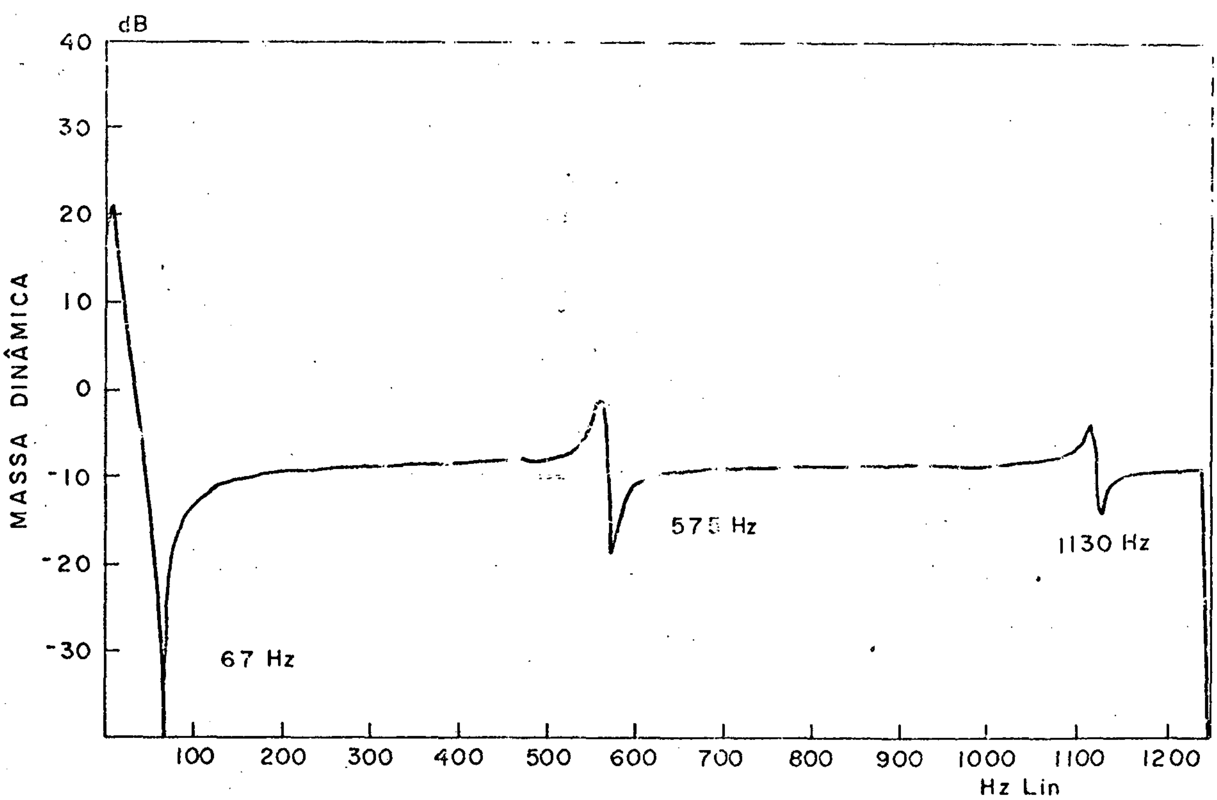


FIGURA 5.5. Resultado experimental obtido para a massa dinâmica.

O cálculo da massa dinâmica, para o mesmo isolador ensaiado, mediante o uso da expressão (5.25), será agora descrito. Para este fim, os seguintes dados da mola do compressor foram medidos:

$m = 8,7$ g (massa total, 19 espiras)

$M = 5$ g (massa na extremidade da mola)

$N \simeq 10$ espiras

$d = 1,6002$ mm

$D = 9,2964$ mm

$G = 79,29$ GN/m^2

$\ell \simeq 20$ mm

$m = 8,7/19 = 4,58 \times 10^{-4}$ Kg/espira

$\alpha = 10/0,02 = 500$ espiras/metro

Os dados acima aplicados na (5.29) fornecem a velocidade de propagação

$$C_L = \sqrt{\frac{79,29 \times 10^9 \times (0,0016002)^4}{8 \times 4,58 \times 10^{-4} \times (500)^2 \times (0,0092964)^3}} \simeq 25 \text{ m/s}$$

ou, ainda, pela (5.30),

$$f = \frac{25\ (n\ell)}{0,13} \quad [Hz] \qquad (5.43)$$

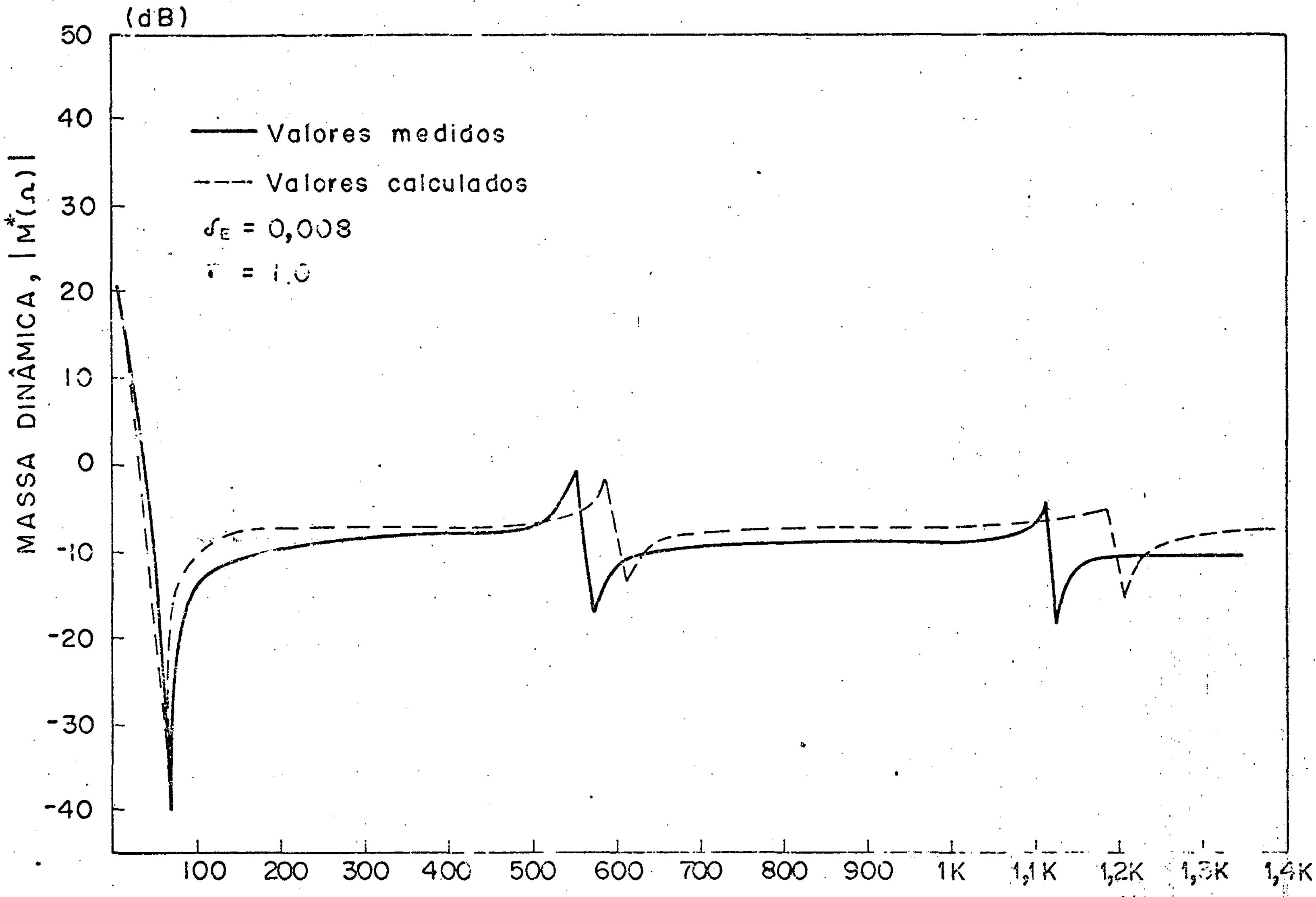


FIGURA 5.6. Massa dinâmica de um isolador helicoidal, engastado em uma extremidade [illegible] com massa na extremidade livre. Valores teóricos computados para δ_E = 0,008 e γ = 10.

A expressão (5.43) permite a conversão da freqüência adimensional em Hz, fazendo com que os resultados teóricos possam ser levantados na mesma escala de freqüência que os medidos.

A razão entre as massas (γ) é aproximadamente igual a 10.

A figura 5.6, na página anterior, mostra a superposição entre a curva experimental e a resultante da computação do valor absoluto da massa dinâmica, a partir da expressão (5.25), ou seja, $|M(\omega)|$. Os valores numéricos foram convertidos para a escala logarítmica, utilizando-se a mesma constante de sensibilidade usada nas medições.

Diversos valores para o fator de amortecimento foram assumidos na computação do $|M(\omega)|$. O melhor ajuste com os resultados experimentais verificou-se para $\delta_E = 0{,}008$, valor que possivelmente se encontra bem próximo do real.

5.3.3. MEDIÇÃO DA MASSA DINÂMICA TRANSVERSAL DO ISOLADOR

Até aqui, somente a direção longitudinal dos isoladores foi considerada na análise de suas propriedades dinâmicas. Entretanto, como se sabe, os elementos resilientes são idealizados possuindo três direções principais elásticas, ou seja, p, q e r.

A fim de verificar o efeito dinâmico dos isoladores, nas direções transversais (p,q), uma nova medição, utilizando a mesma montagem do item anterior, foi feita, somente que agora com a mola sendo excitada lateralmente.

A figura 5.7 mostra esquematicamente a parte modificada da montagem.

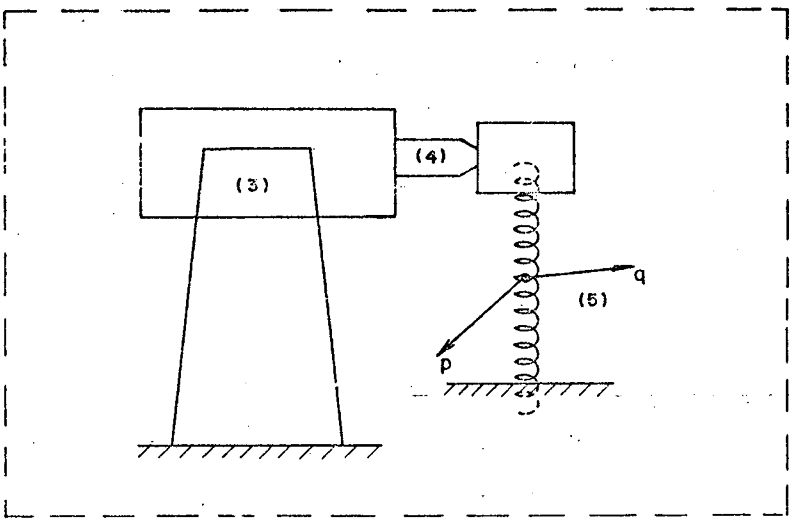


FIGURA 5.7. Esquema da parte modificada na cadeia de medição da massa dinâmica. (3), (4) e (5) são os mesmos anteriores.

O resultado experimental da massa dinâmica transversal é mostrado na figura 5.8.

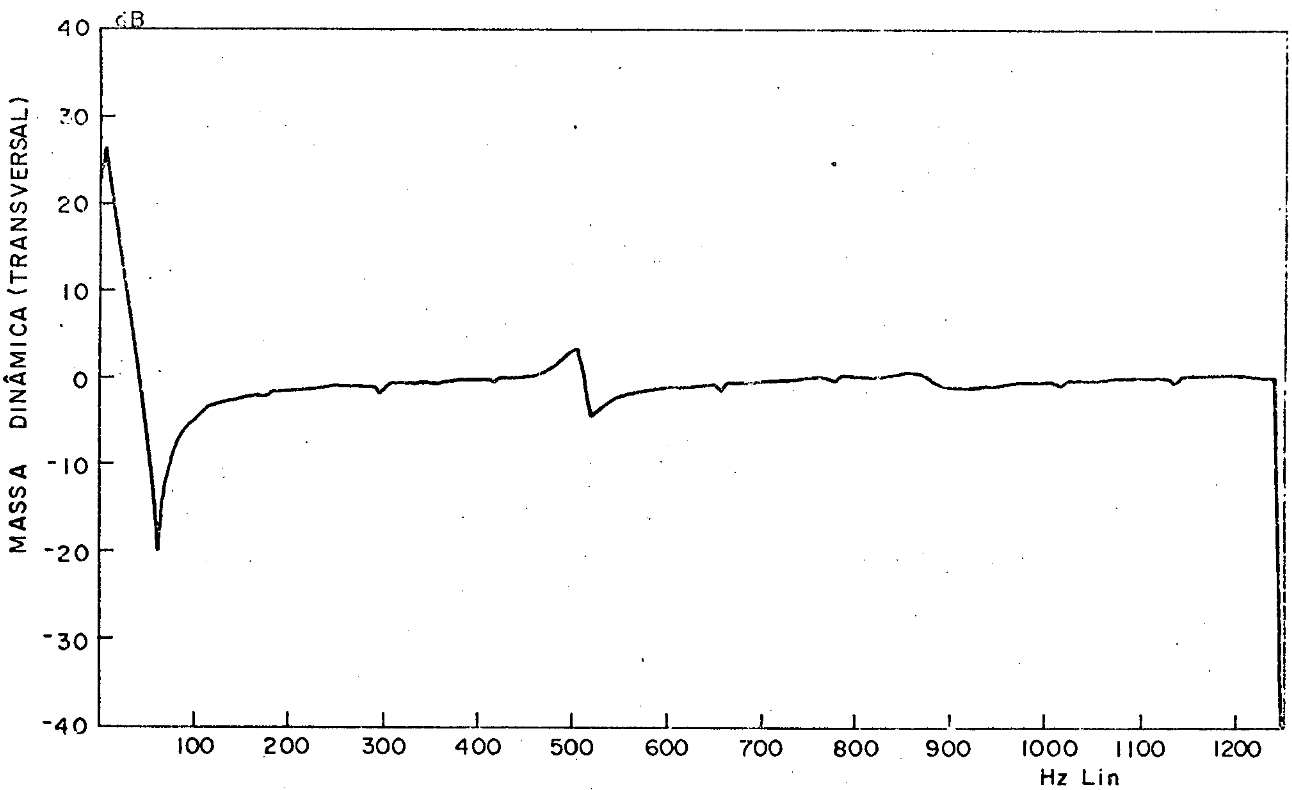


FIGURA 5.8. Massa dinâmica transversal da mola.

5.4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados mostrados na figura 5.6 permitem concluir-se que a técnica de modelagem adotada guarda boa concordância com os resultados medidos. É evidente também que a precisão é bem maior em freqüências mais baixas, não obstante na banda analisada os erros não terem sido maiores do que 7,5%; valor verificado para a terceira ressonância longitudinal da mola.

Em se tratando de vibrações laterais da mola, depreende-se da figura 5.8 que a influência dinâmica da mesma, caso seja considerada como um meio contínuo, praticamente inexiste, uma vez que a curva de resposta, a não ser pelas variações devidas ao acoplamento com a vibração longitudinal, é aproximadamente constante. Isto significa que, na prática, as características transversais do isolador podem ser aproximadas por seus valores estáticos (freqüência nula) com boa precisão.

As conclusões apontadas acima são de fundamental importância, uma vez que permitirão uma sensível melhora no modelo matemático desenvolvido no Capítulo 2, onde não só o amortecimento, mas também o efeito ondulatório dos isoladores não foi considerada.

A elaboração de um novo programa computacional, com vistas ao cálculo da resposta para vibrações de corpos rígidos, considerando o comportamento dinâmico dos isoladores, com altas freqüências, será objeto do Capítulo a seguir.

CAPÍTULO 6

CÁLCULO NUMÉRICO DA RESPOSTA EM FREQÜÊNCIA PARA VIBRAÇÕES DE CORPOS RÍGIDOS COM MONTAGEM ELÁSTICA

6.1. INTRODUÇÃO

A quantificação da resposta às vibrações de sistemas mecânicos pode, em geral, ser obtida por diversas formas diferentes. No Capítulo que se segue, entretanto, será de particular interesse a determinação da resposta em freqüência da força transmitida, através dos isoladores, bem como dos deslocamentos tridimensionais de seus centros elásticos.

Assim sendo, será formulado e resolvido numericamente o problema linear decorrente do modelo matemático atual, considerada a inclusão de toda a análise desenvolvida no Capítulo precedente.

Os resultados computados para o compressor hermético serão, a título de exemplo, mostrados, fazendo com que importantes conclusões no que diz respeito à efetividade do isolamento, bem como a otimização dos mesmos sejam tiradas a seguir.

6.2. A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A fim de formular o problema proposto, considera-se inicialmente as equações do sistema (2.22) em sua forma matricial

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \tag{6.1}$$

onde $\{Q(t)\}$ é a matriz coluna que contém todas as forças externas generalizadas.

O sistema (6.1) pode ser solucionado pelo método de Transformada de Fourier. Para tal, as seguintes transformadas são necessárias

$$\mathcal{F}[q_i(t)] = q_i(f) \tag{6.2}$$

$$\mathcal{F}[Q_i(t)] = Q_i(f) \tag{6.3}$$

e

$$\mathcal{F}[\ddot{q}_i(t)] = -\omega^2 q(f) - j\omega q_i(0) - \dot{q}_i(0) \tag{6.4}$$

onde $q_i(f)$ e $Q_i(f)$ denotam, respectivamente, a transformada de Fourier de $q_i(t)$ e $Q_i(t)$. O deslocamento e velocidade inicial generalizada são dados por $q_i(0)$ e $\dot{q}_i(0)$.

Tomando-se, agora, a transformada da (6.1), em ambos os lados, e considerando as expressões (6.2), (6.3) e (6.4), tem-se que

$$[M]\{-\omega^2 q(f) - j\omega q(0) - \dot{q}(0)\} + [K]\{q(f)\} = \{Q(f)\} \text{ , ou} \tag{6.5}$$

$$\Big[[K] - \omega^2[M]\Big]\{q(f)\} = \{Q(f)\} + [M]\{j\omega q(0) + \dot{q}(0)\} \tag{6.6}$$

ou, ainda,

$$[A]\{q(f)\} = \{E\} \tag{6.7}$$

onde

$$[A] = [K] - \omega^2 [M] \tag{6.8}$$

e

$$\{E\} = \{Q(f)\} + [M]\{j\omega q(0) + \dot{q}(0)\} \tag{6.9}$$

Esta representa a forma mais geral de excitação, uma vez que inclui não somente as forças excitadoras, mas também as condições iniciais.

A solução da (6.7) é simplesmente dada por

$$\{q(f)\} = [A]^{-1}\{E\} \tag{6.10}$$

Em se tratando de corpos rígidos, a formulação anterior pode ser adaptada às equações (2.22) na sua forma matricial, de sorte que a (6.10), na essência de condições iniciais, pode ser reescrita como

$$\left\{\begin{matrix} x_c(f) \\ y_c(f) \\ z_c(f) \\ \alpha(f) \\ \beta(f) \\ \gamma(f) \end{matrix}\right\} = [A]^{-1} \left\{\begin{matrix} F_x(f) \\ F_y(f) \\ F_z(f) \\ M_x(f) \\ M_y(f) \\ M_z(f) \end{matrix}\right\} \tag{6.11}$$

onde [A] é dada pela (6.8).

Nota-se que até aqui nenhuma alusão foi feita, quanto ao amortecimento do sistema. A complicação da solução numérica, devido a inclusão da matriz de amortecimento, pode ser contornada, caso se considere o mesmo na própria matriz de rigidez. Para tal, basta que a matriz [K] seja computada a partir do valor dinâmico da rigidez principal dos isoladores, dado pela expressão (5.37).

$$\left\langle \begin{matrix} x_c(f) \\ y_c(f) \\ z_c(f) \\ \alpha(f) \\ \beta(f) \\ \gamma(f) \end{matrix} \right\rangle = \Big[[K(\omega)] - \omega^2 [M] \Big] \left\langle \begin{matrix} F_x(f) \\ F_y(f) \\ F_z(f) \\ M_x(f) \\ M_y(f) \\ M_z(f) \end{matrix} \right\rangle \tag{6.12}$$

onde $[K(\omega)]$ representa a matriz de rigidez computada a partir da rigidez dinâmica do isolador.

Torna-se necessária a determinação dos deslocamentos do ponto de contato entre o isolador e o corpo vibrante. Estes deslocamentos, usando a mesma notação do Capítulo 2, podem ser determinados por simples considerações geométricas, e são dados por [8]

$$x^*_{ce} = x^*_c + a_z\beta^* - a_y\gamma^* \tag{6.13}$$

$$y^*_{ce} = y^*_c - a_z\alpha^* + a_x\gamma^* \tag{6.14}$$

$$z^*_{ce} = z^*_c - a_x\beta^* + a_y\alpha^* \tag{6.15}$$

onde x_{ce}, y_{ce} e z_{ce} denotam o deslocamento tridimensional do centro elástico. A projeção destes na direção longitudinal principal do isolador (r) é de pronto obtida, fazendo uso dos cossenos diretores λ_{xr}, λ_{yr} e λ_{zr}. Ou seja,

$$X^r_{ce}(f) = x^*_{ce}(f)\lambda_{xr} + y^*_{ce}(f)\lambda_{yr} + z^*_{ce}(f)\lambda_{zr} \qquad (6.16)$$

onde X^r_{ce} denota o deslocamento resultante do centro elástico, projetado na direção longitudinal principal (r) do isolador.

A força elástica atuante na junção mola-corpo, segundo o eixo longitudinal, levando em conta a (5.31) e (6.16), é calculada por

$$F_0(\omega) = K_r(\omega) \times X^r_{ce}(\omega) \qquad (6.17)$$

ou, em termos de freqüência adimensional,

$$F_0(n\ell) = K_r(n\ell) \times X^r_{ce}(n\ell) \qquad (6.18)$$

A força transmitida para o engaste, através do isolador, pode ser agora computada, considerando também a (5.38). Então,

$$F_1^*(n\ell) = T(n\ell) \times F_0(n\ell) \tag{6.19}$$

onde T é dada pela (5.42).

Um programa computacional foi elaborado, a fim de determinar numericamente, a resposta tridimensional do centro elástico com base nas expressões (6.13), (6.14) e (6.15). A partir daí, é feita a computação do espectro de esforço transmitido pelo isolador, conforme a (6.19).

No item a seguir serão apresentados os resultados da aplicação ao compressor hermético.

6.3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos, obtidos para a transmissão de força pelos isoladores helicoidais são mostrados nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3, em função de $(n\ell)$. As curvas (6.1) foram obtidas com alta resolução ($\Delta NL = 0{,}0001$), posto que as freqüências naturais do sistema são sabidamente muito próximas. A partir de $n\ell$ igual a 0,1, entretanto, a resolução foi reduzida 100 vezes, com o que foram computadas as curvas (6.2) e (6.3).

De forma similar, as figuras 6.4 e 6.5 representam os deslocamentos dos centros elásticos, obtidos com alta resolução, enquanto que as curvas (6.6) e (6.7) foram computadas com menor resolução ao longo do restanda da banda de interesse. Neste exemplo particular, a faixa de freqüência é de 0 a 2 KHz ou, em termos adimensionais, $(n\ell)$ entre 0 e 10. A conversão, evidentemente, pode ser feita pela expressão (5.43).

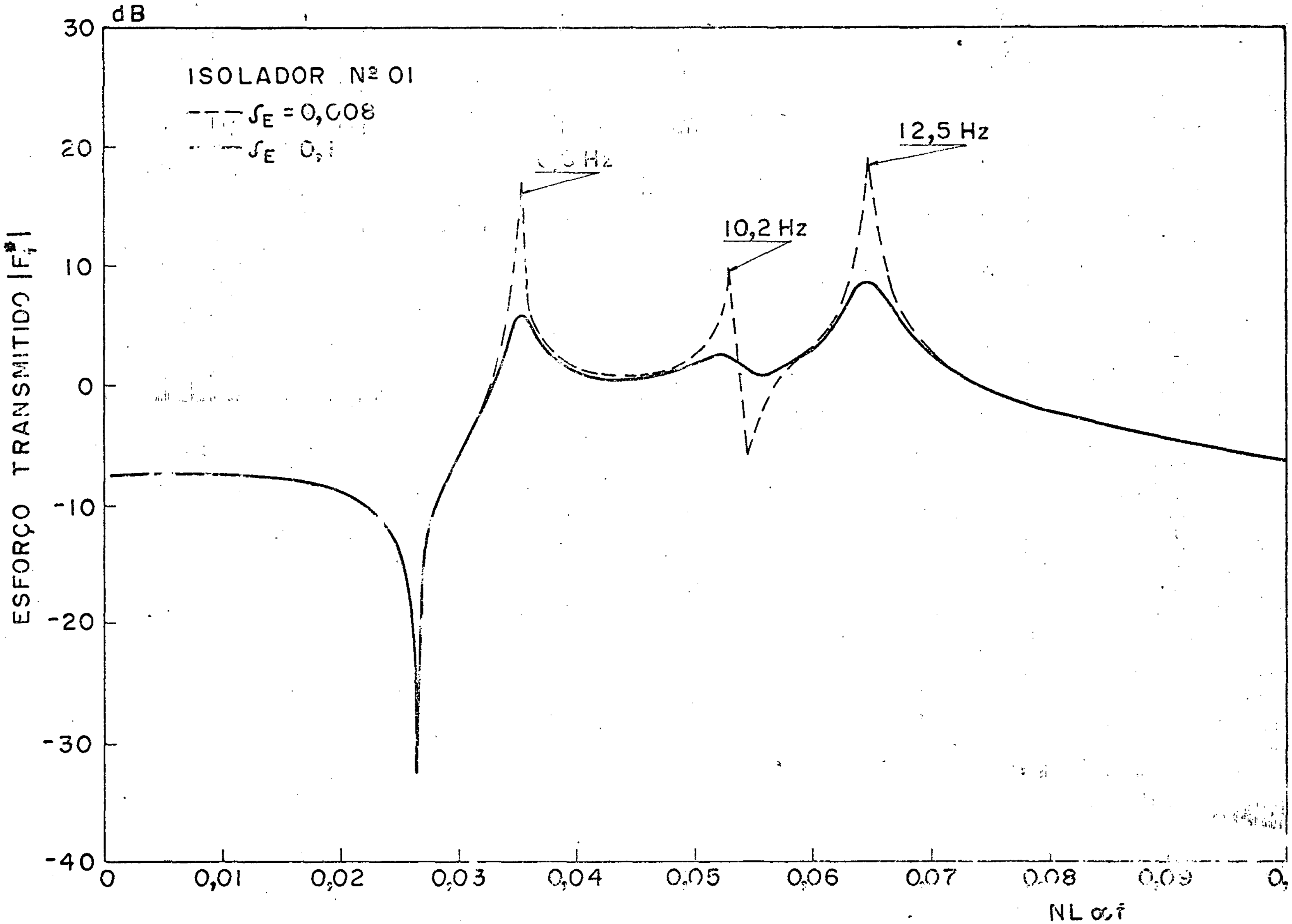


FIGURA 6.1. (a) Espectro do esforço transmitido pelo isolador.
Baixa freqüência. Resolução ΔNL = 0,0001.

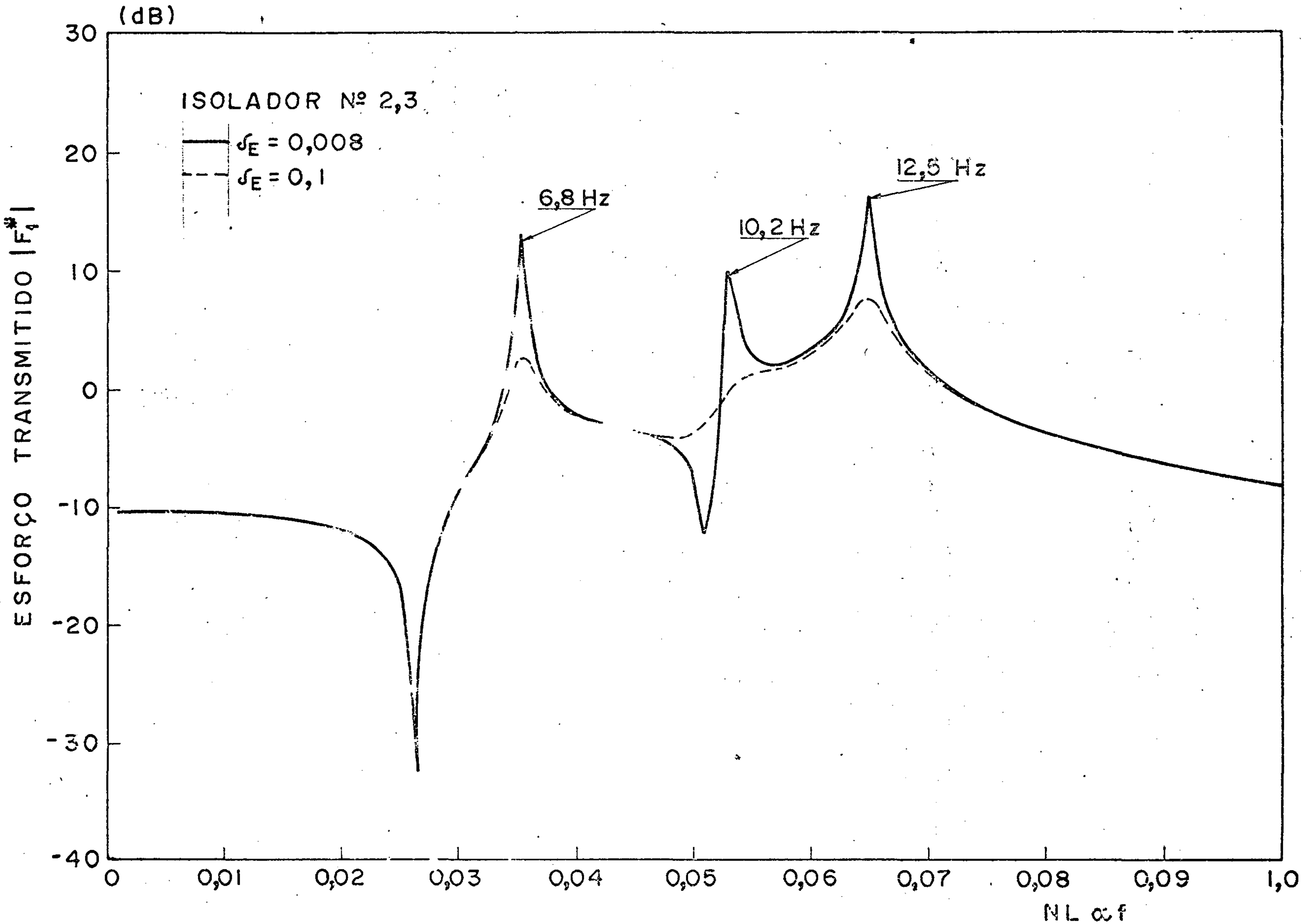


FIGURA 6.1. (b) Espectro do esforço transmitido pelos isoladores simétricos. Baixa freqüência. Resolução $\Delta NL = 0{,}0001$.

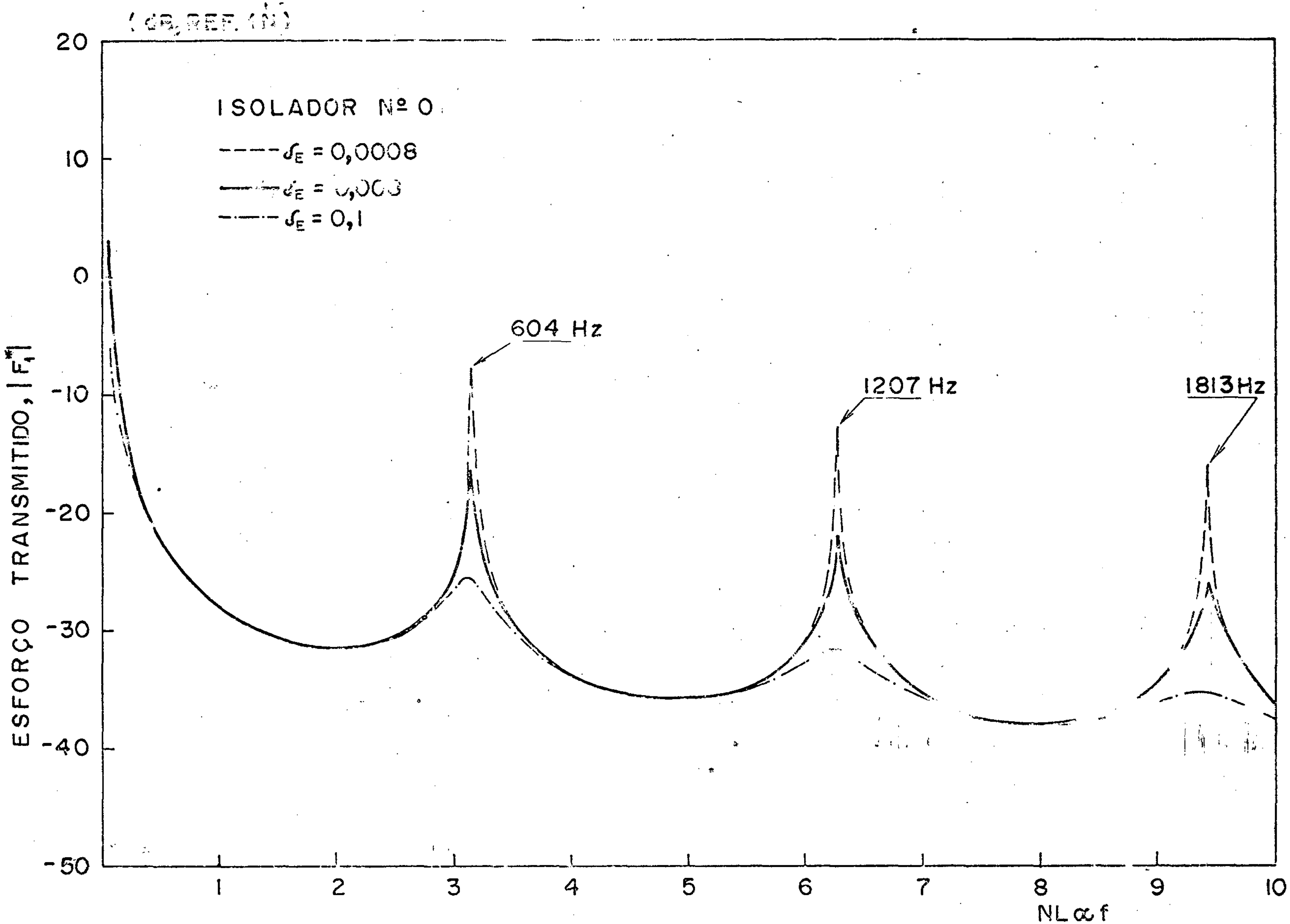


FIGURA 6.2. Espectro do esforço transmitido pelo isolador.
Alta freqüência. Resolução $\Delta NL = 0{,}01$.

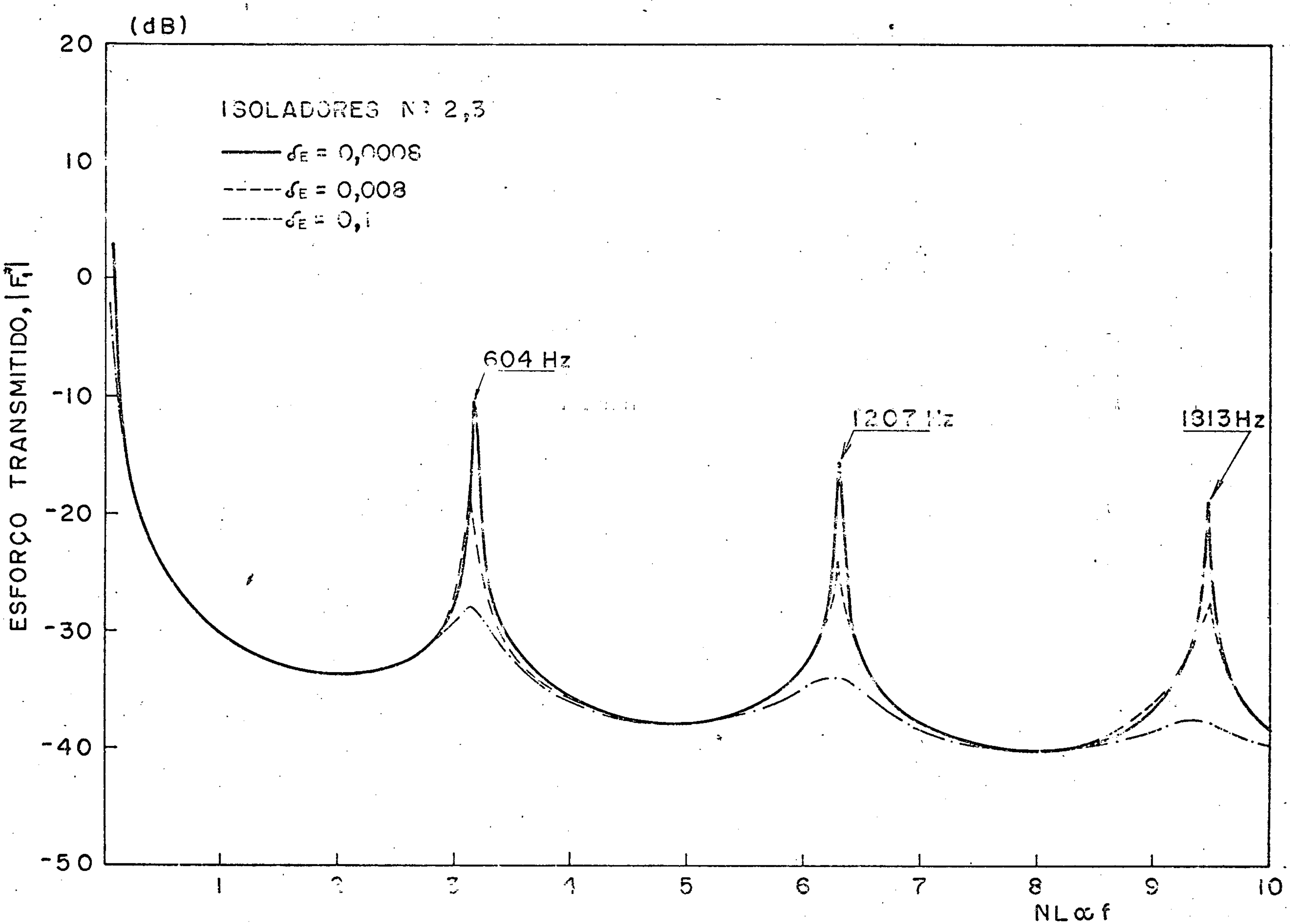


FIGURA 6.3 Espectro do esforço transmitido pelos isoladores simétricos. Alta freqüência. Resolução ΔNL = 0,01.

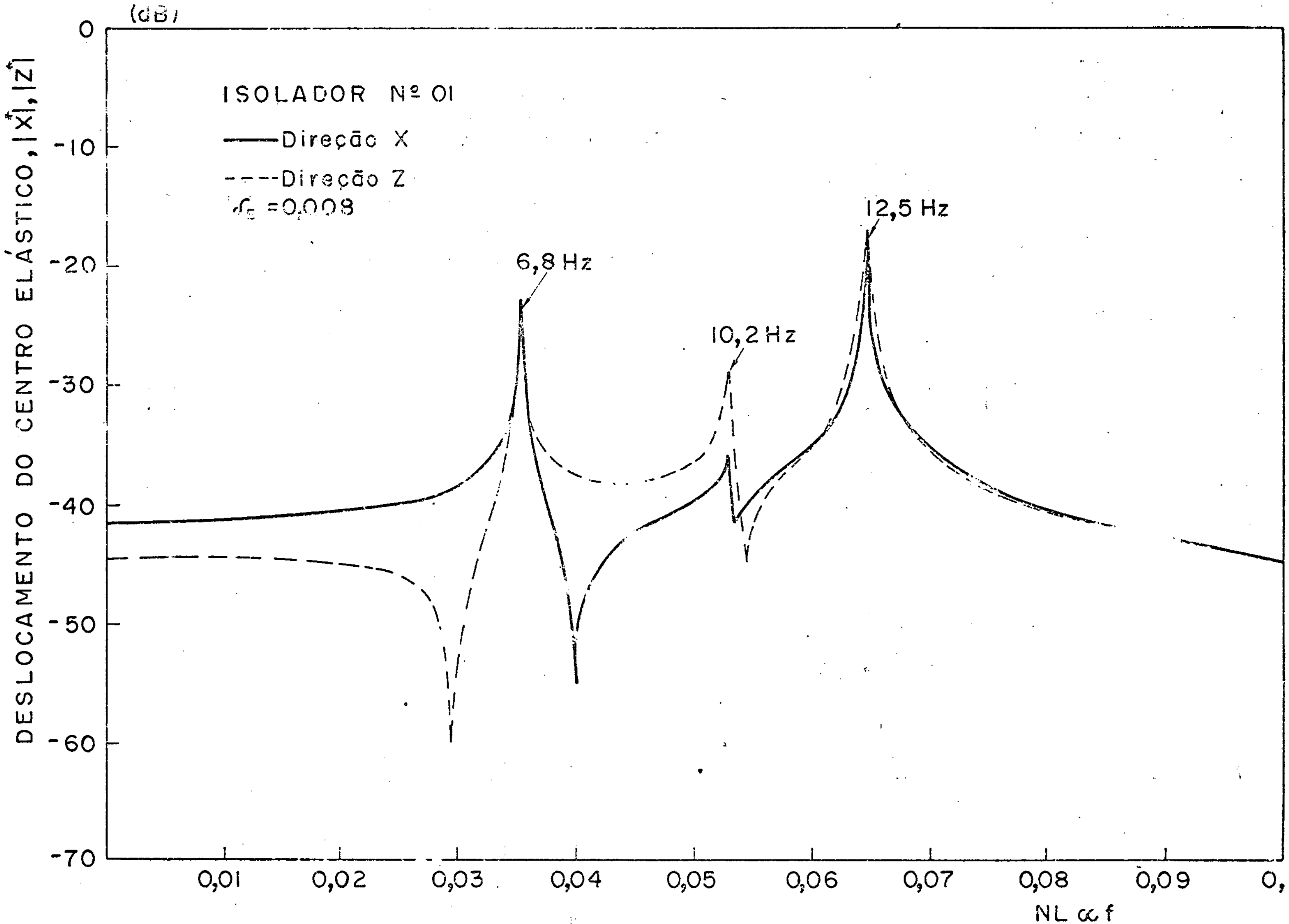


FIGURA 6.4. Deslocamentos do ponto de fixação corpo-mola. Baixa frequência. Resolução ΔNL = 0,0001.

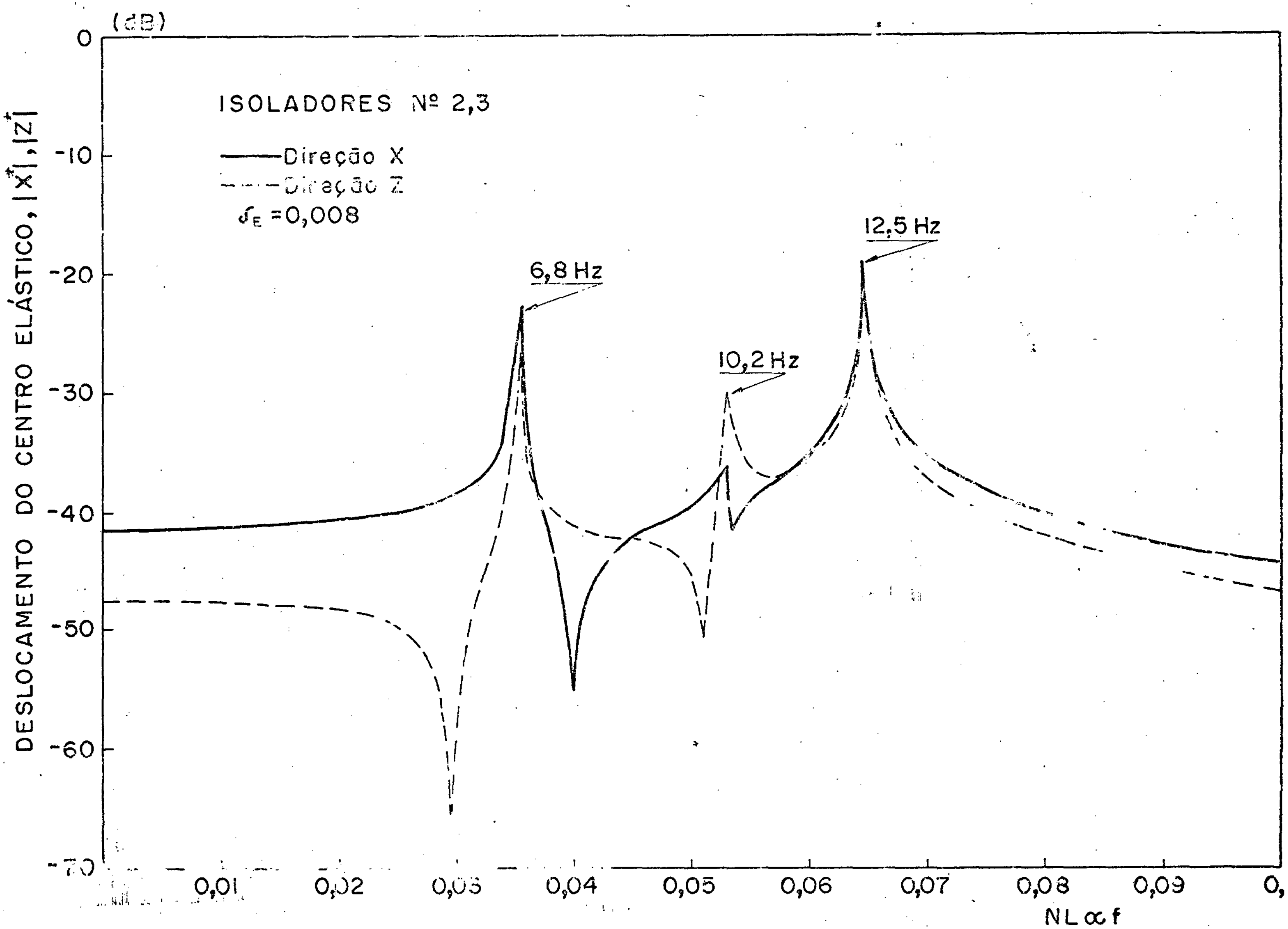


FIGURA 6.5. Deslocamentos dos pontos de fixação corpo-mola, para os isoladores simétricos. Baixa freqüência. Resolução ΔNL = 0,0001.

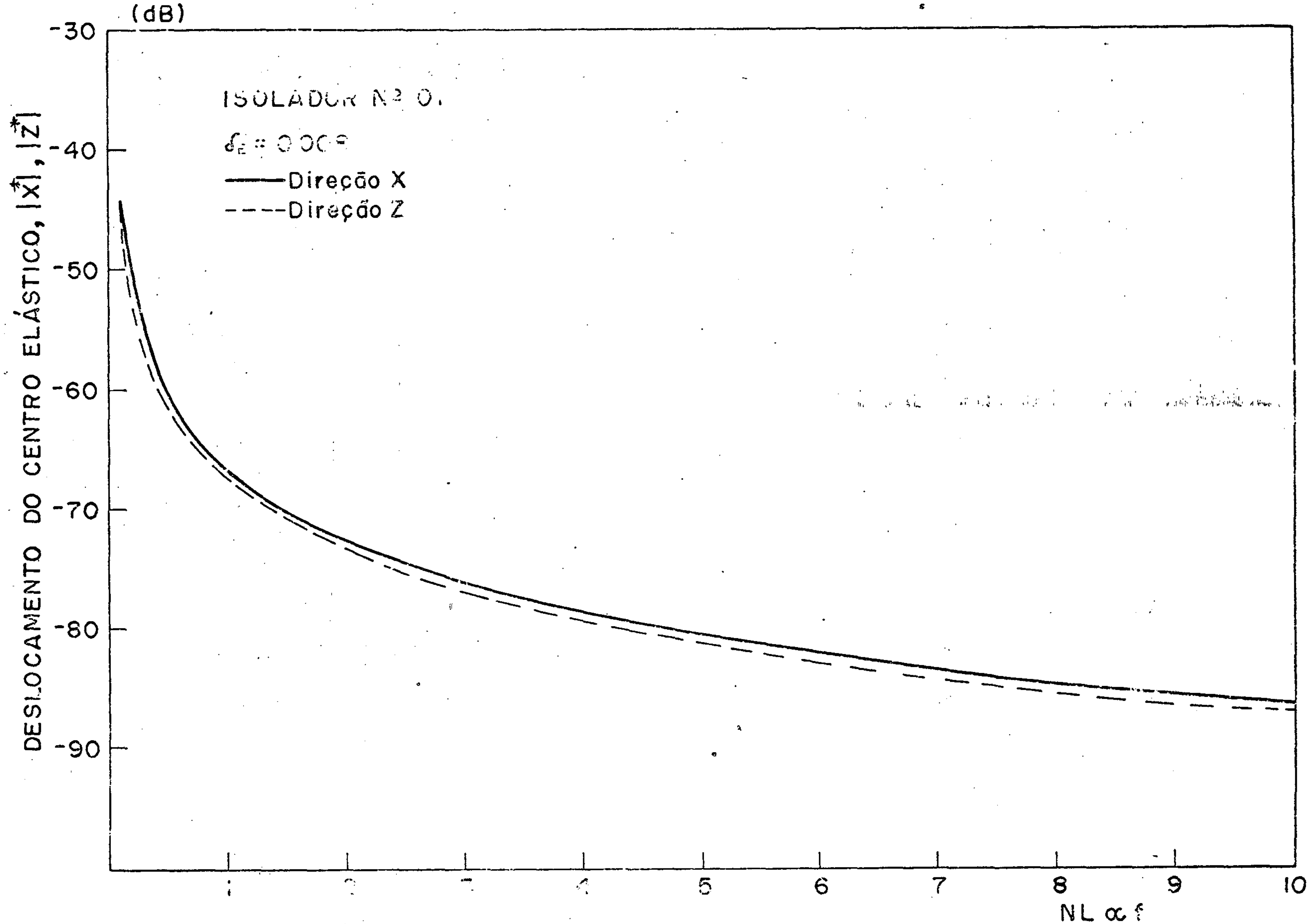


FIGURA 6.[illegible] Deslocamentos do ponto de fixação corpo-mola.
Alta freqüência. Resolução $\Delta NL = 0,01$.

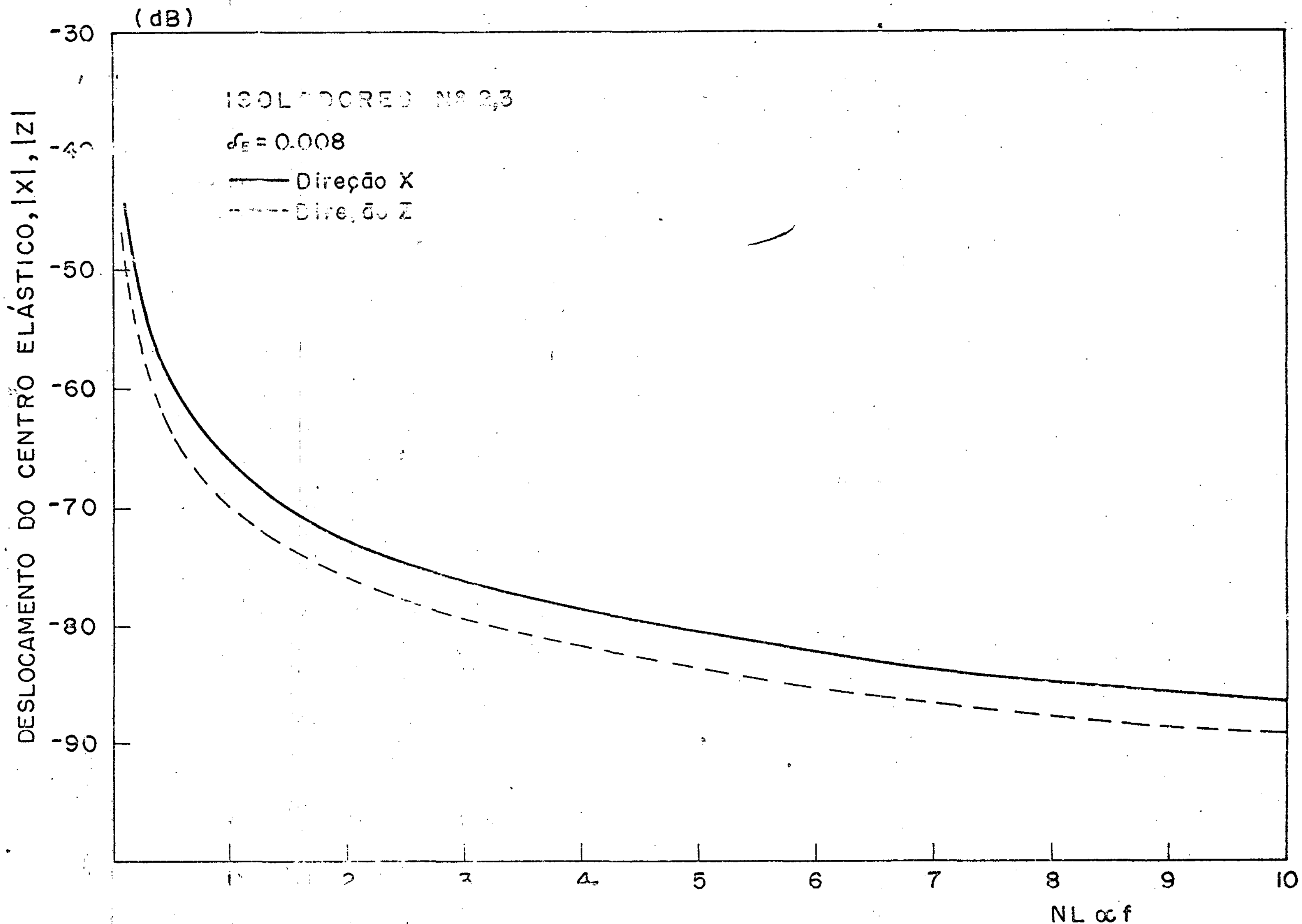


FIGURA 6.7: Deslocamentos dos pontos de fixação corpo-mola para as molas simétricas. Alta freqüência. Resolução $\Delta NL = 0{,}01$.

Por razões que serão posteriormente comentadas, o vetor de força usado é composto por uma força na direção X, atuante no centro de massa e denotada por F_x, e um momento positivo em torno do eixo Y, denotado por M_y, com as demais componentes nulas.

No computação do esforço transmitido ao engaste pelos isoladores, foram usados três valores para o fator de amortecimento (δ_E), a fim de permitir a análise do efeito para o sistema, da adição de amortecimento.

6.4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com referência às curvas de esforço transmitido, existem duas regiões distintas a serem consideradas. A primeira refere-se à figura 6.1, onde três picos de força, devido as ressonâncias do núcleo, são encontrados. Aqueles valores máximos ocorrem em freqüências muito próximas das ressonantes, já anteriormente calculadas, com pequenas variações, devido a presença de amortecimento no sistema. Posto que o vetor de força foi adequadamente simulado atuando no plano XZ do corpo, por razões de simetria, somente três modos se pronunciaram no espectro. Nesta região convém, ainda, ressaltar que a força transmitida é regulada basicamente pelos deslocamentos dos pontos de fixação corpo-mola, uma vez que as propriedades dinâmicas dos isoladores (transmissibilidade, rigidez dinâmica) variam muito pouco na baixa freqüência.

Com relação às curvas (6.2) e (6.3), notam-se picos de força não mais devidos as ressonâncias do corpo, mas sim pela variação em freqüência das características dos isoladores. Nesta faixa de freqüência, o corpo, dado a sua elevada inércia, permanece quase que parado no espaço. O isolador é quem responde dinamicamente, amplificando, em certas freqüências, a força transmitida.

Em outras palavras, caso o efeito dinâmico dos isoladores não fosse considerado na formulação, a identificação daquelas importantes regiões críticas, ao isolamento em alta freqüência, não seria possível. A redução considerável nos níveis de força transmitida, devido ao aumento de amortecimento, ficou também evidenciada, de forma clara, nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3.

Evidentemente que, também por razões de simetria existente no corpo, o comportamento dos isoladores simétricos (números 2 e 3) é idêntico.

Quanto às curvas de deslocamento em baixa freqüência (6.4) e (6.5), o comportamento, como era esperado, é semelhante ao da força transmitida na mesma faixa, com três picos devidos às ressonâncias do núcleo em modos de vibração envolvendo movimento no plano de simetria XZ.

Os resultados computados para os deslocamentos em freqüências mais altas (figura 6.6 e 6.7) demonstram que aqueles decrescem assintoticamente com o acréscimo da freqüência, não sendo, portanto, evidenciado o efeito das ressonâncias e anti-ressonâncias dos isoladores. Isto se deve, certamente, à grande diferença de massa existente entre o núcleo e as molas do compressor.

Os picos de força em alta freqüência explicam, com boa segurança, a existência de níveis elevados no Espectro da Potência Sonora irradiada pela carcaça do compressor. A figura 6.8 mostra o espectro de potência sonora medido por LENZI e SANGOI [7], onde nota-se claramente a elevação dos níveis entre 500 e 1000 Hz, 1000 e 2000 Hz, e na freqüência de 63 Hz. Tais elevações devem-se certamente aos picos de excitação nas freqüências de 63, 605, 1207 e 1813 Hz.

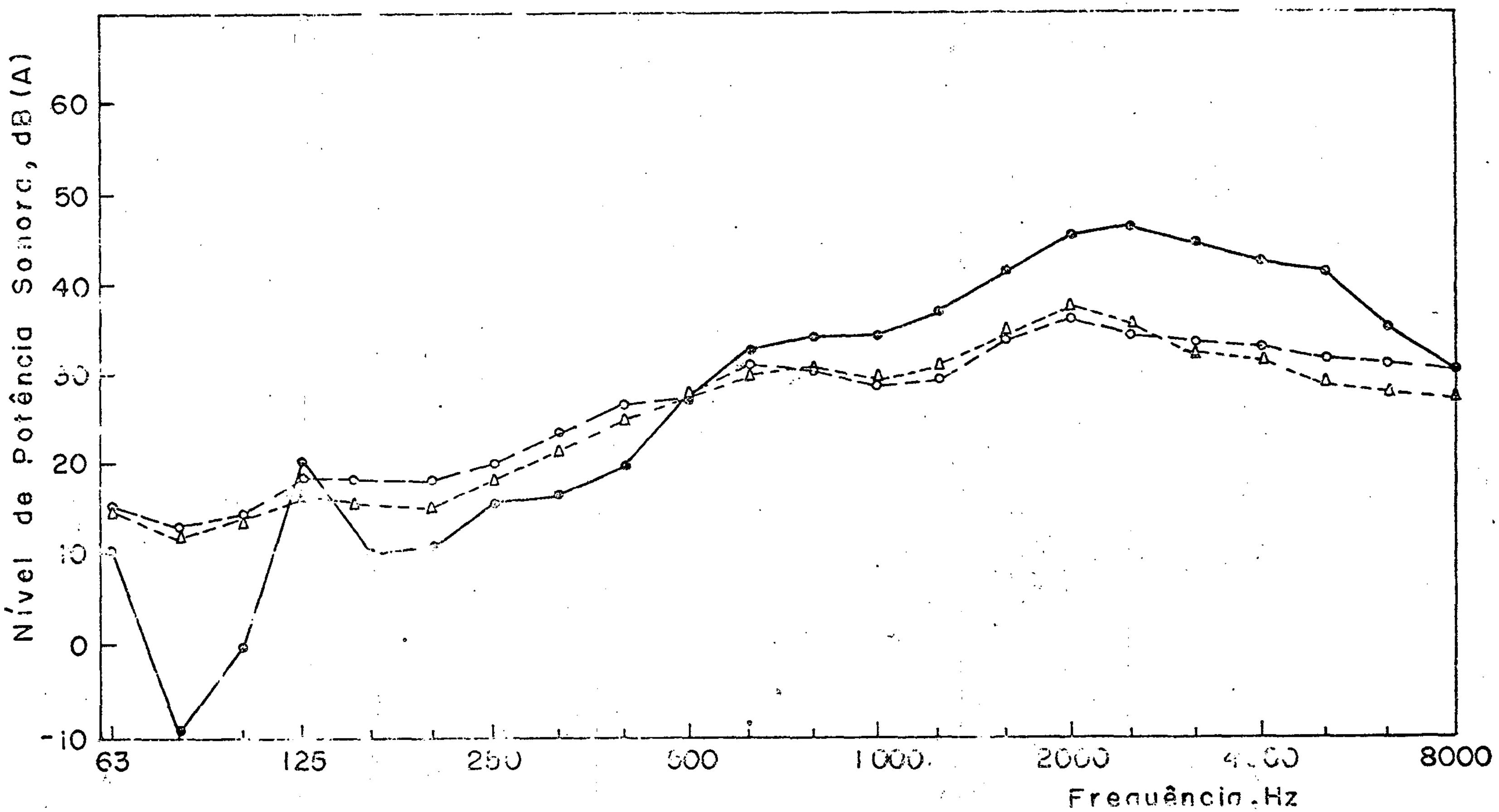


FIGURA 6.8. Níveis de potência sonora do compressor [illegible] dB (A)
● Compressor livre, operando com ar; ○ compressor com engates, operando com ar; △ compressor em engates, operando com Freon.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS POSTERIORES

Embora muitos comentários já tenham sido feitos em Capítulos precedentes, quando de suas conclusões, serão agora colocadas algumas considerações de caráter mais geral sobre as várias etapas deste trabalho.

A seguir, serão fornecidas sugestões com vistas à continuidade do estudo nesta área.

Inicialmente, abordar-se-á a solução numérica dos modos normais e freqüências naturais de vibração. Os resultados computados, a partir da formulação inicialmente adotada, mostraram que o programa computacional constitui-se em uma forma rápida e precisa de se determinar teoricamente os principais parâmetros modais de sistemas vibratórios discretos. A generalidade do método, no que diz respeito à geometria do corpo e disposição dos isoladores, é outra evidente vantagem que deve ser considerada.

A análise modal feita digitalmente, mediante utilização do computador HP 5451C, mostrou ser ainda bastante problemática, quando se trata de sistemas cujo espectro apresenta picos muito próximos, como é o caso do compressor experimentado. Segundo os fabricantes [20], todavia, o problema de falta de resolução pode de pronto ser resolvido com a aplicação ao sistema do periférico conhecido por "ZOOM". O uso daquele periférico permite que a transformada de Fourier seja computada sobre uma faixa particular de freqüência, com altíssima resolução, ao invez do método usual, on de é sempre computada na faixa que vai de zero até F_{max}.

O procedimento experimental analógico, utilizado para medir modos de vibração do núcleo do compressor, mostrou ser um método relativamente simples e rápido. Os resultados obtidos foram, como se viu, razoavelmente satisfatórios, considerando as dificuldades em se medir modos de vibração espacial com desacoplamento de coordenadas. Assim sendo, conclui-se que o uso desta técnica de medição é indicado até mesmo em sistemas complexos.

A formulação e posterior obtenção automática das curvas de esforços transmitidos pelos isoladores, considerados os efeitos ondulatórios dos mesmos, conclusivamente permitem uma análise detalhada e confiável do desempenho do isolamento em freqüências mais elevadas. Esta análise, contudo, é de grande importância, quando se considera a percepção pelo homem do ruído emitido, porquanto o ouvido humano provoca grande atenuação em freqüências muito baixas. Além das vantagens já apontadas, ficou também caracterizada a simplicidade da solução numérica decorrente da formulação adotada, posto que é possível considerar-se o amortecimento do sistema sem que necessariamente seja incluída uma nova matriz (de amortecimento) às equações de movimento, com o que certamente a solução numérica se dificultaria bastante.

A forma simples de acesso ao valor do amortecimento dos isoladores permitiu que o efeito do mesmo fosse estudado em alta e baixa freqüências, separadamente. Tal procedimento foi adotado por ser, na baixa freqüência, necessária uma resolução muito maior, dadas as características dinâmicas do exemplo testado. feita, verificou-se que, independentemente da faixa de freqüência, um aumento do fator de amortecimento implica em redução no valor de pico da força que é transmitida à carcaça. Logo, torna-se evidente a necessidade da adição de amortecimento ao sistema de isolamento do núcleo. Em outras palavras, uma redução significativa nos níveis de excitação da carcaça é conseguida com o aumento do amortecimento. Isto, na prática, significaria um decréscimo nos níveis de potência sonora irradiada.

É conveniente também ressaltar a eficiência do programa computacional, no que diz respeito à rapidez de processamento, porquanto são necessários cerca de três minutos de CPU para que sejam computados seis espectros (três de deslocamento e três de força) com quinhentos pontos cada.

A seguir, serão apresentadas algumas sugestões sobre futuros trabalhos:

- ensaio de transmissibilidade em sistemas com múltiplos graus de liberdade;

- projeto e desenvolvimento de isoladores, visando reduzir a transmissão de força em sistemas com múltiplos graus de liberdade: compressores herméticos;

- estudo de propriedades dinâmicas e térmicas de elastômeros de alto amortecimento. Análise comparativa de métodos;

- inclusão na formulação existente da dependência em freqüência das propriedades dos isoladores elastoméricos. Aplicações em isolamento de Câmaras Acústicas, Turbinas Aeronáuticas e Motores Veiculares, em geral.

APÊNDICE A

NOTA SOBRE A COMPUTAÇÃO DOS MODOS NORMAIS E FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS MONTADOS RESILIENTEMENTE

O programa computacional foi desenvolvido para determinar os autovalores e autovetores (freqüências naturais e modos de vibração) de um corpo rígido montado sobre isoladores elásticos, lineares, não dissipativos, dispostos em qualquer configuração sobre o corpo.

As matrizes de inércia e rigidez são determinadas, a partir dos dados de entrada, pela subrotina USP[illegible]001. Uma vez determinadas $[K]$ e $[M]$, o programa chama a subrotina que soluciona o problema $\left[[K] - \omega^2[M]\right]\{\phi\} = 0$, utilizando o algoritmo de JACOBI [9], fornecendo, como saída, seis autovalores e os seis correspondentes autovetores normalizados na forma $\{\phi\}_i^T[M]\{\phi\}_i = 1$, $i = 1, n$.

Na página seguinte, a figura A.1 mostra um diagrama de fluxo com os passos básicos para a computação dos modos e freqüências, onde as matrizes $[K]$ e $[M]$ são calculadas com base na formulação desenvolvida no Capítulo 2.

Note-se que, apesar dos exemplos de aplicação mostrados neste trabalho possuirem características simplificativas, o programa elaborado é geral, desde que determina as matrizes de massa e rigidez, a partir das equações de movimento originais, isto é, sem qualquer hipótese simplificativa.

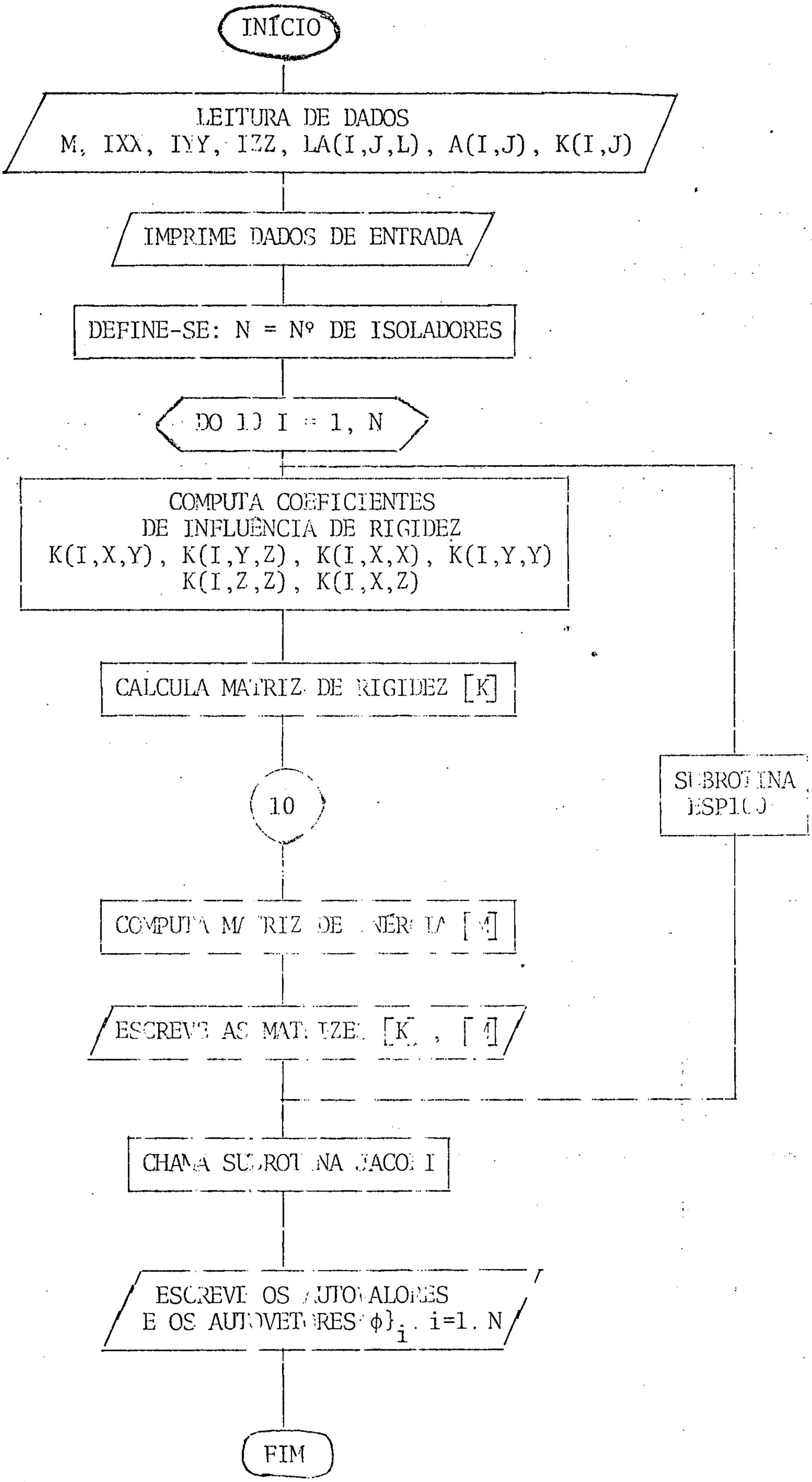


FIGURA A.1. Fluxograma para o cálculo dos modos normais e freqüências naturais de vibração.

A P Ê N D I C E   B

CONSIDERAÇÕES SOBRE A COMPUTAÇÃO DAS CURVAS DE $|F^*_i(n\ell)|$ e $|x^*_{ce}|$, $|y^*_{ce}|$, $|z^*_{ce}|$

A figura B.1 mostra um diagrama de fluxo com a seqüência básica dos passos na computação da força e deslocamentos. Após ser feita a leitura dos dados pertinentes ao sistema, é necessário definir-se o valor de algumas constantes:

F(I), I = 1,6 ⟹ representa a i-ésima coordenada complexa de vetor de forças generalizadas. Desta feita, o programa permite que sejam simulados vários tipos de excitação para o sistema.

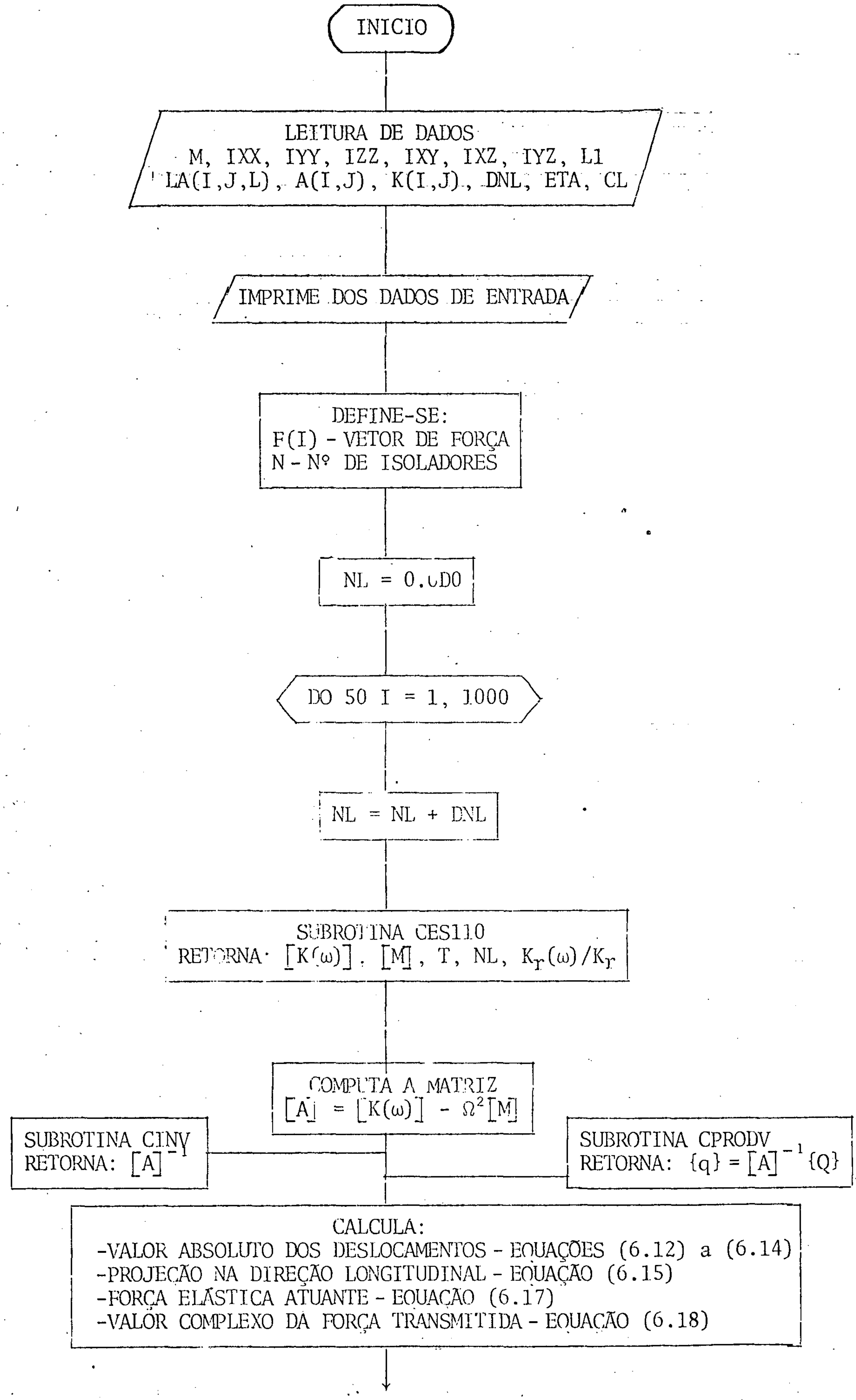
NL ⟹ freqüência adimensional, a ser definida de acordo com a freqüência inferior da banda de interesse, na qual se esteja efetuar a varredura.

A subrotina CES110 calcula as matrizes de rigidez e massa, com base nas expressões (2.22), considerando o valor complexo da rigidez na direção (r).

A inversão da matriz [A] é feita pela subrotina CINV, utilizando o método FADDEEV-LEVERRIER [21].

Para que a seguir seja determinado o valor absoluto dos deslocamentos, é necessário computar primeiramente o produto entre a matriz $[A]^{-1}$ e o vetor de força {Q}. Este produto é calculado pela subrotina CPRODV.

As operações subsequentes do programa estão em forma auto-explicativa no fluxograma B.1, sendo desnecessários maiores comentários a respeito.


INICIO
LEITURA DE DADOS
M, IXX, IYY, IZZ, IXY, IXZ, IYZ, L1
LA(I,J,L), A(I,J), K(I,J), DNL, ETA, CL
IMPRIME DOS DADOS DE ENTRADA
DEFINE-SE:
F(I) - VETOR DE FORÇA
N - Nº DE ISOLADORES
NL = 0.0D0
DO 50 I = 1, 1000
NL = NL + DNL
SUBROTINA CES110
RETORNA: [K(ω)], [M], T, NL, $K_r(\omega)/K_r$
COMPUTA A MATRIZ
$[A] = [K(\omega)] - \Omega^2[M]$
SUBROTINA CINV
RETORNA: $[A]^{-1}$
SUBROTINA CPRODV
RETORNA: $\{q\} = [A]^{-1}\{Q\}$
CALCULA:
-VALOR ABSOLUTO DOS DESLOCAMENTOS - EQUAÇÕES (6.12) a (6.14)
-PROJEÇÃO NA DIREÇÃO LONGITUDINAL - EQUAÇÃO (6.15)
-FORÇA ELÁSTICA ATUANTE - EQUAÇÃO (6.17)
-VALOR COMPLEXO DA FORÇA TRANSMITIDA - EQUAÇÃO (6.18)

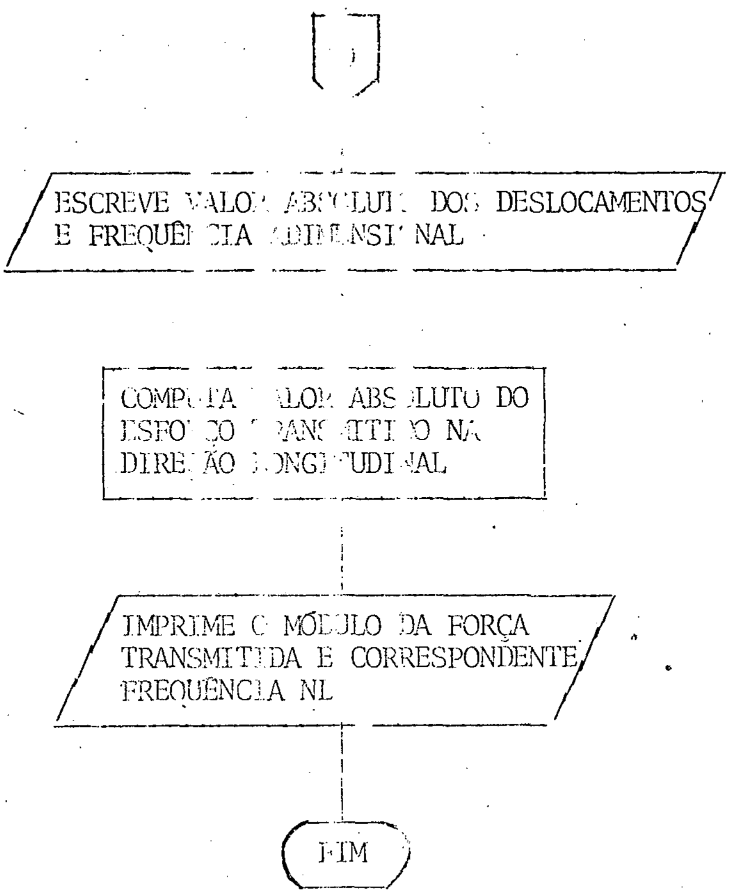


FIGURA B.1. Fluxograma para o cálculo da força transmitida e deslocamentos do centro elástico. Sistemas com seis graus de liberdade.

A N E X O I

FOTOGRAFIAS REFERENTES AOS EXPERIMENTOS

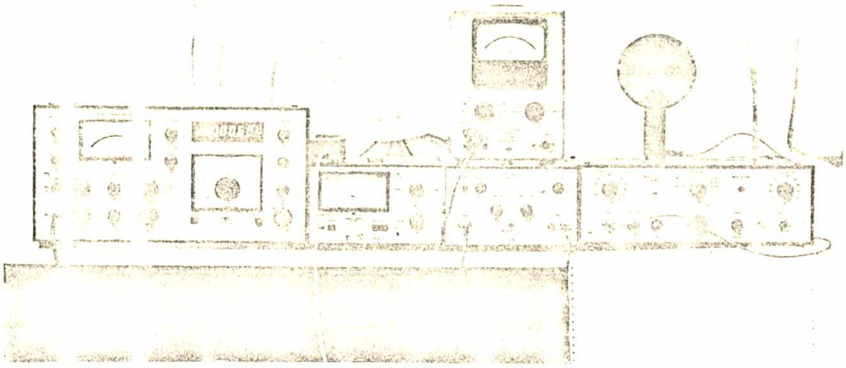


FIGURA I.1. Cadeia de medição utilizada na análise modal via analógica.

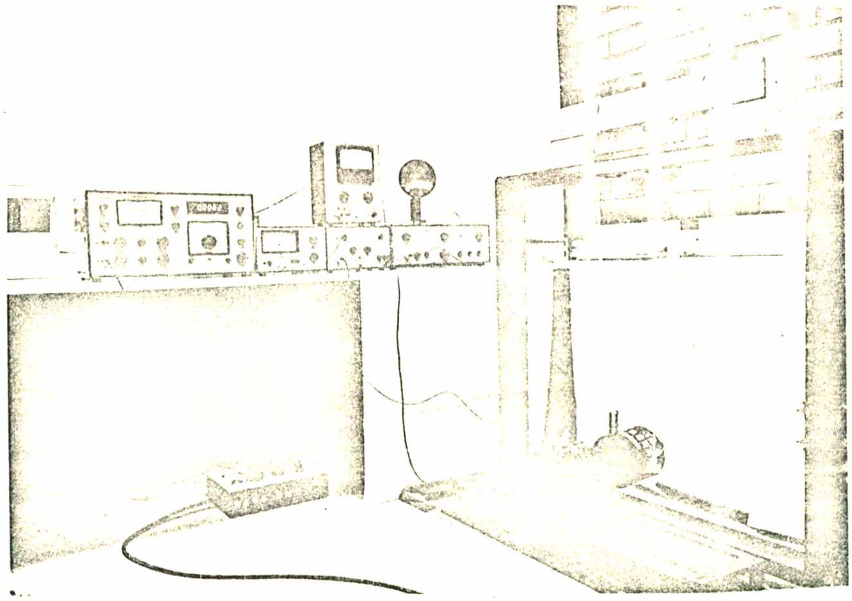


FIGURA I.2. Vista da montagem completa usada na análise modal via analógica.

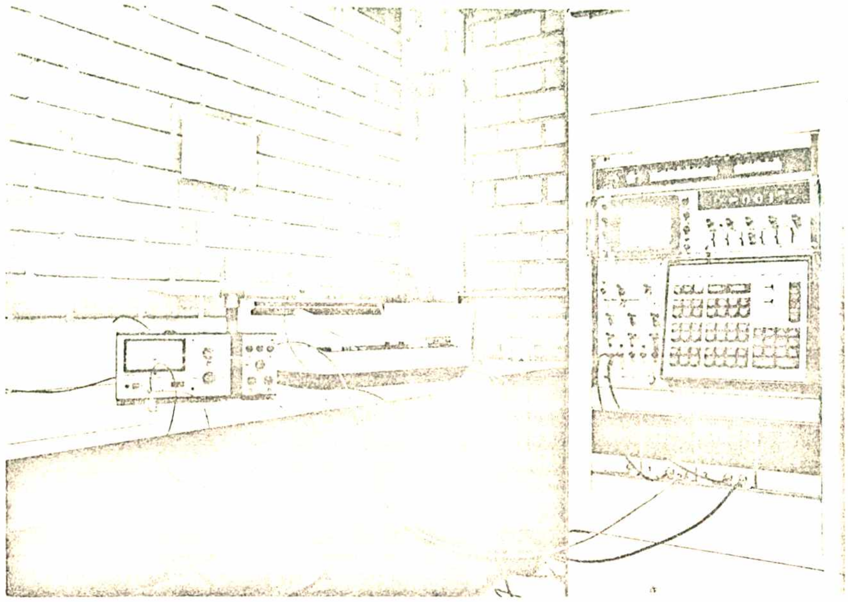


FIGURA I.3. Cadeia de medição utilizada na análise modal via digital. Excitação por impacto.

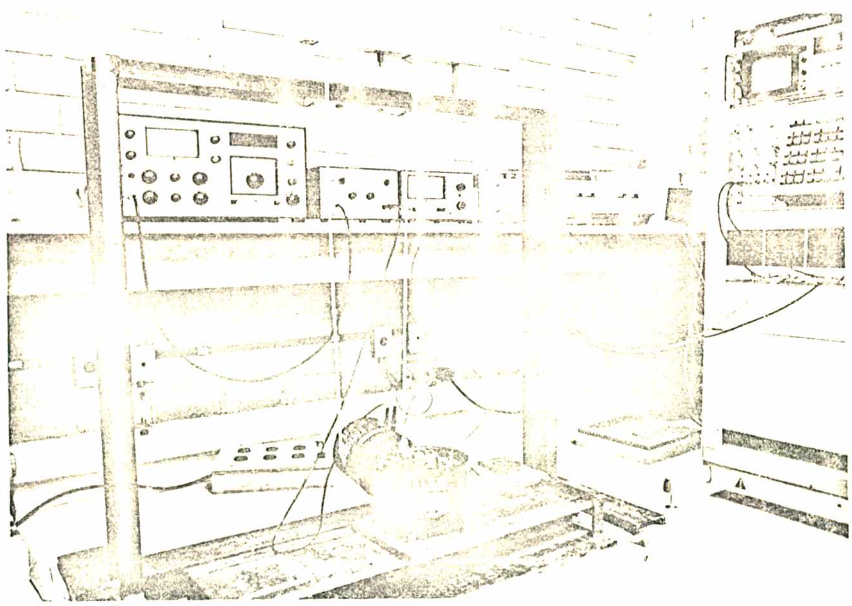


FIGURA I.4. Montagem completa usada na análise modal via digital. Excitação permanente.

R E F E R Ê N C I A S

[1] [illegible] "Popular Guidance on Hermetic Compressors". Publicado pela EMBRACO, 1974.

[2] TANAKA, K. The Inertia Forces and Couples and Their Balancing of Star Type Engine. Report no. 10 of the Aeronautical Research Institute, Tokyo University, 1925.

[3] TAYLOR, E.S. e BROWNE, K.A. Vibration Isolation of Aircraft Power Plants. Journal of the Aeronautical Sciences vol. [illegible], no. [illegible], pags. 43 a 49, Dezembro de [illegible]93[illegible].

[4] MACDUFF, J.N. Isolation of Vibration in Spring Mounted Apparatus - [illegible] Product Engineering, pags. 106 a 10[illegible], no. [illegible]7, Julho de 1946.

[5] SMOLLEN, L.E. Generalized Matrix Method for the Design and Analysis of Vibration Isolation Systems. The Journal of the Acoustical Society of America vol. [illegible]0, no. 1, pags. 195 a 204, Julho de 19[illegible]4.

[6] DERBY, T.F. Decoupling the Three Translational Modes from the Three Rotational Modes of a Rigid Body Supported by Four Corner-Located Isolators. Shock and Vibration Bull., vol. 43, no. 4, pags. 91 a 108, Junho de 1973.

[7] SANGOI, R. Estudo de Identificação das Fontes de Ruído e Vibrações em um Compressor Hermético. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Outubro de 1983.

[8] HARRIS, C.M. e CREDE, C.E. "Shock and Vibration Handbook". McGraw-Hill Book Company, 2nd ed. 1976.

[9] MEIROVITCH, L. "Analytical Methods in Vibrations". MacMillan Company, 3rd ed., 1967.

[10] SNOWDON, J.C. "Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems". John & Sons Inc., 1st ed., 1968.

[11] RUBINSTEIN, M.F. e HURTY, W.C. "Dynamics of Structures". Prentice-Hall, 1st ed. 1964.

[12] ESPÍNDOLA, J.J. "Fundamentos de Vibrações". Universidade Federal de Santa Catarina, 1979.

[13] ESPÍNDOLA, J.J. "Relatório LVA-EC-81/07". Universidade Federal de Santa Catarina, 1981.

[14] CREDE, C.E. "Vibration and Shock Isolation". John Wiley & Sons Inc., 2nd ed., 1952.

[15] RAMSEY, K.A. Effective Measurements for Structural Dynamics Testing - I. Journal of Sound and Vibration, pags. 24 a 35, Novembro de 1975.

[16] ESPÍNDOLA, J.J. "Notas sobre Amostragem no Domínio do Tempo". Universidade Federal de Santa Catarina, 1980.

[17] BENDAT, J.S. e PIERSOL, A.G. "Engineering Application of Correlation and Spectral Analysis". McGraw-Hill Book Company, 1st ed., 1980.

[18] HEWLETT-PACKARD COMPANY "Fourier Analyzer System Manual". Binder no. 1, 1978.

[19] SKUDRZYK, E. "Simple and Complex Vibratory Systems". The Pennsylvania State University Press, 1st ed., 1968.

[20] RAMSEY, K.A. Effective Measurements for Structural Dynamics Testing - II. Hewlett-Packard Journal.

[21] HILDEBRAND, F.B. "Methods of Applied Mathematics". Prentice-Hall, 2nd ed., 1965.