

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS À CONDUÇÃO DO
CALOR TRANSIENTE COM RADIAÇÃO E
CONVECÇÃO COMBINADAS

Dissertação submetida à Universidade
Federal de Santa Catarina para a obtenção
do Grau de Mestre em Engenharia.

MANOEL LUIZ GONZÁLEZ

Dezembro, 1978

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS À CONDUÇÃO DO
CALOR TRANSIENTE COM RADIAÇÃO E CONVECÇÃO COMBINADAS

MANOEL LUIZ GONZÁLEZ

Esta dissertação foi julgada para a obtenção
do título de MESTRE EM ENGENHARIA
na especialidade: Engenharia Mecânica, na área de Con-
centração: Termotécnica, e aprovada em sua forma fi-
nal pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. Sergio Colle, D. Sc. - Orientador

Prof. Arno Blass, Ph.D. - Coordenador

Apresentada perante a banca examinadora composta por:

Prof. Hyppolito do Valle Pereira Fº, Ph.D.

Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.

Prof. Narciso Angel Ramos Arroyo, M. Sc.

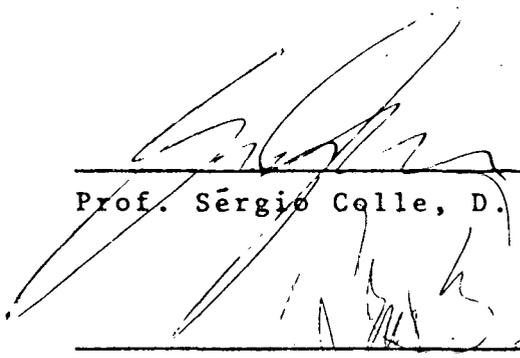
APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS À CONDUÇÃO DO
CALOR TRANSIENTE COM RADIAÇÃO E CONVECÇÃO COMBINADAS

MANOEL LUIZ GONZÁLEZ

Esta dissertação foi julgada para a obtenção
do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

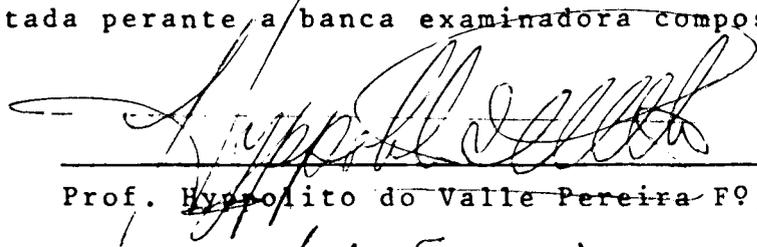
na Especialidade: Engenharia Mecânica, na área de
concentração: Termotécnica, e aprovada em sua for-
ma final pelo Curso de Pós-Graduação.



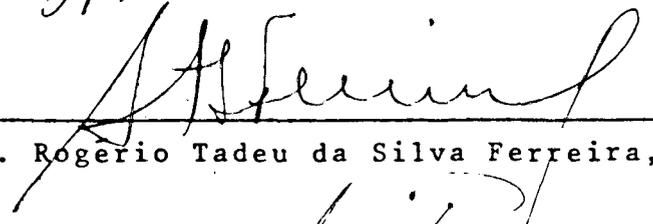
Prof. Sérgio Colle, D. Sc. - Orientador

Prof. Arno Blass, Ph.D. - Coordenador

Apresentada perante a banca examinadora composta por:



Prof. ~~Hypólito do Valle Pereira~~ F^o, Ph.D.



Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.



Prof. Narciso Ángel Ramos Arroyo, M. Sc.

Oferecimento:

*A minha esposa,
a minhas filhas,
a meus pais.*

AGRADECIMENTOS:

- a Universidade Federal de Santa Catarina na pessoa do Prof. Arno Blass, pela oportunidade proporcionada.

- ao Prof. Sérgio Colle, pela orientação.

- a Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul pelo apoio financeiro parcial.

- ao Centro de Processamento de Dados da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela disponibilidade de computador, sem a qual teria sido impossível concluir este trabalho.

- a todos os amigos e colegas, em especial os da Área de Termotécnica, que contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho.

- a meus pais, pelo apoio.

- a minha esposa e filhas, pela paciência e resignação.

S U M Á R I O

1 - INTRODUÇÃO	- 1
2 - FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS	- 7
3 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CONDUÇÃO DO CALOR TRANSIENTE COM O AUXÍLIO DO TEOREMA DE GREEN E DA FUNÇÃO DE GREEN FUNDAMENTAL	- 20
4 - ESQUEMA NUMÉRICO PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS	- 35
5 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CILINDRO	- 41
6 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO PRISMA	- 61
7 - ANÁLISE DOS RESULTADOS *	- 79
8 - CONCLUSÃO E SUGESTÕES	- 92
9 - BIBLIOGRAFIA	- 94
APÊNDICE I	- 96

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

FIGURA 2-1 : Geometria para o problema do cilindro	- 8
FIGURA 2-2 : Geometria para o problema do prisma	- 9
FIGURA 2-3 : Geometria para o fator de forma F	- 11
FIGURA 3-1 : Região regular no espaço-tempo	- 24
FIGURA 5-1 : Ângulos para o cálculo do fator de forma	- 42
FIGURA 5-2 : Comparação das soluções ($Bi=0.1;r=0.0$)	- 49
FIGURA 5-3 : Comparação das soluções ($Bi=0.1;r=1.0$)	- 49
FIGURA 5-4 : Comparação das soluções ($Bi=1.0;r=0.0$)	- 50
FIGURA 5-5 : Comparação das soluções ($Bi=1.0;r=1.0$)	- 50
FIGURA 5-6 : Comparação das soluções ($Bi=4.0;r=0.0$)	- 51
FIGURA 5-7 : Comparação das soluções ($Bi=4.0;r=1.0$)	- 51
FIGURA 5-8 : Energia dissipada Q/Q_0 para o cilindro com $Bi=0.1$	- 52
FIGURA 5-9 : Taxa de calor/taxa de calor inicial para o cilindro com $Bi=0.1$	- 52
FIGURA 5-10: Energia dissipada Q/Q_0 para o cilindro com $Bi=1.0$	- 53
FIGURA 5-11: Taxa de calor/taxa de calor inicial para o cilindro com $Bi=1.0$	- 53
FIGURA 5-12: Energia dissipada Q/Q_0 para o cilindro com $Bi=4.0$	- 54
FIGURA 5-13: Taxa de calor/taxa de calor inicial para o cilindro com $Bi=4.0$	- 54
FIGURA 5-14: Isotermas para o cilindro ($Fo=0.02$)	- 58
FIGURA 5-15: Isotermas para o cilindro ($Fo=0.2$)	- 59
FIGURA 5-16: Isotermas para o cilindro ($Fo=0.7$)	- 60

LISTA DE FIGURAS E TABELAS - CONTINUAÇÃO

FIGURA 6-1	: Concordância dos lados da seção do prisma.	- 62
FIGURA 6-2	: Comparação das soluções (próximo ao centro; $Bi=0.1$)	- 67
FIGURA 6-3	: Comparação das soluções (próximo ao canto; $Bi=0.1$)	- 67
FIGURA 6-4	: Comparação das soluções (próximo ao centro; $Bi=1.0$)	- 68
FIGURA 6-5	: Comparação das soluções (próximo ao canto; $Bi=1.0$)	- 68
FIGURA 6-6	: Comparação das soluções (próximo ao centro; $Bi=10.0$)	- 69
FIGURA 6-7	: Comparação das soluções (próximo ao canto; $Bi=10.0$)	- 69
FIGURA 6-8	: Energia dissipada Q/Q_0 para o prisma com $Bi=0.1$	- 70
FIGURA 6-9	: Taxa de calor/taxa de calor inicial para o prisma com $Bi=0.1$	- 70
FIGURA 6-10	: Energia dissipada Q/Q_0 para o prisma com $Bi=1.0$	- 71
FIGURA 6-11	: Taxa de calor/taxa de calor inicial para o prisma com $Bi=1.0$	- 71
FIGURA 6-12	: Energia dissipada Q/Q_0 para o prisma com $Bi=10.0$	- 72
FIGURA 6-13	: Taxa de calor/taxa de calor inicial para o prisma com $Bi=10.0$	- 72
FIGURA 6-14	: Isotermas para o prisma ($Fo=0.01$)	- 76
FIGURA 6-15	: Isotermas para o prisma ($Fo=0.05$)	- 77
FIGURA 6-16	: Isotermas para o prisma ($Fo=0.3$)	- 78
FIGURA A-1	: Geometria com o invólucro	- 97
FIGURA A-2	: Balanço térmico no elemento A_k	- 97
FIGURA A-3	: Geometria sem o invólucro	- 97
TABELA 5-I	: Resultados para o cilindro ($Fo=0.02$)	- 55
TABELA 5-II	: Resultados para o cilindro ($Fo=0.2$)	- 56
TABELA 5-III	: Resultados para o cilindro ($Fo=0.7$)	- 57
TABELA 6-I	: Resultados para o prisma ($Fo=0.01$)	- 73
TABELA 6-II	: Resultados para o prisma ($Fo=0.05$)	- 74
TABELA 6-III	: Resultados para o prisma ($Fo=0.3$)	- 75

S I M B O L O G I A

$Bi = \frac{h r_o^*}{k}$	- número de Biot
C	- calor específico
div	- operador divergente
{ E }	- vetor dos erros para o método de Newton-Raphson
$E_1(z)$	- integral exponencial de z
\tilde{e}_t	- vetor unitário na direção dos tempos
F	- fator de forma
F	- taxa de troca de calor
Fo	- número de Fourier
$g(\tilde{x}, t \tilde{x}_o, t_o)$	- função de Green com polo em (\tilde{x}_o, t_o)
grad	- operador gradiente
h	- coeficiente de troca de calor por convecção
h*	- distância da placa ao plano central do cilindro ou prisma
J_0, J_1	- funções de Bessel de ordem zero e um
k	- condutividade térmica
L	- operador condução de calor

L^*	- operador adjunto formal do operador condução do calor
$\langle L, u \rangle$	- ação de L sobre u
l^*	- semi-largura da placa
\tilde{n}	- vetor unitário normal exterior
Q	- calor dissipado
$q(\tilde{x}, t)$	- geração interna de calor
$Ri = \frac{\sigma \epsilon r_0^* T_\infty^{*3}}{k}$	- número de radiação
\mathbb{R}	- região adimensional correspondente a \mathbb{R}^*
\mathbb{R}^*	- região regular
$r = r^*/r_0^*$	- coordenada radial adimensional
r^*	- coordenada radial
r_0^*	- raio do cilindro
\mathbb{R}^n	- todo o espaço n -dimensional
S	- fronteira de \mathbb{R}
S^*	- fronteira de \mathbb{R}^*
$T = T^*/T_\infty^*$	- temperatura adimensional
T_0	- temperatura inicial, adimensional
T_p	- temperatura da placa, adimensional
T^*	- temperatura
T_0^*	- temperatura inicial
T_p^*	- temperatura da placa
T_∞^*	- temperatura do meio ambiente
$t = t^*\alpha/r_0^{*2}$	- tempo adimensional, ou número de Fourier
t^*	- tempo
V	- volume

$ W $	- matriz das derivadas para o método de Newton-Raphson
x	- abcissa, adimensional
x^*	- abcissa
x_0^*	- largura do prisma
\tilde{x}	- vetor n-dimensional
y	- ordenada, adimensional
y^*	- ordenada
y_0^*	- altura do prisma
α	- difusividade térmica
ΔS_j	- elemento de ordem j da fronteira
$\delta(\tilde{x} - \tilde{x}_0)$	- distribuição Delta de Dirac, com pólo em \tilde{x}_0
ϵ	- emissividade hemisférica total
θ	- coordenada angular
Θ	- diferença de temperatura adimensional
λ_n	- autovalores
ρ	- massa específica
σ	- constante de Stefan-Boltzmann
ϕ	- coordenada angular
∇^2	- operador Laplaciano sobre as coordenadas espaciais
$\frac{\partial T}{\partial n}$	- derivada parcial da temperatura em relação à normal exterior à superfície

R E S U M O

O presente trabalho trata da aplicação de equações integrais à solução de problemas bidimensionais de condução do calor transiente, em meios homogêneos e isotrópicos, sob condições de contorno de radiação e convecção. É apresentado o procedimento de obtenção da equação integral a partir da equação diferencial da condução do calor, com o auxílio do teorema de Green e da função de Green fundamental. É mostrado o desenvolvimento de um esquema numérico de solução que resulta em um sistema de equações não lineares, definidas no contorno da região em análise. O sistema de equações é resolvido pelo método de Newton - Raphson. O método é testado pela comparação com as soluções analíticas para uma região circular e para uma região retangular, sujeitas a convecção com coeficiente de troca de calor constante. São obtidos resultados para as mesmas regiões sujeitas a troca de calor por convecção com o ambiente e por radiação com uma placa isotérmica, para vários valores do número de Biot e do número de radiação.

A B S T R A C T

This work deals with the application of integral equations to the solution of transient heat conduction problems in homogeneous and isotropic media with radiative and convective boundary conditions.

It is presented the procedure to obtain an integral equation from the heat conduction differential equation, using the Green's theorem and the fundamental Green's function.

It is shown the development of a numerical method to solve the integral equation, which gives rise to a non-linear equation system. This system is solved by the method of Newton-Raphson.

The method is applied to an infinite circular cylinder and to an infinite rectangular prism, both subjected to a constant convective heat transfer coefficient. The results are compared with exact solutions, showing good agreement.

Results are obtained to the same solids subjected also to radiative heat exchange with an infinite isothermal strip and with the surroundings.

1 - INTRODUÇÃO

O problema não linear em condução do calor foi abordado sob o ponto de vista de equações integrais já em 1959, por Chambre, conforme Ozisik¹. O problema resolvido foi o da condução do calor em uma região semi-infinita, definida por $0 \leq x < \infty$, inicialmente a temperatura zero, e, para tempos maiores que zero, submetida a uma condição de fronteira em $x = 0$, dada pela lei da radiação de Stefan-Boltzmann. Chambre transformou a equação diferencial da condução do calor em uma equação integral não linear, singular, do tipo de Volterra, por meio da transformada de Laplace, usando a integral de convolução para a inversão do produto da transformada de Laplace de duas funções. Para remover a singularidade, Chambre efetuou uma mudança de variáveis de integração, e escrevendo a equação integral sob a forma de uma relação de recorrência, aplicou o método das substituições sucessivas para a obtenção do resultado numérico.

O uso prático da função de Green fundamental em conjunto com a segunda fórmula de Green para a solução de problemas de condução do calor foi provavelmente introduzido por Jawson em

1963, e bons resultados numéricos foram obtidos por Symm, porém a penas para a equação de Laplace, para vários problemas bidimensionais, conforme Chang, Kang e Chen².

Em 1964, Tolubinskiy³ formalizou um método de solução para problemas transientes de transferência de calor e massa sob a hipótese do conhecimento da função de Green fundamental. A apresentou um estudo de diversos problemas a valores no contorno para uma classe compreensiva de regiões, construindo uma equação integral. Mostrou também que esta equação integral pode ser resolvida pelo método das aproximações sucessivas e examinou sua convergência, porém sem apresentar resultados numéricos.

Em 1967, Crosbie e Viskanta⁴ resolveram o problema da condução do calor transiente unidimensional em uma placa submetida a aquecimento ou esfriamento por convecção e radiação combinadas. A equação diferencial da condução do calor foi transformada em uma equação integral não-linear do tipo de Volterra pelo uso da transformada de Laplace e do teorema da convolução. O método adotado para a solução da equação integral foi o método das aproximações sucessivas. As dificuldades encontradas com singularidades no decorrer das integrações numéricas foram resolvidas pelo uso da fórmula da soma de Poisson e pela aplicação da fórmula de integração de Gauss modificada. Os valores iniciais para o método das aproximações sucessivas foram obtidos pelo método das intersecções, e foi ressaltado que a convergência das aproximações depende fortemente desses valores iniciais. Diversos resultados numéricos mostrando boa concordância com resultados de soluções exama

tas foram apresentados.

Em 1973, Chang, Kang e Chen² apresentaram um estudo de aplicação da função de Green fundamental a problemas de condução do calor em meios isotrópicos e anisotrópicos. A função de Green fundamental foi definida (sic) de acordo com a teoria clássica do potencial e com a teoria das equações diferenciais parciais. Com o auxílio da fórmula de Green, a equação diferencial da condução do calor foi transformada em uma equação integral. As singularidades surgidas nessa equação integral foram isoladas com o auxílio de propriedades da função de Green fundamental. A equação integral foi particularizada para duas dimensões e problemas com temperatura prescrita na fronteira foram resolvidos para três geometrias: cilindro, prisma de seção quadrada e cilindro oco. Os resultados foram comparados, em casos cuja solução analítica é conhecida, mostrando boa concordância, exceto para intervalos de tempo muito pequenos.

Ainda em 1973, Shaw⁵ apresentou um método de solução de problemas de condução do calor em meios homogêneos e isotrópicos, com fontes de calor internas e condições de contorno arbitrárias, incluindo não-lineares. A equação diferencial da condução do calor foi transformada em uma equação integral pelo uso de soluções fundamentais e com o auxílio da fórmula de Green. Foi resolvido um problema específico, para um cilindro seccionado por um plano paralelo ao eixo longitudinal, submetido a fluxo de calor constante ou linear na face curva e a temperatura prescrita na face plana. Os resultados foram comparados com soluções analí

ticas para um sólido semi-infinito e para a parede infinita.

Em todos os trabalhos analisados a equação diferencial da condução do calor é transformada em uma equação integral. A vantagem obtida dessa transformação, reside no fato do problema ficar reduzido à determinação de valores desconhecidos apenas na fronteira da região em questão. Como pode ser visto na sequência deste trabalho, a equação integral incorpora em si todas as condições de contorno e inicial, e é resolvida, por um processo iterativo, apenas para pontos da fronteira. Os valores de temperatura para os pontos internos, pertencentes à região, são obtidos por integração numérica, fazendo uso da solução explícita obtida pela fórmula de Green.

Em relação aos métodos numéricos usuais de solução de problemas de condução do calor, por exemplo: diferenças finitas, o método integral apresenta a vantagem de ser resolvido em um número de pontos bem menor. Tome-se, como exemplo, o problema bidimensional de um prisma longo de seção quadrada. A divisão dos lados do quadrado em duas partes, gera uma malha de nove pontos na região, onde atuam os métodos usuais, mas gera oito pontos na fronteira, onde se aplica o método integral. A divisão dos lados do quadrado em quatro partes gera vinte e cinco pontos na região, mas apenas dezesseis pontos na fronteira. A divisão dos lados em oito partes gera oitenta e um pontos na região, mas apenas trinta e dois pontos na fronteira. Isto indica que quanto mais fina for a malha de pontos, maior será a diferença entre o número de equações necessárias aos métodos usuais e ao presente método. Este

fato é particularmente influente em geometrias complicadas².

Sob o ponto de vista de precisão, o método integral só apresenta discrepâncias para intervalos de tempo muito pequenos, requerendo, nesses casos, soluções assintóticas. Porém, nessas condições, a solução pelos métodos numéricos usuais também é difícil². Outras discrepâncias são também introduzidas quando a fronteira da região em análise contiver cantos vivos, ou se a condição de contorno apresentar descontinuidades. Estas discrepâncias podem ser reduzidas pelo "arredondamento" dos cantos⁶ ou pelo uso da função de Green incompleta, quando a mesma for disponível².

Embora a teoria do uso da função de Green fundamental na solução de problemas de condução do calor tenha sido bem desenvolvida nos trabalhos analisados, a aplicação prática da mesma restringiu-se a problemas simples, unidimensionais ou bidimensionais, com condições de contorno lineares. Apenas no trabalho de Chang² foi analisada uma geometria com presença de cantos (prisma longo de seção quadrada), porém sob condições de temperatura prescrita na fronteira.

No presente trabalho, o método de equações integrais é aplicado a problemas de condução do calor em duas geometrias - um cilindro de seção circular e um prisma de seção retangular - sob condições de contorno de convecção e radiação combinadas. Essa aplicação tem por objetivos verificar a convergência do método de equações integrais para problemas não-lineares, preconizada mas não testada por Chang² e Shaw⁵, e verificar a influência da

troca de calor por radiação com corpos vizinhos e com o meio en
volvente com grandes diferenças de temperatura, caso em que a hi
pótese da linearização da radiação através de um coeficiente de
convecção equivalente não é aceita.

As geometrias analisadas foram escolhidas por serem
usuais na prática. Além disso, praticamente qualquer geometria po
de ser obtida pela combinação de seções circulares com seções re
tas, com ou sem a presença de cantos vivos.

O método de equações integrais é aplicado também ao
problema da condução do calor com condições de contorno lineares,
mais exatamente, convecção com coeficiente de transferência de ca
lor constante. Tal aplicação permite uma boa avaliação dos resul
tados do método de equações integrais, pois a solução analítica
para esse tipo de problema é disponível, tanto para o caso do ci
lindro de seção circular⁹ como para o caso do prisma de seção re
tangular¹⁰.

2 - FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS

Neste trabalho, são resolvidos problemas de condução do calor transiente em um cilindro longo de seção circular e em um prisma longo de seção retangular submetidos a troca de calor por convecção com o meio ambiente e por radiação com uma placa isotérmica e com o meio ambiente. As geometrias dos dois problemas são mostradas na figura 2-1 e 2-2.

Ambos os problemas são resolvidos sob as seguintes hipóteses:

- a) o material que constitui os sólidos é isotrópico e homogêneo;
- b) os sólidos são suficientemente longos para que a influência das extremidades possa ser desprezada, bem como a condução axial; com isto, o problema se torna bidimensional;
- c) as propriedades físicas do material são constantes;
- d) os sólidos não possuem fontes internas de calor;
- e) a troca de calor por convecção com o meio ambiente se dá com coeficiente de troca de calor por convecção constante;

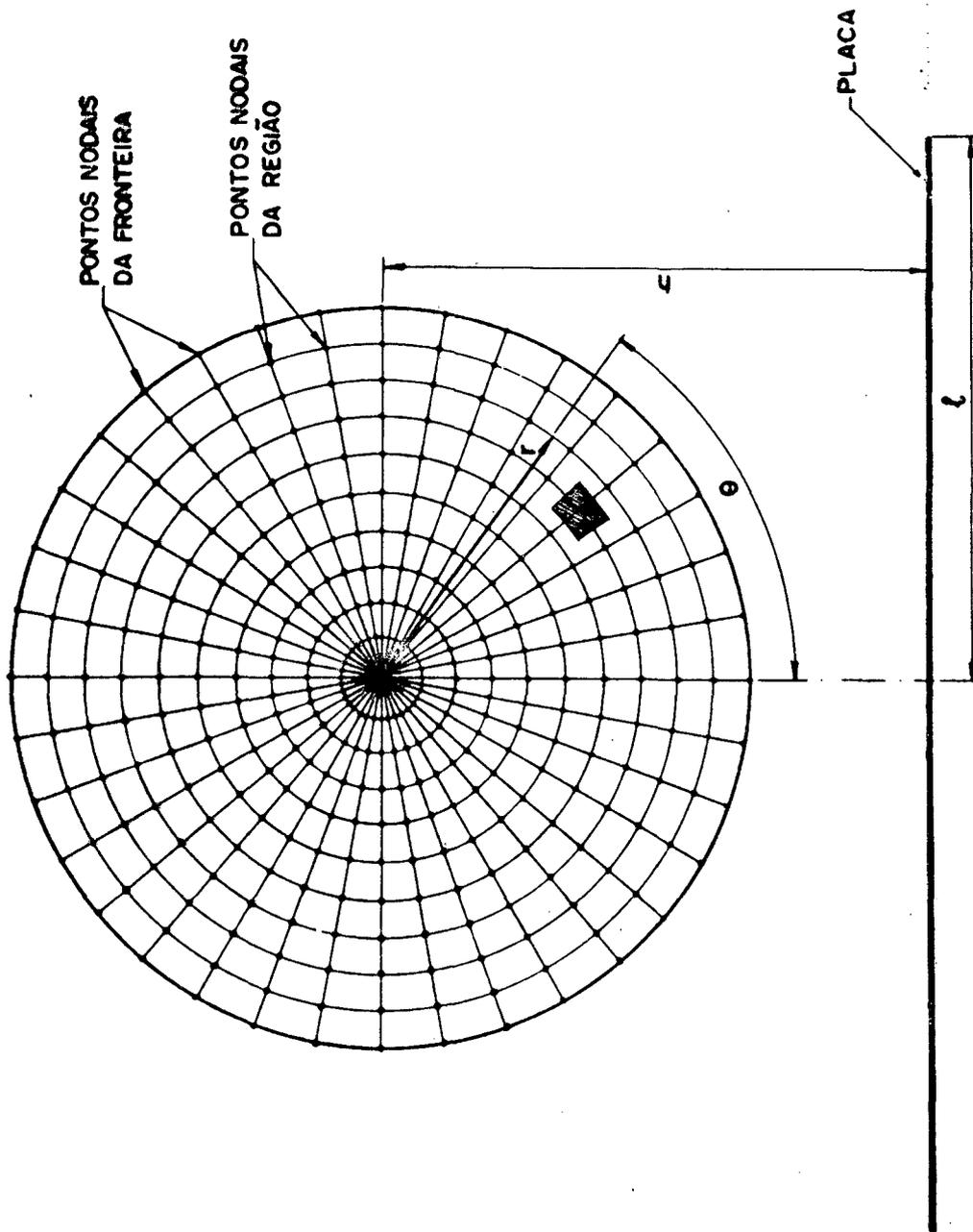


FIGURA 2-1 : GEOMETRIA PARA O PROBLEMA DO CILINDRO

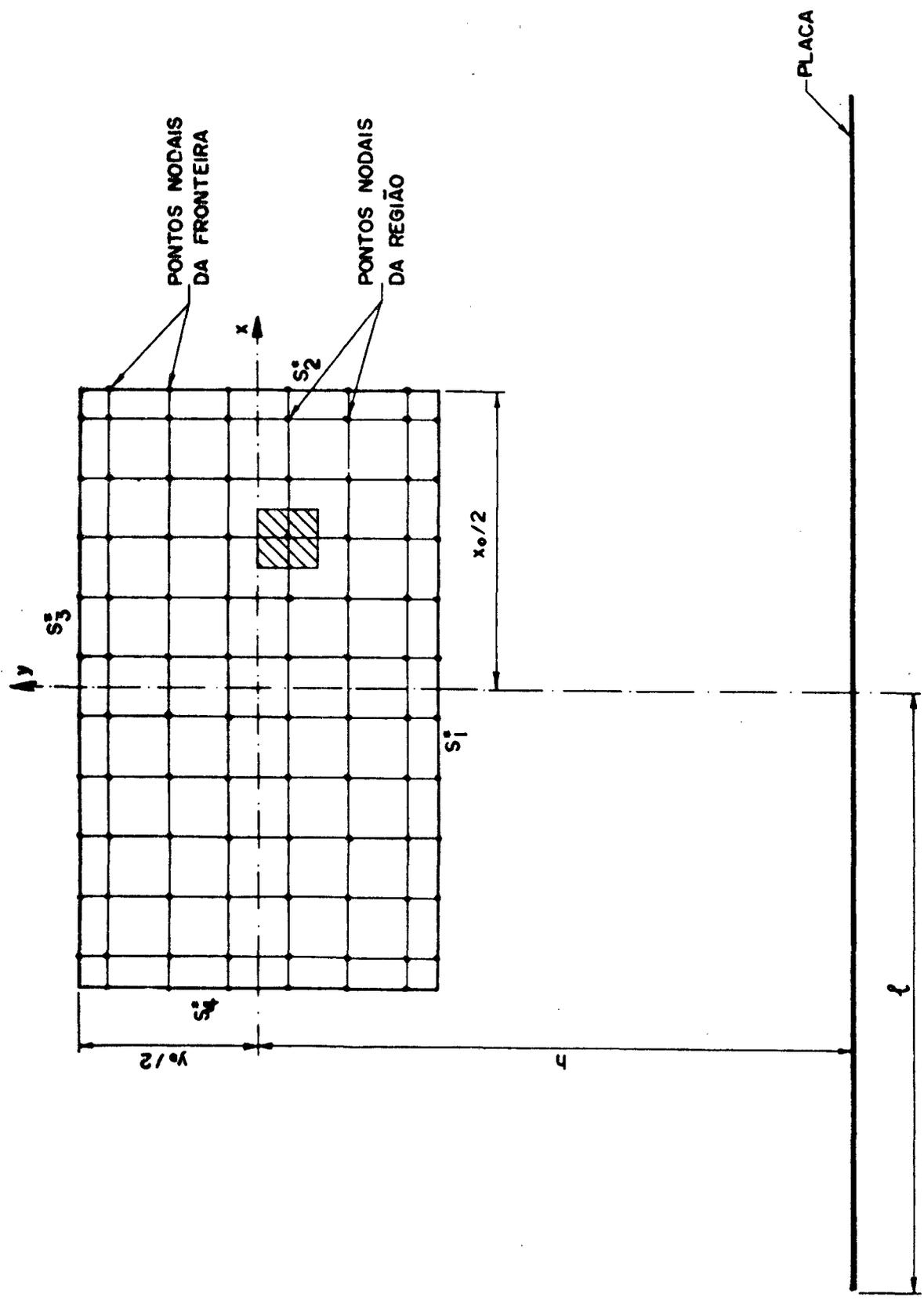


FIGURA 2-2: GEOMETRIA PARA O PROBLEMA DO PRISMA

f) a troca de calor por radiação com a placa isotérmica se dá de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann, com o fator de forma F entre a placa e um elemento da superfície do sólido, ΔS_j ;

g) a troca de calor por radiação com o ambiente se dá também de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann, mas com fator de forma $(1-F)$ (ver Apêndice I).

A figura 2-3 mostra a geometria para o cálculo do fator de forma.

A equação diferencial da condução de calor para o cilindro, sob as hipóteses consideradas, escrita em coordenadas polares, é dada por¹¹.

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (2-1a)$$

definida em

$$R^* = \begin{cases} 0 \leq r^* \leq r_o^* \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}, \quad t^* > 0 \quad (2-1b)$$

onde

$$T^* \equiv T^*(r^*, \theta, t^*) \quad (2-1c)$$

A condição inicial para o problema é dada por

$$T^*(r^*, \theta, 0) = T_o^* \quad (2-2)$$

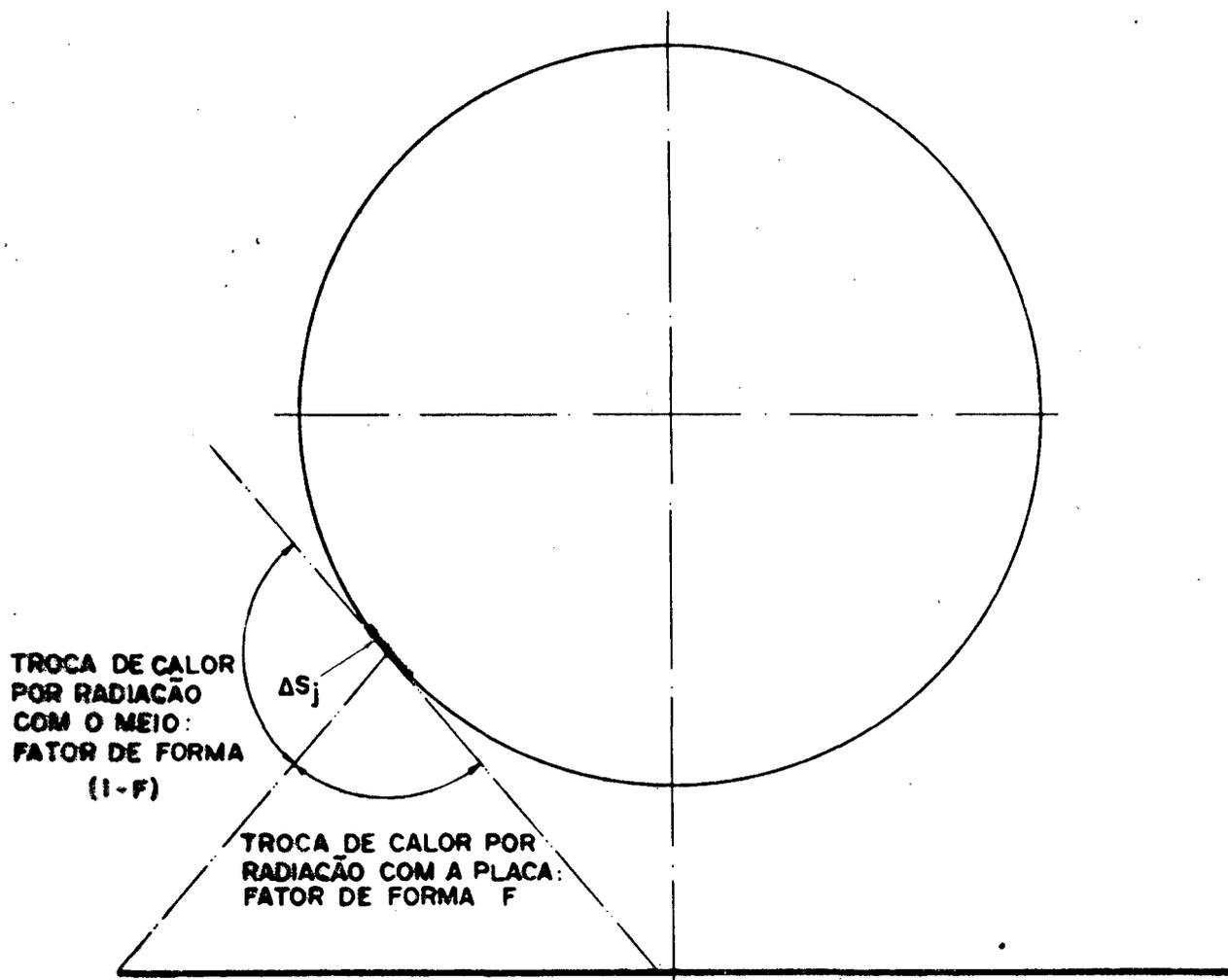


FIGURA 2-3 : GEOMETRIA PARA O FATOR DE FORMA F

constante em toda a região R^* , para $t^* = 0$

A troca de calor por radiação e convecção na superfície do cilindro fornece a condição de contorno (ver Apêndice I):

$$k \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^* = r_o^*} = -h(T^* - T_{\infty}^*) - \sigma \epsilon [T^{*4} - F_p T_p^{*4} - (1-F) T_{\infty}^{*4}] \quad (2-3a)$$

onde h é o coeficiente de troca de calor por convecção. O termo $(1-F) T_{\infty}^{*4}$ representa o calor trocado por radiação com o meio ambiente. A condição de contorno é definida em:

$$S^* = \begin{cases} r^* = r_o^* \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}, \quad t^* > 0 \quad (2-3b)$$

Assim, as expressões (2-1), (2-2) e (2-3) definem o problema a valores no contorno para a condução do calor transiente no cilindro. É necessário ressaltar que ϵ é obrigatoriamente igual a unidade (ver Apêndice I).

Para fácil generalização de resultados, é conveniente colocar o problema em uma forma adimensional. Para tanto, define-se as variáveis adimensionais:

$$r = \frac{r^*}{r_o^*}, \text{ coordenada radial adimensional} \quad (2-4)$$

$$t = \frac{t^* \alpha}{r_o^{*2}}, \text{ tempo adimensional, ou módulo de Fourier} \quad (2-5)$$

$$T = \frac{T^*}{T_{\infty}^*}, \text{ temperatura adimensional} \quad (2-6)$$

A temperatura adimensional é definida dessa forma por conveniência na adimensionalização da condição de contorno, como está mostrado adiante.

Para a troca de variáveis na equação e na condição de contorno, calcula-se:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) = \frac{1}{r r_0^*} \frac{\partial}{\partial r} \left[r r_0^* \frac{\partial}{\partial r} (T T_{\infty}^*) \frac{dr}{dr^*} \right] \frac{dr}{dr^*} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \frac{T_{\infty}^*}{r_0^{*2}} \quad (2-7)$$

$$\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} = \frac{1}{(r r_0^*)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T T_{\infty}^*) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{T_{\infty}^*}{r_0^{*2}} \quad (2-8)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (T T_{\infty}^*) \frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{T_{\infty}^* \alpha}{r_0^{*2}} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{T_{\infty}^*}{r_0^{*2}} \quad (2-9)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{\partial}{\partial r} (T T_{\infty}^*) \frac{dr}{dr^*} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{T_{\infty}^*}{r_0^*} \quad (2-10)$$

Substituindo (2-7) a (2-9) em (2-1a) e (2-4) a (2-6) em (2-1b), obtêm-se a equação diferencial da condução do calor transiente escrita em variáveis adimensionais:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-11a)$$

definida em

$$R = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}, \quad t > 0 \quad (2-11b)$$

onde

$$T \equiv T(r, \theta, t) \quad (2-11c)$$

Substituindo (2-6) na condição inicial (2-2), obtêm

-se:

$$T(r, \theta, 0) = T_0 \quad (2-12)$$

constante em toda região R em $t = 0$.

Substituindo (2-10) na condição de contorno (2-3a)

e (2-4) a (2-6) em (2-3b) obtêm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -Bi(T-1) - Ri[T^4 - F T_p^4 - (1-F)] \quad (2-13a)$$

definida em

$$S = \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}, t > 0 \quad (2-13b)$$

e onde

$$Bi = \frac{h r_0^*}{k} \quad (2-14)$$

é número de Biot e

$$Ri = \frac{\sigma \epsilon r_0^* T_\infty^{*3}}{k} \quad (2-15)$$

é o número de radiação para esfriamento⁴, e onde ϵ é igual a unidade. A definição desse parâmetro adimensional é possível graças a adimensionalização adotada para a temperatura, equação (2-6).

Ainda:

$$T_p = \frac{T_p^*}{T_\infty^*} \quad (2-16)$$

é a temperatura adimensional da placa.

Assim, o problema a valores no contorno da condução do calor transiente no cilindro, escrito em variáveis adimensionais é definido pelas expressões (2-11), (2-12) e (2-13).

A equação diferencial da condução do calor para o prisma sob as hipóteses consideradas, escrita em coordenadas cartesianas, é dada por¹¹:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (2-17a)$$

definida em

$$R^* = \begin{cases} -x_o^*/2 \leq x \leq x_o^*/2 \\ -y_o^*/2 \leq y < y_o^*/2 \end{cases}, \quad t^* > 0 \quad (2-17b)$$

onde

$$T^* \equiv T^* (x^*, y^*, t^*) \quad (2-17c)$$

A condição inicial para o problema é dada por:

$$T^* (x^*, y^*, 0) = T_o^* \quad (2-18)$$

constante em toda a região R^* para $t^* = 0$.

A troca de calor por radiação e convecção na superfície do prisma dá a condição de contorno:

$$k \left. \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right|_{S^*} = -h (T^* - T_{\infty}^*) - \sigma \epsilon [T^{*4} - F T_p^{*4} - (1-F) T_{\infty}^{*4}] \quad (2-19a)$$

onde $\partial T^*/\partial n^*$ é a derivada da temperatura na direção da normal exterior a superfície, em cada ponto. Essa derivada pode ser identificada ao longo das superfícies do prisma por:

$$\frac{\partial T^*}{\partial n^*} = - \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad \text{em} \quad S_1^* = \begin{cases} -x_0^*/2 < x^* < x_0^*/2 \\ y^* = -y_0^*/2 \end{cases} \quad (2-19b)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial n^*} = \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad \text{em} \quad S_2^* = \begin{cases} x^* = x_0^*/2 \\ -y_0^*/2 < y^* < y_0^*/2 \end{cases} \quad (2-19c)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial n^*} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad \text{em} \quad S_3^* = \begin{cases} -x_0^*/2 \leq x^* \leq x_0^*/2 \\ y^* = y_0^*/2 \end{cases} \quad (2-19d)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial n^*} = - \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad \text{em} \quad S_4^* = \begin{cases} x^* = -x_0^*/2 \\ -y_0^*/2 \leq y^* < y_0^*/2 \end{cases} \quad (2-19e)$$

Assim, as expressões (2-17), (2-18) e (2-19) definem o problema a valores no contorno para a condução do calor transiente no prisma. Aqui também é obrigatório que ϵ seja igual a unidade.

Para fácil generalização dos resultados, é conveniente colocar o problema em uma forma adimensional. Para tanto, de

fine-se as variáveis dimensionais:

$$x = \frac{x^*}{x_0^*} = \text{abscissa dimensional} \quad (2-20a)$$

$$y = \frac{y^*}{x_0^*} = \text{ordenada dimensional} \quad (2-20b)$$

$$t = \frac{t^* \alpha}{x_0^{*2}} = \text{tempo dimensional, ou módulo de Fourier} \quad (2-21)$$

$$T = \frac{T^*}{T_\infty^*} = \text{temperatura dimensional} \quad (2-22)$$

Para a troca de variáveis na equação e na condição de contorno, calcula-se:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (T - T_\infty^*) \frac{dx}{dx^*} \right] \frac{dx}{dx^*} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{T_\infty^*}{x_0^{*2}} \quad (2-23)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} (T - T_\infty^*) \frac{dy}{dy^*} \right] \frac{dy}{dy^*} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{T_\infty^*}{x_0^{*2}} \quad (2-24)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (T - T_\infty^*) \frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{T_\infty^* \alpha}{x_0^{*2}} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{T_\infty^*}{x_0^{*2}} \quad (2-25)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial n^*} = \frac{\partial}{\partial n} (T - T_\infty^*) \frac{dn}{dn^*} = \frac{\partial T}{\partial n} \frac{T_\infty^*}{x_0^{*2}} \quad (2-26)$$

Substituindo (2-23) a (2-25) em (2-17a) e (2-20) a (2-22) em (2-17b) obtêm-se a equação diferencial da condução do calor transiente dimensional, escrita em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-27a)$$

definida em

$$R = \begin{cases} - 1/2 \leq x \leq 1/2 \\ - y_0/2 \leq y \leq y_0/2 \end{cases}, \quad t > 0 \quad (2-27b)$$

onde $y_0 = y_0^*/x_0^*$, e:

$$T \equiv T(x, y, t). \quad (2-27c)$$

Substituindo (2-22) na condição inicial (2-18), ob-
tém-se:

$$T(x, y, 0) = T_0$$

constante em toda a região R em $t=0$

Substituindo (2-26) na condição de contorno (2-19a)
obtém-se:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = - Bi (T-1) - Ri [T^4 - FT_p^4 - (1-F)] \quad (2-29a)$$

onde $\partial T/\partial n$ é a derivada da temperatura adimensional na direção normal a superfície em cada ponto. Fazendo uso de (2-20) a (2-22) em (2-19b) a (2-19e), pode-se identificar essa derivada ao longo das superfícies do prisma por:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = - \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{em } S_1 = \begin{cases} - 1/2 < x < 1/2 \\ y = - y_0/2 \end{cases} \quad (2-29b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{em } S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = 1/2 \\ - y_0/2 < y < y_0/2 \end{array} \right. \quad (2-29c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{em } S_3 = \left\{ \begin{array}{l} - 1/2 \leq x \leq 1/2 \\ y = y_0/2 \end{array} \right. \quad (2-29d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = - \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{em } S_4 = \left\{ \begin{array}{l} x = - 1/2 \\ - y_0/2 < y < y_0/2 \end{array} \right. \quad (2-29e)$$

Nos cantos do prisma, a derivada normal da temperatura apresenta uma descontinuidade. Tal fato é examinado adiante.

Na condição de contorno (2-29a),

$$Bi = \frac{h x_0^*}{k} \quad (2-30)$$

é o número de Biot e

$$Ri = \frac{\sigma \epsilon x_0^* T_\infty^{*3}}{k} \quad (2-31)$$

é o número de Radiação para o esfriamento⁴, e onde ϵ é igual a unidade. Ainda:

$$T_p = \frac{T_p^*}{T_\infty^*} \quad (2-32)$$

é a temperatura adimensional da placa.

Assim, o problema a valores no contorno para a condução do calor transiente no prisma, escrito em variáveis adimensionais, é definido pelas expressões (2-27), (2-28) e (2-29).

3 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CONDUÇÃO DO CALOR TRANSIENTE
COM O AUXÍLIO DO TEOREMA DE GREEN E DA FUNÇÃO
DE GREEN FUNDAMENTAL

A solução de problemas a valores no contorno para a condução do calor transiente pode ser obtida por diversos métodos, analíticos e numéricos. Entre os métodos de solução analíticos pode-se citar a separação de variáveis, o uso de integrais particulares, a transformada de Laplace, as soluções combinadas por superposição ou de Duhamel, a transformação de variáveis¹², e a transformação integral¹. Entre os métodos numéricos pode-se citar o das diferenças finitas, em suas diversas formulações¹² e o método mais recente dos elementos finitos.

Porém, todos os métodos citados sofrem grandes limitações quando as condições de contorno são do tipo de (2-3a) ou (2-19a), isto é, não lineares. Nesse caso, os métodos analíticos citados não podem ser usados e os métodos numéricos são limitados pela generalização da geometria.

Como está mostrado neste capítulo, o método integral não sofre limitações devido a não-linearidade das condições de contorno. Porém, essa não-linearidade provoca o aparecimento de expressões complicadas, que só podem ser integradas numericamente¹.

Para a obtenção da solução dos problemas de condução do calor propostos, necessita-se do teorema de Green para o operador da condução do calor e da solução fundamental, ou função de Green fundamental, para a equação diferencial da condução do calor.

O operador da condução do calor é definido por⁷:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \quad (3-1)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3-2)$$

para duas dimensões em coordenadas cartesianas, ou

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3-3)$$

para duas dimensões em coordenadas polares.

O adjunto formal do operador condução do calor é dado por⁷

$$L^* = - \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \quad (3-4)$$

Este operador é auto-adjunto, segundo o produto in

terno:

$$\langle Lu, v \rangle = \int_R (Lu)v \, dx$$

isto é:

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle \quad (3-5)$$

onde u e v são duas funções com derivadas contínuas até a segunda ordem em \mathbb{R}^n e com derivada contínua em t .

Pode-se provar que⁷:

$$v Lu - u L^*v = \text{div } \tilde{j} \quad (3-6)$$

onde

$$\tilde{j} = \tilde{e}_t u v - (v \text{ grad } u - u \text{ grad } v). \quad (3-7)$$

O operador grad atua somente nas variáveis espaciais e \tilde{e}_t é um vetor unitário na direção do eixo do tempo.

O teorema de Green é a forma integral de (3-7)⁷:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{R}} (v Lu - u L^*v) \, d\bar{R} &= \\ &= \int_{\bar{S}} \tilde{n} \cdot [\tilde{e}_t u v + u \text{ grad } v - v \text{ grad } u] \, d\bar{S} \end{aligned} \quad (3-8)$$

onde \bar{R} é uma região no espaço-tempo, \bar{S} sua fronteira, $d\bar{R}$ é um elemento de volume no espaço-tempo e $d\bar{S}$ um elemento de sua fronteira; \tilde{n} é o vetor unitário normal exterior a \bar{S} .

Para os problemas propostos, \tilde{R} é uma região no espaço-tempo, com forma de um cilindro semi-infinito, formado pela região R no plano, definida por (2-11b) ou (2-27b), e pelo eixo dos tempos, para $t > 0$, como mostra a figura (3-1). Ainda, R é uma região regular - região aberta cujo bordo é constituído de segmentos de superfícies regulares, isto é, segmentos contínuos onde em cada ponto está definida a normal.

Porém, para a aplicação do Teorema de Green, necessita-se do cilindro finito: $\tilde{x} \in R$, $0 < t < \tau$ onde τ é um número positivo qualquer, que desaparecerá ao final da análise. A fronteira do cilindro consiste de três partes [vide figura (3-1)]: a base $\tilde{x} \in R$, $t = 0$; a base $\tilde{x} \in R$, $t = \tau$ e a superfície lateral $\tilde{x} \in S$, $0 < t < \tau$. Na base $t = 0$, a normal ao cilindro é na direção $-\tilde{e}_t$ enquanto que na base $t = \tau$, é na direção \tilde{e}_t . Na superfície lateral do cilindro, a normal ao cilindro coincide com a normal a S , fronteira de R . Nessas condições, pode-se escrever:

$$v Lu = v \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u \right)$$

$$u L^*v = u \left(- \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla^2 v \right)$$

$$\tilde{n} \cdot \tilde{e}_t u v = \pm u v$$

$$\tilde{n} \cdot u \text{ grad } v = \frac{\partial v}{\partial n}$$

$$\tilde{n} \cdot v \text{ grad } u = v \frac{\partial u}{\partial n}$$

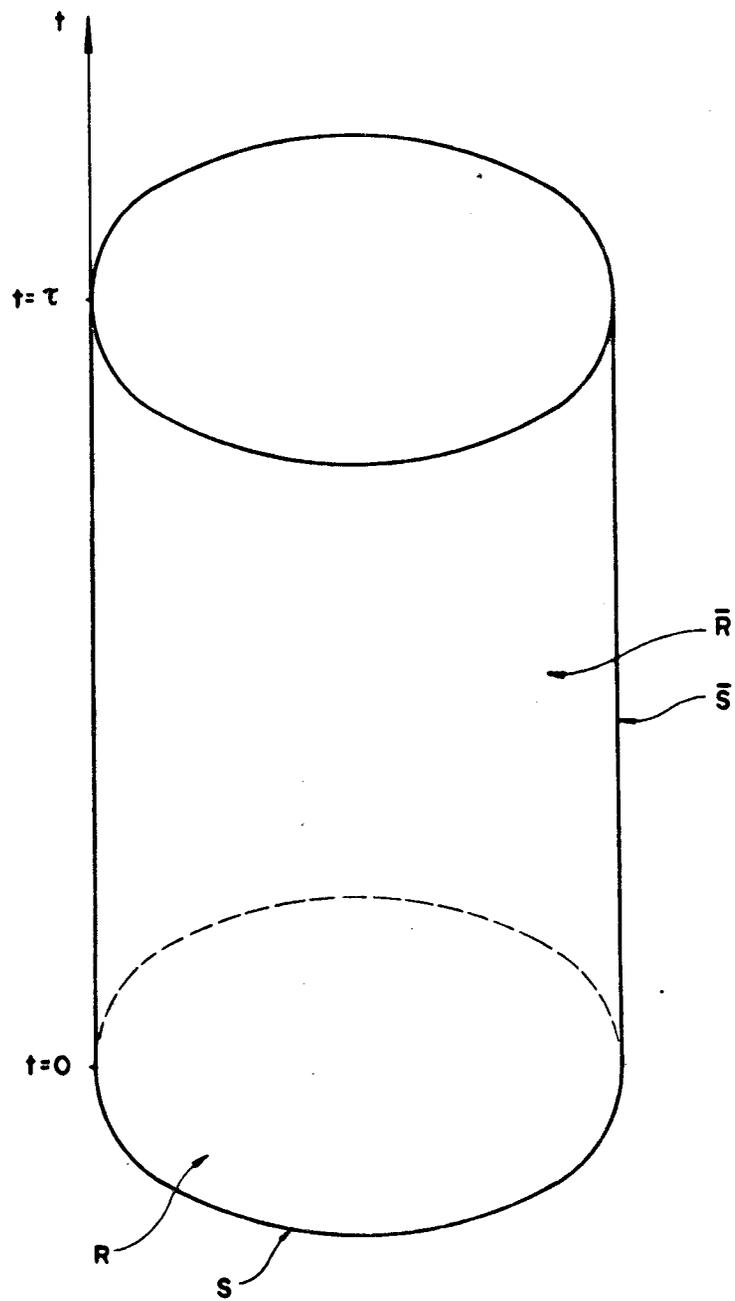


FIGURA 3-1: REGIÃO REGULAR NO ESPAÇO-TEMPO

Substituindo os resultados acima na fórmula de Green, equação (3-8), vem:

$$\int_0^{\tau} dt \int_{\mathbb{R}} d\tilde{x} \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u \right) - u \left(- \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla^2 v \right) \right] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} - (uv)_{t=0} d\tilde{x} + \int_{\mathbb{R}} (uv)_{t=\tau} d\tilde{x} + \int_0^{\tau} dt \int_S dS \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (3-9)$$

que é a forma do teorema de Green para o operador condução do calor definido no cilindro da figura (3-1).

Para a utilização dessa expressão na solução do problema da condução do calor transiente u é feita igual a distribuição de temperatura, solução procurada para os problemas definidos por (2-11), (2-12), (2-13) e (2-27), (2-28), (2-29). Os dois problemas podem ser colocados sob a forma geral⁷:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = q(\tilde{x}, t), \quad \tilde{x} \text{ em } \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3-10)$$

onde $q(\tilde{x}, t)$ representa a geração interna de calor adimensional. A condição inicial é dada por

$$u(\tilde{x}, 0) = f(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \text{ em } \mathbb{R}, \quad (3-11)$$

onde f é uma função conhecida e contínua em \mathbb{R} e a condição de contorno é dada por

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = h(u, u_0), \quad \tilde{x} \text{ em } S, \quad t > 0, \quad (3-12)$$

sendo h uma função conhecida e u_0 uma temperatura fixa, por exemplo, a temperatura do meio ambiente.

Ainda na expressão do teorema de Green, v será feita igual a uma função de Green apropriada. Tal função é a função de Green fundamental, ou solução fundamental, para o adjunto formal do operador condução do calor. Por definição⁷, essa solução fundamental é a solução $g^*(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0)$ do problema:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) g^*(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) = \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_0) \delta(t - t_0),$$

para todo \tilde{x}, \tilde{x}_0 em $R \equiv R_n$, $-\infty < t, t_0 < \infty$ (3-13)

e

$$g^*(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) \equiv 0, \quad t > t_0, \quad \tilde{x}, \tilde{x}_0 \text{ em } R \equiv R_n \quad (3-14)$$

onde

δ é a distribuição Delta de Dirac⁷

(\tilde{x}_0, t_0) é chamado polo da solução g^*

R_n é todo o espaço de n dimensões, e

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

No presente trabalho, $n = 2$, mas o desenvolvimento é válido para o espaço n -dimensional.

Por outro lado, seja $g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0)$ a solução fundamental para o operador condução do calor, isto é, a solução do problema:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) = \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_0) \delta(t - t_0),$$

$$\tilde{x}, \tilde{x}_0 \text{ em } \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}_n, \quad -\infty < t, t_0 < \infty \quad (3-15)$$

e

$$g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) \equiv 0, \quad t < t_0, \quad \tilde{x}, \tilde{x}_0 \text{ em } \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}_n \quad (3-16)$$

Aplicando o teorema de Green a g e g^* de maneira conveniente⁷ encontra-se que:

$$g^*(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) = g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \quad (3-17)$$

Além disso pode-se provar⁷ que a solução fundamental de (3-15), (3-16) coincide, para $t > t_0$, com a solução do problema de valor inicial:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) = 0, \quad t > t_0 \quad (3-18)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) = \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_0) \quad (3-19)$$

Aplicando agora o teorema de Green, expressão (3-9) a u , solução de (3-10), (3-11) e a $g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t)$, solução de (3-13), (3-14), com $t_0 < \tau$, obtém-se:

$$\int_0^\tau dt \int_{\mathbb{R}} d\tilde{x} \left\{ g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u \right] - u \left[- \frac{\partial g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t)}{\partial t} - \nabla^2 g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \right] \right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} - \left[u g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \right]_{t=0} d\tilde{x} + \int_{\mathbb{R}} \left[u g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \right]_{t=\tau} d\tilde{x} +$$

$$+ \int_0^\tau dt \int_S dS \left[u \frac{\partial g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t)}{\partial n} - g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \frac{\partial u}{\partial n} \right]_S \quad (3-20)$$

mas:

$$\int_0^\tau dt \int_{\mathbb{R}} d\tilde{x} \left\{ g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u \right] \right\} =$$

$$= \int_0^{t_0} dt \int_{\mathbb{R}} d\tilde{x} q(\tilde{x}, t) g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \quad (3-21)$$

e:

$$\int_0^\tau dt \int_{\mathbb{R}} d\tilde{x} \left\{ - u \left[- \frac{\partial g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t)}{\partial t} - \nabla^2 g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \right] \right\} =$$

$$= \int_0^{t_0} dt \int_{\mathbb{R}} d\tilde{x} \left\{ - u [\delta(\tilde{x}-\tilde{x}_0) \delta(t-t_0)] \right\} = - u(\tilde{x}_0, t_0) \quad (3-22)$$

pelas propriedades da distribuição Delta de Dirac. Ainda:

$$\int_{\mathbb{R}} - [u g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t)]_{t=0} d\tilde{x} = - \int_{\mathbb{R}} u(\tilde{x}, 0) g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, 0) d\tilde{x} \quad (3-23)$$

e:

$$\int_{\mathbb{R}} [u g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t)]_{t=\tau} d\tilde{x} = 0 \quad (3-24)$$

pois, de (3-14):

$$g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) \equiv 0, \quad t > t_0.$$

Lembrando que, de (3-12) e (3-11)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = h(u, u_0) \quad \text{e} \quad u(\tilde{x}, 0) = f(\tilde{x})$$

e substituindo no teorema de Green, expressão (3-20), vem:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} dt \int_{\mathbb{R}} d\tilde{x} q(\tilde{x}, t) g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) - u(\tilde{x}_0, t_0) = \\ & = - \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}) g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, 0) d\tilde{x} + \\ & + \int_0^{t_0} dt \int_S dS \left[u(\tilde{x}, t) \frac{\partial g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t)}{\partial n} - g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) h(u, u_0) \right]_S \end{aligned} \quad (3-25)$$

Rearranjando essa expressão, e lembrando que o termo de geração de calor $q(\tilde{x}, t)$ é ausente nos problemas aqui abordados, obtém-se:

$$u(\tilde{x}_0, t_0) = \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}) g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, 0) d\tilde{x} + \int_0^{t_0} dt \int_S dS \left[g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t) h(u, u_0) - u(\tilde{x}, t) \frac{\partial g(\tilde{x}_0, t_0 | \tilde{x}, t)}{\partial n} \right]_S \quad (3-26)$$

Este resultado não mais contém τ e é válido para todo \tilde{x}_0 em \mathbb{R} e todo $t_0 > 0$. Para colocar a solução em uma forma padrão⁷ intercambiam-se os índices (\tilde{x}, t) , (\tilde{x}_0, t_0) , obtendo-se:

$$u(\tilde{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}_0) g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, 0) dx + \int_0^t dt_0 \int_S dS \left[g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) h(u, u_0) - u(\tilde{x}_0, t_0) \frac{\partial g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0)}{\partial n} \right]_S \quad (3-27)$$

que é a forma integral correspondente ao problema de condução do calor dado por (3-10), (3-11), (3-12) com geração de calor nula, isto é, $q(\tilde{x}, t) = 0$.

Para a aplicação dessa equação, necessita-se conhecer a função de Green fundamental $g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0)$. Aplicando a transformada de Fourier em (3-13), (3-14) sobre as coordenadas espaciais, obtém-se⁷:

$$g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) = \frac{\exp[-R^2/4(t-t_0)]}{4\pi(t-t_0)^{n/2}} \quad (3-28)$$

onde n é o número de coordenadas espaciais e

$$R^2 = (\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 \quad (3-29)$$

Para duas dimensões, em coordenadas cartesianas ob
têm-se:

$$g(x, y, t | x_0, y_0, t_0) = \frac{\exp[-R^2/4(t-t_0)]}{4\pi(t-t_0)} \quad (3-30)$$

onde

$$R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \quad (3-31)$$

Para duas dimensões, em coordenadas polares obtêm-se:

$$g(r, \theta, t | r_0, \theta_0, t_0) = \frac{\exp[-R^2/4(t-t_0)]}{4\pi(t-t_0)} \quad (3-32)$$

onde

$$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos(\theta - \theta_0) \quad (3-33)$$

Para verificar se essas soluções satisfazem (3-18),
são calculadas:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, y, t | x_0, y_0, t_0) = \frac{\exp[-R^2/4(t-t_0)]}{4\pi(t-t_0)} \left[\frac{R^2}{4(t-t_0)^2} - \frac{1}{(t-t_0)} \right] \quad (3-34)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y, t | x_0, y_0, t_0) = \frac{\exp[-R^2/4(t-t_0)]}{4\pi(t-t_0)} \left[\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)^2} - \frac{1}{2(t-t_0)} \right] \quad (3-35)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x,y,t|x_0,y_0,t_0) = \frac{\exp[-R^2/4(t-t_0)]}{4\pi(t-t_0)} \left[\frac{(y-y_0)^2}{4(t-t_0)^2} - \frac{1}{2(t-t_0)} \right] \quad (3-36)$$

Por substituição direta, vê-se que a solução (3-30) satisfaz (3-18), e o mesmo pode ser constatado para (3-32).

É fácil ver que $g(\tilde{x},t|\tilde{x}_0,t_0)$ se torna singular em $\tilde{x} = \tilde{x}_0$ e $t = t_0$. Devido a isto, os polos deverão ser isolados em determinados cálculos. Para tanto, são examinadas algumas propriedades da função de Green fundamental.

Para $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0$ pode ser mostrado², tomando o limite, que:

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0} \int_0^t g(\tilde{x},t|\tilde{x}_0,t_0) dt_0 = g(\tilde{x},\tilde{x}_0) \quad (3-37)$$

onde $g(\tilde{x},\tilde{x}_0)$ é dada por²

$$g(\tilde{x},\tilde{x}_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln R \quad (3-38)$$

para duas dimensões, onde R é dado por (3-31) ou (3-36).

Seja ϵ o raio de uma pequena superfície esférica para três dimensões, ou o raio de um pequeno círculo para duas dimensões, envolvendo o ponto \tilde{x} na região R e seja S_ϵ essa pequena superfície (ou linha). Pode ser facilmente mostrado² que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) dS_\epsilon = \bar{0} \quad (3-39)$$

e que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t dt_0 \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial n} g(\tilde{x}, t | \tilde{x}_0, t_0) dS_\epsilon = 1 \quad (3-40)$$

Se o pólo surge na fronteira S da região \mathbb{R} , pode-se isolá-lo por uma pequena superfície hemisférica para três dimensões, ou um semi-círculo para duas dimensões, com raio ϵ e centro no polo, dado por \tilde{x}_{0_s} , e obter²:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t dt_0 \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial n} g(\tilde{x}_s, t | \tilde{x}_{0_s}, t_0) dS_\epsilon = \frac{1}{2} \quad (3-41)$$

Assim, na solução $u(x, t)$ dada por (3-27), quando $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_s$, com o auxílio de (3-41), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\tilde{x}_s, t) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}_0) g(\tilde{x}_s, t | \tilde{x}_{0_s}, t_0) d\tilde{x} + \\ &+ \int_0^t dt_0 \int_S dS \left[g(\tilde{x}_s, t | \tilde{x}_{0_s}, t_0) h(u, u_0) - \right. \\ &\left. - u(\tilde{x}_{0_s}, t_0) \frac{\partial g(\tilde{x}_s, t | \tilde{x}_{0_s}, t_0)}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (3-42)$$

que é a solução para os pontos que pertencem a fronteira S de \mathbb{R} .

A solução (3-42) para os pontos da fronteira, junta

mente com a equação de condição de contorno (3-12) são suficientes para determinar os valores desconhecidos na fronteira, $u(\tilde{x}_s, t)$ e $\partial u(\tilde{x}_s, t)/\partial n$.

Note-se que as integrais na região em (3-42) e (3-27) são funções conhecidas. Assim, o conhecimento de $u(\tilde{x}_s, t)$ e $\partial u(\tilde{x}_s, t)/\partial n$ na fronteira possibilita o cálculo de $u(\tilde{x}, t)$ para toda região por simples integração.

Portanto, o problema fica reduzido a fronteira S de R , e sua solução é obtida sobre um número bem menor de pontos do que a solução obtida por métodos numéricos usuais, como está comentado no capítulo 1 deste trabalho.

4 - ESQUEMA NUMÉRICO PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

A transformação da equação diferencial da condução transiente do calor em equação integral reduz o trabalho de solução apenas aos pontos da fronteira da região em análise.

Todavia, a complexidade das funções a serem integradas em (3-42) obriga o uso de métodos numéricos de integração.

Este fato sugere a utilização de um esquema numérico de solução da equação (3-42) para a fronteira S de R .

Para tanto a fronteira é dividida em N elementos. Faça-se $i=1,2,\dots, N$ denotar os pontos nodais primários, resultantes dessa divisão, e $j=1,2,\dots, N$ denotar os pontos nodais secundários.

Ainda, em função das propriedades da função de Green fundamental examinadas anteriormente, pode-se admitir que $(\partial T/\partial n)_s$ e $(T)_s$ variem muito lentamente em comparação com $(g)_s$ e $(\partial g/\partial n)_s$ respectivamente. Tal hipótese permite a aplicação do Teorema da Média

a para Integrais Múltiplas¹⁶. Assim, pode-se admitir que $(\partial T/\partial n)_s$ e $(T)_s$ sejam constantes em cada elemento da fronteira e removê-los para fora da integral no contorno.

Para poupar espaço em memória de computador a integração no tempo pode ser efetuada passo a passo², isto é, $T(x_{si}, y_{si}, t_m)$ pode ser calculada a partir de $T(x_{si}, y_{si}, t_{m-1})$, onde $m=1, 2, 3, \dots$ denota os pontos nodais no tempo. Assim, ainda de acordo com o Teorema da Média, pode-se retirar $(\partial T/\partial n)_s$ e $(T)_s$ para fora da integral no tempo.

Nessas condições, a equação dos valores na fronteira (3-42), pode ser escrita na forma algébrica²:

$$T(x_{si}, y_{si}, t_m) = 2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Delta S_j} A_{ij} - 2 \sum_{j=1}^N (T)_{\Delta S_j} B_{ij} + 2 F_i \quad (4-1)$$

onde:

$$F_i = \int_R T(x', y', t_{m-1}) g(x_{si}, y_{si}, t_m | x', y', t_{m-1}) dR(x', y') \quad (4-2)$$

$$A_{ij} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} dt' \int_{\Delta S_j} g(x_{si}, y_{si}, t_m | x'_s, y'_s, t') dS(x'_s, y'_s) \quad (4-3)$$

$$B_{ij} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} dt' \int_{\Delta S_j} \frac{\partial}{\partial n} g(x_{si}, y_{si}, t_m | x'_s, y'_s, t') dS(x'_s, y'_s) \quad (4-4)$$

onde g é dada por (3-30) ou (3-32). Note-se que para $m=0$, a temperatura é a temperatura inicial dada por (3-11).

A integração de A_{ij} e B_{ij} em relação ao tempo pode ser efetuada² obtendo-se:

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_j} E_1 \left[\frac{R_s^2}{4(t_m - t_{m-1})} \right] dS(x'_s, y'_s) \quad (4-5)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta S_j} \frac{D_s}{R_s^2} \exp \left[- \frac{R_s^2}{4(t_m - t_{m-1})} \right] dS(x'_s, y'_s) \quad (4-6)$$

onde $E_1(z)$ é a integral exponencial, dada por

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv \quad (4-7)$$

e

$$R_s^2 = (x_{si} - x'_s)^2 + (y_{si} - y'_s)^2 \quad (4-8)$$

$$D_s = \cos(n, x'_s) (x_{si} - x'_s) + \cos(n, y'_s) (y_{si} - y'_s) \quad (4-9)$$

Usando notação matricial, a equação (4-1) pode ser escrita como:

$$\left\{ T \right\} = 2 \left[A \right] \left\{ \frac{\partial T}{\partial n} \right\} - 2 \left[B \right] \left\{ T \right\} + 2 \left\{ F \right\} \quad (4-10)$$

representando um sistema de N equações para os N pontos nodais es

pecificados.

Essas equações são, porém, não-lineares, devido ao fato de $(\partial T/\partial n)_s$, dado por (2-13) e (2-29), ser não-linear.

Para a solução deste sistema, utiliza-se o método de Newton-Raphson⁸, reescrevendo a equação (4-10) na forma:

$$\left\{ f \right\} = \left\{ T \right\} + 2 \left[B \right] \left\{ T \right\} - 2 \left[A \right] \left\{ \frac{\partial T}{\partial n} \right\} - 2 \left\{ F \right\} \quad (4-11)$$

onde $\left\{ T \right\}$ e $\left\{ \partial T/\partial n \right\}$ são obtidos com valores aproximados da temperatura em cada ponto, T'_i .

Em cada iteração novos valores da temperatura são obtidos por:

$$T''_i = T'_i - \varepsilon'_i \quad (4-12)$$

onde ε'_i são as componentes do vetor erro, que devem ser feitas iguais a zero, isto é, menores que uma certa tolerância. Os valores ε'_i são calculados, a cada iteração, pela solução de⁸:

$$\left\{ f \right\} + \left[W \right] \left\{ \varepsilon \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (4-12)$$

onde

$$\begin{bmatrix} W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial T_1} & \frac{\partial f_1}{\partial T_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial T_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial T_1} & \frac{\partial f_2}{\partial T_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial T_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N}{\partial T_1} & \frac{\partial f_N}{\partial T_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial T_N} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

isto é, a matriz jacobiana das funções f_i em relação as temperaturas T_j calculadas para os valores aproximados T'_j , suposto que $[W]$ seja não-singular.

O processo iterativo é terminado quando, para todo i , for satisfeito o critério de tolerância:

$$\left| \frac{\epsilon_i}{T_{si}} \right| < \xi \quad (4-14)$$

onde as barras indicam valor absoluto e ξ é um valor especificado.

Após ter sido atingida a tolerância desejada, os valores da temperatura e de sua derivada normal em cada ponto da fronteira são usados para calcular a temperatura na região, com o auxílio de (3-27). Como a temperatura é conhecida apenas em pontos discretos da fronteira, as integrais são calculadas numericamente.

A escolha do método de Newton-Raphson para a complementação do esquema numérico de solução das equações integrais, em

detrimento do método das substituições sucessivas usado em (1) , (3) e (4), por exemplo, foi motivada pelo fato do método das substituições sucessivas não apresentar boa convergência quando as equações são não-lineares.

Ainda, Colle e Abreu¹⁷ concluíram que o método das substituições sucessivas aplicado a problemas bidimensionais de condução do calor em regime permanente com radiação e convecção combinadas torna-se instável com o aumento da influência da radiação, mesmo que na obtenção da equação integral se faça uso de função de Green completa.

5 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CILINDRO

A solução do problema do cilindro, dado por (2-11), (2-12) e (2-13) é colocada sob a forma de um programa de computador, para a rápida obtenção de resultados.

Inicialmente, são calculadas as coordenadas dos pontos nodais da fronteira e da região, bem como o fator de forma de elementos da superfície do cilindro para a placa, de acordo com a figura 2-1.

O fator de forma é dado por¹³:

$$F_{dA_1-A_2} = \frac{\text{sen } \phi_2 - \text{sen } \phi_1}{2} \quad (5-1)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são os ângulos mostrados na fig. 5-1 e onde dA_1 é um elemento de área na superfície do cilindro e A_2 a área da placa.

A seguir, são calculados os coeficientes A_{ij} e B_{ij} para os pontos da fronteira. Para o cálculo das integrais das expressões (4-5) e (4-6), cada elemento ΔS_j da fronteira é dividido

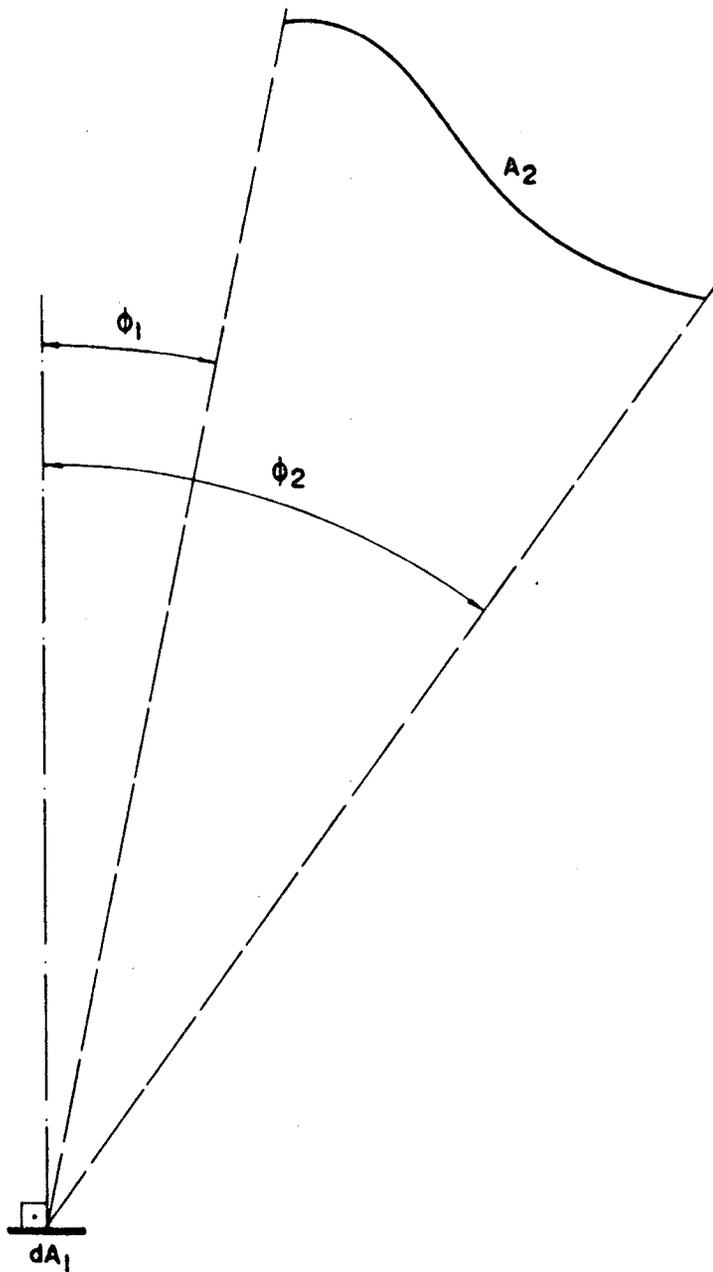


FIGURA 5-1: ÂNGULOS PARA O CÁLCULO DO FATOR DE FORMA

em dez partes.

Para o cálculo da integral exponencial do coeficiente A_{ij} é utilizada a subrotina EXPI¹⁴. Porém quando $j=i$, o pólo coincide com o ponto nodal, isto é, $r=r'$ e $\theta=\theta'$, e o argumento da integral em (4-5) torna-se singular. Nesse caso, a integral é calculada pela integração da série que representa a integral exponencial¹⁵ para valores de x entre zero e um:

$$\begin{aligned}
 E_1(x) = & - \ln(x) - 0,57721566 + 0,99993193 x - \\
 & - 0,24991055 x^2 + 0,05519968 x^3 - \\
 & - 0,00976004 x^4 + 0,00107857 x^5 \qquad (5-2)
 \end{aligned}$$

Assim quando $j=i$, o valor do coeficiente A_{ii} é dado por:

$$A_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta\theta/2} E_1(x) dx \qquad (5-3)$$

onde $\Delta\theta/2$ é a metade do ângulo que compreende uma divisão da fronteira e x é:

$$x = \frac{R_s^2}{4(t-t')} \qquad (5-4)$$

onde

$$R_s^2 = 2 - 2 \cos(\Delta\theta/2) \qquad (5-5)$$

uma vez que tanto o p \tilde{o} lo como o ponto nodal est \tilde{a} o sobre a fronteira. Logo:

$$r' = 1$$

e

$$r = 1$$

Para o c \tilde{a} lculo de B_{ij} , a rela \tilde{c} o D_s/R_s^2 , em (4-6) deve ser calculada. Assim, de (4-9), calcula-se:

$$\begin{aligned} D_s &= \cos \theta' (\cos \theta_i - \cos \theta') + \sin \theta' (\sin \theta_i - \sin \theta') \\ &= \cos \theta' \cos \theta_i - \cos^2 \theta' + \sin \theta' \sin \theta_i - \sin^2 \theta' \\ &= \cos (\theta_i - \theta') - 1 \end{aligned}$$

E de (4-8) calcula-se

$$R_s^2 = 2 [1 - \cos (\theta_i - \theta')]$$

assim:

$$\frac{D_s}{R_s^2} = -\frac{1}{2} \tag{5-6}$$

para quaisquer pontos na fronteira.

A seguir, s \tilde{a} o calculados os coeficientes F_i , atr \tilde{a} v \tilde{e} s de (4-2). A integra \tilde{c} o \tilde{e} realizada numericamente atr \tilde{a} v \tilde{e} s da regra de Simpson para integrais duplas⁸, sendo a regi \tilde{a} o dividida

por uma malha de dez divisões no raio e trinta e seis divisões no ângulo (vide figura 2-1).

Após o cálculo dos coeficientes F_i , são calculados os termos da equação matricial (4-11). Os valores da primeira aproximação da temperatura são calculados pela linearização da radiação, e sua soma com a convecção^{1,2}, dada por

$$T_m = - (T_{m-1} - 1) \exp \left\{ - 2 [B_i + R_i (T_{m-1}^4 - 1) / (T_{m-1} - 1)] \Delta t \right\} \quad (5-7)$$

Naturalmente, essa expressão não dá valores precisos para a temperatura, mas seus resultados são suficientemente aproximados para favorecer a convergência do método de Newton-Raphson.

Em seguida a equação (4-11) é resolvida pelo método de Newton-Raphson. Os valores da temperatura na fronteira são listados a cada iteração. Após a convergência, são listados os valores do fluxo de calor na fronteira, da taxa de calor instantânea dissipada, dada por:

$$F/F_o = \int_S \left[\frac{\partial}{\partial n} T(r,t) \right]_S dS / \int_S \left[\frac{\partial}{\partial n} T(r,0) \right]_S dS \quad (5-8)$$

e da quantidade total de calor dissipada desde o tempo zero até o instante calculado, dada por

$$Q/Q_o = \int_V \rho C (T_o - T) dV / \int_V \rho C (T_o - 1) dV \quad (5-9)$$

Feito isso a temperatura na região é calculada pela expressão (3-27). O cálculo dessa expressão apresenta um problema de precisão numérica para pontos próximos à fronteira. A derivada da função de Green em relação a normal, em (3-27), torna-se cada vez maior ao aproximar-se o ponto nodal da fronteira. Este fato provoca erros intoleráveis para raios maiores que 0.85. Assim, os valores da temperatura para o raio igual a 0.9 são obtidos pelo ajuste de uma parábola aos valores da temperatura para o raio igual a 0.7, 0.8 e 1.0. Este ajuste, no entanto, não provoca erros sensíveis, quer no tempo considerado, quer nos subsequentes.

Finalmente, após a listagem dos valores da temperatura para a região, são calculadas as coordenadas de isotermas, para a visualização dos resultados.

Para o cálculo da distribuição de temperatura no incremento de tempo seguinte, o programa é recomeçado a partir do cálculo de F_i , inclusive.

O programa é rodado, inicialmente, com número de radiação igual a zero, isto é, somente com convecção. Isto permite a comparação com a solução analítica para o cilindro com troca de calor por convecção com coeficiente constante. Essa solução é dada em (9) por:

$$\Theta = \frac{T-1}{T_0-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n) J_0(\lambda_n r) \exp(-\lambda_n^2 Fo)}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)]} \quad (5-10)$$

onde os λ_n são as raízes de

$$\lambda_n J_1(\lambda_n)/J_0(\lambda_n) = Bi \quad (5-11)$$

e onde J_0 e J_1 são as funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero e um.

A quantidade de calor dissipada é também dada em ⁽⁹⁾ por:

$$\frac{Q}{Q_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} \frac{Bi}{Bi^2 + \lambda_n^2} \left[1 - \exp(-\lambda_n^2 Fo) \right] \quad (5-12)$$

Os resultados estão apresentados nas próximas páginas da seguinte maneira:

- Figuras 5-2 a 5-7 - comparação da solução integral com a solução analítica, com $Ri = 0$, isto é, apenas com convecção.
- Figuras 5-8, 5-10, 5-12 - valores da energia dissipada Q/Q_0 para vários valores de Bi e de Ri em função de t , ou Fo .
- Figuras 5-9, 5-11, 5-13 - valores da taxa de calor instantânea F/F_0 para vários valores de Bi e de Ri , em função de t , ou Fo .
- Tabelas 5-I, 5-II, 5-III - distribuição de temperatura, produzida pelo programa de computador para alguns valores de Bi , Ri e t , ou Fo .

- Figuras 5-14 a 5-16 - isothermas correspondentes às distri
buições de temperatura apresentadas
nas tabelas 5-I, 5-II e 5-III.

A análise desses resultados é apresentada no capítu
lo 7.

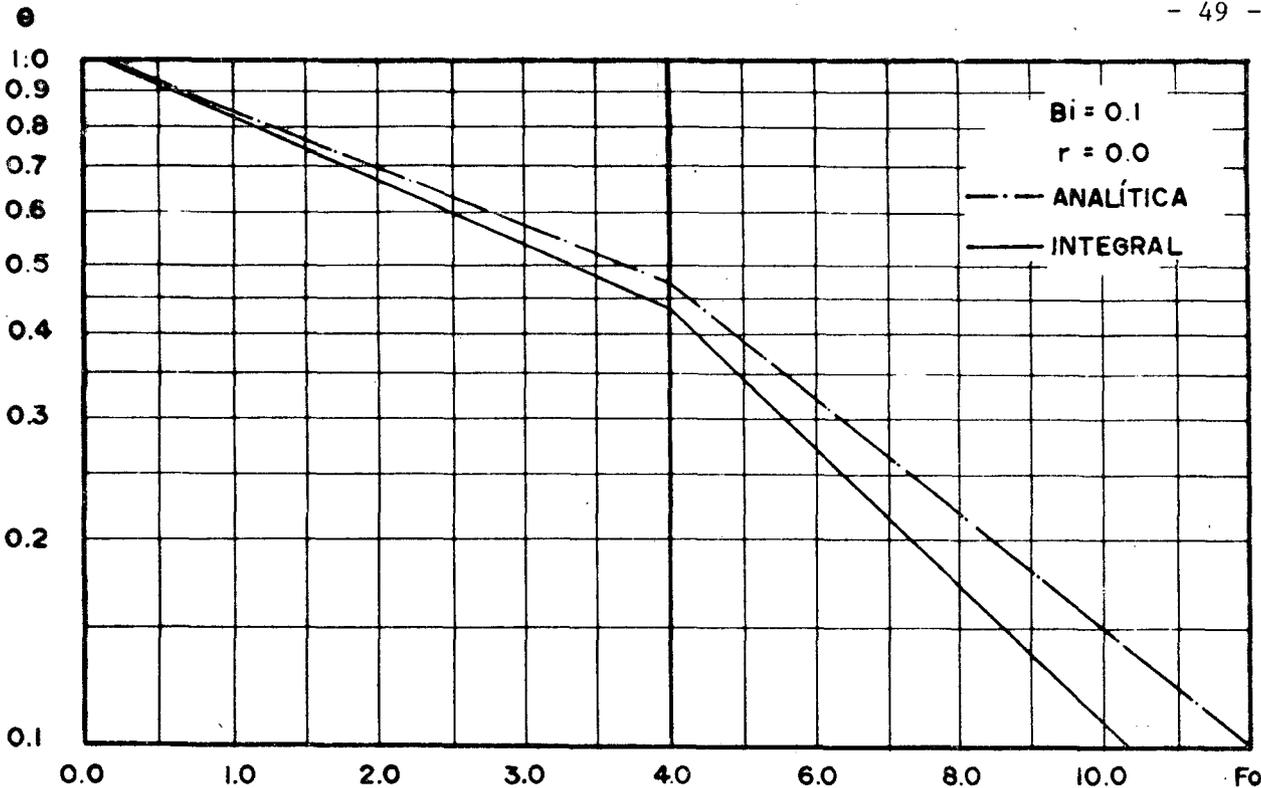


FIGURA 5-2: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

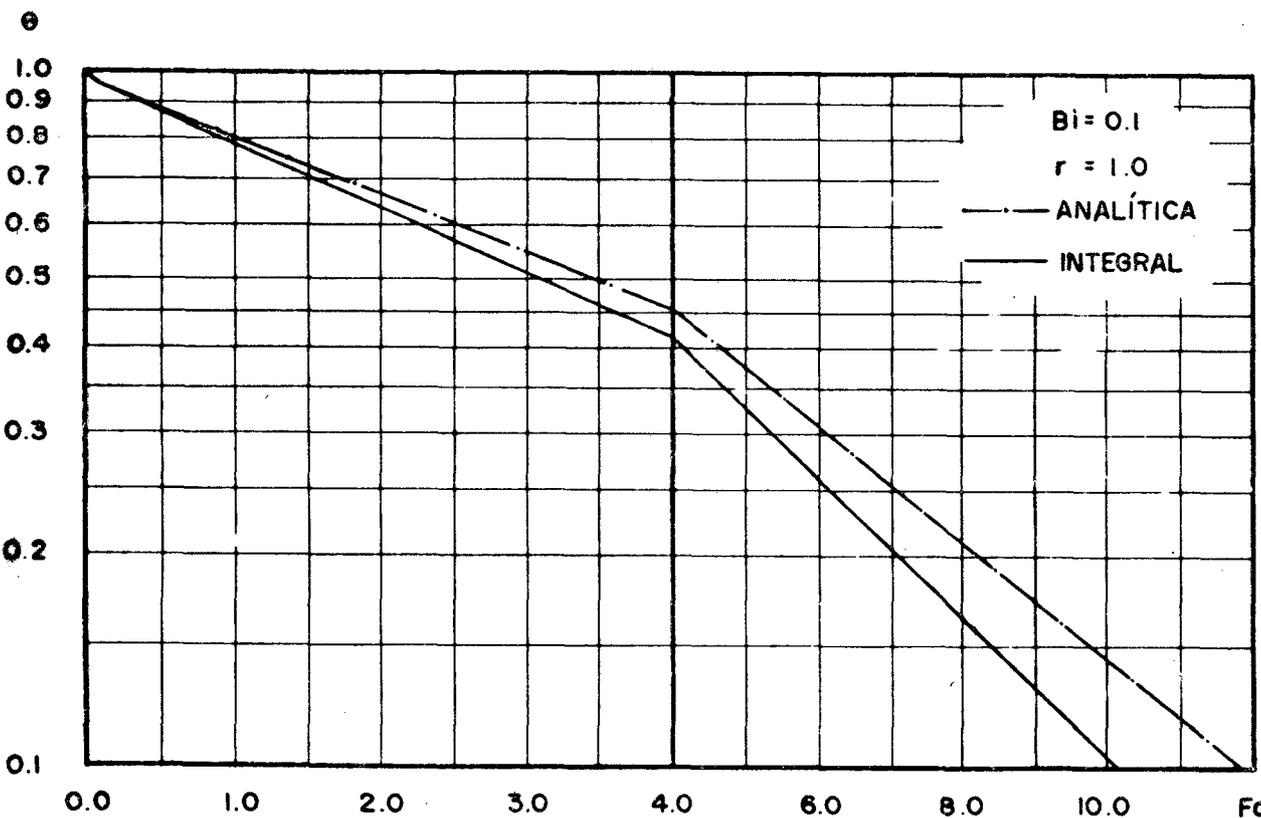


FIGURA 5-3: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

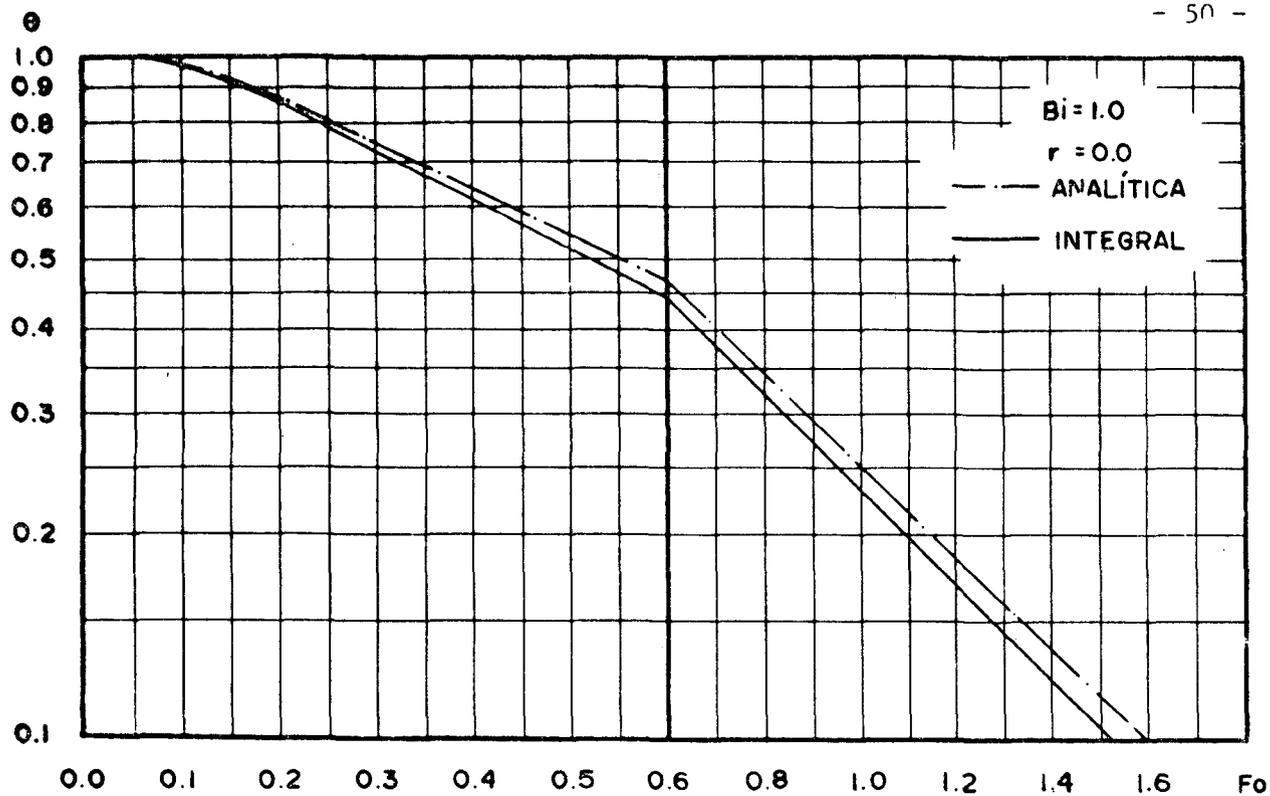


FIGURA 5-4: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

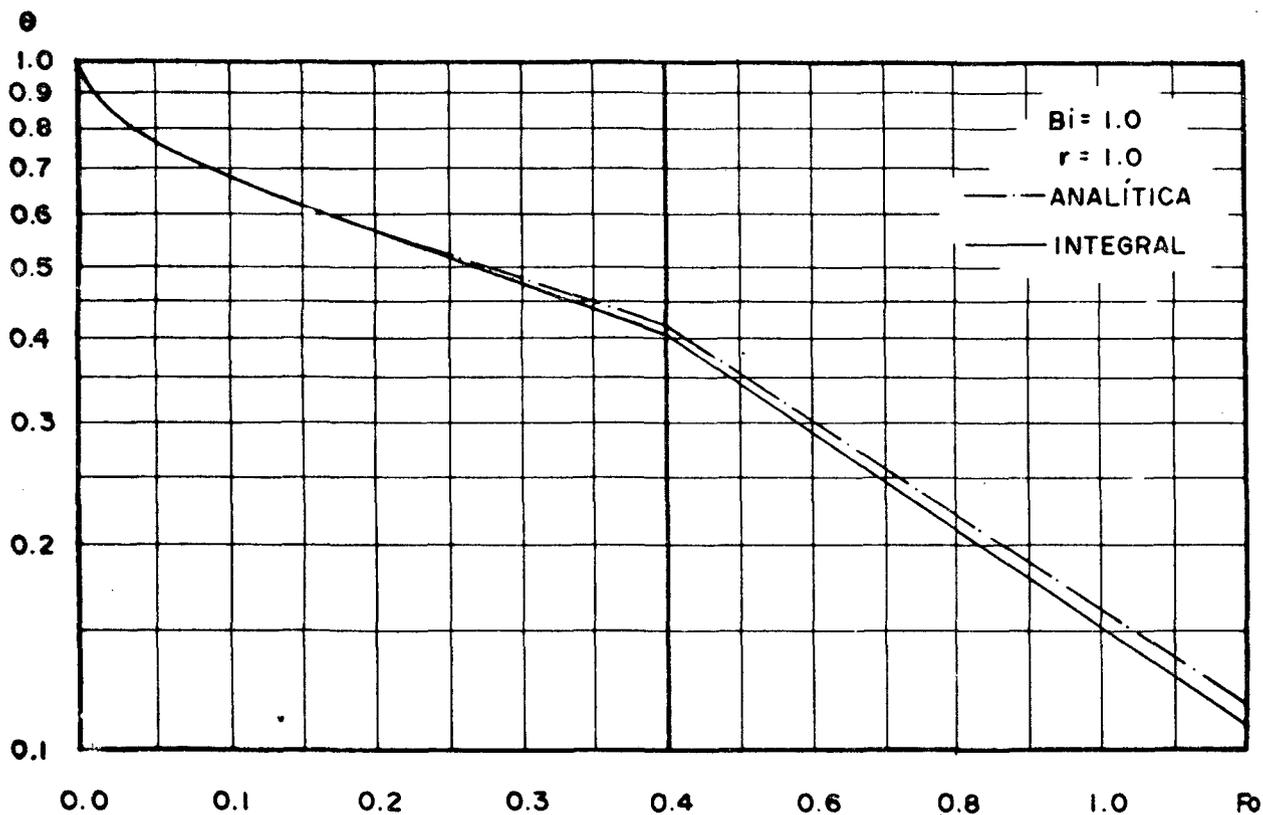


FIGURA 5-5: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

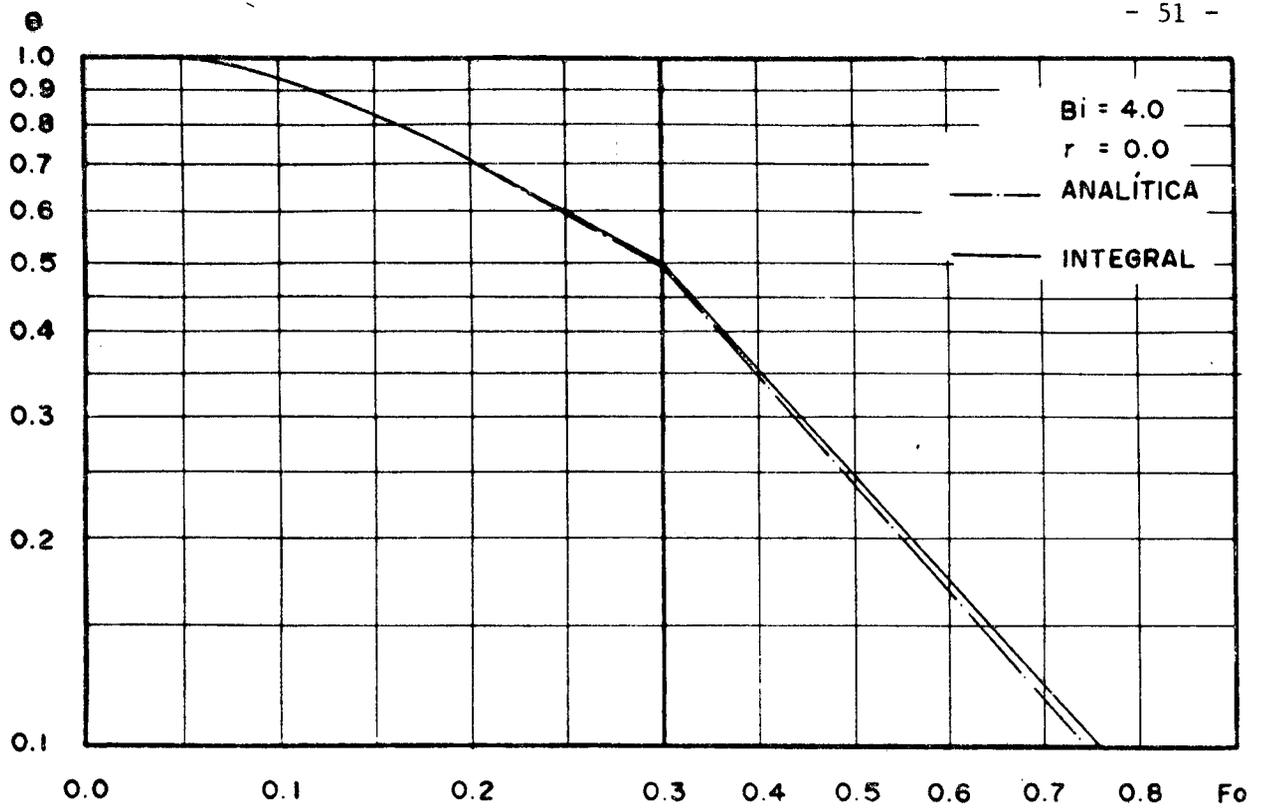


FIGURA 5-6: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

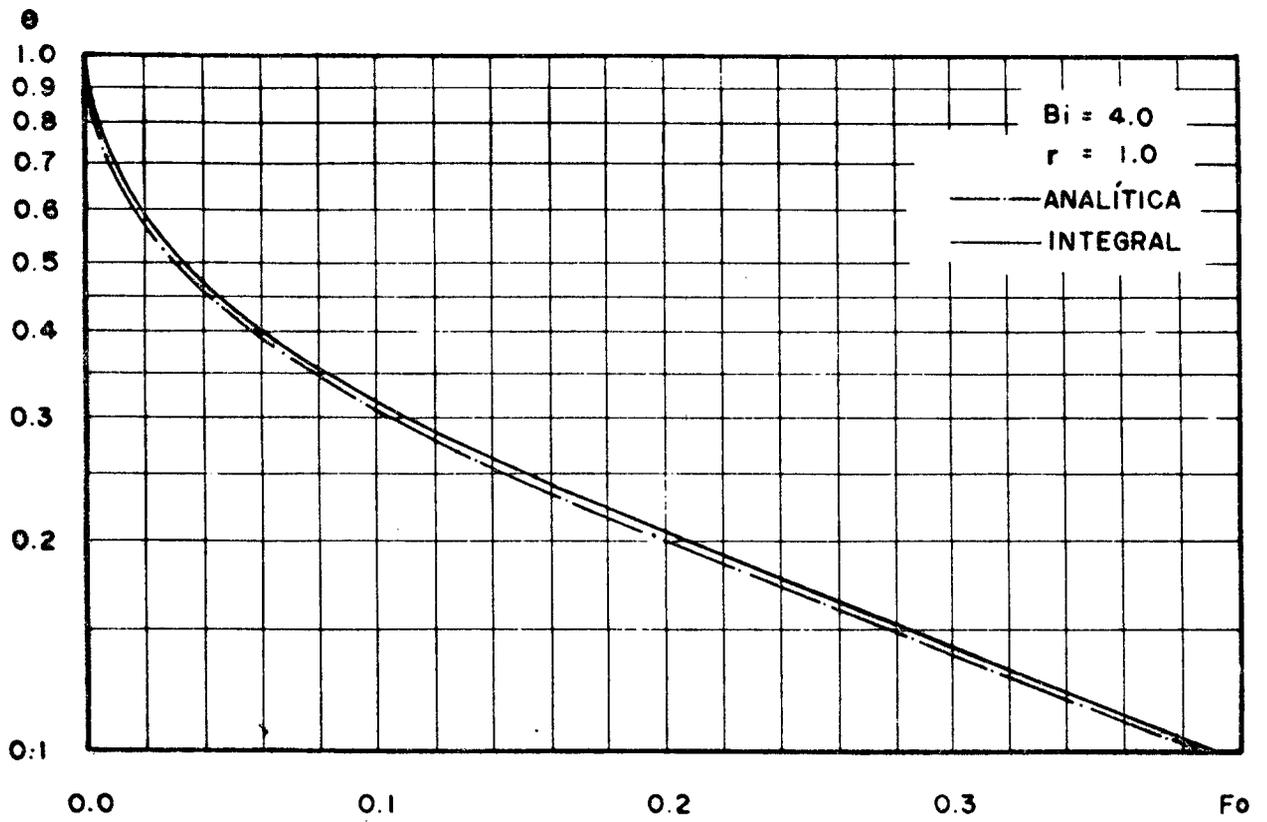


FIGURA 5-7: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

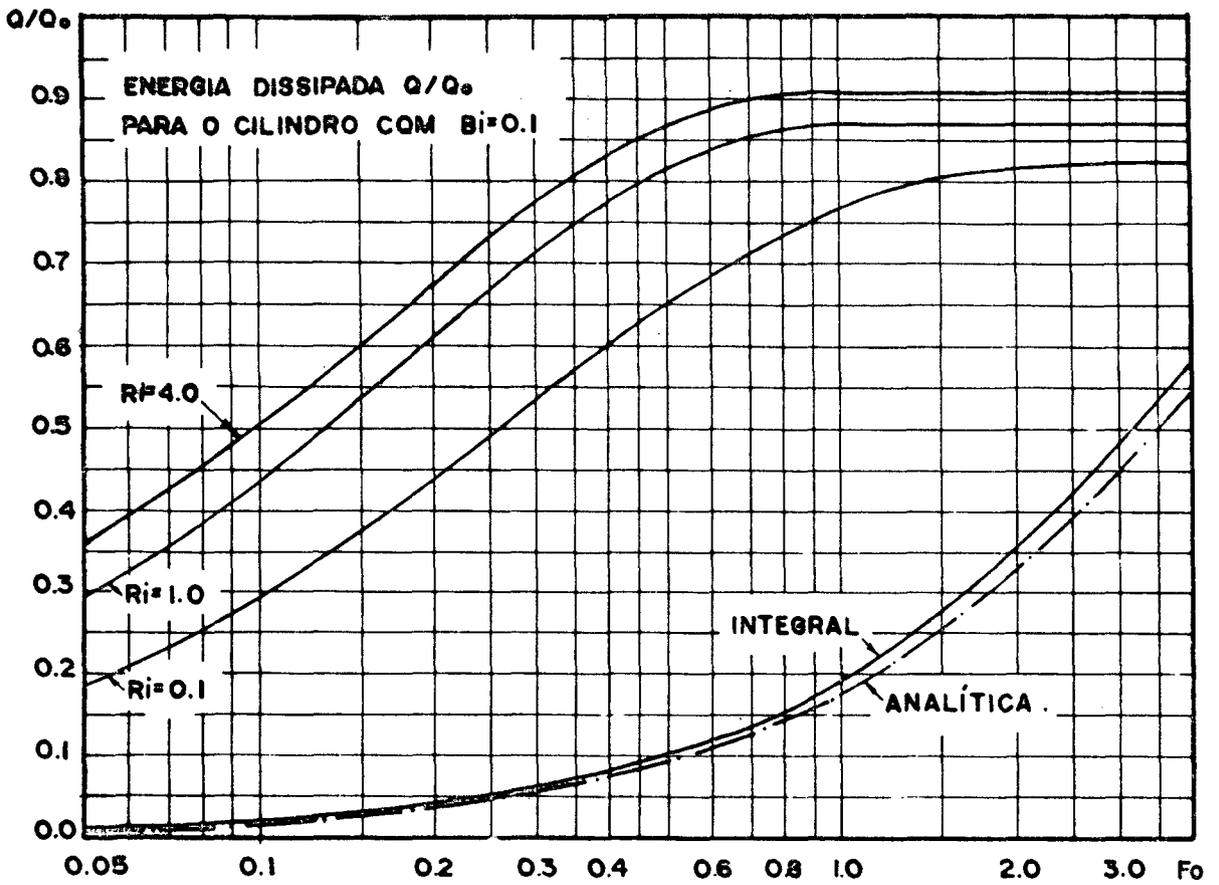


FIGURA 5-8

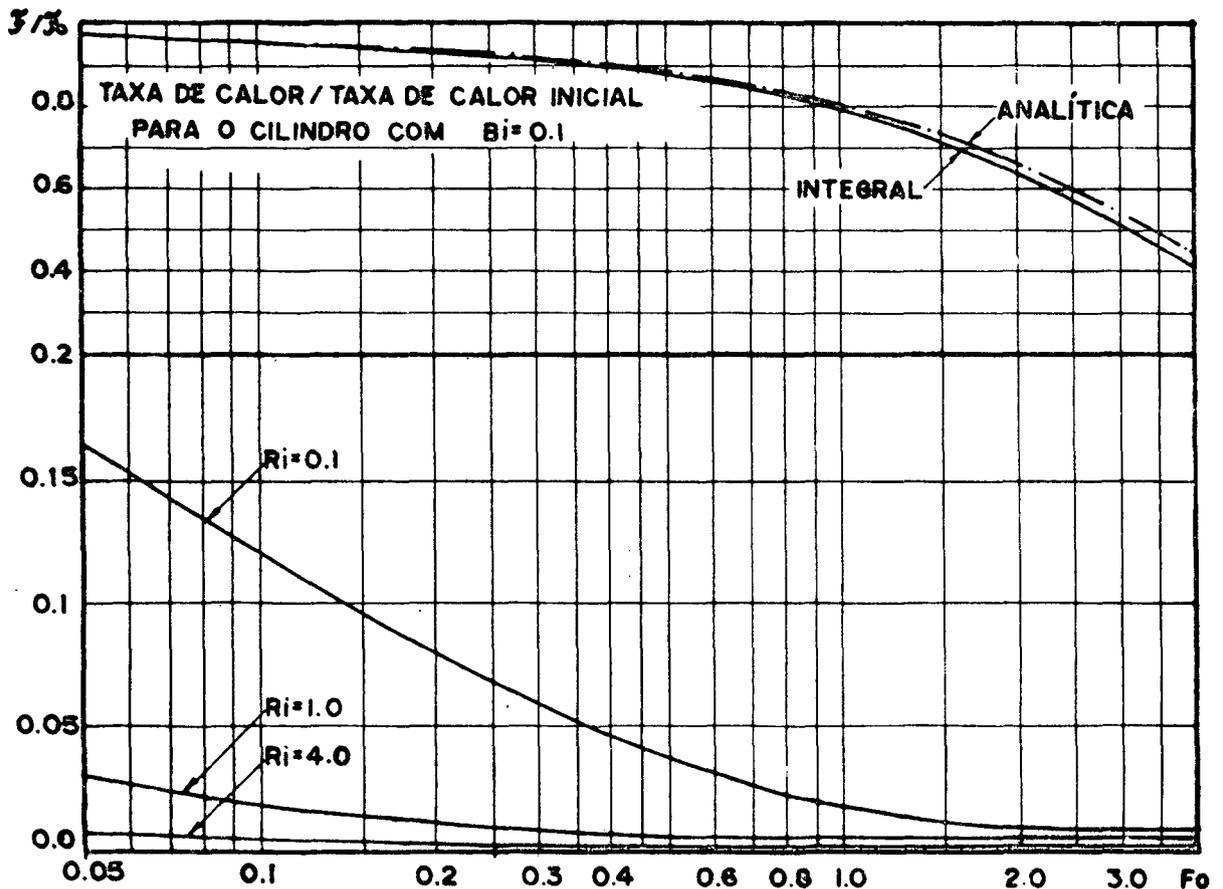


FIGURA 5-9

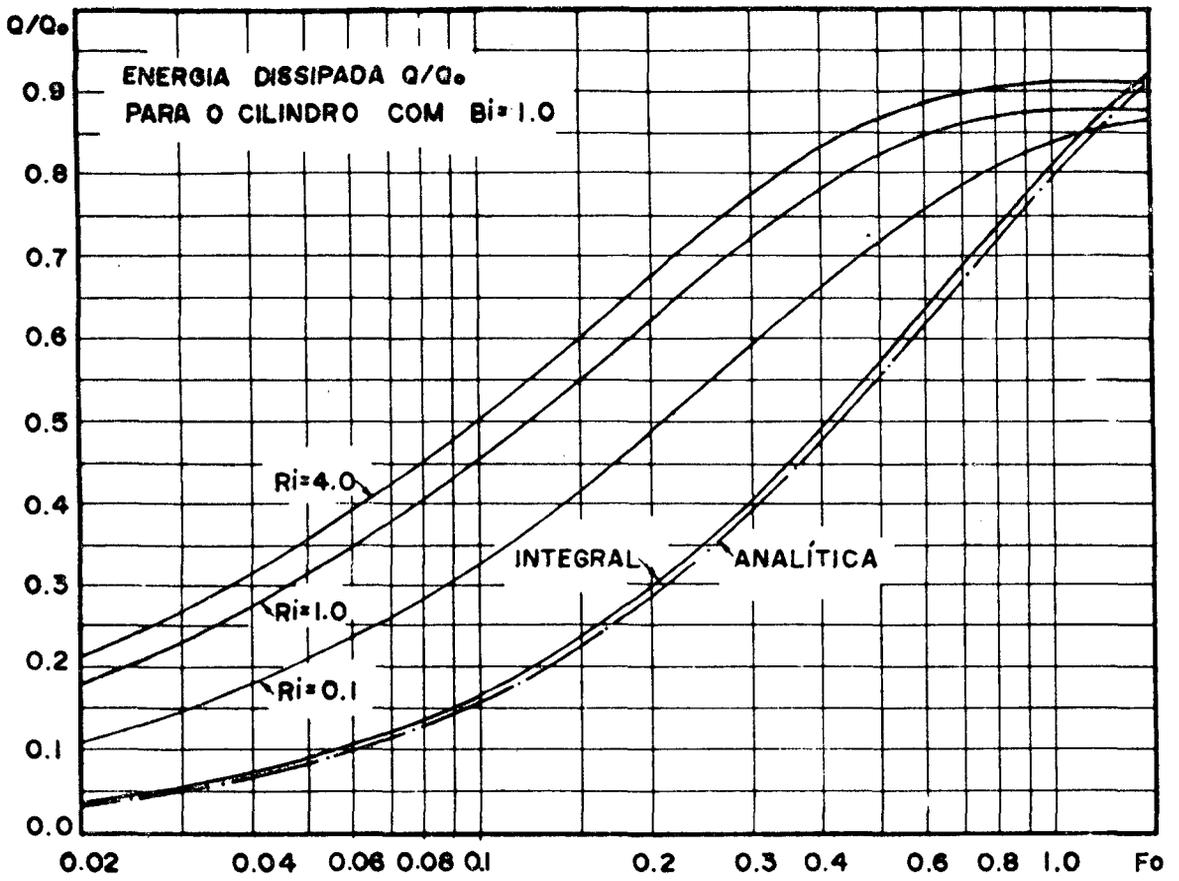


FIGURA 5-10

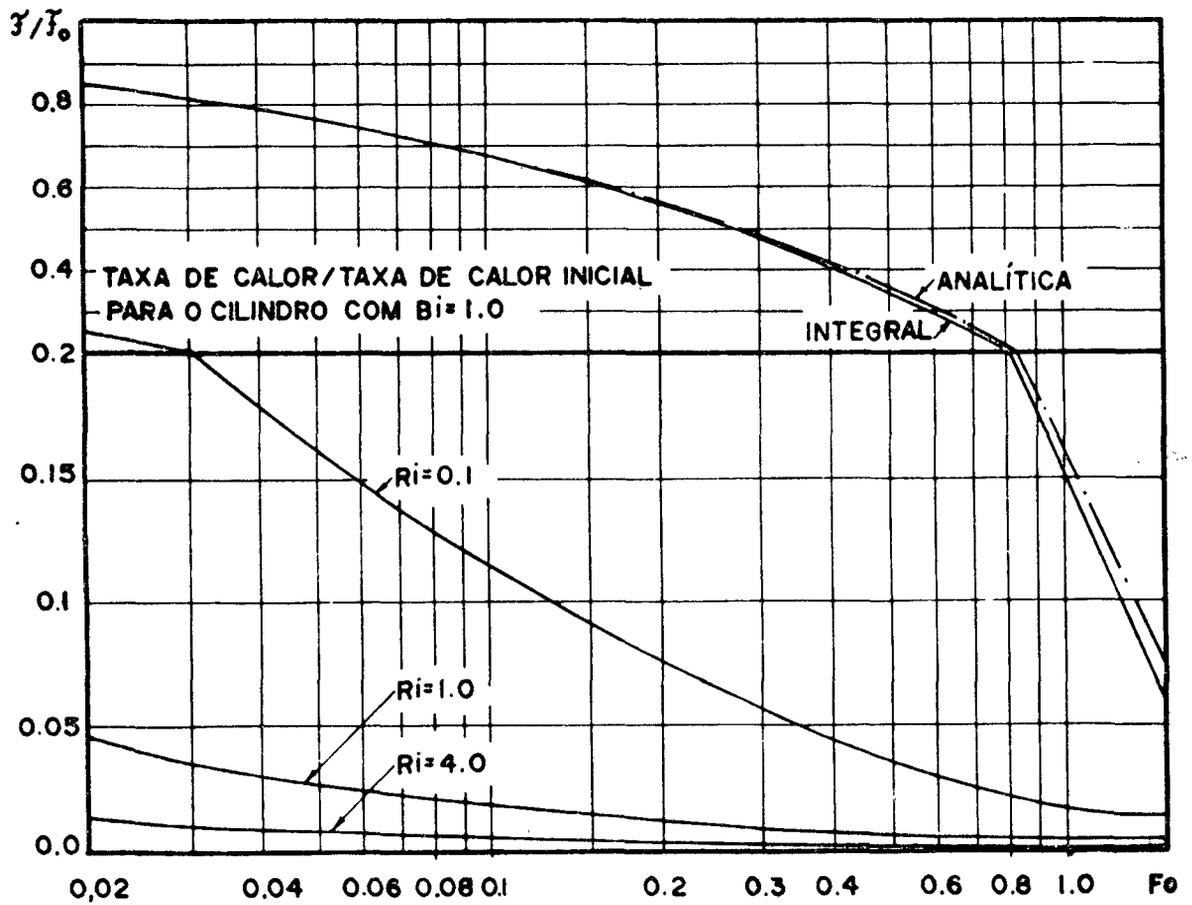


FIGURA 5-11

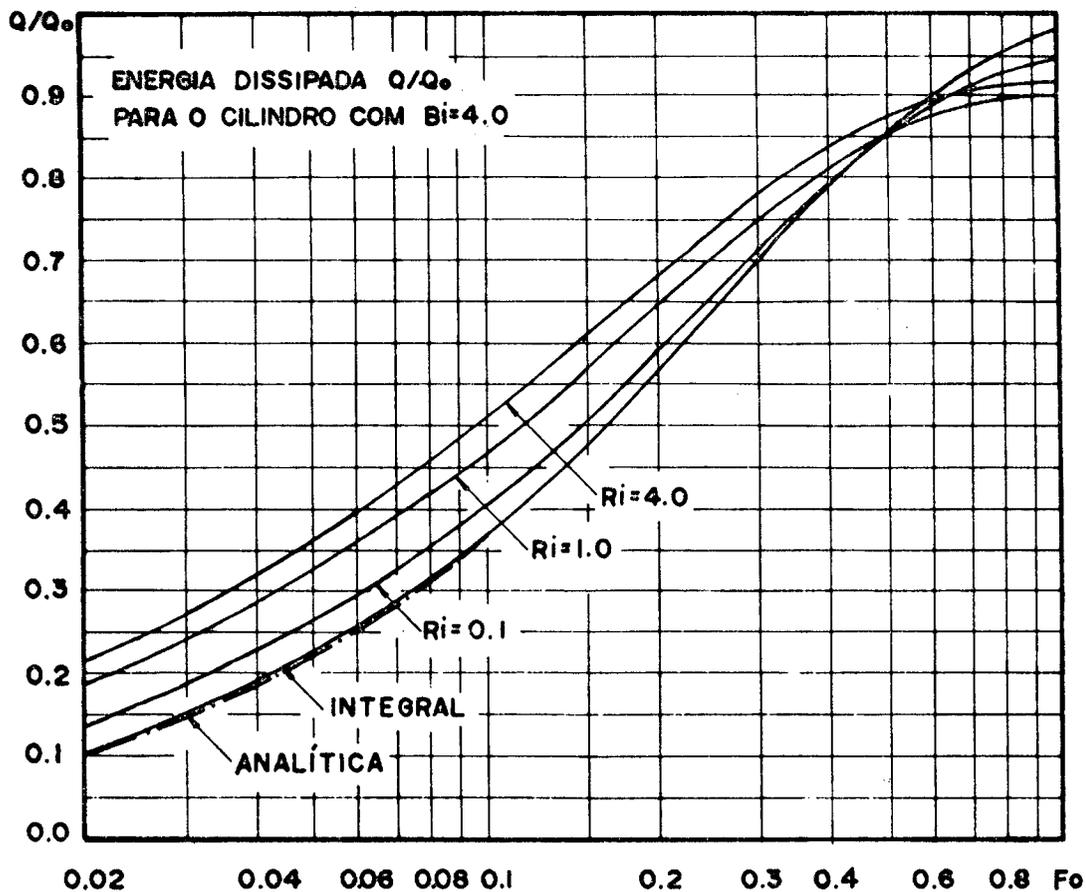


FIGURA 5-12

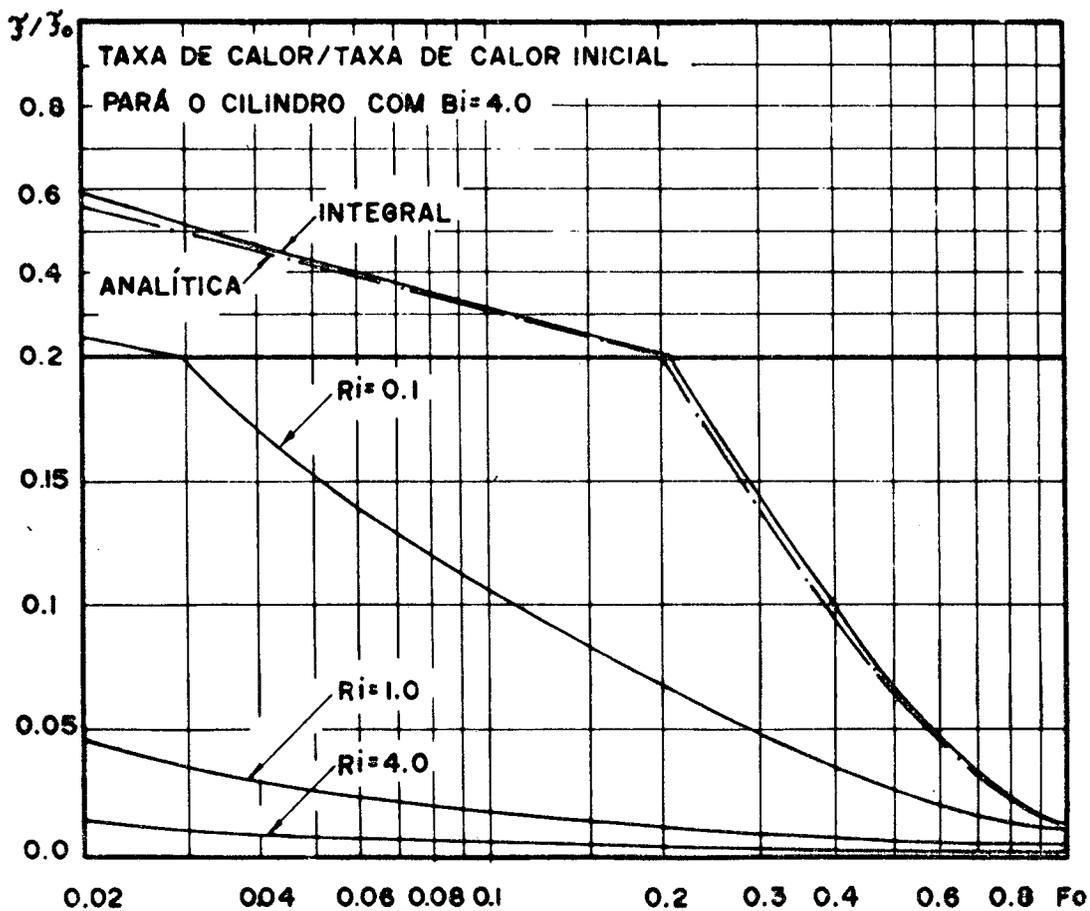


FIGURA 5-13

TEMPERATURA NA REGIAO. FO= 0.200

3.19580	3.18742	3.15086	3.08740	2.99896	2.88813	2.75826	2.61351	2.45945	2.30187	2.14076
3.19580	3.18730	3.15057	3.08686	2.99808	2.88680	2.75637	2.61093	2.45604	2.29784	2.13632
3.19580	3.18696	3.14971	3.08527	2.99550	2.88294	2.75087	2.60342	2.44610	2.28601	2.12315
3.19580	3.18641	3.14835	3.08277	2.99147	2.87692	2.74232	2.59171	2.43057	2.26747	2.10244
3.19580	3.18567	3.14656	3.07955	2.98634	2.86930	2.73155	2.57701	2.41101	2.24395	2.07582
3.19580	3.18479	3.14447	3.07584	2.98053	2.86080	2.71965	2.56086	2.38961	2.21817	2.04654
3.19580	3.18380	3.14219	3.07190	2.97450	2.85214	2.70774	2.54494	2.36880	2.19349	2.01502
3.19580	3.18275	3.13984	3.06797	2.96865	2.84398	2.69679	2.53067	2.35061	2.17263	1.99672
3.19580	3.18167	3.13753	3.06425	2.96330	2.83677	2.68746	2.51894	2.33619	2.15685	1.98090
3.19580	3.18061	3.13534	3.06057	2.95865	2.83077	2.68003	2.51003	2.32576	2.14612	1.97111
3.19580	3.17959	3.13335	3.05544	2.95478	2.82603	2.67448	2.50375	2.31887	2.13967	1.96418
3.19580	3.17865	3.13158	3.05244	2.95169	2.82245	2.67053	2.49960	2.31471	2.13635	1.96454
3.19580	3.17760	3.13006	3.05341	2.94930	2.81983	2.66783	2.49697	2.31230	2.13469	1.96418
3.19580	3.17707	3.12890	3.05180	2.94750	2.81797	2.66603	2.49533	2.31090	2.13382	1.96406
3.19580	3.17645	3.12779	3.05057	2.94618	2.81668	2.66465	2.49431	2.31008	2.13333	1.96406
3.19580	3.17597	3.12703	3.04907	2.94526	2.81581	2.66409	2.49368	2.30960	2.13305	1.96405
3.19580	3.17563	3.12649	3.04906	2.94465	2.81526	2.66362	2.49331	2.30932	2.13290	1.96405
3.19580	3.17542	3.12617	3.04871	2.94431	2.81496	2.66337	2.49311	2.30917	2.13282	1.96405
3.19580	3.17535	3.12607	3.04859	2.94420	2.81486	2.66329	2.49305	2.30913	2.13279	1.96405
3.19580	3.17542	3.12617	3.04871	2.94431	2.81496	2.66337	2.49311	2.30917	2.13282	1.96405
3.19580	3.17563	3.12649	3.04906	2.94465	2.81526	2.66362	2.49331	2.30932	2.13290	1.96405
3.19580	3.17597	3.12703	3.04907	2.94526	2.81581	2.66409	2.49368	2.30960	2.13305	1.96405
3.19580	3.17645	3.12779	3.05057	2.94618	2.81668	2.66465	2.49431	2.31008	2.13333	1.96406
3.19580	3.17707	3.12820	3.05140	2.94750	2.81757	2.66603	2.49533	2.31090	2.13382	1.96406
3.19580	3.17760	3.13006	3.05341	2.94930	2.81983	2.66783	2.49697	2.31471	2.13635	1.96454
3.19580	3.17865	3.13158	3.05544	2.95169	2.82245	2.67053	2.49960	2.31887	2.13967	1.96615
3.19580	3.17959	3.13335	3.05792	2.95478	2.82603	2.67448	2.50375	2.32576	2.14612	1.97111
3.19580	3.18061	3.13534	3.06087	2.95865	2.83077	2.68003	2.51003	2.33619	2.15685	1.98090
3.19580	3.18167	3.13753	3.06425	2.96330	2.83677	2.68746	2.51894	2.34694	2.16817	1.99672
3.19580	3.18275	3.13984	3.06797	2.96865	2.84398	2.69679	2.53067	2.35061	2.17263	1.99672
3.19580	3.18479	3.14219	3.07190	2.97450	2.85214	2.70774	2.54494	2.36880	2.19349	2.01502
3.19580	3.18567	3.14447	3.07584	2.98053	2.86080	2.71965	2.56086	2.38961	2.21817	2.04654
3.19580	3.18641	3.14656	3.07955	2.98634	2.86930	2.73155	2.57701	2.41101	2.24395	2.07582
3.19580	3.18730	3.14835	3.08277	2.99147	2.87692	2.74232	2.59171	2.43057	2.26747	2.10244
3.19580	3.18830	3.14971	3.08527	2.99550	2.88294	2.75087	2.60342	2.44610	2.28601	2.12315
3.19580	3.18925	3.15086	3.08866	2.99865	2.89068	2.75637	2.61093	2.45604	2.29784	2.13632
3.19580	3.19017	3.15206	3.09251	3.00169	2.90069	2.76286	2.61933	2.46545	2.30817	2.14776
3.19580	3.19109	3.15335	3.09544	3.00465	2.90365	2.76935	2.62238	2.47060	2.31166	2.15072
3.19580	3.19200	3.15464	3.09837	3.00760	2.90660	2.77584	2.62531	2.47353	2.31461	2.15368
3.19580	3.19291	3.15593	3.10130	3.01056	2.90956	2.78233	2.62826	2.47646	2.31756	2.15664
3.19580	3.19382	3.15722	3.10423	3.01351	2.91251	2.78882	2.63119	2.47939	2.32051	2.15960
3.19580	3.19473	3.15853	3.10716	3.01646	2.91546	2.79531	2.63412	2.48232	2.32346	2.16256
3.19580	3.19564	3.15984	3.11009	3.01940	2.91840	2.80180	2.63705	2.48525	2.32641	2.16552
3.19580	3.19655	3.16115	3.11302	3.02233	2.92133	2.80830	2.64000	2.48818	2.32936	2.16848
3.19580	3.19746	3.16246	3.11595	3.02526	2.92426	2.81480	2.64293	2.49111	2.33231	2.17144
3.19580	3.19837	3.16377	3.11888	3.02819	2.92719	2.82130	2.64586	2.49404	2.33526	2.17440
3.19580	3.19928	3.16508	3.12181	3.03112	2.93012	2.82780	2.64879	2.49697	2.33821	2.17736
3.19580	3.19979	3.16639	3.12474	3.03405	2.93305	2.83430	2.65172	2.49989	2.34116	2.18032
3.19580	3.20070	3.16770	3.12767	3.03698	2.93598	2.84080	2.65465	2.50280	2.34411	2.18328
3.19580	3.20161	3.16901	3.13060	3.03991	2.93891	2.84730	2.65758	2.50573	2.34706	2.18624
3.19580	3.20252	3.17032	3.13353	3.04284	2.94184	2.85380	2.66051	2.50866	2.35001	2.18920
3.19580	3.20343	3.17163	3.13646	3.04577	2.94477	2.86030	2.66344	2.51159	2.35296	2.19216
3.19580	3.20434	3.17294	3.13939	3.04870	2.94770	2.86680	2.66637	2.51452	2.35591	2.19512
3.19580	3.20525	3.17425	3.14232	3.05163	2.95063	2.87330	2.66930	2.51745	2.35886	2.19808
3.19580	3.20616	3.17556	3.14525	3.05456	2.95356	2.87980	2.67223	2.52038	2.36181	2.20104
3.19580	3.20707	3.17687	3.14818	3.05749	2.95649	2.88630	2.67516	2.52331	2.36476	2.20400
3.19580	3.20798	3.17818	3.15111	3.06042	2.95942	2.89280	2.67809	2.52624	2.36771	2.20696
3.19580	3.20889	3.17949	3.15404	3.06335	2.96235	2.89930	2.68102	2.52917	2.37066	2.20992
3.19580	3.20980	3.18080	3.15697	3.06628	2.96528	2.90580	2.68395	2.53210	2.37361	2.21288
3.19580	3.21071	3.18211	3.15990	3.06921	2.96821	2.91230	2.68688	2.53503	2.37656	2.21584
3.19580	3.21162	3.18342	3.16283	3.07214	2.97114	2.91880	2.68981	2.53796	2.37951	2.21880
3.19580	3.21253	3.18473	3.16576	3.07507	2.97407	2.92530	2.69274	2.54089	2.38246	2.22176
3.19580	3.21344	3.18604	3.16869	3.07800	2.97700	2.93180	2.69567	2.54382	2.38541	2.22472
3.19580	3.21435	3.18735	3.17162	3.08093	2.97993	2.93830	2.69860	2.54675	2.38836	2.22768
3.19580	3.21526	3.18866	3.17455	3.08386	2.98286	2.94480	2.70153	2.54968	2.39131	2.23064
3.19580	3.21617	3.18997	3.17748	3.08679	2.98579	2.95130	2.70446	2.55261	2.39426	2.23360
3.19580	3.21708	3.19128	3.18041	3.08972	2.98872	2.95780	2.70739	2.55554	2.39721	2.23656
3.19580	3.21799	3.19259	3.18334	3.09265	2.99165	2.96430	2.71032	2.55847	2.40016	2.23952
3.19580	3.21890	3.19390	3.18627	3.09558	2.99458	2.97080	2.71325	2.56140	2.40311	2.24248
3.19580	3.21981	3.19521	3.18920	3.09851	2.99751	2.97730	2.71618	2.56433	2.40606	2.24544
3.19580	3.22072	3.19652	3.19213	3.10144	2.99994	2.98380	2.71911	2.56726	2.40901	2.24840
3.19580	3.22163	3.19783	3.19506	3.10437	3.00287	2.99030	2.72194	2.57019	2.41196	2.25136
3.19580	3.22254	3.19914	3.19799	3.10730	3.00580	2.99680	2.72477	2.57312	2.41491	2.25432
3.19580	3.22345	3.20045	3.19992	3.11023	3.00873	2.99973	2.72760	2.57605	2.41786	2.25728
3.19580	3.22436	3.20176	3.20285	3.11316	3.01166	3.00323	2.73043	2.57898	2.42081	2.26024
3.19580	3.22527	3.20307	3.20578	3.11609	3.01459	3.00616	2.73326	2.58191	2.42376	2.26320
3.19580	3.22618	3.20438	3.20871	3.11902	3.01752	3.00910	2.73609	2.58484	2.42671	2.26616
3.19580	3.22709	3.20569	3.21164	3.12195	3.02045	3.01203	2.73892	2.58777	2.42966	2.26912
3.19580	3.22800	3.20700	3.21457	3.12488	3.02338	3.01496	2.74175	2.59070	2.43261	2.27208
3.19580	3.22891	3.20831	3.21750	3.12781	3.02631	3.01789	2.74458	2.59363	2.43556	2.27504
3.19580	3.22982	3.20962	3.22043	3.13074	3.02924	3.02082	2.74741	2.59656	2.43851	2.27800
3.19580	3.23073	3.21093	3.22336	3.13367	3.03217	3.02375	2.75024	2.59949	2.44146	2.28096
3.19580	3.23164	3.21224	3.22629	3.13660	3.03510	3.02668	2.75307	2.60242	2.44441	2.28392
3.19580	3.23255	3.21355	3.22922	3.13953	3.03803	3.02961	2.75590	2.60535	2.44736	2.28688
3.19580	3.23346	3.21486	3.23215	3.14246	3.04096	3.03254	2.75873	2.60828	2.45031	2.28984
3.19580	3.23437	3.21617	3.23508	3.14539	3.04389	3.03547	2.76156	2.61124	2.45326	2.29280
3.19580	3.23528	3.21748	3.23801	3.14832	3.04682	3.03840	2.76439	2.61417	2.45621	2.29576
3.19580	3.23619	3.21879	3.24094	3.15125	3.04975	3.04133	2.76722	2.61710	2.45916	2.29872
3.19580	3.23710	3.22010	3.24387	3.15418	3.05268	3.04426	2.77005	2.62003	2.46211	2.30168
3.19580	3.23801	3.22141	3.24680	3.15711						

TEMPERATURA NA REGIAO. FO= 0.700														
1.75543	1.76531	1.77089	1.77251	1.77062	1.76580	1.75870	1.75011	1.74147	1.73299	1.72468				
1.75543	1.76509	1.77036	1.77158	1.76919	1.76375	1.75590	1.74642	1.73675	1.72761	1.71900				
1.75543	1.76493	1.76682	1.76887	1.76501	1.75777	1.74775	1.73500	1.72300	1.71182	1.70217				
1.75543	1.76338	1.76534	1.76757	1.76248	1.75448	1.74353	1.72896	1.71451	1.68709	1.67570				
1.75543	1.76196	1.76308	1.76589	1.74999	1.73648	1.71893	1.69785	1.67440	1.65570	1.64176				
1.75543	1.76026	1.75923	1.75249	1.74032	1.72303	1.70097	1.67451	1.64458	1.62124	1.60447				
1.75543	1.75834	1.75498	1.74549	1.73011	1.70910	1.68272	1.65121	1.61529	1.58601	1.56936				
1.75543	1.75627	1.75053	1.73837	1.72000	1.69568	1.66559	1.62991	1.58926	1.55954	1.54075				
1.75543	1.75413	1.74808	1.73145	1.71050	1.68347	1.65056	1.61190	1.56807	1.53753	1.52030				
1.75543	1.75200	1.74179	1.72501	1.70196	1.67292	1.63810	1.59765	1.55213	1.52208	1.50750				
1.75543	1.74994	1.73778	1.71922	1.69457	1.66418	1.62827	1.58702	1.54099	1.51228	1.50086				
1.75543	1.74800	1.73415	1.71416	1.68039	1.65178	1.62080	1.57942	1.53362	1.50667	1.49056				
1.75543	1.74625	1.73097	1.70988	1.68335	1.65173	1.61527	1.57413	1.52865	1.50345	1.49793				
1.75543	1.74471	1.72826	1.70636	1.67935	1.64757	1.61124	1.57045	1.52571	1.50148	1.49776				
1.75543	1.74342	1.72605	1.70357	1.67629	1.64448	1.60834	1.56790	1.52361	1.50021	1.49772				
1.75543	1.74239	1.72433	1.70146	1.67403	1.64227	1.60632	1.56616	1.52221	1.49939	1.49770				
1.75543	1.74120	1.72312	1.69912	1.67128	1.63965	1.60397	1.56420	1.52065	1.49848	1.49770				
1.75543	1.74105	1.72215	1.69883	1.67128	1.63965	1.60397	1.56420	1.52065	1.49848	1.49770				
1.75543	1.74120	1.72239	1.69912	1.67158	1.63993	1.60422	1.56440	1.52081	1.49858	1.49770				
1.75543	1.74165	1.72312	1.69999	1.67248	1.64078	1.60498	1.56504	1.52131	1.49886	1.49770				
1.75543	1.74239	1.72433	1.70146	1.67403	1.64227	1.60632	1.56616	1.52221	1.49939	1.49770				
1.75543	1.74342	1.72605	1.70357	1.67629	1.64448	1.60834	1.56790	1.52361	1.50021	1.49772				
1.75543	1.74471	1.72626	1.70366	1.67935	1.64757	1.61124	1.57045	1.52571	1.50148	1.49776				
1.75543	1.74625	1.73057	1.70908	1.68335	1.65173	1.61527	1.57413	1.52865	1.50345	1.49793				
1.75543	1.74800	1.73415	1.71419	1.68039	1.65178	1.62080	1.57942	1.53362	1.50667	1.49656				
1.75543	1.74994	1.73778	1.71922	1.69457	1.66418	1.62827	1.58702	1.54099	1.51228	1.50086				
1.75543	1.75200	1.74179	1.72501	1.70196	1.67292	1.63810	1.59765	1.55213	1.52208	1.50750				
1.75543	1.75413	1.74608	1.73145	1.71050	1.68347	1.65056	1.61190	1.56807	1.53753	1.52030				
1.75543	1.75627	1.75053	1.73837	1.72000	1.69568	1.66559	1.62991	1.58926	1.55954	1.54075				
1.75543	1.75834	1.75498	1.74549	1.73011	1.70910	1.68272	1.65121	1.61529	1.58601	1.56936				
1.75543	1.76026	1.75923	1.75249	1.74032	1.72303	1.70097	1.67451	1.64458	1.62124	1.60447				
1.75543	1.76196	1.75308	1.75589	1.74999	1.73648	1.71893	1.69785	1.67440	1.65570	1.64176				
1.75543	1.76338	1.76534	1.76757	1.76248	1.75448	1.73503	1.71896	1.70151	1.68709	1.67570				
1.75543	1.76443	1.76882	1.76501	1.75501	1.75777	1.74775	1.73570	1.72300	1.71182	1.70217				
1.75543	1.76509	1.77036	1.77158	1.76919	1.76375	1.75590	1.74642	1.73675	1.72761	1.71900				
1.75543	1.76581	1.77089	1.77251	1.77062	1.76580	1.75870	1.75011	1.74147	1.73299	1.72468				

FLUXO DE CALOR LOCAL / FLUXO MAXIMO
 C.09573 0.11807 0.18714 0.29505 0.43792 0.59817 0.74620 0.86057 0.93685
 C.92073 0.99967 1.00000 C.99836 0.99792 0.99781 0.99778 0.99777 0.99777
 C.99777 0.99777 0.99777 C.99777 0.99781 0.99792 0.99836 1.00000 0.99967
 C.95073 0.93685 0.86057 C.74620 0.59817 0.43792 0.29505 0.18714 0.11807

TAXA INSTANTANEA DE CALOR F/FO= 0.02410

CALOR DISSIPADO Q/QC= 1.48294 0.76833

6 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO PRISMA

A solução do problema do prisma, dado por (2-27), (2-28) e (2-29) é também, como a solução do problema do cilindro, colocada sob a forma de um programa de computador, para a rápida obtenção dos resultados.

Inicialmente, são calculadas as coordenadas dos pontos nodais da fronteira e da região, bem como o fator de forma dos elementos da superfície do prisma para a placa, de acordo com a figura 2-2.

A seguir são calculados os valores dos co-senos diretores da normal exterior às faces do prisma. Esses valores aparecem no cálculo de D_s , expressão (4-9), e influenciam o coeficiente B_{ij} . Devido a presença dos cantos na seção retangular, os valores dos co-senos diretores da normal apresentam descontinuidades nesses cantos. Algumas hipóteses foram testadas numericamente, mas os melhores resultados, em comparação com a solução analítica, foram obtidos admitindo-se a normal fazendo um ângulo de 135° com ambos os lados do retângulo. Esta hipótese pode ser justificada

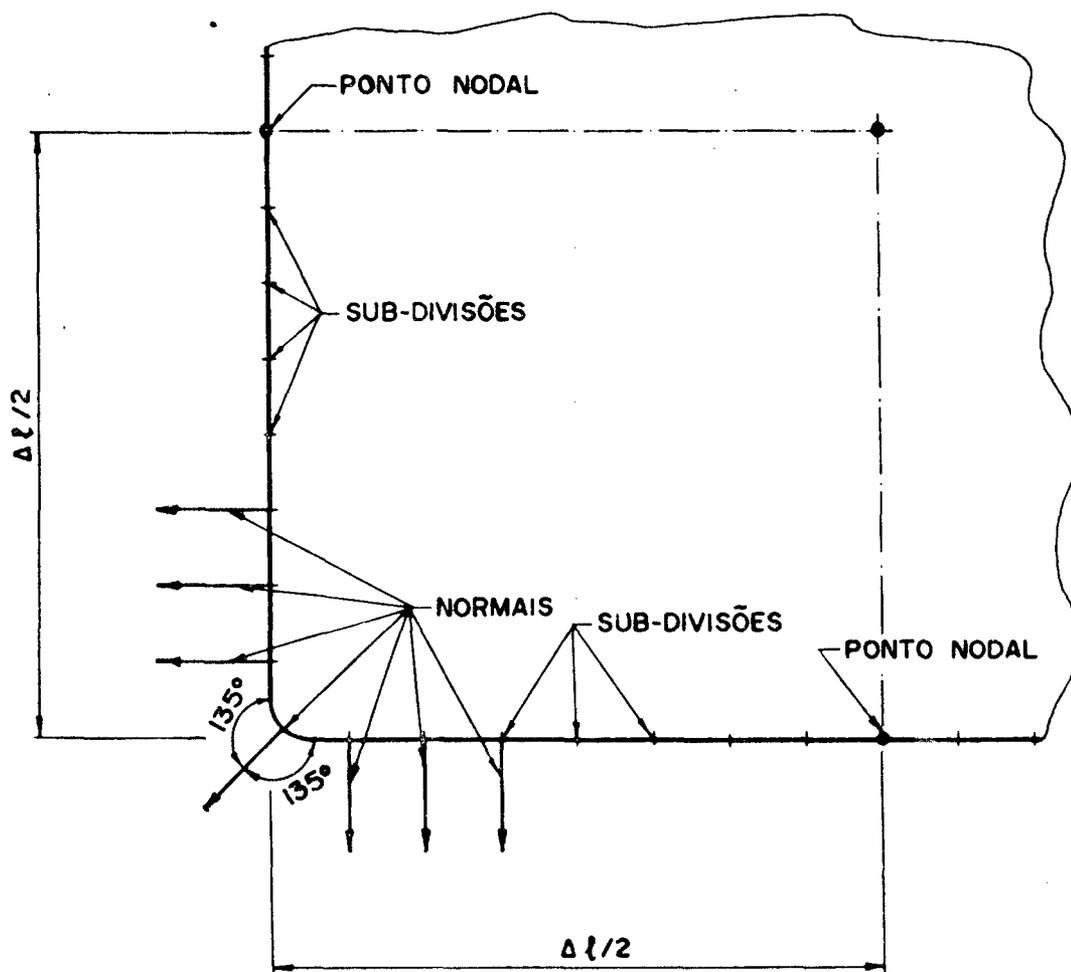


FIGURA 6-1: CONCORDÂNCIA DOS LADOS DA SEÇÃO DO PRISMA

se se imaginar que um arco de circunferência de raio pequeno realiza a concordância dos lados, como mostra a figura 6-1.

A seguir são calculados os coeficientes A_{ij} e B_{ij} para os pontos da fronteira. Para o cálculo das integrais das expressões (4-5) e (4-6), cada elemento ΔS_j da fronteira é dividido, nesse caso, em trinta e duas partes. Chegou-se a esse número após diversos testes com números menores. Também foram realizados testes para um número maior de divisões, mas o aumento obtido na precisão dos resultados não foi significativo, enquanto que o tempo de computador necessário aumentou grandemente.

Em comparação com o número de divisões dos elementos de fronteira utilizado no caso do cilindro, apenas dez, pode-se dizer que essa diferença é causada pela maior "suavidade" do contorno da seção circular do cilindro.

Para o cálculo da integral exponencial do coeficiente A_{ij} é utilizada a mesma subrotina usada no problema do cilindro. A singularidade que ocorre quando $i=j$ é evitada, de maneira análoga à anterior, pela integral:

$$A_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta l/2} E_1(z) \cdot dz \quad (6-1)$$

onde $\Delta l/2$ é a metade do comprimento de cada elemento ΔS_j da fronteira e:

$$z = \frac{R_s^2}{4(t-t')} \quad (6-2)$$

onde

$$R_s^2 = (x_s - x'_s)^2 + (y_s - y'_s)^2 \quad (6-3)$$

onde tanto o pólo (x'_s, y'_s) como o ponto nodal (x_s, y_s) considerado estão sobre a fronteira.

Para o cálculo de B_{ij} , a relação D_s/R_s^2 em (4-6) é calculada para cada ponto no decorrer do programa. Quando, porém, $i=j$, o valor de R_s^2 é nulo, tornando a expressão singular. Nesse caso, utilizando as propriedades da função de Green fundamental, encontra-se:

$$\lim_{i \rightarrow j} B_{ij} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta S_j} \frac{D_s}{R_s^2} \exp\left[-\frac{R_s^2}{4(t_m - t_{m-1})}\right] dS(x'_s, y'_s) = 0 \quad (6-4)$$

Para o cálculo de F_i , através de (4-2) com o uso da regra de Simpson dupla⁸, a região é dividida em uma malha de dez divisões na abcissa e seis divisões na ordenada. Foram realizados cálculos com número de divisões maior, mas o tempo de computador consumido tornou-se proibitivo, enquanto a precisão em relação à solução analítica não aumentou sensivelmente.

O restante do programa segue, de forma análoga, a lógica do programa do cilindro.

O problema de precisão nos valores da temperatura

dos pontos próximos à fronteira voltou a ocorrer, como no caso do cilindro, pelos mesmos motivos. Assim, os pontos próximos à fronteira são obtidos pelo ajuste de parábolas aos valores da temperatura dos pontos adjacentes. Esse procedimento, no entanto, não provoca erros sensíveis em relação à solução analítica, quer no tempo considerado, quer nos subseqüentes.

O programa é rodado inicialmente com o número de radiação igual a zero, isto é, somente com convecção, e admitindo constante o coeficiente de troca de calor por convecção. Isto permite a comparação dos resultados com os da solução analítica para o prisma, que é obtida pelo produto de duas soluções para a placa plana infinita^{9;10}. A distribuição de temperatura para uma placa plana infinita, tendo uma face isolada e a outra exposta à convecção com coeficiente de troca de calor constante é dada por:

$$\theta_x = \frac{T(x,t)-1}{T_0-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\lambda_n \cos(\lambda_n x)}{\lambda_n + \text{sen}\lambda_n \cos\lambda_n} \exp(-\lambda_n^2 t) \quad (6-5)$$

já sob forma adimensional, e onde os λ_n são as raízes de

$$\lambda_n \tan\lambda_n = Bi \quad (6-6)$$

De forma análoga, é obtido o valor de θ_y . Finalmente, pelo produto das duas soluções, obtém-se:

$$\theta(x,y,t) = \theta_x(x,t) \theta_y(y,t) \quad (6-7)$$

Esse valor é usado para a comparação com os resultados obtidos pela solução integral, calculando-se os valores:

$$T(x,y,t) = 1 + \theta(x,y,t) (T_0 - 1) \quad (6-8)$$

São calculadas também a energia dissipada e a taxa de calor instantânea, de acordo com (5-8) e (5-9).

Os resultados estão apresentados nas próximas páginas da seguinte forma:

- Figuras 6-2 a 6-7 - comparação da solução integral com a solução analítica, com $Ri=0$, isto é, apenas com convecção.
- Figuras 6-8, 6-10 e 6-12 - valores da energia dissipada Q/Q_0 para vários valores de Bi e de Ri em função de t , ou Fo .
- Figuras 6-9, 6-11 e 6-13 - valores da taxa de calor instantânea F/F_0 para vários valores de Bi e Ri , em função de t , ou Fo .
- Tabelas 6-I, 6-II e 6-III - Distribuição de temperatura, produzida pelo programa de computador para alguns valores de Bi , Ri e t .
- Figuras 6-14 a 6-16 - Isotermas correspondentes às distribuições de temperatura apresentadas nas tabelas 6-I, 6-II e 6-III.

A análise desses resultados é apresentada no capítulo 7.

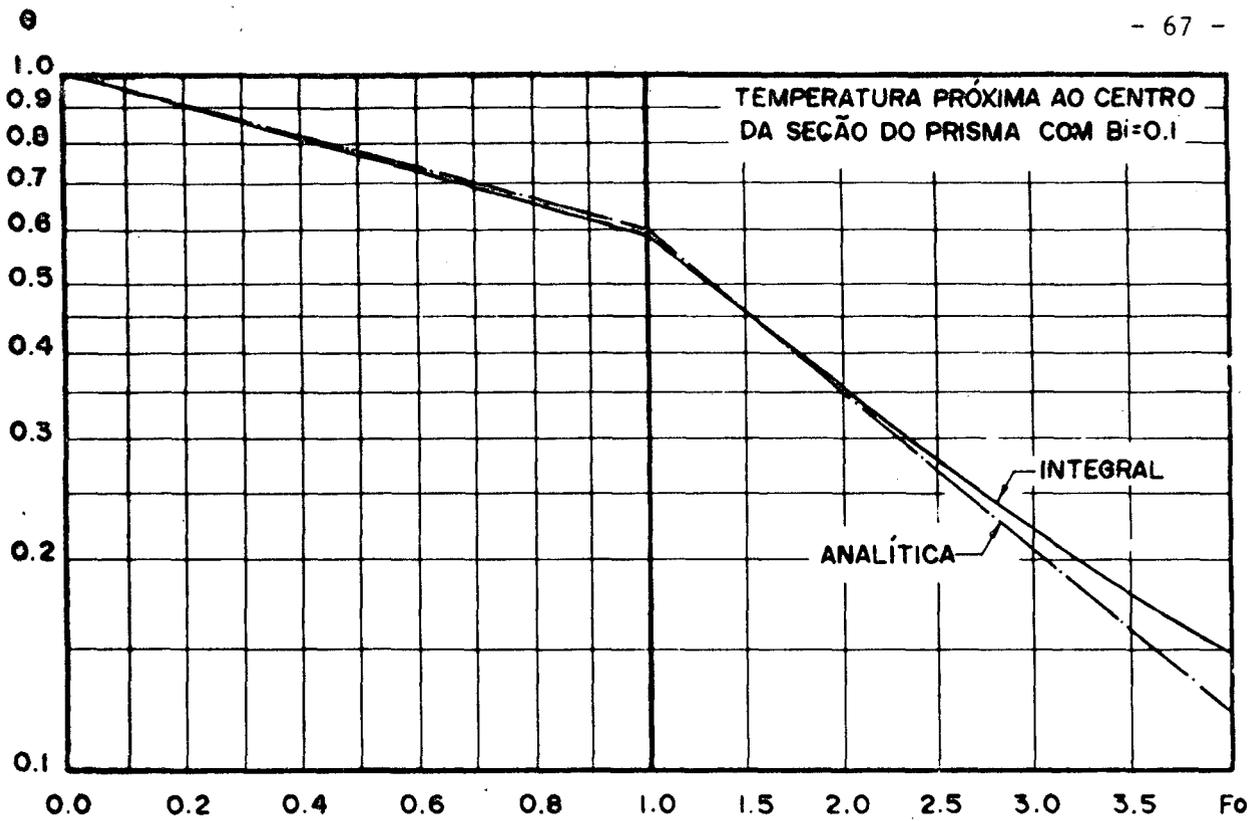


FIGURA 6-2: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

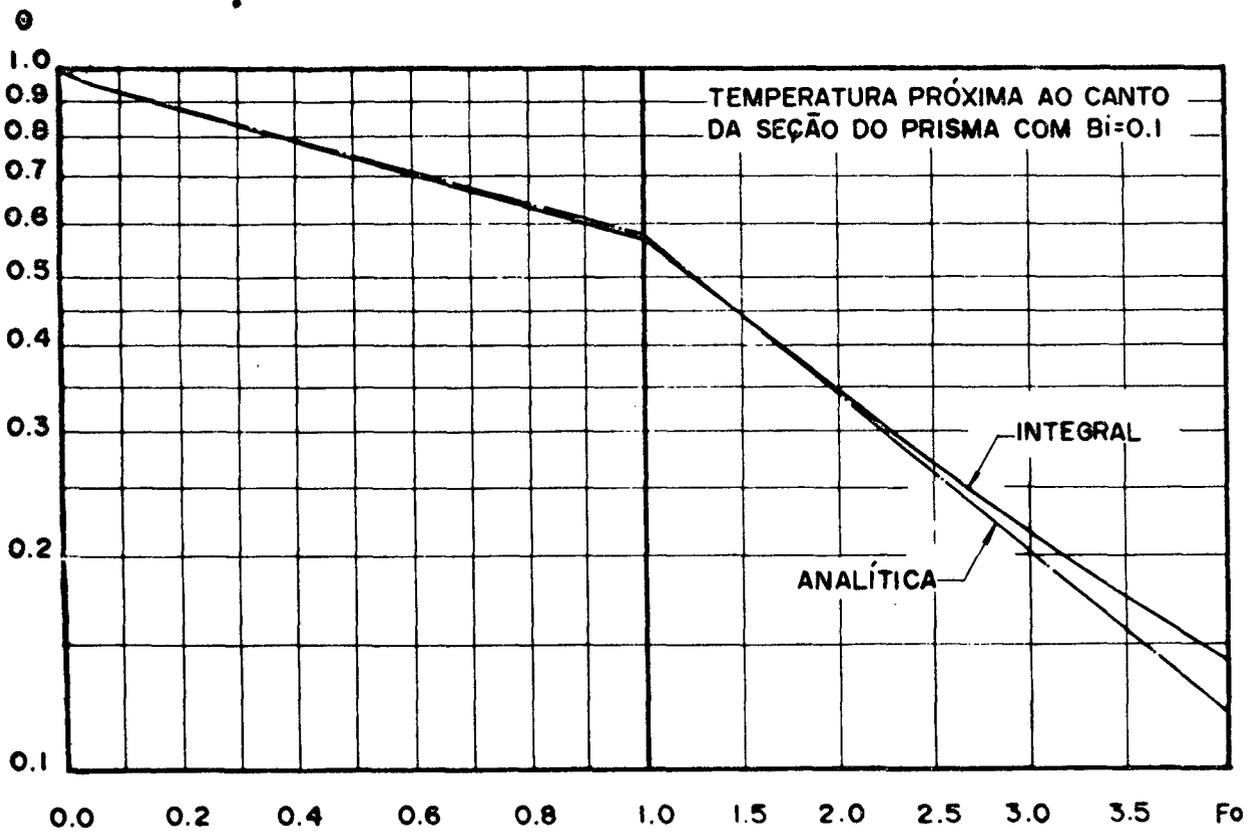


FIGURA 6-3: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

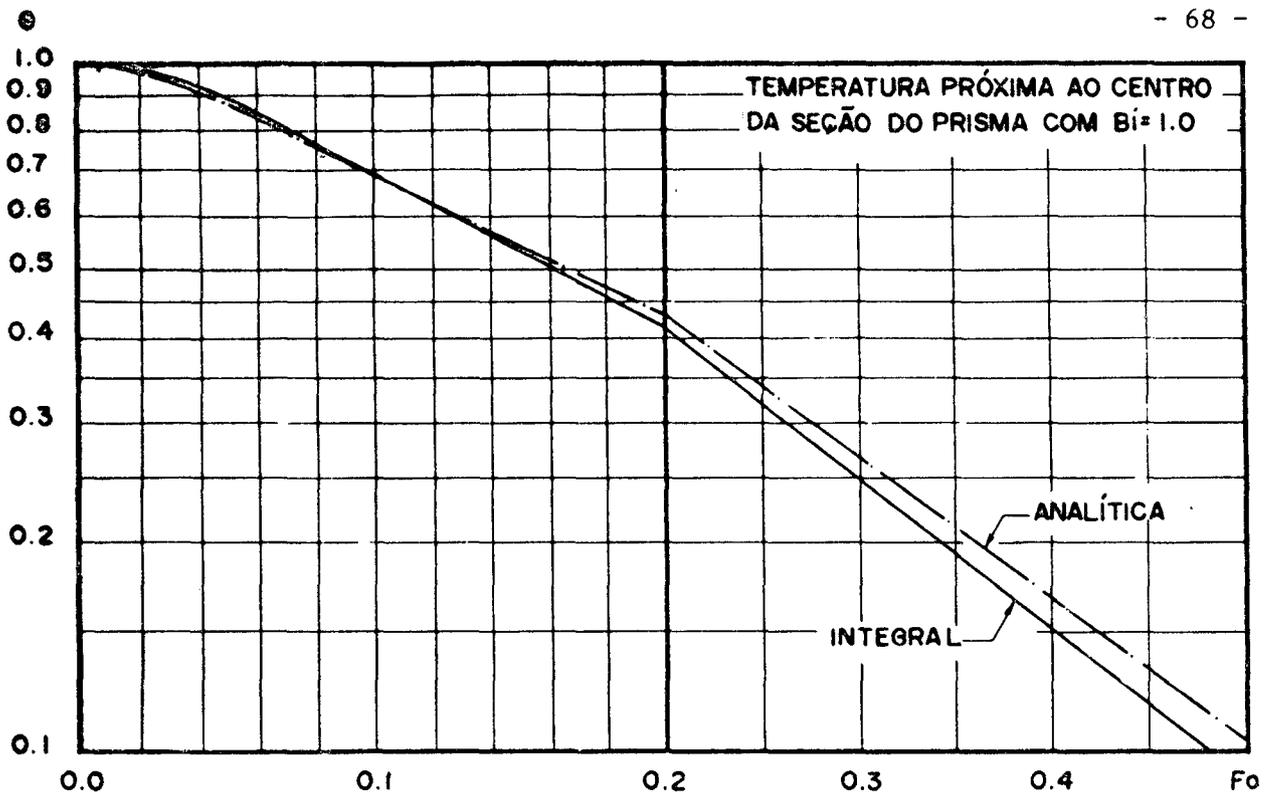


FIGURA 6-4: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

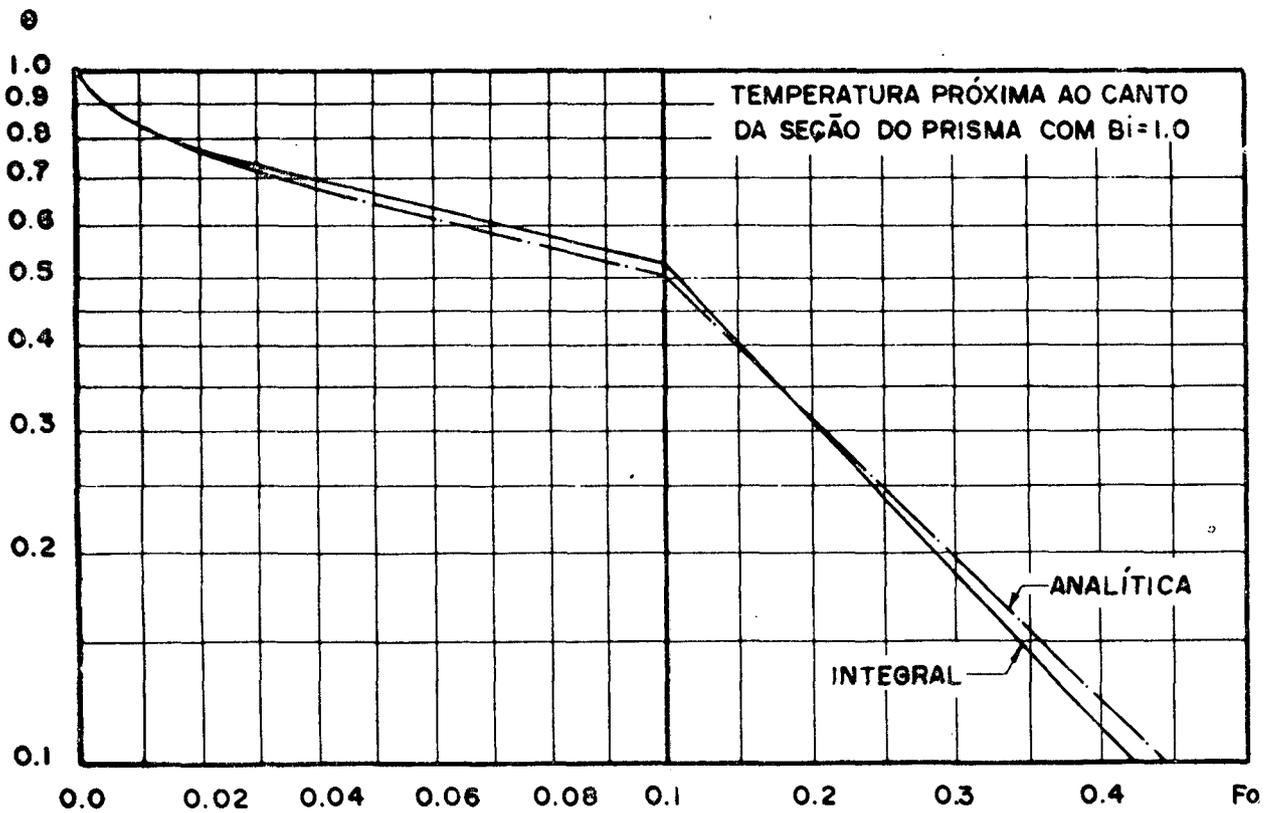


FIGURA 6-5: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

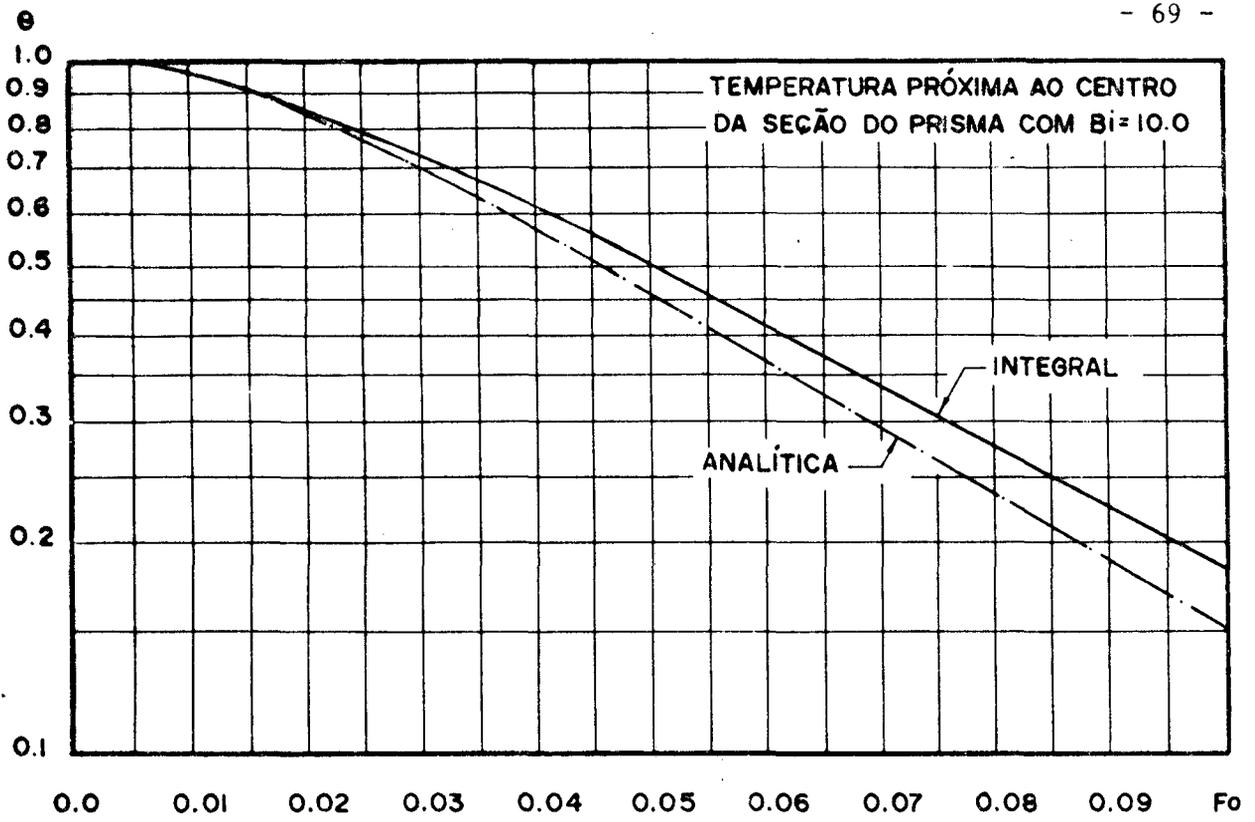


FIGURA 6-6: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

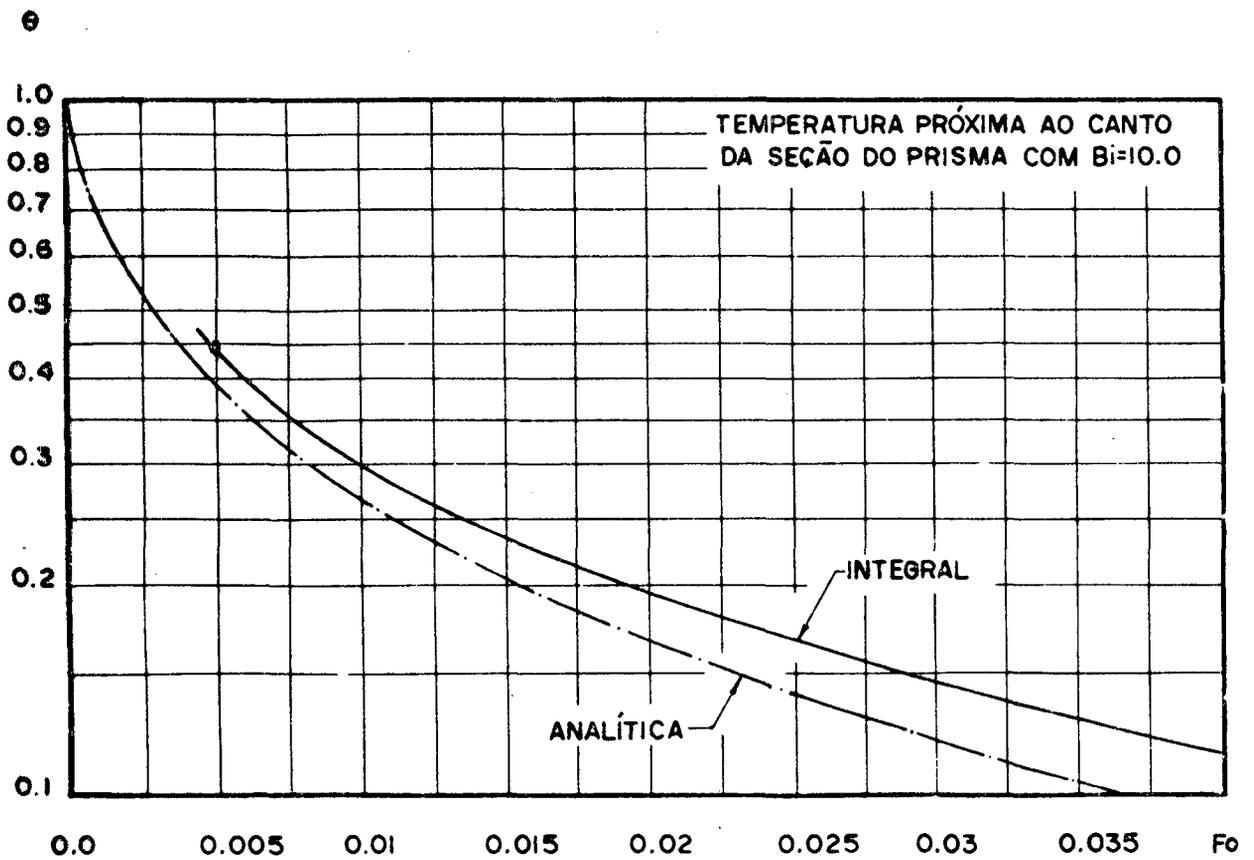


FIGURA 6-7: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

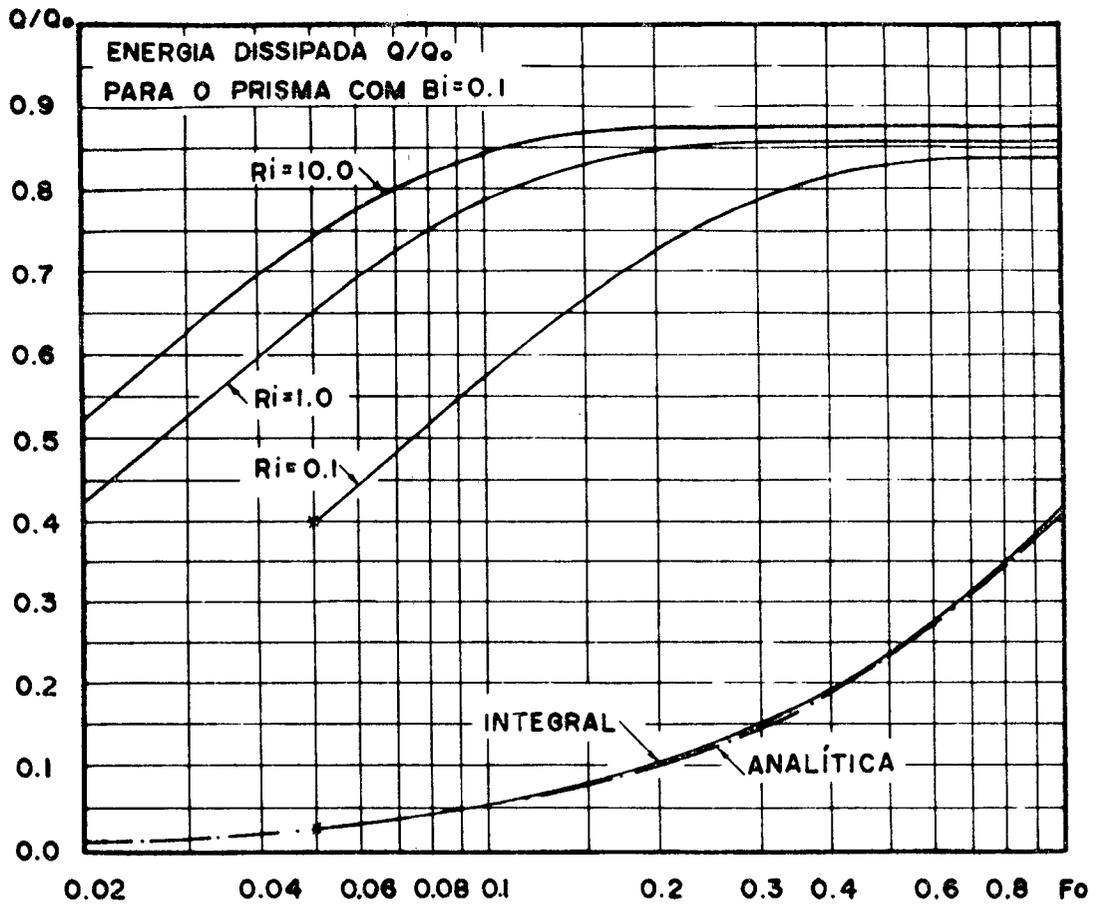


FIGURA 6-8

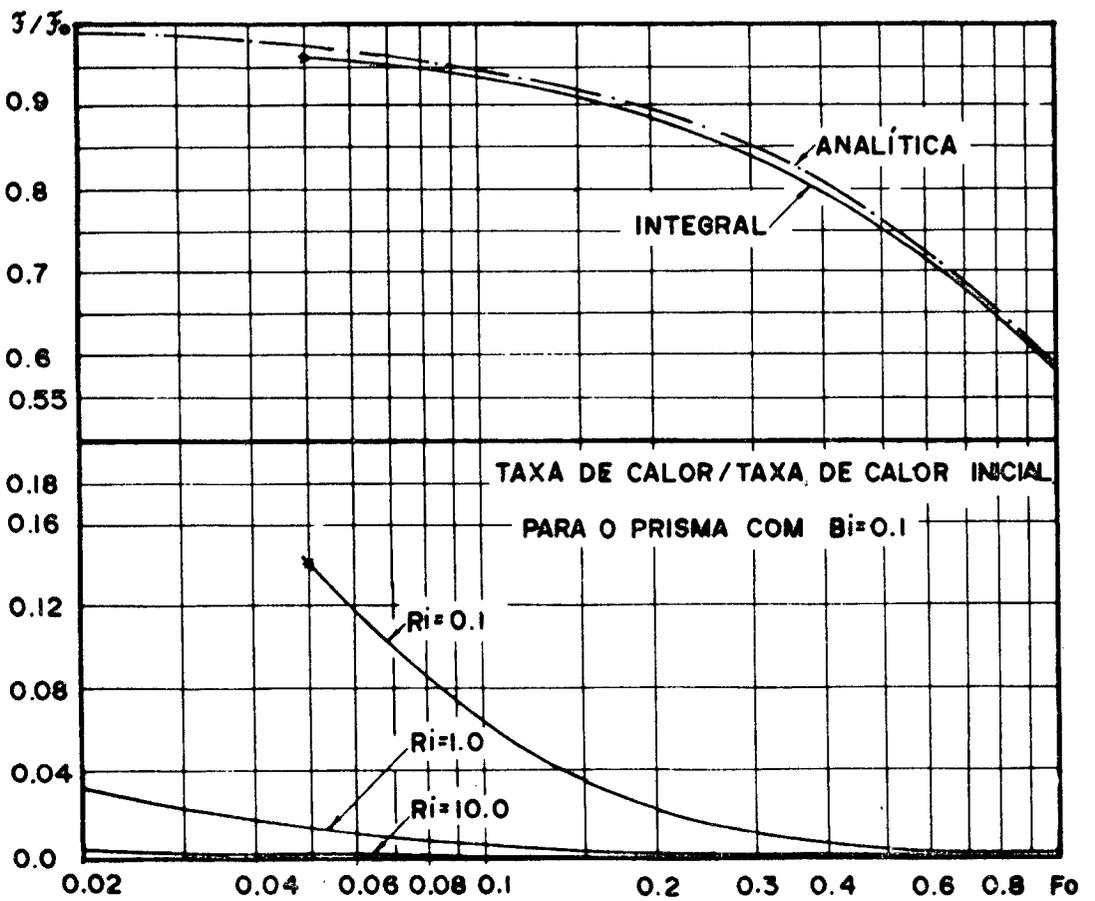


FIGURA 6-9

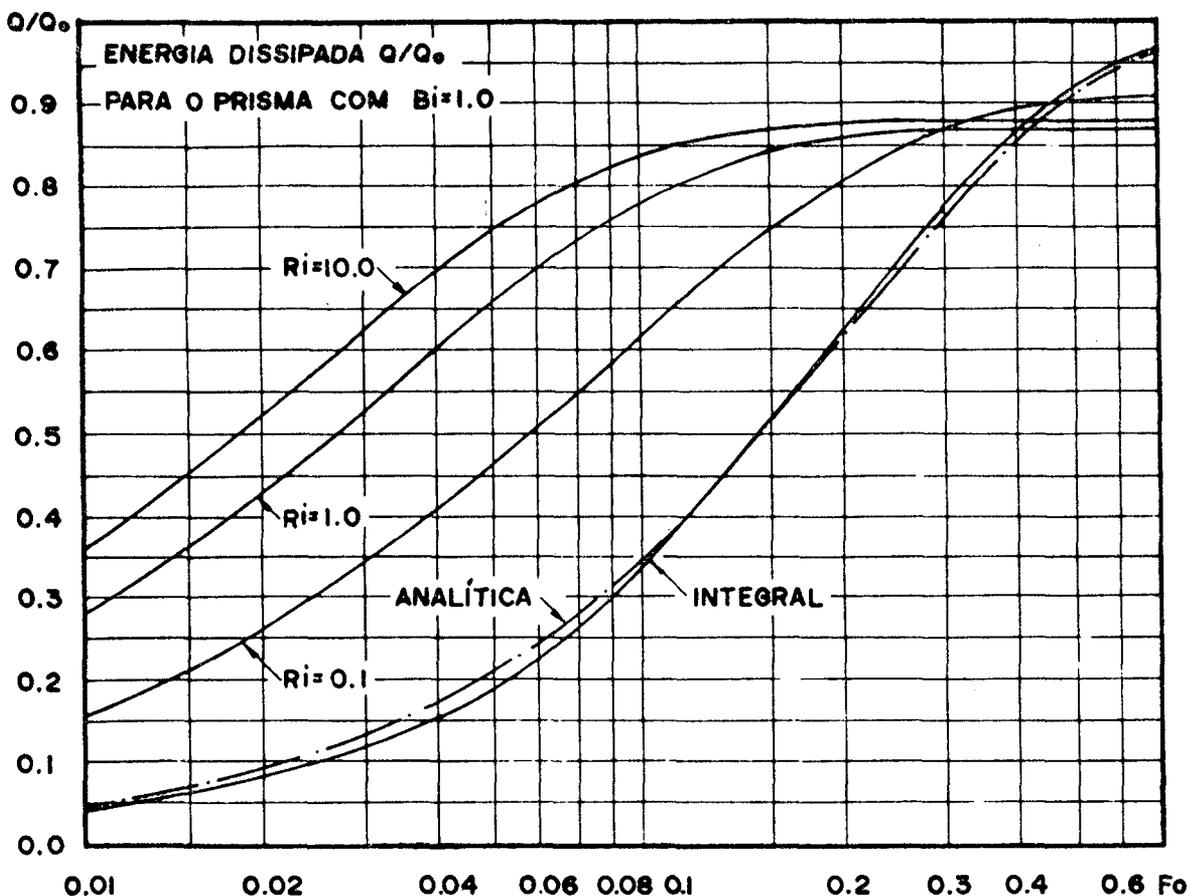


FIGURA 6-10

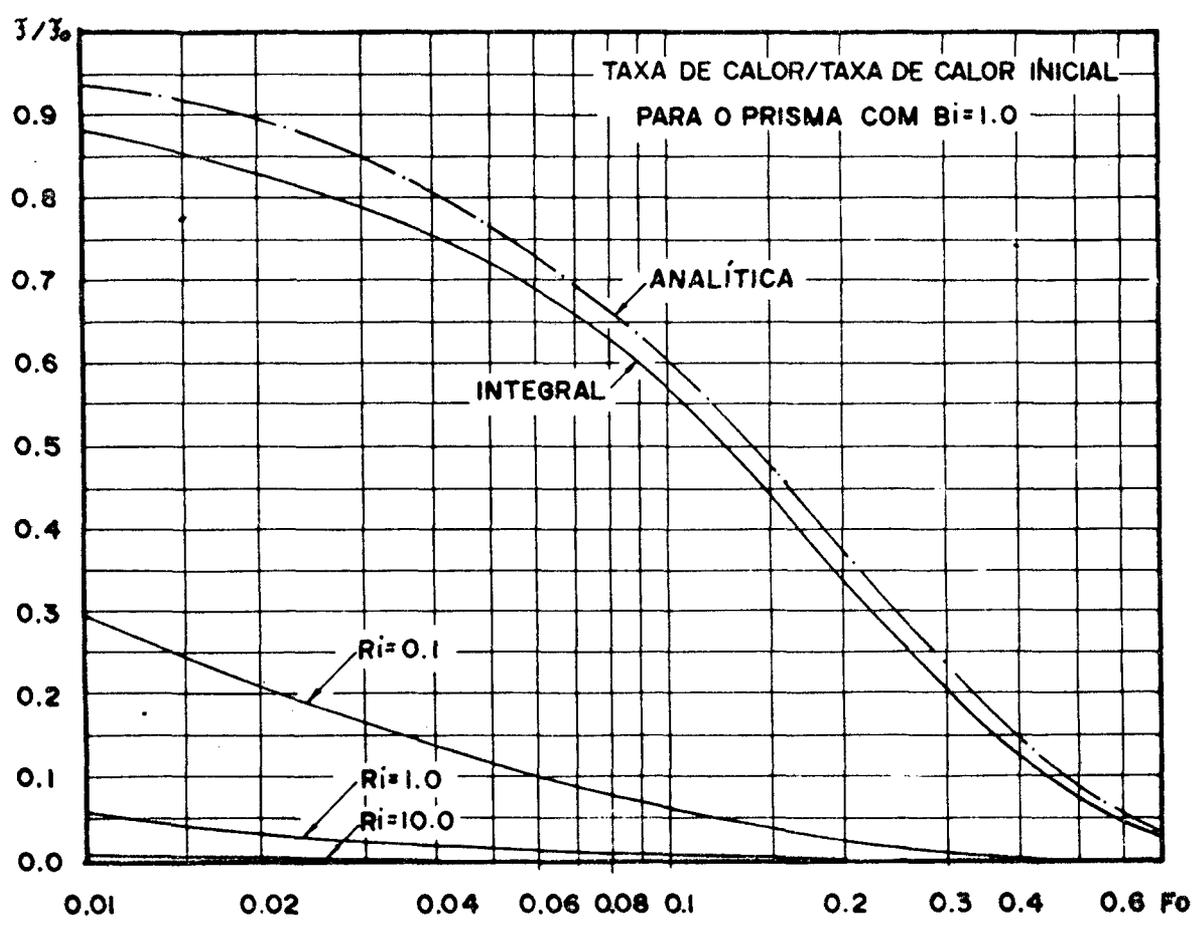


FIGURA 6-11

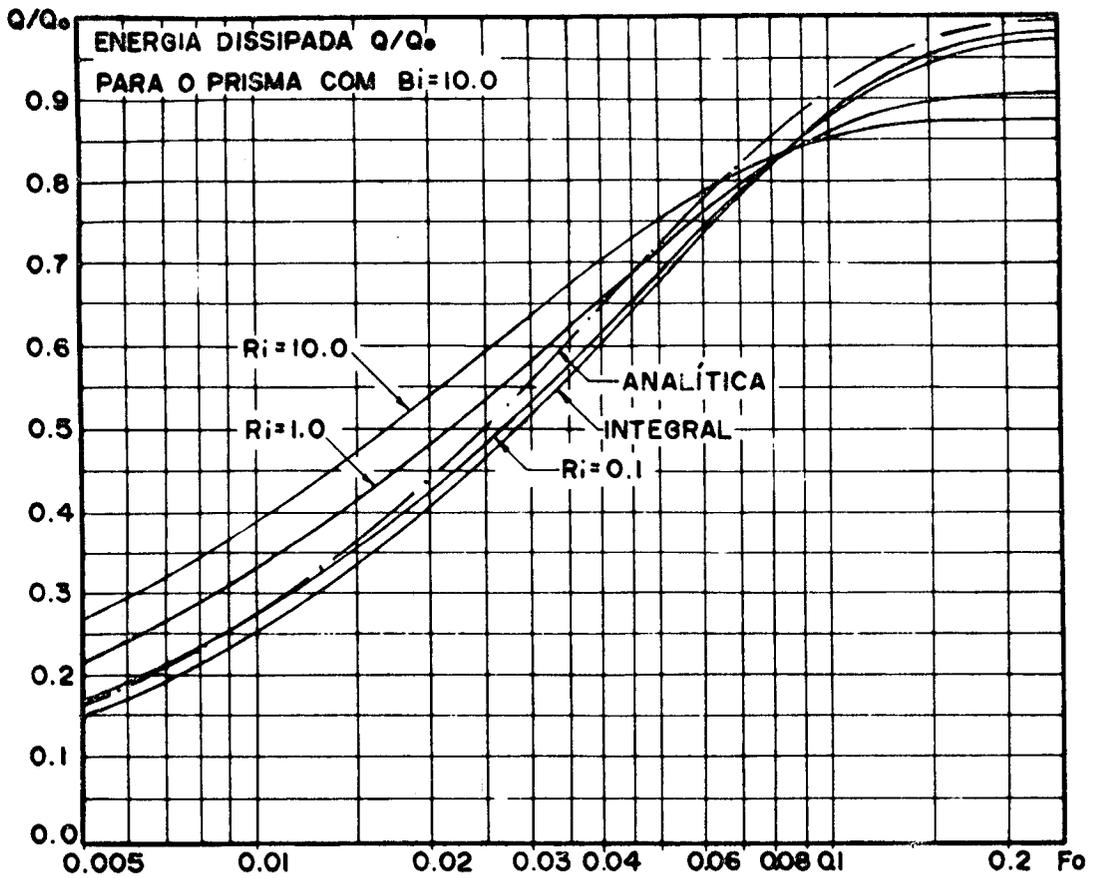


FIGURA 6-12

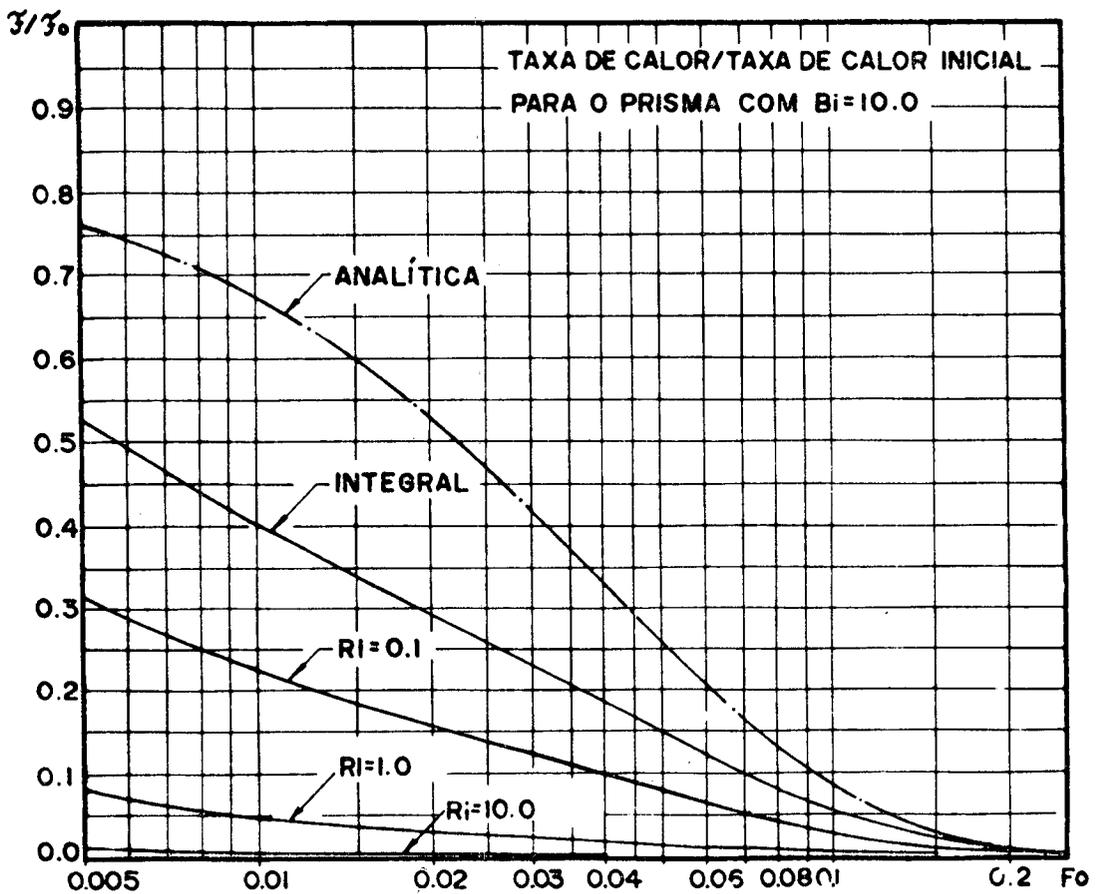


FIGURA 6-13

DISTRIBUICAO DE TEMPERATURA NA REGIAO PARA FU= 0.010

1.791	1.980	2.035	2.041	2.040	2.040	2.041	2.035	1.980	1.791
1.801	2.100	2.503	2.646	2.677	2.680	2.677	2.646	2.503	1.801
1.995	2.510	3.212	3.479	3.544	3.554	3.544	3.479	3.212	1.995
2.052	2.652	3.475	3.793	3.873	3.885	3.873	3.793	3.475	2.052
2.056	2.660	3.486	3.805	3.825	3.897	3.885	3.805	3.486	2.056
2.016	2.547	3.269	3.537	3.602	3.611	3.602	3.537	3.269	2.016
1.890	2.227	2.672	2.811	2.842	2.846	2.842	2.811	2.672	1.890
2.057	2.231	2.276	2.283	2.284	2.284	2.283	2.276	2.231	2.057

FLUXO DE CALOR LOCAL / FLUXO MAXIMO PARA FO= 0.010

0.378427	0.762236	0.866679	0.876927	0.874367	0.874367	0.874367	0.876927	0.866679	0.762236	0.378427
0.655441	0.890543	0.980703	0.980100	0.874750	0.874750	0.874750	0.980100	0.980703	0.890543	0.655441
0.578662	0.882909	0.986728	1.000000	0.998593	0.998593	0.998593	1.000000	0.986728	0.882909	0.578662
0.561966	0.874750	0.980100	0.980703	0.890543	0.890543	0.890543	0.980703	0.980100	0.874750	0.561966

TAXA DE CALOR INSTANTANEA F/FO= 0.057

QUANTIDADE TOTAL DE CALOR DISSIPADA Q/Q0= 0.286

NUMERO DE ITERACOES: 6

TABELA 6-I: RESULTADOS PARA O PRISMA

DISTRIBUICAO DE TEMPERATURA NA REGIAO PARA F₀ 0.050

1.316	1.496	1.541	1.563	1.541	1.496	1.423	1.316
1.330	1.426	1.702	1.779	1.816	1.779	1.702	1.426
1.444	1.590	1.837	2.025	2.148	2.210	2.025	1.590
1.508	1.689	1.995	2.226	2.378	2.453	2.226	1.689
1.536	1.730	2.054	2.291	2.444	2.519	2.291	1.730
1.542	1.729	2.029	2.230	2.355	2.415	2.230	1.729
1.563	1.723	1.955	2.071	2.140	2.173	2.071	1.955
1.779	1.900	1.955	1.987	2.001	2.001	1.987	1.900

FLUXO DE CALOR LOCAL / FLUXO MAXIMO PARA F₀ 0.050

0.289641	0.213401	0.461719	0.609995	0.681109	0.681109	0.461719	0.213401
0.772717	0.751840	0.767295	0.715741	0.574372	0.348230	0.767295	0.751840
0.419385	0.638571	0.815928	0.938085	1.000000	1.000000	0.815928	0.638571
0.348230	0.574372	0.715741	0.767295	0.751840	0.772717	0.767295	0.715741

TAXA DE CALOR INSTANTANEA F/F₀ = 0.013

QUANTIDADE TOTAL DE CALOR DISSIPADA Q/Q₀ = 0.659

NUMERO DE ITEMACOES: 5

TABELA 6-II: RESULTADOS PARA O PRISMA

DISTRIBUICAO DE TEMPERATURA NA REGIAO PARA FU= 0.300

1.104	1.122	1.135	1.145	1.149	1.149	1.145	1.135	1.122	1.104
1.122	1.135	1.158	1.175	1.187	1.194	1.187	1.175	1.158	1.122
1.171	1.194	1.232	1.259	1.278	1.287	1.278	1.259	1.232	1.171
1.218	1.252	1.309	1.350	1.376	1.388	1.376	1.350	1.309	1.218
1.272	1.322	1.401	1.454	1.498	1.498	1.484	1.454	1.401	1.272
1.343	1.415	1.521	1.577	1.607	1.620	1.607	1.577	1.521	1.343
1.404	1.557	1.681	1.722	1.743	1.753	1.743	1.722	1.681	1.404
1.698	1.776	1.803	1.817	1.823	1.823	1.817	1.803	1.776	1.698

FLUXO DE CALOR LOCAL / FLUXO MAXIMO PARA FO= 0.300

-1.00000	-0.598830	-0.485583	-0.433760	-0.412675	-0.412675	-0.412675	-0.433760	-0.485583	-0.598830	-1.000000
0.826677	0.462563	0.303339	0.203565	0.127701	0.127701	0.127701	0.203565	0.303339	0.462563	0.826677
0.174865	0.209706	0.235442	0.254415	0.264194	0.264194	0.264194	0.254415	0.235442	0.209706	0.174865
0.050705	0.127701	0.203565	0.303339	0.462563	0.462563	0.462563	0.303339	0.203565	0.127701	0.050705

TAXA DE CALOR INSTANTANEA F/FO= 0.000

QUANTIDADE TOTAL DE CALOR DISSIPADA Q/Q0= 0.805

NUMERO DE ITERACOES: 5

TABELA 6-III: RESULTADOS PARA O PRISMA

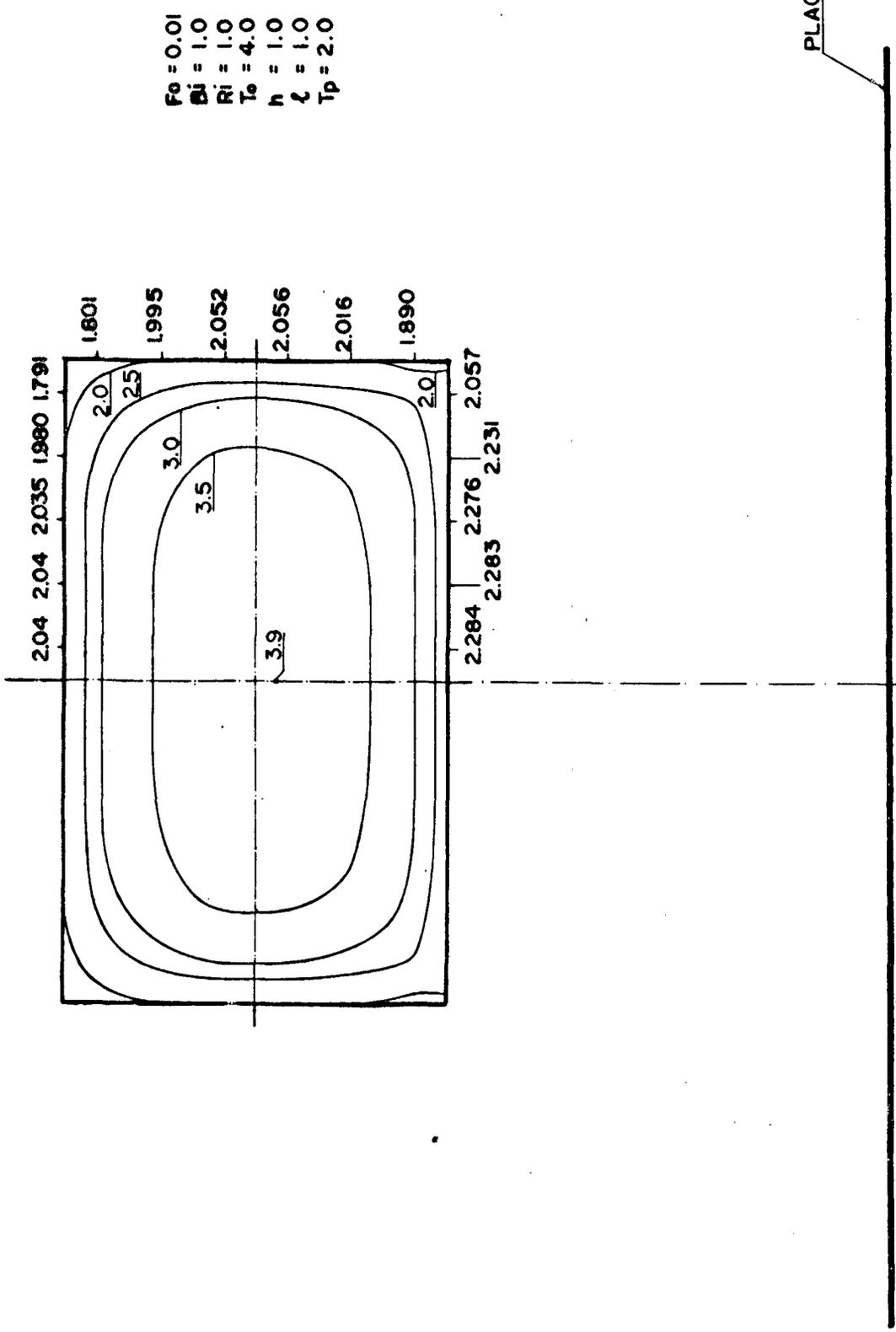


FIGURA 6-14: ISOTERMAS PARA O PRISMA

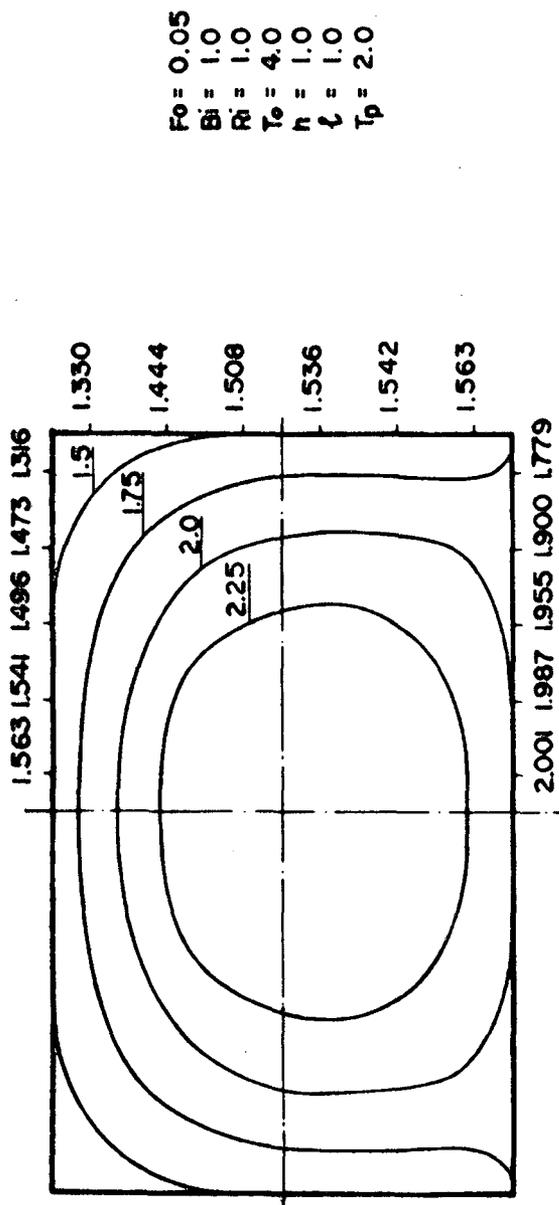
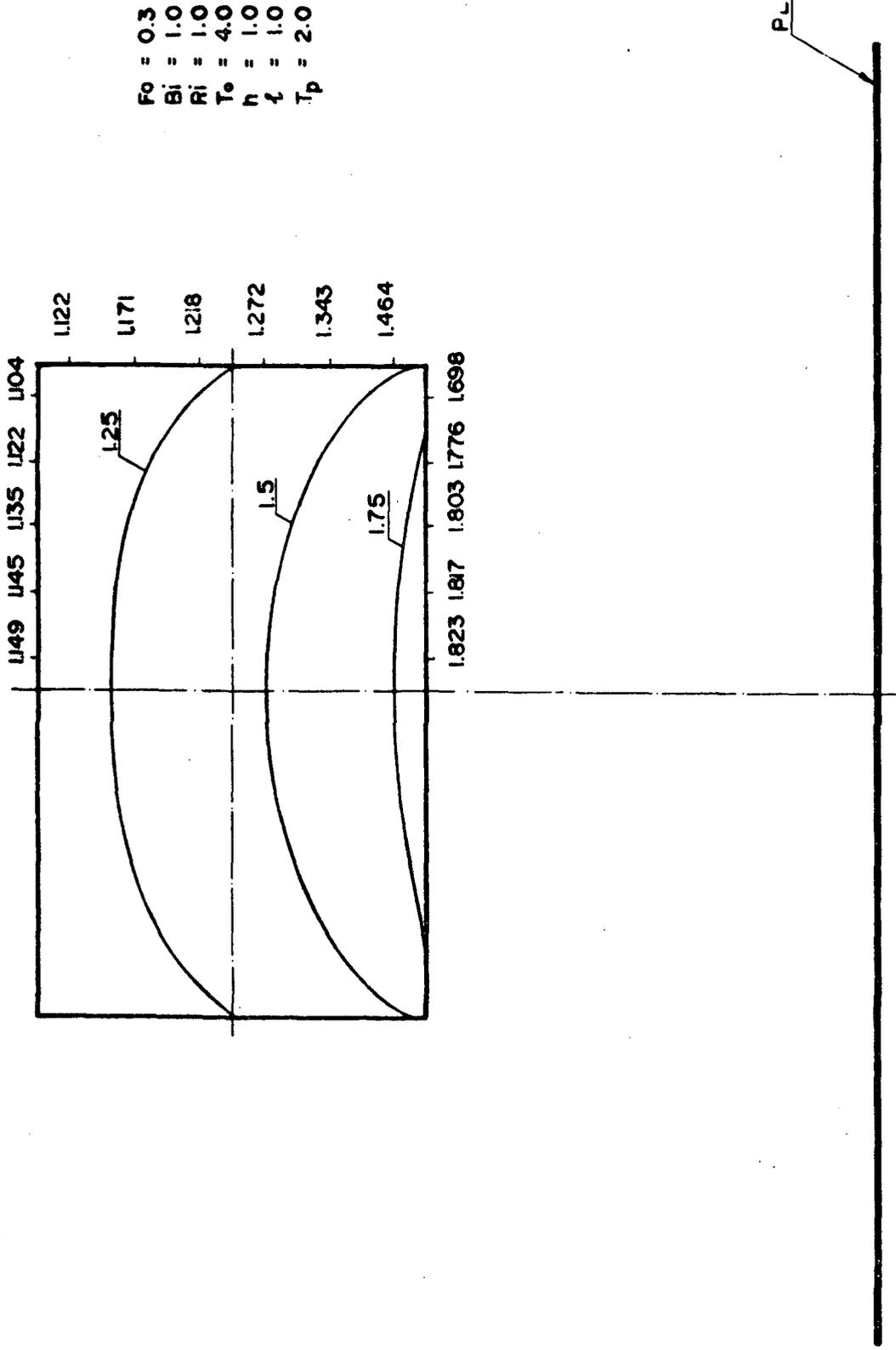


FIGURA 6-15: ISOTERMAS PARA O PRISMA



$F_0 = 0.3$
 $Bi = 1.0$
 $Ri = 1.0$
 $T_0 = 4.0$
 $h = 1.0$
 $f = 1.0$
 $T_p = 2.0$

FIGURA 6-16: ISOTERMAS PARA O PRISMA

7 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

O problema proposto para o cilindro foi resolvido de acordo com a metodologia apresentada no capítulo 5, com os seguintes dados numéricos:

- número de divisões na fronteira: trinta e seis sendo cada divisão ΔS_j subdividida em dez partes, para a realização das integrais numéricas correspondentes.
- número de divisões na região: trezentos e sessenta, sendo trinta e seis divisões no ângulo e dez divisões no raio.
- tamanho de intervalo de tempo: entre 0.02 e 0.1 , em tempo adimensional.
- número de Biot: 0.1, 1.0 e 4.0
- número de radiação: 0.1, 1.0 e 4.0, sendo utilizadas as combinações destes valores, B_i e R_i , para o cálculo de diversas situações.

- temperatura inicial do cilindro: $T_o = 4.0$ em todos os cálculos. Tal escolha baseia-se no fato desta temperatura ser comum em processos de têmpera, por exemplo. Considerando a temperatura ambiente como 27°C , esta temperatura inicial será de 927°C .

- temperatura da placa isotérmica: $T_p = 2.0$ em todos os cálculos.

- semi-largura da placa: $\ell = 1.5$

- distância da placa ao plano central: $h = 1.5$

Inicialmente o programa foi rodado com $Ri = 0$, fornecendo resultados para comparação com a solução analítica. Ambas as soluções estão plotadas nas figuras 5-2 a 5-7.

Nas figuras 5-2 e 5-3 pode-se examinar os valores da diferença de temperatura adimensional dados pela solução analítica (5-10) e os calculados pela solução integral, transformados em diferença de temperatura adimensional por:

$$\theta = \frac{T-1}{T_o-1}$$

para $Bi = 0.1$ no centro e na superfície do cilindro. Pode-se notar que com o aumento do tempo (ou número de Fourier) os valores calculados pelo método integral se afastam cada vez mais dos valores calculados pela solução analítica. Isso se deve ao fato do método ser sequencial, isto é, calculado passo a passo. Assim, ca

da novo passo calculado incorpora em si o erro do passo anterior, gerando um erro acumulativo. Pode-se observar que a discrepância entre os valores de diferença adimensional de temperatura é da ordem de -27% para $Fo = 10.0$, mas, transformando esses valores em temperatura adimensional, essa diferença cai para valores da ordem de -8%, diferença que se mantém para valores dimensionais reais.

Nas figuras 5-4 e 5-5 pode-se observar valores da diferença de temperatura adimensional para $Bi = 1.0$ no centro e na superfície do cilindro. Pode-se notar que a diferença entre os valores calculados pelo método integral e pela solução analítica é sensivelmente menor que para $Bi = 0.1$. Para $Fo = 1.5$, na superfície do cilindro, figura 5-4, pode-se calcular uma diferença da ordem de -11%, que cai para valores da ordem de -3% para temperaturas adimensionais e para temperaturas dimensionais reais. Para $Fo = 1.2$ no centro do cilindro, figura 5-5, pode-se calcular uma diferença da ordem de -8%, que cai para valores da ordem de -1.5% para temperaturas adimensionais e para temperaturas dimensionais reais.

Os valores para diferença de temperatura adimensional para $Bi = 4.0$, no centro e na superfície do cilindro estão apresentados nas figuras 5-6 e 5-7, respectivamente. Pode-se observar que a diferença entre o resultado da solução integral e o da solução analítica no centro do cilindro para $Fo = 0.7$ (Fig.5-6) fica reduzida a valores da ordem de +5% para diferença de temperatura adimensional, o que corresponde a valores da ordem de +1.5%

para temperatura adimensional e temperatura dimensional real.

Valores da energia dissipada Q/Q_0 calculados pela solução integral e pela solução analítica estão apresentados nas figuras 5-8, 5-10 e 5-12 para $Bi = 0.1$, $Bi = 1.0$ e $Bi = 4.0$, respectivamente. Na figura 5-8 pode-se observar que para $Fo = 4.0$ a diferença entre os valores da solução integral e os da analítica é da ordem de + 7.5%, notando-se a mesma tendência ao aumento da diferença, como nas figuras 5-2 e 5-3. Porém, para $Bi = 1.0$, vê-se que a diferença entre os valores da solução integral e os da analítica para $Fo = 1.5$ cai para valores da ordem de + 2.5%, desaparecendo a tendência ao aumento dessa diferença. E, para $Bi = 4.0$, praticamente não existe diferença entre os valores calculados pela solução integral e os calculados pela solução analítica, para Q/Q_0 .

Este fato interessante é devido ao uso de um grande número de passos no cálculo da solução com $Bi = 0.1$, enquanto que com $Bi = 1.0$ e $Bi = 4.0$, o número de passos utilizados é menor. Naturalmente, com maior número de Biot, o cilindro esfria em um tempo menor, requerendo o cálculo um número de passos menor para atingir o regime permanente. Assim, o erro acumulado é menor.

Valores da taxa de calor instantânea F/F_0 calculados com resultados da solução integral e da solução analítica são apresentados nas figuras 5-9, 5-11 e 5-13 para $Bi = 0.1$, $Bi = 1.0$ e $Bi = 4.0$, respectivamente. Porém, esses valores são funções lineares da temperatura da superfície apresentando, assim, o mesmo com

portamento daquela.

Visando reduzir as diferenças mais sensíveis encontradas nesses resultados, foi aumentado o número de pontos na fronteira e na região. Como consequência, obteve-se um tempo de processamento em computador proibitivamente longo e uma pequena diminuição nas diferenças. Todavia, um aumento no número de divisões implica em uma diminuição de valores de distâncias (R^2) que influem no cálculo da função de Green. Isto pode provocar problemas de precisão numérica pelo uso de valores muito pequenos (ou muito grandes).

A influência da troca de calor por radiação com a placa isotérmica e com o meio ambiente pode ser observada nas figuras 5-8 a 5-13.

Na figura 5-8 está apresentada a energia dissipada Q/Q_0 para $Bi = 1.0$ e com $Ri = 0.0$, $Ri = 0.1$, $Ri = 1.0$ e $Ri = 4.0$. Pode-se observar que o regime permanente é atingido para $Fo = 3.0$ com $Ri = 0.1$, para $Fo = 1.2$ com $Ri = 1.0$ e para $Fo = 1.0$ com $Ri = 4.0$. A energia dissipada Q/Q_0 não atinge o valor 1.0 pois a distribuição de temperatura em regime permanente nunca será uniforme. Isto se deve à presença da placa à temperatura T_p , que troca calor por radiação com o cilindro, fazendo com que sua parte inferior permaneça a uma temperatura mais alta do que a do meio ambiente.

Na figura 5-9 está apresentada a taxa instantânea

de calor F/F_0 para $Bi = 0.1$ com o mesmo conjunto de números de radiação. É necessário notar que a taxa de troca de calor cai consideravelmente com o aumento de Ri ; naturalmente, isto é provocado por um rápido esfriamento da superfície. Porém, valores de temperatura na superfície e de taxa de calor para tempos menores que o apresentado, $Fo = 0.05$, não podem ser calculados diretamente pela solução integral. Isto se deve ao aparecimento de "underflow" no computador, para tempos menores que 0.02, e posterior divisão por zero, interrompendo o processamento do programa. Esta dificuldade já havia sido notada por Chang².

Nas figuras seguintes, 5-10 a 5-13, os comportamentos observados para a energia dissipada Q/Q_0 e para a taxa de troca de calor F/F_0 são análogos aos observados nas figuras 5-8 e 5-9. É digna de nota, porém, a influência do alto número de Biot na figura 5-12, que faz com que a influência da radiação na energia dissipada seja pequena. O mesmo não acontece com a taxa de troca de calor, figura 5-13, que continua caindo consideravelmente com o aumento do número de radiação.

Para complementação, são apresentados nas tabelas 5-I, 5-II e 5-III alguns resultados extraídos das listagens do computador e nas figuras 5-14 a 5-16, as isothermas correspondentes.

Na tabela 5-I está apresentada a distribuição de temperatura no cilindro submetido a convecção com $Bi = 1.0$ e a radiação com $Ri = 0.1$, para $Fo = 0.02$. Cada valor corresponde a um

ponto nodal da malha apresentada na figura 2-1. É mostrada, ainda, a relação entre o fluxo de calor local em cada elemento ΔS_j da fronteira e o fluxo máximo na fronteira. Isto permite observar a assimetria provocada pela presença da placa. Além da taxa de troca de calor F/F_0 e da energia dissipada Q/Q_0 é apresentado o número de iterações utilizado no método de Newton-Raphson. A convergência, nesse caso, foi obtida com cinco iterações, para uma tolerância $\xi = 0.001$ entre o valor de temperatura calculado e o anterior, para cada ponto nodal da fronteira.

Na tabela 5-II o valor de F_0 é 0.2 e na tabela 5-III é $F_0 = 0.7$, mostrando a evolução da temperatura com o tempo. Nos dois casos o número de iterações reduziu-se a quatro. Em todos os cálculos realizados, o número de iterações não superou a sete, para a mesma tolerância.

As isoterms apresentadas nas figuras 5-14 a 5-16 mostram a tendência ao deslocamento do ponto mais quente para o local mais próximo da placa, bem como a tendência à uniformização da temperatura.

Durante a realização dos cálculos, alguns problemas foram encontrados. O primeiro deles foi o tempo de processamento grande em relação a outros métodos, no caso, a solução analítica para a convecção. Outro problema surgido foi o da precisão dos valores da temperatura em pontos nodais próximos à fronteira, bem como a oscilação desses valores com a variação do ângulo. Verificou-se que ambos eram causados pela singularidade da função de

Green e pelo método de integração utilizados. Ainda para valores grandes do módulo de Fourier, a solução integral apresentou uma instabilidade para problemas com radiação, traduzidas pelo aparecimento de temperaturas na fronteira maiores que no interior do cilindro. Acredita-se que tal instabilidade seja ainda causada pelo método de integração utilizado e pelas características da função de Green fundamental.

O problema proposto para o prisma foi resolvido de acordo com a metodologia apresentada no capítulo 6, com os seguintes dados numéricos:

- largura do prisma: $x_0 = 1.0$
- altura do prisma: $y_0 = 0.6$
- número de divisões na fronteira: trinta e dois, sendo cada divisão ΔS_j subdividida novamente em trinta e duas partes, para o cálculo das integrais correspondentes.
- número de divisões na região: sessenta, sendo dez na abcissa e seis na ordenada.
- intervalos de tempo: entre 0.005 e 0.1, em tempo adimensional.
- números de Biot: 0.1, 1.0 e 10.0
- número de radiação: 0.1, 1.0 e 10.0, sendo utilizadas combinações destes valores, Bi e Ri , para o cálculo das diversas situações.
- temperatura inicial do prisma: $T_0 = 4.0$ em todos

os cálculos. A justificativa da escolha é a mesma do cilindro.

- temperatura da placa isotérmica: $T_p = 2.0$
- semi-largura da placa: $\ell = 1.0$
- distância ao plano central: $h = 1.0$

Inicialmente, o programa foi rodado com $Ri = 0.0$, fornecendo resultados para comparação com a solução analítica (6-5). Ambas as soluções estão plotadas nas figuras 6-2 a 6-7.

Nas figuras 6-2 e 6-3 pode-se examinar os valores da diferença de temperatura adimensional dados pela solução analítica e os calculados pela solução integral para $Bi = 0.1$. Os pontos cujas temperaturas foram plotadas são: o ponto mais próximo ao centro da seção retangular do prisma e o ponto mais próximo do canto da mesma seção. Não são apresentadas as temperaturas no centro e no canto do prisma devido ao fato da malha ter sido escolhida de forma que os cantos não fossem pontos nodais, conforme a figura 2-2. Assim foi evitada a singularidade da equação integral que existe nos cantos da seção². Em ambas as figuras nota-se uma tendência ao aumento da diferença entre os valores da solução integral e os da solução analítica com o aumento do número de Fourier, embora até $Fo = 2.0$ praticamente não exista diferença entre eles.

Isto se deve ao fato do método ser seqüencial, como foi frisado no caso do cilindro. Esse erro acumulado poderia ser evitado pela solução simultânea de todos os pontos nodais no tempo; porém a quantidade de memória de computador utilizada seria

excessivamente grande².

Já nas figuras 6-4 e 6-5, para $Bi = 1.0$, nota-se que a diferença entre os valores da solução integral e os da solução analítica são menores que para $Bi = 0.1$ e a tendência ao aumento dessa diferença com o passar do tempo é amenizada.

Este comportamento pode ser explicado de forma análoga ao caso do cilindro. Com menores números de Biot, o tempo requerido para o esfriamento do prisma é maior, obrigando ao uso de um grande número de passos no cálculo, e causando maior acúmulo de erro. Com números de Biot maiores o esfriamento é mais rápido, o número de passos é menor e, conseqüentemente, o acúmulo de erro é menor.

Porém, nas figuras 6-6 e 6-7, para $Bi = 10.0$, nota-se o aparecimento de diferenças grandes entre os valores da solução integral e os da solução analítica. Essas diferenças indicam a necessidade de um número maior de divisões na fronteira e na região, e de uma diminuição no intervalo de tempo utilizado. Ambas as providências, porém, causam um crescimento excessivo do tempo de processamento, como no caso do cilindro.

Valores da energia dissipada Q/Q_0 calculados com valores de temperatura obtidos da solução integral e da solução analítica são apresentados nas figuras 6-8, 6-10 e 6-12 para $Bi=0.1$, $Bi = 1.0$ e $Bi = 10.0$, respectivamente. Pode-se notar que a concordância dos valores das duas soluções é boa, embora os valores de

temperatura apresentem as diferenças já mencionadas.

O mesmo já não ocorre com os valores da taxa de calor instantâneo F/F_0 plotados nas figuras 6-9, 6-11 e 6-13 para $Bi = 0.1$, $Bi = 1.0$ e $Bi = 10.0$, respectivamente. Embora para $Bi = 0.1$, figura 6-13, os valores de F/F_0 apresentem boa concordância com os da solução analítica, as diferenças que aparecem para $Bi = 1.0$ e $Bi = 10.0$ indicam a necessidade de um aumento no número de divisões, quer na região, quer na fronteira.

A influência da troca de calor por radiação com a placa isotérmica e com o meio ambiente pode ser observada nas figuras 6-8 a 6-13. Como no caso do cilindro, pode-se observar que o regime permanente é atingido em tempos menores e que a energia dissipada não atinge o valor 1.0, pois em regime permanente o calor trocado por radiação com a placa mantém a parte inferior do prisma a uma temperatura maior que a do ambiente. A taxa de calor instantânea F/F_0 também cai consideravelmente com o aumento do número de radiação, indicando que, quando Ri é grande, a temperatura cai rapidamente nos primeiros tempos do processo. No caso do prisma conseguiu-se reduzir os valores do intervalo de tempo até 0.005 sem o surgimento dos problemas ocorridos com o cilindro.

É digna de nota a influência de um número de Biot grande sobre a energia dissipada. Pode ser visto na figura 6-12 para $Bi = 10.0$, que a radiação tem uma influência relativamente pequena na energia dissipada, devido a grande parcela correspondente a convecção.

Para complementação, são apresentados nas tabelas 6-I, 6-II e 6-III alguns resultados extraídos das listagens do computador e nas figuras 6-14 a 6-16, as isotermas correspondentes. Os valores apresentados nessas figuras foram calculados para $Fo = 0.01$, $Fo = 0.05$ e $Fo = 0.3$, com $Bi = 1.0$ e $Ri = 1.0$. São apresentados, além dos valores de Q/Q_0 e F/F_0 , os números de iterações utilizadas no método de Newton-Raphson. Nos casos apresentados, esses números foram de seis, cinco e cinco iterações, respectivamente, com uma tolerância $\xi = 0.001$, a mesma do caso do cilindro. Em todos os cálculos realizados, o número de iterações não foi superior a sete.

As isotermas apresentadas nas figuras 6-14 a 6-16 mostram claramente o deslocamento da maior temperatura da seção do prisma para o ponto mais próximo da placa. As isotermas tendem a "abrir-se", aumentando o seu raio de curvatura, até próximo do regime permanente, como é visto na figura 6-16.

Durante a realização dos cálculos foram notados alguns problemas. O primeiro deles foi o longo tempo de processamento, como no caso do cilindro. Novamente, a temperatura dos pontos nodais próximos à fronteira apresentou problemas de precisão, causados pelo método de integração utilizado e pelas características da função de Green fundamental. Entretanto, não foram notados os problemas de oscilação e de instabilidade da solução na fronteira, ocorridos com o cilindro.

Comparando a resolução dos dois problemas pode-se

notar que o número de subdivisões dos elementos ΔS_j da fronteira utilizado para o prisma (trinta e dois) é bem maior que o utilizado para o cilindro (dez). Chegou-se a esse número após vários testes com valores menores, que apresentaram grandes diferenças em relação à solução analítica. A necessidade deste número maior de divisões no problema do prisma encontra explicação na presença de cantos vivos na seção retangular, enquanto que a seção circular do cilindro é bem mais "suave".

8 - CONCLUSÃO E SUGESTÕES

Como conclusão, pode-se dizer que o método integral, com a função de Green fundamental, pode ser usado para a solução de problemas de condução de calor transiente com radiação e convecção combinadas, desde que o número de pontos nodais escolhidos seja suficiente.

Todavia, o número de pontos nodais representa um compromisso entre a precisão desejada e o tempo de processamento necessário.

Como sugestões para o aperfeiçoamento do método pode-se citar:

- o uso de outros métodos de integração, como o utilizado por Crosbie e Viskanta⁴.

- o aproveitamento da simetria dos problemas na formulação da solução.

- o exame da convergência do arredondamento dos cantos, partindo de grandes raios de arredondamento e progredindo para

ra raios pequenos.

- o uso da função de Green incompleta, sugerido e a
plicado por Chang².

Como continuação da pesquisa pode-se sugerir a soluç
ão dos problemas aqui apresentados, para regime permanente com
auxílio do método apresentado em⁽¹⁷⁾. Isto permitirá uma comparaç
ão mais acurada dos resultados, visto que não foram encontrados,
na literatura disponível, dados para a comparação com os aqui a
presentados.

9 - BIBLIOGRAFIA

- (1) OZISIK, M.N. Boundary Value Problems of Heat Conduction.
International Textbook Co. 1968.
- (2) CHANG, Y.P.; KANG, C.S.; CHEN, D.J. The Use of Fundamental Green Functions for the Solution of Problems of Heat Conduction in Anisotropic Media. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, 1973, Pgs. 1905-1918.
- (3) TOLUBINSKIY, E.V. An Integral Method of Solution of the General Heat and Mass Transfer Problem. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 9, 1966, pgs. 1471-1488.
- (4) CROSBIE, A.L.; VISKANTA, R. Transient Heating or Cooling of a Plate by Combined Convection and Radiation. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 11, 1968, pgs. 305-316.
- (5) SHAW, R.P. An Integral Equation Approach to Diffusion. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 17, 1974, pgs. 693-699.
- (6) COLLE, S. Método de Equações Integrais para Escoamento Laminar Estacionário em Dutos de Secção Transversal de Geometria Multiplamente Conexa. (1978) (a ser publicado)

- (7) STAKGOLD, I. Boundary Value Problems of Mathematical Physics.
The MacMillan Co., 1968, Vol. II.
- (8) DEMIDOVICH, B.P.; MARON, I.A. Computational Mathematics. MIR
Publishers, 1973.
- (9) SCHNEIDER, P.J. Conduction Heat Transfer. Addison Wesley
Pub. Co. Inc., 1957.
- (10) ARPACI, V.S. Conduction Heat Transfer. Addison Wesley Pub.
Co., 1966.
- (11) OZISIK, M.N. Basic Heat Transfer. McGraw-Hill Book Co., 1977.
- (12) ROHSENOW, W.M.; HARTNETT, J.P. Handbook of Heat Transfer.
McGraw-Hill Book Co., 1973.
- (13) HOTTEL, M.C.; SAROFIM, A.F. Radiative Transfer. McGraw-Hill
Book Co., 1967.
- (14) 1130 SCIENTIFIC SUBROUTINE PACKAGE PROGRAMMER'S MANUAL - IBM
Co., 1968.
- (15) ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. Handbook of Mathematical Functions.
Dover Pub. Co.
- (16) APOSTOL, T.M. Mathematical Analysis. Addison-Wesley Pub.Co.
Inc., 1965.
- (17) COLLE; S.; ABREU, R.C. Relatório FINEP-CNEN. UFSC. 1978.
- (18) SIEGEL, R.; HOWELL, J.R. Thermal Radiation Heat Transfer.
McGraw-Hill Book Co., 1972.

A P Ê N D I C E 1

ESTABELECIMENTO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO

Considere-se um invólucro de comprimento infinito que contém diversas superfícies discretas, como mostrado na figura A-1, distribuídas da seguinte maneira:

A_0 - superfície interna de um invólucro de forma cilíndrica;

A_1 - superfície de uma placa plana;

A_k - onde $2 \leq k \leq N$, elementos discretos da superfície de um cilindro interior ao invólucro.

Considere-se que tais superfícies estejam sujeitas às seguintes restrições:

1) a temperatura em cada superfície é uniforme;

2) as emissividades espectrais direcionais ϵ_λ' as absorptividades espectrais direcionais α_λ' e as refletividades espectrais direcionais ρ_λ' são independentes da temperatura, de forma que:

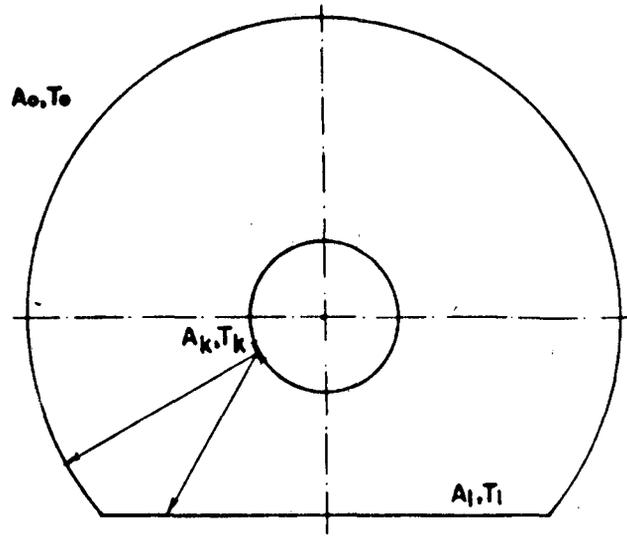


FIGURA A-1: GEOMETRIA COM O INVÓLUCRO

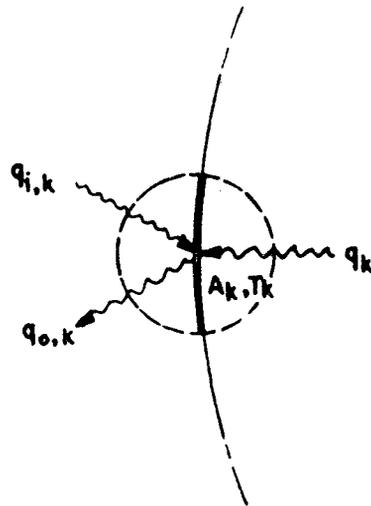


FIGURA A-2: BALANÇO TÉRMICO NO ELEMENTO A_k

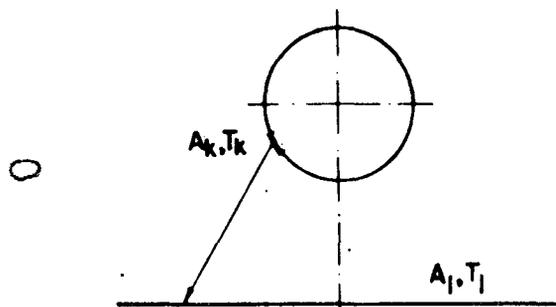


FIGURA A-3: GEOMETRIA SEM O INVÓLUCRO

$$\varepsilon(T_A) = \alpha(T_A) = 1 - \rho(T_A) \quad ;$$

- 3) toda a energia $\bar{\varepsilon}$ emitida e refletida de forma di
fusa;
- 4) o fluxo de energia incidente e, por consequência,
o fluxo de energia refletido são uniformes sobre cada área indi
vidual.

Essas restrições implicam em considerar todas as su
perfícies em jogo como cinza-difusas.

Para o estabelecimento da condição de contorno usar-se-á o método da radiação global (net radiation method) de acor
do com (1⁸), que consiste em realizar um balanço de energia para a superfície de um elemento A_k do cilindro interior, conforme mos
tra a figura A-2. Nessa figura vê-se que:

$q_{i,k}$ = fluxo de energia incidente no elemento A_k
proveniente de todas as outras superfícies em jogo;

$q_{o,k}$ = fluxo de energia emergente da superfície A_k ;

q_k = fluxo de energia fornecido pelo interior do
cilindro por condução.

O balanço de energia em cada superfície fornece, se
gundo (1⁸), a seguinte relação:

$$\sum_{j=0}^N \left(\frac{\delta_{kj}}{\varepsilon_j} - F_{k-j} \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} \right) \frac{Q_j}{A_j} = \sum_{j=0}^N (\delta_{kj} - F_{k-j}) \sigma T_j^4 \quad (A-1)$$

onde δ_{kj} é o delta de Kronecker, definido como:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{quando } k = j \\ 0 & \text{quando } k \neq j \end{cases}$$

Variando-se k de 0 a N obtêm-se um sistema de $N + 1$ equações que deve ser resolvido para estabelecer a condição de contorno de cada elemento A_k da superfície do cilindro interno.

Todavia, se $\epsilon_j = 1$ para todo e qualquer j , vem:

$$\frac{Q_k}{A_k} = \sum_{j=0}^N (\delta_{kj} - F_{k-j}) \sigma T_j^4 \quad (\text{A-2})$$

Lembrando que os elementos de superfície sobre o cilindro externo não se "vêem", resta para $k \geq 2$:

$$\frac{Q_k}{A_k} = \sigma T_k^4 - F_{k-0} \sigma T_0^4 - F_{k-1} \sigma T_1^4 \quad (\text{A-3})$$

Da condução do calor tem-se a relação:

$$Q_k = -k A_k \left(\frac{\partial T_k}{\partial x} \right)_S \quad (\text{A-4})$$

e da geometria do problema conclui-se facilmente que:

$$F_{k-0} = 1 - F_{k-1} \quad (\text{A-5})$$

Fazendo-se

$$F = F_{k-1} \quad e \quad T_p = T_1 \quad (A-6)$$

e substituindo-se essas relações em (A-3), tem-se:

$$-k \frac{\partial T_k}{\partial x} \Big|_S = \sigma [T_k^4 - F T_p^4 - (1 - F) T_o^4] \quad (A-7)$$

que é a condição de contorno para os elementos A_k , $2 \leq k \leq N$, se $\epsilon_j = 1$ para todo e qualquer j .

Para os problemas da presente dissertação, T_p e T_o são conhecidas mas vê-se que os valores de ϵ_k devem ser obrigatoriamente iguais a unidade. Caso contrário, a determinação da condição de contorno obrigaria à solução de um sistema de equações para cada ponto, como foi mostrado acima.

Por outro lado, considere-se uma geometria semelhante à da figura A-1, porém sem a presença do invólucro, como mostrado na figura A-3. Considere-se válidas as mesmas restrições do caso anterior, admitindo-se ainda que o meio em que estão colocados o cilindro e a placa seja infinito e que não participe das trocas de calor por radiação.

Para tal caso, o balanço de energia em cada superfície fornece, segundo (1⁸), a seguinte relação:

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta_{kj}}{\epsilon_j} - F_{k-j} \frac{1-\epsilon_j}{\epsilon_j} \right) \frac{Q_j}{A_j} = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} - F_{k-j}) \sigma T_j^4 \quad (A-8)$$

Variando k de 1 a N obtêm-se um sistema de N equações que deve ser resolvido para estabelecer as condições de contorno de cada elemento A_k da superfície do cilindro.

Todavia, se $\epsilon_j = 1$ para todo e qualquer j , vem:

$$\frac{Q_k}{A_k} = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} - F_{kj}) \sigma T_j^4 \quad (A-9)$$

Lembrando-se que os elementos da superfície do cilindro não se "vêem", resta para $k \geq 2$:

$$\frac{Q_k}{A_k} = \sigma T_k^4 - F_{k-1} \sigma T_1^4 \quad (A-10)$$

Usando-se as relações (A-4) e (A-6), obtêm-se:

$$-k \frac{\partial T_k}{\partial x} = \sigma [T_k^4 - F T_p^4] \quad (A-11)$$

que é a condição de contorno para os elementos de superfície A_k , $2 \leq k \leq N$, se $\epsilon_j = 1$ para todo e qualquer j .

Comparando as relações (A-7) e (A-11) com as relações (2-13) e (2-29), vê-se que os problemas resolvidos na presente dissertação são do tipo esquematizado na figura A-1 acrescidos da troca de calor por convecção, embora nas figuras 2-1, 2-2 e correlatas não apareça o invólucro externo. Todavia, a troca de calor com o meio, referida no início do capítulo 2, foi considerada como se fosse a troca de calor com um invólucro externo, como o da figura A-1.