

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

DETERMINAÇÃO DE FLUXO MÁXIMO EM REDES COM
ARCOS SUJEITOS A FALHAS TOTAIS E PARCIAIS

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

LUIZ FERNANDO WACHELKE

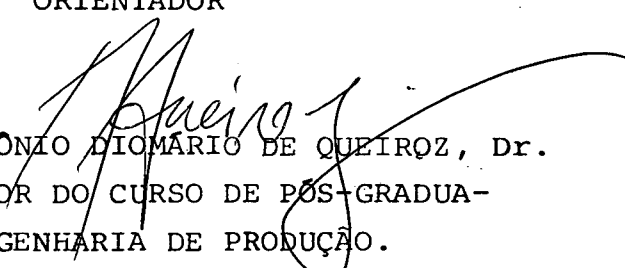
FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 1983.

DETERMINAÇÃO DE FLUXO MÁXIMO EM REDES COM
ARCOS SUJEITOS A FALHAS TOTAIS E PARCIAIS


LUIZ FERNANDO WACHELKE

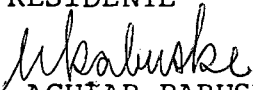
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM ENGENHARIA"
ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E APROVADA EM SUA
FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

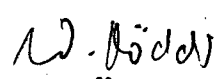
PROF. PAULO RENÉCIO NASCIMENTO, M.Sc.
ORIENTADOR


PROF. ANTÔNIO DIOMÁRIO DE QUEIROZ, Dr.
COORDENADOR DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

BANCA EXAMINADORA:


PROF. PAULO RENÉCIO NASCIMENTO, M.Sc.
PRESIDENTE


PROF.^a MÁRCIA AGUIAR RABUSKE, D.Sc.


PROF. WILHELM RÖDDER, Ph.D.



0.255.883-3

UFSC-BU

a Moira e João Fernando.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. PAULO RENÉCIO NASCIMENTO, pela excelente orientação e pelo estímulo à execução deste trabalho.

A todos aqueles que colaboraram com incentivo e sugestões para tornar possível a realização deste trabalho e, em particular, à Prof.^a NELCY DABROWSKI DE ARAÚJO.

À Universidade Federal de Santa Catarina pelo apoio técnico.

A Odilon Farias Costa pela datilografia e Aldo César Nunes pelos desenhos.

CTC
280

R E S U M O

Este trabalho aborda o problema da determinação do fluxo máximo em rede planar sujeita à ocorrência de m falhas totais e n falhas parciais na capacidade de transporte de seus arcos, de modo que a redução do fluxo máximo entre uma origem e um destino é maximizada.

O método de solução adotado se baseia nas propriedades da rede dual, que permitem a transformação do problema de fluxo máximo em problema de caminho mais curto.

O algoritmo desenvolvido pode ser utilizado, por exemplo, para a realização de análises de sensibilidade em sistemas de transporte que tenham suas vias total ou parcialmente interrompidas para manutenção.

Procura-se inicialmente mostrar, através de discussões e exemplos, que é possível a adaptação de algoritmos que consideram apenas a possibilidade de remoções totais de arcos, de modo a que passem também a contemplar reduções parciais.

Em seguida é apresentado um algoritmo para solução do problema proposto, sendo efetuado exemplo de sua aplicação.

Na parte final do trabalho, são apontadas as principais limitações do método e sugeridos temas para novas pesquisas.

A B S T R A C T

This dissertation considers the problem of finding the maximum flow in a planar network subject to the occurrence of m total and n partial failures in the transportation capacity of its arcs, so that the reduction of the maximum flow between an origin and a destination is maximized.

The method of solution adopted is based on the properties of the dual network, which allows the transformation of the maximum flow problem in the shortest path problem.

The algorithm developed can be used, for instance, for making sensitivity analysis on transportation systems that have their roads total or partially closed for maintenance.

Initially, it is showed, by means of discussion and examples, that the adaptation of algorithms which only consider the occurrence of total removals of arcs is possible, so that they can also regard partial reductions.

Next, an algorithm for solving the proposed problem is presented and an example of its application is given.

Finally, the principal limitations of the method are pointed out and new themes for research are suggested.

S U M Á R I O

	<u>PÁG.</u>
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - DEFINIÇÕES	4
CAPÍTULO III - O PROBLEMA	10
CAPÍTULO IV - REVISÃO DA LITERATURA	11
4.1. REDES PLANARES E A TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO EN- TRE FONTE E SUMIDOURO EM PROBLE- MA DE CAMINHO MAIS CURTO	11
4.2. FLUXO MÁXIMO COM REMOÇÃO DE ARCOS	13
4.3. FLUXO MÁXIMO COM POSSIBILIDADE DE REDUÇÃO PARCIAL NA CAPACIDADE DOS ARCOS	20
CAPÍTULO V - ANÁLISE DO ALGORITMO PROPOSTO POR DOULLIEZ E RAO	22
5.1. EXEMPLOS	22
5.2. CONSTATAÇÕES A PARTIR DOS RESULTA- DOS OBTIDOS	26
5.3. MODIFICAÇÕES NO ALGORITMO BÁSICO	27
5.4. NOVA FORMA DO ALGORITMO BÁSICO	30
5.5. APLICAÇÃO DO ALGORITMO BÁSICO MODI- FICADO	31
CAPÍTULO VI - ADAPTAÇÃO DO ALGORITMO CAMI PARA O CASO DE FALHAS PARCIAIS	44

6.1. APERFEIÇOAMENTOS QUE PODEM SER EXECUTADOS NO ALGORITMO BÁSICO MODIFICADO	44
6.2. INCLUSÃO DA POSSIBILIDADE DE FALHAS PARCIAIS NO ALGORITMO CAMI ATRAVÉS DE ALTERAÇÕES NO BLOCO KMAIORZERO	49
6.3. EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO ALGORITMO CAMI MODIFICADO PARA FALHAS PARCIAIS	50
6.4. TEMPO COMPUTACIONAL	56
CAPÍTULO VII - SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE M FALHAS TOTAIS E N FALHAS PARCIAIS	62
7.1. MÉTODO DE SOLUÇÃO	62
7.2. ALGORITMO COMPUTACIONAL	64
CAPÍTULO VIII - EXEMPLO DE APLICAÇÃO	75
8.1. EXEMPLO COMPLETO	75
8.2. AVALIAÇÃO DO TEMPO COMPUTACIONAL	96
CAPÍTULO IX - LIMITAÇÕES DO PROCEDIMENTO PROPOSTO	112
CAPÍTULO X - SUGESTÕES PARA NOVAS PESQUISAS	114
BIBLIOGRAFIA	115

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

O problema de determinação do fluxo máximo que pode ser transmitido entre dois pontos de uma rede é um dos mais interessantes e importantes assuntos abordados pela teoria de fluxos em redes, surgida de aplicações da Teoria dos Grafos a problemas da Pesquisa Operacional.

Sua importância decorre do fato de surgir naturalmente em um grande número de situações práticas, principalmente no estudo de redes de transporte e de comunicação.

A formulação e discussão específica do problema de fluxo máximo e a criação de algoritmos para resolvê-lo remontam à metade dos anos 50, através de artigos publicados por Dantzig e Ford & Fulkerson [Referências (10), (11), (12)]. Em todo período que se seguiu, prosseguiram sendo estudadas diversas variações do problema e desenvolvidos aperfeiçoamentos dos algoritmos básicos originais, em decorrência principalmente do grande impulso proporcionado pela contínua evolução na área de computadores digitais, que viabilizou o emprego de modelos de redes a problemas de grande porte.

Dentro desse enfoque, o presente trabalho procura desenvolver um algoritmo para a determinação do valor do fluxo máximo entre dois pontos de uma rede planar onde tenham o corrido até m falhas totais, seguidas de até n falhas parciais na capacidade dos arcos, de tal modo que a redução do fluxo máximo original seja maximizada. A aplicação prática deste algoritmo se dá, por exemplo, na análise do efeito de reduções planejadas na capacidade de arcos de uma rede de transporte, permitindo que sejam facilmente levantados os principais estrangulamentos decorrentes.

A pesquisa efetuada foi primeiramente direcionada no sentido de se verificar a possibilidade de inclusão de fa-

lhas parciais nos algoritmos de fluxo em redes com remoção de arcos já existentes, seguindo sugestão apresentada na referência (6), o que motivou a realização da primeira parte do trabalho, descrita nos Capítulos 2 a 7.

O Capítulo 2 apresenta conceitos e definições oriundos da Teoria dos Grafos e da teoria de fluxos em redes, necessários para a compreensão do assunto exposto. As principais referências para este segmento foram (1), (3) e (8). Uma dificuldade encontrada foi a não-uniformização da terminologia empregada pelos diversos autores.

No Capítulo 3 é formulado o problema que se pretendeu resolver.

No Capítulo 4 são mostrados os principais algoritmos sobre o assunto existentes na literatura e apresentada a transformação do problema de fluxo máximo entre fonte e sumidouro em problema de caminho mais curto na rede dual, básica para a utilização daqueles algoritmos.

No Capítulo 5 é efetuada uma análise do algoritmo existente na referência (2), denominado aqui de *algoritmo básico*, sendo apresentados exemplos e sugeridas modificações.

No Capítulo 6 procura-se mostrar que o algoritmo CAMI, desenvolvido em (6), também pode ser alterado com sucesso para a consideração de falhas parciais, obtendo-se um algoritmo mais eficiente do que o algoritmo obtido no capítulo anterior.

Tendo sido alcançado êxito na adaptação dos algoritmos sugeridos em (2), (5) e (6), no que se refere à consideração de falhas parciais, procurou-se então criar um método de solução para o problema proposto no Capítulo 3, utilizando os algoritmos mais eficientes. Isto originou a segunda e última parte do trabalho, descrita nos Capítulos 7 a 10.

No Capítulo 7 sugere-se um procedimento, composto de cinco etapas, para a solução do problema descrito no Capítulo 3. A implementação de etapas em computador gerou o desenvolvimento de um algoritmo específico, descrito através de fluxograma.

No Capítulo 8 é apresentado um exemplo completo de resolução do problema para uma rede, supondo-se a ocorrência - primeiramente de uma falha total e três falhas parciais e, posteriormente, de 3 falhas totais e uma falha parcial. São também fornecidas indicações dos tempos computacionais necessários para a resolução de redes de diversos tamanhos e diferentes graus de conexidade.

No Capítulo 9 são comentadas as limitações do procedimento proposto.

No Capítulo 10 são sugeridos temas para futuras pesquisas, baseando-se nos aspectos levantados no Capítulo 9.

CAPITULO II

2. DEFINIÇÕES

Para compreensão do assunto exposto é necessário o conhecimento prévio de alguns conceitos e definições, oriundos da Teoria dos Grafos.

. PRODUTO CARTESIANO

Sejam A e B dois conjuntos, então o produto cartesiano de A e B, representado por $A \times B$, é o conjunto de pares (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

. PRODUTO NÃO ORDENADO

Seja S um conjunto, então $S \times S = \{(s_1, s_2) / (s_1, s_2) \in S \times S\}$ é o produto não ordenado de S; $(s_1 \& s_2)$ é aquele elemento de $S \times S$ para o qual $(s_1, s_2) \in S \times S$ ou $(s_2, s_1) \in S \times S$.

. GRAFO

Sejam $V \neq \emptyset$ e E conjuntos disjuntos. Seja ϕ uma função de E em $V \times V$, então (V, E, ϕ) é um grafo onde:

- V é o conjunto de nós ou vértices
- E é o conjunto de arestas
- se $\phi(e) = (v \& w)$, então \underline{v} e \underline{w} são os nós terminais de \underline{e} e diz-se que \underline{v} e \underline{w} são ligados por \underline{e}
- $e \sim (v \& w) \equiv \phi(e) = (v \& w)$
- se $e \sim (v \& w)$ e $v = w$, então \underline{e} é um laço.

. GRAFO FINITO

O grafo (V, E, ϕ) é dito finito se V e E são finitos.

. CADEIA

Uma seqüência (e_1, e_2, \dots, e_n) é uma cadeia de comprimento

CAPITULO II

2. DEFINIÇÕES

Para compreensão do assunto exposto é necessário o conhecimento prévio de alguns conceitos e definições, oriundos da Teoria dos Grafos.

. PRODUTO CARTESIANO

Sejam A e B dois conjuntos, então o produto cartesiano de A e B, representado por $A \times B$, é o conjunto de pares (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

. PRODUTO NÃO ORDENADO

Seja S um conjunto, então $S \times S = \{(s_1, s_2) / (s_1, s_2) \in S \times S\}$ é o produto não ordenado de S; (s_1, s_2) é aquele elemento de $S \times S$ para o qual $(s_1, s_2) \in S \times S$ ou $(s_2, s_1) \in S \times S$.

. GRAFO

Sejam $V \neq \emptyset$ e E conjuntos disjuntos. Seja ϕ uma função de E em $V \times V$, então (V, E, ϕ) é um grafo onde:

- V é o conjunto de nós ou vértices
- E é o conjunto de arestas
- se $\phi(e) = (v, w)$, então v e w são os nós terminais de e e diz-se que v e w são ligados por e
- $e \sim (v, w) \equiv \phi(e) = (v, w)$
- se $e \sim (v, w)$ e $v = w$, então e é um laço.

. GRAFO FINITO

O grafo (V, E, ϕ) é dito finito se V e E são finitos.

. CADEIA

Uma seqüência (e_1, e_2, \dots, e_n) é uma cadeia de comprimen

to n se existe uma seqüência de nós, (v_0, v_1, \dots, v_n) com $e_i \sim (v_{i-1} \& v_i); i = 1 (1) n$.

. GRAFO ORIENTADO

Sejam A e V conjuntos disjuntos e Δ uma função que leva A em $V \times V$, então (V, A, Δ) é um grafo orientado onde:

- $\Delta(a) = (v, w) \equiv a \sim (v, w)$
- a é uma aresta orientada (arco)
- v é o nó inicial e w é o nó final de a
- (v, w) é um arco.

. CAMINHO

Um caminho num grafo orientado (V, A, Δ) é uma seqüência de arestas orientadas tal que exista a_1, \dots, a_n com $a_i \sim (v_{i-1}, v_i); i = 1 (1) n$.

. CAMINHO ELEMENTAR

Um caminho em que $v_i \neq v_j \quad \forall_{i,j} = 0 (1) n$ é chamado caminho elementar

. CAMINHO SIMPLES

Um caminho em que $a_i \neq a_j \quad \forall_{i,j} = 1 (1) n$ é chamado caminho simples.

. GRAFO VALORADO

Um grafo é denominado grafo arco-valorado se a cada arco (v, w) é associado um número $c(v, w)$, denominado valor (comprimento, custo) do arco (v, w) . Caso se associem valores aos nós, o grafo resultante é dito vértice-valorado. Se um grafo é tanto arco como vértice-valorado, é simplesmente chamado de valorado.

. CUSTO (COMPRIMENTO) DE UM CAMINHO EM UM GRAFO VALORADO

Seja μ um caminho representado pela seqüência de arcos (a_1, a_2, \dots, a_q) , de custos aditivos. O custo ou comprimento do caminho, $\ell(\mu)$, é a soma dos custos dos arcos que aparecem em μ , ou seja, $\ell(\mu) = \sum_{(v,w) \in \mu} c(v,w)$

. GRAFO PLANAR TOPOLÓGICO

Um grafo é dito planar se pode ser representado num plano sem que duas de suas arestas se cruzem. Disposto desta forma o grafo é denominado grafo planar topológico.

. FACE DE UM GRAFO PLANAR TOPOLÓGICO

Face de um grafo planar topológico é uma região do plano, limitada por arestas do grafo e que não contém arestas nem nós em seu interior. A face externa do grafo, limitada pelas arestas externas, é a face infinita.

. REDE

Uma estrutura composta de pontos-chave e de conexões existentes entre esses pontos, de modo que haja a possibilidade de transferência de algum tipo de "matéria" entre os pontos é denominada rede. A esta estrutura pode-se associar um grafo, geralmente orientado, cujos arcos estão em correspondência biunívoca com um conjunto de números reais não negativos chamados capacidades, que representam a máxima quantidade de "matéria" que pode ser transportada através do arco entre dois pontos determinados. Os arcos também podem estar em correspondência biunívoca com um conjunto de números reais que representem, por exemplo, a distância entre dois pontos através do arco ou o tempo para se chegar de um ponto a outro.

Por analogia, daqui por diante o grafo associado (V, A, Δ) também será denominado rede.

. REDE PLANAR

Uma rede é dita planar se o seu grafo associado é planar.

. FLUXO ATRAVÉS DE UMA REDE

Sejam \underline{s} e \underline{t} dois nós distintos de V . Um fluxo estático \underline{f} de valor \underline{u} de \underline{s} para \underline{t} em (V, A, Δ) é uma função \underline{f} que leva A aos reais não-negativos, satisfazendo as seguintes condições:

$$a) \quad \sum_{w \in A_i} f(v, w) - \sum_{w \in B_i} f(w, v) = \begin{cases} \underline{u} & \text{se } \underline{v} = \underline{s} \\ 0 & \text{se } \underline{v} \neq \underline{s}, \underline{t} \\ \underline{u} & \text{se } \underline{v} = \underline{t} \end{cases}$$

$$b) \quad f(v, w) \leq c(v, w) \quad \forall (v, w) \in A$$

onde

- $f(v, w)$ é chamado o fluxo no arco (v, w)
- $c(v, w)$ é denominada a capacidade do arco (v, w) ,
 $c(v, w) > 0$.

$$- A_i = \{w \mid (v, w) \in A\}$$

$$- B_i = \{v \mid (v, w) \in A\}$$

- O nó \underline{s} é denominado fonte e o nó \underline{t} é o nó sumidouro

. CORTE QUE SEPARA \underline{s} e \underline{t}

Sejam $V_0 \in V$ e $\bar{V}_0 \in V$ seu complemento.

Sejam $s \in V_0$ e $t \in \bar{V}_0$, respectivamente a fonte e o sumidouro.

Um corte $(V_0 \rightarrow \bar{V}_0)$ em (V, A, Δ) que separa \underline{s} e \underline{t} é o conjunto de todos os arcos (v, w) tal que $v \in V_0$ e $w \in \bar{V}_0$ ou $w \in V_0$ e $v \in \bar{V}_0$.

. CAPACIDADE DE CORTE

A capacidade de corte $(V_0 \rightarrow \bar{V}_0)$, representada por $c(V_0 \rightarrow \bar{V}_0)$, é dada pela soma das capacidades de todos os arcos de $(V_0 \rightarrow \bar{V}_0)$ cujos nós iniciais estão em V_0 e cujos nós finais estão em \bar{V}_0 , ou seja,

$$c(V_0 \rightarrow \bar{V}_0) = \sum_{\substack{(v,w) \in (V_0 \rightarrow \bar{V}_0) \\ v \in V_0, w \in \bar{V}_0}} c(v,w)$$

. CORTE MÍNIMO QUE SEPARA OS NÓS \underline{s} e \underline{t}

O corte mínimo que separa os nós \underline{s} e \underline{t} é aquele que apresenta a menor capacidade dentre todos os cortes de (V,A,Δ) que separam \underline{s} e \underline{t}

. O PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO ENTRE FONTE E SUMIDOURO

Seja uma rede (V,A,Δ) com as capacidades dos arcos $c(v,w)$ um nó fonte \underline{s} e um nó sumidouro \underline{t} . O problema de fluxo máximo entre fonte e sumidouro consiste em encontrar um fluxo \underline{f} de modo a maximizar:

$$u = \sum_{w \in A_i} f(s,w) = \sum_{v \in B_i} f(v,t)$$

onde

$$A_i = \{w \mid (s,w) \in A\}$$

$$B_i = \{v \mid (v,t) \in A\}$$

. TEOREMA "FLUXO MÁXIMO-CORTE MÍNIMO" (Ford e Fulkerson)

"Para uma rede qualquer, o valor do fluxo máximo entre a fonte e o sumidouro é igual ao valor da capacidade do corte mínimo que separa os dois nós".

. O PROBLEMA DO CAMINHO MAIS CURTO EM UMA REDE

Seja uma rede (V, A, Δ) onde a cada arco é associado um número $\ell(v, w) \geq 0$, denominado comprimento do arco (v, w) .

O problema do caminho mais curto em (V, A, Δ) consiste em achar um caminho μ entre um nó inicial $v_0 \in V$ e um nó final $v_t \in V$, de modo que o somatório dos comprimentos dos arcos desse caminho seja mínimo, ou seja, minimizar

$$\ell(\mu) = \sum_{(v, w) \in \mu} \ell(v, w)$$

CAPÍTULO III

3. O PROBLEMA

Seja uma rede planar onde se supõe uma circulação de fluxo entre um nó fonte e um nó sumidouro.

Os arcos da rede podem assumir uma das seguintes condições, representadas por níveis de capacidade de transporte de fluxo:

- a) arco sem falha - quando é atribuída ao arco sua capacidade total;
- b) arco com falha parcial - quando é atribuída ao arco uma capacidade intermediária, menor que a total e não-nula;
- c) arco com falha total - quando o arco não pode mais transportar fluxo, ou seja, tem capacidade nula.

Todas as capacidades são não-negativas.

Deseja-se determinar quais são as m falhas totais e n falhas parciais de arcos da rede que provocam a maior redução na capacidade máxima de transporte entre o nó fonte e o nó sumidouro.

Supõe-se que as n falhas parciais são precedidas pelas m falhas totais.

CAPÍTULO IV

4. REVISÃO DA LITERATURA

Apesar de existir extensa literatura relativa a problemas de maximização de fluxos e de busca de caminhos mais curtos em redes, conforme pode ser verificado nas referências (1), (3), (4), (8) e (9), constatou-se que poucos são os trabalhos abordando a possibilidade de falhas nos arcos e os efeitos consequentes sobre a capacidade máxima de transporte entre dois nós especificados.

As referências básicas encontradas, (2), (5) e (6), consideram o problema de falhas nos arcos para o caso específico de redes planares, cujas características permitem transformar o problema de fluxo máximo em um problema de caminho mais curto entre dois nós.

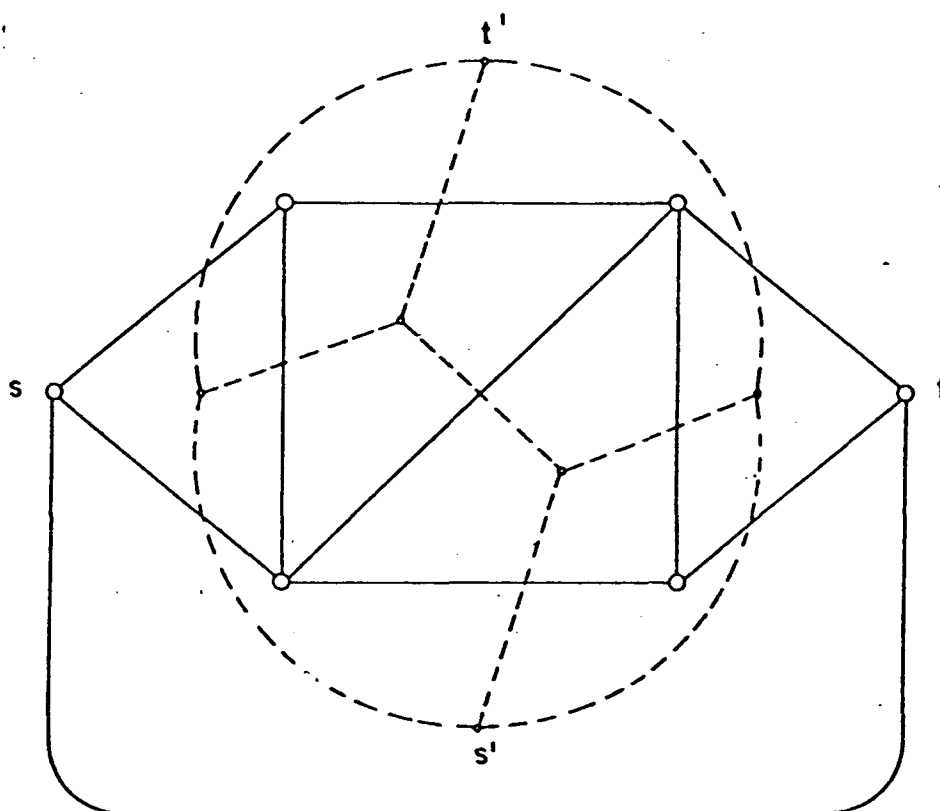
4.1. REDES PLANARES E A TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO ENTRE FONTE E SUMIDOURO EM PROBLEMA DE CAMINHO MAIS CURTO.

A rede original é denominada primal. Se a esta rede se acrescentar um arco artificial unindo fonte e sumidouro, ter-se-á o que se chama de primal modificado. Caso o primal modificado se constitua numa rede planar, poder-se-á definir uma outra rede, denominada dual, agindo da seguinte maneira:

- a) Coloque-se um nó em cada face do primal. Seja o nó s' , na face definida pelo arco artificial (s, t) , chamado de fonte da rede dual e o nó t' , na face infinita, denominado de sumidouro do dual;
- b) Construa-se para cada arco do primal, exceto para o arco artificial, um arco do dual que o intercepte e una os nós das faces adjacentes;
- c) Atribua-se a cada arco do dual um comprimento igual à capacidade do arco primal que ele intercepta.

Procedendo-se como descrito acima, obtém-se uma rede dual onde os caminhos de s' a t' estão em correspondência biunívoca com os cortes elementares da rede primal que separam s e t , conforme mostrado na Figura 1.

Deste modo, o problema de se encontrar o corte mínimo pode ser transformado no de se achar o menor caminho entre dois pontos.



Obtenção do dual a partir do primal

Figura 1.

4.2. FLUXO MÁXIMO COM REMOÇÃO DE ARCOS

As referências (5) e (6) tratam especificamente do problema de se remover n arcos de uma rede de modo que a redução do fluxo máximo entre fonte e sumidouro é maximizada.

Não são admitidas falhas parciais, isto é, um arco ou apresenta sua capacidade máxima ou apresenta capacidade nula.

Os algoritmos propostos são mostrados a seguir, esclarecendo-se que a notação existente nos originais foi mantida sempre que possível.

4.2.1. O Algoritmo de Wollmer (5)

Seja $L_{a,i}$ o comprimento do menor caminho da fonte s até o nó a com i ou menos arcos da rede reduzidos a zero.

Sejam $D_{a,0}, D_{a,1}, \dots, D_{a,n}$ os $n+1$ rótulos atribuídos a cada nó a , tal que, inicialmente $D_{a,i} \geq L_{a,i}$.

Sejam s a fonte e t o sumidouro.

P1. Para $i=0,1,\dots,n$, faça $D_{s,i}=0$ e $D_{a,i}=\infty$ para $a \neq s$.

Faça $k=0$.

P2. Seja $l(a,b)$ o comprimento do arco (a,b) . Verifique cada arco (a,b) e:

a) Se $D_{a,k} > D_{b,k} + l(a,b)$ faça

$$D_{a,k} = D_{b,k} + l(a,b)$$

b) Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$ faça

$$D_{b,k} = D_{a,k} + l(a,b)$$

c) Se $k \geq 1$ e

$$D_{a,k} > D_{b,k-1} \text{ faça } D_{a,k} = D_{b,k-1}$$

d) Se $k \geq 1$ e

$$D_{b,k} > D_{a,k-1} \text{ faça } D_{b,k} = D_{a,k-1}$$

Caso nenhuma das condições acima se aplicar, não faça mudanças.

P3. Repita o Passo 2 até que nenhuma outra mudança possa ser feita. Então, se $k < n$, aumente k de uma unidade e volte para P2. Se $k=n$, termine e $D_{t,n}$ é o comprimento do caminho desejado.

O caminho desejado pode ser encontrado através do seguinte procedimento:

P1. Faça $k=1$, $t = a(1)$ e $i(1)=n$

P2. Encontre um nó $a(k+1)$ de modo que

$$D_{a(k+1), i(k+1)} = D_{a(k), i(k)}^{-1} [a(k), a(k+1)] \text{ e}$$

$$i(k+1) = i(k).$$

ou

$$D_{a(k+1), i(k+1)} = D_{a(k), i(k)} \text{ e}$$

$$i(k+1) = i(k) - 1.$$

P3. Se $a(k+1) \neq s$, aumente k de uma unidade e volte a P2. De outro modo, termine e $s = a(k+1), \dots, a(1) = t$ é o caminho desejado. Os arcos cujos comprimentos reduziram-se a zero são aqueles $[a(k), a(k+1)]$ tais que $i(k) \neq i(k+1)$. Os arcos a serem removidos do primal são aqueles que interceptam es-

ses arcos do dual

4.2.2. O Algoritmo CAMI (6)

Em (6) é efetuada uma profunda análise do algoritmo de Wollmer. A partir das conclusões obtidas, são propostas implementações no algoritmo, visando corrigir algumas deficiências e melhorar o desempenho computacional. O algoritmo CAMI reúne esses aperfeiçoamentos e é o seguinte:

Procedimento para determinação do caminho mais curto, seu valor e os arcos que sofreram redução:

INÍCIO

$i \leftarrow 0$

Para todo nó $a \neq s$ faça $D_{a,i} \leftarrow \infty$.

$D_{s,i} \leftarrow 0$

$k \leftarrow 0$

Enquanto $k \leq n$ faça

 Início

 Alteração $\leftarrow 1$

 Se $k=0$ então

 Início

 Execute BLOCO KZERO

$ind \leftarrow 1$

$ME_{ind} \leftarrow t$

 Execute BLOCO CAMINH01

 Fim

 Senão

 Execute BLOCO KMAIORZERO.

 Para todo nó a faça $nulo_a \leftarrow 0$

$kk+k$

$ind+1$

ME_{ind}^{+t}

Execute BLOCO CAMINHO2.

$k \leftarrow k+1$

Se $k \leq n$ então

Execute BLOCO REINICIALIZAÇÃO

Fim.

FIM.

O caminho mais curto é dado pelos nós ME_{ind} .

O valor deste caminho é $D_{t,n}$

Os arcos que falharam foram aqueles ME_{q+1}, ME_q tais que $nulo_q \neq 0$.

BLOCO KZERO

Enquanto alteração = 1 faça

Início

alteração ← 0

Para cada arco (a,b)

Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$ então

Início

$D_{b,k} \leftarrow D_{a,k} + l(a,b)$

$LE_{b,k} \leftarrow a$

Fim

Senão

Se $D_{a,k} > D_{b,k} + l(a,b)$ e $b < t$ então

Início

$D_{a,k} \leftarrow D_{b,k} + l(a,b)$

$LE_{a,k} \leftarrow b$

alteração ← 1

Fim

FIM.

FIM BLOCO KZERO.

BLOCO CAMINHOL

Enquanto $ME_{ind} > 1$ faça

Início

$c \leftarrow ME_{ind}$

$ME_{ind+1} \leftarrow LE_{c,k}$

$ind = ind + 1$

Fim

FIM BLOCO CAMINHOL.

BLOCO KMAIORZERO

Enquanto alteração = 1 faça

Início

alteração ← 0

Para cada arco (a,b)

Se $D_{b,k} > D_{a,k-1}$ então

Início

$D_{b,k} \leftarrow D_{a,k-1}$

$LE_{b,k} \leftarrow a$

$falha_{b,k} \leftarrow 1$

Fim

Senão

Se $D_{a,k} > D_{b,k-1}$ então

Início

$D_{a,k} \leftarrow D_{b,k-1}$

$LE_{a,k} \leftarrow b$

$falha_{a,k} \leftarrow 1$

Fim

Se $D_{b,k} > D_{a,k+1}(a,b)$ então

Início

$D_{b,k} \leftarrow D_{a,k+1}(a,b)$

$LE_{b,k} \leftarrow a$

$falha_{b,k} \leftarrow 0$

Fim

Senão

Se $D_{a,k} > D_{b,k+1}(a,b)$ e $b < t$ então

Início

$D_{a,k} \leftarrow D_{b,k+1}(a,b)$

$LE_{a,k} \leftarrow b$

$falha_{a,k} \leftarrow 0$

Alteração ← 1

Fim

FIM.

FIM BLOCO KMAIORZERO.

BLOCO CAMINHO2

Enquanto $ME_{ind} > 1$ faça

Início

$c \leftarrow ME_{ind}$

$ME_{ind+1} \leftarrow LE_{c,kk}$

Se $falha_{c,kk} = 1$ faça

Início

$Nulo_{ind} \leftarrow ME_{ind+1}$

$kk \leftarrow kk-1$

Fim

$ind \leftarrow ind+1$

Fim.

FIM BLOCO CAMINHO2.

BLOCO REINICIALIZAÇÃO

Para todo nó a faça

Início

$D_{a,k} \leftarrow D_{a,k-1}$

$LE_{a,k} \leftarrow LE_{a,k-1}$

Fim

FIM BLOCO REINICIALIZAÇÃO.

A entrada de dados do algoritmo CAMI requer que os nós da rede dual sejam numerados de tal forma que s é o primeiro e t é o último; a leitura dos dados é feita $a, b, l(a, b)$, sendo que $\forall a, b, a < b$.

Na referência (6) são apresentados exemplos de aplicação do algoritmo de Wollmer e do algoritmo CAMI.

4.3. FLUXO MÁXIMO COM POSSIBILIDADE DE REDUÇÃO PARCIAL NA CAPACIDADE DOS ARCOS

Em (2), P. J. Doulliez e M. R. Rao discutem um problema envolvendo uma rede com vários sumidouros, onde em alguns nós a demanda é uma função crescente do tempo. O artigo propõe um algoritmo, aplicável a redes planares, para determinar o tempo máximo para que todas as demandas possam ser atendidas, incluindo a possibilidade de que um número especificado de arcos da rede tenham suas capacidades reduzidas para valores inferiores. É exatamente a abordagem desta última característica que acrescenta um novo enfoque ao problema de fluxo máximo em redes com arcos sujeitos a falha.

Faz parte do método de solução do problema abordado em (2) a determinação do corte mínimo numa rede planar fonte-sumidouro, cujos arcos possuem uma capacidade máxima e uma capacidade mínima de transporte de fluxo, esta última igual ou superior a zero.

Utilizando as propriedades da rede planar e seu dual, os autores propõem a transformação do problema de busca do corte mínimo em busca do caminho mais curto, resolvido mediante o emprego do algoritmo de Wollmer sobre a rede dual.

Para contemplar a possibilidade de reduções parciais nos arcos, Doulliez e Rao sugerem que o algoritmo de Wollmer seja ligeiramente modificado, passando a ser o seguinte:

4.3.1. Algoritmo de Wollmer Modificado por Doulliez e Rao.

Seja $l(a,b)$ o valor máximo do arco (a,b) na rede dual e $l'(a,b)$ o seu limite inferior.

P1. Para $k=0,1, \dots, n$, faça $D_{s,k}=0$ e $D_{a,k}=\infty$ para $a \neq s$.

Faça $k=0$.

P2. Verifique cada arco (a,b) com a como origem e b como final

a) Se $D_{a,k} > D_{b,k}$ faça $D_{a,k} = D_{b,k}$

b) Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$, faça $D_{b,k} = D_{a,k} + l(a,b)$

c) Se $k \geq 1$ e $D_{a,k} > D_{b,k-1}$, faça $D_{a,k} = D_{b,k-1}$

d) Se $k \geq 1$ e $D_{b,k} > D_{a,k-1} + l'(a,b)$ faça

$$D_{b,k} = D_{a,k-1} + l'(a,b)$$

Se nenhuma dessas condições se aplicar, não faça mudanças.

P3. Repita P2 até que nenhuma outra mudança possa ser feita. Então, se $k < n$, aumente k de uma unidade e vá para P2. Se $k = n$, termine e $D_{t,n}$ é o comprimento do caminho desejado.

A maneira de se encontrar o caminho desejado é a mesma descrita em (5).

O algoritmo de Wollmer modificado por Doullez e Rao, o qual também será denominado daqui por diante como "algoritmo básico", permitiria, portanto, resolver o problema de maximização da redução do fluxo máximo entre fonte e sumidouro em uma rede sujeita a até n falhas, totais ou não. A verificação desta hipótese é o tema do próximo capítulo.

CAPÍTULO V

5. ANÁLISE DO ALGORITMO PROPOSTO POR DOULLIEZ E RAO

A estreita relação entre o problema a ser resolvido e aquele solucionável pelo algoritmo de Wollmer com as modificações e efetuadas por Doulliez e Rao, motivou a realização de algumas aplicações deste algoritmo para redes de pequeno porte, de modo a se avaliar o seu desempenho no que se refere à obtenção correta do valor do caminho mínimo na rede dual.

5.1. EXEMPLOS

A seguir são mostrados os resultados de algumas das aplicações efetuadas.

Deve-se esclarecer que os arcos que falharam foram levantados apenas como informação adicional, através das rotinas de apontadores existentes no algoritmo CAMI, já apresentado no Capítulo IV. Da mesma forma, na falta de uma especificação relativa à ordem de numeração dos nós da rede dual, adotou-se aquela sugerida em (6), ou seja, os nós foram numerados de tal forma que a fonte s é o primeiro e o sumidouro t é o último.

5.1.1. Exemplo 1

Seja a rede dual da Figura 2, onde $x(y)$ ao lado do arco (a,b) indica que x é $l(a,b)$ e y é $l'(a,b)$.

Deseja-se obter o valor do caminho mínimo entre 1 e 4 no caso de ocorrer uma falha, ou seja, uma redução no comprimento de um arco.

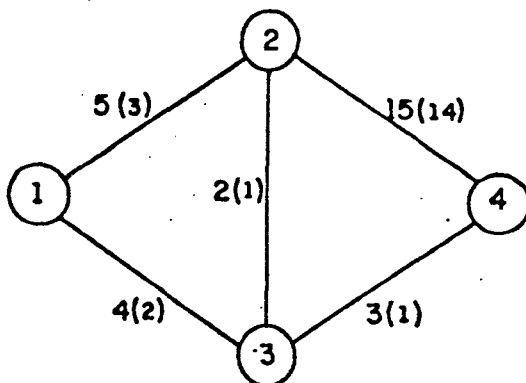


Figura 2.

Aplicando-se o algoritmo, obteve-se os seguintes resultados:

- para nenhuma falha

$$D_{2,0} = 4 \quad D_{3,0} = 4 \quad D_{4,0} = 7$$

- para uma falha

$$D_{2,1} = 2 \quad D_{3,1} = 2 \quad D_{4,1} = 5$$

Observando-se a figura, verifica-se que foi obtida a distância correta entre 1 e 4. O arco que falhou foi (1,3) e as distâncias $D_{2,0}$ e $D_{2,1}$ deveriam ser 5 e 2, respectivamente, estando portanto incorretas.

5.1.2. Exemplo 2

Seja a mesma rede dual do exemplo anterior com a numeração dos nós intermediários sendo invertida, ou seja, o nó com número 2 passou a número 3 e vice-versa, como mostrado na Figura 3.

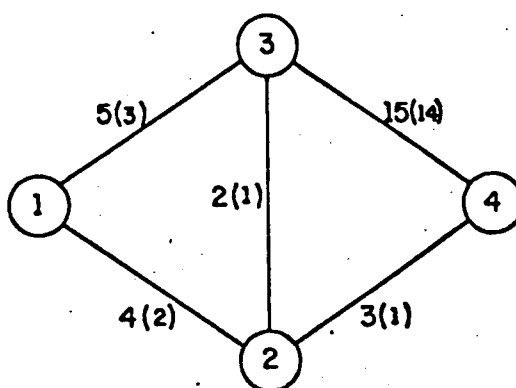


Figura 3.

Os resultados foram os seguintes:

- para nenhuma falha

$$D_{2,0} = 4 \quad D_{3,0} = 5 \quad D_{4,0} = 7$$

- para uma falha

$$D_{2,1} = 2 \quad D_{3,1} = 3 \quad D_{4,1} = 5$$

Todas as distâncias obtidas estão corretas. O arco que falhou foi (1,2).

5.1.3. Exemplo 3

Seja a rede dual da Figura 4.

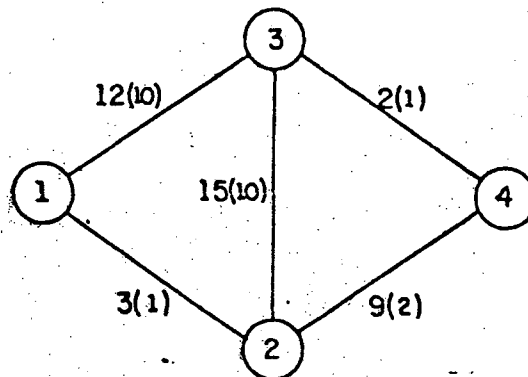


Figura 4.

Os resultados obtidos foram:

- para nenhuma falha

$$D_{2,0} = 3 \quad D_{3,0} = 12 \quad D_{4,0} = 12$$

- para uma falha

$$D_{2,1} = 1 \quad D_{3,1} = 5 \quad D_{4,1} = 5$$

A distância entre 1 e 4 está correta. O arco que falhou foi (2,4) e $D_{3,1}$ deveria ser igual a 10.

5.1.4. Exemplo 4

Seja a rede do exemplo anterior, com inversão da numeração dos nós intermediários, conforme a Figura 5.

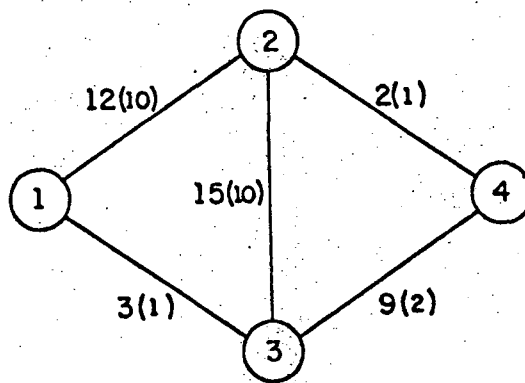


Figura 5.

Os resultados obtidos foram:

- para nenhuma falha

$$D_{2,0} = 3 \quad D_{3,0} = 3 \quad D_{4,0} = 5$$

- para uma falha

$$D_{2,1} = 1 \quad D_{3,1} = 1 \quad D_{4,1} = 3$$

As distâncias $D_{2,0}$, $D_{2,1}$, $D_{4,0}$ e $D_{4,1}$ não estão corretas. Os valores deveriam ser $D_{2,0} = 12$, $D_{2,1} = 10$, $D_{4,0} = 12$ e $D_{4,1} = 5$.

O arco que falhou foi (1,3).

5.2. CONSTATAÇÕES A PARTIR DOS RESULTADOS OBTIDOS

Procurando-se identificar as causas determinantes dos resultados retro, pode-se observar que:

- a) a alteração da numeração dos nós intermediários pode levar o algoritmo a fornecer resultados incorretos para o valor da menor distância entre fonte e sumidouro, assim como para a distância da fonte até algum nó intermediário. Em outras palavras, os resultados fornecidos pelo algoritmo dependem da ordem de pesquisa dos arcos da rede, ditada aqui pela numeração dos nós. Isto indica a necessidade de se conhecer "a priori" uma sequência adequada dos nós da rede para a aplicação correta do algoritmo, o que nem sempre é possível na prática;
- b) na solução dos exemplos, ao se aplicar o algoritmo, se $D_{a,k} > D_{b,k}$ faz-se $D_{a,k} = D_{b,k}$, ou seja, supõe-se que exista um caminho da fonte até o nó a que passa pelo nó b. Entretanto, no valor deste caminho não está sendo computado o comprimento de (a,b) , levando à determinação de um valor para $D_{a,k}$ menor do que o real;
- c) em caso análogo ao anterior, se $D_{a,k} > D_{b,k-1}$ para $k > 1$, faz-se $D_{a,k} = D_{b,k-1}$. Supõe-se, portanto, que exista um caminho entre a fonte e o nó a passando pelo nó b, mas não é computado no valor do caminho o comprimento remanescente do arco, $l'(a,b)$, ocasionando a fixação de um valor incorreto para $D_{a,k}$;
- d) da maneira como está formulado, o algoritmo permite que haja caminhos que passem pelo sumidouro e prossigam até o nó a, fato constatado também no algoritmo original de Wollmer, conforme (6).

5.3. MODIFICAÇÕES NO ALGORITMO BÁSICO

Tendo em vista a identificação de deficiências no algoritmo apresentado em (2), procurou-se uma nova formulação do Passo 2 do mesmo, de modo a contornar os problemas apontados.

5.3.1. Primeira Modificação: Inclusão de comprimentos de arcos.

O Passo 2 do algoritmo básico se torna:

P2. Seja $l(a,b)$ o comprimento do arco (a,b) e $l'(a,b)$ o seu valor inferior. Verifique cada arco (a,b) e:

a) Se $D_{a,k} > D_{b,k} + l(a,b)$ faça $D_{a,k} = D_{b,k} + l(a,b)$

b) Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$ faça $D_{b,k} = D_{a,k} + l(a,b)$

c) Se $k \geq 1$ e

$D_{a,k} > D_{b,k-1} + l'(a,b)$ faça $D_{a,k} = D_{b,k-1} + l'(a,b)$

d) Se $k \geq 1$ e

$D_{b,k} > D_{a,k-1} + l'(a,b)$ faça $D_{b,k} = D_{a,k-1} + l'(a,b)$

Efeito:

Aplicando-se novamente o algoritmo, com a modificação acima, para a rede do Exemplo 1, se tem:

- para nenhuma falha

$$D_{2,0} = 5 \quad D_{3,0} = 4 \quad D_{4,0} = 7$$

- para uma falha

$$D_{2,1} = 3 \quad D_{3,1} = 2 \quad D_{4,1} = 5$$

Da mesma forma, para a rede do Exemplo 2, se tem:

- para nenhuma falha

$$D_{2,0} = 4 \quad D_{3,0} = 5 \quad D_{4,0} = 7$$

- para uma falha

$$D_{2,1} = 2 \quad D_{3,1} = 3 \quad D_{4,1} = 5$$

Observe-se que os resultados são idênticos, mesmo com a inversão da numeração dos nós 2 e 3, e estão corretos.

5.3.2. Segunda Modificação: Impedir que o sumidouro seja nó intermediário de um caminho mínimo.

Baseando-se em observação existente em (6), para se evitar que exista um caminho que passe pelo sumidouro e vá até um nó intermediário a, sugere-se a inclusão da restrição de que b ≠ t no item (a) do Passo 2, ou seja,

a) Se $D_{a,k} > D_{b,k} + l(a,b)$ e $b \neq t$ faça

$$D_{a,k} = D_{b,k} + l(a,b)$$

De modo análogo, no item (c) do Passo 2 deve existir a restrição de que b ≠ t, caso $l'(a,b) = 0$. Isto para se evitar que ao se tentar falhar o arco (a,t), obtenha-se um caminho da fonte até a que passe por t. No caso de $l'(a,b) = 0$ não existe problema porque os nós a e t se confundem quando o arco falha. O item c do Passo 2 fica:

c) Se $k > 1$ e $b \begin{cases} \text{qualquer para } l'(a,b) = 0 \\ \neq t & \text{para } l'(a,b) \neq 0 \end{cases}$ e

$D_{a,k} > D_{b,k-1} + l'(a,b)$ faça

$D_{a,k} = D_{b,k-1} + l'(a,b)$

Para ilustrar a necessidade da modificação acima, são mostrados a seguir os resultados obtidos para a rede dual da Figura 6, sem e com a segunda modificação:

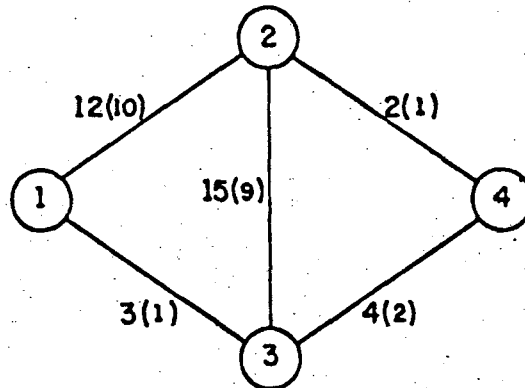


Figura 6.

- sem a modificação:

$$\begin{array}{lll} D_{2,0} = 9 & D_{3,0} = 3 & D_{4,0} = 7 \\ D_{2,1} = 7 & D_{3,1} = 1 & D_{4,1} = 5 \end{array}$$

- com a modificação:

$$\begin{array}{lll} D_{2,0} = 12 & D_{3,0} = 3 & D_{4,0} = 7 \\ D_{2,1} = 10 & D_{3,1} = 1 & D_{4,1} = 5 \end{array}$$

Observe-se que no primeiro caso as distâncias até o nó 2 correspondem a caminhos que passam pelo nó sumidouro. Isto não é desejável, pois leva à realização de operações desnecessárias. Com

a modificação introduzida no algoritmo, não se considera válida a passagem pelo sumidouro para se atingir um nó intermediário, sendo as distâncias até o nó 2 medidas diretamente a partir do nó 1.

5.4. NOVA FORMA DO ALGORITMO BÁSICO

Deste modo, o algoritmo de falhas que admite valores intermediários para os arcos passa a ser:

Seja $l(a,b)$ o valor máximo do arco (a,b) na rede dual e $l'(a,b)$ o seu limite inferior.

P1. Para $k=0,1,\dots,n$, faça $D_{s,k}=0$ e $D_{a,k}=\infty$ para $a \neq s$.

Faça $k = 0$.

P2. Verifique cada arco (a,b) e:

a) Se $D_{a,k} > D_{b,k} + l(a,b)$ e $b \neq t$ faça

$$D_{a,k} = D_{b,k} + l(a,b)$$

b) Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$ faça

$$D_{b,k} = D_{a,k} + l(a,b)$$

c) Se $k \geq 1$ e $b \begin{cases} \text{qualquer, para } l'(a,b) = 0 \\ \neq t, \quad \text{para } l'(a,b) \neq 0 \end{cases}$ e

$$D_{a,k} > D_{b,k-1} + l'(a,b) \text{ faça } D_{a,k} = D_{b,k-1} + l'(a,b)$$

d) Se $k \geq 1$ e $D_{b,k} > D_{a,k-1} + l'(a,b)$ faça

$$D_{b,k} = D_{a,k-1} + l'(a,b)$$

P3. Se nenhuma das condições acima se aplicar, não faça mudanças. Então, se $k < n$, aumente k de uma unidade

de e volte ao Passo 2. Se $k=n$, termine e $D_{t,n}$ é o comprimento desejado.

5.5. APLICAÇÃO DO ALGORITMO BÁSICO MODIFICADO

O algoritmo para determinação da distância mínima, com as modificações julgadas necessárias, foi programado em linguagem FORTRAN IV, possibilitando sua utilização através de computador IBM-4341.

Não foi implementado o procedimento proposto por Wollmer (e também indicado por Doulliez e Rao) para a obtenção dos arcos do caminho entre s e t , em virtude de seus resultados insatisfatórios discutidos em (6). Como alternativa, optou-se por um conjunto de rotinas com apontadores, idêntico àquele do algoritmo CAMI. O fluxograma do algoritmo é apresentado na Figura 7.

5.5.1. Exemplos

A seguir são mostrados os resultados obtidos pelo programa computacional para quatro redes duais com 10 nós.

Observação:

Para se testar a generalidade do algoritmo, estipulou-se para alguns arcos um limite inferior de capacidade igual a zero.

Exemplo 5 - Figura 8.

Rede com 10 nós e 12 arcos, sujeita a 2 falhas.

O resultado foi o seguinte:

ALGORITMO BÁSICO MODIFICADO

Figura 7.

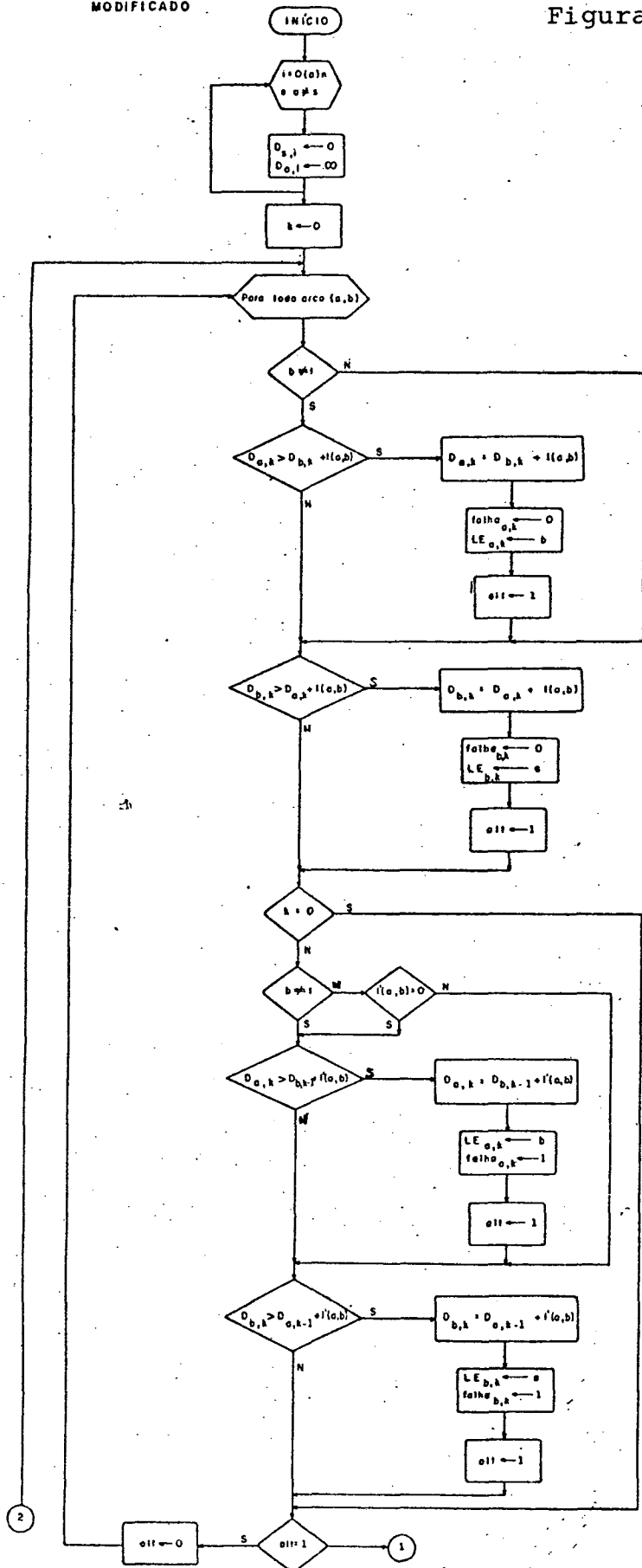


Figura 7. (cont)

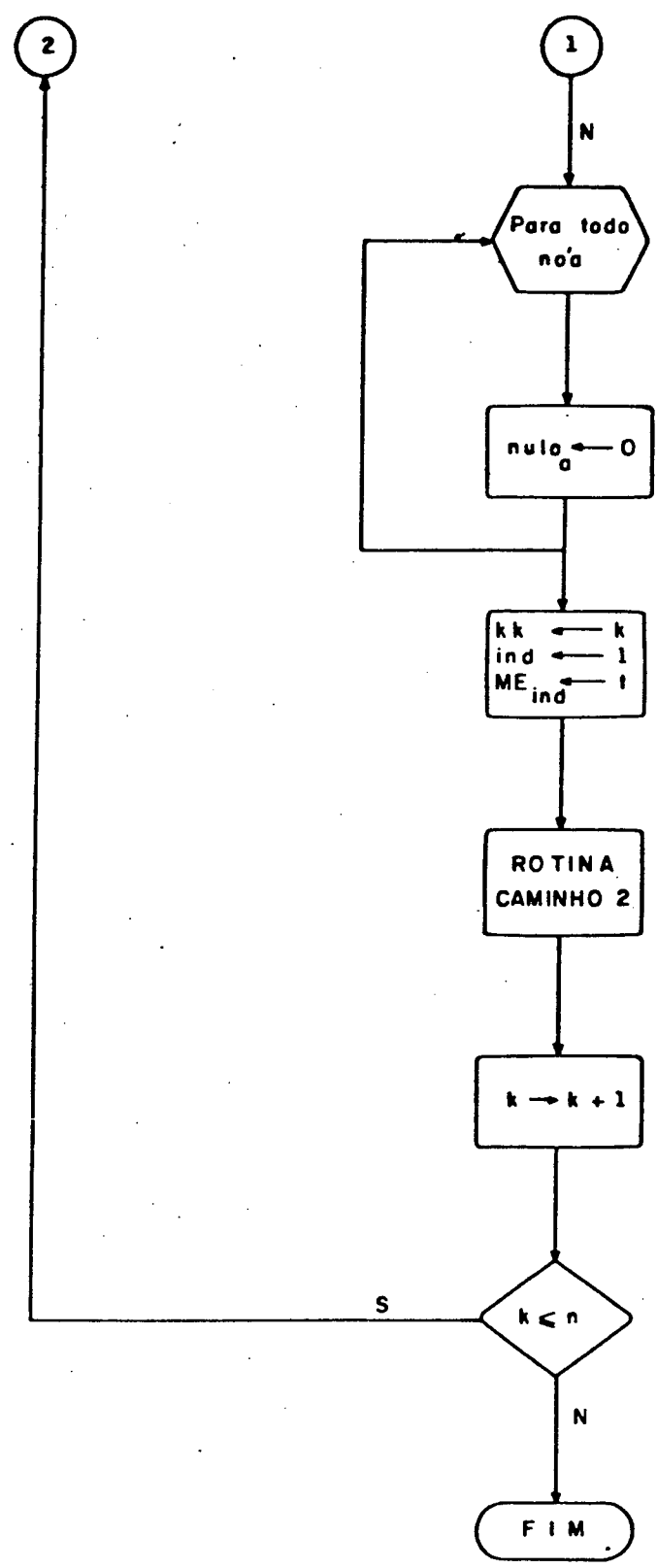
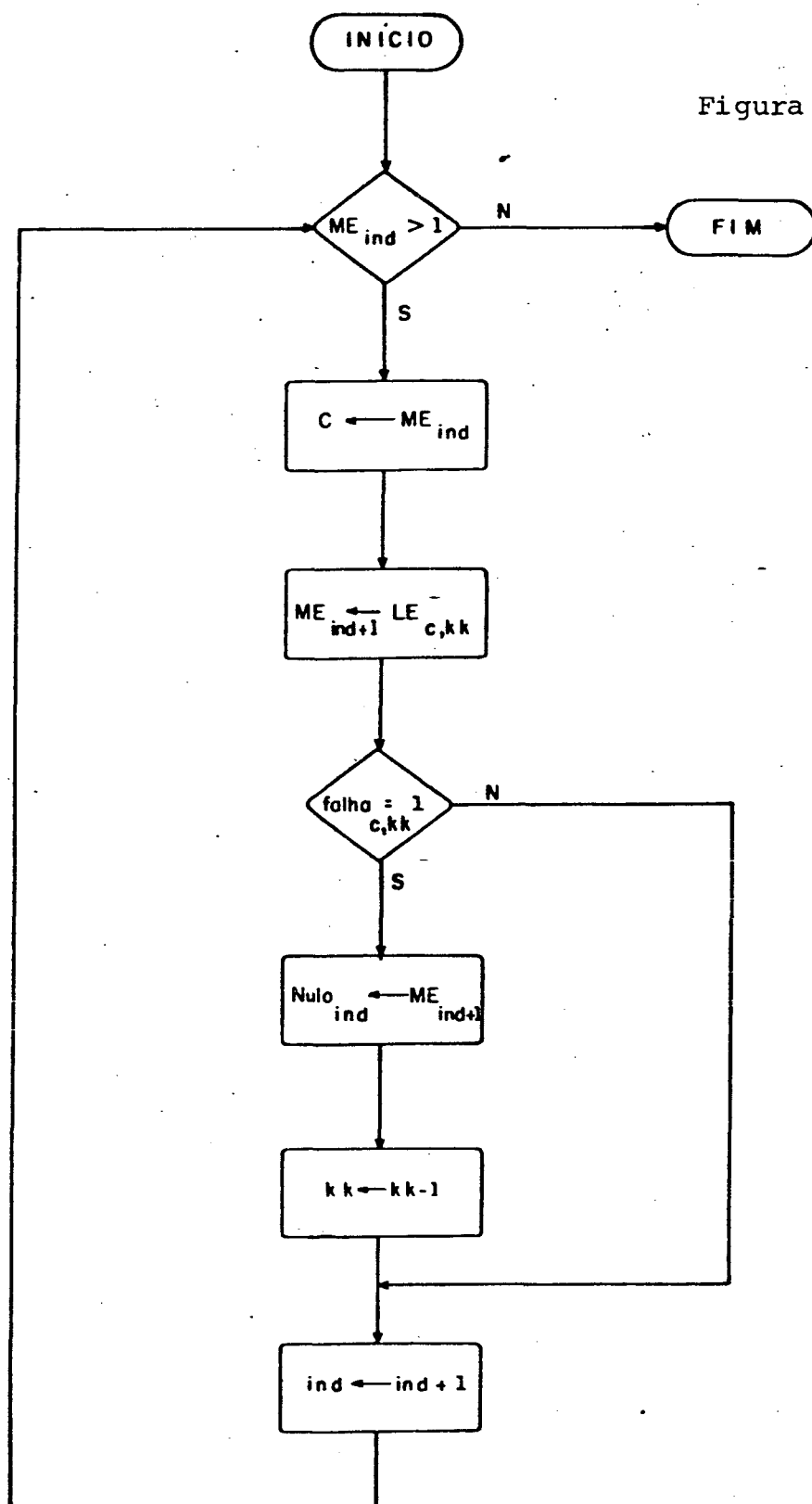


Figura 7. (cont.)



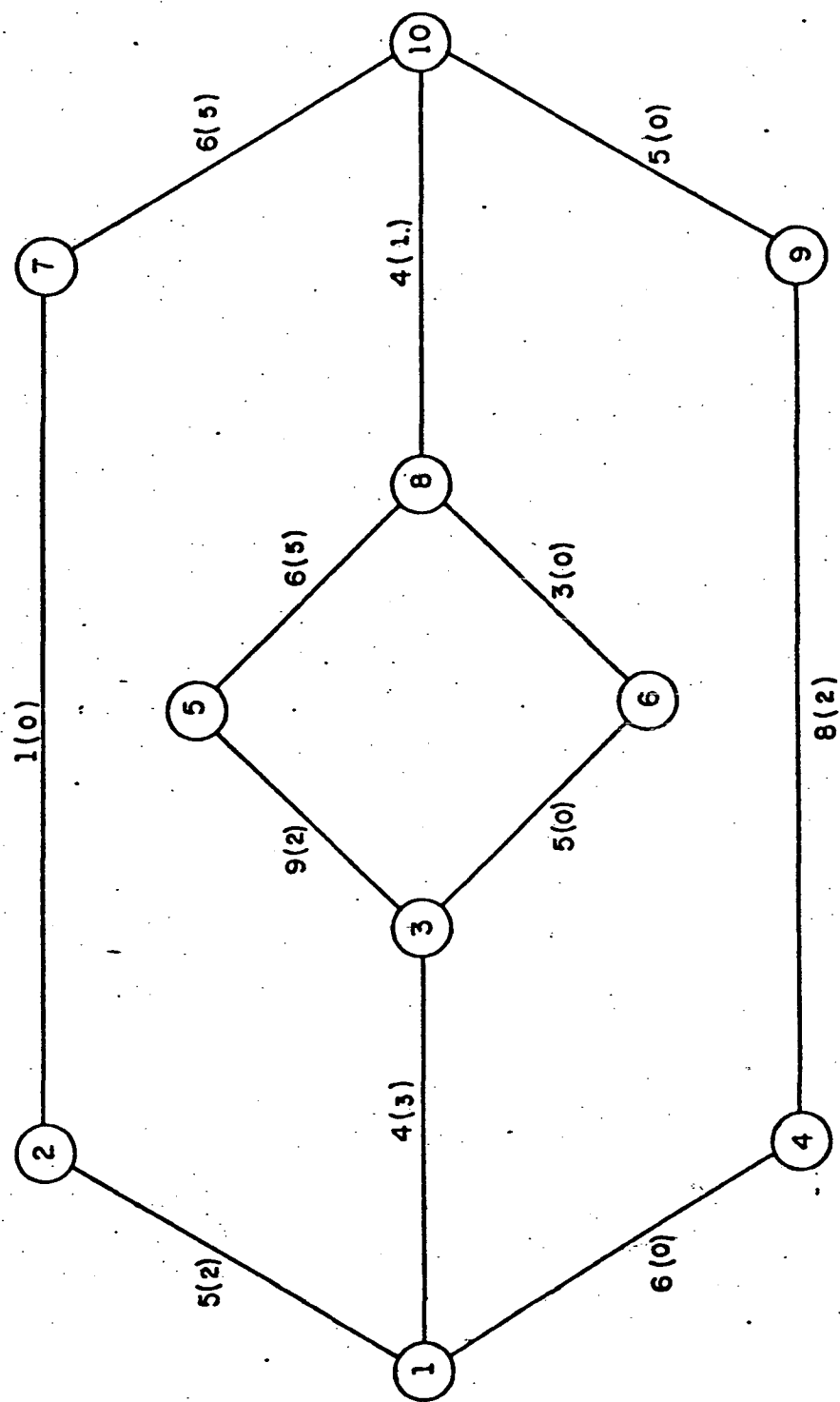


Figura 8. - Rede com 10 nós e 12 arcos

- nenhuma falha:

$$D_{2,0} = 5 \quad D_{3,0} = 4 \quad D_{4,0} = 6 \quad D_{5,0} = 13$$

$$D_{6,0} = 9 \quad D_{7,0} = 6 \quad D_{8,0} = 12 \quad D_{9,0} = 14$$

$$D_{10,0} = \underline{12}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,2,7,10.

- uma falha:

$$D_{2,1} = 2 \quad D_{3,1} = 3 \quad D_{4,1} = 0 \quad D_{5,1} = 6$$

$$D_{6,1} = 4 \quad D_{7,1} = 3 \quad D_{8,1} = 7 \quad D_{9,1} = 8$$

$$D_{10,1} = \underline{9}$$

Caminho entre 1 e 10 : 1,2,7,10.

Falhou: (1,2)

- duas falhas:

$$D_{2,2} = 2 \quad D_{3,2} = 3 \quad D_{4,2} = 0 \quad D_{5,2} = 5$$

$$D_{6,2} = 3 \quad D_{7,2} = 2 \quad D_{8,2} = 4 \quad D_{9,2} = 2$$

$$D_{10,2} = \underline{7}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,4,9,10.

Falharam: (1,4) e (4,9)

Exemplo 6 - Figura 9

Rede com 10 nós e 13 arcos, sujeita a 3 falhas (nos arcos (2,4) e (7,9) os limites má-

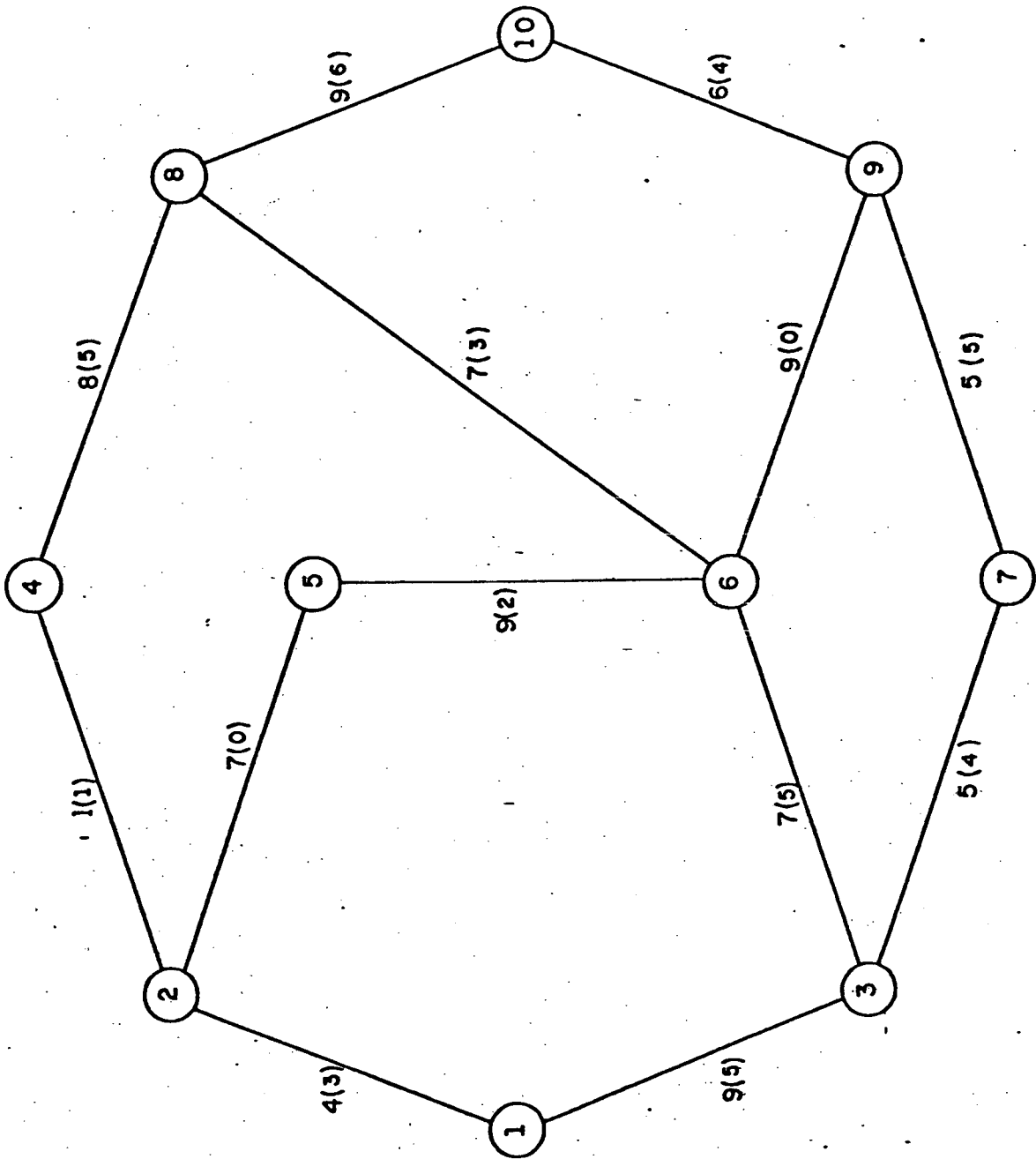


Figura 9. - Rede com 10 nós e 13 arcos

ximo e mínimo coincidem)

- nenhuma falha:

$$D_{2,0} = 4 \quad D_{3,0} = 9 \quad D_{4,0} = 5 \quad D_{5,0} = 11$$

$$D_{6,0} = 16 \quad D_{7,0} = 14 \quad D_{8,0} = 13 \quad D_{9,0} = 19$$

$$D_{10,0} = \underline{22}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,2,4,8,10.

- uma falha:

$$D_{2,1} = 3 \quad D_{3,1} = 5 \quad D_{4,1} = 4 \quad D_{5,1} = 4$$

$$D_{6,1} = 12 \quad D_{7,1} = 10 \quad D_{8,1} = 10 \quad D_{9,1} = 15$$

$$D_{10,1} = \underline{19}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,2,4,8,10.

Falhou: (4,8)

- duas falhas:

$$D_{2,2} = 3 \quad D_{3,2} = 5 \quad D_{4,2} = 4 \quad D_{5,2} = 3$$

$$D_{6,2} = 6 \quad D_{7,2} = 9 \quad D_{8,2} = 9 \quad D_{9,2} = 12$$

$$D_{10,2} = \underline{16}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,2,4,8,10.

Falharam: (4,8) e (8,10).

- três falhas:

$$D_{2,3} = 3 \quad D_{3,3} = 5 \quad D_{4,3} = 4 \quad D_{5,3} = 3$$

$$D_{6,3} = 5 \quad D_{7,3} = 9 \quad D_{8,3} = 9 \quad D_{9,3} = 6$$

$$D_{10,3} = \underline{12}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,2,5,6,9,10.

Falharam: (2,5), (5,6) e (6,9).

Exemplo 7 - Figura 10.

Rede com 10 nós e 18 arcos, sujeita a três falhas.

- nenhuma falha

$$D_{2,0} = 7 \quad D_{3,0} = 6 \quad D_{4,0} = 14 \quad D_{5,0} = 13$$

$$D_{6,0} = 8 \quad D_{7,0} = 10 \quad D_{8,0} = 17 \quad D_{9,0} = 14$$

$$D_{10,0} = \underline{18}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,3,6,9,10.

- uma falha

$$D_{2,1} = 2 \quad D_{3,1} = 0 \quad D_{4,1} = 7 \quad D_{5,1} = 7$$

$$D_{6,1} = 2 \quad D_{7,1} = 4 \quad D_{8,1} = 11 \quad D_{9,1} = 8$$

$$D_{10,1} = \underline{12}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,3,6,9,10.

Falhou: (1,3)

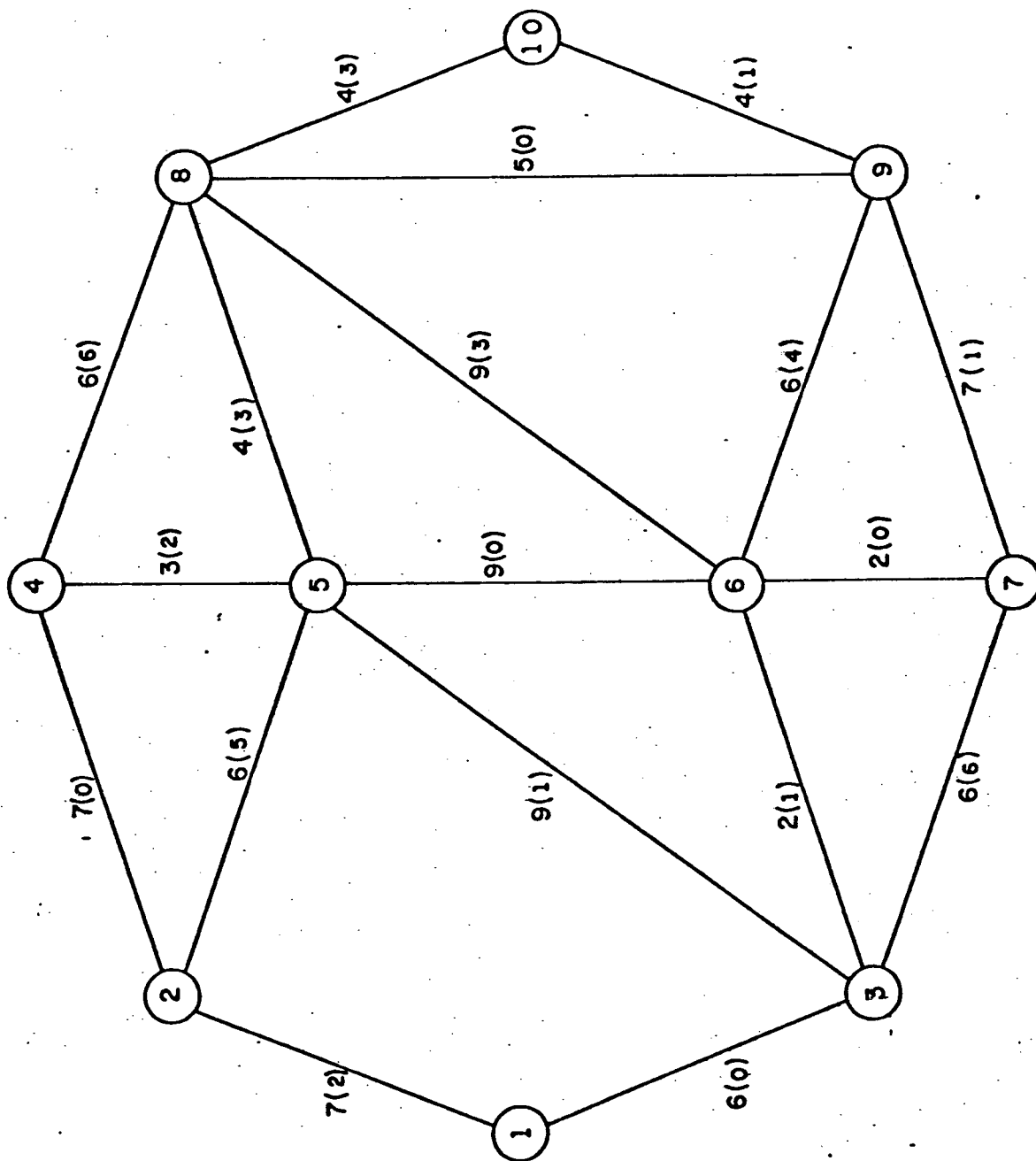


Figura 10. - Rede com 10 nós e 18 arcos

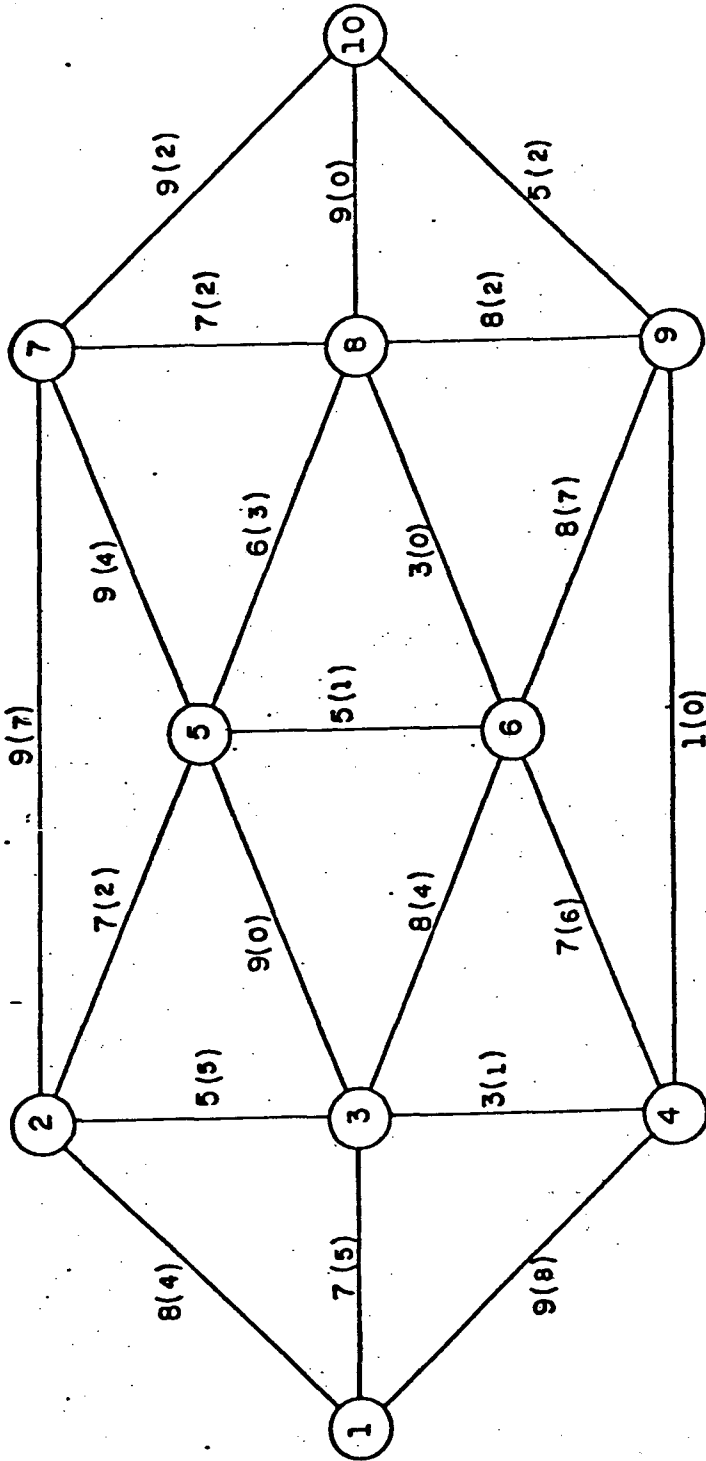


Figura 11. - Rede com 10 nós e 21 arcos

- duas falhas

$$D_{2,2} = 2 \quad D_{3,2} = 0 \quad D_{4,2} = 2 \quad D_{5,2} = 1$$

$$D_{6,2} = 1 \quad D_{7,2} = 2 \quad D_{8,2} = 5 \quad D_{9,2} = 5$$

$$D_{10,2} = \underline{9}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,3,5,8,10.

Falharam: (1,3) e (3,5)

- três falhas

$$D_{2,3} = 2 \quad D_{3,3} = 0 \quad D_{4,3} = 2 \quad D_{5,3} = 1$$

$$D_{6,3} = 1 \quad D_{7,3} = 1 \quad D_{8,3} = 4 \quad D_{9,3} = 3$$

$$D_{10,3} = \underline{6}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,3,6,7,9,10.

Falharam: (1,3), (7,9) e (9,10).

Exemplo 8 - Figura 11

Rede com 10 nós e 21 arcos, sujeita a três falhas.

- nenhuma falha

$$D_{2,0} = 8 \quad D_{3,0} = 7 \quad D_{4,0} = 9 \quad D_{5,0} = 15$$

$$D_{6,0} = 15 \quad D_{7,0} = 17 \quad D_{8,0} = 18 \quad D_{9,0} = 10$$

$$D_{10,0} = \underline{15}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,4,9,10.

- uma falha

$$D_{2,1} = 4 \quad D_{3,1} = 5 \quad D_{4,1} = 8 \quad D_{5,1} = 10$$

$$D_{6,1} = 11 \quad D_{7,1} = 13 \quad D_{8,1} = 12 \quad D_{9,1} = 9$$

$$D_{10,1} = \underline{12}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,4,9,10.

Falhou: (9,10)

- duas falhas

$$D_{2,2} = 4 \quad D_{3,2} = 5 \quad D_{4,2} = 6 \quad D_{5,2} = 5$$

$$D_{6,2} = 8 \quad D_{7,2} = 11 \quad D_{8,2} = 10 \quad D_{9,2} = 7$$

$$D_{10,2} = \underline{11}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,4,9,10.

Falharam: (1,4) e (9,10)

- três falhas

$$D_{2,3} = 4 \quad D_{3,3} = 5 \quad D_{4,3} = 6 \quad D_{5,3} = 5$$

$$D_{6,3} = 6 \quad D_{7,3} = 9 \quad D_{8,3} = 8 \quad D_{9,3} = 7$$

$$D_{10,3} = \underline{9}$$

Caminho entre 1 e 10: 1,3,4,9,10.

Falharam: (1,3), (3,4) e (9,10).

CAPÍTULO VI

6. ADAPTAÇÃO DO ALGORITMO CAMI PARA O CASO DE FALHAS PARCIAIS

Os resultados mostrados até aqui confirmam a hipótese de que, através de pequenas modificações, o algoritmo de Wollmer também permite a consideração de falhas parciais na capacidade dos arcos.

O processo de adaptação manteve praticamente intacta a estrutura original da primeira parte do algoritmo apresentado em (5), a menos da inclusão de um limite inferior para a capacidade dos arcos e da restrição de um caminho viável não poder passar pelo sumidouro e ir até um nó intermediário.

Era de se esperar, portanto, que grande parte dos aperfeiçoamentos sugeridos em (6) para o algoritmo de Wollmer permanecessem válidos para o algoritmo básico modificado. É isto exatamente que será discutido a seguir.

6.1. APERFEIÇOAMENTOS QUE PODEM SER EXECUTADOS NO ALGORITMO BÁSICO MODIFICADO

6.1.1. Melhor Inicialização dos Rótulos $D_{a,k}$

O fato de se fazer $D_{a,k} = \infty, \forall a \neq s$, sempre que se vai iniciar o processo de levantamento do caminho mínimo para k falhas, implica na repetição de resultados já obtidos durante o levantamento de $D_{a,k-1}$.

Sabendo-se também que $D_{a,k} \leq D_{a,k-1}$, $D_{a,k-1}$ pode representar o comprimento de um caminho viável de s até a com k ou menos arcos falhando.

Portanto, também é válida para o algoritmo básico modificado a adoção da inicialização proposta no algoritmo CAMI, ou seja, quando

$k=0$, $D_{s,0} = 0$ e $D_{a,0} = \infty$, $\forall a \neq s$. Depois de obtidos os $D_{a,k} = L_{a,k}$ far-se-á $k=k+1$ e $D_{a,k} = D_{a,k-1}$.

O algoritmo fica com o seguinte aspecto:

P1. Para $i=0$ faça $D_{s,i} = 0$ e $D_{a,i} = \infty$, $\forall a \neq s$. Faça $k=0$.

P2. (sem alteração)

P3. Se nenhuma das condições se aplicar, não faça mudanças. Então:

a) Se $k < n$ faça $k=k+1$ e $D_{a,k} = D_{a,k-1}$ ($\forall a$) e vá para P2.

b) Se $k = n$ termine, com $D_{t,n}$ sendo o valor desejado.

6.1.2. Mudança na ordem dos itens do Passo 2, aumentando a rapidez e permitindo a exclusão de hipóteses não viáveis.

Os testes efetuados com o algoritmo básico modificado mostraram que existe a predominância de ocorrência de situações referentes a determinados itens do Passo 2, isto é:

- quando $k=0$, é mais freqüente que $D_{b,k} > D_{a,k} + 1(a,b)$, fazendo-se $D_{b,k} = D_{a,k} + 1(a,b)$.

- quando $k > 0$, na maioria das vezes $D_{b,k} > D_{a,k-1} + 1'(a,b)$, fazendo-se $D_{b,k} = D_{a,k-1} + 1'(a,b)$.

Além disso, pode-se observar que:

- Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$, faz-se $D_{b,k} =$
 $= D_{a,k} + l(a,b)$. Portanto, não é possível
 que $D_{a,k} > D_{b,k} + l(a,b)$ para os mesmos a e b ;

- Se $D_{b,k} > D_{a,k-1} + l'(a,b)$, faz-se $D_{b,k} =$
 $= D_{a,k-1} + l'(a,b)$. Sendo assim, não é possível
 que $D_{a,k} > D_{b,k-1} + l'(a,b)$, pois $D_{b,k} < D_{b,k-1}$
 $D_{a,k} < D_{a,k-1}$ e $l'(a,b) > 0$;

- uma substituição $D_{a,k} = D_{b,k} + l(a,b)$ torna necessária uma nova iteração para busca do caminho mais curto, de modo a se verificar se outros nós alcançados a partir de a terão suas distâncias também reduzidas. O mesmo não precisa acontecer quando se faz a mudança $D_{b,k} = D_{a,k} + l(a,b)$, porque os nós atingidos a partir de b serão pesquisados na mesma iteração.

Em consequência do exposto acima, o Passo 2 do algoritmo de falhas parciais admite mudanças na ordem de seus itens e de regra de parada de iterações, semelhantes àquelas realizadas em (6) para o caso de remoção total de arcos, isto é, o Passo 2 fica:

P2. Verifique cada arco (a,b) e:

a) Se $k \geq 1$ e se $D_{b,k} > D_{a,k-1} + l'(a,b)$ faça

$$D_{b,k} = D_{a,k-1} + l'(a,b) \text{ e vá a c).}$$

b) se $k \geq 1$, $b \begin{cases} \text{qualquer para } l'(a,b) = 0 \\ \neq t \quad \text{para } l'(a,b) \neq 0 \end{cases}$

e se $D_{a,k} > D_{b,k-1} + l'(a,b)$ faça

$$D_{a,k} = D_{b,k-1} + l'(a,b)$$

c) se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$ faça

$$D_{b,k} = D_{a,k} + l(a,b) \text{ e vá ao próximo arco } (a,b)$$

d) se $D_{a,k} > D_{b,k} + l(a,b)$ e $b \neq t$ faça

$$D_{a,k} = D_{b,k} + l(a,b) \text{ e vá ao próximo arco } (a,b)$$

Até que nenhuma mudança em (d) seja verificada.

6.1.3. Simplificação do Passo 2 para o caso de $k=0$

Ainda seguindo a linha de raciocínio aplicada em (6) para o caso de remoção total de arcos, o problema de busca do valor do caminho mais curto quando $k=0$ é o problema tradicional de obtenção do valor da menor distância entre dois nós, podendo ser resolvido pelo algoritmo de falhas parciais sem os itens referentes a falhas. Isto permite que o Passo 2 do algoritmo seja dividido em dois segmentos:

quando $k=0$

P2. Para cada arco (a,b) verifique

a) Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l'(a,b)$ faça

$D_{b,k} = D_{a,k} + l'(a,b)$ e vá ao próximo arco(a,b)

b) Se $D_{a,k} > D_{b,k} + l'(a,b)$ e $b \neq t$ faça

$D_{a,k} = D_{b,k} + l'(a,b)$ e vá ao próximo arco(a,b)

Até que nenhuma mudança em b) seja verificada.

- quando $k > 1$

P2'. Para cada arco (a,b) verifique

a) Se $D_{b,k} > D_{a,k-1} + l'(a,b)$ faça

$D_{b,k} = D_{a,k-1} + l'(a,b)$ e vá a c)

b) Se $D_{a,k} > D_{b,k-1} + l'(a,b)$, $b \begin{cases} \text{qualquer, para} \\ l'(a,b) = 0 \\ \neq t, \text{ para } l'(a,b) \neq 0 \end{cases}$

faça $D_{a,k} = D_{b,k-1} + l'(a,b)$

c) Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$ faça

$D_{b,k} = D_{a,k} + l(a,b)$ e vá ao próximo arco(a,b)

d) Se $D_{a,k} > D_{b,k} + l(a,b)$ e $b \neq t$

$D_{a,k} = D_{b,k} + l(a,b)$ e vá ao próximo arco(a,b)

Até que nenhuma mudança em d) seja verificada.

6.2. INCLUSÃO DA POSSIBILIDADE DE FALHAS PARCIAIS NO ALGORITMO CAMI ATRAVÉS DE ALTERAÇÕES NO BLOCO KMAIORZERO

Tendo em vista a possibilidade das modificações apontadas acima, o algoritmo CAMI também pode incluir falhas parciais, bastando que se efetuem algumas alterações no BLOCO KMAIORZERO, como mostrado a seguir.

BLOCO KMAIORZERO

Enquanto alteração = 1 faça

Início

alteração ← 0

Para cada arco (a,b)

Se $D_{b,k} > D_{a,k-1} + l'(a,b)$ então

Início

$D_{b,k} \leftarrow D_{a,k-1} + l'(a,b)$

$LE_{b,k} \leftarrow a$

falha $_{b,k} \leftarrow 1$

Fim

Senão

Se $D_{a,k} > D_{b,k-1} + l'(a,b)$, b $\begin{cases} \neq t, \text{ para } l'(a,b) \neq 0 \\ \text{qualquer, para } l'(a,b) = 0 \end{cases}$

então

Início

$D_{a,k} \leftarrow D_{b,k-1} + l'(a,b)$

$LE_{a,k} \leftarrow b$

falha $_{a,k} \leftarrow 1$

Fim

Se $D_{b,k} > D_{a,k} + l(a,b)$ então

Início

$$D_{b,k} \leftarrow D_{a,k} + 1(a,b)$$

$$LE_{b,k} \leftarrow a$$

$$\text{Falha}_{b,k} \leftarrow 0$$

Fim

Senão

Se $D_{a,k} > D_{b,k} + 1(a,b)$ e $b \neq t$ então

Início

$$D_{a,k} \leftarrow D_{b,k} + 1(a,b)$$

$$LE_{a,k} \leftarrow b$$

$$\text{falha}_{a,k} \leftarrow 0$$

$$\text{alteração} \leftarrow 1$$

Fim

FIM.

FIM BLOCO KMAIORZERO.

6.3. EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO ALGORITMO CAMI MODIFICADO PARA FALHAS PARCIAIS

O algoritmo CAMI, modificado para considerar falhas parciais nos valores dos arcos, foi programado em linguagem FORTRAN IV e utilizado para a resolução de algumas redes através de computador IBM 4341, apresentando resultados satisfatórios. Para exemplificar isto, são mostrados a seguir os valores levantados para as redes já estudadas com o algoritmo básico modificado.

Exemplo 9 - Figura 8.

Seja a mesma rede do Exemplo 5, resolvida agora através do algoritmo CAMI modificado. Os resultados foram:

- nenhuma falha

$$D_{2,0} = 5 \quad D_{3,0} = 4 \quad D_{4,0} = 6 \quad D_{5,0} = 13$$

$$D_{6,0} = 9 \quad D_{7,0} = 6 \quad D_{8,0} = 12 \quad D_{9,0} = 14$$

$$D_{10,0} = \underline{12}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,2,7,10.

- uma falha

$$D_{2,1} = 2 \quad D_{3,1} = 3 \quad D_{4,1} = 0 \quad D_{5,1} = 6$$

$$D_{6,1} = 4 \quad D_{7,1} = 3 \quad D_{8,1} = 7 \quad D_{9,1} = 8$$

$$D_{10,1} = \underline{9}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,2,7,10.

Falhou: (1,2)

- duas falhas

$$D_{2,2} = 2 \quad D_{3,2} = 3 \quad D_{4,2} = 0 \quad D_{5,2} = 5$$

$$D_{6,2} = 3 \quad D_{7,2} = 2 \quad D_{8,2} = 4 \quad D_{9,2} = 2$$

$$D_{10,2} = \underline{7}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,4,9,10

Falharam: (1,4) e (4,9).

Exemplo 10 - Figura 9.

Seja a rede do Exemplo 6:

- nenhuma falha

$$D_{2,0} = 4 \quad D_{3,0} = 9 \quad D_{4,0} = 5 \quad D_{5,0} = 11$$

$$D_{6,0} = 16 \quad D_{7,0} = 14 \quad D_{8,0} = 13 \quad D_{9,0} = 19$$

$$D_{10,0} = \underline{22}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,2,4,8,10.

- para uma falha

$$D_{2,1} = 3 \quad D_{3,1} = 5 \quad D_{4,1} = 4 \quad D_{5,1} = 4$$

$$D_{6,1} = 12 \quad D_{7,1} = 10 \quad D_{8,1} = 10 \quad D_{9,1} = 15$$

$$D_{10,1} = \underline{19}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,2,4,8,10.

Falhou: (8,10)

OBS.: No exemplo 6, resolvido com o algoritmo básico modificado, o arco que falhou foi (4,8). A distância entre 1 e 10 resulta igual nos dois casos.

- para duas falhas:

$$D_{2,2} = 3 \quad D_{3,2} = 5 \quad D_{4,2} = 4 \quad D_{5,2} = 3$$

$$D_{6,2} = 6 \quad D_{7,2} = 9 \quad D_{8,2} = 9 \quad D_{9,2} = 12$$

$$D_{10,2} = \underline{16}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,2,4,8,10.

Falharam: (4,8) e (8,10).

- para três falhas:

$$D_{2,3} = 3 \quad D_{3,3} = 5 \quad D_{4,3} = 4 \quad D_{5,3} = 3$$

$$D_{6,3} = 5 \quad D_{7,3} = 9 \quad D_{8,3} = 9 \quad D_{9,3} = 6$$

$$D_{10,3} = \underline{12}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,2,5,6,9,10.

Falharam: (2,5), (5,6) e (6,9).

Exemplo 11 - Figura 10.

Seja a rede do Exemplo 7.

- nenhuma falha

$$D_{2,0} = 7 \quad D_{3,0} = 6 \quad D_{4,0} = 14 \quad D_{5,0} = 13$$

$$D_{6,0} = 8 \quad D_{7,0} = 10 \quad D_{8,0} = 17 \quad D_{9,0} = 14$$

$$D_{10,0} = \underline{18}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,3,6,9,10.

- uma falha

$$D_{2,1} = 2 \quad D_{3,1} = 0 \quad D_{4,1} = 7 \quad D_{5,1} = 7$$

$$D_{6,1} = 2 \quad D_{7,1} = 4 \quad D_{8,1} = 11 \quad D_{9,1} = 8$$

$$D_{10,1} = \underline{12}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,3,6,9,10.

Falhou: (1,3)

- duas falhas

$$D_{2,2} = 2 \quad D_{3,2} = 0 \quad D_{4,2} = 2 \quad D_{5,2} = 1$$

$$D_{6,2} = 1 \quad D_{7,2} = 2 \quad D_{8,2} = 5 \quad D_{9,2} = 5$$

$$D_{10,2} = \underline{9}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,3,5,8,10.

Falharam: (1,3) e (3,5).

- três falhas

$$D_{2,3} = 2 \quad D_{3,3} = 0 \quad D_{4,3} = 2 \quad D_{5,3} = 1$$

$$D_{6,3} = 1 \quad D_{7,3} = 1 \quad D_{8,3} = 4 \quad D_{9,3} = 3$$

$$D_{10,3} = \underline{6}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,3,6,7,9,10.

Falharam: (1,3), (7,9), (9,10).

Exemplo 12 - Figura 11

Seja a rede do Exemplo 8

- nenhuma falha

$$D_{2,0} = 8 \quad D_{3,0} = 7 \quad D_{4,0} = 9 \quad D_{5,0} = 15$$

$$D_{6,0} = 15 \quad D_{7,0} = 17 \quad D_{8,0} = 18 \quad D_{9,0} = 10$$

$$D_{10,0} = \underline{15}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,4,9,10.

- uma falha

$$D_{2,1} = 4 \quad D_{3,1} = 5 \quad D_{4,1} = 8 \quad D_{5,1} = 7$$

$$D_{6,1} = 11 \quad D_{7,1} = 13 \quad D_{8,1} = 12 \quad D_{9,1} = 9$$

$$D_{10,1} = \underline{12}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,4,9,10.

Falhou: (9,10).

- duas falhas

$$D_{2,2} = 4 \quad D_{3,2} = 5 \quad D_{4,2} = 6 \quad D_{5,2} = 5$$

$$D_{6,2} = 8 \quad D_{7,2} = 11 \quad D_{8,2} = 10 \quad D_{9,2} = 7$$

$$D_{10,2} = \underline{11}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,4,9,10.

Falharam: (4,9) e (9,10). No exemplo 8 falhou o arco (1,4) e não o (4,9).

- três falhas

$$D_{2,3} = 4 \quad D_{3,3} = 5 \quad D_{4,3} = 6 \quad D_{5,3} = 5$$

$$D_{6,3} = 6 \quad D_{7,3} = 9 \quad D_{8,3} = 8 \quad D_{9,3} = 6$$

$$D_{10,3} = \underline{9}$$

O caminho entre 1 e 10: 1,3,4,9,10.

Falharam: (1,3), (3,4), (9,10).

6.4. TEMPO COMPUTACIONAL

O algoritmo básico modificado e o algoritmo CAMI modificado para falhas parciais foram utilizados para a resolução do problema do caminho mínimo em redes duais com 20, 40, 80 e 160 nós, supondo-se a ocorrência de três falhas. As redes são mostradas nas Figuras 12,13, 14 e 15.

Os tempos médios de CPU verificados foram os seguintes:

QUADRO 1. Comparação de tempos computacionais

REDE		TEMPO DE CPU (segundos)	
<u>NÓS</u>	<u>ARCOS</u>	<u>BÁSICO</u>	<u>CAMI</u>
20	49	1,13	1,00
40	105	2,01	1,78
80	215	3,62	3,25
160	430	6,64	6,30

OBS.: Tempo de CPU = Tempo na Unidade Central de Processamento (computador IBM 4341)

Constata-se que o algoritmo CAMI modificado para falhas parciais resolveu mais rapidamente os problemas fornecidos, o que já era esperado.

c / 20 nós

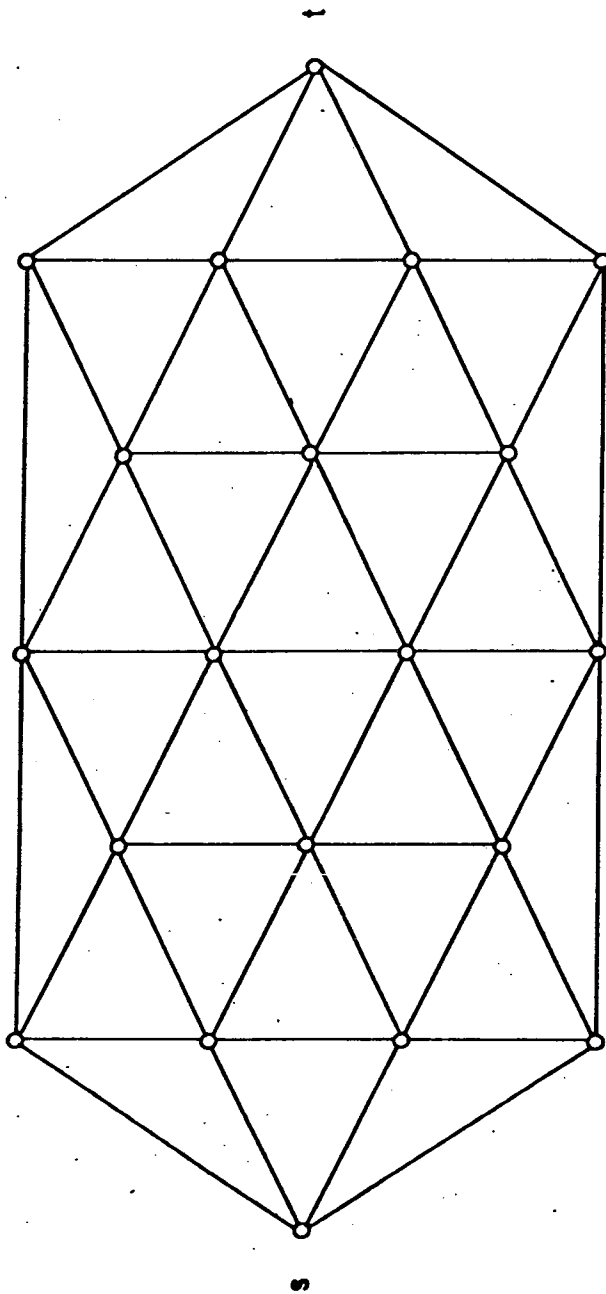


Figura 12. - Rede com 20 nós e 49 arcos

c/40 nós

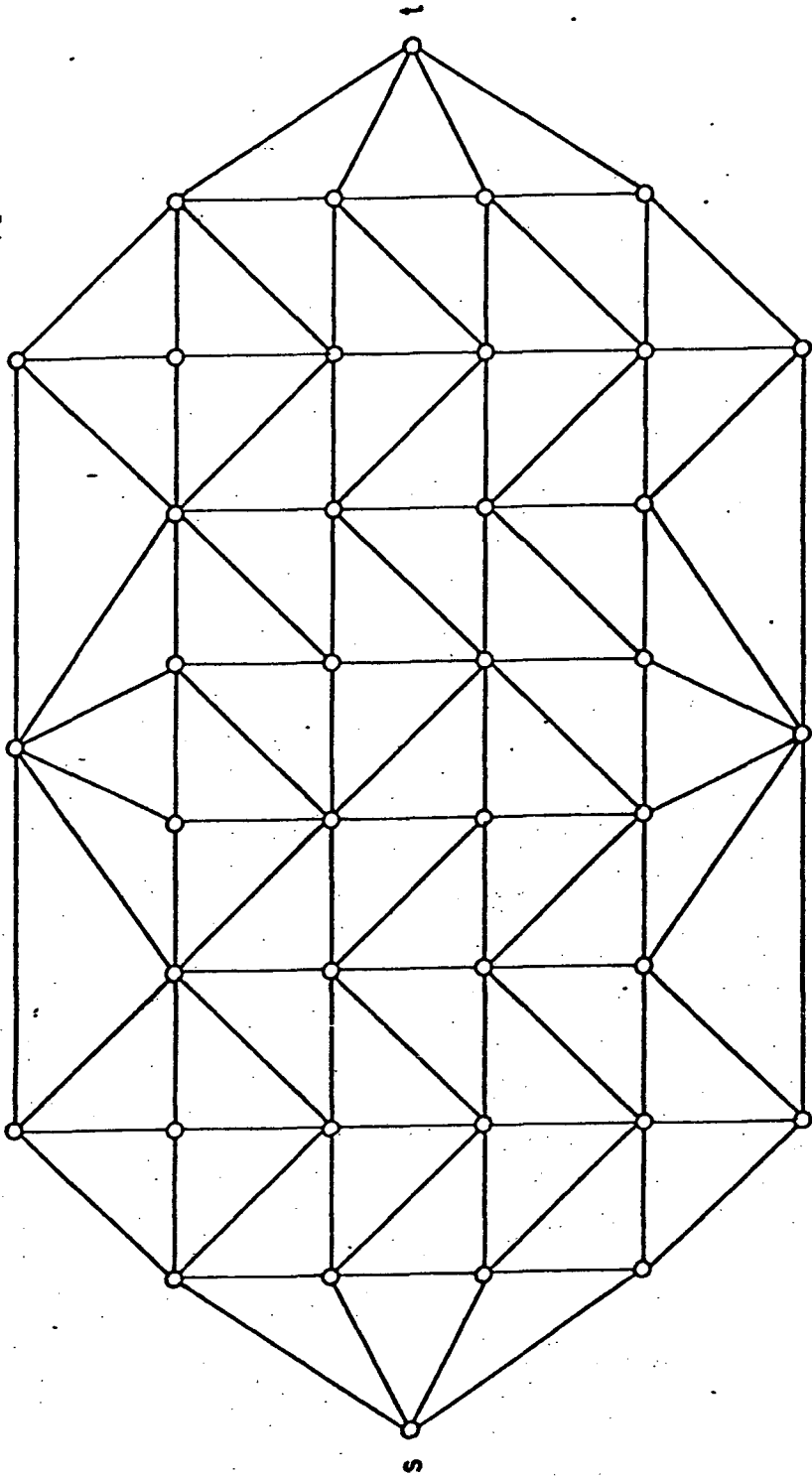


Figura 13 - Rede com 40 nós e 105 arcos

c/ 80 nós

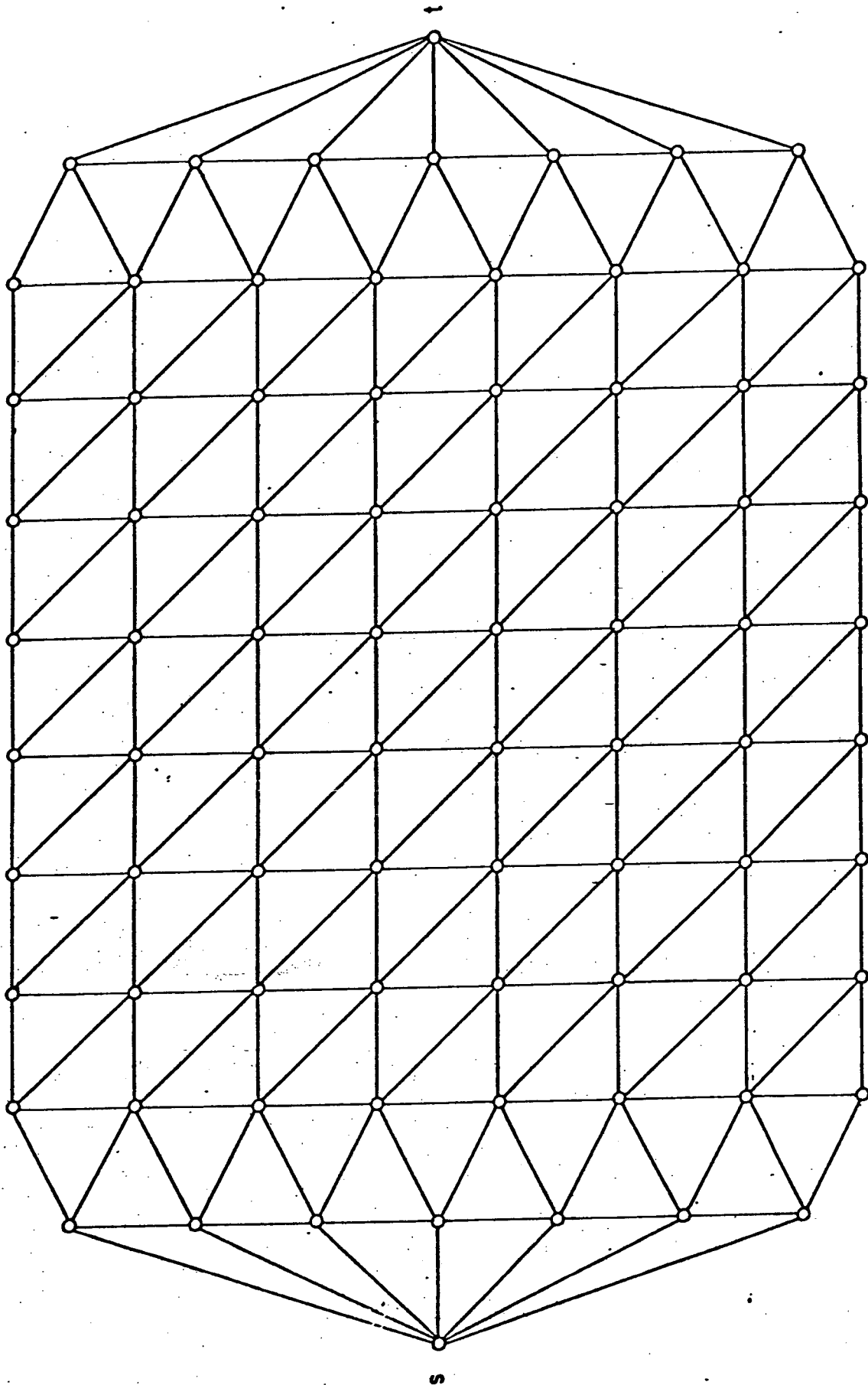


Figura 14. - Rede com 80 nós e 215 arcos

c/160 nós

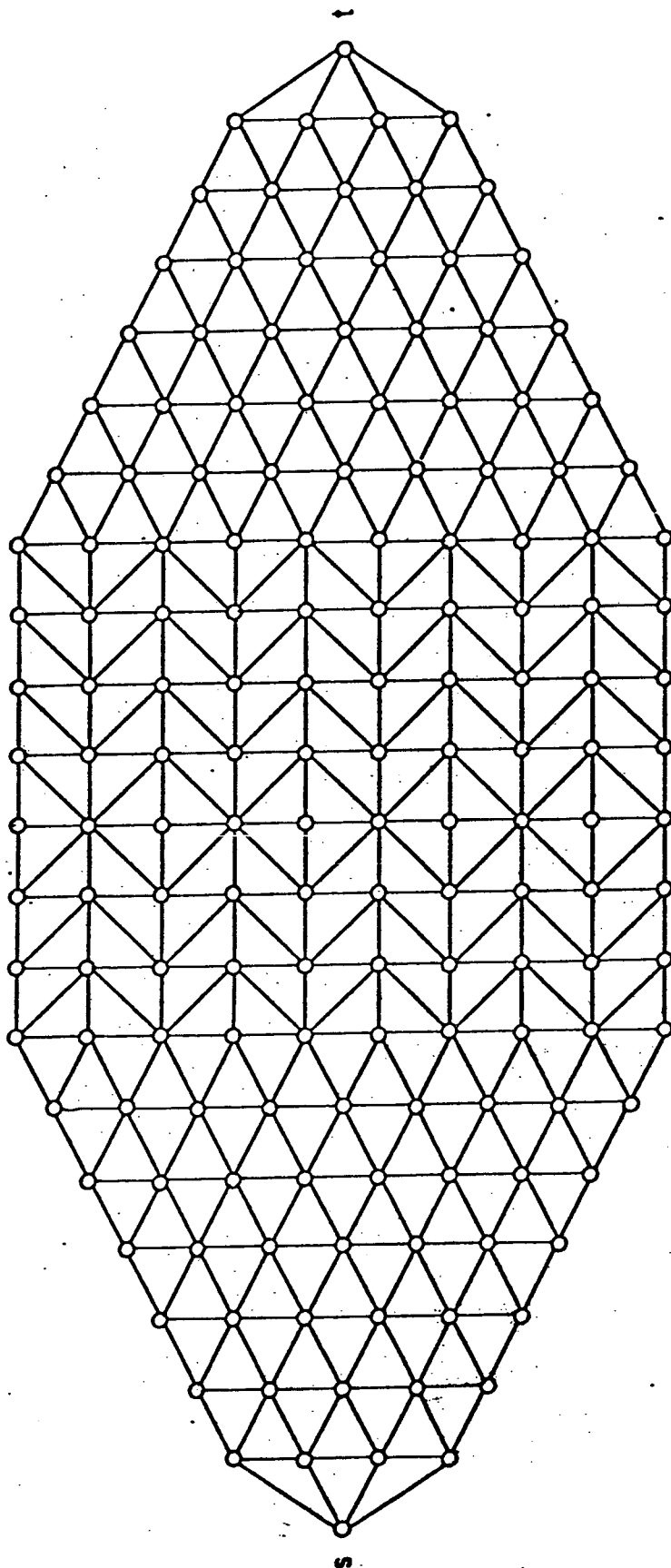


Figura 15. - Rede com 160 nós e 430 arcos

CAPÍTULO VII

7. SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE M FALHAS TOTAIS E N FALHAS PARCIAIS

7.1. MÉTODO DE SOLUÇÃO

A pesquisa realizada a partir do algoritmo proposto por Doulliez e Rao, denominado aqui de algoritmo básico, mostrou ser possível a adaptação tanto do algoritmo original de Wollmer como do algoritmo CAMI de modo a se obter os arcos de uma rede que, ao terem suas capacidades de transporte diminuídas, reduziriam ao máximo o fluxo entre fonte e sumidouro.

Dispondo-se, portanto, de algoritmos para o caso de remoção total de arcos e para o caso de falhas parciais, procurou-se estabelecer um método para a solução do problema proposto, que supõe a ocorrência de m falhas totais, seguidas de n falhas parciais de arcos da rede.

O procedimento foi dividido em cinco etapas distintas, descritas a seguir:

a) Etapa 0 - Obtenção da rede dual

Uma condição essencial para a aplicação do método é a de que a rede seja planar fonte-sumidouro, isto é, ao se acrescentar um arco artificial unindo fonte e sumidouro, a rede resultante é planar. Isto permite a transformação do problema de fluxo máximo entre dois pontos no problema de caminho mais curto na rede dual.

A rede dual é obtida de acordo com o procedimento anteriormente descrito e constante de (2), (5) e (6):

a_1) Acrescenta-se à rede um arco artificial unindo fonte e sumidouro. Em seguida, constrói-se um nó em cada face da rede resultante. A fonte da re-

de dual será o nó situado na face finita definida pelo arco artificial, enquanto que o sumidouro será o nó posicionado na face infinita;

a₂) Para cada arco do primal, exceto o arco artificial, constrói-se um arco no dual que o intercepte e una os nós construídos nas faces adjacentes;

a₃) Atribui-se a cada arco da rede dual um comprimento igual à capacidade do arco primal que ele intercepta.

b) *Etapa 1 - Determinação das m Falhas Totais*

As m falhas totais são obtidas aplicando-se o algoritmo CAMI à rede dual.

Os arcos que falharam são assinalados.

c) *Etapa 2 - Os comprimentos dos arcos que falharam são zerados*

Os arcos que falharam na etapa anterior tem seus comprimentos máximo, $l(a,b)$, e mínimo, $l'(a,b)$, zerados. Isto equivale a se anular a capacidade de transporte de fluxo dos arcos correspondentes na rede primal.

d) *Etapa 3 - Determinação do fluxo máximo para m falhas totais e n falhas parciais - Obtenção das n falhas parciais.*

Aplica-se o algoritmo CAMI modificado para falhas parciais à rede resultante da Etapa 2, determinando-se as n falhas parciais. O caminho mínimo entre

s e t corresponde ao valor do fluxo máximo para m falhas totais e n falhas parciais.

Também poderia ser utilizado o algoritmo básico , com as modificações propostas, porém ter-se-ia menor eficiência computacional, como visto anteriormente.

e) *Etapa 4 - Volta à rede primal*

Retorna-se à rede primal. Os arcos interceptados pelos arcos da rede dual que falharam na *Etapa 1* são aqueles que tem suas capacidades reduzidas totalmente, enquanto que os arcos interceptados pelos arcos que falharam na *Etapa 3* tem suas capacidades reduzidas de modo apenas parcial. O fluxo máximo entre fonte e sumidouro para a ocorrência de até m falhas totais e até n falhas parciais é igual à distância mínima entre a fonte e o sumidouro da rede dual, obtida ao final da *Etapa 3*.

7.2. ALGORITMO COMPUTACIONAL

As *Etapas 1, 2 e 3* do método de solução acima foram consolidadas num único algoritmo computacional, basicamente pela união dos algoritmos CAMI e CAMI modificado, já apresentados.

O fluxograma do algoritmo é apresentado na Figura 16.

Falhas totais e
falhas parciais

Figura 16.

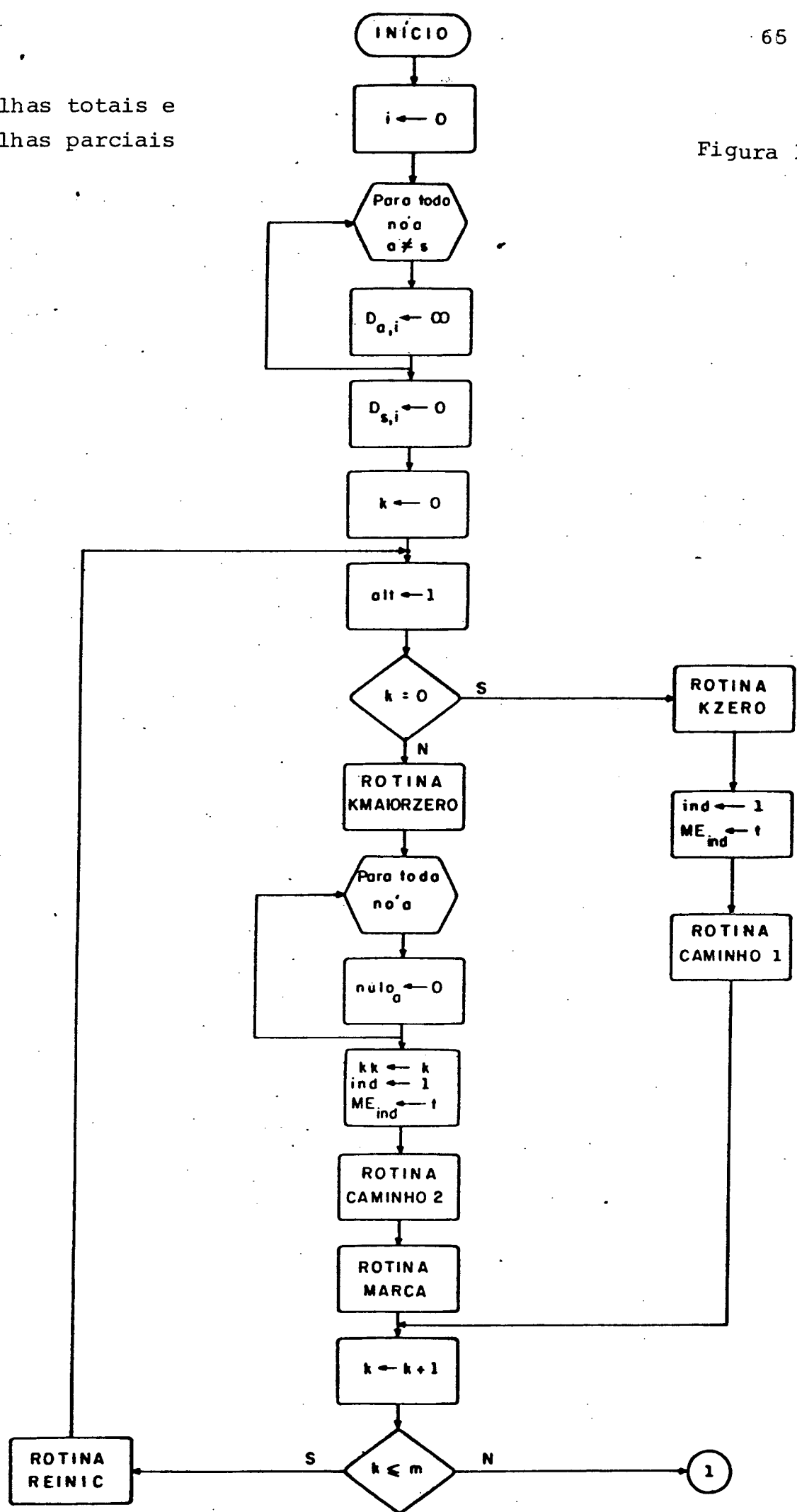


Figura 16 (cont.)

Falhas totais e falhas parciais

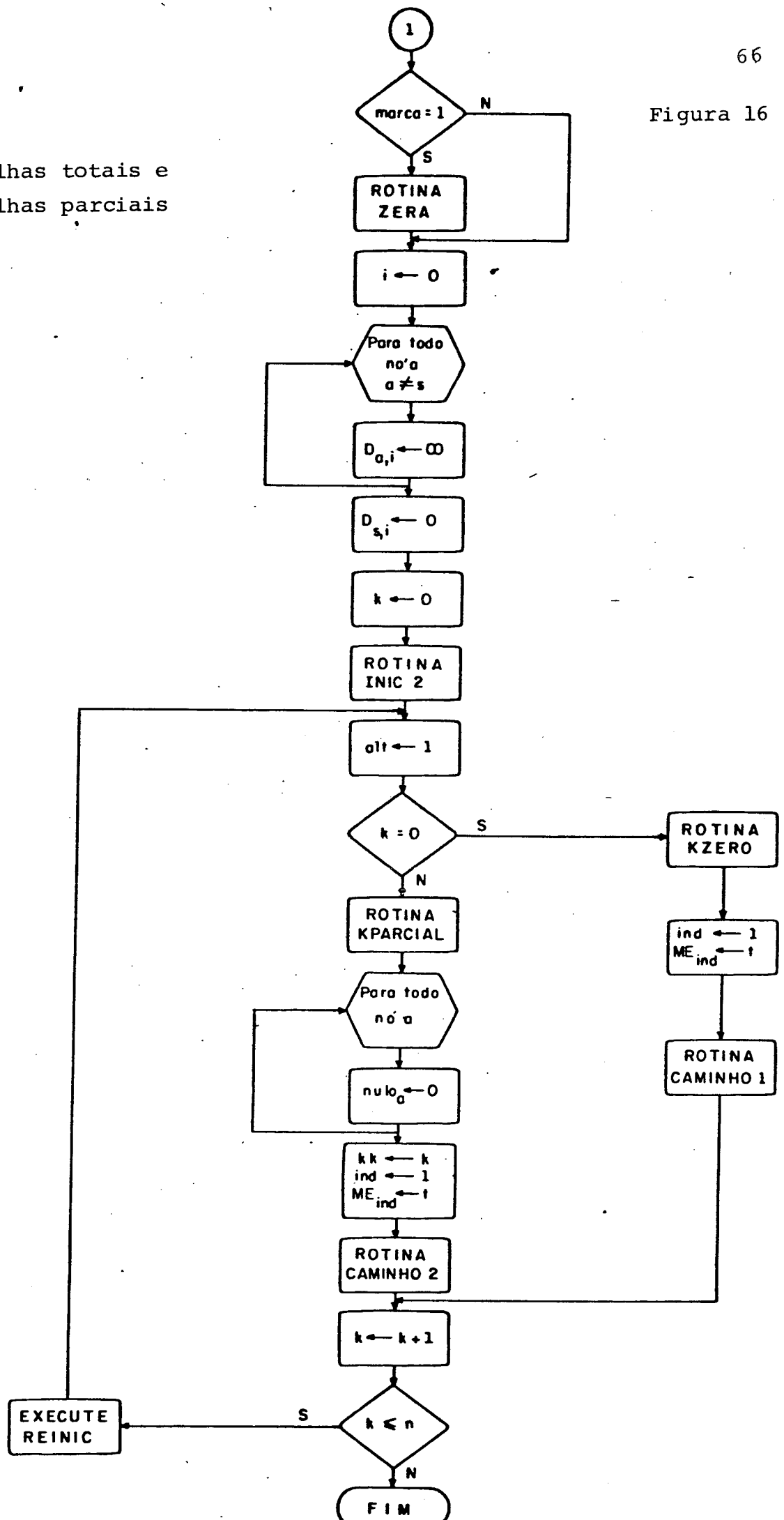


Figura 16. (con

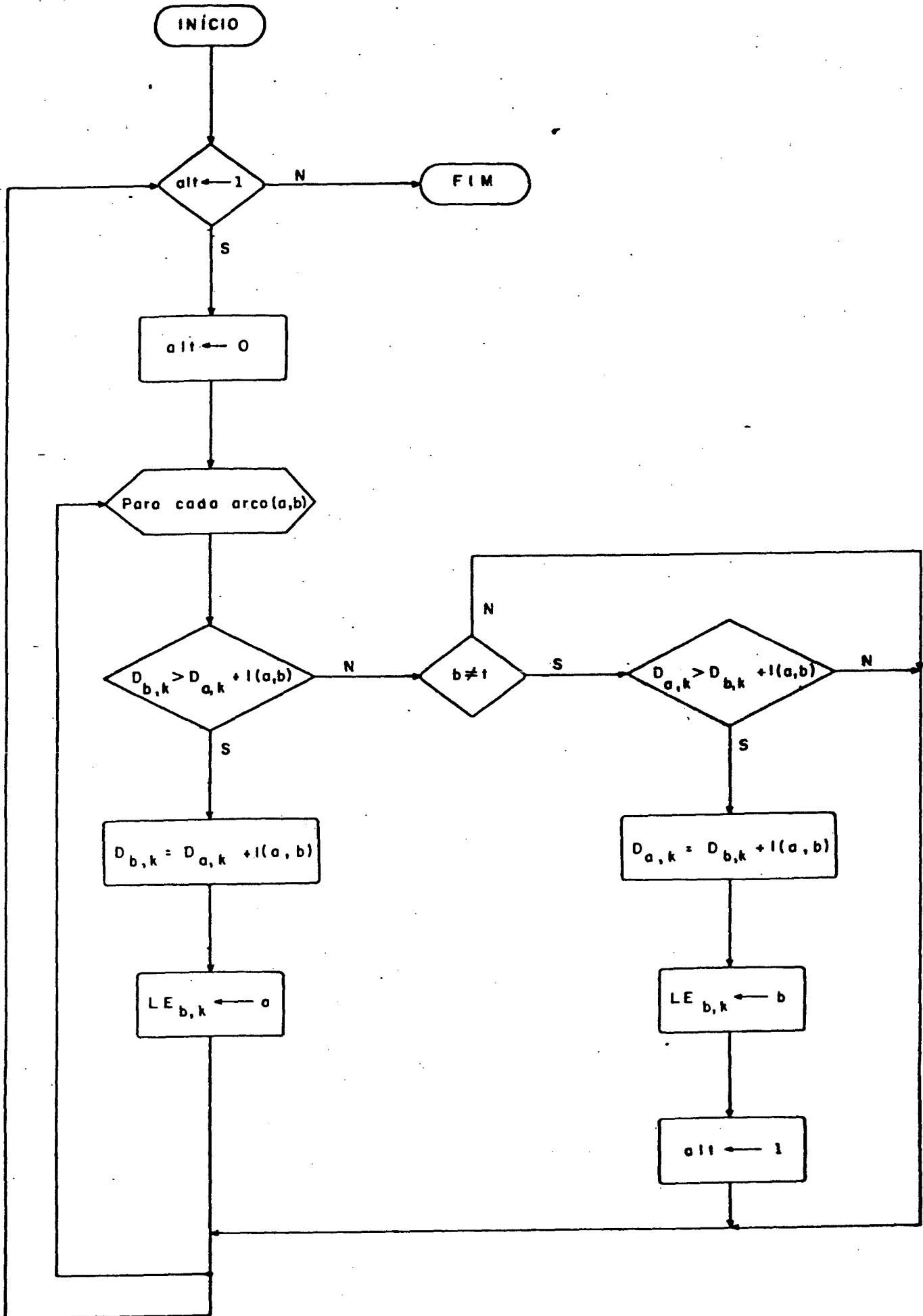
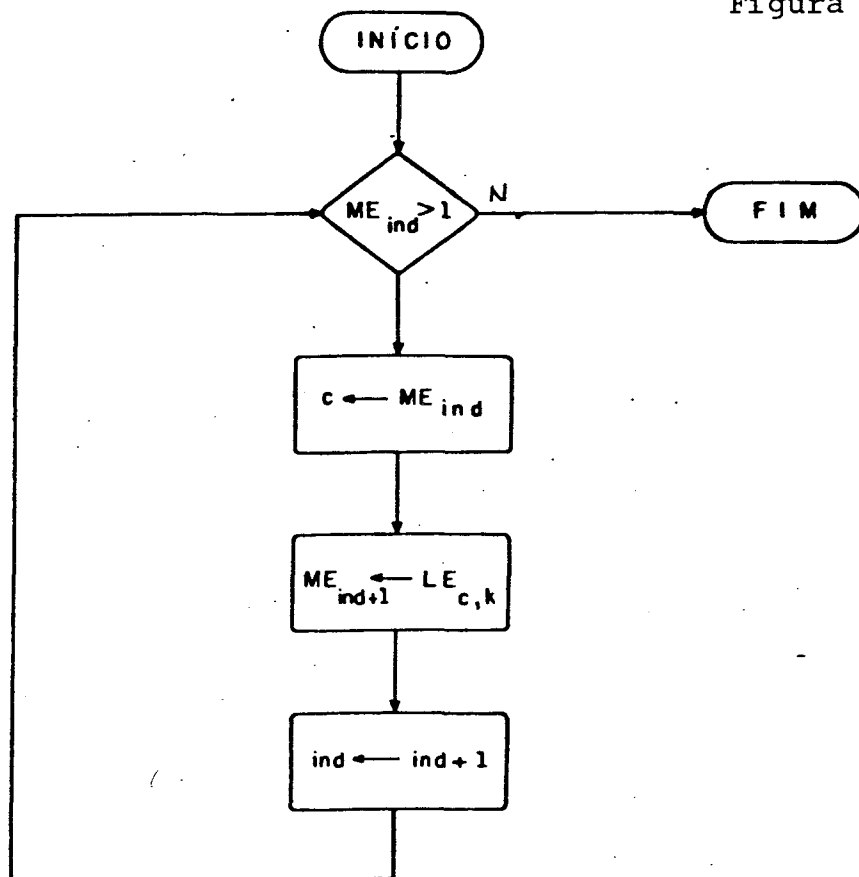


Figura 16. (cont.)



ROTINA REINIC

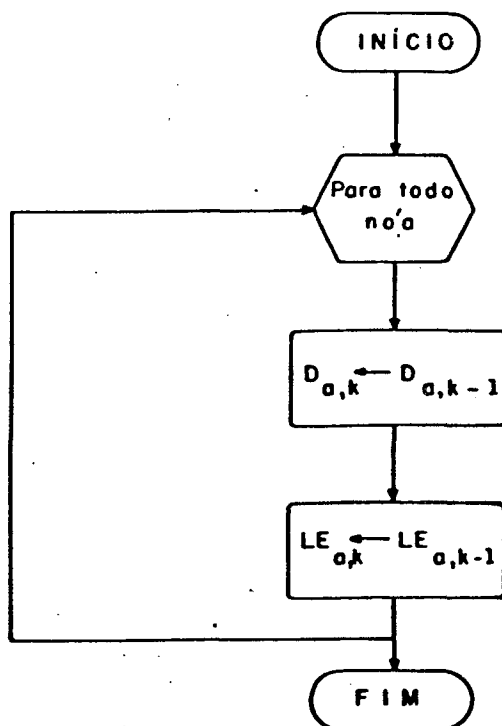


Figura 16. (cont)

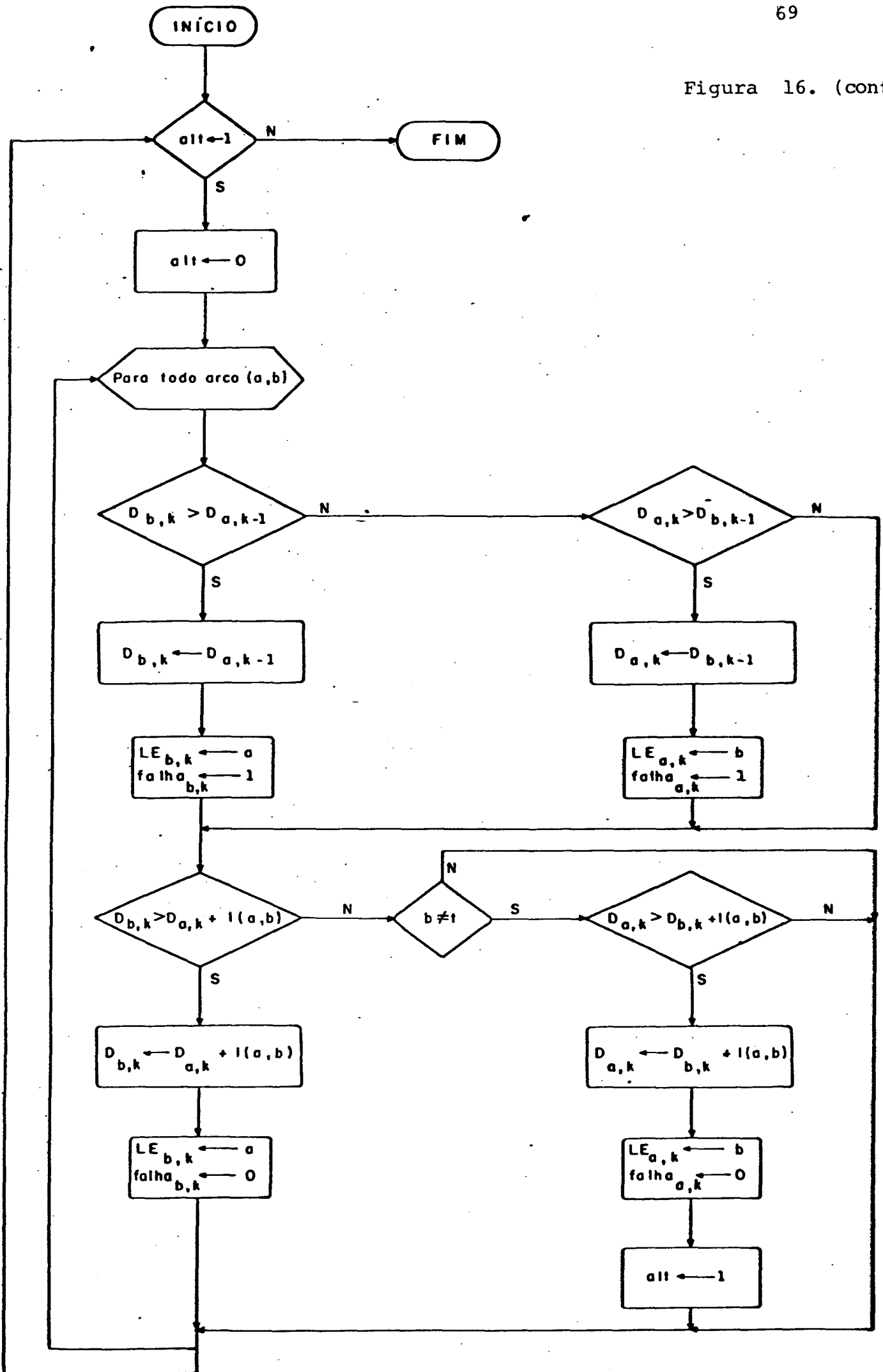


Figura 16. (cont.)

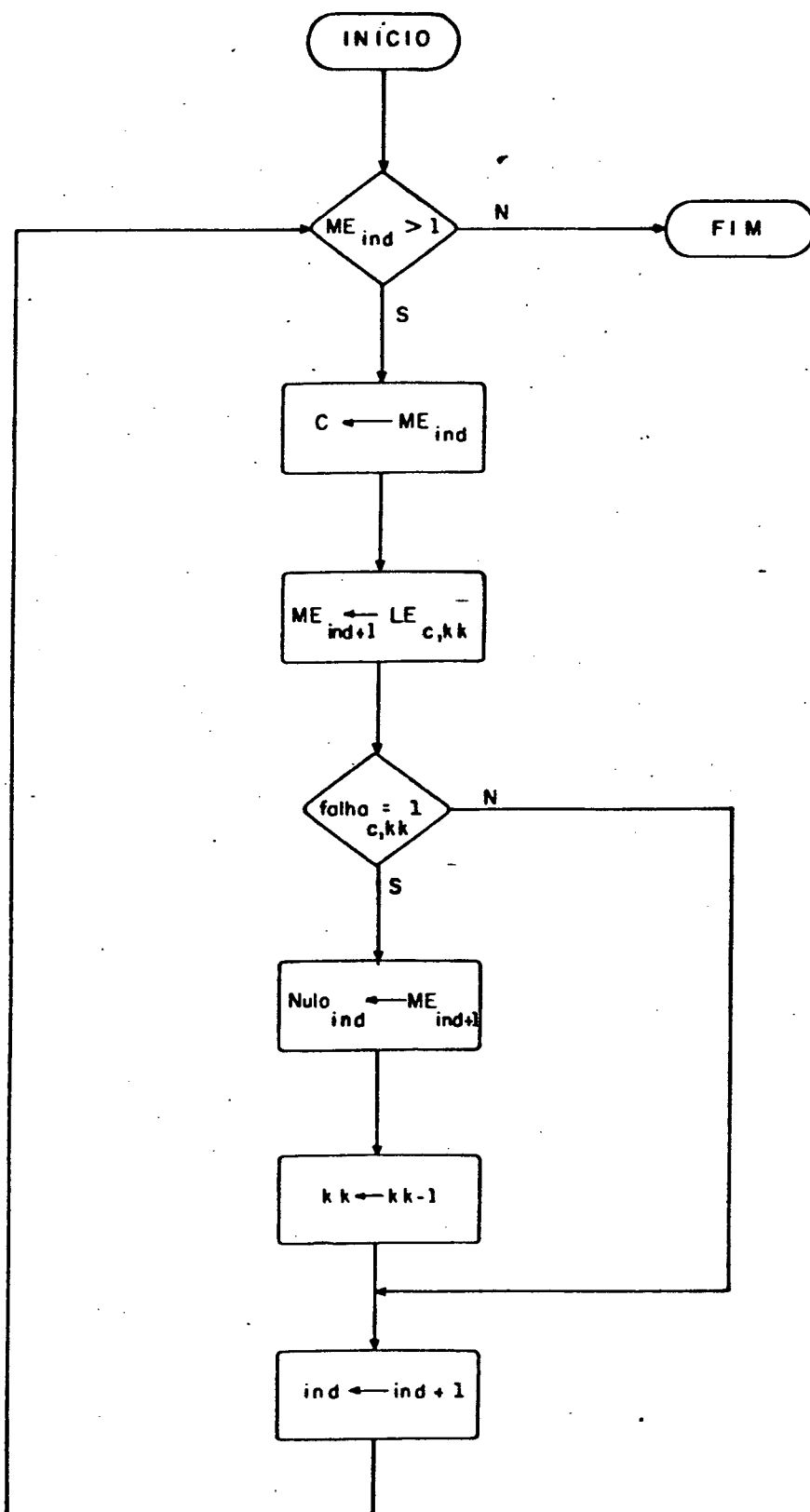
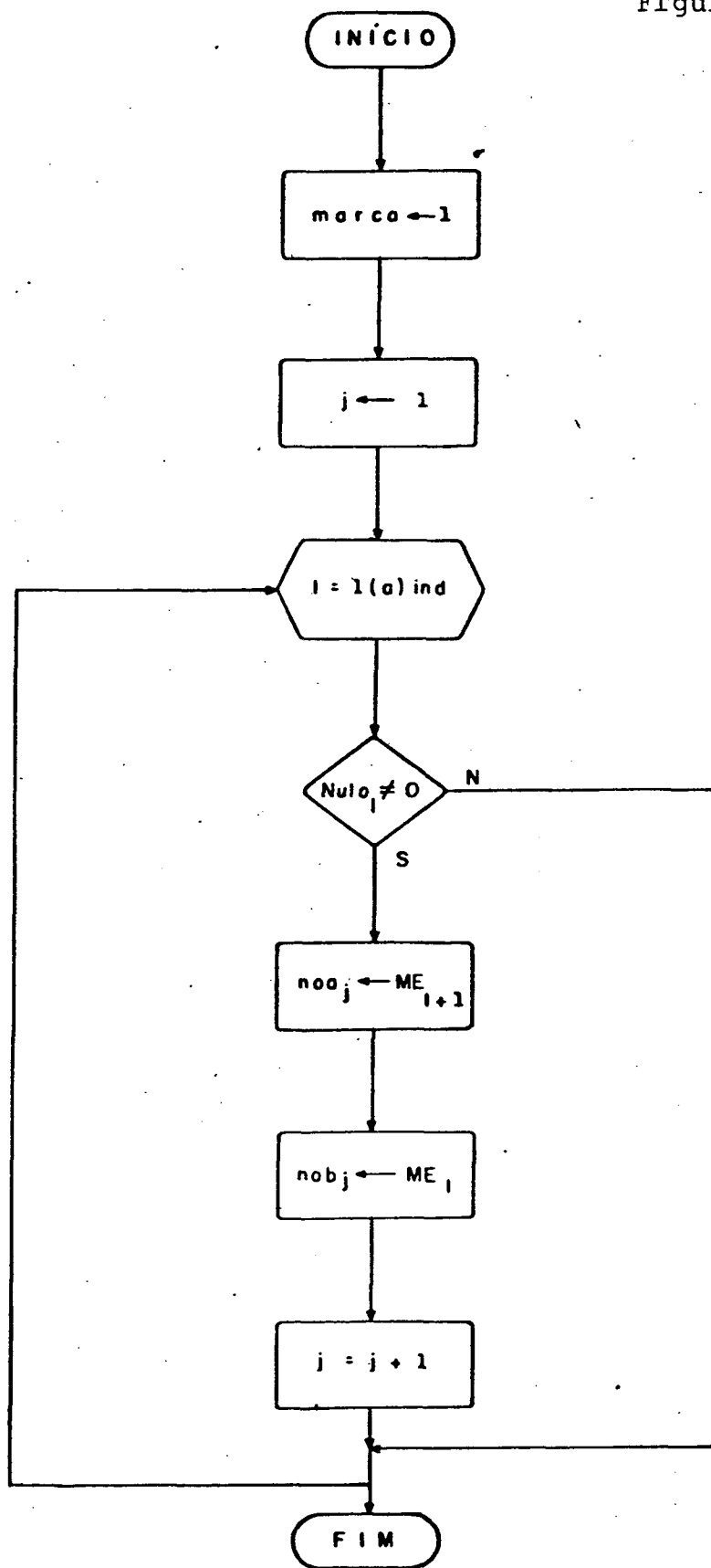


Figura 16. (cont.)



ROTINA ZERA

Figura 16. (cont.)

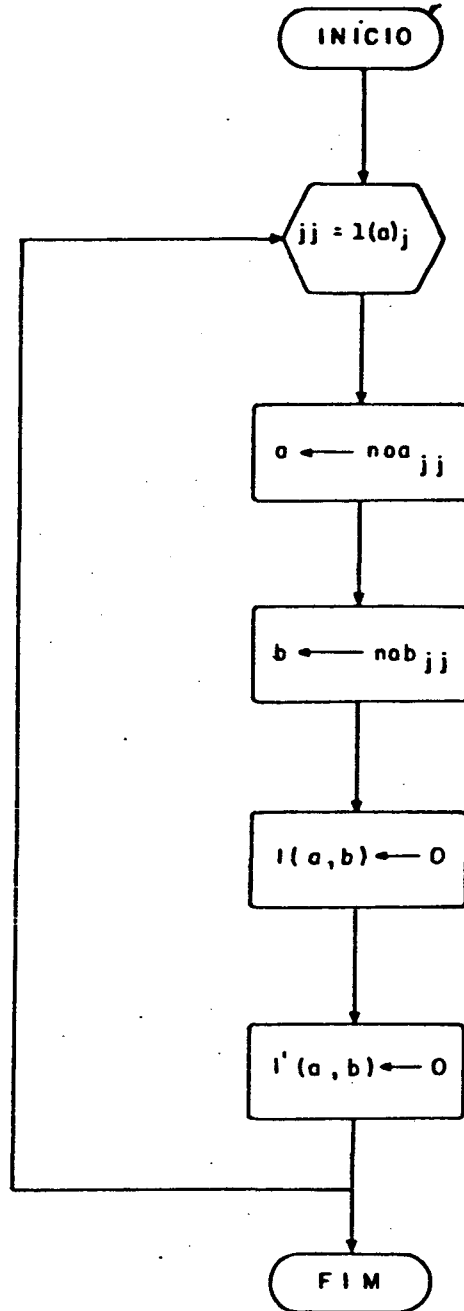


Figura 16. (cont.)

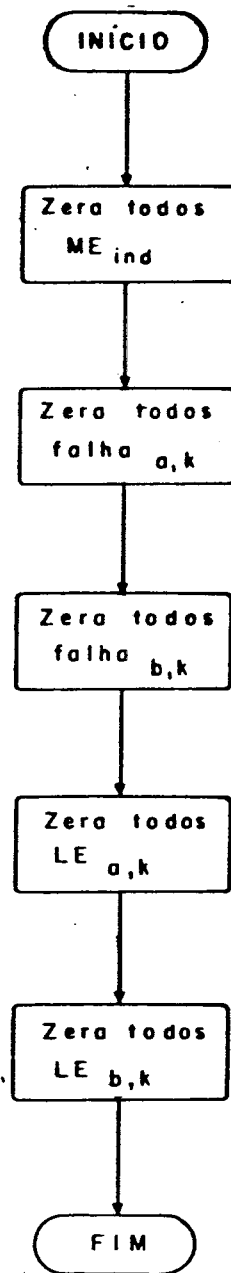
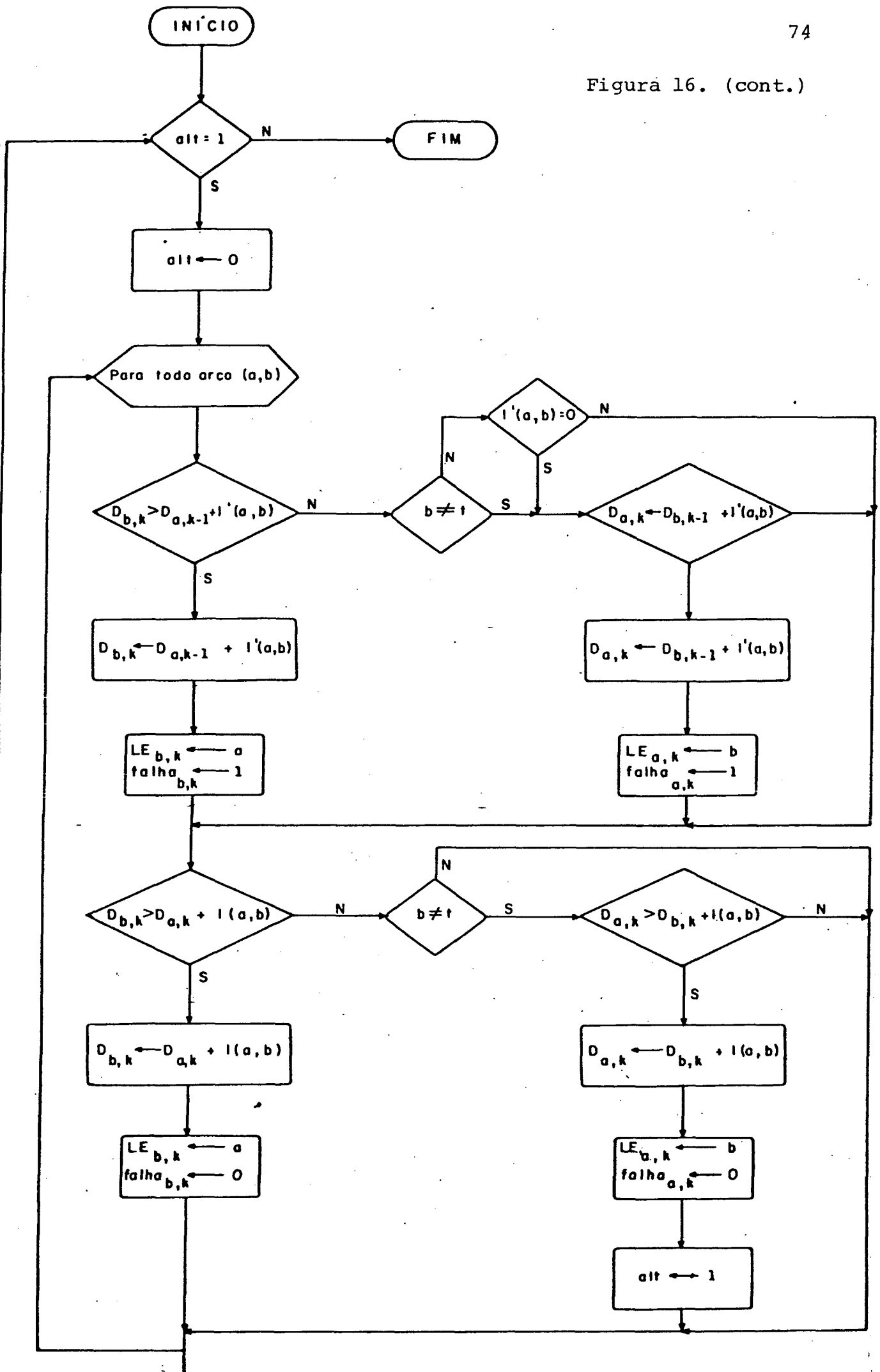


Figura 16. (cont.)



CAPÍTULO VIII

8. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

8.1. EXEMPLO COMPLETO

Seja dada a rede a Figura 17.

Deseja-se determinar qual é o fluxo máximo entre os nós s e t, de tal modo que a redução no fluxo original seja a maior possível, para o caso de ocorrerem:

- a) uma falha total, seguida de três falhas parciais;
- b) três falhas totais, seguidas de uma falha parcial.

. Solução:

Etapa 0 - Obtenção da rede dual (Comum aos itens a e b)

A Figura 18 mostra, a rede dual determinada seguindo-se os passos a_1 , a_2 e a_3 , do procedimento descrito no Capítulo VII. As capacidades dos arcos da rede primal e os comprimentos dos arcos correspondentes na rede dual são os seguintes:

<u>ARCO</u>		<u>VALOR</u>	
<u>Primal</u>	<u>Dual</u>	<u>Sem Falha</u>	<u>c/falha parcial</u>
(s,n)	(1,2)	44	22
(n,o)	(1,3)	21	6
(o,z)	(1,4)	18	5
(z,t)	(1,5)	40	22
(g,n)	(2,3)	21	7
(e,g)	(2,6)	16	7
(s,e)	(2,9)	46	22
(a,o)	(3,4)	19	8
(g,m)	(3,6)	24	15
(m,a)	(3,7)	18	6

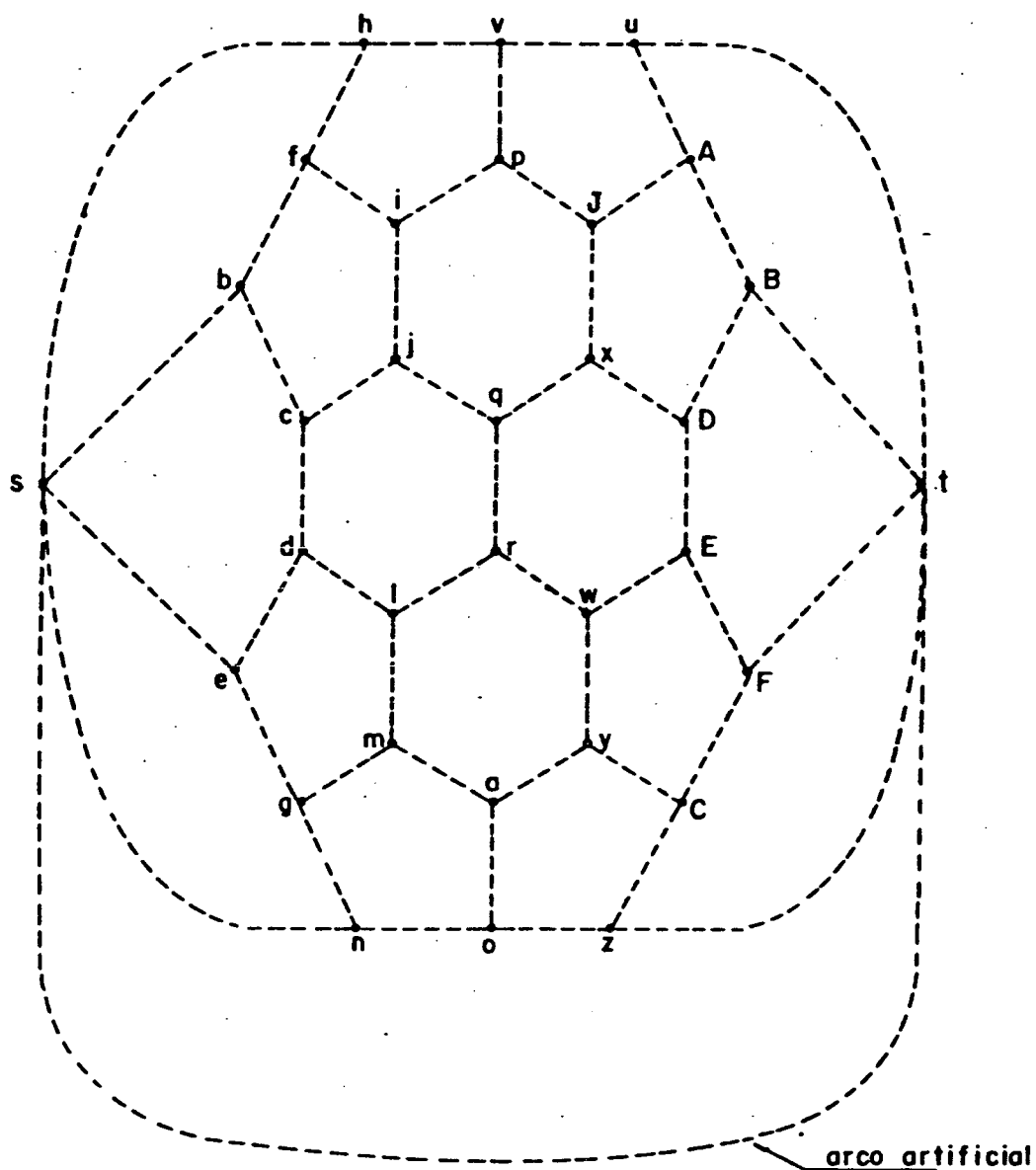


Figura 17. Rede Primal

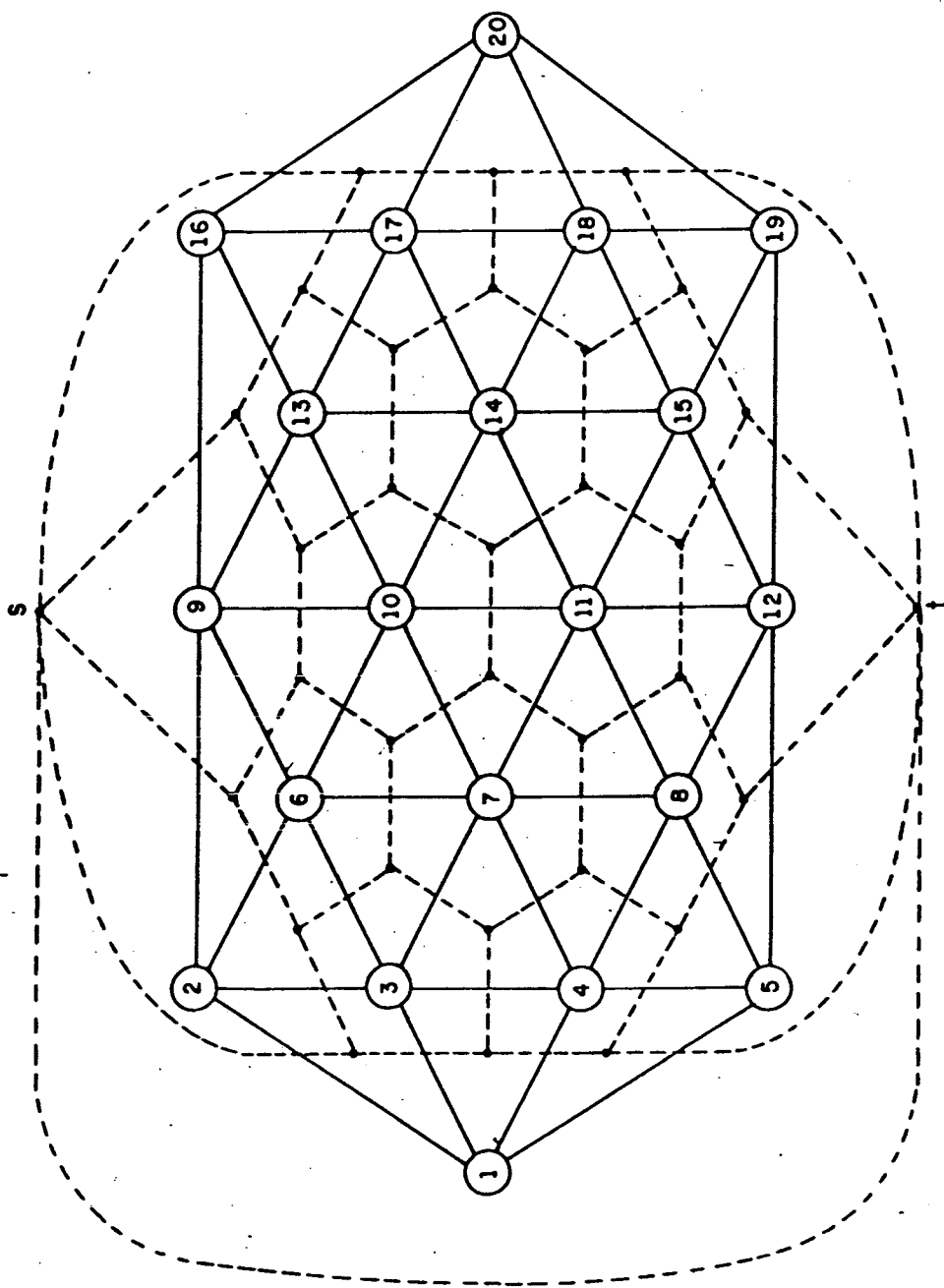


Figura 18. - Rede Primal e Rede Dual

<u>ARCO</u>		<u>VALOR</u>	
<u>Primal</u>	<u>Dual</u>	<u>sem falha</u>	<u>c/falha parcial</u>
(z,c)	(4,5)	18	11
(a,y)	(4,7)	10	8
(y,C)	(4,8)	18	10
(C,F)	(5,8)	12	8
(F,t)	(5,12)	44	30
(l,m)	(6,7)	27	10
(d,e)	(6,9)	14	9
(d,l)	(6,10)	28	10
(w,y)	(7,8)	25	11
(l,r)	(7,10)	20	11
(r,w)	(7,11)	27	8
(w,E)	(8,11)	24	5
(E,F)	(8,12)	15	11
(c,d)	(9,10)	27	8
(b,c)	(9,13)	25	7
(s,b)	(9,16)	32	18
(q,r)	(10,11)	21	5
(c,j)	(10,13)	25	15
(j,q)	(10,14)	21	6
(D,E)	(11,12)	20	8
(q,x)	(11,14)	16	10
(x,D)	(11,15)	25	9
(D,B)	(12,15)	21	9
(B,t)	(12,19)	54	20
(i,j)	(13,14)	12	10
(b,f)	(13,16)	21	12
(f,i)	(13,17)	12	6
(J,x)	(14,15)	25	11
(i,p)	(14,17)	30	9
(p,J)	(14,18)	28	14
(J,A)	(15,18)	23	7
(A,B)	(15,19)	26	14
(f,h)	(16,17)	14	2
(s,h)	(16,20)	36	26

<u>ARCO</u>		<u>VALOR</u>	
<u>Primal</u>	<u>Dual</u>	<u>sem falha</u>	<u>c/falha parcial</u>
(v,p)	(17,18)	14	5
(h,v)	(17,20)	11	10
(u,A)	(18,19)	15	11
(v,u)	(18,20)	24	10
(u,t)	(19,20)	36	22

Caso a - Uma falha total e três falhas parciais

Etapas 1, 2 e 3

Fornecendo-se o número de falhas totais e parciais desejadas, o número de nós da rede dual, o número total de arcos e os comprimentos dos arcos da rede dual, obtem-se a seguinte saída do programa:

O NUMERO DE NÓS DA REDE = 20
 O NUMERO DE ARÇOS A SEREM REMOVIDOS = 1
 O NUMERO DE FALHAS PARCIAIS = 3
 O NUMERO DE ARÇOS DA REDE= 49

ARCO=	1	2	VALOR	44.00	FALHA	22.00
ARCO=	1	3	VALOR	21.00	FALHA	6.00
ARCO=	1	4	VALOR	18.00	FALHA	5.00
ARCO=	1	5	VALOR	40.00	FALHA	22.00
ARCO=	2	3	VALOR	21.00	FALHA	7.00
ARCO=	2	6	VALOR	16.00	FALHA	7.00
ARCO=	2	9	VALOR	46.00	FALHA	22.00
ARCO=	3	4	VALOR	19.00	FALHA	8.00
ARCO=	3	6	VALOR	24.00	FALHA	15.00
ARCO=	3	7	VALOR	18.00	FALHA	6.00
ARCO=	4	5	VALOR	18.00	FALHA	11.00
ARCO=	4	7	VALOR	10.00	FALHA	8.00
ARCO=	4	8	VALOR	18.00	FALHA	10.00
ARCO=	5	8	VALOR	12.00	FALHA	8.00
ARCO=	5	12	VALOR	44.00	FALHA	30.00
ARCO=	6	7	VALOR	27.00	FALHA	10.00
ARCO=	6	9	VALOR	14.00	FALHA	9.00
ARCO=	6	10	VALOR	28.00	FALHA	10.00
ARCO=	7	8	VALOR	25.00	FALHA	11.00
ARCO=	7	10	VALOR	20.00	FALHA	11.00
ARCO=	7	11	VALOR	27.00	FALHA	8.00
ARCO=	8	11	VALOR	24.00	FALHA	5.00
ARCO=	8	12	VALOR	15.00	FALHA	11.00
ARCO=	9	10	VALOR	27.00	FALHA	8.00
ARCO=	9	13	VALOR	25.00	FALHA	7.00
ARCO=	9	16	VALOR	32.00	FALHA	13.00
ARCO=	10	11	VALOR	21.00	FALHA	5.00
ARCO=	10	13	VALOR	25.00	FALHA	15.00
ARCO=	10	14	VALOR	21.00	FALHA	6.00
ARCO=	11	12	VALOR	20.00	FALHA	8.00
ARCO=	11	14	VALOR	16.00	FALHA	10.00
ARCO=	11	15	VALOR	25.00	FALHA	9.00
ARCO=	12	15	VALOR	21.00	FALHA	9.00
ARCO=	12	19	VALOR	54.00	FALHA	20.00
ARCO=	13	14	VALOR	12.00	FALHA	10.00
ARCO=	13	16	VALOR	21.00	FALHA	12.00
ARCO=	13	17	VALOR	12.00	FALHA	6.00
ARCO=	14	15	VALOR	25.00	FALHA	11.00
ARCO=	14	17	VALOR	30.00	FALHA	9.00
ARCO=	14	18	VALOR	28.00	FALHA	14.00
ARCO=	15	18	VALOR	23.00	FALHA	7.00

ARCU=	15	19	VALOR	26.00	FALHA	14.00
ARCU=	16	17	VALOR	14.00	FALHA	2.00
ARCU=	16	20	VALOR	36.00	FALHA	26.00
ARCU=	17	18	VALOR	14.00	FALHA	5.00
ARCU=	17	20	VALOR	11.00	FALHA	10.00
ARCU=	18	19	VALOR	15.00	FALHA	11.00
ARCU=	18	20	VALOR	24.00	FALHA	10.00
ARCU=	19	20	VALOR	36.00	FALHA	22.00

FALHAS TOTAIS

MUDANÇAS NOS RUTULOS

D(2, 0) = 44.00
 D(3, 0) = 21.00
 D(4, 0) = 13.00
 D(5, 0) = 40.00
 D(2, 0) = 42.00

D(6, 0) = 58.00
 D(9, 0) = 38.00
 D(6, 0) = 45.00
 D(7, 0) = 39.00
 D(5, 0) = 36.00

D(7, 0) = 28.00
 D(8, 0) = 36.00
 D(12, 0) = 80.00
 D(9, 0) = 59.00
 D(10, 0) = 73.00

D(10, 0) = 48.00
 D(11, 0) = 55.00
 D(12, 0) = 51.00
 D(13, 0) = 84.00
 D(16, 0) = 91.00

D(13, 0) = 73.00
 D(14, 0) = 69.00
 D(15, 0) = 80.00
 D(15, 0) = 72.00
 D(19, 0) = 105.00

D(17, 0) = 85.00
 D(18, 0) = 97.00
 D(18, 0) = 95.00
 D(19, 0) = 98.00
 D(20, 0) = 127.00

D(20, 0) = 96.00

A DISTANCIA S-T E D(20,0) = 96.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NOS

20 17 13 10 7 4 1

D(2, 1) = 0.0
 D(3, 1) = 0.0
 D(4, 1) = 0.0
 D(5, 1) = 0.0
 D(6, 1) = 42.00

 D(6, 1) = 16.00
 D(9, 1) = 42.00
 D(7, 1) = 21.00
 D(7, 1) = 13.00
 D(7, 1) = 10.00

 D(8, 1) = 16.00
 D(8, 1) = 12.00
 D(12, 1) = 30.00
 D(9, 1) = 30.00
 D(10, 1) = 45.00

 D(10, 1) = 44.00
 D(10, 1) = 28.00
 D(11, 1) = 28.00
 D(12, 1) = 27.00
 D(13, 1) = 59.00

 D(15, 1) = 55.00
 D(16, 1) = 59.00
 D(13, 1) = 48.00
 D(14, 1) = 48.00
 D(14, 1) = 44.00

 D(15, 1) = 55.00
 D(15, 1) = 53.00
 D(15, 1) = 51.00
 D(15, 1) = 48.00
 D(19, 1) = 51.00

 D(17, 1) = 73.00
 D(17, 1) = 60.00
 D(18, 1) = 69.00
 D(20, 1) = 91.00
 D(20, 1) = 85.00

 D(20, 1) = 71.00
 D(18, 1) = 66.00

A DISTANCIA S-T E D(20,11)= 71.00

C CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NDS

20 17 13 10 7 4 1

UM ARCO QUE FALHOU FOI 10 13

O VALOR ERA 25.00000

O NOVO VALOR E ZERO

COM 1 ARCOS FALHANDO O COMPRIMENTO E 71.00

ROTINA ZERA

A 10 B 13 DL 0.0

A 10 B 13 DLINHA 0.0

FALHAS PARCIAIS

D(2, 0)= 44.00

D(3, 0)= 21.00

D(4, 0)= 18.00

D(5, 0)= 40.00

D(2, 0)= 42.00

D(6, 0)= 53.00

D(9, 0)= 38.00

D(6, 0)= 45.00

D(7, 0)= 39.00

D(5, 0)= 36.00

D(7, 0)= 28.00

D(8, 0)= 30.00

D(12, 0)= 30.00

D(9, 0)= 59.00

D(10, 0)= 73.00

D(10, 0)= 48.00

D(11, 0)= 55.00

D(12, 0)= 51.00

D(13, 0)= 64.00

D(16, 0)= 91.00

$D(13, 0) = 48.00$
 $D(14, 0) = 69.00$
 $D(15, 0) = 80.00$
 $D(15, 0) = 72.00$
 $D(19, 0) = 105.00$

$D(14, 0) = 60.00$
 $D(16, 0) = 69.00$
 $D(17, 0) = 60.00$
 $D(18, 0) = 88.00$
 $D(19, 0) = 98.00$

$D(20, 0) = 105.00$
 $D(18, 0) = 74.00$
 $D(20, 0) = 71.00$
 $D(19, 0) = 89.00$

A DISTANCIA S-T E $D(20, 0) = 71.00$

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NUS

20 17 15 10 7 4 1

$D(2, 1) = 22.00$
 $D(3, 1) = 6.00$
 $D(4, 1) = 5.00$
 $D(5, 1) = 22.00$
 $D(6, 1) = 38.00$

$D(6, 1) = 36.00$
 $D(5, 1) = 30.00$
 $D(7, 1) = 27.00$
 $D(7, 1) = 24.00$
 $D(7, 1) = 15.00$

$D(8, 1) = 28.00$
 $D(3, 1) = 23.00$
 $D(9, 1) = 54.00$
 $D(9, 1) = 44.00$
 $D(10, 1) = 39.00$

$D(10, 1) = 35.00$
 $D(11, 1) = 35.00$
 $D(12, 1) = 47.00$
 $D(12, 1) = 38.00$
 $D(13, 1) = 35.00$

$D(14, 1) = 54.00$

D(14, 1) = 52.00
 D(15, 1) = 64.00
 D(15, 1) = 61.00
 D(15, 1) = 60.00

D(15, 1) = 59.00
 D(19, 1) = 71.00
 D(14, 1) = 47.00
 D(16, 1) = 60.00
 D(16, 1) = 50.00

D(17, 1) = 54.00
 D(17, 1) = 47.00
 D(18, 1) = 65.00
 D(18, 1) = 61.00
 D(20, 1) = 70.00

D(20, 1) = 58.00

A DISTANCIA S-T E D(20,1) = 58.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NOS

20 17 13 10 7 4 1

UM ARCO QUE FALHOU FOI 1 4

O VALOR ERA 13.00000

O NOVO VALOR E 5.00000

D(2, 2) = 13.00
 D(6, 2) = 29.00
 D(6, 2) = 21.00
 D(7, 2) = 12.00
 D(5, 2) = 16.00

D(8, 2) = 15.00
 D(9, 2) = 39.00
 D(9, 2) = 35.00
 D(10, 2) = 20.00
 D(11, 2) = 25.00

D(12, 2) = 34.00
 D(12, 2) = 30.00
 D(13, 2) = 20.00
 D(14, 2) = 41.00
 D(14, 2) = 39.00

D(15, 2) = 45.00
 D(19, 2) = 58.00

D(14, 2)= 38.00
 D(16, 2)= 47.00
 D(17, 2)= 41.00

D(17, 2)= 38.00
 D(18, 2)= 52.00
 D(20, 2)= 57.00
 D(20, 2)= 49.00

A DISTANCIA S-T E D(20,2)= 49.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NOS

20 17 13 10 7 4 1

UM ARCO QUE FALHOU FOI 7 10

O VALOR ERA 20.00000

O NOVO VALOR E 11.00000

UM ARCO QUE FALHOU FOI 1 4

O VALOR ERA 18.00000

O NOVO VALOR E 5.00000

D(6, 3)= 20.00
 D(9, 3)= 30.00
 D(10, 3)= 23.00
 D(11, 3)= 20.00
 D(12, 3)= 26.00
 D(13, 3)= 23.00

D(14, 3)= 32.00
 D(15, 3)= 32.00
 D(19, 3)= 50.00
 D(16, 3)= 38.00
 D(17, 3)= 32.00

D(18, 3)= 43.00
 D(20, 3)= 48.00
 D(20, 3)= 43.00

A DISTANCIA S-T E D(20,3)= 43.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NOS

20 17 13 10 7 4 1

UM ARCO QUE FALHOU FOI 13 17

O VALOR ERA 12.00000

O NOVO VALOR É 6.00000

UM ARCO QUE FALHOU FOI 7 10

O VALOR ERA 20.00000

O NOVO VALOR É 11.00000

UM ARCO QUE FALHOU FOI 1 4

O VALOR ERA 18.00000

O NOVO VALOR É 5.00000

COM 3 ARCOS FALHANDO O COMPRIMENTO É 43.00

Resumindo:

- Arco que sofreu falha total: (10,13)
- Arcos que sofreram falhas parciais: (1,4)
(7,10)
(13,17)
- Caminho mínimo na rede dual: Valor = 43
Arcos (1,4), (4,7), (7,10), (10,13), (13,17) e
(17,20)

Etapa 4 - Volta à rede primal

Os arcos que falham na rede primal são aqueles interceptados pelos arcos que falharam na rede dual, ou seja:

- Arco que sofreu falha total: (c,j)
- Arcos que sofreram falhas parciais: (o,z)
(l,r)
(f,i)
- Fluxo máximo entre s e t no primal: Valor=43
Corte mínimo: (o,z), (a,y), (l,r), (c,j), (f,i)
e (h,v).

Caso b - Três falhas totais e uma falha parcial

Etapas 1, 2 e 3

O resultado obtido pelo programa foi o seguinte:

O NÚMERO DE NÓS DA REDE = 20
 O NÚMERO DE ARCOS A SEREM REMOVIDOS = 3
 O NÚMERO DE FALHAS PARCIAIS = 1
 O NÚMERO DE ARCOS DA REDE = 49

ARCO=	1	2	VALOR	44.00	FALHA	22.00
ARCO=	1	3	VALOR	21.00	FALHA	6.00
ARCO=	1	4	VALOR	19.00	FALHA	5.00
ARCO=	1	5	VALOR	40.00	FALHA	22.00
ARCO=	2	3	VALOR	21.00	FALHA	7.00
ARCO=	2	6	VALOR	16.00	FALHA	7.00
ARCO=	2	9	VALOR	46.00	FALHA	22.00
ARCO=	3	4	VALOR	19.00	FALHA	8.00
ARCO=	3	6	VALOR	24.00	FALHA	15.00
ARCO=	3	7	VALOR	18.00	FALHA	6.00
ARCO=	4	5	VALOR	18.00	FALHA	11.00
ARCO=	4	7	VALOR	10.00	FALHA	8.00
ARCO=	4	8	VALOR	18.00	FALHA	10.00
ARCO=	5	6	VALOR	12.00	FALHA	8.00
ARCO=	5	12	VALOR	44.00	FALHA	30.00
ARCO=	6	7	VALOR	27.00	FALHA	10.00
ARCO=	6	9	VALOR	14.00	FALHA	9.00
ARCO=	6	10	VALOR	28.00	FALHA	10.00
ARCO=	7	8	VALOR	25.00	FALHA	11.00
ARCO=	7	10	VALOR	20.00	FALHA	11.00
ARCO=	7	11	VALOR	27.00	FALHA	8.00
ARCO=	8	11	VALOR	24.00	FALHA	5.00
ARCO=	8	12	VALOR	15.00	FALHA	11.00
ARCO=	9	10	VALOR	27.00	FALHA	8.00
ARCO=	9	13	VALOR	25.00	FALHA	7.00
ARCO=	9	16	VALOR	32.00	FALHA	18.00
ARCO=	10	11	VALOR	21.00	FALHA	5.00
ARCO=	10	13	VALOR	25.00	FALHA	15.00
ARCO=	10	14	VALOR	21.00	FALHA	6.00
ARCO=	11	12	VALOR	20.00	FALHA	8.00
ARCO=	11	14	VALOR	16.00	FALHA	10.00
ARCO=	11	15	VALOR	25.00	FALHA	9.00
ARCO=	12	15	VALOR	21.00	FALHA	9.00
ARCO=	12	19	VALOR	54.00	FALHA	20.00
ARCO=	13	14	VALOR	12.00	FALHA	10.00
ARCO=	13	16	VALOR	21.00	FALHA	12.00
ARCO=	13	17	VALOR	12.00	FALHA	6.00
ARCO=	14	15	VALOR	25.00	FALHA	11.00
ARCO=	14	17	VALOR	30.00	FALHA	9.00
ARCO=	14	18	VALOR	23.00	FALHA	14.00
ARCO=	15	18	VALOR	23.00	FALHA	7.00
ARCO=	15	19	VALOR	26.00	FALHA	14.00

ARCO=	10	17	VALOR	14.00	FALHA	2.00
ARCO=	16	20	VALJR	26.00	FALHA	26.00
ARCO=	17	18	VALUR	14.00	FALHA	5.00
ARCO=	17	20	VALUR	11.00	FALHA	10.00
ARCO=	18	19	VALUR	15.00	FALHA	11.00
ARCO=	16	20	VALUR	24.00	FALHA	10.00
ARCO=	19	20	VALJR	26.00	FALHA	22.00

FALHAS TOTAIS

MUDANÇAS NOS RETÚLOS

D(2, 0)=	44.00
D(3, 0)=	21.00
D(4, 0)=	18.00
D(5, 0)=	40.00
D(2, 0)=	42.00
D(6, 0)=	58.00
D(9, 0)=	88.00
D(6, 0)=	45.00
D(7, 0)=	39.00
D(5, 0)=	36.00
D(7, 0)=	25.00
D(8, 0)=	36.00
D(12, 0)=	80.00
D(9, 0)=	59.00
D(10, 0)=	73.00
D(10, 0)=	46.00
D(11, 0)=	55.00
D(12, 0)=	51.00
D(15, 0)=	84.00
D(16, 0)=	91.00
D(13, 0)=	73.00
D(14, 0)=	69.00
D(15, 0)=	80.00
D(15, 0)=	72.00
D(19, 0)=	105.00
D(17, 0)=	85.00
D(18, 0)=	97.00
D(18, 0)=	95.00
D(19, 0)=	98.00
D(20, 0)=	127.00
D(20, 0)=	96.00

A DISTANCIA S-T E D(20,0)= 96.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NÓS

20 17 13 10 7 4 1

D(2, 1)= 0.0
 D(3, 1)= 0.0
 D(4, 1)= 0.0
 D(5, 1)= 0.0
 D(6, 1)= 42.00

D(6, 1)= 18.00
 D(9, 1)= 42.00
 D(7, 1)= 21.00
 D(7, 1)= 18.00
 D(7, 1)= 10.00

D(8, 1)= 18.00
 D(8, 1)= 12.00
 D(12, 1)= 30.00
 D(9, 1)= 30.00
 D(10, 1)= 45.00

D(10, 1)= 44.00
 D(10, 1)= 28.00
 D(11, 1)= 28.00
 D(12, 1)= 27.00
 D(13, 1)= 59.00

D(13, 1)= 55.00
 D(16, 1)= 59.00
 D(13, 1)= 43.00
 D(14, 1)= 48.00
 D(14, 1)= 44.00

D(15, 1)= 55.00
 D(15, 1)= 53.00
 D(15, 1)= 51.00
 D(15, 1)= 43.00
 D(19, 1)= 51.00

D(17, 1)= 73.00
 D(17, 1)= 60.00
 D(18, 1)= 69.00
 D(20, 1)= 91.00
 D(20, 1)= 85.00

D(20, 1)= 71.00
 D(18, 1)= 60.00

A DISTANCIA S-T E D(20,1)= 71.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELCS NOS

20 17 13 10 7 4 1

UM ARCO QUE FALHOU FOI 10 13

O VALOR ERA 25.00000

D(6, 2)= 0.0
 D(9, 2)= 0.0
 D(7, 2)= 0.0
 D(8, 2)= 0.0
 D(12, 2)= 0.0

D(10, 2)= 10.00
 D(10, 2)= 10.00
 D(11, 2)= 10.00
 D(13, 2)= 30.00
 D(13, 2)= 25.00

D(16, 2)= 30.00
 D(14, 2)= 25.00
 D(14, 2)= 26.00
 D(15, 2)= 28.00
 D(15, 2)= 27.00

D(15, 2)= 21.00
 D(19, 2)= 27.00
 D(17, 2)= 45.00
 D(17, 2)= 37.00
 D(18, 2)= 44.00

D(20, 2)= 59.00
 D(20, 2)= 43.00
 D(18, 2)= 42.00

A DISTANCIA S-T E D(20,2)= 48.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELCS NOS

20 17 13 9 2 1

UM ARCO QUE FALHOU FOI 2 9

O VALOR ERA 46.00000

UM ARCO QUE FALHOU FOI 1 2

O VALOR ERA 44.00000

- D(10, 3)= 0.0
- D(11, 3)= 0.0
- D(13, 3)= 0.0
- D(16, 3)= 0.0
- D(14, 3)= 10.00

- D(15, 3)= 10.00
- D(15, 3)= 0.0
- D(19, 3)= 0.0
- D(17, 3)= 25.00
- D(17, 3)= 12.00

- D(18, 3)= 26.00
- D(18, 3)= 21.00
- D(20, 3)= 30.00
- D(20, 3)= 23.00
- D(18, 3)= 15.00

A DISTANCIA S-T E D(20,3)= 25.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NOS

20 17 13 9 2 1

UM ARCO QUE FALHOU FOI 9 13

O VALOR ERA 25.00000

UM ARCO QUE FALHOU FOI 2 9

O VALOR ERA 46.00000

UM ARCO QUE FALHOU FOI 1 2

O VALOR ERA 44.00000

COM 3 ARCOS FALHANDO O COMPRIMENTO E 23.00

ROTINA ZERA

A 9 B 13 DL 0.0

A 9 B 13 DLINHA 0.0

A 2 B 9 DL 0.0

A 2 B 9 DLINHA 0.0

A 1 B 2 DL 0.0

A 1 B 2 LINHA C.C

FALHAS PARCIAIS

D(2, 0) = 0.0
 D(3, 0) = 21.00
 D(4, 0) = 18.00
 D(5, 0) = 43.00
 D(6, 0) = 16.00

D(9, 0) = 0.0
 D(7, 0) = 39.00
 D(5, 0) = 38.00
 D(7, 0) = 28.00
 D(8, 0) = 38.00

D(12, 0) = 30.00
 D(6, 0) = 14.00
 D(10, 0) = 42.00
 D(11, 0) = 55.00
 D(12, 0) = 51.00

D(10, 0) = 27.00
 D(13, 0) = 0.0
 D(18, 0) = 32.00
 D(11, 0) = 48.00
 D(10, 0) = 25.00

D(14, 0) = 48.00
 D(15, 0) = 73.00
 D(15, 0) = 72.00
 D(19, 0) = 105.00
 D(14, 0) = 12.00

D(16, 0) = 21.00
 D(17, 0) = 12.00
 D(15, 0) = 37.00
 D(18, 0) = 40.00
 D(19, 0) = 63.00

D(20, 0) = 57.00
 D(18, 0) = 26.00
 D(20, 0) = 23.00
 D(19, 0) = 41.00
 D(11, 0) = 48.00

D(11, 0) = 23.00
 D(12, 0) = 48.00

A DISTANCIA S-T E D(20,0) = 23.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NÓS

20 17 13 9 2 1

D(3, 1) = 6.00
 D(4, 1) = 5.00
 D(5, 1) = 22.00
 D(6, 1) = 7.00
 D(7, 1) = 27.00

D(7, 1) = 24.00
 D(7, 1) = 15.00
 D(8, 1) = 28.00
 D(8, 1) = 23.00
 D(10, 1) = 24.00

D(12, 1) = 47.00
 D(12, 1) = 38.00
 D(10, 1) = 5.00
 D(16, 1) = 13.00
 D(12, 1) = 36.00

D(11, 1) = 22.00
 D(14, 1) = 10.00
 D(16, 1) = 12.00
 D(17, 1) = 6.00
 D(15, 1) = 23.00

D(18, 1) = 17.00
 D(20, 1) = 22.00
 D(20, 1) = 17.00
 D(19, 1) = 37.00
 D(19, 1) = 32.00

A DISTANCIA S-T E D(20,1) = 17.00

O CAMINHO MINIMO PASSA PELOS NÓS

20 17 13 9 2 1

UM ARCO QUE FALHOU FOI 13 17

O VALOR ERA 12.00000

O NOVO VALOR E 6.00000

CCM 1 ARCOS FALHANDO O COMPRIMENTO E 17.00

Resumindo:

- Arcos que sofreram falhas totais: (1,2)
(2,9)
(9,13)
- Arco que sofreu falha parcial: (13,17)
- Caminho mínimo na rede dual; Valor = 17
Arcos (1,2), (2,9), (9,13), (13,17) e (17,20).

Etapa 4 - Volta à rede primal

Os arcos que falham na rede primal são aqueles interceptados pelos arcos que falharam na rede dual, ou seja:

- Arcos que sofreram falhas totais: (s,n)
(s,e)
(b,c)
- Arco que sofreu falha parcial: (f,i)
- Fluxo máximo entre s e t no primal: Valor=17
Corte mínimo: (s,n), (s,e), (b,c), (f,i), (h,v)

8.2. AVALIAÇÃO DO TEMPO COMPUTACIONAL

Para se ter uma idéia do tempo de CPU gasto pelo algoritmo para a execução das *Etapas 1, 2 e 3*, resolveram-se diversas redes supondo-se a ocorrência de duas falhas totais e duas falhas parciais. As redes podem ser vistas nas Figuras 19 a 32. Os resultados obtidos são mostrados no Quadro 2.

Quadro 2 - Tempos computacionais obtidos para 2 falhas totais e 2 falhas parciais

Redes com 20 nós	Arcos	Tempo(s)
	28	1,08
	30	1,16
	43	1,25
Redes com 40 nós	49	1,22
	Arcos	Tempo(s)
	56	1,95
	57	1,85
Redes com 80 nós	99	2,35
	105	2,40
	Arcos	Tempo(s)
	100	3,19
	107	3,34
Redes com 160 nós	215	4,64
	207	4,66
	Arcos	Tempo(s)
	428	8,89
	430	8,61

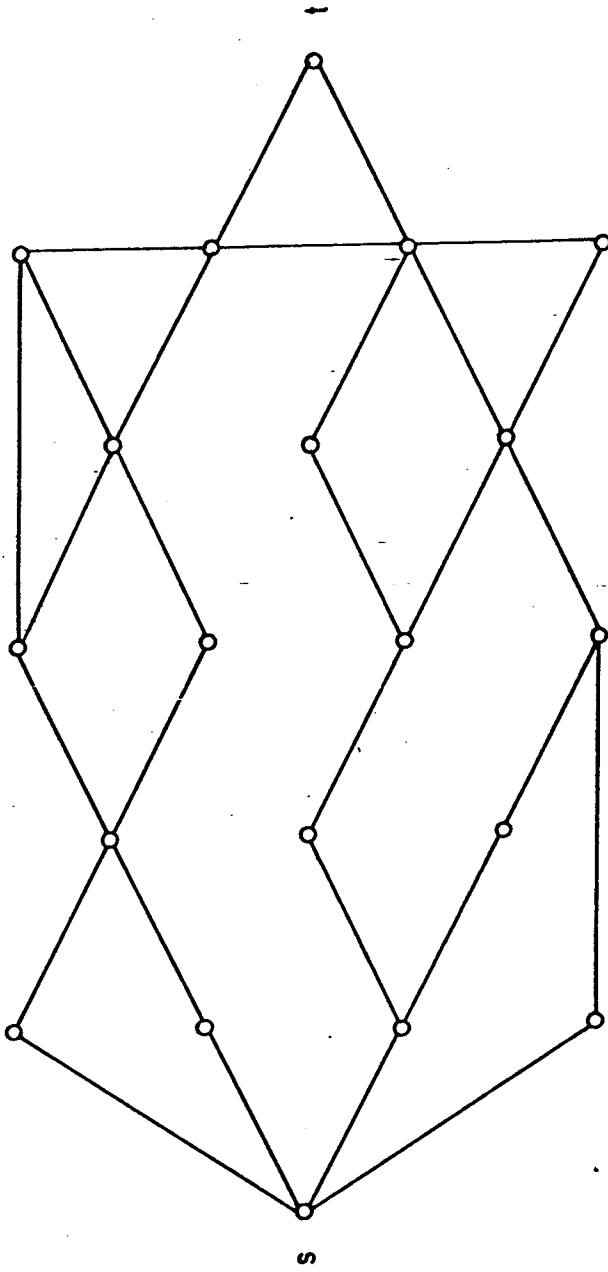


Figura 19. - Rede com 20 nós e 28 arcos

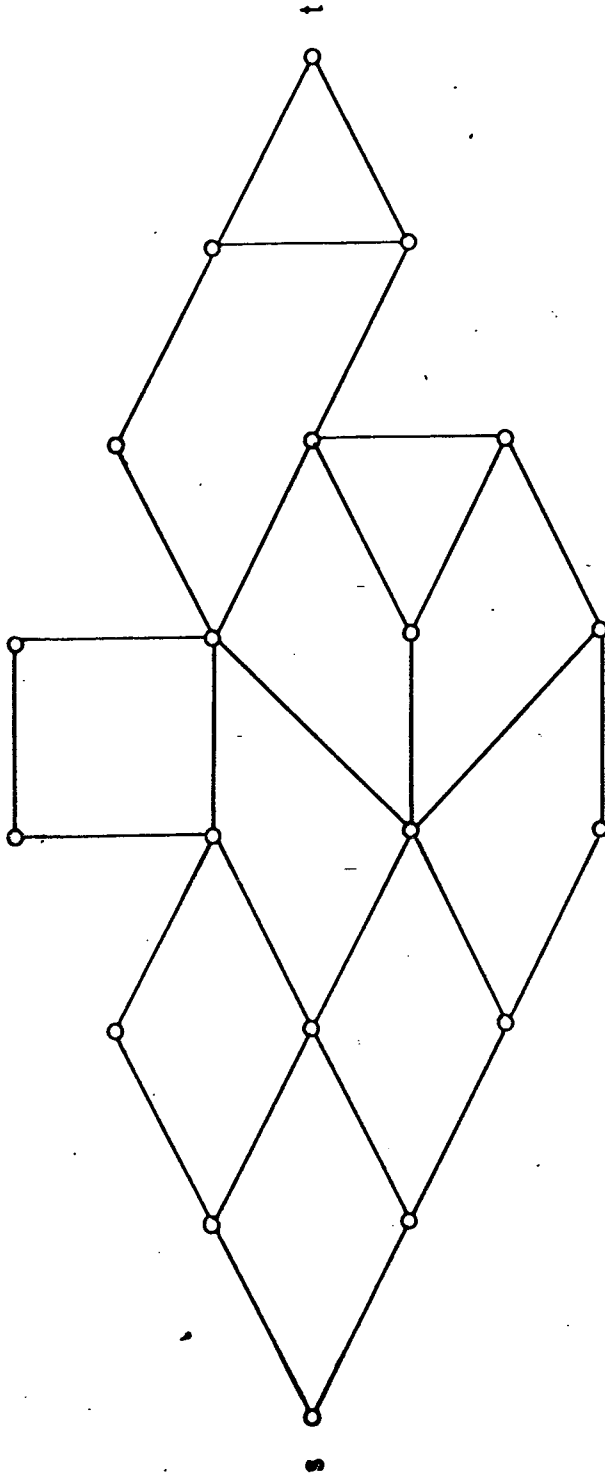


Figura 20. - Rede com 20 nós e 30 arcos

c / 20 nós

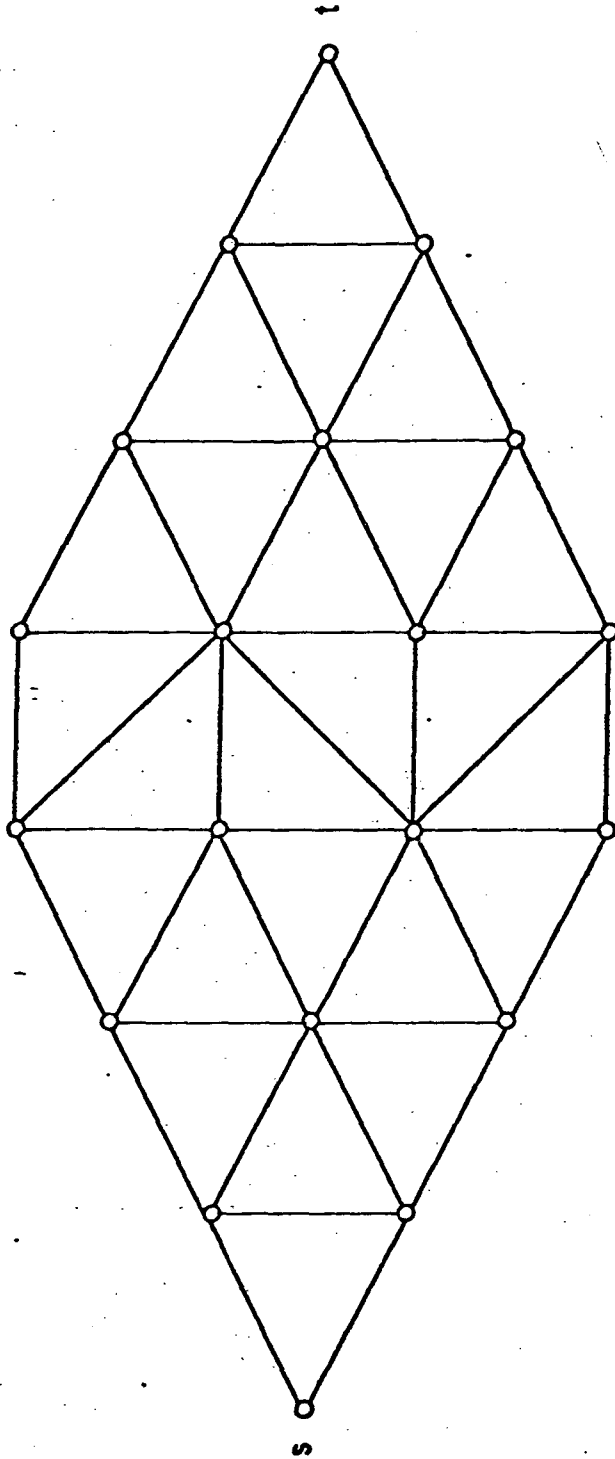


Figura 21. - Rede com 20 nós e 43 arcos

c / 20 nós

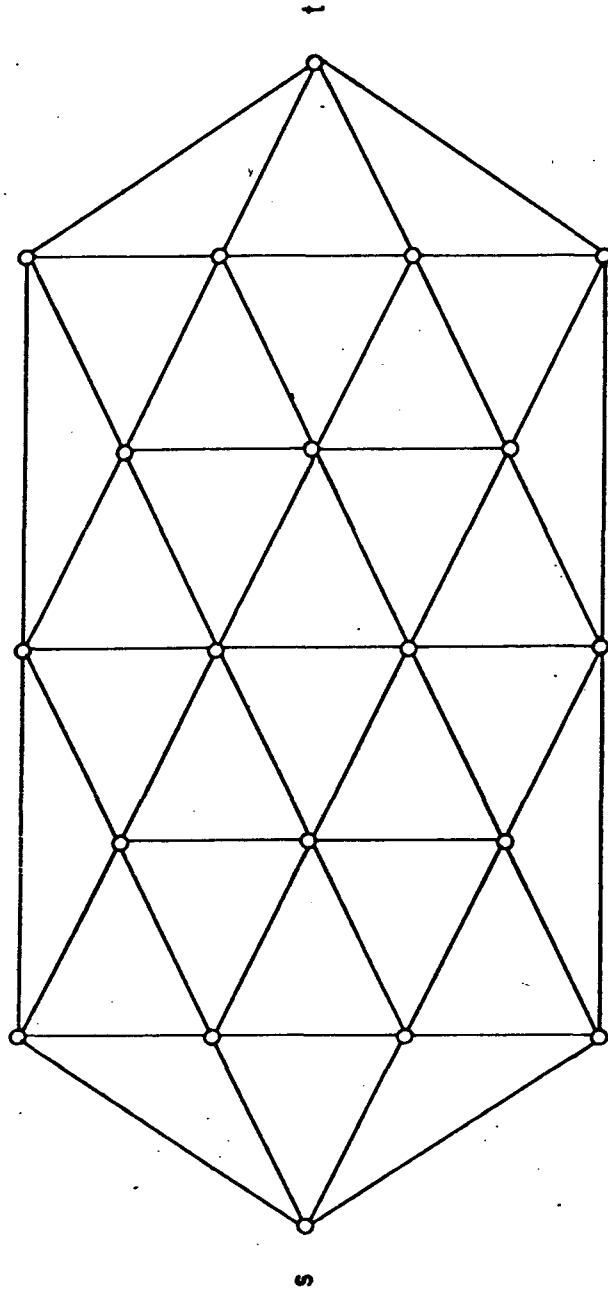


Figura 22. - Rede com 20 nós e 49 arcos

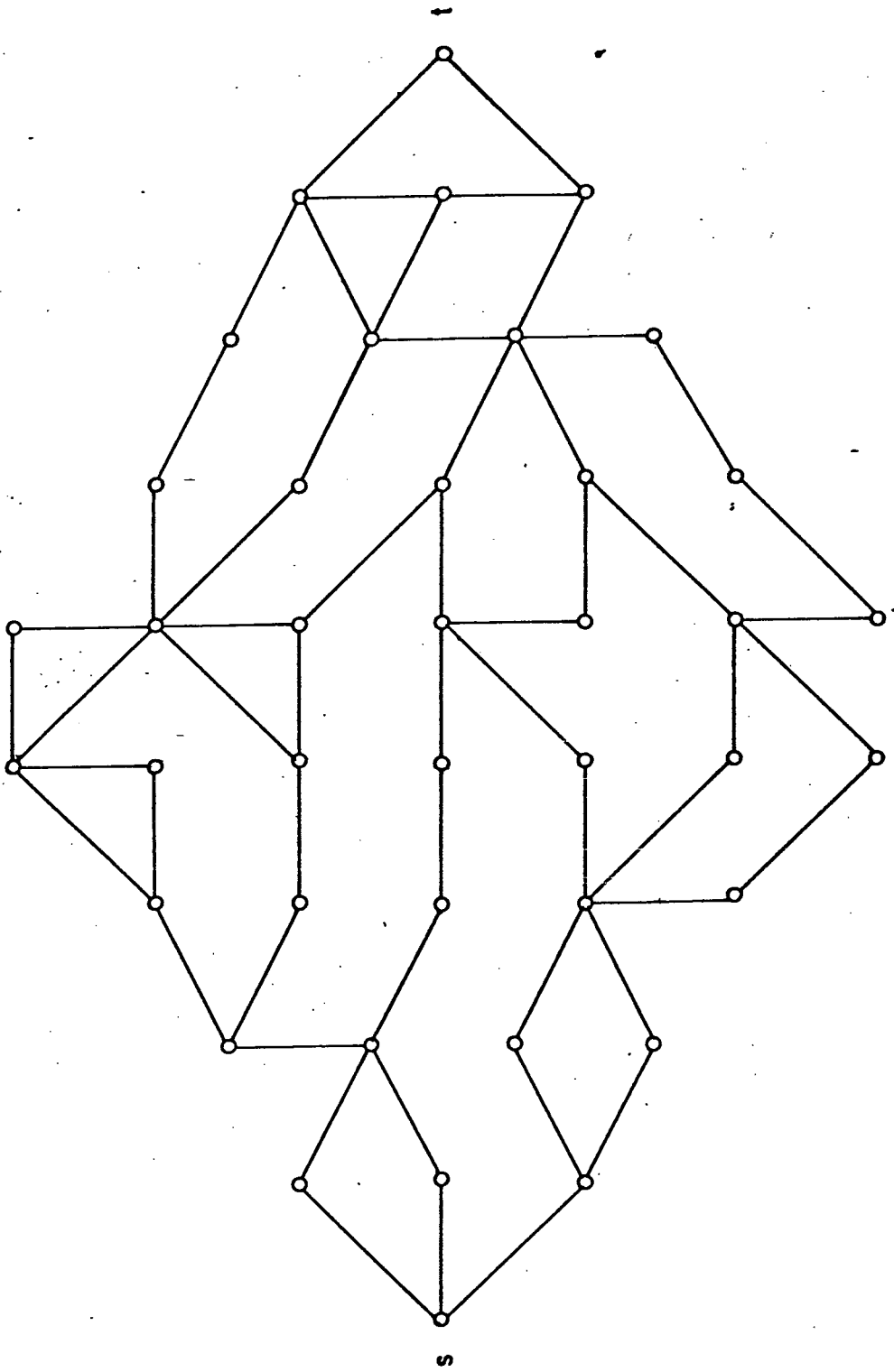


Figura 23. - Rede com 40 nós e 56 arcos

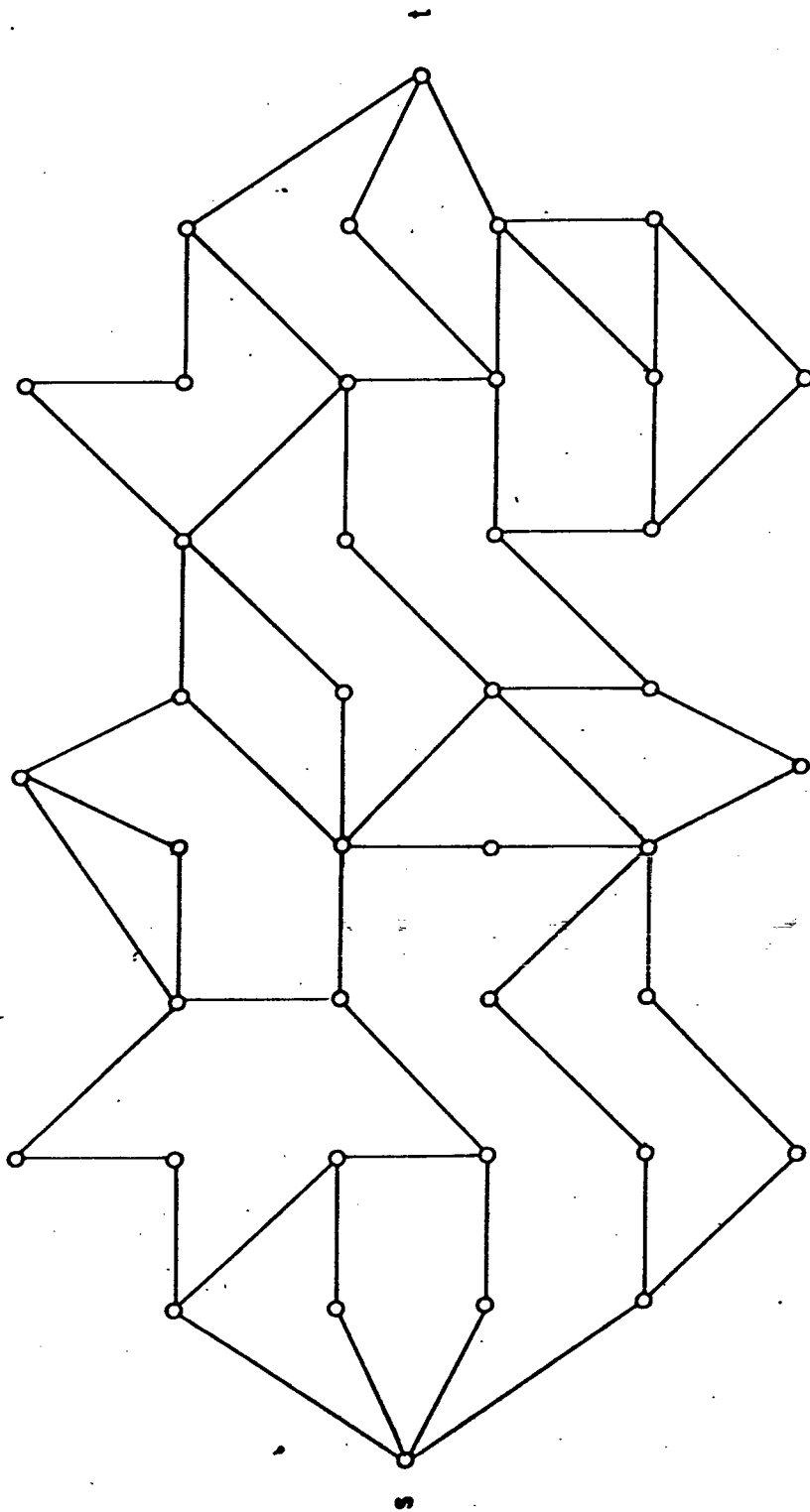


Figura 24. - Rede com 40 nós e 57 arcos

c/40 nós

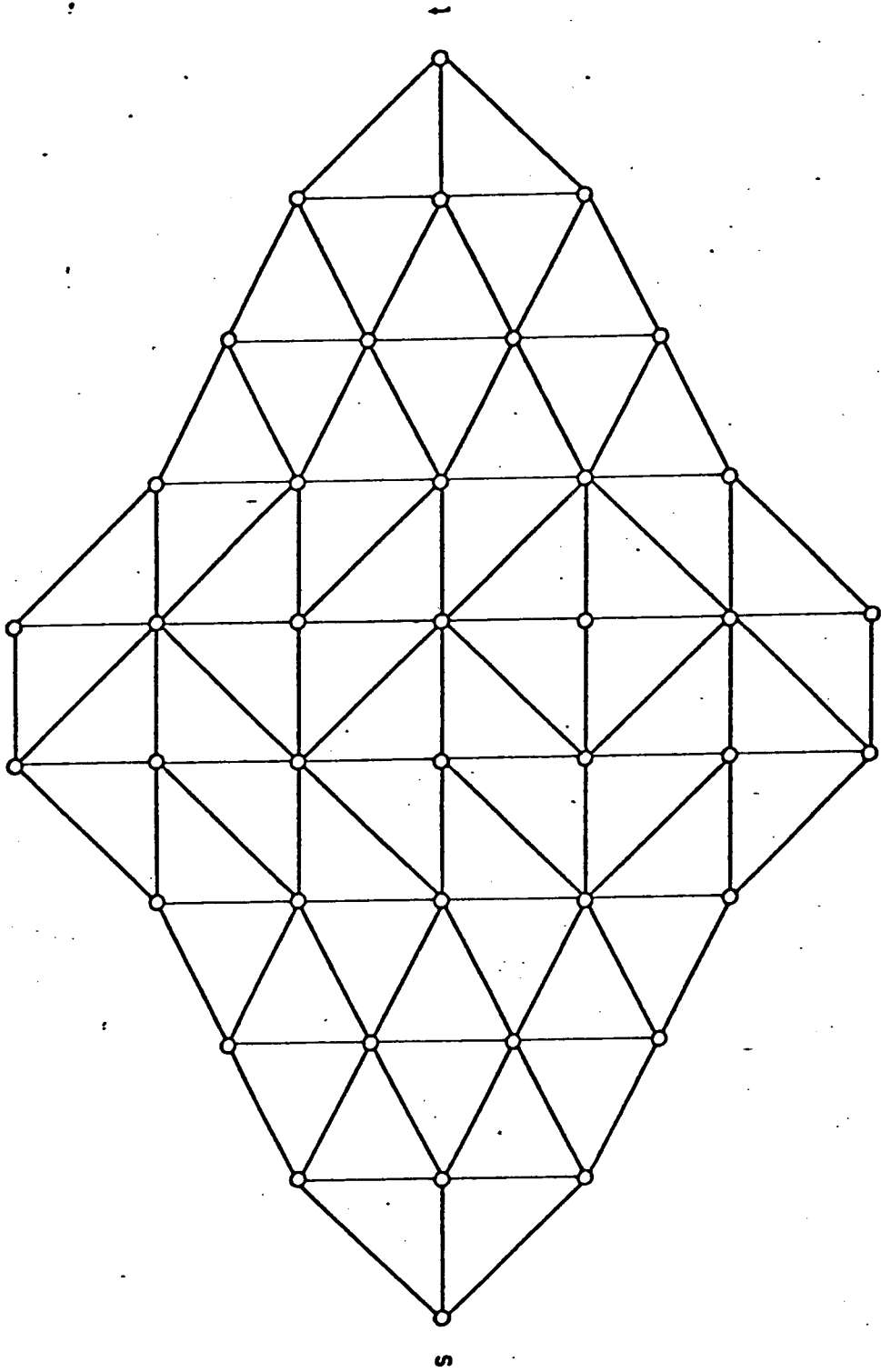


Figura 25. - Rede com 40 nós e 99 arcos

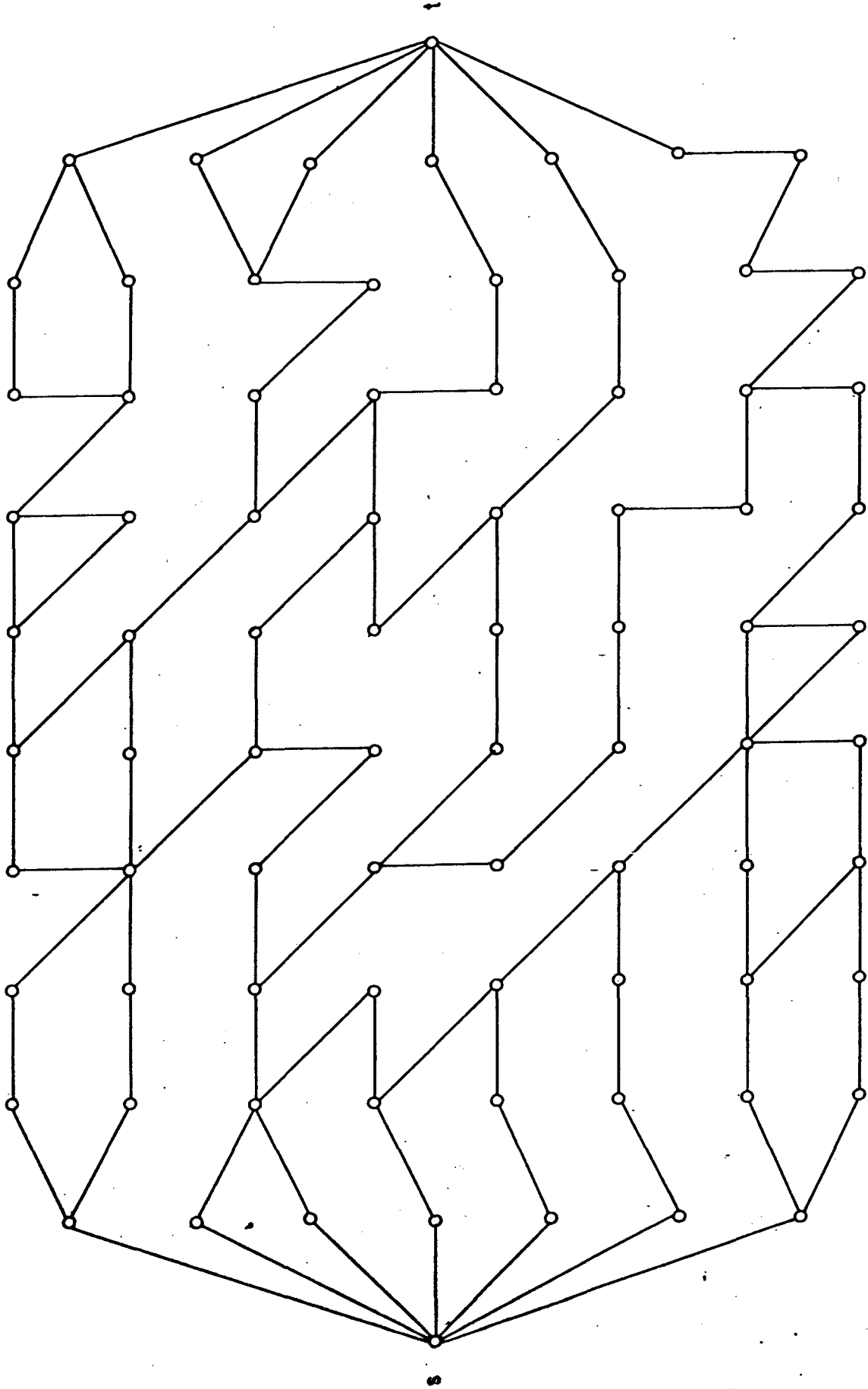


Figura 27. - Rede com 80 nós e 100 arcos

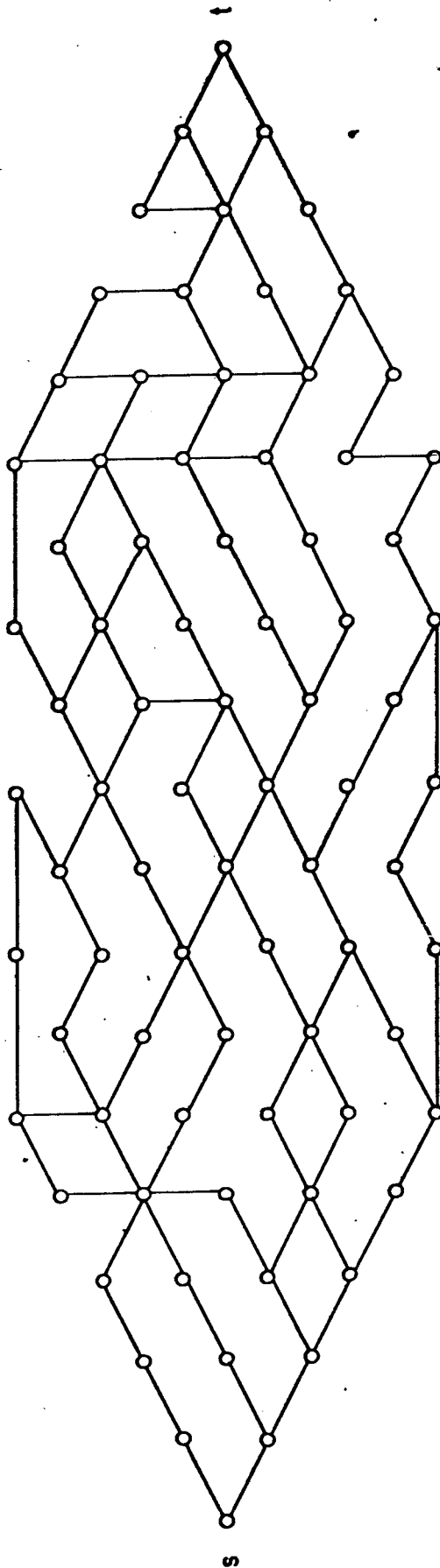


Figura 28. - Rede com 80 nós e 107 arcos

c/80 nós

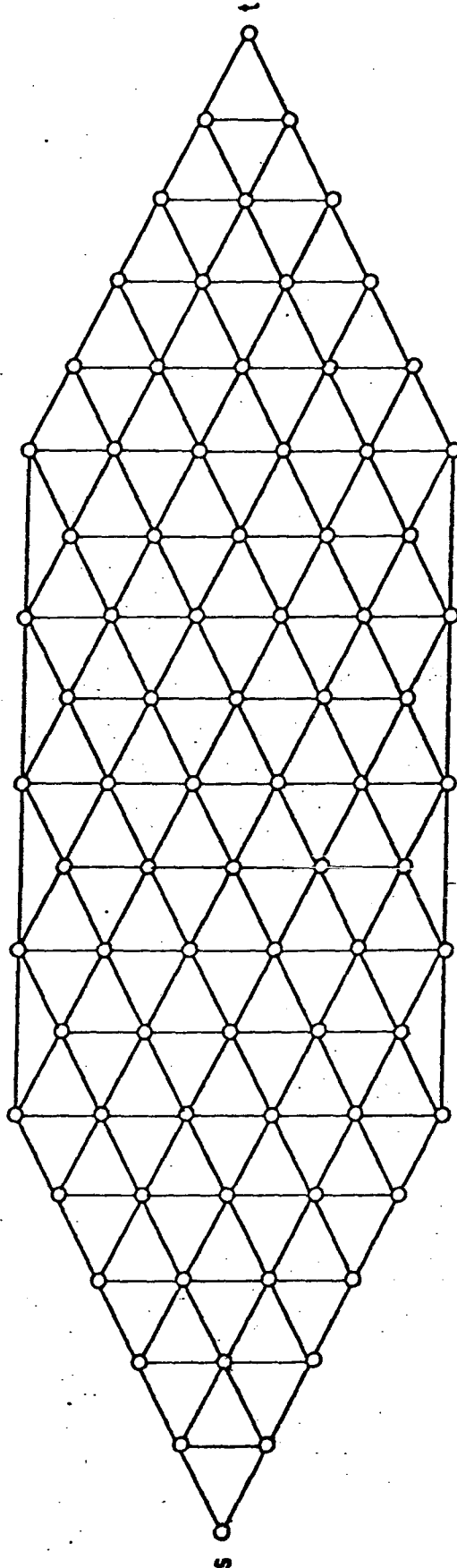


Figura 29. - Rede com 80 nós e 207 arcos

c/ 80 nós

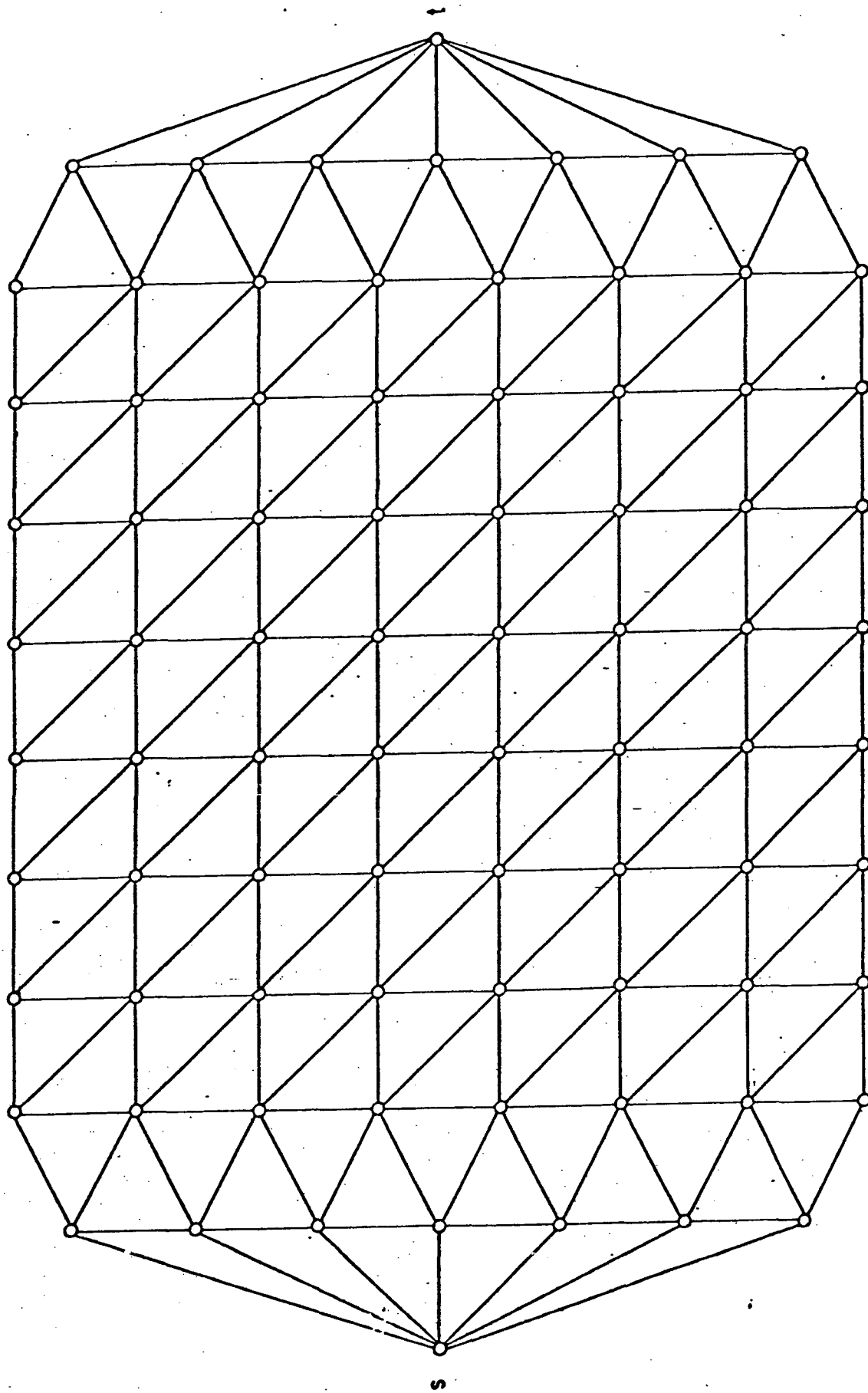


Figura 30. - Rede com 80 nós e 215 arcos

c/160 nós

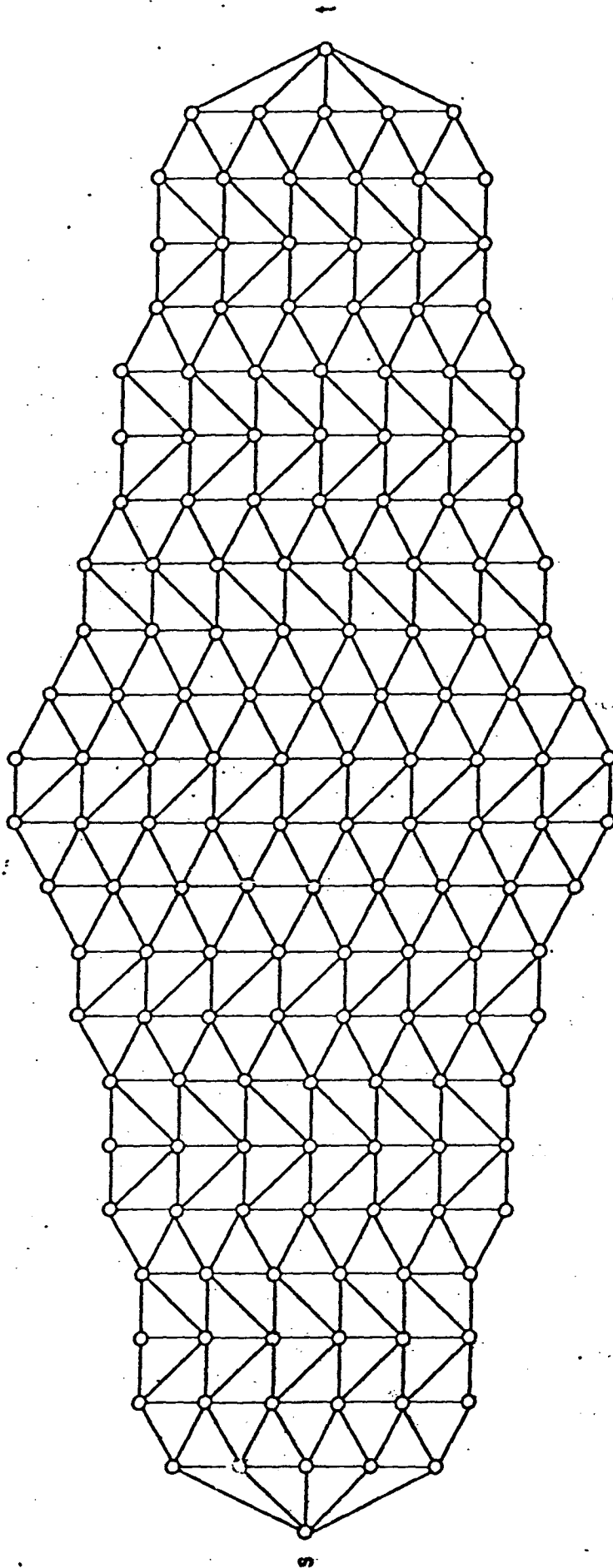


Figura 31. - Rede com 160 nós e 428 arcos

c/160 nós

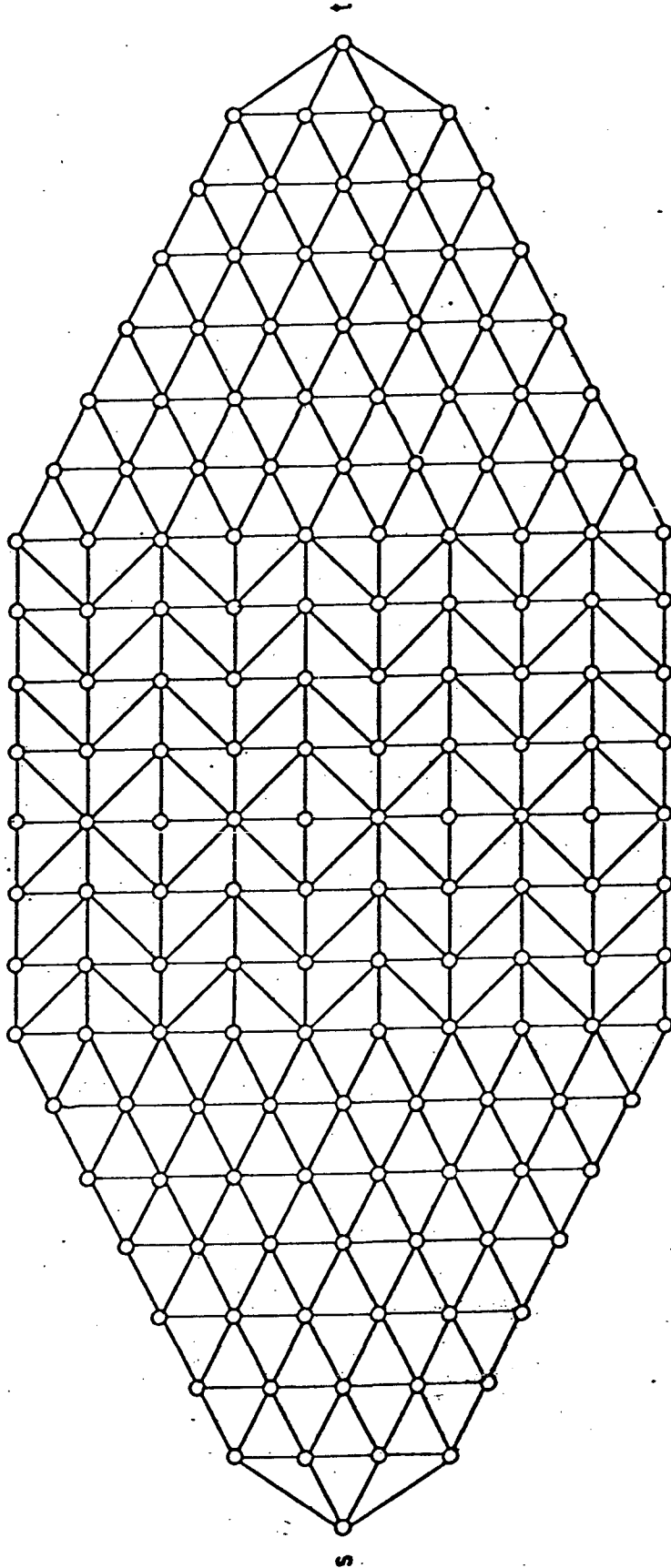


Figura 32. - Rede com 160 nós e 430 arcos.

CAPÍTULO IX

9. LIMITAÇÕES DO PROCEDIMENTO PROPOSTO

O procedimento sugerido no Capítulo VII para a solução do problema de determinação do fluxo máximo entre s e t , diante da ocorrência de m falhas totais e n falhas parciais, apresentou resultados satisfatórios em todas as aplicações realizadas. Entretanto, existem algumas limitações para sua utilização, decorrentes da própria natureza do problema a que se propõe resolver ou mesmo das características dos algoritmos que lhe deram origem. Esses aspectos são apresentados a seguir.

. Orientação dos arcos da rede

O emprego do algoritmo supõe a possibilidade de transporte de fluxo através de um arco tanto em um sentido como no outro, isto é, dado um arco (a,b) , este pode ser percorrido de a para b ou de b para a . É a aplicação do algoritmo que determina qual o sentido que prevalecerá. As capacidades de transporte são as mesmas em ambos os sentidos e os fluxos se dão da fonte para o sumidouro.

. Ausência de enfoque probabilístico

A ocorrência ou não de falha em um arco depende apenas de sua contribuição para a redução do caminho entre fonte e sumidouro na rede dual. Não é feita nenhuma consideração a respeito da probabilidade dessa falha acontecer.

. Precedência das falhas totais relativamente às falhas parciais

O problema proposto prevê a ocorrência primeiramente de todas as m falhas totais, acontecendo posteriormente as n falhas parciais. Qualquer alteração nesta premissa requererá uma verificação da validade do método sugerido.

. *Avaliação da consequência das falhas*

O método desenvolvido não tem condições de avaliar, em caso de empate, os efeitos futuros de falha neste ou naquele arco, sendo a decisão entre os dois determinada normalmente apenas pela ordem de pesquisa dos nós adotada.

. *Todos os arcos estão sujeitos a falhas totais e parciais*

Em algumas análises pode-se desejar que determinados arcos não estejam sujeitos a falhas, o que não está previsto no algoritmo.

. *Possibilidade de um único nível de falha parcial*

Não se admite mais do que uma redução parcial na capacidade de um arco.

CAPÍTULO X

10. SUGESTÕES PARA NOVAS PESQUISAS

Tendo em vista os aspectos levantados neste trabalho, sugere-se como tema para futuras pesquisas a resolução do problema da maximização da redução do fluxo máximo entre fonte e sumidouro, para o caso de m falhas totais e n falhas parciais, supondo-se:

- a) que os arcos da rede já possuam orientação definida;
- b) a ocorrência de mais do que uma falha parcial para determinados arcos;
- c) a existência de arcos que possam apresentar somente falhas totais ou parciais;
- d) a possibilidade de determinados arcos não estarem sujeitos a falhas;
- e) a possibilidade dos arcos representarem funções e não valores fixos.

B I B L I O G R A F I A

1. BOAVENTURA NETO, P. O. Teoria e modelos de grafos. São Paulo, Edgar Blücher, 1979.
2. DOULLIEZ, P. J. & RAO, M. R. Capacity of a network with increasing demands and arcs subject to failure. Operations Research, 19(4): 905-15, jul./aug. 1971.
3. FORD, L. K & FULKERSON, D. R. Flows in networks. Princeton, 1974.
4. HU, T. C. Integer programming and network flows. U.S.A., Addison-Wesley, 1970.
5. WOLLMER, R. Removing arcs from a network . Operations Research, 12:934-40, 1964.
6. ARAÚJO, N. D. Análise de um algoritmo de fluxo em redes com remoção de arcos. Dissertação de Mestrado, UFSC , 1981.
7. PHILLIPS, D. T., RAVINDRAN, A. & SOLBERG, J. "Operations research, principles and practice", U.S.A., John Wiley & Sons. Inc. 1976
8. CHRISTOFIDES, N. Graph theory - an algorithmic approach , Academic Press, 1975.

9. JENSEN, P. A. & BARNES, J. W. Network flow programming, John Wiley & Sons, 1980.

10. DANTZIG, G. B., and D.R. Fulkerson. "On the Min-Cut Max-Flow Theorem of Networks". Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1956).

11. FORD, L. R., and D.R. Fulkerson; "A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and an application to Hitchcock problem". Canadian Journal of Mathematics, 9, 210-218 (1957).

12. FULKERSON, D.R. and DANTZIG, G.B. "Computation of Maximal Flows in Networks", Naval Research Logistics Quarterly, 2, 277-283 (1955).