Universidade Federal de Santa Catarina

Centro Tecnológico

Coordenação dos Programas de Pós-Graduação

Conjunto Universitário, CX.P. 476, Florianópolis

Localização de Depósitos entre Pontos de Produção e Consumo

Tese submetida à apreciação como requisito Parcial para a obtenção do grau de

"Mestre em Ciências"

em Engenharia Industrial - Opção Pesquisa Operacional.

Márcia Ligocki Lins

Florianópolis

Santa Catarina - Brasil

Dezembro - 1977

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"Mestre em Ciências"

E aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de

Pós - Graduação.

Prof. Leonardo Ensslin, Ph.D.

Coordenador dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia Industrial

Banca Examinadora:

Prof. Raul Valentim da Silva, M. SC.

Orientador

Prof. Leonardo Ensslin, Ph. D.

Prof. Roberto Francisco Krischer

M. Sc.

Agradecimento

Agradeço aos Professores Raul Valentim da Sil_ va e Leonardo Ensslin que muito colaboraram para a execução do presente trabalho.

RESUMO

Este trabalho destina-se a generalizar técnicas utilizadas para a localização de depósitos entre pontos de produção e pontos de consumo, considerando restrições na demanda das mercadorias, na capacidade de produção das fábricas e ainda restrição quanto a capacidade de armazenagem dos depósitos.

O modelo matemático é desenvolvido em duas partes, sendo que na primeira são usados aspectos de programação convexa separável, para tratar uma função custo linear por partes.

Na segunda parte é aplicado ao modelo desenvolvido um processo iterativo para a obtenção da solução ótima, evitando-se a resolução do problema através de técnicas de programação inteira.

O modelo proposto prevê a utilização de dados determinísticos, restrições lineares e todo transporte deve passar necessariamente pelos depósitos.

A solução, aplicando-se esta metodologia, apresenta ao decisor o modo mais econômico da distribuição dos produtos entre os vários depósitos e operação dos mesmos.

Um exemplo ilustra o modelo matemático apresentado.

ABSTRACT

This thesis aims to generalize techniques used for locating warehouses between production centres and points of consumption, considering a series of restrictions.

The Mathematical model is developed in two parts. In the first part seperable convex programming is used to deal with a stepped linear cost function.

In the second part, an iterative process is used to obtain the optimum solution, avoiding the use of integer programming techniques to resolve the problem.

The proposed model requires the use of deterministic data, linear behaviour and is further limited by the need for all transport to go to the ware houses.

The solution produced by this method gives to the decision taker the most economic way of distributing products between several ware houses and of operating them.

A theoretical example illustrates the proposed mathematical model.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO 1

1. IMPORTÂNCIA DO ESTUDO 1
2. ESTÁGIO DE DESENVOLVIMENTO 2
3. PROPÓSITO DO ESTUDO 4
4. LIMITAÇÕES DO ESTUDO 5
5. SELEÇÃO DO LOCAL DO DEPÓSITO 6
6. DISPÊNDIOS DE CAPITAL 6
7. LOCALIZAÇÃO DE DEPÓSITOS MÚLTIPLOS 7

CAPÍTULO I

1. VARIÁVEIS E NOTAÇÃO 8
2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA 10
   2.1. DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO 10
   2.2. RESTRIÇÃO DE DEMANDA 11
   2.3. RESTRIÇÃO DE CAPACIDADE DE PRODUÇÃO 12
   2.4. RESTRIÇÃO DE CAPACIDADE DE ARMAZENAGEM 12
   2.5. RESTRIÇÃO DA NÃO NEGATIVIDADE DAS VARIÁVEIS .. 12

CAPÍTULO II - APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA SEPARÁVEL 14

CAPÍTULO III- ADAPTAÇÃO DA TÉCNICA DE RESOLUÇÃO 19

CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO DO MODELO 22
   4.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA 22
   4.2. FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO 24
   4.3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA USANDO COMPUTADOR 26
      4.3.1. OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO VIÁVEL 26

PREPARAÇÃO DO PROBLEMA PARA O PROGRAMA LPGOGO 27
SOLUÇÃO ENCONTRADA 29
4.3.2. APLICAÇÃO DO PROCESSO ITERATIVO 30
4.3.3. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE 34
CAPÍTULO V - DIAGRAMA DE BLOCO 36
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES 39
BIBLIOGRAFIA 41
ANEXO I - LISTAGEM DO PROGRAMA COMPUTACIONAL UTILIZADO NA ILUSTRAÇÃO 43
ANEXO II - RELATÓRIO FORNECIDO PELO COMPUTADOR DO PROCESSO ITERATIVO 49
ANEXO III - RELATÓRIO FORNECIDO PELO COMPUTADOR DO PROCESSO ITERATIVO 52

INTRODUÇÃO

1. IMPORTÂNCIA DO ESTUDO

Há uma tendência em pensar que o problema da localização ocorre com pouca freqüência e, de fato, como uma consideração consciente dos administradores, talvez isto aconteça.

Sabe-se da existência de depósitos numa determinada cidade que aí permanecem por 50 anos ou mais. Isso não significa que o problema da localização não foi considerado durante esse período, principalmente se a organização se expandiu.

A escolha da alternativa de ficar ou mudar de local está sempre presente mas adquire ênfase quando se considera a expansão.

O problema em estudo comporta as seguintes opções:

1. Expandir a subcontratação para realizar uma expansão geral;
2. Expandir o depósito atual, se possível;
3. Reter o depósito atual e localizar um segundo depósito em outro local;
4. Desmontar o depósito antigo e relocalizá-lo num novo ponto.

As companhias que mantêm seus depósitos no mesmo local durante anos têm essas escolhas e continuamente decidem expandir o atual ou estender a subcontratação para satisfazer a demanda de seus produtos.

Uma localização, inicialmente ideal, não mantém necessariamente esta característica através dos anos. O centro de gravidade das áreas de mercado pode mudar de maneira drástica. Alterações na política de preços da indústria podem tornar obsoleta uma antiga localização.

2. ESTÁGIO DE DESENVOLVIMENTO

Considerável atenção tem sido dedicada a problemas de localização de depósitos; e vários desenvolvimentos importantes, teóricos e práticos, foram obtidos.

Este tipo de problema tem sido tratado eficientemente por algorítmos exatos, processos heurísticos e simulação.

O artigo de BAUMOL e WOLFE (15) refere-se ao primeiro desenvolvimento significativo na resolução do problema de localização de depósitos. Os autores sugerem um processo iterativo o qual, para cada passo, reduz o valor da função objetiva. Calcula o custo marginal do depósito para usá-lo na próxima iteração e termina em um ótimo local.

A técnica de simulação tem sido empregada para levantar uma estimativa do custo total como uma função do número de depósitos a serem usados.

Este processo foi analisado por GERSON e MAFFEI; SHYCON e MAFFEI (3) visando a identificação da região em que deve ser localizado um número ótimo de depósitos.

KUEHN e HAMBURGER (3) foram os primeiros a resolver este tipo de problema heuristicamente. Baseados nesta mesma teoria a pesquisa teve continuidade com FELDMAN, LEHRER e RAY.

O primeiro artigo a apresentar um método de solução exata para o problema de localização de depósito foi escrito por EFFROYMSON e RAY (16). Os autores desenvolveram um algorítmo que se vale da programação linear inteira através do processo iterativo "branch and bound".

Os problemas clássicos de transporte contribuiram diretamente para o desenvolvimento do presente trabalho (4). Assim, o problema de minimização do custo total de transporte com diferentes origens e destinos foi tratado por HITCHCOCK. KUHN desenvolveu o "Método Húngaro" baseado num algorítmo combinatório.

DWYER usou uma aproximação similar ao problema de transporte que envolve a adição de constantes a fim de obter "Matrizes completamente Reduzidas" que dão todas as soluções possíveis para problemas com custos lineares.

KUHN e BAUMOL foram adiante nesta área desenvolvendo um "Algorítmo de Degeneração Forçada", esse processo pode envolver incerteza e, às vezes, decisões arbitrárias.

Uma técnica para descobrir soluções com maior ordem de degenerescência, (aquelas soluções que têm o menor número de atribuições) foi apresentada por DWYER.

BALINSKI e MILLS (1) apresentaram um método de aproximação da solução ótima. Suas técnicas consistem em ir aproximando as funções por uma média através do custo unitário. Esta apro ximação elimina a não linearidade e reduz o problema para um problema de transporte. Contudo, este é um método aproximado.

As funções de custo encontradas através de taxas de transporte são lineares por partes como uma função de quantidade transportada. HILLIER e LIBERMAN (13) trataram este tipo de função segundo programação convexa separável, onde o comportamento de variáveis de decisão é diferenciado em segmentos limitados.

Este trabalho se propõe a resolver o problema de localização de depósitos, através desta técnica de programação convexa separável, contribuindo assim para generalizar o modelo considerado, alargando sua faixa de aplicação.

3. PROPÓSITO DO ESTUDO

O objetivo geralmente utilizado na análise de localização de depósitos, é minimizar a soma de todos os custos relacionados à distribuição de produtos. Neste tipo de análise, a preocupação não é voltada somente para os custos atuais, mas nas considerações de longo prazo outros fatores, além dos custos podem influir.

Deficiência local em meios de transporte pode significar despesas da empresa nestas distribuições. Um suprimento pequeno de mão-de-obra pode originar uma alta de salários além dos valores que foram obtidos durante o levantamento de dados para a localização.

Desta forma, ainda que uma análise comparativa de custos das diversas localizações possa indicar a instalação nesta ou naquela comunidade, uma ponderação dos fatores intangíveis pode ser a base da decisão de escolher uma ou outra.

4. LIMITAÇÕES DO ESTUDO

Para a formulação deste modelo fazem-se as seguintes suposições restritivas:

a) A distribuição das mercadorias entre pontos de produção e pontos de consumo será sempre feita através de depósitos.

b) O custo unitário no transporte das produções da fábrica ao depósito e deste ao consumidor, independe do tipo de mercadoria e possuem as mesmas tarifas de transporte.

c) O modelo prevê a utilização de dados determinísticos.

d) As restrições são lineares.

Mesmo com estas limitações muitos problemas práticos podem ser satisfatoriamente resolvidos utilizando o modelo desenvolvido.

5. SELEÇÃO DO LOCAL DO DEPÓSITO

Embora a seleção da área geral seja a fase mais importante, a escolha do local onde será construído o depósito é, também, importante tanto quanto por considerações objetivas quanto subjetivas. A área escolhida deve conter um espaço que satisfaça aos requisitos mínimos da empresa, a um custo razoável de implantação.

Para escolher uma área, que satisfaça aos requisitos mínimos, é preciso preliminarmente efetuar estimativas das necessidades de espaço para instalação.

Deve-se, em seguida, obter um local que tenha área suficiente para acomodar os atuais requisitos de espaço, possibilidade de expansão, meios de transporte para recebimento e entrega de material, espaço suplementar para caminhões e vagões à espera de carga ou descarga, etc... Se for possível, terreno baldio adjacente ao local escolhido deve estar disponível para permitir a futura expansão do mesmo.

Obviamente, a escolha da área e, finalmente, do local de um depósito, envolve um estudo cuidadoso, caso se deseje realizar uma boa tarefa.

6. DISPÊNDIOS DE CAPITAL

Uma outra variável importante, no estudo das alternativas de localização, é o dispêndio de capital para terreno, edificação e, possivelmente, mudança.

Estes custos fixos de investimento podem diferir consideravelmente, dependendo da construção do depósito; custo do terreno e de variações na área particularmente escolhida, tais como desvios de estrada dentro da propriedade.

Por isso, o conceito da análise de equilíbrio econômico pode ser usado para fazer o confronto entre os custos dos fatores objetivos referentes a cada localização.

7. LOCALIZAÇÃO DE DEPÓSITOS MÚLTIPLOS

A análise de fatores para a localização de depósitos múltiplos é particularmente interessante por causa do seu caráter dinâmico.

A adição de um novo depósito não é uma questão de determinar uma localização independente da localização de depósitos já existentes. Ao contrário, cada localização considerada deve ser colocada em perspectiva econômica com relação aos depósitos existentes e às áreas de mercado. O objetivo é selecionar a nova localização de maneira que torne mínimo o custo total de operação dos depósitos e distribuições.

Esse propósito é de algum modo diferente da análise de localização de um único depósito, porque cada alternativa exige uma distribuição diferente da capacidade de mercado para os vários depósitos, a fim de minimizar as despesas gerais.

CAPITULO I

1. VARIÁVEIS E NOTAÇÃO

X_{ghij} = Quantidade de mercadoria g (g = 1,2,..., q) expedida da fábrica h (h = 1,2,..., r) via depósito i (i = 1,2,..., m) para cliente j (j = 1,2,..., n).

A_{hi} = Custo unitário de transporte interno de mercadorias da fábrica h para o depósito i; incluindo serviço de carga.

B_{ij} = Custo unitário de transporte externo de mercadorias expedidas do depósito i para o cliente j; incluindo serviço de carga.

F_i = Custo fixo por período de operação do depósito i.

S_{gi} = Custo semi variável de operações do depósito i para processamento de uma unidade da mercadoria g, incluindo mão-de-obra e custo administrativo; custo de armazenagem; taxas; lucro sobre investimento; furto, etc...

Y_i = Uma função ao qual denota-se o máximo estoque associado ao nível com o fluxo de todas as mercadorias de todas as fábricas para todos os clientes servidos através do depósito i.

onde

$$Y_i \begin{cases} = 1 \text{ se o depósito é usado (aberto)} \\ = 0 \text{ se o depósito não é usado (fechado)} \end{cases}$$

Q_{gj} = Quantidade da mercadoria g demandada pelo cliente j.

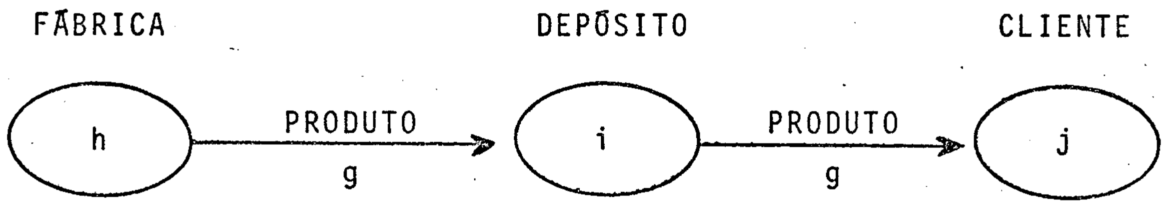
W_i = Capacidade de depósito i.

Z_{gh} = Capacidade da fábrica h para processar mercadoria g.

ρ_g = Fator dimensional que transforma uma unidade do produto g na mesma unidade de W_i.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Consideremos instalações de armazenagem entre pontos de produção e pontos de consumo.



2.1. DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO

O objetivo é minimizar:

- Custo total de transportes de mercadorias g da fábrica h para o cliente j através do depósito i.

Sendo

$\sum_{hi} A_{hi} \left(\sum_{gj} X_{ghij} \right)$ e $\sum_{ij} B_{ij} \left(\sum_{gh} X_{ghij} \right)$ os custos dos transportes a serem minimizados.

- Custo total de operação do depósito i, processando mercadorias g.

  Pode ser expresso como a soma de

  $F_i\, Y_i$ e $\sum_{g} S_{gi} \left(\sum_{hj} X_{ghij} \right)$

Temos então, a seguinte função objetivo a ser minimizada

$$V = \sum_{hi} A_{hi} \left(\sum_{gj} X_{ghij} \right) + \sum_{ij} B_{ij} \left(\sum_{gh} X_{ghij} \right) +$$

$$+ \sum_{i} F_i \, Y_i \; + \sum_{gi} S_{gi} \left(\sum_{hj} X_{ghij} \right)$$

A não linearidade da função objetivo, decorre do fato de ser formada por funções lineares por partes e variáveis inteiras. Os custos unitários A_{hi} e B_{ij} dependem das quantidades de mercadorias transportadas. Estas quantidades de mercadorias transportadas devem satisfazer às restrições a seguir.

2.2. RESTRIÇÃO DE DEMANDA

A demanda do cliente j de uma mercadoria g deve ser satisfeita pela produção da fábrica h (h = 1,2,..., r) via depósito i (i = 1,2,..., m)

$$\sum_{hi} X_{ghij} = Q_{gj} \qquad \begin{array}{l} g = 1,2,\ldots, q \\ j = 1,2,\ldots, n \end{array}$$

A quantidade de produto g (g = 1,2,..., q) da fábrica h (h = 1,2,..., r) expedida para o cliente j (j = 1,2,..., n), através do depósito i, tem que ser menor ou igual à demanda do cliente j (j = 1,2,..., n) de toda a mercadoria g (g = 1,2,...,q).

$$\sum_{ghj} X_{ghij} \leqslant Y_i \sum_{gj} Q_{gj} \qquad i = 1,2,\ldots, m$$

2.3. RESTRIÇÃO DE CAPACIDADE DE PRODUÇÃO

A capacidade da fábrica h para produzir mercadoria g é limitada, isto é, não pode ser excedida.

$$\sum_{ij} X_{ghij} \leqslant Z_{gh} \qquad \begin{array}{l} g = 1,2,\ldots, q \\ h = 1,2,\ldots, r \end{array}$$

2.4. RESTRIÇÃO DE CAPACIDADE DE ARMAZENAGEM

A capacidade do depósito i não pode ser excedida.

$$\left(\sum_{ghj} \rho_g \, X_{ghij} \right) \leqslant W_i \qquad i = 1,2,\ldots, m$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se o depósito é usado} \\ 0 & \text{se o depósito não é usado} \end{cases}$$

2.5. RESTRIÇÃO DA NÃO NEGATIVIDADE DAS VARIÁVEIS

A quantidade X_{ghij} de mercadoria g (g = 1, 2, ..., q) expedida da fábrica h (h = 1, 2, ..., r) via depósito i (i = 1, 2, ..., m) para cliente j (j = 1, 2, ..., n) não pode ser negativa.

$$X_{ghij} \geqslant 0 \qquad \forall_{ghij}$$

A resolução deste problema pode ser obtida através de algorítmos exatos, processos heurísticos e simulação.

Este trabalho se propõe a obter uma solução bastante próxima do ótimo usando inicialmente algorítmo exato e a solução final é obtida heuristicamente. Diante da dificuldade de solução do modelo, por se tratar de funções lineares por partes e com restrições inteiras, será aplicada a técnica de programação convexa separável. Esta técnica foi usada na resolução de problemas simples de transportes (4).

Para a aplicação desta técnica no modelo matemático proposto serão necessários algumas adaptações visto que está se tratando de localização de depósitos onde são considerados vários produtos e vários consumidores, depósitos e fábricas.

CAPITULO II

APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA SEPARÁVEL

Programação convexa separável foi introduzida inicialmente por C.E. Miller em 1963. É uma técnica amplamente usada para obter soluções de certos problemas de programação não linear. Aplica-se quando a função objetivo for separável, isto é, quando a função objetiva puder ser escrita como uma soma finita de funções separadas, onde cada função envolve somente uma única variável.

E. Beale {14} se refere à programação convexa separável como "Provavelmente a mais usada técnica de programação não linear".

Na formulação matemática do problema de localização de depósitos, a função objetiva é formada por

$$\sum_{hi} A_{hi} \left(\sum_{gj} X_{ghij} \right) + \sum_{ij} B_{ij} \left(\sum_{gh} X_{ghij} \right) +$$

$$+ \sum_{i} F_i Y_i + \sum_{gi} S_{gi} \left(\sum_{hj} X_{ghij} \right)$$

ou seja, é formado por funções lineares por partes como uma função da quantidade transportada. Estas funções são contínuas, com exceção de $\sum_i F_i Y_i$ que é descontínua. F_i é um custo independente do número de unidades transportadas.

Portanto, este problema pode ser resolvido segundo programação convexa separável, onde uma variável de decisão é subdividida e os segmentos limitados.

Usando a notação de programação convexa separável, temos

$$X_{ghij} \text{ será substituida por } \sum_{k=1}^{p_{ghij}} X_{ghijk}$$

Na função objetiva e restrições, onde

p_{ghij} - é o número de subdivisões em que a variável X_{ghij} foi separada para o produto g, fábrica h, depósito i e o cliente j.

Faremos ainda as seguintes substituições:

A_{hi} - será substituido por A_{hik}

B_{ij} - será substituido por B_{ijk}

onde

A_{hik} = Custo unitário ou inclinação do segmento k na função custo para transporte interno de mercadorias da fábrica h para depósito i.

B_{ijk} = Custo unitário ou inclinação do segmento k na função custo para transporte externo de mercadorias do depósito i para o cliente j.

Restrições adicionais são usadas na formulação do problema, para limitar X_{ghijk} no intervalo k.

Ou seja:

$$X_{ghijk} \leqslant \alpha_{ghijk}$$

onde

α_{ghijk} = é o comprimento do segmento k na função custo no transporte da mercadoria g de h para j através de i.

Esta restrição não impede que o segmento k assuma valor diferente de zero quando o segmento k-1 ainda não foi plenamente satisfeito. É necessário então, acrescentar novas restrições para limitar X_{ghijk} no intervalo k.

Temos,

$$T_{ghijk} \leqslant 1$$

$$X_{ghijk} - \alpha_{ghijk} + \varepsilon \geqslant (T_{ghijk} - 1) M$$

$$X_{ghij(k+1)} \leqslant T_{ghijk} M$$

onde,

T_{ghijk} = variável auxiliar usada para impedir que o segmento k assuma valor diferente de zero, quando o segmento k-1 ainda não foi plenamente satisfeito.

ε = valor arbitrário positivo, tão pequeno quanto se queira.

M = valor arbitrário, tão grande quanto se queira.

Podemos, então, reescrever a formulação do problema da seguinte forma:

Minimizar

$$V = \sum_{hi} \sum_{gj} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} A_{hik} \; X_{ghijk} \; +$$

$$+ \sum_{ij} \sum_{gh} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} B_{ijk} \; X_{ghijk} + \sum_{i} F_i \; Y_i \; +$$

$$+ \sum_{gi} \sum_{hj} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} S_{gi} \; X_{ghijk} + M \; T_{ghijk}$$

S.a.

$$\sum_{ih} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} X_{ghijk} = Q_{gj}$$

$$\sum_{ij} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} X_{ghijk} \leqslant Z_{gh}$$

$$\left(\sum_{ghj} \rho_g \sum_{k=1}^{p_{ghij}} X_{ghijk} \right) \leqslant W_i$$

$$0 \leqslant \sum_{ghj} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} X_{ghijk} \leqslant Y_i \sum_{gj} Q_{gj}$$

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{se o depósito não é usado} \\ 1 & \text{se o depósito é usado} \end{cases}$$

$$X_{ghijk} \leqslant \alpha_{ghijk}$$

$$T_{ghijk} \leqslant 1$$

$$X_{ghijk} = \alpha_{ghijk} + \varepsilon \geqslant (T_{ghijk} - 1) M$$

$$X_{ghij(k+1)} \leqslant T_{ghijk} M$$

$$X_{ghijk} , X_{ghij(k+1)} , T_{ghijk} \geqslant 0$$

$$\forall_{ghijk}$$

O problema que estamos apresentando é um modelo matemático, projetado para a obtenção de um conjunto de valores não-negativos de variáveis, que minimizem uma função objetivo, ao mesmo tempo que satisfaçam a um sistema de restrições lineares. Onde uma destas variáveis está sujeita ainda a restrição no sentido de só poder assumir valores inteiros.

É evidente que com esta restrição de integralidade temos um problema de programação não linear. Para evitar as dificuldades computacionais de programação inteira, é feito uma adaptação na função objetivo e, então resolvido através de um processo iterativo.

CAPÍTULO III

ADAPTAÇÃO DA TÉCNICA DE RESOLUÇÃO

A utilização repetida (processo iterativo) do algorítmo simplex apresenta uma grande eficiência computacional. Para o seu emprego é necessário inicialmente substituir na função objetivo a soma

$$\sum_{i} F_i \, Y_i + \sum_{gi} \sum_{hj} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} S_{gi} \, X_{ghijk}$$

por

$$\sum_{ghji} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} \left(\frac{F_i}{W_i} + S_{gi} \right) X_{ghijk} \cdot C_{i1} +$$

$$+ \sum_{ghij} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} \left(F_i + S_{gi} \right) X_{ghijk} \cdot C_{i2}$$

A segunda parcela desta soma, permite que algum depósito eliminado em uma iteração, possa retornar ao problema em uma iteração subsequente.

As constantes C_{i1} e C_{i2} assumem os valores zero ou 1. Sendo $C_{i1} = 1$ e $C_{i2} = 0$ na primeira iteração e enquanto todos os depósitos forem viáveis.

No momento em que o depósito i for desnecessário, ou se ja, nenhuma mercadoria for transportada através dele, o C_{i1} correspondente ao depósito i será zero e o C_{i2} assumirá valor 1 em relação ao mesmo i.

A variável Y_i é eliminada no sistema de restrições.

Reformulação do modelo matemático:

Minimizar

$$V = \sum_{hi} \sum_{gj} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} A_{hik} \; X_{ghijk} +$$

$$+ \sum_{ij} \sum_{gh} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} B_{ijk} \; X_{ghijk} +$$

$$+ \sum_{ghji} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} \left(\frac{F_i}{W_i} + S_{gi} \right) X_{ghijk} \cdot C_{i1} +$$

$$+ \sum_{ghij} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} \left(F_i + S_{gi} \right) X_{ghijk} \cdot C_{i2} + M \; T_{ghijk}$$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{ih} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} X_{ghijk} = Q_{gj}$$

$$\sum_{ij} \sum_{k=1}^{p_{ghij}} X_{ghijk} \leqslant Z_{gh}$$

$$\sum_{ghj} \rho_g \sum_{k=1}^{p_{ghij}} X_{ghijk} \leqslant W_i$$

$$\sum_{ghj} \sum_{k=1}^{P_{ghij}} X_{ghijk} \leqslant \sum_{gj} Q_{gj}$$

$$X_{ghijk} \leqslant \alpha_{ghijk}$$

$$T_{ghijk} \leqslant 1$$

$$X_{ghijk} - \alpha_{ghijk} + \varepsilon \geqslant (T_{ghijk} - 1) \; M$$

$$X_{ghij(k+1)} \leqslant T_{ghijk} \; M$$

$$T_{ghijk} , \; X_{ghijk} , \; X_{ghij(k+1)} \geqslant 0 \quad \forall_{ghijk}$$

Resolve-se o problema aplicando o processo iterativo, até a sua convergência; ou seja

Resolve-se o modelo com o uso do computador, encontrando-se uma solução viável para o problema. A função objetivo é redefinida substituindo-se W_i, pela soma das variáveis que correspondem as quantidades transportadas para o depósito i, se esta soma for diferente de zero. Caso contrário, a constante $C_{i1} = 1$ passara a ser zero e o valor da constante $C_{i2} = 0$ será 1.

Resolve-se novamente o problema, determinando-se uma nova solução. Calcula-se a soma das novas variáveis que representam as quantidades transportadas para o depósito i e compara-se com o W_i anterior.

Se a soma destas variáveis for igual ao W_i anterior, significa que o processo convergiu e a solução encontrada é uma solução ótima.

Caso contrário, substitui-se W_i na função objetivo anterior pela soma das variáveis acima e continua-se o processo até a sua convergência.

CAPITULO IV

APLICAÇÃO DO MODELO

Neste capítulo será apresentado, através de um exemplo, uma situação que pode ser resolvida, utilizando o modelo formulado para localização de depósitos entre pontos de produção e consumidores.

4.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Vamos aplicar o modelo desenvolvido para a localização de depósitos, supondo que uma empresa tenha atualmente uma fábrica (h), localizada numa certa região e deseja investir em depósitos.

Esta mesma empresa possui um centro consumidor (j). Além disso dois tipos de produtos (g = 1, 2) são atualmente elaborados.

Depois de uma seleção preliminar a administração reduziu a escolha do local para três depósitos (i = 1, 2, 3) possíveis.

Fatores considerados nesta seleção preliminar incluem risco da perda do capital, facilidade de transportes, recursos administrativos, mão-de-obra, as taxas e impostos, futuros mercados para a distribuição dos produtos a serem feitos, etc...

a) Capacidade da fábrica (Z_{gh}) em produzir unidades dos produtos (g = 1, 2) respectivamente:

$Z_{11} = 30$

$Z_{21} = 40$

b) O centro de consumo (j) necessita de mercadorias 1 e 2 respectivamente:

$Q_{11} = 10$ unidades

$Q_{21} = 15$ unidades

c) Capacidades (W_i) previstas dos depósitos (i=1, 2, 3) em unidades:

$W_1 = 20$

$W_2 = 15$

$W_3 = 30$

d) Estimativa dos custos unitários de transporte (CR$):

São considerados os custos (A_{hik}, B_{ijk}) para transportar as mercadorias sujeito as taxas determinadas através de tarifas (k= 1, 2) de transportes.

$A_{111} = 19$	$B_{111} = 20$
$A_{112} = 6$	$B_{112} = 7$
$A_{121} = 35$	$B_{211} = 30$
$A_{131} = 10$	$B_{311} = 12$

e) Custo fixo (F_i) previsto por período dos depósitos (i = 1, 2, 3)

$F_1 = 20$

$F_2 = 10$

$F_3 = 20$

f) Custo semi-variável (S_{gi}) previsto dos depósitos ($i = 1, 2, 3$)

$S_{11} = 10$ $\quad$ $S_{22} = 14{,}3$

$S_{21} = 3$ $\quad$ $S_{13} = 4$

$S_{12} = 3$ $\quad$ $S_{23} = 5$

g) Fator dimensional (ρ_g) : $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 1$

h) Comprimento do segmento k (α_{ghijk}) na função custo no transporte da mercadoria $g = 1$ de $h = 1$ para $i = 1$ e $i = 1$ para $j = 1$, com $k = 1$

$\alpha_{11111} = 12$ unidades remetidas

i) Considera-se $M = 10^3$ e $\varepsilon = 1$

j) Tem-se como número de taxas (p_{ghij}):

$p_{1111} = 2$; $p_{2111} = 1$; $p_{1121} = 1$;

$p_{2121} = 1$; $p_{1131} = 1$; $p_{2131} = 1$

4.2. FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Fazendo $C_{i1} = 1$ e $C_{i2} = 0$ $\quad i = 1, 2, 3$

O problema pode ser formulado como segue:

Minimizar

$$V = (A_{111} + B_{111} + \frac{F_1}{W_1} + S_{11})\,X_{11111} + (A_{112} + B_{112} + \frac{F_1}{W_1} +$$

$$+ S_{11})\,X_{11112} + (A_{111} + B_{111} + \frac{F_1}{W_1} + S_{21})\,X_{21111} + (A_{121} +$$

$$+ B_{211} + \frac{F_2}{W_2} + S_{12})\,X_{11211} + (A_{121} + B_{211} + \frac{F_2}{W_2} + S_{22})X_{21211} +$$

$$+ \left(A_{131} + B_{311} + \frac{F_3}{W_3} + S_{13}\right) X_{11311} + \left(A_{131} + B_{311} + \frac{F_3}{W_3} + \right.$$

$$\left. + S_{13}\right) X_{11311} + \left(A_{131} + B_{311} + \frac{F_3}{W_3} + S_{23}\right) X_{21311} + M \quad T_{11111}$$

Satisfazendo às restrições:

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{11211} + X_{11311} = Q_{11}$$

$$X_{21111} + X_{21211} + X_{21311} = Q_{21}$$

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{11211} + X_{11311} \leqslant Z_{11}$$

$$X_{21111} + X_{21211} + X_{21311} \leqslant Z_{21}$$

$$\rho_1 \left(X_{11111} + X_{11112}\right) + \rho_2 \quad X_{21111} \leqslant W_1$$

$$\rho_1 \quad X_{11211} + \rho_2 \quad X_{21211} \leqslant W_2$$

$$\rho_1 \quad X_{11311} + \rho_2 \quad X_{21311} \leqslant W_3$$

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{21111} \leqslant Q_{11} + Q_{21}$$

$$X_{11211} + X_{21211} \leqslant Q_{11} + Q_{21}$$

$$X_{11311} + X_{21311} \leqslant Q_{11} + Q_{21}$$

$$X_{11111} \leqslant \alpha_{11111}$$

$$T_{11111} \leqslant 1$$

$$X_{11111} - \alpha_{11111} + \varepsilon \geqslant (T_{11111} - 1)\ M$$

$$X_{11112} \leqslant T_{11111}\ M$$

$$X_{11111}\ ,\ X_{11112}\ ,\ X_{21111}\ ,\ X_{11211} \geqslant 0$$

$$X_{21211}\ ,\ X_{11311}\ ,\ X_{21311}\ ,\ T_{11111} \geqslant 0$$

4.3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA USANDO COMPUTADOR

4.3.1. OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO VIÁVEL

O problema será resolvido pelo computador, com o uso do programa LPGOGO (anexo 1). Este programa está implantado no sistema IBM - 1130 da UFSC, cujo objetivo é determinar uma solução ótima de problemas de programação linear e fornecer também elementos para uma análise de sensibilidade através das constantes e coeficientes da função objetiva (custos), além de informar quais as restrições limitantes na solução ótima.

PREPARAÇÃO DO PROBLEMA PARA O PROGRAMA LPGOGO

Para adaptar o modelo matemático do problema às necessidades do programa LPGOGO é necessário fazer algumas modificações:

I. O programa maximiza a função objetivo. O que obriga a troca dos sinais dos coeficientes da função objetivo, pois

Maximizar (-V) = minimizar V

II. Todas as restrições devem se apresentar sob a forma de equações. O que implica na introdução de 12 variáveis auxiliares.

Substituindo os dados do problema na formulação do modelo matemático, e fazendo as adaptações descritas acima, temos:

Maximizar

$$V = -50{,}0\ X_{11111} - 24\ X_{11112} - 43\ X_{21111} - 68{,}7\ X_{11211} -$$

$$- 80{,}0\ X_{21211} - 26{,}7\ X_{11311} - 27{,}7\ X_{21311} - 10^3\ T_{11111} +$$

$$+ 0\ S_1 + 0\ S_2 + 0\ S_3 + 0\ S_4 + 0\ S_5 + 0\ S_6 + 0\ S_7 + 0\ S_8 +$$

$$+ 0\ S_9 + 0\ S_{10} + 0\ S_{11} + 0\ S_{12}$$

Sujeito à

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{11211} + X_{11311} = 10$$

$$X_{21111} + X_{21211} + X_{21311} = 15$$

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{11211} + X_{11311} + S_1 = 30$$

$$X_{21111} + X_{21211} + X_{21311} + S_2 = 40$$

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{21111} + S_3 = 20$$

$$X_{11211} + X_{21211} + S_4 = 15$$

$$X_{11311} + X_{21311} + S_5 = 30$$

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{21111} + S_6 = 25$$

$$X_{11211} + X_{21211} + S_7 = 25$$

$$X_{11311} + X_{21311} + S_8 = 25$$

$$X_{11111} + S_9 = 12$$

$$T_{11111} + S_{10} = 1$$

$$- X_{11111} + 10^3 \; T_{11111} + S_{11} = 989$$

$$X_{11112} - 10^3 \; T_{11111} + S_{12} = 0$$

$$X_{11111} \ , \ X_{11112} \ , \ X_{21111} \ , \ X_{11211} \geqslant 0$$

$$X_{21211} \ , \ X_{11311} \ , \ X_{21311} \ , \ T_{11111} \geqslant 0$$

$$S_t \geqslant 0 \qquad t = 1, 2, \ldots, 12$$

S_t ; $t = 1, 2, \ldots, 12$ = variável artificial

O trabalho está agora, em condições de ser codificado, passado para cartões e finalmente resolvido pelo programa LPGOGO.

O problema preparado para o computador apresenta 15 restrições, com 20 variáveis, das quais 12 sendo auxiliares.

Uma vez codificado, são perfurados aproximadamente 90 cartões, os quais entrando atrás do programa LPGOGO leva à solução do problema.

SOLUÇÃO ENCONTRADA

De acordo com o relatório fornecido pelo computador (anexo 2), obtem-se as seguintes informações à respeito da solução:

I. Com a utilização do programa citado, este problema é resolvido através de 19 iterações.

II. O mínimo custo encontrado, na distribuição das pro duções é CR$ 665,50

III. Quantidades de mercadorias transportadas da fábrica aos depósitos e destes ao consumidor:

$X_{11111} = 0$

$X_{11112} = 10$

$X_{21111} = 0$

São transportadas 10 unidades de mercadoria 1 ($X_{11112} = 10$) através do depósito 1.

$X_{11211} = 0$

$X_{21211} = 0$

não existe distribuição de produtos da fábrica para o consumidor através do depósito 2.

$X_{11311} = 0$

$X_{21311} = 15$

E pelo depósito 3 são expedidas 15 unidades de mercadoria do tipo 2 ($X_{21311} = 15$).

4.3.2. APLICAÇÃO DO PROCESSO ITERATIVO

Obtida a solução através do computador, inicia-se o processo iterativo fazendo-se algumas modificações dentro do problema.

Como não existe distribuição de produtos da fábrica para o consumidor através do depósito 2 ($X_{11211} = 0$ e $X_{21211} = 0$), os valores de duas constantes são modificados na função objetivo. C_{21} assume valor zero e C_{22} será igual a 1.

E, além disso, substitui-se na função objetivo,

$W_1 = 20$ pela soma das quantidades expedidas através do depósito 1 ($X_{11111} + X_{11112} + X_{21111} = 10$)

$W_3 = 30$ pela soma das quantidades expedidas através do depósito 3 ($X_{11311} + X_{21311} = 15$)

Resolve-se novamente o problema no computador com a função objetivo modificada.

Repete-se o processo até a sua convergência, isto é, quando todos os W_i forem iguais aos W_i da operação anterior (W_i anterior = W_i atual).

É resolvido no computador o modelo modificado:

Maximizar

$$V = - 51\ X_{11111} - 25\ X_{11112} - 44\ X_{21111} - 78\ X_{11211} -$$

$$- 89{,}3\ X_{21211} - 27{,}3\ X_{11311} - 28{,}3\ X_{21311} + 0\ S_1 + 0\ S_2 +$$

$$+ 0\ S_3 + 0\ S_4 + 0\ S_5 + 0\ S_6 + 0\ S_7 + 0\ S_8 + 0\ S_9 + 0\ S_{10} +$$

$$+ 0\ S_{11} + 0\ S_{12} - 10^3\ T_{11111}$$

Sujeito à

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{11211} = 10$$

$$X_{21111} + X_{21211} = 15$$

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{11211} + S_1 = 30$$

$$X_{21111} + X_{21211} + S_2 = 40$$

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{21111} + S_3 = 20$$

$$X_{11211} + X_{21211} + S_4 = 15$$

$$X_{11311} + X_{21311} + S_5 = 30$$

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{21111} + S_6 = 25$$

$$X_{11211} + X_{21211} + S_7 = 25$$

$$X_{11311} + X_{21311} + S_8 = 25$$

$$X_{11111} + S_9 = 12$$

$$X_{11111} + S_{10} = 1$$

$$- X_{11111} + 10^3\ T_{11111} + S_{11} = 989$$

$$X_{11112} - 10^3\ T_{11111} + S_{12} = 0$$

X_{11211} , X_{11111} , X_{11112} , X_{21111} $\geqslant$ 0

X_{21211} , X_{11311} , X_{21311} , T_{11111} $\geqslant$ 0

$S_t \geqslant 0$ $t = 1, 2, \ldots, 10$

Resolvendo de forma análoga ao anterior (anexo 3), obtem-se:

$X_{11111} = 0$

$X_{11112} = 10$

$X_{21111} = 0$

$X_{11211} = 0$

$X_{21211} = 0$

$X_{11311} = 0$

$X_{21311} = 15$

$V = \text{CR\$ } 684{,}50$

como $X_{11111} + X_{11112} + X_{21111} = 10$ coincide com o $W_i = 10$ da iteração anterior.

Continua zero a soma das variáveis X_{11211} e X_{21211} e $X_{11311} + X_{21311} = 15$ é o mesmo que $W_3 = 15$ da iteração anterior.

O processo iterativo convergiu, chegando-se então à solução desejada, pois as variáveis permaneceram em duas iterações com os mesmos valores e portanto qualquer iteração subsequente não melhorará a função objetivo, o que indica que a melhor solução para o modelo proposto, foi alcançada.

Sob o enfoque apresentado na formulação inicial o qual quantifica as políticas administrativas e objetivando a minimização dos custos, chega-se a seguinte solução como a mais recomendável:

- Deve ser transportada 10 unidades da mercadoria 1 através do depósito 1.
- Uma quantidade de 15 unidades da mercadoria 2 deve ser transportada através do depósito 3.
- Somente dois depósitos (i = 1,3) são escolhidos.

Tendo-se então desta forma um custo de CR$ 684,50 , como sendo o menor custo encontrado.

Deve-se no entanto, colocar a presente solução à apreciação dos responsáveis pelas políticas administrativas da empresa para que estes tenham oportunidade de avaliar as repercursões de suas decisões iniciais e quem sabe poderem ainda corrigir situações indesejáveis antes das mesmas serem definitivamente levadas a aplicação.

4.3.3. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Na solução encontrada pelo computador com o uso do pro grama LPGOGO, tem-se condições de efetuar uma análise de sensibilidade para os custos, coeficientes da função objetivo (coluna VALUE) e para as constantes (colunas VALUE, DECREASE e INCREASE), além de informar quais as restrições são limitantes na solução ótima (coluna STATUS). Esta análise de sensibilidade deve ser feita nos moldes a seguir:

Se por exemplo, no transporte da mercadoria 1 através do depósito 3 ($X_{11311} = 0$) é acrescentado uma unidade, tem-se:

$$X_{11311} = 1$$

tem-se, consequentemente de diminuir uma unidade em X_{11112} de modo a manter

$$X_{11111} + X_{11112} + X_{11211} + X_{11311} = 15$$

Para conservar as características exigidas, algum reacerto se faz necessário e se este é feito com o objetivo de minimizar os custos, nenhuma combinação melhor é conseguido do que aquela que aumenta os custos em apenas CR$ 1,3.

Por outro lado, se é analisado mudanças nas constantes das restrições, tira-se os valores que devem ser considerados do último quadro que aparece no relatório. Supõe-se que é analisado mudanças no Q_{11}. Nas colunas DECREASE e INCREASE lê-se o quanto pode-se diminuir ou adicionar, respectivamente, ao Q_{11} sem modificar o conjunto das variáveis básicas na solução ótima; é claro que o valor da função objetivo é afetado, e numa quantidade igual à CR$ 26,00 para cada unidade adicionada.

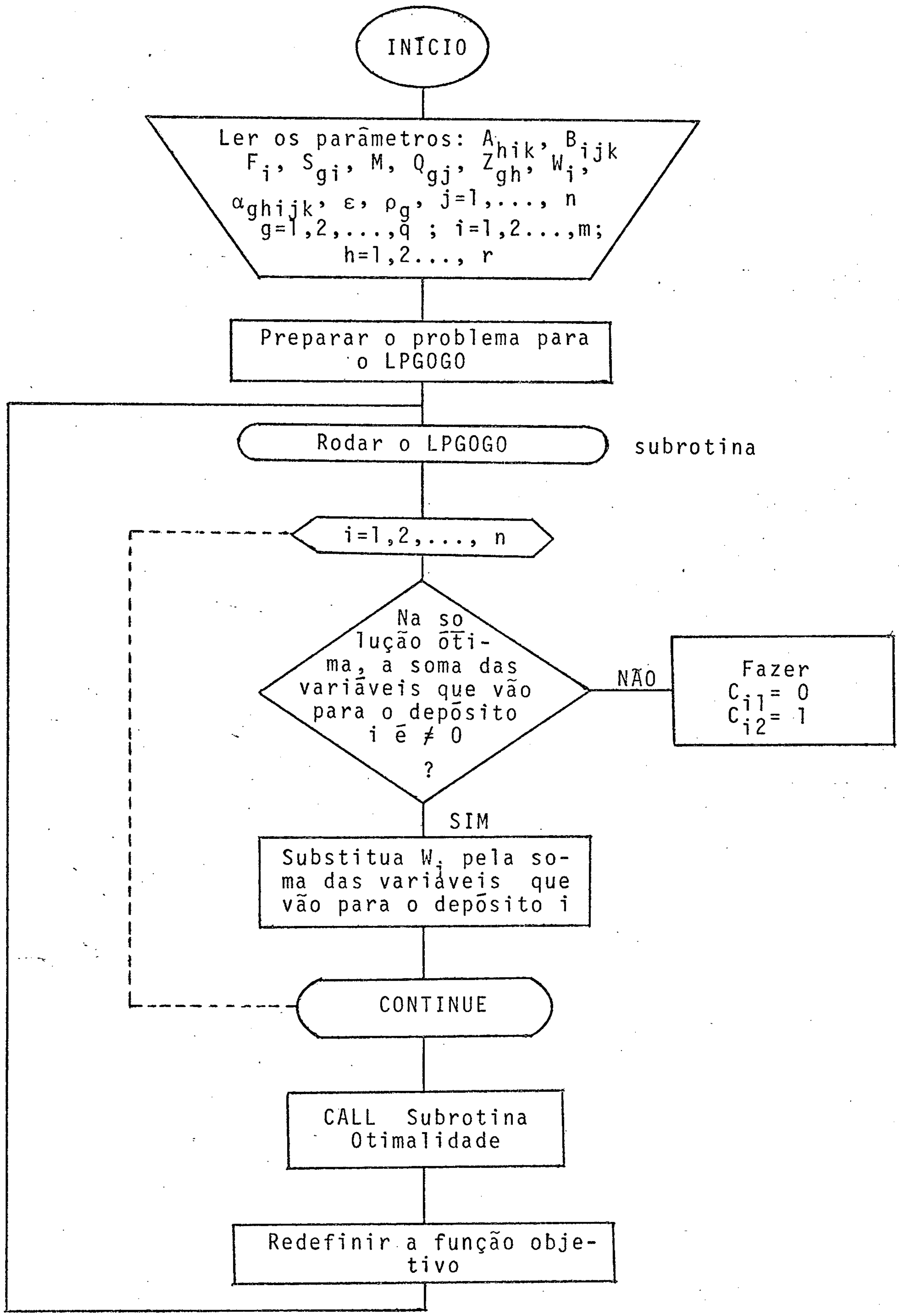
C A P I T U L O V

DIAGRAMA DE BLOCO

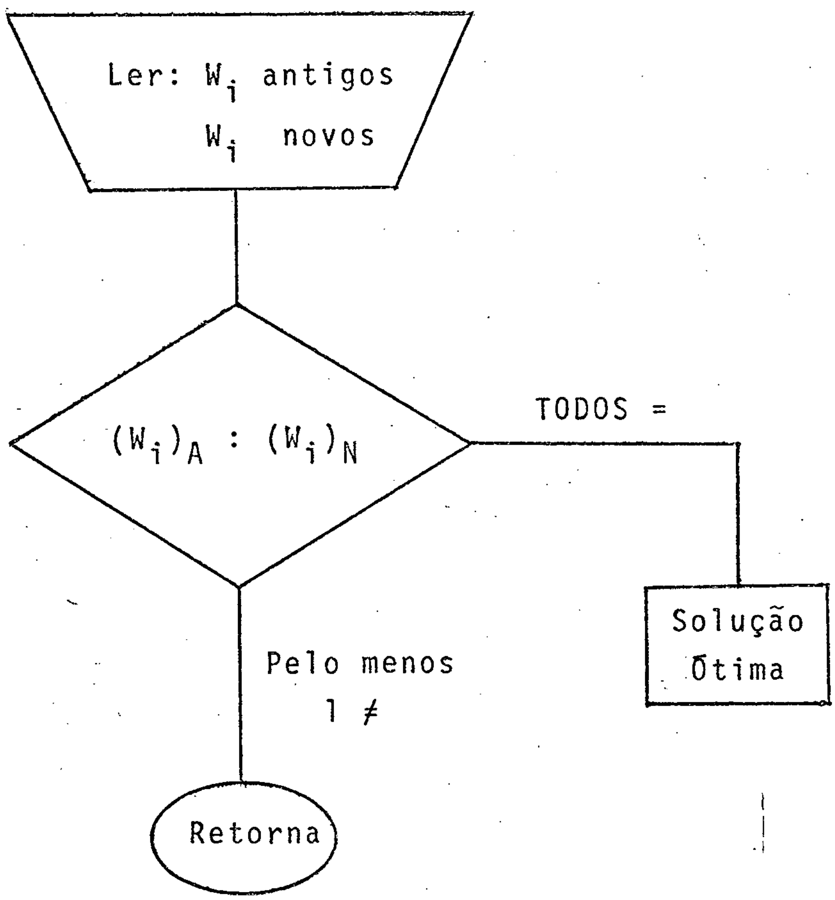
Uma boa forma de operar com o método desenvolvido é fazendo uso do diagrama de bloco.

Por intermédio deste, o método pode ser mecanizado e mais rapidamente aplicado.

DIAGRAMA DE BLOCO



SUB-ROTINA - TESTE OTIMALIDADE



CAPITULO VI

CONCLUSOES

A revisão da literatura em problemas de localização de depósitos mostra um trabalho extenso com modelos lineares e não lineares, com ou sem custos fixos.

As técnicas usadas são: simulação, processos heurísticos e algorítmos exatos. Sendo que este último método resolve o problema na sua formulação geral sem simplificações resultando em uma solução inteira.

Convém salientar que o desenvolvimento deste trabalho na localização de depósitos, foi realizada valendo-se da técnica de programação separável, apresentada por VOGT (4). Esta técnica foi generalizada e aplicada ao modelo matemático de localização de depósitos descrito na referência (3), sendo realizadas as necessárias adaptações.

O procedimento desenvolvido na obtenção da solução ótima, permitiu superar as dificuldades computacionais de programação inteira através da utilização de um processo iterativo.

Cabe ressaltar, contudo, que a sistemática proposta é heurística, não garantindo pois que a solução encontrada seja a ótima. As características da técnica associada com as experiências realizadas, demonstram contudo que via de regra a solução encontrada é bastante próxima da ótima e algumas vezes chegando a esta.

A grande potencialidade do método está porém na sua simplicidade e rapidez com que se chega ao resultado.

Recomenda-se o modelo para análises de problemas que por seu porte e características operacionais necessitam mais de uma estimativa da solução ótima do que seu rigorismo matemático. Pode-se também utilizá-lo como uma fase preliminar da programação inteira, para melhorar a eficiência deste processo de otimização da fixação imediata de um limite bastante próximo do ótimo quando não o próprio.

A administração de uma empresa, envolvida em estudo de localização, deve decidir sobre fatores subjetivos antes da análise quantitativa e, então, considerar os custos numa base para a tomada de decisão.

Deve-se no entanto, colocar a solução obtida à apreciação dos responsáveis pelas políticas administrativas da empresa para que estes tenham a oportunidade de avaliar as repercursões de suas decisões iniciais e quem sabe poderem ainda corrigir situações indesejáveis antes das mesmas serem definitivamente levadas à aplicação.

BIBLIOGRAFIA

1. BALINSKI, M.L.; H. Mills. "A Warehouse Problem". Veterans Administration, Mathemática, Princeton, New Jersey, april 1960.

2. ESTON, Frederick C. "Quantitative Analysis of Plant Location" - Industrial Engineering, april, 1972, volume 4, nº

3. WHYLARK, Clay; KHUMAWALA, Basheer. "A Survey of Facility Lacation Methods" - Herman C. Krannert Graduate School of Industrial Administration, Lafayette, Indiana, april 1972, paper nº 350.

4. VOGT, Lynn; EVEN, John. "Piecewise Linear Programming Solutions of Transportation Costs as obtained from Rate Tariffs" - AIIE Transactions, june 1972, volume 4, number 2.

5. PHILLIPS, Don; RAVINCHAN, A & SOLBERG, James. "Operations Research" - John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1976.

6. KINDLEBERGER, Charles. "Economia Internacional". Editora Mestre Jou, São Paulo, 1974.

7. HU, T.C.. "Integer Programming and Network Flows". Addison Wesley Publishing Company, Califórnia, 1970.

8. BEALE, E. M. L. "Applications of Mathematical Programming Techniques". The English Universities Press Ltd, London, 1971.

9. ROBINSON, Edwin; HALL, J. Curtis. "Organização e Administração de Negócios". Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda. Rio de Janeiro, 1971.

10. BUFFA, Elwood S. "Administração da Produção". Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro, 1972.

11. MAGEE, John F. "Industrial Logistics". Analysis and Management of Physical Supply and Distribuition Systems.

12. LAWRENCE Z. Pengilly. "The Number and Location of Depots for distribuition to retail stores". Operational Research Quarterly, volume 20, nº 1, march 1969.

13. HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. "Introduction to Operations Research". Holden-Day, Inc., London, 1967.

14. BEALE, E.M.L.; P.J. Coen, and A.D.J. Flowerdew. "Separable Programming Applied to an Ore Purchasing Problem". Journal of Applied Statistics, July, 1965.

15. BAUMOL, W.J. and WOLFE. "A Warehouse Location Problem", Operations Research, vol. 6, march-april, 1958.

16. EFFROYMSON, M.A. and T.L. Ray. "A Branch-Bound Algorithm for Plant Location". Operations Research, vol. 14, may--june, 1966.

A N E X O I

Segue a listagem do programa computacional, em linguagem FORTRAN, para computador tipo IBM - 1130, utilizado na ilustração apresentada no Capítulo IV deste trabalho.

```
GE    1

 JOB T

G DRIVE    CART SPEC    CART AVAIL   PHY DRIVE
0000         000D         000D         0000

 M11    ACTUAL 16K   CONFIG 16K

 FOR
IST SOURCE PROGRAM
OCS(CARD,1132PRINTER)
NE WORD INTEGERS
      PROGRAM LPGOGO (INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
      LPGOGO IS A MAXIMIZING LINEAR PROGRAMMING CODE.   IT USES THE TWO
      PHASE, FULL TABLEAU FORM OF THE SIMPLEX METHOD, REQUIRES ALL RHS
      PARAMETERS TO BE NONNEGATIVE, AND STARTS FROM A FULLY ARTIFICIAL
      BASIS.  IT ASSUMES THAT ALL CONSTRAINIS HAVE BEEN CONVERTED TO EQUAT
      PARAMETERS TO BE NONNEGATIVE, AND STARTS FROM A FULLY ARTIFICIAL
      THE OBJECTIVE FUNCTION AND PHASE ONE COEFFICIENTS ARE
      STORED AS THE (M+1)ST AND (M+2)ND ROWS OF THE A ARRAY WHICH
      ALSO STORES THE INVERSE OF THE BASIS IN ITS LAST M COLUMNS.
      THE PRESENT DIMENSIONS ACCOMODATE M=50 CONSTRAINIS AND N=100
      VARIABLES (DECISION PLUS SLACK).THESE DIMENSIONS CAN BE CHANGED
      BY CHANGING THE DIMENSION CARDS BELOW AS FOLLOWS...
      DIMENSION A(M+2,M+N),B(M+2),JCOL(N),IROW(M),IBASIS(M),ITITLE(12)
      WHERE M IS THE MAXIMUM NUMBER OF CONSTRAINIS AND N IS THE
      MAXIMUM NUMBER OF VARIABLES DESIRED
      THE PROGRAM ASSUMES A SIX&CHARACTER&WORD MACHINE FOR ALPHANUMERIC
      INPUT AND PRINTOUT.
      REAL I,J
      DIMENSION A(43,118),B(43),COL(77),ROW(41),IBASI(41),TITL(20)
      DATA KBASI/'BA'/
      DATA LBASI/'  '/
      DATA MBASI/'BI'/
      DATA NBASI/'SL'/
      DATA SOLVE/'  SO'/
      INPUT
      READ NUMBER OF EQUATIONS, NUMBER OF VARIABLES
      ISTOP = 0
      ITERS = 0
      READ(2,1001) (TITL(III),III=1,20)
      WRITE(3,1101)(TITL(III),III=1,20)
      READ(2,1002)M,N
      WRITE(3,1002) M,N
      NM=N+M
      MPLU2=M+2
      DO 5 III=1,MPLU2
      B(III)=0.0
      IBASI(III)=0
      DO 5 JJJ=1,NM
      A(III,JJJ)=0.0
  5   CONTINUE
      READ EQUATION NAMES AND NON NEGATIVE RHS PARAMETERS
      DO 10 III=1,M
      READ(2,1003) ROW(III),B(III)
      WRITE(3,1103) ROW(III),B(III)
 10   CONTINUE
      READ VARIABLE NAMES AND OBJECTIVE FUNCTION COEFS
      DO 20 IJ=1,N
      READ(2,1004) COL(IJ),A(M+1,IJ)
      WRITE(3,1104) COL(IJ),A(M+1,IJ)
 20   CONTINUE
```

```
      READ LHS COEFFICIENTS
 50   I2=0
      J2=0
      READ(2,1005) I,J,VALUE
      IF(I-SOLVE)55,99,55
 55   WRITE(3,1105)I,J,VALUE
      DO 60 I1=1,M
      IF(I-ROW(I1))60,62,60
 60   CONTINUE
      GO TO 700
 62   I2=I1
      DO 65 J1=1,N
      IF(J-COL(J1))65,66,65
 65   CONTINUE
      GO TO 700
 66   J2=J1
      A(I2,J2)=VALUE
      GO TO 50
 99   WRITE(3,1107)
      IF(ISTOP-1)100,9000,100
 100  K=2
      N1=N+1
      SETUP PHASE I ROW
      DO 120 JJJ=1,N
      A(M+2,JJJ) =0.0
      DO 120 III=1,M
      A(M+2,JJJ)=A(M+2,JJJ)+A(III,JJJ)
 120  CONTINUE
      SET UP INITIAL BASIS AND ARTIFICIALS
      DO 110 III=1,M
      NPLUI=N+III
      A(III,NPLUI)=1.0
      IBASI(III)=0
      B(M+2) = B(M+2)+B(III)
 110  CONTINUE
      WTEST=B(M+2)/1000000.
      FIND PIVOT COLUMN
 399  DPS=0.
      SA=B(M+1)
      SB=B(M+2)
      WRITE(3,8100)SB,SA
 8100 FORMAT(1X,2HW=,F10.2,10X,2HZ=,F10.2)
      MPLUK=M+K
      DO 410 JJJ=1,N
      IF(A(MPLUK,JJJ)-DPS)410,410,420
 420  DPS=A(MPLUK,JJJ)
      JPIV=JJJ
 410  CONTINUE
      IF(DPS-1.0E-06)501,501,450
      FIND PIVOT ROW
 450  RATMI=1.E+06
      IPIV=M + 3
      DO 470 III=1,M
      IF(A(III,JPIV)-1.E-06)470,460,460
 460  RATIO=B(III)/A(III,JPIV)
      IF(RATIO-RATMI)465,465,470
 465  RATMI=RATIO
      IPIV=III
 470  CONTINUE
      WRITE(3,2001)IPIV,JPIV,ITERS,K
```

```
 2001  FORMAT(1X,5HIPIV=,I4,5HJPIV=,I4,6HITERS=,I4,2HK=,I4)
       IF(K-2)471,475,471
   471 DO 475 III=1,M
       IF(IBASI(III)-0)475,472,475
   472 IF(ABS(A(III,JPIV))-1.E-06)475,475,473
   473 IPIV =III
   475 CONTINUE
       PIVOT = A(IPIV,JPIV)
       IBASI(IPIV)=JPIV
       ITERS=ITERS+1
C      IF PIVOT FOUND, TRANSFORM TABLEAU
C      IF NOT,EXIT, SOLUTION UNBOUNDED
       M3=M+3
       IF(IPIV-M3)485,496,485
   485 DO 500 III=1,MPLUK
       IF(III-IPIV)497,500,497
   497 DO 480 JJJ=1,NM
       IF(JJJ-JPIV)479,480,479
   479 A(III,JJJ)=A(III,JJJ)-A(III,JPIV)*A(IPIV,JJJ)/PIVOT
   480 CONTINUE
       B(III)=B(III)-A(III,JPIV)*B(IPIV)/PIVOT
       A(III,JPIV) =0.0
   500 CONTINUE
       DO 495 JJJ=1,NM
       A(IPIV,JJJ)=A(IPIV,JJJ)/PIVOT
   495 CONTINUE
       B(IPIV)=B(IPIV)/PIVOT
       GO TO 399
   496 WRITE(3,1006)
       GO TO 571
   501 IF(K-1)509,510,509
   509 IF(B(M+2)-WTEST)504,504,505
C      NO FEASIBLE SOLUTION EXISTS
   505 WRITE(3,1007)
       GO TO 571
   504 K=1
       GO TO 399
C      OPTIMAL SOLUTION OUTPUT
   510 CONTINUE
       WRITE(3,1008) ITERS
       ZIMBO=-B(M+1)
       WRITE(3,1010)ZIMBO
       WRITE(3,1011)
       DO 580 JJJ=1,N
       COLJ=COL(JJJ)
       DELTJ=A(M+1,JJJ)
       DO 520 III=1,M
       II=III
       IF(IBASI(III)-JJJ)520,550,520
   520 CONTINUE
       X=0.0
       JBASI=LBASI
       GO TO 560
   550 X=B(II)
       JBASI=KBASI
   560 WRITE(3,1009)COLJ,JBASI,X,DELTJ
   580 CONTINUE
       WRITE(3,1012)
       DO 570 III=1,M
       JBASI=MBASI
```

```
      ROWI=ROW(III)
      NPLUI=N+III
      X=-A(M+1,NPLUI)
      IF(ABS(X)-1.E-09)562,562,606
  562 IF(IBASI(III))564,563,564
  563 JBASI=LBASI
      FLOWE=0.0
      FUPER=0.0
      GO TO 569
  564 JBASI=NBASI
  606 FLOWE=-1.0E+10
      FUPER=1.0E+10
      DO 900 K=1,M
      GATO5=7
      GATO4=6
      GATO3=7
      GATO2=3
      GATO1=5
      IF(A(K,NPLUI))601,900,605
  601 QUOT=-B(K)/A(K,NPLUI)
      IF(QUOT-FUPER)899,900,900
  899 FUPER=QUOT
      GO TO 900
  605 QUOT=-B(K)/A(K,NPLUI)
      IF(QUOT-FLOWE)900,900,889
  889 FLOWE=QUOT
  900 CONTINUE
      FLOWE=-FLOWE
      IF(FLOWE-1.E+10)575,578,575
  578 IF(FUPER-1.E+10)574,575,575
  575 IF(FLOWE-1.E+10)573,577,577
  573 IF(FUPER-1.E+10)577,576,577
  577 IF(FLOWE-1.E+10)569,579,569
  579 IF(FUPER-1.E+10)569,572,569
  569 WRITE(3,1013)ROWI,JBASI,X,FLOWE,FUPER
      GO TO 570
  572 WRITE(3,1017)ROWI,JBASI,X
      GO TO 570
  574 WRITE(3,1018)ROWI,JBASI,X,FUPER
      GO TO 570
  576 WRITE(3,1019)ROWI,JBASI,X,FLOWE
  570 CONTINUE
C     FULL TABLEAU PRINTOUT AVAILABLE BY REMOVING THE FOLLOWING CARD.
      GO TO 9000
  571 WRITE(3,1015)
      MPLU2=M+2
      DO 800 III=1,MPLU2
      WRITE(3,1016)(A(III,JJ),JJ=1,NM),B(III)
  800 CONTINUE
      WRITE(3,1015)
 9000 STOP
  700 WRITE(3,1014)
      ISTOP = 1
      GO TO 50
 1001 FORMAT(20A3)
 1002 FORMAT(2I4)
 1003 FORMAT(A4,11X,F13.6)
 1004 FORMAT(8X,A4,4X,F12.6)
 1005 FORMAT(A4,4X,A4,4X,F12.6)
 1006 FORMAT(19H SOLUTION UNBOUNDED)
```

```
AGE    5

1007 FORMAT(21H NO FEASIBLE SOLUTION)
1008 FORMAT(23H SOLUTION OPTIMAL AFTER,2X,I5,11H ITERATIONS)
1009 FORMAT(4X,A6,2X,A5,5X,F12.6,4X,F12.6)
1010 FORMAT(20H MAXIMAL OBJECTIVE =,F16.6)
1011 FORMAT(2X,8HVARIABLE,2X,6HSTATUS,8X,5HVALUE,9X,6HDELTAJ)
1012 FORMAT(11HOCONSTRAINT,1X,6HSTATUS,8X,5HVALUE,9X,8HDECREASE,9X,8HIN
    1CREASE)
1013 FORMAT(4X,A6,2X,A6,4X,F12.6,4X,F12.6,4X,F12.6)
1014 FORMAT(18H INCONSISTENT NAME)
1015 FORMAT(1H1)
1016 FORMAT (1X,10F12.4)
1017 FORMAT(4X,A6,2X,A6,4X,F12.6,8X,4HOPEN,12X,4HOPEN)
1018 FORMAT(4X,A6,2X,A6,4X,F12.6,8X,4HOPEN,8X,F12.6)
1019 FORMAT(4X,A6,2X,A6,4X,F12.6,4X,F12.6,8X,4HOPEN)
1101 FORMAT(1H1,20A3)
1103 FORMAT(1X,A4,12X,F15.6)
1104 FORMAT(9X,A4,4X,F12.6)
1105 FORMAT(1X,A4,4X,A4,4X,F12.6)
1107 FORMAT(3X,11HFINAL DADOS)
     END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON        0  VARIABLES  10630  PROGRAM    1746

END OF COMPILATION

// XEQ
```

A N E X O II

Segue os relatórios fornecidos pelo computador no processo iterativo.

14	20	
R1		10.000001
R2		15.000001
R3		30.000003
R4		40.000007
R5		20.000003
R6		15.000001
R7		30.000003
R8		25.000003
R9		25.000003
R10		25.000003
R11		12.000001
R12		1.000000
R13		989.000123
R14		0.000000
	X1	-50.000007
	X2	-24.000003
	X3	-43.000007
	X4	-68.700012
	X5	-80.000015
	X6	-26.700000
	X7	-27.700000
	S1	0.000000
	S2	0.000000
	S3	0.000000
	S4	0.000000
	S5	0.000000
	S6	0.000000
	S7	0.000000
	S8	0.000000
	S9	0.000000
	S10	0.000000
	S11	0.000000
	S12	0.000000
	T	-1000.000123
R1	X1	1.000000
R1	X2	1.000000
R1	X4	1.000000
R1	X6	1.000000
R2	X3	1.000000
R2	X5	1.000000
R2	X7	1.000000
R3	X1	1.000000
R3	X2	1.000000
R3	X4	1.000000
R3	X6	1.000000
R3	S1	1.000000
R4	X3	1.000000
R4	X5	1.000000
R4	X7	1.000000
R4	S2	1.000000
R5	X1	1.000000
R5	X2	1.000000
R5	X3	1.000000
R5	S3	1.000000
R6	X4	1.000000
R6	X5	1.000000
R6	S4	1.000000
R7	S5	1.000000
R7	X7	1.000000
R7	X6	1.000000
R8	X1	1.000000

```
R8     X2          1.000000
R8     X3          1.000000
R8     S6          1.000000
R9     X4          1.000000
R9     X5          1.000000
R9     S7          1.000000
R10    X6          1.000000
R10    X7          1.000000
R10    S8          1.000000
R11    X1          1.000000
R11    S9          1.000000
R12    T           1.000000
R12    S10         1.000000
R13    X1         -1.000000
R13    T        1000.000123
R13    S11         1.000000
R14    X2          1.000000
R14    T       -1000.000123
R14    S12         1.000000
  FINAL DADOS
SOLUTION OPTIMAL AFTER     19 ITERATIONS
MAXIMAL OBJECTIVE =      -665.499879
 VARIABLE  STATUS          VALUE          DELTAJ

      X1                  0.000000      -25.000003
      X2       BA        10.000001        0.000000
      X3                  0.000000      -15.300004
      X4                  0.000000      -43.700004
      X5                  0.000000      -52.300010
      X6                  0.000000       -1.699997
      X7       BA        15.000001        0.000000
      S1       BA        20.000003        0.000000
      S2       BA        25.000003        0.000000
      S3       BA        10.000001        0.000000
      S4       BA        15.000001        0.000000
      S5       BA        15.000001        0.000000
      S6       BA        15.000001        0.000000
      S7       BA        25.000003        0.000000
      S8       BA        10.000001        0.000000
      S9       BA        12.000001        0.000000
      S10      BA         0.990000        0.000000
      S11      BA       979.000123        0.000000
      S12                 0.000000       -1.000000
      T        BA         0.009999        0.000000

CONSTRAINT STATUS         VALUE         DECREASE        INCREASE
      R1       BI       -25.000003        9.999794      10.000001
      R2       BI       -27.700000       15.000001      10.000001
      R3       SL         0.000000       20.000003      OPEN
      R4       SL         0.000000       25.000003      OPEN
      R5       SL         0.000000       10.000001      OPEN
      R6       SL         0.000000       15.000001      OPEN
      R7       SL         0.000000       15.000001      OPEN
      R8       SL         0.000000       15.000001      OPEN
      R9       SL         0.000000       25.000003      OPEN
      R10      SL         0.000000       10.000001      OPEN
      R11      SL         0.000000       12.000001      OPEN
      R12      SL         0.000000        0.990000      OPEN
      R13      SL         0.000000      979.000123      OPEN
      R14      BI         1.000000      979.000123       9.999794
```

A N E X O III

Segue os relatórios fornecidos pelo computador no processo iterativo.

```
 14   20
R1                    10.000001
R2                    15.000001
R3                    30.000003
R4                    40.000007
R5                    20.000003
R6                    15.000001
R7                    30.000003
R8                    25.000003
R9                    25.000003
R10                   25.000003
R11                   12.000001
R12                    1.000000
R13                  989.000123
R14                    0.000000
         X1      -51.000007
         X2      -25.000003
         X3      -44.000007
         X4      -78.000015
         X5      -89.300003
         X6      -27.300003
         X7      -28.300003
         S1        0.000000
         S2        0.000000
         S3        0.000000
         S4        0.000000
         S5        0.000000
         S6        0.000000
         S7        0.000000
         S8        0.000000
         S9        0.000000
         S10       0.000000
         S11       0.000000
         S12       0.000000
         T     -1000.000123
R1       X1        1.000000
R1       X2        1.000000
R1       X4        1.000000
R1       X6        1.000000
R2       X3        1.000000
R2       X5        1.000000
R2       X7        1.000000
R3       X1        1.000000
R3       X2        1.000000
R3       X4        1.000000
R3       X6        1.000000
R3       S1        1.000000
R4       X3        1.000000
R4       X5        1.000000
R4       X7        1.000000
R4       S2        1.000000
R5       X1        1.000000
R5       X2        1.000000
R5       X3        1.000000
R5       S3        1.000000
R6       X4        1.000000
R6       X5        1.000000
R6       S4        1.000000
R7       S5        1.000000
R7       X7        1.000000
R7       X6        1.000000
R8       X1        1.000000
```

```
R8      X2           1.000000
R8      X3           1.000000
R8      S6           1.000000
R9      X4           1.000000
R9      X5           1.000000
R9      S7           1.000000
R10     X6           1.000000
R10     X7           1.000000
R10     S8           1.000000
R11     X1           1.000000
R11     S9           1.000000
R12     T            1.000000
R12     S10          1.000000
R13     X1          -1.000000
R13     T         1000.000123
R13     S11          1.000000
R14     X2           1.000000
R14     T        -1000.000123
R14     S12          1.000000
  FINAL DADOS
SOLUTION OPTIMAL AFTER      19 ITERATIONS
MAXIMAL OBJECTIVE =      -684.499147
```

VARIABLE	STATUS	VALUE	DELTAJ
X1		0.000000	-25.000003
X2	BA	10.000001	0.000000
X3		0.000000	-15.699998
X4		0.000000	-52.000007
X5		0.000000	-60.999992
X6		0.000000	-1.300003
X7	BA	15.000001	0.000000
S1	BA	20.000003	0.000000
S2	BA	25.000003	0.000000
S3	BA	10.000001	0.000000
S4	BA	15.000001	0.000000
S5	BA	15.000001	0.000000
S6	BA	15.000001	0.000000
S7	BA	25.000003	0.000000
S8	BA	10.000001	0.000000
S9	BA	12.000001	0.000000
S10	BA	0.990000	0.000000
S11	BA	979.000123	0.000000
S12		0.000000	-1.000000
T	BA	0.009999	0.000000

CONSTRAINT	STATUS	VALUE	DECREASE	INCREASE
R1	BI	-26.000003	9.999794	10.000001
R2	BI	-28.300006	15.000001	10.000001
R3	SL	0.000000	20.000003	OPEN
R4	SL	0.000000	25.000003	OPEN
R5	SL	0.000000	10.000001	OPEN
R6	SL	0.000000	15.000001	OPEN
R7	SL	0.000000	15.000001	OPEN
R8	SL	0.000000	15.000001	OPEN
R9	SL	0.000000	25.000003	OPEN
R10	SL	0.000000	10.000001	OPEN
R11	SL	0.000000	12.000001	OPEN
R12	SL	0.000000	0.990000	OPEN
R13	SL	0.000000	979.000123	OPEN
R14	BI	1.000000	979.000123	9.999794