

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

VIBRAÇÕES EM LINHAS DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM ENGENHARIA

ROBERTO JORDAN

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
FEVEREIRO - 1982

VIBRAÇÕES EM LINHAS-DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

ROBERTO JORDAN

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

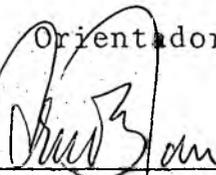
"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



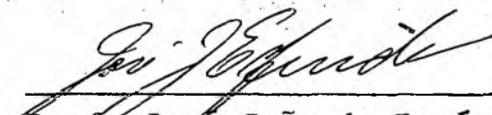
 Prof. José João de Espíndola, Ph.D.

Orientador



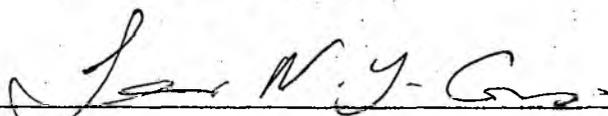
 Prof. Arno Blass, Ph.D.

Coordenador

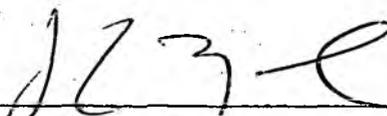


 Prof. José João de Espíndola, Ph.D.

Presidente



 Prof. Samir Nagi Yousri Gerges, Ph.D.



 Prof. Nelson Diógenes do Valle, Dr. Ing.

BANCA EXAMINADORA

A G R A D E C I M E N T O S

Ao CNEN pelo apoio financeiro prestado.

S U M Á R I O

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - VETOR DE ESTADO E MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA	
2.1 - Generalidades	4
2.2 - Matriz de Transferência para um Elemento de Cabo	7
2.3 - Matriz de Transferência para um Neutralizador Dinâmico	13
2.4 - Vetor Esforço Externo	15
3 - FREQUÊNCIAS NATURAIS	
3.1 - Generalidades	16
3.2 - Vão Simples: equações das frequências naturais	18
3.3 - Vão Simples: resultados numéricos	22
3.4 - Vão com Neutralizador: equações das frequências naturais	24
3.5 - Vão com Neutralizador: resultados numéricos	33
4 - RESPOSTA DO CONJUNTO VÃO-NEUTRALIZADOR A UMA FORÇA HARMÔNICA CONCENTRADA - MODOS DE VIBRAÇÃO	
4.1 - Introdução	38
4.2 - Determinação da Relação entre os Vetores de Estado dos Pontos 0 e 1	39
4.3 - Determinação dos Vetores de Estado de Interesse	42
4.3.1 - Vetor de Estado do Ponto 0	42
4.3.2 - Vetor de Estado à Esquerda do Ponto 2	46
4.3.3 - Vetor de Estado do Ponto 1	48
4.4 - Determinação do Vetor de Estado de Qualquer Ponto do Vão	51
4.5 - Discussão dos Resultados	54

5 - OTIMIZAÇÃO DA POSIÇÃO E DAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DO NEUTRALIZADOR	
5.1 - Otimização da Posição	65
5.2 - Exemplo de Otimização de um Neutralizador de um Grau de Liberdade	68
6 - CONCLUSÕES	71
APÊNDICE I - Neutralizador tipo Stockbridge	75
APÊNDICE II - Determinação Experimental da Curva de Resposta em Frequência de Neutralizador Tipo Stockbridge	79
APÊNDICE III - Excitação Eólica	87
REFERÊNCIAS	91

S I M B O L O G I A

[A]	Matriz que relaciona o vetor de estado com a sua derivada espacial
α	Fator usado no cálculo das frequências naturais
[C]	Matriz de transferência de campo
C_1 a C_4	Componentes da matriz de transferência de campo de um elemento de cabo
C_L	Coefficiente de suspensão
C_{L_r}	Coefficiente de suspensão modificado
C_s	Número de Strouhal
d	Diâmetro do cabo ou cilindro [m]
D	Rigidez complexa do cabo [$N \times m^2$]
δ	Igual ao coeficiente λ_2 dividido por $i = \sqrt{-1}$ [1/m]
E	Módulo de elasticidade [N/m^2]
EI	Rigidez do cabo [$N \times m^2$]
f	Amplitude de força harmônica [N]
f_s	Frequência principal de desprendimento de vórtices [Hz]
f_v	Amplitude das forças de suspensão [N]
F	Força harmônica [N]
{F}	Vetor que representa os esforços externos
F_v	Forças de suspensão [N]
ψ	Deslocamento angular do cabo
h	Coefficiente histerético de amortecimento por unidade de comprimento do cabo [N/m^2]
H	Constante que permite calcular h para cada tipo de cabo [$N \times m$]

I	Segundo momento de área [m^4]
J_0	Momento de inércia de massa do copo do neutralizador tipo Stockbridge em torno do seu centro de gravidade [$kg \times m^2$]
k	Rigidez lateral de cada segmento livre da cordoalha do neutralizador tipo Stockbridge [N/m]
k_{eq}	Rigidez complexa equivalente do neutralizador tipo Stockbridge [N/m]
l_1	Distância da força ao extremo do vão [m]
l_2	Distância entre a força e o neutralizador [m]
l_3	Distância do neutralizador ao extremo do vão [m]
l_s	Distância entre o centro de gravidade do copo do neutralizador tipo Stockbridge ao seu ponto de fixação [m]
L	Comprimento do vão [m]
L_s	Comprimento de cada segmento livre da cordoalha do neutralizador tipo Stockbridge [m]
λ	Comprimento de onda [m]
λ_1 e λ_2	Coeficientes que aparecem no desenvolvimento da matriz de campo do elemento cabo [$1/m$]
m	Massa do cabo por unidade de comprimento [kg/m]
m_{eq}	Massa complexa equivalente do neutralizador [kg]
M	Momento fletor [$N \times m$]
M^+	Massa de cada copo do neutralizador [kg]
η	Fator de perda do cabo
η_s	Fator de perda da cordoalha do neutralizador tipo Stockbridge
ω	Frequência [rad/s ou Hz]
ω_1 e ω_2	Frequências naturais do neutralizador tipo Stockbridge [rad/s ou Hz]

ω_n	Frequência natural da linha [rad/s ou Hz]
[P]	Matriz de transferência de ponto
r	Relação v/v_s
ρ	Massa específica do fluido [kg/m ³]
S	Tensão estática inicial no cabo [N]
[T]	Matriz de transferência
V	Esforço cortante [N]
v	Velocidade do fluido [m/s]
v_s	Velocidade correspondente a f_s , pela equação III.1 [m/s]
w	Deslocamento lateral do cabo [m ou mm]
x	Coordenada espacial ao longo do comprimento do cabo [m]
y	Coordenada espacial transversal ao cabo [m]
{z}	Vetor de estado

R E S U M O

O objetivo deste estudo é verificar a influência de neutralizadores dinâmicos na redução dos níveis de vibração de cabos de linhas de transmissão de energia elétrica. Para tanto, é desenvolvido um modelo matemático que, utilizado na elaboração de um programa de computação, permite analisar o comportamento vibratório inicialmente apenas do cabo, e na seqüência do conjunto cabo-neutralizador, quando estes são excitados por uma força lateral concentrada. Através deste programa é possível determinar, para cada ponto do cabo sob vibração, os parâmetros: deslocamento lateral, deslocamento angular, momento fletor e esforço cortante. O conhecimento dos parâmetros acima permite então a otimização tanto da localização como das características físicas de um determinado tipo de neutralizador, ou a comparação da eficiência entre vários tipos.

A B S T R A C T

The objective of this study is to check the influence of dynamic absorbers on the vibration of electric energy transmission lines. It is developed a mathematical model that allows the prediction of the vibrating behavior not only of the cable, but also of the cable with one absorber, through a computational program. This program gives for each point of a span excited by a concentrated lateral force the following data: lateral

displacement, angular displacement, bending moment and shearing force. The knowledge of these parameters makes then it possible to determine the optimum damper location and characteristics, and also to compare the efficiency between different dampers.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O problema de vibrações em linhas de transmissão de energia elétrica tem sido estudado há bastante tempo. Já em 1925, STOCKBRIDGE [1] relatava experiências no sentido de reduzir este fenômeno, propondo tipos de neutralizadores, um dos quais recebeu o seu nome e continua sendo utilizado nos dias atuais.

As vibrações em linhas de transmissão normalmente tem por origem a ação do vento sobre o cabo. Esta interação entre o fluido em movimento e um cilindro colocado transversalmente ao fluxo mereceu a atenção de muitos pesquisadores, tais como FARQUHARSON e McHUGH [7], BISHOP e HASSAN [8] e DIANA e FALCO [9].

No estudo da resposta de um vão de linha de transmissão, com e sem neutralizadores, é de grande importância o trabalho de CLAREN e DIANA [3]. Nesse trabalho, após o estudo do modelo de dissipação interna de energia no cabo, foi calculada a resposta dinâmica de um vão a uma força lateral concentrada através do método modal. Os seus resultados, que foram confirmados experimentalmente, muitas vezes serviram para checar os resultados obtidos através do estudo que aqui se inicia.

O que se propõe a fazer é estudar o comportamento de um vão de linha de transmissão de energia elétrica, quando o mesmo é excitado por uma força harmônica concentrada, aplicada perpendicularmente ao cabo. O fato novo é que se utilizam as matrizes de

transferência como ferramenta básica. Em função disto este trabalho poderia ser incluído numa linha de pesquisa desenvolvida no Laboratório de Vibrações e Acústica da Universidade Federal de Santa Catarina, que teve anteriormente os trabalhos de ESPINDOLA [10] e SILVA [11], sobre propagação de ondas, também com o uso de matrizes de transferência. Estas matrizes já haviam sido aplicadas a linhas de transmissão por SIMPSON [2], com o objetivo de calcular apenas as frequências naturais, porém em casos mais genéricos.

A contribuição do presente trabalho ao estudo das vibrações em linhas de transmissão é levar em conta uma nova condição de contorno para o vão em estudo, já que os seus extremos puderam também ser considerados engastados, ao passo que o trabalho de CLAREN e DIANA [3] considerava apenas extremos simplesmente apoiados. Uma situação semelhante a essa (extremos engastados) pode ocorrer se se analisar uma linha de transmissão composta de vários vãos consecutivos, formando uma estrutura periódica, sob modos de vibração elevados.

São descritos agora os conteúdos dos capítulos e apêndices que aparecem na sequência.

No capítulo 2 são apresentados o vetor de estado e as matrizes de transferência que funcionarão como ferramentas básicas no desenvolvimento de todo o estudo.

No capítulo 3 são desenvolvidas as equações que permitem o cálculo das frequências naturais do vão, com extremos simplesmente apoiados ou engastados, sem ou com neutralizador.

No capítulo 4 descreve-se como foi possível determinar a maneira como um vão se deforma quando excitado por uma força lateral concentrada. Nos casos em que as frequências desta força

harmônica forem frequências naturais do sistema, obtêm-se então os modos de vibração. Além da deformação, obtêm-se também a distribuição de outros parâmetros importantes ao longo do cabo.

São apresentadas no capítulo 5 algumas considerações sobre a otimização da localização e das características físicas do neutralizador.

O capítulo 6 reúne conclusões e sugestões de continuidade deste estudo.

No apêndice I é apresentado o neutralizador tipo Stockbridge, o qual é de uso muito difundido em linhas de transmissão.

No apêndice II são discutidas algumas considerações acerca do levantamento experimental de curvas de resposta em frequência de neutralizadores tipo Stockbridge.

Finalmente, no apêndice III são apresentadas algumas características das forças de suspensão que surgem quando da excitação do cabo de uma linha de transmissão pelo vento.

C A P Í T U L O 2

VETOR DE ESTADO E MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

2.1. GENERALIDADES

O vetor de estado de um certo ponto de um sistema elástico é um vetor coluna cujas componentes são os deslocamentos neste ponto e as forças internas correspondentes. Este vetor permite identificar os estados de deformação e de tensão do sistema no ponto a que se refere, daí a sua denominação.

No caso em estudo, da vibração transversal de um sistema com massa distribuída, tem-se dois deslocamentos independentes, que são o deslocamento linear transversal w e o deslocamento angular ψ . As forças internas são o esforço cortante V e o momento fletor M . Dessa forma pode-se montar o vetor de estado para um determinado ponto i :

$$\{Z_i\} = \{Z\}_i = \begin{Bmatrix} -w_i \\ \psi_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (2.1.1)$$

O sinal e a ordem das componentes foram escolhidos de forma que, como se poderá constatar posteriormente, as matrizes de transferência resultem simétricas em relação à diagonal secundária. A convenção de orientação destas componentes pode ser observada na figura 2.1.

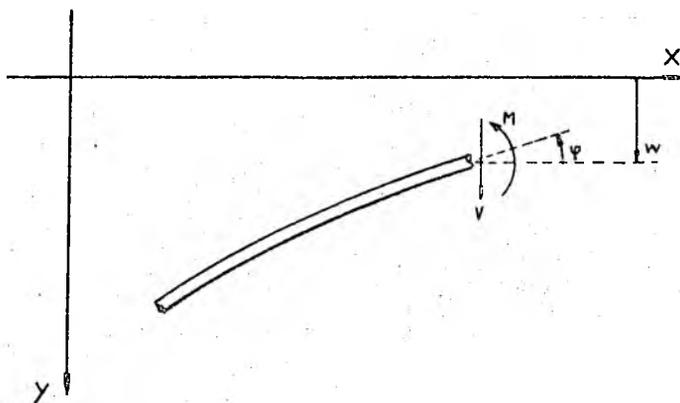


Figura 2.1 - Convenção de orientações

Sejam agora dois vetores de estado do sistema considerado. Se um vetor de estado, quando multiplicado por uma matriz, fornecer o outro vetor, diz-se que esta é uma "matriz de transferência" que os relaciona.

Se os dois vetores representam pontos distintos do sistema, como por exemplo os pontos i e $i-1$, diz-se que a matriz de transferência é uma matriz de campo. Esta situação pode ser descrita matematicamente da seguinte forma:

$$\{Z\}_i = [C_i] \{Z\}_{i-1} \quad (2.1.2)$$

onde $[C_i]$ é a matriz de campo que relaciona os vetores de estado nos pontos i e $i-1$.

Se, em outra situação, tem-se por exemplo uma massa concentrada aplicada em um ponto i do sistema, os vetores de estado imediatamente antes e imediatamente após este ponto são diferen-

tes, em função da influência da massa. De um modo geral cada ponto em que haja uma descontinuidade no sistema necessita ser descrito por dois vetores de estado, que serão identificados da seguinte forma: $\{Z\}_i^E$ (à esquerda) e $\{Z\}_i^D$ (à direita). Se estes vetores estiverem relacionados por uma matriz de transferência, esta recebe a denominação de matriz de ponto. O relacionamento acima pode ser descrito matematicamente pela seguinte equação :

$$\{Z\}_i^D = [P]_i \{Z\}_i^E \quad (2.1.3)$$

onde $[P]_i$ é a matriz de ponto que relaciona os vetores de estado no ponto i .

Quando se tem esforços externos agindo sobre o sistema, a sua presença se faz notar matematicamente pela adição de vetores coluna que os representam. Assim sendo, no caso em que se tenha esforços concentrados, a equação (2.1.3) deve ser modificada de forma a fornecer :

$$\{Z\}_i^D = [P]_i \{Z\}_i^E + \{F\}_i \quad (2.1.4)$$

onde $\{F\}_i$ representa os esforços externos concentrados.

2.2. MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA PARA UM ELEMENTO DE CABO

Inicialmente será analisado um elemento de comprimento infinitesimal do cabo de linha de transmissão elétrica conforme mostrado na figura 2.2 :

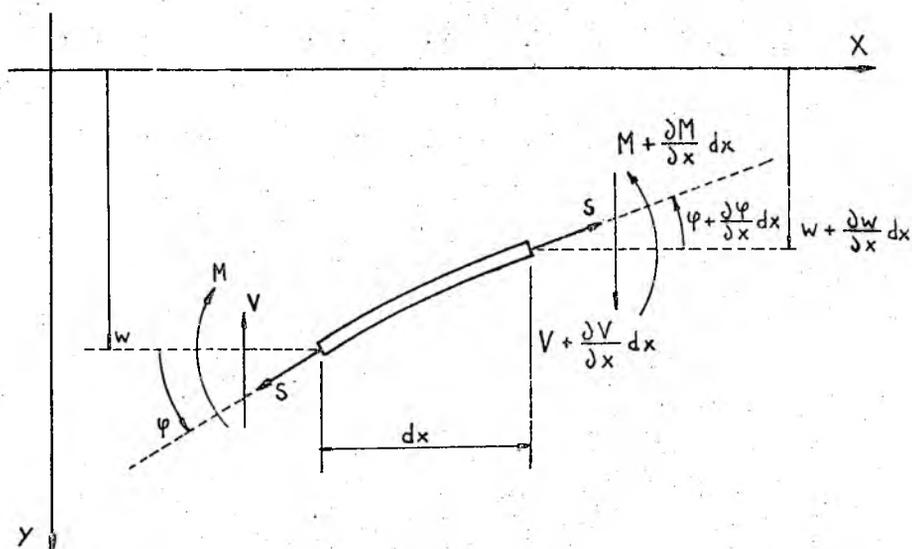


FIGURA 2.2 - Elemento de comprimento infinitesimal do cabo da linha de transmissão elétrica.

Considerar-se-á nesta análise que o esforço axial S não sofre variações significativas ao longo do cabo. Os efeitos das deformações por cisalhamento e da inércia rotatória são pequenos, e portanto serão desconsiderados.

Os esforços externos aplicados sobre o sistema serão considerados harmônicos. Dessa forma o deslocamento transversal, bem como todas as componentes do vetor de estado, terão também comportamento harmônico. É possível então expressar o deslocamento transversal pela expressão a seguir :

$$W(x,t) = w(x) e^{i\omega t} \quad (2.2.1)$$

Assim sendo, a aceleração transversal pode ser descrita pela equação :

$$A(x,t) = \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 w(x) e^{i\omega t} = a(x) e^{i\omega t} \quad (2.2.2)$$

Portanto, excluindo o termo que estabelece a variação temporal, tem-se :

$$a(x) = -\omega^2 w(x) \quad (2.2.3)$$

Os deslocamentos w e ψ se relacionam pela seguinte expressão :

$$\frac{dw}{dx} = -\psi \quad (2.2.4)$$

Do somatório das forças que agem sobre o elemento da figura 2.2 , na direção y , obtém-se :

$$\frac{dV}{dx} = m a = -m \omega^2 w \quad (2.2.5)$$

onde m é a massa por unidade de comprimento do cabo, considerada uma constante neste estudo.

Ainda sobre a mesma figura, do somatório de momentos obtém-se :

$$\frac{dM}{dx} = V + S \psi \quad (2.2.6)$$

A equação que descreve a deformação provocada pelo momento fletor no cabo pode ser escrita da seguinte maneira :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{M}{D} \quad (2.2.7)$$

onde D é a rigidez do cabo, também considerada uma constante ao longo do cabo.

A rigidez é uma grandeza complexa desde que ela envolva o efeito do amortecimento presente no cabo. Agindo desta maneira, é a seguinte a expressão que define a rigidez do cabo :

$$D = E I (1 + i \eta) \quad (2.2.8)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material de que é feito o cabo (sendo muito comum haver dois materiais diferentes), I é o segundo momento de área da seção transversal do cabo e η é o fator de perda (é uma medida de amortecimento presente no cabo).

Segundo CLAREN e DIANA [3], o coeficiente histerético de amortecimento por unidade de comprimento do cabo é dado por :

$$h = \frac{H}{\lambda^3} \quad (2.2.9)$$

onde H é uma constante que depende da estrutura do cabo e λ é o comprimento de onda de vibração do mesmo.

Assumindo que o cabo tenha um modo de vibração perfeitamente senoidal, o que normalmente é uma hipótese aceitável pois os desvios desta forma se restringem a pequenas regiões adjacentes aos extremos, chega-se à seguinte equação para o cálculo do fator η :

$$\eta = \frac{H\lambda}{16 \pi^4 E I} \quad (2.2.10)$$

O comprimento de onda é frequentemente aproximado por $2L/n$, onde n é o número do modo de vibração.

Combinando as equações (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) e (2.2.7) pode-se obter a seguinte equação diferencial do movimento transversal do cabo :

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - S \frac{d^2 w}{dx^2} - m \omega^2 w = 0 \quad (2.2.11)$$

As mesmas quatro equações citadas no parágrafo anterior podem ser reescritas na seguinte forma matricial :

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \psi \\ M \\ V \end{Bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D & 0 \\ 0 & S & 0 & 1 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w \\ \psi \\ M \\ V \end{Bmatrix} \quad (2.2.12)$$

onde o índice "linha" representa derivação em relação a x.

A equação (2.2.12), quando em notação simplificada, se apresenta da seguinte forma :

$$\{z\}' = [A] \cdot \{z\} \quad (2.2.13)$$

A equação diferencial matricial (2.2.13) possui, à semelhança das equações diferenciais comuns, a solução apresentada na equação (2.2.14) abaixo [4].

$$\{z(x)\} = e^{[A]x} \{z(0)\} \quad (2.2.14)$$

Comparando-se as equações (2.1.2) e (2.2.14) chega-se à conclusão de que :

$$[C]_i = e^{[A]x} \quad (2.2.15)$$

se se considerar que os pontos i e $i-1$ estão distanciados de uma distância x entre si, de forma que $\{z\}_{i-1} = \{z(0)\}$ e que $\{z\}_i = \{z(x)\}$.

Efetuada a operação matricial $e^{[A]x}$ obtém-se a seguinte expressão da matriz de transferência do elemento de cabo :

$$[C(x)] = e^{[A]x} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 + C_4 S/D & C_3/D & C_4/D \\ C_4 m \omega^2 / D & C_1 + C_3 S/D & (C_2 + C_4 S/D)/D & C_3/D \\ C_3 m \omega^2 & C_2 S + C_4 (m \omega^2 + S^2 / D) & C_1 + C_3 S/D & C_2 + C_4 S/D \\ C_2 m \omega^2 & C_3 m \omega^2 & C_4 m \omega^2 / D & C_1 \end{bmatrix}$$

(2.2.16)

onde

$$C_1 = \frac{-\lambda_2^2 \cosh(\lambda_1 x) + \lambda_1^2 \cosh(\lambda_2 x)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)},$$

$$C_2 = \frac{-\lambda_2^3 \sinh(\lambda_1 x) + \lambda_1^3 \sinh(\lambda_2 x)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)},$$

$$C_3 = \frac{\cosh(\lambda_1 x) - \cosh(\lambda_2 x)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)},$$

$$C_4 = \frac{\lambda_2 \sinh(\lambda_1 x) - \lambda_1 \sinh(\lambda_2 x)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)},$$

e ainda onde

$$\lambda_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 + 4Dm\omega^2}}{2D}$$

$$\lambda_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 + 4Dm\omega^2}}{2D}$$

2.3. MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA PARA O NEUTRALIZADOR DINÂMICO

Além do cabo de aço, existe outro elemento que comumente irá aparecer neste estudo, que é o neutralizador dinâmico de vibrações. Ele é preso ao cabo em um ponto do vão da linha de transmissão, normalmente próximo à torre, com a finalidade de reduzir as vibrações do sistema. Como a fixação é normalmente feita sobre um comprimento bastante reduzido, pode-se considerar que ela é pontual, havendo então a possibilidade de se considerar a ação do neutralizador através de uma matriz de transferência de ponto.

Um neutralizador dinâmico de vibrações pode ser representado simplesmente por sua massa equivalente definida da seguinte maneira :

$$m_{eq}(\omega) = \frac{F(\omega)}{\ddot{x}(\omega)} \quad (2.3.1)$$

onde $m_{eq}(\omega)$ é a massa equivalente, $F(\omega)$ e $\ddot{x}(\omega)$ são, respectivamente, a força aplicada e a aceleração resultante, ambas no ponto de fixação do neutralizador ao cabo, e medidas segundo a direção em que ocorre a vibração.

A massa equivalente é dependente da frequência (só não o seria se o neutralizador fosse reduzido a apenas uma massa) e via

de regra é uma grandeza complexa (já que isto ocorre toda a vez que há alguma forma de amortecimento presente no neutralizador).

Se o neutralizador for então preso a um certo ponto i do cabo, e este ponto vibrar, o neutralizador exercerá uma força sobre o cabo igual ao produto da massa equivalente pela aceleração transversal. Haverá portanto uma variação discreta do esforço constante neste ponto, situação que pode ser expressa matematicamente da seguinte maneira:

$$V_i^D = V_i^E + m \ddot{w} = V_i^E - m \omega^2 w \quad (2.3.2)$$

O neutralizador dinâmico pode exercer um certo momento sobre o cabo no ponto de fixação, mas estudos anteriores mostram que, por exemplo, para o neutralizador tipo Stockbridge este fato é negligenciável. Ainda sobre o neutralizador tipo Stockbridge, ele é largamente utilizado e, em função disto, analisado neste estudo. Encontra-se apresentado com maiores detalhes no Apêndice I.

Assim sendo, como os deslocamentos w e ψ não sofrem variações discretas no ponto de aplicação do neutralizador ao cabo, pode-se escrever a seguinte relação entre os vetores de estado à direita e à esquerda daquele ponto:

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \psi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 m_{eq} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w \\ \psi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^E \quad (2.3.3)$$

A matriz quadrada que aparece na equação (2.3.3) é, portanto, a matriz de transferência de ponto de um neutralizador de massa equivalente m_{eq} , a qual será denominada, abreviadamente, $[P_n]$.

2.4. VETOR ESFORÇO EXTERNO

Resta desenvolver um vetor que represente a aplicação de uma força lateral pontual, tarefa simples, pois esta força provoca apenas uma variação localizada do esforço cortante no ponto de aplicação i , o que pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \psi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^D = \begin{Bmatrix} -w \\ \psi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^E + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f \end{Bmatrix} \quad (2.4.1)$$

ou, em notação reduzida:

$$\{z\}_i^D = \{z\}_i^E + \{F\} \quad (2.4.2)$$

Na equação (2.4.1) f é a amplitude da força harmônica con centrada aplicada no ponto i .

C A P Í T U L O 3

FREQUÊNCIAS NATURAIS

3.1. GENERALIDADES

É de grande importância se conhecer as frequências naturais de um sistema, pois é nestas frequências que ele responde de maneira mais acentuada.

Como para o amortecimento do cabo se adotou o modelo histerético (ver equação (2.2.8)), tem-se que as frequências naturais são iguais às frequências naturais do sistema se considerado sem amortecimento. Portanto no desenvolvimento abaixo a rigidez será simplesmente igualada ao produto EI, e serão pesquisadas as frequências naturais de vibração livre do sistema.

O procedimento a ser seguido para a determinação das frequências naturais de um vão, com ou sem neutralizador, é o mesmo. Inicialmente se estabelece uma relação entre os vetores de estado das extremidades do vão. Se estes pontos forem identificados pelos índices 0 e 1, tem-se a equação :

$$\{z\}_1 = [T] \{z\}_0 \quad (3.1.1)$$

onde [T] é a matriz de transferência que relaciona os vetores de estado dos pontos considerados.

O passo seguinte é determinar, para os pontos 0 e 1, o par de componentes do vetor de estado que aí são nulas. No caso de uma extremidade simplesmente apoiada tem-se o deslocamento transversal impedido, portanto, nulo. Não se tem, entretanto, restrição quanto ao deslocamento angular e conseqüentemente o momento fletor é nulo. Se a extremidade for engastada, são nulos os deslocamentos transversal e angular, pois que impedidos.

Agora que, para cada vetor de estado da equação (3.1.1) já foram determinadas duas componentes nulas, é possível tirar da mesma dois sistemas homogêneos de equações lineares, um diretamente e outro após inversão, que envolvem respectivamente as componentes não nulas dos pontos 0 e 1. Como estes sistemas são homogêneos, e descartando-se a solução trivial, os determinantes das matrizes compostas pelos seus coeficientes devem ser nulos. Esta condição fornece então duas equações que propiciam o cálculo das mesmas frequências naturais do sistema físico em estudo, sendo necessário então o desenvolvimento de apenas uma delas.

No desenvolvimento acima citado são utilizadas algumas simplificações matemáticas que devem ser aqui salientadas. Em primeiro lugar existe o problema do produto $\lambda_1 L$, onde L é o comprimento do vão, assumir valores numéricos bastante significativos. Em conseqüência disto, $\sinh(\lambda_1 L)$ e $\cosh(\lambda_1 L)$ adotam valores extremamente elevados, praticamente coincidentes entre si, os quais não podem ser tratados numericamente. Estes termos, quando aparecem elevados ao quadrado, normalmente são eliminados diretamente ou através da propriedade $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Quando em forma simples, estes termos são eliminados dividindo-se toda a equação por $\sinh(\lambda_1 L)$ e fazendo $\cosh(\lambda_1 L) / \sinh(\lambda_1 L) = 1$ e $1 / \sinh(\lambda_1 L) = 0$. Outro ponto a ser observado é que quando o cabo é

considerado sem amortecimento, λ_1 é um valor real e λ_2 é um valor puramente imaginário. Pode-se então fazer $\lambda_2 = i\delta$ e usar as igualdades $\sinh(ix) = i \sin x$ e $\cosh(ix) = \cos x$ para simplificar as equações. Isto vem explicar também porque não há problemas com o produto $\lambda_2 L$, em termos de valores numéricos, pois se recai em funções trigonométricas. Finalmente, para efeito de cálculo de frequências naturais, os neutralizadores dinâmicos são considerados sem amortecimento, de forma que a sua massa equivalente assume apenas valores reais.

3.2. VÃO SIMPLES : EQUAÇÕES DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

O sistema mais simples, o primeiro a ser estudado, é aquele que compreende apenas um vão de linha de transmissão sem neutralizadores, de comprimento L , sob dois tipos de fixação: extremos apoiados e extremos engastados. O esquema de tal sistema é fornecido na figura 3.1.

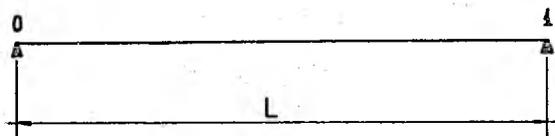


FIGURA 3.1. Esquema de um vão simples onde estão indicados os pontos 1 e 0.

Para o sistema acima descrito, pode-se escrever:

$$\{z\}_1 = [C(L)] \{z\}_0 \quad (3.2.1)$$

Para extremos apoiados, tem-se:

$$\{z\}_0 = [0 \quad \psi_0 \quad 0 \quad v_0]^T \quad (3.2.2a)$$

$$\{z\}_1 = [0 \quad \psi_1 \quad 0 \quad v_1]^T \quad (3.2.2b)$$

Conseqüentemente é obtido o sistema de equações ψ_0 e v_0 :

$$(C_{2L} + C_{4L} S/D) \psi_0 + (C_{4L}/D) v_0 = 0 \quad (3.2.3a)$$

$$\left[C_{2L} S + C_{4L} (m \omega^2 + S^2/D) \right] \psi_0 + (C_{2L} + C_{4L} S/D) v_0 = 0 \quad (3.2.3b)$$

Nas equações acima o índice L informa que os valores de C_2 e C_4 foram calculados para $x = L$. A mesma notação será utilizada posteriormente, também para C_1 e C_3 , porém não necessariamente para o mesmo comprimento L.

Do sistema de equações (3.2.3) chega-se à equação que define as frequências naturais:

$$(C_{2L} + C_{4L} S/D)^2 - (C_{4L}/D) \left[C_{2L} S + C_{4L} (m \omega^2 + S^2/D) \right] = 0 \quad (3.2.4)$$

Após a introdução das expressões que definem os termos C_2 e C_4 e algumas simplificações, a equação (3.2.4) fornece:

$$\frac{\sinh(\lambda_1 L) \sinh(\lambda_2 L)}{\lambda_1 \lambda_2} = 0 \quad (3.2.5)$$

Como λ_1 assume apenas valores reais, positivos e não nulos, a função $\sinh(\lambda_1 L)$ nunca se anula. Portanto, deve-se ter:

$$\sinh(\lambda_2 L) = i \sin(\delta L) = 0 \quad (3.2.6)$$

A equação (3.2.6) é verdadeira quando:

$$\delta L = \frac{\lambda_2 L}{i} = \sqrt{\frac{S^2 + 4 D m \omega_n^2 - S}{2 D}} L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2.7)$$

onde ω_n é a n-ésima frequência natural.

Explicitando ω_n da equação (3.2.7) obtém-se a equação (3.2.8) que permite o cálculo direto destas frequências.

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{1}{m} (n^2 \pi^2 D/L^2 + S)} \quad (3.2.8)$$

No caso alternativo, de extremos engastados, tem-se:

$$\{z\}_0 = [0 \quad 0 \quad M_0 \quad V_0]^T \quad (3.2.9a)$$

$$\{z\}_1 = [0 \quad 0 \quad M_1 \quad V_1]^T \quad (3.2.9b)$$

Introduzindo estes vetores de estado na equação (3.2.1) é obtido o seguinte sistema de equações em M_0 e V_0 :

$$(C_{3L}/D) M_0 + (C_{4L}/D) V_0 = 0 \quad (3.2.10a)$$

$$\left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) / D \right] M_0 + (C_{3L}/D) V_0 = 0 \quad (3.2.10b)$$

Deste sistema obtêm-se a equação abaixo que define as frequências naturais.

$$(C_{3L})^2 - C_{4L} (C_{2L} + C_{4L} S/D) = 0 \quad (3.2.11)$$

Desenvolvendo-se a equação (3.2.11) chega-se à (3.2.12) abaixo :

$$\begin{aligned} & (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_1 L) \sinh(\lambda_2 L) \\ & + 2 \lambda_1 \lambda_2 \left[1 - \cosh(\lambda_1 L) \cosh(\lambda_2 L) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Simplificando a equação acima, como já foi detalhado, obtêm-se :

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_2 L) - 2 \lambda_1 \lambda_2 \cosh(\lambda_2 L) = 0 \quad (3.2.13)$$

Colocando a equação (3.2.13) em função de δ :

$$\operatorname{tg}(\delta L) = \frac{2 \lambda_1 \delta}{\lambda_1^2 - \delta^2} \quad (3.2.14)$$

Como ainda $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = (\lambda_1^2 - \delta^2) = S/D$, a equação (3.2.14) se transforma em:

$$\operatorname{tg}(\delta L) = \frac{2 D \lambda_1 \delta}{S} \quad (3.2.15)$$

Não é possível tratar a equação (3.2.15), como se havia feito com a equação (3.2.6), de forma a obter uma equação explícita para as frequências naturais. Estas devem, portanto, ser calculadas numericamente.

3.3. VÃO SIMPLES : RESULTADOS NUMÉRICOS

CLAREN e DIANA [3] chegaram a uma equação para o cálculo das frequências naturais de uma linha bi-apoiada, caso a que o seu estudo se restringiu, igual à equação (3.2.8). Ainda em seu estudo, tal equação foi modificada de forma a se apresentar da seguinte maneira:

$$\omega_n = \omega_{0n} (1 + \alpha n^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.1)$$

onde

$$\omega_n = \frac{n \pi}{L} \sqrt{\frac{S}{m}} \quad (3.3.2)$$

e ainda onde

$$\alpha = \frac{E I \pi^2}{S L^2} \quad (3.3.3)$$

Valores de α foram então por eles determinados experimentalmente para alguns tipos de cabo. Estes valores foram utilizados no programa aqui desenvolvido no sentido de permitir o cálculo do produto $E I$, através da fórmula (3.3.3) acima.

A figura 3.2 apresenta curvas que representam as frequências naturais de um vão de linha de transmissão, em função do número do modo, para os dois tipos de fixação dos extremos, calculadas pelas equações (3.2.8) e (3.2.15).

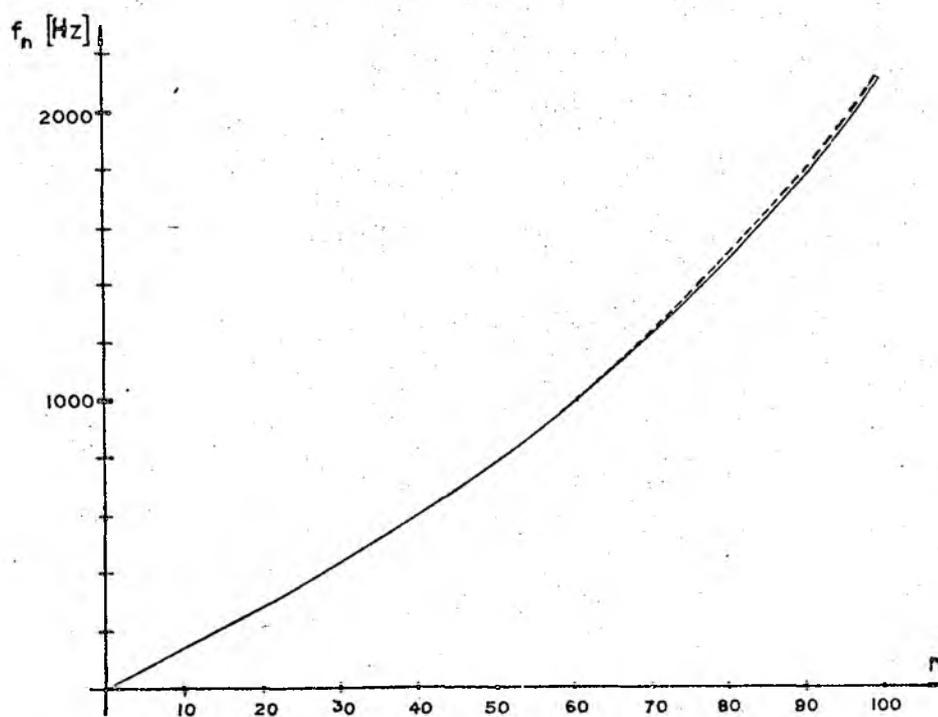


FIGURA 3.2. Frequências naturais em função do número do modo. Curvas: ——— extremos bi-apoiados, ---- extremos bi-engastados. Dados: $S = 2,21 \times 10^4$ N, $m = 1,46$ Kg/m, $L = 46,43$ m e $\alpha = 1,5 \times 10^{-4}$.

Pode-se verificar que as frequências naturais de linhas bi-engastadas são apenas levemente superiores às suas correspondentes de linhas bi-apoiadas, pois há aumento da rigidez do sistema em função do novo tipo de fixação. Esta variação, entretanto, não é significativa, pois a alteração da rigidez é percebida apenas em uma região adjacente às extremidades, pois o cabo se comporta quase que como um fio flexível, em função do baixo valor do produto EI . Tal variação, no exemplo apresentado na figura 3.2, não chega a 1% nos primeiros cem modos de vibração.

3.4. VÃO COM NEUTRALIZADOR : EQUAÇÕES DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

Seja agora um vão de linha de transmissão com comprimento L ao qual está fixado um neutralizador a uma distância ℓ_1 do extremo direito. Mantendo a identificação dos extremos pelos índices 0 e 1, identificando o ponto de fixação do neutralizador pelo índice 2, obtém-se a configuração que aparece na figura 3.3.

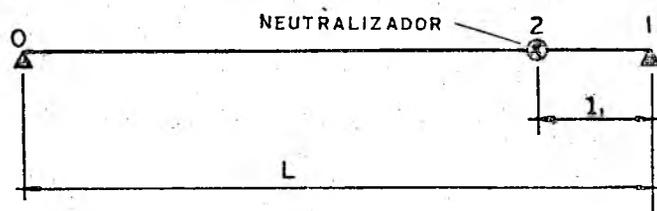


FIGURA 3.3. Vão de linha de transmissão com um neutralizador.

Os vetores de estado do ponto 0 e à esquerda do ponto 2 podem ser relacionados pela matriz de campo do cabo, calculada, portanto, para um comprimento igual a $L - \ell_1$, conforme a equação (3.4.1).

$$\{z\}_2^E = \left[C(L - \ell_1) \right] \{z\}_0 \quad (3.4.1)$$

Os vetores de estado do ponto 2, à esquerda e à direita, podem ser relacionados pela matriz de ponto que representa a ação do neutralizador, fornecendo a seguinte equação :

$$\{z\}_2^D = [P_n] \{z\}_2^E \quad (3.4.2)$$

Finalmente os vetores à direita do ponto 2 e do ponto 1 podem ser novamente relacionados por uma matriz de campo do cabo, apenas que esta matriz é calculada agora para o comprimento ℓ_1 que os separa, conforme a equação que segue.

$$\{z\}_1 = \left[C(\ell_1) \right] \{z\}_2^D \quad (3.4.3)$$

Combinando as equações (3.4.1), (3.4.2) e (3.4.3) chega-se à equação que estabelece o relacionamento entre os vetores de estado das extremidades.

$$\{z\}_1 = \left[C(\ell_1) \right] [P_n] \left[C(L - \ell_1) \right] \{z\}_0 \quad (3.4.4)$$

A matriz $[P_n]$ pode ser considerada como a soma da matriz identidade com a matriz $[P_{nc}]$, esta definida pela equação (3.4.5):

$$[P_{nc}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{eq} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

Em função disto a equação (3.4.4) pode ser reescrita da seguinte forma :

$$\begin{aligned} \{z\}_1 &= [C(\ell_1)] [C(L - \ell_1)] \{z\}_0 \\ &+ [C(\ell_1)] [P_{nc}] [C(L - \ell_1)] \{z\}_0 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

A equação acima pode ser ainda simplificada para ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \{z\}_1 &= [C(L)] \{z\}_0 \\ &+ [C(\ell_1)] [P_{nc}] [C(L - \ell_1)] \{z\}_0 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

se for considerada a propriedade de que o produto de duas matrizes de campo, de um mesmo tipo de elemento estrutural, é igual à matriz de campo deste elemento calculada sobre um comprimento que é a soma dos comprimentos a que se referem aquelas matrizes.

Analisando inicialmente o caso em que os extremos são apoiados, os vetores de estado nestes pontos se apresentam conforme as equações (3.2.2). Introduzindo-se na equação (3.4.7) pode-se obter o seguinte sistema de equações em ψ_0 e V_0 .

$$\left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) + m_{eq} \omega^2 C_{4L_1} (C_{2_{L-\ell_1}} + C_{4_{L-\ell_1}} S/D) / D \right] \psi_0$$

$$+ (C_{4L} / D + m_{eq} \omega^2 C_{4_{\ell_1}} C_{4_{L-\ell_1}} / D^2) V_0 = 0 \quad (3.4.8a)$$

$$\cdot \left\{ \left[C_{2L} S + C_{4L} (m \omega^2 + S^2/D) \right] + m_{eq} \omega^2 (C_{2_{\ell_1}} + C_{4_{\ell_1}} S/D) (C_{2_{L-\ell_1}} + C_{4_{L-\ell_1}} S/D) \right\}$$

$$\times \psi_0 + \left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) + m_{eq} \omega^2 (C_{2_{\ell_1}} + C_{4_{\ell_1}} S/D) C_{4_{L-\ell_1}} / D \right] V_0 = 0$$

$$(3.4.8b)$$

Do sistema acima obtêm-se a equação que define as frequências naturais, que segue.

$$\left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) + m_{eq} \omega^2 C_{4_{\ell_1}} (C_{2_{L-\ell_1}} + C_{4_{L-\ell_1}} S/D) / D \right]$$

$$\times \left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) + m_{eq} \omega^2 (C_{2_{\ell_1}} + C_{4_{\ell_1}} S/D) C_{4_{L-\ell_1}} / D \right]$$

$$+ \left\{ \left[C_{2L} S + C_{4L} (m \omega^2 + S^2/D) \right] + m_{eq} \omega^2 (C_{2_{\ell_1}} + C_{4_{\ell_1}} S/D) (C_{2_{L-\ell_1}} + C_{4_{L-\ell_1}} S/D) \right\}$$

$$\times (C_{4L} + m_{eq} \omega^2 C_{4_{\ell_1}} C_{4_{L-\ell_1}} / D) / D = 0 \quad (3.4.9)$$

Desenvolvendo-se a equação (3.4.9) chega-se à seguinte equação :

$$\frac{\sinh(\lambda_1 L) \sinh(\lambda_2 L)}{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{m_{eq} \omega^2}{D \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}$$

$$\times \{ \lambda_1 \sinh(\lambda_1 L) \sinh(\lambda_2 \ell_1) \sinh[\lambda_2(L - \ell_1)]$$

$$- \lambda_2 \sinh(\lambda_2 L) \sinh(\lambda_1 \ell_1) \sinh[\lambda_1(L - \ell_1)] \} = 0 \quad (3.4.10)$$

Existem propriedades relacionadas às funções hiperbólicas que serão utilizadas, imediatamente ou não, e que devem ser apresentadas. São elas :

$$\sinh(a - b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b \quad (3.4.11a)$$

$$\cosh(a - b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \quad (3.4.11b)$$

$$\cosh a - \sinh a = e^{-a} \quad (3.4.11c)$$

Com base nestas propriedades, eliminando aqueles termos extremamente elevados já citados anteriormente, a equação (3.4.10) passa a se apresentar da seguinte maneira :

$$\sinh(\lambda_2 L) - \frac{m_{eq} \omega^2}{D \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}$$

$$\times \{ \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) \sinh[\lambda_2(L - \ell_1)]$$

$$- \lambda_2 \sinh(\lambda_2 L) \sinh(\lambda_1 \ell_1) e^{-\lambda_1 \ell_1} \} = 0 \quad (3.4.12)$$

Fazendo novamente $\lambda_2 = i\delta$, a equação (3.4.12) resulta:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\delta L) - \frac{m_{\text{eq}} \omega^2}{D \lambda_1 \delta (\lambda_1^2 + \delta^2)} \times \{ \lambda_1 \text{sen}(\delta \ell_1) \text{sen}[\delta(L - \ell_1)] \\ - \delta \text{sen}(\delta L) \sinh(\lambda_1 \ell_1) e^{-\lambda_1 \ell_1} \} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Esta é, portanto, a equação que define as frequências naturais de um vão bi-apoiado com um neutralizador próximo a um extremo (a uma distância ℓ_1), que deve novamente ser resolvida numericamente.

Para extremos engastados continua válida a equação (3.4.7), apenas que agora devem ser considerados os vetores de estado definidos pelas equações (3.2.9).

Em consequência disto, obtém-se o seguinte sistema de equações em M_0 e V_0 .

$$\begin{aligned} (C_{3L}/D + m_{\text{eq}} \omega^2 C_{4\ell_1} C_{3L-\ell_1}/D^2) M_0 \\ + (C_{4L}/D + m_{\text{eq}} \omega^2 C_{4\ell_1} C_{4L-\ell_1}/D^2) V_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.4.14a)$$

$$\left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) / D + m_{\text{eq}} \omega^2 C_{3\ell_1} C_{3L-\ell_1} / D^2 \right] M_0$$

$$+ (C_{3L}/D + m_{eq} \omega^2 C_{3\ell_1} C_{4L-\ell_1}/D^2) V_0 = 0 \quad (3.4.14b)$$

Este sistema fornece a equação das frequências naturais que é a seguinte :

$$\begin{aligned} & (C_{3L} + m_{eq} \omega^2 C_{4\ell_1} C_{3L-\ell_1}/D) (C_{3L} + m_{eq} \omega^2 C_{3\ell_1} C_{4L-\ell_1}/D) \\ & - (C_{4L} + m_{eq} \omega^2 C_{4\ell_1} C_{4L-\ell_1}/D) \\ & \times \left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) + m_{eq} \omega^2 C_{3\ell_1} C_{3L-\ell_1}/D \right] = 0 \quad (3.4.15) \end{aligned}$$

A equação (3.4.15), após a introdução das expressões que definem C_2 , C_3 e C_4 , se apresenta como na equação (3.4.16).

$$\begin{aligned} & (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_1 L) \sinh(\lambda_2 L) + 2\lambda_1 \lambda_2 \left[1 - \cosh(\lambda_1 L) \cosh(\lambda_2 L) \right] \\ & + \frac{m_{eq} \omega^2}{D \lambda_1 \lambda_2 A_1} \{ \sinh(\lambda_1 L) \sinh(\lambda_2 L) (2\lambda_1 \lambda_2 A_2 - A_1 A_3) \\ & - \lambda_1 \sinh(\lambda_1 L) \cosh(\lambda_2 L) (\lambda_2^2 + 2\lambda_2 A_4 + A_5) \\ & + \lambda_2 \cosh(\lambda_1 L) \sinh(\lambda_2 L) (\lambda_1^2 + 2\lambda_1 A_6 + A_7) \} \end{aligned}$$

$$- 2\lambda_1\lambda_2 \left[\cosh(\lambda_1 L) \cosh(\lambda_2 L) - 1 \right] A_8 = 0 \quad (3.4.16)$$

onde $A_1 = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$,

$$A_2 = \lambda_2 \cosh(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_1 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1),$$

$$A_3 = \lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_1 \ell_1) - \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1),$$

$$A_4 = \lambda_1 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_2 \cosh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1),$$

$$A_5 = \lambda_2^2 \cosh^2(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_1^2 \sinh^2(\lambda_2 \ell_1),$$

$$A_6 = \lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_1 \cosh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1),$$

$$A_7 = \lambda_1^2 \cosh^2(\lambda_1 \ell_1) - \lambda_2^2 \sinh^2(\lambda_1 \ell_1) \quad e$$

$$A_8 = \lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_1 \cosh(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_1)$$

Modificando a equação acima de forma a eliminar os termos excepcionalmente elevados, ela resulta:

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_2 L) - 2\lambda_1\lambda_2 \cosh(\lambda_2 L) - \frac{m_{eq} \omega^2}{D\lambda_1\lambda_2 A_1}$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ \sinh (\lambda_2 L) \left[2\lambda_1 \lambda_2 (A_9 - \lambda_1) - \lambda_2 A_1 \sinh^2 (\lambda_1 \ell_1) + A_1 A_3 \right] \\
& + \cosh (\lambda_2 L) \left[2\lambda_1 \lambda_2 (A_{10} - \lambda_2) + \lambda_1 A_1 \sinh^2 (\lambda_2 \ell_1) \right] \} = 0
\end{aligned}
\tag{3.4.17}$$

onde A_1 e A_3 são definidos como anteriormente e

$$A_9 = e^{-\lambda_1 \ell_1} \left[\lambda_2 \sinh (\lambda_2 \ell_1) + \lambda_1 \cosh (\lambda_2 \ell_1) \right]$$

$$A_{10} = e^{-\lambda_1 \ell_1} \left[\lambda_1 \sinh (\lambda_2 \ell_1) + \lambda_2 \cosh (\lambda_2 \ell_1) \right]$$

Fazendo ainda $\lambda_2 = i \delta$, obtém-se a equação final (3.4.18).

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1^2 - \delta^2) \sin (\delta L) - 2\lambda_1 \delta \cos (\delta L) - \frac{m_{eq} \omega^2}{D\lambda_1 \delta (\lambda_1^2 + \delta^2)} \\
& \times \{ \sin (\delta L) \left[2\lambda_1 \delta (A_{11} - \lambda_1) + (\lambda_1^2 + \delta^2) A_{12} \right] \\
& - \cos (\delta L) \left[2\lambda_1 \delta (A_{13} - \delta) + \lambda_1 (\lambda_1^2 + \delta^2) \sin^2 (\delta \ell_1) \right] \} = 0
\end{aligned}
\tag{3.4.18}$$

onde $A_{11} = e^{-\lambda_1 \ell_1} \left[-\delta \sin (\delta \ell_1) + \lambda_1 \cos (\delta \ell_1) \right]$,

$$A_{12} = \delta \sinh (\lambda_1 \ell_1) e^{-\lambda_1 \ell_1} + \lambda_1 \sin (\delta \ell_1) \cos (\delta \ell_1) \quad e$$

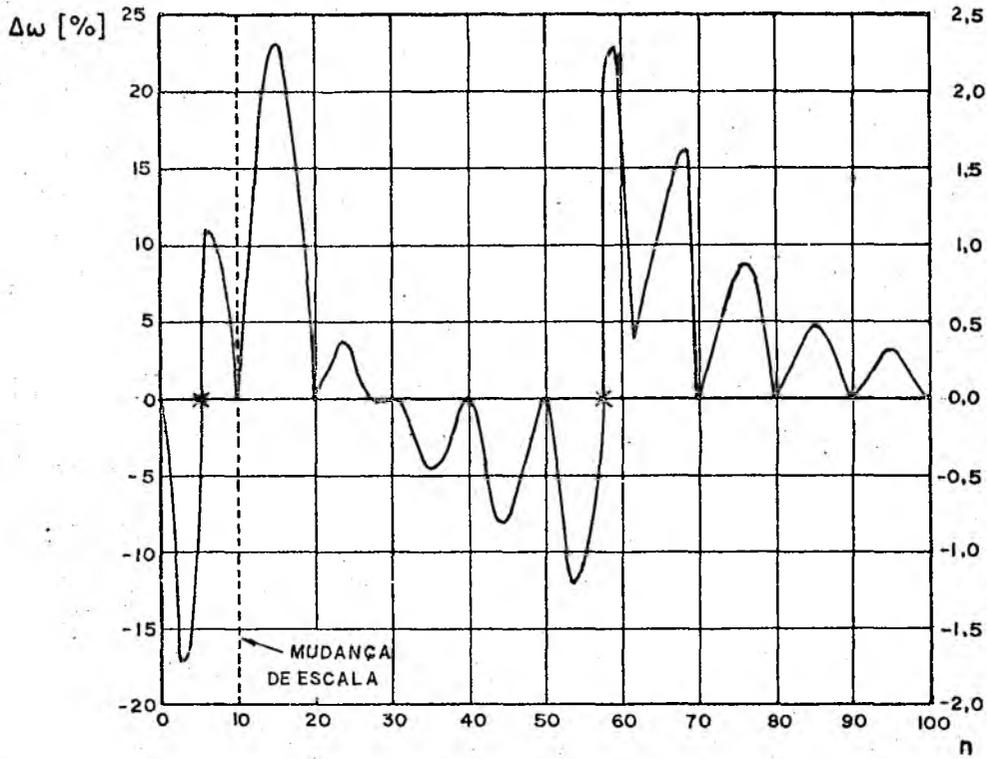
$$A_{13} = e^{-\lambda_1 \ell_1} \left[\lambda_1 \sin (\delta \ell_1) + \delta \cos (\delta \ell_1) \right]$$

A equação (3.4.18) é a equação que define as frequências naturais de um vão de linha de transmissão com um neutralizador, colocado a uma distância ℓ_1 de um extremo, tendo o vão as suas extremidades engastadas. Deve, também, ser tratada por métodos numéricos.

3.5. VÃO COM NEUTRALIZADOR : RESULTADOS NUMÉRICOS

Para demonstrar a influência de um neutralizador dinâmico de vibrações nas frequências naturais de um vão de linha de transmissão, foi introduzido um neutralizador tipo Stockbridge no vão que serviu de exemplo para a obtenção da figura 3.2. A massa equivalente do neutralizador foi calculada segundo a equação (I.2) do Apêndice I. A figura 3.4a mostra as variações percentuais das frequências naturais de um vão bi-apoiado quando ao mesmo é adicionado o neutralizador. A figura 3.4b é semelhante, apenas que se refere a um vão bi-engastado. Dados do neutralizador utilizado: $\omega_1 = 48,66$ rad/s, $\omega_2 = 586,1$ rad/s, $\eta_s = 0,32$, $M^* = 7,65$ Kg e $k = 2,659 \times 10^4$ N/m.

a)



b)

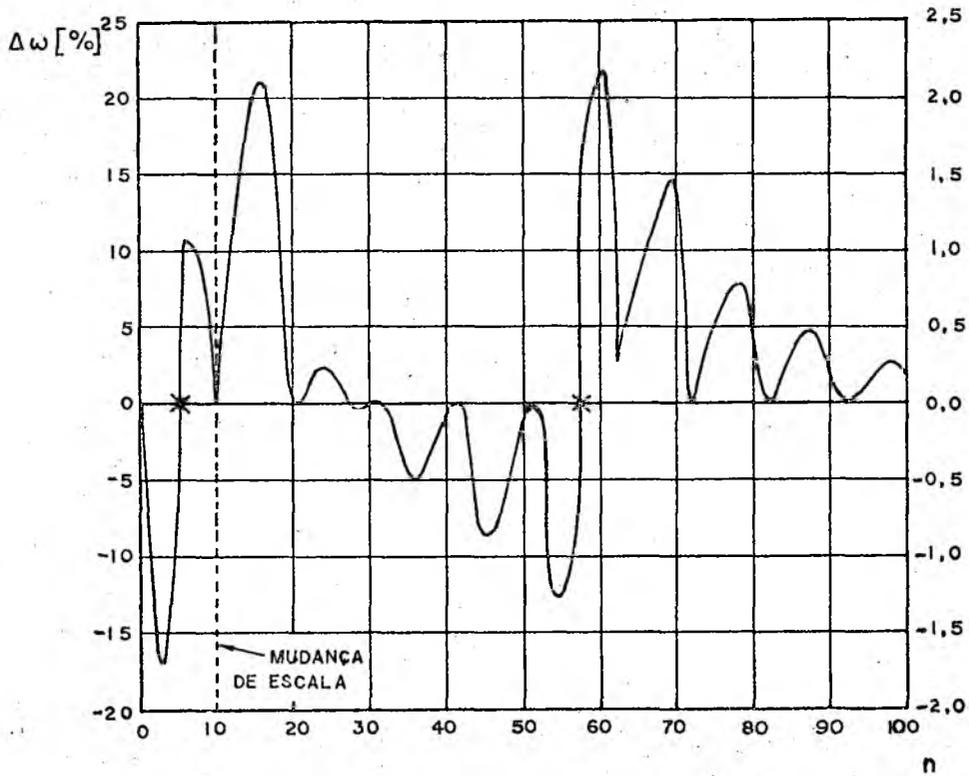


FIGURA 3.4. Variações percentuais nas frequências naturais com o acréscimo de neutralizador, em função do número do modo n . Casos: a - vão bi-apoiado e b - vão bi-engastado.

O primeiro ponto a ser apontado é quanto ao aparecimento de novas frequências naturais. Como o neutralizador tipo Stockbridge possui dois graus de liberdade, ele faz com que o vão possua mais duas frequências naturais, que são introduzidas em torno das suas frequências naturais. Assim sendo, se se considerar uma faixa de frequências de zero a uma frequência limite superior, o conjunto vão mais neutralizador tipo Stockbridge apresentará neste intervalo duas frequências naturais a mais do que simplesmente o vão, desde que esta frequência limite supere as frequências naturais do neutralizador. No exemplo apresentado o neutralizador introduz novas frequências naturais após a 5a. e a 57a. frequências naturais originais, tanto para extremos apoiados como para extremos engastados. Estas frequências naturais são então enumeradas como 5' e 57', e estão localizadas nas figuras 3.4a e 3.4b por asteriscos.

As outras modificações nas frequências naturais introduzidas pelo neutralizador tipo Stockbridge podem ser melhor entendidas se se apresentar a massa equivalente do neutralizador, considerado sem amortecimento, na forma de um gráfico, conforme a figura 3.5.

Na figura 3.5 estão assinaladas 4 (quatro) regiões de frequência distintas, enumeradas de 1 a 4. A região 1 inicia em zero e termina na primeira frequência natural não amortecida do neutralizador (ω_1). A região 2 inicia nesta última frequência e se estende até a frequência para a qual a massa equivalente é nula. Daí até a segunda frequência natural não amortecida do neutralizador (ω_2) tem-se a região 3. Finalmente tem-se a região 4, a qual inicia em ω_2 e que não possui limite superior.

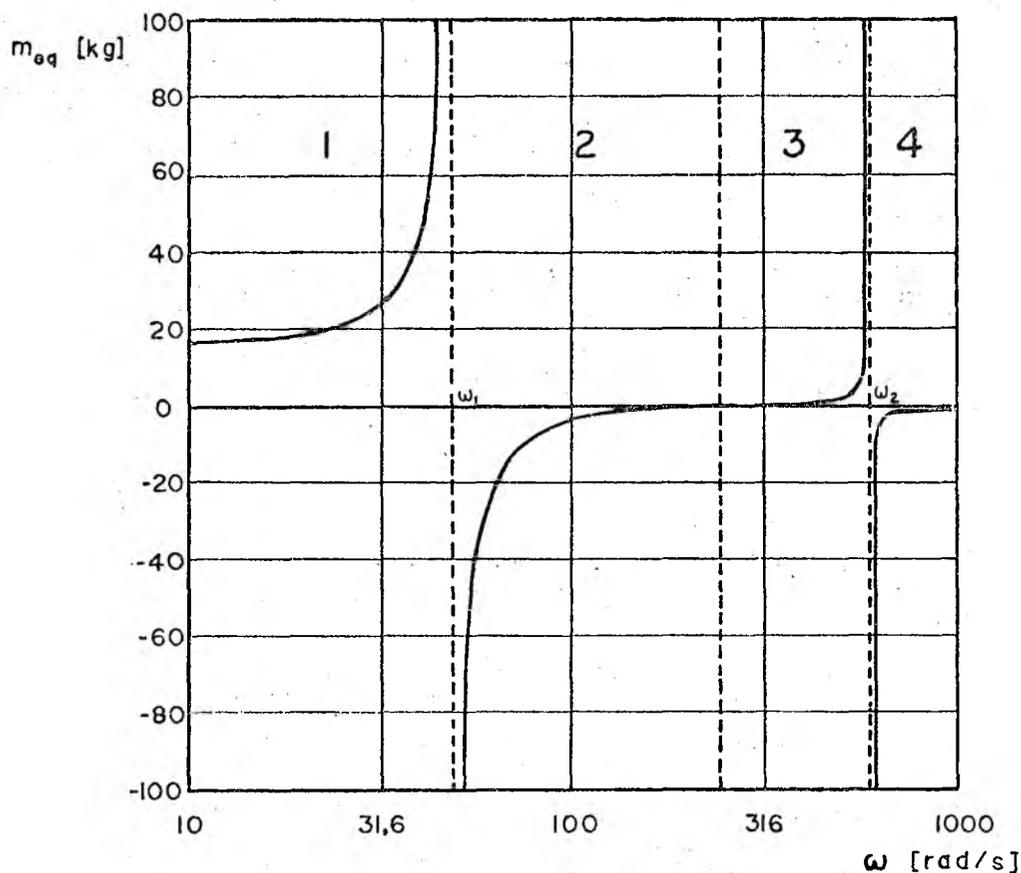


FIGURA 3.5. Massa equivalente do neutralizador tipo Stockbridge, considerado sem amortecimento ($\eta_S = 0$). Os dados do neutralizador são aqueles utilizados na obtenção das figuras 3.4.

Nas regiões 1 e 3 o neutralizador apresenta uma massa equivalente positiva, provocando um aumento da inércia do sistema, o que conseqüentemente desloca as frequências naturais para valores inferiores. Nas regiões 2 e 4, ao contrário, a massa equivalente é negativa, e as frequências naturais se deslocam para valores superiores. Ainda com base na figura 3.5, deve-se perceber o porquê das grandes variações nas frequências naturais em torno de ω_1 e ω_2 , pois é nestas regiões que a massa equivalente adota valores bastante elevados.

Outro ponto a ser lembrado é quanto à posição do neutralizador no vão. No exemplo apresentado o neutralizador se situa aproximadamente a um décimo do comprimento do vão distante de uma das extremidades. Em função disto as frequências naturais que são numeradas aproximadamente por múltiplos ímpares do número 5 foram

bastante modificadas, pois então o neutralizador se situa em torno de um ponto de deslocamento máximo no modo de vibração correspondente. Por outro lado, quando as frequências naturais são numeradas aproximadamente por múltiplos pares do número 5, a influência do neutralizador quase inexistente, pois então o mesmo se situa próximo aos nós dos modos de vibração correspondentes. Estes fatos conferem um certo caráter periódico nas variações das frequências naturais provocadas pela adição de um neutralizador ao vão.

C A P Í T U L O 4

RESPOSTA DO CONJUNTO VÃO-NEUTRALIZADOR A UMA FORÇA HARMÔNICA
CONCENTRADA - MODOS DE VIBRAÇÃO4.1. INTRODUÇÃO

Será aqui desenvolvida a resposta de um vão com um neutralizador a uma força harmônica concentrada. No caso de se desejar a resposta simplesmente do vão, sem neutralizador, valem as mesmas equações, apenas que se deve então desconsiderar a influência deste. Isto pode ser conseguido, por exemplo, tornando-se nula a massa equivalente do neutralizador.

A figura 4.1 indica as localizações da força e do neutralizador no vão, apresentando ainda a identificação das distâncias e dos pontos de interesse ao longo do mesmo.

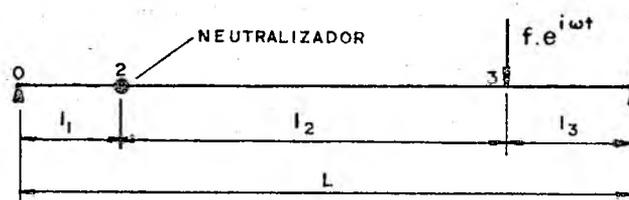


FIGURA 4.1. Identificação dos parâmetros e dos pontos de interesse

Para se obter o vetor de estado de qualquer ponto do vão deve-se seguir o procedimento apresentado na seqüência. Inicialmente estabelece-se uma relação entre os vetores de estado das extremidades, ou seja, os pontos 0 e 1. Através desta relação obtém

-se facilmente o vetor de estado do ponto 0. A partir deste vetor deveria ser possível, pelo emprego de matrizes de transferência, o cálculo do vetor de estado de qualquer outro ponto do vão. Porém, por problemas de precisão na computação, é necessário conhecer com bastante acuidade as componentes do vetor de estado de uma das extremidades de cada sub-vão do cabo, para ser possível o cálculo dos vetores de estado de pontos no interior de cada região destas. Portanto são desenvolvidas equações que permitem determinar os vetores de estado também nos pontos 2 e 1. Desta forma, o vetor de estado do ponto 0 permite o cálculo dos vetores de estado dos pontos que se situem entre os pontos 0 e 2; o vetor de estado do ponto 2 permite calcular vetores de estado para pontos entre 2 e 3; e finalmente o do ponto 1 possibilita o cálculo de vetores de estado para pontos entre 3 e 1.

Uma vez então determinados os vetores de estado de um número razoável de pontos ao longo do vão, consegue-se esboçar a configuração espacial que o mesmo adota quando é forçado a vibrar (modos de vibração), ou ainda, curvas que apresentam o comportamento do momento fletor e do esforço cortante ao longo do comprimento L , nas mesmas condições.

Passa-se agora, portanto, a seguir os passos citados acima.

4.2. DETERMINAÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE OS VETORES DE ESTADO DOS PONTOS 0 e 1

Observando a figura 4.1 observa-se que entre os pontos 0 e 2 existe apenas um segmento de cabo de comprimento l_1 . Portanto, pode-se escrever ;

$$\{z\}_2^E = [C(\ell_1)] \{z\}_0 \quad (4.2.1)$$

Os dois vetores de estado do ponto 2, à esquerda e à direita, são relacionados pela matriz de ponto que introduz a ação do neutralizador, situação que está expressa matematicamente pela equação (4.2.2).

$$\{z\}_2^D = [P_n] \{z\}_2^E \quad (4.2.2)$$

Os pontos 2 e 3 separam-se por um segmento de cabo de comprimento ℓ_2 . Os vetores de estado à direita do ponto 2 e à esquerda do ponto 3 ficam então relacionados conforme indica a equação (4.2.3).

$$\{z\}_3^E = [C(\ell_2)] \{z\}_2^D \quad (4.2.3)$$

No ponto 3 é aplicada a força harmônica. Portanto, os vetores de estado do ponto 3, à esquerda e à direita, são distintos. Pode-se, contudo, montar uma igualdade que envolva estes vetores e o vetor $\{F\}$, que representa a ação da força. Este procedimento fornece a equação abaixo :

$$\{z\}_3^D = \{z\}_3^E + \{F\} \quad (4.2.4)$$

Finalmente é necessário estabelecer uma relação entre os vetores de estado do ponto 3, à direita, e do ponto 1. Como entre estes pontos há apenas o último segmento do cabo, de comprimento ℓ_3 , pode-se escrever :

$$\{z\}_1 = [C(\ell_3)] \{z\}_3^D \quad (4.2.5)$$

Compondo as equações (4.2.1) a (4.2.5) chega-se àquela relação desejada, entre os vetores de estado dos pontos 0 e 1, apresentada na seqüência :

$$\{z\}_1 = [C(\ell_3)] [C(\ell_2)] [P_n] [C(\ell_1)] \{z\}_0 + [C(\ell_3)] \{F\} \quad (4.2.6)$$

Substituindo, como se havia feito no Capítulo 3, a matriz $[P_n]$ por uma soma da matriz identidade com a matriz $[P_{nc}]$, obtém-se a equação (4.2.7).

$$\begin{aligned} \{z\}_1 &= [C(\ell_3)] [C(\ell_2)] [C(\ell_1)] \{z\}_0 \\ &+ [C(\ell_3)] [C(\ell_2)] [P_{nc}] [C(\ell_1)] \{z\}_0 + [C(\ell_3)] \{F\} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Mas como $[C(\ell_3)] [C(\ell_2)] [C(\ell_1)] = [C(L)]$ e $[C(\ell_3)] \times [C(\ell_2)] = [C(L - \ell_1)]$, pode-se reescrever a equação (4.2.7) da seguinte maneira :

$$\{z\}_1 = [C(L)] \{z\}_0 + [C(L - \ell_1)] [P_{nc}] [C(\ell_1)] \{z\}_0 + [C(\ell_3)] \{F\} \quad (4.2.8)$$

4.3. DETERMINAÇÃO DOS VETORES DE ESTADO DE INTERESSE

4.3.1. VETOR DE ESTADO DO PONTO 0

Para determinar as componentes não nulas do ponto 0, introduz-se na equação (4.2.8) os vetores de estado das extremidades, nos quais já foram definidas as componentes nulas, em função do tipo de vínculo.

Assim sendo, utilizando os vetores de estado definidos pelas equações (3.2.2), para extremos apoiados, é obtido o sistema de equações abaixo :

$$\left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) + m_{eq} \omega^2 C_{4L-\ell_1} (C_{2\ell_1} + C_{4\ell_1} S/D) / D^2 \right] \psi_0 + \left[(C_{4L} / D + m_{eq} \omega^2 C_{4L-\ell_1} + C_{4\ell_1} S/D) \right] V_0 = f C_{4\ell_3} / D \quad (4.3.1a)$$

$$\left\{ \left[C_{2L} S + C_{4L} (m_{eq} \omega^2 + S^2/D) \right] + m_{eq} \omega^2 (C_{2L-\ell_1} + C_{4L+\ell_1} S/D) \times (C_{2\ell_1} + C_{4\ell_1} S/D) \right\} \psi_0 + \left[(C_{2L} + C_{4L} S/D) + m_{eq} \omega^2 (C_{2L+\ell_1} + C_{4L-\ell_1} S/D) C_{4\ell_1} / D \right] V_0 = f (C_{2\ell_3} + C_{4\ell_3} S/D) \quad (4.3.1b)$$

Resolvendo o sistema de equações (4.3.1) é possível determinar expressões que definem ψ_0 e V_0 . Estas expressões aparecem na forma de quocientes, sendo que tanto no numerador como no denominador aparecem termos cujos valores são muito elevados: $\sinh(\lambda_1 L)$ e $\cosh(\lambda_1 L)$. A maneira de fazer com os mesmos desapareçam é dividir o numerador e o denominador por $\sinh(\lambda_1 L)$ e adotar aquelas considerações apresentadas no Capítulo 3. Resultam assim as seguintes equações para o cálculo de ψ_0 e V_0 :

$$\psi_0 = \frac{-f \sinh(\lambda_2 \ell_3) (\lambda_1 \lambda_2 B_1 + m_{eq} \omega^2 B_2 B_3 / D)}{B_1 D \text{DEN}_1} \quad (4.3.2)$$

$$V_0 = \frac{f \lambda_1 \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \ell_3) (\lambda_1^2 B_1 + m_{eq} \omega^2 B_2 B_4 / D)}{B_1 \text{DEN}_1} \quad (4.3.3)$$

onde $\text{DEN}_1 = \sinh(\lambda_2 L) \{ \lambda_1 \lambda_2 B_1 + m_{eq} \omega^2 [\lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) B_2 - \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) B_5] / D \}$,

$$B_1 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 ,$$

$$B_2 = \cosh(\lambda_1 \ell_1) - \sinh(\lambda_1 \ell_1) = e^{-\lambda_1 \ell_1} ,$$

$$B_3 = \lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) - \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) ,$$

$$B_4 = \lambda_1 \sinh(\lambda_1 \ell_1) - \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \ell_1) \quad e$$

$$B_5 = \cosh (\lambda_2 \ell_1) - \sinh (\lambda_2 \ell_1) \cosh (\lambda_2 L) / \sinh (\lambda_2 L)$$

No caso de extremos engastados, introduz-se na equação (4.2.8) os vetores de estado definidos pelas equações (3.2.9) de forma a se obter o seguinte sistema de equações em M_0 e V_0 :

$$\begin{aligned} (C_{3L} + m_{eq} \omega^2 C_{4L-\ell_1} C_{3\ell_1} / D) M_0 \\ + (C_{4L} + m_{eq} \omega^2 C_{4L-\ell_1} C_{4\ell_1}) V_0 = f C_{4\ell_3} \end{aligned} \quad (4.3.4a)$$

$$\begin{aligned} (C_{2L} + C_{4L} S/D + m_{eq} \omega^2 C_{3L-\ell_1} C_{3\ell_1} / D) M_0 \\ + (C_{3L} + m_{eq} \omega^2 C_{3L-\ell_1} C_{4\ell_1}) V_0 = f C_{3\ell_3} \end{aligned} \quad (4.3.4b)$$

Resolvendo o sistema acima são encontradas expressões para M_0 e V_0 que, após simplificadas pela eliminação dos termos extremamente elevados, como já foi descrito acima, se apresentam conforme as equações (4.3.5) e (4.3.6).

$$M_0 = \frac{-f B_6 (\lambda_1 \lambda_2 B_1 + m_{eq} \omega^2 B_2 B_3 / D)}{DEN_2} \quad (4.3.5)$$

$$V_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 f B_6 (\lambda_1 B_1 + m_{eq} \omega^2 B_2 B_{11} / D)}{DEN_2} \quad (4.3.6)$$

$$\text{onde } \text{DEN}_2 = \lambda_1 \lambda_2 B_1 B_7 + m_{\text{eq}} \omega^2 \left\{ \sinh(\lambda_2 L) \left[2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - B_2 B_8) \right. \right. \\ \left. \left. - B_1 B_{10} \right] - \cosh(\lambda_2 L) \left[2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - B_2 B_9) \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda_1 B_1 \sinh^2(\lambda_2 \ell_1) \right] \right\} / D \quad ,$$

$$\text{e ainda onde } B_6 = \lambda_2 \cosh(\lambda_1 \ell_3) - \sinh(\lambda_1 \ell_3) + \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_3) \\ - \lambda_2 \cosh(\lambda_2 \ell_3) \quad ,$$

$$B_7 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_2 L) - 2\lambda_1 \lambda_2 \cosh(\lambda_2 L) \quad ,$$

$$B_8 = \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \ell_1) + \lambda_1 \cosh(\lambda_2 \ell_1) \quad ,$$

$$B_9 = \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) + \lambda_2 \cosh(\lambda_2 \ell_1) \quad ,$$

$$B_{10} = \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1) + \lambda_2 B_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \quad ,$$

$$B_{11} = \cosh(\lambda_1 \ell_1) - \cosh(\lambda_2 \ell_1) \quad ,$$

B_1 , B_2 e B_3 são definidos como anteriormente.

4.3.2. VETOR DE ESTADO À ESQUERDA DO PONTO 2

Para extremos apoiados o vetor $\{z\}_2^E$ pode ser obtido da equação (4.2.1), para a qual o vetor $\{z\}_0$ é aquele obtido determinando-se as componentes não nulas ψ_0 e V_0 pelas equações (4.3.2) e (4.3.3). Agindo desta maneira encontram-se as seguintes expressões que definem os valores das componentes de $\{z\}_2^E$:

$$-w_2^E = \frac{-f \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_3)}{D \text{ DEN}_1} \quad (4.3.7)$$

$$\psi_2^E = \frac{-f \sinh(\lambda_2 \ell_3) \left[\lambda_1 \lambda_2 B_1 \cosh(\lambda_2 \ell_1) + m_{eq} \omega^2 B_2 B_{12}/D \right]}{B_1 D \text{ DEN}_1} \quad (4.3.8)$$

$$M_2^E = \frac{-f \sinh(\lambda_2 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_3) \left[\lambda_1 \lambda_2^2 - m_{eq} \omega^2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) / D \right]}{\text{DEN}_1} \quad (4.3.9)$$

$$V_2^E = \frac{f \lambda_1 \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \ell_3) \left[\lambda_1 B_1 \cosh(\lambda_2 \ell_1) + m_{eq} \omega^2 B_2 B_{13}/D \right]}{B_1 \text{ DEN}_1} \quad (4.3.10)$$

onde os novos termos são:

$$B_{12} = \lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_1 \cosh(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_1) \quad e$$

$$B_{13} = \lambda_1 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_2 \cosh(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_1)$$

No caso de extremos engastados o vetor $\{z\}_2^E$ é novamente obtido através da equação (4.2.1), só que agora o vetor $\{z\}_0$ possui as componentes não nulas M_0 e V_0 definidas pelas equações (4.3.5) e (4.3.6). Seguindo este procedimento, encontram-se as seguintes expressões :

$$-w_2^E = \frac{-f B_6 (\lambda_2 B_{11} - B_3)}{D \text{DEN}_2} \quad (4.3.11)$$

$$\psi_2^E = \frac{f B_6}{D B_1 \text{DEN}_2} \{ \lambda_1 \lambda_2 B_1 (\lambda_1 B_{11} - B_4) - m_{eq} \omega^2 B_2 [2 \lambda_1 \lambda_2 B_{14} - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_1)] / D \} \quad (4.3.12)$$

$$M_2^E = \frac{-f B_6 [\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 B_2 + \lambda_2 B_{15}) + m_{eq} \omega^2 B_2 B_{12} / D]}{\text{DEN}_2} \quad (4.3.13)$$

$$V_2^E = \frac{-f \lambda_1 \lambda_2 B_6}{B_1 \text{DEN}_2} \{ \lambda_1 B_1 (\lambda_2^2 B_2 - \lambda_1 B_{16}) - m_{eq} \omega^2 B_2 [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) B_{14} - 2 \lambda_1 \lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_1)] / D \} \quad (4.3.14)$$

onde os novos termos são :

$$B_{14} = \cosh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1) - 1 \quad ,$$

$$B_{15} = \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_2 \cosh(\lambda_2 \ell_1) \quad e$$

$$B_{16} = \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \ell_1) - \lambda_1 \cosh(\lambda_2 \ell_1)$$

4.3.3. VETOR DE ESTADO DO PONTO 1

As últimas a se determinar são as componentes não nulas do vetor de estado do ponto 1. Para extremos apoiados elas podem ser obtidas através da equação (4.2.8), introduzindo na mesma as componentes não nulas do ponto 0, ψ_0 e V_0 , conforme as equações (4.3.2) e (4.3.5). Desta forma se obtêm, após a eliminação dos valores extremamente elevados :

$$\begin{aligned} \psi_1 = \frac{f}{B_1 D \text{DEN}_1} \{ \lambda_1 \lambda_2 B_1 B_{17} + m_{\text{eq}} \omega^2 [B_{17} B_{18} - \sinh(\lambda_2 L) B_{19} \\ + \cosh(\lambda_2 L) B_{20} / D] \} - f C_{3 \ell_3} / D \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

$$\begin{aligned} V_1 = \frac{-f}{B_1 \text{DEN}_1} \{ \lambda_1 \lambda_2 B_1 B_{21} + m_{\text{eq}} \omega^2 [B_{22} \cdot \sinh(\lambda_2 L) \\ - B_{23} \cosh(\lambda_2 L)] / D \} - f C_{1 \ell_3} / D \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

onde

$$B_{17} = \sinh(\lambda_2 L) \sinh(\lambda_1 \ell_3) - \cosh(\lambda_2 L) \sinh(\lambda_2 \ell_3) \quad ,$$

$$B_{18} = \lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) \cosh(\lambda_1 \ell_1) - \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1) ,$$

$$B_{19} = \lambda_2 \sinh^2(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_1 \ell_3) - \lambda_1 \sinh^2(\lambda_2 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_3) ,$$

$$B_{20} = \lambda_2 \sinh^2(\lambda_1 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_3) - \lambda_1 \sinh^2(\lambda_2 \ell_1) \sinh(\lambda_1 \ell_3) ,$$

$$B_{21} = \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 L) \sinh(\lambda_1 \ell_3) - \lambda_1^2 \cosh(\lambda_2 L) \sinh(\lambda_2 \ell_3) ,$$

$$B_{22} = \lambda_2^2 \left[\lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) B_2 - \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1) \right]$$

$$\times \sinh(\lambda_1 \ell_3) - \lambda_1^3 \sinh^2(\lambda_2 \ell_1) \sinh(\lambda_2 \ell_3) \quad e$$

$$B_{23} = \lambda_1^2 \left[\lambda_2 \sinh(\lambda_1 \ell_1) B_2 - \lambda_1 \sinh(\lambda_2 \ell_1) \cosh(\lambda_2 \ell_1) \right]$$

$$\times \sinh(\lambda_2 \ell_3) - \lambda_1 \lambda_2^2 \sinh^2(\lambda_2 \ell_1) \sinh(\lambda_1 \ell_3)$$

Para extremos engastados deve-se determinar M_1 e V_1 , o que é obtido pela mesma equação (4.2.8), introduzindo na mesma as componentes não nulas M_0 e V_0 , expressas conforme as equações (4.3.5) e (4.3.6). Através deste procedimento se obtém as equações abaixo:

$$M_1 = \frac{f \{ \lambda_1 \lambda_2 B_1 B_{24} + m_{eq} \omega^2 [B_1 B_{25} C_{3 \ell_3} + \lambda_1 \lambda_2 B_{26} C_{4 \ell_3}] / D \}}{DEN_2}$$

$$- f (C_2 \ell_3 + C_4 \ell_3 S/D) \quad (4.3.17)$$

$$V_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 f \{ \lambda_1 \lambda_2 B_1 B_{27} + m_{eq} \omega^2 [B_{28} C_3 \ell_3 + B_1 B_{29} C_4 \ell_3] / D \}}{DEN_2}$$

$$- f C_1 \ell_3 \quad (4.3.18)$$

onde

$$B_{24} = \lambda_1 \sinh (\lambda_2 L) (B_1 C_3 \ell_3 + 2 \lambda_1 \lambda_2 C_4 \ell_3) - \lambda_2 \cosh (\lambda_2 L)$$

$$\times [B_1 C_3 \ell_3 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_1 C_4 \ell_3] ,$$

$$B_{25} = \lambda_1 \sinh (\lambda_2 L) \{ \lambda_2 B_{11} [B_{11} - \sinh (\lambda_1 \ell_1)] + B_3 \cosh (\lambda_2 \ell_1) \}$$

$$+ \cosh (\lambda_2 L) \{ -B_3 [B_3 - \lambda_2 \cosh (\lambda_1 \ell_1)]$$

$$+ \lambda_1 \lambda_2 B_{11} \sinh (\lambda_2 \ell_1) \} ,$$

$$B_{26} = \lambda_1 \sinh (\lambda_2 L) (2 \lambda_2 B_{12} + \lambda_2^2 B_{11}^2 - B_3^2) - \cosh (\lambda_2 L)$$

$$\times [\lambda_2 (2 \lambda_1 B_{13} + \lambda_1^2 B_{11}^2 - B_3^2) - B_1 B_{30}] ,$$

$$B_{27} = \lambda_2 \sinh (\lambda_2 L) (B_1 C_4 \ell_3 - 2 \lambda_1 C_3 \ell_3) - \cosh (\lambda_2 L)$$

$$\times \left[\lambda_1 B_1 C_4 \ell_3 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) C_3 \ell_3 \right] ,$$

$$B_{28} = \lambda_1 \sinh (\lambda_2 L) \left[B_1 \sinh^2 (\lambda_2 \ell_1) - 2\lambda_2 (B_{12} + B_{31} + \lambda_2) \right] \\ + \cosh (\lambda_2 L) \left\{ \lambda_2 \left[B_1 \sinh^2 (\lambda_1 \ell_1) + 2\lambda_1 (B_{13} + B_{32} + \lambda_1) \right] \right. \\ \left. - B_1 B_{30} \right\} ,$$

$$B_{29} = - \sinh (\lambda_2 L) \left\{ B_3 \left[B_3 + \lambda_2 \cosh (\lambda_1 \ell_1) \right] \right. \\ \left. + \lambda_1 \lambda_2 \sinh (\lambda_2 \ell_1) B_{11} \right\} - \lambda_1 \cosh (\lambda_2 L) \\ \times \left\{ B_{11} \left[B_{11} - \sinh (\lambda_1 \ell_1) \right] + B_3 \cosh (\lambda_2 \ell_1) \right\}$$

e ainda onde

$$B_{30} = \lambda_2 \sinh (\lambda_1 \ell_1) \cosh (\lambda_1 \ell_1) + \lambda_1 \sinh (\lambda_2 \ell_1) \cosh (\lambda_2 \ell_1) ,$$

$$B_{31} = \lambda_1 \sinh (\lambda_1 \ell_1) \sinh (\lambda_2 \ell_1) - \lambda_2 \cosh (\lambda_1 \ell_1) \cosh (\lambda_2 \ell_1) \text{ e}$$

$$B_{32} = \lambda_2 \sinh (\lambda_1 \ell_1) \sinh (\lambda_2 \ell_1) - \lambda_1 \cosh (\lambda_1 \ell_1) \cosh (\lambda_2 \ell_1)$$

4.4. DETERMINAÇÃO DO VETOR DE ESTADO DE QUALQUER PONTO DO VÃO

Agora que já foram determinados os vetores de estado dos pontos 0 e 1, bem como à esquerda do ponto 2, passa-se a apresentar o método utilizado para calcular o vetor de estado de um pon-

to que se situe no interior de qualquer sub-vão. O procedimento normal seria multiplicar o vetor de estado da extremidade do sub-vão pela matriz de transferência de campo, calculada para um comprimento igual à distância entre o ponto de interesse e aquela extremidade. Surge, entretanto, um problema pois, especialmente para o sub-vão central, pode-se ter distâncias bastante elevadas. Em função disto as funções $\sinh(\lambda_1 x)$ e $\cosh(\lambda_1 x)$ assumem valores que não podem ser tratados numericamente e, conseqüentemente, foi necessário utilizar o artifício que passa a ser descrito.

Como primeiro passo a matriz de campo foi dividida em três matrizes, de forma a se ter:

$$[C(x)] = [C_a] \sinh(\lambda_1 x) + [C_b] \cosh(\lambda_1 x) + [C_c(x)] \quad (4.4.1)$$

onde então

$$[C_a] = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \times \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 1/(D\lambda_1) \\ -\lambda_1 \lambda_2^2 & 0 & \lambda_1/D & 0 \\ 0 & D\lambda_1^3 & 0 & \lambda_1 \\ D\lambda_1 \lambda_2^4 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

$$[C_b] = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \times \begin{bmatrix} -\lambda_2^2 & 0 & 1/D & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 & 1/D \\ -D\lambda_1^2\lambda_2^2 & 0 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & -D\lambda_1^2\lambda_2^2 & 0 & -\lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

$$[G_c(x)] = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \times \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \text{ch} & -\lambda_2 \text{sh} & -\text{ch}/D & -\text{sh}/(D\lambda_2) \\ \lambda_1^2 \lambda_2 \text{sh} & -\lambda_2^2 \text{ch} & -\lambda_2 \text{sh}/D & -\text{ch}/D \\ D\lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{ch} & -D\lambda_2^3 \text{sh} & -\lambda_2^2 \text{ch} & -\lambda_2 \text{sh} \\ -D\lambda_1^4 \lambda_2 \text{sh} & D\lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{ch} & \lambda_1^2 \lambda_2 \text{sh} & \lambda_1^2 \text{ch} \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

Na equação (4.4.4) sh e ch significam, respectivamente, $\text{senh}(\lambda_2 x)$ e $\text{cosh}(\lambda_2 x)$.

Quando se multiplica a matriz de campo assim dividida por um vetor de estado $\{z(0)\}$, é obtido o seguinte vetor de estado $\{z(x)\}$:

$$\{z(x)\} = \{z_a\} \text{senh}(\lambda_1 x) + \{z_b\} \text{cosh}(\lambda_1 x) + \{z_c(x)\} \quad (4.4.5)$$

onde $\{z_a\} = [C_a] \{z(0)\}$,

$$\{z_b\} = [C_b] \{z(0)\}$$

e $\{z_c(x)\} = [C_c(x)] \{z(0)\}$

Quando $\{z(0)\}$ é um daqueles vetores de estado determinados no sub-capítulo 4.3, acontece que $\{z_a\} = -\{z_b\}$. Conseqüentemente, a equação (4.4.5) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\{z(x)\} = \{z_b\} e^{-\lambda_1 x} + \{z_c(x)\} \quad (4.4.6)$$

Ficam assim eliminadas as funções problemáticas $\sinh(\lambda_1 x)$ e $\cosh(\lambda_1 x)$, aparecendo em seu lugar a função $e^{-\lambda_1 x}$. Esta função assume o valor unitário para x igual a zero e tende a desaparecer com o aumento de x , não apresentando, portanto, problemas. Agora é então possível a determinação do vetor de estado de qualquer ponto do vão.

4.5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os primeiros resultados obtidos foram, para um vão sem neutralizador, as respostas quando o mesmo se encontra vibrando sob a 14a. e a 15a. frequências naturais, e ainda sob uma frequência situada entre estas duas. Isto foi realizado com o intuito de comparar as respostas com aquelas apresentadas no estudo de

CLAREN e DIANA [3] de onde, portanto, foram retirados os dados. Deve-se ressaltar que são aqui analisadas duas situações diferentes, extremos simplesmente apoiados e extremos engastados, ao passo que naquele estudo é apenas analisada a primeira situação. Conseqüentemente, a avaliação dos resultados não se dá por completo.

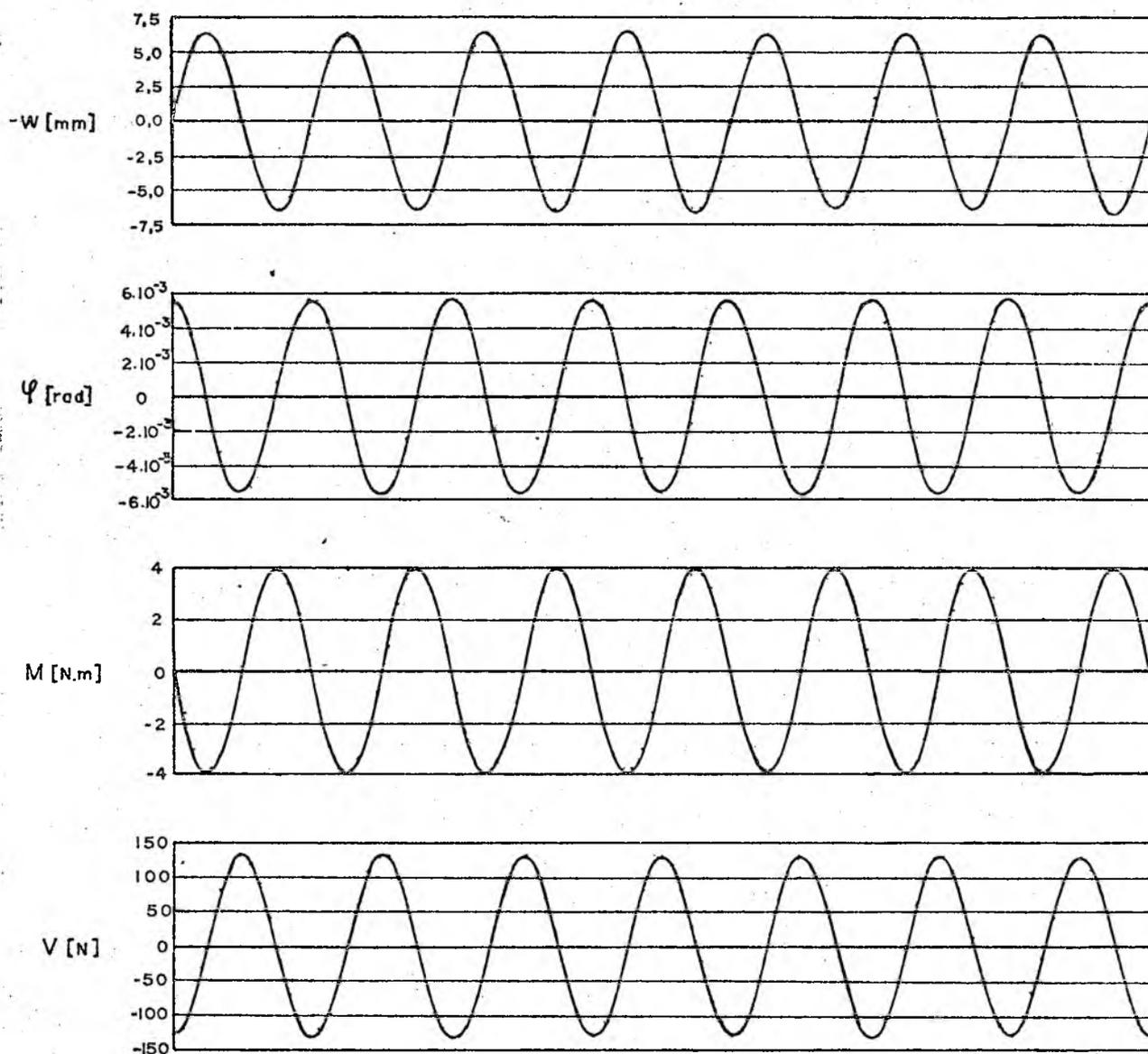


FIGURA 4.2. Cabo com extremos apoiados vibrando no 14º modo de vibração ($\omega = 118,2$ rad/s). Dados: $S = 2,21 \times 10^4$ N, $\alpha = 0,15 \times 10^{-3}$, $m = 1,46$ Kg/m, $L = 46,43$ m, $H = 9,81 \times 10^3$ N×m, $f = 5$ N e $\ell_1 = 4,64$ m.

As figuras 4.2 e 4.3 mostram o vão em seu 14º modo de vibração, para extremos apoiados e engastados respectivamente. A figura 4.4 mostra o vão vibrando sob uma frequência entre a 14a. e a 15a. frequências naturais, para extremos apoiados.

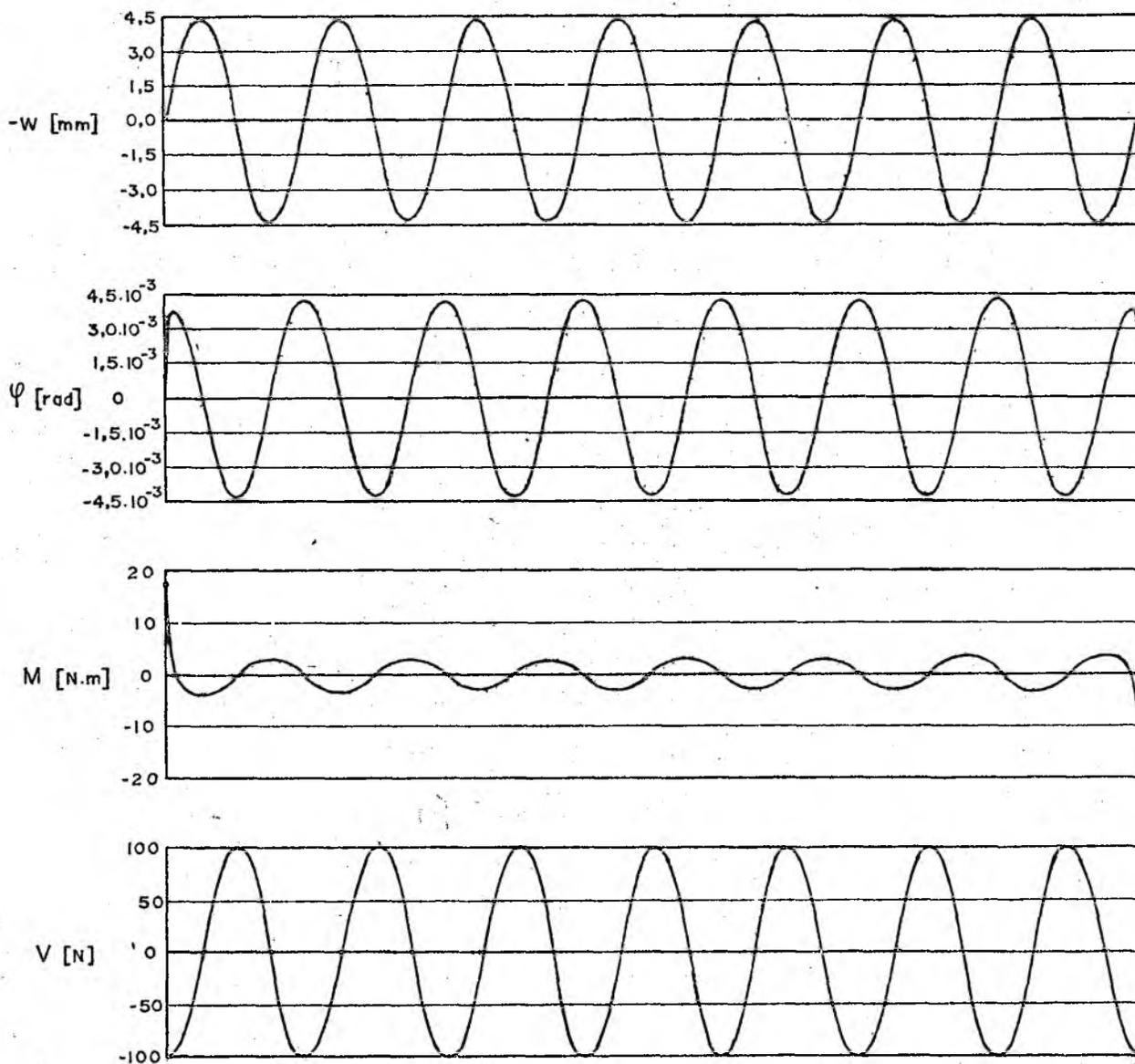


FIGURA 4.3. Cabo com extremos engastados vibrando no 14º modo de vibração ($\omega = 119,1$ rad/s). Dados: os mesmos da figura 4.2.

Nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4, além da configuração espacial proporcionada pela curva do deslocamento $-w$, pode-se observar o comportamento do deslocamento angular ψ , do momento fletor M e do esforço cortante V , todos ao longo do comprimento do vão. Para a obtenção destas curvas o vão foi dividido em cem partes iguais, e em todos os pontos obtidos em função desta divisão foram determinados os valores de $-w$, ψ , M e V .

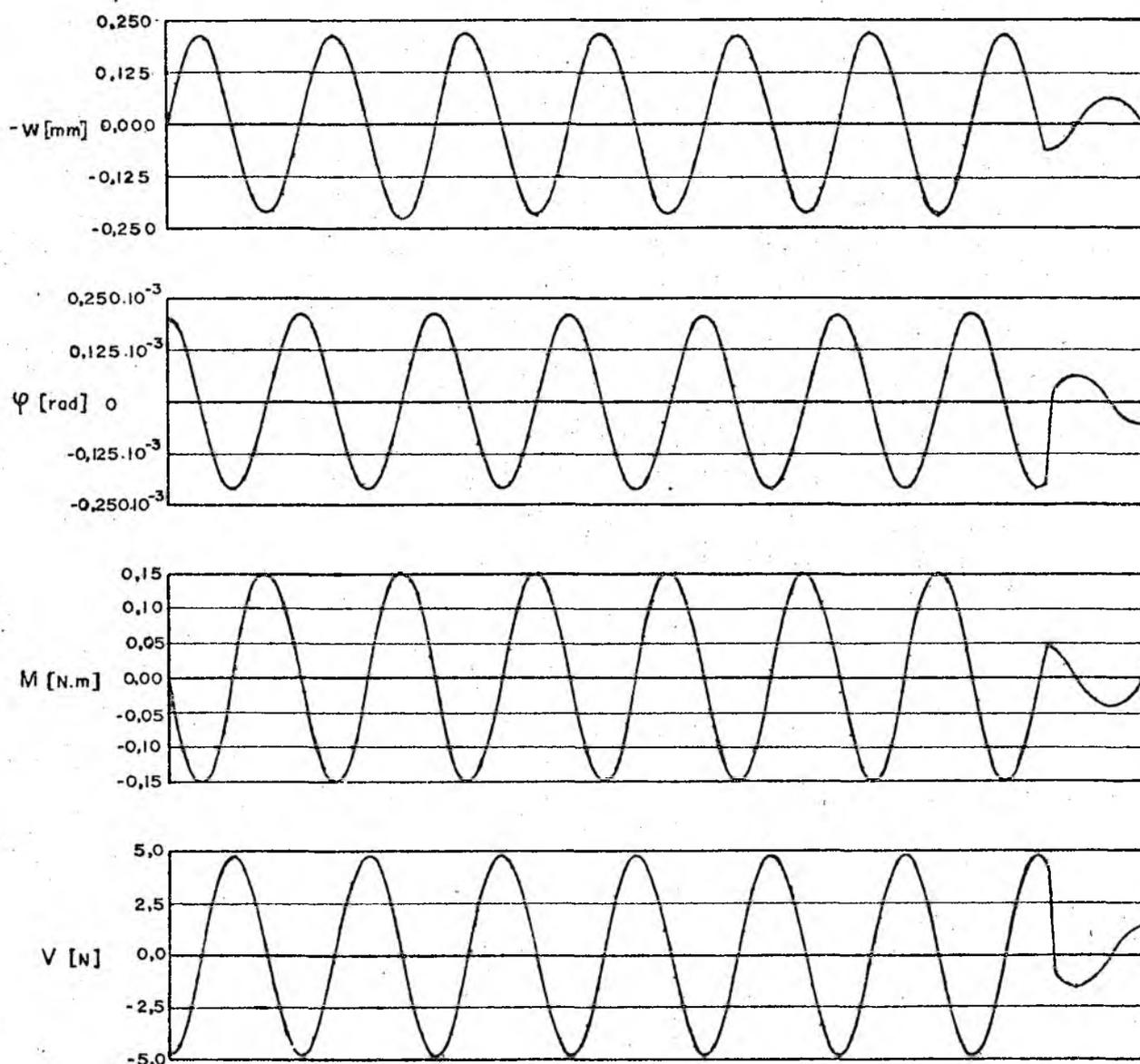


FIGURA 4.4. Cabo com extremos apoiados vibrando sob uma frequência de 122,9 rad/s. Dados: os mesmos da figura 4.2.

Nas figuras 4.2 e 4.3 não fica evidente a descontinuidade no esforço cortante no ponto de aplicação da força em função da escala vertical utilizada ser muito ampla.

Na comparação dos resultados obtidos pelos dois métodos surge imediatamente a primeira questão, quanto às frequências naturais. Embora os dois métodos tenham chegado à mesma equação para as frequências naturais de um vão sem neutralizador, com extremos apoiados, e se tenha utilizado os mesmos dados, as frequências naturais não se confundem, não tendo sido achada a razão desta discrepância. Em função disto foi calculada uma nova frequência intermediária, a qual mantém com as novas frequências naturais a mesma proporcionalidade existente entre as três frequências apresentadas naquele artigo.

Como consequência da dúvida que se apresentou, foram calculadas as respostas com os dados e as equações fornecidos por CLAREN e DIANA. A tabela apresenta as frequências e as amplitudes máximas para todas as situações de cálculo.

Número de Modo	Frequência (rad/s)		Amplitude Máxima (mm)		
	1	2 e 3	1	2	3
14	116	118,2	5,0	6,09	6,09
-	120,8	122,9	0,21	0,225	0,216
15	124,9	126,9	4,0	5,21	5,21

- 1 - Valores apresentados por CLAREN e DIANA (as amplitudes são aproximadas, retiradas do gráfico);
- 2 - Valores obtidos com dados e equações fornecidos por CLAREN e DIANA;
- 3 - Valores obtidos através do método aqui desenvolvido.

TABELA 4.1. Frequências e amplitudes máximas segundo os vários métodos de cálculo.

Examinando a tabela 4.1 pode-se observar que as amplitudes máximas, comparadas às colunas 2 e 3, adotam valores semelhantes quando o vão está em ressonância. Para a frequência intermediária há uma pequena diferença entre os valores, pouco superior a 3%.

Quanto aos valores apresentados por CLAREN e DIANA, que inclusive foram confirmados experimentalmente, existe a possibilidade de que os dados utilizados na sua geração não tenham sido re-passados corretamente.

Na comparação entre as figuras 4.2 e 4.3, em que a única diferença é a vinculação dos extremos, os valores máximos para $-w$, ψ e V são inferiores para a situação em que os extremos são engastados. Contudo, o momento fletor máximo nesta situação é da ordem de 5 vezes o seu equivalente quando os extremos são apoiados. E, condição agravante, ocorre justamente no extremo do vão, ponto em que na prática o cabo já se encontra mais solicitado em função de sua fixação.

Com relação à figura 4.3 observa-se que os extremos, quando engastados, fazem com que a não observância do comportamento praticamente senoidal das curvas se restrinja a regiões muito pequenas, próximas a eles. Isto vem confirmar a hipótese de que o cabo de uma linha de transmissão se comporta quase como um fio flexível, em que a resistência à flexão é negligenciável.

A figura 4.4 mostra o cabo, com os extremos apoiados, vibrando sob uma frequência que não é uma de suas frequências naturais. Então, como a condição não é de ressonância, as amplitudes dos parâmetros $-w$, ψ , M e V são bastante inferiores às aquelas encontradas na figura 4.2, por exemplo, em que tal condição é alcançada. Pode-se notar ainda que a forma geométrica sob a qual o cabo

vibra não é tão simples como quando em ressonância.

Para verificar a resposta de um vão com neutralizador foram realizados dois testes, cujos resultados podem ser observados nas figuras 4.5 e 4.6.

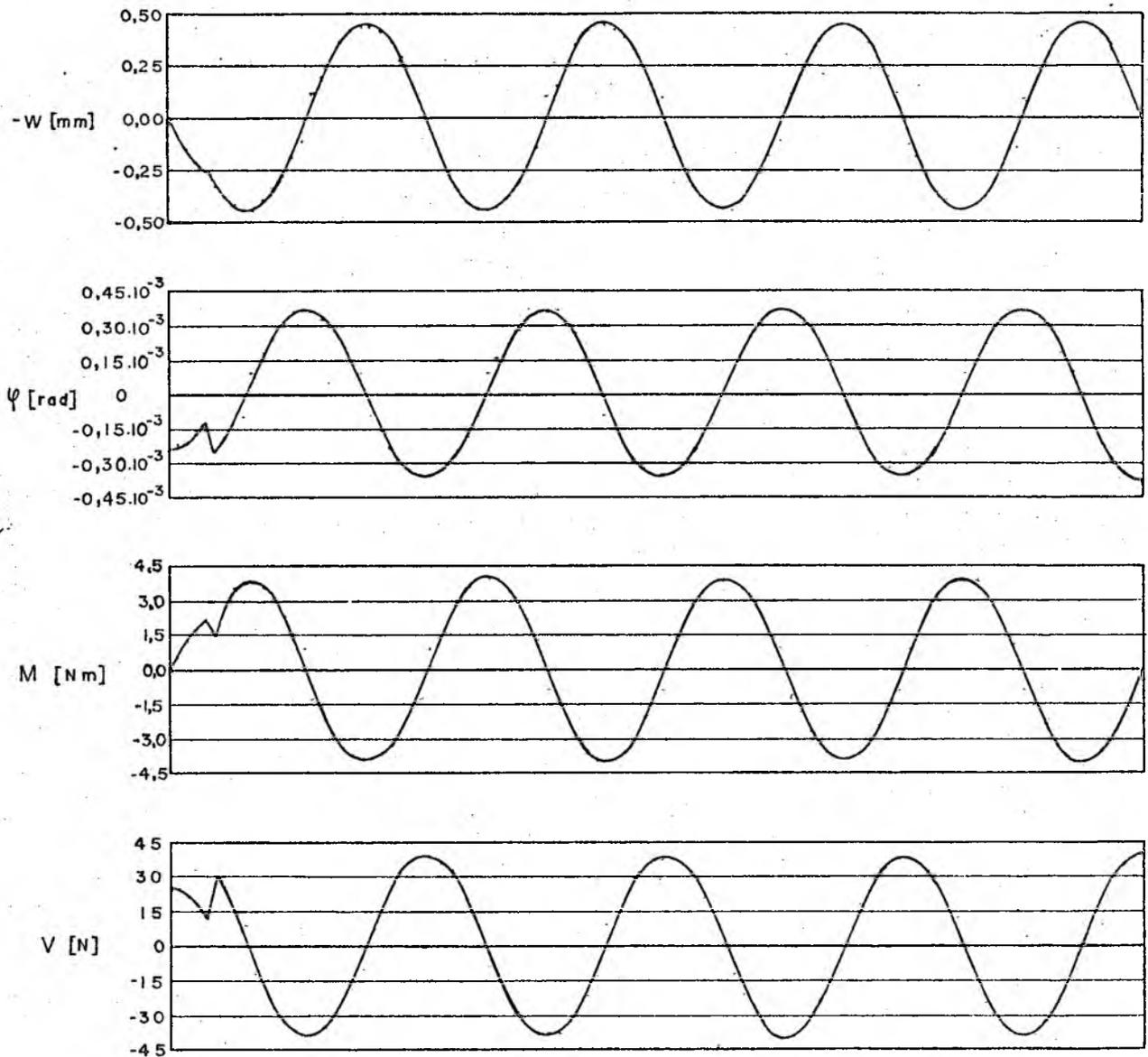


FIGURA 4.5. Cabo mais neutralizador sob o 9º modo de vibração, com extremos apoiados. Dados do cabo: $S = 1,02 \times 10^8$ N, $\alpha = 0,88 \times 10^{-3}$, $m = 6,308$ kg/m, $L = 46,7$ m, $H = 6,867 \times 10^4$ N×m. Força: 9,81 N a 4,43 m do extremo direito. Neutralizador tipo Stockbridge a 2,00 m do extremo esquerdo com os dados: $\omega_1 = 48,66$ rad/s, $\omega_2 = 586,1$ rad/s, $\eta_s = 0,32$, $M = 7,65$ kg e $k = 2,659 \times 10^4$ N/m.

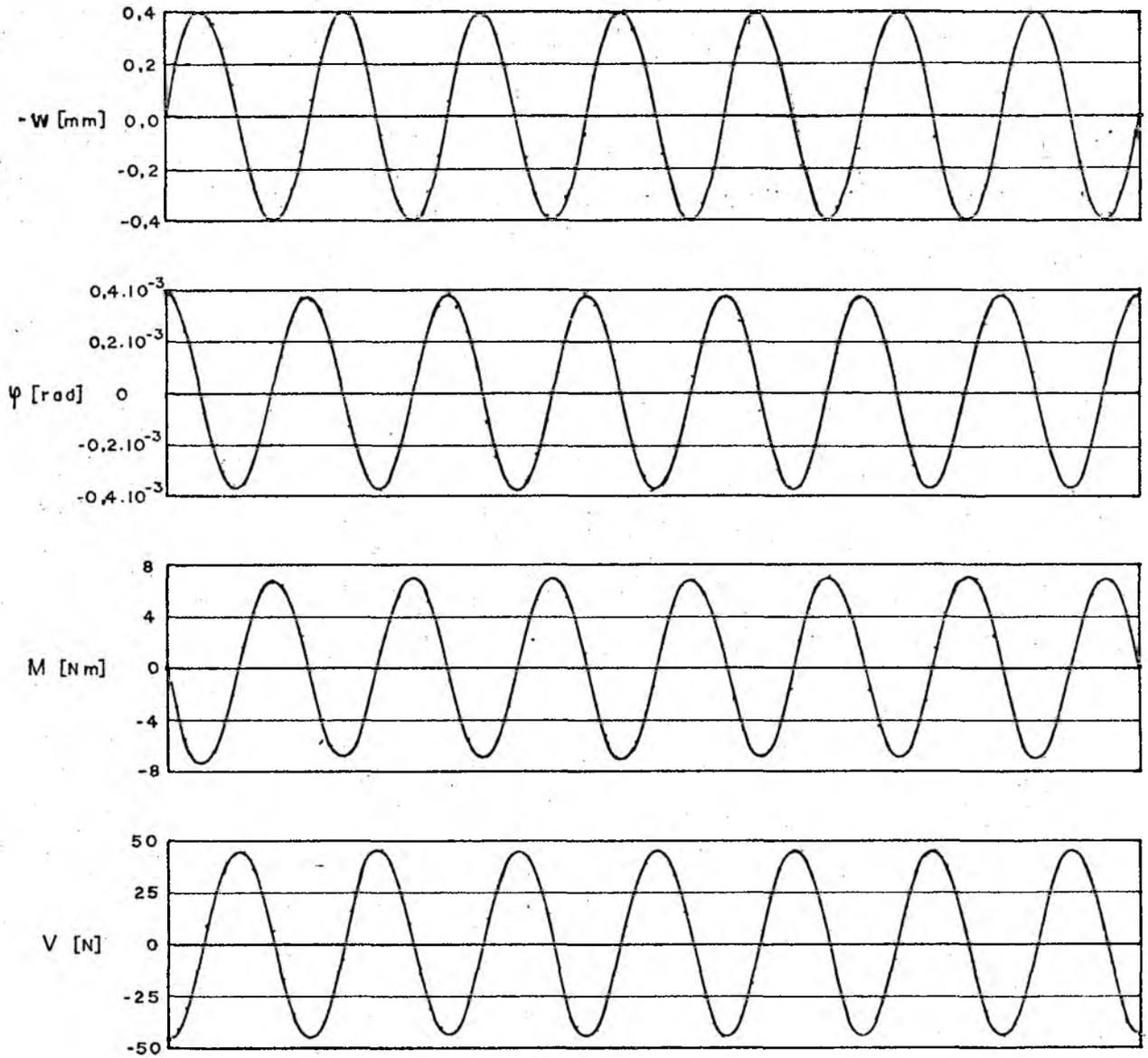


FIGURA 4.6. Cabo mais neutralizador sob o 15º modo de vibração, com extremos apoiados. Dados idênticos àqueles da figura 4.5.

Com relação às figuras 4.5 e 4.6, a impressão que se tem, ao analisar a maneira como o cabo se deforma, é que elas deveriam corresponder realmente ao 8º e ao 14º modos de vibração. Acontece que, como já foi discutido no capítulo 3, o conjunto cabo mais neutralizador tipo Stockbridge possui duas frequências naturais a mais do que simplesmente o cabo. Como então os modos de números 9 e 15 do conjunto possuem frequências que se situam entre as frequências naturais do neutralizador, eles se assemelham em forma aos modos de números 8 e 14 do cabo sem neutralizador.

Na comparação com os resultados apresentados por CLAREN e DIANA [3] surgiu novamente uma questão quanto às frequências de excitação. Aplicando o método aqui desenvolvido com as frequências fornecidas por eles, as maneiras como o vão se deforma foram bastante diferentes das suas, com amplitudes de vibração inferiores. Este fato, mais o comportamento bem regular das curvas apresentadas naquele artigo, levou a crer que lá o cabo se achava vibrando sob frequências naturais. Foram então calculadas as frequências naturais de números 9 e 15 do conjunto, segundo as equações desenvolvidas no capítulo 3, com as quais se obtiveram as curvas apresentadas nas figuras 4.5 e 4.6. Portanto, às frequências de 69,54 e 119,09 rad/s citadas por CLAREN e DIANA se contra põem aqui as frequências naturais de 71,95 e 130,5 rad/s.

Em consequência desta modificação nas frequências as curvas de deformação do cabo se assemelharam, assim como as amplitudes de vibração. Assim sendo, as amplitudes de deslocamento na região central do vão, entre a força e o neutralizador, foram de 0,40 e 0,33 mm segundo CLAREN e DIANA, e de 0,445 e 0,394 mm segundo o método de cálculo aqui desenvolvido, primeiro para as frequências mais baixas e após para as mais altas. Os erros foram en

tão, respectivamente, de 11,3 e 19,4 % .

Foi tentado, a exemplo do que se fez com a resposta apenas do cabo, desenvolver um programa de computação que tivesse por base as equações do artigo utilizado na comparação dos resultados. Porém, estas equações citam um parâmetro, a massa do grupo de fixação do neutralizador ao cabo, que não é fornecido. A não consideração deste parâmetro pode também ter contribuído no montante das margens de erro calculadas acima. Do ponto de vista teórico não teria havido nenhuma dificuldade em considerar tal massa no método de cálculo aqui desenvolvido, pois significaria apenas a soma de tal grandeza à massa equivalente do neutralizador.

Finalmente, para mostrar a influência benéfica de um neutralizador em um vão, foram obtidas as curvas correspondentes ao 14º modo de vibração do vão utilizado na obtenção das figuras 4.5 e 4.6, porém agora sem o neutralizador, com os extremos apoiados. Estas curvas aparecem na figura 4.7. Pode-se verificar que este modo é semelhante ao 15º modo do vão com neutralizador, o qual aparece na figura 4.6, e isto decorre do aparecimento de novas frequências naturais conforme já comentado no capítulo 3.

Percebe-se, com a retirada do neutralizador, que houve um aumento apreciável em todos os parâmetros, e os valores máximos passaram a ser aproximadamente quatro vezes os valores anteriores.

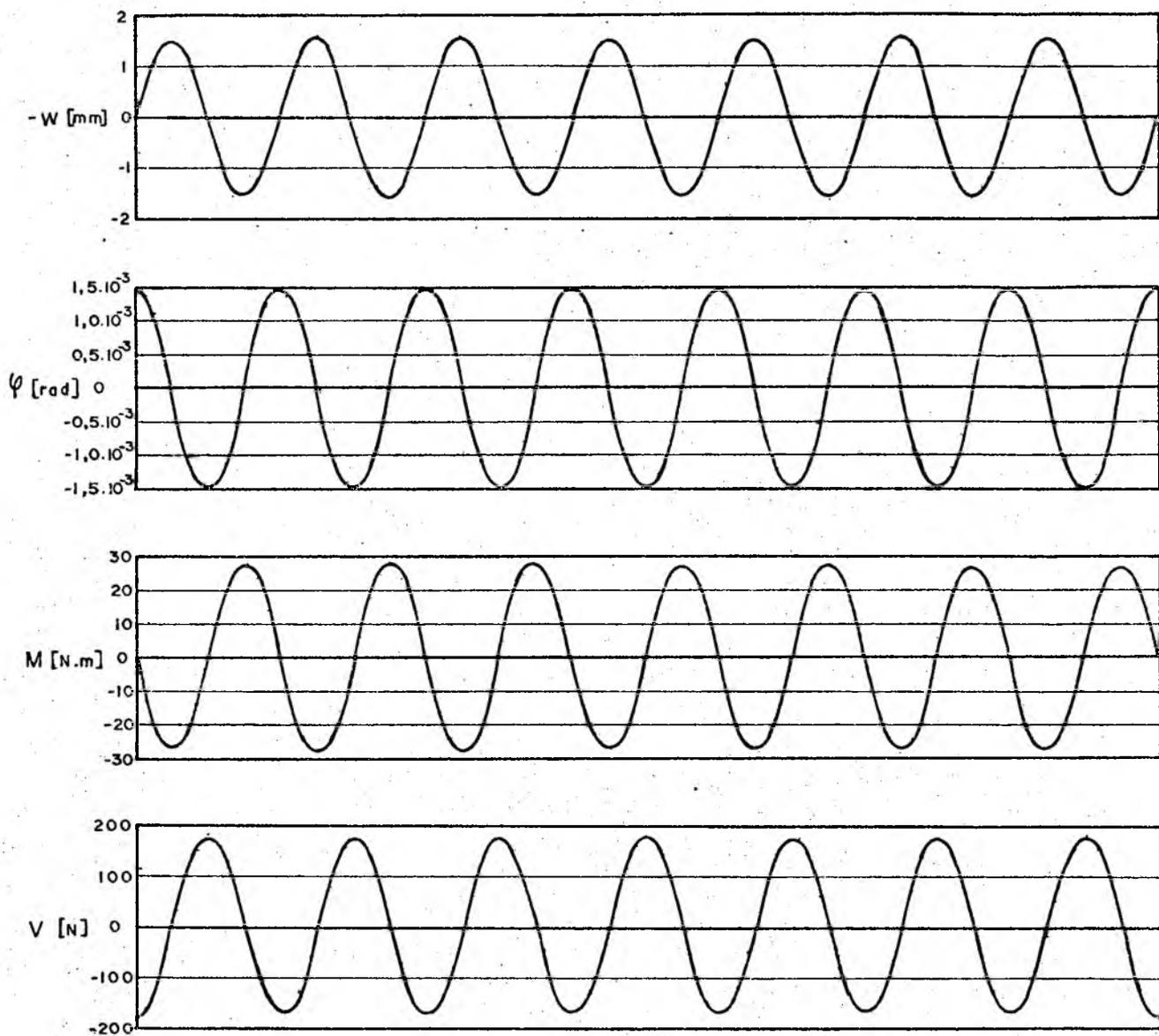


FIGURA 4.7. Cabo sem o neutralizador sob o 14º modo de vibração, com extremos apoiados. Dados idênticos àqueles da figura 4.5.

C A P Í T U L O 5

OTIMIZAÇÃO DA POSIÇÃO E DAS CARACTERÍSTICAS
FÍSICAS DO NEUTRALIZADOR5.1. OTIMIZAÇÃO DA POSIÇÃO

Para verificar qual a melhor posição em que o neutralizador deve ser introduzido no cabo, foi analisado o comportamento dos momentos fletores ao longo do mesmo, quando o neutralizador sofre variações na sua localização. Deu-se ênfase na análise a alguns momentos fletores característicos, como aquele que aparece no ponto de fixação do neutralizador ao cabo, o máximo momento fletor na região central entre o neutralizador e a força e o momento fletor que aparece no extremo próximo ao neutralizador (este último apenas quando o cabo é bi-engastado). A escolha do momento fletor como parâmetro principal é explicado pelo fato de que a tensão dinâmica no cabo se deve principalmente a esta sollicitação.

Como os neutralizadores dinâmicos, aí incluído o neutralizador tipo Stockbridge, apresentam ângulos de fase de 90° da massa e da rigidez equivalentes com relação ao deslocamento do ponto de fixação nas suas frequências naturais, o neutralizador nesta análise foi simplesmente representado pela sua rigidez equivalente na forma de um valor imaginário. Preferiu-se a rigidez por facilitar o tratamento numérico, sendo que a sua amplitude aproxima-se do valor médio do módulo da rigidez equivalente de um neutralizador tipo Stockbridge adequado à linha. A justificativa do procedimento acima é que normalmente se procura utilizar os neutra-

lizadores em torno de suas frequências naturais, quando os mesmos dissipam maior quantidade de energia.

O ponto de referência em torno do qual se procurou a melhor posição para o neutralizador é aquele que se situa a uma distância de um quarto de comprimento de onda a partir do extremo do vão oposto ao da força. Este ponto foi escolhido em função de se situar na região de maior deslocamento do cabo. De nada adiantaria colocar o neutralizador em um ponto de nó, onde não há deslocamento, pois a sua ação é função direta deste parâmetro. O comprimento de onda foi calculado como sendo o comprimento do vão dividido pelo número de comprimentos de onda presentes no modo que se está analisando.

As figuras 5.1 e 5.2 mostram o comportamento dos momentos fletores de interesse quando o neutralizador é deslocado em torno da posição de referência, para um cabo com extremos apoiados e en-
gastados, respectivamente.

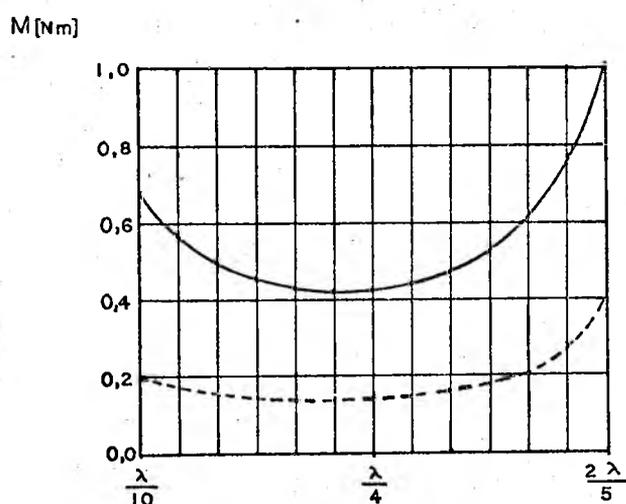


FIGURA 5.1. Momentos fletores, de um cabo com extremos apoiados vibrando sob o 14º modo de vibração, em função do posicionamento do neutralizador. Curvas: — no ponto de aplicação do neutralizador e - - - - - máximo na região central.

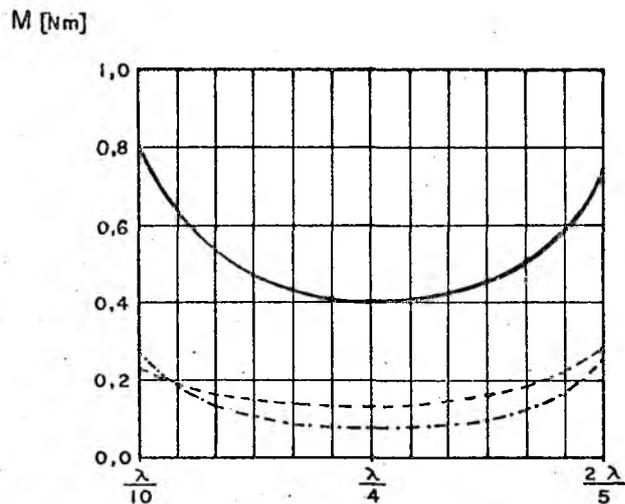


FIGURA 5.2. Momentos fletores, de um cabo com extremos engastados vibrando sob o 14º modo de vibração, em função do posicionamento do neutralizador. Curvas: — no ponto de aplicação do neutralizador, - - - - - máximo na região central e no extremo próximo ao neutralizador.

São fornecidos na seqüência alguns dados que são comuns às figuras 5.1 e 5.2, esclarecendo ainda que λ representa o comprimento de onda. Dados do cabo: $S = 2,207 \times 10^4$ N, $m = 1,46$ kg/m, $L = 46,43$ m, $H = 9,81 \times 10^3$ N \times m, $\alpha = 0,15 \times 10^{-3}$. Força: com amplitude de 5 N e aplicada a 4,64 m do extremo. Neutralizador: módulo da rigidez equivalente igual a 5×10^5 N/m.

Examinado as figuras 5.1 e 5.2 verifica-se que realmente a posição distanciada de um quarto de comprimento de onda do extremo é a mais indicada para localizar o neutralizador. Verifica-se ainda que quando se adiciona ao cabo o neutralizador, o ponto de localização deste é o que apresenta o maior momento fletor.

5.2. EXEMPLO DE OTIMIZAÇÃO DE UM NEUTRALIZADOR DE UM GRAU DE LIBERDADE

A otimização de um neutralizador de um grau de liberdade foi feita seguindo a orientação apresentada por SNOWDON [6], que estudou a influência de neutralizadores na vibração transversal de vigas.

Escolheu-se um modo de vibração de um cabo com extremos engastados e inicialmente verificou-se, para frequências em torno da frequência natural, o comportamento do momento fletor do extremo em duas condições diferentes: quando se adiciona ao cabo apenas uma massa e quando se adiciona ao cabo um neutralizador composto da mesma massa conectada através de um elemento flexível. Tanto a massa como o neutralizador são posicionados a um quarto de comprimento de onda do extremo. Escolheu-se como parâmetro de referência o momento fletor do extremo pois, como já se observou, ele pode assumir valores extremamente elevados.

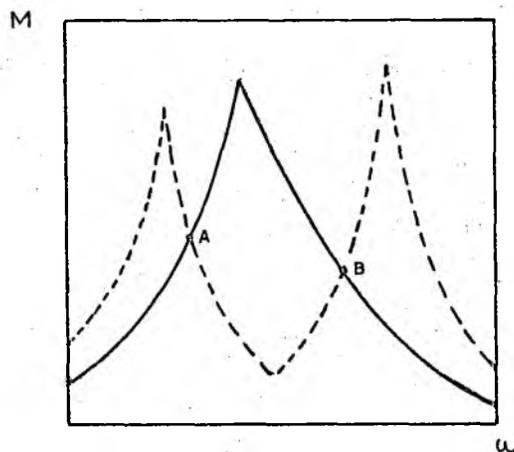


FIGURA 5.3. Momento fletor no extremo. Curvas:
a) ——— quando se adiciona apenas uma massa, b) - - - - - quando se adiciona um neutralizador não-amortecido.

Da análise acima resultam duas curvas, que estão exemplificadas na figura 5.3. Elas se cruzam, na faixa de frequências em torno da frequência de ressonância original, em dois pontos, identificados na figura pelas letras A e B. Estes são os pontos fixos, assim denominados porque para um neutralizador composto da mesma massa e da mesma rigidez, qualquer que seja o amortecimento, a curva do momento fletor do extremo resultante passa por esses pontos.

No desenvolvimento dos passos que se seguem adotou-se a seguinte expressão para definir a massa equivalente do neutralizador dinâmico de um grau de liberdade:

$$m_{eq} = \frac{M k(1 + i \eta_s)}{k(1 + i \eta_s) - M \omega^2} \quad (5.1)$$

onde M , k e η_s são, respectivamente, a massa, a rigidez e o fator de perda do neutralizador.

O próximo passo é agora conseguir com que a ordenada dos pontos A e B sejam iguais. Isto é obtido variando-se a frequência natural do neutralizador. Como se parte de um valor de massa fixo, a variação na frequência natural do neutralizador é obtida através da modificação da sua rigidez.

Em seguida determina-se o amortecimento para que o neutralizador de forma que a curva resultante seja aproximadamente plana. Obtém-se tal condição fazendo com que um ponto da curva entre os pontos A e B tenha a mesma ordenada que estes dois últimos.

No exemplo prático que se efetuou serviu como base um vão com extremos engastados, vibrando no 14º modo de vibração, com as seguintes características: $S = 1,02 \times 10^5$ N, $\alpha = 0,88 \times 10^{-3}$, $m = 6,308$ kg/m, $L = 46,7$ m, $H = 6,87 \times 10^4$ N × m, $F = 9,81$ N e $\ell_1 = 4,43$ m. A massa do neutralizador foi fixada em 15 kg, aproximadamente a massa total do neutralizador tipo Stockbridge que se adaptaria ao vão. Em função da introdução do neutralizador foi possível a redução do momento fletor de 52,3 para 2,04 N × m. As curvas de resposta, em termos do momento fletor do extremo, para o vão sem neutralizador e com o neutralizador otimizado, podem ser vistas na figura 5.4. Pode-se verificar que esta última curva se apresenta bem plana, como esperado.

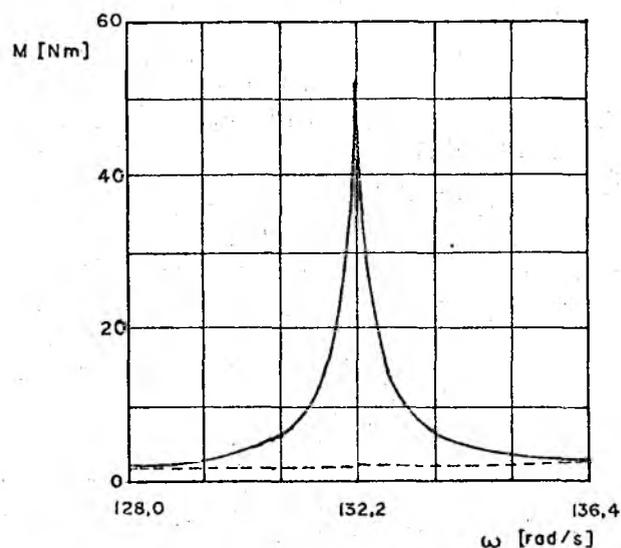


FIGURA 5.4. Curvas de resposta do vão em termos do momento fletor do extremo: a) — sem neutralizador, b) - - - - com o neutralizador otimizado.

Os dados que se achou para o neutralizador foram $k = 7,93 \cdot 10^4$ N/m e $\eta_s = 1,76$.

C A P Í T U L O 6

CONCLUSÕES

Embora já se tenha feito muitos comentários ao longo dos capítulos anteriores, quando das discussões dos resultados, serão aqui apresentadas algumas considerações finais sobre os resultados obtidos. Na seqüência, algumas sugestões quanto à continuidade deste estudo.

Em primeiro lugar, quanto às frequências naturais. Para um vão sem neutralizador, com extremos apoiados, a expressão que define as frequências naturais é igual àquela apresentada em bibliografia. Quando se modifica a vinculação, engastando os extremos, a variação nas frequências naturais é pequena. Contudo, para um sistema como este, em que as frequências naturais ocorrem muito próximas umas das outras, esta pequena variação pode significar até mesmo a troca de uma frequência natural por outra, de número imediatamente acima ou abaixo, quando se estudarem modos de vibração muito elevados. Quando é adicionado um neutralizador, ele introduz uma frequência natural no conjunto de frequências naturais do vão para cada grau de liberdade seu. Estas introduções se fazem em regiões de frequências próximas às frequências naturais do neutralizador, e as frequências naturais do vão que aí se situavam são então deslocadas. As frequências naturais do vão que originalmente se achavam distantes das frequências naturais do neutralizador são pouco modificadas, visto que nestas regiões a massa equivalente do mesmo é bastante reduzida. Em resumo, as

maiores modificações nas frequências naturais de um vão, provocadas pela adição de neutralizadores, ocorrem nas regiões de frequências em que se situam as frequências naturais destes neutralizadores, assumindo valores bastante expressivos.

Na obtenção da resposta do vão a uma força lateral concentrada, o maior problema foi com relação às frequências de excitação quando da comparação dos resultados com aqueles apresentados por CLAREN e DIANA [3]. No caso de um vão sem neutralizador com extremos apoiados, embora as expressões para o cálculo e os dados fossem idênticos, as frequências naturais foram divergentes. Contudo, excitando o vão com frequências naturais de mesmo número (valores numéricos diferentes), as curvas de deslocamento resultantes se mostraram muito semelhantes. Quando se troca a vinculação dos extremos chama a atenção o elevado momento fletor que aparece nos extremos, o que é preocupante, pois nestes pontos o cabo já é bastante solicitado. Quando se adiciona um neutralizador ao vão a resposta em termos de deslocamento, quando foi possível a comparação, não se mostrou muito fiel, apresentando variações de até quase 20%. Deve-se ressaltar que novamente houve problemas com as frequências, ainda mais que neste caso não estava explícito que se tratassem de frequências naturais, o que ocorrem no caso do vão sem neutralizador. Houve também uma questão quanto à massa do suporte de fixação do neutralizador ao cabo, que aqui não foi considerada apenas porque o seu valor não foi fornecido no artigo do qual se tiraram os dados para estabelecer a comparação.

Na verificação bastante simples que se fez para determinar a melhor posição do neutralizador no cabo se chegou à conclusão, já esperada, de que o neutralizado deve se situar num ponto

de máximo deslocamento lateral (anti-nó), que se tomou então como sendo aquele que se situa a um quarto de comprimento de onda do extremo. O próximo passo foi a otimização das características de um neutralizador dinâmico de um grau de liberdade a ser introduzido neste local. Embora o neutralizador tipo Stockbridge, de uso muito difundido, tenha dois graus de liberdade, ele pode ser aproximado por um conjunto de dois sistemas de um grau de liberdade [3]. Além disso, normalmente o seu segundo pico de ressonância é bem mais acentuado do que o primeiro. Estes dois fatos tornam então possível aplicar o estudo da otimização de características aqui desenvolvido em cima deste tipo de neutralizador, otimizando aquele que seria o seu segundo grau de liberdade. Voltando ao exemplo de otimização das características de um sistema de um grau de liberdade, ele se mostrou bastante eficiente, provocando uma acentuada redução nos momentos fletores que atuam sobre o cabo.

A determinação experimental de curvas de resposta em frequência de neutralizadores tipo Stockbridge mostrou que o seu comportamento é bastante não-linear, de forma que não é possível determinar para um determinado modelo deste neutralizador características únicas, que possam ser aplicadas indistintamente para qualquer nível de vibração. Assim sendo, existe a necessidade de se realizar estudos sobre o assunto, no sentido de que se possa a posteriori incrementar o programa de computação aqui desenvolvido para considerar este comportamento.

Ainda sobre este programa de computação, ele se mostrou uma boa ferramenta na análise do comportamento de um vão de linha de transmissão de energia elétrica, quando excitado por uma força lateral concentrada, com ou sem neutralizador. Poderia, portanto,

ter boa utilização no desenvolvimento de novos tipos de neutralizadores para linhas de transmissão. Seria útil, também, funcionar em paralelo com um trabalho experimental, no levantamento dos parâmetros de cabos para linhas de transmissão disponíveis no mercado. Esta última tarefa não foi possível realizar, com o intuito de checar os resultados, porque não se dispunha de uma bancada de testes adequada.

Além dos três estudos já sugeridos (considerar a não-linearidade do neutralizador tipo Stockbridge, desenvolver novos tipos de neutralizadores e levantar dados acerca dos cabos de uso corrente em linhas de transmissão), são finalmente apresentadas mais algumas sugestões sobre trabalhos futuros:

- analisar a influência de dois neutralizadores presos a um extremo do vão, ao invés de apenas um, embora já se possa prever que isto implicaria na manipulação de equações ainda mais longas;

- calcular a resposta de um vão de linha de transmissão à excitação promovida pelo vento, tendo por base as equações apresentadas no Apêndice III;

- utilizar as conclusões e as equações às quais aqui se chegou num estudo de propagação de ondas em linhas de transmissão de energia elétrica, quando vários vãos consecutivos seriam analisados na forma de uma estrutura periódica.

A P Ê N D I C E I

NEUTRALIZADOR TIPO STOCKBRIDGE

O neutralizador tipo Stockbridge é um neutralizador dinâmico de vibrações de dois graus de liberdade, sendo de uso muito difundido na redução do nível de vibração de cabos de linhas de transmissão de energia elétrica. A sua forma construtiva pode ser observada na figura I.1.

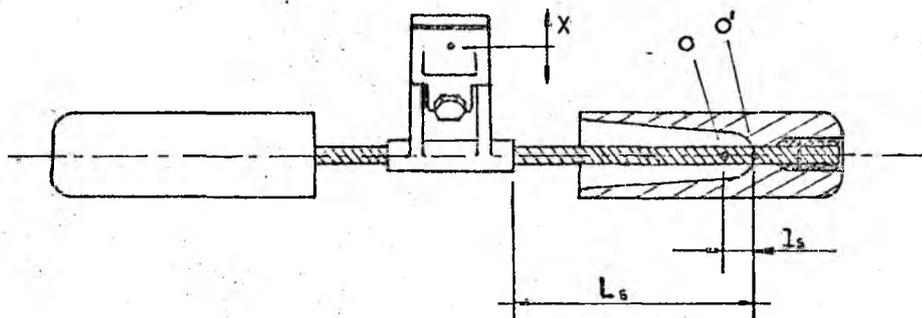


FIGURA I.1 - Neutralizador tipo Stockbridge

O neutralizador é preso ao cabo da linha de transmissão pelo suporte, que se situa na sua parte central. Ao suporte é fixo um cabo de aço, denominado cordoalha, que possui um comprimento livre igual a L_s em cada metade do neutralizador. Cada segmento destes do cabo possui uma rigidez lateral k . Nas extremidades da cordoalha estão presos os copos, de massa M' cada. Cada copo possui ainda um momento de inércia de massa J_o em relação ao cen-

tro de gravidade (ponto 0), o qual se distancia do ponto de fixação (ponto 0') pela distância ℓ_s .

As equações apresentadas abaixo foram retiradas dos artigos de CLAREN e DIANA [3] e WAGNER, RAMAMURTI, SASTRY e HARTMANN [5]. Foi verificado que estas equações são idênticas, havendo apenas uma discrepância, que se acredita que tenha se originado de um erro de impressão neste último artigo. Houve consulta a essas duas fontes apenas para se escolher uma maneira mais compacta de apresentar tais equações.

As frequências naturais deste neutralizador são dadas pela equação (I.1).

$$\omega_{1,2}^2 = 2k \frac{R \mp \sqrt{R^2 - (1/3) L_S^2 M^* J_O}}{M^* J_O} \quad (I.1)$$

onde $R = (1/3) L_S^2 M^* + J_O - M^* \ell_s (L_S - \ell_s)$.

As frequências naturais são importantes pois já se comprovou [3] [5] que é em torno destas frequências que o neutralizador dissipa maior energia quando é forçado a vibrar, notadamente em torno da maior delas. A maneira correta de se utilizar um neutralizador do tipo Stockbridge é, portanto, fazer com que estas duas frequências caiam na faixa de frequências a que estará sujeita uma linha de transmissão quando em serviço.

Considerando que a cordoalha possui um fator de perda η_s , a massa equivalente do neutralizador é dada por:

$$m_{eq} = \frac{F}{\ddot{x}} = 2 M^*(1 + i \eta_s) \frac{1 + i \eta_s - \frac{4 k \omega^2}{M^* \omega_1^2 \omega_2^2}}{(1 + i \eta_s - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}) (1 + i \eta_s - \frac{\omega^2}{\omega_2^2})} \quad (I.2)$$

onde \ddot{x} é a segunda derivada temporal do deslocamento x , conforme indicado na figura I.1, e F é a força resultante neste mesmo ponto e na mesma direção.

Para verificar o comportamento da equação (I.2) foi levantada a curva de resposta em frequência de um neutralizador comercial, conforme descrito no Apêndice II. Esta curva, portanto, foi obtida em termos do módulo da rigidez equivalente ($|k_{eq}| = \omega^2 |m_{eq}|$). A partir da curva de resposta foram induzidos os parâmetros necessários ao cálculo da equação (I.2). Inicialmente foram tomadas as frequências de pico como sendo as frequências naturais, o que realmente não é verdadeiro pois há amortecimento no neutralizador. Em seguida, a partir de três pontos da curva de resposta (os dois picos e um ponto intermediário), foram calculados os valores de k , M e η_s . Assim foi possível comparar a curva real com a curva teórica, obtida através da equação (I.2), as quais aparecem na figura I.2.

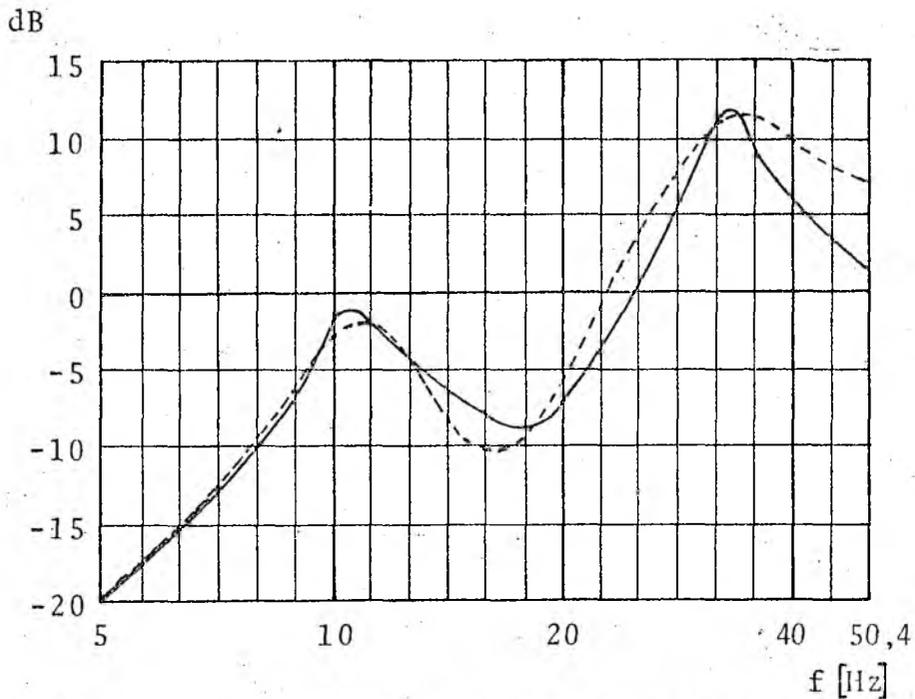


FIGURA I.2 - Curvas de resposta de um neutralizador tipo Stockbridge. Curva real —, curva teórica ---. Dados induzidos: $f_1 = 10,5$ Hz, $f_2 = 31,0$ Hz, $k = 14,7$ N/mm, $M^* = 3,59$ Kg e $\eta_s = 0,356$. Referencial 0 dB = 82,4 N/mm.

A boa concordância entre as curvas apresentadas acima levava a crer que seria relativamente fácil obter dados dos neutralizadores tipo Stockbridge a partir de suas curvas de resposta, obtidas experimentalmente. Porém se verificou posteriormente que tais neutralizadores apresentam um acentuado comportamento não-linear em função da amplitude de vibração, o qual está melhor detalhado no Apêndice II. Desta forma os parâmetros induzidos a partir da curva de resposta só são válidos para aquela amplitude de vibração que foi utilizada quando da obtenção da curva, não podendo ser usados indiscriminadamente.

A P Ê N D I C E II

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA CURVA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA
DE NEUTRALIZADOR TIPO STOCKBRIDGEII.1. GENERALIDADES

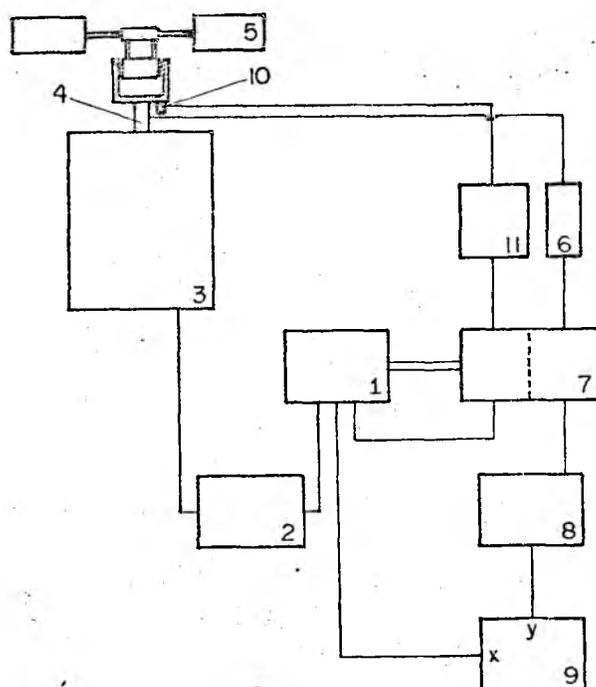
Apresenta-se neste apêndice o procedimento experimental que permitiu o levantamento de curvas de resposta em frequência de neutralizadores tipo Stockbridge, tanto de amostras comerciais como de um modelo linear. Descrevem-se na sequência as conclusões a que se chegou sobre os resultados obtidos.

Curva de resposta em frequência deve ser aqui entendida como sendo a representação gráfica do módulo força por deslocamento. Na frase anterior, a força é aquela necessária para fazer com que o neutralizador vibre com este deslocamento, sendo ambas as grandezas relacionadas ao ponto de fixação do neutralizador ao cabo da linha. Em outras palavras, poder-se-ia dizer que a curva de resposta é a representação gráfica do módulo da rigidez equivalente do neutralizador.

II.2. EXPERIMENTO

O neutralizador em teste é fixo a uma barra cilíndrica com diâmetro na faixa indicada pelo fabricante, da mesma forma como ele se prenderia ao cabo da linha de transmissão. Esta barra cilíndrica, bi-engastada, é parte de um suporte montado sobre o

excitador eletromagnético através de um transdutor de força. Junto a este suporte há ainda um acelerômetro que permite verificar o nível de vibração do neutralizador. A figura II.1 apresenta um esquema desta montagem, bem como um diagrama da interligação entre todos os instrumentos.



- 1) Controlador de Excitação B & K Tipo 1047
- 2) Amplificador de Potência B & K Tipo 2707
- 3) Conjunto Excitador B & K Tipo 4801/4812
- 4) Transdutor de Força KIAG Tipo 9331
- 5) Neutralizador Dinâmico
- 6) Amplificador Condicionador B & K Tipo 2626
- 7) Filtro Seguidor B & K Tipo 5716 WH 0255
- 8) Amplificador de Medida B & K Tipo 2607
- 9) Plotador X-Y HP Tipo 7045A
- 10) Acelerômetro B & K Tipo 4370
- 11) Medidor de Vibração B & K Tipo 2511

FIGURA II.1. Equipamento utilizado nos testes

Descreve-se a seguir o esquema elétrico do experimento. O Controlador de Excitação Brüel & Kjaer (B & K) tipo 1047 gera sinais harmônicos de várias frequências que são amplificados pelo Amplificador de Potência B & K tipo 2707. Estes sinais podem en-

tão acionar o Conjunto de Excitação Eletromagnético B & K tipo 4801/4812, que promove a vibração do neutralizador. Em decorrência deste movimento há a geração de sinal no Transdutor de Força Kistler Instrumente A. G. (KIAG) tipo 9331. Este sinal passa inicialmente pelo Amplificador Condicionador de Sinal B & K tipo 2626 e em seguida por um dos dois canais do Filtro Seguidor B & K tipo 5716 WH 0255. Na seqüência há o Amplificador de Medida B & K tipo 2607 e finalmente o sinal é registrado no Plotador X-Y Hewlett Packard (HP) tipo 7045A, através de sua entrada Y. Neste último amplificador o sinal de força é transformado em corrente contínua correspondente ao seu valor de raiz média quadrática (RMS) segundo uma escala logarítmica. O sinal a ser fornecido à entrada X do plotador provém do controlador de excitação e é proporcional à frequência de excitação, também em escala logarítmica. As escalas logarítmicas são preferidas por fornecerem maior resolução nas regiões de menores valores e permitirem ainda o alcance de valores elevados em seus outros extremos.

O sinal proveniente do acelerômetro é amplificado e duplamente integrado pelo Medidor de Vibração B & K tipo 2511. O valor de deslocamento (valor de RMS) pode então ser conhecido. Este sinal passa em seguida pelo outro canal do filtro seguidor e é injetado no controlador de excitação através da entrada do compressor. O compressor é um circuito que, usando o valor de deslocamento como retroalimentação, varia o ganho de saída do controlador de excitação de modo que o deslocamento permaneça constante.

O filtro seguidor é um filtro de banda de dois canais no qual a frequência central da banda pode ser continuamente variada. No caso, a frequência central estava sendo comandada pelo controlador de excitação através de duas conexões elétricas, como se

pode ver no esquema.

A varredura de frequências é realizada pelo controlador de excitação, da frequência inferior à superior, fornecendo assim a curva de resposta automaticamente.

Foram traçadas inicialmente três curvas para um neutralizador comercial com amplitudes de deslocamento diferentes. Em seguida foram traçadas duas curvas para um modelo de neutralizador supostamente linear, também para amplitudes de deslocamento diferentes. No modelo, a cordoalha foi substituída por um eixo sólido em cujas extremidades foram montados os copos, por ajuste prenso. Esquemas do neutralizador comercial e do modelo aparecem na figura II.2.

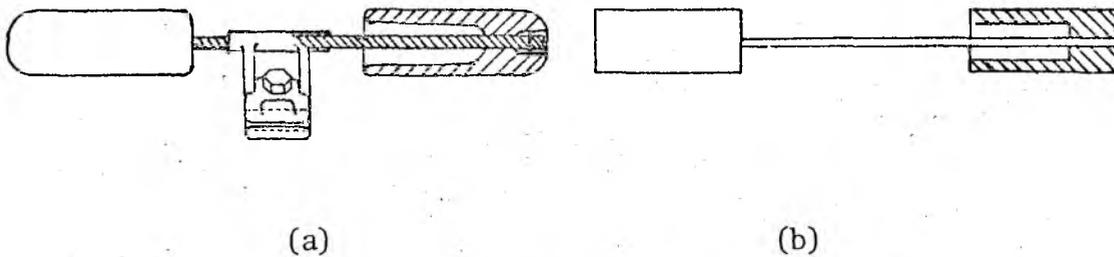


FIGURA II.2. Neutralizadores: (a) comercial, (b) modelo linear.

II.3. RESULTADOS

As curvas do neutralizador comercial, para deslocamentos de 0,02, 0,063 e 0,2 mm RMS, são dadas na figura II.3.

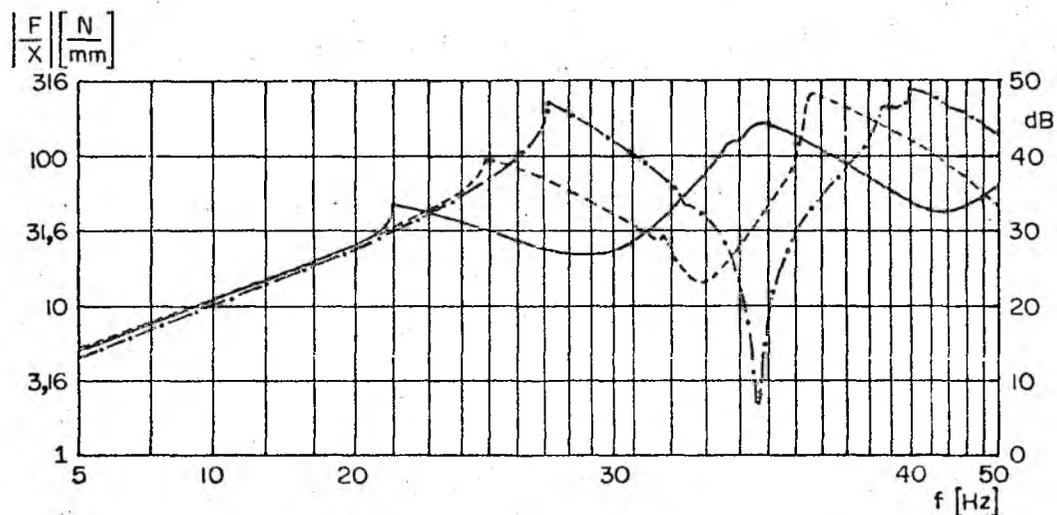


FIGURA II.3. Curvas de resposta em frequência do neutralizador comercial. - - - - - 0,02 mm RMS, - - - - - 0,063 mm RMS, ———— 0,2 mm RMS.

As curvas relativas ao modelo, para deslocamentos de 0,02 e 0,063 mm RMS, são dadas na figura II.4.

A tabela II.1 foi montada para evidenciar a mudança das frequências anti-ressonantes em função da mudança da amplitude de vibração.

X (mm RMS)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)
0,02	16,3	40
0,063	14	31
0,2	11	27,5

TABELA II.1. Valores das frequências anti-ressonantes.

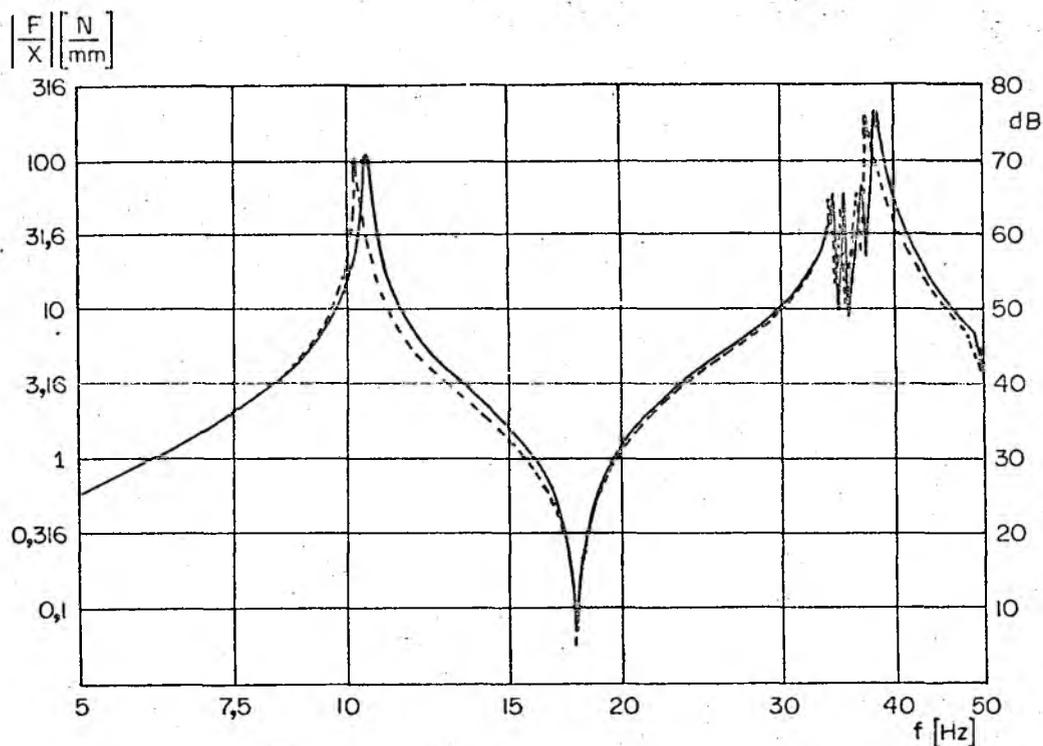


FIGURA II.4. Curvas de resposta em frequência do modelo linear. ————— 0,02 mm RMS, - - - - - 0,063 mm RMS.

II .4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Pode-se notar dois pontos importantes na comparação entre as curvas do neutralizador comercial para amplitudes de deslocamento diferentes:

- a) as frequências anti-ressonantes deslocam-se para valores inferiores quando se aumenta o deslocamento;
- b) os máximos relativos (picos) diminuem e os mínimos re-

lativos (vales) aumentam seus valores quando se aumenta o deslocamento.

Não há praticamente diferença entre as curvas do modelo para as duas amplitudes diferentes.

Observando os resultados chega-se à conclusão de que o neutralizador comercial se afasta bastante do comportamento linear por apresentar curvas bem distintas para diferentes níveis de deslocamento.

A redução nos valores das frequências anti-ressonantes indica ter havido um decréscimo na rigidez, ao passo que a aproximação entre picos e vales indica ter aumentado o amortecimento, quando se aumentou o nível de deslocamento.

Como estes fatos não se manifestaram no modelo, os mesmos poderiam ser explicados admitindo-se que há maior movimento entre os fios que compõem a cordoalha para maiores níveis de vibração. Esta movimentação afetaria a unidade do cabo com conseqüente redução da rigidez e aumentaria a dissipação de energia pela fricção entre os fios. Foi, inclusive, percebida uma pequena rotação dos copos em torno do seu eixo longitudinal, para valores elevados de deslocamento, o que viria a corroborar a hipótese acima.

O aumento do amortecimento pode ser benéfico ou não. Por outro lado, a variação observada nas frequências não o é. Para um certo diâmetro de cabo de linha de transmissão, as frequências geradas são proporcionais à velocidade do vento que incide sobre a mesma. Mais ainda, com o aumento do vento, o nível de excitação tende a aumentar.

Tem-se então como conseqüência do aumento do vento: aumento do nível de vibração com aumento da frequência excitadora.

Porém, com o aumento do nível de vibração o neutralizador

diminui sua frequência natural.

Estes fatos devem ser levados em conta na seleção do neutralizador, caso contrário pode-se obter uma desintonização do mesmo em circunstâncias em que deveria ser mais eficiente.

A conclusão final é que não se pode fixar uma única curva de resposta em frequência para tal tipo de neutralizador. Para cada valor de deslocamento há uma curva de resposta em frequência distinta, com conseqüente modificação nas frequências de anti-resonância.

A P Ê N D I C E III

EXCITAÇÃO EÓLICA

Serão aqui apresentadas algumas características importantes das forças dinâmicas que surgem quando da ação de um fluido em escoamento sobre um cilindro. São analisadas especificamente as forças de suspensão (ver figura III.1) decorrentes da incidência de uma massa de ar perpendicularmente ao eixo do cilindro, tal qual a ação transversal do vento sobre o cabo de uma linha de transmissão.

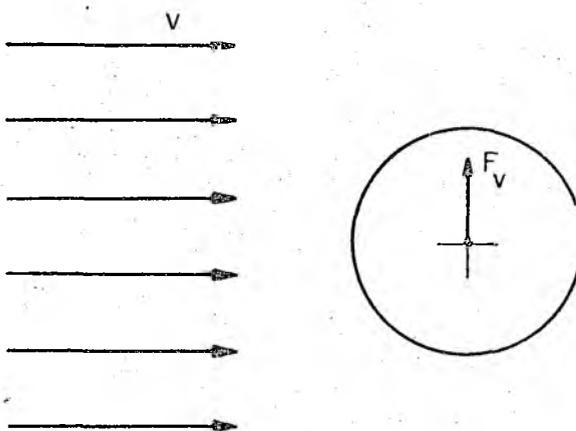


FIGURA III.1 - Direcionamento da velocidade do fluido v e das forças de suspensão F_v com relação ao cilindro, este apresentado em corte transversal.

As forças de suspensão devem-se ao desprendimento de vórtices e, para uma velocidade constante de incidência do fluido sobre um cilindro fixo, apresentam comportamento aleatório [9]. Ao se verificar o espectro destas forças, percebe-se a existência de com

ponentes predominantes em uma certa faixa de frequências. Na região central desta faixa ocorre um pico, a uma frequência f_s que pode ser determinada pela equação abaixo, onde v é a velocidade do fluido e d é o diâmetro do cilindro.

$$f_s = C_s \cdot \frac{v}{d} \quad (\text{III.1})$$

O fator C_s , denominado número de Strouhal, permanece constante (aproximadamente igual a 0,2) para uma faixa de números de Reynolds ampla (de 1000 a 50000, segundo [7]), dentro da qual normalmente recaem os casos práticos de linhas de transmissão.

A amplitude das forças de suspensão sobre um cilindro oscilante pode ser calculada através da equação seguinte

$$f_v = \frac{1}{2} \rho d L v^2 C_L \quad (\text{III.2})$$

onde ρ é a massa específica do fluido, L é o comprimento do cilindro e C_L é o coeficiente de suspensão.

A equação (III.2) pode ser modificada para se apresentar na seguinte forma

$$f_v = \frac{1}{2} \rho d L v_s^2 C_{L_r} \quad (\text{III.3})$$

onde v_s é a velocidade que corresponde, através da equação (III.1), à frequência de vibração do cilindro, e C_{L_r} é o coeficiente de suspensão modificado.

A equação (III.3) apresenta a vantagem de, para uma determinada frequência de vibração, apresentar a amplitude das forças de suspensão apenas em função de C_{L_r} .

Comparando as equações (III.2) e (III.3) chega-se à relação apresentada abaixo, entre C_{L_r} e C_L .

$$C_{L_r} = \frac{v^2}{v_s^2} \cdot C_L = r^2 C_L \quad (\text{III.4})$$

O coeficiente C_{L_r} (assim como C_L) é função de $r = v/v_s$ e também da razão w/d , onde w é a amplitude de deslocamento da vibração na direção de f_v . Para cada valor de r é possível então traçar uma curva C_{L_r} versus w/d , a exemplo do que ocorre na figura III.2.

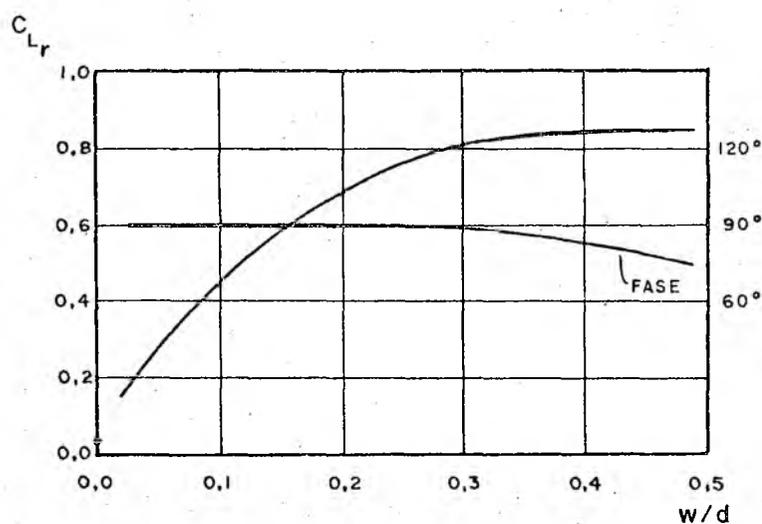


FIGURA III.2 - Coeficiente de suspensão modificado em função de w/d para $r=1$. Curvas de amplitude e de diferença de fase com relação ao deslocamento.

A figura III.2 refere-se ao caso específico em que $r = 1$.
Para outros valores de r , entretanto, as curvas apresentam-se de
forma semelhante. Verifica-se que C_{L_r} possui um comportamento nota
damente não-linear, difícil de ser considerado.

R E F E R Ê N C I A S

- [1] Stockbridge, G.H. Overcoming vibration in transmission cables. Electrical World, vol. 86, nº 26, págs. 1304 e 1305, Dezembro de 1925.
- [2] Simpson, A. Determination of the natural frequencies of multiconductor overhead transmission lines. Journal of Sound and Vibration, vol. 20, págs. 417-449, 1972.
- [3] Claren, R. e Diana, G. Mathematical analysis of transmission line vibration. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. 88, págs. 1741-1771, Dezembro de 1969.
- [4] Frame, J.S. Matrix Functions and Applications. Partes I a V, IEEE spectrum, 1964.
- [5] Wagner, H., Hartmann, K., Dynamics of Stockbridge dampers. Ramamurti, V. e Shastry, R.V.R. Journal of Sound and Vibration, vol. 30, págs. 207-220, 1973.
- [6] Snowdon, J.C. Vibration and shock in damped mechanical systems. John Wiley & Sons, 1968.
- [7] Farquharson, F.B. e McHugh, R.E.Jr. Wind tunnel investigation of conductor vibration with use of rigid models. AIEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. 75, págs. 871-878, Outubro de 1956.

- [8] Bishop, R.E. e Hassan, A.Y. The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid. Proc. Roy. Soc. A, vol. 277, plate 1, págs. 32-50, 1963.
- [9] Diana, G. e Falco, M. On the forces transmitted to a vibrating cylinder by a blowing fluid. Meccanica, págs. 9-22, Março de 1971.
- [10] Espíndola, J.J. Numerical methods in wave propagation in periodic structures. Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1974.
- [11] Silva, J.B. Propagação de ondas em sistemas periódicos discretos e contínuos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1981.