

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MÉTODOS DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA EM
SISTEMAS DE POTÊNCIA UTILIZANDO O SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

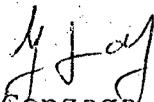
AGUINALDO SILVEIRA E SILVA

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1982

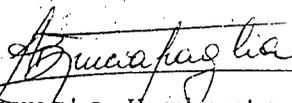
MÉTODOS DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA EM
SISTEMAS DE POTÊNCIA UTILIZANDO O SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV

Aguinaldo Silveira e Silva

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA E APROVADA EM
SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.

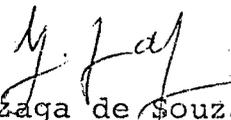


Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, D.Sc.
Orientador

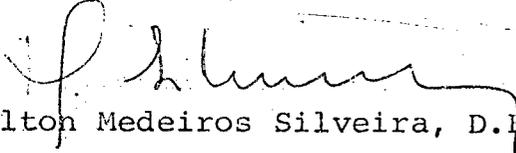


Prof. Augusto Humberto Bruciapaglia, Dr. Ing.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica.

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES:



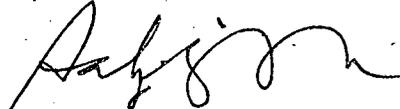
Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, D.Sc.
Orientador



Prof. Hamilton Medeiros Silveira, D. Et.



Prof. Hans Helmut Zürn, Ph.D.



Prof. Sahjendra Narain Singh, Ph.D.

À minha família

A G R A D E C I M E N T O S

Ao professor Luiz Gonzaga de Souza Fonseca pela orientação durante a realização deste trabalho.

À CNEN e à UFSC pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho pode ser dividido em duas partes. Na primeira apresenta-se uma revisão do problema da aplicação do segundo método de Liapunov ao estudo da estabilidade de sistemas de energia elétrica abordando-se a questão da geração de funções de Liapunov e determinação de domínios de estabilidade.

Na segunda parte estuda-se o caso máquina-barras infinita com reguladores de tensão e velocidade, decaimento de fluxo e efeito da saliência transitória. Um critério de estabilidade encontrado na literatura é usado. Uma nova demonstração, que introduz o problema de realização mínima, é dada. Mostra-se que com a aplicação deste critério de estabilidade pode-se obter sistematicamente uma função de Liapunov para este caso.

O modo de obtenção do domínio de estabilidade é indicado.

ABSTRACT

This work can be divided into two parts. In the first part a review of the problem concerning the application of Liapunov's second method to the stability analysis of power systems is presented. Attention is focused on the question of generating Liapunov functions and determining stability domains.

In the second part the case of machine-infinite bus is studied with voltage regulator and speed governor, flux decay and the effect of transient saliency. A stability criterion found in the literature is used. A new proof which introduces the problem of minimal realization is given. It is shown that with the application of this stability criterion, one can systematically obtain a Liapunov function for this case.

The method of obtaining the stability domain is indicated.

ÍNDICECAPÍTULO I

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO II

MODELO MATEMÁTICO	4
2.1. Introdução	4
2.2. Modelo máquina-barras infinita com reguladores	4
2.2.1. Modelo da máquina síncrona	4
2.2.2. Modelo do regulador de tensão	10
2.2.3. Modelo do regulador de velocidade	10
2.2.4. Modelo completo do sistema	11
2.3. Sistema com n máquinas	12
2.4. Conclusão	18

CAPÍTULO III

O SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV	19
3.1. Introdução	19
3.2. Definições	19
3.3. Conceitos de estabilidade	20
3.4. Funções definidas	22
3.5. Principais teoremas sobre estabilidade	23
3.6. Conclusão	25

CAPÍTULO IV

GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE LIAPUNOV	26
4.1. Introdução	26
4.2. Método de Zubov	27
4.3. Função tipo energia	30
4.4. Método de Popov	32
4.4.1. Caso de uma única não-linearidade	32
4.4.2. Extensão para o caso de múltiplas não linearida des	36
4.4.2.1. Aplicação a um sistema com n máquinas ..	39
4.5. Conclusão	42

CAPÍTULO V

DETERMINAÇÃO DE DOMÍNIOS DE ESTABILIDADE	43
5.1. Introdução	43
5.2. Métodos para a determinação do domínio de estabilidade .	43
5.3. Conclusão	52

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÃO DE UM MODELO MAIS COMPLETO NO ESTUDO DA ESTABILI DADE	53
6.1. Introdução	53
6.2. Critérios de estabilidade	54
6.3. Procedimento para a construção da função V	57
6.4. Aplicação a um sistema máquina-barra infinita	58
6.4.1. Construção da função V	59
6.4.2. Determinação do domínio de estabilidade	63
6.5. Conclusão	64

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E INDICAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS 66

BIBLIOGRAFIA 70

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A análise da estabilidade constitui um item importante no planejamento e operação de sistemas de potência.

Um sistema de potência consiste essencialmente de um grande número de máquinas operando em paralelo e que devem manter sincronismo entre si. O sistema está sujeito continuamente a uma série de perturbações; as cargas a ele ligadas variam ao longo do tempo, são realizadas manobras (retirada de geradores e linhas para manutenção, etc.), e principalmente o sistema está sujeito a faltas (curto-circuitos). Torna-se então necessário de terminar os efeitos que estas perturbações terão sobre a estabilidade do sistema e quais medidas poderão ser tomadas preventivamente.

O problema da estabilidade de sistemas de potência e o da estabilidade transitória em especial, tem sido objeto de muitas pesquisas^[10].

A estabilidade transitória é associada aos problemas de estabilidade causados por grandes perturbações (perdas de linhas de transmissão, entrada ou saída de grandes cargas ou geradores, curto-circuitos), principalmente no período de poucos segundos que se segue à ocorrência da perturbação. Estas perturbações provocam um desequilíbrio entre a potência mecânica fornecida aos geradores e a potência elétrica absorvida pelo sistema. Como resultado, alguns geradores tendem a acelerar em relação aos demais, até o ponto em que as forças sincronizantes não mais atuem no sentido de manter sincronismo. Neste caso um, ou um grupo de geradores sairá de sincronismo.

O notável crescimento e a interligação entre sistemas de potência, com o fim de assegurar maior confiabilidade e economia, tornaram os estudos relacionados com a estabilidade, de uma crescente complexidade.

O método normalmente adotado para a realização deste estudo, consiste na integração, por métodos numéricos, das equações diferenciais que regem o comportamento do sistema durante o período transitório. O resultado, geralmente dado em forma gráfica mostrando a evolução dos ângulos das máquinas em relação ao tempo, permite chegar a conclusões sobre a estabilidade. Tais estudos, realizados em computador, permitem que se use um modelo detalhado do sistema. Por outro lado o tempo de processamento torna-se um sério obstáculo à medida em que o sistema analisado cresce em tamanho e complexidade. A análise e interpretação das curvas não é um critério que leve facilmente a uma conclusão, exigindo a presença de especialistas. A determinação do tempo crítico de retirada de uma falta também não é imediata, tornando-se necessário testar vários tempos de retirada da falta, até encontrar aquele para o qual o sistema perde estabilidade.

Devido às dificuldades citadas os métodos diretos apresentam-se como uma possível alternativa. Pode-se definir como métodos diretos aqueles que dispensam a necessidade de solução das equações diferenciais que representam o sistema, para estudar a sua estabilidade. Um método direto, denominado critério das áreas iguais, já era conhecido desde algum tempo, mas aplicável somente a sistemas de no máximo duas máquinas [36].

O método direto que se apresentou como o mais promissor é o devido a Liapunov, por razões históricas denominado segundo método de Liapunov e há muito reconhecido como poderoso instrumento no estudo da estabilidade de sistemas não-lineares.

A aplicação do segundo método de Liapunov a sistemas de potências pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Construção de uma função de Liapunov (ou função V) para o sistema.

2. Determinação de um domínio de estabilidade usando esta função e dado por:

$$V(X) < b$$

onde b é uma constante e X é o vetor de estados do sistema.

3. Integração das equações do sistema durante o pe

riodo de falta, para determinar o ponto inicial X^a após a retirada da falta. O valor de V é calculado neste ponto e se

$$V(X^a) < b$$

então o sistema é estável.

Observa-se no passo 3 que ainda é necessária a integração numérica das equações diferenciais, mas somente durante o período de falta. Do passo 3 observa-se ainda que a condição de estabilidade é imediata, não necessitando qualquer análise. Esta condição é apenas suficiente, o que implica que se não for atendida nada se poderá afirmar sobre a estabilidade do sistema.

O tempo crítico de retirada de uma falta (t_c) pode ser determinado integrando as equações diferenciais até o estado X^c para o qual

$$V(X^c) = b$$

Neste trabalho é estudada a aplicação do segundo método de Liapunov ao estudo da estabilidade de sistemas de potência. O problema da construção de funções de Liapunov e determinação de domínios de estabilidade é analisado em detalhe, procurando-se apresentar uma síntese dos trabalhos já desenvolvidos.

O capítulo II apresenta o modelo matemático do sistema.

O capítulo III resume a teoria do segundo método de Liapunov.

O capítulo IV considera o problema da geração de funções de Liapunov para sistemas de potência. São apresentados os principais métodos encontrados na literatura.

O capítulo V aborda o problema da determinação de domínios de estabilidade. São analisados e comentados vários métodos, mostrando suas vantagens e desvantagens.

O capítulo VI utiliza um modelo mais completo, considerando o caso máquina ligada à barra infinita com reguladores de tensão e velocidade, decaimento de fluxo e efeito de saliência.

O capítulo VII apresenta conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO II

MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA

2.1. Introdução

A escolha de um modelo do sistema de potência para a utilização de métodos diretos implica um compromisso entre o grau de detalhe com que o sistema é representado e as dificuldades que um modelo mais complexo origina na construção de funções de Liapunov, e determinação de domínios de estabilidade.

Neste capítulo são apresentados dois modelos. O primeiro representa o caso máquina-barra infinita com reguladores de tensão e velocidade, decaimento de fluxo e efeito de saliência dos polos, e que será utilizado no capítulo VI. O segundo é um modelo para n máquinas, com várias simplificações e muito utilizado na literatura.

2.2. Modelo máquina-barra infinita com reguladores.

2.2.1. Modelo da máquina síncrona.

Um modelo típico máquina-barra infinita é o dado pela figura 1 (|38|, |76|, |77|).

Usando as variáveis de Park, as tensões são dadas por:

$$v_d = -r i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - w\psi_q \quad (2.1)$$

$$v_q = -r i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + w\psi_d \quad (2.2)$$

onde v_d , i_q , Ψ_d são, respectivamente, tensão, corrente e fluxo concatenado de eixo direto,

v_q , i_d , Ψ_q são, respectivamente, tensão, corrente e fluxo concatenado de eixo em quadratura,

r é a resistência da armadura e

w é a frequência angular.

Desprezando as resistências e as derivadas dos fluxos de eixo direto e em quadratura em relação ao tempo, as equações (2.1) e (2.2) ficam:

$$v_d = -w\Psi_q \quad (2.3)$$

$$v_q = w\Psi_d \quad (2.4)$$

Usando as relações [37]:

$$\Psi_q = -L_q i_q \quad (2.5)$$

$$\Psi_d = M_f i_f - L_d i_d \quad (2.6)$$

onde L_q , L_d são, respectivamente, as indutâncias de eixo direto e em quadratura e

M_f é o valor máximo da indutância mútua entre cada fase da armadura e o enrolamento de campo.

Substituindo em (2.3) e (2.4):

$$v_d = -x_q i_q \quad (2.7)$$

$$v_q = E_q - x_d i_d \quad (2.8)$$

onde x_q , x_d são, respectivamente, as reatâncias de eixo direto e em quadratura e

$$E_q = wM_f i_f \quad (2.9)$$

No circuito do campo tem-se:

$$E_f' = R_f i_f + \frac{d\Psi_f}{dt} \quad (2.10)$$

onde E_f' é a tensão de excitação e

R_f é a resistência do circuito de campo.

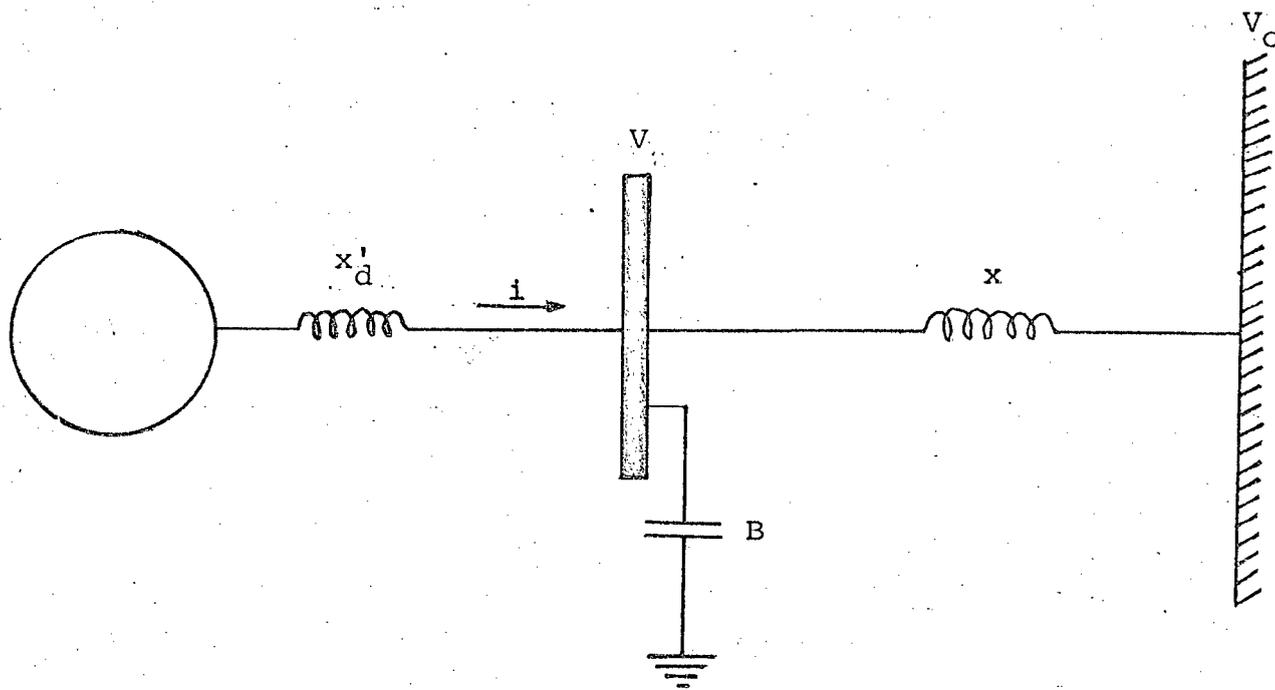


FIGURA 1

x'_d - reatância transitória do gerador

x - reatância da linha de transmissão

B - susceptância devido ao efeito capacitivo da linha de transmissão

V - tensão terminal do gerador

V_0 - tensão da barra infinita.

Multiplicando (2.10) por $\frac{wM_f}{R_f}$:

$$\frac{wM_f}{R_f} E'_f = wM_f i_f + \frac{wM_f}{R_f} \frac{d\psi_f}{dt} \quad (2.11)$$

$$\text{Definindo } E_f = \frac{wM_f}{R_f} E'_f \quad (2.12)$$

$$\psi_F = \frac{wM_f}{R_f} \psi_f \quad (2.13)$$

e usando (2.9) obtêm-se:

$$\frac{d\psi_F}{dt} = E_f - E_q \quad (2.14)$$

Usando as equações |37| :

$$E'_q = \frac{wM_f}{L_{ff}} \psi_f \quad (2.15)$$

$$T'_{do} = \frac{L_{ff}}{R_f} \quad (2.16)$$

$$E'_q = E_q - (x_d - x'_d) i_d \quad (2.17)$$

onde E'_q é uma tensão proporcional ao fluxo concatenado com o campo, obtêm-se:

$$\dot{\psi}_F = T'_{do} [E_q - (x_d - x'_d) i_d] \quad (2.18)$$

A posição e velocidade angulares em relação a uma referência são dadas por:

$$\theta = wt \quad (2.19)$$

Se a posição for medida com relação a um eixo que se desloca a velocidade w_0 constante então:

$$\theta = (w + w_0) t + \delta_0 \quad (2.20)$$

onde w é a velocidade em relação ao eixo de referência girante e

δ_0 é a posição para $t = 0$.

De (2.20) segue

$$\delta = \omega t \quad (2.21)$$

e δ dá a posição angular em relação ao eixo que gira a velocidade ω_0 .

O torque é dado por:

$$T = I \ddot{\theta} = I \ddot{\delta} \quad (2.22)$$

sendo I o momento de inércia.

A potência é dada por:

$$P = T w = w I \ddot{\delta} \quad (2.23)$$

Considera-se que w não varia muito em relação a ω_0 , e que sem grande erro pode-se fazer

$$P = \omega_0 I \ddot{\delta} \quad (2.24)$$

definindo-se

$$M = \omega_0 I \quad (2.25)$$

como a constante de inércia da máquina.

O balanço das potências atuando na máquina conduz a

$$P = P_0 - P' - Dw - P_e \quad (2.26)$$

onde:

P - é a potência resultante

P_0 - potência mecânica no equilíbrio

P' - termo devido ao regulador de velocidade

Dw - amortecimento

P_e - potência elétrica fornecida pela máquina.

Usando as variáveis de Park, a potência aparente fornecida pela máquina é:

$$S = vi^* = v_d i_d + v_q i_q + j(v_q i_d - v_d i_q) \quad (2.27)$$

A potência ativa \hat{e} , portanto:

$$P_e = v_d i_d + v_q i_q \quad (2.28)$$

A partir do circuito da figura 1 calcula-se a corrente, e usando-se as equações (2.3), (2.4), (2.8) e (2.18) obtém-se:

$$i_d = \frac{\Psi_F (1 - Bx)}{T'_{do} X'_d} - \frac{V_o \cos \delta}{X'_d} \quad (2.29)$$

$$i_q = \frac{V_o \operatorname{sen} \delta}{X_q} \quad (2.30)$$

$$v_d = \frac{x_q V_o \operatorname{sen} \delta}{X_q} \quad (2.31)$$

$$v_q = \frac{x \Psi_F}{X_d T'_{do}} + \frac{x'_d V_o \cos \delta}{X'_d} \quad (2.32)$$

$$\text{onde } X_q = x + x_q (1 - Bx) \quad (2.33)$$

$$X'_d = x + x'_d (1 - Bx) \quad (2.34)$$

Substituindo (2.29) em (2.18):

$$E_q = \frac{X'_d \Psi_F}{X_d T'_{do}} - \frac{(x'_d - x'_q) V_o \cos \delta}{X'_d} \quad (2.35)$$

$$\text{onde } X_d = x + x_d (1 - Bx) \quad (2.36)$$

Usando (2.28), (2.29), (2.30), (2.31) e (2.32) calcula-se

$$P_e = \frac{\Psi_F V_o \operatorname{sen} \delta}{X_d T'_{do}} + \frac{V_o^2 (x'_d - x'_q) \operatorname{sen} 2\delta}{2X_q X'_d} \quad (2.37)$$

A partir das equações (2.18), (2.24), (2.26) e (2.35) obtêm-se o sistema:

$$\dot{\delta} = w$$

$$\dot{w} = (P_0 - P' - Dw - A\psi_F \sin\delta - G\sin 2\delta)/M \quad (2.38)$$

$$\dot{\psi}_F = E_f - R\psi_F + \eta_2 \cos\delta$$

onde

$$A = \frac{V_0}{x'_d T'_{do}}$$

$$G = \frac{(x'_d - x'_q) V_0^2}{2x'_d x'_q} \quad (2.39)$$

$$\eta_2 = \frac{(x'_d - x'_d') V_0}{x'_d}$$

$$R = \frac{x_d}{x'_d T'_{do}}$$

2.2.2. Modelo do regulador de tensão.

O efeito do regulador é considerado de forma aproximada por um sinal exponencial.

$$E_f = E_{fo} - K_v E_{fo} e^{-t/T_v} \quad (2.40)$$

Em forma diferencial

$$\dot{E}_f = - (E_f - E_{fo})/T_v \quad (2.41)$$

2.2.3. Modelo do regulador de velocidade.

Para simplificar o estudo, o regulador de velocidade é representado por um sistema linear de primeira ordem:

$$\dot{p}' = -g_2 p' + g_1 w \quad (2.42)$$

2.2.4. Modelo completo do sistema.

Usando (2.38), (2.41) e (2.42) obtêm-se o sistema:

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta} &= w \\
 \dot{w} &= (P_O - P' - Dw - A \Psi_F \text{ sen} \delta - G \text{ sen } 2 \delta) / M \\
 \dot{\Psi}_F &= E_f - R \Psi_F + \eta_2 \cos \delta \\
 \dot{P}' &= -g_2 P' + g_1 w \\
 \dot{E}_f &= - (E_f - E_{f0}) / T_v
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Escolhendo-se as seguintes variáveis de estado, para que o ponto de equilíbrio fique na origem:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \delta - \delta_0 \\
 x_2 &= w \\
 x_3 &= \Psi_F - \Psi_{F0} \\
 x_4 &= P' \\
 x_5 &= E_f - E_{f0}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Substituindo-se (2.44) em (2.43) obtêm-se finalmente o sistema:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \{- Dx_2 - A \Psi_{F0} [\text{sen}(x_1 + \delta_0) - \text{sen} \delta_0] - \\
 &\quad - G [\text{sen } 2(x_1 + \delta_0) - \text{sen } 2 \delta_0] - \\
 &\quad - Ax_3 \text{ sen}(x_1 + \delta_0) - x_4\} / M \\
 \dot{x}_3 &= x_5 - Rx_3 + \eta_2 [\cos(x_1 + \delta_0) - \cos \delta_0] \\
 \dot{x}_4 &= g_1 x_2 - g_2 x_4 \\
 \dot{x}_5 &= -x_5 / T_v
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

que representa uma única máquina ligada à barra infinita e considerando o efeito da saliência, decaimento de fluxo e reguladores de tensão e velocidade.

2.3. Sistema com n - máquinas.

O estudo da estabilidade de sistemas multimáquinas por métodos diretos é, geralmente, realizado usando um modelo extremamente simplificado do sistema. Inicialmente é realizada uma redução às barras internas dos geradores. Portanto, um sistema com n geradores terá n barras e poderá ser representado por n equações diferenciais. Para esta redução é necessário que as cargas sejam modeladas como impedâncias constantes, o que constitui uma aproximação reconhecida como sendo inadequada, mas aceitável.

Neste modelo a máquina síncrona é representada por uma tensão constante atrás da reatância transitória de eixo direto. Despreza-se o decaimento de fluxo e a ação do regulador de tensão. Considera-se ainda a potência mecânica de entrada como sendo constante, desprezando-se a ação do regulador de velocidade.

A potência de amortecimento é considerada proporcional à velocidade e devida a atrito mecânico e torques assíncronos.

Normalmente considera-se apenas a máquina síncrona de rotor liso, desprezando-se o efeito de polos salientes.

A rede é simplificada desprezando-se as condutâncias, da matriz de admitâncias do sistema após a redução às barras internas dos geradores.

Com todas as simplificações acima mencionadas, um sistema de potência com n máquinas pode ser representado por n equações diferenciais de segunda ordem do tipo:

$$\begin{aligned}
& m_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + a_i \frac{d\delta_i}{dt} + b_{ij} \left(\frac{d\delta_i}{dt} - \frac{d\delta_j}{dt} \right) + \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) = P_{mi} \quad (2.46) \\
& i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

onde:

δ_i - é o ângulo em graus elétricos entre o eixo do rotor e um eixo girando a velocidade síncrona.

m_i - constante de inércia da i -ésima máquina.

a_i - constante de amortecimento mecânico da i -ésima máquina.

b_{ij} - constante de amortecimento assíncrono entre a i -ésima e a j -ésima máquina.

E_i - tensão interna da i -ésima máquina.

B_{ij} - susceptância de transferência entre a i -ésima e a j -ésima barra.

P_{mi} - potência mecânica de entrada na i -ésima máquina.

O ponto de equilíbrio de (2.46) é dado por

$$\begin{aligned}
w_i &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\
\delta_i &= \delta_i^0 \quad (2.47)
\end{aligned}$$

$$\text{onde } w_i = \dot{\delta}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

No ponto de equilíbrio

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i^0 - \delta_j^0) = P_{mi} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.48)$$

Substituindo (2.48) em (2.46):

$$\begin{aligned}
& m_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + a_i \frac{d\delta_i}{dt} + b_{ij} \left(\frac{d\delta_i}{dt} - \frac{d\delta_j}{dt} \right) + \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j B_{ij} \left[\sin(\delta_i - \delta_j) - \sin(\delta_i^0 - \delta_j^0) \right] = 0 \\
& i = 1, 2, \dots, n \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Para o estudo da estabilidade por métodos diretos de ve-se descrever o sistema por variáveis de estado, colocando (2.49) na seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (2.50)$$

O número correto de variáveis de estado em (2.50) para o caso de sistemas de potência foi objeto de estudo por vários autores [46], [54], [55], [71], [74]. Os primeiros trabalhos sobre a utilização do segundo método de Liapunov na determinação da estabilidade de sistemas de potência usavam $2n$ variáveis.

Por outro lado sabe-se que a ordem da realização mínima (irreduzível) de um sistema é igual ao grau da matriz função de transferência racional do sistema. Em [46] escolhem-se as seguintes variáveis de estado:

$$\begin{aligned}
x_1 &= w_1 \\
x_2 &= w_2 \\
&\vdots \\
x_n &= w_n \\
x_{n+1} &= \delta_1 - \delta_1^0 \\
x_{n+2} &= \delta_2 - \delta_2^0 \\
&\vdots \\
x_{2n} &= \delta_n - \delta_n^0
\end{aligned} \qquad (2.51)$$

Desenvolve-se então um modelo do tipo

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= Ax - Bf(\sigma) \\
\sigma &= Cx
\end{aligned} \qquad (2.52)$$

Com uma matriz função de transferência dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.53)$$

Ainda em [46] mostra-se que o grau de $G(s)$ é $2n - 1$, para o caso de amortecimento não uniforme

$$\left(\frac{a_1}{m_1} \neq \frac{a_2}{m_2} \neq \dots \neq \frac{a_n}{m_n}\right) \quad \text{e } 2n-2 \text{ para o caso de amorteci}$$

mento uniforme

$$\left(\frac{a_1}{m_1} = \frac{a_2}{m_2} = \dots = \frac{a_n}{m_n} = \lambda\right).$$

Demonstra-se ainda que para os casos em que

$$\frac{a_1}{m_1} = \frac{a_2}{m_2} = \dots = \frac{a_p}{m_p} = \lambda \quad \text{e}$$

$$\frac{a_{p+1}}{m_{p+1}} \neq \frac{a_{p+2}}{m_{p+2}} \neq \dots \neq \frac{a_n}{m_n} \neq \lambda$$

sendo $p < n$ e para o caso em que há mais de um conjunto de λ repetidos, o grau de $G(s)$ também é $2n-1$.

Conclui-se portanto que o número de variáveis de estado é $2n-1$ para o caso de amortecimento não uniforme e $2n-2$ para o caso de amortecimento uniforme, obtendo-se uma realização mínima para (2.53).

Escolhendo-se a n -ésima máquina como referência obtem-se as seguintes variáveis de estado para o caso de amortecimento não-uniforme:

$$x_1 = w_1$$

$$x_2 = w_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = w_n$$

$$x_{n+1} = (\delta_1 - \delta_n) - (\delta_1^0 - \delta_n^0) \quad (2.54)$$

$$x_{n+2} = (\delta_2 - \delta_n) - (\delta_2^0 - \delta_n^0)$$

$$\vdots$$

$$x_{2n-1} = (\delta_{n-1} - \delta_n) - (\delta_{n-1}^0 - \delta_n^0)$$

Com esta escolha pode-se escrever (2.46) na forma da da em (2.52). Para isto são feitas as seguintes definições:

$$M = \text{diag}(m_i) \quad i = 1, \dots, n$$

$$R = [r_{ij}] \quad \text{é uma matriz com elementos}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} -a_i - \sum_k b_{ik} & i = j \\ b_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

o vetor de dimensão mx1 onde $\sigma_k = \delta_{ij} - \delta_{ij}^0$,

$$k = (i-1)n - \frac{i(i-1)}{2} + j \quad i < j$$

e $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$ (2.55)

f(σ) tem dimensão mx1 onde

$$f_k(\sigma_k) = E_i E_j B_{ij} [\text{sen}(\sigma_k + \delta_{ij}^0) - \text{sen} \delta_{ij}^0]$$

e $m = \frac{n(n-1)}{2}$

δ é um vetor nx1 onde $\delta_i = \delta_{in} - \delta_{in}^0$

$$w = [w_1, \dots, w_n]^T$$

σ relaciona-se com δ através da matriz F de dimensão mx(n-1), tal que:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1n} - \delta_{1n}^0 \\ \delta_{2n} - \delta_{2n}^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{n-1,n} - \delta_{n-1,n}^0 \end{bmatrix}$$

(2.56)

A relação entre δ e w é

$$\dot{\delta} = Sw \quad (2.57)$$

$$\text{onde } S = \begin{bmatrix} & -1 \\ & -1 \\ I_{n-1} & \vdots \\ & -1 \end{bmatrix}$$

Definindo $D = FS$, observa-se que cada linha de $D^T f$ é a soma dos termos não lineares em cada equação de (2.49).

De (2.56) segue que:

$$\sigma = Cx \quad (2.58)$$

onde $C = [O \ F]$ e O é matriz nula de dimensão $m \times n$.

Com estas definições (2.49) fica:

$$\dot{w} = M^{-1} R w - M^{-1} D^T f(Cx) \quad (2.59)$$

$$\dot{\delta} = Sw$$

$$\text{ou } \dot{x} = Ax - Bf(\sigma) \quad (2.60)$$

$$\sigma = Cx$$

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} M^{-1} R & O \\ S & O \end{bmatrix} \text{ é matriz quadrada de dimensão } 2n-1.$$

$$\text{e } B = \begin{bmatrix} M^{-1} & D^T \\ O & \end{bmatrix} \text{ é de dimensão } 2n-1 \times m$$

O modelo aqui desenvolvido é semelhante ao usado em [28] e [46], e é conveniente para a aplicação do critério generalizado de Popov para a obtenção sistemática de funções de Liapunov, conforme será visto no Capítulo IV.

Para o caso de amortecimento uniforme são definidas as seguintes variáveis de estado [46] :

$$\begin{aligned}
x_1 &= w_1 - w_n \\
x_2 &= w_2 - w_n \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= w_{n-1} - w_n \\
x_n &= (\delta_1 - \delta_n) - (\delta_1^0 - \delta_n^0) \\
x_{n+1} &= (\delta_2 - \delta_n) - (\delta_2^0 - \delta_n^0) \\
&\vdots \\
x_{2n-2} &= (\delta_{n-1} - \delta_n) - (\delta_{n-1}^0 - \delta_n^0)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Com estas definições pode-se descrever um sistema com amortecimento uniforme do mesmo modo que em (2.60), com uma definição apropriada das matrizes.

4. Conclusão

Foram apresentados dois modelos para o estudo da estabilidade de sistemas de energia elétrica. O primeiro considera o caso máquina-barras infinita, com decaimento de fluxo, efeito da saliência dos polos e reguladores de tensão e velocidade. Os reguladores são modelados de forma aproximada. O segundo modelo aplica-se a sistemas com n máquinas. São feitas várias hipóteses que simplificam o modelo. Embora a maioria de tais hipóteses sejam aproximações aceitáveis, outras podem levar a erros consideráveis. O exemplo mais evidente é a desconsideração das condutâncias de transferência do sistema reduzido. Enquanto que as resistências das linhas do sistema original podem ser desprezadas sem grande erro, as condutâncias de transferência do sistema reduzido às barras internas dos geradores dependem não só destas resistências, mas também das cargas modeladas como impedâncias constantes.

CAPÍTULO III

O SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV

3.1. Introdução

O segundo método de Liapunov permite o estudo da estabilidade de equações diferenciais, sem a necessidade do conhecimento explícito das soluções destas equações. Pode-se fazer uma analogia entre o segundo método de Liapunov e a seguinte consideração de ordem física [34] : Se um sistema físico isolado tem um ponto de equilíbrio X^e e a taxa de variação de sua energia $E(x)$ com o tempo $\frac{dE(x)}{dt}$ é negativa para todo X , exceto X^e , então a energia decrescerá continuamente até o valor mínimo $E(X^e)$. No entanto, de modo geral, o segundo método de Liapunov independe do conceito de energia do sistema. Neste sentido ele pode ser considerado como uma generalização do teorema de Lagrange sobre a energia potencial mínima, o qual estabelece uma condição de equilíbrio [65] .

Neste capítulo são dadas as definições de estabilidade e os conceitos e teoremas que constituem o núcleo do segundo método de Liapunov. O material aqui apresentado segue de perto a referência [64], e aplica-se tanto a sistemas autônomos como não-autônomos. Como, de modo geral, os modelos utilizados no caso de sistemas de potência são autônomos, as simplificações que ocorrem nas definições e teoremas para este caso, são destacadas.

3.2. Definições

$$\text{Seja } \frac{dX}{dt} = f(X, t) \quad (3.1)$$

uma equação diferencial onde

$$X(t) \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Definição 3.1: A solução de (3.1) é uma função vetorial única $\phi(t; X_0, t_0)$ diferenciável em t , tal que para qualquer X_0, t_0

$$\begin{aligned} \phi(t_0; X_0, t_0) &= X_0 \\ \frac{d\phi}{dt}(t; X_0, t_0) &= f(\phi(t; X_0, t_0), t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

A existência, unicidade e continuidade das soluções de (3.1) são asseguradas supondo que f satisfaz uma condição de Lipschitz local. Com isto (3.1) representa um sistema dinâmico contínuo no tempo e $\phi(t; X_0, t_0)$ é um movimento do sistema dinâmico [34].

Definição 3.2: Um estado X_0 é um estado de equilíbrio de (3.1) em t_0 se $\phi(t; X_0, t_0) \equiv X_0$

para todo $t \geq t_0$.

No que se segue, o vetor 0 será considerado o ponto de equilíbrio de (3.1). Isto não representa perda de generalidade de uma vez que sempre é possível transladar o ponto de equilíbrio para a origem.

3.3. Conceitos de estabilidade.

As definições de estabilidade no sentido de Liapunov são apresentadas nesta seção.

Definição 3.3: O estado de equilíbrio 0 de (3.1) é estável se existe para cada $\epsilon > 0$ um número $\delta(t_0, \epsilon) > 0$

tal que

$$\|X_0\| < \delta(t_0, \epsilon) \implies \|\phi(t; X_0, t_0)\| < \epsilon$$

Definição 3.4: O estado de equilíbrio 0 de (3.1) é uniformemente estável sobre $[t_0, \infty)$ se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|X_1\| < \delta(\epsilon), t_1 \geq t_0 \implies \|\phi(t; X_1, t_1)\| < \epsilon$$

Neste caso δ não depende de t_0 .

O conceito de instabilidade é dado a seguir:

Definição 3.5: O estado de equilíbrio 0 em t_0 é instável, se ele não for estável no tempo t_0 .

Quando o movimento não somente permanece na vizinhança do estado de equilíbrio, mas retorna a ele após uma perturbação, tem-se estabilidade em sentido mais forte do que o definido anteriormente. De modo mais preciso:

Definição 3.6: O estado de equilíbrio 0 em t_0 é estável assintoticamente em t_0 se:

a. É estável no tempo t_0 .

b. Existe um número $\delta_1(t_0)$ tal que

$$\|x_0\| < \delta_1(t_0) \implies \|\phi(t; x_0, t_0)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Definição 3.7: O estado de equilíbrio 0 no tempo t_0 é estável assintoticamente uniformemente sobre $[t_0, \infty)$ se:

a. É estável uniformemente sobre $[t_0, \infty)$.

b. Existe um número $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\|x_1\| < \delta_1 \quad t_1 \geq t_0 \implies \|\phi(t; x_1, t_1)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ a convergência é uniforme com respeito a } t_1.$$

No caso de estabilidade assintótica o conjunto

$$B_{\delta_1}(t_0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < \delta_1(t_0)\}$$

é uma região de atração para o estado de equilíbrio 0, pois qualquer trajetória com estado inicial pertencente a este conjunto no tempo t_0 , convergirá para 0. Para o caso de estabilidade assintótica uniforme, o domínio de atração não dependerá do tempo inicial t_0 .

Definição 3.8: O estado de equilíbrio 0 no tempo t_0 é estável assintoticamente globalmente se

$$\phi(t; x_0, t_0) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

qualquer que seja x_0 no tempo t_0 .

Neste caso o domínio de atração de 0 será o \mathbb{R}^n , e o sistema terá necessariamente um único ponto de equilíbrio em t_0 .

3.4. Funções definidas.

O método direto de Liapunov envolve vários conceitos sobre funções, os quais são vistos a seguir.

Definição 3.9: Uma função contínua $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pertence à classe K se:

- a. $\alpha(\cdot)$ não decresce
- b. $\alpha(0) = 0$
- c. $\alpha(p) > 0$ sempre que $p > 0$.

A primeira condição significa que α aumenta monotonicamente com p .

Definição 3.10: Uma função contínua $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida positiva localmente se:

- a. $V(t, 0) = 0$, $\forall t \geq 0$
- b. $V(t, X) \geq \alpha(\|X\|)$, $\forall t \geq 0$, α pertencente a classe K, e para X pertencente a uma região

$$B_r = \{X : \|X\| \leq r\}, \quad r > 0.$$

Se a condição b for válida para todo $X \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha(p) \rightarrow \infty$ quando $p \rightarrow \infty$ então V é uma função definida positiva.

Para o caso de função independente do tempo tem-se a seguinte definição, com condições mais simples de serem verificadas:

Definição 3.11: Uma função contínua $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida positiva localmente se e somente se:

- a. $W(0) = 0$
- b. $W(X) > 0$, $\forall X \neq 0$ pertencente a $B_r = \{X: \|X\| \leq r\}$, $r > 0$.

Se b for válida para qualquer $X \neq 0$ e $W(X) \rightarrow \infty$ quando $\|X\| \rightarrow \infty$, uniformemente em X , então W é uma função definida positiva.

Deve-se observar que as condições da definição 3.11 são necessárias e suficientes.

Definição 3.12: Uma função contínua $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é decrescente se existe uma função $\beta(\cdot)$ pertencente a classe K tal que $V(t, X) \leq \beta(\|X\|)$, $\forall t \geq 0, \forall X \in B_r$ onde

$$B_r = \{ X : \|X\| < r \}, \quad r > 0.$$

Uma função contínua $W(X) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre decrescente.

3.5. Principais Teoremas sobre Estabilidade

Nesta seção são apresentados os principais teoremas sobre estabilidade, os quais constituem o núcleo do método direto de Liapunov. Os teoremas consideram sistemas não autônomos, observando-se que se simplificam para o caso de sistemas autônomos.

Teorema 3.1: O estado de equilíbrio 0 no tempo t_0 de (3.1) é estável, se existe uma função definida positiva local, continuamente diferenciável, tal que

$$\dot{V}(t, X) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall X \in B_r$$

$$\text{onde } B_r = \{ X : \|X\| < r \}, \quad r > 0$$

Teorema 3.2: O ponto de equilíbrio 0 no tempo t_0 é uniformemente estável sobre $[t_0, \infty)$ se existe uma função definida positiva local V , decrescente, continuamente diferenciável, tal que

$$\dot{V}(t, X) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall X \in B_r.$$

No caso de sistemas autônomos, os teoremas 3.1 e 3.2 são equivalentes, pois os conceitos de estabilidade e estabilidade uniforme se equivalem.

Para o estudo da estabilidade assintótica e da estabilidade assintótica global aplicam-se os teoremas seguintes:

Teorema 3.3: O estado de equilíbrio 0 no tempo t_0 de (3.1) é estável assintoticamente uniformemente sobre o intervalo $[t_0, \infty)$, se existe uma função definida positiva local, decrescente, continuamente diferenciável, tal que $-\dot{V}$ é definida positiva local.

Para um sistema autônomo, a condição de que V deve ser decrescente é desnecessária pois $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será necessariamente decrescente.

Teorema 3.4: O estado de equilíbrio 0 no tempo t_0 de (3.1) é estável assintoticamente globalmente se existe uma função V definida positiva, decrescente, continuamente diferenciável, tal que:

$$\dot{V}(t, X) \leq -\gamma(\|X\|), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \text{ onde } \gamma \text{ pertence a classe } K.$$

A condição de $-\dot{V}$ ser definida positiva localmente para existir estabilidade assintótica é, em muitos casos, restritiva e pode ser substituída por uma condição mais branda. Esta condição é dada pelo teorema de La Salle, o qual só se aplica a sistemas autônomos ou periódicos.

Teorema 3.5: Seja (3.1), um sistema autônomo e $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida positiva localmente, continuamente diferenciável, em uma região B_r . Supondo $\dot{V}(X) \leq 0 \quad \forall X \in B_r$ e seja $m = \sup V(X)$. Definindo o conjunto S tal que

$$\|x\| < r$$

$$S = \{X : V(X) \leq m, \dot{V}(X) = 0\},$$

se S não contém nenhuma trajetória de (3.1) além da trajetória $X \equiv 0$, então o estado de equilíbrio 0 de (3.1) é assintoticamente estável.

Este resultado pode ser estendido para o caso de estabilidade assintótica global através do seguinte teorema:

Teorema 3.6: Supondo que (3.1) é autônomo e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida positiva, continuamente diferenciável, com $\dot{V}(X) \leq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$. Supondo ainda que o conjunto $S = \{ X \in \mathbb{R}^n : V(X) = 0 \}$ não contém nenhuma trajetória de (3.1) diferente de 0. Então 0 é um ponto de equilíbrio estável assintoticamente globalmente de (3.1).

3.6. Conclusão

Foram apresentados os conceitos de estabilidade e os teoremas que constituem a essência do segundo método de Liapunov. O caso de sistemas autônomos, no qual normalmente se enquadram os modelos dos sistemas de potência em estudos de estabilidade, é destacado.

CAPÍTULO IV

GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE LIAPUNOV

4.1. Introdução

São conhecidos vários métodos para gerar funções de Liapunov, mas poucos são de utilidade prática para o caso de sistemas de potência.

Em [15] são utilizados os métodos de Cartwright e Aizerman para o caso máquina-barra infinita. Em [58] é usada uma função de Liapunov quadrática, baseada no método desenvolvido em [12]. O método dos gradientes variáveis é usado em [19]. O método de Zubov [27] foi empregado em [76] para o caso máquina-barra infinita e em [14] para o mesmo caso mas com um modelo mais detalhado. O método generalizado de Zubov apresentado em [59], foi utilizado para gerar funções de Liapunov para o caso máquina ligada à barra infinita com diferentes modelos em [50].

Todos estes métodos são de difícil aplicação para sistemas multimáquinas e são pouco utilizados na literatura.

A função tipo energia, construída a partir de considerações de ordem física, tem sido largamente utilizada em muitos trabalhos para sistemas com n máquinas.

O método de Popov permite a construção sistemática de funções de Liapunov. Ele engloba o procedimento de Kalman, usado para o caso máquina-barra infinita em [44], e o método baseado na demonstração do teorema de Anderson-Moore, utilizado em vários trabalhos ([28], [46], [69], [71], [73]) para o caso de n máquinas.

Neste capítulo a atenção será focalizada no método de Zubov, que apresenta um especial interesse teórico, na função tipo energia e no método de Popov.

4.2. Método de Zubov |27|

O método desenvolvido por V.I. Zubov apresenta um especial interesse, pois permite a determinação, ao menos teoricamente, do domínio de estabilidade exato de um sistema.

Dado o sistema:

$$\dot{X} = f(X) \quad (4.1)$$

a solução da equação diferencial parcial:

$$(\text{grad } V)^T f(X) = -\Phi(X) (1-V) \quad (4.2)$$

onde

X é o vetor de estados e

Φ é uma função definida positiva ou semi-definida positiva, permite determinar uma função de Liapunov V .

Todo ponto do espaço de estados que pertence ao domínio de estabilidade assintótica, obedece à condição:

$$0 < V < 1 \quad (4.3)$$

Portanto

$$V = 1 \quad (4.4.)$$

dá a fronteira exata do domínio de estabilidade de (4.1).

Deve-se ainda observar que a escolha de Φ não afeta a determinação do domínio.

Embora teoricamente o método de Zubov resolva o problema da determinação exata do domínio da estabilidade, na prática apenas em casos especiais consegue-se uma solução fechada para (4.2).

Escolhendo-se então Φ de forma quadrática, determina-se V como uma série infinita da forma:

$$V = V_2 + V_3 + \dots + V_m + \dots + V_\infty \quad (4.5)$$

onde V_m é uma forma homogênea de grau M em x_1, x_2, \dots, x_n ou seja,

$$V_M(\gamma x_1, \gamma x_2, \dots, \gamma x_n) = \gamma^M V_M(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.6)$$

para γ constante.

Limitações de ordem computacional exigem, no entanto, que a série seja truncada até um grau N determinado:

$$V(N) = V_2 + V_3 + \dots + V_N \quad (4.7)$$

O domínio de estabilidade é agora determinado de maneira apenas aproximada e é dado pelo menor valor de

$$V(N) = C, \quad C > 0 \quad (4.8)$$

tangente à superfície

$$\dot{V}(N) = (\text{grad } V)^T f(X) = 0 \quad (4.9)$$

Pode-se demonstrar que a região assim determinada, está contida no domínio de estabilidade exato.

A equação (4.1) pode ser decomposta em série, obtendo-se

$$\frac{dx_S}{dt} = \sum_{i=1}^n P_{Si} x_i + \sum P_S (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n)$$

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k} \dots x_n^{m_n}$$

$$\text{com } \sum_{K=1}^n m_K > 1 \quad S = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

e a parte linear deve ser estável.

Substituindo (4.7) em (4.2):

$$\sum_{S=1}^n \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_S} + \frac{\partial V_3}{\partial x_S} + \dots + \frac{\partial V_N}{\partial x_S} \right) f_S(x) =$$

$$= -\phi(X) (1 - V_2 - V_3 \dots - V_N) \quad (4.11)$$

Substituindo (4.10) em (4.11):

$$\begin{aligned}
& \sum_{S=1}^n \left\{ \frac{\partial V_2}{\partial x_S} + \frac{\partial V_3}{\partial x_S} + \dots + \frac{\partial V_N}{\partial x_S} \right\} \left(\sum_{i=1}^n P_{S_i} x_i + \right. \\
& + \left. \sum P_S (m_1, m_2, \dots, m_x, \dots, m_n) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_K^{m_K} \dots \right. \\
& \left. \dots x_n^{m_n} \right\} = - \phi(X) (V_1 - V_2 - V_3 \dots - V_N) = \\
& = - \phi + \phi V_2 + \phi V_3 + \dots + \phi V_N \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Comparando termos com a mesma potência em X:

$$\sum_{S=1}^n \frac{\partial V_2}{\partial x_S} \left(\sum_{i=1}^n P_{S_i} x_i \right) = - \phi \quad (4.13)$$

o que permite achar V_2

$$\sum_{S=1}^n \frac{\partial V_m}{\partial x_S} \left(\sum_{i=1}^n P_{S_i} x_i \right) = R_m (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$m = 3, 4, \dots, N \quad (4.14)$$

onde R_m é função homogênea de grau m , obtida a partir de (4.12), determinando-se V_3, V_4, \dots, V_N .

O uso de uma série infinita em (4.5) deveria, teoricamente, permitir a determinação da fronteira exata do domínio de estabilidade. A limitação de ordem computacional restringe esta série a um pequeno número de termos, reduzindo o domínio. A esta desvantagem soma-se ainda a característica de convergência não monotônica, o que significa que o uso de um número maior de termos na série não leva necessariamente a um domínio maior.

O método de Zubov foi utilizado na literatura apenas para o caso máquina-barras infinita. Em [76] considera-se o efeito de saliência e de amortecimento variável. Em [14] é incluído ainda o efeito devido ao decaimento de fluxo.

A aplicação do método exige um grande esforço computacional, e nenhuma aplicação a sistemas multimáquinas foi até agora publicada.

4.3. Função tipo energia

As primeiras funções de Liapunov aplicadas a sistemas de potência foram derivadas por tentativa, fazendo considerações sobre a energia do sistema.

O trabalho clássico de Magnusson, estendido posteriormente por Aylett, já sugeria o uso da função energia do sistema e o ponto de equilíbrio instável com menor energia, para o estudo da estabilidade de sistemas de potência e para a determinação do tempo crítico de eliminação de faltas. Trabalhos posteriores realizados por Gless [24], El-Abiad e Nagappan [17], também utilizaram funções tipo energia. Estas funções são conhecidas como tipo energia por não representarem realmente a energia total do sistema, já que as condutâncias de transferência do sistema reduzido são desprezadas. A função energia não é uma função de Liapunov para o sistema de potência, pois sua derivada em relação ao tempo é indefinida ([17], [69]).

Funções tipo energia têm sido aplicadas em trabalhos recentes, nos quais o uso de métodos mais refinados para a estimação de domínios de estabilidade, produz resultados satisfatórios e de utilidade prática em estudos de estabilidade de sistemas de potência.

Usando o modelo (2.60) a função tipo energia para este modelo é dada por:

$$V = w^T M w + 2 \sum_{K=1}^m \int_0^{\sigma_K} f(\sigma_K) d\sigma_K \quad (4.15)$$

onde w , M e $f(\sigma_K)$ são definidos no capítulo II.

Usando estas definições a expressão (4.15) pode ainda ser escrita como:

$$V = \sum_{i=1}^n M_i w_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} \left[-\cos \delta_{ij} + \cos \delta_{ij}^0 - (\delta_{ij} - \delta_{ij}^0) \text{sen } \delta_{ij}^0 \right] \quad (4.16)$$

A derivada de (4.15) em relação ao tempo ao longo da solução de (2.60) é dada por:

$$\dot{V} = w^T R w \quad (4.17)$$

A matriz R é definida negativa, e portanto \dot{V} é semi-definida negativa no espaço de estados usado. Utilizando o teorema 3.5 comprova-se que (4.15) é uma função de Liapunov para a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio de (2.60).

A função (4.15) é adequada para sistema com amortecimento não-uniforme. Para o caso de amortecimento uniforme é usada a função (|26|, |69|, |73|):

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n M_i M_j (w_i - w_j)^2}{2 \sum_{K=1}^n M_K} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} \left[-\cos \delta_{ij} + \cos \delta_{ij}^0 - \right.$$

$$\left. - (\delta_{ij} - \delta_{ij}^0) \operatorname{sen} \delta_{ij}^0 \right] \quad (4.18)$$

Em (4.16) e (4.18), o primeiro termo do lado direito está associado à energia cinética do sistema.

$$\text{O termo } \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} \left[-\cos \delta_{ij} + \cos \delta_{ij}^0 \right] \text{ é}$$

associado à energia magnética armazenada nas diversas linhas de transmissão do sistema. O termo

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} (\delta_{ij} - \delta_{ij}^0) \operatorname{sen} \delta_{ij}^0 \text{ representa uma}$$

energia de posição. Estes dois últimos termos são associados à energia potencial do sistema.

Uma interpretação da função tipo energia será dada na seção referente à determinação de domínios de estabilidade.

Em alguns trabalhos a função tipo energia é usada, com as variáveis de estado definidas em relação ao centro de ângulo do sistema (|7|, |22|, |23|).

4.4. Método de Popov.

4.4.1. Caso de uma única não-linearidade.

O estudo de sistemas de controle do tipo linear, com uma realimentação não-linear, recebeu uma grande atenção por parte de muitos autores, nas últimas décadas. Uma contribuição importante, para o estudo de tais sistemas foi o problema apresentado por Lur'e e Postnikov, relacionado a um sistema descrito por:

$$\dot{x} = A x + b f(\sigma) \quad (4.19)$$

$$\sigma = C^T x$$

onde

A é $n \times n$,

x , b e C são vetores $n \times 1$,

σ é um escalar,

$G(s) = C^T \cdot (sI - A)^{-1} b$ é a função de transferência de

(4.19) e f é à classe de funções tais que

1. f é função contínua de valores reais

2. $f(0) = 0$ (4.20)

3. $0 < \sigma f(\sigma) < \sigma^2 K$, $\sigma \neq 0$

A não-linearidade obedece, portanto, a uma condição, de setor, mostrada na figura 2.

O problema da determinação das restrições que devem ser atendidas pela parte linear, para que o sistema (4.19) seja assintoticamente estável globalmente (a.e.g.), qualquer que seja a função $f(\sigma)$, pertencente à classe definida em (4.20), é conhe

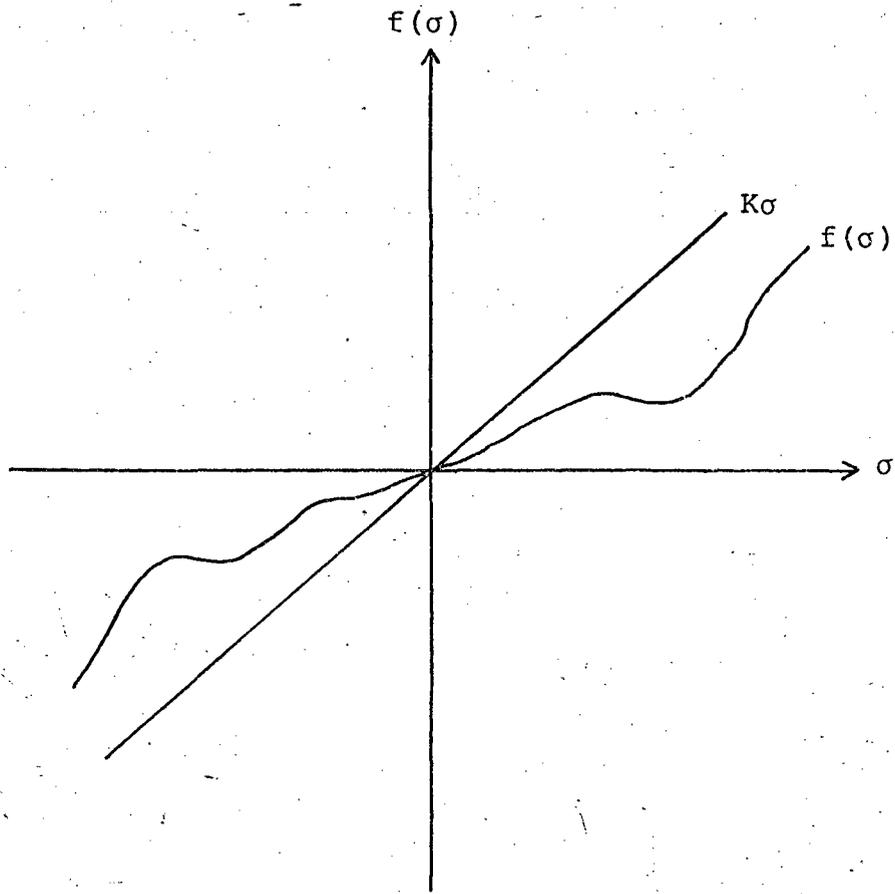


FIGURA 2

cido como problema de Lur'e-Postnikov. Estes autores estudaram a estabilidade de (4.19) usando uma função de Liapunov do tipo parte quadrática mais integral da não-linearidade.

$$V(X) = X^T P X + q \int_0^{C^T X} f(\sigma) d\sigma \quad (4.21)$$

conhecida como função de Liapunov do tipo Lur'e-Postnikov.

Os trabalhos de Popov conduziram a um critério no domínio da frequência que dá condições suficientes para (4.19) ser a.e.g.

Critério de Popov: O sistema (4.19) é a.e.g. para toda a função pertencente à classe definida em (4.20) se:

$$\pi(w) = \operatorname{Re} (1 + iqw) G(iw) \geq 0 \quad (4.22)$$

para todo w real e para algum $q \geq 0$.

Posteriormente Kalman e Yakubovitch demonstraram que o critério de Popov é condição necessária e suficiente para a existência de uma função de Liapunov dada por (4.21) para o sistema (4.19).

Calculando a derivada de (4.21) em relação ao tempo:

$$\dot{V}(X) = X^T [A^T P + P A] X + 2X^T P b f(\sigma) + q C^T A X f(\sigma) + q C^T b f^2(\sigma) \quad (4.23)$$

Somando e subtraindo $\frac{1}{K} f^2(\sigma)$ e $2p^T X \sqrt{r} f(\sigma)$ em (4.23), onde p é um vetor e

$$r = \sqrt{\frac{1}{K} - q C^T b}:$$

$$\begin{aligned} -\dot{V}(X) &= -X^T [A^T P + P A] X - 2p^T X \sqrt{r} f(\sigma) + r f^2(\sigma) \\ &- 2X^T P b f(\sigma) - q C^T A X f(\sigma) - \frac{1}{K} f^2(\sigma) + \\ &+ 2p^T X \sqrt{r} f(\sigma) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Supondo que exista um vetor p tal que:

$$p \sqrt{r} = P b - h \quad (4.25.a)$$

$$A^T P + PA = - p^T p \quad (4.25.b)$$

$$\text{onde } h = -\frac{1}{2} (qA^T C + \frac{C}{2}) \quad (4.25.c)$$

e substituindo em (4.24), obtêm-se:

$$-\dot{V}(X) = \left[p^T X - \sqrt{r} f(\sigma) \right]^2 + f(\sigma) \left[\sigma - \frac{f(\sigma)}{K} \right] \quad (4.26)$$

Portanto, o problema de determinar se $V(X)$ é definida negativa ou semi-definida negativa é grandemente simplificado se existir solução para (4.25). Condições necessárias e suficientes para a solução de (4.25) são dadas pelo seguinte lema:

Lema de Yakubovitch-Kalman: Seja A estável, (A,b) completamente controlável, h um vetor real e r um escalar real. Então existem um vetor real p e uma matriz $P = P^T > 0$ satisfazendo (4.25) se, e somente se, a condição (4.22) for satisfeita.

A determinação do vetor p , pode ser feita pelo procedimento de Kalman [35].

Procedimento de Kalman:

1. Faz-se a fatorização espectral de (4.22) que fica na forma

$$\pi(i\omega) = \theta(i\omega) \theta(-i\omega) \quad (4.27)$$

$$2. \text{ Calcula-se } v(i\omega) = -\theta(i\omega) + \sqrt{r} \Psi(i\omega) \quad (4.28)$$

onde $\Psi(i\omega) = \det(i\omega I - A)$.

$$3. \text{ Da identidade } p^T (i\omega I - A)^{-1} b \equiv \frac{v(i\omega)}{\Psi(i\omega)} \quad (4.29)$$

determina-se o vetor p .

4. Substituindo em (4.25.b) resolve-se para a matriz P . Com isto fica determinada a função de Liapunov da forma (4.21).

Deve-se observar que no caso de muitos sistemas, e em particular no caso de sistemas de potência, as não-linearidades satisfazem a condição de setor (4.20), apenas em um intervalo de terminado. Portanto não é possível concluir estabilidade assintótica global. Mas pode-se construir uma função de Liapunov do tipo dado em (4.21) que permite a determinação de uma região de estabilidade assintótica ao redor do ponto de equilíbrio estável.

A determinação deste domínio foi discutida por Walker e McClamroch [66] e Weissenberger [67].

Um sistema constituído de uma máquina ligada à barra infinita ou de duas máquinas, pode ser representado por (4.19). Pode-se portanto construir uma função de Liapunov do tipo (4.21) usando o procedimento de Kalman [44].

4.4.2. Extensão para o caso de múltiplas não-linearidades.

Seja o sistema dado por:

$$\dot{X} = AX - Bf(\sigma) \quad (4.30)$$

$$\sigma = CX$$

onde

$$X \text{ é } n \times 1,$$

$$A \text{ é } n \times n,$$

$$B \text{ é } n \times m,$$

$$C \text{ é } m \times n.$$

e f é um vetor $m \times 1$ onde $f_i(\sigma_i)$, ou seja, o i -ésimo componente de f só depende de σ_i , e tal que f_i pertence à classe definida em (4.3).

Pode-se propor para este sistema uma função de Liapunov do tipo [1] :

$$V = X^T P X + 2 \int_0^\sigma f^T Q d\sigma \quad (4.31)$$

onde $Q = \text{diag}(q_i)$.

Calculando a derivada de (4.31) em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{V} = X^T (A^T P + PA) X - 2X^T P B f + 2f^T Q C A X - \\ - 2f^T Q C B f \end{aligned} \quad (4.32)$$

Somando e subtraindo $2f^T K^{-1} N f + 2X^T C^T N f$

onde $N = \text{diag}(n_i)$

$K = \text{diag}(K_i)$

em (4.32):

$$\begin{aligned} \dot{V} = & X^T (A^T P + PA)X - 2X^T \left[PB - A^T C^T Q^T - C^T N \right] f - \\ & - 2f^T \left[QCB + K^{-1}N \right] - 2 \left[f^T N \sigma - f^T K^{-1} N f \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -X^T (A^T P + PA)X + 2X^T \left[PB - A^T C^T Q^T - C^T N \right] f \\ & + f^T \left[QCB + B^T C^T Q^T + 2K^{-1}N \right] f + \\ & + 2 \left[f^T N \sigma - f^T K^{-1} N f \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Supondo que exista solução para o seguinte conjunto de equações matriciais:

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -LL^T \\ PB &= A^T C^T Q^T + C^T N - LW \\ W^T W &= 2NK^{-1} + QCB + B^T C^T Q^T \end{aligned} \quad (4.35)$$

e substituindo em (4.34):

$$\begin{aligned} -\dot{V} = & \left[X^T L - F^T W^T \right] \left[L^T X - WF \right] + \\ & + 2 \left[F^T N \sigma - F^T K^{-1} N f \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} -\dot{V} = & \left[X^T L - F^T W^T \right] \left[X^T L - F^T W^T \right]^T + \\ & + 2 \left[F^T N \sigma - F^T K^{-1} N f \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Portanto, se existir solução para (4.35), $-\dot{V}$ será pelo menos semi-definida positiva, uma vez que é a soma de uma expressão quadrática e uma expressão que, pelas condições de setor das não-linearidades, é sempre positiva.

As condições de existência de solução para (4.35) são dadas pela versão matricial do lema de Yakubovitch-Kalman. Diversas formas desta versão foram apresentadas por vários autores, mas aqui serão utilizados os resultados obtidos por Anderson [2].

Definição 4.1: A matriz H de dimensão $m \times n$ é real positiva se:

a. Os elementos de $H(s)$ são analíticos para $\text{Re } s > 0$.

b. $H^*(s) = H^T(s^*)$.

c. A parte hermitiana de $H(s)$

$J(s) \triangleq \frac{1}{2} [H(s) + H^*(s)]$ é semi-definida positiva para $\text{Re } s > 0$.

Aqui $*$ denota conjugado transposto.

Lema 4.1 |2| : Seja $H(s)$ uma matriz de funções de transferência racionais tal que H_∞ é finito, $H(s)$ tenha polos em $\text{Re } s < 0$ ou que sejam simples para $\text{Re } s = 0$. Se $\{C_1, A, B, H_\infty\}$ é uma realização mínima de H , então $H(s)$ é real positiva se, e somente se, uma matriz P definida positiva e matrizes W e L existem tais que:

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -LL^T \\ PB &= C_1^T - LW \\ W^T W &= H_\infty + H_\infty^T \end{aligned} \quad (4.38)$$

De (4.35) e (4.38) tem-se:

$$H(s) = [A^T C^T Q^T + C^T N]^T (sI - A)^{-1} B + QCB + NK^{-1}$$

ou

$$H(s) = NK^{-1} + (N + Qs) G(s) \quad (4.39)$$

onde

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

é a função de transferência da parte linear de (4.30)

A condição $H(s)$ real positiva corresponde à condição (4.22) e é conhecida como o critério de Popov generalizado.

Da análise anterior segue imediatamente o teorema de Anderson-Moore enunciado a seguir:

Teorema 4.1 |46| : Se existem matrizes diagonais reais $N = \text{diag}(n_i)$, $Q = \text{diag}(q_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, com $n_i > 0$, $q_i > 0$, $n_i + q_i > 0$, e $\frac{n_i}{q_i}$ não é polo de nenhum elemento da i -ésima linha de $G(s)$ e $\frac{n_i}{q_i}$ tal que:

$H(s) = NK^{-1} + [N + Qs] G(s)$ é real positiva (4.40)
então (4.30) é estável.

Usando este teorema pode-se construir uma função V dada por (4.21), resolvendo o sistema (4.35), desde que seja atendida a condição (4.40).

4.4.2.1. Aplicação a um sistema com n máquinas.

Em vários trabalhos (|28|, |46|, |71|, |73|) foi utilizado o critério generalizado de Popov para a construção de funções de Liapunov para sistemas com várias máquinas. No que se segue, este critério será utilizado resolvendo-se o sistema de equações matriciais e mostrando que os diversos resultados apresentados na literatura são obtidos a partir desta solução genérica.

Usando o modelo (2.60) e desprezando-se os coeficientes de amortecimento assíncrono, a matriz função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{1}{s} D(sM - R)^{-1} D^T \quad (4.41)$$

onde $(sM - R)^{-1}$ é diagonal e portanto $G(s)$ é simétrica.

Escolhendo-se $N = nI$ e $Q = qI$ onde $n > 0$, $q > 0$ e $K^{-1} = 0$ (condição de setor infinito), e substituindo em (4.39):

$$H(s) = (n + qs) \frac{1}{s} D(sM - R)^{-1} D^T \quad (4.41)$$

ou ainda

$$H(s) = D \left\{ \frac{(n + qs)}{s(sm_i + a_i)} \right\} D^T \quad (4.42)$$

onde $\frac{n + qs}{s(sm_i + a_i)}$ é o termo da i -ésima linha da matriz diagonal $\frac{(n + qs)}{s} (sM - R)^{-1}$.

Para $H(s)$ ser real positiva devem ser satisfeitas as condições da definição 4.1. A primeira condição significa que não existem polos de $H(s)$ no lado direito do plano complexo. Como os polos de $H(s)$ são da forma $s = 0$ e $s = -\frac{a_i}{m_i}$ onde $a_i > 0$, $m_i > 0$, segue-se que esta condição é satisfeita. De (4.42) é imediato que a segunda condição também é satisfeita. Resta verificar a última condição. Como $H(s)$ é simétrica:

$$H^T(s^*) + H(s) = H(s^*) + H(s) = 2 \operatorname{Re} H(s) \quad (4.43)$$

De (4.42):

$$2 \operatorname{Re} H(s) = 2D \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{n + qs}{s(sm_i + a_i)} \right] \right\} D^T \quad (4.44)$$

e a condição é satisfeita se

$$\operatorname{Re} \left[\frac{n + qs}{s(sm_i + a_i)} \right] \geq 0 \quad \text{para} \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (4.45)$$

Fazendo $s = iw$, a condição suficiente para a validade de (4.45) é:

$$q \geq \frac{nm_i}{a_i} \quad \text{para todo } i. \quad (4.46)$$

Para a aplicação do teorema de Anderson-Moore é ainda necessário que $N + Qs$ não cancele polos de $G(s)$. Os zeros de $N + Qs$ são da forma $s = -\frac{n}{q}$ e os polos de $G(s)$ são da forma

$$s = 0$$

$$s = -\frac{a_i}{m_i}$$

Portanto, para que não ocorra cancelamento de polos é necessário que

$$q \neq \infty$$

$$q \neq \frac{nm_i}{a_i}$$

Os valores de q devem então atender as condições:

$$q > \frac{nm_i}{a_i} \quad (4.47)$$

q finito

Solução das equações matriciais.

Atendidas as condições do teorema de Anderson-Moore, pode-se partir para a solução de (4.35), e portanto para a construção da função V do tipo dado em (4.31).

Do modelo adotado, $CB = 0$ e como $K^{-1} = 0$, o sistema matricial reduz-se a:

$$PA + A^T P \leq 0 \quad (4.48)$$

$$PB = nC^T + qA^T C^T \quad (4.49)$$

Particionando P da forma:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

com P_1 de dimensão $n \times n$

P_2 de dimensão $(n-1) \times n$

P_3 de dimensão $(n-1) \times (n-1)$

a condição suficiente para a validade de (4.48) é:

$$P_2 M^{-1} R + P_3 S = 0 \quad (4.50)$$

$$2P_1 M^{-1} R + P_2^T S + S^T P_2 \leq 0 \quad (4.51)$$

Usando-se (4.49) e (4.50) obtêm-se as soluções:

$$P_1 = qM + \mu MUM \quad (4.52.a)$$

$$P_2 = nR_{n-1} SR_{n-1}^{-1} M + \rho R_{n-1} UR_{n-1} SR_{n-1}^{-1} M \quad (4.52.b)$$

$$P_3 = -nR_{n-1} + \rho R_{n-1} UR_{n-1} \quad (4.52.c)$$

onde os subscritos indicam as dimensões das matrizes, e μ e ρ são constantes arbitrárias.

A matriz U tem todos os elementos iguais a 1.

Resta ainda verificar (4.51). Usando (4.52.a) e (4.52.b) esta condição fica:

$$2(qR + nM) + 2\mu MUR - \rho RUM - \rho MUR \leq 0 \quad (4.53)$$

Usando o fato de que uma matriz G é semi-definida negativa se e somente se $G + G^T$ é semi-definida negativa e tomando a transposta da expressão anterior:

$$2(qR + nM) + 2\mu MUR - \rho RUM - \rho MUR \leq 0 \quad (4.54)$$

Somando (4.53) e (4.54)

$$2(qR + nM) + (\mu - \rho) (MUR + RUM) \leq 0 \quad (4.55)$$

A condição (4.55) envolve a solução de uma equação quadrática ([28], [73]).

Vários resultados apresentados pela literatura são obtidos diretamente de (4.52) e (4.55). Em [28] escolhe-se $n = 1$

$$e \quad \rho = -1 / \sum_{i=1}^n a_i, \text{ com } q > \frac{m_i}{a_i}.$$

Em [46] são escolhidos

$$n = 1, q = \sum_{i=1}^n (m_i/a_i), \mu = 0 \text{ e } \rho = -1 / \sum_{i=1}^n a_i.$$

As diferenças que podem ocorrer nas matrizes devem-se à escolha de diferentes máquinas como referência.

Deve-se observar que com estas escolhas, todas as condições do teorema de Anderson-Moore são rigorosamente atendidas. Algumas funções apresentadas na literatura, como a função tipo energia, possuem uma parte quadrática apenas semi-definida, positiva, o que significa que não poderiam ser obtidas usando o referido teorema. Willems [71] demonstrou no entanto, que as equações matriciais e suas soluções podem ser usadas para obter tais funções, com uma adequada escolha de n , q , μ e ρ .

4.5. Conclusão

Foram apresentados os métodos mais usuais para a geração de funções de Liapunov para o estudo da estabilidade de sistemas de energia elétrica. Foi dada atenção especial ao método de Popov, que permite a obtenção sistemática da maioria das funções utilizadas na literatura.

CAPÍTULO V

DETERMINAÇÃO DE DOMÍNIOS DE ESTABILIDADE

5.1. Introdução.

O ponto de equilíbrio de um sistema de potência, após a retirada de uma falta, não é estável assintoticamente globalmente. Portanto, uma vez que seja determinada uma função de Liapunov para o sistema, torna-se necessária a determinação de um domínio de estabilidade. A utilidade prática do método direto de Liapunov está relacionado de perto com a determinação deste domínio. Como este método dá condições apenas suficientes para a estabilidade, este domínio terá uma inerente conservatividade. Muito do esforço atual de pesquisa tem se concentrado na procura de métodos que permitam a estimação de regiões de estabilidade mais próximas do domínio real, abrandando os resultados extremamente conservativos, obtidos até há pouco tempo, e tornando o método viável para aplicação a grandes sistemas.

A seguir é feita uma revisão dos métodos encontrados na literatura, para a estimação de domínios de estabilidade. Deve-se observar que a maioria de tais métodos foram desenvolvidos considerando funções do tipo energia, e aplicam-se somente se os pontos de equilíbrio do sistema coincidem com os pontos extremos da função de Liapunov.

5.2. Métodos para a estimação do domínio de estabilidade.

1. Determinação do ponto de equilíbrio instável mais próximo (ponto de sela).

O valor de V calculado no ponto de equilíbrio mais próximo X^u , no sentido de que é o primeiro a ser encontrado pe

las equipotenciais da função V , dá o domínio de estabilidade:

$$V(X) < V(X^u) \quad (5.1)$$

Este ponto também é chamado ponto de sela devido ao seu comportamento em um sistema de segunda ordem.

Uma visualização do domínio obtido por este método, pode ser feita através da conhecida comparação do sistema de potência com uma esfera, deslizando em uma superfície multidimensional [7], onde o ponto de equilíbrio estável é o mínimo local de uma região em forma de taça da superfície. A posição e velocidade da esfera correspondem, respectivamente, à energia potencial e cinética do sistema. A borda de nível mais baixo da taça, através da qual a esfera poderia passar, não mais retornando ao ponto de equilíbrio, corresponderia ao ponto de sela. A diferença de energia entre este ponto e o ponto correspondente à posição inicial da esfera corresponde à energia crítica do sistema, ou seja, para que seja possível afirmar estabilidade, a energia total do sistema no ponto inicial (estado quando é retirada a falta), deve ser inferior a esta energia crítica.

A utilização do ponto de sela apresenta duas dificuldades, que o tornam de pouca utilidade prática na aplicação a sistemas de grande porte, com um elevado número de máquinas:

a. O ponto de sela deve ser determinado através da solução de um sistema de equações algébricas não-lineares. Dado que o número de pontos de equilíbrio aumenta a medida que aumenta o número de máquinas, podendo ser da ordem de $2^{n-1} - 1$ pontos de equilíbrio instáveis [61], onde n é o número de máquinas, a dificuldade da determinação deste ponto é evidente.

b. A estimativa do domínio de estabilidade por este método apresenta-se, em geral, muito conservativa, principalmente quando o número de máquinas aumenta.

O item (a) foi objeto de vários trabalhos, e alguns métodos foram desenvolvidos ([26], [49], [51]), que reduzem o tempo de cálculo. A seguir será dada uma síntese de dois destes métodos ([49], [51]), os quais reduzem o esforço computacional na determinação de domínios, sem no entanto reduzir a conservatividade. Deve-se observar ainda, que tais métodos são heurísticos,

sem uma rigorosa demonstração, o que reduz a sua confiabilidade.

1.1. Método Prabhakara e El-Abiad [49]

Prabhakara e El-Abiad provaram que a função V tipo energia varia pouco nas proximidades dos pontos de equilíbrio. Com isto, o limite de estabilidade b , tal que $V(X) < b$, que seria dado por:

$$b = \min_i V(X^{ui}) \quad (5.2)$$

é calculado por:

$$b_{ap} = \min_i V(X^{uapi}) \quad (5.3)$$

onde X^{uapi} são pontos próximos aos pontos de equilíbrio instáveis. Estes pontos são determinados usando uma analogia máquina-barras infinita, onde os pontos de equilíbrio instáveis são da forma $\pi - \delta^0$ e $-\pi - \delta^0$. Usam-se então combinações do tipo

$$\left\{ \underbrace{\min (+ \pi - \delta_{in}^0)}_{m \text{ termos}}, \underbrace{\delta_{jn}^0}_{K \text{ termos}} \right\} \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$K = n-2, n-3, \dots, 0 \quad (5.4)$$

e o menor valor de V calculado nestes pontos é considerado como o limite de estabilidade b_{ap} . O número de pontos a serem calculados é da ordem de $2^{n-1} - 1$. Eventualmente pode-se usar os pontos da forma (5.4) como pontos de partida para a determinação exata de todos os pontos de sela.

1.2. Método de Ribbens-Pavella [51]

Este método é semelhante ao anterior. São usados pontos aproximados aos pontos de sela, dados por combinações do tipo

$$\left\{ \underbrace{\pi - \delta_{in}^0}_{m \text{ termos}}, \underbrace{\delta_{jn}^0}_{K \text{ termos}} \right\} \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$K = n-2, n-3, \dots, 0 \quad (5.5)$$

Do mesmo modo que no caso anterior, tais pontos são escolhidos por analogia máquina-barras infinita.

Usando considerações de ordem física, o número de pontos a serem explorados é reduzido a $2n$. O conjunto (5.5) é dividido em três grupos:

- 1º. Pontos do tipo $(\pi - \underbrace{\delta_{in}^0}_m, \underbrace{\delta_{jn}^0}_K)$ $m = 1$ $K = n-2$
 $(n-1)$ pontos
- 2º. Pontos do tipo $(\pi - \delta_{in}^0, \delta_{jn}^0)$ $m = 2, \dots, n-2$
 $K = n-3, \dots, 1$
- 3º. Ponto do tipo $(\pi - \delta_{in}^0, \delta_{jn}^0)$ $m = n-1$
 $K = 0$
 1 ponto

Os pontos pertencentes ao primeiro grupo são associados à saída de uma única máquina de sincronismo, permanecendo as demais em sincronismo. O segundo grupo representa o caso em que duas ou mais máquinas perdem sincronismo. O terceiro caso é eletricamente equivalente ao primeiro.

A saída de sincronismo de uma única máquina é aparentemente mais próxima do ponto de equilíbrio estável e é suficiente para causar instabilidade do sistema. Considera-se então, como pontos próximos dos pontos de sela, apenas os pertencentes ao primeiro e terceiro grupos. Através da substituição de + por - em (5.5), obtêm-se um total de $2n$ pontos aproximados. A função V é calculada em todos estes pontos, e aquele que fornece o menor valor de V é usado como ponto de partida em um método numérico para solução de sistemas de equações algébricas não-lineares. O ponto obtido como solução é considerado o ponto instável mais próximo.

Alguns métodos apresentados na literatura dispensam a determinação do ponto de sela mais próximo. Dois deles (|16|, |48|), são apresentados a seguir:

2. Determinação do ponto de tangência.

O domínio de estabilidade é obtido minimizando a função V em uma região limitada por hiperplanos, e no interior da qual as não-linearidades atendem as condições setoriais de Popov.

Em [16] é usada a função tipo energia (4.15). Os hiperplanos que limitam as não-linearidades nas variáveis σ são dados por:

$$-\pi - 2\sigma_K^0 \leq \sigma_K \leq \pi - 2\sigma_K^0 \quad K = 1, \dots, m \quad (5.6)$$

onde os σ 's são combinações lineares das variáveis de estado e não são todos linearmente independentes.

Em [20], definem-se as variáveis

$$Z_i = \delta_{in} - \delta_{in}^0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.7)$$

e a expressão para a energia potencial fica:

$$\begin{aligned} E_p = & \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} E_i E_j B_{ij} \left[-\cos(Z_{ij} + \delta_{ij}^0) + \right. \\ & \left. + \cos \delta_{ij}^0 - Z_{ij} \operatorname{sen} \delta_{ij}^0 \right] + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} E_i E_n B_{in} \left[-\cos(Z_i + \delta_{in}^0) + \right. \\ & \left. + \cos \delta_{in}^0 - Z_i \operatorname{sen} \delta_{in}^0 \right] \quad (5.8) \end{aligned}$$

Os hiperplanos em (5.6) são dados por:

$$-\pi - 2\delta_{in}^0 \leq Z_i \leq \pi - 2\delta_{in}^0 \quad e \quad (5.9)$$

$$-\pi - 2\delta_{ij}^0 \leq Z_{ij} \leq \pi - 2\delta_{ij}^0$$

As parcelas de (5.8) são sempre positivas em (5.6). Deste modo é possível calcular em cada hiperplano um limite inferior para a energia potencial. Estes limites são usados em [20] como uma indicação da face na qual será encontrado o ponto de tangência. Como existem $n(n-1)$ hiperplanos, haverá um número igual de limites inferiores. Estes limites inferiores são colocados em ordem crescente, e é calculado o valor de V no ponto de tangência correspondente à face com menor limite inferior. Se este valor for inferior ao limite seguinte, então o domínio de estabilidade é dado por este ponto de tangência. Caso contrário, passa-se à próxima face.

Este método é rápido e confiável e neste sentido superior aos vistos anteriormente. Contudo ainda persiste a conservatividade dos resultados, que aumenta com o tamanho do sistema.

Em [48] usa-se uma função de Liapunov do tipo dado em (4.21). Como a parte quadrática não contribui significativamente para o domínio de estabilidade, ela é desprezada. Ainda em [48], mostra-se que se o σ 's forem linearmente independentes, o ponto de tangência ocorre em pontos do tipo

$$\sigma = [0, 0, \dots, 0, K_i, 0, \dots, 0] \quad (5.10)$$

onde $\sigma_i = K_i$, $K_i = \pm \pi - 2\sigma_i^0$ é um dos hiperplanos que determinam a região de validade da função de Liapunov.

No caso de sistemas de potência os σ_i não são todos linearmente independentes, implicando que o ponto de tangência não será necessariamente como em (5.10). Em [48], este ponto é determinado de forma aproximada, a qual consiste em tomar um conjunto de σ_i linearmente independente e considerar para este conjunto os pontos da forma (5.10). Os σ_i 's linearmente dependentes, são calculados a partir destes pontos. O domínio de estabilidade é então o mínimo valor de $V(X)$ obtido em um destes pontos. Deve-se obter todas as combinações possíveis de σ_i 's linearmente independentes, já que qualquer conjunto de $n-1$ σ_i 's pode ser escolhido.

Os métodos vistos não resolvem o problema da conservatividade dos domínios de estabilidade. A causa destes resultados conservativos baseados na determinação do ponto de equilíbrio instável mais próximo pode ser explorada voltando a analogia entre o sistema de potência e uma esfera rolando em uma superfície multidimensional. Usando-se desta analogia pode-se compor o seguinte quadro:

O sistema opera inicialmente em um ponto de equilíbrio (esfera parada, geração igual à demanda). Em dado momento o sistema sofre uma falta. Há então um desequilíbrio entre geração e demanda fazendo com que algumas máquinas acelerem. No instante da retirada da falta, o sistema está em um determinado estado (a esfera possui uma certa energia cinética e um vetor quantidade de movimento dirigido para determinada direção na super

fície multidimensional, que depende da evolução do sistema durante o período de falta, e uma energia potencial, a posição da esfera). A superfície multidimensional corresponde à configuração final do sistema e à injeção de potência nas barras de geração. Os pontos de sela desta superfície são associados à forma como o sistema perderia sincronismo, considerando a sua configuração final. Ou seja, não é levada em conta a situação física do sistema após a retirada da falta. Na analogia, esta situação corresponderia ao vetor quantidade de movimento, que tenderia a mover a esfera em determinada direção, e que seria resultado da situação durante o período de falta; a este vetor forçando uma certa trajetória, se juntariam as forças que tendem a sincronizar o sistema, representadas pela forma da superfície e que alteram a trajetória.

O uso do ponto de sela mais próximo corresponde à sua posição de que a situação imediatamente após a retirada da falta (direção do vetor quantidade de movimento mais influência da forma da superfície) é tal, que o sistema segue uma trajetória no espaço de estados correspondente ao modo mais fácil para a perda de sincronismo. Esta suposição pode significar um grande erro, pois como as máquinas afetadas pela falta dependem da localização desta, as máquinas fracamente acopladas ao sistema, mas distantes do ponto de falta, serão fracamente afetadas. Estas considerações de ordem física, clarificam a razão da conservatividade dos domínios de estabilidade determinados através do ponto de sela mais próximo.

As pesquisas ultimamente desenvolvidas procuram superar o problema da conservatividade determinando o limite de estabilidade associado ao ponto de sela pelo qual, ou próximo do qual, o sistema realmente perde estabilidade. Isto pressupõe a conjectura de que a trajetória que o sistema segue, supondo mantida a falta, sempre passa pelo menos próximo de um ponto de sela. Tal conjectura parece confirmada, considerando os trabalhos de Fouad e Stanton (|22|, |23|).

A seguir são resumidos dois métodos encontrados na literatura, que procuram determinar o ponto de sela adequado:

3. Método de Ribbens-Pavella et al [52]

Esta abordagem usa a aceleração das diversas máquinas como indicação da máquina (ou grupo de máquinas) que perderá sincronismo.

Este método baseia-se na conjectura de que a máquina (ou grupo de máquinas) que perderá sincronismo é a que possuir a maior aceleração no final do período de falta. Como o tempo crítico é inicialmente desconhecido, a aceleração final é calculada em um ponto próximo ao ponto de sela mais próximo. Para isto é utilizado o método anteriormente citado, devido a Ribbens-Pavella.

A máquina de referência é escolhida como a máquina com menor aceleração no início do período de falta.

O procedimento pode ser resumido nos seguintes passos:

a. Determinação da máquina de referência no início do período de falta.

b. Cálculo do mínimo valor de V nos $n-1$ pontos dados por

$$\left[\delta_{1n}^0, \delta_{2n}^0, \dots, \delta_{j-1,n}^0, \pi - \delta_{jn}^0, \delta_{j+1,n}^0, \dots, \delta_{n-1,n}^0 \right]$$

(5.11)

Este valor é V_1 . Usando V_1 , calcula-se tc_1 , o tempo crítico de retirada da falta correspondente.

c. A máquina com a maior aceleração no tempo tc_1 é de terminada. Seja a esta máquina.

d. No item b, a máquina j é substituída por a, obtendo-se o ponto δ^a .

e. O limite de estabilidade será dado por:

$$V_L = V(\delta^a, 0) \quad (5.12)$$

Pode ocorrer que um grupo de máquinas tenha aceleração bem maior do que as demais. Neste caso, o item d é alterado. Supondo, por exemplo, que as máquinas 1 e 2 constituam este grupo, o ponto que fornecerá V_L é:

$$\left[\pi - \delta_{1n}^0, \pi - \delta_{2n}^0, \delta_{3n}^0, \dots, \delta_{n-1,n}^0 \right] \quad (5.13)$$

4. Método de Athay et al [7]

Neste método a potência acelerante do sistema durante a falta é aproximada por:

$$f_i \approx a_i + b_i \cos \eta t \quad (5.14)$$

Como a função energia potencial é a primeira integral das equações diferenciais do sistema, o gradiente da energia potencial é o negativo das potências acelerantes dadas por (5.14). Definindo a função escalar:

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^n f_i^2(\theta) \quad (5.15)$$

onde θ é um vetor $n \times 1$ que representa os ângulos das máquinas em relação ao centro de ângulo do sistema, nota-se que esta função será a medida da proximidade de um ponto de equilíbrio.

São utilizadas ainda informações contidas na matriz jacobiana da energia potencial. A superfície dada por $\det H(E_p) = 0$, onde H denota a hessiana, é chamada superfície singular principal [6], e a região limitada por esta superfície é denominada região principal, a qual é convexa e contém o ponto de equilíbrio estável. Um algoritmo baseado na minimização de $F(\theta)$ convergirá para o ponto de equilíbrio estável se for inicializado dentro da região principal e para um ponto de equilíbrio instável se for inicializado fora.

O método pode ser resumido nos seguintes passos:

1. A trajetória durante a falta é aproximada por $f_i \approx a_i + b_i \cos \eta t$. Neste passo são determinados a_i , b_i e η .
2. Cálculo da matriz de admitâncias reduzida pós-falta e do ponto de equilíbrio pós-falta (θ^e).
3. Determinação do ponto em que $F(\theta)$ pós-falta atinge um máximo relativo ao longo da trajetória aproximada (usando a aproximação $a_i + b_i \cos \eta t$). Este ponto (θ^{SS}) é próximo à interseção da trajetória com a superfície singular principal. O ângulo pode ser obtido integrando duas vezes $a_i + b_i \cos \eta t$.
4. Construção do vetor $\theta^{SS} - \theta^e$ e normalização para formar o vetor direcional h .

5. Solução do seguinte problema de minimização:

$$\min F(\theta(\lambda)) \triangleq F(\theta(\lambda^*)) \quad \theta(\lambda) \triangleq \theta^{SS} + \lambda h$$

$$\theta(\lambda^*) = \hat{\theta}^\mu$$

Isto significa que $F(\theta)$ é minimizada em uma reta que tem a direção do vetor h , e a partir do ponto θ^{SS} .

6. $\hat{\theta}^\mu$ é usado como ponto de partida em um algoritmo de minimização do tipo Davidon-Fletcher-Powell, para obter o ponto de equilíbrio instável.

A determinação do ponto de sela adequado, por este método, pressupõe que a trajetória seguida pelo sistema durante a falta é que determina o modo pelo qual ele perderá sincronismo. Em outras palavras, supõe-se que o padrão de separação em grupos é dado essencialmente no período de falta, sendo pequena a influência das forças sincronizantes após a retirada da falta.

5.3. Conclusões.

Neste capítulo foram apresentados alguns métodos encontrados na literatura para a estimação de domínios de estabilidade. Procurou-se apresentar a filosofia básica de tais métodos sem a preocupação com os problemas computacionais envolvidos na sua aplicação.

A estimativa da região de estabilidade é uma etapa importante e difícil na aplicação do método direto de Liapunov. É importante, pois dela depende a obtenção de resultados que tenham utilidade prática no estudo da estabilidade de energia elétrica. A dificuldade aparece na obtenção destes resultados com rapidez, confiabilidade e que não sejam conservativos. Nenhum dos métodos apresentados satisfaz totalmente a estes requisitos, e embora representem um considerável progresso na pesquisa, muito ainda resta a ser feito neste campo.

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÃO DE UM MODELO MAIS COMPLETO NO ESTUDO DA ESTABILIDADE

6.1. Introdução.

O método de Popov anteriormente analisado permite a construção sistemática de funções de Liapunov para as quais é usado um modelo matemático extremamente simplificado. Neste caso as não-linearidades são todas diagonais e o teorema de Anderson-Moore pode ser diretamente aplicado. No entanto, quando se considera um modelo mais complexo, não só aumenta o número de variáveis de estado, mas também aparecem não linearidades do tipo não-diagonal, isto é, supondo $f(\sigma)$ um vetor de não-linearidades de dimensão n , a componente $f_i(\sigma)$ é função não somente de σ_i , mas também de outros componentes de σ .

A consideração de modelos mais completos também torna inviável a construção de funções de Liapunov usando considerações sobre a energia do sistema. A aplicação dos métodos de Zubov, Cartwright, Aizerman e Zubov generalizado, apesar de possível neste caso, é extremamente laboriosa e não permite a obtenção sistemática das funções.

Alguns critérios no entanto foram desenvolvidos, que permitem a consideração de um modelo mais fiel do sistema, e através dos quais pode-se construir sistematicamente funções de Liapunov obtidas a partir da solução de um sistema de equações matriciais.

Neste capítulo considera-se o modelo máquina síncrona ligada à barra infinita (2.45), e que considera decaimento de fluxo, efeito da saliência dos polos e ação dos reguladores de velocidade e tensão. Neste caso as não-linearidades são não-diagonais, impedindo a aplicação do teorema de Anderson-Moore. Aplica-se então um critério de estabilidade que permite a obtenção

sistemática de uma função de Liapunov para o sistema.

6.2. Critérios de Estabilidade.

Em [47] foi apresentada uma versão generalizada do critério de Popov, aplicável a sistemas com não-linearidades tendo vários argumentos. Este critério foi aplicado a um sistema máquina-barras infinita considerando decaimento de fluxo e regulador de tensão. Em [32] um critério semelhante foi desenvolvido e aplicado a um sistema multimáquinas considerando decaimento de fluxo.

Para o estudo do sistema (2.45) é conveniente utilizar o primeiro critério, dado pelo teorema a seguir:

Teorema 1 [47] : Seja o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - Bf(\sigma) \\ \dot{\xi} &= -d^T f(\sigma) \\ \sigma &= C^T x + \rho \xi \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde

A é matriz Hurwitz de dimensão $(n-1) \times (n-1)$, B e C são matrizes de dimensão $(n-1) \times m$, d e ρ são vetores de dimensão $m \times 1$ e ξ é um escalar.

A matriz função de transferência de (6.1) é dada por:

$$G(s) = C^T (sI - A)^{-1} B + d^T / s \quad (6.2)$$

Supondo válidas as seguintes condições:

1. $f(\sigma)$ é contínua e mapeia R^m em R^m .
2. Para uma matriz simétrica real R tal que $R\rho d^T$ é simétrica.

$$\sigma^T R \rho d^T f(\sigma) \geq 0 \text{ para todo } \sigma \in R^m \quad (6.3)$$

e $f(\sigma) = 0$ se $\sigma = 0$.

3. Existe uma função $V_1 \in C^1$ mapeando R^m em R tal que $V_1(\sigma) \geq 0$ para todo $\sigma \in R^m$, com $V_1(0) = 0$ e para alguma matriz Q real constante:

$$Q^T f(\sigma) = \nabla V_1(\sigma) \text{ para todo } \sigma \in R^m \quad (6.4)$$

$$\text{Seja } H(s) = (2Rpd^T + Qs) G(s)/2 \quad (6.5)$$

Então a condição de frequência

$$H(iw) + H^T(-iw) \geq 0 \quad (6.6)$$

para todo w real é necessária e suficiente para a existência de uma função de Liapunov

$$V = X^T P X + (\sigma - C^T X) R (\sigma - C^T X) + V_1(\sigma) \quad (6.7)$$

com derivada em relação ao tempo:

$$\dot{V} = - \left\| L^T X + Df(\sigma) \right\|^2 - 2\sigma^T Rpd^T f(\sigma) \quad (6.8)$$

e onde P é uma matriz simétrica, definida positiva de dimensão $(n-1) \times (n-1)$, L é $(n-1) \times m$ e D é $m \times m$.

Em [47] este teorema foi demonstrado a partir da versão matricial do lema de Yakubovitch-Kalman, apresentada por Narendra e Neuman. Aqui será apresentada uma demonstração a partir da forma desenvolvida por Anderson [2] para o lema mencionado.

Seja a candidata a função de Liapunov para (6.1):

$$V = X^T P X + (\sigma - C^T X)^T R (\sigma - C^T X) + V_1(\sigma) \quad (6.9)$$

A derivada em relação ao tempo de (6.9) ao longo das trajetórias de (6.1) é:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & X^T (A^T P + PA) X - 2X^T P B f - 2\sigma^T Rpd^T f + 2X^T C Rpd^T f + \\ & + f^T Q C^T A X - f^T [Q(C^T B + pd^T)] f \end{aligned} \quad (6.10)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & X^T (A^T P + PA) X - 2X^T P B f - 2\sigma^T Rpd^T f + 2X^T C Rpd^T f + \\ & + f^T Q C^T A X - f^T \left[Q(C^T B + pd^T)/2 + (B^T C + dp^T) Q^T/2 \right] f \end{aligned}$$

Supondo que exista solução para o seguinte conjunto de equações matriciais:

$$A^T P + PA = -LL^T \quad (6.12.a)$$

$$PB = CRpd^T + A^T C Q^T/2 - LD \quad (6.12.b)$$

$$Q(C^T B + pd^T)/2 + (B^T C + dp^T) Q^T/2 = D^T D \quad (6.12.c)$$

e substituindo (6.12) em (6.11):

$$\dot{V} = -X^T L L^T X - 2X^T \left[PB - CR\rho d^T - A^T CQ^T/2 \right] f - f^T D^T Df - 2\sigma^T R\rho d^T f \quad (6.13)$$

ou

$$\dot{V} = -(L^T X - Df)^T (L^T X - Df) - 2\sigma^T R\rho d^T f \quad (6.14)$$

ou ainda:

$$\dot{V} = -\|L^T X - Df\|^2 - 2\sigma^T R\rho d^T f \quad (6.15)$$

De (6.3) segue que (6.15) é pelo menos semi-definida negativa. Portanto (6.7) é uma função de Liapunov para (6.1).

Resta portanto analisar as condições de existência de solução para (6.12). Utilizando o lema 4.1 e identificando:

$$C_1^T = CR\rho d^T + A^T CQ^T/2 \quad (6.16)$$

$$H_\infty = Q(C^T B + \rho d^T)/2$$

$$W = D$$

O sistema (6.12) terá solução se, e somente se

$$H(s) = \left[CR\rho d^T + A^T CQ^T/2 \right]^T (sI - A)^{-1} B + Q(C^T B + \rho d^T)/2 \quad (6.17)$$

for real positiva. As condições a e b da definição nº 4.1 são automaticamente satisfeitas. Resta verificar a condição c.

De (6.17):

$$H(s) = \rho^T R C^T (sI - A)^{-1} B + Q C^T A (sI - A)^{-1} B/2 + Q C^T B/2 + Q \rho d^T/2 \quad (6.18)$$

Usando a relação:

$$Q C^T B/2 + Q C^T A (sI - A)^{-1} B/2 = s Q C^T (sI - A)^{-1} B/2 \quad (6.19)$$

em (6.18):

$$H(s) = d\rho^T R C^T (sI - A)^{-1} B + Qs [C^T (sI - A)^{-1} B + \rho d^T / s] / 2 \quad (6.20)$$

Somando $R\rho d^T \rho d^T / s$ que é simétrica, a hermitiana não será alterada.

$$H(s) = R\rho d^T [C^T (sI - A)^{-1} B + \rho d^T / s] + Qs [C^T (sI - A)^{-1} B + \rho d^T / s] / 2 \quad (6.21)$$

ou ainda:

$$H(s) = [2R\rho d^T + Qs] G(s) / 2 \quad (6.22)$$

De (6.22) segue imediatamente o resultado do teorema.

6.3. Procedimento para a construção da função V.

A função dada em (6.7) pode ser construída sistematicamente usando um lema sobre fatorização espectral devido a Youla. Seja $Y(s) = H(s) + H^T(-s)$ onde $Y(s)$ é chamada para-hermitiana e $Y(iw)$ é semi-definida positiva, para todo w real, se $H(iw)$ é real positiva.

Lema 6.1: Se $H(s)$ é real positiva e $Y(s)$ tem rank r em quase todo lugar, então existe uma matriz rxm $U(s)$ tal que

$$Y(s) = H(s) + H^T(-s) = U^T(-s)U(s) \quad (6.23)$$

Foi demonstrado por Anderson que se $H(s)$ tem uma realização mínima $\{C_1, A, B, H_\infty\}$ então $U(s)$ tem uma realização $\{L^T, A, B, D\}$.

Do exposto segue o seguinte procedimento para a construção sistemática de V :

1. Determina-se $U(s)$ tal que $H(s) + H^T(-s) = U^T(-s)U(s)$.

2. Determina-se D da expressão:

$$Q(C^T B + p d^T)/2 + (B^T C + d p^T)Q^T/2 = D^T D$$

3. Acha-se L resolvendo:

$$U(s) = L^T (sI - A)^{-1} B + D$$

4. Resolve-se $A^T P + PA = -LL^T$ determinando-se a matriz P.

6.4. Aplicação a um sistema máquina-barra infinita.

O procedimento descrito na seção anterior foi aplicado em [47] a um sistema máquina-barra infinita considerando decaimento de fluxo e regulador de tensão. Nesta seção será empregado o mesmo procedimento para a construção sistemática de uma função de Liapunov para o modelo apresentado (2.45) ou seja, considera-se decaimento de fluxo, ação dos reguladores de tensão e velocidade e efeito da saliência dos polos.

Inicialmente deve-se colocar (2.45) na forma (6.1).

Usa-se então a transformação

$$\xi = (Dg_2 + g_1)/M + x_1 + g_2 x_2 - x_4/M \quad (6.24)$$

obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D/M & 0 & -1/M & 0 \\ 0 & -R & 0 & 1 \\ g_1 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/T_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\sigma) \\ f_2(\sigma) \end{bmatrix} \quad (6.25.a)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_2 M / (Dg_2 + g_1) & 0 & 1 / (Dg_2 + g_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M / (Dg_2 + g_1) \\ 0 \end{bmatrix} \xi \quad (6.25.b)$$

$$\dot{\xi} = - \begin{bmatrix} g_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\sigma) \\ f_2(\sigma) \end{bmatrix} \quad (6.25.c)$$

onde

$$f_1(\sigma) = \{ A\Psi_{F_0} [\text{sen}(x_1 + \delta_0) - \text{sen}\delta_0] + G [\text{sen}2(x_1 + \delta_0) - \text{sen}2\delta_0] + Ax_3 \text{sen}(x_1 + \delta_0) \} / M \quad (6.25.d)$$

$$f_2(\sigma) = \cos(x_1 + \delta_0) - \cos\delta_0$$

Pode-se demonstrar facilmente que todos os auto-valores da matriz A, do sistema (6.25) tem parte real negativa. O critério de estabilidade dado pelo teorema 1 pode então ser aplicado.

6.4.1. Construção da função V.

Escolhendo-se

$$V_1 = \int_0^{x_1} f_1(\sigma) d\sigma \quad (6.26)$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} V_1 = & (A/M)\Psi_{F_0} [-\cos(x_1 + \delta_0) + \cos\delta_0 - x_1 \text{sen}\delta_0] + \\ & + (G/2M) [-\cos 2(x_1 + \delta_0) + \cos 2\delta_0 - 2x_1 \text{sen} 2\delta_0] + \\ & + (A/M)x_3 [-\cos(x_1 + \delta_0) + \cos\delta_0] \quad (6.27) \end{aligned}$$

A função V_1 deve ser, ao menos, semi-definida positiva em uma região ao redor da origem. No entanto, (6.27) apresenta dificuldades para a definição de sinal, dada a presença de termos trigonométricos complexos. Mesmo assim, pode-se usar (6.27) pois, como será visto adiante, a função V determinada é definida positiva localmente.

Calculando o gradiente de V_1 :

$$\nabla V_1 = \begin{bmatrix} \{A\psi_{F_0} [\text{sen}(x_1 + \delta_0) - \text{sen} \delta_0] + G [\text{sen} 2(x_1 + \delta_0) - \text{sen} 2\delta_0] + AX_3 [\text{sen}(x_1 + \delta_0) + \text{cos} \delta_0] \} / M \\ (A/M) [-\text{cos}(x_1 + \delta_0) + \text{cos} \delta_0] \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

De (6.4) resulta:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -A/M \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Para facilitar a definição em sinal de \dot{V} , escolhe-se, $R = 0$ em (6.3).

A matriz função de transferência de (6.25) é dada por:

$$G(s) = \begin{bmatrix} M(s+g_2)/s [sM+D(s+g_2)+g_1] & 0 \\ 0 & -\eta_2/(s+R) \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Usando o lema 4.1 e considerando (6.17) observa-se que

$$\{QC^T A/2, A, B\}$$

deve ser uma realização mínima de $H(s) - H_\infty$. Uma análise revela no entanto que o grau de $H(s) - H_\infty$ é 3 e a matriz A tem ordem 4. Conclui-se portanto que a condição de realização mínima do lema 4.1 não é satisfeita. No entanto, como será demonstrado a seguir, o procedimento dado na seção 6.3 pode ser usado para a construção da função V .

O procedimento é resumido nos seguintes passos:

1. Cálculo de $U(s)$ tal que

$$H(s) + H(-s) = U^T(-s) U(s) \quad (6.31)$$

Usando fatorização espectral obtém-se:

$$U(s) = \begin{bmatrix} \sqrt{(DM)} \sqrt{s+(g_2^2+g_1g_2/D)} / Ms(s+g_2)+D(s+g_2)+g_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{(A\eta_2/M)} s/(R+s) \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

2. A partir da expressão (6.12.c) obtem-se:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{(A\eta_2/M)} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

3. Determinação de L a partir da equação

$$U(s) = L^T (sI - A)^{-1} B + D \quad (6.38)$$

Fazendo

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \\ L_{31} & L_{32} \\ L_{41} & L_{42} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

e usando em (6.38) as expressões (6.36) e (6.39) obtem-se:

$$L_{21} = L_{12} = L_{32} = 0 \quad (6.40)$$

e L_{41} e L_{42} são arbitrários.

Resolvendo para L_{11} , L_{31} e L_{22} :

$$L_{11} = \sqrt{(DM)}/M$$

$$L_{31} = \sqrt{DM(g_2^2 + g_1g_2/D)} - \sqrt{(DM)} g_2/Mg_1 \quad (6.41)$$

$$L_{22} = \sqrt{(A\eta_2/M)} R/\eta_2$$

Escolhendo

$$L_{41} = 0 \quad (6.42)$$

$$L_{42} = - \sqrt{(A/4\eta_2^2M)}$$

obtem-se

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{(DM)}/M & & & 0 \\ 0 & & & \sqrt{(An_2/M)} \quad R/\eta_2 \\ \{-\sqrt{(DM)}g_2 + \sqrt{DM(g_2^2 + g_1g_2/D)}\} / g_1M & & & 0 \\ 0 & & & -\sqrt{A/4\eta_2M} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

4. Solução de

$$ATP + PA = -LL^T \quad (6.44)$$

para a matriz simétrica P obtendo-se:

$$P_{11} = 1/2$$

$$P_{22} = AR/(2\eta_2M)$$

$$P_{33} = (Dg_2/Mg_1^2) + (1/2 g_1M) \pm$$

$$\left[D \sqrt{(g_2^2 + g_1g_2/D)} / g_1^2M \right] \quad (6.45)$$

$$P_{44} = AT_V/8\eta_2M$$

A função de Liapunov obtida para o sistema (2.45) é então:

$$V = (1/2)x_2^2 + (AR/2\eta_2M)x_3^2 + \left[g_2D/g_1^2M + 1/2g_1M \pm \right. \\ \left. D \sqrt{g_2^2 + g_1g_2/D} / g_1^2M \right] x_4^2 + (AT_V/8\eta_2M)x_5^2 + A\Psi_{F_0} \left[-\cos(x_1 + \delta_0) + \right. \\ \left. + \cos\delta_0 - x_1\text{sen}\delta_0 \right] / M + G \left[-\cos 2(x_1 + \delta_0) + \cos 2\delta_0 - 2x_1\text{sen}2\delta_0 \right] / \\ / 2M + Ax_3 \left[-\cos(x_1 + \delta_0) + \cos\delta_0 \right] / M \quad (6.46)$$

Em [38] foi obtida uma função V para o mesmo modelo aqui estudado, por composição das funções dadas em [41] e [47]. Comparando-se com (6.46) nota-se que as funções obtidas são semelhantes, com (6.46) apresentando a vantagem de que sua derivada em relação ao tempo é, por construção, semi-definida negativa.

O estudo da definição em sinal de (6.46) em torno do ponto de equilíbrio estável pode ser feito do mesmo modo que em |38|, desenvolvendo (6.46) em série de Taylor em torno da origem e desprezando-se os termos de ordem superior a dois. Obtém-se u ma forma quadrática que é definida positiva se e somente se

$$(A\Psi_{F_0} \cos \delta_0 + 2G \cos 2\delta_0) R/\eta_2 > A \sin^2 \delta_0 \quad (6.47)$$

Portanto, atendida a condição (6.47), existe uma região em torno da origem na qual (6.46) é definida positiva.

Pode-se demonstrar facilmente que o único ponto que anula V e que é solução de (2.45) é o ponto de equilíbrio estável |38|. Aplicando o teorema 3.5 conclui-se que (6.46) é uma função de Liapunov para a estabilidade assintótica de (2.45) desde que a condição (6.47) seja satisfeita.

6.4.2. Determinação do domínio de estabilidade.

O domínio de estabilidade pode ser estimado determinando o ponto de equilíbrio instável mais próximo (x^u).

Os pontos estacionários de (6.46) são dados por

$$\underline{\nabla} V(x^u) = 0 \quad (6.48)$$

ou ainda

$$\{A\Psi_{F_0} [\sin(x_1^u + \delta_0) - \sin \delta_0] + G [\sin 2(x_1^u + \delta_0) - \sin 2\delta_0] + Ax_3 \sin(x_1^u + \delta_0)\} / M = 0$$

$$x_2^u = 0$$

$$\{(AR/\eta_2)x_3^u + A [-\cos(x_1^u + \delta_0) + \cos \delta_0]\} / M = 0 \quad (6.49)$$

$$\{2 [g_2 D + 1/2 \pm D/g_1 \sqrt{g_2^2 + g_1 g_2 / D}] / g_1 M\} x_4^u = 0$$

$$(AT_V / 4\eta_2 M) x_5^u = 0$$

e coincidem com os pontos de equilíbrio de (2.45).

De (6.49) segue que para os pontos de equilíbrio ins_táveis:

$$x_2^u = x_4^u = x_5^u = 0 \quad (63)$$

e x_1^u e x_3^u são determinados resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} A\Psi_{F_0} [\text{sen}(x_1 + \delta_0) - \text{sen}\delta_0] + G [\text{sen } 2(x_1 + \delta_0) - \text{sen}\delta_0] + \\ + Ax_3 \text{sen}(x_1 + \delta_0) = 0 \\ (R/\eta_2)x_3 + [-\cos(x_1 + \delta_0) + \cos\delta_0] = 0 \end{aligned} \quad (6.50)$$

6.5. Conclusão.

Neste capítulo foi estudado o problema da estabilidade de uma única máquina ligada a uma barra infinita. Com o modelo utilizado as não-linearidades não obedecem às condições de setor de Popov e os critérios de estabilidade apresentados nos capítulos anteriores não se aplicam.

Em [47] foi derivado um critério de estabilidade aplicável a não-linearidades do tipo citado acima. A demonstração deste critério foi baseada na versão matricial do lema de Yakubovitch-Kalman devida a Narendra e Neuman.

Para o modelo utilizado neste capítulo foi aplicado o mesmo critério e dada uma nova demonstração baseada na versão ma_tricial do lema de Yakubovitch-Kalman devida a Anderson. Com isto introduz-se o problema de realização mínima que não foi discutida em [47].

O procedimento para a construção da função V é derivado imediatamente de um lema também devido a Anderson.

A condição de realização mínima não é satisfeita tanto para o modelo aqui usado como também para o modelo utilizado em [47]. Mostra-se no entanto que mesmo nesta situação o procedimento pode ser aplicado, obtendo-se uma função de Liapunov para

a estabilidade assintótica de (2.65), que apresenta a vantagem em relação à função obtida em [38] de que a sua derivada em relação ao tempo é semi-definida negativa por construção.

Finalmente o modo de determinação do domínio de estabilidade é indicado.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E INDICAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O trabalho realizado pode ser, em linhas gerais, dividido em duas partes.

Na primeira apresentou-se um resumo da teoria do segundo método de Liapunov e das pesquisas mais importantes encontradas na literatura e que aplicam este método ao estudo da estabilidade de sistemas de energia elétrica. Abordaram-se os problemas da geração de funções de Liapunov e determinação de domínios de estabilidade.

No que se refere à geração de funções V apresentaram-se três métodos: função energia e os métodos de Zubov e Popov. Os critérios para estas escolhas foram: para a função tipo energia, a larga utilização de funções V construídas com base em considerações sobre a energia do sistema e a facilidade de sua interpretação; a característica do método de Zubov que permite, ao menos teoricamente, a determinação do domínio de estabilidade exato de um sistema, e no caso do método de Popov, a possibilidade de obtenção sistemática de funções de Liapunov inclusive para sistemas multimáquinas. Em algumas pesquisas usou-se o critério generalizado de Popov, dado pelo teorema de Anderson-Moore, com todas as condições de realização mínima deste teorema atendidas, obtendo-se funções que só diferem na escolha das constantes arbitrárias que aparecem na solução das equações matriciais. Neste trabalho apresentaram-se a solução geral destas equações e indicaram-se as constantes escolhidas em algumas pesquisas. Por outro lado, mesmo que as condições de realização mínima não sejam atendidas, a solução das equações matriciais ainda por ser usada, obtendo-se um grande número de funções utilizadas na literatura, inclusive a função tipo energia.

Abordaram-se as dificuldades para a estimação de domínios de estabilidade e apresentaram-se os principais métodos en

contrados na literatura. Procurou-se apresentar a filosofia de tais métodos sem a preocupação com os aspectos computacionais que, principalmente nos métodos mais modernos, demandariam por si só uma extensa pesquisa.

Na segunda parte do trabalho considerou-se um modelo mais completo, mais especificamente o caso máquina-barras infinita incorporando a ação dos reguladores de tensão e velocidade, decaimento de fluxo e efeito da saliência transitória.

A função V foi obtida de modo sistemático usando um critério de estabilidade já utilizado em [47] para um modelo mais simplificado. Aqui foi dada uma demonstração do critério já mencionado usando a versão matricial do lema de Yakubovitch-Kalman devida a Anderson, o que introduz o problema da realização mínima que não foi discutido em [47]. O modelo (2.45), assim como o modelo utilizado em [47], não satisfaz a condição de minimalidade. Mesmo assim, como foi demonstrado, o critério pode ser usado para a obtenção sistemática de funções de Liapunov.

A determinação do domínio de estabilidade envolve a solução de um sistema de apenas duas equações algébricas não-lineares.

A filosofia que motivou o estudo de um sistema máquina-barras infinita foi a possibilidade de estender o resultado a um sistema multimáquinas usando a teoria dos sistemas de grande porte. Neste caso o sistema pode ser dividido em subsistemas compostos de uma única máquina, para cada um dos quais os resultados obtidos são aplicáveis. Para o estudo do sistema completo pode-se usar uma função de Liapunov escalar. No entanto as restrições que são necessárias sobre as interligações entre subsistemas são de difícil obtenção, e as dificuldades encontradas foram maiores que as esperadas. Deve-se observar que os trabalhos que aplicam métodos de decomposição em subsistemas usam em geral modelos muito simplificados.

O uso de métodos diretos no estudo da estabilidade de sistemas de potência é uma alternativa atraente, por sua rapidez e facilidade na caracterização de operação segura do sistema. Por este motivo estes métodos prestam-se especialmente ao uso em tempo real. O desenvolvimento de uma nova concepção na monitoração

de sistemas de potência através da implantação de modernos centros de controle nos quais a análise em tempo real tem um papel central, justificam o grande número de trabalhos já publicados, ou que continuam a aparecer na literatura, demonstrando o interesse e a potencialidade do uso de métodos diretos.

Essencialmente são dois os problemas apresentados na aplicação do método direto de Liapunov a sistemas de potência:

1. A determinação de um modelo adequado do sistema e a construção de uma função de Liapunov para este modelo. Um grande número de trabalhos foram realizados nesta área, e algumas conclusões podem ser tiradas:

a. De modo geral, o uso de métodos diretos torna necessário modelos bastante simplificados do sistema. Enquanto que algumas destas simplificações são facilmente justificáveis, outras podem levar a grandes erros (por exemplo, desconsideração das condutâncias de transferência e decaimento de fluxo).

b. A medida que o modelo do sistema é melhorado, ou seja, quando se procura representar todos os fenômenos que acontecem no período transitório, a construção de funções adequadas torna-se mais difícil. A causa desta dificuldade pode ser tanto o aumento da dimensão do modelo (como foi visto no capítulo VI onde foi analisado um caso simples máquina-barras infinita, com modelos já simplificados de reguladores de tensão e velocidade), como também a falta de ferramentas adequadas para lidar com não-linearidades multiplicativas (como as que aparecem quando se considera decaimento de fluxo).

2. A estimativa de um domínio de estabilidade que não seja tão conservativa, que possa ser determinada rapidamente e seja confiável, é ainda o principal obstáculo a aplicação prática do segundo método de Liapunov. Pode-se afirmar que o esforço de pesquisa atual, se concentra principalmente na determinação de métodos que superem a excessiva conservatividade apresentada pelos primeiros trabalhos. Os resultados têm sido promissores, embora tais métodos, por serem heurísticos, sofram em confiabilidade. Os modelos são simplificados, às vezes considerando, de modo aproximado, as condutâncias de transferência.

A partir das considerações anteriores e da análise de trabalhos que têm aparecido na literatura, pode-se dar algumas indicações de pesquisas que podem ser desenvolvidas:

1. A pesquisa relacionada à determinação de domínios que superem a conservatividade e que sejam confiáveis, assim como o desenvolvimento de algoritmos computacionais mais eficientes para a sua aplicação, é um campo que merece atenção, dados os resultados promissores já obtidos.

2. A aplicação da teoria de sistemas de grande porte à análise de estabilidade de sistemas de potência tem sido objeto de poucos trabalhos. Neste caso aplicam-se técnicas de decomposição em subsistemas e agregação, e uso de funções de Liapunov vetoriais ou escalares (|4|, |5|, |6|, |8|, |13|, |25|, |30|, |40|, |57|, |68|).

Os resultados encontrados na literatura apresentam interesse apenas acadêmico, uma vez que, além das dificuldades inerentes à aplicação do método, os domínios são muito conservativos (|4|, |13|, |30|, |40|). Ainda assim, a decomposição em subsistemas torna possível a consideração de modelos mais realísticos. Como a teoria de sistemas de grande porte é ainda um campo em desenvolvimento, as possibilidades de pesquisa são muito grandes.

3. A consideração de modelos mais realísticos também merece atenção. Neste sentido a dispensa da redução de Kron, permitindo que as cargas sejam modeladas como dependentes da frequência e que não haja perda de identidade das diversas barras é uma abordagem nova |9|.

4. Finalmente deve-se observar que a teoria de sistemas não-lineares e especialmente o segundo método de Liapunov, não são teorias fechadas. A falta de critérios de estabilidade e a dificuldade para tratar com não-linearidades que não atendam às condições de setor de Popov mostram que a teoria é pouco desenvolvida para estes casos.

BIBLIOGRAFIA

- | 1 | ANDERSON, B.D.O. - Stability of Control Systems with Multiple Nonlinearities. J. Franklin Inst., Vol. 282, nº 3, 155-160, Sept., 1966.
- | 2 | ANDERSON, B.D.O. - A System Theory Criterion for Positive Real Matrices. SIAM J. Control, Vol. 5, nº 2, 171-182, 1967.
- | 3 | ANDERSON, P.M. e FOUAD A. - Power System Control and Stability. The Iowa State University Press, Ames, Iowa, U.S.A., Vol. 1, 1ª edição, 1977.
- | 4 | ARAKI, M. et al - Application of a New Stability Criterion of Composite Systems to Multimachine Power Systems. IEEE Trans AC, Vol. 25, nº 3, 480-483, June, 1980.
- | 5 | ARAKI, M. - Application of M-matrices to the Stability Problems of Composite Dynamical Systems. J. Math. Anal. Appl. Vol. 52, 309-321, 1975.
- | 6 | ARAKI, M. - Stability of Large-Scale Nonlinear Systems - Quadratic Order Theory of Composite-System Method Using M-matrices. IEEE Trans. AC, Vol. 23, nº 2, 129-142, April, 1978.
- | 7 | ATHAY, T. et al - A Practical Method for the Direct Analysis of Transient Stability. IEEE Trans. PAS, Vol. 98, nº 2, 573-580, March-April, 1979.
- | 8 | BELLMAN R. - Vector Lyapunov Functions. J. SIAM, Control, Vol. 1, nº 1, 32-34, 1962.
- | 9 | BERGEN A.R. e HILL D.J. - A Structure Preserving Model for Power System Stability Analysis. IEEE Trans. PAS, Vol. 100, nº 1, 25-35, Jan., 1981.

- | 10| BYERLY R.T. e KIMBARK E.W. ed - Stability of Large Elec
tric Power Systems. IEEE Press, 1974.
- | 11| CASTELLANOS M. e FREGOSI A.E. - Algunas Consideraciones so
bre el Estudio de la Estabilidad Asintótica en Sistemas
de Potencia. VII Simposio Nac. de Control Autom., Buenos
Aires, Nov., 1980.
- | 12| DAVISON E.J. e KURAK E.M. - A Computational Method for De
termining Quadratic Lyapunov Functions for Non-linear
Systems. Automatica, Vol. 7, 627-636, 1971.
- | 13| DARWISH M. e FANTIN J. - The Application of Lyapunov Me
thods to Large Power Systems using Decomposition and
Aggregation Techniques. Int. J. Control, Vol. 24, nº 2,
247-260, 1976.
- | 14| DE SARKAR A.K. e DHARMA RAO N. - Zubov's method and Tran
sient Stability Problems of Power Systems. Proc. IEEE,
Vol. 118, nº 8, 1035-1040, August, 1971.
- | 15| DHARMA RAO N. - Routh-Hurwitz Conditions and Lyapunov Me
thods for the Transient Stability Problem. Proc. IEE, ,
Vol. 116, nº 4, 539-547, April, 1969.
- | 16| DORAISWAMI R. e FONSECA L.G.S. - A Fast and Reliable Deter
mination of Transient Stability for Multimachine Power
Systems, IEEE PES Winter Meeting, Jan., 1977.
- | 17| EL-ABIAD A.H. e NAGAPPAN K. - Transient Stability Regions
of Multimachine Power Systems. IEEE Trans. PAS, Vol. 85,
nº 2, 169-179, Feb., 1966.
- | 18| ELGERD O.I. - Introdução a Teoria de Sistemas de Energia
Elétrica. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1977.
- | 19| FALLSIDE, F. e PATEL, M.R. - On the Application of the Lya
punov Method to Synchronous Machine Stability. Int. J.
Control, Vol. 4, nº 6, 501-513, 1966.

- | 20 | FONSECA L.G.S. et al - Determinação de Domínios de Estabilidade. Assintótica para Sistemas de Potência com n-máquinas. II Cong. Bras. Aut., UFSC, 1978.
- | 21 | FONSECA L.G.S. e BORENSTEIN C.R. - Uso de Domínios de Estabilidade na Análise de Segurança "On-line". III Cong. Chileno de Ing. Elect., Mayo, 1979.
- | 22 | FOUAD A.A. e STANTON S.E. - Transient Stability of a Multi-machine Power System, PART I: Investigation of System Trajectories. IEEE PES Winter Meeting, Feb., 1980.
- | 23 | FOUAD A.A. e STANTON S.E. - Transient Stability of a Multi-machine Power System. PART II: Critical Transient Energy. IEEE PES Winter Meeting, Feb., 1980.
- | 24 | GLESS G.E.. - Direct Method of Liapunov Applied to Transient Power System Stability. IEEE Trans. PAS, Vol. 85, nº 2, 159-168, Feb., 1966.
- | 25 | GRUJIĆ L.T. e SILJAK D.D. - Asymptotic Stability and Instability of Large-Scale Systems, IEEE Transc. AC, Vol. 18, nº 6, 636-645, December, 1973.
- | 26 | GUPTA C.L. e AL-ABIAD A.H. - Determination of the Closest Unstable Equilibrium State for Liapunov Methods in Transient Stability Studies. IEEE Trans PAS, Vol. 95, nº 5, 1699-1712, Sept./Oct., 1976.
- | 27 | HAHN W. - Theory and Application of Liapunov's Direct Method. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1963.
- | 28 | HENNER V.E. - A Multimachine Power System Liapunov Function Using the Generalized Popov Criterion. Int. J. Control, Vol. 19, nº 5, 969-976, 1974.
- | 29 | HENNER V.E. - Comments on "On Lyapunov Functions of Power Systems with Transfer Conductances". IEEE Trans. AC, Vol. 23, 621-623, Oct., 1974.

- [30] JOCIĆ L.B. et al - Multimachine Power Systems: Stability, Decomposition, and Aggregation. IEEE Trans. AC, Vol. 23, nº 2, 325-332, April, 1978.
- [31] JHA R. e MAHALANABIS A.K. - Improved Technique for Computations of Power System Transient Stability Regions. Proc. IEE, Vol. 122, nº 12, 1402-1404, Dec., 1975.
- [32] KAKIMOTO N. et al - Transient Stability Analysis of Multimachine Power Systems with Field Flux Decays via Liapunov's Direct Method. IEEE Trans. PAS, Vol. 99, nº 5, 1819-1827, Sept./Oct., 1980.
- [33] KAKIMOTO N. e HAYASHI - Transient Stability Analysis of Multimachine Power System by Lyapunov's Direct Method. IEEE Conference on Decision and Control, Dec., 1981.
- [34] KALMAN R.E. e BERTRAM J.E. - Control System Analysis and Design via the "Second Method of Lyapunov. Trans. ASME, Vol. 82, nº 2, 371-393, June, 1960.
- [35] KALMAN R.E. - Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control. In: AGGARWAL J.K. e VIDYASAGAR M. ed - Nonlinear Systems. Stability Analysis. Stroudsburg, Pennsylvania, Dowden Hutchinson and Ross, 1977, pp. 201-205.
- [36] KIMBARK E.W. - Power System Stability. Vol. 1. John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
- [37] KIMBARK E.W. - Power System Stability: Synchronous Machines. Dover Publications, Inc., New York.
- [38] KOLBE E.M. - Estabilidade do Gerador Síncrono com Reguladores via Método Direto de Liapunov. TESE (M Sc), UFSC, Nov., 1980.

- [39] LÜDERS G.A. - Transient Stability of Multimachine Power Systems via the Direct Method of Lyapunov. IEEE Trans. PAS, Vol. 90, n° 1, 23-26, Jan./Feb., 1971.
- [40] MAHALANABIS A.K. e SINGH R. - On the Analysis and Improvement of the Transient Stability of Multimachine Power Systems. IEEE Trans. PAS, Vol. 100, n° 4, 1574-1579, April, 1981.
- [41] MANSOUR M. - Stability Analysis and Control of Power Systems. In: HANDSCHIN, E. ed - Real Time Control of Electric Power Systems. Amsterdam, Elsevier Pub. Co., 1972.
- [42] MIYAGI M.E. e TANIGUCHI T. - Construction of Lyapunov Functions for Power Systems. Proc. IEE, Vol. 124, n° 12, Dec. 1977.
- [43] NARENDRA K.S. e TAYLOR J.H. - Frequency Domain Criteria for Absolute Stability. New York, Academic Press, 1973.
- [44] PAI M.A. et al - Power System Transient Stability Regions Using Popov's Method. IEEE Trans. PAS, Vol. 89, n° 516, 788-794, May/june, 1970.
- [45] PAI M.A. e MURTHY P.G. - On Lyapunov Functions for Power Systems with Transfer Conductances. IEEE Trans. AC, Vol. 18, 181-183, April, 1973.
- [46] PAI M.A. e MURTHY P.G. - New Lyapunov Functions for Power Systems based on Minimal Realizations Int. J. Control, Vol. 10, n° 2, 401-415, 1974.
- [47] PAI M.A. e RAI V. - Lyapunov - Popov Stability Analysis of Synchronous Machine with Flux Decay and Voltage Regulator. Int. J. Control, Vol. 19, n° 4, 817-829, 1974.

- |48| PAI M.A. e NARAYANA C.L. - Finite Regions of A Attractions for Multinonlinear Systems and its Application to the Power System Stability Problem. IEEE Trans. AC, Vol. 21, 716-721, Oct., -1976.
- |49| PRABHAKARA F.S. e EL-ABIAD A.H. - A Simplified Determination of Transient Stability Regions for Lyapunov Methods. IEEE Trans. PAS, Vol. 94, n^o 2, 672-689, March/april , 1975.
- |50| PRABHAKARA F.S. et al - Application of Generalized Zubov's Method to Power System Stability. Int. J. Control, Vol. 20, n^o 2, 203-212, 1974.
- |51| RIBBENS-PAVELLA M. e LEMAL B. - Fast Determination of Stability Regions for On-line Transient Power System Studies. Proc. IEE, Vol. 123, n^o 7, 689-696, July, 1976.
- |52| RIBBENS-PAVELLA M. et al - The Acceleration Approach to Practical Stability Domain Estimation in Power Systems . IEEE Conference on Decision and Control, Dec., 1981.
- |53| SASAKI H. - An Approximate Incorporation of Field Flux Decay into Transient Stability Analysis of Multimachine Power Systems by the Second Method of Lyapunov. IEEE Trans. PAS, Vol. 98, n^o 2, 473-483, March/April, 1979.
- |54| SASTRY V.R. e MURTHY P.G. - Derivation of Completely Controllable and Completely Observable State Models for Multimachine Power System Stability Studies. Int. J. Control, Vol. 16, n^o 4, 777-788, 1972.
- |55| SASTRY V.R. - Nature of Transient Stability Regions of Multimachine Power Systems with and without Damping. Proc. IEE, Vol. 122, n^o 6, 653-654, June, 1975.
- |56| SIDDIQEE M. - Transient Stability of an A.C. Generator by Lyapunov's Direct Method. Int. J. Control, Vol. 8, n^o 2, 131-144, 1968.

- [57] SILJAK D.D. - Stability of Large-Scale Systems under Structural Perturbations. IEEE Trans. Syst. Man Cybernetics, Vol. 2, n^o 5, Nov., 1972.
- [58] SUBRAMANIAN R. e BANSAL R.K. - Estimation of Power System Stability Domains Using Quadratic Lyapunov Functions. Proc. IEE, Vol. 124, n^o 7, 597-601, July, 1977.
- [59] SZEGÖ G.P. - On a New Partial Differential Equation for the Stability Analysis of Time Invariant Control Systems. In: AGGARWAL J.K. e VIDYASAGAR M. ed. Nonlinear Systems Stability Analysis. Stroudsburg, Pennsylvania, Dowden Hutchinson and Ross, 1977, pp. 140-152.
- [60] TAVORA C.J. e SMITH O.J.M. - Characterization of Equilibrium and Stability in Power Systems. IEEE Trans. PAS, Vol. 91, n^o 3, 1127-1130, May/June, 1972.
- [61] TAVORA C.J. e SMITH O.J.M. - Equilibrium Analysis of Power Systems. IEEE Trans. PAS, Vol. 91, n^o 3, 1131-1137, May/June, 1972.
- [62] TAVORA C.J. e SMITH O.J.M. - Stability Analysis of Power Systems. IEEE Trans. PAS, Vol. 91, n^o 3, 1138-1144, May/June, 1972.
- [63] TEICHGRAEBER, R.D. et al - New Stability Measure for Multimachine Power Systems. IEEE Trans. PAS, Vol. 89, n^o 2, 233-239, Feb., 1970.
- [64] VIDYASAGAR, M. - Nonlinear Systems Analysis. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [65] WALKER J.A. e CLARK L.G. - An Integral Method of Liapunov Function Generation for Nonlinear Autonomous Systems. In: AGGARWAL J.K. e VIDYASAGAR M. ed. Nonlinear Systems Stability Analysis. Stroudsburg, Pennsylvania, Dowden Hutchinson and Ross, 1977, pp. 153-159.

- [66] WALKER J.A. e McCLAMROCH N.H. - Finite Regions of Attraction for the Problem of Lur'e. Int. J. Control, Vol. 6, n^o 4, 331-336, 1967.
- [67] WEISSENBERGER S. - Applications of Results from the Absolute Stability Problem to the Computation of Finite Stability Domains. IEEE Trans. AC, Vol. 13, 124-125, Feb., 1968.
- [68] WEISSENBERGER S. - Stability Regions of Large Scale Systems. Automatica, Vol. 9, 653-663, 1973.
- [69] WILLEMS J.L. - Direct Methods for Transient Stability Studies in Power System Analysis. IEEE Trans. AC, Vol. 16, n^o 4, 332-341, Aug., 1971.
- [70] WILLEMS J.L. e WILLEMS J.C. - The Application of Lyapunov Methods to the Computation of Transient Stability Regions for Multimachine Power Systems. IEEE Trans. PAS, Vol. 89, n^o 516, 795-801, May/June, 1970.
- [71] WILLEMS J.L. - A partial Stability Approach to the Problem of Transient Power System Stability. Int. J. Control, Vol. 19, n^o 1, 1-14, 1974.
- [72] WILLEMS J.L. - Improved Lyapunov Function for Transient Power System Stability. Proc. IEE, Vol. 115, n^o 9, 1315-1317, Sept. 1968.
- [73] WILLEMS J.L. - Optimum Lyapunov Functions and Stability Regions for Multimachine Power Systems. Proc. IEE, Vol. 117, n^o 3, 573-577, March, 1970.
- [74] WILLEMS J.L. - Author's Reply. IEEE Trans. AC, Vol. 17, 415-417, June, 1972.

- [75] WILLIAMS H.F. et al - Feasibility of Lyapunov Functions for the Stability Analysis of Electric Power Systems Having up to 60 Generators. IEEE Trans. PAS, Vol. 91, n^o 3, 1145-1153, May/June, 1972.
- [76] YU Y.N. e VONGSURIYA K. - Nonlinear Power System Stability Study by Lyapunov Function and Zubov's Method. IEEE Trans. PAS, Vol. 86, n^o 12, 1480-1485, Dec., 1967.
- [77] YU Y.N. et al - Application of an Optimal Control Theory to a Power System. IEEE Trans. PAS, Vol. 89, n^o 1, 55-62, Jan., 1970.