UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA

ESTUDO DINÂMICO E TÉRMICO DO ESCOAMENTO LAMINAR EM UM DUPLO TUBO ALETADO

CLOVIS RAIMUNDO MALISKA

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
JULHO - 1975

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA

ESTUDO DINÂMICO E TÉRMICO DO ESCOAMENTO LAMINAR EM UM DUPLO TUBO ALETADO

CLOVIS RAIMUNDO MALISKA

TESE SUBMETIDA À APRECIAÇÃO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE:

"MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA"
- OPÇÃO TERMOTÉCNICA -

ESTUDO DINÂMICO E TÉRMICO DO ESCOAMENTO LAMINAR EM UM DUPLO TUBO ALETADO

CLOVIS RAIMUNDO MALISKA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO ORIENTADOR E PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Sérgio Colle, M.Sc.
Orientador

Prof. Dr. Hyppólito do Valle Pereira
Integrador do Curso de Pós-Graduação

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Hyppólito do Valle Pereira, Ph.D.

Prof. Carlos Alfredo Clezar, M.Sc.

Prof. Sérgio Luiz Gargioni , M.Sc.

Aos
meus pais

Aos
meus irmãos

À
Ana Maria,
minha esposa

AGRADECIMENTOS

O autor deseja expressar seu sincero agradecimento ao Professor Sérgio Colle pela orientação dedicada e precisa.

Aos professores da Divisão de Termotécnica, pelo apoio e incentivo, à CAPES e ao BNDE, pelo apoio financeiro, ao Departamento de Engenharia Mecânica, ao Professor Manoel Luiz Leão, ao Schmidt e ao Francisco, pela amável acolhida e atenção que me dispensaram quando da minha estada no C.P.D.-UFRGS, ao Professor Hyppólito, pela presteza no pedido de bibliografias, ao Dr. Chang do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de New York, em Buffalo, pelo envio do artigo solicitado, à todos os professores, alunos e funcionários deste Centro que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho e aos amigos Rogério Gargioni, Anilton Lapa e Luiz Henrique da Silva, pelos desenhos e datilografia.

Í N D I C E

PÁG.

LISTA DE SÍMBOLOS

c_p	-	Calor específico
ρ	-	Massa específica
μ	-	Viscosidade absoluta
k	-	Condutibilidade térmica
r^*,θ,z^*	-	Sistema de coordenadas cilíndricas
r,θ,z	-	Sistema de coordenadas cilíndricas adimensionais
r_2^*	-	Raio do tubo externo
r_o^*	-	Raio do tubo interno
$r_o = \frac{r_o^*}{r_2^*}$	-	Relação de raios
$Dh^*=\frac{4.Ac}{P^*}$	-	Diâmetro hidráulico
$\ell^*=r_2^*-r_o^*$	-	Comprimento das aletas
P^*	-	Perímetro molhado
Ac	-	Área de passagem do fluído
θ_o	-	Ângulo entre as aletas
m	-	Número de aletas
q_1^*,q_o^*,q_2^*	-	Fluxo de calor por unidade de tempo e área na aleta, no tubo interno e no tubo externo, respectivamente.
Q_s^*	-	Calor trocado na interface sólido-fluido por unidade de tempo e comprimento do duto.
p^*	-	Pressão

Q^* - Calor de geração por unidade de volume

$\lambda = \frac{Q^* . r_2^*}{k}$ - Parâmetro de geração de calor

q_r^* - Fluxo de Calor de referência

ω_o - Relação entre fluxo de calor no tubo interno e na aleta.

ω_2 - Relação entre fluxo de calor no tubo externo e na aleta.

T^*, T - Temperatura e a correspondente adimensional

T_m^*, T_m - Temperatura média na região e a correspondente adimensional.

T_b^*, T_b - Temperatura de mistura e a correspondente adimensional.

T_{sm}^*, T_{sm} - Temperatura média na interface de troca de calor e a correspondente adimensional.

v_r^*, v_θ^*, v_z^* - Componentes da velocidade nos eixos coordenados

v_r, v_θ, v_z - Componentes da velocidade adimensional

v_m^*, v_m - Velocidade média e a correspondente adimensional.

$\bar{G}(r,\theta|r',\theta')$ - Função de Green generalizada

$g(r,\theta|r',\theta')$ - Função de Green

R - Região n-dimensional aberta e limitada

∂R - Fronteiras de R

$\delta(x-\xi)$ - Função "Delta de Dirac"

C_1 - Constante definida por (4-11)

C_2 - Constante definida por (4-12)

ϕ^* , ϕ - Função dissipação definida por (4-4) e a correspondente adimensional.

Q - Vazão volumétrica

$Re_{Dh} = \frac{\rho v_m^* Dh^*}{\mu}$ - Número de Reynolds

$Nu_{Dh}, Nu_{D_2}, \overline{Nu}_{D_2}$ - Números de Nusselt definidos em (4-87), (4-92) e (4-95), respectivamente

R E S U M O

O objetivo deste trabalho é o estudo dinâmico e térmico do escoamento laminar em um duplo tubo aletado.

A partir das equações do movimento e da energia, com simplificações que o problema físico admite e que serão justificadas no trabalho, chega-se aos problemas de Dirichlet e Neumann. Estes problemas são resolvidos com o uso das funções de Green.

São apresentadas as soluções do problema dinâmico e térmico, bem como o método de construção das funções de Green.

Os resultados são apresentados em termos de número de Reynolds, Nusselt e coeficiente de atrito para diversas relações de raios e números de aletas, e são comparados, em particular, com trabalhos anteriores.

ABSTRACT

The dynamic and thermal study of the laminar flow in a double pipe with internal fins is the main goal of this work.

Starting with momentum and energy equation and after some simplifications in the physical problem, which have been justified, we arrived to Dirichlet and Neumann problems. Those problems have been solved by using Green's function.

The solution of the dynamic and thermal problem have been presented and also the calculations of the Green's functions.

The results are presented in terms of, Reynolds and Nusselt numbers and friction coefficient. The calculation of those parameters have been performed for several radius ratios and fins number and compared with others previous works.

1 - INTRODUÇÃO

Recentemente, o estudo das características dinâmicas e térmicas de escoamentos em secções não circulares recebeu grande atenção dada a grande aplicação em trocadores de calor, principalmente para reatores nucleares.

A grande maioria deste tipo de secção são obtidas aletando-se dutos circulares. Muitos trabalhos foram feitos neste campo. DELORENZO e ANDERSON (1945), determinaram as características dinâmicas para escoamento em um duplo tubo, com aletas planas axiais, relação de raios 0,65 , com ângulo entre as aletas na faixa de 8 a 13°. SPARROW, et al [2], resolveram a equação do movimento, para regime laminar e perfil de velocidade plenamente desenvolvido, também para o duplo tubo com aletas planas axiais.

No trabalho feito por ECKERT, et al [3], podemos ver a solução dos problemas dinâmico e térmico, para regime laminar com perfis de velocidade e temperatura plenamente desenvolvidos, para o setor circular.

O problema acima foi resolvido para duas condições de contorno: temperatura constante na parede e fluxo de calor constante na parede, ambos com fluxo de calor constante por unidade de tempo e comprimento do duto. O problema do tubo aletado internamente foi resolvido por HU e CHANG [1], também para regime laminar e perfis plenamente desenvolvidos.

Eles encontraram um coeficiente de troca térmica vinte vezes superior àquele do tubo não aletado.

Um estudo bastante completo sobre tubos aletados com aletas de diversos tipos e em diferentes arranjos foi realizado por BERGLES [13] .

Trabalhos experimentais também foram realizados neste campo. HILDING e COOGAN [11], estudaram dez tipos de tubos aletados e concluíram que, para números de Reynolds acima de 5.000, todos apresentaram coeficiente de troca de calor inferiores ao do tubo liso. Entretanto, para baixos números de Reynolds, isto é, na região laminar e de transição, acontece o contrário.

BERGLES, et al [12], realizando trabalhos experimentais com tubos aletados internamente, encontraram um aumento de 170% no coeficiente de troca térmica em relação ao tubo não aletado, baseado na área nominal de transferência de calor e igual potência de bombeamento. O critério de mesma potência de bombeamento não é necessária em nosso estudo pois, para regime laminar com perfis de velocidade e temperatura plenamente desenvolvidos, o número de Nusselt é independente do número de Reynolds.

Neste trabalho é estudado, do ponto de vista dinâmico e térmico, o escoamento em um duplo tubo aletado, conforme Figura 1.

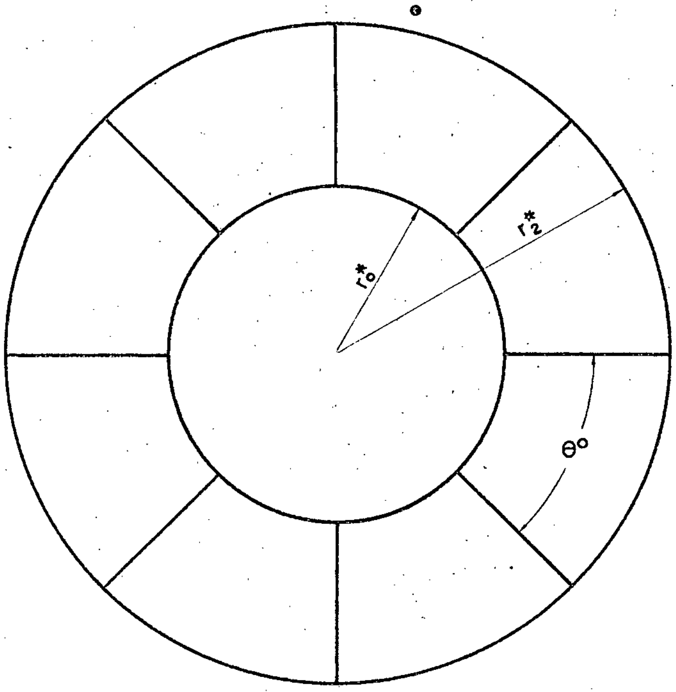


Fig. 1 - Geometria do duplo tubo aletado.

A colocação das aletas provoca um acréscimo na área de troca de calor, aumentando a quantidade de calor trocado, se uma dada distribuição de temperatura é mantida na superfície ou, baixando a temperatura média da superfície se um dado fluxo de calor é mantido.

Em outras palavras, isto significa que, se estamos usando um duplo tubo não aletado e uma quantidade de calor Q_S^* é trocada entre fluido frio e quente, se colocarmos aletas a mesma quantidade de calor Q_S^* poderá ser trocada com um fluido quente em temperatura mais baixa daquela do tubo não aletado. Ou ain da, mantendo a mesma temperatura do fluido quente e o mesmo Q_s^*, teremos um trocador de calor mais compacto.

Obviamente, a colocação de aletas implica em um aumento da potência de bombeamento e, frente a isto, o objetivo deste trabalho é entregar ao projetista de trocadores de calor as curvas de coeficiente de atrito e número de Nusselt, para que ele possa escolher o número de aletas mais conveniente, não apenas do ponto de vista térmico, mas também levando em consideração o acréscimo da potência de bombeamento.

Sob o aspecto comercial, as aletas planas axiais, como foi bem discutido por BERGLES, et al [12], representam uma boa maneira de aumentar a performance térmica de trocadores de calor.

2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema, ao qual nos submetemos, é resolver à equação do movimento e da energia para o escoamento em um duplo tubo aletado em regime laminar.

A região em estudo é a mostrada na Figura 2.

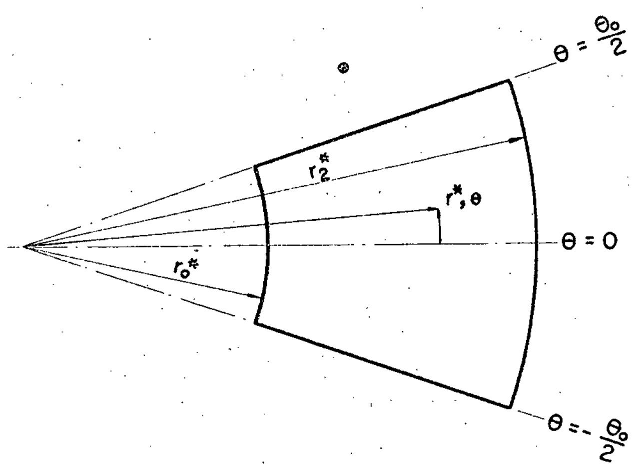


Fig. 2 - Geometria do setor de coroa em estudo.

As hipóteses são as normalmente feitas em estudos desta natureza:

a) Perfil de velocidade plenamente desenvolvido;

b) Perfil de temperatura plenamente desenvolvido;

c) Superfícies de atrito do fluido perfeitamente polidas;

d) Condição de não deslizamento do fluido nas paredes. Isto dá origem as condições de contorno do problema da velocidade;

e) Fluido Newtoniano;

f) Propriedades físicas dos fluidos constantes;

g) Aletas planas e axiais com espessura desprezável, dispostas radialmente e com igual espaçamento entre elas;

h) Fluxo de calor, por unidade de tempo e comprimento do duto, constante. Esta hipótese se aplica a diversos problemas de engenharia, tais como: Aquecimento por resistência elétrica, aquecimento nuclear, aquecimento por radiação e trocadores de calor contra corrente quando os fluidos frio e quente possuem as mesmas capacidades caloríficas.

i) Os fluxos de calor por unidade de tempo e área, nas aletas, no tubo interno e no tubo externo, são supostos constantes e são denotados por q_1^*, q_o^* e q_2^*, respectivamente. A hipótese de fluxo constante nas aletas, também adotada em [1], não é bastante real, mas simplifica o problema, pois do contrário, teríamos que analisar simultâneamente a condução de calor na aleta e a convecção no fluido.

j) A dissipação viscosa não será levada em consideração, pois ficou determinado que seus efeitos são insignificantes sobre o número de Nusselt [1].

Dentre os objetivos do trabalho, um deles é comparar os números de Nusselt do tubo aletado com aqueles do tubo não aletado. Para tal, vamos considerar que o duplo tubo não aletado e o aletado tenham o mesmo fluxo de calor por unidade de tempo e comprimento do duto. Como o aletado possue maior área de troca de calor, espera-se que a temperatura média da parede diminua e, consequentemente, haja um aumento no número de Nusselt.

O duplo tubo liso de comparação é considerado tendo um fluxo de calor q_r^*, constante na parede do tubo interno e superfície externa isolada.

Seja Q_s^* o calor trocado, tanto pelo duplo tubo sem aletas como pelo aletado.

Para o não aletado,

$$Q_s^* = q_r^* \cdot \pi D_o^* \tag{2-1}$$

Para o aletado,

$$Q_s^* = q_o^* \cdot \pi D_o^* + q_2^* \cdot \pi D_2^* + q_1^* \cdot 2m\ell^* \tag{2-2}$$

onde m é o número de aletas e ℓ^* o comprimento das aletas.

$$m = \frac{2\pi}{\theta_o} \tag{2-3}$$

$$\ell^* = r_2^* - r_o^* \tag{2-4}$$

Defina-se

$$\frac{q_o^*}{q_1^*} = \omega_o \tag{2-5}$$

$$\frac{q_2^*}{q_1^*} = \omega_2 \tag{2-6}$$

Levando (2-1), (2-5) e (2-6) em (2-2), fatorando q_1^* e rearranjando, vem

$$\frac{q_1^*}{q_r^*} = \frac{1}{\dfrac{2m\ell^*}{\pi D_o^*} + \omega_o + \dfrac{\omega_2 D_2^*}{D_o^*}} \tag{2-7}$$

As equações serão desenvolvidas considerando o fluxo de calor q_2^* mas, os resultados, para efeito de comparação com o duplo tubo não aletado, serão computados com $q_2^* = 0$ e, ainda porque a maior aplicação do duplo tubo é em trocadores de calor contra-corrente, que normalmente possuem a superfície externa isolada.

Da hipótese (b) temos,

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{dT_b^*}{dz^*} - \frac{T^* - T_b^*}{T_{sm}^* - T_b^*} \cdot \frac{dT_b^*}{dz^*} + \frac{T^* - T_b^*}{T_{sm}^* - T_b^*} \cdot \frac{dT_{sm}^*}{dz^*} \tag{2-8}$$

Da hipótese (h),

$$T_{sm}^* - T_b^* = \text{constante}$$

ou

$$\frac{dT_{sm}^*}{dz^*} = \frac{dT_b^*}{dz^*} \tag{2-9}$$

Levando (2-9) em (2-8),

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{dT^*_{sm}}{dz^*} = \frac{dT^*_b}{dz^*} \qquad (2\text{-}10)$$

Para que a solução seja mais geral, a equação da energia é acrescida de um termo representativo da geração interna de calor uniforme no fluido. O comportamento do número de Nusselt em função deste parâmetro é investigado.

3 - O PROBLEMA DA VELOCIDADE

3.1 - Equação Diferencial da Velocidade

A equação de Navier-Stokes, para fluido Newtoniano com ρ e μ constantes, em regime permanente, expressa em coordenadas cilíndricas (r^*,θ,z^*), tem a seguinte forma [6]:

Para a componente r^*,

$$\rho \left(\frac{\partial v_r^*}{\partial t} + v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \cdot \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^{*2}}{r^*} + v_z^* \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} +$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^*) \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial z^{*2}} \right] +$$

$$+ \rho g_r \tag{3-1}$$

Para a componente θ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta^*}{\partial t} + v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{v_r^* \cdot v_\theta^*}{r^*} + v_z^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} +$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_\theta^*) \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial z^{*2}} \right] +$$

$$+ \rho g_\theta \tag{3-2}$$

Para a componente z^*,

$$\rho \left(\frac{\partial v_z^*}{\partial t} + v_r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^{*2}} \right] + \rho g_z \qquad (3\text{-}3)$$

A equação da continuidade para fluido incompressível em regime permanente é,

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v_z^*) = 0 \qquad (3\text{-}4)$$

Admitindo escoamento unidimensional,

$$v_r^* = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

$$v_\theta^* = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

Com (3-5) e (3-6), (3-4) resulta,

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = 0 \qquad (3\text{-}7)$$

Com a hipótese de escoamento unidimensional e considerando desprezáveis os efeitos gravitacionais, (3-1) e (3-2) resultam,

$$\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0 \qquad (3\text{-}9)$$

Substituindo (3-5), (3-6) e (3-7) em (3-3), vem

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dz^*} \qquad (3\text{-}10)$$

que é a equação diferencial do problema dinâmico.

As condições de contorno da velocidade são,

$$v_z^* = 0 \qquad r^* = r_2^* \qquad -\pi/m \leq \theta \leq \pi/m \qquad (3\text{-}11)$$

$$v_z^* = 0 \qquad r^* = r_o^* \qquad -\pi/m \leq \theta \leq \pi/m \qquad (3\text{-}12)$$

$$v_z^* = 0 \qquad \theta = \pi/m \qquad r_o^* \leq r^* \leq r_2^* \qquad (3\text{-}13)$$

$$v_z^* = 0 \qquad \theta = -\pi/m \qquad r_o^* \leq r^* \leq r_2^* \qquad (3\text{-}14)$$

Para facilitar a solução da equação diferencial parcial (3-10), com as condições de contorno acima, é interessante colocá-la em uma forma adimensional definindo novas variáveis [1],[2].

Seja,

$$v_z = - \frac{v_z^*}{\dfrac{r_2^{*2}}{\mu} \cdot \dfrac{dp^*}{dz^*}} \qquad (3\text{-}15)$$

$$r = \frac{r^*}{r_2^*} \qquad (3\text{-}16)$$

onde v_z e r são, respectivamente, a velocidade ao longo do duto e a coordenada radial adimensionais.

Na equação (3-15) é suposta uma variação linear da pressão ao longo de z^*. Substituindo (3-15) e (3-16) em(3-10) vem,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} = -1$$

ou,

$$\nabla^2 v_z = -1 \qquad (3\text{-}17)$$

As condições de contorno, em termos adimensionais, resultam,

$$v_z = \theta \qquad r = 1 \qquad -\pi/m \leq \theta \leq \pi/m \qquad (3\text{-}18)$$

$$v_z = 0 \qquad r = r_o \qquad -\pi/m \leq \theta \leq \pi/m \qquad (3\text{-}19)$$

$$v_z = 0 \qquad \theta = \pi/m \qquad r_o \leq r \leq 1 \tag{3-20}$$

$$v_z = 0 \qquad \theta = -\pi/m \qquad r_o \leq r \leq 1 \tag{3-21}$$

A equação (3-17) é uma equação de Poisson que, com os valores da função prescritos na fronteira, caracteriza um problema de Dirichlet.

O problema de Dirichlet tem solução única e será resolvido neste trabalho com o uso das funções de Green.

3.2 - Função de Green - Definição

Seja R uma região do espaço n-dimensional, aberta e limitada. Seja ∂R a fronteira desta região. A função de Green para o Laplaciano negativo em R é a solução, $g(x,\xi)$, do seguinte problema a valores no contorno.

$$-\nabla^2 g = \delta(x-\xi) \qquad x \text{ e } \xi \text{ em } R \tag{3-22}$$

$$g\Big|_{\partial R} = 0 \quad ; \quad \partial R = \text{fronteira de } R \tag{3-23}$$

onde $\delta(x-\xi)$ é a função "Delta de Dirac" (Ver Apêndice 3).

A função de Green pode ser obtida por diversos métodos [4], e neste trabalho optamos pelo método da expansão parcial em auto funções.

3.3 - Método da Expansão Parcial em Auto Funções

O método consiste em expandir a função de Green em uma das sequências de funções ortogonais obtidas pela separação de variáveis do operador Laplaciano. O sucesso do método depende, justamente, da possibilidade de separar em dois problemas unidimensionais o operador ∇^2, ou seja, que a equação $\nabla^2 u = 0$ possa ser escrita na seguinte forma,

$$\frac{1}{A(s)} L_1 u + \frac{1}{B(t)} L_2 u = 0 \qquad (3\text{-}24)$$

onde L_1 é um operador diferencial que depende apenas da variável s e L_2 depende apenas da variável t.

A solução da equação (3-24) será da forma,

$$u = S(s) \cdot T(t) \qquad (3\text{-}25)$$

A separação de variáveis origina dois problemas de auto valores,

$$L_1 S = \lambda_1 A(s).S \quad ; \quad s_1 < s < s_2 \quad ; \quad S(s_1) = S(s_2) = 0 \qquad (3\text{-}26)$$

$$L_2 T = \lambda_2 B(t).T \quad ; \quad t_1 < t < t_2 \quad ; \quad T(t_1) = T(t_2) = 0 \qquad (3\text{-}27)$$

As soluções das equações acima dão origem a dois conjuntos de funções ortogonais, possivelmente com uma função peso.

A função de Green, então, é expandida em termos de uma das sequências de auto-funções obtida com os problemas(3-26) e (3-27). Podemos obter, deste modo, duas representações distintas para a função de Green.

3.4 - Determinação da Função de Green do Problema

A região para a qual vamos determinar a função de Green é a mostrada na Figura 2, onde apenas é feita uma rotação de $(-\pi/m)$ no eixo θ, para que o eixo $\theta = 0$ fique sobre uma aleta.

Usando o método da separação de variáveis para $\nabla^2 u=0$ em coordenadas polares, para a região definida na Figura 2, sendo $u = R(r^*) \cdot \Theta(\theta)$, temos os seguintes problemas de auto-valores:

$$\frac{d}{dr^*}\left(r^* \frac{dR}{dr^*}\right) = -\frac{\lambda^2 R}{r^*} \quad , \quad R(r_o^*) = R(r_2^*) = 0 \qquad (3\text{-}28)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \cdot\lambda^2\Theta \quad , \quad \Theta(0) = \Theta(\theta_o) = 0 \qquad (3\text{-}29)$$

onde λ são os auto-valores.

Resolvendo os problemas (3-28) e (3-29), teremos a função de Green em termos das auto-funções em r^* ou em θ. Neste trabalho optamos pela expansão em r^*. A equação (3-28) é uma equação de Euler, cuja solução geral é,

$$R(r^*) = A \, . \, \mathrm{sen}(\lambda \ell n r^*) + B \, . \, \cos(\lambda \ell n r^*) \qquad (3\text{-}30)$$

Aplicando as condições, $R(r_o^*) = R(r_2^*) = 0$, em(3-30) temos,

$$R(r_o^*) = A \, . \, \mathrm{sen}\,(\lambda \; \ell n \; r_o^*) + B \, . \, \cos\,(\lambda \; \ell n \; r_o^*) = 0 \qquad (3\text{-}31)$$

$$R(r_2^*) = A \, . \, \mathrm{sen}\,(\lambda \; \ell n \; r_2^*) + B \, . \, \cos\,(\lambda \; \ell n \; r_2^*) = 0 \qquad (3\text{-}32)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,(\lambda \; \ell n \; r_o^*) & \cos\,(\lambda \; \ell n \; r_o^*) \\ \mathrm{sen}\,(\lambda \; \ell n \; r_2^*) & \cos\,(\lambda \; \ell n \; r_2^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}33)$$

Para que o sistema (3-33) tenha solução não trivial, devemos ter

$$\mathrm{sen}\,(\lambda \; \ell n \; r_o^*) . \cos\,(\lambda \; \ell n \; r_2^*) - \mathrm{sen}(\lambda \ell n r_2^*).\cos(\lambda \ell n r_o^*) = 0$$

ou,

$$\mathrm{sen}\,(\lambda \; \ell n \; (r_2^* \,/\, r_o^*) = 0 \qquad (3\text{-}34)$$

onde os auto-valores são,

$$\lambda_n = \frac{n \, \pi}{\ell n \; (r_2^*/r_o^*)} \qquad (3\text{-}35)$$

As constantes A e B tem as seguintes expressões:

$$A = \cos\,(\lambda \; \ell n \; r_o^*) \qquad (3\text{-}36)$$

$$B = - \text{sen}\ (\lambda\ \ell n\ r_o^*) \qquad (3\text{-}37)$$

Substituindo as constantes A e B , a equação (3-30) resulta,

$$R(r^*) = \text{sen}\ (\lambda\ \ell n\ (r^*/r_o^*)) \qquad (3\text{-}38)$$

O conjunto de auto funções em r^* é,

$$R_n(r^*) = \text{sen}\left(\frac{n.\pi}{\ell n(r_2^*/r_o^*)}\ .\ \ell n\ (r^*/r_o^*)\right) \qquad (3\text{-}39)$$

Doravante, denominaremos o conjunto de auto funções de $\{\psi_n\ (r^*)\}_{n=1,2,...}$

A função peso para que a sequência $\{\psi_n\}$ seja ortogonal é, naturalmente, $1/r^*$.

Com

$$r^* = r\ .\ r_2^* \qquad (3\text{-}40)$$

$$r_o^* = r_o\ .\ r_2^* \qquad (3\text{-}41)$$

$$r_2^* = 1\ .\ r_2^* \qquad (3.42)$$

teremos a sequência de auto funções adimensional

$$\psi_n(r) = - \text{sen}\left(\frac{n.\pi}{\ell n\ r_o}\ \ \ell n\ (r/r_o)\right) \qquad (3\text{-}43)$$

Expressando ∇^2 e a função "Delta" em coordenadas polares (ver Apêndice 3), a função de Green para a região já definida, de acordo com (3-22), é a solução do seguinte problema a valores no contorno:

$$- \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\ (r\ \frac{\partial g}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\delta(r-r').\ \delta(\theta-\theta')}{r} \qquad (3\text{-}44)$$

$$r_o \leq r \quad , \quad r' \leq 1$$
$$0 \leq \theta \quad , \quad \theta' \leq \theta_o \qquad (3\text{-}45)$$

$$g|_{r=r_o} = g|_{r=1} = 0$$
$$g|_{\theta=0} = g|_{\theta=\theta_o} = \theta \qquad (3\text{-}46)$$

A função de Green tem então a seguinte expressão:

$$g(r,\theta|r',\theta') = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r',\theta,\theta') \cdot \psi_n(r) \qquad (3\text{-}47)$$

onde os coeficientes $g_n(r',\theta,\theta')$ são os coeficientes de Fourier.

$$g_n(r',\theta,\theta') = \frac{1}{||\psi_n(r)||^2} \int_{r_o}^{1} g(r,\theta|r',\theta').\psi_n(r).\frac{dr}{r} \qquad (3\text{-}48)$$

onde,

$$||\psi_n(r)||^2 = \int_{r_o}^{1} \psi_n(r).\psi_n(r).\frac{dr}{r} = -\frac{1}{2}\,\ell n.r_o$$

Doravante, só escreveremos $g_n(\theta)$, não mencionando a dependência da g_n em r' e θ' .

Seja,

$$\alpha_n = \frac{n.\pi}{\ell n.r_o}$$

e

$$B_n = \frac{2}{\ell n\ r_o} \cdot \text{sen}\left(\frac{n.\pi}{\ell n\ r_o} \cdot \ell n\ (r/r_o)\right)$$

Multiplicando a equação diferencial (3-44) por B_n e integrando de r_o a 1 , temos,

$$\int_{r_o}^{1} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r}\right).B_n.dr - \int_{r_o}^{1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} B_n.dr = \int_{r_o}^{1} \delta(r-r')\delta(\theta-\theta')B_n dr \qquad (3\text{-}50)$$

O primeiro termo do membro a esquerda é integrado por partes, enquanto que, do segundo termo, observando que B_n não é função de θ, obtém-se diretamente a $g_n(\theta)$. O membro a direita é integrado usando-se a propriedade (1) da função "Delta" (Apêndice 3). Resolvendo estas integrais, encontramos,

$$\alpha_n^2.g_n - \frac{\partial^2 g_n}{\partial \theta^2} = \frac{2}{\ell n\ r_o} \operatorname{sen}\left(\frac{n.\pi}{\ell n\ r_o} . \ell n\ (r'/r_o)\right) \delta(\theta-\theta') \qquad (3\text{-}51)$$

Para $\theta \neq \theta'$, temos a equação homogênea de(3.51),

$$\alpha_n^2.g_n - \frac{\partial^2 g_n}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (3\text{-}52)$$

$$g_n|_{\theta=0} = g_n|_{\theta=\theta_o} = 0 \qquad (3\text{-}53)$$

A solução de (3-52) com as condições de contorno (3-53) é, para $\theta < \theta'$,

$$g_n(\theta) = Ae^{\alpha_n\theta} + Be^{-\alpha_n\theta} \qquad (3\text{-}54)$$

Para $\theta < \theta'$ $g_n(0) = 0$, donde,

$$A = -B \qquad (3\text{-}55)$$

Levando (3-55) em (3-54), vem,

$$g_n(\theta) = 2A.\operatorname{senh}(\alpha_n\theta) \quad , \quad \text{para} \quad \theta < \theta' \qquad (3\text{-}56)$$

Para $\theta > \theta'$ a solução de (3-52) é,

$$g_n(\theta) = Ce^{\alpha_n\theta} + De^{-\alpha_n\theta} \qquad (3\text{-}57)$$

Para $\theta > \theta'$ $g_n(\theta_o) = 0$, donde,

$$D = -C\, e^{2\alpha_n\theta_o} \tag{3-58}$$

Levando (3-58) em (3-57), temos,

$$g_n(\theta) = 2.C\, e^{\alpha_n\theta_o} \operatorname{senh}|\alpha_n (\theta-\theta_o) \quad , \quad \text{para} \quad \theta > \theta' \tag{3-59}$$

A determinação da g_n depende da determinação das constantes A e C . Para isto, observemos as seguintes condições que a $g_n(\theta)$ satisfaz (Ver Apêndice 3):

a) Continuidade da $g_n(\theta)$ para $\theta = \theta'$, ou seja,

$$g_n(\theta'_+) - g_n(\theta'_-) = 0 \tag{3-60}$$

onde θ'_+ e θ'_- é a aproximação de θ para θ' pela direita e pela esquerda, respectivamente.

Substituindo nas equações (3-56) e (3-59) θ por θ' e resolvendo (3-60), temos,

$$2\, C\, e^{\alpha_n\theta_o} \operatorname{senh}(\alpha_n (\theta'-\theta_o)) - 2\, A \operatorname{senh}(\alpha_n\theta') = 0 \tag{3-61}$$

b) Salto da derivada da $g_n(\theta)$ para $\theta = \theta'$.

Integrando a equação diferencial (3-51) entre $\theta' - \varepsilon$ e $\theta' + \varepsilon$, vem,

$$\int_{\theta'-\varepsilon}^{\theta'+\varepsilon} \alpha_n^2 g_n - \int_{\theta'-\varepsilon}^{\theta'+\varepsilon} \frac{\partial^2 g_n}{\partial\theta^2} = \int_{\theta'-\varepsilon}^{\theta'+\varepsilon} \frac{2}{\ell n\, r_o} . \operatorname{sen}(\alpha_n . \ell n (r'/r_o))\, \delta(\theta-\theta') \tag{3-62}$$

Observando a condição de continuidade da $g_n(\theta)$ para $\theta = \theta'$ e a propriedade (1) da função "Delta", encontramos, no limite quando ε tende a zero,

$$g'_n(\theta'_+) - g'_n(\theta'_-) = -\frac{2}{\ell n\, r_o} \operatorname{sen}(\alpha_n . \ell n\, (r'/r_o)) \tag{3-63}$$

Derivando com relação a θ, (3-56) e (3-59), substituindo θ por θ' nestas derivadas e resolvendo (3-63), vem,

$$2Ce^{\alpha_n\theta_o}\,\alpha_n.\cosh(\alpha_n(\theta'-\theta_o)) - 2A\alpha_n.\cosh(\alpha_n\theta') =$$

$$= -\frac{2}{\ell n\, r_o} \cdot \operatorname{sen}(\alpha_n.\ell n\,(r'/r_o)) \qquad (3\text{-}64)$$

As equações (3-61) e (3-64) formam o sistema de equações que, resolvido, nos dá o valor de A e C.

$$C = -\frac{1}{n.\pi}\, e^{-\alpha_n\theta_o} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n.\ell n(r'/r_o)).\operatorname{senh}(\alpha_n\theta')}{\operatorname{senh}(\alpha_n\theta_o)} \qquad (3\text{-}65)$$

$$A = -\frac{1}{n.\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n.\ell n(r'/r_o)).\operatorname{senh}(\alpha_n(\theta'-\theta_o))}{\operatorname{senh}(\alpha_n\theta_o)} \qquad (3\text{-}66)$$

Levando A e C em (3-56) e (3-59), respectivamente, temos,

$$g_n(\theta) = \frac{2}{n.\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n.\ell n(r'/r_o)).\operatorname{senh}(\alpha_n(\theta_o-\theta')).\operatorname{senh}(\alpha_n\theta)}{\operatorname{senh}(\alpha_n\theta_o)}$$

$$\text{para } \theta < \theta' \qquad (3\text{-}67)$$

$$g_n(\theta) = \frac{2}{n.\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n.\ell n(r'/r_o)).\operatorname{senh}(\alpha_n(\theta_o-\theta)).\operatorname{senh}(\alpha_n\theta')}{\operatorname{senh}(\alpha_n\theta_o)}$$

$$\text{para } \theta > \theta' \qquad (3\text{-}68)$$

A função de Green, de acordo com (3-47), para $\theta < \theta'$ é,

$$g\,(r,\theta \mid r',\theta') =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\text{senh}(\alpha_n(\theta_o-\theta'))}{\text{senh}(\alpha_n\theta_o)} . \text{senh}(\alpha_n\theta).\psi_n(r).\psi_n(r') \qquad (3\text{-}69)$$

Para $\theta > \theta'$,

$$g(r,\theta|r',\theta') = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\text{senh}(\alpha_n(\theta_o-\theta))}{\text{senh}(\alpha_n\theta_o)} .\text{senh}(\alpha_n\theta').\psi_n(r).\psi_n(r') \qquad (3.70)$$

Para que o eixo $\theta = 0$ seja eixo de simetria do setor de coroa, devemos substituir em (3-69) e (3-70) θ por .... $\theta + \frac{1}{2}\theta_o$ e θ' por $\theta' + \frac{1}{2}\theta_o$.

As equações resultam,

$$g(r,\theta|r',\theta') = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\text{senh}(\alpha_n(\pi/m-\theta'))}{\text{senh}(\alpha_n \frac{2\pi}{m})} . \text{senh}(\alpha_n(\theta+\pi/m))\psi_n(r)\psi_n(r')$$

para $\theta < \theta'$ (3-71)

$$g(r,\theta|r',\theta') = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\text{senh}(\alpha_n(\pi/m-\theta))}{\text{senh}(\alpha_n \frac{2\pi}{m})} . \text{senh}(\alpha_n(\theta'+\pi/m)).\psi_n(r)\psi_n(r')$$

para $\theta > \theta'$ (3-72)

3.5 - Solução do Problema da Velocidade

Para determinação da equação da velocidade, para a região R , consideremos os seguintes problemas:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 g &= \delta(x-\xi) && x,\xi \text{ em } R \\ g &= 0 && x \text{ em } \partial R \end{aligned} \tag{3-73}$$

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= q(x) && x \text{ em } R \\ u &= f && x \text{ em } \partial R \end{aligned} \tag{3-74}$$

onde $q(x)$ é uma função integrável e f é o valor de u prescrito na fronteira.

O problema (3-74) é um problema de Dirichlet e usaremos a função de Green para resolvê-lo.

Multiplicando (3-73) por u, (3-74) por g e subtraindo, temos,

$$g\nabla^2 u - u\nabla^2 g = u\delta(x-\xi) - g.q(x) \tag{3-75}$$

Integrando (3-75) na região e aplicando o 2º Teorema de Green,

$$\int_R u\delta(x-\xi).dx - \int_R g.q(x).dx = \int_{\partial R} (g.\frac{\partial u}{\partial n_x} - u\,\frac{\partial g}{\partial n_x}).dS_x \tag{3-76}$$

onde n_x é a normal a fronteira de R em x .

Observando as condições de fronteira de (3-73),(3-74) e a propriedade (1) da função "Delta", temos,

$$u(\xi) = \int_R g(x|\xi).q(x).dx - \int_{\partial R} f(x).\frac{\partial g(x|\xi)}{\partial n_x}\,.\,dS_x \tag{3-77}$$

Trocando x por ξ na equação (3-77) e usando a simetria da g (ver Apêndice 3), vem,

$$u(x) = \int_R g(x|\xi).q(\xi).d\xi - \int_{\partial R} f(\xi).\frac{\partial g}{\partial n_x}\,.\,dS_\xi \tag{3-78}$$

A equação (3-78) é a solução do problema (3-74).

Usando (3-78) para o nosso problema definido por .. (3-17), vem,

$$x = (r,\theta)$$

$$\xi = (r',\theta')$$

$$u(x) = v_z(r,\theta)$$

$$f = 0 \quad \text{na fronteira}$$

$$q(x) = 1$$

Temos então,

$$v_z(r,\theta) = \int_{r_o}^{1} \int_{-\frac{\theta_o}{2}}^{\frac{\theta_o}{2}} g(r,\theta|r',\theta').r'dr'd\theta' \tag{3-79}$$

Resolvendo a integral, encontramos,

$$v_z(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[1 - \frac{\cosh(\alpha_n\theta)}{\cosh(\alpha_n\frac{\pi}{m})}\right] . \psi_n(r) \tag{3-80}$$

onde

$$A_n = \frac{2}{n\pi} \left(\frac{r_o^2 - \cos n\pi}{4 + \alpha_n^2}\right)$$

A equação acima nos dá o campo de velocidades no setor de coroa mostrado na Figura 2.

A vazão volumétrica através do setor de coroa é dada por

$$Q = \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \int_{r_o}^{1} v_z(r,\theta).rdrd\theta \tag{3-81}$$

A velocidade média é definida por

$$v_m = \frac{Q}{A_c} \tag{3-82}$$

onde

$$A_c = \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \int_{r_o}^{1} r dr d\theta \tag{3-83}$$

Levando (3-83) e (3-81) em (3.82), temos,

$$v_m = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/m} \int_{r_o}^{1} v_z(r,\theta) . r dr d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi/m} \int_{r_o}^{1} r dr d\theta} \tag{3-84}$$

Resolvendo a integral acima encontramos,

$$v_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln r_o} \cdot \frac{\left[\dfrac{r_o^2 - \cos n.\pi}{4 + (\dfrac{n.\pi}{\ln r_o})^2}\right]^2 \left[\dfrac{\ln . r_o}{n.\pi} \operatorname{tgh}(\dfrac{n.\pi}{\ln r_o} \cdot \dfrac{\pi}{m}) - \dfrac{\pi}{m}\right]}{\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{m} (1 - r_o^2)} \tag{3-85}$$

O coeficiente de atrito é obtido por um balanço de forças de pressão e viscosidade aplicado a um volume de controle, conforme Figura 3.

Para escoamento plenamente desenvolvido, a variação da quantidade de movimento linear é nula. Fazendo o balanço de forças no eixo z^* vem,

$$p^* \cdot A_c - (p^* + \frac{dp^*}{dz^*} \delta z^*) . A_c - \zeta \delta_z{}^* L^* = 0 \tag{3-86}$$

onde L^* é o perímetro da secção transversal do volume de controle e A_c é a secção transversal.

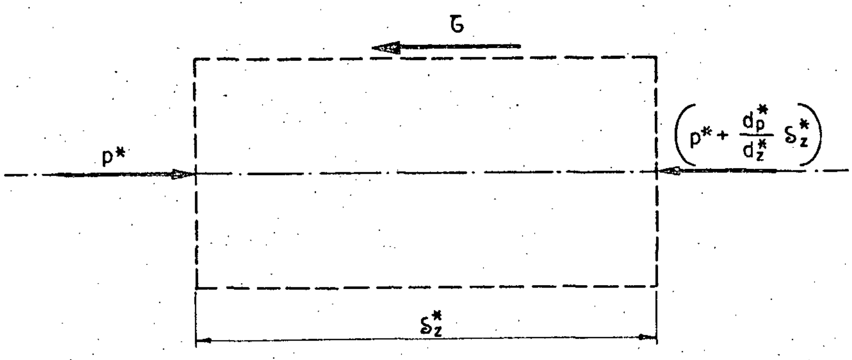


Fig. 3 - Volume de controle.

Definindo o coeficiente de atrito em função da velocidade média [7], vem,

$$\tau_w = f \cdot \rho \cdot \frac{v_m^2}{2} \tag{3-87}$$

onde τ_w é a tensão tangencial na parede.

Combinando (3-87) e (3-86), temos,

$$f = - \frac{\frac{dp^*}{dz^*} \cdot \frac{D_h^*}{4}}{\rho \cdot \frac{v_m^{*2}}{2}} \tag{3-88}$$

onde

$$D_h^* = \frac{4 \text{ . secção transversal}}{\text{perímetro molhado}}$$

Definindo o número de Reynolds com base no diâmetro hidráulico e usando a definição de velocidade adimensional, vem,

$$f \cdot Re_{Dh} = \frac{Dh^2}{2v_m} \tag{3-89}$$

onde

$$Re_{Dh} = \frac{\rho \, v_m^* . Dh^*}{\mu} \qquad (3-90)$$

3.6 - Resultados e Comparações

Os resultados da equação (3-80) estão mostrados em termos de $\frac{v_z}{v_m}$ para diversas situações.

As figuras 4 e 5 mostram as linhas de mesma velocidade para relação de raios de 0,38 com duas aletas e 0,50 com oito aletas.

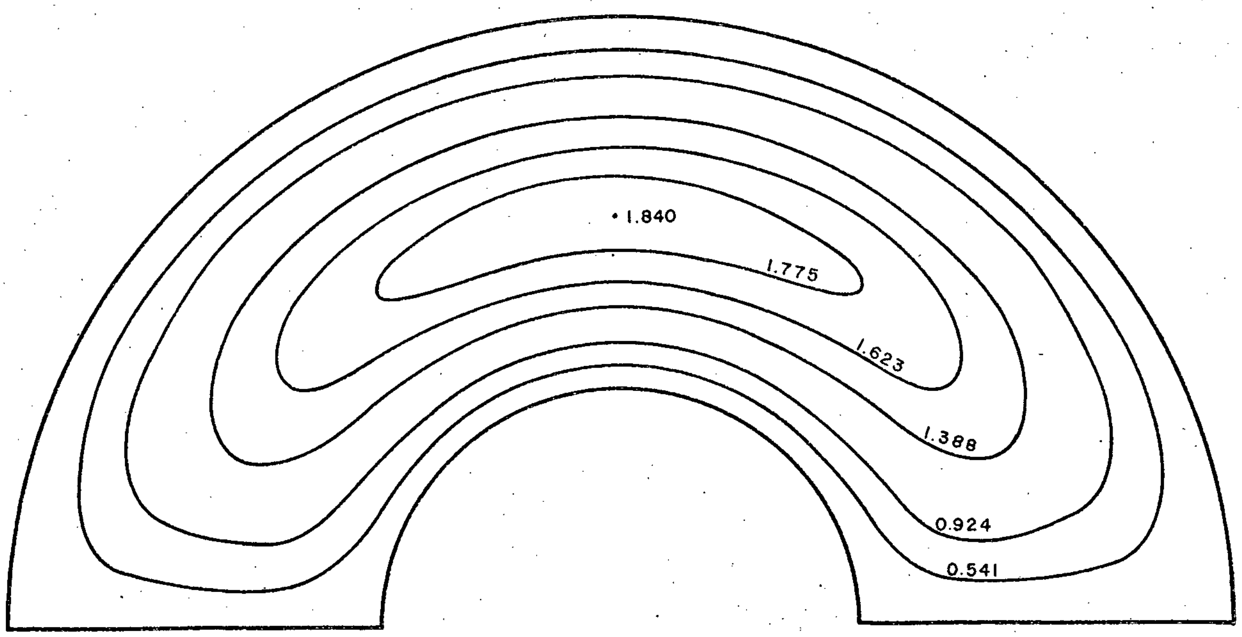


Fig. 4 - Linhas de mesmo $\frac{V_z}{V_m}$ para r_o = 0,38 e 2 aletas.

Estas curvas dão o comportamento da velocidade em função do raio e do ângulo, podendo-se notar a modificação nas linhas de mesma velocidade que, para o tubo não aletado, são circulares.

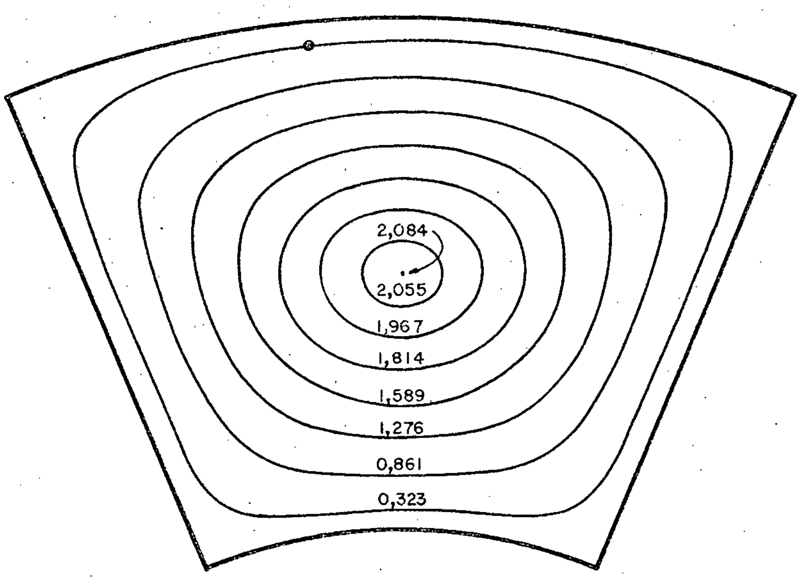


Fig. 5 - Linhas de mesmo $\frac{V_z}{V_m}$ para $r_o = 0,5$ e 8 aletas.

Na Figura 6 estão mostrados os perfis de velocidade, ao longo da linha de centro do setor, para relação de raios de 0,01 com 6, 8, 16 e 32 aletas, que correspondem aos valores de $tg(\frac{\theta_o}{2})$ de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 0,414, 0,198 e 0,098, respectivamente.

Estes resultados estão de acordo com aqueles apresentados na Figura (2b) em [3], onde o campo de velocidade é calculado para um setor circular, ou setor de coroa com relação de raios igual a zero.

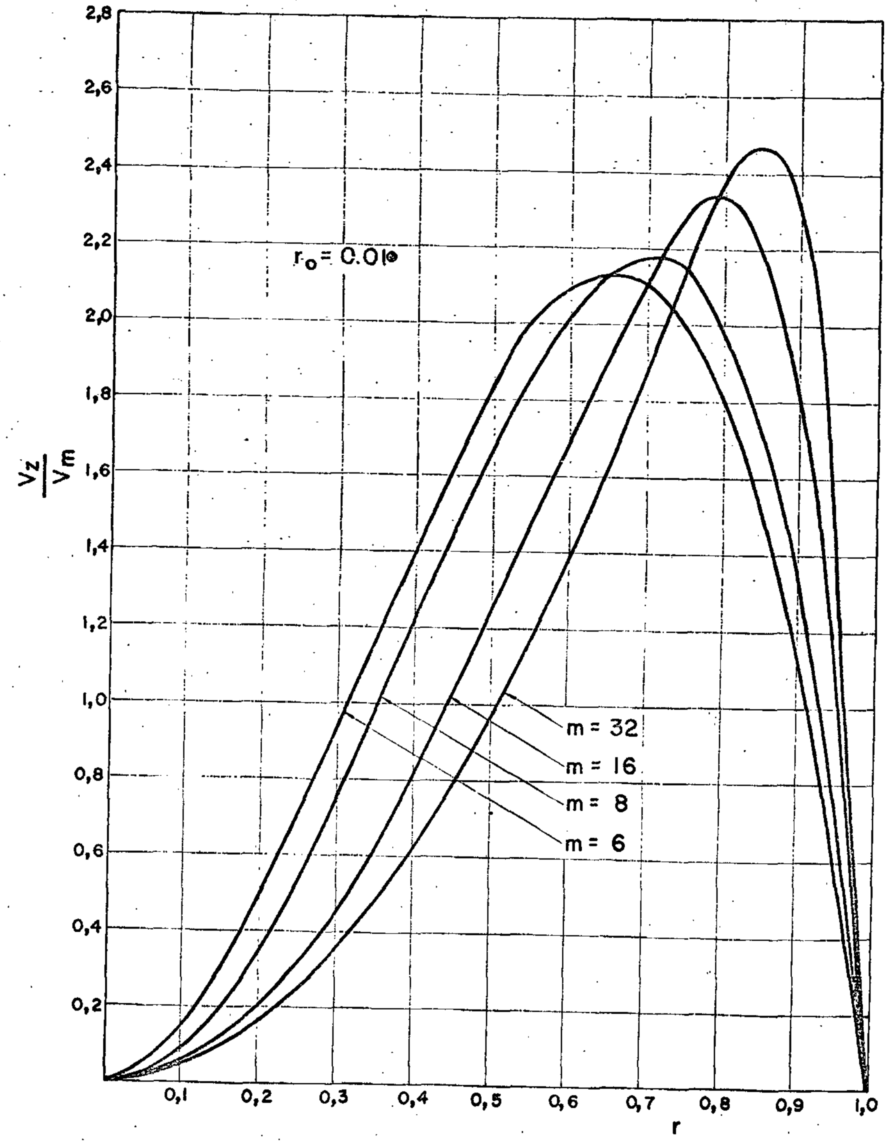


Fig. 6 - Velocidade ao longo da linha de centro do setor para diferentes números de aletas.

Na Figura 7 são apresentados os perfis de velocidade ao longo do raio para $\theta = 0$, $\pm \frac{\theta_o}{6}$ e $\pm \frac{\theta_o}{3}$ para uma relação de raios de 0,01 e 32 aletas. Novamente estes resultados estão em acordo com aqueles mostrados na Figura (2a) em [3]. Para tais resultados foi tomada a relação de raios 0,01 para que fos se possível comparar com os resultados de [3].

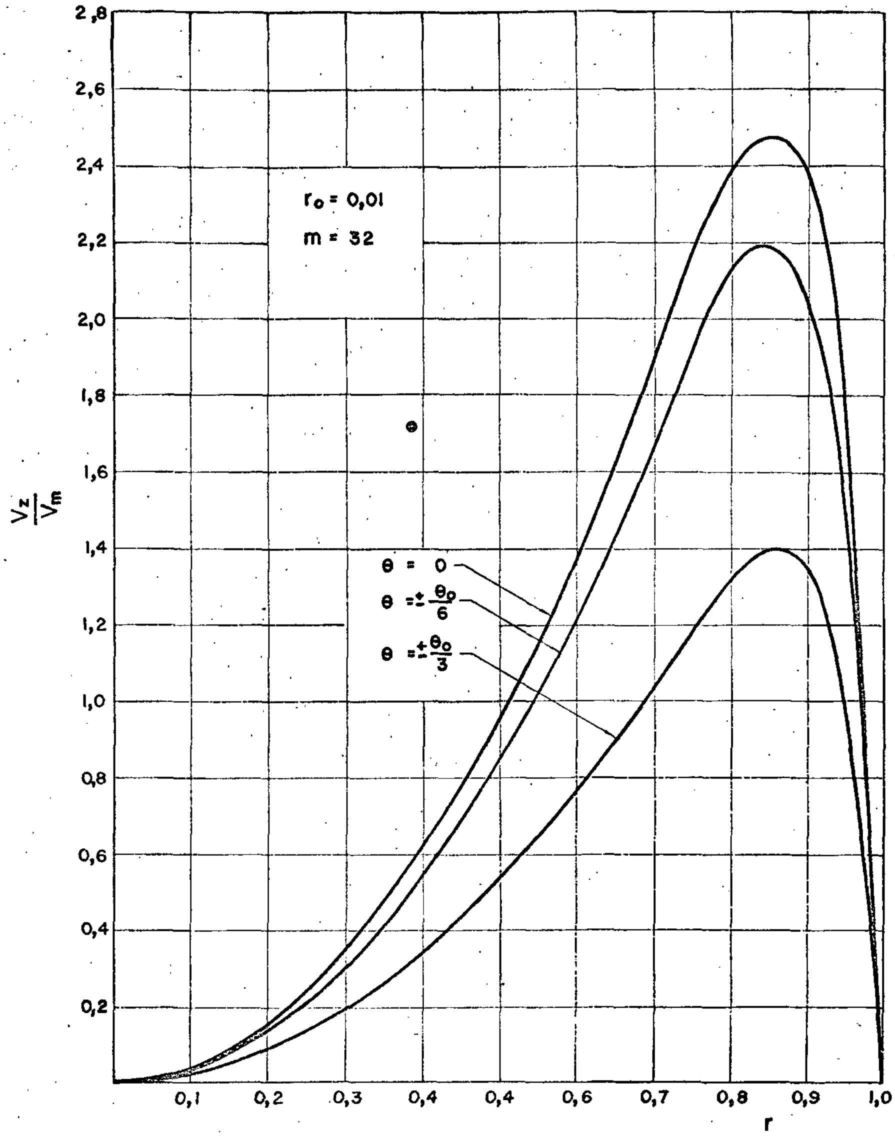


Fig. 7 - Velocidades ao longo do raio para diferentes valores de θ.

Os resultados da equação (3-89) para diversas relações de raios e diversos números de aletas, estão apresentados na Figura 8. O motivo das curvas apresentarem máximos e mínimos é porque o produto $f \cdot Re_{Dh}$ não envolve apenas parâmetros do escoamento, mas também parâmetros geométricos. Como todos os parâmetros variam com o número de aletas, uns podem decrescer e outros crescer, provocando os máximos e os mínimos.

Também no Quadro 2 podemos encontrar os resultados de

(3-89), que podem ser comparados com os do Quadro 1, que são resultados obtidos em [2].

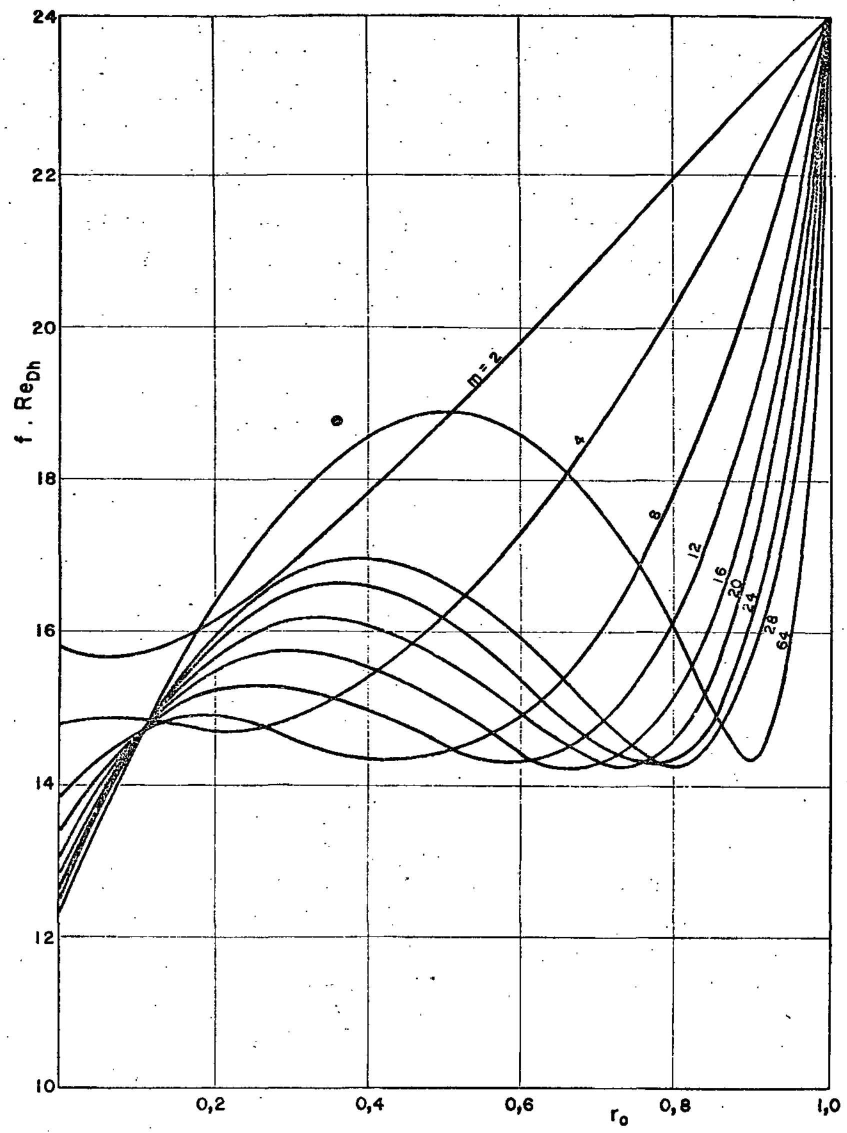


Fig. 8 - Coeficiente de atrito para diversas relações de raios e números de aletas.

O método usado em [2] para resolver o problema de velocidade, foi o da separação de variáveis. Tal método é equivalente a usar a função de Green expandida em auto funções totais. Em [4], está mostrado que a função de Green obtida por expansão parcial é mais convergente do que quando obtida por expansão em auto funções totais.

A série que calcula a velocidade foi truncada quando

$$\left| A_n \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} A_i \right| \cdot 10^{-4} \quad .$$

Na expressão acima, A_n é o enésimo termo da série e $\sum_{i=1}^{n} A_i$ é o valor da série para n termos.

Com os testes que foram realizados no decorrer do trabalho, ficou mostrado que, usando 10^{-4} ou 10^{-5} na desigualdade de acima, os efeitos sobre os parâmetros que nos interessam são insignificantes.

QUADRO I - FATOR DE ATRITO x Nº DE REYNOLDS [2]

Nº DE ALETAS	RELAÇÃO DE RAIOS												
	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,80	0,85	0,90	0,95
6	14,52	14,69	14,65	14,47	14,49	14,88	15,72	16,32	17,04	18,86	19,95	21,18	22,56
9	14,22	14,62	14,94	14,72	14,48	14,33	14,60	14,97	15,52	17,28	18,52	20,05	21,88
12	14,03	14,59	15,21	15,24	14,90	14,47	14,29	14,40	14,71	16,15	17,39	19,07	21,26
18	13,81	14,54	15,57	15,98	15,84	15,30	14,64	14,38	14,26	14,84	15,82	17,51	20,14
24	13,68	14,51	15,79	16,47	16,56	16,13	15,35	14,91	14,52	14,33	14,91	16,36	19,17
36	13,55	14,49	16,04	17,07	17,51	17,37	16,68	16,16	15,56	14,42	14,26	14,98	17,62
72	13,42	14,47	16,34	17,80	18,75	19,14	18,94	18,60	18,08	16,42	15,32	14,35	15,06

QUADRO 2 - FATOR DE ATRITO x NÚMERO DE REYNOLDS													
Nº DE	RELAÇÃO DE RAIOS												
ALETAS	0,001	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,80	0,90	0,95
2	15,76	15,57	15,61	16,09	16,86	17,77	18,76	19,79	20,31	20,84	21,89	22,96	23,49
4	14,77	14,85	14,80	14,68	14,82	15,30	16,12	17,24	17,90	18,62	20,21	22,02	22,99
6	14,18	14,51	14,68	14,64	14,46	14,48	14,87	15,71	16,31	17,03	18,84	21,16	22,52
8	13,79	14,29	14,63	14,83	14,63	14,39	14,39	14,85	15,30	15,92	17,74	20,39	22,07
9	13,65	14,21	14,61	14,93	14,77	14,47	14,32	14,59	14,96	15,51	17,27	20,03	21,85
12	13,33	14,02	14,57	15,20	15,23	14,89	14,46	14,18	14,39	14,70	16,14	19,06	21,85
16	13,05	13,85	14,54	15,46	15,75	15,53	14,99	14,44	14,28	14,28	15,15	17,97	20,47
18	12,96	13,79	14,52	15,55	15,97	15,82	15,29	14,63	14,37	14,25	14,83	17,49	20,12
20	12,88	13,74	14,51	15,64	16,15	16,09	15,58	14,85	14,52	14,29	14,59	17,07	19,78
24	12,75	13,66	14,49	15,77	16,46	16,55	16,12	15,33	14,90	14,51	14,32	16,35	19,16
28	12,66	13,60	14,48	15,87	16,70	16,62	16,59	15,81	15,32	14,82	14,24	15,77	18,59
32	12,59	13,56	14,47	15,95	16,89	17,23	17,00	16,26	15,74	15,18	14,28	15,32	18,07
36		13,52		16,02	17,05	17,49	17,35	18,66	16,15	15,55	14,41	14,97	17,61
72	12,29	13,37	14,42	16,30	17,76	18,71	19,11	18,92	18,58	18,06	16,41	14,34	15,05

As posições, no quadro acima, que se encontram sem valores é simplesmente porque os mesmos não foram calculados.

4 - O PROBLEMA DA TEMPERATURA

4.1 - Equação Diferencial da Temperatura

A equação da energia para fluido Newtoniano com ρ, μ e k constantes, em coordenadas cilíndricas, com geração interna de calor, tem a seguinte forma [6] :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T^*}{\partial t} + v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \theta} + v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = k \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left[\frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + v_r^* \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^{*2}} \right)^2 \right\} +$$

$$+ \mu \left\{ \left[\frac{\partial v_\theta^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} \right]^2 + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} + r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) \right]^2 \right\} +$$

$$+ Q^* \qquad (4-1)$$

Para regime permanente e escoamento unidimensional, a equação (4-1) tem a seguinte forma,

$$\nabla^2 T^* = \frac{\rho c_p}{k} v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \frac{\mu}{k} \left[\left(\frac{1}{r^*} \cdot \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right)^2 \right] - \frac{Q^*}{k} \qquad (4-2)$$

ou

$$\nabla^2 T^* = \frac{\rho c_p}{k} v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \phi^* - \frac{Q^*}{k} \qquad (4-3)$$

onde

$$\phi^* = \frac{\mu}{k} \left[\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right)^2 \right] \qquad (4-4)$$

De acordo com a formulação do problema, Capítulo 2, temos as seguintes condições de contorno:

$$- k \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = q_o^* \qquad r^* = r_o^* \qquad - \pi/m \leq \theta \leq \pi/m \tag{4-5}$$

$$- k \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = -q_2^* \qquad r^* = r_2^* \qquad - \pi/m \leq \theta \leq \pi/m \tag{4-6}$$

$$- k \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} = \pm q_1^* \qquad \theta = \mp \pi/m \qquad r_o^* \leq r^* \leq r_2^* \tag{4-7}$$

Também para a temperatura é interessante colocar o problema em uma forma adimensional. Defina-se, então, as seguintes variáveis adimensionais:

$$T = \frac{(T^* - T_m^*)}{\frac{q_r^* \cdot r_2^*}{k}} \tag{4-8}$$

$$\lambda = \frac{Q^* \cdot r_2^*}{q_r^*} \tag{4-9}$$

onde T é a temperatura adimensional, λ é o parâmetro de geração interna de calor e T_m^* é a temperatura média na seção [1].

Usando (4-8), (4-9) e a definição de velocidade e coordenadas adimensionais (4-3) resulta,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = - C_1 v_z - C_2 \phi - \lambda \tag{4-10}$$

onde,

$$C_1 = \frac{\rho c_p}{\mu} \frac{r_2^{*3}}{q_r^*} \frac{dp^*}{dz^*} \frac{dT^*}{dz^*} \tag{4-11}$$

$$C_2 = \frac{1}{\mu} \frac{r_2^{*3}}{q_r^*} (\frac{dP^*}{dz^*})^2 \tag{4-12}$$

$$\phi \doteq \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)^2\right] \qquad (4\text{-}13)$$

$$\lambda = \frac{Q^* \ . \ r_2^*}{q_r^*} \qquad (4\text{-}14)$$

As condições de contorno adimensionais são do tipo,

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = \beta_o \qquad r = r_o \qquad -\pi/m \leq \theta \leq \pi/m \qquad (4\text{-}15)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = -\beta_2 \qquad r = 1 \qquad -\pi/m \leq \theta \leq \pi/m \qquad (4\text{-}16)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \pm\ \beta_1 \qquad \theta = \mp \frac{\pi}{m} \qquad r_o \leq r \leq 1 \qquad (4\text{-}17)$$

onde,

$$\beta_o = \frac{q_o^*}{q_r^*} = \omega_o \beta_1 \qquad (4\text{-}18)$$

$$\beta_1 = \frac{q_1^*}{q_r^*} = \frac{1}{\frac{m(1-r_o)}{\pi r_o} + \omega_o + \omega_2 \frac{1}{r_o}} \qquad (4\text{-}19)$$

$$\beta_2 = \frac{q_2^*}{q_r^*} = \omega_2 \beta_1 \qquad (4\text{-}20)$$

A equação diferencial (4-10) com as condições de contorno (4-15), (4-16) e (4-17), é um problema de Neumann e é resolvido, neste trabalho, com o uso da função de Green generalizada.

O problema de Neumann, descrito acima, tem solução única, a menos de uma constante, desde que satisfaça a condição de consistência.

$$\int_R \nabla^2 T dA = \int_{\partial R} \frac{\partial T}{\partial n}\ dS \qquad (4\text{-}21)$$

onde R é a região considerada e ∂R a fronteira desta região.

Para o nosso problema, a condição de consistência (4-21) é uma condição auxiliar para a solução.

A equação (4-10) será resolvida para a metade do setor de coroa mostrado na Figura 2, já que existe simetria do campo de temperatura para $\theta = 0$, ou seja, $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \theta$, para $\theta = 0$ e $r_o \leq r \leq 1$.

Aplicando a condição (4-21) para esta região, temos

$$-\int_{o}^{\pi/m}\int_{r_o}^{1}\left(C_1 v_z + C_2\phi + \lambda\right) . r dr d\theta = \int_{o}^{\pi/m} -\frac{\partial T}{\partial r} r_o d\theta + \int_{o}^{\pi/m} \frac{\partial T}{\partial r} 1 . d\theta +$$

$$+ \int_{r_o}^{1} \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} dr \qquad (4\text{-}22)$$

Resolvendo as integrais e fazendo $\phi = 0$, conforme discutido no Capítulo 2, vem,

$$C_1 = -\frac{\beta_o r_o \frac{\pi}{m} + \beta_2 \frac{\pi}{m} + \beta_1 (1-r_o) + \frac{\lambda}{2}\frac{\pi}{m}(1-r_o^2)}{v_m . \frac{1}{2}\frac{\pi}{m}(1-r_o^2)} \qquad (4\text{-}23)$$

4.2 - Função de Green Generalizada

A função de Green usada para resolver o problema de Dirichlet, não pode ser aplicada para obter a solução do problema de Neumann, pois não satisfaz a condição de consistência.

Para resolver este problema, usamos a função de Green generalizada que é a solução do seguinte problema a valores no contorno.

$$\nabla^2 \overline{G} = \delta(x-\xi) - \frac{1}{A} \qquad (4\text{-}24)$$

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial n} = 0 \quad \text{na fronteira,}$$

onde A é a área da região considerada [4].

O problema (4-24) satisfaz a condição de consistência

$$\int_R \nabla^2 \overline{G} dA = \int_{\partial R} \frac{\partial \overline{G}}{\partial n} dS \qquad (4\text{-}25)$$

O método usado para determinar a função de Green generalizada é o da expansão parcial em auto funções, já discutido no Capítulo 3.

Expressando o operador ∇^2 e a função delta em coordenadas polares, a equação (4-24) toma a seguinte forma,

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overline{G}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial \theta^2} = \frac{\delta(r-r').\delta(\theta-\theta')}{r} - \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{\pi}{m}(1-r_o^2)} \qquad (4\text{-}26)$$

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial n} = 0 \qquad \text{na fronteira.}$$

Também para o problema da temperatura, optamos em expandir a função de Green generalizada em auto funções da coordenada r.

Como foi visto anteriormente, o campo de temperatura é simétrico em relação a linha de centro do setor de coroa. A região, para qual vamos determinar a função de Green generalizada, é então, meio setor de coroa, já que, para a linha de centro, $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ e isto constitui uma condição de contorno homogênea do problema de Neumann. Note-se que, para a solução da velocidade, não é interessante fazer isto pois, o problema de Dirichlet tem como condições de contorno valores da função e, se tivéssemos tomado a linha de centro fazendo parte da fronteira da região, não teríamos condição de contorno para esta linha, tornando o problema, um problema misto.

Fazendo exatamente como no Capítulo 3, separando .... $\nabla^2 u = 0$, encontramos dois problemas de auto valores:

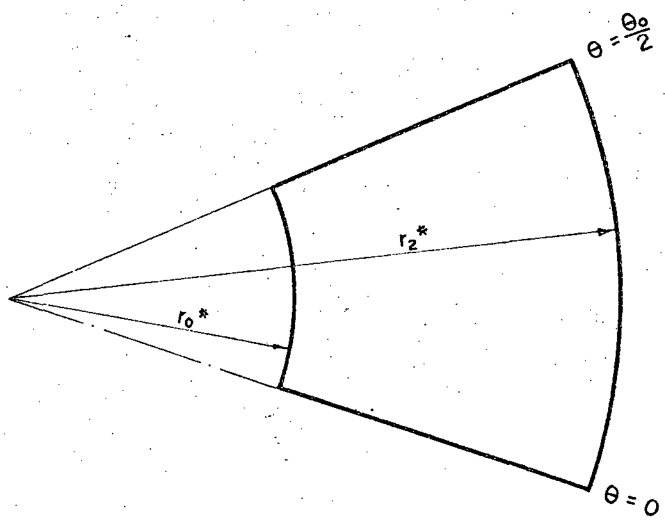
$$\frac{d}{dr^*}\left(r^* \frac{dR^*}{dr^*}\right) = -\frac{\lambda^2 R}{r^*} \tag{4-27}$$

$$\frac{dR}{dr^*} = 0 \qquad \text{para} \quad r^* = r_o^* \quad ; \quad r^* = r_2^*$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \lambda^2\Theta \tag{4-28}$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = 0 \qquad \text{para} \quad \theta = 0 \quad ; \quad \theta = \frac{\theta_o}{2}$$

A região em análise é a mostrada abaixo.



A solução do problema (4-27) nos dá o seguinte conjunto de auto funções em r^*.

$$R_n(r^*) = \phi_n(r^*) = \cos\left(\frac{n.\pi}{\ell n(r_2^*/r_o^*)} \cdot \ell n(r^*/r_o^*)\right) \tag{4-29}$$

onde os auto valores são

$$\lambda_n = \frac{n.\pi}{\ell n(r_2^*/r_o^*)} \tag{4-30}$$

e a função peso é novamente $\frac{1}{r^*}$.

Para $n = 0$ a auto função do problema é a unidade.

Da mesma maneira que foi feita para a função de Green do problema de Dirichlet, a função de Green generalizada será expandida em auto funções parciais. Então,

$$\overline{G}(r^*,\theta|r',\theta') = \sum_{n=o}^{\infty} G_n(r^*,\theta,\theta') \cdot \phi_n(r^*) \qquad (4\text{-}31)$$

onde,

$$G_n(r'^*,\theta,\theta') = \frac{1}{||\phi_n(r^*)||^2} \int_{r_o^*}^{r_2^*} \overline{G}(r^*,\theta,r'^*,\theta')\phi_n(r^*) . \frac{dr^*}{r^*} \qquad (4\text{-}32)$$

onde

$$||\phi_n||^2 = \int_{r_o^*}^{r_2^*} \phi_n(r) . \ \phi_n(r) . \frac{dr}{r} = \frac{\ell n(r_2^*/r_o^*)}{2} \qquad (4\text{-}33)$$

para n=1,2,3...

Em termos adimensionais $G_n(r' ,\theta,\theta')$ resulta,

$$G_n(r',\theta,\theta') = - \frac{2}{\ell n . r_o} \int_{r_o}^{1} \overline{G}(r,\theta|r',\theta') . \phi_n(r) . \frac{dr}{r} \qquad (4\text{-}34)$$

Seja

$$\alpha_n = \frac{n . \pi}{\ell n \ r_o}$$

e

$$c_n = - \frac{2}{\ell n \ r_o} \cos \left(\frac{n . \pi}{\ell n \ r_o} . \ \ell n(r/r_o) \right)$$

A função de Green generalizada é obtida resolvendo - se o problema (4-26).

Multiplicando a equação (4-26) por c_n e integrando de r_o até 1 , temos,

$$- \int_{r_o}^{1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r . \frac{\partial \overline{G}}{\partial r}\right) . c_n . dr - \int_{r_o}^{1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial \theta^2} . c_n . dr =$$

$$= \int_{r_o}^{1} \delta(r-r')\delta(\theta-\theta') . c_n dr - \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\pi}{m} (1-r_o^2)} \int_{r_o}^{1} c_n r dr \qquad (4\text{-}35)$$

Seguindo o mesmo procedimento de integração visto no Capítulo 3, encontramos para $n \neq 0$,

$$\alpha_n^2 . G_n - \frac{\partial^2 G_n}{\partial \theta^2} = - \frac{2}{\ell n\ ro} \cos\left(\frac{n . \pi}{\ell n\ r_o} . \ell n(r/r_o)\right) . \delta(\theta-\theta') \qquad (4\text{-}36)$$

Para $\theta \neq \theta'$ temos a equação homogênea de (4-36),

$$\alpha_n^2 . G_n - \frac{\partial^2 G_n}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (4\text{-}37)$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{para} \quad \theta = 0$$

$$\theta = \frac{\theta_o}{2}$$

A solução de (4-37) é,

$$G_n(\theta) = E . e^{\alpha_n \theta} + F . e^{-\alpha_n \theta} \qquad \text{para} \quad \theta < \theta' \qquad (4\text{-}38)$$

$$G_n(\theta) = H . e^{\alpha_n \theta} + J . e^{-\alpha_n \theta} \qquad \text{para} \quad \theta > \theta' \qquad (4\text{-}39)$$

Com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{dG_n}{d\theta} = 0 \qquad \text{para} \quad \theta = \frac{\theta_o}{2} \qquad (4\text{-}40)$$

$$\frac{dG_n}{d\theta} = 0 \qquad \text{para} \quad \theta = 0 \tag{4-41}$$

Derivando as equações (4-38) e (4-39), vem,

$$G_n'(\theta) = \alpha_n E.e^{\alpha_n \theta} - \alpha_n F.e^{-\alpha_n \theta} \quad , \quad \text{para} \quad \theta < \theta' \tag{4-42}$$

$$G_n'(\theta) = \alpha_n H.e^{\alpha_n \theta} - \alpha_n J.e^{-\alpha_n \theta} \quad , \quad \text{para} \quad \theta > \theta' \tag{4-43}$$

Substituindo a condição (4.41) em (4-42) e (4-40) em (4-43), determinam as seguintes constantes:

$$E = F \tag{4-44}$$

$$J = H.e^{\alpha_n \theta_o} \tag{4-45}$$

Então,

$$G_n(\theta) = 2E.\cosh(\alpha_n \theta) \quad , \quad \text{para} \quad \theta < \theta' \tag{4-46}$$

$$G_n(\theta) = 2H.e^{\alpha_n \frac{\theta_o}{2}} . \cosh(\alpha_n(\theta - \frac{\theta_o}{2})) \quad , \text{para} \ \theta > \theta' \tag{4-47}$$

A determinação da $G_n(\theta)$ depende da determinação de E e H . Exatamente como no problema da velocidade, a função de Green generalizada satisfaz as seguintes condições (Apêndice 3 :

a) Continuidade da G_n para $\theta = \theta'$, ou

$$G_n(\theta'_+) - G_n(\theta'_-) = 0 \tag{4-48}$$

b) Salto da derivada para $\theta = \theta'$.

O salto da derivada é obtido como mostrado em 3.4

$$G_n'(\theta'_+) - G_n'(\theta'_-) = \frac{2}{\ell n \, r_o} . \cos\left(\frac{n.\pi}{\ell n \, r_o} . \ell n(r'/r_o)\right) \tag{4-49}$$

Substituindo θ por θ' em (4-42), (4-43), (4-46) e (4-47), e com as equações resultantes resolvendo (4-48) e (4-49), encontra-se,

$$2H.e^{\alpha_n \frac{\theta_o}{2}} . \cosh\left(\alpha_n\left(\theta' - \frac{\theta_o}{2}\right)\right) - 2E.\cosh(\alpha_n\theta') = 0$$

$$2H.e^{\alpha_n \frac{\theta_o}{2}} . \alpha_n.\mathrm{senh}\left(\alpha_n\left(\theta' - \frac{\theta_o}{2}\right)\right) - 2E.\alpha_n.\mathrm{sen}\,(\alpha_n\theta') =$$

$$= \frac{2}{\ell n\, r_o} \cos\left(\frac{n.\pi}{\ell n\, r_o} . \ell n(r'/r_o)\right) \tag{4-50}$$

Resolvendo o sistema (4-50), encontramos os valores de H e E,

$$H = -\frac{1}{n.\pi}\, e^{-\alpha_n \frac{\theta_o}{2}} . \frac{\cosh(\alpha_n\theta')}{\mathrm{senh}(\alpha_n \frac{\theta_o}{2})} . \phi_n(r') \tag{4-51}$$

$$E = -\frac{1}{n.\pi} . \frac{\cosh\left(\alpha_n\left(\theta' - \frac{\theta_o}{2}\right)\right)}{\mathrm{senh}\left(\alpha_n \frac{\theta_o}{2}\right)} . \phi_n(r') \tag{4-52}$$

Substituindo as constantes em (4-46) e (4-47), vem,

$$G_n(\theta) = -\frac{2}{n.\pi} . \frac{\cosh(\alpha_n\theta)}{\mathrm{senh}(\alpha_n\frac{\theta_o}{2})} .\cosh\left(\alpha_n\left(\theta' - \frac{\theta_o}{2}\right)\right).\phi_n(r') ,$$

$$\text{para} \quad \theta < \theta' \tag{4-53}$$

$$G_n(\theta) = -\frac{2}{n.\pi} . \frac{\cosh(\alpha_n\theta')}{\mathrm{senh}(\alpha_n \frac{\theta_o}{2})} .\cosh\left(\alpha_n\left(\theta - \frac{\theta_o}{2}\right)\right).\phi_n(r') ,$$

$$\text{para} \quad \theta > \theta' \tag{4-54}$$

A solução de (4-26) sem o termo de consistência é,

$$G(r,\theta|r',\theta') = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n.\pi} \frac{\cosh(\alpha_n\theta)}{\operatorname{senh}(\alpha_n\frac{\theta_o}{2})} . \cosh(\alpha_n(\theta' - \frac{\theta_o}{2}))\phi_n(r')\phi_n(r)$$

$$\text{para} \quad \theta < \theta' \qquad (4\text{-}55)$$

$$G(r,\theta|r',\theta') = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n.\pi} \frac{\cosh(\alpha_n\theta')}{\operatorname{senh}(\alpha_n\frac{\theta_o}{2})} . \cosh(\alpha_n(\theta - \frac{\theta_o}{2})).\phi_n(r').\phi_n(r)$$

$$\text{para} \quad \theta > \theta' \qquad (4\text{-}56)$$

Devemos agora resolver o problema (4-26) para que o mesmo satisfaça a condição de consistência.

Seja ϕ_o a auto função

$$||\phi_o||^2 = \int_{r_o}^{1} 1 . \frac{dr}{r} = - \ell n\, r_o \qquad (4\text{-}57)$$

Multiplicando a equação diferencial (4-26) por $-\ell n.r_o$ e integrando de r_o a 1 , temos,

$$-\frac{\partial^2 G_o}{\partial\theta^2} = -\frac{\delta(\theta-\theta')}{\ell n.r_o} + \frac{m}{\pi\cdot\ell n\, r_o} \qquad (4\text{-}58)$$

Para $\theta \neq \theta'$, temos

$$\frac{\partial^2 G_o}{\partial\theta^2} = -\frac{m}{\pi\cdot\ell n\, r_o} \qquad (4\text{-}58a)$$

$$G_o'(0) = G_o'(\frac{\theta_o}{2}) = 0$$

Integrando,

$$G_o' = -\frac{m}{\pi.\ell n\, r_o}\theta + K \quad , \quad \text{para} \quad \theta < \theta' \qquad (4\text{-}59)$$

$$G_o' = -\frac{m}{\pi . \ell n r_o} \theta + \bar{K} \quad , \quad \text{para} \quad \theta > \theta' \qquad (4\text{-}60)$$

Integrando novamente, encontramos,

$$G_o = -\frac{m}{2\pi . \ell n \, r_o} \theta^2 + K\theta + L \quad , \text{ para } \theta < \theta' \qquad (4\text{-}61)$$

$$G_o = -\frac{m}{2\pi . \ell n \, r_o} \theta^2 + \bar{K}\theta + M \quad , \text{ para } \theta > \theta' \qquad (4\text{-}62)$$

Após usar as condições de contorno de (4-59) e a continuidade da G_o em $\theta = \theta'$, vem,

$$G_o = -\frac{m}{2\pi . \ell n \, r_o} \theta^2 + \frac{1}{\ell n \, r_o} \theta' + \bar{K} \quad , \quad \text{para} \quad \theta < \theta' \qquad (4\text{-}63)$$

$$G_o = -\frac{m}{2\pi . \ell n \, r_o} \theta^2 + \frac{1}{\ell n \, r_o} \theta + \bar{K} \quad , \quad \text{para} \quad \theta > \theta' \qquad (4\text{-}64)$$

A condição de salto da derivada de G_o em $\theta = \theta'$ é automaticamente satisfeita.

É possível determinar a constante $\bar{K}$ usando a seguinte condição que simetriza a G_o (Apêndice 3) ,

$$\int_0^{\theta'} G_o d\theta_{\theta<\theta'} + \int_{0'}^{\pi/m} G_o d\theta_{\theta>\theta'} = 0 \qquad (4\text{-}65)$$

Obtemos então as seguintes expressões para a G_o :

$$G_o = -\frac{m}{2\pi . \ell n \, r_o} (\theta^2 + \theta'^2) + \frac{1}{\ell n \, r_o} \theta' - \frac{\pi}{3m . \ell n \, r_o}$$

$$\text{para} \quad \theta < \theta' \qquad (4\text{-}66)$$

$$G_o = -\frac{m}{2\pi . \ell n\ r_o}(\theta^2+\theta'^2) + \frac{1}{\ell n\ r_o} . \theta - \frac{\pi}{3m.\ell n\ r_o}$$

$$\text{para} \quad \theta > \theta' \qquad (4\text{-}67)$$

A função de Green generalizada tem a seguinte expressão final,

$$\overline{G}\ (r,\theta|r',\theta') = G_o(\theta,\theta') + G(r,\theta|r',\theta') \qquad (4\text{-}68)$$

que é composta por dois ramos, para $\theta < \theta'$ e para $\theta > \theta'$.

A função de Green generalizada que será usada para resolver o problema da temperatura é, então,

$$\overline{G}\ (r,\theta|r',\theta') = -\frac{m}{2\pi . \ell n\ r_o}(\theta^2+\theta'^2) + \frac{\theta'}{\ell n\ r_o} - \frac{\pi}{3m.\ell n\ r_o} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n.\pi} \frac{\cosh(\alpha_n \theta)}{\operatorname{senh}(\alpha_n \frac{\theta_o}{2})} . \cosh(\alpha_n(\theta' - \frac{\pi}{m})) . \phi_n(r') . \phi_n(r)$$

$$\text{para} \quad \theta < \theta' \qquad (4\text{-}69)$$

$$\overline{G}\ (r,\theta|r',\theta') = -\frac{m}{2\pi . \ell n\ r_o}(\theta^2+\theta'^2) + \frac{\theta}{\ell n . r_o} - \frac{\pi}{3m.\ell n\ r_o} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n.\pi} \frac{\cosh(\alpha_n \theta')}{\operatorname{senh}(\alpha_n \frac{\theta_o}{2})} . \cosh(\alpha_n(\theta - \frac{\pi}{m})) . \phi_n(r) . \phi_n(r')$$

$$\text{para} \quad \theta > \theta' \qquad (4\text{-}70)$$

Podemos notar que de (4-69) para obter (4-70), basta trocar θ por θ' , e vice-versa.

4.3 - Solução do Problema da Temperatura

Para determinação da equação da temperatura na região considerada, vejamos os seguintes problemas a valores no contorno (Problema de Neumann),

$$- \nabla^2 \overline{G} = \delta(x-\xi) - \frac{1}{A} \qquad x \text{ e } \xi \text{ em } R$$

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial n} = 0 \qquad \text{em } \partial R \tag{4-71}$$

$$- \nabla^2 T = q(x) \qquad x \text{ em } R$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = f_i \qquad \text{em } \partial R \tag{4-72}$$

Multiplicando (4-71) por T, (4-72) por $\overline{G}$, subtraindo e integrando na região, temos,

$$\int_R (\overline{G}\nabla^2 T - T\nabla^2\overline{G}).dx = \int_R T.\delta(x-\xi).dx - \frac{1}{A}\int_R T.dx - \int_R \overline{G}.q(x).dx \tag{4-73}$$

Pelo segundo teorema de Green e, observando a propriedade de integração da função delta, vem,

$$\int_{\partial R} \overline{G}\frac{\partial T}{\partial n} dS_x - \int_{\partial R} T\frac{\partial \overline{G}}{\partial n} dS_x = T(\xi) - \int_R \overline{G}.q(x).dx - \frac{1}{A}\int_R T.dx \tag{4-74}$$

Observando que $\frac{\partial \overline{G}}{\partial n} = 0$ em ∂R, temos,

$$T(\xi) = \int_R \overline{G}\,\frac{\partial T}{\partial n}\,.\,dS_x + \int_R \overline{G}.q(x).dx + \frac{1}{A}\int_R T.dx \qquad (4\text{-}75)$$

Para o nosso caso, pela definição de temperatura adimensional,

$$\int_R T.dx = 0$$

Trocando os índices, usando a propriedade de simetria da $\overline{G}$ e sabendo que para o nosso caso $x = (r,\theta), \xi = (r',\theta')$ e $q(x) = C_1 v_z\,(r,\theta) + \lambda$, com o uso das equações (4-15), (4-18) e (4-17), vem,

$$T(r,\theta) = \int_0^{\pi/m} \overline{G}(r,\theta|r_o,\theta').\beta_o r_o d\theta' + \int_0^{\pi/m} \overline{G}(r,\theta|1,\theta').\beta_2 d\theta' +$$

$$+ \int_{r_o}^{1} \overline{G}(r,\theta|r',\tfrac{\pi}{m}).\beta_1 dr' + \int_0^{\pi/m}\int_{r_o}^{1} \overline{G}(r,\theta|r',\theta)(C_1 v_z+\lambda)r'dr'd\theta'$$

$$+ \quad C \qquad (4\text{-}76)$$

Usando a condição de consistência do problema e resolvendo as integrais, encontramos a equação que nos dá a distribuição de temperatura no setor de coroa.

$$T(r,\theta) = \left[\beta_o r_o + \beta_2 + \frac{\lambda(1-r_o^2)}{2}\right]\left[\frac{\theta^2}{2.\ell n\, r_o} + \frac{1}{3.\ell n\, r_o}\,.\left(\frac{\pi}{m}\right)^2\right] +$$

$$\frac{\beta_1}{2}\,\frac{\pi(1-r_o)}{m.\ell n\, r_o} - \frac{2.\beta_o r_o \ell n.r_o}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left[\alpha_n.\ell n(r/r_o)\right] \quad -$$

$$- \frac{2\,\beta_2 \ln . r_o}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left[\alpha_n . \ln(r/r_o)\right] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left[\alpha_n . \ln(r/r_o)\right] \left[A_{1n} \frac{\cosh(\alpha_n \theta)}{\operatorname{senh}(\alpha_n \frac{\pi}{m})} + A_{2n} \right] + B_1 +$$

$$+ C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\cosh(\alpha_n \theta)}{\cosh(\alpha_n \frac{\pi}{m})} . A_{3n} - \frac{C_1}{(\ln r_o)^2} . \left[\theta^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \right] . B_2 -$$

$$- C_1 \sum_{n=1}^{\infty} A_{4n} . \cos\left[\alpha_n . \ln(r/r_o)\right] \left[\frac{\ln . r_o}{2n\pi} . \frac{\cosh(\alpha_n \theta)}{\cosh(\alpha_n \frac{\pi}{m})} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2m} \frac{\cosh(\alpha_n \theta)}{\operatorname{senh}(\alpha_n \frac{\pi}{m})} - \frac{\theta}{2} . \frac{\operatorname{senh}(\alpha_n \theta)}{\cosh(\alpha_n \frac{\pi}{m})} - \frac{\ln r_o}{n . \pi} \right] -$$

$$- C_1 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \cos\left[\alpha_k . \ln(r/r_o)\right] \left[\frac{k}{(k^2 - n^2)} . \frac{\cosh(\alpha_n \theta)}{\cosh(\alpha_n \frac{\pi}{m})} - \right.$$

$$\left. - \frac{n}{(k^2 - n^2)} . \operatorname{tgh}\left(\alpha_n . \frac{\pi}{m}\right) . \frac{\cosh(\alpha_k \theta)}{\operatorname{senh}(\alpha_k \frac{\pi}{m})} - \frac{1}{k} \right] + C \qquad (4\text{-}77)$$

onde

$$\alpha_n = \frac{n\,\pi}{\ln r_o} \qquad (4\text{-}77a)$$

$$\alpha_k = \frac{k\,\pi}{\ln r_o} \qquad (4\text{-}77b)$$

$$A_{1n} = \frac{2\beta_1}{\pi} \cdot \left[\frac{\cos n\pi - r_o}{1 + (\alpha_n)^2}\right] \quad (4\text{-}77c)$$

$$A_{2n} = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \left[\frac{2(\cos n\pi - r_o^2)}{4 + (\alpha_n)^2}\right] \quad (4\text{-}77d)$$

$$A_{3n} = \frac{2}{\pi^2} \cdot \left[\frac{r_o^2 - \cos n\pi}{4 + (\alpha_n)^2}\right]^2 \quad (4\text{-}77e)$$

$$B_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r_o^2 - \cos n\pi}{4 + (\alpha_n)^2}\right]^2 \quad (4\text{-}77f)$$

$$B_1 = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r_o^2 - \cos n\pi}{4 + (\alpha_n)^2}\right]^2 \left[\operatorname{tgh}(\alpha_n \frac{\pi}{m})\left(\frac{1}{m.n.\ln r_o} - \frac{2m.\ln r_o}{n^3\pi^4}\right)\right] \quad (4\text{-}77g)$$

$$A_{4n} = \frac{4\alpha_n}{(n\pi)^2} \cdot \frac{(r_o^2 - \cos n\pi)\,(r_o^2 - \cos 2n\pi)}{\left[4 + (\alpha_n)^2\right]\left[(4 + (2\alpha_n)^2\right]} \quad (4\text{-}77h)$$

$$A_{nk} = \frac{2}{nk.\pi^2} \cdot \left[\frac{r_o^2 - \cos n\pi}{4 + (\alpha_n)^2}\right] \cdot \left[\frac{(n+k)(r_o^2 - \cos(n+k)\pi)}{4 + \alpha_{nk}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-k)\,(r_o^2 - \cos(n-k)\pi)}{\overline{\alpha_{nk}}}\right] \quad (4\text{-}77i)$$

$$\alpha_{nk} = \left[\frac{(n+k)\pi}{\ln r_o}\right]^2 \quad (4\text{-}77j)$$

$$\overline{\alpha_{nk}} = \left[\frac{(n-k)\pi}{\ln r_o}\right]^2 \quad (4\text{-}77k)$$

Na equação (4-77), fazendo $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_o}$ e $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1}$, deviamos encontrar $-\beta_o$ e β_2 respectivamente, que são os fluxos de calor no tubo interno e externo.

Entretanto, estas derivadas são iguais a zero. Isto ocorre porque as derivadas das expansões,

$$- \frac{2\ \beta_o r_o\ \ell n\ r_o}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\alpha_n\ \ell n(r/r_o)\right) \tag{4-78}$$

$$- \frac{2\ \beta_2\ \ell n\ r_o}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos\left(\alpha_n\ \ell n(r/r_o)\right) \tag{4-79}$$

que são responsáveis pelo fluxo de calor não convergem na fronteira. Felizmente, as equações (4-78) e (4-79), são as expansões em série de Fourier das seguintes funções, respectivamente, [14]

$$- \beta_o\ r_o\ \ell n\ r_o \left[\frac{1}{3} + \frac{\ell n(r/r_o)}{\ell n\ r_o} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\ell n(r/r_o))^2}{(\ell n\ r_o)^2}\right] \tag{4-80}$$

e

$$- \beta_2\ \ell n\ r_o \left[\frac{1}{3} - \frac{\ell n\ r}{\ell n\ r_o} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\ell n\ r)^2}{(\ell n\ r_o)^2}\right] \tag{4-81}$$

Derivando as expressões acima e fazendo $r = r_o$ na (4-80) e $r = 1$ na (4-81), vamos encontrar, respectivamente, $-\beta_o$ e β_2.

Os valores de temperatura foram calculados substituindo-se na equação (4-77), (4-78) por (4-80) e (4-79) por (4-81).

A fim de calcular os números de Nusselt do problema, necessitamos conhecer a temperatura de mistura e a temperatura média na superfície de troca de calor.

A temperatura de mistura, também referida como temperatura média de fluxo ou "temperatura de copo", em muitos textos, tem a seguinte expressão:

$$T_b^* = \frac{\int_0^{\pi/m} \int_{r_o^*}^{r_2^*} T^*(r^*,\theta).v_z^*(r^*,\theta).r^* dr^* d\theta}{\int_0^{\pi/m} \int_{r_o^*}^{r_2^*} v_z^*(r^*,\theta).r^* dr^* d\theta} \qquad (4\text{-}82)$$

Usando as equações (3-15) , (3-16) e (4-8) , podemos expressar a temperatura de mistura adimensionalmente.

$$T_b = \frac{\int_0^{\pi/m} \int_{r_o}^{1} T(r,\theta).v_z(r,\theta).r dr d\theta}{\int_0^{\pi/m} \int_{r_o}^{1} v_z(r,\theta).r dr d\theta} \qquad (4\text{-}83)$$

ou

$$T_b = \frac{\int_0^{\pi/m} \int_{r_o}^{1} T(r,\theta).v_z(r,\theta).r dr d\theta}{v_m \frac{1}{2} \frac{\pi}{m} (1-r_o^2)} \qquad (4\text{-}84)$$

A equação acima não foi resolvida analiticamente dada a complexidade do produto $T(r,\theta).v_z(r,\theta)$. O método de Simpson bi-dimensional foi usado para integrar numericamente (4-84). Breve discussão do procedimento usado pode ser visto no Apêndice 2.

A temperatura média na interface de troca de calor é,

$$T_{sm}^* = \frac{\int_{\Gamma^*} T^*(r^*,\theta).dS^*}{\int_{\Gamma^*} dS^*} \qquad (4\text{-}85)$$

onde Γ^* é o perímetro de troca de calor, ou muitas vezes referido como perímetro aquecido.

De uma forma adimensional temos,

$$T_{sm} = \frac{\int_\Gamma T(r,\theta).dS}{\int_\Gamma dS} \qquad (4\text{-}85a)$$

4.4 - Resultados e Comparações

Os resultados da equação (4-77) estão apresentados em termos de $\frac{T - Tb}{T_{sm}-Tb}$ para diversas situações.

Nas Figuras 9 e 10 estão mostradas as isotermas para $r_o = 0{,}38$ com duas aletas e $r_o = 0{,}50$ com oito aletas. Podemos ver, nestas figuras, que a temperatura decresce da parede do tubo interno para a do tubo externo e das aletas para o centro do tubo, como era de se esperar, pois os fluxos de calor estão na parede interna e nas aletas.(*)

Em uma análise de transferência de calor, os resultados mais significativos a serem apresentados são aqueles referentes ao coeficiente de troca de calor. Neste trabalho, como já foi comentado, é feita uma comparação entre os números de Nusselt do tubo aletado e não aletado. Para que isto seja possível, devemos definir o coeficiente de troca térmica nas mesmas bases em que ele é definido para o tubo não aletado.

Sendo Q_s^* o calor trocado pelo tubo sem aletas, definiu-se o coeficiente de troca de calor da seguinte maneira:

$$h = \frac{Q_s^*}{\pi \, D_o^* \, (T_{sm}^* - T_b^*)} \qquad (4\text{-}86)$$

(*) - Todos os resultados aqui apresentados, a menos de especificação contrária, são para $\beta_o = 2\beta_1$ e $\beta_2 = 0$.

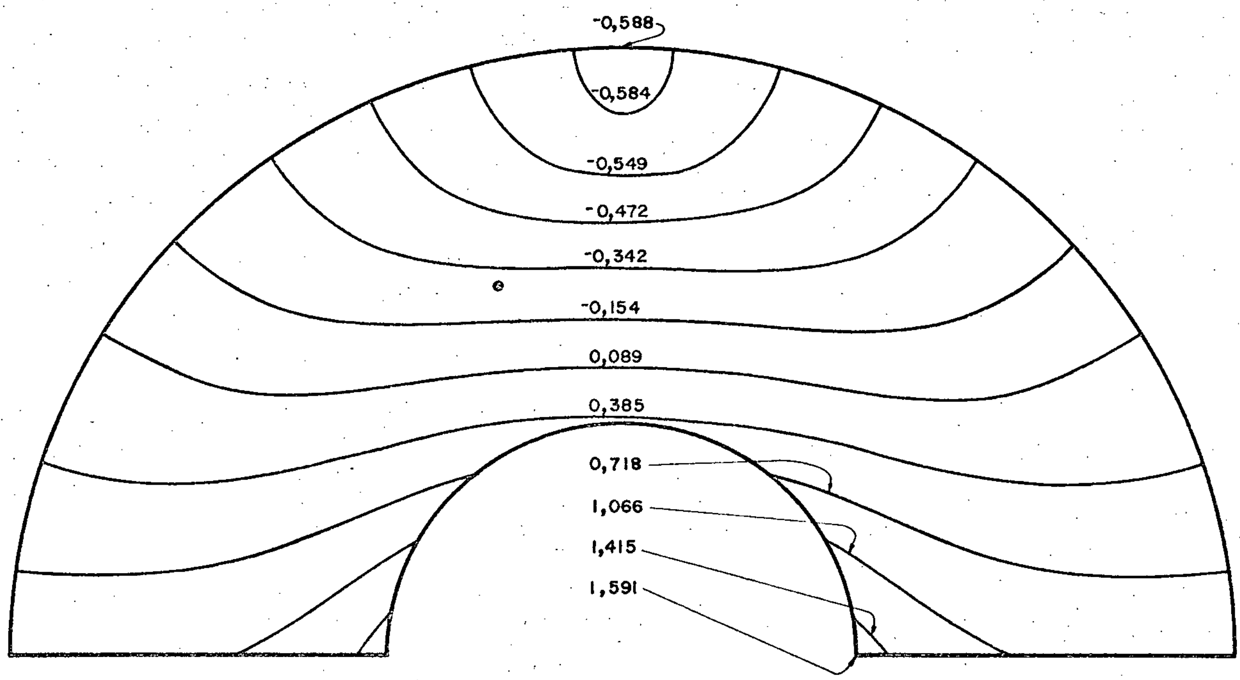


Fig. 9 - Isotermas para r_o = 0,38 e 2 aletas.

No Quadro 4 estão apresentados os valores do número de Nusselt para o duplo tubo não aletado, calculados usando o coeficiente de troca térmica como definido em (4-89) e o diâmetro hidráulico [7].

Usando as mesmas bases de definição vem,

$$Nu_{Dh} = \frac{h \cdot Dh^*}{k} \qquad (4-87)$$

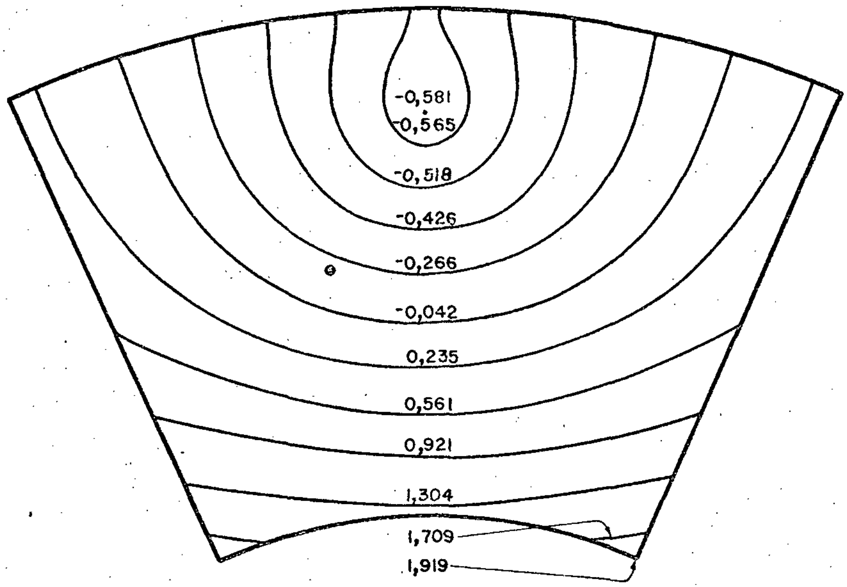


Fig. 10 - Isotermas para $r_o = 0,5$ e 8 aletas.

Usando (4-86), temos

$$Nu_{Dh} = \frac{Q_s^* \cdot D_h^*}{k \; \pi \; D_o^* \; (T_{sm}^* - T_b^*)} \tag{4-88}$$

Com a definição de temperatura adimensional e sabendo que

$$Q_s^* = q_r^* \; \pi \; D_o^* \; ,$$

$$Nu_{Dh} = \frac{q_r^* \, \pi \, D_o^* \, D_h^*}{k \, \pi \, D_o^* . \frac{q_r^* \, r_2^*}{k} (T_{sm} - T_b)} \qquad (4\text{-}89)$$

Como $D_h = \dfrac{D_h^*}{r_2^*}$,

$$Nu_{Dh} = \frac{D_h}{T_{sm} - T_b} \qquad (4\text{-}90)$$

Os resultados da equação (4-90), para relações de raios na faixa de $0,1 \div 0,9$ com número de aletas de 2 a 32, estão na Figura 11.

Conforme podemos notar, para número de aletas até 32 existem números de Nusselt máximos para relações de raios até 0,6. Para relações acima deste valor, os máximos são atingidos com número de aletas superior a 32, cujos valores não foram plotados , pois não é de interesse prático o uso de grande número de aletas em um duplo tubo, devido a grande perda de carga.

O máximo Nusselt não significa que com este número de aletas exista a melhor condição de troca térmica, justamente porque a relação (4-90) não envolve apenas a diferença $(T_{sm} - T_b)$, mas também o diâmetro hidráulico que varia com o número de aletas.

Uma boa relação, que mostre claramente a melhoria das condições de troca de calor em relação ao tubo não aletado é aquela que envolve apenas $T_{sm} - T_b$. Usando a mesma definição , (4-86), para o h, e definindo o Nusselt com base no diâmetro externo teremos esta relação, pois o diâmetro externo é constante e igual a 2.

$$Nu_{D2} = \frac{Q_s^*}{\pi \, D_o^* \, (T_{sm}^* - T_b^*)} \cdot \frac{D_2^*}{k} \qquad (4\text{-}91)$$

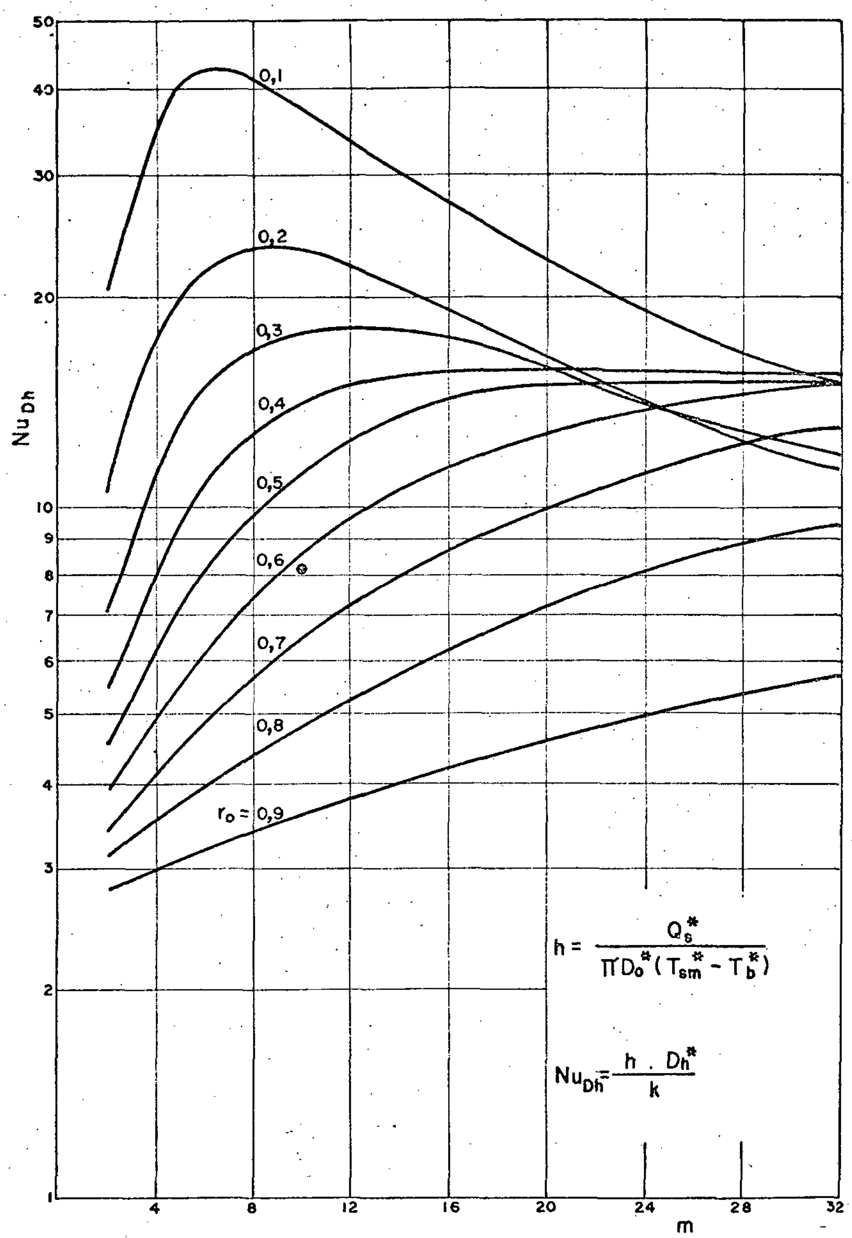


Fig. 11 – Número de NUSSELT baseado no diâmetro hidráulico.

Usando a definição de Q_s^* e das grandezas adimensionais,

$$Nu_{D2} = \frac{2.}{T_{sm} - T_b} \tag{4-92}$$

Na Figura 12 os resultados estão apresentados em termos de $\dfrac{Nu_{D2}}{Nu_L}$, onde Nu_L é o número de Nusselt do tubo não aletado baseado no h, como definido em (4-86) e no D_2^*. Desta ma neira, os valores lidos no gráfico representam o aumento obtido nas condições de troca térmica em relação ao tubo sem aletas.

Podemos notar que para a faixa de relações de raios de 0,4 a 0,7 , que é a mais usada, colocando-se 8 aletas temos uma melhoria nas condições de troca de calor de 150% , para relação 0,7 , até 400% para 0,4 .

Para esta mesma faixa, colocando-se 20 aletas temos melhorias de 220%, para 0,7 , até 900% para 0,4 . Aumentando ainda mais o número de aletas, a performance térmica do duplo tubo continua a aumentar, entretanto, teremos sempre maior potência de bombeamento.

Informações importantes ainda podemos obter da Figura 12. Para a relação de raios de 0,4 o uso de duas aletas não provoca aumento no coeficiente de troca térmica, e para a relação de raios 0,5 o decréscimo no coeficiente de troca de calor ocorre com o uso de aletas em número inferior a 2. Para 0,6 4 aletas recupera o valor do coeficiente para tubo não aletado.

Usando as relações de raios de 0,8 e 0,9 , necessitamos colocar 8 e 16 aletas, respectivamente, para recuperar as condições que o tubo liso oferece. É interessante notar que este efeito é acentuado quando a relação de raios é grande ou , em outros termos, quando as aletas são curtas. Para a relação de raios 0,2 o aumento de área de troca de calor com duas aletas, é de 260%; para 0,5 é 63% e, apenas 15% , para a relação de raios 0,8 .

A explicação, para o decréscimo do coeficiente de troca de calor para certas relações de raios, encontra apoio na hipótese de que a modificação sofrida pelo campo de velocidade, com o uso de poucas aletas, não é compensada, suficientemente , pelo aumento de área de troca de calor.

Apenas para deixar mais completa a apresentação dos resultados, pois as Figuras 11 e 12 já trazem todas as informações necessárias, na Figura 13 estão plotados os números de Nusselt com base no coeficiente de transferência de calor calculado para toda área de troca térmica, ou seja,

$$\overline{h} = \frac{Q_s^*}{(\pi D_o^* + 2m\ell^*)(T_{sm}^* - T_b^*)} \qquad (4\text{-}93)$$

$$\overline{Nu_{D2}} = \frac{\overline{h} \cdot D_2^*}{k} \qquad (4\text{-}94)$$

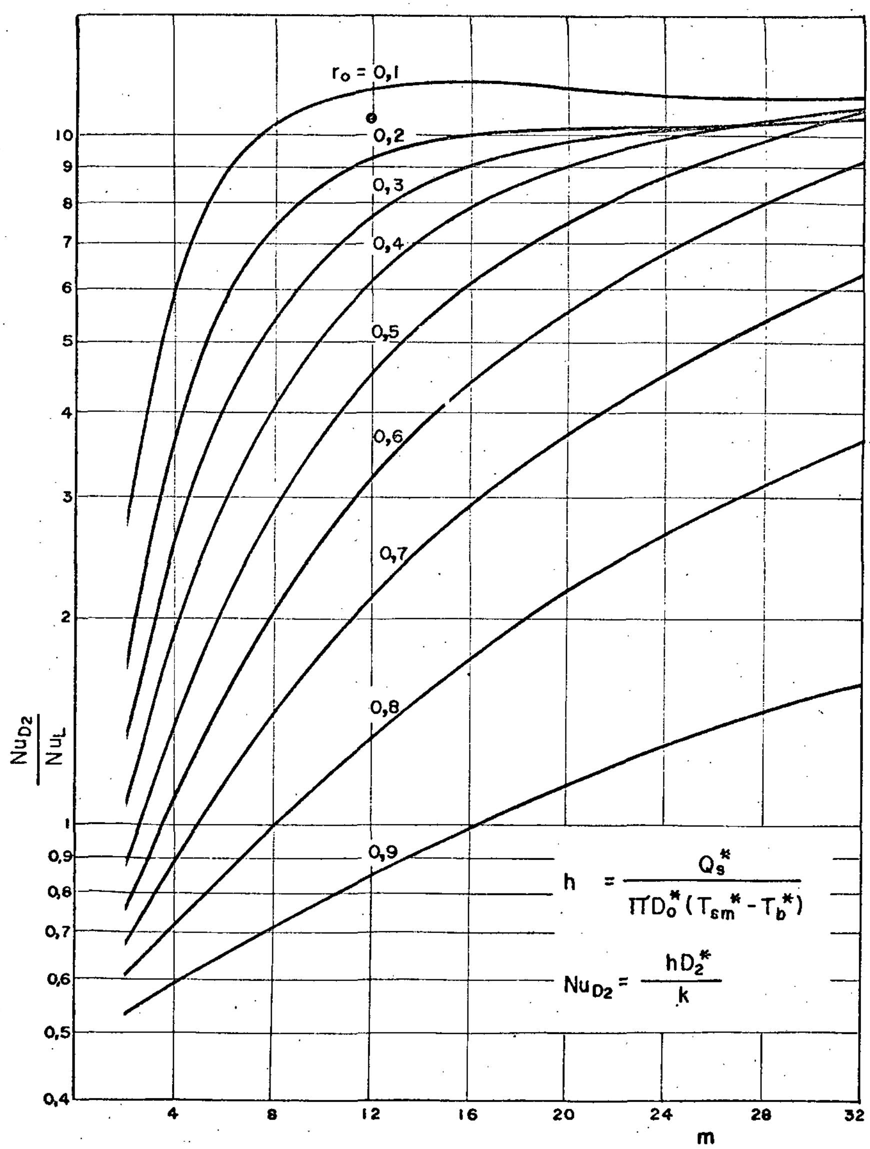


Fig. 12 – Relação entre números de NUSSELT do duplo tubo aletado e não aletado.

Usando as mesmas equações que em (4-91), temos,

$$\overline{Nu_{D2}} = \frac{2}{1 + \frac{m(1-r_o)}{\pi\, r_o}\,(T_{sm} - T_b)} \tag{4-95}$$

Os valores de Nu_{Dh} , Nu_{D2} e $\overline{Nu_{D2}}$ podem ser vistos também nos quadros 5, 6 e 3, respectivamente.

Em [3] está resolvido o problema de transferência de calor para o setor circular. As condições de contorno são de fluxo de calor por unidade de tempo e área constante e igual em toda a periferia. O nosso problema coincide com aquele fazendo $\beta_o = \beta_2 = \beta_1$ e relação de raios igual a zero. Entretanto, esta relação de raios é uma singularidade em nossas equações. Para contornar éste problema, calculamos os valores do número de Nusselt para relação de raios de 0,1 e 0,05 e, por extrapolação, determinamos os valores para a relação de raios nula. Os valores do número de Nusselt obtidos em [3] e neste trabalho estão na Figura 14, em função do número de aletas. Na mesma figura, estão apresentados os pontos usados para extrapolação.

Resultados para o setor circular também foram obtidos em [1], mas não são apresentados devido a dificuldade de leitura' dos valores mostrados no gráfico daquele trabalho.

Ainda para a relação de raios de 0,05, com $\beta_o=\beta_2=\beta_1$, na Figura 15 estão plotados os perfis de temperatura ao longo do raio para diversos ângulos e 6 aletas.

O uso de uma fonte de calor na massa de fluido está representada por λ em nosso trabalho. Tal geração de calor tem grande efeito sobre o número de Nusselt, fazendo-o decrescer consideravelmente.

Como podemos verificar na Figura 16, para $r_o = 0,5$ e 4 aletas, o número de Nusselt baseado no diâmetro hidráulico apresenta um decréscimo de 5,3 vezes com $\lambda = 8,0$. Para $r_o = 0,4$ com 2 aletas, o decréscimo é de 6,22 vezes, também com $\lambda = 8,0$. A fonte de calor causa aumento na diferença $(T^*_{sm} - T^*_b)$, tornando a transferência de calor mais difícil.

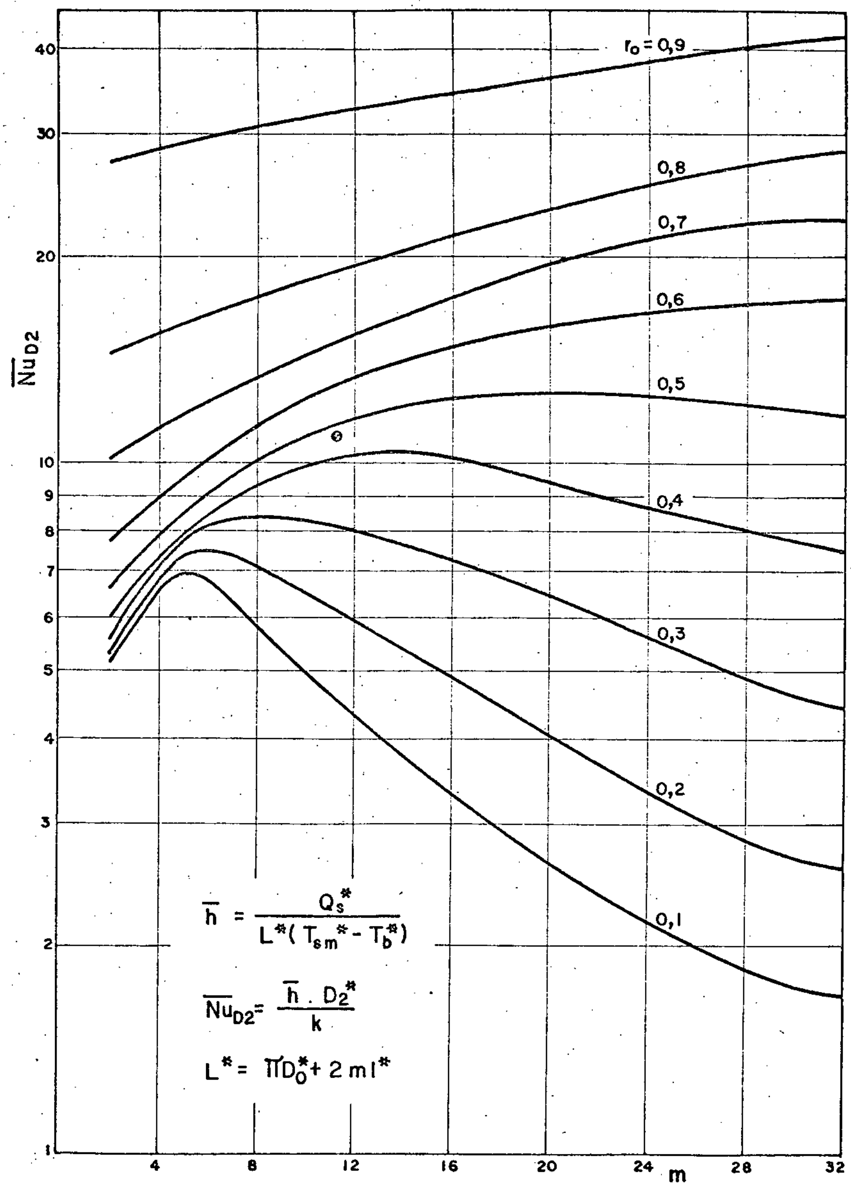


Fig. 13 - Número de NUSSELT baseado no diâmetro externo.

O número de termos usados nas séries da temperatura , foram determinados fazendo-se testes com diversos valores, até que o número de Nusselt não mais variasse significativamente. Observou-se que para pequenas relações de raios e grande número de aletas, a convergência é mais difícil.

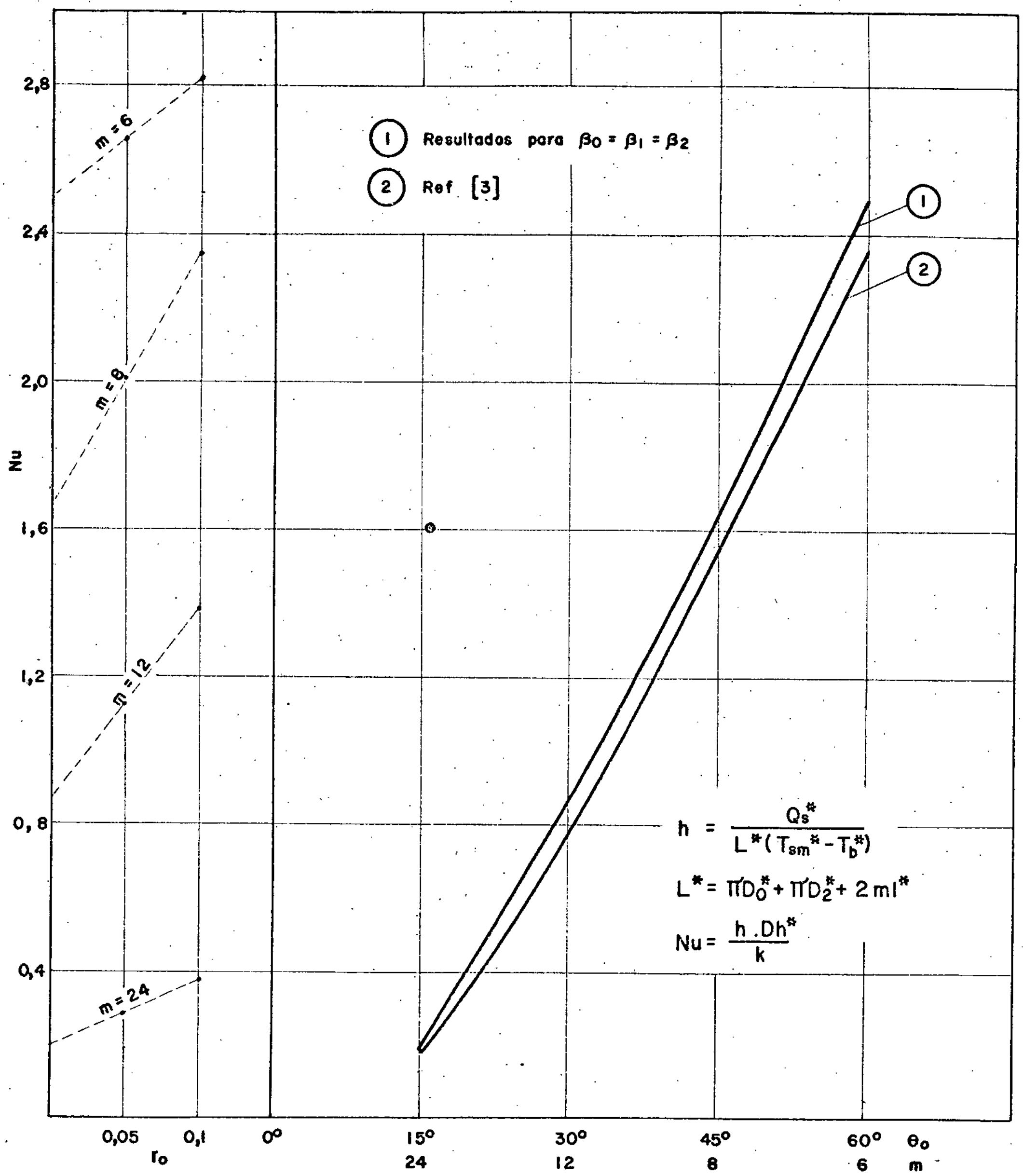


Fig. 14 - Número de NUSSELT para o setor circular.

O fator $\dfrac{n\,\pi}{m\,\ell n\, r_o}$ é o argumento das funções hiperbólicas existentes no denominador da equação da temperatura e, quanto maior, mais rápida é a convergência. Por exemplo, com relação de raios igual a 0,1 com 32 aletas necessitou-se, aproximadamente, 400 termos na série dupla, enquanto que para relações de raios maior que 0,5 , com qualquer número de aletas, bastou apenas 25 termos.

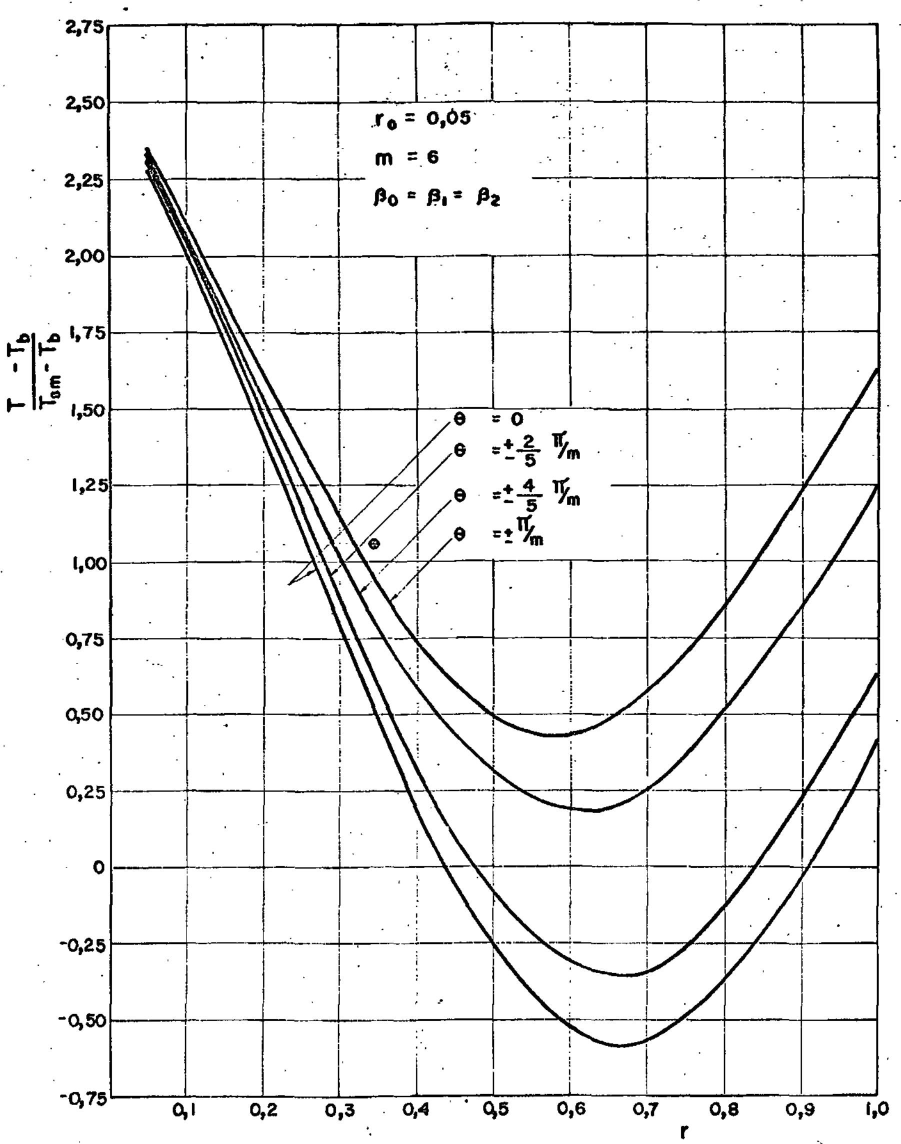


Fig. 15 - Temperaturas ao longo do raio para diferentes valores de Θ.

Entretanto, todos os resultados foram calculados com, no mínimo, 121 termos na série dupla.

Em [16] foi obtida a equação da temperatura para o duplo tubo com aletas parciais, isto é, com $\ell^* < r_2^* - r_o^*$. Fazendo naquele trabalho $\ell^* = r_2^* - r_o^*$, os resultados corroboram com os aqui apresentados.

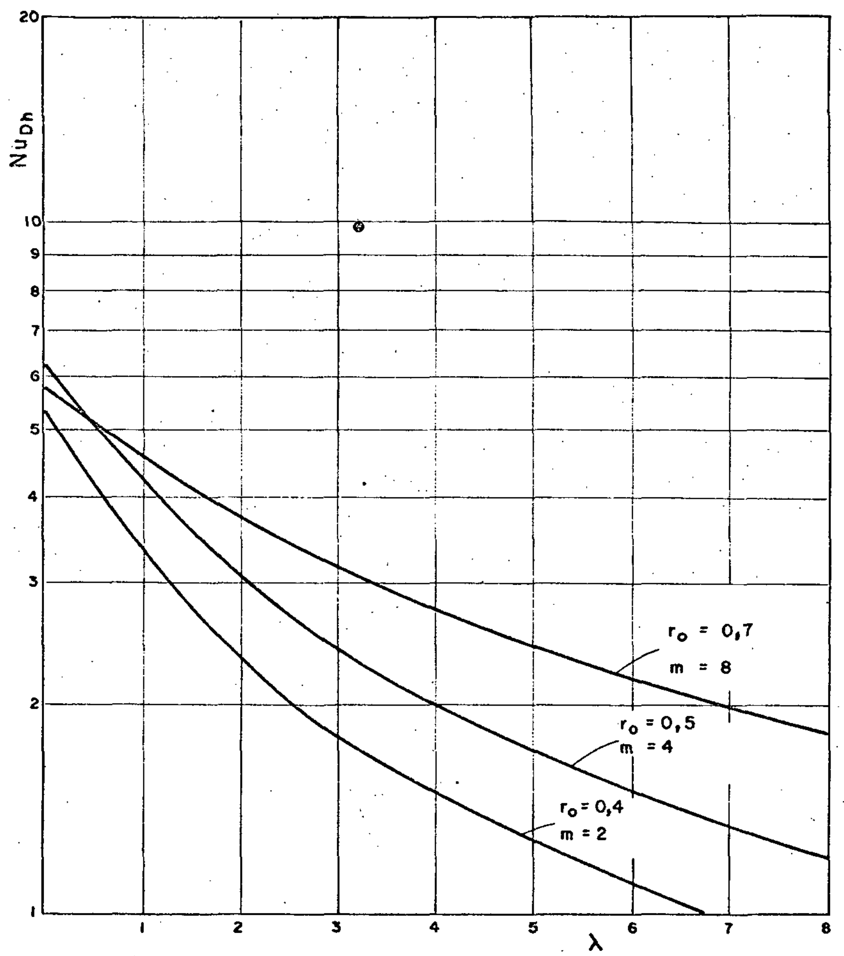


Fig. 16 - Efeito da geração interna de calor sobre o número de NUSSELT.

QUADRO 3 - NÚMERO DE NUSSELT BASEADO NO h MEDIO E DIAMETRO EXTERNO									
NÚMERO DE ALETAS	RELAÇÃO DE RAIOS								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
2	5,15	5,21	5,44	5,88	6,63	7,86	10,03	14,47	27,40
4	6,48	6,67	6,90	7,27	7,90	9,00	11,05	15,38	28,16
8	5,78	7,07	8,28			11,28	13,20	17,33	30,44
10				9,76	10,99	12,27	14,26	18,33	31,30
12	4,37	6,03							
16	3,43		7,23			14,69	17,16	21,34	34,05
20	2,68	4,11	6,39	9,40	12,73	15,74	18,82	23,27	35,91
32	1,68	2,64	4,46	7,46	11,84	17,37	22,63	28,47	41,59

QUADRO 4 - NÚMERO DE NUSSELT PARA O DUPLO TUBO NÃO ALETADO [7]										
NUMEROS DE NUSSELT	RELAÇÃO DE RAIOS									
	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
BASEADO NO DIAM. EXTERNO	18,74	13,23	10,62	10,34	10,97	12,36	14,78	19,0	27,9	54,7
BASEADO NO DIAM. HIDRAULICO	17,81	11,91	8,49	7,24	6,58	6,18	5,91	5,70	5,58	5,47

QUADRO 5 - NÚMERO DE NUSSELT BASEADO NO DIAMETRO HIDRAULICO									
NÚMERO DE ALETAS	RELAÇÃO DE RAIOS								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
2	20,54	10,38	7,04	5,42	4,47	3,86	3,34	3,13	2,83
4	35,62	17,59	11,39	8,21	6,30	5,05	4,18	3,55	3,01
8	40,36	23,48	16,97			7,43	5,71	4,42	3,44
10				14,30	11,15	8,53	6,47	4,86	3,62 -
12	33,77	22,15							
16	27,89		17,44			11,36	8,63	6,19	4,20
20	22,70	16,62	16,02	15,96	15,02	12,74	9,91	7,08	4,59
32	15,08	11,32	11,93	13,59	15,06	15,27	13,02	9,47	5,77

QUADRO 6 - NÚMERO DE NUSSELT BASEADO NO DIAMETRO EXTERNO									
NÚMERO DE ALETAS	RELAÇÃO DE RAIOS								
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
2	34,71	18,48	13,52	11,05	10,85	11,20	12,77	16,78	29,33
4	80,81	40,67	27,47	21,17	17,97	16,64	17,09	20,27	32,15
8	139,29	79,19	57,71			30,43	27,61	28,36	39,05
10				56,38	45,97	38,33	33,72	32,91	42,37
12	154,80	98,22							
16	160,16		93,253			64,58	54,64	48,51	53,31
20	156,60	108,99	101,36	99,21	93,79	82,55	70,20	60,31	61,37
32	156,43	110,32	110,55	121,55	132,46	135,39	121,43	100,98	88,67

5 - CONCLUSÕES

Com o desenvolvimento do trabalho, praticamente todos os itens conclusivos já foram abordados. Apenas os mais relevantes serão novamente comentados aqui.

Para as relações de raios na faixa de 0,4 a 0,7 a performance térmica fica aumentada de 150% a 900%, com o uso de 8 a 20 aletas. Esta é a faixa que mais encontra aplicações práticas. Para relações de raios maiores não é interessante aletar um duplo tubo porque necessitamos um número muito grande de aletas, para apenas recuperar as condições do duplo tubo não aletado ou aumentar muito pouco as características de transmissão do calor. É lógico que teremos aumento na potência de bombeamento mas, o uso, ou não, de trocadores aletados, depende da natureza do projeto onde ele será aplicado. Existem casos onde o seu uso é imperativo. Um exemplo seria um projeto onde o espaço físico para colocação dos equipamentos tem maior importância do que o aumento no custo de fabricação do trocador. Estes casos exigem equipamentos sempre mais compactos, ou, em um projeto onde a quantidade de calor trocada é economicamente mais importante, como é o caso de reatores nucleares. Para aplicações mais comuns em engenharia, as variáveis econômicas são sempre restritivas. Interessante seria determinar, para situações onde não existem restrições do ponto de vista térmico, qual seria o trocador ótimo baseado em uma análise econômica. Usando as características dinâmicas e térmicas, determinadas por este trabalho, e encontrando relações econômicas com as mesmas, pode-se desenvolver um trabalho de grande interesse. Ainda seria interessante resolver o mesmo problema considerando o fluxo de calor variável nas aletas. A execução de trabalhos experimentais, para verificação da solução analítica, também poderão ser realizados, pois, é de grande interesse conhecer as limitações da solução.

6 - BIBLIOGRAFIA

[1] HU, M.H.; CHANG, Y.P. - "Optimization of finned tubes for heat transfer in laminar flow", Journal of heat transfer - Transactions of the A.S.M.E., Vol. 95, pp. 332-338, August, 1973.

[2] SPARROW, E.M.; CHEN, T.S.; JONSSON, V.K. - "Laminar flow and pressure drop in internally finned tubes - annular ducts", International Journal of heat transfer, Vol.7, pp. 583-585, May, 1964.

[3] ECKERT, E.R.G.; IRVINE, T.F.Jr.; YEN, J.T. - "Local laminar heat transfer in wedge-shapped passages", Transactions of the A.S.M.E., Vol. 80, pp. 1433-1438, 1958.

[4] STAKGOLD, I. - "Boundary Value Problems of Mathematical Physics", Vol. I e II, MacMillan, London, 1971.

[5] SOBOLEV, S.L. - "Partial Differential Equations of Mathematical Physics", Pergamon Press, Elmsford, N.Y., 1964.

[6] BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, F.N. - "Transport Phenomena", John Wiley & Sons, Inc., 1960.

[7] KAYS, W.M. - "Convective heat and mass transfer", Mc Graw-Hill, N.Y., 1966.

[8] KAYS, W.M.; LONDON, A.L. - "Compact Heat Exchangers", 2a. Edição, Mc Graw-Hill, N.Y., 1964.

[9] GARABEDIAN, P.R. - "Partial Differential Equations", John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1964.

[10] SPARROW, E.M.; LOEFFLER, Jr.; HUBBARD, H.A. - " Heat transfer to longitudinal laminar flow between cylinders", Journal of heat transfer, Transactions of the A.S.M.E., Vol. 83 , pp. 415-422, November, 1961.

[11] HILDING, W.E.; COOGAN, C.H.Jr. - "Heat transfer and pressure loss measurements in internally finned tubes" , in: Symposium on Air-cooled Heat Exchangers,A.S.M.E., pp. 57-85, N.Y., 1964.

[12] BERGLES, A.E.; BROWN, G.S.Jr.; SNIDER, W.D. - "Heat transfer performance of internally finned tubes",A.S.M.E., paper nº 71-H7-31.

[13] BERGLES, A.E. - "Survey and evaluation of thechniques to augument convective heat and mass transfer", in: Progress in heat and mass transfer, Vol. 1, Pergamon Press, Elmsford, N.Y., pp. 331-424, 1969.

[14] KAPLAN, W. - "Advanced Calculus", Addison Wesley Publishing Company, Inc., London, 1952.

[15] DEMITOVICH, B.P.; MARON, I.A. - "Computational Mathematics", M.I.R. - Publishers, Moscow, 1973.

[16] COLLE, S.; MALISKA, C.R. - "Otimização de duplo tubo aletado internamente para transmissão de calor em regime laminar", a ser publicado nos anais do IIIº Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, Dezembro/1975.

7 - APÊNDICES

APÊNDICE 1 - Listagem do Programa de Computador usado para os cálculos.

APÊNDICE 2 - Integração Numérica da Temperatura de Mistura - Método de Simpson.

APÊNDICE 3 - Função "Delta de Dirac"
- Função de Green
- Segundo Teorema de Green

APÊNDICE 1

```
PAGE   1

// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0711        0711        0000

V2 M10   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS (CARD,1132 PRINTER)
C************************PROGRAMA PRINCIPAL**********************
C
C********ESTUDO DINAMICO E TERMICO DO ESCOAMENTO LAMINAR**********
C********EM UM DUPLO TUBO ALETADO - ALETAS PLANAS AXIAIS**********
C
C********TESE M.SC**POS GRADUACAO EM ENG.MECANICA****************
C*******************OPCAO TERMOTECNICA***************************
C
C********C.R.MALISKA*********************************************
C
C********DADOS NECESSARIOS PARA EXECUTAR O PROGRAMA**************
C
C    RO    = RELACAO DE RAIOS                                      *
C    M     = NUMERO DE ALETAS                                      *
C    L     = NUMERO DE PONTOS NO RAIO -NUMERO IMPAR
C    N     = NUMERO DE PONTOS NO ANGULO - NUMERO IMPAR             *
C    NK    = NUMERO DE TERMOS NAS SERIES SIMPLES DA TEMPERATURA    *
C    AW    = REL.ENTRE FLUXO DE CALOR NO TUBO INTERNO E ALETA
C    AW1   = REL.ENTRE FLUXO DE CALOR NO TUBO EXTERNO E ALETA      *
C    TLAMB= PARAMETRO DE GERACAO DE CALOR                          *
C    NK1   = NUMERO DE TERMOS LIMITE NA SERIE DA VELOCIDADE        *
C    NK2   = NUMERO DE TERMOS NA SERIE DUPLA DA TEMPERATURA        *
C    PREC1= PRECISAO NA SERIE DA VELOCIDADE                        *
C    NTSM  = 1 PARA CALCULAR A TSM NA PAREDE DO TUBO INTERNO       *
C          = 2 PARA CALCULAR A TSM NA ALETA E NO TUBO INTERNO      *
C          = 3 PARA CALCULAR A TSM NA ALETA E NO TUBO EXTERNO      *
C            MAIOR QUE 3 PARA CALCULAR A TSM EM TODA A SUPERFICIE  *
```

```
C*****************************************************************
      COMMON R(35),TETA(35),RO,M,AW,TB,TSM,NK,L,N,TLAMB,DER,DET,NK1,DE,F
     1RE,FRO,VM,A(35,35),TEMP(35,35),NK2,PREC1,NTSM,AW1
      NIE=2
      NIS=3
 13   READ(NIE,1)RO,M,L,N,NK,TLAMB,AW,NK1,NK2,PREC1,NTSM,AW1
  1   FORMAT(F6.4,I3,3I2,F4.2,F4.2,I3,I2,F7.5,I1,F4.2)
      IF(M-500)7,8,8
  7    PI=3.141592
      DER=(1.-RO)/(L-1)
      DET=(PI/M)/(N-1)
      R(1)=RO
      LK=L-1
      DO 2 I=2,LK
      R(I)=R(I-1)+DER
  2   CONTINUE
      R(L)=1.
      TETA(1)=0.
      NM=N-1
      DO 3 J=2,NM
      TETA(J)=TETA(J-1)+DET
  3   CONTINUE
      TETA(N)=PI/M
      CALL MOVIM
      CALL TERM
      CALL TMIST
      TC=TSM-TB
      CNUD2=2./TC
      CNUDO=(2.*RO)/TC
      CNUDE=DE/TC
      PNU=(1.+(M*(1.-RO)/(PI*RO)))
      CNDO=2.*RO/(PNU*TC)
      CND2=2/(PNU*TC)
      CNDE=DE/(PNU*TC)
      WRITE(NIS,10)VM,TB,TSM,CNUD2,CNUDO,CNUDE,FRE,FRO,M,RO,NK,NK2,TLAMB
 10   FORMAT(     10X,'VELOC MEDIA= ',F10.5,/,10X,'TEMP MIST =',F10.5,/,1
     10X,'TEMP INT FACE SOLIDO-FLUIDO = ',F10.5,/,10X,'NUR2 = ',F10.5,/,
```

```
     210X,'NUDO = ',F10.5,/,10X,'NUDE = ',F10.5,/,10X,'FRE =',F10.5,/,10
     3X,'FRO = ',F10.5,/,10X,'NUMERO DE ALETAS =',I3,/,10X,'RAIO INTERNO
     4= ',F10.5,/,10X,'NUM DE TERMOS NA  SERIE SIMPLES=',I3,/,10X,'N. DE
     5TERMOS NA SERIE DUPLA=',I2,/,10X,'PARAM.DE GER.DE CALOR='F4.2)
      WRITE(NIS,818)RO,AW,L,N,DE
 818  FORMAT(10X,'RELACAO DE RAIOS RO/R2 =',F11.5,/,10X,'RELACAO ENTRE F
     1LUXO NA ALETA E NA PAREDE DO TUBO INT=',F11.5,/,10X,'NUM.DE DIVIS
     2OES NO RAIO=',I2,/,10X,'NUM.DE DIVISOES NO ANGULO=',I2,/,10X,'DIAM
     3ETRO HIDRAULICO =',F11.5)
      WRITE(NIS,921)CNDO,CND2,CNDE
 921  FORMAT(//,10X,'CNDO=',F10.5,/,10X,'CND2=',F10.5,/,10X,'CNDE=',F10.
     15,1H1)
      DO 619 I=1,L
      DO 620 J=1,N
      A(I,J)=A(I,J)/VM
 620  CONTINUE
 619  CONTINUE
      CALL ISOVE
      WRITE(NIS,523)
 523  FORMAT(1H1,45X,'CAMPO DE VELOCIDADE')
      WRITE(NIS,817)(TETA(J),J=1,N)
 817  FORMAT(   1X,'RAIO',50X,'ANGULO',/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X
     1,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5)
      DO 315 I=1,L
 315  WRITL(NIS,316)R(I),(A(I,J),J=1,N)
 316  FORMAT(/,1X,F5.3,4X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F
     111.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5)
      WRITE(NIS,524)
 524  FORMAT('1',45X,'****CAMPO DE TEMPERATURA*****')
      WRITE(NIS,912)(TETA(J),J=1,N)
 912  FORMAT(   1X,'RAIO',50X,'ANGULO',/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X
     1,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5)
      DO 113 I=1,L
 113  WRITE(NIS,114)R(I),(TEMP(I,J),J=1,N)
 114  FORMAT(/,1X,F5.3,4X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F
     111.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5)
      DO 5 II=1,L
```

```
      DO 6 JJ=1,N
      TEMP(II,JJ)=(TEMP(II,JJ)-TB)/TC
    6 CONTINUE
    5 CONTINUE
      WRITE(NIS,616)
  616 FORMAT('1',45X,'TEMP-TMIST/TSM-TMIST')
      WRITE(NIS,942)(TETA(J),J=1,N)
  942 FORMAT(   1X,'RAIO',50X,'ANGULO',/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X
     1,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5)
      DO 115 I=1,L
  115 WRITE(NIS,116)R(I),(TEMP(I,J),J=1,N)
  116 FORMAT(/,1X,F5.3,4X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F
     111.5,/,10X,10F11.5,/,10X,10F11.5)
      CALL ISOTE
      DO 391 I=1,L
      DO 392 J=1,N
      TEMP(I,J)=0.
      A(I,J)=0.
  392 CONTINUE
  391 CONTINUE
      TB=0.
      TSM=0.
      VM=0.
      GO TO 13
    8 CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON   5080  VARIABLES     42  PROGRAM   1246

END OF COMPILATION

// XEQ
```

```
PAGE   1

// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0711        0711        0000

V2 M10   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM

C********A SUBROUTINA 'TERM' CALCULA O CAMPO DE TEMPERATURA*******

C********PARA O SETOR DE COROA PARA L*N PONTOS E A TEMPERA********
C********TURA MEDIA NA INTERFACE DE TROCA DE CALOR PELO ME********


C********TODO DE SIMPSON-UNIDIMENSIONAL**************************

      SUBROUTINE TERM
      COMMON R(35),TETA(35),RO,M,AW,TB,TSM,NK,L,N,TLAMB,DER,DET,NK1,DE,F
     1RE,FRO,VM,A(35,35),TEMP(35,35),NK2,PREC1,NTSM,AW1
      NIS=3
      PI=3.141592
      BETA1=1./(M*(1.-RO)/(PI*RO)+AW+AW1*(1./RO))
      BETA0=AW*BETA1
      BETA2=AW1*BETA1
      AO=RO**2.
       A1=PI/M
      A2=(1.-RO)
      A3=ALOG(RO)
      A4=1./A3
      A5=A1**2.
```

```
      A6=PI/A3
      A7=A6**2.
       E1=-(A6*A1)
      EX1=EXP(E1)
      EX11=1./EX1
      Y1=-(BETAO*RO*A1+BETA1*(1.-RO)+BETA2*A1+(TLAMB*A1)*0.5*(1.-AO))/(V
     1M*0.5*A1*(1.-AO))
      PA1=BETA1*(1./2.)*A4*A1*A2
      PESP1=(-1./3.)*BETA2*A4*A1*A1
      PA2=(1./3.)*BETAO*RO*A4*(A1**2.)
      PA3=(1./6.)*TLAMB*A4*(1.-AO)*(A1**2.)
      ES1=(2./3.)*(A4**2.)*(A1**2.)
      DO 2 I=1,L
      B1=ALOG(R(I)/RO)
      BB=ALOG(R(I))
      PESP3=BETA2*A3*(0.3333333-(BB/A3)+0.5*BB*BB/(A3*A3))
      PT4=BETAO*A3*RO*(0.3333333+(B1/A3)+(0.5*(B1**2.)/(A3*A3)))
      DO 3 J=1,N
      PESP2=(-0.5)*A4*BETA2*TETA(J)*TETA(J)
      PA4=BETAO*RO*(1./2.)*A4*(TETA(J)**2.)
      PA5=(1./4.)*TLAMB*A4*(1.-AO)*(TETA(J)**2.)
      ES2=TETA(J)*TETA(J)*A4*A4
      E2=-(A6*TETA(J))
      EX2=EXP(E2)
      EX22=1./EX2
      E3=(-A6)*(TETA(J)-A1)
      EX3=EXP(E3)
      EX33=1./EX3
      C4=1.
      PT1=0.
      PT2=0.
      PT3=0.
      CA1=EX1
      CA2=EX11
      CA3=EX2
      CA4=EX22
      CA5=EX3
```

```
      CA6=EX33
      DO 5 NI=1,NK
      C1=NI*E1
      C2=NI*E2
      C3=-(NI*E3)
       C4=-C4
      C5=((AO-C4)/(4.+NI*NI*A7))
      C6=Y1*A4*(C5**2.)
      IF(NI-1)6,6,7
 6    IF(C1-70.)8,8,9
  8   S1=(CA3+CA4)/(CA1+CA2)
      S2=(CA3+CA4)/(CA2-CA1)
      S3=S1
      GO TO 21
 9    IF(C3-70.)10,10,11
 10   S1=CA5
      S2=-CA5
      S3=S1
      GO TO 21
 11   S1=0.
      S2=0.
       S3=0.
      GO TO 21
 7    IF(C1-70.)12,12,13
 12   CA1=CA1*EX1
      CA2=CA2*EX11
      CA3=CA3*EX2
      CA4=CA4*EX22
      CA5=CA5*EX3
      S1=(CA3+CA4)/(CA1+CA2)
      S2=(CA3+CA4)/(CA2-CA1)
      S3=S1
      GO TO 21
13    IF(C3-70.)14,14,15
  14   CA5=CA5*EX3
      S1=CA5
      S2=-CA5
```

```
      S3=S1
      GO TO 21
 15   S1=0.
      S2=0.
      S3=0.
21    ES3=(2.*M*A3)/(NI*NI*NI*PI*PI*PI*PI)
      ES4=A4/(M*NI)
      ES5=2./(NI*NI*PI*PI)
      ES10=TANH(NI*A6*A1)
      PT1=PT1+Y1*(C5**2.)*(ES10 *(ES4-ES3)-ES2-ES1+ES5*S1)
      PT2=PT2+(2./(NI*PI))*COS(NI*A6*B1)*(BETA1*((C4-RO)/(1.+NI*NI*A7))*
     1S2+TLAMB*((2.*(C4-AO))/(4.+NI*NI*A7)))
      DA1=EX1
      DA2=EX11
      DA3=EX2
      DA4=EX22
      DA5=EX3
      DA6=EX33
      IF(NI-NK2)120,120,5
120   DO 62 KI=1,NK2
      D1=KI*E1
      D2=KI*E2
      D3=-KI*E3
      IF(KI-1)101,101,102
101   IF(D1-70.)17,17,18
 17   S6=(DA4-DA3)/(DA2+DA1)
      S4=(DA3+DA4)/(DA2-DA1)
      GO TO 22
 18   IF(D3-70.)19,19,20
 19   S6=-DA5
      S4=S6
      GO TO 22
 20   S6=0.
      S4=0.
      GO TO 22
102   IF(D1-70.)103,103,104
103   DA1=DA1*EX1
```

```
      DA2=DA2*EX11
      DA3=DA3*EX2
      DA4=DA4*EX22
      DA5=DA5*EX3
      S6=(DA4-DA3)/(DA2+DA1)
      S4=(DA3+DA4)/(DA2-DA1)
      GO TO 22
104   IF(D3-70.)24,24,25
24    DA5=DA5*EX3
      S6=-DA5
      S4=S6
      GO TO 22
25    S6=0.
      S4=0.
22    MP=(NI+KI)
      MM=(NI-KI)
      Z1=(2./(NI*PI))
      Z2=(2./(KI*PI))
      Z3=(MP*A6*(AO-COS((MP*PI))))/(2.*(4.+((MP*A6)**2.)))
      D4=(MM*A6*(AO-COS((MM*PI))))/(2.*(4.+((MM*A6)**2.)))
      D5=COS(KI*A6*B1)
      IF(KI-NI)63,64,63
 63   DS1=A3/((KI*KI-NI*NI)*PI)

      PT3=PT3+Y1*Z1*Z2*C5*(Z3+D4)*D5*(KI*DS1*S3-(NI*DS1*S4*ES10)-A3/(KI*
     1PI))
      GO TO 62
64    S5=S2
      S7=S1
      PT3=PT3+Y1*Z1*Z2*C5*(Z3+D4)*D5*((A3/(2.*KI*PI))*S7+0.5*(PI/M)*S5-T
     1ETA(J)*0.5*S6-(A3/(KI*PI)))
62    CONTINUE
5     CONTINUE
      TEMP(I,J)=PA1+PA2+PA3+PA4+PA5+PT1-PT2-PT3-PT4-PESP3-PESP1-PESP2
3     CONTINUE
2     CONTINUE
      WRITE(NIS,702)
702   FORMAT(1H1,45X,'PARAMETROS IMPORTANTES')
```

```
      WRITE(NIS,701)BETAO,BETA1
  701 FORMAT(///,10X,'FLUXO DE CALOR NA PAREDE DO TUBO=',F10.5,/,10X,'FL
     1UXO DE CALOR NA ALETA=',F10.5)
C*********    DETERMINACAO DE TSM     ***************************
C
      LA=L-1
      NA=N-1
      TSM1=0.
      DO 47 J=2,NA,2
      TSM1=1SM1+(RO*DET/3.)*(TEMP(1,J-1)+4.*TEMP(1,J)+TEMP(1,J+1))
   47 CONTINUE
      TSM2=0.
      DO 57 I=2,LA,2
      TSM2=TSM2+(DER/3.)*(TEMP(I-1,N)+4.*TEMP(I,N)+TEMP(I+1,N))
   57 CONTINUE
      TSM3=0.
      DO 58 J=2,NA,2
      TSM3=TSM3+(DET/3.)*(TEMP(L,J-1)+4.*TEMP(L,J)+TEMP(L,J+1))
   58 CONTINUE
      IF(NTSM-5)271,271,640
  271 IF(NTSM-2)280,281,282
  280 TSM=TSM1/(RO*(PI/M))
      GO TO 651
  281 TSM=(TSM1+TSM2)/(RO*(PI/M)+(1.-RO))
      GO TO 651
  282 TSM=(TSM2+TSM3)/((1.-RO)+PI/M)
      GO TO 651
  640 TSM=(TSM1+TSM2+TSM3)/((1.-RO)+(RO*PI/M)+(PI/M))
  651 RETURN
      END

CORE REQUIREMENTS FOR TERM
 COMMON    5080  VARIABLES    194  PROGRAM   2008

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0116 (HEX)

END OF COMPILATION
```

```
PAGE   1

// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0711        0711        0000

V2 M10   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
C
C
C
C********A SUBROTINA 'MOVIM' CALCULA O CAMPO DE VELOCIDADE********
C********NO SETOR DE COROA PARA L*N PONTOS************************
C
C
C
      SUBROUTINE MOVIM
      COMMON R(35),TETA(35),RO,M,AW,TB,TSM,NK,L,N,TLAMB,DER,DET,NK1,DE,F
     1RE,FRO,VM,A(35,35),TEMP(35,35),NK2,PREC1,NTSM,AW1
      PI=3.141592
      W=RO**2.
      B=ALOG(RO)
      C=9.869604/(B*M)
      D=C/PI
      E=(1./2.)*(PI/M)*(1.-W)
      P=PI/B
      H=(PI**2.)/(B**2.)
      DE=(4.*PI/(M))*(1.-W)/(2.*(1.-RO)+2.*(PI/M)*(1.+RO))
      PV=0
      DO 27 LI=1,NK1
      SX=   ((W-COS(LI*PI))/(4.+(LI**2.) *H))**2.*((B/(LI*PI))*TANH(C*LI
     1)-PI/M)
      PV=PV+SX
       IF(ABS(SX)-0.0001*ABS(PV))17,17,27
   27 CONTINUE
```

```
 17   VM=(2./(B*E))*PV
      FRE=(DE**2.)/(2.*VM)
      FRO=4.*W/(2.*VM)
      E1=P*(PI/M)
      EX1=EXP(E1)
      DO 15 I=1,L
      G=ALOG(R(I))
      DO 20 J=1,N
      EX3=EXP(P*((PI/M)-TETA(J)))
      AC=EX3
      A(I,J)=0.
      E2=P*TETA(J)
      EX2=EXP(E2)
      AB=EX1
      AA=EX2
      DO 30 KI=1,NK1
      C1=-(KI)*E1
       C3=KI*P*(TETA(J)-(PI/M))
      IF(KI-1)31,31,32
31    IF(C1-70.)37,37,38
 37   BX=(AA+(1./AA))/(AB+(1./AB))
      GO TO 93
38    IF((-C3)-70.)39,39,40
  39   BX=AC
      GO TO 93
40    BX=0.
      GO TO 93
32    IF(C1-70.)41,41,42
 41   AB=AB*EX1
      AA=AA*EX2
      AC=AC*EX3
      BX=(AA+(1./AA))/(AB+(1./AB))
      GO TO 93
42    IF((-C3)-70.)43,43,44
 43   AC=AC*EX3
      BX=AC
```

```
      GO TO 93
   44 BX=0.
   93 SS=        (2./(KI*PI))*SIN(KI*P*(G-B))*((W-COS(KI*PI))/((4.+((KI*P
     1)**(2.))))))*(BX-1.)
      A(I,J)=A(I,J)+SS
      IF(ABS(SS)-PREC1*ABS(A(I,J)))20,20,30
   30 CONTINUE
   20 CONTINUE
   15 CONTINUE
      RETURN
      END

CORE REQUIREMENTS FOR MOVIM
 COMMON    5080  VARIABLES      72  PROGRAM    680

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 005C (HEX)

END OF COMPILATION

// DUR
```

```
PAGE   1

// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0711        0711        0000

V2 M10   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
C
C********A SUBROUTINA 'TMIST' CALCULA A TEMPERATURA DE MIS********
C********TURA PELO METODO DE SIMPSON-BIDIMENSIONAL(APEND.3)*******
C
      SUBROUTINE TMIST
      COMMON R(35),TETA(35),RO,M,AW,TB,TSM,NK,L,N,TLAMB,DER,DET,NK1,DE,F
     1RE,FRO,VM,A(35,35),TEMP(35,35),NK2,PREC1,NTSM,AW1
      LK=L-1
      NN=N-1
      PI=3.141592
      TB1=0.
      DO 7 I=2,LK,2
      DIVA=R(I)*DET
      DIVR=(1.-RO)/LK
      DO 8 J=2,NN,2
      SIGO=TEMP(I+1,J+1)*A(I+1,J+1)+TEMP(I-1,J+1)*A(I-1,J+1)+TEMP(I+1,J-
     11)*A(I+1,J-1)+TEMP(I-1,J-1)*A(I-1,J-1)
      SIG1=TEMP(I+1,J)*A(I+1,J)+TEMP(I-1,J)*A(I-1,J)+TEMP(I,J-1)*A(I,J-1
     1)+TEMP(I,J+1)*A(I,J+1)
      SIG2=TEMP(I,J)*A(I,J)
      TB1=TB1+(DIVR*DIVA/9.)*(SIGO+4.*SIG1+16.*SIG2)
    8 CONTINUE
    7 CONTINUE
      TB=TB1/(VM*0.5*(PI/M)*(1.-RO**2.))
      RETURN
      END

CORE REQUIREMENTS FOR TMIST
 COMMON   5080  VARIABLES     40  PROGRAM    280

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 003C (HEX)

END OF COMPILATION
```

```
PAGE   1

// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0711        0711        0000

V2 M10   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
C********A SUBROUTINA 'ISOTE' DETERMINA AS LINHAS DE MESMA********
C
C********TEMPERATURA POR INTERPOLAÇAO QUADRATICA****************
C
      SUBROUTINE ISOTE
      COMMON R(35),TETA(35),RO,M,AW,TB,TSM,NK,L,N,TLAMB,DER,DET,NK1,DE,F
     1RE,FRO,VM,A(35,35),TEMP(35,35),NK2,PREC1,NTSM,AW1
      NIS=3
      DO 2 JJ=1,N
      JI=N+1-JJ
      K=JJ
      CMAX=TEMP(K,JI)
      KT=1
      DO 8 JK=1,N
      J=N+1-JK
      IF(CMAX-TEMP(1,J))23,23,8
   23 IF(K-1)17,6,17
  17  IF(KT-1)18,11,18
   6  WRITE(NIS,7)TEMP(K,JI)

   7  FORMAT(///,10X,'(T-TB/(TSM-TB)','NA BASE DA ALETA=',2X,F10.6)
      GO TO 2
  11  WRITE(NIS,12)TEMP(K,JI),R(K),TETA(JI)
  12  FORMAT(///,10X,'VALOR DA ISOTERMA=',4X,F10.6,/,10X,'RAIO=',4X,F10.
     15,'ANGULO=',4X,F10.5,//,10X,'OUTROS PONTOS DA CURVA',/,10X,'***RAI
```

```
     20***',10X,'LINHA DE ANGULO(J)***')
      KT=2
      KTE=0
 18   DO 10 I=1,L
      IF(CMAX-TEMP(I,J))21,8,13
 21   IF(I-L)10,8,10
 10   CONTINUE
 13   VRO=TEMP(I-1,J)
      VR1=TEMP(I,J)
      VR2=TEMP(I+1,J)
      D1LTO=VR1-VRO
      D1LT1=VR2-VR1
      D2LTO=D1LT1-D1LTO
      A1=D2LTO/2.
      A2=D1LTO-A1
      A3=VRO-CMAX
      A4=A2**(2.)-4.*A1*A3
      ALF1=-(A2/(2.*A1))+(SQRT(A4)/(2.*A1))
      ALF2=-(A2/(2.*A1))-(SQRT(A4)/(2.*A1))
      IF(ALF1-1.)144,146,146
 144  IF(ALF1-0.)146,146,145
 145  ALF=ALF1
      GQ TO 160
 146  ALF=ALF2
 160  RAIO=((1.-RO)/(L-1))*ALF+R(I-1)
      WRITE(NIS,14)RAIO,J
 14   FORMAT(//,10X,F10.5,15X,I2)
      IF(KTE-3)136,8,136
 136  KS=I
      IF(CMAX-TEMP(L,J))131,8,8
 131  DO 132 I=KS,L
      IF(CMAX-TEMP(I,J))135,135,132
 132  CONTINUE
```

```
 135  KTE=3
      GO TO 13
   8  CONTINUE
   2  CONTINUE
      RETURN
      END

CORE REQUIREMENTS FOR ISOTE
 COMMON    5080  VARIABLES     58  PROGRAM    542

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 00AE (HEX)

END OF COMPILATION
```

```
PAGE   1

// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0711        0711        0000

V2 M10   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
C********A SUBROUTINA 'ISOVE'DETERMINA AS LINHAS DE MESMA ********
C
C********VELOCIDADE POR INTERPOLACAO QUADRATICA *****************
C
      SUBROUTINE ISOVE
      COMMON R(35),TETA(35),RO,M,AW,TB,TSM,NK,L,N,TLAMB,DER,DET,NK1,DE,F
     1RE,FRO,VM,A(35,35),TEMP(35,35),NK2,PREC1,NTSM,AW1
      NIS=3
      JJ =L-1
      DO 140 JI=1,JJ
      K=N-JI
      CMAX=0.
      DO 191 I=2,L
      IF(A(I,K)-CMAX)201,201,18
   18 CMAX=A(I,K)
  191 CONTINUE
  201 WRITE(NIS,141)CMAX,R(I-1),TETA(K)
  141 FORMAT(//,10X,'*****VALOR DESTA CURVA DE MESMA VELOCIDADE=',F10.7,
     1/,10X,'*****CUJO PRIMEIRO PONTO DA CURVA TEM COORDENADAS&*****RAIO
     2=',F10.7,'*****ANGULO=',F10.7)
      WRITL(NIS,213)
  213 FORMAT(//,10X,'*****OUTROS PONTOS DA CURVA***',/,10X,'*****RAIO
     1          LINHA DO ANGULO (J)************')
```

```
      LI=K-1
      IF(LI-0)90,90,161
 161  I=1
 192  I=I+1
      IF(CMAX-A(I,LI))26,26,192
  26  VRO=A(I-1,LI)
      VR1=A(I,LI)
      VR2=A(I+1,LI)
      KTEST=1
 152  D1LTO=VR1-VRO
      D1LT1=VR2-VR1
      D2LTO=D1LT1-D1LTO
      A1=D2LTO/2.
      A2=D1LTO-A1
      A3=VRO-CMAX
      A4=A2**(2.)-4.*A1*A3
      ALF1=-(A2/(2.*A1))+(SQRT(A4)/(2.*A1))
      ALF2=-(A2/(2.*A1))-(SQRT(A4)/(2.*A1))
      IF(ALF1-1.)144,146,146
 144  IF(ALF1-0.)146,146,145
 145  ALF=ALF1
      GO TO 147
 146   ALF=ALF2
 147  IF(KTEST-2)148,153,153
 153   RAIO=R(I)-ALF*((1.-RO)/(L-1))
      GO TO 154
 148  RAIO=ALF*((1.-RO)/(L-1))+R(I-1)
 154  WRITE(NIS,149)RAIO,LI
```

```
 149  FORMAT(10X,F10.7,30X,I2)
      IF(KTEST-2)31,33,33
  33  LI=LI-1
      IF(LI-1)140,161,161
  31  I=I+1
      IF(CMAX-A(I,LI))31,31,32
 32   VR0=A(I,LI)
      VR1=A(I-1,LI)
      VR2=A(I-2,LI)
      KTEST=2
      GO TO 152
 140   CONTINUE
  90  RETURN
      END

CORE REQUIREMENTS FOR ISOVE
 COMMON   5080  VARIABLES      52  PROGRAM    578

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 00BF (HEX)

END OF COMPILATION
```

APÊNDICE 2

Integração Numérica da Temperatura de Mistura - Método de Simpson

Seja a região mostrada na Figura 17,

$$R = \{a \leq x \leq A \quad , \quad b \leq y \leq B\}$$

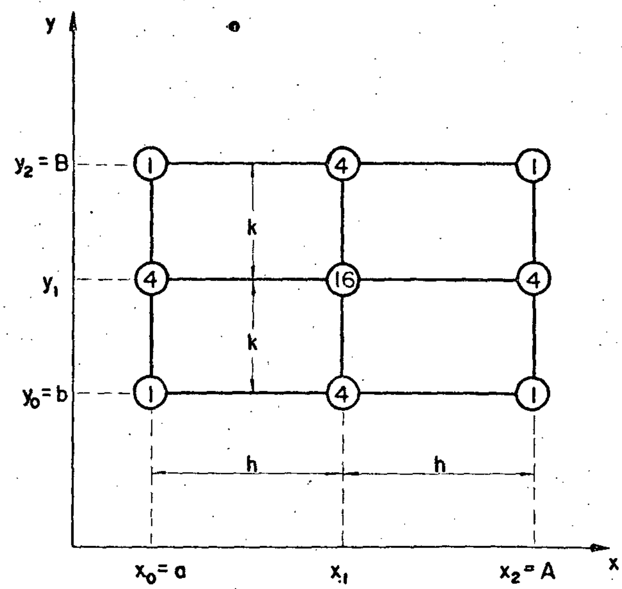


Fig.17 - Região usada para dedução a equação (7-10).

Na figura temos,

$$x_o = a \tag{7-1}$$

$$x_1 = a + h \tag{7-2}$$

$$x_2 = a + 2h = A \tag{7-3}$$

e, respectivamente,

$$y_o = b \tag{7-4}$$

$$y_1 = b + k \tag{7-5}$$

$$y_2 = b + 2k = B \tag{7-6}$$

onde,

$$h = \frac{A - a}{2} \tag{7-7}$$

$$k = \frac{B - b}{2}$$

Seja $f(x,y)$ a função a ser integrada em R.

$$\int_R f(x,y).dxdy = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y).dy \tag{7-8}$$

Aplicando o método de Simpson unidimensional para a integral interna em (7-8), vem,

$$\int_R f(x,y).dxdy = \int_a^A dx \; \frac{k}{3} \left[f(x,y_o) + 4f(x,y_1) + f(x,y_2) \right] \tag{7-9}$$

$$= \frac{k}{3} \left[\int_a^A f(x,y_o).dx + 4 \int_a^A f(x,y_1).dx + \int_a^A f(x,y_2).dx \right] \tag{7-10}$$

Aplicando novamente o método de Simpson unidimensional para cada integral em (7-10), encontramos,

$$\int_R f(x,y).dxdy = \frac{h.k}{9} (\sigma_o + 4\sigma_1 + 16\sigma_2) \tag{7-11}$$

onde:

σ_o - é a soma dos valores da função nos pontos 1 do retângulo;

σ_1 - é a soma dos valores da função nos pontos 4 do retân gulo;

σ_2 - é o valor da função no centro do retângulo, ou ponto 16 .

Usaremos o método descrito para calcular a seguinte integral:

$$\int_{r_o}^{1}\int_{0}^{\pi/m} T(r,\theta).v_Z(r,\theta).rdrd\theta$$

Não temos, neste caso, um retângulo como região de integração e sim o setor mostrado na Figura 18.

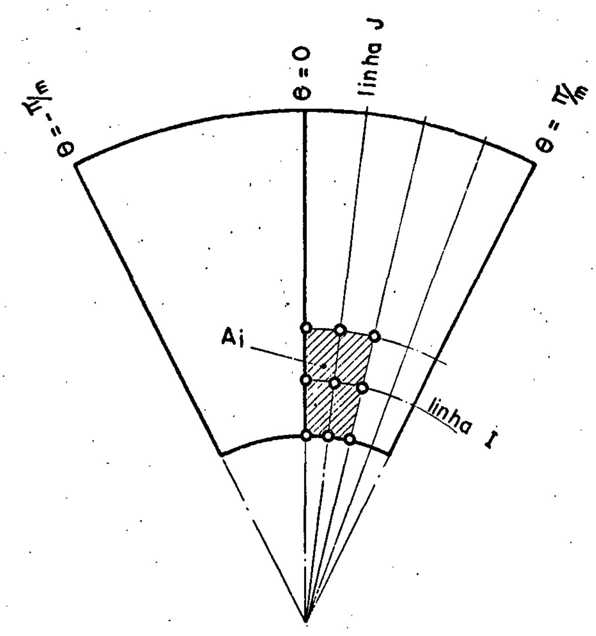


Fig.18 - Região de integração mostrando as áreas elementares.

Logicamente não podemos calcular esta integral usando apenas 9 pontos. O procedimento foi o seguinte:

a) O setor de coroa foi dividido em áreas elementares (A_i).

b) A cada 4 áreas elementares foi aplicada a equação (7-11).

Os valores de h e k são os dados abaixo:

$$h = \frac{1 - r_o}{\bar{L}} \qquad (7\text{-}12)$$

$$k = r(I).\Delta\theta \qquad (7\text{-}13)$$

onde:

$r(I)$ - é o valor do raio na linha I;

$\bar{L}$ - é o número de intervalos no raio;

$\bar{N}$ - é o número de intervalos no ângulo.

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2\, m\, \bar{N}} \qquad (7\text{-}14)$$

Os números $\bar{L}$ e $\bar{N}$ devem ser pares neste trabalho. Desta maneira,

$$\int_{r_o}^{1}\int_{o}^{\pi/m} T(r,\theta).v_z(r,\theta)rdrd\theta = \sum_{p=1}^{P}\int_{Ai} T(r,\theta).v_z(r,\theta)rdrd\theta \qquad (7\text{-}15)$$

onde,

$$P = \frac{\bar{L}\,.\,\bar{N}}{4} \qquad (7\text{-}16)$$

Usando a equação (7-10), vem,

$$\int_{A_i} T(r,\theta).v_z(r,\theta).rdrd\theta = \frac{h.k}{9}(\sigma_o + 4\sigma_1 + 16\sigma_2) \qquad (7\text{-}17)$$

onde:

$$\sigma_o = \bar{T}(I+1,J+1) + \bar{T}(I-1,J+1) + \bar{T}(I+1,J-1) + \bar{T}(I-1,J-1) \qquad (7\text{-}18)$$

$$\sigma_1 = \bar{T}(I+1,J) + \bar{T}(I-1,J) + \bar{T}(I,J-1) + \bar{T}(I,J+1) \qquad (7\text{-}19)$$

$$\sigma_2 = \overline{T}\ (I,J) \tag{7-20}$$

e

$$\overline{T} = T(r,\theta).v_Z(r,\theta).rdrd\theta \tag{7-21}$$

APÊNDICE 3

Função Delta de Dirac

A função "Delta de Dirac" ou Distribuição Singular, satisfaz às seguintes condições:

$$\int_R \delta(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi}) \cdot f(\underset{\sim}{x}) . dV = f(\underset{\sim}{\xi}) \qquad \text{(definição)} \qquad (7\text{-}22)$$

onde

$f(\underset{\sim}{x})$ é uma função contínua.

Se $f(\underset{\sim}{x}) = 1$, então

$$\int_R \delta(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi}) . dV = 1 \qquad (7\text{-}23)$$

Com (7-23) e

$$\delta(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi}) = 0 \qquad x \neq \xi \qquad (7\text{-}24)$$

temos uma definição equivalente a (7-22) para a função singular.

Expressão da Função Delta de Dirac em Coordenadas Polares

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_n)$ um sistema de coordenadas.

Estamos interessados em expressar a função delta de Dirac $\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')$ em um novo sistema de coordenadas.

Seja $\underset{\sim}{u} = (u_1, u_2, u_n)$ o novo sistema obtido de $\underset{\sim}{x}$ pela seguinte lei de transformação,

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_1(\underset{\sim}{x}) \\
u_2 &= u_2(\underset{\sim}{x}) \\
&\vdots \\
u_n &= u_n(\underset{\sim}{x})
\end{aligned}
$$

A função delta no novo sistema é expressa por,

$$\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}') = \delta(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}') \cdot \frac{1}{|J|} \tag{7-25}$$

onde

$|J|$ = é o módulo do Jacobiano de $\underset{\sim}{x}$ com respeito a $\underset{\sim}{u}$.

A prova de (7-25) encontra-se em [4].

Para o nosso problema necessitamos expressar a função delta em coordenadas polares a partir das coordenadas cartesianas.

Seja $\delta(x - x').\ \delta(y - y')$ a função delta em coordenadas cartesianas.

A lei de transformação é:

$$x = r \cdot \cos\theta \tag{7-26}$$

$$y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \tag{7-27}$$

onde

$$\underset{\sim}{x} = (x,y)$$

$$\underset{\sim}{u} = (r,\theta)$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r \cos\theta \end{vmatrix} = r \tag{7-28}$$

Então,

$$\delta(x - x').\ \delta(y - y') = \frac{\delta(r - r').\delta(\theta - \theta')}{r} \tag{7-29}$$

Função de Green

Função de Green Fundamental

Definição: É a função que satisfaz o problema:

$$\nabla^2 g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}) = 0 \qquad x \neq \xi \qquad (7\text{-}30)$$

com $\qquad x, \xi$ em R

$$\lim_{r \to 0} \int_{B_\xi} \frac{\partial g}{\partial n}\, dA = -1 \qquad (7\text{-}31)$$

onde r é o raio da esfera B_ξ , centrada em ξ .

Resolvendo o problema,

$$\nabla^2 g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}) = 0 \qquad x \neq \xi$$

com $\qquad$ (7-32)

$$g\Big|_{\partial R} = 0$$

temos a função de Green de primeira espécie (usada na solução do problema da velocidade).

Definição Equivalente

O problema (7-32) pode ser formulado da seguinte maneira,

$$-\nabla^2 g = \delta(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi}) \qquad \underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{x} \text{ em } R$$

$$g\Big|_{\partial R} = 0 \qquad (7\text{-}33)$$

Propriedades

1) $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}) > 0$ em R $\qquad$ (7-34)

Ver referência [4], Vol. II, pp. 132 para a prova.

2) $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}) = g(\underset{\sim}{\xi} \mid \underset{\sim}{x})$ (7-35)

Prova:

Seja $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1)$ e $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2)$ as funções de Green para a região R . Então:

$$\left.\begin{aligned} -\nabla^2 g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1) &= \delta(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi}_1) && \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi} \text{ em } R \\ g &= 0 && x \text{ em } \partial R \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}36)$$

$$\left.\begin{aligned} -\nabla^2 g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2) &= \delta(\underset{\sim}{x}, \xi_2) && x, \xi \text{ em } R \\ g &= 0 && x \text{ em } \partial R \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}37)$$

Multiplicando (7-31) por $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2)$, (7-32) por ...... $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1)$, subtraindo e integrando em R , temos,

$$\int_R -g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2) . \nabla^2 g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1) . dV + \int_R g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1) . \nabla^2 g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2) . dV$$

$$\int_R g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2) . \delta(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi}_1) . dV - \int_R g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1) . \delta(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi}_2) . dV \qquad (7\text{-}38)$$

Usando o segundo teorema de Green e a propriedade (1) da função delta, temos,

$$\int_{\partial R} g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1) . \frac{\partial g}{\partial n_x} (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2) . dS_x - \int_{\partial R} g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2) . \frac{\partial g}{\partial n_x} (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1) . dS_x =$$

$$= g(\underset{\sim}{\xi}_1 \mid \underset{\sim}{\xi}_2) - g(\underset{\sim}{\xi}_2 \mid \underset{\sim}{\xi}_1) \qquad (7\text{-}39)$$

Como $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1)$ e $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2)$ são nulas na fronteira, então

$$g(\xi_1 \mid \xi_2) = g(\xi_2 \mid \xi_1) \qquad (7\text{-}40)$$

Função de Green Generalizada ou Função de Neumann

Função de Green Fundamental

$$\nabla^2 g = \frac{1}{V} \qquad x \neq \xi \qquad (7\text{-}41)$$

onde V é o volume da região.

$$\lim_{r \to 0} \int_{B_\xi} \frac{\partial g}{\partial n} \, dA = -1 \qquad (7\text{-}42)$$

Definição Equivalente

$$-\nabla^2 g = \delta(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi}) - \frac{1}{V} \qquad \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi} \text{ em } R \qquad (7\text{-}43)$$

Usando (7-43) e pondo $\left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_{\partial R} = 0$, temos a função de Green generalizada.

É possível simetrizar a função de Green generalizada usando a seguinte condição.

$$\int_R g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}) . dV_x = 0 \qquad (7\text{-}44)$$

para todo $\xi \in R$

Seja $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1)$ e $g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_2)$ as funções de Green generalizadas para a região R .

Então,

$$-\nabla^2 g(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\xi}_1) = \delta(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi}_1) - \frac{1}{V} \qquad \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi}_1 \text{ em } R \qquad (7\text{-}45)$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_{\partial R} = 0$$

$$- \nabla^2 g(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{\xi}_2) = \delta(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi}_1) - \frac{1}{V} \qquad \underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{\xi}_2 \ \text{em} \ R \tag{7-46}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_{\partial R} = 0$$

Usando o mesmo procedimento anterior, encontramos,

$$g(\underset{\sim}{\xi}_1|\underset{\sim}{\xi}_2) - g(\underset{\sim}{\xi}_2|\underset{\sim}{\xi}_1) = \frac{1}{V}\left[\int_R g(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{\xi}_1).dV_x - \int_R g(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{\xi}_2)\ .dV_x\right] \tag{7-47}$$

Impondo a condição (7-44), temos,

$$g(\underset{\sim}{\xi}_1|\underset{\sim}{\xi}_2) = g(\underset{\sim}{\xi}_2|\underset{\sim}{\xi}_1) \tag{7-48}$$

Caso Unidimensional - Função de Green Fundamental

$$- \frac{d}{dx}\left(p(x).\frac{dg}{dx}\right) + q(x).g = 0 \qquad x \neq \xi \tag{7-49}$$

$$x,\ \xi\ \varepsilon\ a,b$$

onde $p > 0$ é contínua.

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

a) $g(\xi_+) - g(\xi_-) = 0$ (7-50)

b) $g'(\xi_+) - g'(\xi_-) = - \dfrac{1}{p(\xi)}$ (7-51)

Para a prova de (a) e (b) ver referência [6].

Segundo Teorema de Green

$$\int_{R} (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u).dx = \int_{\partial R} \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \qquad (7\text{-}52)$$

onde u e v possuem derivadas parciais de segunda ordem e contínuas em R, sendo R uma região aberta e limitada.