

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

UM MÉTODO PARA O CÁLCULO
DA DEFORMAÇÃO DE DENTES DE ENGRENAGENS

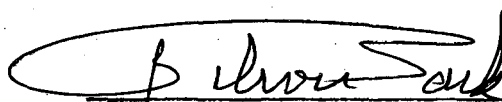
RENAN ROBERTO BRAZZALLE

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
JANEIRO - 1978

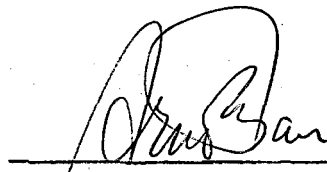
UM MÉTODO PARA O CÁLCULO DA DEFORMAÇÃO DE
DENTES DE ENGRENAGENS

RENAN ROBERTO BRAZZALLE

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROJETO
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

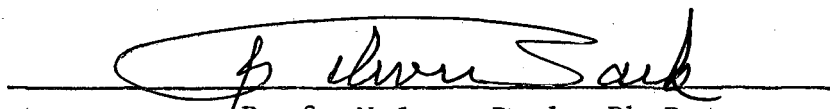


Prof. Nelson Back, Ph.D.
Orientador

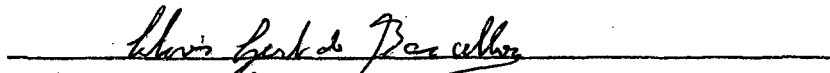


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PRO-
FESSORES:



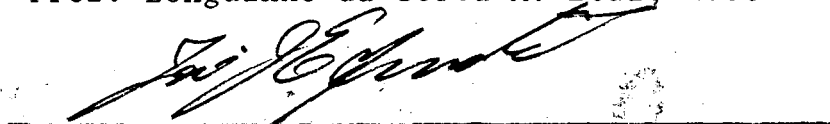
Prof. Nelson Back, Ph.D.



Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.



Prof. Longuinho da Costa M. Leal, M.Sc.



Prof. José João de Espindola, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

- À Universidade Federal de Santa Catarina, por ter proporcionado a realização deste trabalho;
- Ao BNDE e à CAPES, pelo auxílio financeiro;
- Ao professor Domingos Boechat Alves, pelo auxílio na utilização do PROASE;
- Aos demais Professores do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO 1

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	2
1.1 - Definição do problema	3
1.2 - Método de cálculo	4

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO TEÓRICA DA DEFORMAÇÃO DO DENTE DA ENGRENAGEM	6
2.1 - Cálculo da deformação do dente	6
2.1.1 - Sistema de coordenadas e atuação da força	6
2.1.2 - Cálculo do deslocamento	7
2.1.3 - Observação sobre a expressão do deslocamento ..	9

CAPÍTULO 3

DEFORMAÇÃO DA PARTE ADJACENTE AO DENTE	10
3.1 - Cálculo da deformação	10
3.1.1 - Definição do modelo	10
3.2 - Método de cálculo	11
3.2.1 - Cálculo da constante C_{11}	11
3.2.2 - Cálculo da constante C_{12}	14
3.2.3 - Cálculo da constante C_{22}	17
3.2.4 - Cálculo da constante C_{33}	20
3.3 - Cálculo do deslocamento w	22

CAPÍTULO 4

DEFORMAÇÃO DEVIDA AO CONTATO DOS DENTES	24
4.1 - Definição do modelo	24
4.2 - Atuação da força e sistema de coordenadas	24
4.3 - Determinação da largura da banda de contato	25

4.4 - Cálculo do deslocamento do ponto de contato	28
---	----

CAPÍTULO 5

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	31
--	----

CAPÍTULO 6

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	34
--------------------------------	----

6.1 - Método de cálculo proposto	34
--	----

6.2 - Posição das cargas	35
--------------------------------	----

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES	48
------------------	----

BIBLIOGRAFIA	49
--------------------	----

ANEXO 1	51
---------------	----

ANEXO 2	55
---------------	----

ANEXO 3	57
---------------	----

ANEXO 4	58
---------------	----

R E S U M O

A tecnologia atual das máquinas ferramentas modernas, exige rigidez não apenas da estrutura, mas também dos acionamentos mecânicos, para que a máquina possa enfrentar as severas condições de serviço impostas pela necessidade de maior produção, sem sacrificar a precisão de usinagem. Com este fim, torna-se necessário um melhor conhecimento do processo de deformação de transmissões por engrenagens.

Neste trabalho são analisados os parâmetros influentes na deformação estática de um par de dentes em contato, utilizando um método de cálculo que determina o deslocamento do ponto de contato de dois dentes de perfil evolvente, na direção dada pelo ângulo de incidência do perfil neste ponto.

O uso de computador digital é prescindível, pois o método pode ser aplicado a calculadoras programáveis de pequeno porte.

A avaliação de precisão do método de cálculo foi realizada utilizando a técnica dos elementos finitos.

A B S T R A C T

Present day technology of modern machine tools demands rigidity not only of its structure, but also of its mechanical drives, in order to the machine be able to support severe working conditions imposed by the necessity of increasing production output, without sacrificing machining accuracy. A better knowledge of the deformation process is therefore required in geared transmissions.

In this work, the influential parameters of the static deformation of a contacting tooth pair are analysed by a computational method which allows for the determination of the contact point displacement of two involute profile teeth in the direction of the profile incidence angle, at this point.

The use of a digital computer is not necessary, since the method may be applied to pocket programmable calculators.

The accuracy evaluation of the computational method was performed by means of the finite element technique.

INTRODUÇÃO

Uma das exigências atuais no projeto de máquinas-ferramenta modernas é a rigidez das transmissões, particularmente, das transmissões por engrenagens. Esta característica não é suficientemente estudada, e talvez por isso, não era considerada como uma das exigências principais no projeto de uma transmissão por engrenagens para aplicação em máquinas-ferramenta.

Na análise da deformação da engrenagem, sob condição de carga, o comportamento menos conhecido é o do dente da engrenagem e da parte adjacente a ele durante a deformação. Evidentemente, este não é o único parâmetro importante na determinação da rigidez da transmissão. Outros fatores podem ser citados, tais como: elasticidade dos eixos, influência das ligações cubo eixo, flexibilidade dos mancais, erros de perfil inerentes da fabricação das engrenagens e ainda folgas e desalinhamentos ocorridos durante a fabricação e montagem das peças.

Neste contexto, insere-se este trabalho, onde é apresentado um método de cálculo da deformação do dente da engrenagem e de parte da roda, fazendo uso da teoria da elasticidade para o estado plano de deformações e da resistência dos materiais.

CAPÍTULO 1

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Um dos primeiros trabalhos que tratou do problema da resistência de um dente de engrenagem foi realizado por Lewis [1]. Neste trabalho o dente foi considerado como viga engastada; a seção crítica desta viga foi determinada pelo ponto de tangência desta com uma viga hipotética de tensões constantes, representada por uma parábola desenhada em relação a um sistema de eixos, onde um deles passava pela linha de centro do dente e seu vértice coincidia com a interseção da linha de ação da carga com a linha de centro do dente.

Com o desenvolvimento da técnica fotoelástica, a abordagem de Lewis foi considerada incorreta. Isto era esperado porque violava o princípio de Saint-Venant, o qual estabelece que a teoria elementar de vigas só pode ser aplicada para seções da viga situadas a distâncias da carga ou do engaste, as quais sejam consideradas grandes em relação a altura da viga (no caso a espessura do dente).

No trabalho de Wellawer e Seireg [2] são citados vários trabalhos fotoelásticos como por exemplo, Black, Donal e Broghamer, Heywood, Jacobson; estes trabalhos possibilitaram a determinação do ponto de máxima tensão, entretanto, não são de grande utilidade na análise de deformação. Wellawer e Seireg apresentam uma abordagem experimental que resulta em fórmulas ajustadas (semi-empíricas) para as componentes de tensão, utilizando o modelo de placa engastada sob carga concentrada ou distribuída.

O tratamento analítico do dente de engrenagem considerado como placa engastada foi primeiramente realizado por MacGregor onde foi aplicada a teoria de placas finas a uma placa de largura infinita e espessura constante (este trabalho é citado em [2] e [3]). MacGregor obteve a solução para a deflexão na extremidade livre da placa com carga concentrada nesta extremidade livre e os momentos fletores na extremidade engastada.

O trabalho que apresenta a abordagem mais próxima da realidade foi realizado por Umezawa, Ishikawa e Hayashi [3] que analisam a deflexão de uma placa espessa de largura finita sob carga concentrada, a solução é obtida resolvendo a equação diferencial parcial dos deslocamentos da placa através do método das diferenças finitas, finalmente, os resultados são comparados a testes experimentais. Embora esta solução seja a que mais se aproxima da realidade, pois considera a espessura e a largura finita da placa, ela não resulta numa solução final com facilidade de aplicação posterior.

No presente trabalho, considera-se o dente como uma viga engastada de seção variável, embora saiba-se que isto não representa bem a realidade, mas ainda hoje, na maioria das aplicações, toma-se o dente como viga engastada, como pode ser comprovado nos livros de Tuplin [4] e Buckingham [8]; principalmente, se considerarmos que ainda se utilizam os fatores de Lewis no dimensionamento de engrenagens. Um atenuante para esta simplificação é a consideração da elasticidade do engaste da viga, o que não é feito mesmo nos trabalhos mais realistas que utilizaram a abordagem de placas.

1.1 - Definição do problema

Na análise da deformação da engrenagem, é considerado apenas, um par de dentes em contato. Esta escolha, além de facilitar a solução do problema, resulta numa medida da máxima deformação possível. Na realidade nunca se tem apenas um dente de cada roda em ação, então, a rigidez real será maior que a calculada, o que torna a formulação aplicada mais segura.

A análise apresentada parte de uma série de simplificações: primeiro faz-se a redução do problema tridimensional para uma formulação plana, tomando a largura do dente infinita, então a força transmitida através do dente é tomada por unidade de largura. Outra simplificação é analisar o dente modelando-o como viga; já foi dito anteriormente que isto fere o princípio de Saint-Venant.

Ocorre também que a combinação de uma solução por formulação da resistência dos materiais (no dente) com a solução

mais precisa (no corpo da engrenagem) como é a formulação de elasticidade, fatalmente dará como resultado descontinuidade de deslocamentos na interface de ligação dos dois corpos. Verifica-se, finalmente, que este problema não chega a afetar sensivelmente o resultado, principalmente porque o objetivo é determinar o deslocamento do ponto de aplicação da carga e este ponto se situa bem afastado desta região de descontinuidade. Além disso, o método proposto não permite determinar o campo de deformações total, nem é este o objetivo do trabalho, pois existem métodos mais próprios para esta determinação. Um destes métodos é o método dos elementos finitos, e justamente por isso, ele é utilizado para a determinação do campo de deformações do dente e da parte adjacente ao dente considerados como um corpo único. Posteriormente os resultados da solução proposta são comparados com os resultados obtidos através da aplicação do método dos elementos finitos.

1.2 - Método de cálculo

Para o cálculo da deformação devida à ação da força concentrada, são obtidas as expressões da energia de deformação elástica e, posteriormente, é aplicado o segundo teorema de Castigliano. Também é considerada a deformação das superfícies em contato, resolvida através da formulação de Hertz.

A força P é deslocada de seu ponto de aplicação sobre o perfil de ação para o ponto de interseção desta com a linha que divide o dente ao meio (A). Isto pode ser realizado pois a deformação que ocorre entre estes dois pontos (Figura 1.1) pode ser calculada pela formulação da deformação de dois corpos em contato (Capítulo 4). Em seguida, a força é resolvida em suas componentes vertical e horizontal e seus efeitos são analisados paralelamente para obtenção das parcelas da energia de deformação elástica total.

Na análise teórica da deformação são utilizadas funções de tensão de Westergaard [5]; estas funções expressam em componentes de tensão em termos de funções da variável complexa z e sua utilização propicia um método de solução bastante poderoso para problemas de elasticidade plana.

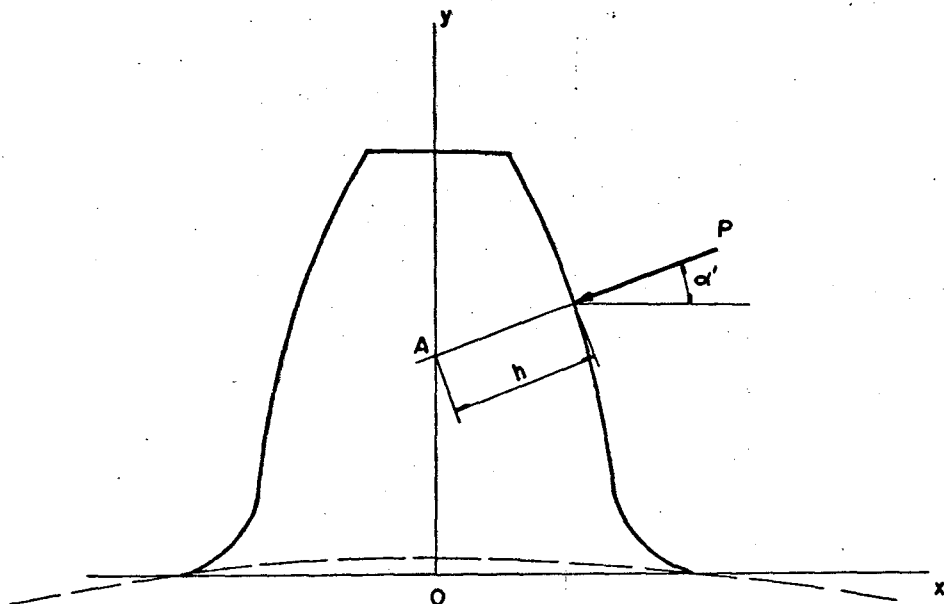


Fig. 1.1 - Esquema da ação da força.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO TEÓRICA DA DEFORMAÇÃO DO DENTE DA ENGRENAGEM

2.1 - Cálculo da deformação do dente

Neste capítulo é apresentado o cálculo da deformação do dente da engrenagem, considerando-o uma viga engastada.

Ao se analisar esta parcela de deformação, supõe-se que o corpo da roda, ao qual o dente está ligado, é perfeitamente rígido.

2.1.1 - Sistema de coordenadas e atuação da força

O sistema de coordenadas é colocado no centro da corda que une dois pontos simétricos dos perfis na base do dente. O eixo y divide o dente em duas partes iguais.

A força P atua num dente de largura l , numa direção que faz um ângulo α' com o eixo paralelo ao eixo x do sistema de coordenadas.

O dente é uma viga de seção variável e a espessura $2x$ é função da coordenada y . Na base do dente a espessura é obtida fazendo $y = 0$, isto é, $b = 2x|_{y=0}$.

A força P , (figura 2.1), que atua num ponto do perfil é deslocada ao longo da sua linha de ação até o centro do dente e então decomposta em suas componentes horizontal e vertical, que são, respectivamente, a força cortante e a força normal,

$$V = P \cos \alpha' \quad (2.1)$$

$$N = P \sin \alpha'$$

É considerado, também, o momento fletor atuante numa seção localizada a uma distância y da base do dente, expresso

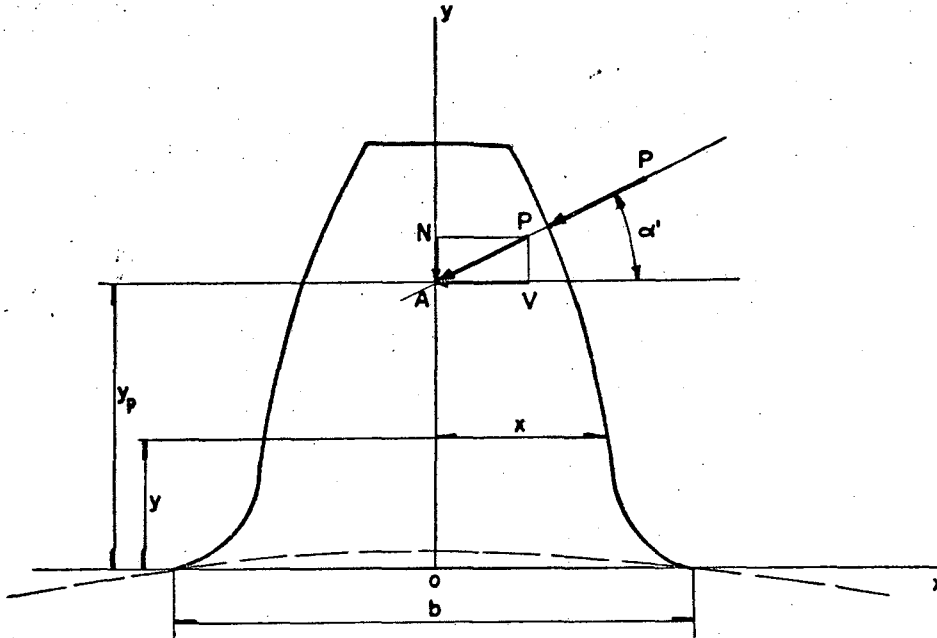


Fig. 2.1 - Dente da engrenagem sob ação da carga.

por

$$M = V(y_p - y) \quad (2.2)$$

onde y_p é a distância do ponto de interseção da linha de ação da carga P com o eixo y , à origem do sistema de coordenadas.

2.1.2 - Cálculo do deslocamento

Para calcular o deslocamento do ponto de aplicação da carga é utilizada a formulação de energia de deformação elástica. O sistema é tomado conservativo, então a energia de deformação pode ser calculada através do trabalho de deformação externo. Aplicando o segundo teorema de Castigliano, calcula-se o deslocamento do ponto de aplicação da carga na direção e sentido de atuação da mesma.

Partindo da expressão geral da energia de deformação, para o estado plano de deformações,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2.3)$$

A energia de deformação elástica devida à flexão é dada por:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{E I_z} dy = \frac{1}{2} \int_0^{y_p} \frac{12 M^2}{E \ell (2x)^3} dy \quad (2.4)$$

A energia de deformação devida à força cortante é dada por:

$$U_c = \frac{1}{2} \int_L \frac{\beta V^2}{G A} dy = \frac{1}{2} \int_0^{y_p} \frac{\beta V^2}{G \ell 2x} dy \quad (2.5)$$

e finalmente, a energia de deformação devida à força normal é dada por:

$$U_n = \frac{1}{2} \int_L \frac{N^2}{E A} dy = \frac{1}{2} \int_0^{y_p} \frac{N^2}{E \ell 2x} dy \quad (2.6)$$

Então a energia de deformação elástica total é expressa por:

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_0^{y_p} \frac{12 M^2}{E \ell (2x)^3} dy + \int_0^{y_p} \frac{\beta V^2}{G \ell 2x} dy + \int_0^{y_p} \frac{N^2}{E \ell 2x} dy \right] \quad (2.7)$$

Substituindo na expressão (2,7) as equações (2.1) e (2.2), utilizando a relação entre os módulos de elasticidade longitudinal e transversal,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

e aplicando o segundo teorema de Castigliano, $w = \partial U / \partial P$, resulta a expressão do deslocamento w na direção e sentido da carga aplicada,

$$w = \frac{W_0}{E} \cos^2 \alpha' \left\{ 12 \int_0^{y_p} \frac{(y_p - y)^2}{(2x)^3} dy + [2\beta(1 + \nu) + \right. \\ \left. + \operatorname{tg}^2 \alpha'] \int_0^{y_p} \frac{1}{2x} dy \right\} \quad (2.8)$$

onde $W_0 = P/\ell$.

2.1.3 - Observações sobre a expressão do deslocamento

A aplicação da equação (2.8) a um problema real não é imediata devido às duas integrais que dela fazem parte. A espessura ($2x$) para o dente de perfil evolvente pode ser relacionada com y , mas não através de uma função única. Portanto, as integrais citadas devem ser resolvidas numericamente.

Para tanto foi calculada uma tabela das coordenadas do perfil evolvente através de um programa para máquina programável de bolso que fornece x como $F(y)$ (ver Anexo 3). De posse destes dados é construída nova tabela onde são calculadas as funções integrandas para vários valores de y . A primeira função necessita ser calculada várias vezes para diferentes valores de y_p , e ele varia conforme o ponto de aplicação da carga e faz parte da função diretamente além de ser também um dos limites de integração.

Uma vez calculadas as funções, é realizada a integração numérica através da fórmula de Simpson. (ver Anexo 3).

A força P foi aplicada em cinco pontos diferentes do perfil igualmente espaçados sobre a linha de engrenamento, o que significa cinco valores para y_p .

CAPÍTULO 3

DEFORMAÇÃO DA PARTE ADJACENTE AO DENTE

Neste capítulo, é apresentado o cálculo da deformação que ocorre na parte da roda onde o dente é considerado engastado.

3.1 - Cálculo da deformação

No capítulo anterior foi assumido que o dente era elástico e que o engaste era perfeitamente rígido. Agora, assume-se que o dente é perfeitamente rígido, servindo apenas para transmitir a força e seus efeitos, e que o corpo da roda é elástico.

O sistema de coordenadas é o mesmo já especificado anteriormente.

3.1.1 - Definição do modelo

A parte da roda adjacente ao dente é considerada como o contorno plano de uma placa de largura infinita. A distribuição das cargas (momentos e forças) ao longo da espessura é considerada uniforme. A espessura da placa é, então, tomada unitária, portanto o momento e as forças tangencial e normal são cargas por unidade de largura. No caso do dente de largura finita, estas cargas por unidade de largura são obtidas dividindo a carga aplicada pela largura do dente.

Ao se fazer a consideração de placa com largura infinita, a deformação específica ϵ_z torna-se igual a zero, então o problema passa a ser caracterizado como um estado plano de deformação.

3.2 - Método de cálculo

Para calcular o deslocamento do ponto de aplicação da força, novamente é utilizada a formulação da energia de deformação elástica com aplicação do segundo teorema de Castigliano.

O trabalho de deformação externo é equacionado à expressão da energia de deformação elástica, e deste equacionamento se obtém a expressão da parcela de energia armazenada devida à atuação de determinada sollicitação interna.

Sabe-se da teoria da elasticidade linear, que as parcelas da energia de deformação total dependem sob forma quadrática das sollicitações internas, a saber: momento fletor, esforço cortante, esforço normal e das ações combinadas do momento fletor com a força cortante e com a força normal. Não se sabe, a priori, como elas influem quantitativamente na expressão da energia total; então pode-se propor a seguinte expressão:

$$U = C_{11} M^2 + 2 C_{12} MV + C_{22} V^2 + C_{33} N^2 \quad (3.1)$$

onde as constantes C_{11} , C_{12} , C_{22} e C_{33} descrevem a contribuição de cada um dos esforços.

Como todas as sollicitações são função da força aplicada, a energia de deformação total também o será, então pode-se aplicar o segundo teorema de Castigliano derivando em relação a esta força e obtém-se o deslocamento de seu ponto de aplicação na direção da força.

3.2.1 - Cálculo da constante C_{11} .

Esta constante é calculada considerando que a parcela de energia devida à ação do momento M sobre o semi-plano $y < 0$, (figura 3.1) é igual ao trabalho produzido pelo momento sobre o contorno, isto é:

$$C_{11} M^2 = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{y\text{cont}} v_{\text{cont}} \ell dx \quad (3.2)$$

onde $\sigma_{y\text{cont}}$ é o valor da tensão normal nos pontos de uma área elementar ℓdx sobre o contorno, e v_{cont} é o valor do deslocamento

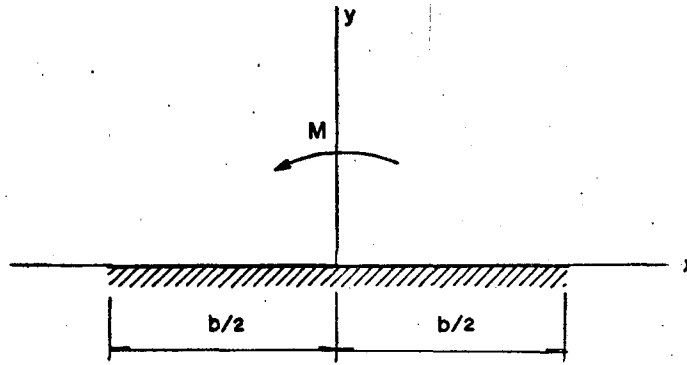


Fig. 3.1 - Atuação do momento sobre o semi-plano.

mento na direção y para os pontos situados sobre a faixa ℓdx .

Determina-se através da teoria da elasticidade plana a função deslocamento v partindo de uma distribuição de tensões normais.

A expressão para as tensões σ_y é dada por:

$$\sigma_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (3.3)$$

A expressão para os deslocamentos na direção y é representada por:

$$v = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[2(1 - \nu)\phi - y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \quad (3.4)$$

onde $\phi(x,y)$ é uma função de tensão real; estas expressões são analisadas em detalhe no anexo 4.

De acordo com a equação (3.3) sobre o contorno $y = 0$ as tensões são expressadas por $\partial \phi / \partial y|_{y=0}$.

Supõe-se que a distribuição de tensões normais no contorno do semi-plano seja linear, em consequência da hipótese das seções de vigas permanecerem planas após a flexão, então, o que é válido na viga na seção correspondente ao engaste também é suposto válido no contorno do semi-plano para que seja satisfeita a condição de continuidade de deslocamento.

O valor máximo da tensão normal é $\sigma_{\max} = 6 M / \ell b^2$.

Propõe-se a função $\partial \phi / \partial y$, para obtenção dos desloca-

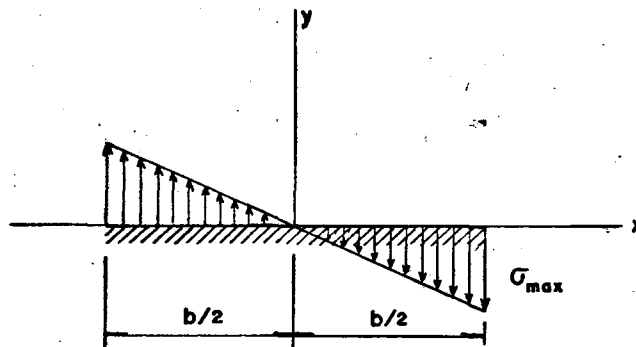


Fig. 3.2 - Distribuição de tensões sobre o contorno do semi-pla no devida ao momento.

mentos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{12 M}{\ell b^3 \pi} \operatorname{Re} \left[-iz \ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} - ib \right] \quad (3.5)$$

que satisfaz a equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$, e restabelece sobre o contorno a distribuição de tensões suposta linear, logo satisfaz as condições de contorno do problema.

Sobre o contorno, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[-i \ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} \right] &= \pi \quad \text{para } -b/2 < x < b/2 \\ &= 0 \quad \text{para valores de } x \text{ fora deste intervalo.} \end{aligned}$$

Isto justifica a existência do valor π na função proposta, equação (3.5) (ver Anexo 4).

Além disso, sobre o contorno $y = 0$, obtêm-se para $\partial \phi / \partial y$ a função linear de x , dado que a variável complexa se transforma na variável real x quando y é igual a zero.

Então

$$\sigma_{y\text{cont}} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{12 M}{\ell b^3} x \quad (3.6)$$

Para calcular a função deslocamento v , necessita-se integrar $\partial\phi/\partial y$, logo:

$$\phi = \frac{12 M}{\pi \ell b^3} \operatorname{Re} \int (z \ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} + b) dz \quad (3.7)$$

ou

$$\phi = \frac{12 M}{\pi \ell b^3} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} (z^2 - (b^2/4)) \ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} + \frac{z b}{2} \right] \quad (3.8)$$

Calcula-se agora a expressão do deslocamento v sobre o contorno, utilizando as equações (3.4) e (3.8) e notando, nesta última, que a variável z se transforma em x , sobre o contorno; portanto

$$v_{\text{cont}} = \frac{12(1 - \nu^2)M}{E \pi \ell b^3} \left[(x^2 - \frac{b^2}{4}) \ln \frac{x - (b/2)}{x + (b/2)} + bx \right] \quad (3.9)$$

Substituindo as expressões (3.6) e (3.9) na equação (3.2), obtêm-se:

$$C_{11} M^2 = \frac{72(1 - \nu^2)M^2}{\pi E \ell b^2} \int_{-b/2}^{b/2} x \left[(x^2 - \frac{b^2}{4}) \ln \frac{x - (b/2)}{x + (b/2)} + bx \right] dx \quad \dots (3.10)$$

Realizada a integração, resulta:

$$C_{11} = \frac{9(1 - \nu^2)}{\pi E \ell b^2} \quad (3.11)$$

3.2.2 - Cálculo da constante C_{12} .

No cálculo desta constante, considera-se que os pontos do contorno não se deslocam apenas na direção y , mas também na direção negativa de x , devido ao momento M ; assim a força cortante produz um trabalho de deformação.

Adicionalmente a este deslocamento para a esquerda, devido à força cortante, ocorre um deslocamento na direção vertical, devido à flexão, e portanto a força normal também produz um trabalho de deformação.

Estas duas quantidades são iguais, de acordo com o teorema de Betti, e são chamados trabalhos de deformação mútuos. Estas quantidades tem o valor $C_{12} MV$, qualquer que seja o método de avaliação; note-se que aparece o valor 2 multiplicando a constante C_{12} na equação (3.1), levando em consideração os dois trabalhos mútuos.

Para maior facilidade de cálculo de C_{12} , utiliza-se a expressão do deslocamento u causado pelo momento, e a distribuição de tensões cisalhantes devida à força cortante.

As equações das tensões σ_x e σ_y , válidas para o semi-plano $y < 0$, são:

$$\sigma_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

Sobre o contorno, $y = 0$, elas são iguais a $\partial \phi / \partial y|_{y=0}$ e portanto

$$\sigma_y = \sigma_x = \frac{12 M}{\ell b^3} x$$

Utilizando a lei de Hooke generalizada, no estado plano de deformação $\epsilon_z = 0$;

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

resulta

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\nu \sigma_x \quad (3.14)$$

Novamente, com a lei de Hooke, obtém-se a expressão de ϵ_x :

$$E \epsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \quad (3.15)$$

Substituindo as expressões (3.7) e (3.14) na equação (3.15), resulta:

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = (1 + \nu)(1 - 2\nu) \frac{12 M}{\ell b^3} x \quad (3.16)$$

Integrando (3.16) e considerando as condições de contorno: $u(b/2) = 0$ e $u(-b/2) = 0$, chega-se à expressão do deslocamento u causado pelo momento atuante no contorno:

$$u_{\text{cont}} = \frac{6(1 + \nu)(1 - 2\nu)M}{E \ell b^3} \left(x^2 - \frac{b^2}{4}\right) \quad (3.17)$$

Equacionando a energia de deformação elástica em termos do trabalho de deformação mútuo, tem-se

$$C_{12} MV = - \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} u_{\text{cont}} \tau_{yx\text{cont}} \ell dx \quad (3.18)$$

Nesta expressão, o sinal menos indica a oposição entre o sentido do deslocamento u e o sentido da força cortante a tuante.

Supõe-se que a distribuição de tensões cisalhantes mais exata sobre o contorno $-b/2 \leq x \leq b/2$ seja parabólica, portanto:

$$\tau_{yx\text{cont}} = \frac{6V}{\ell b^3} \left(\frac{b^2}{4} - x^2\right) \quad (3.19)$$

Substituindo as expressões (3.17) e (3.19) na equação (3.18), tem-se:

$$C_{12} MV = \frac{18(1 + \nu)(1 - 2\nu)MV}{E \ell b^6} \int_{-b/2}^{b/2} \left(x^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2 dx \quad (3.20)$$

Integrando (3.20), obtêm-se o valor de C_{12} ;

$$C_{12} = \frac{3}{5} \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E \ell b} \quad (3.21)$$

Se ao invés da distribuição parabólica (3.19), utilizar-se uma distribuição de tensões média equivalente àquela, e igual a:

$$\tau_{\text{medcont}} = \frac{V}{b \ell} \quad (3.22)$$

Substituindo na equação (3.18) e realizando a integração, obtêm-se o valor:

$$C_{12} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2E \ell b} \quad (3.21a)$$

Estes valores diferem de aproximadamente 16%, considerando como valor real de C_{12} , o expresso pela equação (3.21).

3.2.3 - Cálculo da constante C_{22} .

O cálculo desta constante apresenta certas dificuldades, por exemplo, as tensões cisalhantes originadas pela força cortante V apresentam uma distribuição parabólica sobre o contorno $y = 0$, no intervalo $-b/2 \leq x \leq b/2$, o que é comprovado no estudo das vigas, entretanto, a obtenção da função deslocamento partindo desta distribuição de tensões resulta em expressões muito trabalhosas que, apesar disto, não resolvem satisfatoriamente o problema. A justificativa para estes inconvenientes são apoiadas nas restrições da formulação do semi-plano, pois ao se satisfazer a distribuição de tensões, no caso cisalhantes, sobre o contorno deste, a expressão dos deslocamentos na direção x torna-se infinita quando se calcula o valor deste deslocamento para pontos infinitamente afastados da origem do sistema. Para contornar o problema, são fixados dois pontos sobre o contorno do semi-plano a uma distância em torno de $2b$ a $3b$ da origem, isto equivale a dizer que deslocamento absoluto destes pontos é considerado nulo; a esta distância estes pontos já se localizam sob os dentes adjacentes ao em estudo. Agora, os deslocamentos serão calculados relativamente a estes pontos, resultando valores finitos para estes.

Como a escolha desta distância é, de certo modo, arbitrária, não há necessidade de utilização da distribuição parabólica para as tensões cisalhantes: utiliza-se então, uma distribuição média equivalente.

As equações das tensões, válidas para o semi-plano sob carregamento tangencial, são:

$$\sigma_x = -2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (3.23)$$

$$\sigma_y = y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (3.24)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (3.25)$$

onde ψ é uma função de tensão real; estas expressões são analisadas detalhadamente no anexo 4.

A distribuição de tensões cisalhantes será considerada constante, desta maneira; pode ser proposta a seguinte função:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{V}{\pi \ell b} \operatorname{Re} \left[i \ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} \right] \quad (3.26)$$

A parte real da função entre parênteses, sobre o contorno, isto é, para $y = 0$, é igual a π (ver Anexo 4). Logo, tem-se reproduzida a distribuição de tensões considerada; além disso, ela também satisfaz a equação $\nabla^2 \psi = 0$.

Integrando a equação (3.26) em relação a variável y , obtêm-se

$$\psi = \frac{V}{\pi \ell b} \operatorname{Re} \left[\ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} \right] dz \quad (3.27)$$

ou

$$\psi = \frac{V}{\pi \ell b} \operatorname{Re} \left[\left(z - \frac{b}{2} \right) \ln \left(z - \frac{b}{2} \right) \ln \left(z + \frac{b}{2} \right) + b \right] \quad (3.28)$$

Para obtenção da função deslocamento, utiliza-se a relação entre tensões e deformação:

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = E \varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) = -2(1 - \nu^2) \frac{\partial \psi}{\partial x} - (1 + \nu) y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad \dots (3.29)$$

Para determinar a função deslocamento sobre o contorno, toma-se $y = 0$, então:

$$E \frac{\partial u_{\text{cont}}}{\partial x} = -2(1 - \nu^2) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{y=0} \quad (3.30)$$

Por integração, obtêm-se

$$E u_{\text{cont}} = -2(1 - \nu^2)\psi|_{y=0} \quad (3.31)$$

Logo,

$$u_{\text{cont}} = \frac{2(1 - \nu^2)V}{\pi \ell b E} \left[\left(x + \frac{b}{2}\right) \ln \left(x + \frac{b}{2}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right) \ln \left(x - \frac{b}{2}\right) - b \right] \quad \dots(3.32)$$

Nesta expressão, a variável complexa da equação (3.28) se transforma na variável real x . Verifica-se que esta expressão torna-se infinita quando $x \rightarrow \infty$.

Para os pontos do contorno onde $|x| = a > b/2$, a expressão do deslocamento é:

$$u_a = u \Big|_{x=a} = \frac{2(1 - \nu^2)V}{\pi \ell b E} \left[\left(a + \frac{b}{2}\right) \ln \left(a + \frac{b}{2}\right) - \left(a - \frac{b}{2}\right) \ln \left(a - \frac{b}{2}\right) - b \right] \quad \dots(3.33)$$

Considerando estes pontos, onde $x = \pm a$, fixos, calcula-se a expressão do deslocamento relativo para os pontos dentro do intervalo $-b/2 \leq x \leq b/2$.

$$\begin{aligned} (u - u_a)_{\text{cont}} &= \frac{2(1 - \nu^2)V}{\pi \ell b E} \left[\left(x + \frac{b}{2}\right) \ln \left(x + \frac{b}{2}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right) \right. \\ &\quad \cdot \ln \left(x - \frac{b}{2}\right) - \left(a + \frac{b}{2}\right) \ln \left(a + \frac{b}{2}\right) + \\ &\quad \left. + \left(a - \frac{b}{2}\right) \ln \left(a - \frac{b}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Considerando a distribuição de tensões cisalhantes sobre o contorno,

$$\tau_{\text{cont}} = \tau_{xy} = \frac{V}{\ell b} \quad (3.35)$$

calcula-se a energia de deformação elástica, então:

$$C_{22} V^2 = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} (u - u_a)_{\text{cont}} \tau_{\text{cont}} \ell dx \quad (3.36)$$

Substituindo as expressões (3.34) e (3.35) na equação

(3.36) e realizando a integração, obtêm-se:

$$C_{22} = \frac{(1 - \nu^2)}{\pi \ell b} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] \dots (3.37)$$

Na expressão acima, chamando a expressão entre colchetes de K , C_{22} torna-se:

$$C_{22} = \frac{(1 - \nu^2)K}{\pi \ell b} \quad (3.38)$$

Tomando a distância $a = (2 \text{ a } 3)b$, a constante K assume os seguintes valores:

$$\frac{a}{b} = 2 \quad K \cong 2,183$$

$$\frac{a}{b} = 3 \quad K \cong 2,594$$

3.2.4 - Cálculo da constante C_{33}

Esta constante aparece quando se considera a parcela de energia devida à ação da força normal e o deslocamento do contorno do semi-plano na direção y .

As equações para as componentes de tensão no semi-plano com solicitação normal no seu contorno são:

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (3.39)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\tau_{xy} = -y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

A energia de deformação elástica devida à ação do esforço normal é calculada através do trabalho de deformação, is-

to é:

$$C_{33} N^2 = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{ycont} v_{cont} \ell dx \quad (3.40)$$

Supondo que a distribuição de tensões normais seja constante sobre o contorno do semi-plano, tem-se:

$$\sigma_{ycont} = \frac{N}{\ell b} \quad (3.41)$$

Analisando a segunda expressão (3.39), verifica-se que para $y = 0$, a expressão torna-se apenas $\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0}$, e esta é a expressão para as tensões normais no contorno, logo:

$$\sigma_{ycont} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.42)$$

Desta maneira, a função $\partial \phi / \partial y$ pode ser proposta como segue:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{N}{\pi \ell b} \operatorname{Re} \left[i \ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} \right] \quad (3.43)$$

Esta expressão vem a ser a mesma função (3.26) a menos da constante N que substitui V naquela. A parte real desta função, sobre o contorno $y = 0$ é igual a π , logo tem-se reproduzida a distribuição de tensões considerada.

Esta função quando integrada em relação a variável y , resulta:

$$\phi = \frac{N}{\pi \ell b} \operatorname{Re} \left[\left(z - \frac{b}{2} \right) \ln \left(z - \frac{b}{2} \right) - \left(z + \frac{b}{2} \right) \ln \left(z + \frac{b}{2} \right) + b \right] \quad (3.44)$$

Necessita-se agora da expressão para deslocamento na direção y , e esta é a expressão (3.4)

$$v = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[2(1 - \nu)\phi - y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$$

Os deslocamentos do contorno, isto é, para $y = 0$, são dados por

$$v_{cont} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \phi \Big|_{y=0} \quad (3.45)$$

Logo, fazendo uso da expressão (3.44) e considerando $y = 0$, a variável z se transforma na variável real x ; então:

$$v_{\text{cont}} = \frac{2(1 - \nu^2)N}{\pi \ell b E} \left[\left(x - \frac{b}{2}\right) \ln \left(x - \frac{b}{2}\right) - \left(x + \frac{b}{2}\right) \ln \left(x + \frac{b}{2}\right) + b \right] \dots (3.46)$$

Esta expressão é exatamente a expressão (3.32) com o sinal trocado, e com N em lugar de V , portanto, apresenta o mesmo problema que é se tornar infinita quando $x \rightarrow \infty$.

Para não repetir o mesmo processo utilizado no cálculo de C_{22} , assume-se que as parcelas da energia de deformação, devidas à força resultante e força normal armazenadas no corpo da roda, se comportam de maneira proporcional às parcelas de energia armazenadas no dente devido à ação dos mesmos esforços. Isto pode ser apoiado pelo seguinte fato: quando se calcula as parcelas de energia de deformação no dente causadas pela força normal a mesma integral deve ser avaliada em ambos os casos, entretanto, a parcela devida à força normal é consideravelmente menor que a parcela devida à força cortante.

Voltando ao capítulo 2, (equação (2.12)), verifica-se que a parcela de energia devida ao esforço cortante é $2\beta(1 + \nu)$ vezes maior que a parcela devida ao esforço normal, então propõe-se que C_{33} seja calculado através de C_{22} utilizando a mesma proporção, portanto

$$C_{33} = \frac{C_{22}}{2\beta(1 + \nu)} \quad (3.47)$$

nesta equação as constantes β e ν tem o mesmo significado já especificado.

No caso do material ser aço ($\nu = 0,3$) C_{33} é obtido como $C_{22}/3,12$.

3.3 - Cálculo do deslocamento w

O deslocamento w é obtido na direção da força aplicada, como resultado da aplicação do segundo teorema de Castigliano.

Substituindo as expressões da força cortante, força normal e momento fletor atuantes no semi-plano que são:

$$M = P y_p \cos \alpha'$$

$$V = P \cos \alpha'$$

$$N = P \sin \alpha'$$

na equação (3.1), obtêm-se a expressão da energia de deformação elástica total durante a deformação da parte da roda adjacente ao dente.

$$U = C_{11} P^2 y_p^2 \cos^2 \alpha' + 2 C_{12} P^2 y_p \cos^2 \alpha' + \\ + C_{22} P^2 \cos^2 \alpha' + C_{33} P^2 \sin^2 \alpha'$$

Substituindo os valores obtidos para as constantes C_{11} , C_{12} , C_{22} e C_{33} na expressão acima, tem-se:

$$U = \frac{P^2 \cos^2 \alpha'}{E \ell} \left\{ \frac{9(1 - \nu^2)}{\pi} \left(\frac{y_p}{b}\right)^2 + \frac{6(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{5} \left(\frac{y_p}{b}\right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \nu^2)K}{\pi} \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2\beta(1 + \nu)} \right] \right\} \quad (3.48)$$

Derivando a expressão (3.48) em relação à carga P obtêm-se o deslocamento na direção da carga aplicada e fazendo $P/\ell = W_0$, tem-se:

$$w = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{2W_0 \cos^2 \alpha'}{E} \left\{ \frac{9(1 - \nu^2)}{\pi} \left(\frac{y_p}{b}\right)^2 + \frac{6(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{5} \left(\frac{y_p}{b}\right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \nu^2)K}{\pi} \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2\beta(1 + \nu)} \right] \right\} \quad (3.49)$$

CAPÍTULO 4

DEFORMAÇÃO DEVIDA AO CONTATO DOS DENTES

O problema do cálculo da deformação de contato, entre dois corpos, é geralmente, associado com o nome de H. Hertz. Embora existam métodos alternativos de análise, talvez nenhum é tão direto quanto o uso das funções de tensão de Westergaard[5].

No cálculo desta deformação, assume-se corpos infinitamente longos numa direção, podendo-se então desprezar a deformação nesta direção e representar os perfis em contato por semi-planos.

4.1 - Definição do modelo

Os dentes em contato são considerados cilindros e o comprimento destes é tomado igual à largura de um dente. Os raios de curvatura r_1 e r_2 são iguais aos raios de curvatura dos perfis, no ponto de contato. As dimensões h_1 e h_2 , que tornam finitos os corpos em contato (Fig. 4.1) são obtidas tomando a distância do ponto de contato à linha de centro do dente, medida ao longo da linha de ação da força.

4.2 - Atuação da força e sistema de coordenadas

A compressão por unidade de largura, $W_0 = P/l$, é suposta atuando na linha perpendicular à tangente comum aos perfis evolventes, passando pelo ponto de contato.

Um sistema de coordenadas cartesiano é localizado com o eixo y' na direção da linha de ação da carga. Deve-se notar, que este é um sistema de coordenadas local; ele é deslocado quando o ponto de contato varia, entretanto, é mantido perpendicular ao perfil.

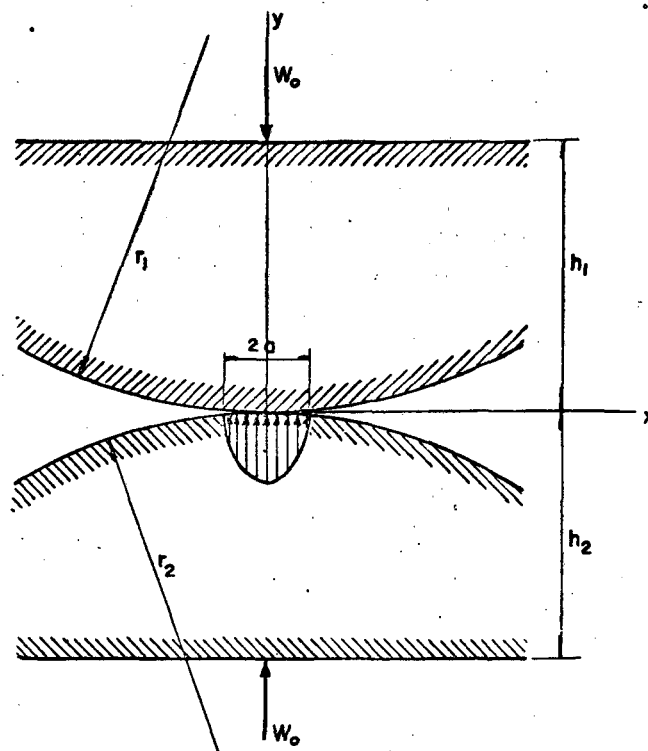


Fig. 4.1 - Modelo dos dentes em contato.

4.3 - Determinação da largura da banda de contato

Supõe-se que a superfície inicialmente plana do corpo semi-infinito é deslocada para formar uma depressão cilíndrica de raio ρ , como mostra a figura 4.2.

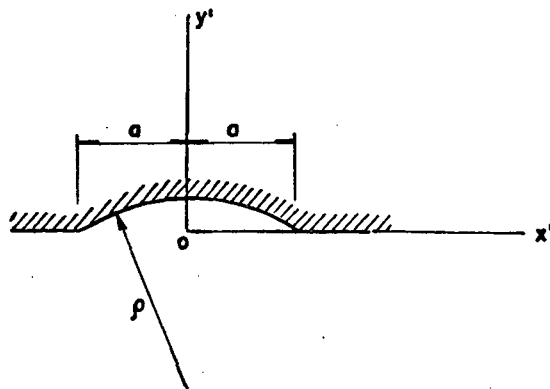


Fig. 4.2 - Semi-plano deformado

As equações para deslocamento e tensões normais na di

reção y' , em termos de função de tensão para um semi-plano com carga normal são:

$$\frac{E}{(1 + \nu)} v' = 2(1 - \nu)\phi - y' \frac{\partial \phi}{\partial y'} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\partial \phi}{\partial y'} - y' \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} \quad (4.2)$$

Uma proposição razoável para a função $\partial \phi / \partial y'$, é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y'} = -A \operatorname{Re} [(a^2 - z^2)^{1/2} + iz] \quad (4.3)$$

onde A é uma constante a ser determinada.

Sobre o contorno do semi-plano as tensões normais são dadas por:

$$\sigma_{y' \text{ cont}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right|_{y'=0} = -A(a^2 - x'^2)^{1/2} \quad (4.4)$$

Esta expressão representa uma distribuição de tensões elíptica sobre o contorno, o que é realmente aceitável para o modelo proposto. Além disso, também é o resultado obtido através de outros métodos.

Por outro lado, a resultante desta distribuição é a carga de compressão, então

$$\int_A \sigma_{y' \text{ cont}} dA = \int_{-a}^a \sigma_{y' \text{ cont}} \ell dx = P \quad (4.5)$$

Substituindo (4.4) em (4.5) e chamando $P/\ell = W_0$, obtêm-se o valor da constante A

$$A = 2 W_0 / \pi a^2 \quad (4.6)$$

Derivando a expressão (4.1) em relação a x' , obtêm-se a expressão da curvatura sobre a região $-a < x' < a$, isto é,

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} = \frac{2A(1 - \nu^2)}{E} \quad (4.7)$$

Substituindo o valor de A, obtêm-se a relação da carga necessária para provocar a mudança de curvatura de uma superfície inicialmente plana:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4(1 - \nu^2) W_0}{\pi E a^2} \quad (4.8)$$

Embora este resultado tenha sido obtido para uma superfície inicialmente plana, ele pode ser aplicado à situação na qual duas superfícies com curvaturas $1/r_1$ e $1/r_2$ são pressionadas uma contra outra.

Uma suposição bem aceitável, é assumir que a curvatura da superfície comum é expressa por $1/r_c$, (figura 4.3).

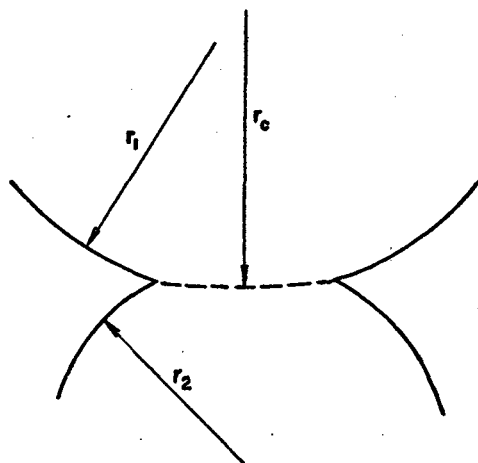


Fig. 4.3 - Corpos cilíndricos em contato.

Mudanças nas curvaturas das superfícies podem ser obtidas adaptando a equação (4.8). Admitindo que os dois corpos tenham constantes elásticas diferentes,

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_c} = \frac{4 W_0}{\pi a^2} \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_c} = \frac{4 W_0}{\pi a^2} \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \quad (4.10)$$

Eliminando r_c entre (4.9) e (4.10), obtêm-se a rela-

ção que define a meia largura da banda de contato:

$$a^2 = \frac{4 W_0}{\pi} \frac{1}{(1/r_1) + (1/r_2)} \left[\frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \right] \quad (4.11)$$

Para o modelo em questão, os dois dentes são do mesmo material. Chamando $(1/r_1 + 1/r_2) = 1/r$, obtemos

$$a^2 = \frac{8 W_0 r (1 - \nu^2)}{\pi E} \quad (4.12)$$

A máxima tensão de compressão ocorre para $x = 0$; chamando-a de p_{\max} , tem-se

$$p_{\max} = \sigma_{y', \max} = - \frac{2 W_0}{\pi a} \quad (4.13)$$

4.4 - Cálculo do deslocamento do ponto de contato.

O cálculo do deslocamento na direção y' é feito através da equação (4.1), utilizando a expressão (4.3) e a função ϕ dada por:

$$\phi = A \operatorname{Re} i \left[\frac{z}{2} (a^2 - z^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{z}{a} + \frac{i z^2}{2} \right] \quad (4.14)$$

Para $x' = 0$ e $y' = 0$, tem-se $v' = 0$; então, calculando o deslocamento relativo entre este ponto e o ponto de coordenadas $x' = 0$ e $y' = h_1$, obtém-se a seguinte expressão:

$$v_1' = \frac{A(1 + \nu)}{E} \left\{ 2(1 - \nu) \operatorname{Re} i \left[\frac{i h_1}{2} (a^2 + h_1^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{i h_1}{a} - \frac{i h_1^2}{2} \right] + h_1 \left[(a^2 + h_1^2)^{1/2} - h_1 \right] \right\} \quad (4.15)$$

Considerando que,

$$\operatorname{Re} \frac{ia^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{ih_1}{a} = - \frac{a^2}{2} \ln \left[\frac{h_1}{a} + \left(\frac{h_1^2}{a^2} + 1 \right)^{1/2} \right]$$

e desenvolvendo pela s\u00e9rie binomial a express\u00e3o entre par\u00eanteses e verificando que $h_1 \gg a$, a \u00faltima express\u00e3o \u00e9 simplificada para:

$$\operatorname{Re} \frac{ia^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{ih_1}{a} = - \frac{a^2}{2} \ln \frac{2h_1}{a} \quad (4.16)$$

Substituindo (4.6) e (4.16) na express\u00e3o (4.15) e fazendo as opera\u00e7\u00f5es necess\u00e1rias, chega-se \u00e0 express\u00e3o do deslocamento relativo no dente da roda 1.

$$v'_1 = - \frac{2 W_0 (1 - v^2)}{\pi E} \left[\ln \frac{2h_1}{a} - \frac{v}{2(1 - v)} \right] \quad (4.17)$$

Analogamente no dente da roda 2, o deslocamento relativo \u00e9 dado por:

$$v'_2 = - \frac{2 W_0 (1 - v^2)}{\pi E} \left[\ln \frac{2h_2}{a} - \frac{v}{2(1 - v)} \right] \quad (4.18)$$

Em ambas as express\u00f5es (4.17) e (4.18), o sinal menos indica que o deslocamento foi no sentido de aproxima\u00e7\u00e3o dos dois cilindros, ent\u00e3o o deslocamento total \u00e9 dado por:

$$v'' = |v'_1| + |v'_2| = \frac{2 W_0 (1 - v^2)}{\pi E} \left[\ln \frac{4h_1 h_2}{a^2} - \frac{v}{(1 - v)} \right]$$

Este deslocamento \u00e9 medido na dire\u00e7\u00e3o da for\u00e7a que comprime os dentes. Ent\u00e3o passa-se a cham\u00e1-lo de w , pois a linha de a\u00e7\u00e3o da for\u00e7a nunca \u00e9 paralela \u00e0 dire\u00e7\u00e3o y do sistema de coordenadas global. Al\u00e9m disso, \u00e9 poss\u00edvel a superposi\u00e7\u00e3o deste deslocamento com os deslocamentos devidos \u00e0 deforma\u00e7\u00e3o do dente e da parte adjacente ao dente, pois aqueles s\u00e3o calculados nesta mesma dire\u00e7\u00e3o.

Assim, a express\u00e3o da deforma\u00e7\u00e3o de contato total passa a ser:

$$w = \frac{2 W_0 (1 - \nu^2)}{\pi E} \left[\ln \frac{4h_1 h_2}{a^2} - \frac{\nu}{(1 - \nu)} \right] \quad (4.19)$$

CAPÍTULO 5

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A aplicação de outro método de cálculo da deformação, torna-se necessária, para testar a formulação teórica apresentada.

A técnica de simulação utilizada é baseada no método dos elementos finitos [9]. Neste método, a idealização do contínuo, é obtida, dividindo-o em um número finito de sub-divisões (elementos), os quais, são assumidos ligados em seus vértices (nós). As características força-deflexão de cada elemento podem ser determinadas em termos do deslocamento nodal, definindo uma configuração de deslocamento contínua dentro do elemento e no contorno do elemento, tal que os deslocamentos entre elementos adjacentes sejam compatíveis. Conseqüentemente, pode ser determinada a matriz de rigidez do elemento, para definir a deflexão de todos os nós do elemento quando são aplicadas as forças nos nós.

Para realização da simulação, foi utilizado o Programa Analisador de Sistemas Estruturais (PROASE) [9] disponível no Centro Tecnológico da UFSC. Este programa permite a análise de estruturas, através de elementos finitos binodais, trinodais e tetranodais, possuindo grande versatilidade operacional.

Uma característica importante deste programa, é a verificação da precisão numérica, através da comparação da energia de deformação total com o trabalho externo das forças aplicadas e, também, da verificação do equilíbrio individual de cada nó.

Além disso, o programa executa um processo iterativo para aprimoramento da solução, até que o erro numérico se situe em nível pré-estabelecido.

A idealização estrutural consiste em 76 elementos quadrangulares e 101 nós. Apenas o segmento do corpo da roda, mostrado na figura 5.1 é considerado na simulação. O tamanho deste segmento e suas condições de contorno, representam um compromis

so entre a precisão e tempo de computação.

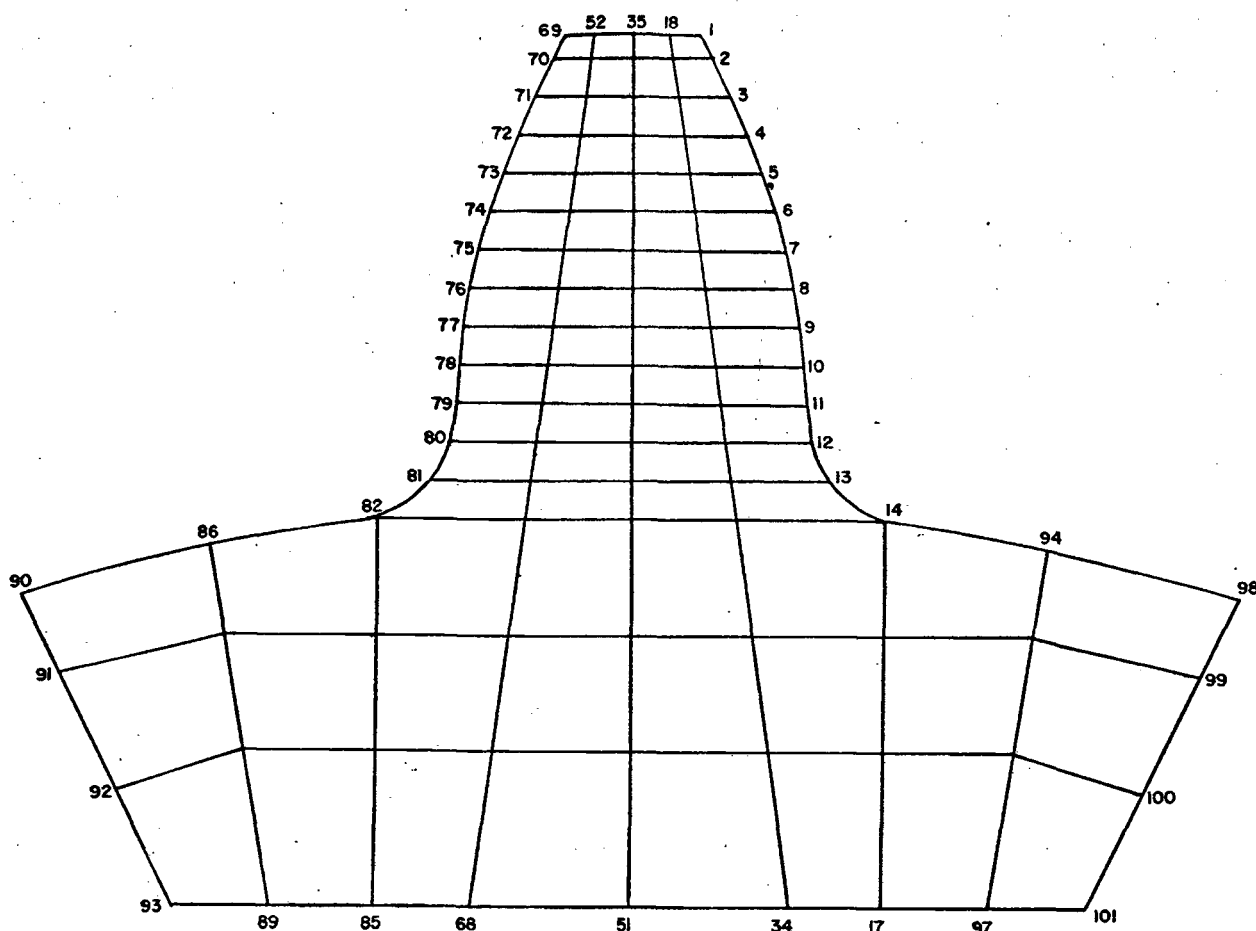


Fig. 5.1 - Idealização estrutural do segmento da engrenagem.

A escolha do elemento tetragonal foi feita, seguindo recomendações de usuários e do próprio autor do programa, os quais comprovaram que o elemento finito tetragonal fornecia melhor precisão de solução. A divisão do modelo num único tipo de malha é aconselhada, quando possível. A mistura, por exemplo, de elementos trinodais e tetranodais é aconselhada para modelos de forma não regular, ou quando existe a necessidade da transição de uma malha de elementos finitos, fina, para uma malha de elementos maiores. No entanto, é comprovado o prejuízo na acuidade numérica da solução.

Para não utilizar dois tipos de elemento na malha, foi necessário utilizar elementos tetranodais bem irregulares, não respeitando uma recomendação de não exceder a proporção de um para dois entre as dimensões dos lados menor e maior do elemento.

Foi utilizada a formulação da membrana quadrilátera (BETA 5), disponível no PROASE, pois esta atendeu perfeitamente as necessidades do modelo.

As condições de contorno foram escolhidas levando em consideração a coerência com as condições de contorno da resolução teórica. Anteriormente, havia sido proposto, que dois pontos suficientemente afastados do centro do dente, numa relação de a/b em torno de três, seriam fixados. Na prática, isto correspondeu a fixação dos nós 90 e 98. Os outros nós, 91, 92, 93, 99, 100 e 101, foram fixados usando a justificativa de que nestes pontos, as componentes de deslocamento estariam, já, bastante pequenas, relativamente aos pontos do dente propriamente dito. Na bibliografia [10], foi encontrado apoio para esta vinculação proposta.

A carga foi aplicada em cinco pontos do perfil, uma de cada vez. Estes pontos, que correspondem, no modelo, aos nós 1, 4, 6, 8 e 9, estão igualmente espaçados sobre a linha de engrenamento de um par de dentes.

O programa permite que se especifique um sistema de referência local, em cada nó. Deste modo, foram especificados cinco sistemas de referência nos nós de aplicação de carga, com o eixo x orientado na direção dada pelo ângulo de pressão do perfil, naquele ponto.

Assim, o deslocamento na direção de uma força aplicada, é facilmente lido na listagem fornecida pelo computador. Isto facilita sobremaneira a comparação de resultados.

CAPÍTULO 6

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Introdução

Os resultados a seguir foram obtidos através da aplicação da formulação proposta e do método dos elementos finitos. O exemplo consistiu em uma engrenagem de módulo 2,5 mm e 24 dentes com 10 mm de largura.

6.1 - Método de cálculo proposto

As fórmulas propostas pelo método apresentado, podem ser resumidas em três parcelas que somadas resultam no deslocamento total na direção da força aplicada. São elas: deslocamento devido à flexão, cisalhamento e esforço normal no dente:

$$w_d = \frac{W_0}{E} \cos^2 \alpha' [(2\beta (1+\nu) + \operatorname{tg}^2 \alpha') I_1 + 12 I_2] \quad (6.1)$$

Esta fórmula para o exemplo apresentado, se reduz a:

$$w_d = \frac{W_0}{E} \cos^2 \alpha' [(3,12 + \operatorname{tg}^2 \alpha') I_1 + 12 I_2] \quad (6.2)$$

Aqui, I_1 e I_2 representam as integrais citadas no Capítulo 1 e seus vários valores são apresentados no Anexo 3.

O deslocamento devido à elasticidade do corpo da roda é dado por:

$$w_r = \frac{W_0}{E} \cos^2 \alpha' \left[\frac{18(1-\nu^2)}{\Pi} \left(\frac{Y_p}{b}\right)^2 + \frac{12(1+\nu)(1-2\nu)}{5} \left(\frac{Y_p}{b}\right) + \frac{2(1-\nu^2)}{\Pi} K \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha'}{2\beta(1+\nu)}\right) \right] \quad (6.3)$$

Esta expressão se reduz para o exemplo a:

$$w_r = \frac{W_0}{E} \cos^2 \alpha' \left[5,21 \left(\frac{Y_p}{b} \right)^2 + 1,25 \left(\frac{Y_p}{b} \right) + (1,5 + 0,48 \operatorname{tg}^2 \alpha') \right] \quad (6.4)$$

e, finalmente, a parcela do deslocamento devida à deformação de contato, aqui considerada apenas em um dente, é:

$$w_c = \frac{2 W_0 (1-\nu^2)}{E} \left[\ln \frac{2h_1}{a} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right] \quad (6.5)$$

6.2 - Posições das cargas

As forças foram aplicadas em pontos do perfil que correspondem a cinco pontos igualmente espaçados sobre a linha de engrenamento útil do perfil, como mostra a Figura 6.1.

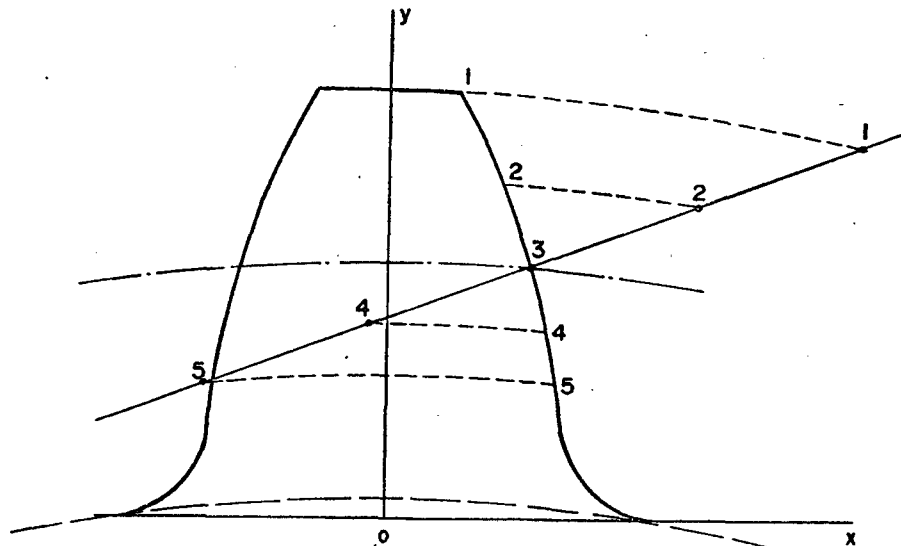


FIG. 6.1 - Posições dos pontos de aplicação das cargas.

Estas forças foram variadas de 100 kgf a 300 kgf, correspondendo a forças por unidade de largura de 10, 15, 20, 25 e 30 [kgf/mm].

Ao mesmo exemplo, foi aplicada a técnica dos elementos finitos, utilizando a malha e vinculação expostas no Capítulo 5.

Os resultados obtidos são apresentados no Quadros (6-1)

a (6.5); nestes quadros o deslocamento calculado por elementos finitos será representado por w_{ef} e o deslocamento total teórico por w_t , onde

$$w_t = w_d + w_r + w_c \quad (6.6)$$

Os deslocamentos são dados em microns (10^{-3} mm).

Na última coluna destes quadros é calculada a diferença percentual entre os dois valores totais, tomando como base o valor obtido por elementos finitos.

$W_o = 10 \text{ kgf/mm}$							
PONTO	NÓ	w_d	w_r	w_c	w_t	w_{ef}	$\Delta \%$
1	1	5.079	2.474	0.853	8.406	7.824	7.44
2	4	2.194	1.809	0.984	4.987	4.565	9.24
3	6	1.246	1.382	1.040	3.668	3.424	7.13
4	8	0.922	1.197	1.066	3.185	2.607	22.17
5	9	0.718	1.108	1.069	2.895	2.350	23.19

QUADRO (6-1)

$W_o = 15 \text{ kgf/mm}$							
PONTO	NÓ	w_d	w_r	w_c	w_t	w_{ef}	$\Delta \%$
1	1	7.618	3.711	1.195	12.524	11.737	6.71
2	4	3.291	2.713	1.392	7.396	6.847	8.02
3	6	1.869	2.074	1.477	5.420	5.137	5.51
4	8	1.383	1.795	1.516	4.694	3.910	20.05
5	9	1.077	1.662	1.520	4.259	3.525	20.82

QUADRO (6-2)

W ₀ = 20 kgf/mm							
PONTO	N ^o	w _d	w _r	w _c	w _t	w _{ef}	Δ %
1	1	10.157	4.949	1.514	16.620	15.649	6.20
2	4	4.389	3.617	1.777	9.783	9.129	7.16
3	6	2.492	2.765	1.890	7.147	6.849	4.33
4	8	1.844	2.393	1.942	6.179	5.214	18.51
5	9	1.436	2.216	1.948	5.600	4.700	19.15

QUADRO (6-3)

W ₀ = 25 kgf/mm							
PONTO	N ^o	w _d	w _r	w _c	w _t	w _{ef}	Δ %
1	1	12.696	6.186	1.816	20.698	19.561	5.81
2	4	5.486	4.521	2.144	12.151	11.411	6.48
3	6	3.115	3.456	2.285	8.856	8.561	3.45
4	8	2.305	2.992	2.350	7.647	6.517	17.34
5	9	1.795	2.770	2.358	6.923	5.875	17.84

QUADRO (6-4)

W ₀ = 30 kgf/mm							
PONTO	N ^o	w _d	w _r	w _c	w _t	w _{ef}	Δ %
1	1	15.236	7.423	2.103	24.762	23.473	5.45
2	4	6.583	5.426	2.497	14.516	13.693	6.01
3	6	3.739	4.147	2.667	10.553	10.273	2.73
4	8	2.766	3.590	2.745	9.101	7.820	16.38
5	9	2.154	3.324	2.754	8.232	7.050	16.77

QUADRO (6-5)

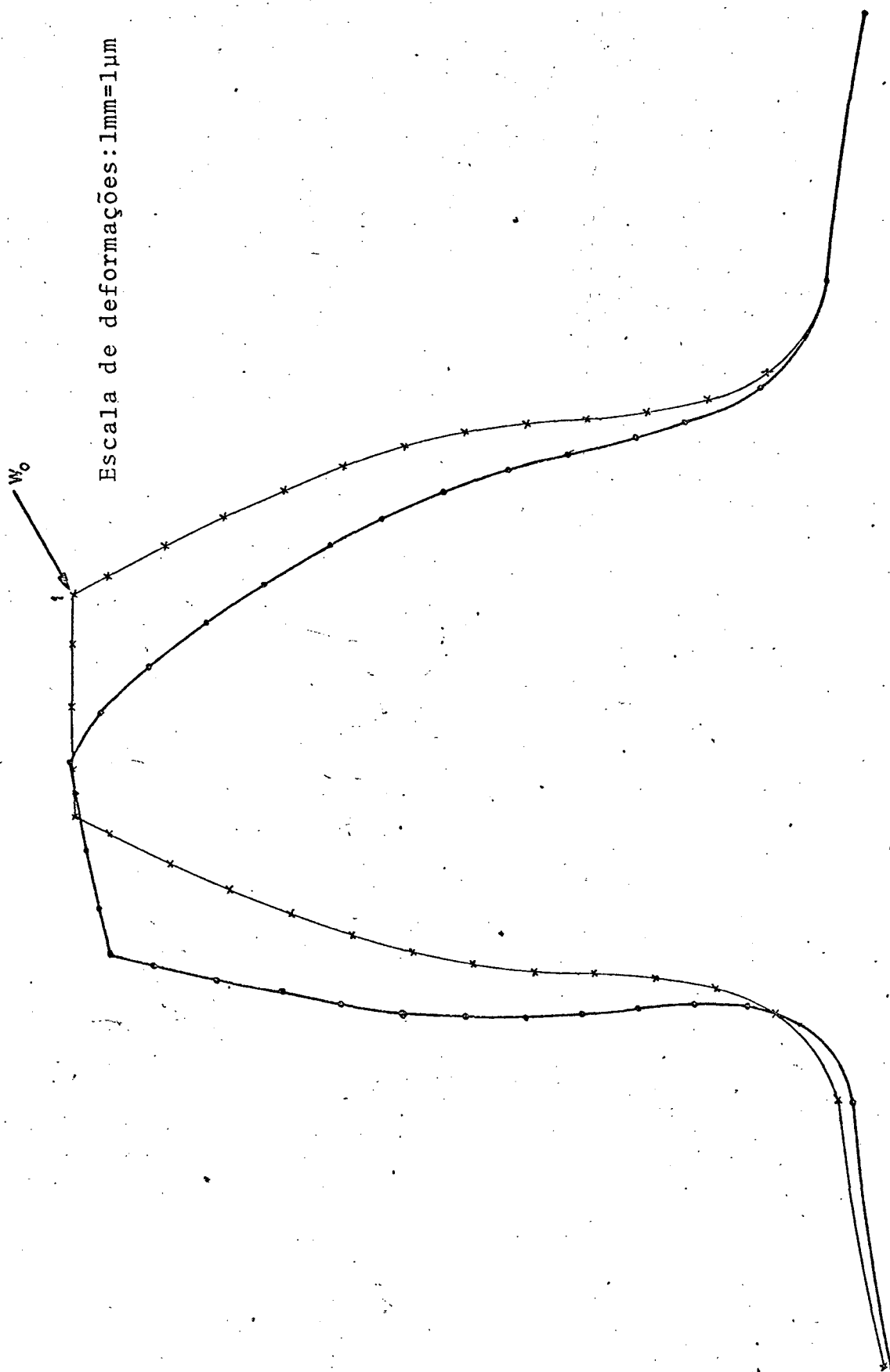
Fazendo uma análise destes dados, verifica-se que os valores obtidos pelo método proposto são maiores que os obtidos via elementos finitos, quando se considera naquele a parcela da deformação de contato. Entretanto, se forem consideradas apenas as parcelas devidas à deformação do dente e à elasticidade do corpo da roda, os valores calculados por elementos finitos passam a ser maiores. Isto se explica, porque na simulação por elementos finitos a força foi aplicada concentrada num nó e, consequentemente, causou um deslocamento maior do que causaria se fosse distribuída sobre a superfície de contato. Esta característica pode ser observada nas figuras 6.2 a 6.6, para várias situações de carregamento.

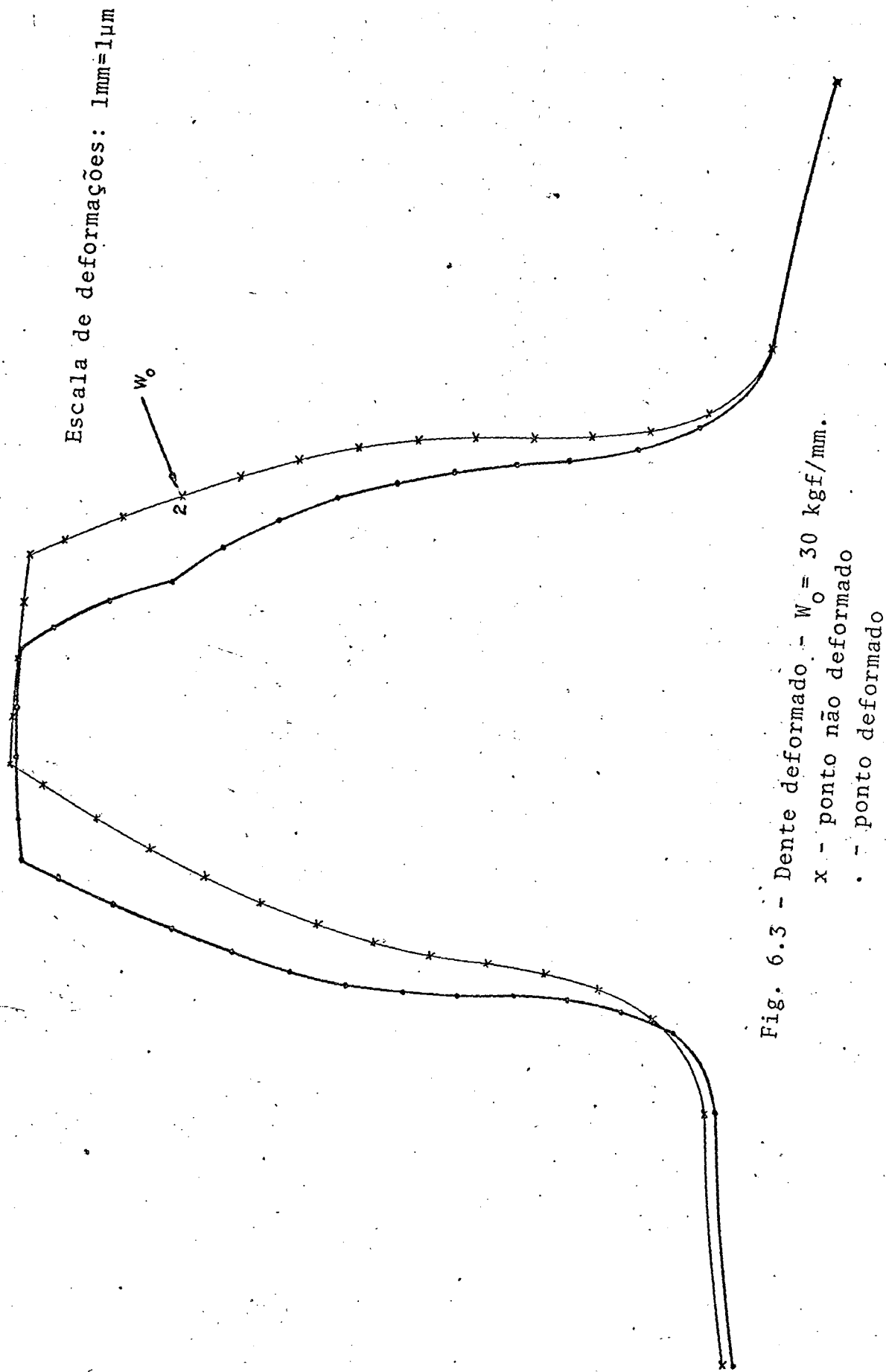
Outra verificação dos mesmos quadros, mostra que a medida que aumenta a força aplicada, a diferença percentual em um mesmo ponto diminui e ainda, que estas diferenças entre o valor calculado teoricamente e o calculado pelo programa de elementos finitos nos pontos de aplicação de carga 1, 2 e 3 se situam em valores bem aceitáveis, com exceção dos pontos 4 e 5. Uma explicação para esta redução gradativa da diferença percentual, pode ser dada pelo comportamento não linear da deformação de contato que diminui sua contribuição a medida que a força aumenta, isto é, para um grande aumento de carga ocorre pequeno aumento no deslocamento devido a esta deformação.

PONTO	NÓ	α' [°]	Y_p [mm]	b [mm]	w_d [%]	w_r [%]
1	1	29.84	5.79	6.50	67.24	32.76
2	4	25.37	4.25	6.50	54.82	45.18
3	6	20.00	3.04	6.50	47.41	52.59
4	8	15.61	2.40	6.50	43.52	56.48
5	9	11.62	2.04	6.50	39.32	60.68

QUADRO (6-6)

No Quadro (6-6) são apresentadas as percentagens do deslocamento total, considerando-o como devido apenas à deformação do dente e à elasticidade da roda. Observa-se que a deforma





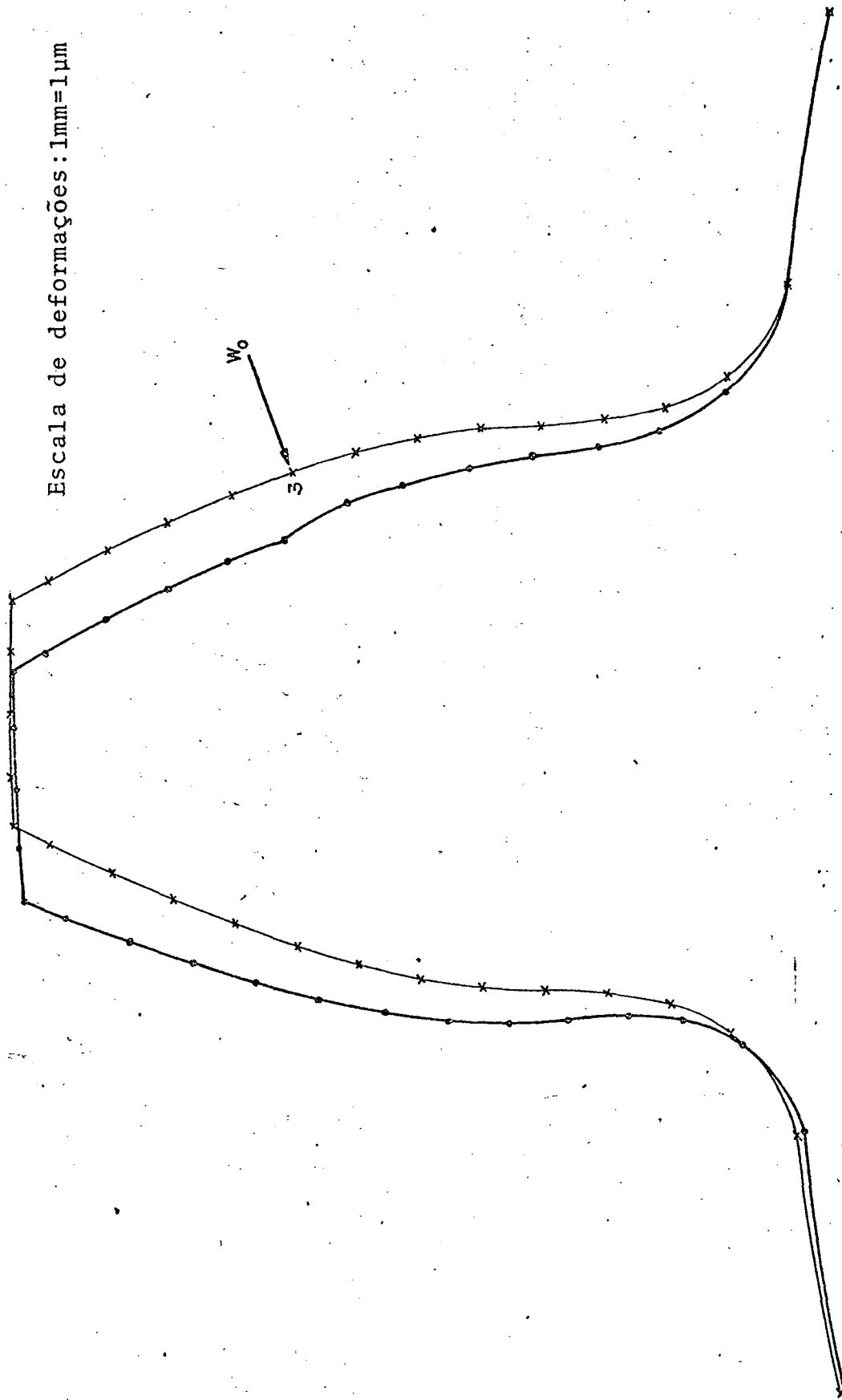


Fig. 6.4 - Dente deformado -- $W_0 = 30 \text{ kgf/mm}$.

x - ponto não deformado

o - ponto deformado

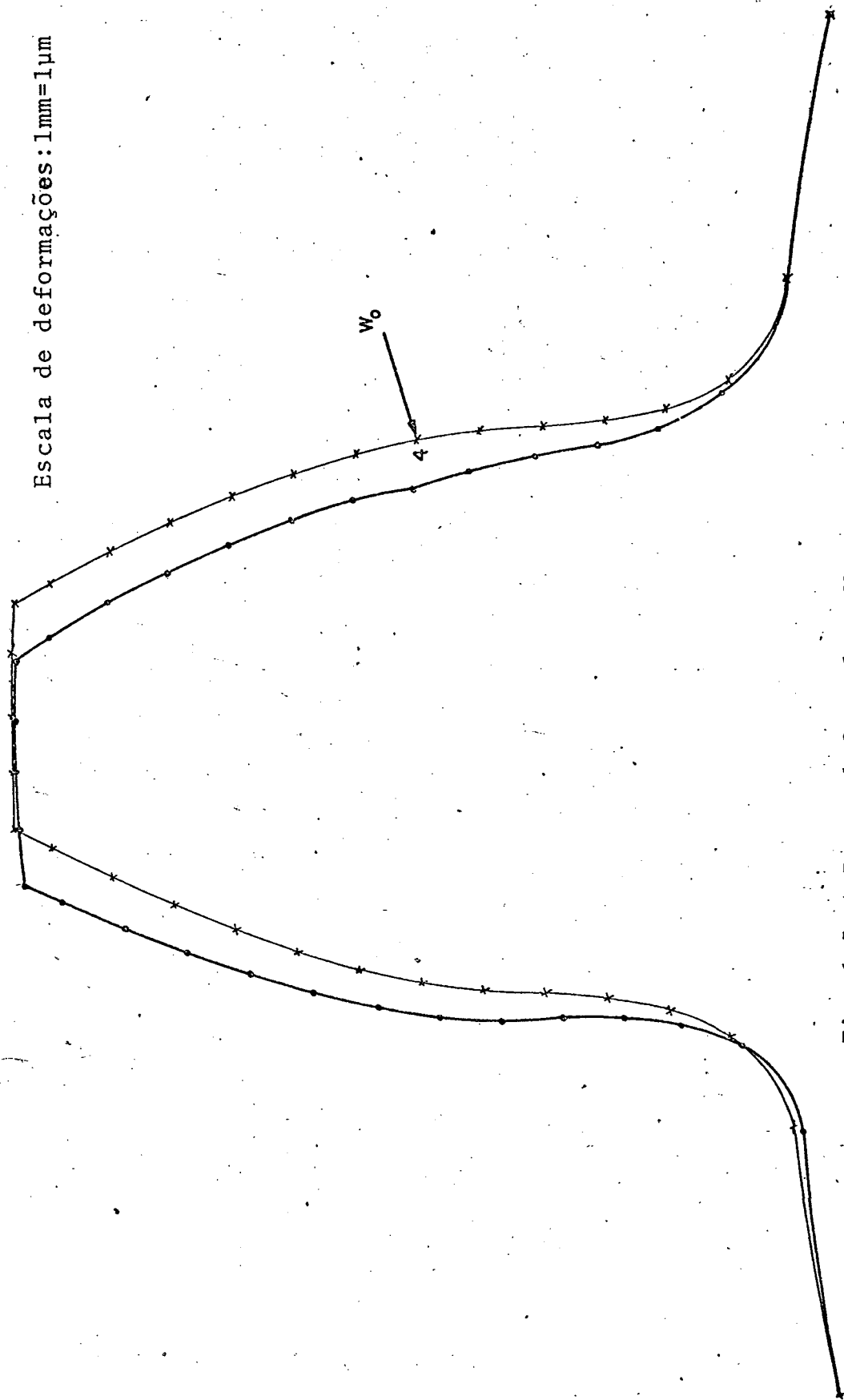


Fig. 6.5 - Dente deformado - $W_0 = 30$ kgf/mm.

x - ponto não deformado

· - ponto deformado

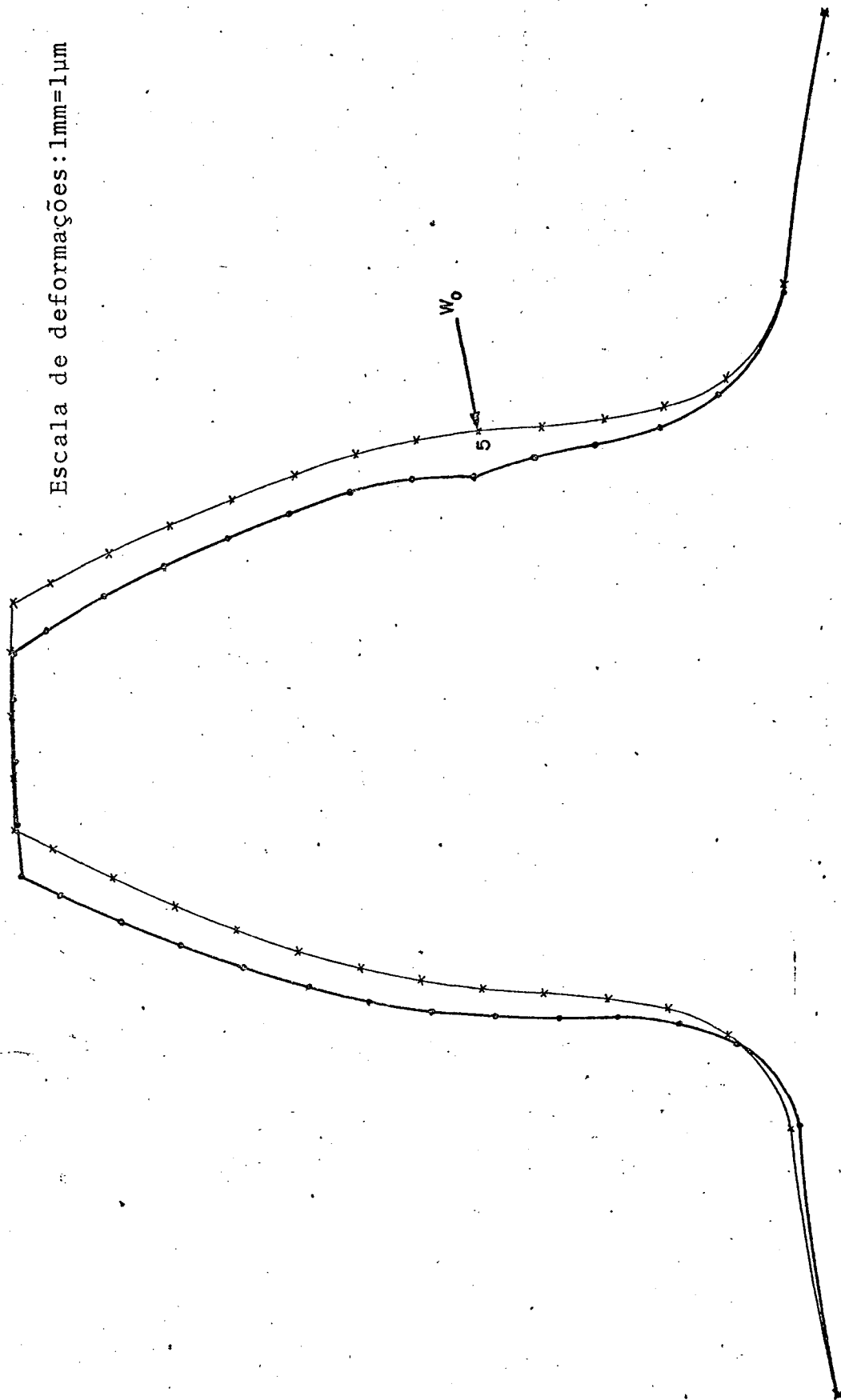


Fig. 6.6 - Dente deformado - $W_0 = 30 \text{ kgf/mm}$.

x - ponto não deformado

o - ponto deformado

ção do dente predomina sobre a deformação da roda mas, vai de crescendo e a partir dos pontos 4 e 5, que se situam abaixo da circunferência primitiva, verifica-se que a elasticidade da roda exerce uma contribuição maior para o deslocamento total. Isto pode ser explicado porque nestes pontos o dente considerado como viga, está mais rígido; então as solicitações são transmitidas mais diretamente ao corpo da engrenagem.

Nas Figuras 6.7-a,b,c,d,e são apresentados os gráficos do deslocamento total para as várias situações de carga utilizando os dois métodos de cálculo.

Na Figura 6.8, são apresentados os gráficos do deslocamento total para um par de engrenagens iguais para o carregamento de 20 kgf/mm.

O gráfico do deslocamento total, ocorrido em um par de dentes, é obtido através da soma do deslocamento de um dente com o deslocamento do outro em pontos que se correspondam durante o engrenamento, por exemplo, o início do engrenamento de um dente (ponto 1) com o final de engrenamento do outro (ponto 5), ponto 2 com ponto 4, etc.

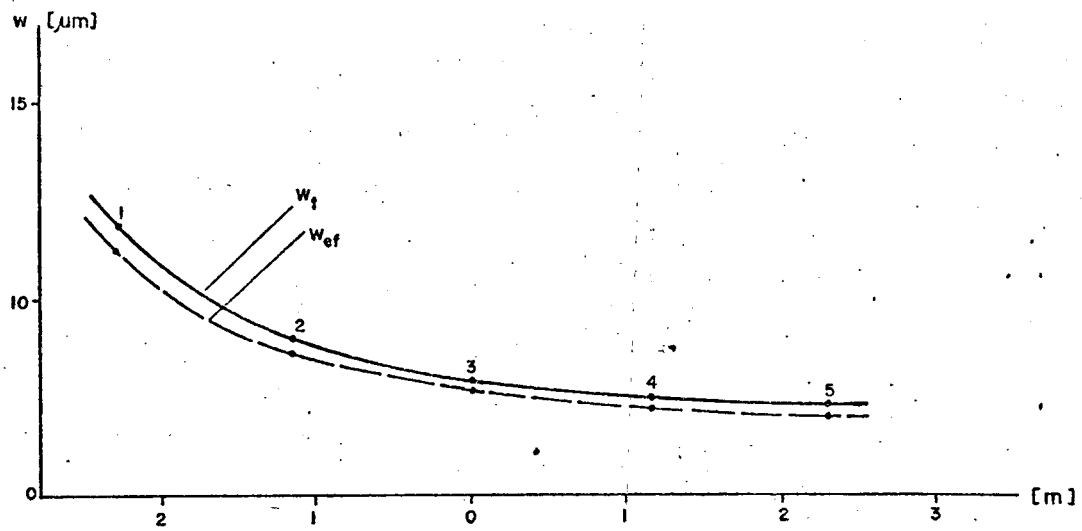
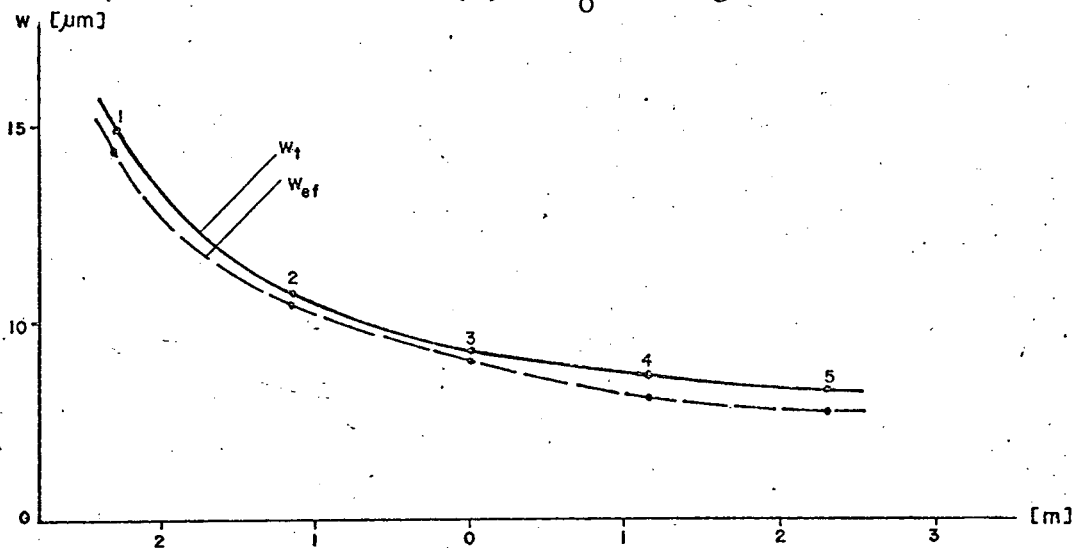
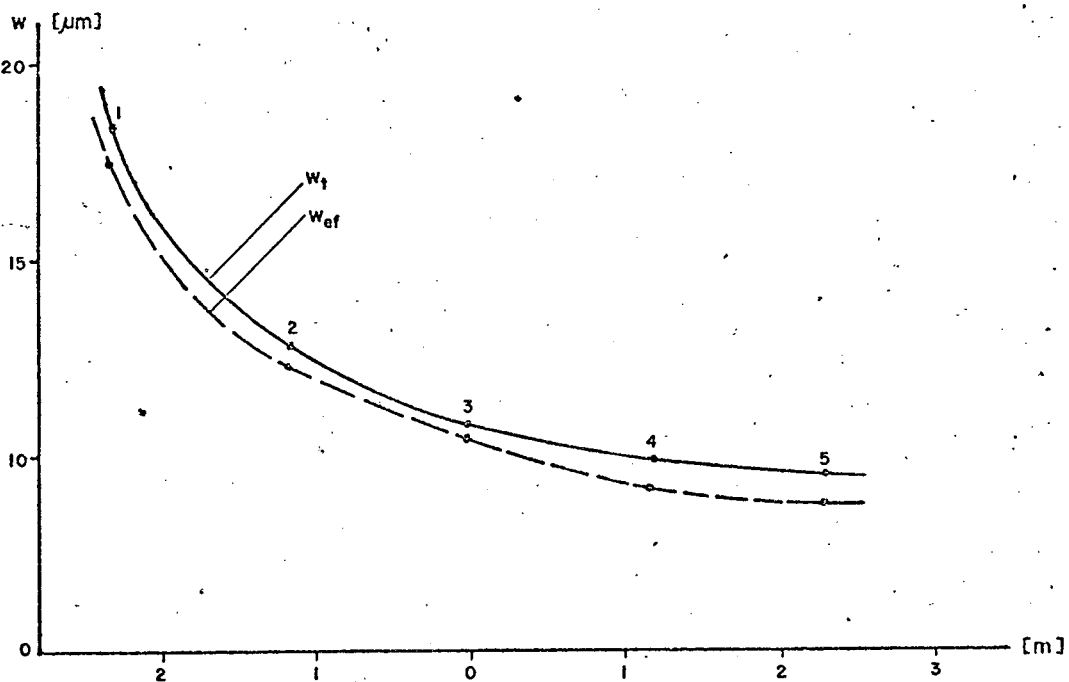
(a) - $W_0 = 10$ kgf/mm.(b) - $W_0 = 15$ kgf/mm.(c) - $W_0 = 20$ kgf/mm.

Fig. 6.7-a,b,c - Deslocamento total.

 w_t - método proposto w_{ef} - método dos elementos finitos

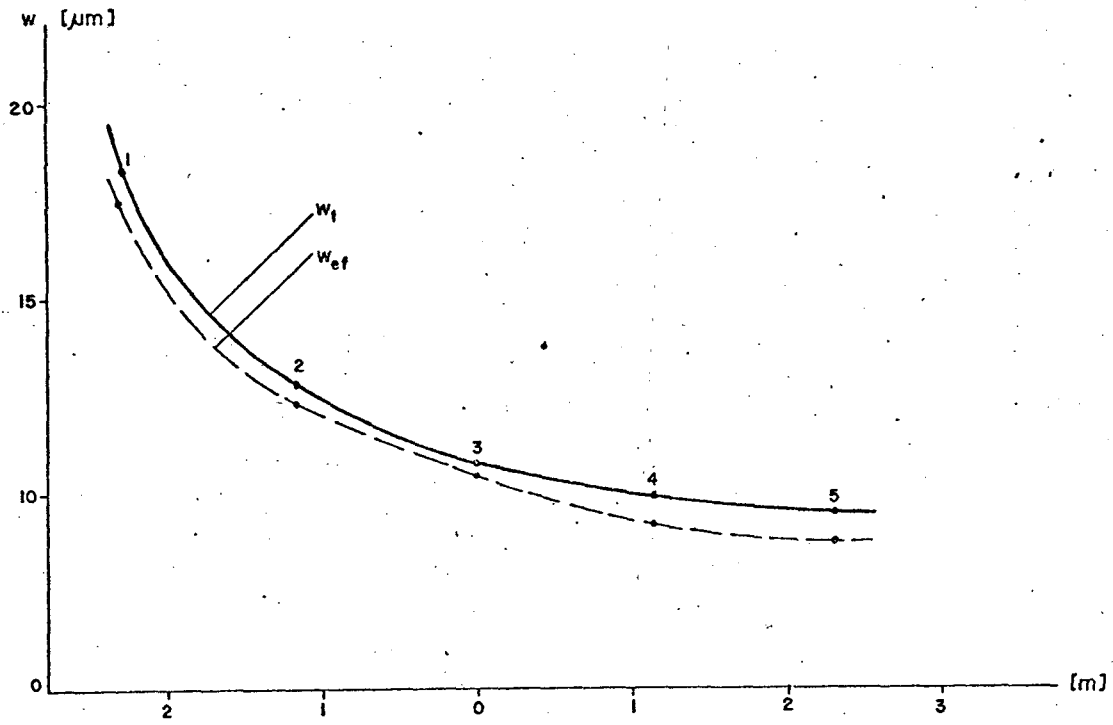
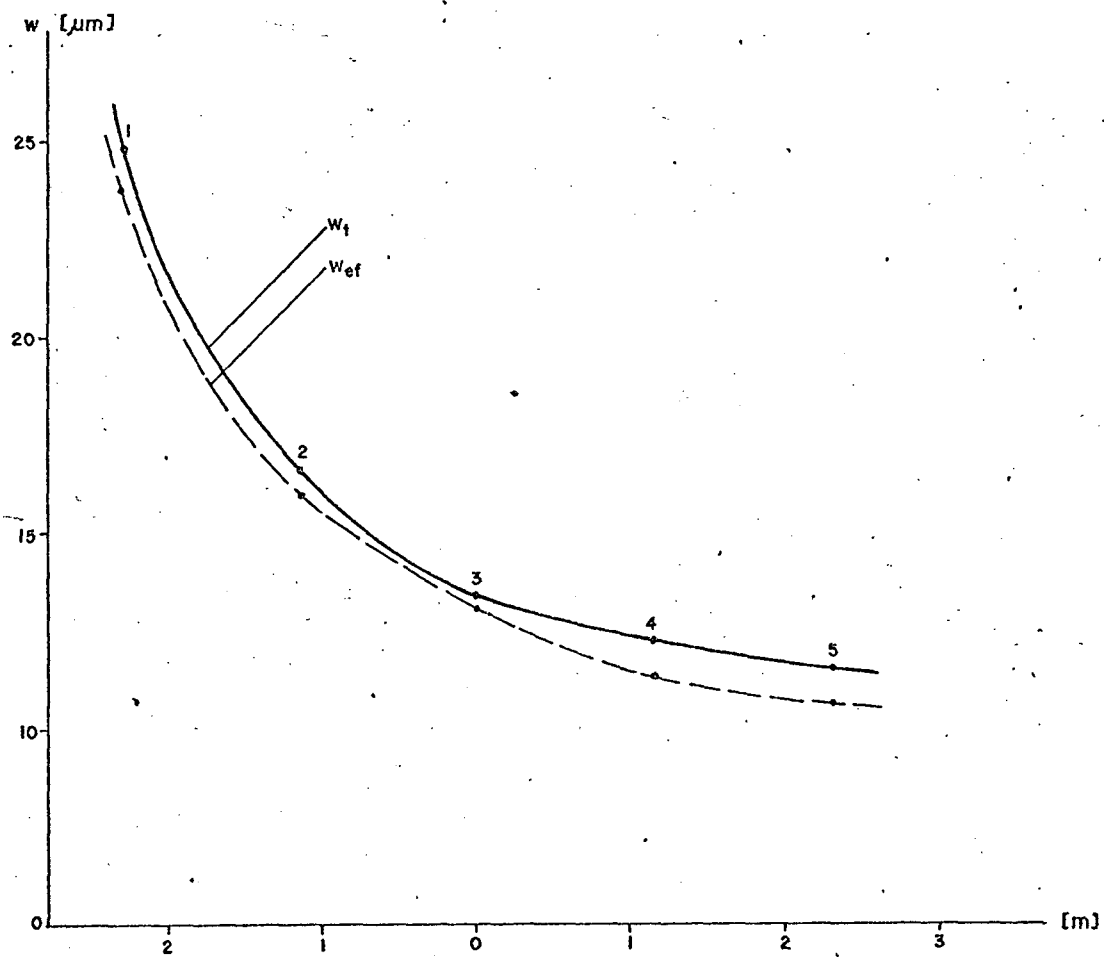
(d) - $W_0 = 25 \text{ kgf/mm}$.(e) - $W_0 = 30 \text{ kgf/mm}$.

Fig. 6.7-d,e - Deslocamento total.

 w_t - método proposto w_{ef} - método dos elementos finitos

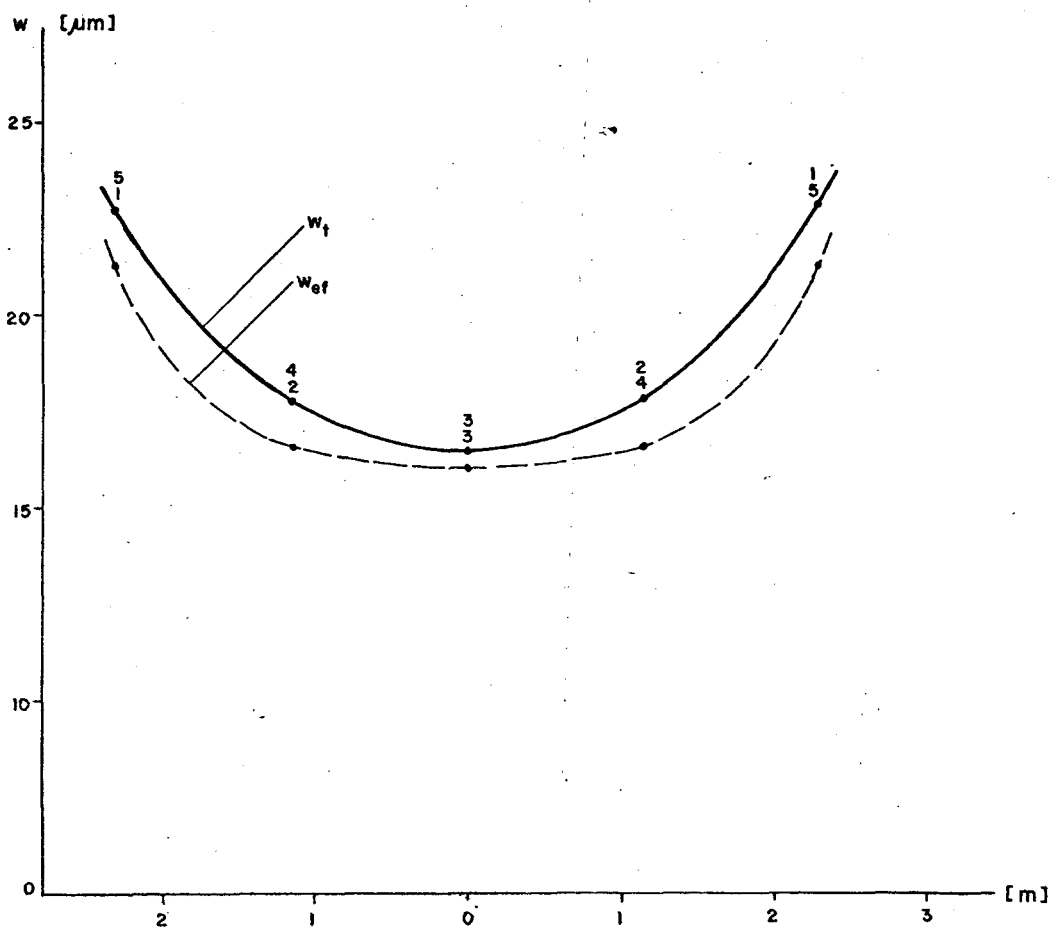


Fig. 6.8 - Deslocamento total p/ um par de dentes,
 w_t - método proposto
 w_{ef} - método dos elementos finitos.
 $W_0 = 20 \text{ kgf/mm}$

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

A aplicação do método dos elementos finitos à análise de deformação de engrenagens é muito trabalhosa, em vista da necessidade das coordenadas do perfil evolvente, pois qualquer modificação das características da engrenagem implica em novo cálculo destas coordenadas. Este problema pode ser contornado se for introduzido um sub-programa gerador destas coordenadas no programa de elementos finitos.

No método dos elementos finitos, existe a limitação de que a aplicação de forças só pode ser feita em pontos que coincidam com os nós, isto implica que a malha de elementos finitos deve ser planejada de acordo com os pontos de aplicação de carga já previamente escolhidos.

O deslocamento devido à deformação de contato, não é de fácil obtenção pela técnica dos elementos finitos, exigindo que sejam feitas iterações fora do computador.

Dos resultados apresentados no capítulo 6, pode-se relacionar as seguintes conclusões:

1. A aplicação da formulação proposta exige poucos dados, mas necessita de duas integrações numéricas que são dependentes das coordenadas do dente, e isto pode ser programado com facilidade. Entretanto, para se obter o deslocamento correspondente à aplicação da força num determinado ponto, basta que se tenha o valor do ângulo de incidência do perfil neste ponto e o correspondente valor de y_p , portanto, a força pode ser aplicada em qualquer ponto do perfil.
2. A solução proposta apresenta vantagem no cálculo do deslocamento devido à deformação de contato, o qual é obtido diretamente e pode ser calculado para qualquer posição sobre o perfil do dente.

BIBLIOGRAFIA

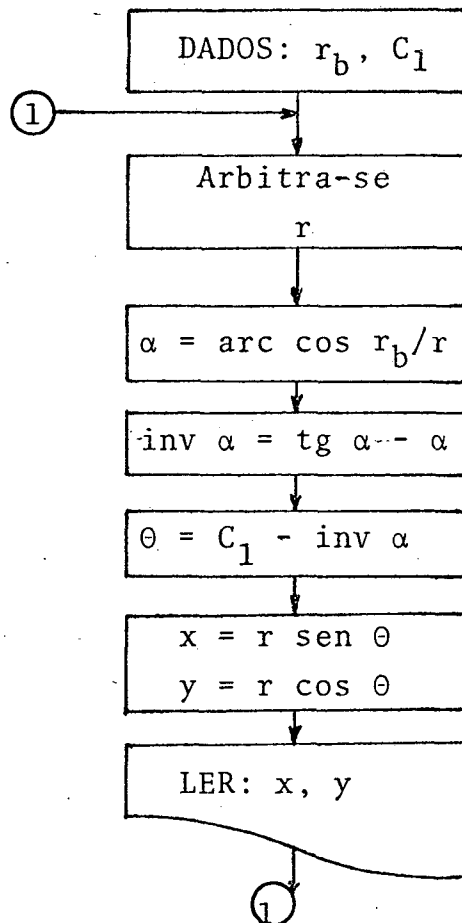
- [1] LEWIS, W. - Investigation of the strenght of gear teeth. Proceedings of the Engineers' Club, 10 (1), Philadelphia (1893).
- [2] WELLAWER, E.J. & SEIREG, A. - Bending strenght of gear teeth by cantilever plate theory. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, 82 (3), 213-222 (1960).
- [3] UMEZAWA, K., ISHIKAWA, J. & HAYASHI, K. - Deflection due to a concentraded load on a cantilever thick plate of finite lenght for gears. Bulletin of the JSME, 12(53), 1204-1211 (1969).
- [4] TUPLIN, W.A. - Gear load capacity. John Wiley, New York (1952).
- [5] DUGDALE, D.S. & RUIZ, C. - Elasticity for engineers. McGraw-Hill, New York (1970).
- [6] TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. - Theory of elasticity. McGraw-Hill, New York (1970).
- [7] MUSKHESHLIVILI, N.J. - Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. P. Noordhoff, Groningen (1963).
- [8] BUCKINGHAM, E. - Analytical mechanics of gears. Dover, New York (1963).
- [9] BOECHAT ALVES, D. - PROASE - Manual do usuário. Centro Tecnológico da UFSC, Florianópolis (1975).
- [10] WALLACE, D.B. & SEIREG, A. - Computer simulation of dynamic stress, deformation, and fracture of gear teeth. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, 95 (4), 1108-1114 (1973).

- [11] WELLAWER, E.J. - An analysis of factors used for strenght rating helical gears. Journal of Enginnering for Industry, Trans. ASME, 82 (3), 205-212 (1960).
- [12] WANG, S.M. & MORSE, I.E. - Torsional response of gear train system. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, 94 (2), 583-588 (1972).
- [13] WILCOX, L. & COLEMAN, W. - Application of finite elements to the analysis of gear tooth stresses. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, 95 (4), 1139-1148 (1973).
- [14] AIDA, T. & ODA, S. - Bending strenght design of gears. Bulletin of the JSME, 12 (53), 902-909 (1969).
- [15] POPOV, E.P. - Introduction to mechanics of solids. Prentice-Hall, New Jersey (1968).
- [16] SEELY, F.B. & SMITH, J.O. - Advanced mechanics of materials. John Wiley, New York (1952).
- [17] HENRIOT, G. - Traité théorique et pratique des engrenages. Ed. Dunod, Paris (1960).
- [18] CHURCHILL, R.V. - Complex variables and applications. McGraw-Hill, New York (1960).

ANEXO 1

1.1 - Cálculo das coordenadas do perfil evolvente

1.1.1 - Fluxograma de cálculo



1.1.2 - Nomenclatura

α = ângulo de incidência do perfil sobre a circunferência de raio r

s = espessura circunferencial do dente sobre a circunferência primitiva

$$= m(\pi/2 \pm 2x \operatorname{tg} \alpha_1)$$

m = módulo da engrenagem

x = fator de deslocamento do perfil

α_1 = ângulo de pressão sobre a circunferência primitiva
 r_b = raio de base do perfil
 r_1 = raio da circunferência primitiva
 $C_1 = (s/2r_1) + \text{inv } \alpha_1$

1.1.3 - Obtenção das coordenadas

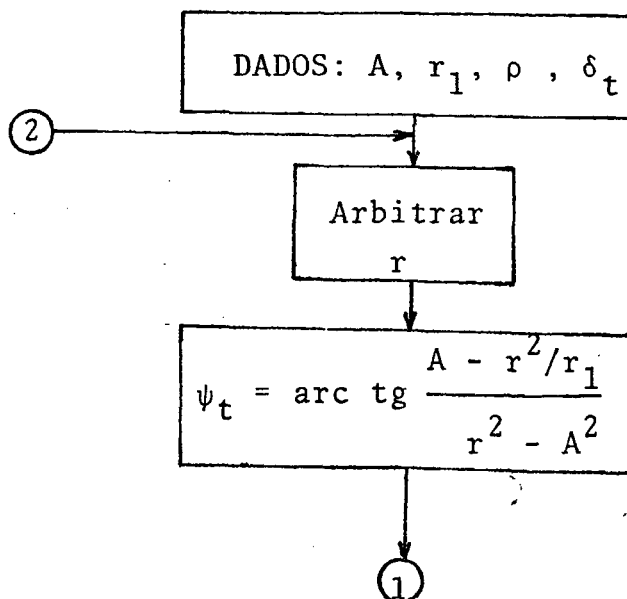
Arbitra-se um raio compreendido entre o raio de base e o raio de adendum do dente e obtêm-se o par de coordenadas x, y.

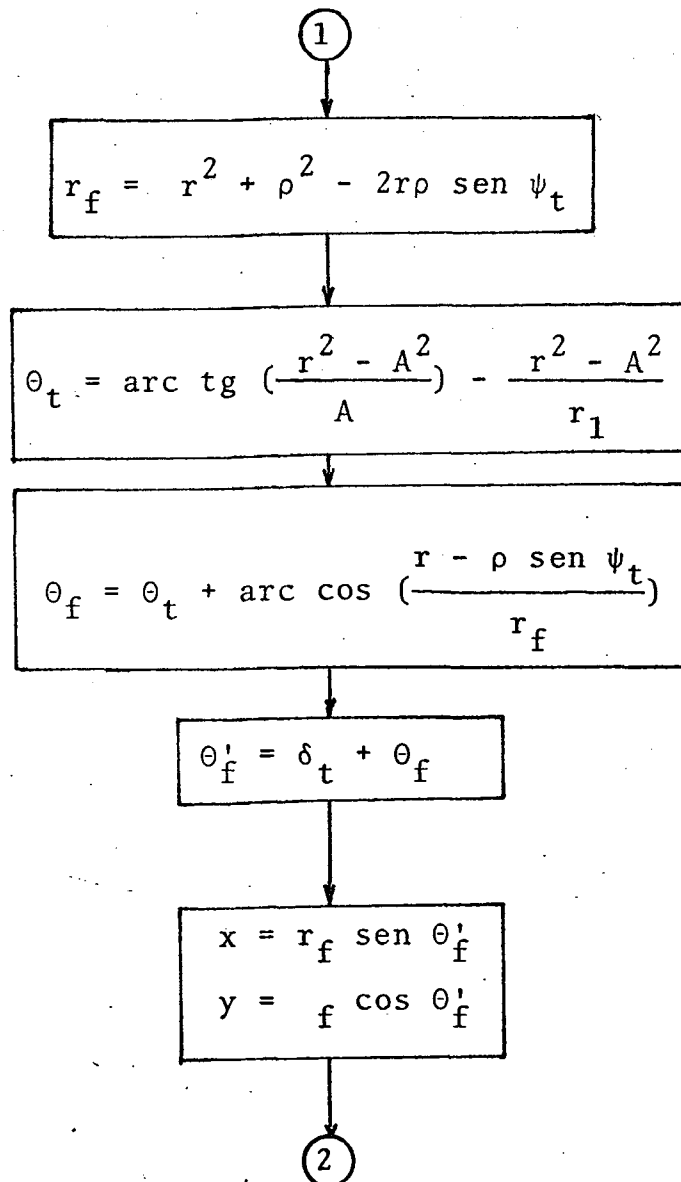
As coordenadas são calculadas em relação à origem colocada no centro da engrenagem com o eixo y, passando pela linha de simetria do dente.

1.2 - Cálculo das coordenadas da trocõide

Este cálculo, toma por base que a geração da engrenagem é feita por cremalheira geradora.

1.2.1 - Fluxograma de cálculo





1.2.2 - Nomenclatura

r_1 = raio da circunferência primitiva da engrenagem

ρ = raio de arredondamento no flanco do dente da cremalheira geradora

s = espessura circunferencial do dente sobre a circunferência primitiva

b_1 = adendum da cremalheira ou dedendum da engrenagem

z = número de dentes na engrenagem

$A = r_1 - b_1 + \rho$

$B = s/2 - [(b_1 - \rho) \operatorname{tg} \alpha_1 + \rho/\cos \alpha_1]$

$$\delta_t = (\pi/2 - B/r_1)$$

1.2.3 - Obtenção das coordenadas

Arbitram-se raios menores do que o raio de base do perfil e obtém-se o par de coordenadas x, y . As coordenadas retangulares são obtidas em relação a um sistema de referência com origem no centro da engrenagem, cujo eixo y coincide com a linha de simetria do dente.

ANEXO 2

2.1 - Cálculo dos dados para obtenção das coordenadas do dente

Características da engrenagem: $m = 2,5$

$z = 24$ dentes

Os valores que se seguem são todos expressos em milímetros exceto δ_t .

$$r_1 = \frac{z m}{2} = 30$$

$$r_b = \frac{z m \cos \alpha_1}{2} = 28,19$$

$$h_a = m = 2,5$$

$$h_f = r_1 + h_a = 32,50$$

$$r_f = r_1 + h_f = 26,40$$

$$\rho = 0,3 m = 0,75$$

$$A = (r_1 - b_1 + \rho) = 27,15$$

$$B = \frac{m \pi}{4} - \left[(b_1 - \rho) \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{\rho}{\cos \alpha_1} \right] = 0,128046913$$

$$\delta_t = \pi/z - B/r_1 = 0,126631464 \text{ rd}$$

2.2 - Raio do ponto de tangência da evolvente com a trocõide

$$r_t = \sqrt{\left[r \operatorname{sen} \alpha_1 - \frac{\rho(1 - \operatorname{sen} \alpha_1) - b_1}{\operatorname{sen} \alpha_1} \right]^2 + r_b^2} = 28,21$$

2.3 - Coordenadas do dente completo

r	x	y	r	x	y
27,1501	3,31	26,19	29,0	2,20	28,92
27,154	3,16	26,23	29,2	2,16	29,12
27,16	3,07	26,26	29,4	2,12	29,32
27,18	2,90	26,35	29,6	2,07	29,53
27,20	2,79	26,43	29,8	2,02	29,73
27,3	2,55	26,71	30,0	1,96	29,94
27,4	2,44	26,92	30,2	1,90	30,14
27,5	2,38	27,10	30,4	1,83	30,34
27,6	2,33	27,26	30,6	1,76	30,55
27,7	2,30	27,41	30,8	1,69	30,75
27,8	2,28	27,55	31,0	1,61	30,96
27,9	2,27	27,68	31,2	1,53	31,16
28,0	2,26	27,81	31,4	1,44	31,37
28,1	2,26	27,93	31,6	1,35	31,57
28,19	2,26	28,10	31,8	1,25	31,78
28,2	2,26	28,11	32,0	1,16	31,98
28,4	2,26	28,31	32,2	1,05	32,18
28,6	2,25	28,51	32,4	0,95	32,39
28,8	2,23	28,71	32,5	0,89	32,49

ANEXO 3

As integrações numéricas necessárias para obtenção do deslocamento devido à flexão e ao cisalhamento do dente, foram realizadas através da fórmula de Simpson.

3.1 - Fórmula de Simpson

$$\int_{y_0}^{y_n} f(y) dy = \frac{h}{3} [f(y_0) + 4f(y_1) + 2f(y_2) + \dots + 4f(y_{n-3}) + 2f(y_{n-2}) + 4f(y_{n-1}) + f(y_n)]$$

3.2 - Resultados

Ponto	Nó	y_p [mm]	$I_1 = \int_0^{y_p} \frac{1}{2x} dy$	$I_2 = \int_0^{y_p} \frac{(y_p - y)^2}{(2x)^3} dy$
1	1	5,79	1,5638	0,7317
2	4	4,25	0,8826	0,2243
3	6	3,04	0,6467	0,0717
4	8	2,40	0,5237	0,0344
5	9	2,04	0,4210	0,0200

QUADRO (A3.1)

4.1 - Funções tensão de Weestergaard

São funções de tensões reais do tipo biharmônico ou tipo de Airy, referenciadas às coordenadas (x, y) .

Estas funções podem ser geradas a partir de funções analíticas da variável complexa z do seguinte modo.

Se Z é uma função analítica de z , suas partes real e imaginária satisfazem as relações:

$$\nabla^2 \text{Re } Z = 0 \tag{A4.1}$$

$$\nabla^2 \text{Im } Z = 0$$

Seja agora, uma função $f(x,y)$ que satisfaz a equação de Laplace $\nabla^2 f = 0$, então as soluções $F(x,y)$ da equação biharmônica $\nabla^4 F = 0$ são fornecidas pelas seguintes alternativas:

$$F = f; \quad F = xf; \quad F = yf \tag{A4.2}$$

Estas funções podem ser verificadas por derivação.

As funções $\text{Re } Z$ e $\text{Im } Z$ são funções reais que satisfazem a equação de Laplace, então as soluções biharmônicas F admissíveis são fornecidas por $\text{Re } Z$ ou $\text{Im } Z$ ou ainda produtos de qualquer destas com x ou y .

4.1.1 - Componentes de tensão para solicitação normal ou momento agindo sobre semi-plano.

Um número limitado de alternativas de soluções para $\nabla^4 F = 0$ é dado pela seguinte combinação de funções:

$$F(x,y) = \text{Re } Z + y \text{Im } Z' \tag{A4.3}$$

A função Z' , a qual é diferenciada em relação a z , é ainda uma função analítica, portanto, as duas parcelas são di-

mensionalmente homogêneas.

As componentes de tensão expressadas através de funções biharmônicas são:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{A4.4}$$

Substituindo a função (A4.3) nas equações (A4.4) e aplicando as seguintes regras para derivar as partes real e imaginária de Z em relação a x e y ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} Z = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} Z = \operatorname{Re} Z'\tag{A4.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} Z = - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} Z = \operatorname{Im} Z'$$

as quais são obtidas aplicando a regra da derivação em cadeia, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \operatorname{Re} Z'' - y \operatorname{Im} Z''' \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z'' + y \operatorname{Im} Z''' \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z'''\end{aligned}\tag{A4.6}$$

Seja agora:

$$\operatorname{Re} Z'' = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} Z'$$

Como $\operatorname{Im} Z'$ é uma função real de (x,y) , podemos fazer $\operatorname{Im} Z' = \phi(x,y)$, então:

$$\operatorname{Re} Z'' = \frac{\partial \phi}{\partial y}\tag{A4.7}$$

Novamente, fazendo uso das relações (A4.5), adaptadas para cada caso, transforma-se as expressões (A4.6), agora em termos da função $\phi(x,y)$:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial \phi}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \tau_{xy} &= -y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{A4.8}$$

A análise das equações (A4.8), mostra que $\sigma_x = \sigma_y$ e que $\tau_{xy} = 0$ em todos os pontos da linha $y = 0$, assim, a função tensão (A4.3) é adequada apenas para problemas, nos quais isto é verdadeiro.

Para cada problema particular, deve ser pesquisada a função $\phi(x,y)$ que melhor se adapte às suas condições de contorno.

4.1.2 - Componentes de tensão para solicitação tangencial ao semi-plano.

Uma alternativa admissível para ser solução de $\nabla^4 F = 0$ é dada por

$$F(x,y) = -y \operatorname{Re} Z' \tag{A4.9}$$

Substituindo nas expressões (A4.4), com auxílio das regras de derivação (A4.5), obtemos:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2 \operatorname{Im} Z'' + y \operatorname{Re} Z''' \\ \sigma_y &= -y \operatorname{Re} Z''' \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z'' - y \operatorname{Im} Z'''\end{aligned}\tag{A4.10}$$

Seja agora: $\operatorname{Im} Z'' = \partial/\partial x \operatorname{Im} Z'$

Como $\text{Im } Z'$ é uma função real de (x,y) , podemos fazer $\text{Im } Z' = -\psi(x,y)$, então:

$$\text{Im } Z'' = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A4.11})$$

Fazendo uso das relações (A4.5), adaptadas, transforma-se as expressões (A4.10). Estas funções passam a ser expressas em função de $\psi(x,y)$ e suas derivadas em relação a y e x .

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \sigma_y &= y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{A4.12})$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

A análise destas equações mostra que as tensões normais ao semi-plano se anulam sobre a linha $y = 0$.

4.2 - Análise dos valores da expressão

$$\text{Re} \left[-i \ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} \right] \quad \text{sobre o semi-plano } y = 0.$$

Partindo-se desta expressão pode-se transformá-la em:

$$\text{Re} \left\{ -i \left[\ln \left(z - \frac{b}{2} \right) - \ln \left(z + \frac{b}{2} \right) \right] \right\} \quad (\text{A4.13})$$

e fazer a análise de cada parcela.

Então

$$\text{Re} \left[-i \ln \left(z - \frac{b}{2} \right) \right] = \text{Re} \left\{ -i \left[\ln \left[z - \frac{b}{2} \right] + i (\theta_1 + 2n\pi) \right] \right\} \quad (\text{A4.14})$$

onde θ_1 é o argumento principal do número complexo $(z - b/2)$.

Utilizando a relação:

$$\text{Im } w = -\text{Re } i w$$

na equação (A4.14), resulta:

$$\operatorname{Im} \left[\ln \left(z - \frac{b}{2} \right) \right] = \operatorname{Im} \left[\ln \left[z - \frac{b}{2} \right] + i(\theta_1 + 2n\pi) \right] \quad (\text{A4.15})$$

Tomando nesta expressão, apenas o argumento principal θ_1 , que é:

$$\theta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{(x - b/2)} \quad (\text{A4.16})$$

Utilizando (A4.16), obtemos que:

$$\operatorname{Re} \left[-i \ln \left(z - \frac{b}{2} \right) \right] \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{para } x > b/2 \\ = \pi \quad \text{para } x < b/2 \quad (\text{A4.17})$$

Analogamente;

$$\operatorname{Re} \left[-i \ln \left(z + \frac{b}{2} \right) \right] = \operatorname{Im} \left[\ln \left(z + \frac{b}{2} \right) \right] = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x + b/2}$$

$$\text{ou } \operatorname{Re} \left[-i \ln \left(z + \frac{b}{2} \right) \right] \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{para } x > -b/2 \\ = \pi \quad \text{para } x < -b/2 \quad (\text{A4.18})$$

Fazendo uso da expressão (A4.13), chega-se ao seguinte resultado:

$$\operatorname{Re} \left[-i \ln \frac{z - (b/2)}{z + (b/2)} \right] = \pi \quad \text{para o intervalo } (-b/2, b/2) \\ = 0 \quad \text{para } \forall \text{ valor fora deste intervalo}$$