

AGRADECIMENTOS:

à Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
Universidade Federal de Santa Catarina e ao  
Conselho Nacional de Pesquisas que me deram  
o apoio necessário à realização deste trabalho.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO  
ENGENHARIA ELÉTRICA

"ESTUDO DA MINIMIZAÇÃO DA SENSIBILIDADE DE  
CIRCUITOS ATIVOS EM CASCATA"

CARLOS EDUARDO LEITE MARTINS

FLORIANÓPOLIS  
SANTA CATARINA-BRASIL  
DEZEMBRO - 1972

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO  
ENGENHARIA ELÉTRICA

"ESTUDO DA MINIMIZAÇÃO DA SENSIBILIDADE DE  
CIRCUITOS ATIVOS EM CASCATA"

CARLOS EDUARDO LEITE MARTINS

TESE SUBMETIDA A APRECIÇÃO... COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE:  
MESTRE EM CIÊNCIAS DA ENGENHARIA ELÉTRICA

FLORIANÓPOLIS  
SANTA CATARINA - BRASIL  
DEZEMBRO - 1972

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO ORIENTADOR E  
PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO .

*B. A. Saleh*

Prof. Bahaa E. A. Saleh , Ph. D.  
Orientador

*Polidoro São Tiago 3*

Prof. Polidoro E. S. T. Filho , M. Sc.  
Integrador

BANCA EXAMINADORA :

*Atoponai*

---

*Polidoro São Tiago 3*

---

## SINOPSE

Com o desenvolvimento de síntese de funções usando elementos ativos, surgiu um problema adicional que era irrelevante na síntese de passivos: a sensibilidade da função a ser realizada com relação aos ganhos dos dispositivos ativos.

Este trabalho apresenta um estudo de minimização da sensibilidade aplicado a um método de síntese de funções de transferência utilizando os inversores positivo e negativo de impedâncias (PIV - NIV) numa estrutura em cascata.

O estudo da minimização da sensibilidade foi feito em duas etapas distintas: na primeira conseguiu-se uma melhora da sensibilidade pela escolha adequada da admitância de acesso, e na segunda esta sensibilidade foi melhorada pela utilização de uma estrutura equivalente realimentada passivamente.

O critério para esta minimização consistiu em otimizar uma função  $F$ , definida como a integral, dentro de uma faixa de frequências de interesse, do módulo do somatório da sensibilidade da função de transferência com relação aos ganhos dos dispositivos ativos.

## ABSTRACT

The development of the synthesis of functions using active elements brought up a type of problem which was unimportant when this synthesis used only passive elements. This problem is the sensitivity of the function to be realized to the gains of the active elements.

This work presents an analysis of the minimization of sensitivity applied to function synthesis using impedance positive and negative inverters (PIV - NIV) in cascade circuits.

The analysis of minimization of sensitivity was done in two different steps; in the first step sensitivity decreased by the proper choice of input admittance, and in the second by using an equivalent structure with passive feedback.

The criterion used to minimize sensitivity was the optimization of a function  $F$  which is the definite integral, in a frequency range which is of our interest, of the magnitude of the sum of the different sensitivities of the transfer function (each one because of the gain of an active element).

## Í N D I C E

### CAPÍTULO I : INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades.....	1
1.2 - Considerações sôbre a sensibilidade.....	1
1.3 - Critério de minimização da sensibilidade.....	3
1.4 - Objetivos.....	4

### CAPÍTULO II - MÉTODO DE SÍNTESE DA TRANSIMPEDÂNCIA

2.1 - Funções "all-pole".....	6
2.2 - Funções "all-pole" de 1º grau.....	6
2.3 - Funções "all-pole" de 2º grau.....	9
2.4 - Funções de 2º grau com um zero de transmissão.....	13

### CAPÍTULO III - EFEITO DA REALIMENTAÇÃO SÔBRE A SENSIBILIDADE

3.1 - Introdução.....	15
3.2 - Condições para realimentação.....	17
3.3 - Conclusões.....	19

### CAPÍTULO IV - MINIMIZAÇÃO DA SENSIBILIDADE NA REALIZAÇÃO DE FUNÇÕES DO SEGUNDO GRAU COM UM ZERO DE TRANS- MISSÃO

4.1 - Introdução.....	20
4.2 - Formulação do Problema.....	22
4.3 - Análise e minimização da Função F.....	25
4.4 - Conclusão.....	28

### CAPÍTULO V - MINIMIZAÇÃO DA SENSIBILIDADE PELO USO DE UM - CIRCUITO REALIMENTADO

5.1 - Introdução.....	29
5.2 - Formulação do Problema.....	31
5.3 - Restrições.....	33

5.4 - Determinação da Função $F_1$ .....	35
5.4.1 - Caso $K_2 > 0$ .....	35
5.4.2 - Caso $K_2 < 0$ .....	38
5.5 - Conclusões.....	43

## CAPÍTULO VI - EXEMPLOS

6.1 - Introdução.....	44
6.2 - Funções "all-pole" de 2º grau.....	44
6.3 - Funções do 2º grau com um zero de transmissão e $K_2 > 0$ .....	45
6.4 - Funções do 2º grau com um zero de transmissão e $K_2 < 0$ .....	54

DIAGRAMAS DE BODE DAS FUNÇÕES SENSIBILIDADE.....	60
--	----

APÊNDICE A.....	61
APÊNDICE B.....	65
APÊNDICE C.....	70
APÊNDICE D.....	76

BIBLIOGRAFIA.....	82
-------------------	----



## CAPÍTULO I

### 1.1 - Generalidades

O objetivo do presente trabalho é fazer um estudo de sensibilidade em circuitos ativos que utilizem o Inversor positivo ou negativo de Impedâncias (PIV - NIV) para a realização de funções Transimpedância. Este estudo apresenta considerações sobre a realização de funções de alto grau\* e modificações na estrutura básica com a finalidade de minimizar o módulo da função sensibilidade clássica dentro da faixa de frequências de utilização. Outras possibilidades de estudo seriam minimizar a sensibilidade com relação ao deslocamento das raízes ou variações grandes dos parâmetros.

Apresentaremos inicialmente considerações sobre as definições de sensibilidade, método de síntese e propriedade dos circuitos realimentados. A partir das conclusões obtidas nos itens acima, determinaremos as condições para que possamos introduzir realimentações negativas com a finalidade de minimizar a sensibilidade em relação aos ganhos dos elementos ativos. Com o objetivo de facilitar a compreensão dos métodos expostos, apresentaremos no final alguns exemplos numéricos.

### 1.2 - Considerações sobre a sensibilidade.

1.2.1 - Todos os dispositivos físicos sofrem influência do meio ambiente, tais como temperatura, umidade, etc. Nas redes elétricas, devido a estes fatores, os valores dos elementos que as compõem se alteram.

Define-se sensibilidade como a variação da função do circuito devido a variação de seus parâmetros.

Pode-se observar dois tipos de variação; a incremental onde a variação do parâmetro é percentual e a segunda onde o parâmetro varia drasticamente em relação ao seu valor nominal.

\* Entende-se como grau de uma função o maior dentre os graus do numerador e denominador.

O estudo da variação drástica dos parâmetros é feita por meio do computador digital. Neste método variamos cada parâmetro independentemente e comparamos com a resposta, a esta diferença denomina-se desvio. Em nosso estudo estamos interessados em analisar apenas as variações incrementais por serem de maior importância.

Em síntese de circuitos é importante o estudo da sensibilidade, pois permite a determinação dos elementos críticos e de suas tolerâncias.

As variações dos parâmetros provocam em uma rede o deslocamento das raízes e a variação da função da rede. Ao primeiro denomina-se sensibilidade das raízes e ao segundo sensibilidade clássica.

A sensibilidade clássica é uma função da frequência complexa  $s$ , ou seja, indica a variação do ganho e da fase da função da rede. Neste trabalho é analisada a função sensibilidade clássica com um estudo da minimização do módulo desta função.

### 1.2.2. - Expressões da sensibilidade clássica.

Da definição de sensibilidade temos que:

$$S_{\alpha}^{T(s)} = \frac{d \ln T(s)}{d \ln \alpha} \quad \therefore \quad S_{\alpha}^{T(s)} = \frac{\frac{dT(s, \alpha)}{T(s, \alpha)}}{\frac{d\alpha}{\alpha}}$$

$$S_{\alpha}^{T(s)} = \frac{\alpha}{T(s)} \cdot \frac{dT(s, \alpha)}{d\alpha}$$

1.2.1

Pode-se ainda derivar uma nova expressão da sensibilidade partindo da forma bilinear. Demonstra-se que qualquer função de rede pode ser escrita na forma bilinear<sup>1</sup> abaixo, de forma a explicitar o parâmetro sobre o qual recai nosso interesse.

$$T(s, \alpha) = \frac{N(s, \alpha)}{D(s, \alpha)} = \frac{N_1(s) + \alpha N_2(s)}{D_1(s) + \alpha D_2(s)} \quad \therefore$$

$$\frac{dT(s, \alpha)}{d\alpha} = \frac{N_2(s) D(s, \alpha) - D_2(s) N(s)}{[D(s)]^2}$$

$$S_{\alpha}^{T(s, \alpha)} = \frac{D_1(s)}{D(s, \alpha)} - \frac{N_1(s)}{N(s, \alpha)} \quad 1.2.2$$

Sendo nosso principal objetivo minimizar a sensibilidade, iremos nos ater ao estudo de funções do primeiro e segundo grau, pois conforme J.M. Sipress<sup>2</sup>, para realizações de funções de alto grau, sob o ponto de vista de sensibilidade, é sempre melhor parcionlizarmos a função em subfunções de 1º e 2º grau. Isto significa que dada uma função  $T(s)$  de 4º grau que possa ser realizada com a utilização de apenas um elemento ativo de ganho  $\alpha$ , sua sensibilidade será  $S_{\alpha}^{T(s)}$ , mas se realizarmos esta função parcionalizando-a em subfunções de segundo grau pela utilização de dois elementos ativos, teremos então:

$$S_{\alpha_1}^{T(s)}, S_{\alpha_2}^{T(s)}$$

que conforme Sipress

$$S_{\alpha_1}^{T(s)}, S_{\alpha_2}^{T(s)} \ll S_{\alpha}^{T(s)} \quad 1.2.3$$

### 1.3 - Cr terios de Minimiza o da Sensibilidade.

Levando-se em conta que realizamos a s ntese da transimped ncia, estamos interessados em que esta fun o n o se altere com rela o a varia o dos ganhos dos dispositivos ativos. Considerando ainda que as fun es sensibilidade podem ter sinais diferentes, vamos definir uma fun o  $F_1$  como sendo:

$$F_1 = \sum_{i=1}^n S_{g_i}^{z_{21}(s)} \quad 1.3.1$$

sendo o objetivo minimizar o módulo da função sensibilidade dentro da faixa de frequências de operação, definiremos a função F dada por

$$F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) |F_1|^2 d\omega$$

1.3.2

onde f(w) é uma função de pêsô e que em nosso estudo vamos considerar uma constante unitária.

1.4 = Objetivos

Nossa meta é fazer um estudo da sensibilidade de funções transimpedância Z<sub>21</sub>(s), realizadas através de um método de síntese específico.

Dada a função transimpedância

$$Z_{21}(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s + \sigma_i)}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

1.4.1

ou seja, funções com zeros reais e com a seguinte restrição de grau m >= 2n

$$Z_{21}(s) = \tilde{Z}_{21}^1(s) \dots \tilde{Z}_{21}^i(s) \dots$$

onde  $\tilde{Z}_{21}^i(s)$  podem ter as seguintes

expressões:

$$\tilde{Z}_{21}^i(s) = \frac{H_i(s + \sigma_i)}{s^2 + a_i s + b_i}$$

1.4.2

$$\tilde{Z}_{21}^i(s) = \frac{H_j}{s^2 + a_j s + b_j}$$

1.4.3

$$\tilde{Z}_{21}^k(s) = \frac{H}{s + a_k}$$

1.4.4

No capítulo 2 iremos apresentar o método de síntese desenvolvido por Polidoro E.S.T. Filho<sup>3</sup> focalizando as funções de nosso interesse dadas pelas expressões 1.4.2, 1.4.3 e 1.4.4.

Após obtermos os circuitos das diversas transimpedâncias iremos interligá-los, utilizando o necessário circuito isolador, conforme a fig. 1.1

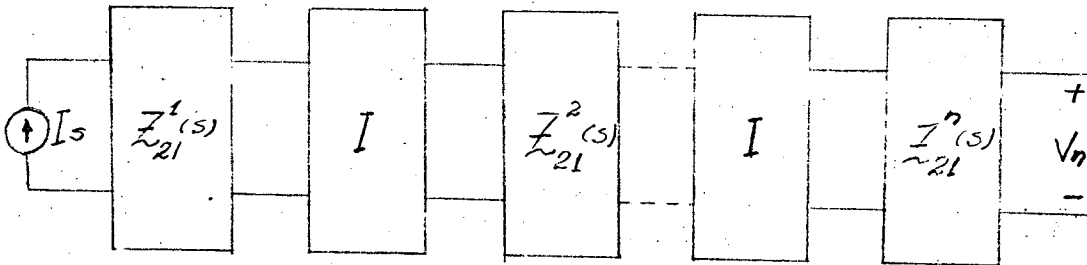


Fig. 1.1

Já que a síntese é a da transimpedância, os circuitos isoladores (I) poderão ser fontes de corrente controladas por tensão ou seja:

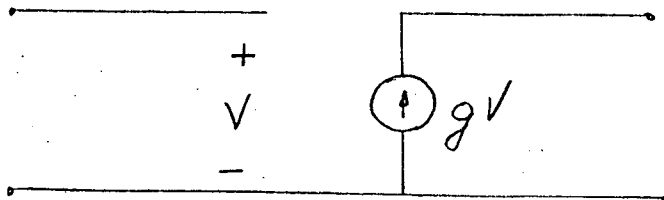


Fig. 1.2

CAPÍTULO II

Método de síntese de transimpedância

2.1 - Funções "all-pole"

Levando-se em conta a expressão 1.4.1, no caso em que tivermos  $m > 2n$ , teremos necessidade de sintetizar funções "all-pole". Para tanto, iremos separar em subfunções de 1º e 2º grau.

Ao cascatearmos as redes necessitaremos usar os circuitos isoladores; porém quando uma das redes a ser cascateada for de imitância constante, este isolamento se torna desnecessário, pois podemos incluir a condutância da rede de imitância constante no bloco passivo adjacente da outra rede.

2.2 - Realização de

$$Z_{21}(s) = \frac{h}{s+c}$$

para tanto iremos escolher uma rede de imitância constante ou seja  $Y_{in}$  escolhido será:

$$Y_{in} = \frac{s+c}{s+c} \therefore Y_{in} = \frac{s}{s+c} + \frac{c}{s+c} \quad \text{e} \quad Y_{in-1} = \frac{c}{s+c}$$

2.2.1  $Y_1 = \frac{s}{s+c}$

escolhendo a estrutura da figura 2.1.1

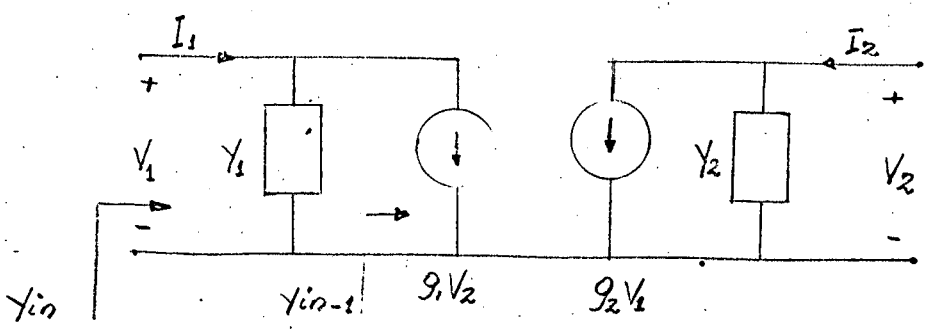


fig. 2.1.1

temos conforme Apêndice A,

$$y_{in-1} = - \frac{g_1 - g_2}{y_2}$$

$$y_2 = -g_1 \cdot g_2 \cdot \frac{s+c}{c} \quad 2.2.2$$

Da função transimpedância temos que

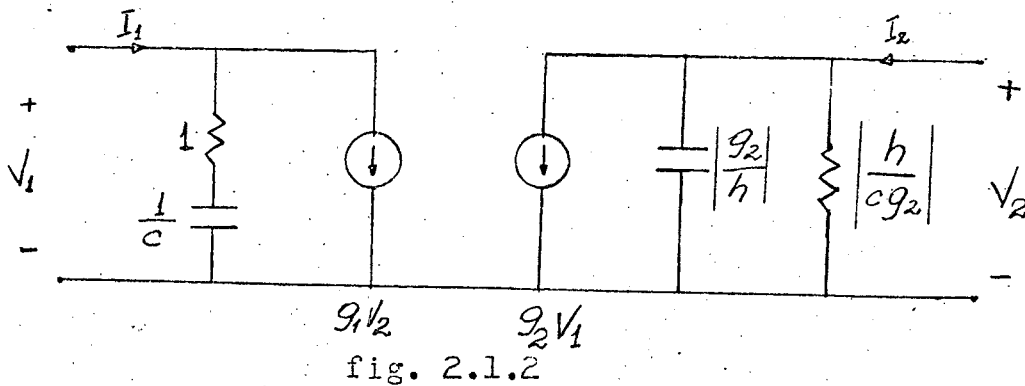
$$Z_{21}(s) = \frac{-g_2}{-g_1 g_2 \left( \frac{s}{s+c} \cdot \frac{s+c}{c} + 1 \right)} \quad \therefore \quad Z_{21}(s) = \frac{c}{g_1 (s+c)}$$

$$h = \frac{c}{g_1}$$

e  $g_2$  é tal que  $g_1 \cdot g_2 < 0$ .

Note-se que para  $h > 0$ ,  $g_2$  deverá ser menor que zero.

A estrutura resultante é a dada pela fig. 2.1.2, com valores em Ohms e Farads.



### Análise da sensibilidade

Conforme apêndice A temos que os parâmetros  $|Y|$  para o circuito da fig. 2.1.2 são:

$$y_{11}(s) = y_1(s) = \frac{s}{s+c} \quad 2.2.3$$

$$y_{12}(s) = g_1 = \frac{c}{h} \quad 2.2.4$$

$$y_{21}(s) = g_2 \quad 2.2.5$$

$$Y_{22}(s) = Y_2(s) = -\frac{(s+c)g_2}{h} \quad 2.2.6$$

Conforme Apêndice B temos as seguintes expressões de sensibilidade:

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = -\frac{c}{h} \cdot \frac{h}{s+c} \quad \boxed{S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = -\frac{c}{s+c}}$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = h \cdot \frac{s}{s+c} \cdot \frac{s+c}{hg_2} \times \frac{h}{s+c} \quad \boxed{S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = \frac{s}{s+c}}$$

Traçando as assíntotas do diagrama de Bode das funções sensibilidade, temos:

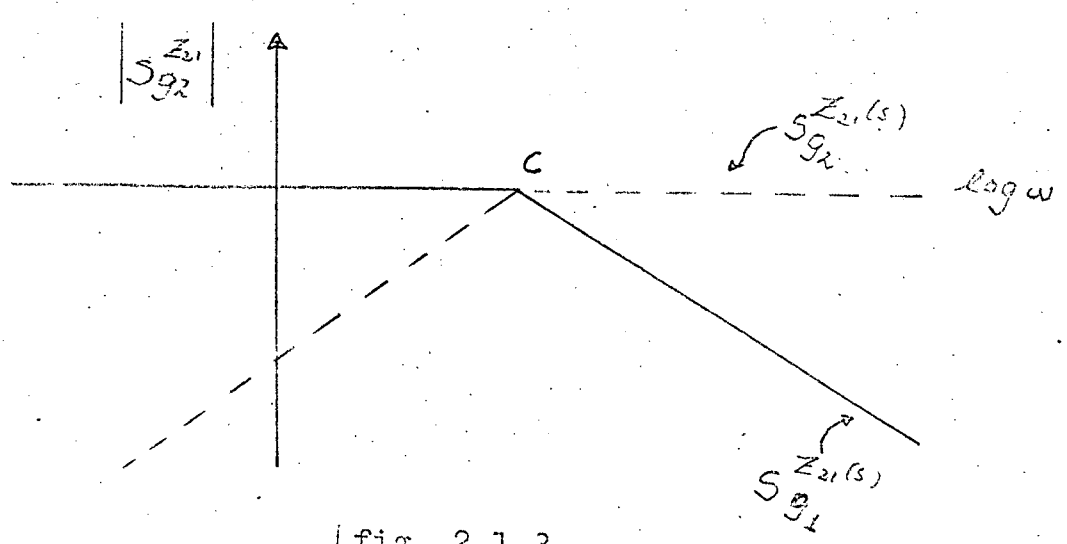


fig. 2.1.3

sendo que o maior valor de sensibilidade é unitário.



2.3 - Realização de

$$Z_{21}(s) = \frac{h}{s^2 + as + b}$$

Esta função possui polos no semi-plano da esquerda ou no eixo imaginário. De acordo com (3) devemos escolher:

$$Y_{in}(s) = \frac{s^2 + as + b}{q(s)}$$

Com o objetivo de minimizar a sen-

sibilidade devemos decompor o polinômio do denominador de uma forma ótima. De acordo com CALAHAN(6), se D(s) for do segundo grau é sempre possível determinar esta decomposição e ela é única ou seja,

$$D(s) = s^2 + as + b = (s + \alpha)^2 + \beta \quad \therefore$$

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta \quad \text{portanto}$$

$$2\alpha = a \quad \therefore \quad \alpha = \frac{a}{2} \quad e$$

$$\alpha^2 + \beta = b \quad \therefore \quad \beta = b - \frac{a^2}{4}$$

temos então que escolhendo  $q(s) = s + \alpha$  vem

$$Y_{in}(s) = \frac{(s + \alpha)^2 + \beta}{s + \alpha} \quad \therefore \quad Y_{in}(s) = s + \alpha + \frac{\beta}{s + \alpha}$$

onde identificaremos  $Y_1(s) = s + \alpha$  e

$$-\frac{g_1 \cdot g_2}{Y_2} = \frac{3}{s + \alpha} \quad \therefore \quad Y_2(s) = -\frac{g_1 \cdot g_2}{\beta} (s + \alpha)$$

conforme o apêndice A temos que:

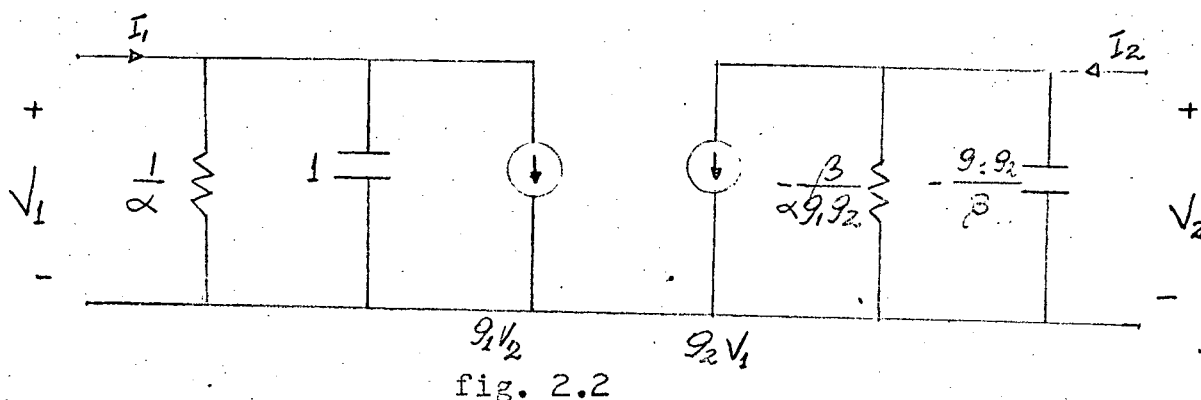
$$Z_{21}(s) = \frac{-g_2}{Y_1 Y_2 - g_1 g_2}$$

substituindo os valores calculados

acima vem que:

$$Z_{21}(s) = \frac{-g_2 \beta}{-g_1 g_2 [(s+\alpha)^2 + \beta]} \quad \therefore \quad \boxed{h = \frac{\beta}{g_1}}$$

e  $g_2$  é tal que  $Y_2(s)$  seja admitância RC passiva, resultando a configuração da fig. 2.2



Observando as expressões:

$$\alpha = \frac{a}{2} \quad e \quad \beta = b - \frac{a^2}{4}$$

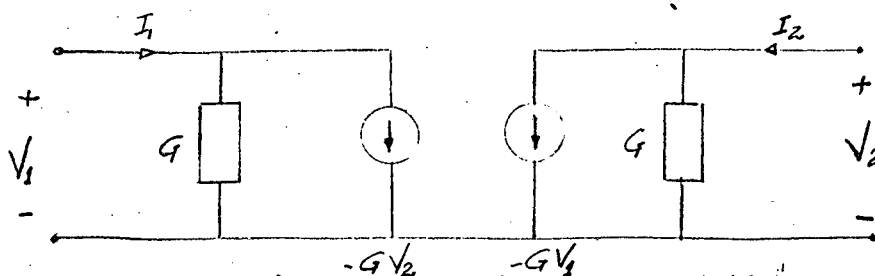
sendo  $a, b > 0$  pois possui polos no semi-plano esquerdo, temos que  $\alpha > 0$  e  $\beta \geq 0$ .

a - Se  $\beta > 0$  deveremos escolher  $g_1 \cdot g_2 < 0$ .

b - Se  $\beta < 0$  deveremos escolher  $g_1 \cdot g_2 > 0$ .

Para o caso a iremos sempre recair em uma estrutura ativa.

Para o caso b escolhendo  $g_1 = g_2 < 0$ , poderemos transformar a estrutura da fig. 2.2 em um circuito passivo, pois analisando o comportamento da fig. 2.3



vem que:

$$I_1 = V_1 G - G V_2$$

$$I_2 = V_2 G - G V_1$$

$$I_1 = G(V_1 - V_2) \quad \text{e} \quad I_2 = G(V_2 - V_1)$$

ou seja é equivalente ao da fig 2.4

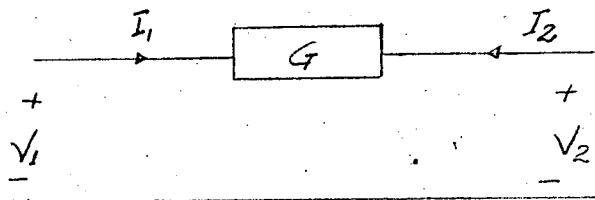


fig. 2.4

portanto escolhendo

$$G \leq \left\{ \text{Min} \left( \alpha, \left| -\frac{\beta}{g_1 g_2 \alpha} \right| \right) \right\}$$

podemos escrever que:

$$Y_1(s) = s + \alpha_1 + G \quad \text{onde} \quad \alpha_1 + G = \alpha \quad \text{ou seja}$$

$$Y_1'(s) = s + \alpha_1 \quad \text{e}$$

$$Y_2'(s) = -\frac{g_1 g_2}{\beta} s - \left( \frac{g_1 g_2 \alpha}{\beta} - G \right) \quad \text{portanto teremos o circuito da figura 2.5}$$

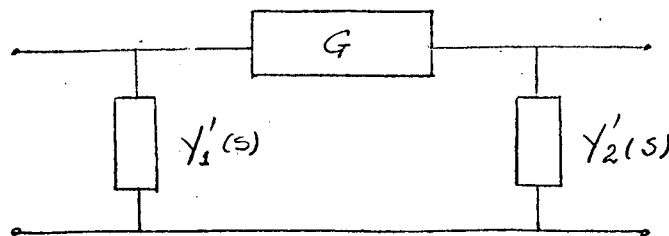


fig. 2.5

Análise da sensibilidade para o caso a, ou seja em que a estrutura resultante seja ativa. Para tanto, substituindo os valores nas expressões da sensibilidade dados no Apêndice B vem que:

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = \frac{-\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta} \quad 2.1$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = \frac{(s+\alpha)^2}{(s+\alpha)^2 + \beta} \quad 2.2$$

Traçando os diagramas de Bode, fig. 2.6, podemos verificar que a sensibilidade é muito boa, dentro da faixa de passagem de frequência da função transferência.

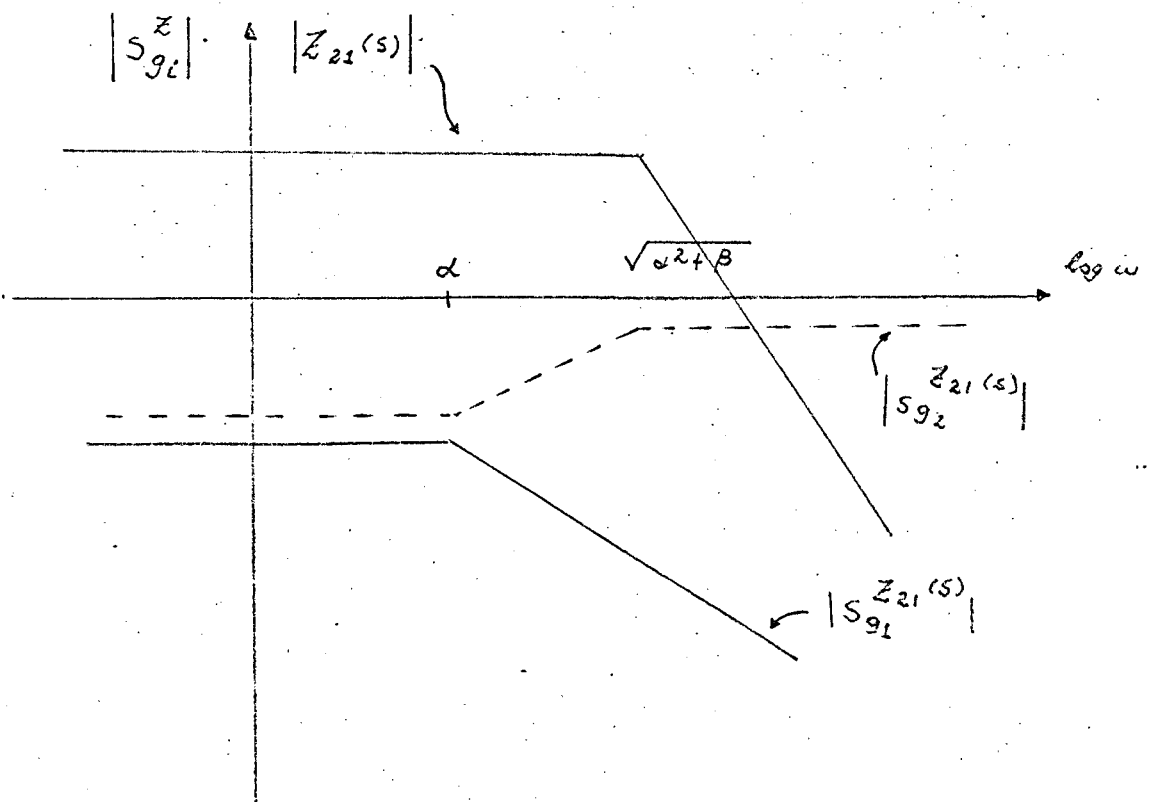


fig. 2.6

## 2.4 - Realização de funções

$$Z_{21}(s) = \frac{H(s+\sigma)}{s^2 + as + b}$$

a - Utilizando o processo desenvolvido por Polidoro S.T. Filho<sup>(2)</sup>.  
Para tanto devemos escolher

$$Y_{in}(s) = \frac{s^2 + as + b}{(s+\sigma)(s+c)}$$

e determinar o valor adequado de C. Para tanto se:

$$c^2 - ac + b > 0 \quad \text{escolhemos} \quad c < \sigma$$

$$c^2 - ac + b < 0 \quad \text{"} \quad c > \sigma$$

A fim de se conseguir a realização de zero em  $s = -\sigma$

teremos que 
$$Y_{in}(s) = k_0 + \frac{k_1 s}{s+\sigma} + \frac{k_2 s}{s+c}$$

onde

$$k_0, k_1 > 0 \quad \text{e} \quad k_2 \leq 0$$

temos então que:

$$Y_1(s) = k_0 + \frac{k_1 s}{s+\sigma} \quad \text{e}$$

$$Y_{in-1}(s) = -g_1 \cdot g_2 \frac{s+c}{k_2 s} \quad \therefore \quad Y_{in-1}(s) = \frac{-g_1 \cdot g_2}{k_2} - \frac{g_1 \cdot g_2 c}{k_2 s}$$

identificamos

$$Y_2(s) = - \frac{g_1 \cdot g_2}{k_2}$$

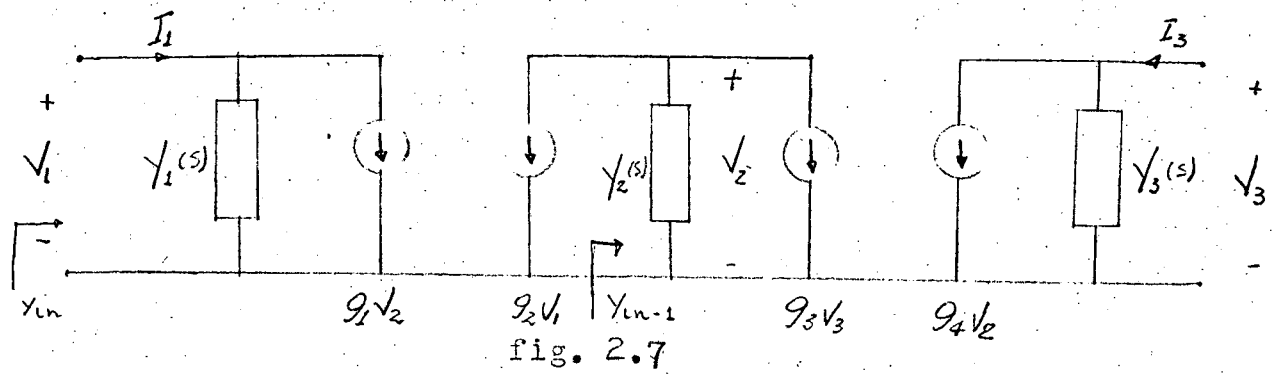
$$Y_3(s) = \frac{g_3 \cdot g_4}{g_1 \cdot g_2} \cdot \frac{k_2 s}{c}$$

onde temos sempre que

$Y_2(s)$  - condutância

$Y_3(s)$  - suscetância  
capacitiva

O que nos fornece o circuito da fig. abaixo



Os valores de  $k_i$  são dados pelas seguintes relações:

$$K_0 = \frac{b}{ca} \quad 2.4.1$$

$$K_1 = \frac{c^2 - ac + b}{c(c-a)} \quad 2.4.2$$

$$K_2 = \frac{c^2 - ac + b}{c(c-a)} \quad 2.4.3$$

Do Apêndice A temos que

$$\tilde{F}_{21}(s) = \frac{Y_{21}(s)}{Y_{12}(s) \cdot Y_{21}(s) - Y_{11}(s) \cdot Y_{22}(s)}$$

Substituindo os valores de  $k_i$  e usando as expressões dos parâmetros  $[Y]$  de dois PIV's em cascata que foram deduzidos no apêndice A vem:

$$\tilde{F}_{21}(s) = - \frac{g_2 \cdot c (s + c)}{g_3 (s^2 + as + b)}$$

comparando com a função

$$\tilde{F}_{21}(s) = \frac{H(s+c)}{s^2 + as + b} \quad \text{vem que}$$

$$2.4.4 \quad \boxed{H = - \frac{g_2 \cdot c}{g_3}}$$

## CAPÍTULO III

### Efeito da realimentação sobre os circuitos ativos.

#### 3.1 - Introdução

O princípio em que nos baseamos para minimizar a sensibilidade, é que quanto maior for a realimentação negativa menores serão as variações da função do sistema devido a variação dos parâmetros.

Podemos obter esta relação (4) pela análise do sistema da fig. 3.1

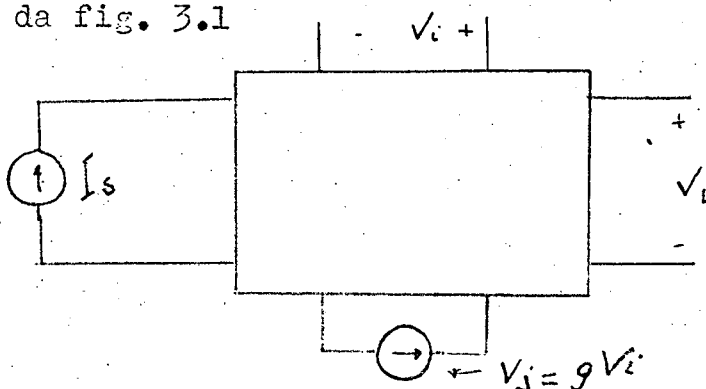


fig. 3.1

onde:

$g$  = ganho da fonte controlada

$V_i$  = sinal de controle

$V_L$  = tensão de saída

$I_s$  = fonte independente

$V_j$  = fonte controlada

Tendo em vista ser o nosso sistema linear, podemos calcular  $V_L$  e  $V_i$  por superposição:

$$V_L = t_{11} I_s + t_{12} V_j$$

$$V_i = t_{21} I_s + t_{22} V_j$$

onde temos que: 
$$t_{11} = \frac{V_L}{I_s} \quad V_j = 0 \quad 3.1.1$$

$$t_{12} = \frac{V_L}{V_j} \Big|_{I_s=0} \quad 3.1.2$$

$$t_{21} = \frac{V_i}{I_s} \Big|_{V_s=0} \quad 3.1.3$$

$$t_{22} = \frac{V_i}{V_j} \Big|_{I_s=0} \quad 3.1.4$$

Com isto podemos traçar o diagrama de fluxo da fig. 3.2

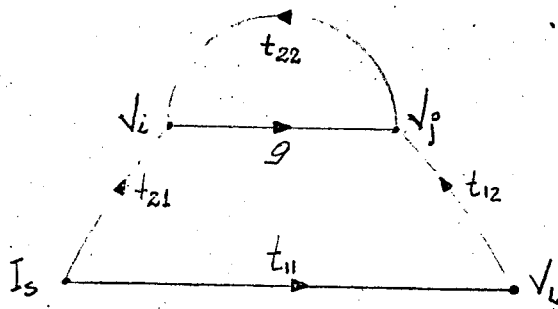


fig. 3.2

que é o diagrama de fluxo fundamental da realimentação.

Do gráfico podemos obter a transimpedância de malha fechada

$$\underline{Z}_{21}(s) = \frac{V_L}{I_s} \quad \text{de onde resulta a equação fundamental da realimentação}$$

$$\underline{Z}_{21}(s) = t_{11} + \frac{t_{21} \cdot g \cdot t_{12}}{1 - g \cdot t_{22}} \quad 3.1.5$$

Quando  $g t_{22} \gg 1$  teremos que:

$$\underline{Z}_{21}(s) = t_{11} + \frac{t_{21} \cdot t_{12}}{t_{22}}$$

ou seja quando tivermos grande "feedback" a transimpedância - será independente das variações do parâmetro  $g$ .



### 3.2 - Condições para Realimentação.

Vamos considerar um quadripolo regido pelos seus parâmetros  $\hat{Y}$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad 3.2.1$$

cuja expressão de transimpedância a circuito aberto será, conforme determinado no Apêndice A

$$Z_{21}(s) = \frac{\hat{Y}_{21}(s)}{\hat{Y}_{12}(s) \cdot \hat{Y}_{21}(s) - \hat{Y}_{11}(s) \cdot \hat{Y}_{22}(s)} \quad 3.2.2$$

A admitância de entrada  $Y_{in}$  será, conforme A.2.2

$$Y_{in}(s) = \frac{\hat{Y}_{11}(s) \cdot \hat{Y}_{22}(s) - \hat{Y}_{12}(s) \cdot \hat{Y}_{21}(s)}{\hat{Y}_{22}(s)} \quad 3.2.3$$

Vamos realimentar um quadripolo de parâmetros  $[\hat{Y}]$  por um circuito passivo descrito pelos seus parâmetros  $[y]$ , de acordo com a figura 3.3

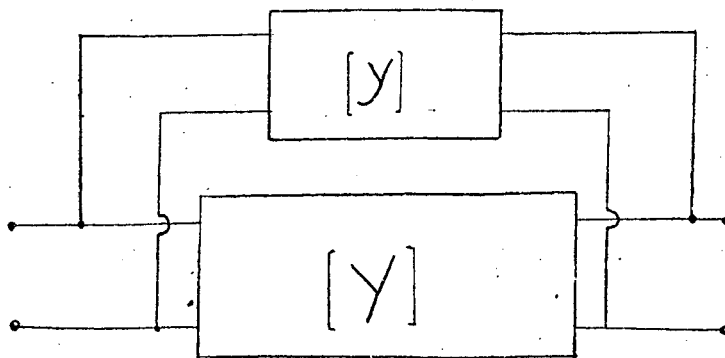


fig. 3.3

onde o circuito passivo será o da figura 3.4

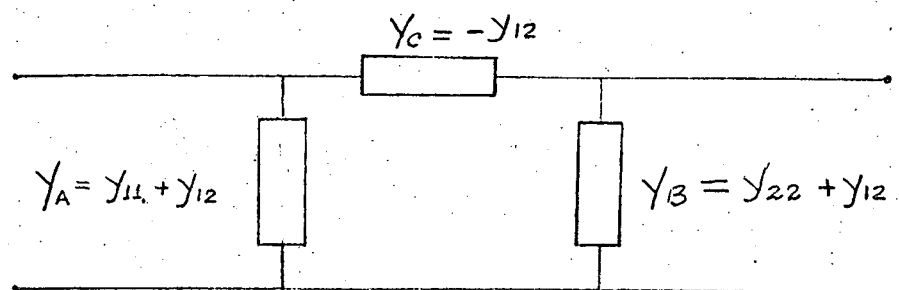


fig. 3.4

se adotarmos:  $Y_{11} = Y_{22} = Y_C = -Y_{12}$

a fig. 3.3 passa a ser

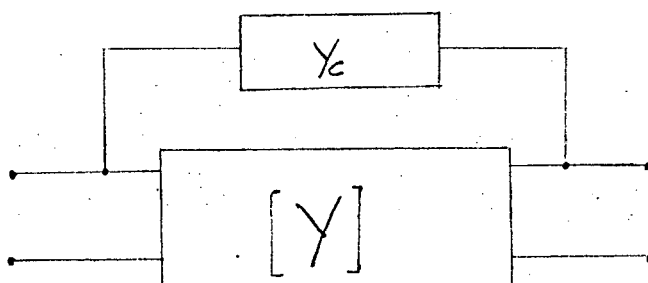


fig. 3.5

A condição de nosso estudo é que o circuito da fig. 3.3 seja igual ao regido pelas equações 3.2.1 ou seja

$$[\overset{g}{Y}] = [Y] + [y] \quad 3.2.4$$

$$\left. \begin{aligned} \overset{g}{Y}_{11} &= Y_{11} + Y_C \\ \overset{g}{Y}_{12} &= Y_{12} - Y_C \\ \overset{g}{Y}_{21} &= Y_{21} - Y_C \\ \overset{g}{Y}_{22} &= Y_{22} + Y_C \end{aligned} \right\} \quad 3.2.5$$

Conclusões:

Ao decompor a função  $Z_{21}(s)$ , chegamos a três funções transimpedâncias fundamentais dadas pelas equações 1.4.2, 1.4.3 e 1.4.4 que são

$$Z_{21}^i(s) = \frac{H_i(s + \sigma_i)}{s^2 + a_i s + b_i}$$

$$Z_{21}^j(s) = \frac{H_j}{s^2 + a_j s + b_j}$$

$$Z_{21}^k(s) = \frac{H_k}{s + a_k}$$

Tendo em vista os processos de síntese apresentados e as condições de realimentação, concluímos que apenas a função

$$Z_{21}^i(s) = \frac{H_i(s + \sigma_i)}{s^2 + a_i s + b_i}$$

satisfaz as condições de realimentação e não pode ser decomposta de uma forma ótima pelo processo de CALAHAN. Assim sendo vamos nos ater a minimização da sensibilidade das funções de 2º grau - com um zero de transmissão.

## CAPÍTULO IV

Minimização da sensibilidade na realização de funções de segundo grau com um zero de transmissão.

### 4.1 - Introdução

Este e o próximo capítulo são os mais importantes, tendo em vista que novos resultados foram obtidos no que se refere a uma melhora da sensibilidade. Iremos aqui determinar qual ou quais maneiras possíveis de minimizar a sensibilidade do circuito obtido pelo método de síntese apresentado no cap. II.

Para a obtenção de

$$Z_{21}(s) = \frac{H(s+\sigma)}{s^2 + \alpha s + b} \quad 4.1.1$$

partimos de uma admitância de entrada que deverá ter a forma

$$Y_{in}(s) = \frac{s^2 + \alpha s + b}{(s+\sigma)(s+c)}$$

ou seja devemos escolher um valor de  $\underline{c}$ , segundo o critério apresentado no capítulo II para a realização do zero de transmissão, note-se porém que  $\underline{c}$  é sempre maior que zero tendo em vista ser um pólo da admitância de entrada.

Pelo processo de síntese obtemos a estrutura da fig. 4.1

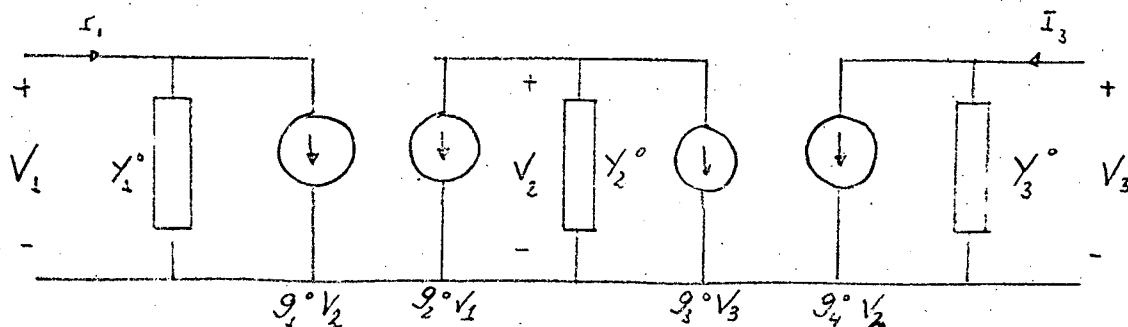


fig. 4.1

Sendo

$$Y_1^{\circ}(s) = k_0 + \frac{k_1 s}{s + \sigma} \quad 4.1.2$$

$$Y_2^{\circ}(s) = - \frac{g_1 g_2}{k_2} \quad 4.1.3$$

$$Y_3^{\circ}(s) = \frac{g_3^{\circ} g_4^{\circ}}{g_1^{\circ} g_2^{\circ}} \cdot \frac{k_2 s}{c} \quad 4.1.4$$

e que

$$H = - \frac{g_2^{\circ}}{g_3^{\circ}} c \quad 4.1.5$$

$$k_0 = \frac{b}{\sigma c} \quad 4.1.6$$

$$k_1 = \frac{\sigma^2 - a\sigma + b}{\sigma(\sigma - c)} \quad 4.1.7$$

$$k_2 = \frac{c^2 - ac + b}{c(c - \sigma)} \quad 4.1.8$$

As quatro equações 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 e 4.1.8 possuem as seguintes incógnitas  $K_0, K_1, K_2, K_3, g_1, g_2, g_3, g_4, c$ , ou seja, têm quatro graus de liberdade, portanto é lícito se pensar que uma escolha adequada nos permite minimizar a sensibilidade. Observe-se que a única especificação é com relação a  $Z_{21}(s)$ , ou seja, caso também tivéssemos especificado, por exemplo  $Y_{in}(s)$ , o número de incógnitas iria diminuir. Nossa meta é então determinar a função  $F$  e procurar minimizá-la.

De acordo com o apêndice A os parâmetros  $Y$  da fig. 4.1 são:

$$Y_{11}(s) = k_0 + \frac{k_1 s}{s + \sigma} - \frac{g_1^{\circ} g_2^{\circ}}{Y_2^{\circ}} \quad 4.1.9$$

$$Y_{12}(s) = - \frac{g_1^{\circ} g_3^{\circ}}{Y_2^{\circ}} \quad 4.1.10$$

$$Y_{21}(s) = - \frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} \quad 4.1.11$$

$$Y_{22}(s) = Y_3^{\circ}(s) - \frac{g_3^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} \quad 4.1.12$$

Substituindo os valores das equações 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 e 4.1.8 em 4.1.9, 4.1.10, 4.1.11 e 4.1.12 vem que

$$Y_{11}(s) = k_0 + \frac{k_1 s}{s+c} + k_2 \quad 4.1.13$$

$$Y_{12}(s) = \frac{g_3^{\circ}}{g_2^{\circ}} k_2 \quad 4.1.14$$

$$Y_{21}(s) = \frac{g_1^{\circ}}{g_1^{\circ}} k_2 \quad 4.1.15$$

$$Y_{22}(s) = k_2 \frac{g_3^{\circ} g_4^{\circ}}{g_1^{\circ} g_2^{\circ}} \left( \frac{s+c}{c} \right) \quad 4.1.16$$

## 4.2 - Formulação do Problema

Nosso objetivo é determinar as condições para que a função  $F$  definida no capítulo I seja minimizada. Para tanto vamos calcular a função  $F_1$

$$F_1 = \sum_{i=1}^n S g_i Z_{2i}(s) \quad 4.2.1$$

Substituindo as expressões da sensibilidade obtidas no Apêndice B em 4.2.1 vem

Calculando o valor de  $F$  dado por

$$F = \int_{\omega_0}^{\omega_1} |F_1|^2 d\omega$$

e levando-se em consideração o Apêndice C que mostra ser a

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^n}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} d\omega > 0 \quad \text{para } n > 0, \text{ e ainda a expres-}$$

são 4.2.4 temos:

$$F = \int_{\omega_0}^{\omega_1} 4(K_0\sigma)^2 \frac{\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1} 4(K_0 + K_1)^2 \frac{\omega^4}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} d\omega$$

$$\text{Onde } \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} d\omega = G_1 \text{ e } \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^4}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} d\omega = G_2$$

Temos que

$$F = 4(K_0\sigma)^2 G_1 + 4(K_0 + K_1)^2 G_2$$

4.2.5

Reescrevendo a expressão 4.2.5 vem

$$F = K_0^2 [4\sigma^2 G_1 + 4G_2] + 8K_0 K_1 G_1 + 4G_2 K_1^2$$

Substituindo os valores de  $K_0$  e  $K_1$  vem

$$F = \frac{b^2(4\sigma^2 G_1 + 4G_2)}{\sigma^2 c^2} + \frac{8G_2 b(\sigma^2 - a\sigma + b)}{\sigma^2 c(\sigma - c)} + \frac{4G_2(\sigma^2 - a\sigma + b)^2}{\sigma^2(\sigma - c)^2}$$

Levando-se em conta que  $G_1, G_2$  são maiores que zero, temos que:

$$D_1 = \frac{b^2(4\sigma^2 G_1 + 4G_2)}{\sigma^2} > 0 ; \quad D_2 = \frac{8G_2 b(\sigma^2 - a\sigma + b)}{\sigma^2} \leq 0$$

$$D_3 = \frac{4G_2(\sigma^2 - a\sigma + b)^2}{\sigma^2} > 0$$

Reescrevendo a expressão de F temos

$$F = \frac{D_1}{c^2} + \frac{D_2}{c(\sigma-c)} + \frac{D_3}{(\sigma-c)^2}$$

$$F = \frac{c^2(D_1 - D_2 + D_3) + c\sigma(D_2 - 2D_1) + D_1\sigma^2}{c^2(\sigma-c)^2}$$

Chamando

$$M_1 = D_1 - D_2 + D_3 \leq 0 \quad ; \quad M_2 = \sigma(D_2 - 2D_1) \leq 0$$

$$M_3 = D_1\sigma^2 > 0$$

Temos que

$$F = \frac{c^2 M_1 + c M_2 + M_3}{c^2 (\sigma - c)^2}$$

4.2.6

Portanto a função F depende apenas do valor de  $c$ , um resultado muito interessante tendo em vista o problema ter quatro graus de liberdade.

#### 4.3 - Análise e minimização da função F

A função

$$F = \frac{c^2 M_1 + c M_2 + M_3}{c^2 (\sigma - c)^2}$$

4.3.1



onde

$$M_1 = D_1 + D_2 + D_3$$

$$M_2 = (-2D_1 + D_2)$$

$$M_3 = \sigma^2 D_1$$

e que

$$D_1 = \frac{b^2(4\sigma^2 G_1 + 4G_2)}{\sigma^2}$$

$$D_2 = \frac{8G_2 b(\sigma^2 - a\sigma + b)}{\sigma^2}$$

$$D_3 = \frac{4G_2(\sigma^2 - a\sigma + b)^2}{\sigma^2}$$

Sendo que  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  são sempre maiores que zero.

Portanto para

$$\begin{array}{ll} c = 0 & F = \infty \\ c = \sigma & F = -\infty \end{array}$$

Para que  $F = -\infty$  para  $c = \sigma$  é necessário que  $c M_1 + c M_2 + M_3$  tenha uma raiz real e positiva ou seja:

$$\text{Disc} = M_2^2 - 4 M_1 M_3$$

Substituindo os valores vem

$$\text{Disc} = (-2D_1 + D_2)^2 - 4(D_1 + D_2 + D_3) D_1$$

$$\text{Disc} = 4D_1^2 + 4D_1 D_2 + D_2^2 - 4D_1^2 - 4D_1 D_2 - 4D_1 D_3$$

$$\text{Disc} = D_2^2 - 4D_1 D_3$$

ou ainda

$$\text{Disc} = \sigma^2 \left[ \frac{64 G_2^2 b^2 (\sigma^2 a \sigma + b)^2}{\sigma^4} - \frac{4 b^2 (4 \sigma^2 G_1 + 4 G_2)}{\sigma^2} + \frac{4 G_2 (\sigma^2 a \sigma + b)^2}{\sigma^2} \right]$$

$$\text{Disc} = \frac{(\sigma^2 a \sigma + b)^2}{\sigma^2} \left[ 64 G_2^2 b^2 - 16 b^2 G_2 (4 \sigma^2 G_1 + 4 G_2) \right]$$

$$\text{Disc} = \frac{(\sigma^2 a \sigma + b)^2}{\sigma^2} \left[ -64 b^2 \sigma^2 G_1 G_2 \right]$$

Como  $G_1, G_2$  são maiores que zero Disc será sempre menor que ze ro, teremos sempre raízes imaginárias, então a função F terá uma curva conforme representado na fig. 4.2

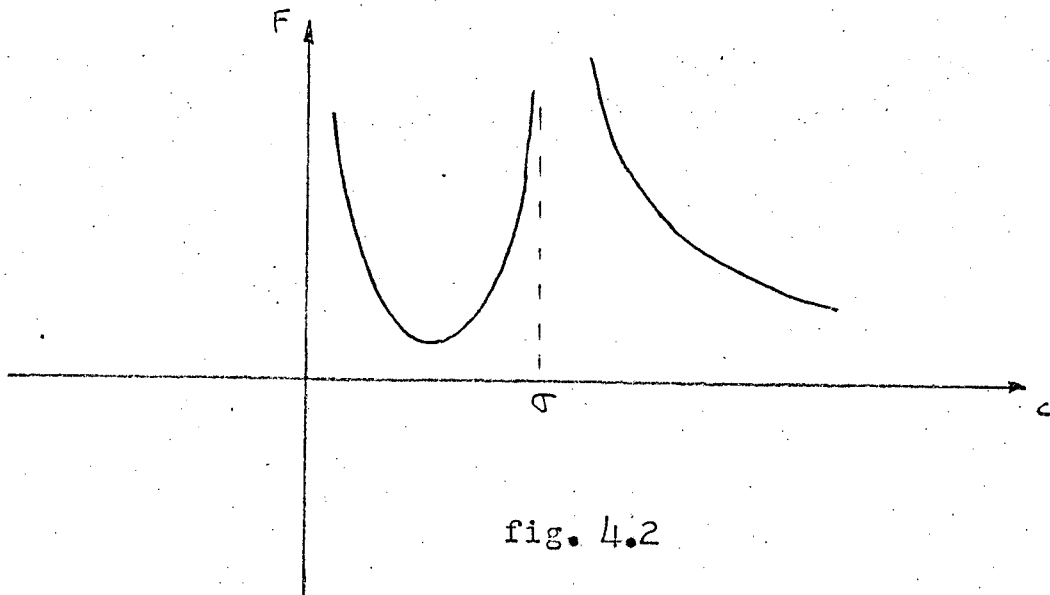


fig. 4.2

o que nos mostra possuir um mínimo para  $c < \sigma$ , ou seja a condição necessária para a realização do zero de transmissão quando  $\sigma^2 a \sigma + b > 0$ , se  $\sigma^2 a \sigma + b < 0$ , devemos escolher o máximo valor possível de  $c$  para que tenhamos melhora na sensibilidade.

### Minimização da função F

Calculando os extremos da função F ou seja

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0 \text{ vem:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \frac{(2cM_1 + M_2)c^2(\sigma - c)^2 [2c(\sigma - c)^2 - 2c^2(\sigma - c)] [c^2M_1 + M_2c + M_3]}{c^4(\sigma - c)^4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \frac{(2cM_1 + M_2)(\sigma - c)c - (2\sigma - 4c)(c^2M_1 + M_2c + M_3)}{c^3(\sigma - c)^3}$$

4.3.1

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0 \text{ vem de 4.3.1}$$

$$2c^3M_1 + 3c^2M_2 + c(4M_3 - M_2\sigma) - 2\sigma M_3 = 0$$

### 4.4 - Conclusão

Vimos portanto que na síntese de  $Z_{21}(s)$  do segundo grau com um zero de transmissão, apenas a escolha adequada do valor de  $c$ , nos permite minimizar a sensibilidade.

## CAPÍTULO V

Minimização da sensibilidade pelo uso de um circuito realimentado.

### 5.1 - Introdução

Nosso objetivo neste capítulo é minimizar a sensibilidade do circuito da figura 5.1 pela modificação desta estrutura realimentando-a com a finalidade de melhorar a sensibilidade conforme a figura 5.2, porém com a condição de serem equivalentes ou seja mesmos  $Z_{21}(s)$ ,  $Y_{in}(s)$ ,  $Y_{out}(s)$ , etc.

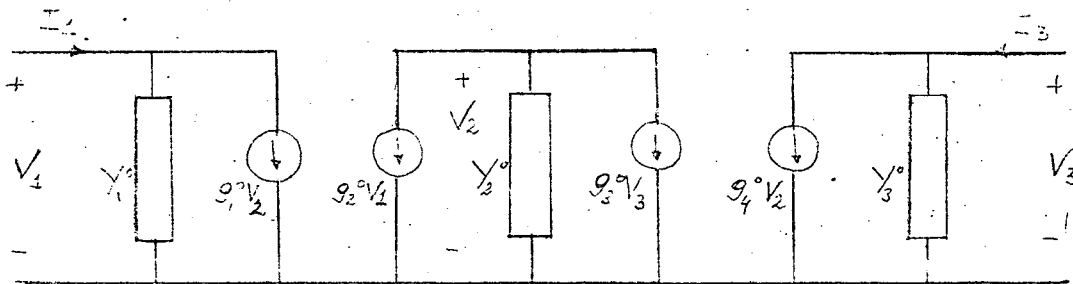


fig. 5.1

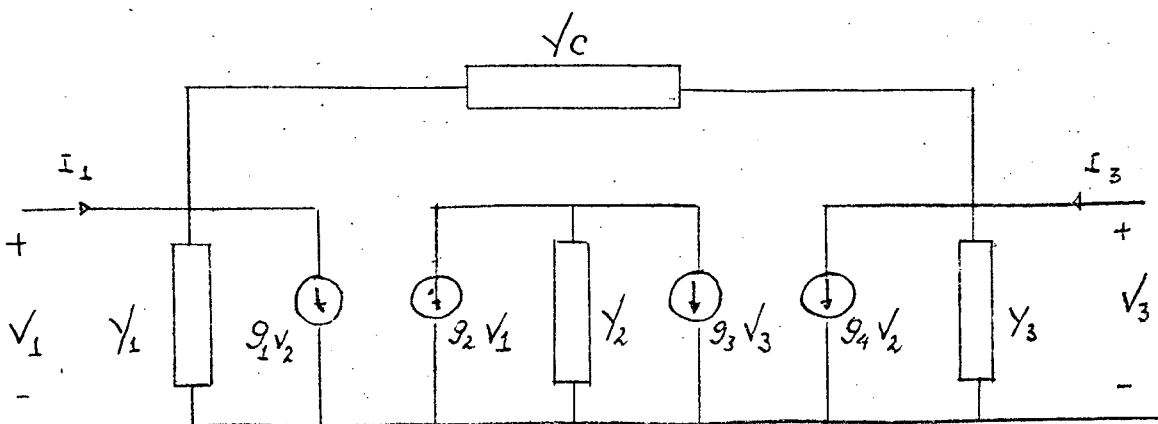


fig. 5.2

Escrevendo os parâmetros  $Y$  do circuito da fig. 5.1 vem, conforme Apêndice A

$$Y_{11}(s) = Y_1^0 - \frac{g_1^0 g_2^0}{Y_2^0}$$

$$Y_{12}(s) = - \frac{g_1^0 g_3^0}{Y_2^0}$$

$$Y_{21}(s) = - \frac{g_2^0 g_4^0}{Y_2^0}$$

$$Y_{22}(s) = Y_3^0 - \frac{g_3^0 g_4^0}{Y_2^0}$$

É para o circuito realimentado da fig. 5.2 conforme apêndice A e expressão 3.2.5 vem

$$Y_{11}(s) = Y_1 - \frac{g_1 g_2}{Y_2} + Y_c$$

$$Y_{12}(s) = - \frac{g_1 g_3}{Y_2} - Y_c$$

$$Y_{21}(s) = - \frac{g_2 g_4}{Y_2} - Y_c$$

$$Y_{22}(s) = Y_3 - \frac{g_3 g_4}{Y_2} + Y_c$$

Onde para o circuito da fig. 5.1 temos os seguintes valores determinados pela síntese

$$\tilde{Z}_{21}(s) = \frac{f(s+c)}{s^2+as+b}, \quad f = -\frac{g_2^0 c}{g_3^0}$$

$$K_0 = \frac{b}{cc}, \quad K_1 = \frac{c^2-ac+b}{c(c-c)}, \quad K_2 = \frac{c^2-ac+b}{c(c-c)}$$

$$Y_1^0 = K_0 + \frac{K_1 s}{s+c}, \quad Y_2^0 = -\frac{g_1^0 g_2^0}{K_2}$$

$$Y_3^0 = \frac{g_3^0 g_4^0}{g_1^0 g_2^0} \frac{K_2 s}{c}$$

## 5.2 - Formulação do Problema.

Para que os circuitos das fig. 5.1 e 5.2 sejam equivalentes é necessário que os parâmetros  $[Y]$  do circuito não realimentado sejam iguais aos do circuito realimentado, e portanto devemos ter que:

$$Y_1^0 - \frac{g_1^0 g_2^0}{Y_2^0} = Y_1 - \frac{g_1 g_2}{Y_2} + Y_c \quad 5.2.1$$

$$-\frac{g_1^0 g_3^0}{Y_2^0} = -\frac{g_1 g_3}{Y_2} - Y_c \quad 5.2.2$$

$$-\frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = -\frac{g_2 g_4}{Y_2} - Y_c \quad 5.2.3$$

$$Y_3^{\circ} - \frac{g_3^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = Y_3 - \frac{g_3 g_4}{Y_2} + Y_c \quad 5.2.4$$

Estas quatro equações tem como incógnitas  $Y_1, Y_2, Y_3, g_1, g_2, g_3, g_4$  e  $Y_c$ , ou seja oito incógnitas. Analizando as equações 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 e 5.2.4, sabendo-se que os  $g_i$  são números reais, podemos escrever, dividindo 5.2.2. por 5.2.3

$$a \triangleq \frac{g_1^{\circ} g_3^{\circ}}{g_2^{\circ} g_4^{\circ}} = \frac{\frac{g_1 g_2}{Y_2} + Y_c}{\frac{g_2 g_4}{Y_2} + Y_c} \quad \text{onde } a = \text{constante}$$

$$a = \frac{g_1 g_2 + Y_2 Y_c}{g_2 g_4 + Y_2 Y_c} \quad a g_2 g_4 + a Y_2 Y_c = g_1 g_2 + Y_2 Y_c$$

$$\therefore Y_2 Y_c (a - 1) = g_1 g_2 - a g_2 g_4$$

vem

$$Y_c = \frac{a g_2 g_4 - g_1 g_2}{1 - a} \cdot \frac{1}{Y_2} \quad 5.2.5$$

Admitindo que tôdas as admitâncias devem ser RC, pela equação 5.2.5 se  $Y_2$  é RC então  $Y_c$  será RL, ou seja somente quando  $Y_2$  for real é possível realimentarmos com um circuito passivo. De acordo com o item 2.4  $Y_2$  é sempre um número real e assim é possível realimentarmos com um circuito passivo.

5.3 - Restrições

Considerando a grande dificuldade se considerarmos as 8 incógnitas vamos admitir que  $Y_1^{\circ} = Y_1$  e  $Y_3^{\circ} = Y_3$ , o que nos reduz o número de incógnitas para 6 e as equações 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 e 5.2.4 passam a ser

$$- \frac{g_1^{\circ} g_2^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = - \frac{g_1 g_2}{Y_2} + Y_c \quad 5.3.1$$

$$- \frac{g_1^{\circ} g_3^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = - \frac{g_1 g_3}{Y_2} - Y_c \quad 5.3.2$$

$$- \frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = - \frac{g_2 g_4}{Y_2} - Y_c \quad 5.3.3$$

$$- \frac{g_3^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = - \frac{g_3 g_4}{Y_2} + Y_c \quad 5.3.4$$

Analisando estas equações verificamos que a multiplicação de 5.3.2 por 5.3.3 deve ser igual a multiplicação de 5.3.1 por 5.3.4 ou seja

$$\left( \frac{g_1 g_2}{Y_2} - Y_c \right) \left( \frac{g_3 g_4}{Y_2} - Y_c \right) = \left( \frac{g_1 g_3}{Y_2} + Y_c \right) \left( \frac{g_2 g_4}{Y_2} + Y_c \right)$$

$$g_1 g_2 + g_1 g_3 = - (g_2 g_4 + g_3 g_4) \quad g_1 (g_2 + g_3) = - g_4 (g_2 + g_3)$$

que para ser satisfeita devemos ter

$$g_1 = -g_4$$

ou ainda

$g_3 (g_1 + g_4) = -g_2 (g_1 + g_4)$  que será satisfeita se

$$g_2 = -g_3$$



Considerando  $g_1 = -g_4$  e reescrevendo a equação 5.3.3 vem

$$+ \frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = - \frac{g_1 g_2}{Y_2} + Y_c$$

e comparando com a 5.3.1 concluímos que

$$\frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = - \frac{g_1^{\circ} g_2^{\circ}}{Y_2^{\circ}}$$

ou seja

$$\boxed{g_1^{\circ} = -g_4^{\circ}}$$

Se considerarmos agora que  $g_2 = -g_3$  e reescrevendo a equação 5.3.2 vem

$$+ \frac{g_1^{\circ} g_3^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = - \frac{g_1 g_2}{Y_2} + Y_c$$

portanto é igual a equação 5.3.1 ou seja

$$\frac{g_1^{\circ} g_3^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = - \frac{g_1^{\circ} g_2^{\circ}}{Y_2^{\circ}}$$

$$\boxed{g_2^{\circ} = -g_3^{\circ}}$$

Isto nos leva a concluir que ao fazermos a restrição de que  $Y_1^{\circ} = Y_1$  e  $Y_3^{\circ} = Y_3$  então obrigatoriamente no processo de síntese devemos adotar

$$\boxed{g_1^{\circ} = -g_4^{\circ}} \quad 5.3.5$$

ou  $\boxed{g_2^{\circ} = -g_3^{\circ}} \quad 5.3.6$

Pelo processo de síntese adotado podemos sempre escolher  $\boxed{g_1^{\circ} = -g_4^{\circ}}$  ou  $\boxed{g_2^{\circ} = -g_3^{\circ}}$

Assim sendo o número de nossas incógnitas passa a ser cinco. Vamos determinar quais das equações 5.3.5 ou 5.3.6 devemos adotar.

Pelo processo de síntese sabemos que  $H = -\frac{g_2^\circ}{g_3^\circ} c$  e que

$Y_3^\circ = \frac{g_3^\circ g_4^\circ}{g_1^\circ g_2^\circ} \frac{k_2 s}{c}$  portanto como  $H, c > 0$  então devemos ter que  $g_2^\circ$  deve ser de sinal contrário a  $g_3^\circ$ . Levando-se em conta que  $Y_3^\circ$  é a admitância de um capacitor, deve ser maior que zero, portanto se:

$K_2 < 0$  então  $g_1^\circ$  deve ser de igual sinal de  $g_4^\circ$

$K_2 > 0$  então  $g_1^\circ$  deve ser de sinal contrário a

$g_4^\circ$ .

Devemos pois estudar estas duas possibilidades adotando para

$K_2 > 0$   $g_1^\circ = -g_4^\circ$  e para  $K_2 < 0$   $g_2^\circ = -g_3^\circ$

#### 5.4 - Determinação da função $F_1$

5.4.1 - Caso  $K_2 > 0$  ou seja  $g_1^\circ = -g_4^\circ$

De acordo com o apêndice B temos as seguintes expressões da sensibilidade

$$S_{g_1}^{z_{21}(s)} = g_1 \frac{g_3 y_{21} - g_2 y_{22}}{D y_2}$$

$$S_{g_2}^{z_{21}(s)} = g_2 \frac{y_{22} y_{11} g_4 - y_{21} y_{22} g_1}{D y_{21} y_2}$$

$$S_{g_3}^{z_{21}(s)} = g_3 \frac{g_1 y_{21} - g_4 y_{11}}{D y_2}$$

$$S_{g_4}^{z_{21}(s)} = g_4 \frac{y_{11} (y_{22} g_2 - y_{21} g_3)}{D y_2 y_{21}}$$

onde

$$D = \gamma_{12} \gamma_{21} - \gamma_{11} \gamma_{22}$$

Levando em conta que

$$F_1 = \sum_{i=1}^n S g_i Z_{21}(s)$$

$$F_1 = \frac{2}{D \gamma_2} \left[ g_1 g_3 (\gamma_{11} + \gamma_{21}) - g_1 g_2 \left( \gamma_{22} + \frac{\gamma_{11} \gamma_{22}}{\gamma_{21}} \right) \right]$$

$$F_1 = \frac{2}{D \gamma_2} \left[ g_1 g_3 (\gamma_{11} + \gamma_{21}) - g_1 g_2 (\gamma_{11} + \gamma_{21}) \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{21}} \right]$$

$$F_1 = \frac{2(\gamma_{11} + \gamma_{21})}{D \gamma_2} \left[ \frac{g_1 g_3}{\gamma_2} - \frac{g_1 g_2}{\gamma_2} \cdot \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{21}} \right]$$

Levando-se em conta as expressões 5.3.2 e 5.3.3,

$$Z_{21}(s) = \frac{\gamma_{21}(s)}{D}$$

e que:  $\gamma_{11} + \gamma_{21} = \gamma_1^0 - \frac{g_1^0 g_2^0}{\gamma_2^0} - \frac{g_2^0 g_4^0}{\gamma_2^0} = \gamma_1^0$  pois  $g_1^0 = -g_4^0$   
temos que

$$F_1 = \frac{2 \gamma_1^0 Z_{21}(s)}{\gamma_{21}} \left[ \frac{g_1^0 g_3^0}{\gamma_2^0} - \gamma_1^0 - \left( \frac{g_1^0 g_2^0}{\gamma_2^0} + \gamma_1^0 \right) \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{21}} \right] \quad 5.4.1$$

Sabendo-se que  $H = -\frac{g_2^0 c}{g_3^0}$  e  $\frac{g_1^0 g_2^0}{\gamma_2^0} = -K_2$  conforme

foi obtido no apêndice C que

$$F = L_1 \left[ B_1^2 (D_3 A_1^2 + D_2 A_2^2) + B_2^2 (D_2 A_1^2 + D_1 A_2^2) \right]$$

onde

$$A_2 = k_2 \sigma$$

$$L_1 = 4/k_2^2$$

$$B_2 = \gamma_c (H-c)$$

$$B_1 = \gamma_c - k_2$$

$$D_3 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^4}{f(\omega)} d\omega$$

$$A_1 = k_0 + k_1$$

$$D_2 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^2}{f(\omega)} d\omega$$

$$D_1 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{f(\omega)}$$

Se chamarmos  $L_1 (D_3 A_1^2 + D_2 A_2^2) = E_1$  e  $L_1 (D_2 A_1^2 + D_1 A_2^2) = E_2$

temos

$$F = B_1^2 E_1 + B_2^2 E_2$$

Substituindo os valores  $B_1$  e  $B_2$  obtidos no apêndice C, vem

$$F = (-k_2 + \gamma_c)^2 E_1 + [\gamma_c (H-c)]^2 E_2$$

$$F = E_1 (k_2^2 - 2k_2 \gamma_c + c^2 \gamma_c^2) + \gamma_c^3 (H-c)^2 E_2$$

$$F = \gamma_c^2 \left[ E_1 + (H-c)^2 E_2 \right] + \gamma_c [-2k_2 E_1] + E_1 k_2^2$$

onde

$$G_1 = E_1 + (H-c)^2 E_2$$

$$G_2 = -2k_2 E_1$$

$$G_3 = k_2^2$$

$$F = Y_c^2 G_1 + Y_c G_2 + G_3$$

onde  $G_1$  e  $G_3 > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_c} = 2Y_c G_1 + G_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial Y_c^2} = 2G_1 \quad \text{portanto é um mínimo.}$$

$$\boxed{Y_c = -\frac{G_2}{2G_1}} \quad \text{e} \quad G_2 = -2k_2 E_1 \quad \text{onde} \quad 2E_1 = L_2$$

e  $L_2 > 0$ ,  $\therefore G_2 = -L_2 k_2$  como  $k_2 > 0$ ,  $G_2 < 0$  e  $Y_c > 0$   
sendo possível realimentar com um circuito passivo.

#### 5.4.2 - Caso em que $k_2 < 0$

Devemos escolher  $g_2^o = -g_3^o$  resultando em um  $g_2 = -g_3$  e  $g_1, g_4$  de mesmo sinal.

Das expressões da sensibilidade do Apêndice B calculando o valor de  $F_1$  vem

$$F_1 = \frac{2}{D Y_2} \left[ -g_1 g_2 (Y_{21} + Y_{22}) + g_2 g_4 \frac{Y_{11}}{Y_{21}} (Y_{22} + Y_{21}) \right]$$

$$F_1 = \frac{2}{D Y_2} (Y_{22} + Y_{21}) \left[ -g_1 g_2 + g_2 g_4 \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \right] \quad 5.4.1$$

Sabendo-se que:

$$Y_{22} + Y_{21} = Y_3^{\circ} + \frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} - \frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = Y_3^{\circ}$$

e ainda que

$$\frac{g_1^{\circ} g_2^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = \frac{g_1 g_2}{Y_2} - Y_c \quad \therefore \quad \frac{g_1 g_2}{Y_2} = -k_2 + Y_c$$

$$\frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = \frac{g_2 g_4}{Y_2} + Y_c \quad \therefore \quad \frac{g_2 g_4}{Y_2} = -Y_{21} - Y_c$$

Substituindo em 5.4.1 vem

$$F_i = \frac{2}{D} Y_3^{\circ} \left[ k_2 - Y_c - Y_{11} - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} Y_c \right]$$

Substituindo o valor de  $Y_{11}$

$$F_i = -\frac{2}{D} Y_3^{\circ} \left[ Y_c + k_0 + \frac{k_1 s}{s + \sigma} + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} Y_c \right]$$

Como  $Y_{21} = -\frac{g_2^{\circ} g_4^{\circ}}{Y_2^{\circ}}$  e  $Y_2^{\circ} = -\frac{g_1^{\circ} g_2^{\circ}}{k_2}$

$Y_{21} = \frac{g_4^{\circ}}{g_1^{\circ}} k_2$  chamando  $\frac{g_4^{\circ}}{g_1^{\circ}} = d$  vem,

onde  $d > 0$  pois o sinal de  $g_1$  é igual ao de  $g_4$

$$F_1 = - \frac{2 Y_3^0}{D} \left[ Y_c + K_0 + K_1 s + \left( \frac{K_0}{d k_2} + \frac{K_1 s}{d k_2 (s+\sigma)} + \frac{1}{d} \right) Y_c \right]$$

Sabendo-se que  $Z_{21}(s) = \frac{Y_{21}(s)}{D}$  ,  $Z_{21}(s) = \frac{H(s+\sigma)}{s^2 + as + b}$

e  $Y_3^0 = - \frac{d k_2 s}{c}$  e  $H = c$  vem,

$$F_1 = \frac{2s}{s^2 + as + b} \left\{ Y_c (s+\sigma) + K_0 (s+\sigma) + K_1 s + Y_c \left[ \frac{K_0 (s+\sigma) + K_1 s}{d k_2} + \frac{K_2 (s+\sigma)}{d k_2} \right] \right\}$$

$$F_1 = \frac{2}{s^2 + as + b} \left\{ s \left[ Y_c + K_0 + K_1 + Y_c \left( \frac{K_0 + K_1 + K_2}{d k_2} \right) \right] + Y_c \sigma + K_0 \sigma + \frac{K_0 \sigma}{d k_2} + \frac{\sigma Y_c}{d} \right\}$$

Chamando

$$A = Y_c + K_0 + K_1 + Y_c \left( \frac{K_0 + K_1 + K_2}{d k_2} \right) \quad \text{e}$$

$$B = Y_c \sigma + K_0 \sigma + \frac{K_0 \sigma}{d k_2} Y_c + \frac{\sigma Y_c}{d}$$



vem que:

$$F_1 = \frac{2s(sA + B)}{s^2 + as + b}$$

calculando o módulo ao quadrado temos

$$F_1 = 4 \left[ \frac{A^2 \omega^4 + B^2 \omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \right]$$

Calculando o valor de

$$F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F_1|^2 d\omega \text{ e ainda as expressões}$$

obtidas no apêndice C temos

$$F = (D_3 A^2 + D_2 B^2) 4$$

Reescrevendo as expressões de A e B temos

$$A = Y_c \left( 1 + \frac{k_0 + k_1 + k_2}{d k_2} \right) + k_0 + k_1$$

$$B = Y_c \left( \sigma + \frac{k_0 \sigma}{d k_2} + \frac{\sigma}{d} \right) + k_0 \sigma$$

Chamando

$$E = 1 + \frac{k_0 + k_1 + k_2}{d k_2}$$

$$F = k_0 + k_1$$

$$L = \sigma \left( 1 + \frac{k_0}{d k_2} + \frac{1}{d} \right)$$

$$M = k_0 \sigma$$

vem

$$A = Y_c E + F$$

$$B = Y_c L + M$$

onde  $F, M > 0$



$$F = \left[ D_3 \left( Y_c^2 E^2 + 2 E F Y_c + F^2 \right) + D_2 \left( L^2 Y_c^2 + 2 L M Y_c + M^2 \right) \right]^{1/4}$$

$$F = \left[ Y_c^2 \left( D_3 E^2 + D_2 L^2 \right) + 2 Y_c \left( D_3 E F + D_2 L M \right) + D_3 F^2 + D_2 M^2 \right]^{1/4}$$

Calculando o mínimo desta função, que depende apenas de  $Y_c$  temos

$$\frac{\partial F}{\partial Y_c} = 2 Y_c \left( D_3 E^2 + D_2 L^2 \right) + 2 \left( D_3 E F + D_2 L M \right)$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Y_c^2} = 2 \left( D_3 E^2 + D_2 L^2 \right)$$

Como temos que  $2(G_1 E^2 + G_2 L^2) > 0$  então é sempre um mínimo e isto ocorre para

$$Y_c = - \frac{(D_3 E F + D_2 L M)}{D_3 E^2 + D_2 L^2}$$

Para que seja possível realimentar com um circuito passivo deve mos ter que

$$G_2 = D_3 E F + D_2 L M \quad \text{deve ser} < 0$$

Portanto

$$\frac{E}{L} + \frac{D_2 M}{D_3 F} < 0 \quad \therefore \frac{E}{L} < - \left( \frac{D_2 M}{D_3 F} \right)$$

Substituindo os valores de  $E, L$  vem

$$1 + \frac{K_1}{\alpha K_2 + K_2 + K_0} < -1 - \left( \frac{D_2 M}{D_3 F} \right) \sigma$$

onde chamando

$$p = 1 + \frac{D_2 M}{D_3 F} \sigma$$

vem que

$$K_1 < - \rho \left[ K_2 (d+1) + K_0 \right]$$

$$d < - \frac{K_1 + \rho(K_0 + K_2)}{\rho \cdot K_2}$$

### 5.5 - Conclusões

Do exposto neste capítulo, quando não tivermos liberdade de escolha do valor de  $c$  ou seja  $Yin(s)$  for especificado, a colocação de um resistor de realimentação nos leva a uma melhora na sensibilidade.

CAPÍTULO VI

6.1 - Introdução

Neste capítulo daremos alguns exemplos com a finalidade de compararmos a sensibilidade. Dada uma função transferência  $Z_{21}(s)$ , iremos realizar levando-se em conta as seguintes particularidades: pela determinação do valor ótimo de  $c$ , conforme o capítulo IV, com o  $c$  especificado, utilizando realimentação e realimentar o circuito onde o  $c$  é ótimo. O primeiro exemplo refere-se a uma função "all-pole" do segundo grau onde é possível realizar através de um circuito passivo.

6.2 - Exemplo I

Função "all-pole" do 2º grau

Dado:  $Z_{21}(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 2}$

Do capítulo II temos:

$$\beta = \frac{4b - a^2}{4} \quad e \quad \alpha = \frac{a}{2} \quad \therefore$$

$$\beta = -2 \quad e \quad \alpha = 2 \quad \therefore \beta < 0$$

então podemos realizar por um circuito passivo.

Os parâmetros  $Y$  são:

$$g_1 = \frac{\beta}{h} \quad \therefore g_1 = -1 \quad , \quad g_2 = -1$$

$$Y_{11} = Y_1 = s + 2 \quad , \quad Y_{12} = g_1 = -1$$

$$Y_{21} = g_2 = -1 \quad Y_{22} = -\frac{g_1 g_2}{\beta} (s + \alpha) \quad \therefore$$

$$Y_{22} = \frac{s}{2} + 1$$

$Y_c = -g_1$        $Y_c = 1$       o que nos dá a estrutura da figura 6.1

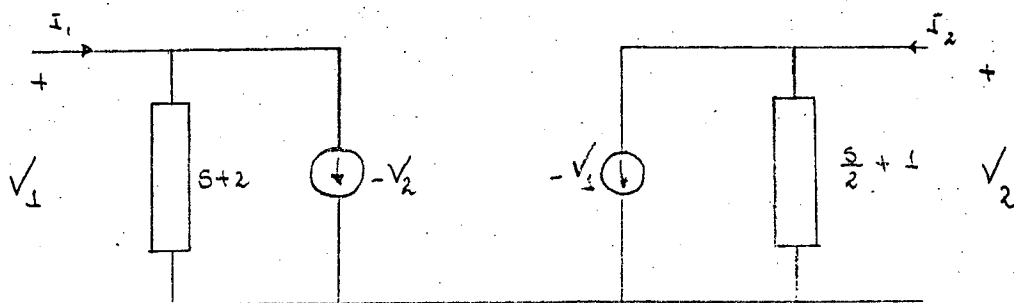


fig. 6.1

que como foi mostrado pode ser transformado no circuito passivo da figura 6.2.

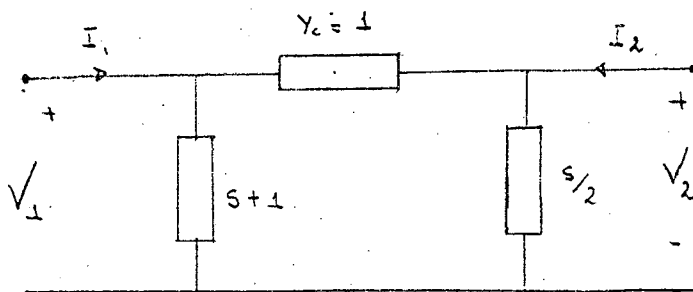


fig. 6.2

### 6.3 Funções com um zero de transmissão e $K_0$ maior que zero.

Dada a função :

$$Z_{21}(s) = \frac{5(s+3)}{s^2 + 3s + 1}$$

Vamos analisar e comparar a sensibilidade, onde na síntese consideramos os seguintes casos:

6.3.1 - o valor de  $c$  foi arbitrado

6.3.2 - o valor de  $c$  é determinado conforme o capítulo IV.

6.3.3. - o valor de  $c$  arbitrado (neste exemplo o mesmo item 6.3.1) e o circuito realimentado conforme o capítulo V.

6.3.4 - utilizando o valor de  $c$  obtido no item 6.3.2, e realimentando o circuito conforme capítulo V.

6.3.1 - Exemplo

$$\text{Dado : } Z_{21}(s) = \frac{5(s+3)}{s^2+3s+1}$$

$$\text{e como } \sigma^2 - a\sigma + b = 9 - 9 + 1 > 0$$

devemos escolher  $c < \sigma$ , tomamos  $c=1$

Conforme capítulo II vem:

$$K_0 = \frac{1}{3}, \quad K_1 = \frac{1}{6}, \quad K_2 = \frac{3}{2}$$

$$Y_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{6(s+3)} \quad \therefore \quad Y_1 = \frac{s+2}{2(s+3)}$$

Adotando  $g_1^0 = -1$ ,  $g_2^0 = 2$ , temos que :  $Y_2^0 = 4/3$ ,  $g_3^0 = -2/5$

$$g_4^0 = 1 \quad \text{e} \quad Y_3^0 = 3s/10$$

O que nos dá o circuito da figura 6.3

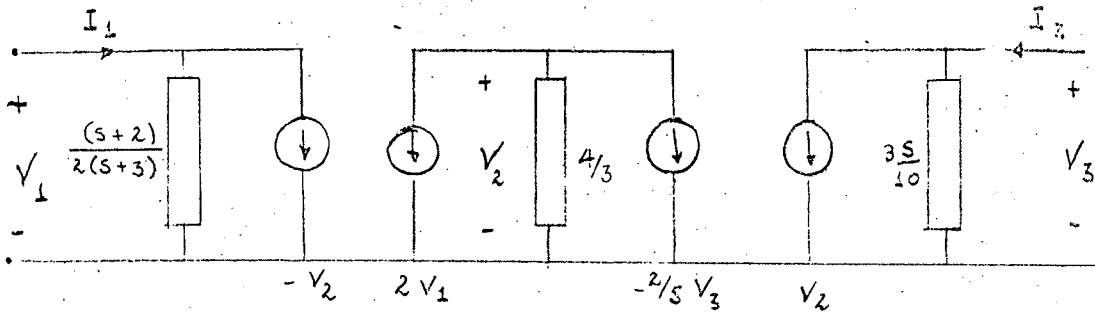


fig. 6.3

Conforme Apêndice B, as expressões da sensibilidade são:

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = - \frac{5(s+3)}{(s^2+3s+1)} \times \frac{3s}{10}$$

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = - \frac{3s(s+3)}{2(s^2+3s+1)}$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = \frac{5(s+3)(s+1)5 \times 3(s+2)}{(s^2+3s+1)(-3) \times 10(s+3)2}$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = \frac{5(s+1)(s+2)}{4(s^2+3s+1)}$$

$$S_{g_3}^{Z_{21}(s)} = - \frac{5(s+3)}{(s^2+3s+1)} \frac{3 \times 5(s+2)}{10 \times 3(s+3)2}$$

$$S_{g_3}^{Z_{21}(s)} = - \frac{5(s+2)}{4(s^2+3s+1)}$$

$$S_{g_4} Z_{21}(s) = \frac{5(s+3)}{s^2+3s+1} - \frac{5}{3} \times \frac{3s}{10}$$

$$S_{g_4} Z_{21}(s) = - \frac{5,5s(s+1,73)}{2(s^2+3s+1)}$$

$$F = 4,53$$

Estas funções sensibilidade estão representadas nos diagramas de Bode em folhas anexas.

6.3.2 - Determinação de  $c$  conforme Cap. IV.

Para a determinação de  $c$  utilizamos o programa do Apêndice D que nos fornece:

$$R_1 = -1,2 \quad A_G = -1,9 \quad B_G = 0,7 \quad H = 13,36$$

portanto

$$c = R_1 - P/3$$

$$c = -1,2 + 3$$

$$c = 1,8$$

Conforme capítulo II vem :

$$K_0 = \frac{1}{5,4} \quad , \quad K_1 = \frac{1}{3,6} \quad , \quad K_2 = 0,535$$

$$Y_1^0 = \frac{(s+1,2)}{2,16(s+3)} \quad , \quad g_1^0 = -1$$

$$Y_2^0 = 0,374 \quad , \quad g_2^0 = 2$$

$$g_3^o = -0,72 \quad , \quad g_4^o = 1$$

$$Y_3^o = 0,1075$$

Determinando os parâmetros Y vem:

$$Y_{11}(s) = \frac{s+2,16}{s+3}$$

$$Y_{12}(s) = -0,193$$

$$Y_{21}(s) = -0,535$$

$$Y_{22}(s) = 0,107(s+1,8)$$

O que nos dá o circuito da figura 6.4

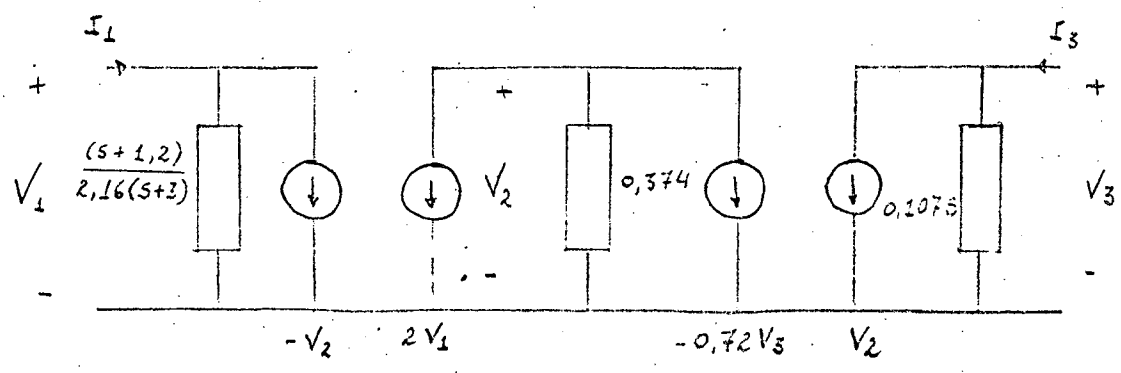


fig. 6.4



Calculando as expressões da sensibilidade, de acordo com o Apêndice B, vem:

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = - \frac{1,07 s (s+3)}{2(s^2+3s+1)}$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = \frac{0,92 (s+1,2)(s+1,8)}{2(s^2+3s+1)}$$

$$S_{g_3}^{Z_{21}(s)} = - \frac{(s+1,2)}{1,2(s^2+3s+1)}$$

$$S_{g_4}^{Z_{21}(s)} = \frac{s(s+1,2)}{2,16(s^2+3s+1)}$$

$$F = 2,22$$

Estas funções sensibilidade estão representadas no gráfico em folhas anexas.

6.3.3 - Valor de  $c$  arbitrado e o circuito realimentado conforme cap. V

Utilizando-se o programa do apêndice D, obtemos os seguintes valores:

$$Y_c = 0,13$$

$$\frac{g_1 g_3}{Y_2} = \frac{g_1 g_3^\circ}{Y_2^\circ} - Y_c \quad \therefore \frac{g_1 g_3}{Y_2} = 0,17$$

$$\frac{g_1 g_2}{Y_2} = \frac{g_1 g_2^\circ}{Y_2^\circ} + Y_c \quad \therefore \frac{g_1 g_2}{Y_2} = -0,47$$

Substituindo nas expressões da sensibilidade obtemos as seguintes funções:

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = Z_{21}(s) \left[ 0,17 - 0,47 \frac{(s+1)}{2} \right]$$

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = \frac{1,18 (s+0,28)(s+3)}{s^2 + 3s + 1}$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = Z_{21}(s) \left[ 0,47 \times \frac{s}{3} \times \frac{s+1}{2} \times \frac{s+2}{2(s+3)} \right]$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{s^2 + 3s + 1}$$

$$S_{g_3}^{Z_{21}(s)} = Z_{21}(s) \left[ -0,17 \times \frac{s}{3} \times \frac{(s+2)}{2(s+3)} \right]$$

$$S_{g_3}^{Z_{21}(s)} = -0,71 \frac{(s+2)}{s^2 + 3s + 1}$$

$$S_{g_4}^{Z_{21}(s)} = Z_{21}(s) \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{1,1(s+1,73)}{s+3} \left[ 0,47 \frac{(s+1)}{2} - 0,17 \right]$$

$$S_{g_4}^{Z_{21}(s)} = \frac{2,16 (s+0,28)(s+1,73)}{s^2 + 3s + 1}$$

Estas funções sensibilidade estão representadas nos diagramas de Bode em folhas anexas.

$$F = 4,08$$

6.3.4 - Utilizando o valor de  $c$  ótimo e realimentando o circuito conforme capítulo V.

Do apêndice B obtemos:

$$Y_c = 0,08$$

Portanto

$$\frac{g_1 g_2}{Y_2} = - 0,43$$

$$\frac{g_1 g_3}{Y_2} = 0,11$$

Conforme apêndice B as expressões da sensibilidade são:

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = \frac{0,43 (s+0,52)(s+3)}{s^2+3s+1}$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = \frac{0,37 (s+1,2)(s+1,8)}{s^2+3s+1}$$

$$S_{g_3}^{Z_{21}(s)} = - 0,48 \frac{(s+1,2)}{s^2+3s+1}$$

$$S_{g_4}^{Z_{21}(s)} = \frac{0,8 (s+0,52)(s+2,16)}{(s^2+3s+1)}$$

$$F = 1,91$$

Os diagramas de Bode estão em folhas anexas.

Conclusão: No presente exemplo a determinação do valor de  $c$  ótimo melhorou a sensibilidade da relação a cada elemento ativo quando minimizamos a função  $F$ .

O aumento percentual de melhora é:

$$p\% = \frac{F_{c=1} - F_{c=1,8}}{F_{c=1,8}} \cdot 100$$

$$p\% = \frac{4,53 - 2,22}{2,22} \cdot 100 = 108\%$$

Quando realimentamos podemos verificar que a melhora não é com relação a cada elemento e sim com relação ao conjunto. O aumento percentual relacionando  $F$  quando  $c=1$  e o circuito realimentado é de

$$p\% = \frac{4,53 - 4,08}{4,08} \cdot 100 = 11\%$$

Podemos relacionar ainda  $c$  ótimo e  $c$  ótimo - realimentado quando utilizamos  $c=1$  e teremos:

$$p\% = \frac{2,22 - 1,91}{1,91} \cdot 100 = 16\%$$

6.4 - Exemplo para  $K_2 < 0$ 

$$\text{Dado } Z_{21}(s) = \frac{(s+4)}{s^2+3s+9}$$

$$\sigma^2 - a\sigma + b = 16 - 12 + 9 = 13$$

então temos  $\sigma > 0 \quad \therefore$

$$c < \sigma$$

6.4.1 -  $c$  arbitrado.

Conforme capítulo II

$$c = 1$$

$$k_0 = 2,25$$

$$k_1 = 1,083$$

$$k_2 = -2,33$$

$$k_2 < 0$$

$$Y_1 = 2,25 + \frac{1,083}{s+4}$$

$$g_1 = -7$$

$$g_2 = -1$$

$$Y_2 = 3$$

$$g_3 = 1$$

$$g_4 = -2,8$$

$$Y_3 = 0,935$$

Os parâmetros  $Y$  são:

$$Y_{11} = \frac{s - 0,32}{s + 4}$$

$$Y_{12} = 2,33$$

$$Y_{21} = -0,93$$

$$Y_{22} = 0,93(s+1)$$

E as expressões da sensibilidade:

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = \frac{(s+4)}{s^2+3s+9} \cdot (-2,33) \left[ 1 - 0,93(s+1) \frac{1}{0,93} \right]$$

$$S_{g_1}^{Z_{21}(s)} = \frac{2,33 s (s+4)}{s^2+3s+9}$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}(s)} = \frac{3,33 (s+1) (s+2,7)}{s^2+3s+9}$$

$$S_{g_3}^{Z_{21}(s)} = \frac{3,33 (s+2,7)}{s^2+3s+9}$$

$$S_{g_4}^{Z_{21}(s)} = \frac{s (s - 0,32)}{s^2+3s+9}$$

$$F = 98,5$$

Os diagramas de Bode das funções sensibilidade estão em folhas anexas.

6.4.2 -  $\underline{c}$  ótimo:

Conforme programa do Apêndice D  $\underline{c}$  ótimo é 2,0

portanto, de acordo com o capítulo II

$$K_0 = 1,12 \quad K_1 = 1,63$$

$$K_2 = -0,255$$

$$g_1 = -7 \quad g_2 = -1$$

$$g_3 = 1 \quad g_4 = -2,8$$

$$Y_1 = \frac{2,75s + 4,48}{s + 4}$$

$$Y_2 = 2,8$$

$$Y_3 = 0,05 \text{ s}$$

E os parâmetros Y

$$Y_{11} = 2,5 \frac{(s+1,4)}{s+4}$$

$$Y_{12} = 0,25$$

$$Y_{21} = -0,1$$

$$Y_{22} = 0,05 (s+2)$$

Expressões da sensibilidade

$$S_{g_1}^{Z_2(s)} = \frac{s(s+4)}{8(s^2+3s+9)}$$

$$S_{g_2}^{Z_2(s)} = \frac{1,25 (s+1,4) (s+2)}{s^2+3s+9}$$

$$S_{g_3}^{Z_2(s)} = \frac{1,38 (s+1,64)}{s^2+3s+9}$$

$$S_{g_4}^{Z_2(s)} = \frac{1,25 s (s+1,4)}{s^2+3s+9}$$

$$F = 42$$

Os diagramas de Bode das funções sensibilidade estão em folhas anexas.



6.4.3 - C arbitrado e o circuito realimentado.

Com os valores dados no exemplo 6.3.1 entramos no programa do Apêndice D para o cálculo de  $Y_c$ . Foi obtido um

$$Y_c = 0.0$$

Ou seja a realimentação não irá melhorar a sensibilidade dentro desta faixa de frequências adotada de 0 à 3. Se tomarmos uma faixa mais ampla, por exemplo, de 0 à 6, obtemos pelo apêndice D

$$D_2 = 0,36$$

$$D_3 = 3,81$$

$$F = PK_1 + PK_2$$

$$F = 3,33$$

$$M = PK_1$$

$$M = 9,0$$

Se o circuito não é realimentado teremos :

$$F_{sr} = 4 \cdot | D_3 \cdot F^2 + D_2 \cdot M^2 |$$

$$F_{sr} = 286,4$$

Para o circuito realimentado

$$F_{cr} = 4 \cdot | Y_c^2 ( D_3 \cdot E^2 + D_2 \cdot L^2 ) + 2 \cdot Y_c ( D_3 \cdot E \cdot F + D_2 \cdot L \cdot M ) + D_3 \cdot F^2 + D_2 \cdot M^2 |$$

$$e \quad Y_c = - \frac{D_3 \cdot E \cdot F + D_2 \cdot L \cdot M}{D_3 \cdot E^2 + D_2 \cdot L^2}$$

Substituindo os valores vem:

$$D3 \cdot E \cdot F + D2 \cdot L \cdot M = - 215$$

$$D3 \cdot E^2 + D2 \cdot L^2 = 1580$$

portanto  $Yc = 0,138$

$$F_{cr} = 176$$

O aumento percentual

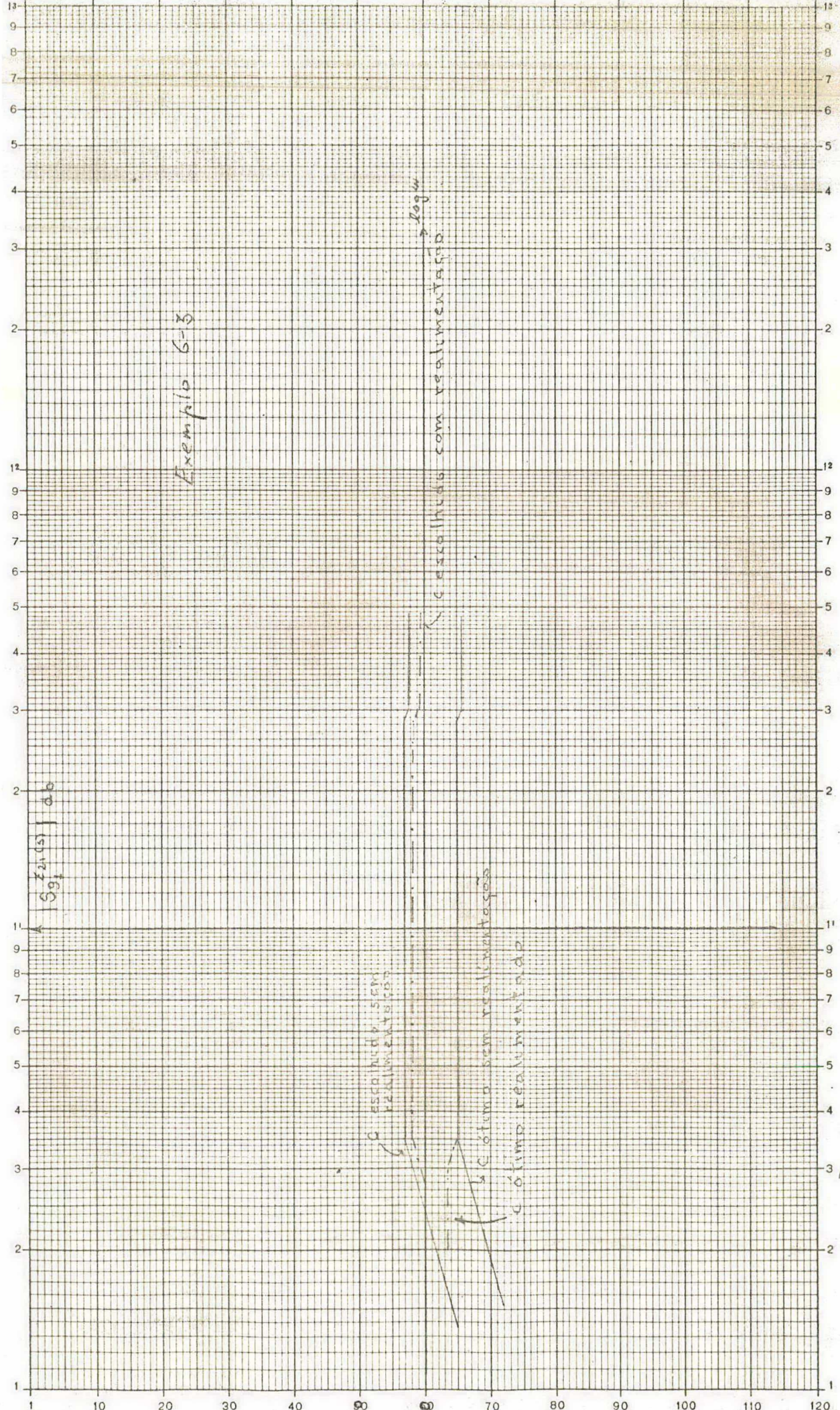
$$Ap = \frac{286 - 176}{176} \times 100$$

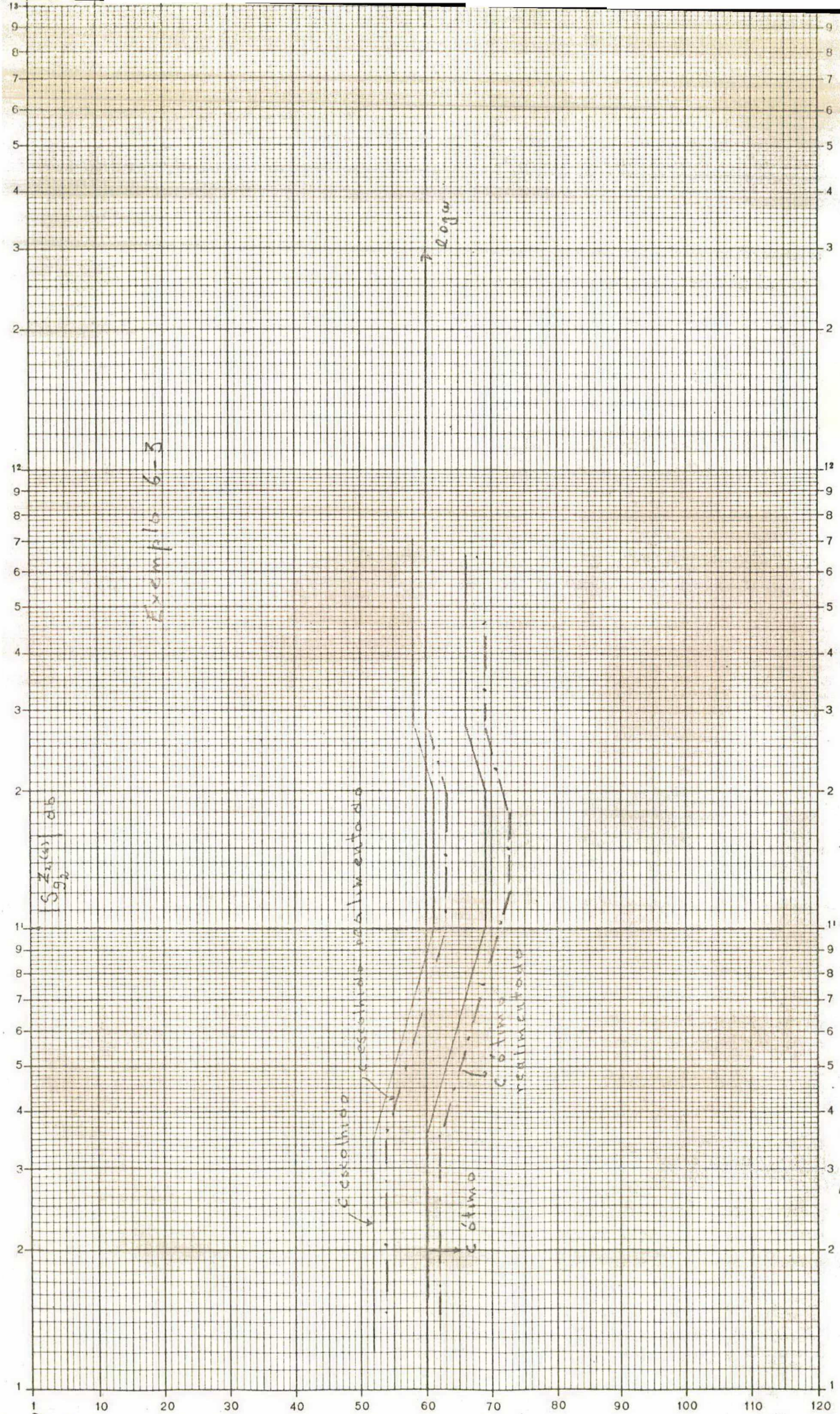
$$Ap = 63 \%$$

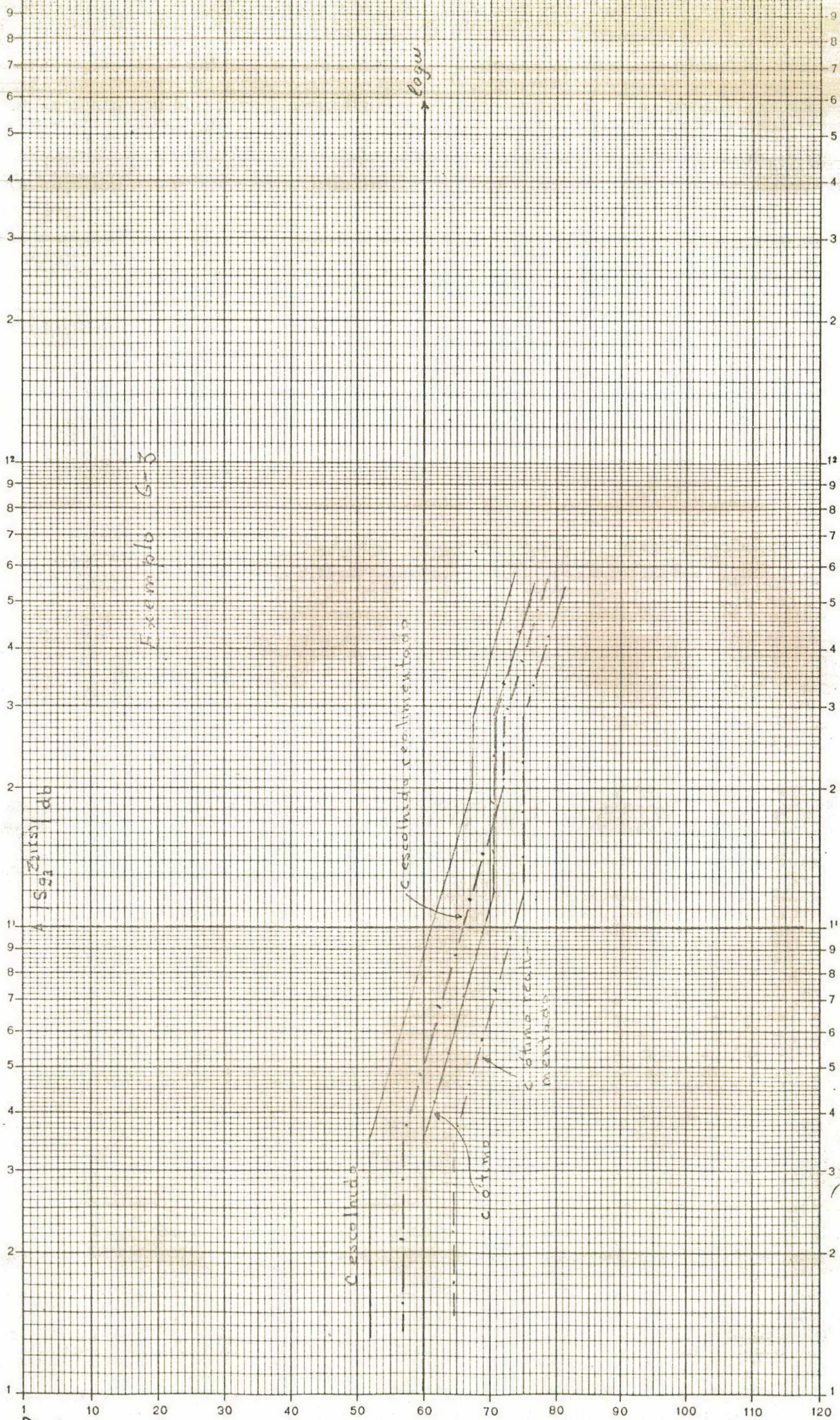
DIAGRAMAS DE BODE

Das funções Sensibilidade

Exemplo 6-3







Exemplo 6-5

$\frac{S_{21}(s)}{S_{22}(s)}$

Crescimento realimentado

logu

Crescimento realimentado

Crescimento

Crescimento

1 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

Exemplo 6-4

Gráfico 1

Gráfico 2

1000

Zizicis  
9/1



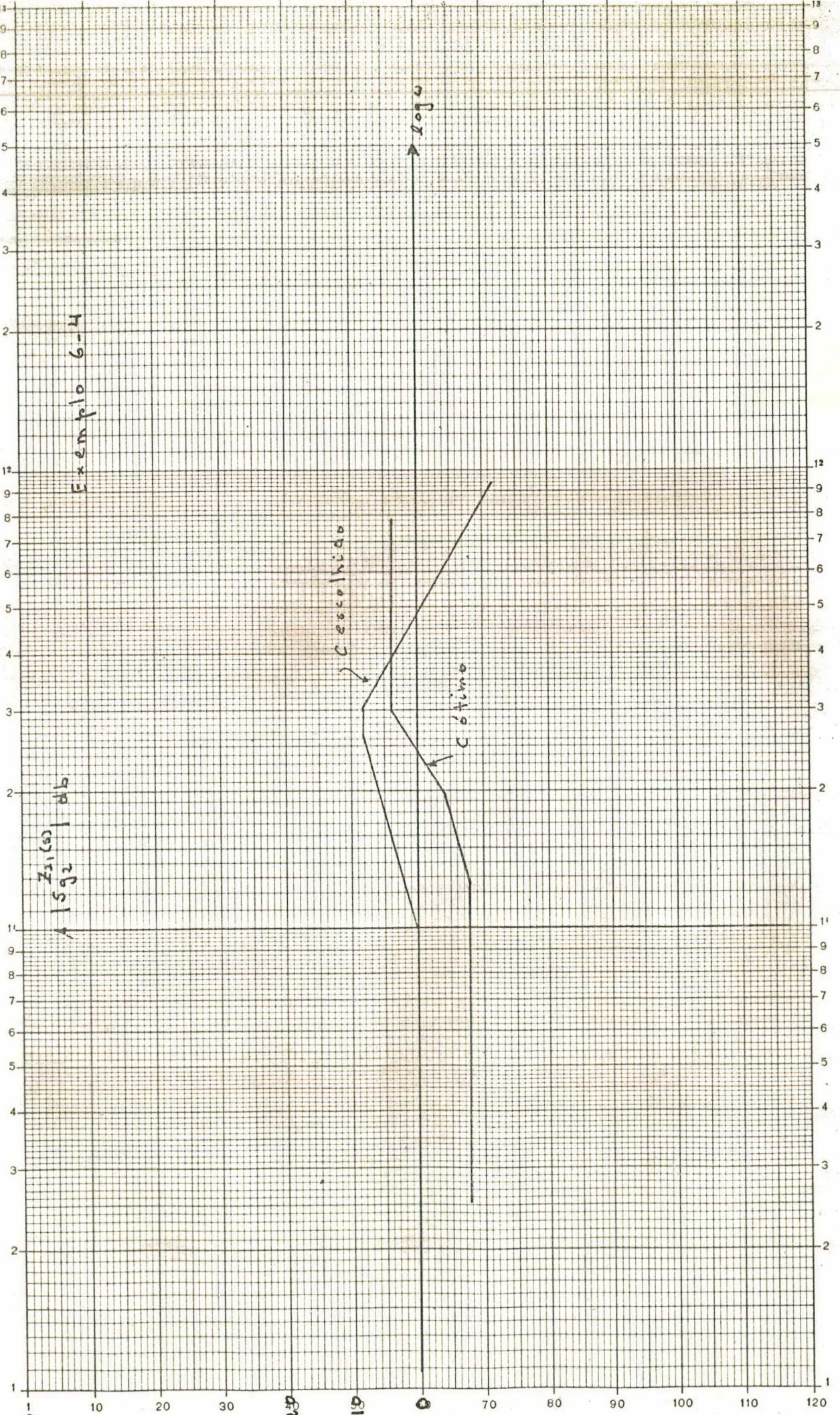
Exemplo 6-4

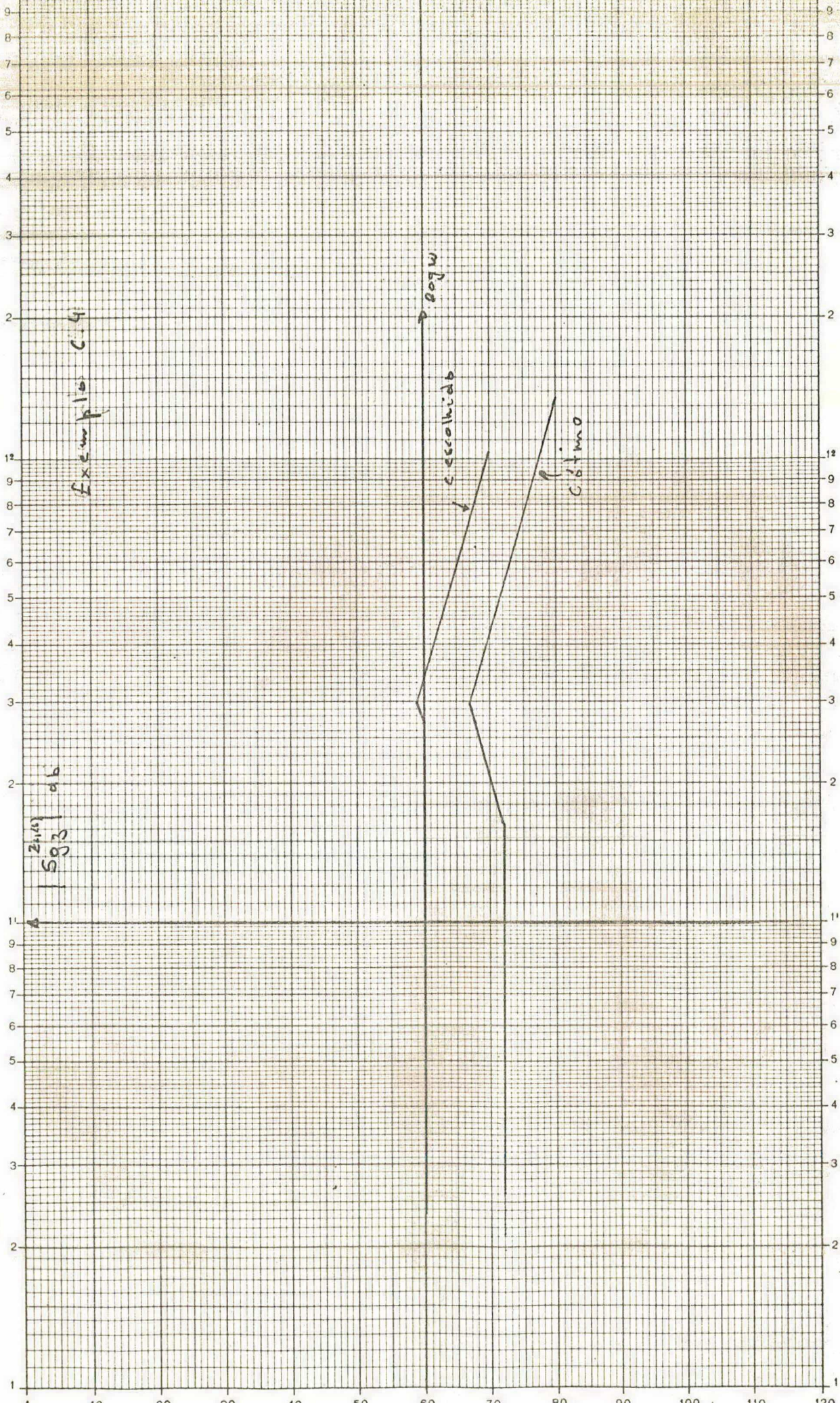
$A_{15g_2}^{Z_{21}(s)}$  db

log $\omega$

Cescolhido

C ótimo





Exemplo G-H

$Z_{11}(s)$   
1584 db

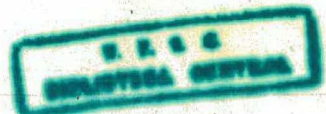
$\log \omega$

escolhido

ótimo

1 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

Reinhart 8720-1 - Formato A4 = 210x297 mm - Divisão 153x270 mm



A P Ê N D I C E A

A.1 - Parâmetros [Y] de um PIV

Vamos determinar os parâmetros [Y] de um PIV, conforme a -  
figura A.1.

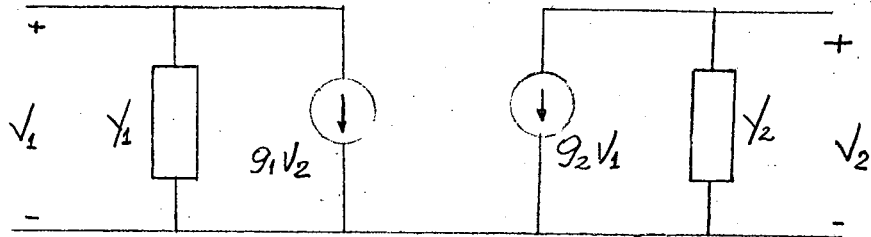


fig. A.1

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$Y_{11} = Y_1 \quad e$$

$$I_2 = g_2 V_1$$

$$Y_{21} = g_2$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

e

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

$$Y_{22} = Y_2$$

$$I_1 = g_1 V_2$$

$$Y_{12} = g_1$$

os parâmetros [Y] são:

$Y_{11} = Y_1$	A.1.1
$Y_{12} = g_1$	A.1.2
$Y_{21} = g_2$	A.1.3
$Y_{22} = Y_2$	A.1.4

A.2 - Expressões da transimpedância e da admitância de entrada.

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$0 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

$$V = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \cdot V_2$$

$$I_1 = -\frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} V_2 + Y_{12} V_2$$

$$\boxed{Z_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{12} Y_{21} - Y_{11} Y_{22}}}$$

A.2.1

Admitância de entrada:

$$Y_{in} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$

e

$$V_2 = \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \cdot V_1$$

$$I_1 = Y_{11} V_1 - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22}} V_1$$

$$\boxed{Y_{in} = \frac{Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}}{Y_{22}}}$$

A.2.2

Expressões de  $Z_{21}$  e  $Y_{in}$  para um PIV:

$$Y_{in} = \frac{Y_1 Y_2 - g_1 g_2}{Y_2}$$

$$\boxed{Z_{21} = \frac{-g_2}{Y_1 Y_2 - g_1 g_2}}$$

A.2.3

$$Y_{in} = Y_1 - \frac{g_1 \cdot g_2}{Y_2}$$

A.2.4

A.3 - Parâmetros  $[Y]$  de dois PIV's em cascata:

Analisando o circuito da fig. A.2 abaixo

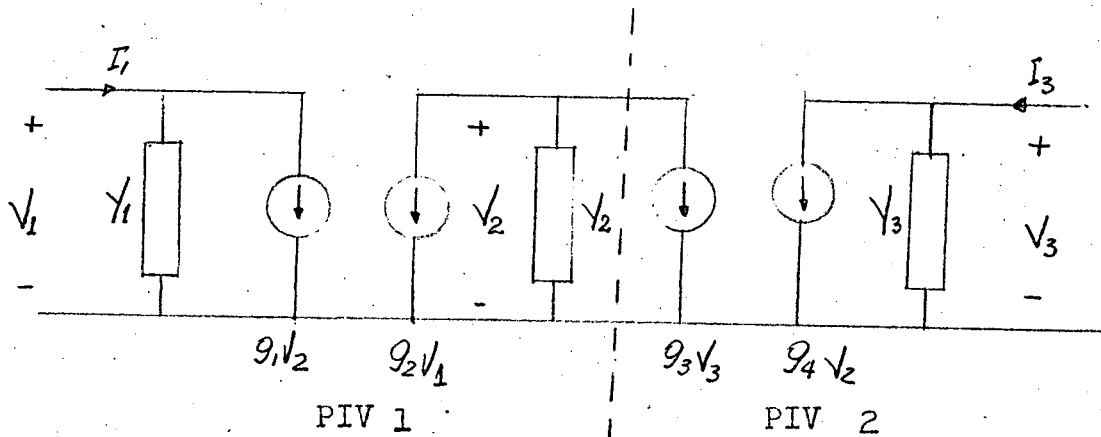


fig. A.2

$$\text{PIV } \textcircled{1} : \begin{bmatrix} I \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & g_1 \\ g_2 & Y_2 \end{bmatrix} \quad \text{PIV } \textcircled{2} : \begin{bmatrix} I \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_3 \\ g_4 & Y_3 \end{bmatrix}$$

Parâmetros  $[a]$  (ou de transmissão):

$$[a]^1 = \begin{bmatrix} -\frac{y_2}{g_2} & -\frac{1}{g_2} \\ \frac{y_1 y_2 - g_1 g_2}{g_2} & -\frac{y_1}{g_2} \end{bmatrix} \quad [a]^2 = \begin{bmatrix} -\frac{y_3}{g_4} & -\frac{1}{g_4} \\ g_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Parâmetros  $[a]$  da estrutura resultante:

$$[a] = [a]^1 [a]^2$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{y_2 y_3}{g_2 g_4} - \frac{g_3}{g_2} & \frac{y_2}{g_2 g_4} \\ \frac{(y_1 y_2 - g_1 g_2) y_3}{g_2 g_4} - \frac{y_1 g_3}{g_2} & \frac{y_1 y_2 - g_1 g_2}{g_2 g_4} \end{bmatrix}$$

Transformando  $[a]$  em  $[Y]$  temos que:

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_1 - \frac{g_1 g_2}{y_2} & -\frac{g_1 g_3}{y_2} \\ -\frac{g_2 g_4}{y_2} & y_3 - \frac{g_3 g_4}{y_2} \end{bmatrix}$$

A P Ê N D I C E B

Expressões da Sensibilidade

B.1 - Expressão Geral

Dado  $Z_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{12} Y_{21} - Y_{11} Y_{22}}$  temos que a

sensibilidade  $S_{g_i}^{Z_{21}} = \frac{g_i}{Z_{21}} \times \frac{\partial Z_{21}}{\partial g_i}$

Vamos chamar:  $D = Y_{12} Y_{21} - Y_{11} Y_{22}$  e  $\frac{\partial Y}{\partial g_i} = \dot{Y}$

$$S_{g_i}^{Z_{21}} = \frac{g_i}{Z_{21}} \left[ \frac{Y_{21} D - Y_{21} \dot{Y}_{12} + Y_{12} \dot{Y}_{21} - Y_{22} \dot{Y}_{11} - Y_{11} \dot{Y}_{22}}{D^2} \right]$$

$$S_{g_i}^{Z_{21}} = g_i \left[ \frac{\dot{Y}_{21}}{Y_{21}} - \frac{Y_{21} \dot{Y}_{12} + Y_{12} \dot{Y}_{21} - Y_{22} \dot{Y}_{11} - Y_{11} \dot{Y}_{22}}{D} \right]$$

B.1

B.2 - Expressões da sensibilidade para uma estrutura com um PIV.

Do Apêndice A temos que os parâmetros  $[Y]$  são:

$$Y_{11} = Y_1 \quad Y_{12} = g_1 \quad Y_{21} = g_2 \quad Y_{22} = Y_2$$



a - Com relação a  $g_1$ :

$$\dot{Y}_{11} = 0 \quad \dot{Y}_{12} = 1 \quad \dot{Y}_{21} = 0 \quad \dot{Y}_{22} = 0$$

levando à B.1 temos:

$$S_{g_1}^{Z_{21}} = g_1 \left[ -\frac{Y_{21}}{D} \right] \quad \text{mas} \quad Z_{21} = \frac{Y_{21}}{D}$$

$$\therefore S_{g_1}^{Z_{21}} = -g_1 \frac{Y_{21}}{Y_{21}} Z_{21} \quad \boxed{S_{g_1}^{Z_{21}} = -g_1 Z_{21}} \quad \text{B.2.1}$$

b - Com relação a  $g_2$ :

$$\dot{Y}_{11} = 0 \quad \dot{Y}_{12} = 0 \quad \dot{Y}_{21} = 1 \quad \dot{Y}_{22} = 0$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}} = g_2 \left[ \frac{1}{Y_{21}} - \frac{Y_{12}}{D} \right]$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}} = g_2 \left[ \frac{1 - Y_{12} Z_{21}}{Y_{21}} \right]$$

$$S_{g_2}^{Z_{21}} = g_2 \left[ \frac{Y_{12} Y_{21} - Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}}{Y_{21} (Y_{12} Y_{21} - Y_{11} Y_{22})} \right]$$

$$\boxed{S_{g_2}^{Z_{21}} = -g_2 \frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}^2} \times Z_{21}} \quad \text{B.2.2}$$

B.3 - Expressões da sensibilidade para dois PIV's em cascata.

De acordo com o apêndice A

$$Y_{11} = Y_1 - \frac{g_1 g_2}{Y_2} \quad Y_{12} = - \frac{g_1 g_2}{Y_2}$$

$$Y_{21} = - \frac{g_2 g_4}{Y_2} \quad Y_{22} = Y_3 - \frac{g_3 g_4}{Y_2}$$

a - Com relação a  $g_1$  :

$$\dot{Y}_{11} = - \frac{g_2}{Y_2} \quad \dot{Y}_{12} = - \frac{g_2}{Y_2}$$

$$\dot{Y}_{21} = 0 \quad \dot{Y}_{22} = 0$$

$$S_{g_1}^{Z_{21}} = g_1 \left[ \frac{-g_3 Y_{21} + g_2 Y_{22}}{D} \right]$$

$$S_{g_1}^{Z_{21}} = \frac{g_1}{D Y_2} \left[ g_3 Y_{21} - g_2 Y_{22} \right]$$

B.3.1

b - Com relação a  $g_2$  :

$$\dot{Y}_{11} = - \frac{g_1}{Y_2} \quad \dot{Y}_{12} = 0$$

$$\dot{Y}_{21} = - \frac{g_4}{Y_2} \quad \dot{Y}_{22} = 0$$

$$S_{g_2}^{z_{21}} = g_2 \frac{-g_4}{Y_2 Y_{21}} - \left[ \frac{-\frac{g_4 Y_{12}}{Y_2} + \frac{g_1 Y_{22}}{Y_2}}{D} \right]$$

$$S_{g_2}^{z_{21}} = \frac{g_2 Y_{22} (Y_{11} g_4 - g_1 Y_{21})}{D Y_{21} Y_2}$$

B.3.2

c - Com relação a  $g_3$  :

$$Y_{11} = 0$$

$$Y_{12} = -\frac{g_1}{Y_2}$$

$$Y_{21} = 0$$

$$Y_{22} = -\frac{g_4}{Y_2}$$

$$S_{g_3}^{z_{21}} = \frac{-g_3 g_4 Y_{11} + g_1 g_3 Y_{21}}{D Y_2}$$

B.3.3

d - Com relação a  $g_4$  :

$$Y_{11} = 0$$

$$Y_{12} = 0$$

$$Y_{21} = -\frac{g_2}{Y_2}$$

$$Y_{22} = -\frac{g_3}{Y_2}$$

$$S_{94}^{z_{21}} = - \left[ \frac{g_2 g_4}{Y_2 Y_{21}} + \frac{g_3 g_4 Y_{11} - g_2 g_4 Y_{12}}{Y_2 D} \right]$$

$$S_{94}^{z_{21}} = \frac{g_2 g_4 Y_{11} Y_{22} - g_3 g_4 Y_{11} Y_{21}}{D Y_2 Y_{21}}$$

B.3.4

A P Ê N D I C E C

Determinação de F para dois PIV's em cascata.

$$F = \int_{\omega_0}^{\omega_1} |F_1|^2 d\omega$$

Do capítulo V expressão 5.4.1 temos que

$$F_1 = \frac{2Y_1^0 Z_{21}}{Y_{21}} \left[ \left( \frac{g_1^0 g_3^0}{Y_2^0} - Y_c \right) - \left( \frac{g_1^0 g_2^0}{Y_2^0} + Y_c \right) \frac{Y_{22}}{Y_{21}} \right] \quad \text{C.1}$$

onde de acordo com o capítulo II e a expressão 5.3.6

$$Y_1^0 = k_0 + \frac{k_1 s}{s+G} \quad Y_2^0 = \frac{-g_1^0 g_2^0}{k_2} \quad H = -\frac{g_2^0 c}{g_3^0}$$

$$Y_3^0 = \frac{-g_3^0 k_2 s}{g_2^0 c} \quad Y_{21} = \frac{g_1^0 g_2^0}{Y_2^0}$$

Portanto temos de acordo com o apêndice B

$$Y_{22} = Y_3^0 + \frac{g_1^0 g_3^0}{Y_2^0} \quad \frac{Y_{22}}{Y_{21}} = \frac{Y_2^0 Y_3^0}{g_1^0 g_2^0} + \frac{g_3^0}{g_2^0}$$

$$\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \left( \frac{g_1^0 g_2^0}{Y_2^0} + Y_c \right) = Y_3^0 + \frac{g_1^0 g_3^0}{Y_2^0} + \frac{Y_2^0 Y_3^0 Y_c}{g_1^0 g_2^0} + \frac{g_3^0}{g_2^0} Y_c$$

que substituindo em C.1 vem

$$F_1 = \frac{2Y_1^0 Z_{11}}{Y_{21}} \left[ \frac{g_1^0 g_3^0}{Y_2^0} - Y_c - Y_3^0 - \frac{g_1^0 g_3^0}{Y_2^0} - \frac{Y_2^0 Y_3^0 Y_c}{g_1^0 g_2^0} - \frac{g_3^0 Y_c}{g_2^0} \right]$$

$$F_1 = - \frac{2Y_1^0 Z_{11}}{Y_{21}} \left[ Y_c + Y_3^0 + \frac{Y_2^0 Y_3^0 Y_c}{g_1^0 g_2^0} + \frac{g_3^0 Y_c}{g_2^0} \right]$$

Substituindo os valores correspondentes obtidos no cap. II

$$F_1 = - \frac{2Y_1^0 Z_{21}}{Y_{21}} \left[ Y_c - \frac{g_3^0 k_{25}}{g_2^0 c} + \frac{g_1^0 g_2^0 g_3^0 k_{25} Y_c}{Y_2^0 g_2^0 c g_2^0 g_2^0} + \frac{g_3^0 Y_c}{g_2^0} \right]$$

$$F_1 = - \frac{2Y_1^0 Z_{21}}{Y_{21}} \left[ Y_c - \frac{k_{25}}{H} - \frac{Y_c s}{H} - \frac{c Y_c}{H} \right]$$

$$F_1 = - \frac{2Y_1^0 Z_{21}}{Y_{21}} \left[ \frac{H - Y_c + k_{25} - c Y_c s - Y_c c}{H} \right]$$

$$F_1 = \frac{2Y_1^0 Z_{21}}{Y_{21} H} \left[ s(Y_c - k_2) + Y_c(c - H) \right]$$

$$F_1 = \frac{-2 [s(k_0 + k_1) + k_0 \sigma] H (s + \sigma)}{(s + \sigma) \frac{g_1^0 g_2^0}{Y_2^0} H (s^2 + as + b)} \left[ s(Y_c - k_2) + Y_c(c - H) \right]$$

$$F_1 = \frac{2Y_2^0}{g_1^0 g_2^0} \frac{s(k_0 + k_1) + k_0 \sigma}{(s^2 + as + b)} \left[ s(Y_c - k_2) + Y_c(c - H) \right]$$

Chamando

$$k_0 + k_1 = A_1, \quad k_0 \sigma = A_2, \quad \gamma_c - k_2 = B_1$$

$$\gamma_c (c - H) = B_2 \quad e \quad - \frac{2 \cdot \gamma_c^0}{g_1^0 g_2^0} = N$$

vem:

$$\bar{F}_1 = \frac{N(sA_1 + A_2)(sB_1 + B_2)}{s^2 + as + b}$$

Calculando o quadrado do módulo de  $F_1$

$$|F_1|^2 = \frac{N^2(\omega^2 A_1^2 + A_2^2)(\omega^2 B_1^2 + B_2^2)}{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}$$

se  $N^2 = L_1$  vem

$$\boxed{|F_1|^2 = L_1 \frac{\omega^4 A_1^2 B_1^2 + \omega^2 (A_1^2 B_2^2 + A_2^2 B_1^2) + A_2^2 B_2^2}{\omega^4 + \omega^2 (a^2 - 2b) + b^2}} \quad \text{C.2}$$

Análise da função  $\omega^4 + \omega^2 (a^2 - 2b) + b^2 = f(\omega)$ :

Temos que  $f(0) = b^2$  e  $f(\infty) = \infty$

Extremos da função:  $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 4\omega^3 + 2\omega(a^2 + 2b)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = 12\omega^2 + 2(a^2 + 2b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0 \quad \omega [4\omega^2 + 2(a^2 + 2b)] = 0$$

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{2b - a^2}{2} \end{aligned}$$

Temos dois casos a analisar:  $2b - a^2 > 0$  e  $2b - a^2 < 0$

a -  $2b - a^2 > 0$

Vamos verificar o sinal da 2ª derivada:

$p/w = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 2(a^2 - 2b) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} < 0$  é um máximo

$p/w = \left(\frac{2b - a^2}{2}\right)^{1/2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 12\left(\frac{2b - a^2}{2}\right) + 2(a - 2b)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = -6(a^2 - 2b) - 2(a^2 - 2b) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = -4(a^2 - 2b)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} > 0$  é um mínimo

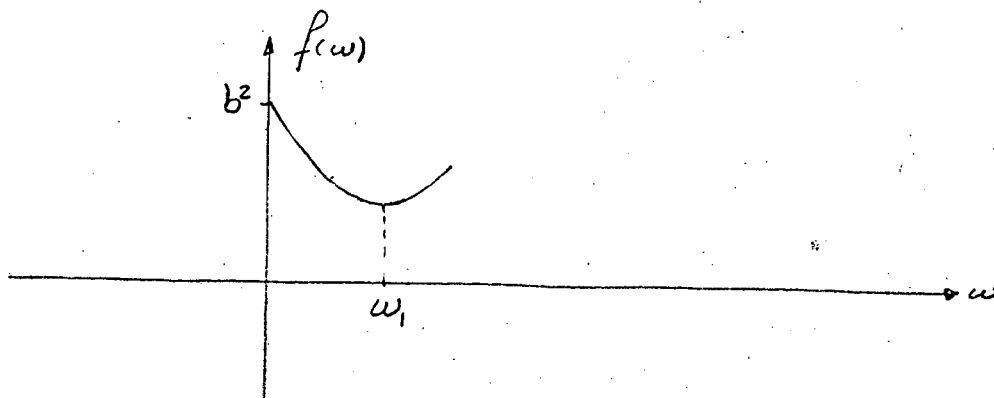
O valor de  $f(w)$  para o mínimo será:

$f(w_1) = \left(\frac{2b - a^2}{2}\right) + \frac{(2b - a^2)(a^2 - 2b)}{2} + b^2$

$f(w_1) = -\frac{(a^2 - 2b)^2}{4} + b^2 \quad f(w_1) = \frac{-a^4 + 4ba^2 - 4b^2 + 4b^2}{4}$

$f(w_1) = -\frac{a^2(a^2 - 4b)}{4}$

$f(w_1) > 0$  o gráfico desta função é:





Portanto, temos que  $f(w)$  para  $0 \leq w \leq \infty$  é sempre positiva.

$$b - 2b - a^2 < 0$$

$$p/w = \left(\frac{2b - a^2}{2}\right)^{1/2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = -4(a^2 - 2b)$$

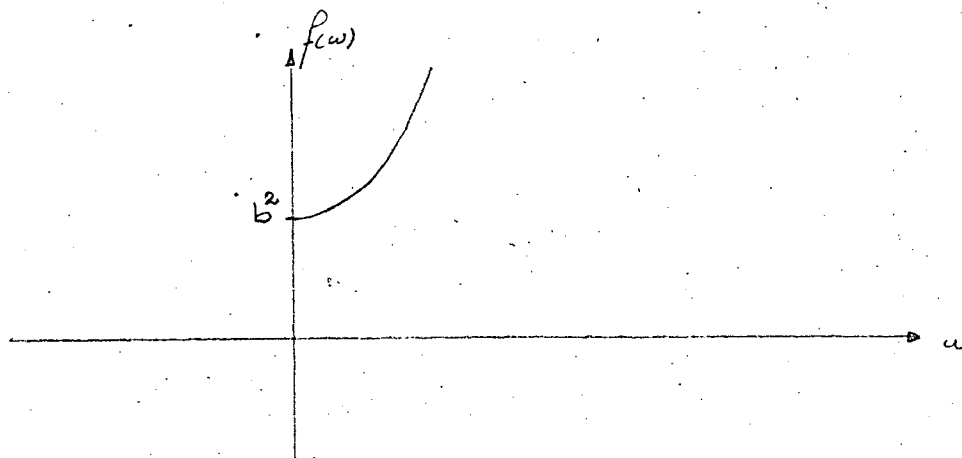
$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} < 0 \quad \text{é um máximo.}$$

Ou seja, será um máximo para valores complexos de  $w$ .

Para  $w=0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 2(a^2 - 2b) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} > 0 \quad \text{é um mínimo.}$$

$$e \quad f(0) = b^2$$



Conclusões :

Temos, portanto, que a função  $f(w)$  para  $w > 0$  é sempre positiva, o que nos leva a concluir que

$$\int_{w_0}^{w_1} \frac{w^n}{f(w)} dw$$

, onde  $n$  é um número inteiro, é sempre positivo.

Cálculo da função  $F$  : Sendo  $F = \int_{w_0}^{w_1} |F_1|^2 dw$  e levando em

Portanto, temos que  $f(w)$  para  $0 \leq w \leq \infty$  é sempre positiva.

$$b - 2b - a^2 < 0$$

$$p/w = \left(\frac{2b - a^2}{2}\right)^{1/2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = -4(a^2 - 2b)$$

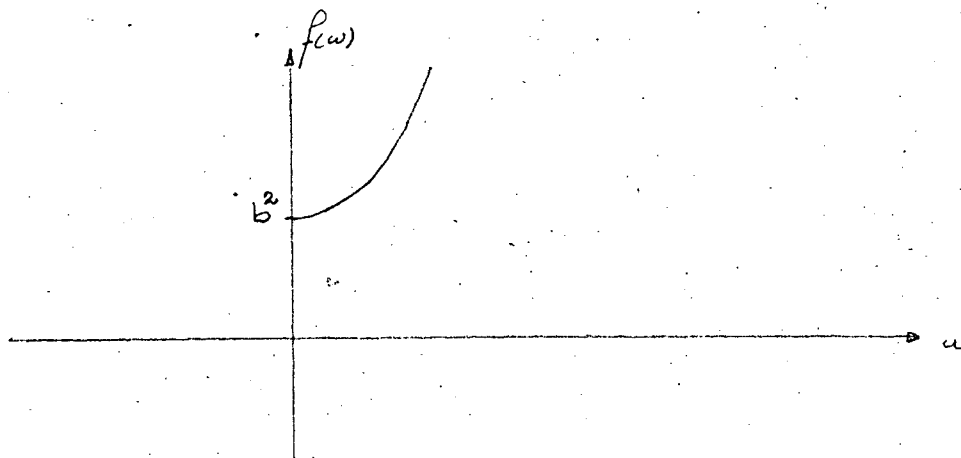
$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} < 0 \quad \text{é um máximo.}$$

Ou seja, será um máximo para valores complexos de  $w$ .

Para  $w=0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 2(a^2 - 2b) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} > 0 \quad \text{é um mínimo.}$$

$$e \quad f(0) = b^2$$



Conclusões :

Temos, portanto, que a função  $f(w)$  para  $w > 0$  é sempre positiva, o que nos leva a concluir que

$$\int_{w_0}^{w_1} \frac{w^n}{f(w)} dw$$

, onde  $n$  é um número inteiro, é sempre positivo.

Cálculo da função  $F$  : Sendo  $F = \int_{w_0}^{w_1} |F_1|^2 dw$  e levando em

conta a expressão C.2 temos que:

$$F = L_1 \left[ A_1^2 B_1^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^4}{f(\omega)} d\omega + (A_1^2 B_2^2 + A_2^2 B_1^2) \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^2}{f(\omega)} d\omega + A_2^2 B_2^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{f(\omega)} \right]$$

Definindo

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^4}{f(\omega)} d\omega = D_3, \quad \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega^2}{f(\omega)} d\omega = D_2, \quad \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{f(\omega)} = D_1$$

vem que

$$F = L_1 \left[ D_3 A_1^2 B_1^2 + D_2 (A_1^2 B_2^2 + A_2^2 B_1^2) + D_1 A_2^2 B_2^2 \right] \quad C.3$$

APÊNDICE D

Programa para o cálculo de  $c$  ótimo e  $Y_c$  da re-  
alimentação.

---

D-1 - Cálculo do  $c$  ótimo

$c$  é a solução da equação do 3º grau

$$c^3 2M_1 + c^2 3M_2 + c(4M_3 - M_2) - 2M_3 = 0$$

O programa nos fornece os seguintes dados nesta ordem:

DADOS	a	b	H	XI	XF	IDIV
Respostas:	D(1)	D(2)	D(3)	$M_1$	$M_2$	$M_3$
	p	a	R			
	CSFI	RD1	H	B1	se	$H < 0$
ou	R1	R2	H		se	$H = 0$
ou	R1	AG	BG	H	se	$H > 0$

Onde temos que

XI, XF frequência inferior e superior utiliza-  
das para integrar as funções

IDIV número de iterações utilizado na integra-  
ção.

$$D(1) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{dw}{f(w)}$$

$$D(2) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{w^2 dw}{f(w)}$$

$$D(3) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{w^4 dw}{f(w)}$$

P, Q, R coeficientes da equação transformada.

se  $H < 0$  devemos calcular

$$\theta = \arccos(\text{CSFI})$$

$$x = \pm R D_1 \cdot \cos \theta/3$$

- se  $B_1 < 0$

+ se  $B_1 > 0$

$$c \text{ ótimo} = x - P/3$$

se  $H = 0$

$$c \text{ ótimo} = R_1 - P/3$$

ou

$$c \text{ ótimo} = R_2 - P/3$$

escolhe-se o  $c \text{ ótimo}$  maior que zero.

se  $H > 0$

$$c \text{ ótimo} = R_1 + P/3$$

## D-2 Cálculo de $Y_c$ da realimentação

O programa nos fornece estes valores:

Dados  $a, b, c, H, G, XI, XF, IDIV$

Resultados  $K_0, K_1, K_2,$

$D_1, D_2, D_3, Y_c$

// JOB T

MARTINS

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0008	0008	0000

V2 M11 ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

\*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

\*LIST SOURCE PROGRAM

C XI=FREQ. INF. XF=FREQ. SUP. IDIV=NUM DIV INTEG.

C CALCULO DE C OTIMO

C G=GANHO A,B=COEF. DO DENOM.

DIMENSION D(10)

 $F(X,N,A,B)=(X**N)/(X**4+(X**2)*(A**2-2*B)+B**2)$ 

READ(8,10)A,B,G,T,XI,XF,IDIV

WRITE(5,10)A,B,G,T,XI,XF,IDIV

10 FORMAT(6F10.4,I4)

SOM=0.0

N=0

I=1

60 VALI=F(XI,N,A,B)

VALF=F(XF,N,A,B)

H=(XF-XI)/IDIV

X=XI+H

90 SOM=SOM+F(X,N,A,B)

IF(X-XF-H)30,40,40

30 X=X+H

GO TO 90

40 CONTINUE

D(I)=(H/2.)\*(VALI+VALF+2\*(SOM))

IF(N-4)50,70,70

50 N=N+2

I=I+1

GO TO 60

70 CONTINUE

R1=T\*\*2-A\*T+B

 $E1=B**2*(4*T**2*D(2)+4*D(3))/(T**2)$  $E2=8.*D(3)*B*R1/(T**2)$  $E3=4.*D(3)*R1**2/(T**2)$ 

VM1=E1-E2+E3

VM2=T\*(-2.\*E1+E2)

VM3=T\*\*2\*E1

WRITE(5,80)D(1),D(2),D(3),VM1,VM2,VM3

80 FORMAT(6F10.4)

P=(3.\*VM2)/(2.\*VM1)

 $Q=(4.*VM3-T*VM2)/(2.*VM1)$ 

R=(-T\*VM3)/VM1

 $A1=(3.*Q-P**2)/3.$  $B1=(2.*P**3-9.*P*Q+27.*R)/27.$ 

G1=-B1/2.

 $H=G1**2+(A1**3)/27.$ 

WRITE(5,13)P,Q,R

13 FORMAT(3F10.4)

IF(H)100,105,110

100 CSFI=SQRT(G1\*\*2/(-A1\*\*3/27.))

RD1=2.\*SQRT(-A1/3.)

WRITE(5,81)CSFI,RD1,H,B1

81 FORMAT(4F10.4)

```

GO TO 14
105 AG=-G1**.33
    R1=2.*AG
    R2=-AG
    WRITE(5,82)R1,R2,H
82  FORMAT(3F10.4)
    GO TO 14
110 AG=((-G1+SQRT(H))**.33)
    BG=((-G1-SQRT(H))**.33)
    R1=AG+BG
    WRITE(5,83)R1,AG,BG,H
83  FORMAT(4F10.4)
14  CALL EXIT
    END

```

FEATURES SUPPORTED  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON            0    VARIABLES        106    PROGRAM        702

END OF COMPILATION

// XEQ

3.0000	9.0000	1.0000	2.0000	4.0000	0.0000	3
-0.0231	-0.2153	-2.0422	-77.9345	426.1018	-940.7385	
-8.2011	29.6091	-24.1417				
3.4723	2.5353	0.9370	77.3019			

// \*

// JOB T

MARTINS ELE

LOG DRIVE      CART SPEC      CART AVAIL      PHY DRIVE  
 0000            0008            0008            0000

V2 M11      ACTUAL 16K      CONFIG 16K

// FOR

\*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

\*LIST SOURCE PROGRAM

```

C    CALCULO DE YC DO FEEDBACK.
C    XI=FREQ. INF. XF=FREQ. SUP. IDIV=NUM DIV INTEG.
C    T=ZERO DE TRANSM. G=GANHO A,B=COEF DO DENOM.
C    VALOR ESCOLHIDO PARA A REAL. DO ZERO DE TRANSM.
DIMENSION D(10)
F(X,N,A,B)=(X**N)/(X**4+(X**2)*(A**2-2*B)+B**2)
READ(8,10)A,B,C,G,T,XI,XF,IDIV
WRITE(5,10)A,B,C,G,T,XI,XF,IDIV
10  FORMAT(7F10.4,I4)
     SOM=0.0
     N=0
     I=1
60  VALI=F(XI,N,A,B)
     VALF=F(XF,N,A,B)
     H=(XF-XI)/IDIV
     X=XI+H
90  SOM=SOM+F(X,N,A,B)
     IF(X-XF-H)30,40,40
30  X=X+H
     GO TO 90
40  CONTINUE
     D(I)=(H/2.)*(VALI+VALF+2*(SOM))
     IF(N-4)50,70,70
50  N=N+2
     I=I+1
     GO TO 60
70  CONTINUE
     PK1=B/(T*C)
     PK2=(T**2-A*T+B)/(T*(T-C))
     PK3=(C**2-A*C+B)/(C*(C-T))
     WRITE(5,20)PK1,PK2,PK3
20  FORMAT(3F10.4)
     A1=PK1+PK2
     A2=PK2*T
     IF(PK3)110,115,120
115 STOP
110 CONTINUE
     G=C
     RO1=1.+(D(3)*A2*T)/(D(2)*A1)
     RO2=-(PK2+RO1*(PK1+PK3))/(RO1*PK3)
     IF(RO2)150,160,160
150 YC=0.0
     GO TO 180
160 DM=RO2/2.
     E=1.*(PK1+PK2+PK3)/(DM*PK3)
     L=T*(DM*PK3+PK1+PK3)/(DM*PK3)
     YC=-(D(3)*E*A1+D(2)*L*A2)/(D(3)*E**2+D(2)*L**2)
180 WRITE(5,130)G,RO2,D(1),D(2),D(3),YC
130 FORMAT(6F10.6)

```



```

GO TO 140
120 V1=D(3)*A1**2+D(2)*A2**2
    V2=D(2)*A1**2+D(1)*A2**2
    YC=PK3*V1/(V1+(G-C)**2*V2)
WRITE(5,80)D(1),D(2),D(3),YC
80  FORMAT(4F10.4)
140 CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON            0    VARIABLES            98    PROGRAM            624

END OF COMPILATION

// XEQ

3.0000	9.0000	1.0000	2.0000	4.0000	0.0000	3
2.2500	1.0833	-2.3333				
1.000000	-0.019404	0.044072	0.188954	0.998045	0.000000	

BIBLIOGRAFIA

- 1 - MITRA, Sanjit K. - Analysis and Synthesis of Linear Active Networks, New York, John Wiley & Sons - 1.969
- 2 - SIPRESS, J.M. - "Synthesis of Active RC Networks" - Doctoral Dissertation, Polytech.Inst. of Brooklyn - New York, June 1.960.
- 3 - SÃO THIAGO FILHO, P. - "Síntese de Circuitos Ativos em Cascata" - Tese de Mestrado COPPE - Rio - de Janeiro, 1.971.
- 4 - CRUZ, José B. - "Feedback Systems"  
New York, McGraw-Hill - 1.972
- 5 - VALKEMBURG, M.E.Van - "Introduction to Modern Network Synthesis" - John Wiley & Sons, New York, 1966
- 6 - CALAHAN, D.A. - "Sensitivity Minimization in Active RC Synthesis" - IRE Transation on Circuit Theory, CT-9 38-49, março 1.962.

$$F_1 = \frac{1}{D Y_2} \left[ 2g_1 g_3 Y_{21} - 2g_1 g_2 Y_{22} + 2g_2 g_4 \frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} - 2g_3 g_4 Y_{11} \right] \quad 4.2.2$$

onde  $D = Y_{12}(s) Y_{21}(s) - Y_{11}(s) Y_{22}(s)$

e como  $D = \frac{Y_{21}(s)}{Z_{21}(s)}$  e levando-se em conta as expressões

4.1.13, 4.1.14, 4.1.15 e 4.1.16 vem

$$F_1 = 2 Z_{21}(s) \frac{s}{H} \left[ k_0 + \frac{k_1 s}{s + \sigma} \right]$$

$$F_1 = \frac{2H(s+\sigma)}{s^2 + as + b} \times \frac{s}{H} \left[ \frac{s(k_0 + k_1) + k_0 \sigma}{s + \sigma} \right]$$

$$F_1 = \frac{2s}{s^2 + as + b} \left[ s(k_0 + k_1) + k_0 \sigma \right] \quad 4.2.3$$

Calculando  $|F_1|^2$  vem

$$|F_1|^2 = \frac{4\omega^2 [(k_0 \sigma)^2 - \omega^2 (k_0 + k_1)^2]}{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}$$

$$|F_1|^2 = \frac{4(k_0 \sigma)^2 \omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} + \frac{4\omega^4 (k_0 + k_1)^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \quad 4.2.4$$