

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UM MODELO EM DIFERENÇAS FINITAS PARA CALCULAR A CAMADA
LIMITE TURBULENTA EM SUPERFÍCIES CURVAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

JOSÉ CARLOS CHARAMBA DUTRA

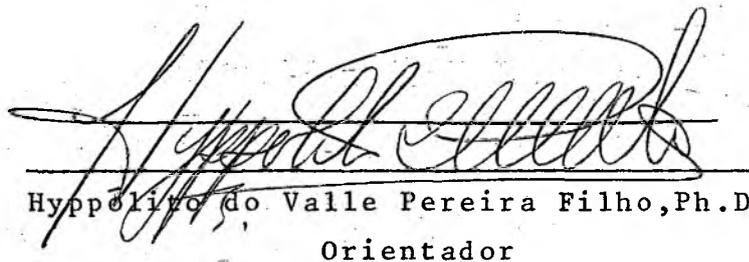
FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO - 1978

UM MODELO EM DIFERENÇAS FINITAS PARA CALCULAR A CAMADA
LIMITE TURBULENTA EM SUPERFÍCIES CURVAS

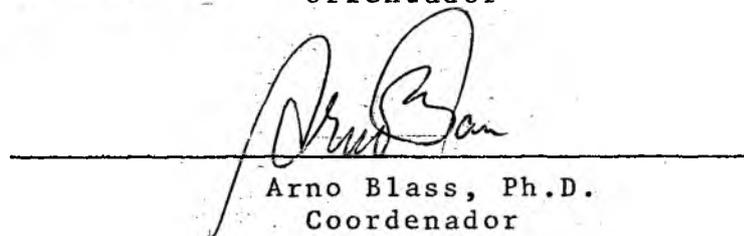
Esta dissertação foi julgada para a obtenção do título
de Mestre em Ciências - Especialidade Engenharia Mecâ-
nica.

Área de Concentração - Termotécnica

e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Gradua-
ção.

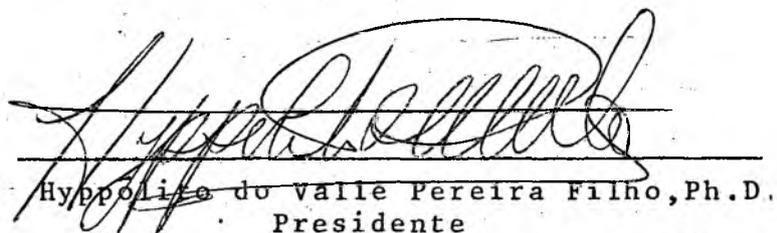


Hyppólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.
Orientador

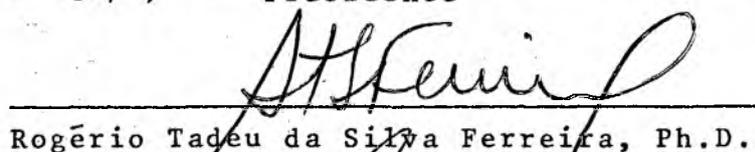


Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

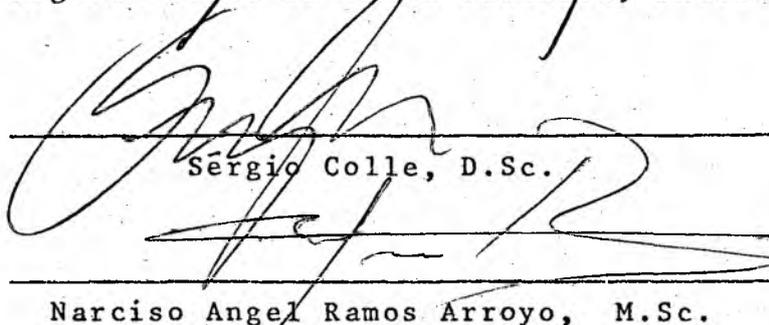
Apresentada perante a banca examinadora compos-
ta dos professores:



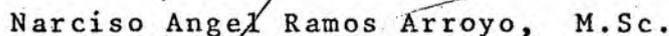
Hyppólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.
Presidente



Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.



Sérgio Colle, D.Sc.



Narciso Angel Ramos Arroyo, M.Sc.

LISTA DE SÍMBOLOS

A_J, B_J, C_J, D_J	Funções da equação do movimento na forma de diferenças finitas
Cf	Coefficiente de fricção local, adimensionalizado.
EM	Termo na equação do movimento dado por (ϵ/ν)
f	Fator que aparece nas equações do movimento em coordenadas curvilíneas, dado por: $(R(x)/R(x)+y)$
H	Fator de forma (δ^* / θ) .
K_p, K_0	Constante da hipótese da Viscosidade Turbulenta.
l	Comprimento de mistura.
N	Máximo valor de j .
$R(x)$	Raio local da superfície curva
τ	Tempo.
T	Tempo total.
$U_\infty(x)$	Velocidade do escoamento potencial.
u_i	Velocidade instantânea na direção i.
\bar{u}_i	Velocidade média na direção i.
u'_i	Flutuação da velocidade na direção i.
u^*	Velocidade de fricção $\sqrt{\frac{\zeta_p}{\rho}}$.
v'	Flutuação da velocidade na direção vertical.
\bar{v}	Velocidade média vertical.
V	Velocidade normal transformada.

y	Coordenada vertical.
y ⁺	Coordenada vertical transformada ($y \frac{u^*}{\nu}$)
δ	Espessura da camada limite.
ϵ	Viscosidade turbulenta. Critério de erro.
K	Constante de Von Karman (0.42)
μ	Viscosidade dinâmica.
ν	Viscosidade cinemática ($\frac{\mu}{\rho}$)
ξ, η	Coordenadas adimensionais
ρ	Densidade
ζ	Tensor ($\mu \frac{\partial u}{\partial y} + (-\rho \overline{u'v'})$)
$\zeta(t)$	Tensor turbulento.
$\zeta(l)$	Tensor laminar ($\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$)
P_o	Pressão de estagnação

Í N D I C E S

	Borda da camada limite
i, j, k	Notação tensorial: denota direções paralela à superfície com a mesma direção do fluxo, normal a velocidade, paralela a superfície mas normal ao vetor velocidade.
l, m, n	
o	Afastado da parede
P	Perto da parede.
p	Na parede.
δ	Para u igual 0.98999

SOBRE-ESCRITOS

τ

Turbulento

λ

Laminar

A G R A D E C I M E N T O S

Ao concluir este trabalho desejo expressar minha gratidão às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse meu ideal.

Primeiramente, às pessoas que contribuíram mais diretamente comigo durante esses anos do Curso de Mestrado.

Quero agradecer a:

- Lamartine Bezerra, que me ajudou muito quando da minha vinda para cá.
- Aos professores que me transmitiram, com abnegação, seus conhecimentos.
- Ao Orientador, Dr. Hypólito do Valle Pereira, que além de me transmitir os conhecimentos da teoria de turbulência, dedicou atenção e paciência desde as deduções até as conclusões, com a compreensão de quem já enfrentou essas mesmas dificuldades.
- Aos colegas Fábio e Gonzales pela ajuda na parte de computação, no início da tese.
- Ao pessoal do D.P.D., nas pessoas do Jaime e do Baron pela solicitude com que colaboraram no andamento da computação.
- Aos colegas de sala, Edson, Walter, Ricardo, Vilson e Lutero que dividiram comigo os sucessos e insucessos da longa caminhada.
- Aos amigos que aqui conquistei, cujos nomes alongariam muito essas primeiras páginas, pelo apoio, incentivo e calor humano que me proporcionaram nesse período que aqui vivi.

- Ao Prof. Abelardo Montenegro, Chefe do Departamento de Eng. Mecânica da UFPE, principal incentivador da minha vinda a esse curso.
- A U.F.S.C. que me deu condições plenas de estudo e trabalho.
- A U.F.PE. que me incluiu no P.I.C.D. Honrado-me com a contratação para o seu quadro de professores.
- À CAPES, que me proporcionou a bolsa de estudos sem a qual não haveria a possibilidade de ter feito o curso.
- Aos meus pais e amigos de Recife, pelo incentivo constante.

Finalmente, quero dedicar esse trabalho a minha noiva, companheira fiel de todas as horas, pelo incentivo, pelo desprendimento, pela compreensão. A ela, minha eterna gratidão.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	6
2.1 - Situação teórica do problema	6
2.2 - Equações de Navier-Stokes para superfícies curvas ..	7
2.3 - Equações de Navier-Stokes aplicadas ao regime turbulento	8
2.4 - Equação da camada limite	10
2.5 - Forma geral do problema	15
2.6 - Investigação teórica sobre a hipótese de uma viscosidade turbulenta	16
2.6.1 - Conceito de viscosidade turbulenta	16
2.6.2 - Análise da ordem de grandeza dos termos $\zeta^{(t)}$	18
2.6.3 - Modelo matemático da viscosidade turbulenta	21
2.6.4 - Hipóteses da viscosidade turbulenta	21
2.7 - Modelo matemático do problema	23
2.8 - Adimensionalização e mudança de coordenadas	25
III - COMPUTAÇÃO DO MODELO	27
3.1 - O modelo em diferenças finitas	27
3.2 - Resolução do sistema	33
IV - DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	38
4.1 - Perfis de velocidade u , u^+ , v e v^+	41
4.2 - Viscosidade turbulenta e tensor de Reynolds	43
4.3 - Coeficiente de fricção	44
V - CONCLUSÕES	46
5.1 - Conclusão	46
5.2 - Recomendações para trabalhos futuros	47
BIBLIOGRAFIAS	48

APÊNDICES

APÊNDICE A: Obtenção das equações da camada limite	50
APÊNDICE B: Transformações das equações do sistema	59
APÊNDICE C: Gráficos dos resultados obtidos	65

S U M Á R I O

O objetivo deste trabalho foi calcular a camada limite turbulenta em superfícies curvas em regime permanente. Isto foi conseguido partindo-se das equações de Navier-Stockes e da equação da continuidade, para um sistema de coordenadas curvilíneas.

Devido a natureza aleatória da turbulência, aplicou-se um tratamento estatístico ao sistema de equações. Em consequência desse tratamento apareceu nas equações de Navier-Stockes um tensor turbulento que tornou o número de variáveis maior do que o número de equações. De modo a contornar esse problema foi adicionada uma equação, modelo matemático, para o tensor de Reynolds.

O modelo matemático do tensor é composto de duas equações para a viscosidade turbulenta:

uma para a região próxima da parede e outra para a região afastada.

A camada limite turbulenta foi calculada numericamente, por diferenças finitas, usando um sistema de grade variável, de modo a ter pequenos incrementos perto da parede.

Inicialmente foi reproduzido o cálculo da camada limite da placa plana, fazendo-se o raio de curvatura muito pequeno. Em seguida foi testado um canal com pequeno raio de curvatura, cujos resultados foram excelentes.

Para se iniciar o cálculo, necessitou-se dos perfis de velocidade \bar{u}, \bar{v} e de $U_\infty(x)$, da espessura da camada limite naquele ponto e da velocidade de fricção.

Veja no apêndice (C) os resultados obtidos nos cálculos dos parâmetros $\bar{u}, u^+, \bar{v}, \epsilon$ e C_f .

C A P I T U L O I

INTRODUÇÃO

O estudo da camada limite, devido à importância de suas aplicações na aerodinâmica de navios, aviões, foguetes e, também na transmissão de calor, vem desde o começo do século despertando a atenção de muitos pesquisadores. Renomados cientistas de cada época vem emprestando suas colaborações a esse ramo da mecânica dos fluidos.

No estudo da camada limite definiu-se três regiões distintas de pesquisa: região laminar, transição e turbulenta.

A região laminar foi a mais atacada inicialmente, devido a maior possibilidade de tratamento matemático. Graças a isto, existe nos dias atuais, grande quantidade de problemas resolvidos nessa área, publicados em livros técnicos, e revistas especializadas.

Nas outras duas regiões, o aparecimento de termos adicionais nas equações diferenciais não lineares, torna o problema de difícil solução analítica. Particularmente a região turbulenta, objeto de nosso estudo, além da não linearidade das equações há a característica aleatória do movimento.

Para se resolver o problema da camada limite turbulenta usa-se definir as variáveis u e v como sendo somas de uma velocidade média mais uma velocidade de flutuação. Isto envolve o aparecimento de novas variáveis nas equações.

O caráter randômico do movimento suscitou a idéia de ser dado um tratamento estatístico às equações. Aplicou-se então uma média em relação ao tempo às equações do movimento e da continuidade. Em consequência dessa média aparecem nas equações de Navier-Stockes um tensor turbulento cujas componentes são as médias dos produtos das velocidades de flutuação.

Quanto à forma não linear das equações não se pode alterá-las uma vez que descrevem um fenômeno físico. Entretanto em relação ao tensor turbulento há duas maneiras de

se contornar esse problema: tentar relacionar o tensor de Reynolds à velocidade média por uma relação empírica ou experimental; desenvolver uma equação para o tensor turbulento ou para algumas de suas componentes.

Quem teve a idéia de relacionar o tensor à velocidade média por uma relação foi Boussinesq⁽²⁰⁾, que fazendo uma analogia com escoamento laminar, definiu o tensor turbulento como o produto da taxa de variação da velocidade na direção perpendicular ao escoamento por uma viscosidade turbulenta. Contribuições importantes usando Boussinesq foram: a teoria do comprimento de mistura, de Prandtl⁽²⁰⁾ e da similaridade, de Von Kármán⁽²⁰⁾.

Nesses últimos 20 anos foi apresentado um vasto número de trabalhos propondo modelos matemáticos para o tensor de Reynolds, dando grande impulso à pesquisa da camada limite turbulenta.

Quanto a outra opção, a técnica consiste em obter equações derivadas a partir das equações de Navier-Stokes. Isso aumenta o grau de dificuldade do problema uma vez que a cada nova equação adicionadas ao sistema, aumenta o número de variáveis do problema. A menos que se consiga maiores informações sobre o escoamento, não se podera obter solução por esse caminho porque esse processo introduz novas variáveis no problema de tal forma que o número de variáveis é sempre maior que o número de equações. A esse tipo de comportamento é tradicionalmente chamado de "problema de fechamento".

O uso do computador, trouxe grande impulso para a pesquisa da camada limite turbulenta, permitindo a solução dos sistemas de equações diferenciais não lineares analiticamente insolúveis, por métodos numéricos. O congresso internacional "Computação da camada limite turbulenta" realizado no ano de 1968, em Stanford⁽²¹⁾ veio confirmar a importância do computador na área de turbulência. Os métodos numéricos foram classificados de acordo com a forma das equações que governam o fenômeno físico.

Método diferencial: O sistema é composto de equações diferenciais parciais.

Método integral: Cujo sistema é formado por equações diferenciais ordinárias, deduzidas a partir da integração das equações fundamentais, na forma diferencial, da camada limite.

Para uma descrição detalhada desses métodos ver Schlichting⁽²⁰⁾.

O presente trabalho faz parte do esforço do Prof. Pereira H.V. para desenvolver aqui no Brasil, um método de calcular camada limite turbulenta para superfícies planas e curvas, usando o método diferencial. Na resolução do sistema de equações foi usado o programa desenvolvido na tese de doutorado do referido professor⁽¹⁴⁾, fazendo-se as devidas modificações para trabalhar com as equações no sistema curvilíneo e, algumas outras mudanças necessárias às características do problema.

Até o momento, em relação à superfície plana, não foi muito grande o número de trabalhos publicados na área de turbulência em superfícies curvas, o que tornou recompensador o esforço empregado na tese.

Esse trabalho não poderia ter sido feito sem a valiosa ajuda de publicações como:

Wattendorf, F.L., 1934⁽²³⁾. Estudo do efeito de curvatura no escoamento turbulento. Nessa pesquisa o autor investigou experimentalmente a distribuição da velocidade turbulenta em canais, e tubos finos de seção constante.

Roddam Narasinha e S. Kojha⁽¹²⁾, Efeito da superfície curva longitudinal nas camadas limite. Nesse trabalho foi usada a técnica de perturbação de Von Dyke que expande em série de Taylor as variáveis u e v . A equação diferencial de ordem Zero tem pouca influência no efeito de curvatura, sendo resolvida separadamente. As outras, são reduzidas por uma análise de similaridade às equações diferenciais que são resolvidas por métodos numéricos utilizando o computador.

Cebecci, T., 1971 (6), Efeito de transição para camadas limites turbulentas em superfícies curvas. Nessa pesquisa Cebecci usou a equação do movimento e um modelo matemático para o tensor de Reynolds composta de duas equações: Uma para a região próxima e outra para a região afastada da parede. As equações foram tomadas em coordenadas planas, apenas sendo corrigido o efeito de curvatura para a equação do tensor turbulento.

Dvorak, F.A., 1972 (8), Cálculo da camada limite turbulenta e jatos de parede, para superfícies curvas. Dvorak usou a equação do movimento e da continuidade em coordenadas curvilíneas, tomando como modelo do tensor de Reynolds a equação da hipótese do comprimento de mistura, modificada por Van Driest⁽⁷⁾, para a região próxima da parede, e a equação desenvolvida por Wygnask e Fiedler para a região afastada da parede, em coordenadas planas.

So, R.M.S e Melor, G., 1972⁽¹⁶⁾, Experimento sobre os efeitos da curvatura na camada limite turbulenta. Nesse trabalho foi investigado experimentalmente a camada limite turbulenta em superfície convexa, com raio de curvatura variável.

Patankar, S.V.; Prap, V.S. e Spalding, D.B., 1975⁽¹³⁾, Predição do fluxo turbulento em tubos curvos. Primeiramente foi adotado um modelo simples do tensor de Reynolds usando a hipótese do comprimento de mistura (Nikuradse) que não concordou com os dados experimentais. Diante disso foi adotado um modelo que relaciona o tensor à energia cinética e a taxa de dissipação (Launder e Spalding, 1972).

So R.M.S., 1975⁽¹⁷⁾ obteve uma equação para o tensor turbulento em função da velocidade média, da rotação e da escala de comprimento da turbulência. Para fluxos em superfícies planas e um escoamento irrotacional essa expressão recai na equação de Prandtl para o tensor turbulento, onde o comprimento de escala tem o mesmo significado do comprimento de mistura. Baseado na hipótese de Boussinesq, deduziu para superfícies curvas uma equação para o tensor de Reynolds semelhante a que estamos utilizando no presente trabalho sem, entretanto, usar nenhum modelo matemático para a viscosidade

turbulenta a fim de resolver o sistema.

Pereira, H.V.,⁽¹⁵⁾, desenvolveu um método numérico, rápido e econômico, para calcular a camada limite turbulenta, utilizando-se de modelos matemáticos para o tensor turbulento, em função da energia cinética turbulenta e da taxa de dissipação.

Pereira, H.V., 1973⁽¹⁵⁾ aplicou a hipótese da similaridade de Vón Kármán para escoamentos turbulento a fim de desenvolver uma regra de determinação da viscosidade turbulenta, em relação ao comprimento de mistura, para superfícies curvas.

O Presente trabalho visa obter um método numérico para calcular a camada limite turbulenta em superfícies curvas para escoamentos incompressíveis. Baseado na hipótese de Boussinesq tomamos um modelo para a viscosidade turbulenta composta de duas equações, a primeira é do comprimento de mistura modificada por Van Driest⁽⁷⁾ para a região próxima da parede, e a segunda para a região afastada. O sistema a ser desenvolvido foi composto pelas equações do movimento, e as relações para o tensor de Reynolds, todas transformadas para o sistema de coordenadas curvilineas.

C A P Í T U L O II

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA2.1. Situação teórica do problema

No regime turbulento aparece nas equações da conservação do movimento, diferenciais parciais não lineares, um tensor turbulento. O aparecimento deste tensor torna impossível o cálculo da camada limite turbulenta uma vez que o sistema composto das equações da camada limite e continuidade, tem mais variáveis do que o número de equações. Para tornar possível a solução deste sistema obteve-se relações para o tensor turbulento relacionando-o com o gradiente de velocidade na direção da perpendicular as linhas de correntes.

De modo a calcular a camada limite em superfícies curvas fêz-se uma transformação de coordenadas nas equações de Navier-Stokes de modo que o eixo dos x 's tem a direção das linhas de corrente e o eixo dos y 's perpendicular a x , é consequentemente perpendicular às linhas de corrente (vide figura abaixo).

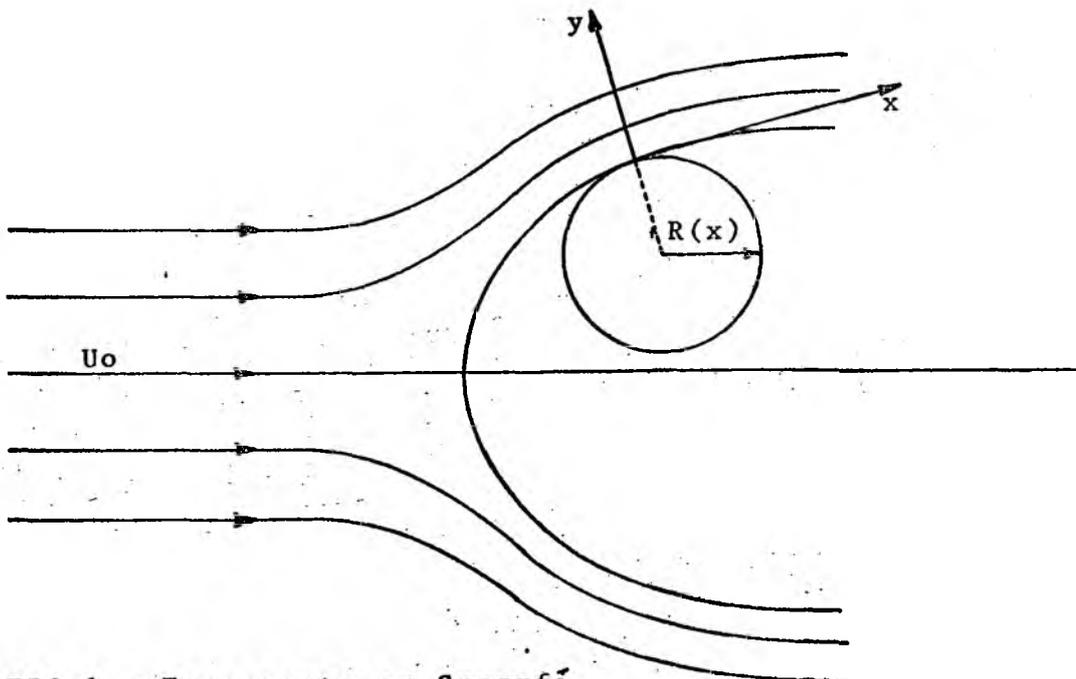


FIG.1 - Escoamento em Superfícies Curvas

2.2 - Equações de Navier-Stokes para superfícies curvas

As equações aqui usadas são para um fluido incompressível newtoniano. Para o escoamento laminar e permanente temos Thompson⁽²²⁾ (pág. 772), as equações:

Equações do movimento

Direção x

$$f u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{f}{R} v u = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{f}{R} \frac{\partial u}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{f^2}{R^2} u + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (2.1)$$

Direção y

$$f u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{f}{R} u^2 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ \left. + f^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - f^2 \frac{v}{R^2} + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} u + \frac{f^3 y}{R^2} \frac{dR}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (2.2)$$

Equação da continuidade

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{f}{R} v = 0 \quad (2.3)$$

onde

$$f(x, y) = \frac{R(x)}{R(x) + y} e, \quad (2.4)$$

$R(x)$ é o raio da curvatura a superfície.

2,3 Equações de Navier-Stokes aplicadas ao regime turbulento.

As equações (2.1) e (2.2) são também válidas para um escoamento turbulento como equações que descrevem as variáveis instantâneas do movimento.

De acordo com a descrição do escoamento médio definiremos as velocidades instantâneas como:

$$u = \bar{u} + u' \quad (2.5)$$

$$v = \bar{v} + v' \quad (2.6)$$

$$P = \bar{P}$$

$$C = \bar{C}$$

onde \bar{u} é a velocidade média na direção x e u' é a flutuação da velocidade nessa direção. Analogamente o mesmo se pode dizer para \bar{v} . Para uma maior compreensão ver Hinze⁽⁹⁾.

A média de uma variável A em relação ao tempo é dada por:

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{A}(T + L) dL \quad (2.7)$$

Devido ao escoamento ser incompressível não será considerada a variação de densidade dentro da camada limite.

Substituindo-se (2.5) e (2.6) em (2.3) teremos:

$$f \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') + \frac{f}{R} (\bar{v} + v') = 0$$

ou ainda,

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{f \bar{v}}{R} + \frac{f v'}{R} = 0 \quad (2.8)$$

Aplicando (2.7) a (2.8) e depois de algumas simplificações obtemos:

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{f \bar{v}}{R} = 0 \quad (2.9)$$

que é a equação da continuidade para o escoamento médio em superfícies curvas. Se seguirmos o escoamento com a mesma velocidade média deste, só presenciaremos o escoamento puramente turbulento.

Temos então que a equação da continuidade continua válida e será:

$$f \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{f v'}{R} = 0 \quad (2.10)$$

- Equações do movimento

Aplicando o mesmo procedimento a (2.1) e (2.2) as equações

do movimento nas direções x e y , para o escoamento turbulento, são as seguintes:

Direção x

$$\begin{aligned}
 f\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{v} \bar{u} = & - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left[f^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^2} + \right. \\
 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\bar{u}}{R} \right) + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{v} + \frac{f^3}{R^2} j \cdot \\
 \left. \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] - f \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial y} - \frac{2f}{R} \overline{u'v'} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Direção y

$$\begin{aligned}
 f\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{f}{R} \bar{u}^2 = & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \right. \\
 - 2 \frac{f^2}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{f^2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{f^2}{R^2} \bar{v} + \\
 + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{u} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \left. \right] - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \\
 - f \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) - \frac{f}{R} (\overline{v'^2} - \overline{u'^2}) \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

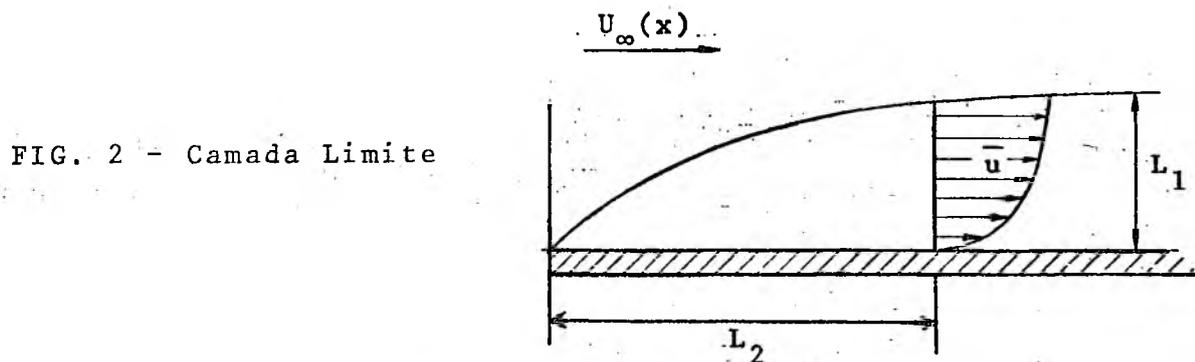
A dedução de (2.11) e (2.12) se encontra no apêndice (A).

2.4 - Equação da Camada Limite

As equações de Navier-Stokes traduzem um balanço entre as forças de inércia e viscosidade num escoamento. Tendo esse balanço sido feito para o escoamento potencial, na camada limite, devido às suas peculiaridades, alguns termos dessas equações poderão ser desprezados após uma análise de magnitude, simplificando-as.

De modo a fazer uma análise de grandeza nos termos das equações da conservação do movimento e da camada limite é preciso definir-se algumas escalas.

Seja L_1 a escala na direção de x e L_2 a escala na direção de y (vide figura abaixo).



Admitindo-se que as flutuações de velocidade tenham a mesma ordem de grandeza pode-se escolher uma escala " ℓ " para as flutuações de velocidade da ordem de:

$$\ell = 0 \left(\sqrt{u'^2} \sqrt{v'^2} \right)$$

A escolha de uma média geométrica deve-se à natureza das velocidades u' e v' , que podem adquirir valores positivos e negativos ao longo do tempo.

Olhando-se para a figura conclui-se que a relação entre L_2 e L_1 é muito pequena, ou seja:

$$\frac{L_2}{L_1} \lll 1 \quad (2.13)$$

Uma observação necessária à análise é

que sendo $R(x)$ da ordem de L_1 , deduz-se numa inspeção em (2.4) que o fator f é $O(1)$ (ordem de 1), o que nos leva ainda a verificar que

$$\frac{f}{R} = O\left(\frac{1}{L_1}\right) \quad (2.14)$$

Depois das necessárias considerações, far-se-á agora o estudo da ordem de grandeza das equações da continuidade e de Navier-Stokes.

Equação da Continuidade

De acordo com as considerações feitas acima pode-se escrever a eq.(2.9) da seguinte maneira:

$$O(1) \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} + \frac{O(v)}{O(L_1)} + O\left(\frac{1}{L_1}\right) O(\bar{v}) = 0$$

Multiplicando-se por $\frac{O(L_1)}{O(\bar{v})}$ segue-se que

$$O(1) \frac{O(\bar{u})}{O(\bar{v})} + \frac{O(L_1)}{O(L_2)} + O(1) = 0 \quad (2.15)$$

A equação (2.15) nos leva a concluir o seguinte:

$$\frac{O(\bar{v})}{O(\bar{u})} = \frac{O(L_2)}{O(L_1)} \lll 1 \quad (2.16)$$

Através das eq. (2.13), (2.14), (2.16) e (2.17), pudemos analisar a ordem de grandeza de (2.11) e (2.12) obtendo assim numa forma mais simplificada das equações em discussão.

Direção x

$$f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f \bar{u}}{R} \right) -$$

$$- \frac{\overline{\partial v' u'}}{\partial y} \quad (2.17)$$

Direção y

$$- f \frac{\bar{u}^2}{R} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{(v'^2)} \quad (2.18)$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{f \bar{u}^2}{R} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{(v'^2)} \quad (2.19)$$

Se integrarmos (2.19) em relação a y obteremos:

$$P = P_0 - \overline{\rho v'^2} + \frac{\rho}{R} \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy \quad (2.20)$$

Derivando agora em relação a x

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP_0}{dx} - \rho \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho}{R} \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy \right] \quad (2.21)$$

Como a ordem de magnitude de $\partial \bar{v}^2 / \partial x$ é a mesma de $\partial \bar{u}^2 / \partial x$ que é muiti pequena, podendo ser desprezada, e a eq.(2.21) ficará:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP_0}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho}{R} \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy \right] \quad (2.22)$$

Utilizando o teorema de Bernouille poderemos obter o valor de $\frac{dP_0}{dx}$.

Então segue-se que:

$$\frac{U_\infty(x)}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \text{cte} \therefore \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial x} = - U_\infty(x)$$

$$\frac{dU_\infty(x)}{dx}$$

Substituindo-se em (2.22) obtemos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - U_\infty(x) \frac{dU_\infty(x)}{dx} + \rho \int_0^y \frac{f \bar{u}^2}{R} dy \quad (2.23)$$

Introduzindo-se (2.23) em (2.18) chegaremos a equação da camada limite turbulenta para superfícies curvas para um escoamento bi-dimensional.

$$\begin{aligned}
f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = f U_{\infty}(x) \frac{dU_{\infty}(x)}{dx} + f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy + \\
+ v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \frac{\bar{u}}{R} \right) - u'v' \quad (2.24)
\end{aligned}$$

A dedução de (2.18) e (2.23) estão no apêndice (A).

2.5. Forma geral do problema

A solução do sistema de equações abaixo nos permitirá obter a espessura da camada limite, os perfis de velocidade ao longo do escoamento e outros parâmetros importantes.

$$\begin{aligned}
f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = f U_{\infty}(x) \frac{dU_{\infty}(x)}{dx} + f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy + \\
+ v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \frac{\bar{u}}{R} \right) - u'v' \quad (2.24)
\end{aligned}$$

$$f \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} \right) = 0 \quad (2.9)$$

Sujeito às seguintes condições de contorno:

$$u = \bar{v} = 0 \quad \text{quando } y = 0$$

\bar{u} tende para $U_{\infty}(x)$ quando y tender para δ (Delta).

A título de observação, $R(x)$ é uma relação auxiliar e sempre conhecida uma vez que é o raio de curvatura da superfície no ponto x .

2.6. Investigação teórica sobre a hipótese de uma Viscosidade Turbulenta

O termo $v'u'$ que aparece na eq.(2.24) é o tensor turbulento. As novas variáveis v' e u' tornam impossível a resolução do sistema de equações (2.24) e (2.9).

Como já foi citado anteriormente, uma maneira de contornar esse problema é a utilização da hipótese de Boussinesq que relaciona o tensor de Reynolds à velocidade média por uma relação. A idéia, consiste em fazer uma analogia com o escoamento laminar, definindo o tensor turbulento como o produto de uma viscosidade turbulenta pelo gradiente de velocidade.

2.6.1. Conceito de Viscosidade Turbulenta

Em geral pode-se generalizar a relação entre tensão e deformação, dada abaixo por:

$$\zeta_j = C_{ijkl} d_{kl} \quad (2.25)$$

onde d_{kl} são as componentes do tensor deformação de segunda ordem. O tensor D é dado pela seguinte expressão:

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \left[\underline{\nabla \bar{u}} + (\underline{\nabla \bar{u}})^T \right] \quad (2.26)$$

Onde T significa o Transposto de uma matriz.

O tensor de quarta ordem C nos dá o estado de tensão num elemento de fluido.

Trabalhos de Luxton, R.E.; Maton, M.J.; Banner, M.L., M.E e Che, E.T (14) apresentam uma discussão cuja conclusão é que a viscosidade turbulenta deve ser um tensor de quarta ordem se existir gradiente médio de velocidade no campo.

Se assumirmos que a viscosidade turbulenta " ϵ " é um tensor de quarta ordem, de acordo com (2.25) e por uma generalização da hipótese de Boussinesq, iremos obter o tensor turbulento como:

$$- u_i' u_j' = \rho \epsilon_{jkm} d_{km}$$

De acordo com Thompson (22) $\nabla \bar{v}$ para uma superfície curva será:

$$\nabla \bar{v} = \left(f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{f \bar{v}}{R} \right) \underline{i}_x \underline{i}_x + f \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \underline{i}_y \underline{i}_x - \frac{f \bar{u}}{R} \underline{i}_y \underline{i}_x +$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \underline{i}_x \underline{i}_y + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \underline{i}_y \underline{i}_y \quad (2.28)$$

Introduzindo-se (2.28) em (2.26) teremos que \underline{D} será dado por:

$$\left[\begin{array}{cc} f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{f \bar{v}}{R} & \frac{1}{2} f \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f \bar{u}}{R} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ \frac{1}{2} f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{f \bar{u}}{R} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \end{array} \right]$$

Baseado na equação (2.24), a única componente de $\zeta^{(t)}$ que aparece é:

$$\begin{aligned} \overline{-\rho v' u'} &= \rho \epsilon_{xjkm} d_{km} \\ \overline{-\rho v' u'} &= \epsilon_{xyxx} d_{xx} + 2\epsilon_{xyxy} d_{xy} + \epsilon_{xyyy} d_{yy} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Combinando (2.30) com (2.39) teremos:

$$\begin{aligned} -\rho u' v' &= \rho \epsilon_{xyxx} f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{f \bar{v}}{R} + \epsilon_{xyxy} \\ f \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f \bar{u}}{R} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \epsilon_{xyyy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.6.2. Análise da ordem de grandeza dos termos de $\zeta^{(t)}$.

Baseados em (2.31), (2.14) e (2.16) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{f \bar{v}}{R} &= O(1) \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} + O(\bar{v}) \cdot O\left(\frac{1}{L_1}\right) = O(1) \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} + \\ &+ \frac{O(\bar{u}) O(L_2)}{O(L_1)} \quad e \quad f \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f \bar{u}}{R} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \\ &= \frac{O(1) O(\bar{v})}{O(L_1)} - O(\bar{u}) O\left(\frac{1}{L_1}\right) + \frac{O(\bar{u})}{O(L_2)} = \frac{O(1) O(L_2) O(\bar{u})}{O(L_1)} - \\ &- \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} + \frac{O(\bar{u})}{O(L_2)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{O(\bar{v})}{O(L_2)} = \frac{O(\bar{u}) O(L_2)}{O(L_1) O(L_2)} = \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)}$$

De acordo com (3.7) podemos escrever

$$\left(0(1) \frac{0(\bar{u})}{0(L_1)} \frac{0(\bar{u})0(L_2)}{0(L_1)} \right) + \left(\frac{0(1)0(\bar{u})0(L_2)^P}{0(L_1)} - \frac{0(\bar{u})}{0(L_1)} + \frac{0(\bar{u})}{0(L_2)} \right) + \left(\frac{0(\bar{u})}{0(L_1)} \right) \quad (2.32)$$

Multiplicando-se (3.8) por $\frac{0(L_2)0(L_1)}{0(\bar{u})}$ vamos obter:

$$\left(\frac{0(1)0(L_2)}{0(L_1)} + \frac{0(L_2)}{0(L_2)} \right) + \left(\frac{0(1)0(L_1)}{0(L_1)} - 0(L_2) + 0(L_1) \right) + 0(L_2) \quad (2.33)$$

Numa rápida olhada vemos que o primeiro termo é $\ll 1$. Da mesma forma, o terceiro é da $0(L_2)$ e o segundo aproximadamente da ordem de $L_1 + \text{ordem de } L_2$, por conseguinte, bem maior do que os outros dois. Desta forma (2.30) fica reduzida a:

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \varepsilon_{xyxy} \left[f \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f\bar{u}}{R} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (2.34)$$

Numa segunda verificação em (2.32) vemos que $f \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ é muito menor do que $\frac{f\bar{u}}{R}$ e $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Sendo assim, (2.34) fica:

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \varepsilon_{xyxy} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f\bar{u}}{R} \right] \quad (2.35)$$

Prandtl apresentou uma expressão para $\zeta^{(t)}$ num escoamento em superfícies curvas-Wattendorf⁽²²⁾.

$$-\rho u'v' = \rho \epsilon_{xyxy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f\bar{u}}{R} \right) \quad (2.36)$$

Nessa publicação Wattendorf faz uma investigação para descobrir quais das duas expressões (2.35) e (2.36) descreve melhor o comportamento do tensor de Reynolds. Verifica-se na fig. 11 do seu trabalho que (2.35) é que melhor se aproxima dos resultados experimentais, contudo, não há uma segurança em se afirmar que (2.35) é o melhor modelo para $\zeta^{(t)}$, uma vez que na determinação do tensor viscosidade turbulenta, ϵ_{xyxy} , aparecem várias constantes. Uma variação de seus valores modificará também o comportamento de (2.36).

Kinney, R.B. Jr.⁽¹¹⁾ aplicando a hipótese da similaridade de Von Kármán para superfície cilíndricas chegou a conclusão que (2.35) é o melhor modelo de $\zeta^{(t)}$ para essa geometria.

De modo a escolher entre (2.35) e (2.36) no presente trabalho, utilizou-se a Hipótese de Similaridade de Von Kármán e obteve-se que o melhor modelo para o tensor de Reynolds é:

$$\zeta^{(t)} = \rho f K^2 \ell^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f\bar{u}}{R} \right) \right]^2 \quad (2.37)$$

Ver desenvolvimento em (15).

Comparando (2.37) com (2.36) têm-se a expressão para o tensor viscosidade turbulenta, que será:

$$\epsilon_{xyxy} = f K^2 \ell \left| \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f\bar{u}}{R} \right) \right| \quad (2.38)$$

2.6.3. Modelo matemático da Viscosidade Turbulenta.

Para efeito de estudo, a camada limite turbulenta pode ser dividida em três zonas ou regiões. A primeira, chamada subcamada laminar, fica adjacente a parede e caracteriza-se pela predominância do escoamento viscoso. Em consequência disso, nessa região, o gradiente de velocidade na direção y varia linearmente com a velocidade média do escoamento.

Na segunda zona, intermediária, o escoamento viscoso vai dando lugar a uma crescente turbulência, que atinge o valor máximo nessa região.

No restante da camada limite, a terceira zona, a região compreendida entre 0.48 e 1.28 o escoamento é intermitentemente turbulento e não turbulento, com contínuo decréscimo da energia cinética turbulenta, até que lentamente atinja o escoamento potencial.

De modo a se ter uma expressão que represente o comportamento da viscosidade turbulenta escolheu-se para a região perto da parede a relação de Van Driest⁽⁷⁾ e para a região afastada, a de Clauser⁽¹⁹⁾.

2.6.4. Hipóteses da Viscosidade Turbulenta.

Para a região próxima da parede a expressão de Van Driest adaptada para superfícies curvas é dada por:

$$\epsilon_p = f K_p^2 y^2 \left[1 - \text{EXP}(-y/A) \right]^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f \bar{u}}{R} \right| \quad (2.39)$$

onde, K_p é uma constante, e A tem o seguinte valor:

$$A = 26 \nu \left(\frac{\rho}{\zeta_p} \right)^{1/2} \quad (2.40)$$

Vale salientar que esse modelo foi desenvolvido para escoamento sem gradiente de pressão, de modo que os casos testes escolhidos satisfazem essa condição.

Segundo Cebecci⁽²¹⁾ para se adaptar (2.39) para escoamento com gradiente de pressão é necessário a modificação de (2.40) para:

$$A = 26 \nu \left(\zeta_p + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{y}{\rho} \right)^{-1/2} \quad (2.41)$$

Sugerimos para futuros trabalhos, o cálculo da camada limite em escoamento onde apareça $\frac{\partial P}{\partial x}$, usando (2.41) pois, segundo Cebecci⁽²¹⁾ a não correção de (2.40) acarretará descontinuidade nos perfis de velocidade.

A outra expressão do modelo da viscosidade turbulenta é a seguinte:

$$\epsilon_0 = \rho K_0 U_\infty(x) \delta^* \gamma \quad (2.42)$$

onde; δ^* , é a espessura de deslocamento cujo valor nos mostra a expressão abaixo:

$$\delta^* = \int_0^\infty f \left(1 - \frac{\bar{u}}{U_\infty(x)} \right) dy \quad (2.43)$$

e γ , é o fator de intermitência, dado por:

$$\gamma = \left[1 + 5.5 (y/\delta)^6 \right]^{-1} \quad (2.44)$$

Devido a característica aleatória do movimento, a borda da camada limite turbulenta é irregular apresentando picos e depressões onde se misturam escoamento turbulento e não turbulento.

Nessa região intermitente, compreendida entre 0.4δ e 1.02δ ,

a energia turbulenta é decrescente. De modo a melhor ajustar o modelo da viscosidade turbulenta, de Clauser, Klebanoff introduziu o fator de intermitência que significa a fração de tempo em que o escoamento é turbulento. Esse fator só assume valores significativos como se vê por (2.44), nessa região da intermitência.

Simulando a viscosidade turbulenta, (2.39) é usada até que elas atinjam a um mesmo valor. A partir daquele ponto (2.42) é assumida até que \bar{u} atinja 0.98999 do escoamento potencial.

2.5. Modelo matemático do problema

Equações:

Equação da Conservação do movimento

$$f \cdot \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = f U_{\infty}(x) \frac{dU_{\infty}(x)}{dx} + f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f \bar{u}^2}{R} +$$

$$+ v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f \bar{u}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f \bar{u}}{R} \right) \right] \quad (2.45)$$

eq. da continuidade

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{f \bar{v}}{R} = 0 \quad (2.9)$$

Condições de contorno

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ quando } y = 0$$

\bar{u} tende para $U(x)$ quando y tende para ∞ .

Modelo da viscosidade turbulenta.

$$\epsilon_p = f k_p^2 y^2 \left[1 - \text{EXP}(-y/\delta) \right]^2 \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f \bar{u}}{R} \right] \quad (2.39)$$

$$\epsilon_o = K_o U_\infty(x) \delta^* \cdot \gamma \quad (2.42)$$

onde $K_p = 0.4$ e $K_o = 0.0168$.

Relação auxiliar

$$f = \frac{R(x)}{R(x)+y} \quad (2.4)$$

Antes de apresentar o método de resolução do modelo faz-se necessário algumas considerações:

- a) - Ao longo do escoamento, dois pontos devem merecer nossa atenção: o ponto de transição e o de separação.

A região onde ocorre a transição pode ser prevista de várias maneiras. Pode-se determiná-la usando o método de Van Driest, Granville, Smith, Ganberoni ou ainda através do fator de forma H , dado por

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (2.46)$$

No regime laminar, a transição ocorrerá para valores de H compreendidas entre 1.4 e 2.6.

Para a escolha do melhor método, deve ser feito um estudo acurado, contudo essa investigação foge ao ob-

jetivo do presente trabalho.

- b) quanto ao ponto de separação, segundo ⁽²¹⁾, um caminho de determiná-lo, simples, do ponto de vista de computação e seguro do ponto de vista matemático, é determinar o ponto onde $\xi_p = 0$ (tensor na parede). A rigor não exatamente zero mas, um valor muito pequeno. Através do cálculo de H pode-se confirmar a coerência dos nossos resultados, uma vez que para valores de H compreendidas entre 1.8 e 2.8 a separação está eminente num regime turbulento.

2.6. Adimensionalização e Mudança de Coordenadas.

A fim de facilitar a resolução do sistema vamos adimensionalizá-lo e fazer uma transformação de coordenadas.

Definimos

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = u \quad \text{e} \quad \frac{\bar{v}}{U_0} = v \quad (2.47)$$

$$\eta = \frac{U_\infty(x)y}{(2\xi)^n v} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{U_\infty(x)}{v} dx \quad (2.48)$$

Introduzindo (2.47) e (2.48) nas equações do modelo e depois de algumas simplificações obteremos:

Equação do movimento

$$(2\xi)^{2n} f u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = f \frac{(2\xi)^{2n}}{U_\infty(x)} \frac{dU_\infty(x)}{d\xi} \left(1 - u^2 + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^{\eta} \left(\frac{fu^2}{R_{\eta}} d\eta - \frac{fu^2}{R_{\eta}} \right) + \frac{(2\xi)^{2n} f^2 \eta nu}{\xi R_{\eta}} - f(2\xi)^{2n} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{\eta} \frac{fu^2}{R_{\eta}} d\eta - \\
& + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{fu}{R_{\eta}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\epsilon}{\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{fu}{R_{\eta}} \right) \right] \quad (2.49)
\end{aligned}$$

Equação da continuidade

$$(2\xi)^{2n} f \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{(2\xi)^{2n} f u n}{\xi} + \frac{fv}{R_{\eta}} = 0 \quad (2.50)$$

Modelo da viscosidade turbulenta

$$\frac{\epsilon_p}{\nu} = f \cdot k_p^2 y^{+2} \left[1 - \text{EXP} - \frac{yU^*}{26\nu} \right]^2 \left| \frac{\partial u^+}{\partial y} - \frac{fu^+}{R^+} \right| \quad (2.51)$$

$$\frac{\epsilon_o}{\nu} = K U_{\infty}^+(x) \int_0^{\infty} f \left(1 - \frac{u^+}{U_{\infty}^+(x)} \right) dy^+ \left[1 + 5.5 \left(\frac{\eta}{\eta_{NMAX}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (2.52)$$

onde

$$R_{\eta} = \frac{U_{\infty}(x) R}{(2\xi)^n \nu} \quad \text{e} \quad U_{\infty}(x) = \frac{U_{\infty}(x)}{u^*}$$

As deduções de (2.49), (2.50), (2.51), (2.52) se encontram no apêndice (c).

C A P Í T U L O III

3.1. O modelo em diferenças finitas

O perfil de velocidade apresenta uma variação de velocidade muito grande na região próxima da parede e depois permanece quase que constante. Escolheu-se pois, uma malha de pontos variáveis de modo que possui incrementos pequenos na região de maior variação e incrementos grandes onde a taxa de variação é pequena.

A camada limite será dividida numa malha de pontos (i,j) com intervalos $\Delta \xi_i$ e $\Delta \eta_j$, como mostra a figura abaixo:

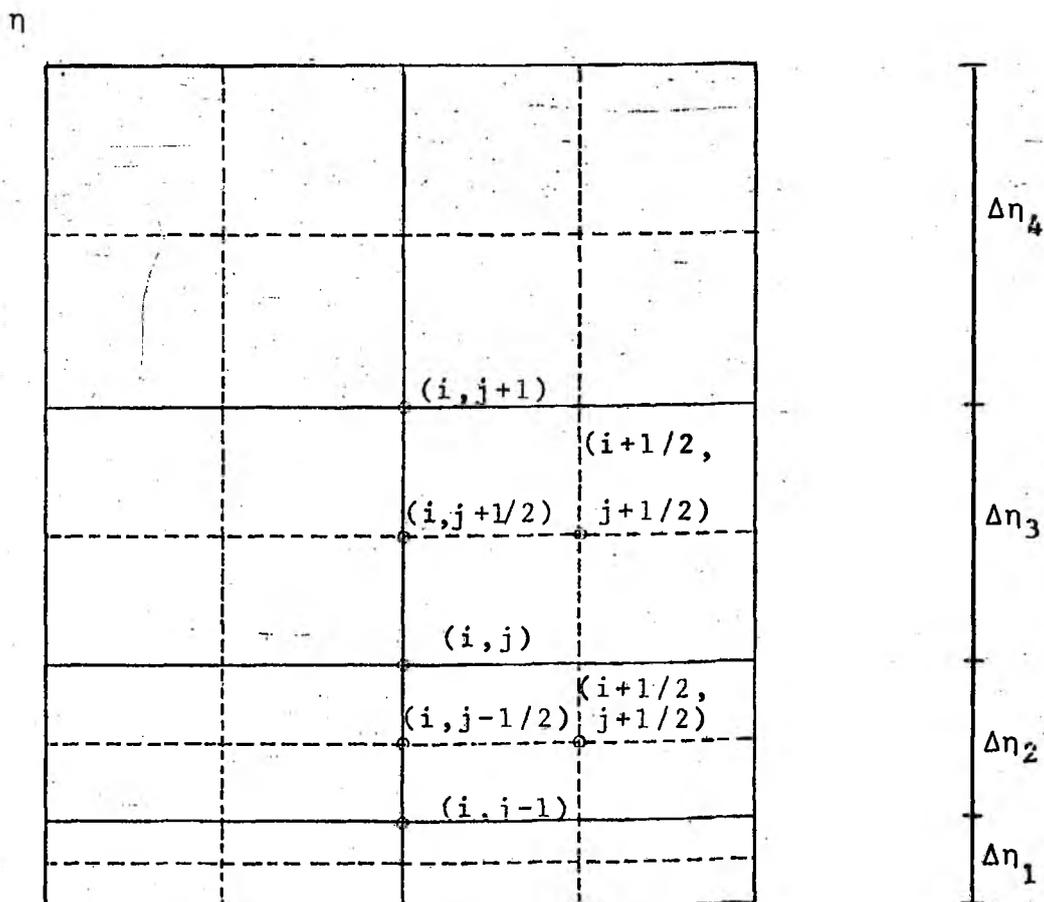


FIG.2 - Malha variável

- A malha pode ser variável em $\Delta\eta_j$ e em $\Delta\xi_i$. Na direção η a grade $\Delta\eta_j$ é escolhida de modo que tenha uma variação segundo uma progressão geométrica, que garante um ajustamento às características do perfil de velocidade. O incremento $\Delta\eta_j$ é dado por:

$$\Delta\eta_j = K \Delta\eta_{j-1} \quad (3.1)$$

Feitas as considerações sobre a escolha da malha, o passo seguinte é representar em diferenças finitas os termos diferenciais das equações diferenciais. As derivadas e equações são representada no ponto $(i+j/2, j)$ tendo em vista que constituiu-se numa melhor aproximação, uma vez que representa um valor médio como mostra a equação abaixo:

$$f_{i+1/2, j, K} = \frac{1}{2} (f_{i, j} + f_{i+1, j, k-1}) \quad (3.2)$$

onde f é uma função qualquer e K indica a iteração em que é explícito o valor de f .

As derivadas em relação a ξ e η são dadas pelas expressões genéricas abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j} = \left(\frac{f_{i+1/2, j} - f_{i, j}}{\Delta\xi} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2} = 1/2 \left(\frac{f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} + \frac{f_{i, j+1} - f_{i, j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} \right) \quad (3.4)$$

Na equação do movimento há termos com derivada segunda que foi discretizado em termos de 1ª ordens da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \quad M \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right]_{i+1/2, j} = \frac{M_{i+1/2, j+1/2} (f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \\
& - \frac{M_{i+1/2, j-1/2} (f_{i+1, j} - f_{i+1, j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \\
& + \frac{M_{i+1/2, j+1/2} (f_{i, j+1} - f_{i, j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \\
& - \frac{M_{i+1/2, j-1/2} (f_{i, j} - f_{i, j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Como o sistema de equações do problema é não linear, de modo a resolvê-lo, foi transformado em equações lineares como nas expressões que se seguem:

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} \rightarrow u_{i+1/2, j, k-1} \left(\frac{u_{i+1, j, k} - u_{i, j, k}}{\Delta \xi} \right) \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
v \frac{\partial v}{\partial \eta} \rightarrow & 1/2 v_{i+1/2, j, k-1} \left(\frac{u_{i+1, j+1} - u_{i+1, j-1, k}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} - \frac{u_{i, j+1, k-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} \right. \\
& \left. + \frac{u_{i, j-1, k-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} \right) \tag{3.7}
\end{aligned}$$

$$\int_0^\eta \frac{f u^2}{R_\eta} \rightarrow \int_0^\eta \frac{f_{i+1/2, j, k-1} \cdot u_{i+1, j, k-1}^2}{R_\eta} \tag{3.8}$$

Os termos de curvatura na equação do movimento foram considerados todos na iteração anterior para contornar o problema da não linearidade.

A transformação das equações em diferenças finitas se encontra no apêndice (B).

Feita a transformação em diferenças finitas, a equação do movimento adquire a forma linear tridiagonal da equação abaixo:

$$A_j u_{i+1,j+1} + B_j u_{i+1,j} + C_j u_{i,j-1} = D_j \quad (3.9)$$

onde A_j, B_j, C_j, D_j são matrizes.

A equação (3.8) pode ser resolvida para $u_{i+1,j+1}$ se for conhecida a distribuição de $u_{i,j}$. Isso significa que deverá ser fornecido um perfil de velocidade inicial para ser começada a computação. Os valores dos coeficientes A_j, B_j, C_j são dados abaixo:

$$A_j = \frac{V_{i+1/2,j}}{2(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{(1+\epsilon/v)_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{(1+\epsilon/v)_{i+1,j+1} \cdot f_{i+1,j+1}}{2(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}) R_\eta + 1} \quad (3.10)$$

$$B_j = \frac{(2\varepsilon)^2 u_{i+1/2,j}}{\Delta\xi} + \frac{(1+\varepsilon/v)_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta_j+\Delta\eta_{j-1})} + \frac{(1+\varepsilon/v)_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta+\Delta\eta_{j-1})} \quad (3.11)$$

$$C_j = -\frac{v_{i+1/2,j}}{2(\Delta\eta_j+\Delta\eta_{j-1})} - \frac{(1+\varepsilon/v)_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_{j-1}+\Delta\eta_{j-1})} - \frac{(1+\varepsilon/v)_{i+1,j-1} \cdot f_{i+1,j-1}}{2(\Delta\eta_j+\Delta\eta_{j-1}) R_{\eta_{i+1}}} \quad (3.12)$$

$$D_j = \frac{v_{i+1/2,j}}{2(\Delta\eta_j+\Delta\eta_{j-1})} + \frac{(1+\varepsilon/v)_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta_j+\Delta\eta_{j-1})} - \frac{(1+\varepsilon/v)_{i,j+1} \cdot f_{i,j+1}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta+\Delta\eta_{j-1})} + u_{i,j} \frac{(2\varepsilon)^{2n} u_{i+1/2,j}}{\Delta\xi} + \frac{(1+\varepsilon/v)_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta+\Delta\eta_{j-1})} - \frac{(1+\varepsilon/v)_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta\eta_{1-j}(\Delta\eta_j-\Delta\eta_{j-1})} + u_{i,j-1} \frac{v_{i+1/2,j}}{2(\Delta\eta_j+\Delta\eta_{j-1})} + \frac{(1+\varepsilon/v)_{i+1/2,j-1-1/2}}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_{j-1}+\Delta\eta_{j-1})} + \frac{(1+\varepsilon/v)_{i,j-1}}{2(\Delta\eta_j+\Delta\eta_{j-1}) \cdot R_{\eta_i}} + \text{PRESM} (1-u_{i+1/2,j,k-1}^2) + \text{PRESM} (\eta_j \cdot f_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1/2,j,k}}{R_{\eta_{i+1/2}}})$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^{\eta} \frac{f_{i+1/2,j} \cdot u_{i+1/2,j,k-1}}{R_{\eta_{i+1/2,j}}} d\eta \\
& + f_{i+1/2,j} \cdot (2\xi)_{i+1/2}^{2n} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\eta} \frac{f_{i+1/2,j} \cdot u_{i+1/2,j,k-1}}{R_{\eta_{i+1/2}}} d\eta + \\
& + \frac{(2\xi)_{i+1/2}^{2n} \cdot \eta_j \cdot f_{i+1/2,j}^2 \cdot u_{i+1/2,j,k-1}^2}{(\xi_{i+1/2} \cdot R_{\eta_{i+1/2}})} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Onde

$$\text{PRESM} = \left(\frac{f(2\xi)^n}{U_{\infty}(x)} : \frac{dU_{\infty}(x)}{d\xi} \right)_{i+1/2,j}$$

Os valores de A_j, B_j, C_j, D_j , em cada iteração, são conhecidos da iteração anterior. Os valores de $u_{i,j,k}$, para $j=1$ e $j=N$ são conhecidos pelas condições de contorno $u_{i,1} = 0$, na parede, e $u_{i,N} = 0,98999$, definição da camada limite.

A equação (3.8) representa um sistema tridiagonal de $N-2$ equações a $N-2$ incógnitas, sendo N o número de pontos na direção η , cuja solução é dado pela seguinte expressão:

$$f_{i+1,j} = G_j \cdot f_{i+1,j+1} + g_j \quad (3.14)$$

Onde G_j e g_j são dados por:

$$G_j = \frac{-A_j}{B_j + C_j G_{j-1}} \quad (3.15)$$

$$g_j = \frac{D_j - C_j g_{j-1}}{B_j - C_j G_{j-1}} \quad (3.16)$$

3.2. Resolução do sistema

O cálculo do sistema é iniciado no ponto N, cujo valor de u é conhecido. De acordo com (3.14), calculado $u_{i,j}$ pode-se obter o valor de $u_{i,N-1}$ e assim sucessivamente até a parede. Quanto às equações (3.15) e (3.16), são calculadas inicialmente na parede, onde aplicada a condição de contorno $u_{i,1=0}$ implicará em:

$$G_1 = 0 \quad \text{e} \quad g_1 = 0 \quad (3.17)$$

O número de pontos N na direção de y pode ser definido de duas maneiras. Desde que se sabe que os incrementos $\Delta\eta_j$ são dados por uma progressão geométrica, será preciso de acordo com (3.1) conhecer $\Delta\eta_1$, K e N para que seja efetuado a solução de (3.9). O valor de $\Delta\eta_j$ deve ser escolhido muito pequeno tendo em vista a grande variação de u perto da parede. Resta ainda a escolha de K e N. Se foi especificado o valor de N, necessita-se recalcular o K para cada iteração, ao passo que sendo dado o valor de K, a computação torna-se mais rápida e sem problemas quanto a precisão desejada.

Alguns pesquisadores, Cebecci and Smith, Beckwith and Bushnell⁽¹⁴⁾ tem recomendados valores entre 1. e 1.05.

Conhecido K, o procedimento para determinar os números de pontos N é calcular o número de pontos j pela equação (3.1) desde a parede até a condição de contorno do topo da camada limite, $u_{i,N} = 0,98999$. Entretanto a condição abaixo, deve ser satisfeita no topo da camada limite.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta = \eta_j} = \epsilon_\delta \quad (3.18)$$

Onde δ é um valor muito pequeno ($0(10^{-4})$). Colocando (3.18) em diferenças finitas teremos:

$$u_{i+1,N} - u_{i+1,N-1} < \Delta\eta_{N-1} \cdot \epsilon_\delta \quad (3.19)$$

Aplicando (3.14) em (3.9), levando-se em consideração que para $u_\delta = 0.98999$ $\eta = \eta_{NMAX}$ e, substituindo-se em (3.19) teremos:

$$u_\delta(1 - G_{n-1} - g_{N-1}) < \Delta\eta_{N-1} \cdot \epsilon_\delta \quad (3.20)$$

Para cada estação, a computação é efetuada até que seja satisfeita a condição (3.20) e deste modo, está determinado o novo valor de N, uma vez que η_δ aumenta com o aumento de ξ .

Prosseguindo a computação, depois de calculado os valores de $u_{i+1,j}$ recalcula-se os valores de $V_{i+1/2,j}$ na equação da continuidade. Feito isso, recomeça-se o processo iterativo até que o valor de $u_{i+1,j}$ tenha convergido. O critério de convergência escolhido é baseado no tensor laminar na parede, dada pela expressão abaixo:

$$\left| \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{P,K} - \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{P,K-1}}{\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{P,K-1}} \right| \leq \epsilon_p \quad (3.21)$$

Onde P e K significam o valor de ξ na parede, na iteração K . O valor de ϵ_p é da ordem de 10^{-3} . Levando-se em consideração a condição de contorno da camada limite na parede e, escrevendo (3.21) em diferenças finitas pode-se conseguir uma forma mais simplificada dessa desigualdade, como nos mostra a equação que se segue:

$$\left| u_{i,2,K-1} - 1 \right| \leq u_{i+1,2,K} \quad (3.22)$$

Satisfazendo o critério de convergência, começa o cálculo de outra estação.

- Considerações sobre a equação da continuidade

Sabe-se que o presente método necessita para o início da computação do perfil inicial de velocidade. Dedique-se atenção agora, para o perfil da componente da velocidade na direção η . Como não existe nenhum dado experimental para tal componente, V é definido em função da equação da continuidade, no ponto $i+1/2, j$ (Veja Apêndice (B)).

$$V_{i+1/2,j} = V_{i+1/2,j-1} \left[\frac{1 - \frac{\Delta\eta_j}{2} (2\xi)_{i+1/2}^n \frac{f}{R_\eta}}{1 - \frac{\Delta\eta_{j-1}}{2} (2\xi)_{i+1/2}^n \frac{f}{R_\eta}} \right]_{i+1/2,j-1/2}$$

$$\left[\frac{\Delta\eta_{j-1}}{1 + \frac{\Delta\eta_{j-1}}{2} (2\xi)_{i+1/2}^n \frac{f}{R_\eta}} \right]_{i+1/2,j-1/2} (2\xi)_{i+1/2}^n (f_u)_{i+1/2,j-1/2}$$

$$\begin{aligned}
 & : \left(\frac{\eta}{\xi} \right)_{i+1/2,j} + (2\xi)_{i+1/2}^n \cdot f_{i+1/2,j-1/2} \cdot \frac{1}{2\Delta\xi} (u_{i+1,j} - u_{i,j} + \\
 & + u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}) \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

A eq. (3.23) pode ser tomada como perfil inicial de V.

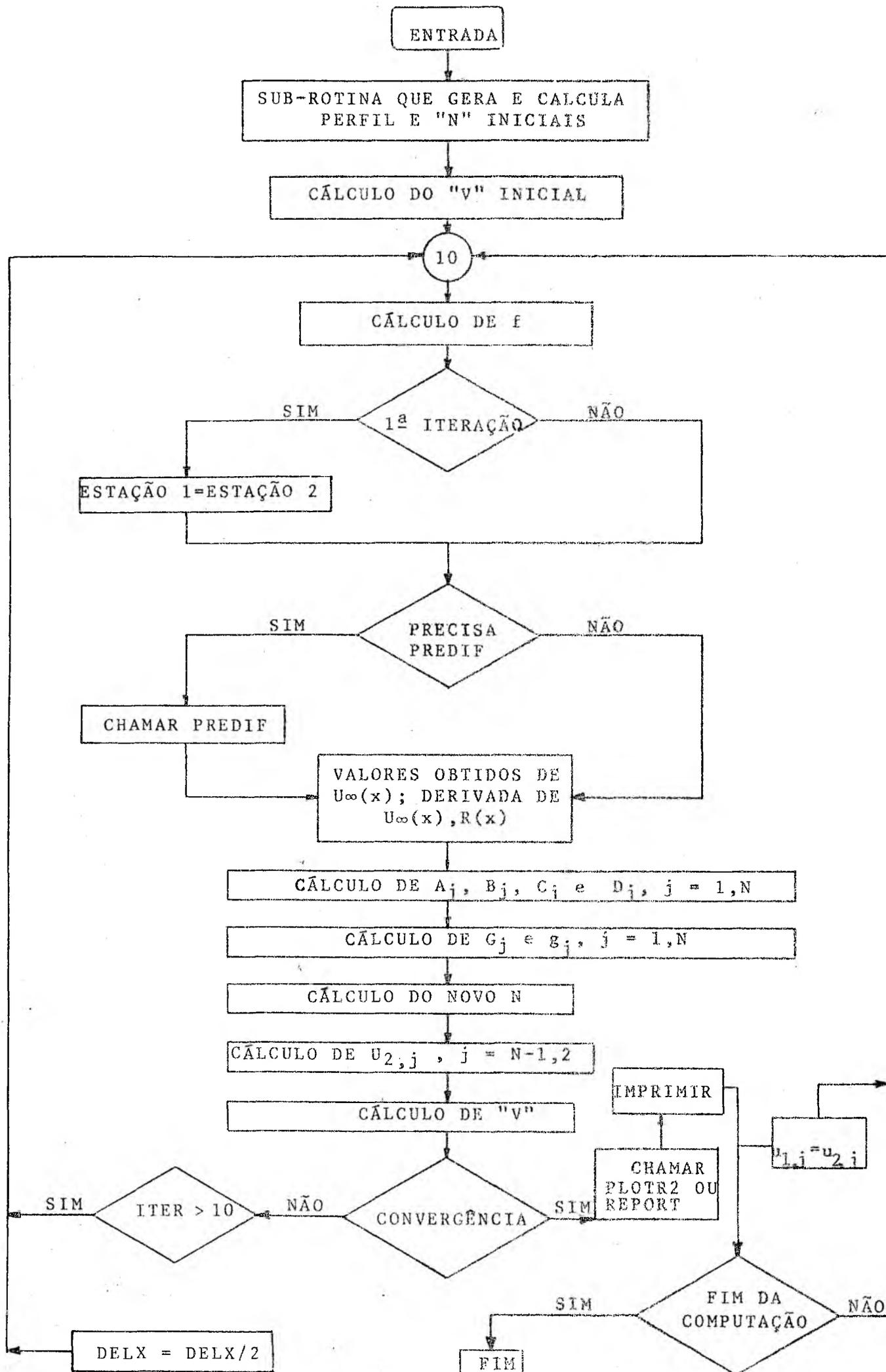
Uma outra maneira é partindo da definição de V (Veja expressão adiante) fazer $v = 0$ ou igual a um v_0 .

$$v = \frac{V}{(2\xi)^n} - \frac{(2\xi)^{2n-1}}{U_\infty(x)} \cdot u \cdot \eta \cdot \left[\frac{dU_\infty(x)}{d\xi} - \frac{\eta U_\infty(x)}{\xi} \right] \quad (3.24)$$

Neste trabalho tomou-se o $v = 0$ e como perfil inicial para V a expressão que se segue:

$$v_{i+1/2;j} = \frac{(2\xi)^2}{U_\infty(x)} \cdot u \cdot \eta \cdot \left[\frac{dU_\infty(x)}{d\xi} - \frac{U_\infty(x)}{\xi} \right] \quad (3.25)$$

Na página seguinte pode-se ter uma visão global do método numérico usado para calcular a camada limite turbulenta, através da apresentação de um fluxograma do programa usado.



IV - DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Uma solução numérica necessita de comparação com a solução exata ou com dados experimentais para determinar seu grau de precisão. Não sendo possível obter solução exata para o sistema de equações diferenciais parciais não lineares, em estudo, testar-se-á a eficácia do modelo confrontando-o com dados experimentais.

O primeiro teste teve como objetivos verificar a transformação das equações para o sistema de coordenadas curvilíneas, as expressões da viscosidade turbulenta e seu comportamento, e também a calibração e ajuste do modelo. Para tanto foi reproduzido o escoamento numa placa plana, com dados experimentais de Wieghart (23), considerando-se o raio de curvatura muito grande de modo a eliminar os termos de curvatura que aparecem nas equações.

Conseguida a precisão desejada nos resultados do cálculo da placa plana, foi usado como caso-teste o trabalho experimental (18), tentando obter os parâmetros do escoamento turbulento para as duas superfícies laterais, côncava e convexa, a fim de avaliar a validade do modelo para calcular a camada limite turbulenta em superfícies curvas.

Os resultados obtidos e posteriormente apresentados mostrarão a eficiência do modelo para o escoamento turbulento em superfícies curvas de pequena curvatura, sem gradiente de pressão.

Vale salientar, que para definir as reais possibilidades do presente trabalho, precisam-se realizar testes com escoamento em superfícies de grande curvatura, com gradiente de pressão ou sem, favorável ou adverso ao escoamento.

O perfil inicial de velocidade tem grande importância na computação da camada limite turbulenta. Faz-se mister que sua espessura δ , e a derivada da velocidade na parede sejam tão próximos o quanto possível dos dados do escoamento.

mento, tendo em vista a influência desses parâmetros na convergência e precisão dos dados calculados.

Na reprodução do escoamento na placa plana, a título de investigação. Foi usado um perfil senoidal e, um perfil deduzido experimentalmente para o aludido escoamento. No cálculo da camada limite usando o primeiro perfil, o modelo necessitou de mais iterações para convergir em cada estação, até que o perfil calculado se ajustasse aos dados do escoamento; ao passo que o perfil experimental além de convergir para os dados do escoamento nas primeiras estações, gastou um tempo de computação menor.

Na computação da camada limite do canal (18), para melhorar a precisão dos resultados, foi necessária a criação de um perfil inicial. Para a região $0 \leq y^+ \leq 5$, a velocidade obtida da expressão $u^+ = y^+$; para a região $5 \leq y^+ \leq 70$ obteve-se u da equação: $u^+ = A \log y^+ + B$, e para o restante da camada limite ou seja para $y^+ < 70$ a velocidade foi obtida através de $u = (y/\delta)^{1/\eta}$ onde A e B foram determinados de maneira que a reta $u^+ = A \log y^+ + B$ concordasse com os dois outros segmentos do perfil. Quanto ao expoente η , depois de investigar a precisão dos resultados para η igual a 7,6 e 5,5 verificou-se que com último valor de η obteve-se maior precisão do C_f calculado, em relação ao C_f experimental.

- No cálculo de $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta \rightarrow 0}$ o valor de $\Delta \eta_1$ é de fundamental importância pois como é sabido, o gradiente de velocidade perto da parede é muito grande. A escolha do $\Delta \eta_1$ deve ser feita de modo a alcançar o maior número de pontos possível nessa região, a fim de conseguir a melhor precisão no cálculo da derivada da velocidade na parede. Como se sabe a velocidade de fricção tem influência na eficácia do modelo, uma vez que a viscosidade turbulenta está adimensionalizada em termos de u^+ e y^+ .

O valor de $\Delta \eta_1$, para um dado BK , determina o número de pontos do perfil de velocidade, que está diretamente ligada ao tempo de computação, já que este é o indicador

da viabilidade econômica do modelo.

Nos dois casos testados, usamos $\Delta\eta_j$ baseado em (14).

Justificamos o uso de $\Delta\eta = 0,25$ tendo em vista que a geometria do canal é composta de uma parte plana e outra curva e que nosso cálculo começa na parte plana.

- No funcionamento deste modelo numérico o valor de BK, razão entre $\Delta\eta_j$ e $\Delta\eta_{j-1}$, influi diretamente no tempo de computação e na precisão dos resultados. De acordo com Cebeci (14), para o escoamento turbulento, BK pode assumir valores de 1.01 a 1.05. De modo a verificar o comportamento do modelo, usamos fora dessa faixa ou seja: BK = 1.09. Para satisfazer a necessidade de pequenos incrementos perto da parede, adotamos um $\Delta\eta_1 = 0.001$. Constatou-se que os resultados obtidos divergiram consideravelmente dos dados experimentais. Ora, como $\Delta\eta_j$ é função do valor de BK, quanto maior for seu valor mais rápido crescerão os $\Delta\eta_{j,s}$. Se esses $\Delta\eta_{j,s}$ crescerem muito haverá imprecisão no cálculo das derivadas de u e ϵ , o que justifica a divergência dos resultados obtidos em relação aos dados experimentais.

- Outro fator importante é o incremento na direção ξ , $\Delta\xi$. Para valores pequeno de $\Delta\xi$, verificou-se que o tempo de computação é grande ao passo que grandes $\Delta\xi$ diminuem o tempo mas reduzem a precisão dos resultados. Na escolha do incremento para os casos testados, determinamos o $\Delta\xi$ que correspondesse ao ΔX físico igual a espessura da camada limite.

A tabela abaixo nos dá uma idéia do tempo de computação em função da superfície e do incremento $\Delta\xi$ para 50 estações:

C A S O	TEMPO DE COMPUTAÇÃO	
	$\Delta\xi - 3000$	$\Delta\xi - 6000$
P. PLANA	5' :30"	6' :04"
SUP. CÔNCAVA	6' :22"	6' :04"
SUP. CONVEXA	5' :44"	6' :04"

A tabela abaixo nos mostra o número de estações calculadas por unidade de tempo.

C A S O	Nº DE ESTAÇÕES P/MIN	
	$\Delta\xi - 300$	$\Delta\xi - 6000$
P. PLANA	9.09	8.24
SUP. CÔNCAVA	7.85	8.24
SUP. CONVEXA	8.72	8.24

4.1 Perfis de velocidade u, u^+, v e v^+

No apêndice C, estão apresentados os gráficos dos resultados, calculados pelo método numérico, comparado com dados experimentais de ⁽¹⁸⁾ de (23).

A seção C_1 apresenta gráficos das velocidades u e v em função de (y/δ) , para a placa plana e para as superfícies do canal (18). Analisando-se os valores de u plotadas para a placa plana e comparando-os com os resultados obtidos por (23), verificou-se não existir diferença nos resultados conseguidos pelo presente modelo. Quanto à velocidade v , cujo valor plotado é dado por

$v = \left(\frac{v_{i,j}}{v_{i,N}} \right)$, é importante salientar que sua distribuição em relação a (y/δ) foi quase próxima do linear nos casos computados.

Os gráficos da seção C_2 representam as curvas u^+ plotadas em relação ao $\log y^+$, contra os dados experimentais tirados de ⁽²³⁾ para a placa plana e de (18) para o canal. Nos mesmos gráficos aparecem traçados os perfis de velocidade, logarítmicos, dados pelas equações:

$$u^+ = y^+ \text{ para } 0 \leq y^+ \leq 5 \text{ e } u^+ = A \log(y^+) + B \text{ para } y^+ > 5.$$

A seção C_3 mostra gráficos da viscosidade turbulenta e do tensor de Reynolds escolhidas aleatoriamente. Na análise dos resultados, omitiu-se comentários sobre o comportamento da viscosidade turbulenta para a placa plana uma vez que o referido modelo conta com bastante trabalhos analisando sua viabilidade e desempenho, como por exemplo: Cebeci(17).

Analisando-se o comportamento dos valores da viscosidade turbulenta, obtidas numericamente, para o canal (18), observou-se que ao longo do escoamento houve um crescimento dos máximos para o escoamento na superfície côncava e um decréscimo desses máximos ao longo da superfície convexa.

Quanto ao ponto y_c , observamos que ele se mantém fixo para o caso da superfície côncava, ocorrendo sempre a mudança para $y/\delta = 0.15$. Na convexa houve uma oscilação entre $y/\delta = 0.14$ e $y/\delta = 0.15$ até a estação 150, que corresponde a uma distância de 26cm da origem. A partir daí houve uma estabilização na mudança que ocorreu em $y/\delta = 0.14$.

A diferença entre o ponto y_c das duas superfícies é explicável. Já foi visto anteriormente que a superfície convexa diminui a turbulência e que a côncava a aumenta. Logo, em consequência disso o comprimento de mistura vai sofrer influência do efeito de curvatura. Portanto como o valor de (y/δ) , onde se dá a passagem de (2.39) para (2.42), é menor para a Sup. Convexa do que para a côncava, concluiu-se que o comprimento de mistura, dado por

$$L = y \left[1 - \exp(-y/\Lambda) \right] \quad (4.1)$$

é maior para a superfície côncava o que está de acordo com as conclusões do Ramaprian (18).

O tensor turbulento foi plotado de duas maneiras diferentes. Numa, traçou-se o gráfico para a região perto da parede comparando-o com o tensor laminar. Observa-se a coerência dos resultados, lembrando-se que na parede $\zeta^{(t)}$ é zero e sua curva tem o caráter crescente, enquanto $\zeta^{(e)}$ tem o caráter decrescente, atingindo na parede o seu máximo e que $(\zeta_{total}/\zeta_p) \approx 1$.

onde os valores de A são 5.48 e 5.6 para a placa plana e o canal respectivamente. Da mesma forma os valores de B são: 4.9 e 5.5.

Analisando os gráficos da seção C_2 observou-se nos resultados obtidos da computação do canal (18), houve uma pequena discrepância entre os valores calculados pelo presente modelo e os dados experimentais.

4.2-Viscosidade Turbulência e Tensor de Reynolds

Como primeira tentativa de desenvolver um modelo matemático para calcular a camada limite turbulenta em superfícies curvas, experimentou-se as relações empíricas (2.39) e (2.42), desenvolvidas para superfícies planas, como modelo matemático da viscosidade turbulenta. A mudança da eq. (2.39) que é usada para a região próxima, da parede, para a eq. (2.42) usada para sempre se dá em y_c que é o ponto onde os valores das equações se igualam. Veja a figura abaixo.

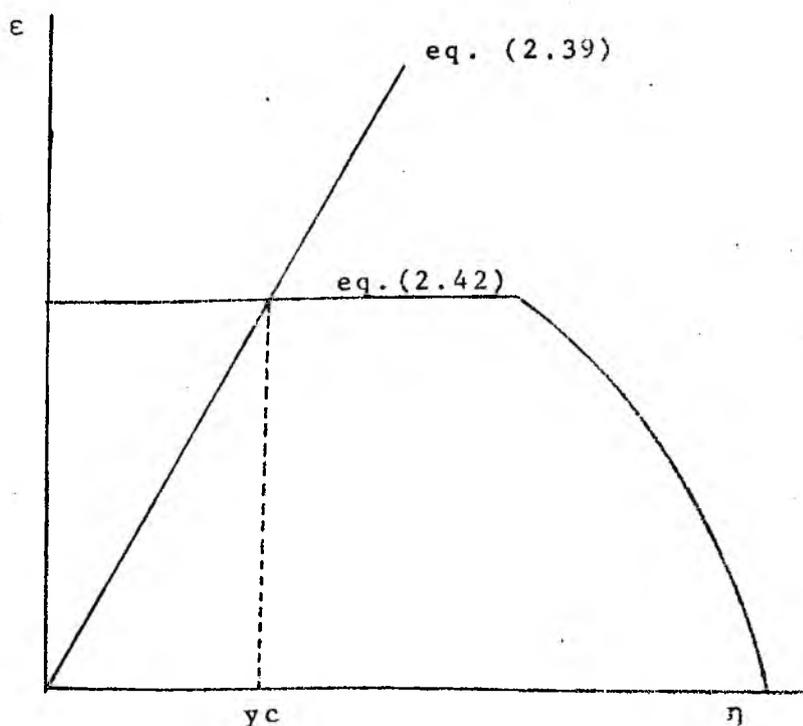


FIG.4- Expressões da Viscosidade Turbulenta.

Outro gráfico do tensor de Reynolds foi traçado em função de (y/δ) . Sua tendência está de acordo com os resultados obtidos por Ramaprian (18), pois o tensor turbulento que é função da viscosidade ϵ e do gradiente de velocidade $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, cresceu ao longo do escoamento para a superfície côncava, e decresceu para a convexa.

4.3- Coeficiente de Fricção.

Na seção C_3 , estão plotados os gráficos do coeficiente de fricção para os casos anteriormente citados, calculadas de três maneiras diferentes. A curva cujo símbolo plotado é o ponto (.) corresponde a equação.

$$C_f = 0.592 R_{ex}^{-0.2} \quad (4.2)$$

onde, R_{ex} é o número de Reynolds em relação a ξ .

A segunda curva, plotada pelo símbolo (*), é calculada pela expressão empírica que se segue:

$$C_f = 0.246 \times 10^{-0.678H} \cdot R_{\theta}^{-0.268} \quad (4.3)$$

onde o H é o fator de forma e R_{θ} é o número de Reynolds baseado na espessura de momento.

A outra maneira de calcular o coeficiente de fricção é usando a equação abaixo:

$$C_f = 2 \cdot \left(\frac{u^*}{U_{\infty}(x)} \right)^2 \quad (4.4)$$

onde u^* é o calculado pelo modelo.

Usando (4.4), obtem-se uma pequena diferença na determinação do C_f em relação aos dados experimentais, devido ao fato do cálculo da velocidade de Fricção, que é função da derivada da velocidade na parede. Para calcular

$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$, usou-se 4 pontos do perfil de velocidade para a placa plana e um ponto para o canal (18). Apesar de ser uma equação experimental, (4.3) consegue melhor aproximação uma vez que o cálculo do C_f , envolve todos os pontos do perfil de velocidade.

5.1. CONCLUSÃO

O objetivo do presente trabalho foi testar um modelo matemático para a solução da camada limite turbulenta em superfícies curvas. O sistema, composto das equações de movimento, da continuidade e de um modelo para a viscosidade turbulenta foi resolvido pelo método numérico da tri-diagonal. Com relação ao referido algoritmo, verificou-se sua sensibilidade ao perfil inicial de velocidade, aos incrementos $\Delta\eta_1$ e $\Delta\xi$, e ao fator BK.

Comparando-se os resultados obtidos com os dados experimentais dados por Shivaprazad⁽¹⁸⁾, foi possível observar discrepâncias nos resultados da viscosidade turbulenta, no perfil de velocidade u^+ e no tensor turbulento. Com relação ao coeficiente de fricção, devido às características do escoamento, sem gradiente de pressão e pequena curvatura; e do perfil inicial, foi considerada pequena a discrepância entre os dados comparados.

Da análise dos resultados foi possível concluir o seguinte:

- Observando-se os valores da viscosidade turbulenta para a região próxima a parede obtidas experimentalmente vimos que a equação (2.39) precisa de um ajuste para levar em consideração o efeito de curvatura. É interessante também uma verificação na constante K_1 uma vez que este valor usado foi obtido para superfícies planas.
- A equação (2.42), para a região "outer", sendo aplicada desde 0.2δ até $u = 0.98999$, tem uma influência muito grande no cálculo da camada limite, e com maior razão ainda, precisa de um estudo que a torne capaz de levar em consideração o efeito de curvatura.

- Os resultados obtidos com o presente modelo não são totalmente desprezíveis. Um pequeno refinamento nas hipóteses da Viscosidade e um perfil inicial mais próximo, dos dados do escoamento e obteremos bons resultados para superfícies de pequena curvatura.

5.2. Sugestões para trabalhos futuros

Visando continuar o esforço para desenvolver o estudo da turbulência aqui no Brasil, de modo a que num futuro tenhamos condições de partir para aplicações práticas sugere-se o seguinte:

O presente modelo seja testado para outras superfícies de pequena curvatura sem gradiente e com gradiente de pressão.

Verificar a aplicabilidade do modelo para superfícies de grande curvatura como por exemplo: Cilindro e o canal de So Mellor.⁽¹⁶⁾

BIBLIOGRAFIA

- (1) ACHENBACH, E. "Distribution of Local Pressure and Skin Friction around a Circular Cilinder in Cross-Flow up to $Re = 5 \times 10^6$ ", Institute Für Reak Torbaulement, KFA, Julich, Germany (1968).
- (2) CLAUSER, F. H. "The Turbulent Boundary Layer", Advances in Applied Mechanics, vol. 4, 1956, pp. 2-51.
- (3) CEBECI, T., Smith, A.M.O., "A Finite Diference Solution of Incompressive Turbulent Boundary Layer Equations by an Eddy Viscosity Concept, Mcdownell Douglas, repart DAC, 67130, 1968.
- (4) CEBECI, T. "LaLaminar and Turbulent Incompressive Boundary Bayers on Slender Bodies of Revolution in Axial Flow". An ASME Publication, paper n° 69, WA/Fe 2.
- (5) CEBECI, T. and Smith, A.M.O., "A Finite Diference Method for Calculating Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers", An ASME Publication, Journal Basic Engeneering, 1968.
- (6) CEBECI, T. "Wall Curvature and Transition effects in Turbulent Boundary Layer", AIAA Journal, 1968.
- (7) DRIEST, E.R.V. "An Turbulent Flow near a Wall", Journal of Aeronautical Sciences, vol 23, n° 11, nov 1956, p. 1001.
- (8) DVORAK, F.A. "Calculation of Layer and Wall yets over Curved Surfaces" AIAA Journal, vol 11, n° 4, 1972.
- (9) HINZE, J.O. "Turbulence", MacGraw-Hill Book Co., 1959.
- (10) KOVASZNAY, L.S.C., "Estructure of Turbulent Boundary Layers", Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Tokyo, Japan, 1967.
- (11) KINNEY, R.B., "Journal of Applied Mechanics", June 1967, page 437.

- (11-A) MILNE, T., "Theoretical Hydrodynamics".
- (12) NARASINHA, R. and OYHA, S.K. "Effect of Longitudinal Surface Curvature Boundary Layers", Journal of Fluids Mechanics, 1973.
- (13) PATANKAR, S.V., PRATAP, V.S. and SPALDING, D.B., "Prediction of Turbulent Flow in Curved Pipes", Journal of Fluids Mechanics 1975, vol 67, part 3, 1973, page 583, 595.
- (14) PEREIRA, H.P., "A Four-Equation Model for Numerical Solution of Turbulent Boundary Layer", Ph.D. Tesis, 1974.
- (15) PEREIRA, H.P. "Congresso de Eng. Mecânica", UFSC, 1977.
- (16) SO, R.M.S. and MELLOR, G.L. "Experiment on convex curvature effect in turbulent boundary layers", Journal of Fluids Mechanics, vol 60, part 4, 1973.
- (17) SOVRAN, G.; KINE, S.J.; MORKOVIN, M.V. and COCKREEL, D.J. "Computation of turbulent boundary layers", Afors - IFP, Stanford Conference, 1968.
- (18) SHIVAPRASAD, B.G. and RAMAPRIAN, B.R. "Turbulence Measurements in Boundary Layers along Mildly Curved Surfaces", AIAA Journal, vol 15, nº 2.
- (19) ROTTA, J.C. "Turbulent boundary layers in incompressible flow, progress in aeronautical sciences, vol 2, Pergamon Press, 1962.
- (20) SCHLICHLING, H. "Boundary Layer Theory", MacGraw-Hill Book Co., page 112, 4^a ed.
- (21) WALLACE, Y.M.; ECKELMANN, H. and BRADKEY, R.S. "The Wall region in Turbulent Shear Flow", Journal of Fluids Mechanics, vol 1, page 54, 1972.
- (22) WATTENDORF, F.L. "A study of effect curvature an fully developed turbulent flow", Proc. of Royal Society, London, Series A, vol 157, 1936, page 565, 578.
- (23) WIEGHARDT, K. and TILLMAN, W. "On the turbulent Friction layer for rising pressure", NACA TM 1314, 1951.

APÊNDICE A

Por definição a média em relação ao tempo de uma grandeza A é dada pela eq. (2.7).

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A(T + L) dL \quad (2.7)$$

Aplicando (2.5) e (2.6) a (2.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} & f (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} + u') + \\ & + \frac{f}{R} (\bar{v} + v') (\bar{u} + u') = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{u} + u') + \right. \\ & + \frac{f}{R} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} + u') - \frac{f^2}{R^2} (\bar{u} + u') + 2 \frac{f^2}{R} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} + v') - \\ & \left. - \frac{f^2}{R^3} \frac{dR}{dx} (\bar{v} + v') + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{u} + u') \right] \end{aligned} \quad (A-1)$$

Introduzindo-se (2.7) em (A-1) e após simplificações tem-se:

$$\begin{aligned} & f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{u} \bar{v} + f \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' u'} + \frac{2f}{R} \overline{u' v'} \\ & = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[f^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\bar{u} f^2}{R} + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{f^2}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{v} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right] \quad (2.11)$$

que é a equação do movimento na direção x.

Aplicando (2.5) e (2.6) a (2.2) obtém-se:

$$\begin{aligned} f(\bar{u}+u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}+v') + (\bar{v}+v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}+v') - (\bar{u}+u')^2 \frac{f}{R} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} + v \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{v}+v') - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}+u') \\ + \frac{f}{R} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}+v') + f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{v}+v') - \frac{f^2}{R^2} \\ (\bar{v}+v') + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} (\bar{u}+u') + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dR} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}+v') \quad (A-2) \end{aligned}$$

Introduzindo-se (2.7) em (A-2) e, efetuadas algumas simplificações vamos obter a seguinte equação:

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{f}{R} \bar{u}^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} + v \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \right. \\ \left. \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{f^2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{f^2}{R^2} \bar{v} + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{u} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] - \\ -f \frac{\partial v'^2}{dy} - f \frac{u' v'}{\partial x} - f \frac{v'^2}{R} + \frac{f}{R} u'^2 \quad (2.12) \end{aligned}$$

que é componente da eq. de movimento na direção y.

A.2 - Análise da ordem de grandeza dos termos de (2.11) e (2.12).

De acordo com (2.13), (2.14) e (2.15) podemos escrever (2.11) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \frac{0(1)0(\bar{u}^2)}{0(L_1)} + \frac{0(\bar{v})0(\bar{u})}{0(L_2)} + 0 \frac{1}{L_1} \cdot 0(\bar{v})0(\bar{u}) = - \frac{0(1)}{\rho} \frac{0(\Delta P)}{0(L_1)} + \\
 & + v \left[\frac{0(\bar{u})}{0(L_1^2)} + \frac{1}{0(L_2)} \left(\frac{0(\bar{u})}{0(L_2)} - \frac{0(\bar{u})}{0(L_1)} \right) + 0 \left(\frac{1}{L_1} \right) \frac{0(\bar{v})}{0(L_1)} - \right. \\
 & \left. - 0 \left(\frac{1}{L_1^2} \right) 0(1)0(\bar{v}) + 0 \left(\frac{1}{L_1^2} \right) 0(L_2)0(1) \cdot \frac{0(\bar{u})}{0(L_1)} \right] - \\
 & - 0(1) \frac{0(\ell^2)}{0(L_1)} - \frac{R_{xy} 0(\ell^2)}{0(L_2)} - 0 \left(\frac{1}{L_1} \right) 0(\ell^2) R_{xy} \quad (A-3)
 \end{aligned}$$

Aplicando-se (2.17) em (A-3) teremos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{0(\bar{u}^2)}{0(L_1)} + \frac{0(\bar{u}^2)}{0(L_1)} + \frac{0(\bar{u}^2)}{0(L_1)} \frac{0(L_2)}{0(L_1)} = - \frac{0(\Delta P)}{0(L_1)} + v \left[\frac{0(\bar{u})}{0(L_1^2)} + \right. \\
 & + \frac{0(\bar{u})}{0(L_1^2)} \frac{0(L_1^2)}{0(L_2)} - \frac{0(L_1)}{0(L_2)} + \frac{0(\bar{u})}{0(L_1^2)} \frac{0(L_2)}{0(L_1)} - \\
 & - \frac{0(\bar{u})}{0(L_1^2)} \frac{0(L_2)}{0(L_1)} + \frac{0(\bar{u})}{0(L_1^2)} \frac{0(L_2)}{0(L_1)} - \frac{0(\ell^2)}{0(L_1)} - R_{xy} \frac{0(\ell^2)}{0(L_2)} - \\
 & \left. - R_{xy} \frac{0(\ell^2)}{0(L_1)} \right] \quad (A-4)
 \end{aligned}$$

Onde,

$$R_{xy} = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \cdot \sqrt{\overline{v'^2}}} = 0 \left(\frac{\overline{u'v'}}{\ell^2} \right)$$

Multiplicando-se (A-3) por $\frac{0(L_1)}{0(\bar{u}^2)}$ Teremos:

$$0(1) + 0(1) + \frac{0(L_2)}{0(L_1)} = \frac{0(\bar{\Delta P})}{\rho 0(\bar{u}^2)} + \frac{v}{0(\bar{u})0(L_1)} \left[0(1) + \frac{0(L_1^2)}{0(L_2^2)} - \frac{0(L_1)}{0(L_2)} + \frac{0(L_2)}{0(L_1)} - \frac{0(L_2)}{0(L_1)} - \frac{0(L_2)}{0(L_1)} + \frac{0(L_2)}{0(L_1)} \right] - \frac{0(\ell^2)}{0(\bar{u}^2)}$$

$$- R_{xy} \frac{0(\ell^2)}{0(\bar{u}^2)} 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) - R_{xy} \frac{0(\ell^2)}{0(\bar{u}^2)} \quad (A-5)$$

Desde que sabemos que o valor de R_{ij} (coeficiente de correlação) está compreendido entre zero e um ($0 < R_{ij} < 1$) e esperamos uma alta correlação, assumiremos R_{ij} de ordem 1.

O número de Reynolds baseado em elementos do escoamento terá a ordem de magnitude igual a:

$$0(R_e) = \frac{0(\bar{u}) 0(L_1)}{v} = 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \quad (A-6)$$

Desde que nos interessa o escoamento viscoso, os termos de viscosidade da equação do movimento que terão influência no escoamento obrigam a que o número de Reynolds tenha a ordem pelo menos igual a

$$0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right)$$

Das características das flutuações de velocidade nós sabemos que a ordem de grandeza de $0 \left(\frac{\ell^2}{\bar{u}^2} \right)$ pode ser pelo menos igual

$$a \left(\frac{L_2}{L_1} \right)$$

Baseadas nas conclusões acima faremos a análise de cada termo da equação do "momentum" na direção x:

$$\frac{f}{R} \bar{v} \bar{u} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \lll 0(1)$$

$$v f^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) 0(1) \lll 0(1)$$

$$v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f u}{R} = 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) - 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2$$

$$- 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \approx 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) - 1 \approx 0(1)$$

$$\frac{v f^2 \bar{u}}{R^2} = 0 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) 0(1) \lll 0(1)$$

$$\frac{2 v f^2}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \approx 0 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \lll 0(1)$$

$$\frac{v f^3}{R} \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \approx 0 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) 0 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \lll 0(1)$$

$$f \frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} = 0 \left(\frac{\ell^2}{\bar{u}^2} \right) 0 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \lll 0(1)$$

$$\frac{\overline{\partial v' u'}}{\partial y} = 0 \left(\frac{\ell^2}{\bar{u}^2} \right) 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \approx 0 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \approx 0(1)$$

$$\frac{2f}{R} \overline{u' v'} = 0 \left(\frac{\ell^2}{\bar{u}} \right) 0 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \lll 0(1)$$

Baseados na análise feita acima e desprezando-se os termos de ordem menor que 1, teremos a seguinte equação:

$$f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f \bar{u}}{R} \right) \right] - \frac{\partial \overline{v' u'}}{\partial y} \quad (2.18)$$

Otensão da componente da equação do momento na direção y para regime turbulento.

Aplicando (2.5) e (2.6) a (2.2) vamos ter:

$$\begin{aligned} f (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} + v') + (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') - (\bar{u} + u') \frac{f}{R} \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{v} + v') - \frac{2f}{R} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \right. \\ \left. + \frac{f}{R} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') + f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{v} + v') - \frac{f^2}{R^2} (\bar{v} + v') + \right. \\ \left. + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} (\bar{u} + u') + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} + v') \right] \quad (A-7) \end{aligned}$$

Tomando-se a média em relação ao tempo, eq. (2.7), e usando procedimento análogo ao uso para (A.1) iremos ter a seguinte expressão:

$$f \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{f}{R} \bar{u}^2 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{f^2}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{f^2}{R^2} \bar{v} + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{u} + \\
& + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] - \frac{\partial \bar{v}^{\prime 2}}{\partial y} - f \frac{\partial \bar{u}^{\prime} \bar{v}^{\prime}}{\partial x} - \frac{f}{R} \bar{v}^{\prime 2} + \frac{f}{R} \bar{u}^{\prime 2}
\end{aligned}$$

A.3 - Análise da ordem de grandeza dos termos da eq. (2.12)

Tendo em vista as eq. (2.13) e (2.15) podemos escrever (2.12) do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
& O(1)O(\bar{u}) \frac{O(\bar{v})}{O(L_1)} + O(\bar{v}) \frac{O(\bar{v})}{O(L_1)} - \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} = - \frac{O(\Delta P)}{\rho O(L_2)} + \\
& v \left[\frac{O(\bar{v})}{O(L_2^2)} - \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} + \frac{O(\bar{v})}{O(L_1 L_2)} + \frac{O(\bar{v})}{O(L_1^2)} - \frac{O(\bar{v})}{O(L_1^2)} + \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} + \right. \\
& \left. + \frac{O(\bar{v})(O(L_2))}{O(L_1)O(L_1^2)} \right] - \frac{O(\ell^2)}{O(L_2)} - R_{xy} \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} + \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} \quad (A-8)
\end{aligned}$$

Introduzindo-se agora (2.16) em (A-8), teremos

$$\begin{aligned}
& \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} \frac{O(L_2)}{O(L_1)} + \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} \frac{O(L_2)}{O(L_1)} - \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} = - \frac{O(\Delta P)}{\rho O(L_2)} + \\
& + v \left[\frac{O(\bar{u})}{O(L_2^2)} \frac{O(L_2)}{O(L_1)} - \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} - \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} + \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \frac{O(L_2)}{O(L_1)} - \right. \\
& \left. \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \frac{O(L_2)}{O(L_1)} + \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \frac{O(L_2^2)}{O(L_1)} \right] - \frac{O(\ell^2)}{O(L_2^2)} -
\end{aligned}$$

$$- R_{xy} \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} + \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} \quad (A-9)$$

Vamos multiplicar (A-9) por $O(L_1) / O(\bar{u}^2)$.

$$((O(L_1) / O(L_2)))$$

Ficaremos com a seguinte equação:

$$O(1) + O(1) + O\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = - \frac{O(\Delta P)}{\rho O(\bar{u}^2)} \cdot \frac{O(L_1^2)}{O(L_2^2)} + \frac{\nu}{O(\bar{u})O(L_1)} \left[O\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \cdot \right. \\ \left. O\left(\frac{L_2}{L_1}\right) + O(1) + O(1) + O\left(\frac{L_2}{L_1}\right) - O\left(\frac{L_2}{L_1}\right) + O(1) + O\left(\frac{L_2^2}{L_1^2}\right) \right] -$$

$$- \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} O\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 - R_{xy} \cdot \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} O\left(\frac{L_1}{L_2}\right) - \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} - O\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$$

$$+ \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} O\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \quad (A-10)$$

Na dedução da eq. na direção x chegamos a conclusão que o número de Reynolds é da ordem de $\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$ então, os termos viscosos, comparados com a ordem de magnitude dos termos turbulentos, podem ser desprezados tendo em vista que partimos do pressuposto que $O\left(\frac{\ell^2}{\bar{u}^2}\right)$ é pelo menos da ordem de $\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$

Então (A-10) reduz-se a:

$$- O\left(\frac{L_1}{L_2}\right) = - \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} \cdot O\left(\frac{L_1}{L_2}\right) + \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} \cdot O\left(\frac{L_1}{L_2}\right) - R_{xy} \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)}$$

$$\cdot O\left(\frac{L_1}{L_2}\right) - \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} \cdot O\left(\frac{L_1}{L_2}\right) + \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} \cdot \left(\frac{L_1}{L_2}\right) \quad (A-11)$$

ou ainda.

$$\begin{aligned}
 - \theta(1) = & - \frac{\theta(\Delta P)}{\theta(\bar{u}^2)} \theta\left(\frac{L_1}{L_2}\right) - \frac{\theta(\ell^2)}{\theta(\bar{u}^2)} \theta\left(\frac{L_1}{L_2}\right) - R_{xy} \frac{\theta(L_2)}{\theta(\bar{u})} \\
 & - \frac{\theta(\ell^2)}{\theta(\bar{u}^2)} + \frac{\theta(\ell^2)}{\theta(\bar{u}^2)} \quad (A-12)
 \end{aligned}$$

Continuando.

$$\begin{aligned}
 - \theta(1) = & - \frac{\theta(\Delta P)}{\rho \theta(u^2)} \theta\left(\frac{L_1}{L_2}\right) - \theta\left(\frac{L_1}{L_2}\right) - R_{xy} \theta\left(\frac{L_2}{L_1}\right) - \theta\left(\frac{L_2}{L_1}\right) + \\
 & + \theta\left(\frac{L_2}{L_1}\right) \quad (A-13)
 \end{aligned}$$

Finalmente podemos concluir que:

$$- \frac{f\bar{u}^2}{R} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} \quad (2.9)$$

APÊNDICE B

TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES

B.1 - Adimensionalização da eq. do movimento e continuidade.

A partir da definição das variáveis adimensionais dadas abaixo, vamos substituí-las nas equações do momento e da continuidade:

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = u \quad (B-1)$$

$$\frac{\bar{v}}{U_0} = v \quad (B-2)$$

Equação do momento.

Substituindo (B-1) e (B-2) em (2.45) vamos obter:

$$\begin{aligned} & f u U_\infty^2(x) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + f u U_\infty(x) \frac{dU_\infty(x)}{dx} - f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f U_\infty(x)^2 u^2}{R} + \\ & + v \frac{\partial}{\partial y} \left(U_\infty(x) \frac{\partial u}{\partial y} + U_\infty(x) \frac{f u}{R} \right) + \left[\epsilon (U_\infty(x) \frac{\partial u}{\partial y} - \right. \\ & \left. - \frac{U_\infty(x) f u}{R} \right) \end{aligned} \quad (B-3)$$

Dividindo-se (B-3) por $U_\infty^2(x)$, e depois de algumas simplificações teremos:

$$\begin{aligned}
& f u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f u^2}{U_{\infty}(x)} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f}{U_{\infty}(x)} - \frac{f}{U_{\infty}(x)} \frac{dU_{\infty}(x)}{dx} \int_0^y \frac{f u^2}{R} dy - \\
& - f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f u^2}{R} dy + \frac{v}{U_{\infty}(x)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f u}{R} \right) + \\
& + \frac{1}{U_{\infty}(x)} \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f u}{R} \right) \right] \quad (B-4)
\end{aligned}$$

Equação da Continuidade

Aplicando (B-1) e (B-2) em (2.9) e, dividindo-a por $U_{\infty}(x)$ obteremos a equação que se segue:

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f u}{U_{\infty}(x)} \frac{dU_{\infty}(x)}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{f v}{R} = 0 \quad (B-5)$$

Vamos definir as coordenadas adimensionais e

$$\xi = \int_0^x \frac{U_{\infty}(x)}{v} dx \quad \text{e} \quad \eta = \frac{U_{\infty}(x) y}{(2\xi)^n v} \quad (B-6) \text{ e } (B-7)$$

Lembrando que ξ é função de x e η de x e y temos:

$$\frac{\partial ()}{\partial x} = \frac{U_{\infty}(x)}{v} \frac{\partial ()}{\partial \xi} \quad (B-8)$$

$$\frac{\partial ()}{\partial y} = \frac{U_{\infty}(x)}{v(2\xi)^n} \frac{\partial ()}{\partial \eta} \quad (B-9)$$

Antes de introduzir as expressões acima nas equações do movimento e da continuidade, vamos definir a variável v como:

$$v = \frac{v}{(2\xi)^n} - \frac{v(2\xi)^n}{U_{\infty}(x)} f u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (B-10)$$

Introduzindo-se as expressões (B-6), (B-7) (B-8), (B-9) e (B-10) nas equações do momento e da continuidade obteremos:

$$\begin{aligned}
 (2\xi)^n f u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{(2\xi)^{2n}}{U_\infty(x)} \frac{dU_\infty(x)}{dx} \left(1 - u^2 + \right. \\
 &+ 2 \int_0^\eta \frac{f u}{R_\eta} d\eta + \frac{f u^2 \eta}{R_\eta} \left. \right) + \frac{(2\xi)^{2n} f^2 \eta n u}{\xi R_\eta} - (2\xi)^{2n} f \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{f u^2}{R_\eta} d\eta \\
 &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{f u}{\eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\epsilon}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{f u}{R_\eta} \right) \right] \quad (2-49)
 \end{aligned}$$

que é a equação do movimento adimensionalizada e

$$(2\xi)^{2n} f \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{(2\xi)^{2n} f u \eta}{\xi} + \frac{f v}{R_\eta} = 0 \quad (2)$$

que é a equação da continuidade adimensionalizada.

B.2 - Adimensionalização do modelo da viscosidade turbulenta.

Seja:

$$y^+ = \frac{y u^*}{\nu} \quad (\text{B.11})$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \quad (\text{B.12})$$

$$\delta^+ = \frac{\delta^* u^*}{\nu} \quad (\text{B.13})$$

onde u^* é a velocidade de fricção que é dada por:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$

Substituindo-se (B-11) (B-)

$$\frac{\epsilon_p}{\nu} = f K^2 y^{+2} \left[1 - \text{EXP} \left(- \frac{y^+}{26} \right) \right] \left| \frac{\partial u^+}{\partial y^+} + \frac{u^+ f}{R^+} \right| \quad (\text{B-51})$$

$$\text{onde } R^+ = \frac{R u^+}{\nu}$$

Analogamente, utilizando-se das expressões (C-11) (C-12) e (C-13) obter-se-á a eq. adimensionalizada para o modelo de Clauser.

$$\frac{\epsilon_i}{\nu} = K U_\infty(x) \delta^+ \gamma \quad (2.52)$$

$$\text{Onde } U_{\infty}(x) = \frac{U_{\infty}(x)}{u}$$

B.3 - Modelo em diferenças finitas

De modo a simplificar as equações vamos definir

$$EM = \frac{\epsilon}{\nu}, \quad CSIM = (2\xi)_{i+1/2}^{2n}, \quad PRESM = \left(\frac{f(2\xi)^n}{U_{\infty}(x)} \frac{dU_{\infty}(x)}{d\xi} \right)_{i+1/2,j}$$

$$TSIM = (f \cdot CSIM)_{i+1/2}, \quad PRES1 = TSIM \frac{1}{U_{\infty}(x)} \frac{dU_{\infty}(x)}{d\xi} (1 - u),$$

$$PRES2 = TSIM \frac{1}{U_{\infty}(x)} \frac{dU_{\infty}(x)}{d\xi} \frac{fu^2}{R_{\eta}} + \int_0^{\eta} \frac{fu^2}{R_{\eta}} d\eta,$$

$$CURV1 = TSIM \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\eta} \frac{fu^2}{R_{\eta}} d\eta, \quad CURV2 = CSIM \left(\frac{n}{\xi} \right) \frac{fu}{R_{\eta}}$$

(B-14)

Substituindo (B-14) na eq. do movimento no ponto $i+1/2,j$ teremos:

$$u_{i+1/2,j} + \frac{\Delta \xi}{2} (\dots) + \frac{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}}{2} (\dots) =$$

$$PRES2_{i+1/2,j} + CURV1_{i+1/2,j} + CURV2_{i+1/2,j} + \frac{EM_{i+1/2,j+1/2}(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} -$$

$$+ \frac{EM_{i+1/2,j-1/2}(u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} + \frac{EM_{i+1/2,j+1/2}(u_{i,j} + u_{i,j+1})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} -$$

$$\frac{EM_{i+1,j+1} \cdot f_{i+1,j+1}}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})R_{\eta i+j}} + \frac{EM_{i,j+1} \cdot f_{i,j+1}}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})R_{\eta i}} - \frac{EM_{i,j-1} \cdot f_{i,j-1}}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \quad (B-15)$$

- Equação da Continuidade

o a conseguir $V_{i+1/2,j}$; (2.9) foi discretizada no ponto $i + \frac{1}{2}, j - 1$.

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{2 \Delta \xi} - \frac{u_{i,j} + u_{8,j-1}}{2 \Delta \xi} + \frac{V_{i+1/2,j} - V_{i+1/2,j-1}}{\Delta \eta_{j-1}}$$

$$\frac{V_{i+1/2,j-1}}{2} \left(\frac{V_{i+1/2,j} + V_{i+1/2,j-1}}{\xi} + TSIM \cdot \frac{n}{\xi} \left(\frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{4} + \frac{u_{i+1,j} + u_{i+1-1}}{2} \right) \right) = 0 \quad (B-16)$$

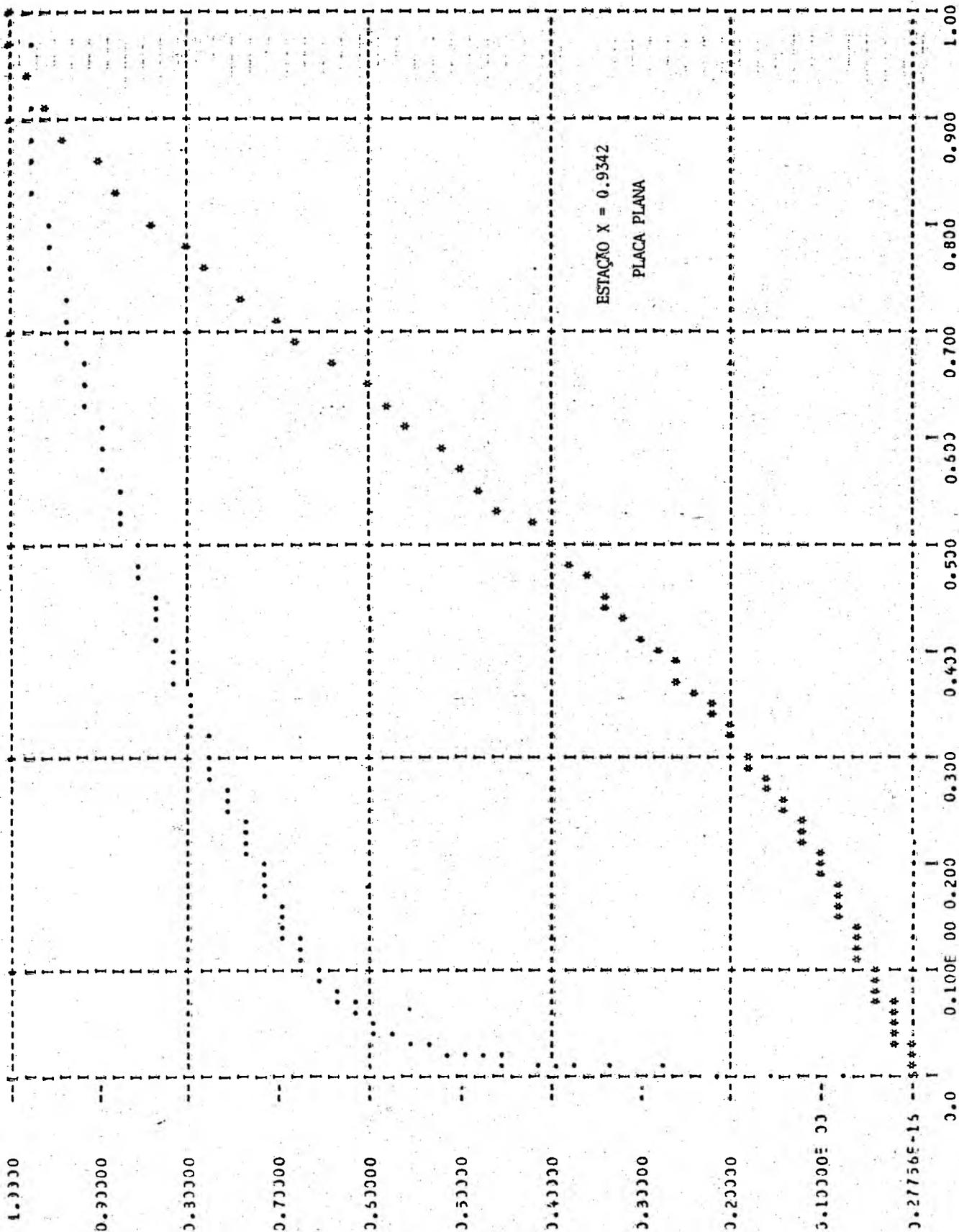
APÊNDICE C

Nomenclatura usada nos gráficos deste Apêndice:

- UVEL - Velocidade adimensional, \bar{u}/U_∞
- VEL - Velocidade vertical adimensional, ampliada
- UPLUS - Velocidade de fricção u^*
- TTURB - Tensor turbulento
- TVISC - Tensor laminar
- TTOTAL - Soma dos tensores laminar e turbulento
- USTAR - Velocidade de Fricção u^*
- DELTA - Espessura da camada limite
- VIS - Viscosidade cinemática

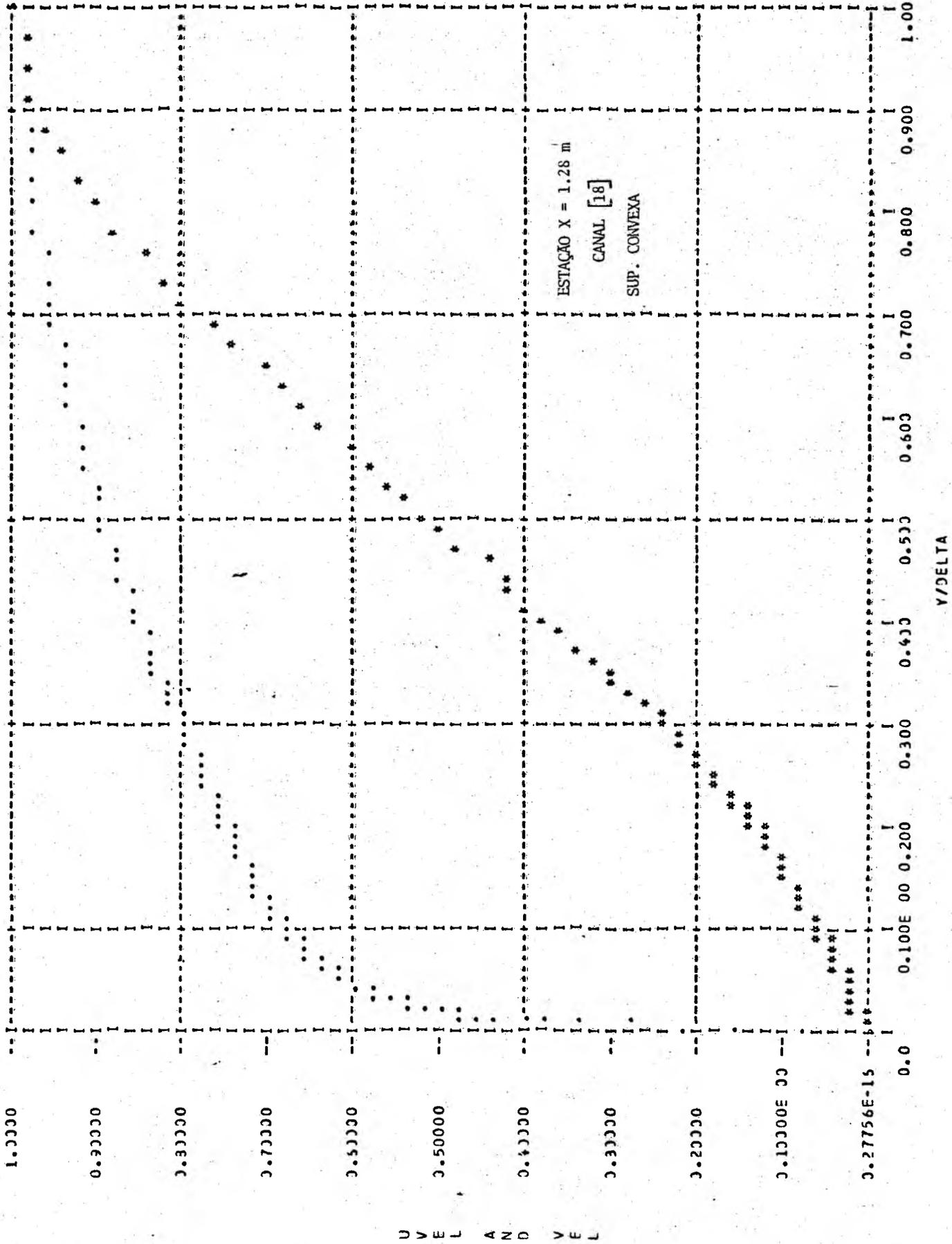
SEÇÃO C_1

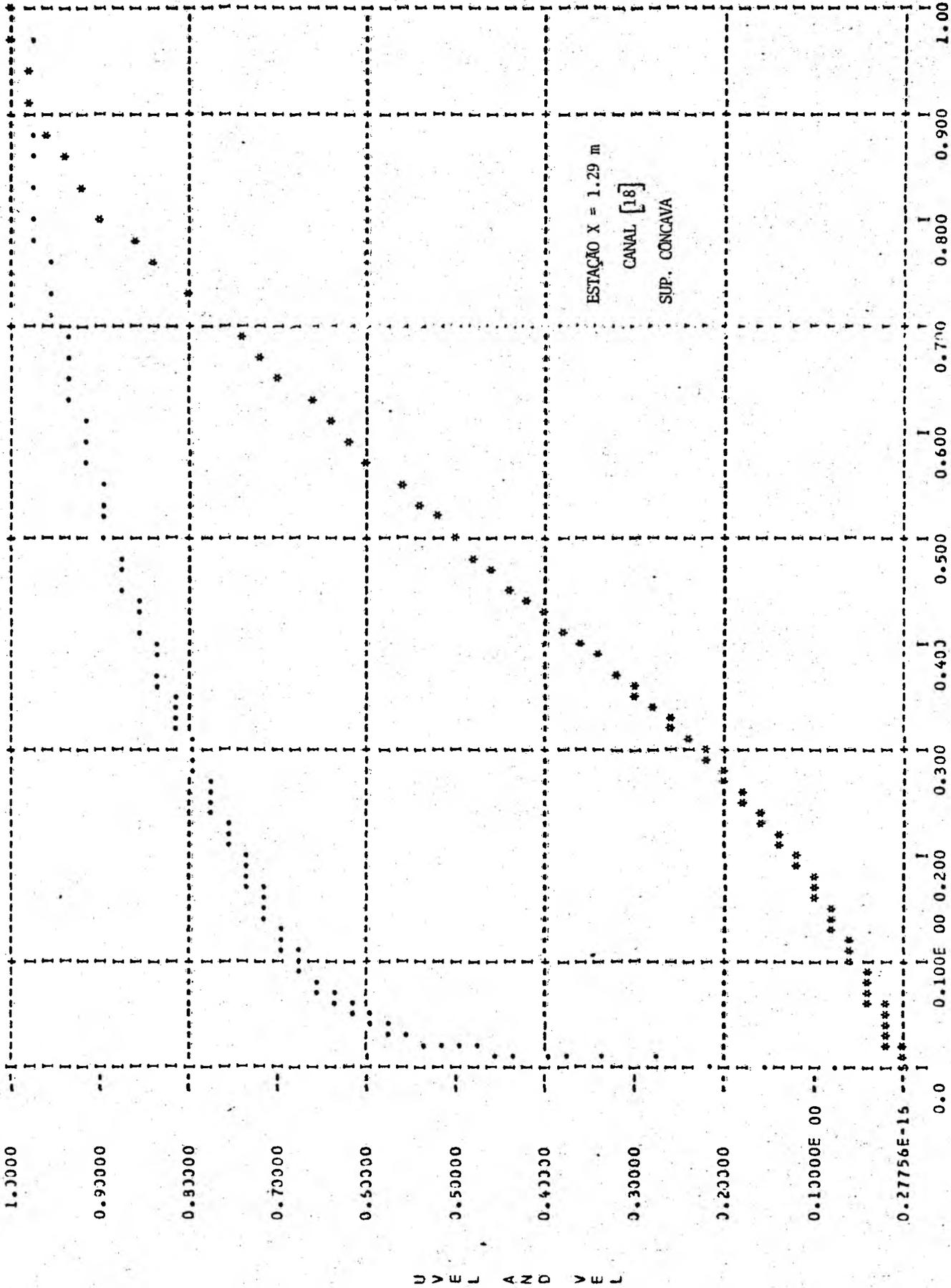
Gráficos das velocidades u e v , em função de y/δ .



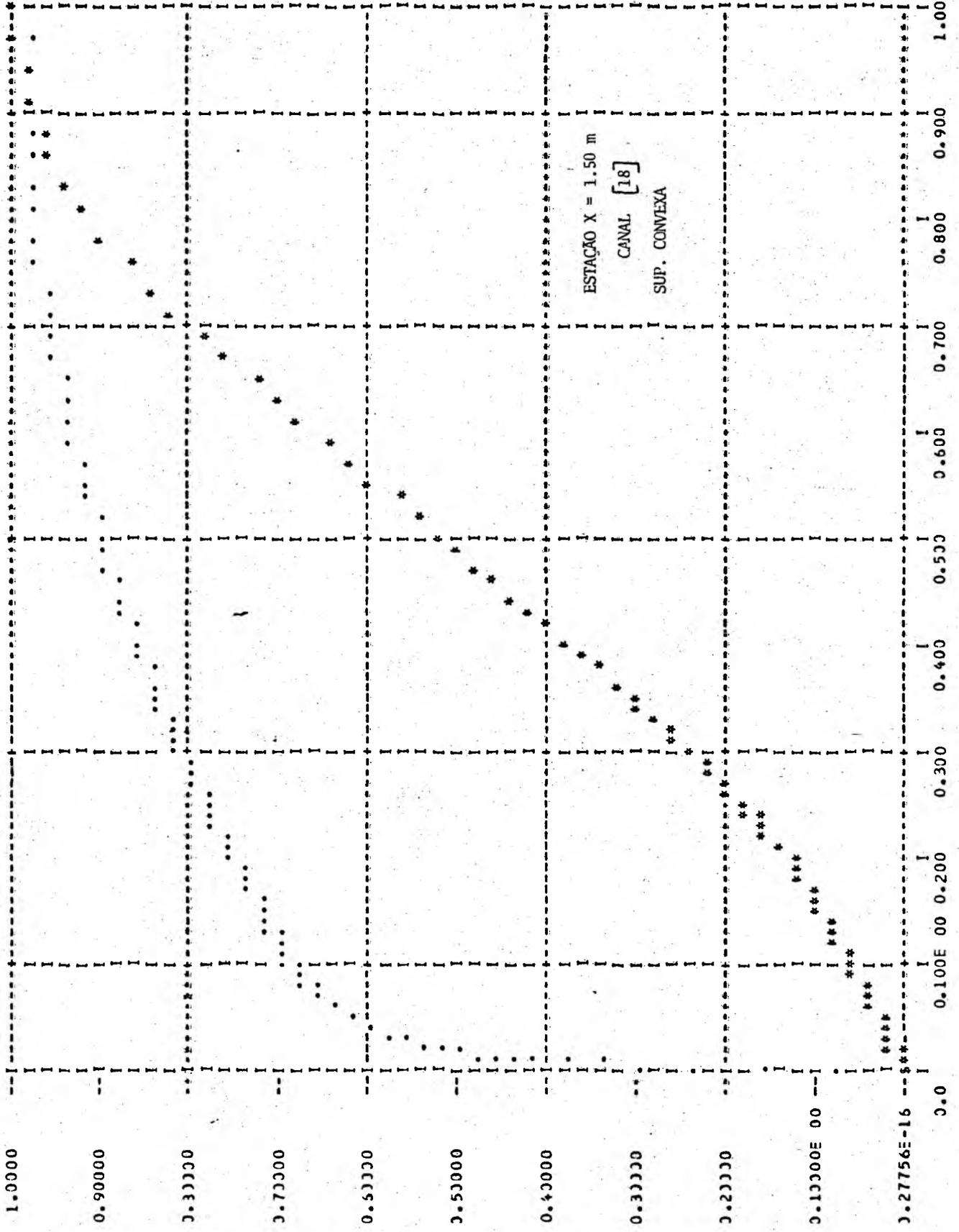
U
V
E
L
A
N
D
V
E
L

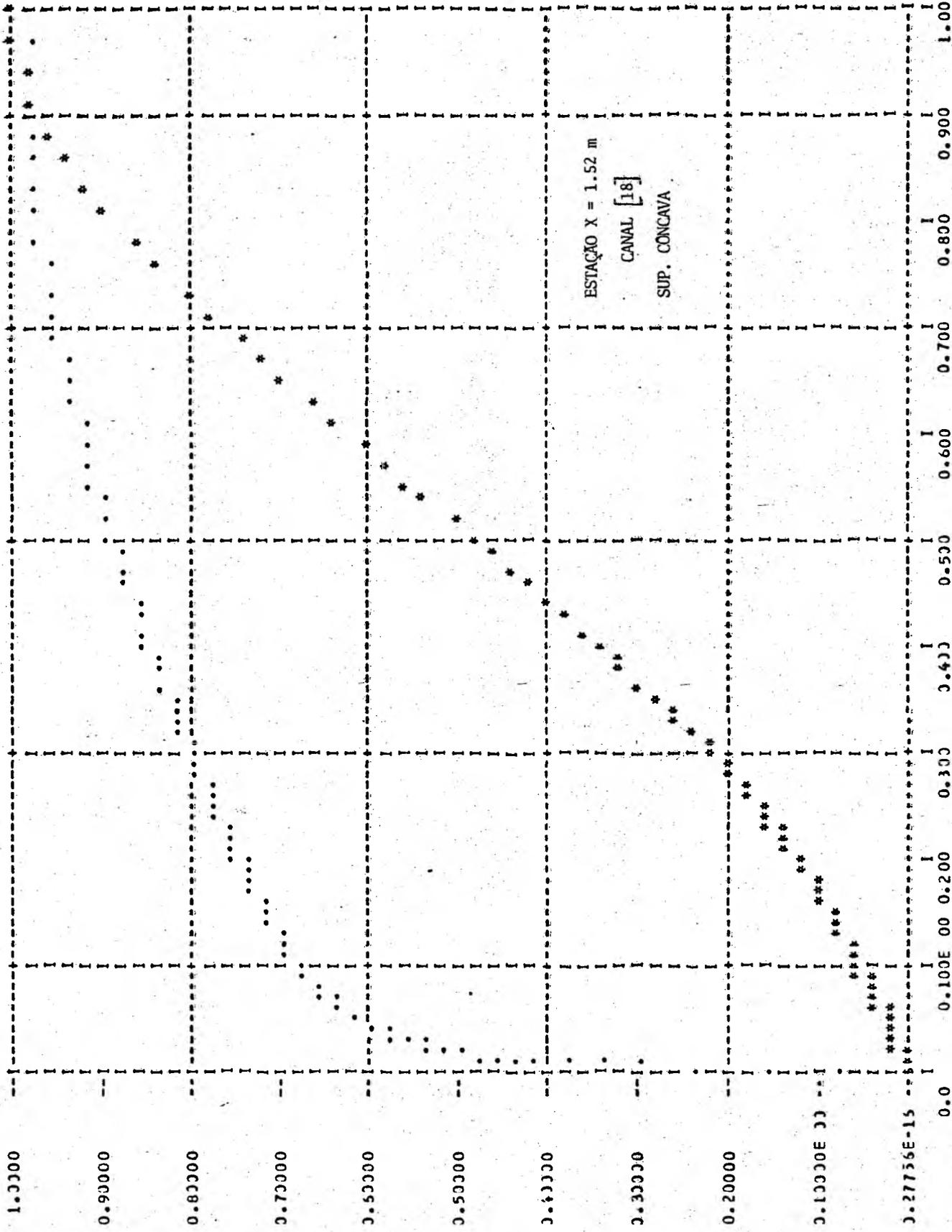
V/Delta



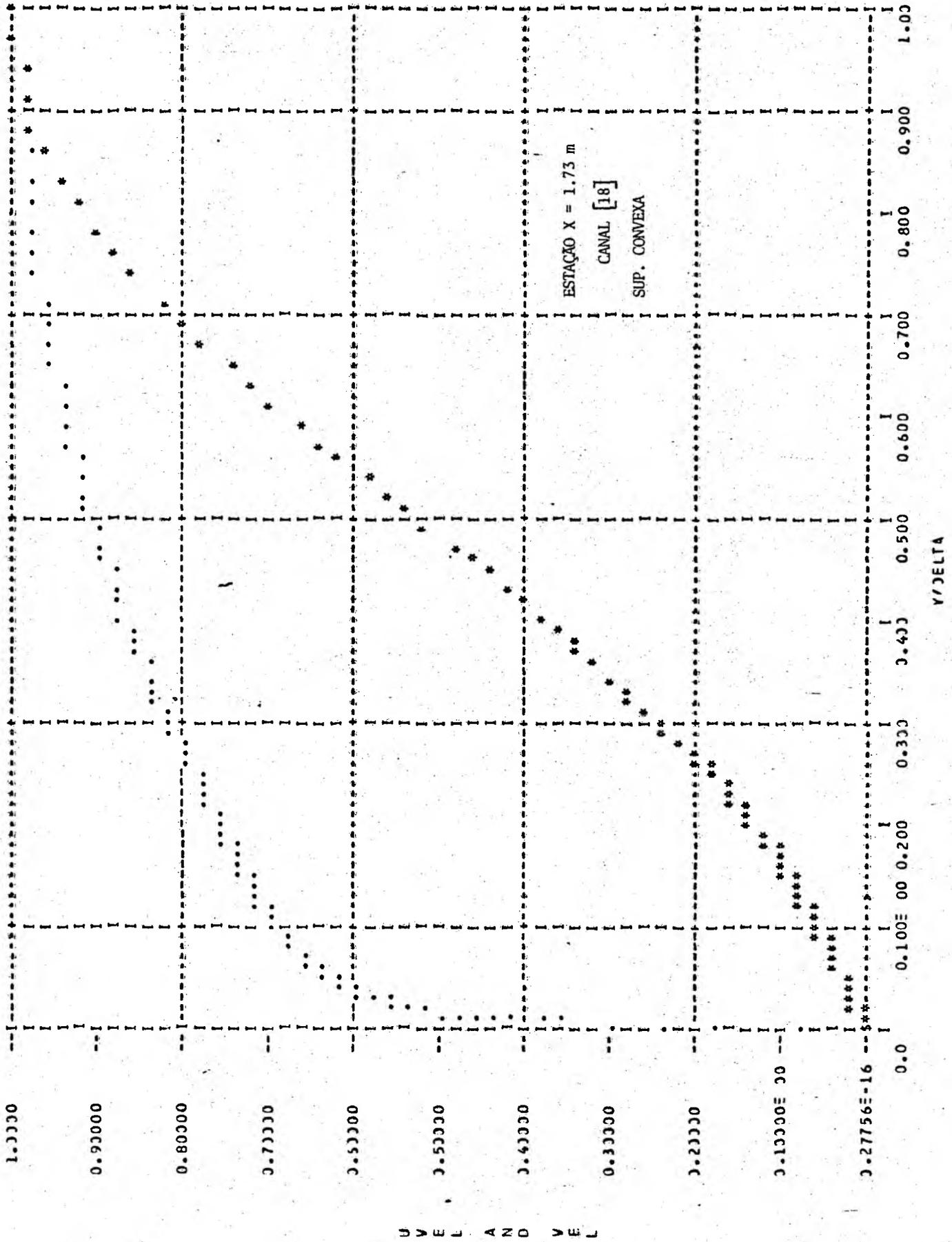


ULAVEL
ANVDVEL





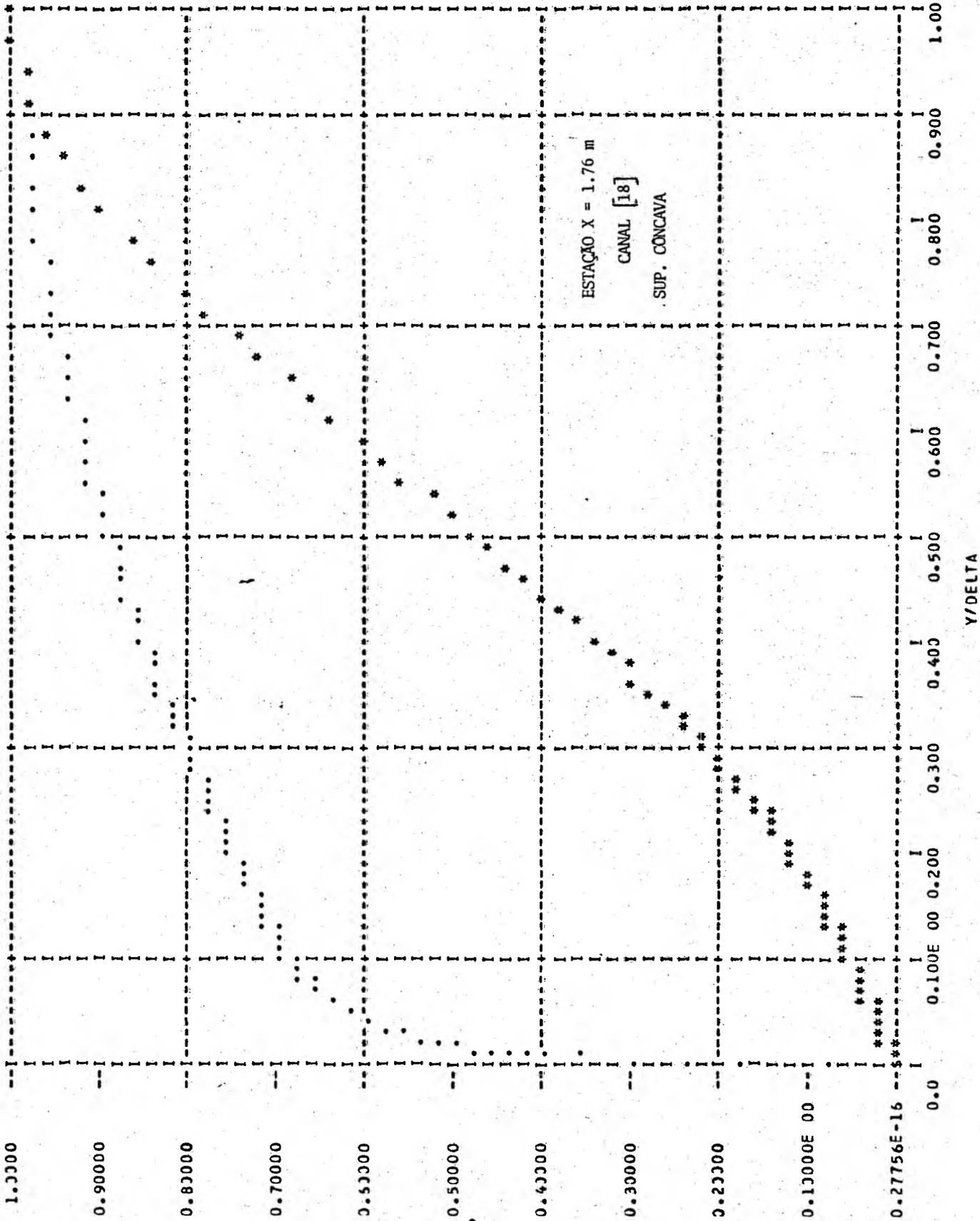
6.0
6.0



U
V
E
L
A
N
D
E
L

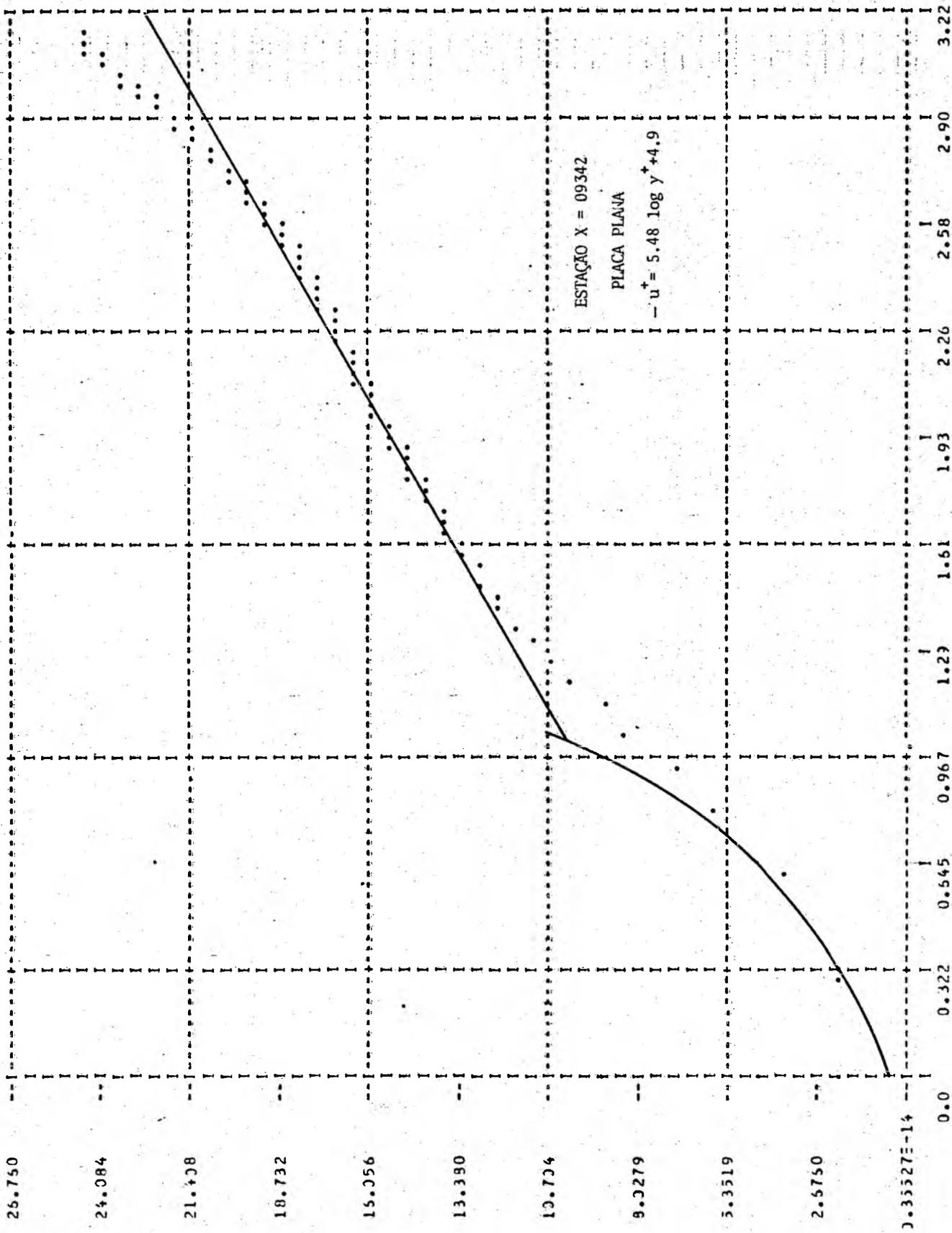
Y/Delta

U
V
E
L
A
N
D
V
E
L



SEÇÃO C₂

Gráficos da velocidade u^+ versus $\ln y^+$.



Y*JSTAR/VISC

U P L U S

26.750

24.084

21.408

18.732

15.056

13.380

10.704

9.0279

5.3519

2.6750

0.35527E-14

0.0

0.322

0.545

0.967

1.29

1.61

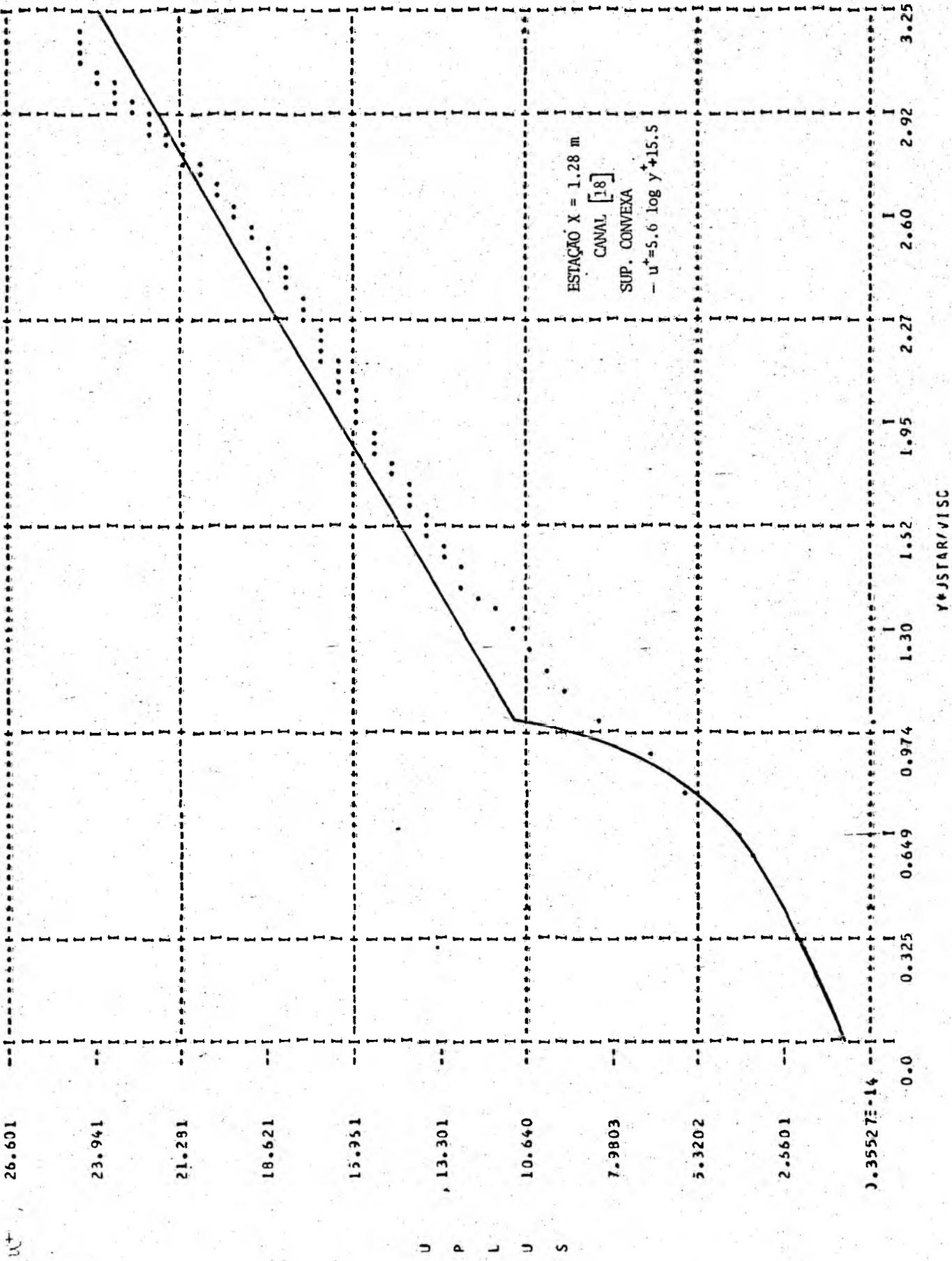
1.93

2.26

2.58

2.90

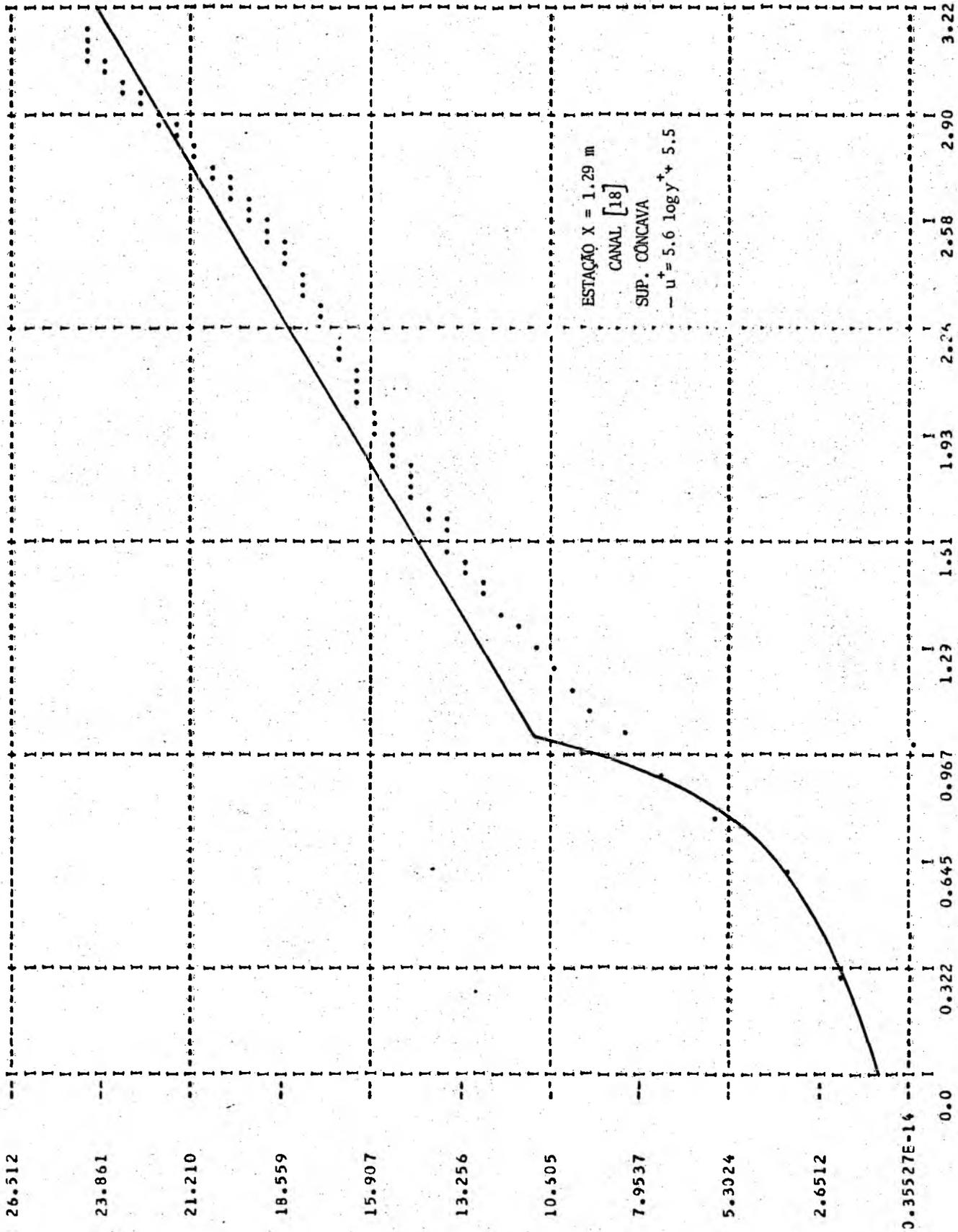
3.22

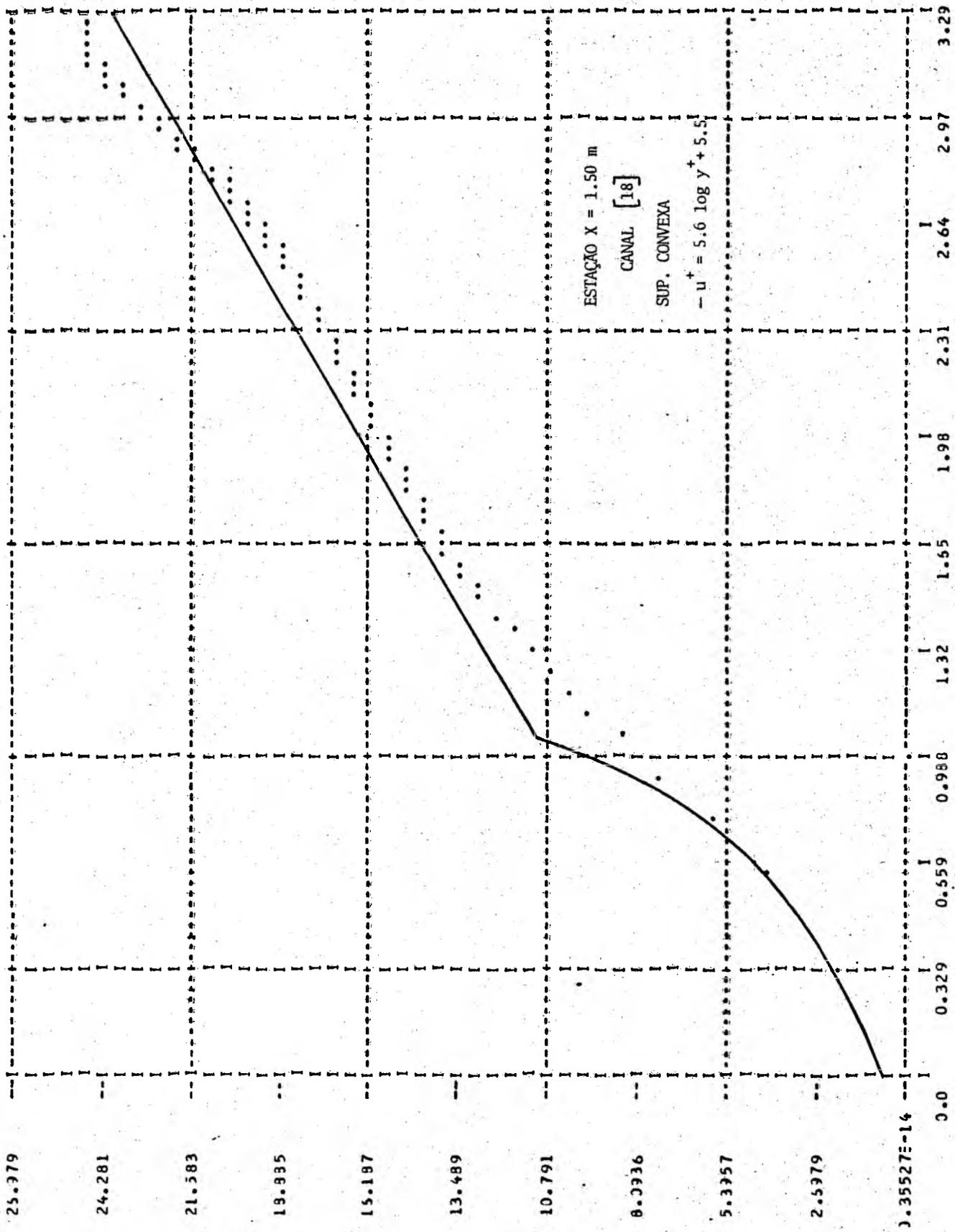


U⁺

U
P
L
U
S

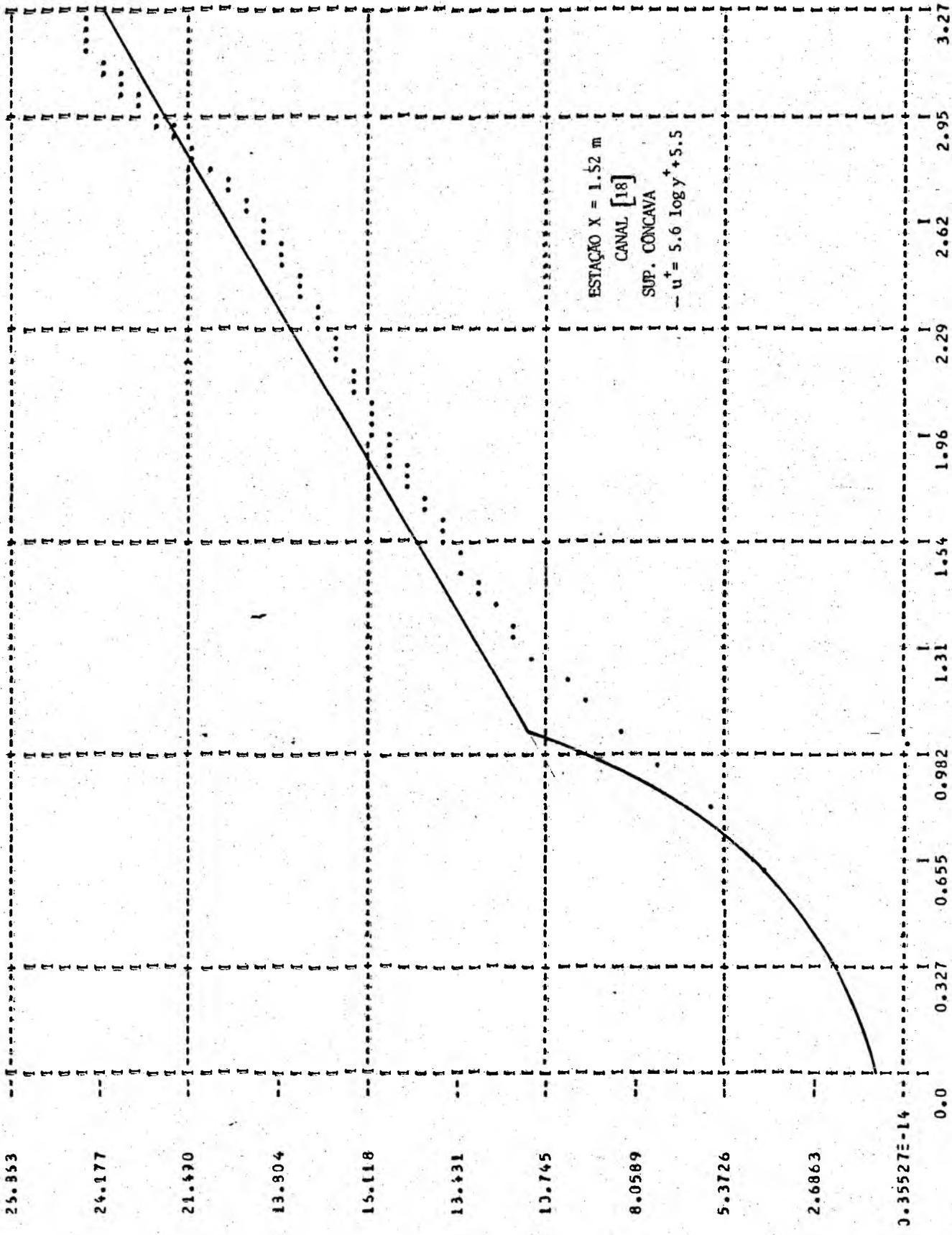
y⁺JSTAR/VISC





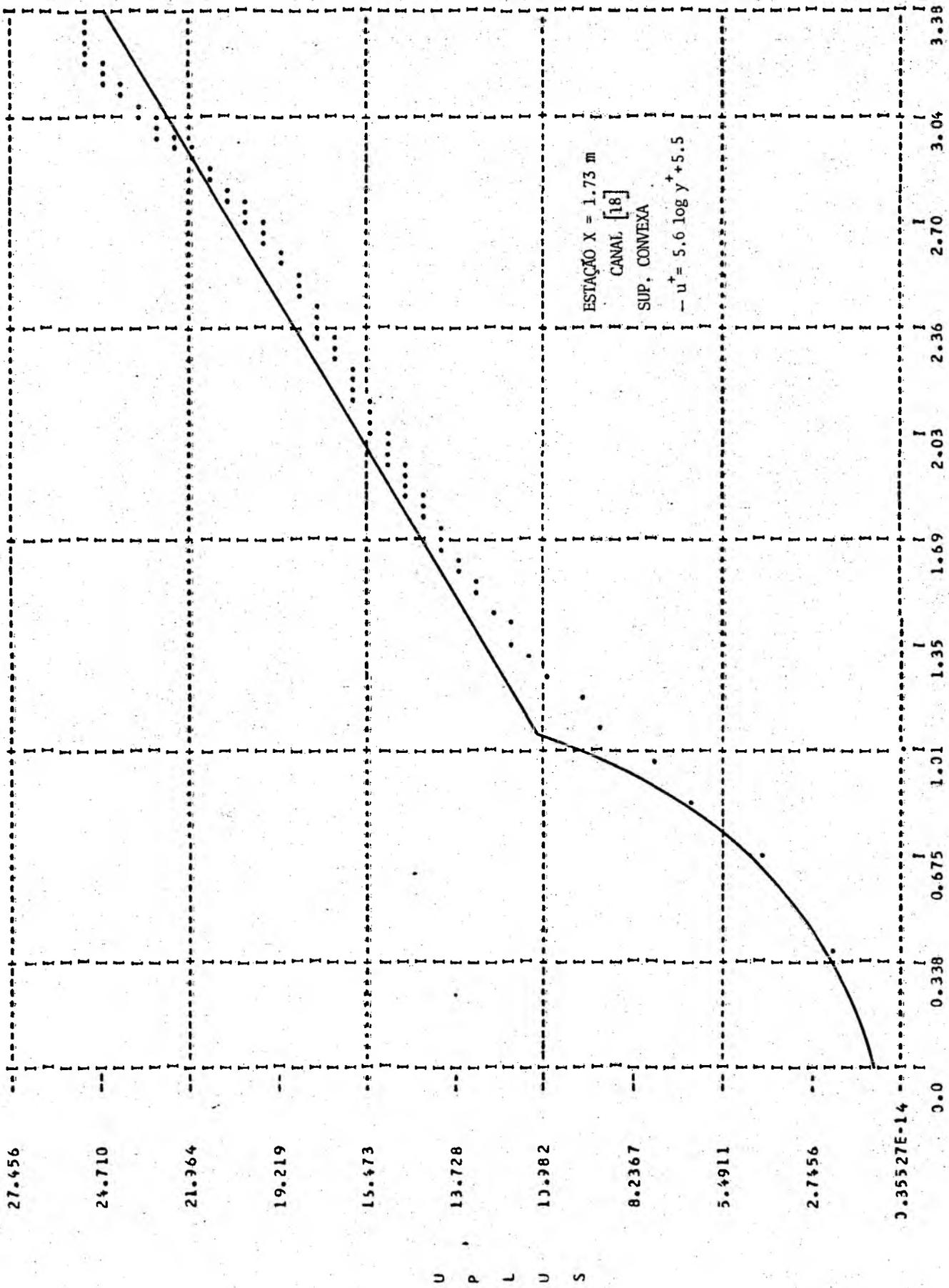
U
P
L
J
S

Y*JSTAR/ISC



Y*USTAR/VISC

U
P
L
U
S



Y*USTARY/15C

27.196

24.476

21.756

19.037

16.317

13.598

10.878

8.1587

5.4391

2.7196

0.35527E-14

0.0

0.332

0.664

0.997

1.33

1.66

1.99

2.33

2.66

2.99

3.32

U
P
L
U
S

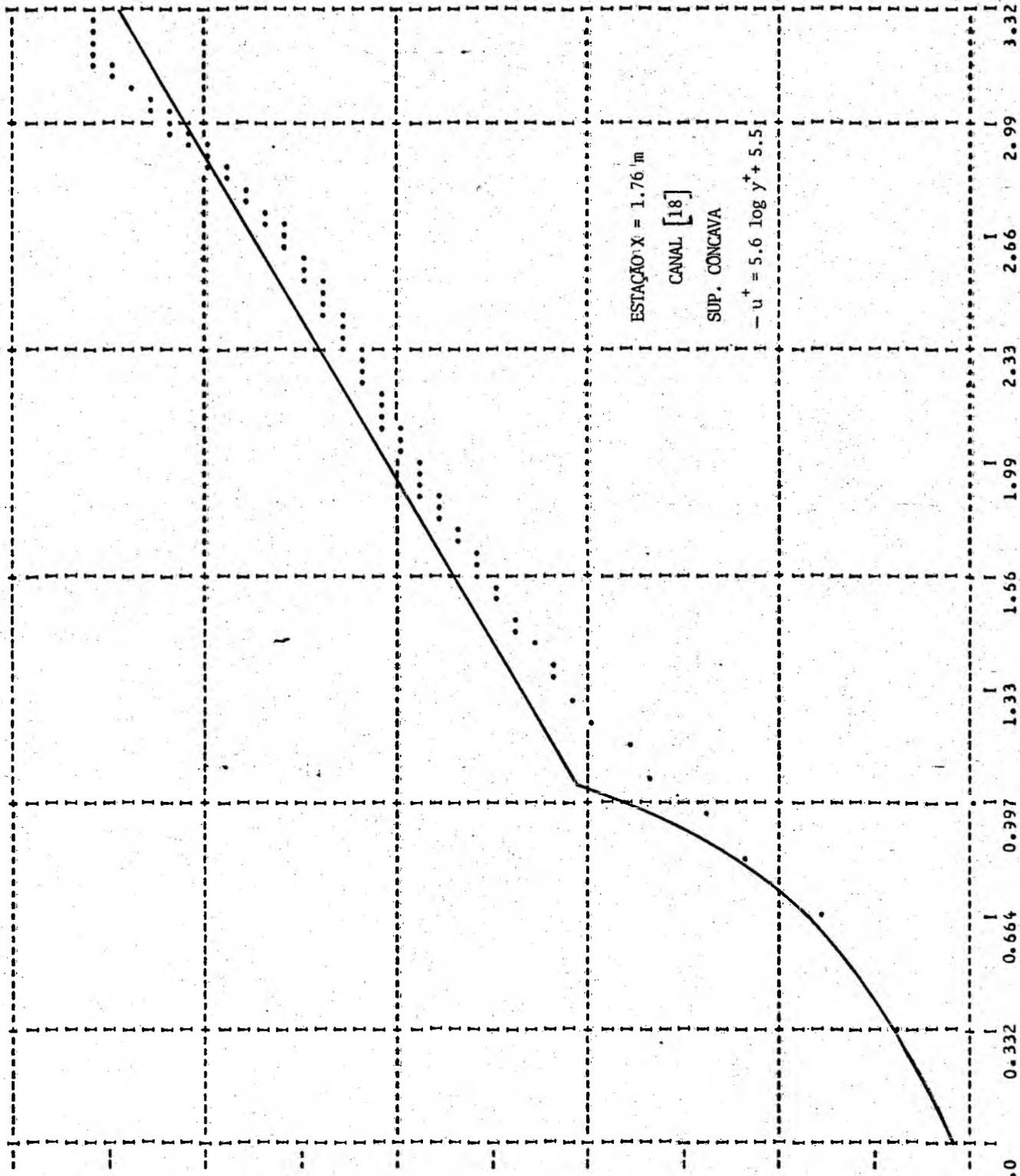
ESTACAO: X = 1.76 m

CANAL [18]

SUP. CONCAVA

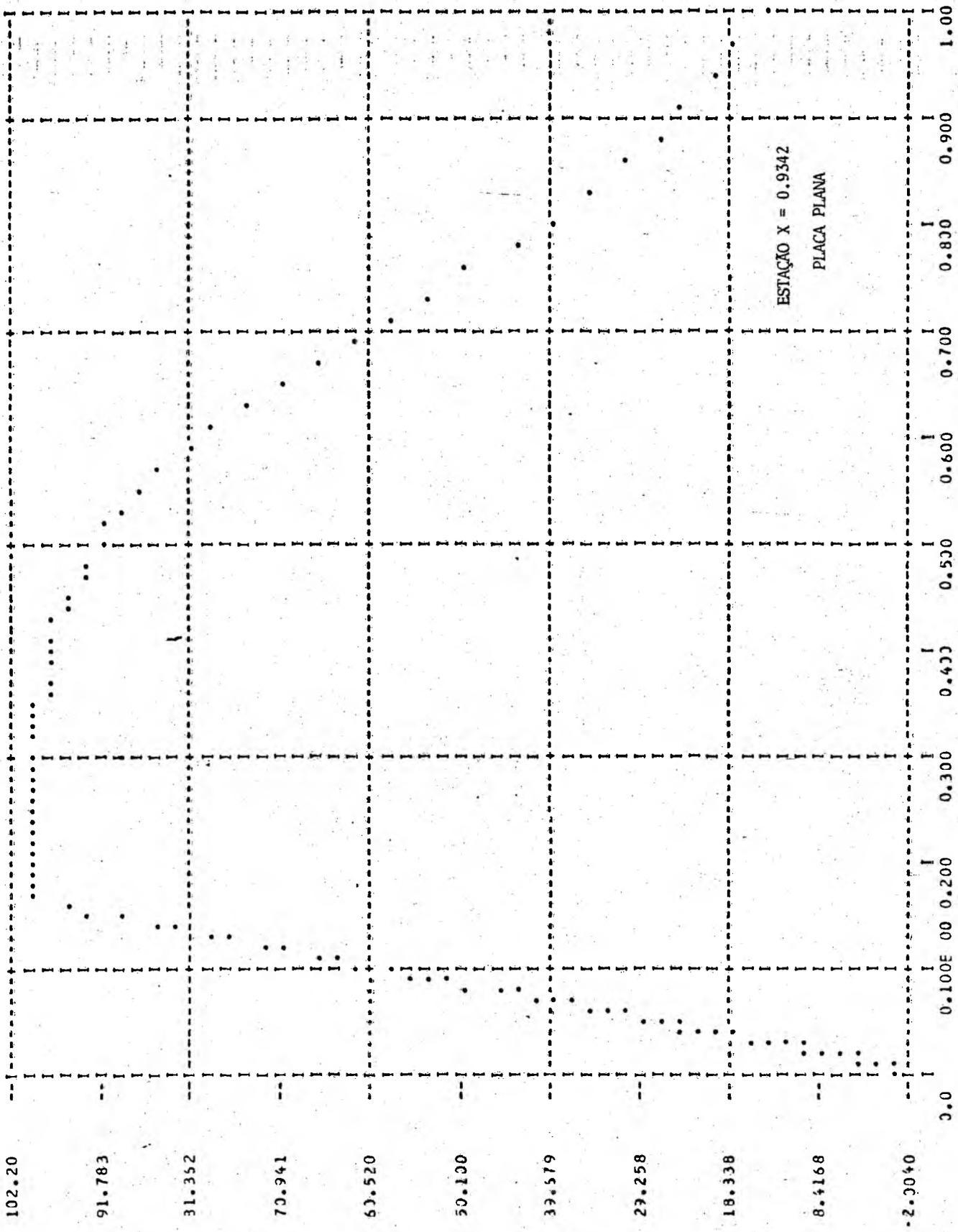
$-u^+ = 5.6 \log y^+ + 5.5$

Y#JSTAR//ISC



SEÇÃO C₃

Gráficos da Viscosidade Turbulenta, do tensor de Reynolds e do Coeficiente de Fricção.



V I S C O S I T U R B U L E N T A

Y/DELTA

1.3120 0.0181 1.0029

2.1103

1.9952

1.5300

1.4548

1.2497

1.0345

0.81331

0.50414

0.33396

0.17379

-0.41379E-01

0.0

0.100E 00

0.200

0.300

0.400

0.500

0.600

0.700

0.800

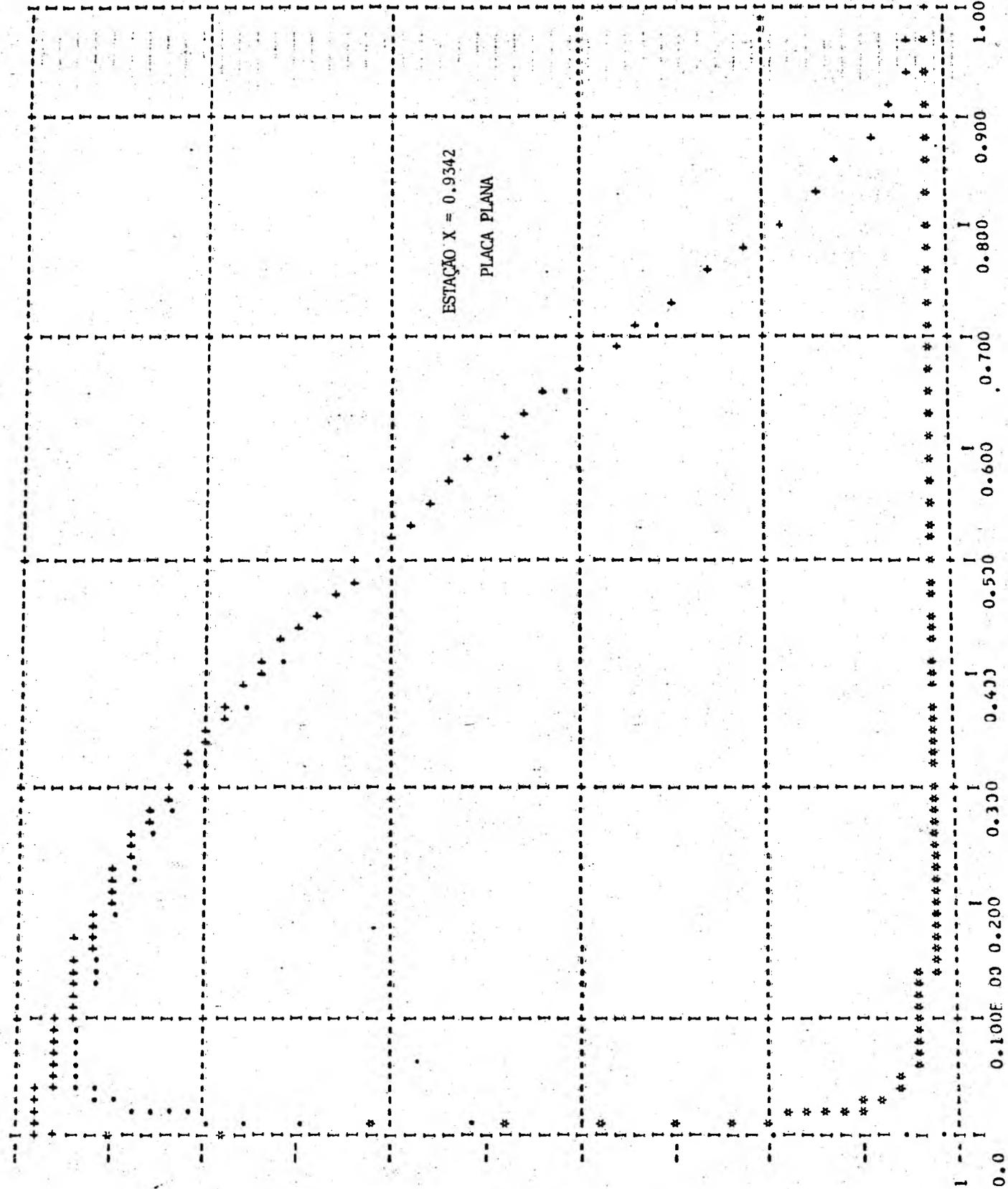
0.900

1.000

Y/DELTA

T T U R B T V I S C T T O T A L

ESTACAO X = 0.9342
PLACA PLANA

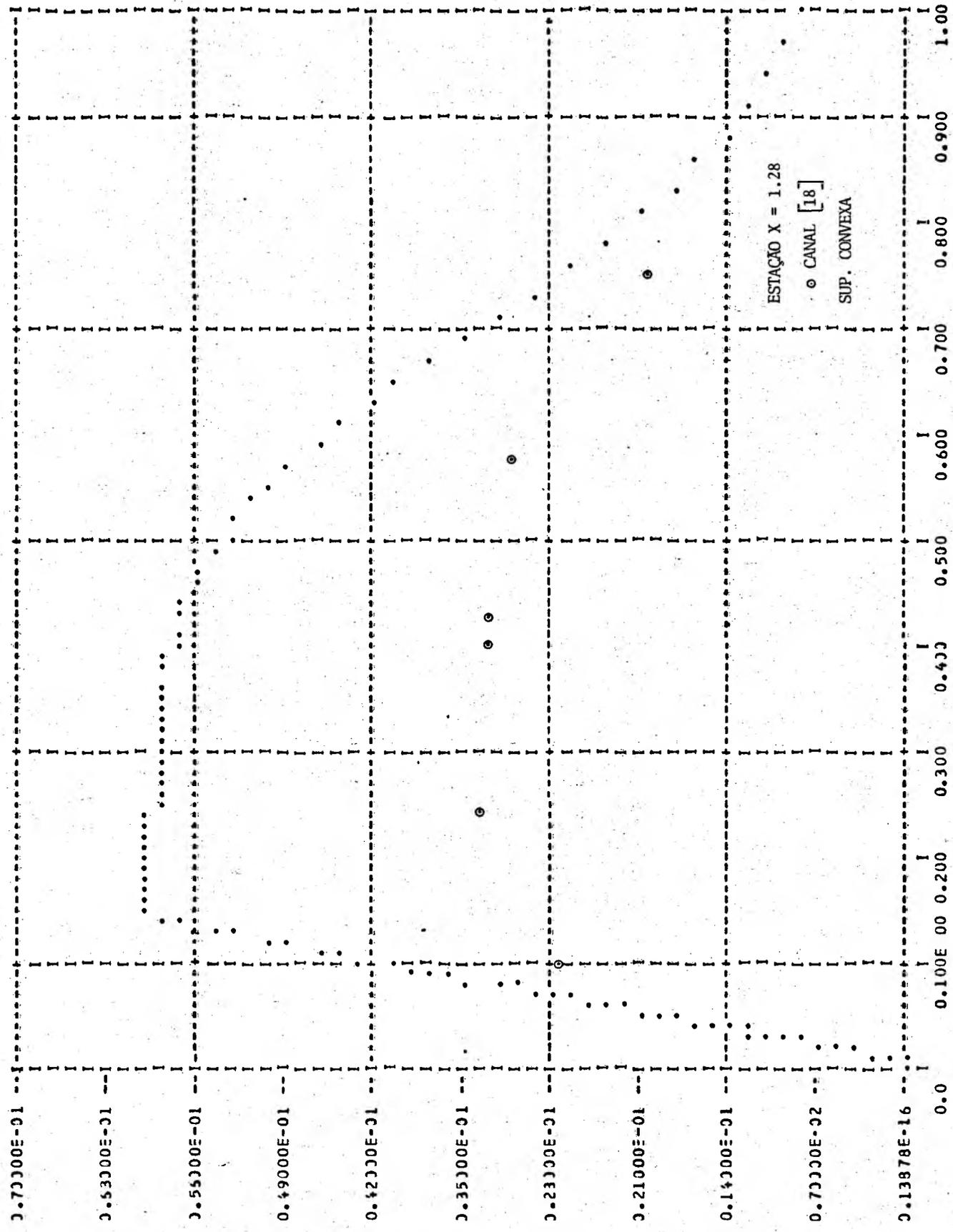


	0.0	6.00	12.0	18.0	24.0	30.0	36.0	42.0	48.0	54.0	60.0
2.1103	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1.8952	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1.5300	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1.4548	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1.2497	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1.0345	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0.81931	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0.50414	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0.38896	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0.17379	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0.41379E-01	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

ESTACAO X = 0.9342
PLACA PLANA

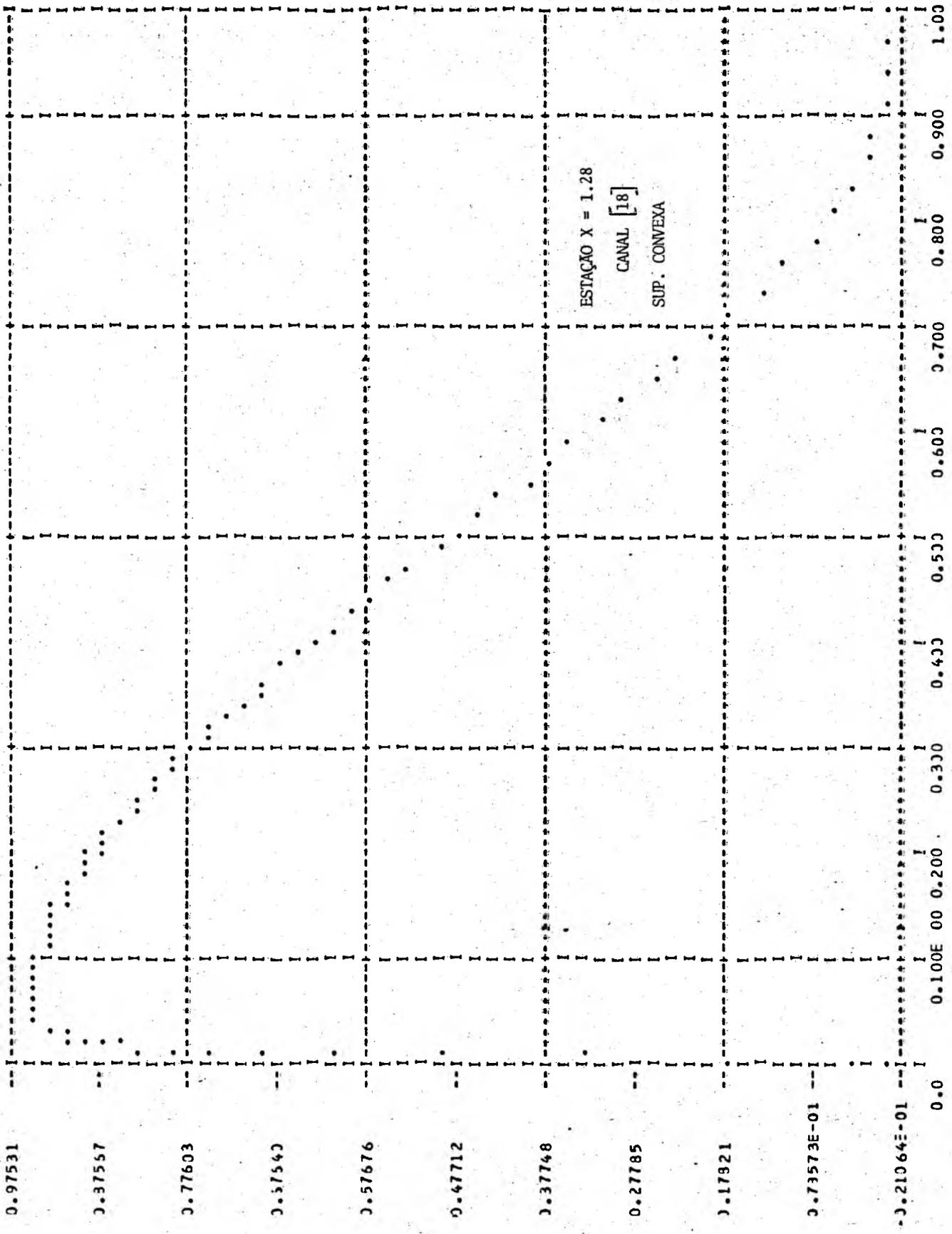
T T U R B T V I S C T T O T A L

Y*USTAR/VISC



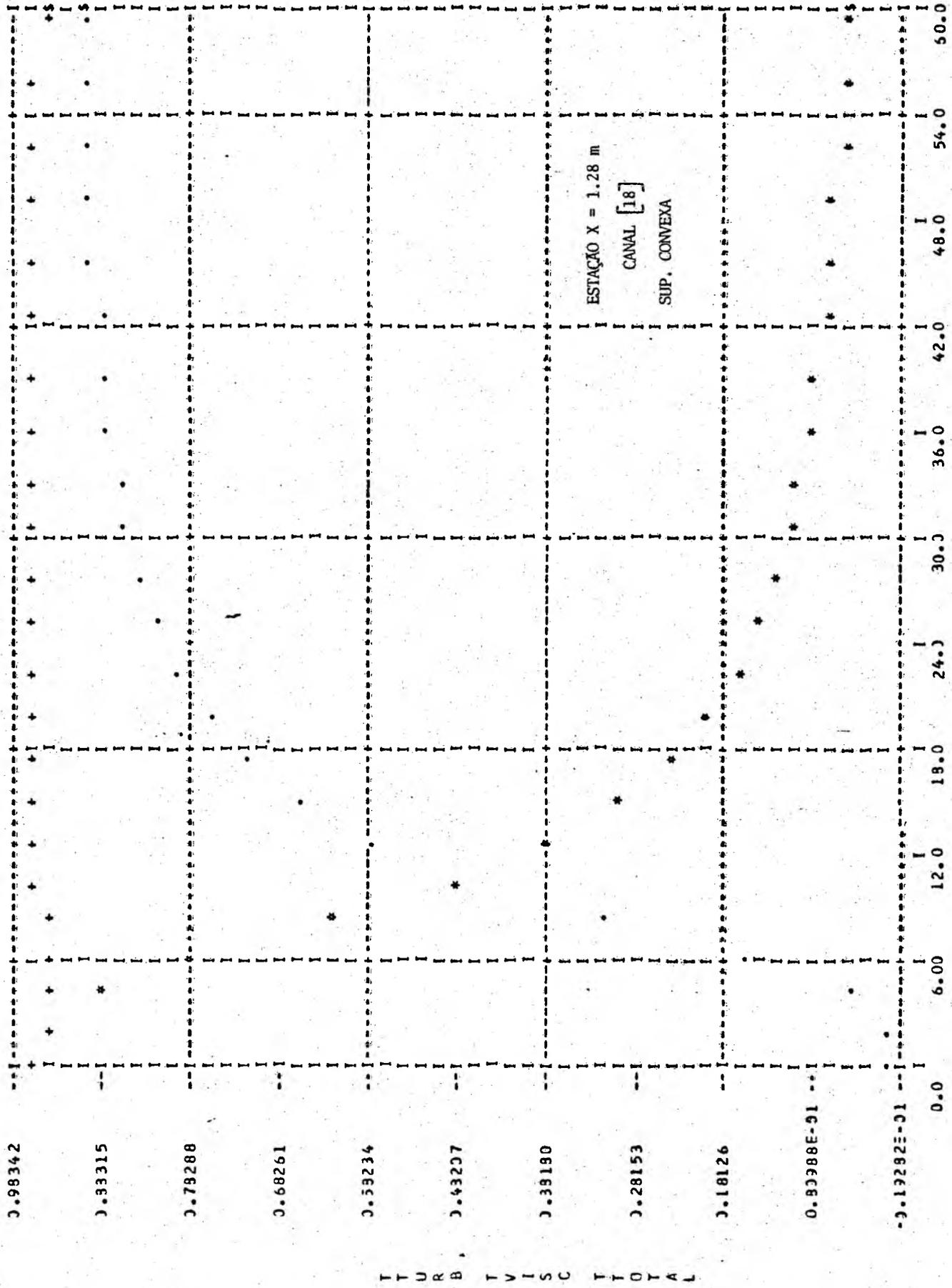
VISCOSSIDADE TURBULENTA

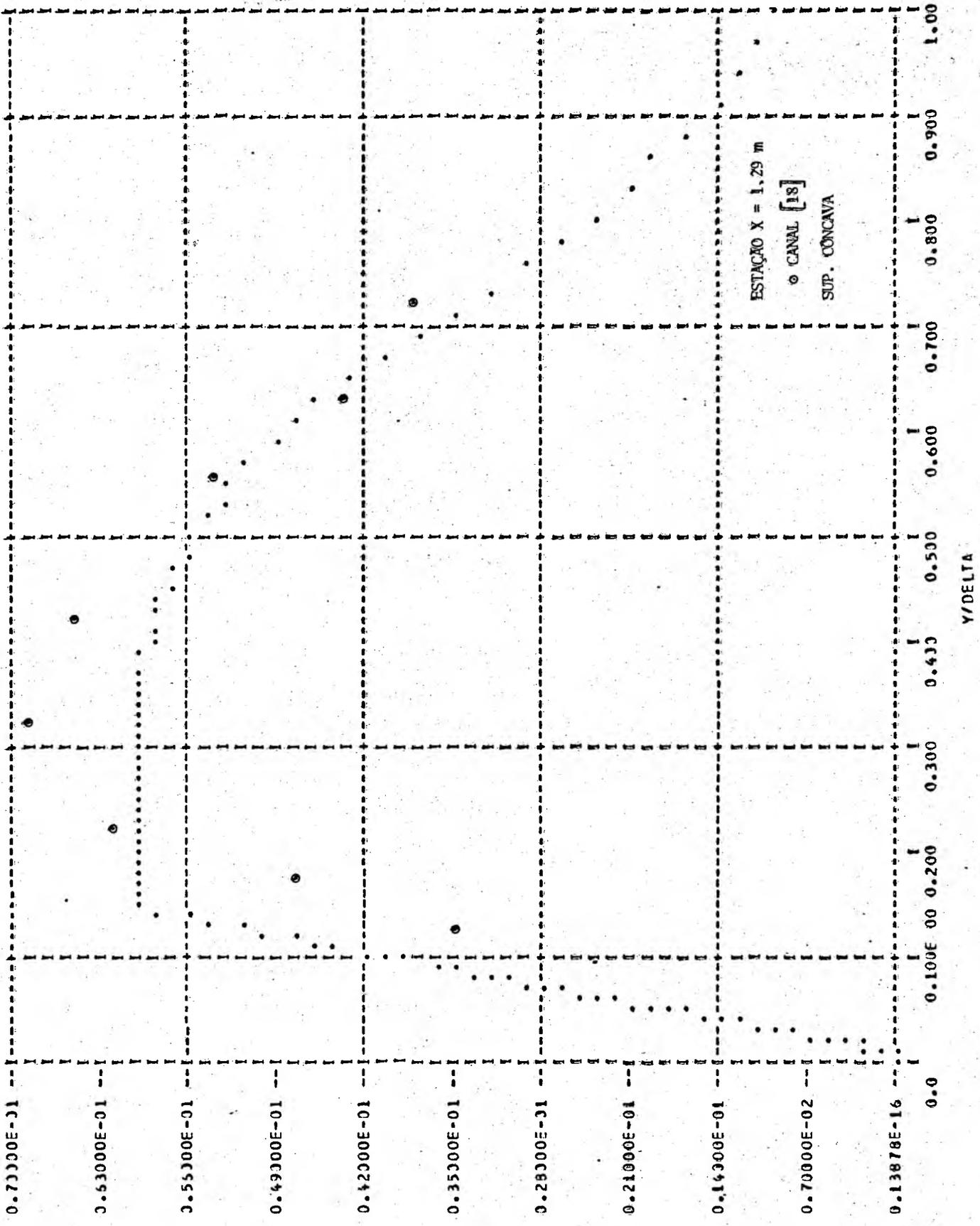
Y/Delta



Y/DELTA

T T J J R B T V I I S C T T D T A L





V I S C O S I T U D E N T A

T T U R B T V I S C Y T O T A L

0.87759

3.77795

0.57832

0.57868

0.47904

3.37940

0.27976

0.18012

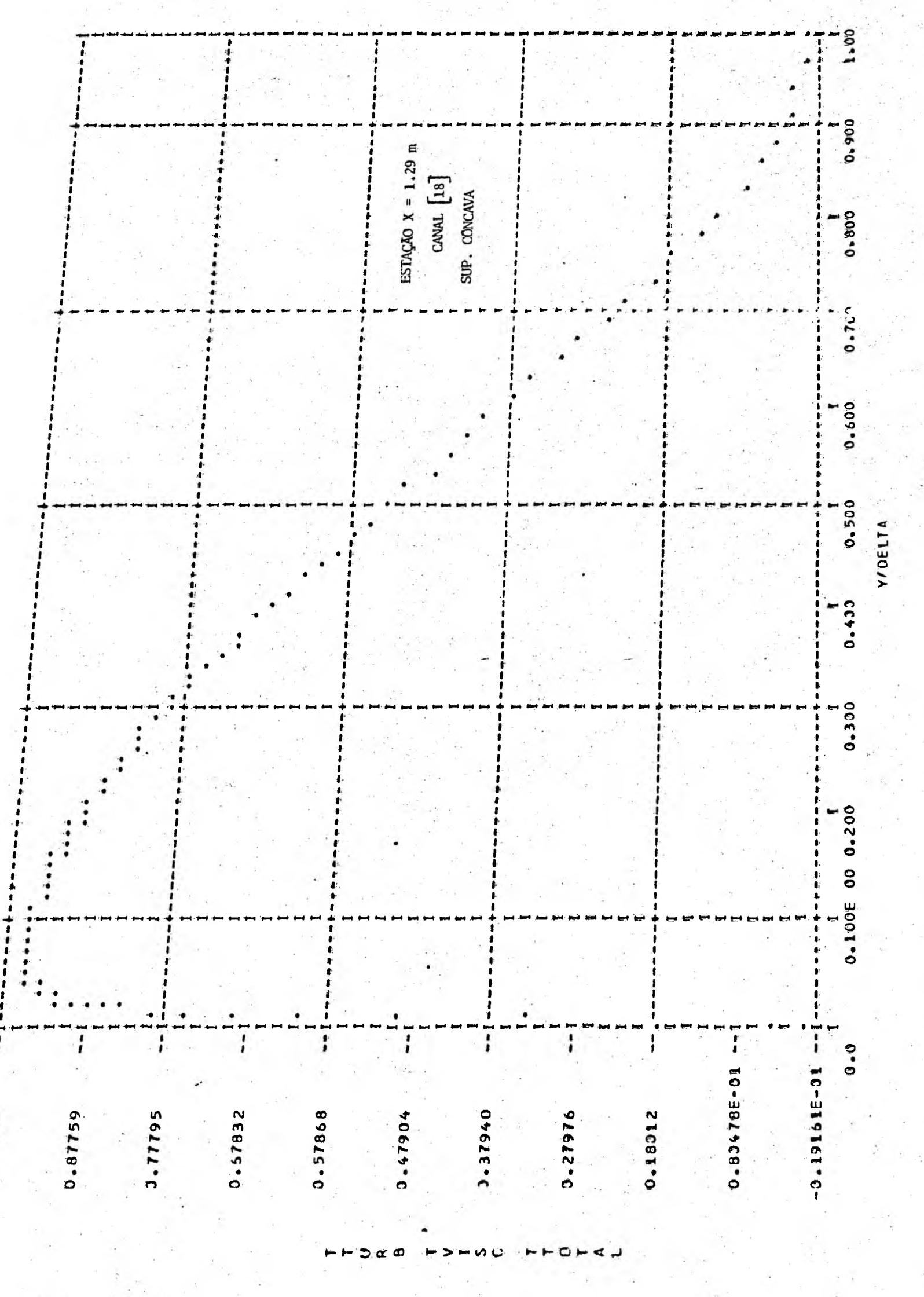
0.83478E-01

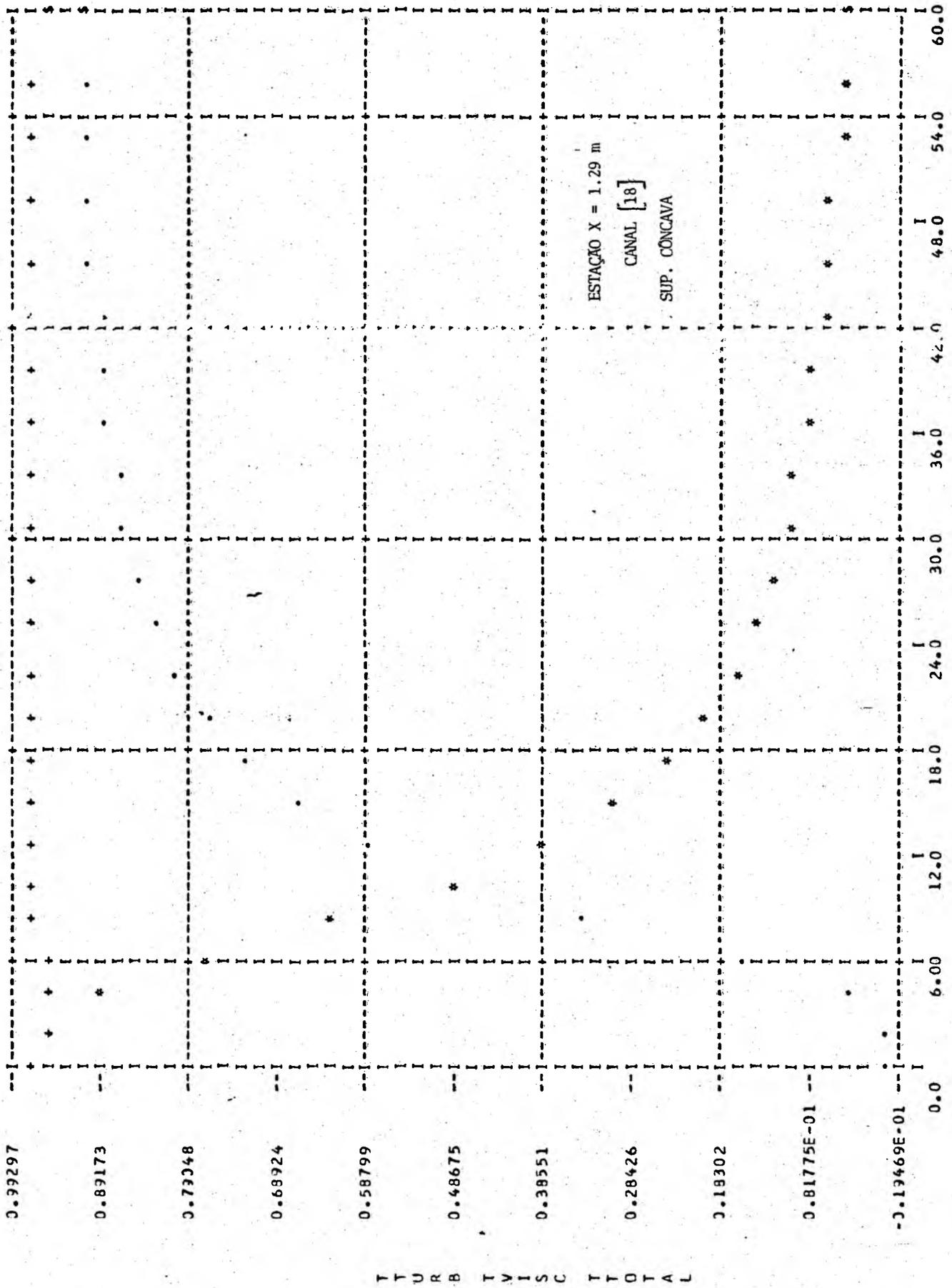
-0.19161E-01

ESTACÃO X = 1.29 m
CANAL [18]
SUP. CONCAVA

Y/DELTA

0.0 0.100E 00 0.200 0.300 0.400 0.500 0.600 0.700 0.800 0.900 1.00





0.99297

0.89173

0.79048

0.69924

0.58799

0.48675

0.38551

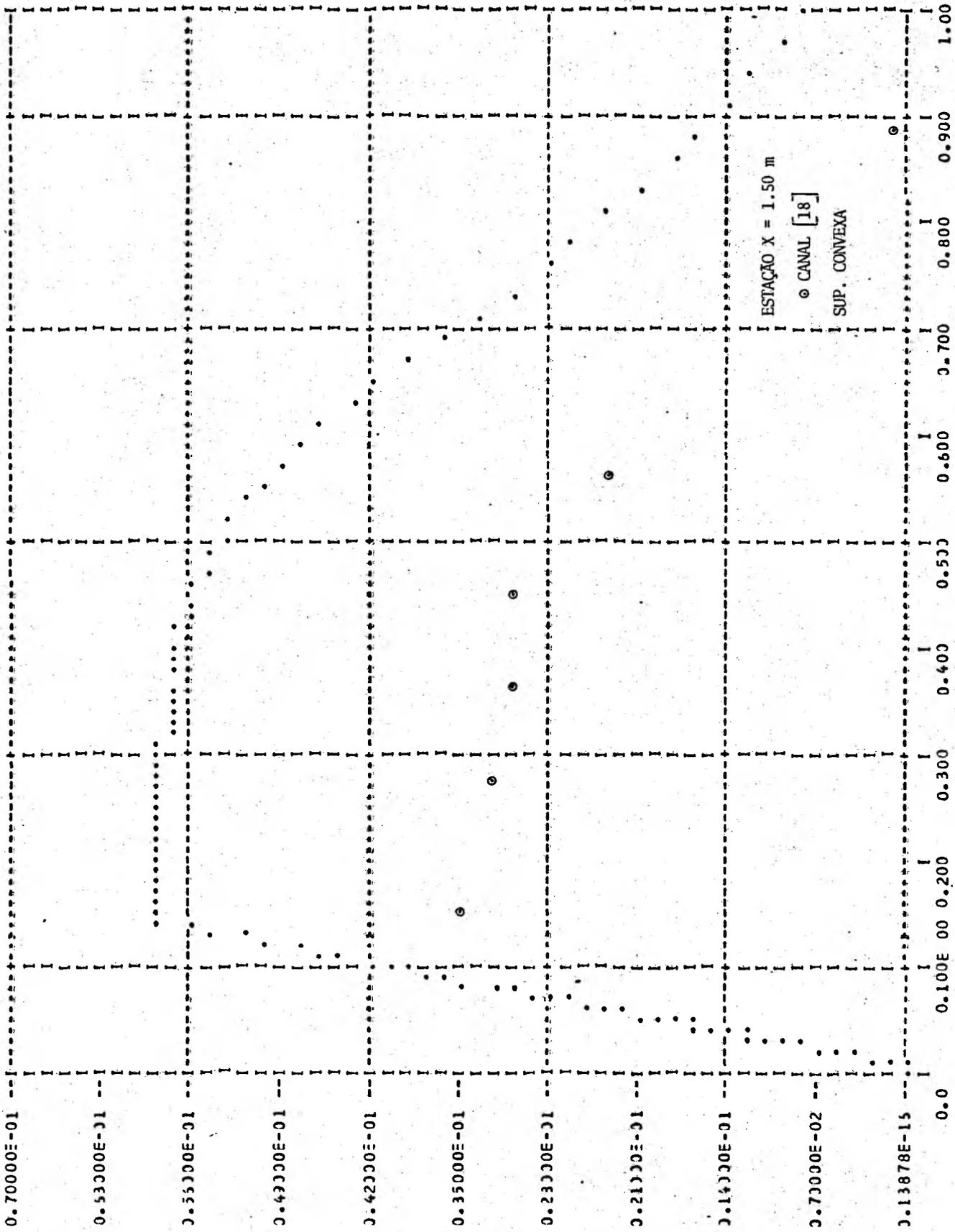
0.28426

0.18302

0.81775E-01

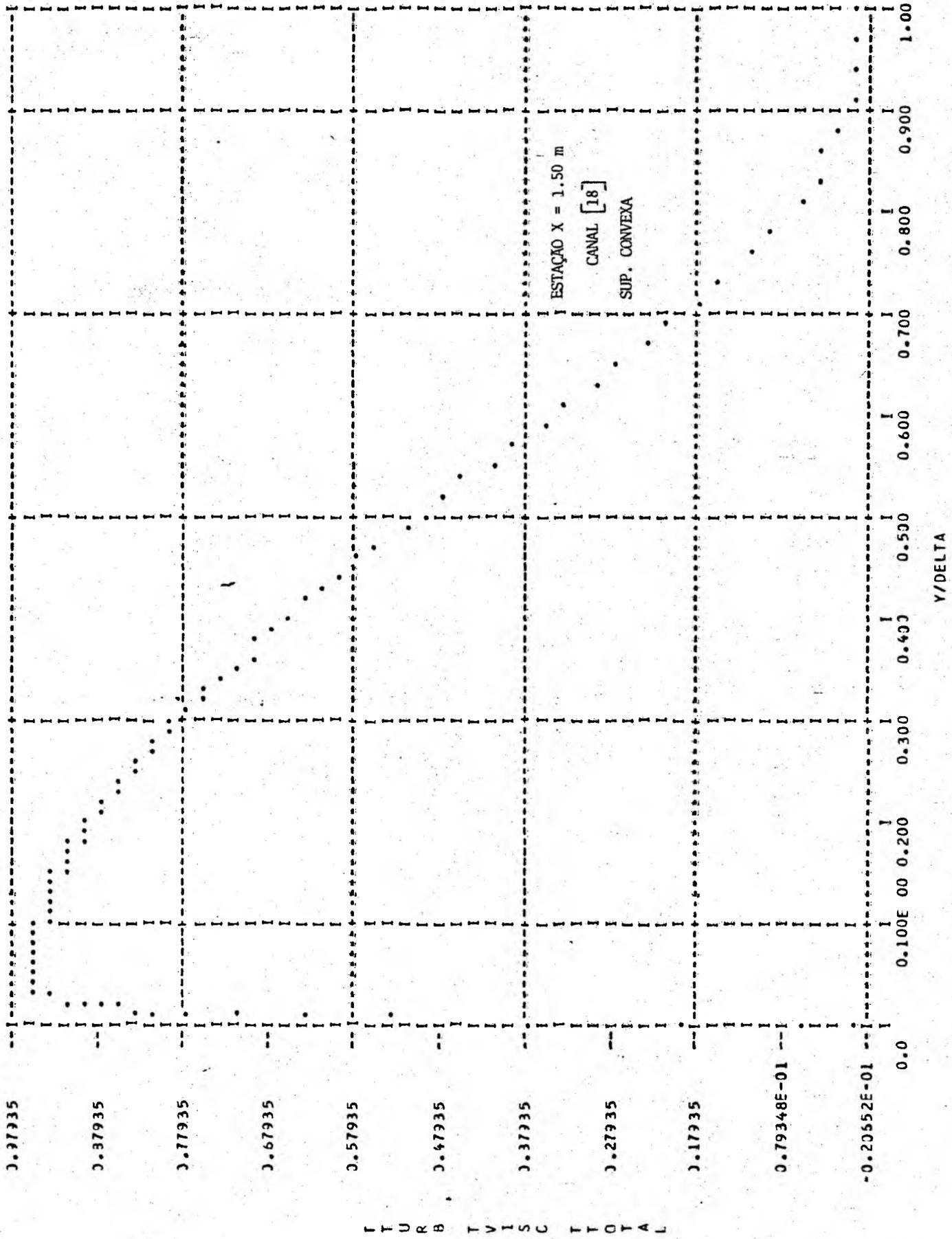
-0.19469E-01

T
T
U
R
B
T
V
I
S
C
T
T
O
T
A
L

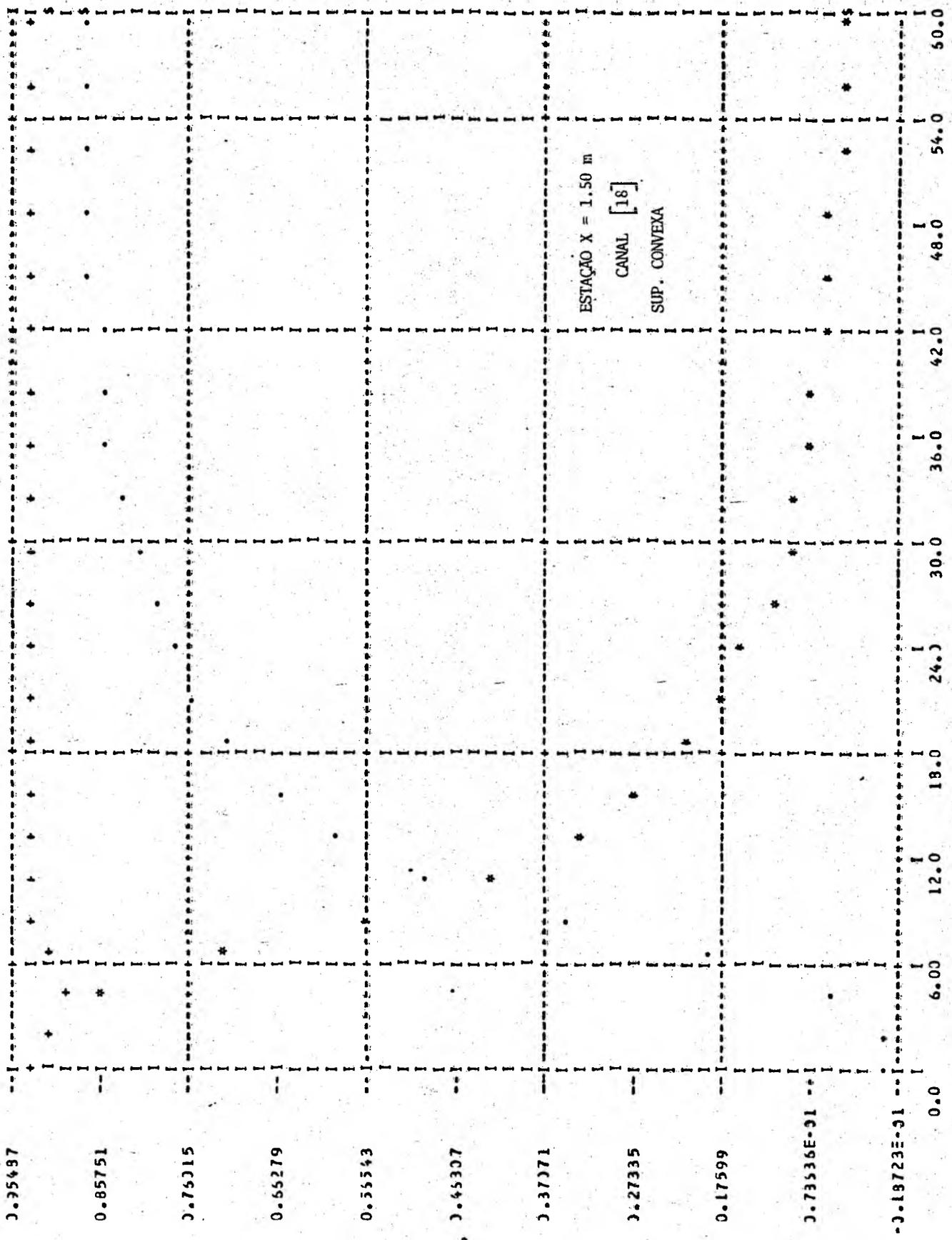


V I S C O S I D A D E

Y/DELTA



I T U R B T V I S C T T O T A L



0.95487

0.85751

0.75015

0.65279

0.55543

0.45307

0.37771

0.27335

0.17599

0.73536E-01

-0.18723E-01

0.0

6.00

12.0

18.0

24.0

30.0

36.0

42.0

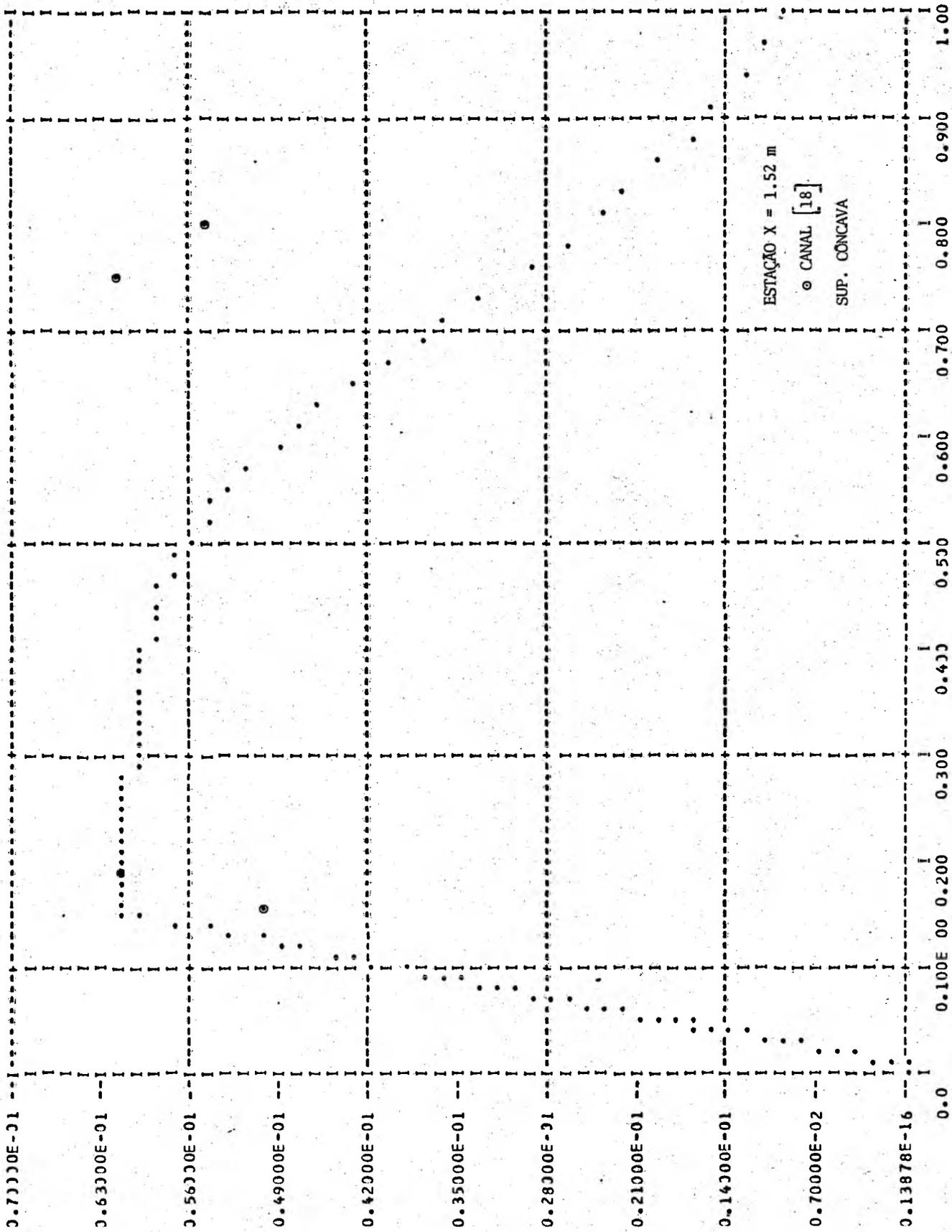
48.0

54.0

50.0

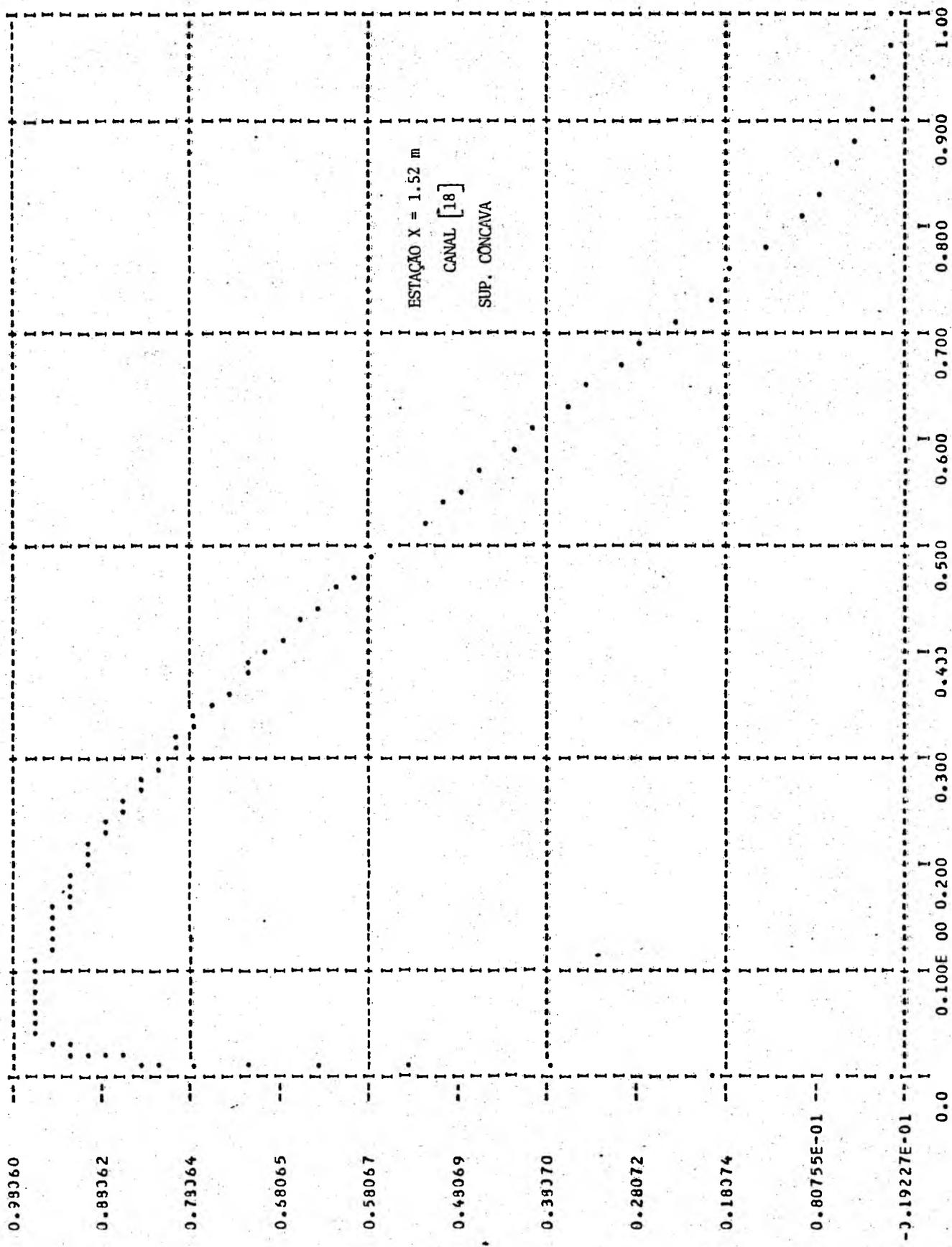
T
T
U
R
B
T
V
I
S
C
T
T
O
T
A
L

Y*U*STAR/VISC



Y/DELTA

V I S C O S I T U R R U B U L E N T A



Y/Delta

0.99060
0.89062
0.79064
0.58065
0.58067
0.49069
0.39070
0.28072
0.18074
0.8075E-01
-0.19227E-01
0.0 0.100E 00 0.200 0.300 0.400 0.500 0.600 0.700 0.800 0.900 1.00

T
T
U
R
B
T
V
I
S
C
T
T
O
T
A
L

0.96606

0.86756

0.76906

0.57056

0.57206

0.47356

0.37506

0.27656

0.17806

0.79558E-01

-0.13942E-01

0.0

6.00

12.00

18.00

24.00

30.00

36.00

42.00

48.00

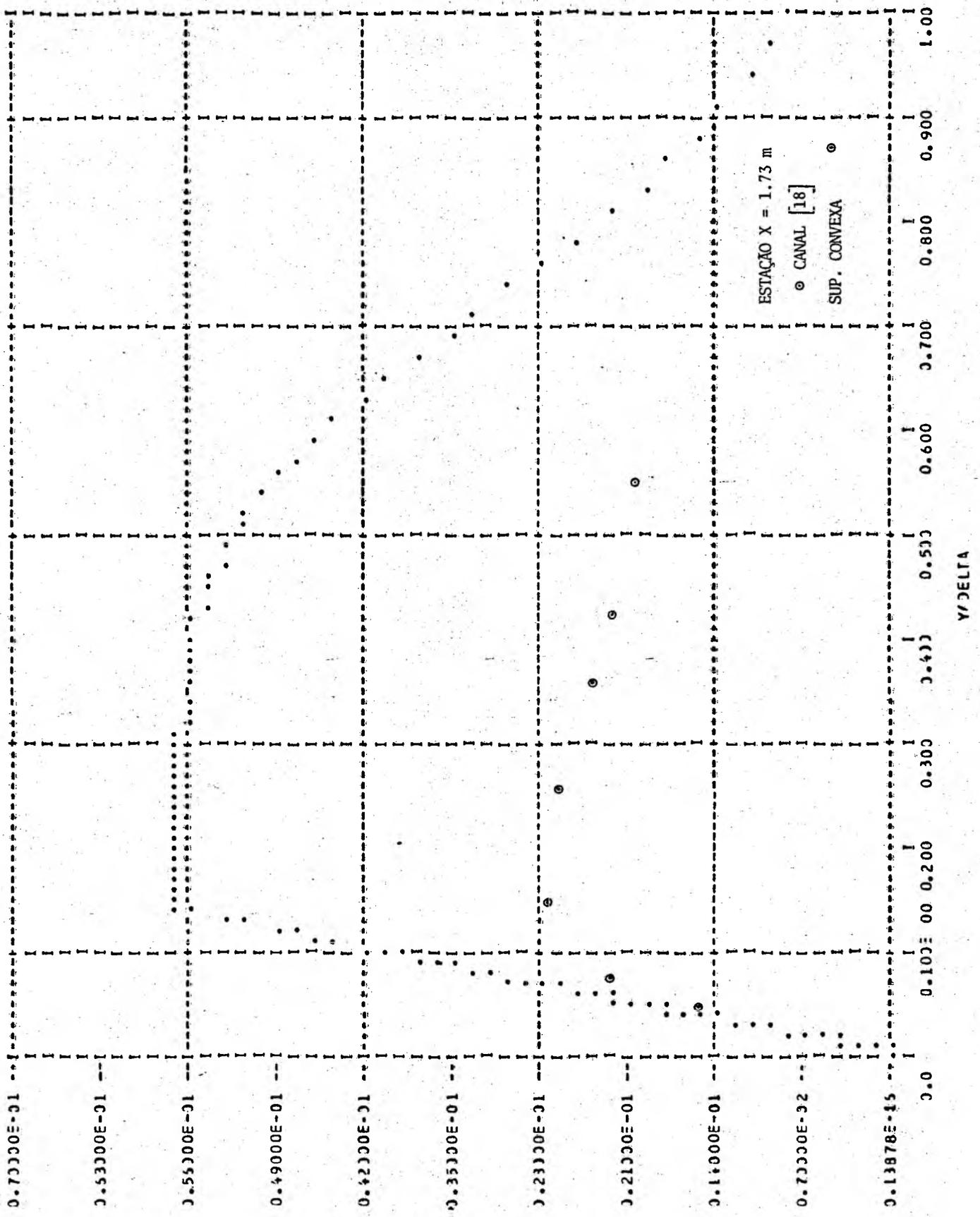
54.00

60.00

Y#USTAR/VISC

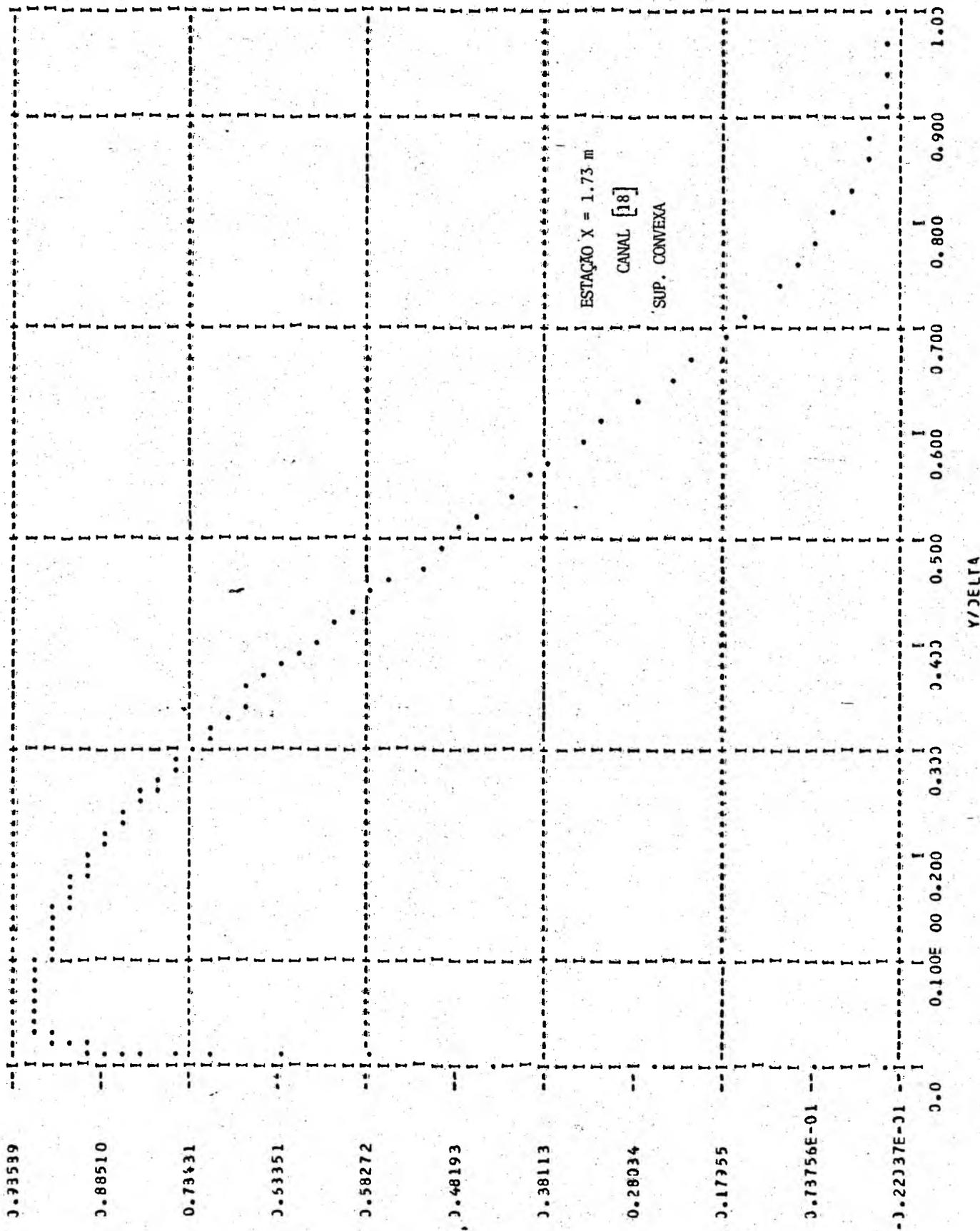
I T U R B T V I S C T T D T A L

ESTACAO X = 1.52 m
CANAL [18]
SUP. CONCAVA



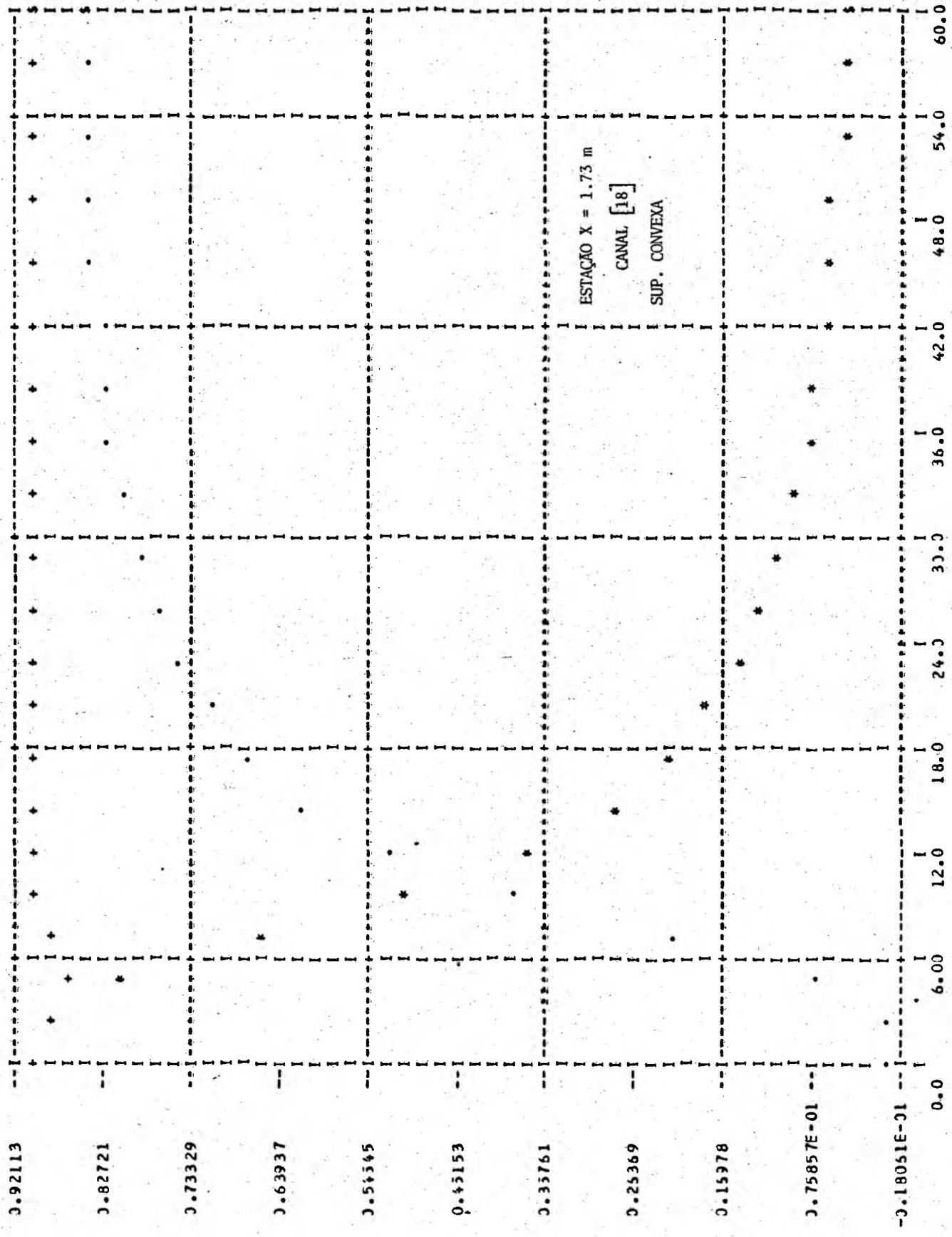
V I S C . T J R B U L E N F A

Y/DELTA



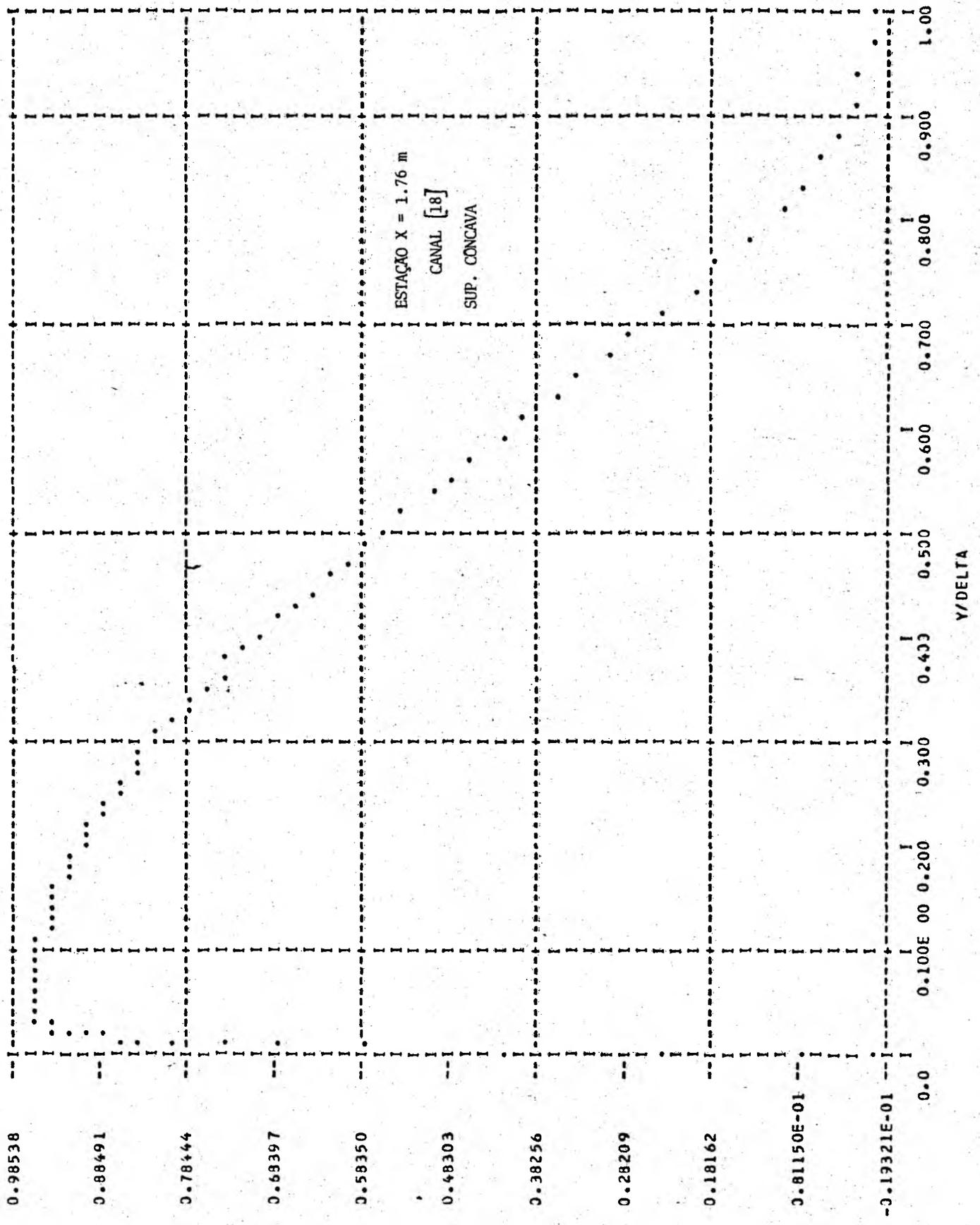
T T U R B T V I S C T T O F A L

T T U R B V I S C T T O T A L

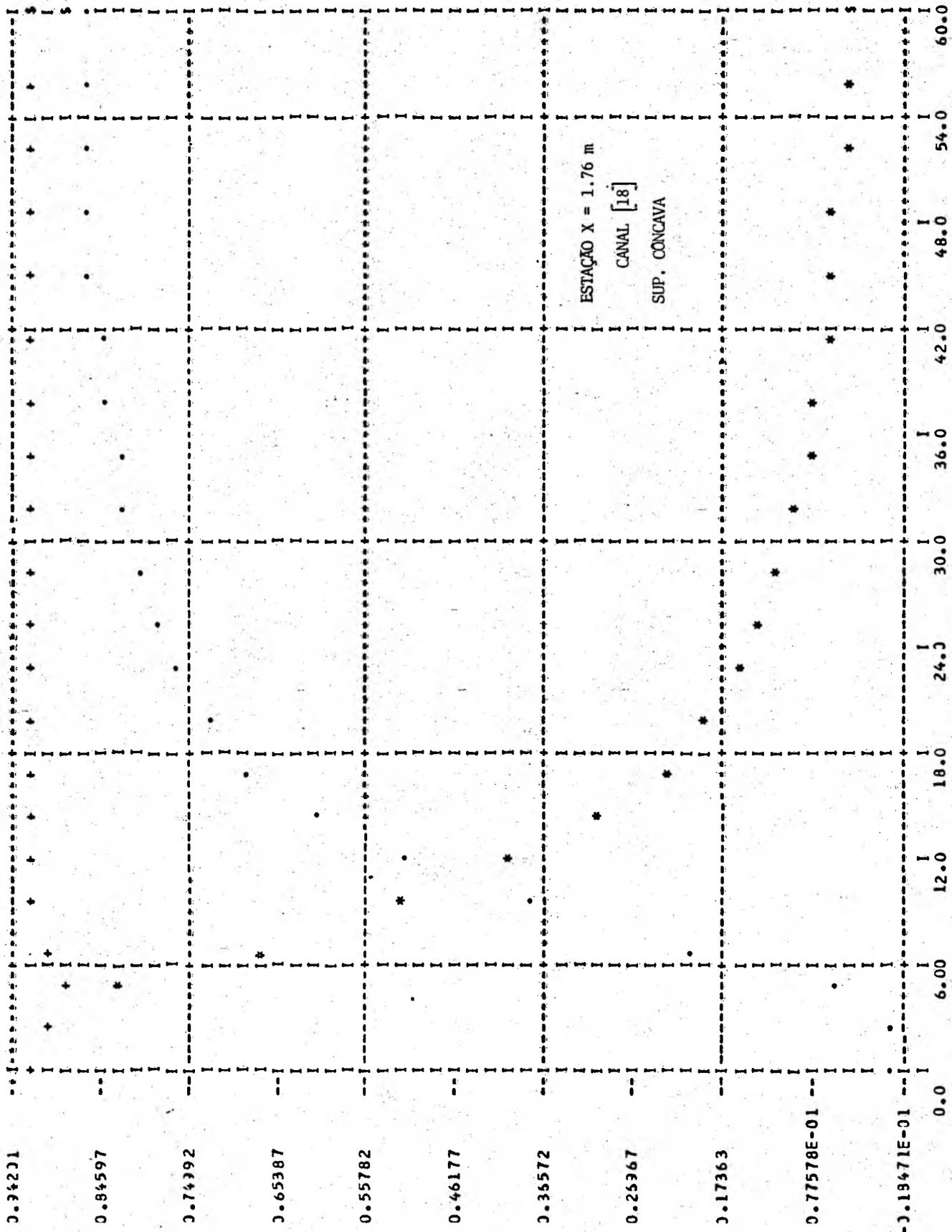


ESTACAO X = 1.73 m
CANAL [18]
SUP. CONVEXA

Y*USTAR/VISC

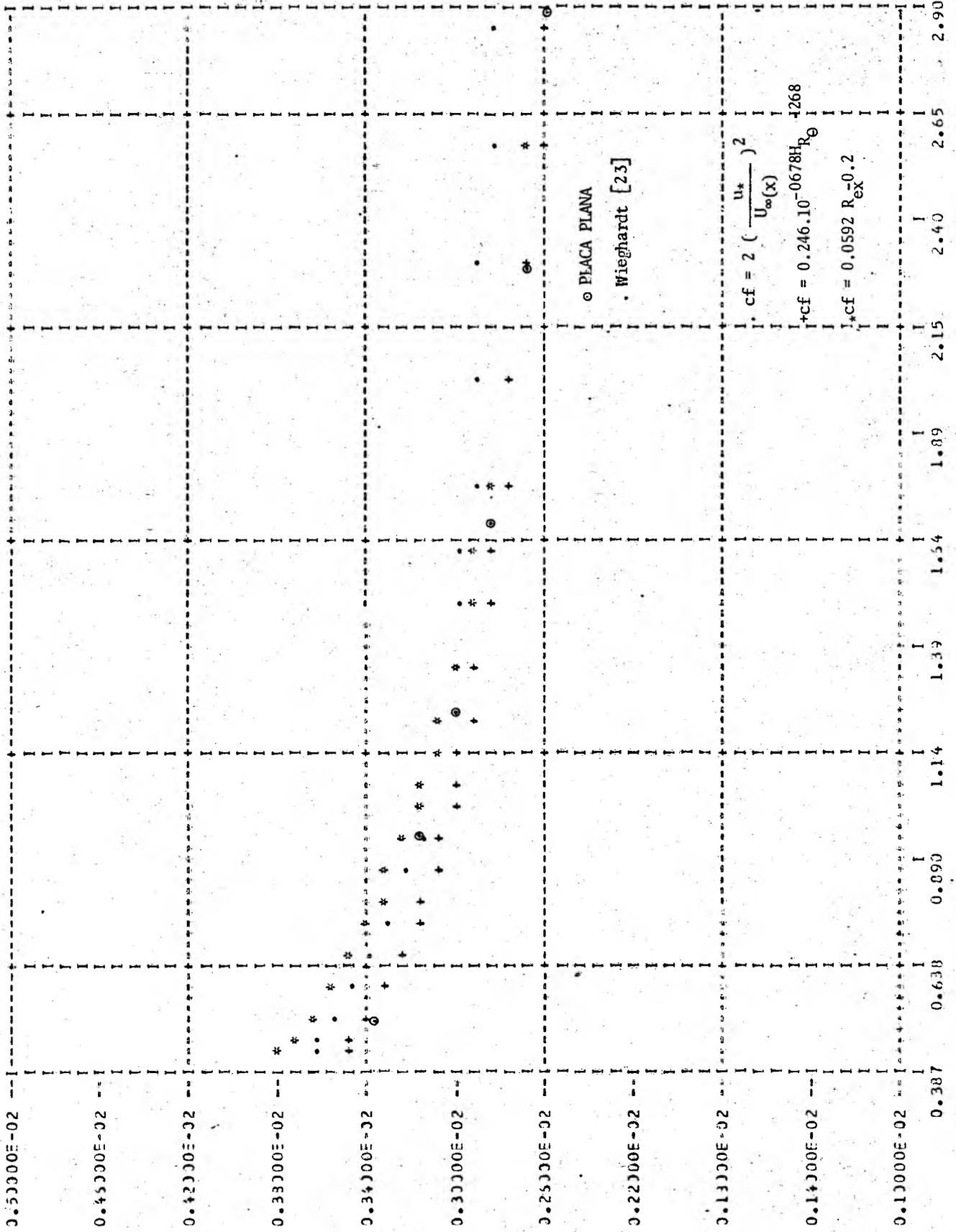


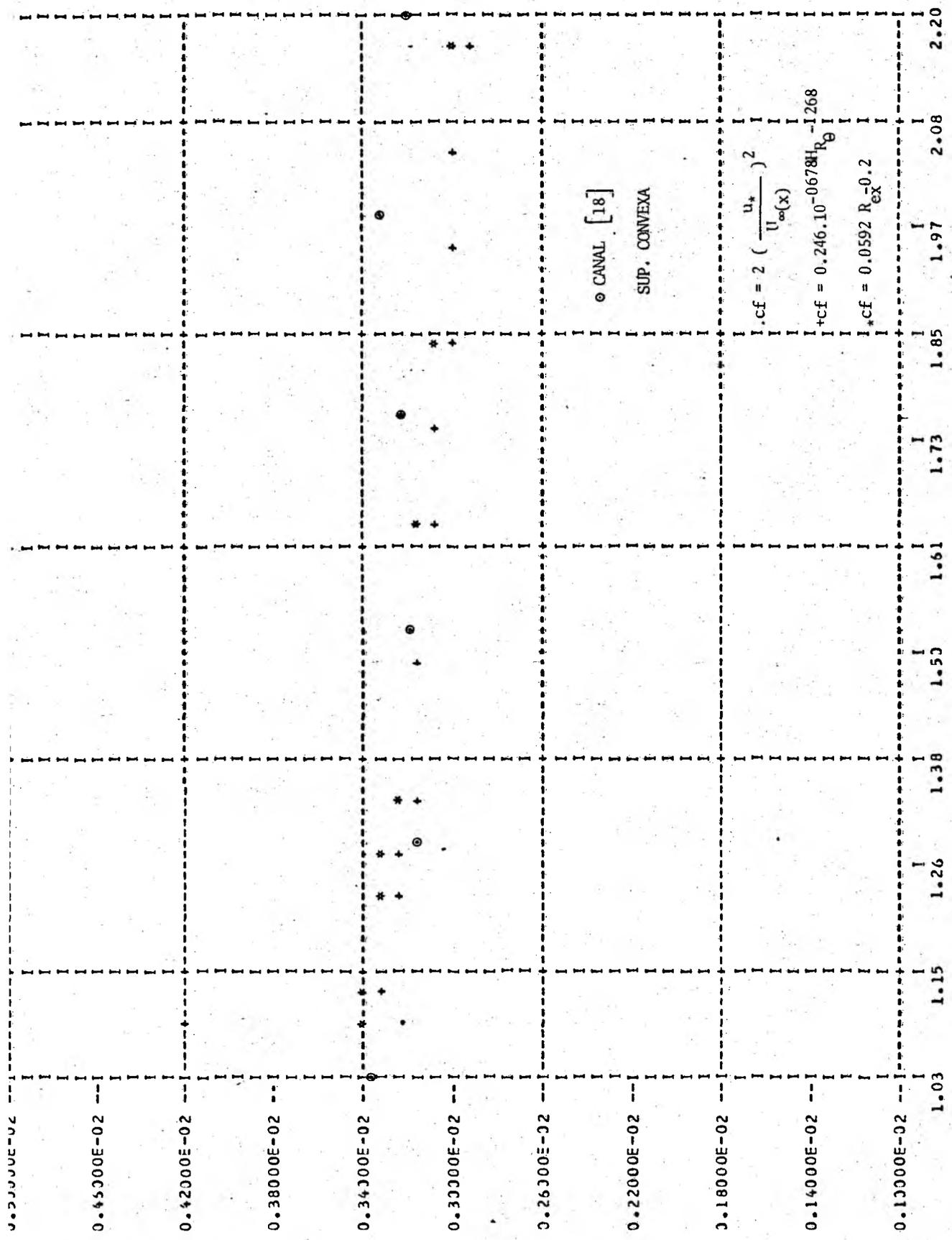
T T U R B T V I S C T T O T A L



T T U R B T V I S C T T O T A L

Y*USTAR/VISC





EM METROS