

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE ENGENHARIA AEROESPACIAL

ERIC HENRIQUE D'ANTONA DE SOUSA

ESTUDO DO MÉTODO *PATCHED-CONICS* APLICADO AO CASO DE UMA
TRANSFERÊNCIA INTERPLANETÁRIA DA TERRA A MARTE

Joinville
2026

ERIC HENRIQUE D'ANTONA DE SOUSA

ESTUDO DO MÉTODO *PATCHED-CONICS* APLICADO AO CASO DE UMA
TRANSFERÊNCIA INTERPLANETÁRIA DA TERRA A MARTE

Trabalho apresentado como requisito para
obtenção do título de Bacharel em Curso
de Engenharia Aeroespacial, no Centro
Tecnológico de Joinville, da Universidade
Federal de Santa Catarina.

Orientador: Dr. Helton da Silva Gaspar

Joinville
2026

ERIC HENRIQUE D'ANTONA DE SOUSA

ESTUDO DO MÉTODO *PATCHED-CONICS* APLICADO AO CASO DE UMA
TRANSFERÊNCIA INTERPLANETÁRIA DA TERRA A MARTE

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Curso de Engenharia Aeroespacial, no Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Joinville (SC), 23 de julho de 2026.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Helton da Silva Gaspar
Orientador/Presidente

Prof. Dr. Membro da banca 1
Membro(a)
UFSC

Prof. Dr. Membro da banca 2
Membro(a)
UFSC

Prof. Dr. Membro da banca 3
Membro(a)
UFSC - Florianópolis

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais, Eraldo Campos e Maria Socorro, bem como à minha irmã, Creusa Helena, e a todos os meus amigos com quem estudei. Também aos meus orientadores, Helton Gaspar e Fátima Machado.

AGRADECIMENTOS

Faz-se uma menção honrosa ao Dr. Prof. Juan Pablo de Lima Costa Salazar pelo fornecimento do modelo matemático para a parametrização de um bocal de Rao e ao Dr. Prof. Rafael de Camargo Catapan pelo auxílio com formulação das condições de equilíbrio químico. Agradeço também aos membros da minha banca avaliadora, não apenas pela compreensão em relação ao atraso na entrega do texto e extrapolação do tempo de apresentação, mas também pelo aceite do convite e relevantes contribuições. Também expresso minha enorme satisfação em poder ser avaliado por reconhecidos expoentes, isto é, doutores Alexandre Miers Zabet, autor de obra literária finalista do prêmio Jabuti e Rafael Ribeiro de Sousa, homenageado pela UAI com a nomeação do asteroide 26063 Rafaelribeiro.

“ Uma corrida espacial não é vencida por quem apenas se move mais rápido, mas por quem aprende primeiro a negociar com a gravidade. ”

Eric D'Antona

RESUMO

Este trabalho analisa transferências rápidas Terra-Marte no âmbito do Problema de 2 Corpos, utilizando o método de *patched-conics* para tempos de voo de 105 dias, 150 dias e 210 dias. O objetivo é comparar uma formulação simplificada, tradicionalmente ensinada nos livros, com uma abordagem vetorizada proposta para melhorar a determinação das condições iniciais e a precisão da interceptação com Marte. As condições de transferência resultam da solução de um sistema de quatro equações algébricas não-lineares avaliadas por simulações numéricas no REBOUND, considerando principalmente o ΔV total da missão e o *closest approach* areocêntrico. Os resultados indicam que a abordagem vetorizada aumentou sistematicamente a precisão da interceptação, reduzindo o ΔV total da missão, em todos os tempos de voo analisados. Em termos propulsivos, observou-se que as transferências mais rápidas apresentam maiores valores de ΔV , especialmente devido à etapa de captura em Marte, enquanto o aumento do tempo de voo reduz progressivamente o custo propulsivo total, mas aumenta a exposição da tripulação ao ambiente espacial profundo. Conclui-se que a formulação vetorizada melhora a precisão da transferência e fornece uma representação mais adequada das condições de chegada, constituindo uma ferramenta útil para a análise preliminar de trajetórias rápidas Terra-Marte.

Palavra-chave: Astrodinâmica; Exploração espacial; Simulação numérica;

ABSTRACT

Crewed missions to Mars impose challenges associated with orbital dynamics, propulsive cost, exposure to ionizing radiation, prolonged residence in microgravity, and psychological factors. In this context, reducing the travel time becomes a relevant alternative, although it requires more energetic interplanetary trajectories within the framework of the 2-body problem and larger ΔV requirements. This work analyzes Earth–Mars transfers using the *patched-conics* method with the aim of reducing travel time, comparing a simplified formulation with a vectorized approach developed to improve the determination of the initial conditions and the accuracy of the Mars interception. The trajectories were evaluated analytically and through numerical simulations in REBOUND for flight times of 105 days, 150 days, and 210 days. The results indicate that the vectorized method improves the areocentric approximation in all analyzed cases, reducing the *closest approach* and the total ΔV when compared with the simplified model. For a 105 days transfer, the total ΔV remained high, indicating that Mars capture constitutes one of the most critical stages of the mission. For longer flight times, a significant reduction in propulsive cost was observed, although at the expense of greater crew exposure to the deep-space environment. The influence of different propulsion systems was also discussed, showing that technologies with higher specific impulse, such as nuclear thermal propulsion, may reduce the propellant mass fraction, but still depend on technological maturity, safety, and system integration. It is concluded that fast trajectories to Mars are possible as a preliminary orbital construction, but their feasibility depends on the balance between navigation accuracy, capture strategy, propulsive performance, and crew safety.

Keywords: Astrodynamics; Space exploration; Numerical simulation;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diferentes órbitas de transferência possíveis entre a Terra e Marte. .	29
Figura 2 – Análise das variações do ângulo ξ em função do tempo de viagem e altitude inicial.	37
Figura 3 – Análise das variações do afélio Q em função do tempo de viagem e altitude inicial.	38
Figura 4 – Análise das variações da fase inicial de Marte f_0^M em função do tempo de viagem e altitude inicial.	39
Figura 5 – Análise das variações do incremento de velocidade de partida ΔV em função do tempo de viagem e altitude inicial.	39
Figura 6 – Trajetória geocêntrica de partida normalizada em relação ao raio da esfera de influência terrestre.	44
Figura 7 – Erro instantâneo relativo percentual das trajetórias simuladas em relação às suas reconstruções analíticas no sistema geocêntrico. . . .	44
Figura 8 – Trajetória heliocêntrica de transferência normalizada unidades astronômicas.	45
Figura 9 – Erro instantâneo relativo percentual das trajetórias heliocêntricas simuladas em relação à sua reconstrução analítica.	46
Figura 10 – Trajetória areocêntrica de partida normalizada em relação ao raio da esfera de influência marciana para um tempo de viagem de 105 dias. . . .	46
Figura 11 – Trajetória areocêntrica de partida normalizada em relação ao raio da esfera de influência marciana para um tempo de viagem de 150 dias. . . .	47
Figura 12 – Trajetória areocêntrica de partida normalizada em relação ao raio da esfera de influência marciana para um tempo de viagem de 210 dias. . . .	48
Figura 13 – Visualização e diferenciação entre os regimes global e crítico. . . .	50
Figura 14 – Variação do ΔV_{arv} de frenagem em função do valor do periastro da hipérbole.	51
Figura 15 – Análise de algumas grandezas orbitais relevantes para esta etapa do estudo em função do multiplicador m nos regimes global e crítico. . . .	52
Figura 16 – Bocal de Rao. A malha interna corresponde à valores interpolados para visualização, o real refinamento do modelo é muito maior. . . .	56
Figura 17 – Frações molares das espécies da composição de cada gás em diferentes condições.	57
Figura 18 – Impulso específico e empuxo gerados em função da entalpia de estagnação para um propulsor com características similares à Figura 16. Propulsor termonuclear (à esquerda) e um propulsor químico de LOX (à direita).	58

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação entre as simulações simplificada e não simplificada para diferentes tempos de voo.	41
Tabela 2 – Tempo de execução dos métodos simplificado, vetorizado e a diferença entre ambos.	48
Tabela 3 – Estimativa da fração de massa propelente para os modelos simplificado e vetorizado para 105 dias.	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS	15
1.1.1	Objetivo geral	15
1.1.2	Objetivos Específicos	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	GRAVITAÇÃO	17
2.2	ESFERA DE INFLUÊNCIA E ESFERA DE HILL	20
2.2.1	Esfera de influência	20
2.2.2	Esfera de Hill	22
2.3	O MÉTODO <i>PATCHED-CONICS</i>	23
3	METODOLOGIA	28
4	APRESENTAÇÃO DE DADOS	36
4.1	RESULTADOS PRELIMINARES	36
4.2	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES	40
4.2.1	Análise quantitativa	40
4.2.2	Análise qualitativa	43
4.3	ANÁLISE DE INCERTEZA NA FASE INICIAL DE MARTE	49
4.4	SISTEMAS PROPULSIVOS	55
5	ANÁLISE DE DADOS	61
6	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da civilização, o céu cativa a curiosidade e o fascínio da humanidade. Seja para medir a passagem do tempo, estimar períodos de gestação, identificar épocas de plantio e colheita, orientar deslocamentos e explorações, ou ainda atender a fins simbólicos e esotéricos, como a astrologia, a observação dos astros esteve presente em diversas culturas ao longo da história (Lewis, 1974; Evans, 1998; Ruggles, 2005). Em grande parte, isso se deve ao fato de que as estrelas associadas às constelações apresentam posições aparentemente imutáveis na abóbada celeste, em razão de suas enormes distâncias, enquanto corpos mais próximos, como o Sol e a Lua, exibem movimentos periódicos facilmente reconhecíveis.

Entretanto, nem todos os astros se comportavam de maneira tão regular. Alguns pontos luminosos pareciam deslocar-se em relação ao fundo de estrelas fixas, descrevendo trajetórias aparentemente irregulares no céu. Esses corpos passaram a ser denominados planetas, termo derivado do grego *planetes asteres*, isto é, “estrelas errantes” (Dreyer, 1906). A tentativa de compreender esse movimento impulsionou o desenvolvimento de diferentes modelos cosmológicos, desde explicações filosóficas sobre a natureza do cosmos até sistemas geométricos complexos, como os epiciclos empregados no modelo geocêntrico de Ptolomeu (Ptolemy, 1998).

Ainda na Antiguidade, avanços importantes demonstravam que a observação do céu podia ser associada à geometria e à medição quantitativa da natureza. Um exemplo notável é o de Eratóstenes, que estimou a circunferência da Terra com grande precisão, considerando-se as limitações instrumentais de sua época (Dutka, 1993). Apesar disso, o modelo geocêntrico associado à tradição aristotélica e posteriormente formalizado por Ptolomeu tornou-se o pensamento predominante na civilização ocidental por muitos séculos. Apenas a partir do Renascimento, com a retomada e o fortalecimento de ideias heliocêntricas por pensadores como Nicolau Copérnico (Copernicus, 1992), Galileu Galilei (Galilei, 1989) e Johannes Kepler, a compreensão do movimento dos corpos celestes passou por uma transformação profunda. Esse acúmulo de observações astronômicas, modelos matemáticos e mudanças conceituais culminaria, posteriormente, na formulação da Teoria da Gravitação Universal por Isaac Newton (Newton, 1999).

Atualmente, sabe-se que os planetas orbitam o Sol em trajetórias aproximadamente elípticas e que seus movimentos aparentemente irregulares no céu resultam do movimento relativo entre a Terra e esses corpos, projetado contra o fundo das estrelas. Embora a Teoria da Relatividade Geral (Einstein, 1916) forneça uma descrição mais fundamental da gravitação, a mecânica newtoniana descreve com excelente precisão a maior parte dos fenômenos de interesse em mecânica orbital, sobretudo em

regimes de campo gravitacional fraco, ou seja, o espaço-tempo pode ser tratado, em primeira aproximação, como uma pequena perturbação da métrica de Minkowski e velocidades muito inferiores à velocidade da luz, de modo que os efeitos relativísticos permanecem secundários para grande parte das aplicações no contexto da engenharia aeroespacial.

Embora a física forneça uma explicação robusta para o movimento aparente dos astros na abóbada celeste, esses objetos continuam a exercer forte influência sobre a imaginação humana. A compreensão de que a Terra é também um planeta, inserido em um sistema de corpos que orbitam o Sol, ampliou profundamente a forma como a humanidade interpreta seu lugar no Universo. A partir disso, diferentes narrativas e possibilidades passaram a ocupar tanto o imaginário popular quanto o debate científico, incluindo a existência de vida extraterrestre, a busca por formas de vida inteligente não humana e a possibilidade de uma sociedade humana interplanetária. Assim, a curiosidade humana permanece impulsionada pelo desejo de preencher as lacunas existentes no limite do conhecimento.

Um dos principais destinos considerados quando se discute a expansão da presença humana para além da vizinhança do sistema Terra–Lua é o planeta Marte. Devido às suas características físicas e orbitais, o planeta vermelho ocupa posição central nos debates sobre exploração humana do espaço profundo. Embora o ambiente marciano não seja propício à vida humana como a conhecemos, quando comparado a outros planetas do Sistema Solar interno, como Vênus, Marte apresenta condições relativamente mais favoráveis para a realização de missões tripuladas e, eventualmente, para a instalação de estruturas permanentes. Uma das linhas argumentativas mais recorrentes em defesa da colonização de outros planetas é a mitigação do risco associado a possíveis catástrofes capazes de comprometer a continuidade da espécie humana (Gottlieb, 2019).

Além dessa perspectiva, outros interesses relacionados à ocupação do planeta vermelho envolvem a possibilidade de estabelecer uma base científica permanente em solo marciano (French, 1986). Uma estrutura desse tipo poderia, em princípio, buscar maior autonomia operacional por meio do reaproveitamento de resíduos, da produção local de alimentos e da utilização de recursos disponíveis no próprio ambiente marciano. Marte também apresenta propriedades geológicas e planetológicas de grande interesse para a pesquisa científica (Wiens *et al.*, 2025; Khan *et al.*, 2023). Por estar localizado na região habitável do Sistema Solar, o estudo da evolução histórica de Marte pode fornecer indícios importantes sobre as condições ambientais favoráveis ao surgimento da vida como a conhecemos, bem como sobre os processos que permitem a preservação ou a perda da habitabilidade planetária.

Um dos principais desafios associados a uma missão tripulada para Marte é a exposição do corpo humano à radiação ionizante de origem solar e cósmica (Fry,

1986). O organismo humano não é adaptado à exposição prolongada a esse tipo de radiação (Hart, 2023; Criscuolo *et al.*, 2020). Na superfície da Terra, o campo geomagnético e a atmosfera atuam como mecanismos naturais de proteção, reduzindo significativamente o fluxo de partículas energéticas que alcança o corpo humano. Entretanto, durante uma viagem interplanetária, os astronautas permaneceriam por longos períodos fora dessa proteção natural, ficando sujeitos a um ambiente radiativo consideravelmente mais severo. Nesse cenário, íons altamente energéticos podem interagir com tecidos biológicos e produzir consequências relevantes para a saúde, incluindo carcinogênese, doenças cardiovasculares e déficits cognitivos (Durante; Cucinotta, 2011; Chancellor *et al.*, 2021).

Mesmo em órbita baixa terrestre, como no caso da Estação Espacial Internacional, ou ISS, do inglês *International Space Station*, situada a aproximadamente 400 km de altitude, os efeitos da permanência prolongada no ambiente espacial já exigem acompanhamento médico rigoroso antes, durante e após as missões (Petersen *et al.*, 2017; Sannigrahi *et al.*, 2023). Embora a ISS ainda se encontre parcialmente protegida pelo campo geomagnético terrestre, seus tripulantes são submetidos a condições significativamente distintas daquelas encontradas na superfície. Em uma trajetória Terra–Marte, esse problema torna-se ainda mais crítico, pois a nave passaria grande parte do tempo em espaço profundo, onde a exposição à radiação e os efeitos da microgravidade se tornam fatores limitantes para a segurança da tripulação.

Uma missão tripulada a Marte, entretanto, não depende apenas do interesse científico, tecnológico ou simbólico associado à exploração do planeta vermelho. Do ponto de vista da engenharia de missão, uma viagem interplanetária envolve restrições impostas pela dinâmica orbital, pela capacidade propulsiva disponível dentre outras tecnologias necessárias para uma expedição como essa. Além disso, em missões tripuladas, a duração da transferência está diretamente relacionada a fatores críticos de segurança, como a exposição à radiação ionizante e os efeitos fisiológicos da permanência prolongada em microgravidade, e até aspectos psicológicos devido ao isolamento e estresse contínuo (Kanas; Manzey, 2004; Basner *et al.*, 2014). Nesse contexto, torna-se relevante estudar trajetórias Terra-Marte que permitam avaliar o compromisso entre tempo de viagem e custo propulsivo.

É nesse contexto que este trabalho propõe a análise de trajetórias interplanetárias de alta energia no âmbito do Problema de 2 Corpos, considerando as capacidades tecnológicas atualmente disponíveis. A metodologia baseia-se no método de *patched-conics*, no qual a missão Terra–Marte, originalmente associada a um Problema de $N = 4$ Corpos, envolvendo Sol, Terra, Marte e a espaçonave, é decomposta em três etapas principais: partida, transferência heliocêntrica e chegada. Em cada uma dessas etapas, admite-se que o movimento da espaçonave é governado predominantemente por um único corpo central, de modo que sua trajetória possa ser

descrita por uma seção cônica obtida a partir do Problema de 2 Corpos. A partir dessa estrutura, emprega-se uma formulação vetorizada desenvolvida para melhorar a determinação das condições iniciais e a precisão da interceptação com Marte, além de permitir sua comparação com a formulação convencional.

Como suporte computacional, serão empregadas simulações numéricas no REBOUND (Rein; S.-F., 2012), em linguagem Python (Drake; Rossum, 2009; Python Software Foundation, 2026), com o objetivo de construir visualizações da dinâmica orbital e comparar diferentes cenários de transferência. As simulações serão realizadas tanto a partir da formulação tradicional do método de *patched-conics* quanto por meio da abordagem vetorizada desenvolvida neste trabalho. Nesta última, a solução de um sistema de equações algébricas não lineares é utilizada para definir com maior precisão as condições iniciais da nave e do planeta Marte na simulação, buscando aprimorar os resultados obtidos pela aproximação do método *patched-conics* e avaliar seus efeitos na interceptação com Marte.

1.1 OBJETIVOS

Avaliar a viabilidade preliminar de missões tripuladas a Marte por meio de órbitas de transferência interplanetárias de maior energia orbital no âmbito do Problema de 2 Corpos. Neste trabalho, o termo “alta energia” refere-se a trajetórias que apresentam energia específica orbital superior à de transferências convencionais de menor custo, como a transferência de Hohmann. De forma prática, esse aumento de energia manifesta-se em maiores velocidades hiperbólicas de excesso, e consequentemente maiores requisitos de ΔV , permitindo reduzir o tempo de voo Terra-Marte.

1.1.1 Objetivo geral

Estudar trajetórias de transferência interplanetária de alta energia entre a Terra e Marte, com ênfase na redução do tempo de voo, utilizando o método *patched-conics* e simulações numéricas no REBOUND para analisar, comparar e validar diferentes condições de transferência e aproximação ao planeta Marte.

1.1.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, têm-se:

- Desenvolver a formulação teórica do problema de transferência interplanetária Terra-Marte, abordando conceitos como esfera de influência, raio de Hill, velocidades hiperbólicas excedentes e método das *patched-conics*;
- Implementar simulações numéricas no REBOUND para modelar trajetórias interplanetárias entre a Terra e Marte, considerando diferentes condições iniciais de lançamento e aproximação;

- Comparar os resultados obtidos pelo método tradicional do *patched-conics* com os resultados de uma formulação vetorizada proposta neste trabalho, baseada na solução de um sistema de equações algébricas não lineares;
- Analisar a influência das condições iniciais da nave e de Marte impactam a precisão da chegada no periastro marciano;
- Avaliar métricas relevantes para execução de transferências de alta energia e discutir a viabilidade de tal missão tendo em vista a tecnologia atual.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Com o intuito de estabelecer a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento do método *patched-conics*, inicia-se a análise por uma revisão do Problema de Dois Corpos. Para isso, parte-se da Equação de Poisson. Nesse problema, ao se considerar a interação gravitacional entre dois corpos pontuais, ou corpos esfericamente simétricos que possam ser tratados por seus centros de massa, a dinâmica relativa pode ser reduzida a um movimento sob ação de uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância. Como consequência, as trajetórias possíveis são seções cônicas. Posteriormente, para aplicações em astrodinâmica, adota-se frequentemente o caso em que uma das massas é muito maior que a outra. Nessa aproximação, o centro de massa do sistema encontra-se muito próximo do centro de massa do corpo mais massivo. A partir dessas hipóteses, possibilita-se descrever a construção do método *patched-conics*.

2.1 GRAVITAÇÃO

A descrição de trajetórias interplanetárias tem como fundamento a interação gravitacional entre corpos celestes. Em sua forma mais geral, essa interação pode ser formulada a partir do potencial gravitacional Φ , cuja relação com a distribuição de massa do corpo atrator é dada pela equação de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (1)$$

em que $G = 6,6743 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ é a constante gravitacional universal e ρ representa a densidade mássica. Essa formulação permite tratar o campo gravitacional como consequência direta da distribuição espacial de massa, fornecendo uma descrição mais ampla do problema gravitacional, como por exemplo em galáxias (Binney; Tremaine, 2008).

Nesses sistemas, a atração gravitacional não é dominada por um único corpo central, mas resulta da contribuição coletiva de uma distribuição extensa de massa, composta por estrelas, gás e poeira interestelar. Estes estão agrupados em diferentes estruturas, que para a Via-Láctea podem ser separadas em estruturas denominadas de bojo galáctico (Plummer, 1911), disco galáctico (Miyamoto; Nagai, 1975) e halo de matéria escura (Allen; Santillan, 1991; Irrgang *et al.*, 2013).

Entretanto, para aplicações em engenharia aeroespacial, em especial para viagens interplanetárias, as distribuições de massas são os planetas analisadas no vácuo, a Equação (1) torna-se a equação de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (2)$$

cuja solução para a equação é dada de forma mais geral para corpos que não são perfeitamente simétricos, por

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{r} \right)^n \left[J_n P_n(\sin \varphi) - \sum_{m=1}^n P_n^m(\sin \varphi) (C_n^m \cos m\theta + S_n^m \sin m\theta) \right] \right\}, \quad (3)$$

em que assume-se que um dos corpos de massa M é muito mais massivo que o outro, portanto $\mu = GM$ é denominado parâmetro gravitacional. Essa solução é comumente chamada de solução dos harmônicos esféricos (El'Yasberg, 1967). Na equação (3), φ é a latitude, θ a longitude, P_n^m os polinômios de Legendre (Butkov, 1968), J_n são os coeficientes zonais, associados aos termos de ordem $m = 0$ e C_n^m e S_n^m representam coeficientes harmônicos dependentes da longitude, associados aos termos tesseral e setorial do potencial.

Em geral, o termo associado ao achatamento do corpo massivo é representado, em primeira aproximação, pelo coeficiente zonal J_2 , relacionado ao momento de quadrupolo da distribuição de massa. No caso da Terra, esse termo descreve principalmente o achatamento polar e constitui a principal correção ao potencial gravitacional esfericamente simétrico. Sua influência é mais significativa em órbitas de baixa altitude, nas quais o satélite se encontra mais próximo das irregularidades do campo gravitacional terrestre. Para satélites GPS, por exemplo, embora o termo J_2 seja relevante em modelos orbitais de alta precisão, sua contribuição para a correção gravitacional da frequência dos relógios atômicos é pequena quando comparada ao termo monopolar, podendo ser desprezada em uma primeira aproximação (Ashby, 2003).

Embora a descrição por harmônicos esféricos seja relevante para problemas de alta precisão envolvendo o campo gravitacional próximo a corpos extensos, tais correções não constituem o elemento central na formulação clássica do método *patched-conics*. Para trajetórias de escape, transferência heliocêntrica e captura planetária em primeira aproximação, o interesse recai sobre a contribuição monopolar do campo gravitacional de cada corpo dominante. Nesse limite, cada planeta ou estrela é tratado como uma massa pontual, ou como um corpo esfericamente simétrico equivalente, de modo que a solução da Equação de Laplace fora da distribuição de massa reduz-se ao potencial newtoniano clássico,

$$\Phi(r) = -\frac{\mu}{r}. \quad (4)$$

Essa redução estabelece o elo entre a formulação via potencial gravitacional e o problema clássico de dois corpos utilizado no método *patched-conics*: em cada trecho da trajetória, considera-se que o veículo possui massa desprezível e se move sob a influência gravitacional predominante de apenas um corpo massivo, resultando em órbitas cônicas descritas pelo potencial monopolar.

Uma vez reduzido o potencial gravitacional ao termo monopolar newtoniano, a dinâmica resultante passa a pertencer à classe dos problemas de força central. Nesse caso, a aceleração exercida sobre uma partícula pode ser escrita como

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi(r) = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}. \quad (5)$$

Como o potencial depende apenas da distância radial ao corpo atrator, o sistema apresenta simetria rotacional, implicando a conservação do momento angular (Noether, 1918). Consequentemente, o movimento ocorre em um plano fixo e o vetor posição varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais, resultado correspondente à segunda lei de Kepler.

A forma particular do potencial newtoniano torna o problema ainda mais restritivo. Para uma força central proporcional ao inverso do quadrado da distância, a equação orbital pode ser escrita eliminando-se explicitamente a dependência temporal e tomando o raio vetor como função do ângulo polar. Dessa forma, obtém-se uma descrição geométrica da órbita na forma de seções cônicas,

$$r(f) = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad (6)$$

na qual e é a excentricidade, f a anomalia verdadeira e p é o semilado reto de uma seção cônica que tem a relação

$$p = \begin{cases} a & \text{se } e = 0, \\ a(1 - e^2) & \text{se } 0 < e < 1, \\ 2q & \text{se } e = 1, \\ a(e^2 - 1) & \text{se } e > 1, \end{cases}$$

onde a é o semieixo maior e q o periápice. Assim, dependendo da energia mecânica e da excentricidade, a trajetória pode ser classificada como circular, elíptica, parabólica ou hiperbólica, respectivamente. Esse resultado fornece a base matemática para a descrição de órbita kepleriana.

A relevância particular desse potencial pode ser elucidada pelo teorema de Bertrand, segundo o qual apenas duas classes de forças centrais admitem órbitas fechadas para todas as condições iniciais ligadas: a força harmônica, proporcional à distância, e a força inversamente proporcional ao quadrado da distância. A gravitação newtoniana pertence à segunda classe, o que explica por que órbitas planetárias ligadas podem ser descritas, em primeira aproximação, por circunferências ou elipses. Por outro lado, quando a energia mecânica é não negativa, a mesma lei de força dá origem a trajetórias abertas, parabólicas ou hiperbólicas, associadas a processos de aproximação, escape e espalhamento gravitacional (Goldstein, 1980).

Apesar de o Problema de Dois Corpos fornecer uma descrição analítica adequada para sistemas nos quais a interação gravitacional ocorre apenas entre dois

corpos, trajetórias interplanetárias reais estão inseridas em um sistema envolvendo múltiplos corpos massivos. No Sistema Solar, por exemplo, uma espaçonave sofre simultaneamente a influência gravitacional do Sol, dos planetas, de luas e, em menor grau, de outros corpos menores. Desse modo, a formulação mais geral da dinâmica gravitacional clássica é dada pelo Problema de N Corpos, no qual cada corpo interage gravitacionalmente com todos os demais.

Considerando um sistema composto por N corpos de massas m_i , posições vetoriais $\vec{r}_i$ e parâmetros gravitacionais $\mu_i = Gm_i$, a equação de movimento do i -ésimo corpo, devido à interação gravitacional com os demais corpos do sistema, pode ser escrita como (Curtis, 2020; Murray; Dermott, 1999a)

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mu_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

em que $\mu_j = Gm_j$ é o parâmetro gravitacional associado ao j -ésimo corpo. Diferentemente do Problema de Dois Corpos, o Problema de N Corpos não admite solução analítica geral para $N > 2$. Para o estudo desse tipo de sistema, torna-se necessário o uso de métodos numéricos ou aproximações físicas que permitam descrever a dinâmica gravitacional entre os corpos envolvidos.

O método *patched-conics* surge justamente como uma aproximação para este tipo de problema. Em vez de resolver simultaneamente todas as interações gravitacionais, a trajetória é decomposta em trechos keplerianos nos quais apenas um corpo atrator é considerado dominante em cada etapa. Entretanto, para iniciar a discussão sobre o *patched-conics* é necessária uma breve discussão sobre o limite da relevância da influência que um corpo massivo exerce sobre outro, no caso, a nave.

2.2 ESFERA DE INFLUÊNCIA E ESFERA DE HILL

2.2.1 Esfera de influência

Uma dúvida natural que surge ao se estudar os fundamentos da gravitação é: por que a Lua orbita a Terra, e não o Sol, se este é muito mais massivo? Essa indagação torna-se ainda mais pertinente quando se considera que a interação gravitacional possui alcance infinito. Em princípio, dois corpos isolados, mesmo separados por distâncias cosmológicas, exercem forças gravitacionais mútuas de mesma intensidade e sentidos opostos, de modo que suas trajetórias são sempre influenciadas, ainda que de forma extremamente pequena pela presença um do outro.

A resposta para esta indagação surge da análise do movimento relativo entre três corpos: o Sol, um planeta e um terceiro corpo de massa desprezível em comparação com os dois primeiros, como um satélite natural ou artificial. Embora a força gravitacional solar seja, em termos absolutos, extremamente relevante, determinando

a dinâmica orbital do sistema, não se trata apenas da intensidade da atração gravitacional.

Considere, portanto, um planeta cuja massa é m , orbitando o Sol de massa M , separado deste por uma distância R . Seja r a distância entre o planeta e o satélite. Se o movimento for descrito em relação ao Sol, a aceleração gravitacional solar, A_s , atua como termo principal, enquanto a gravitação planetária comporta-se como uma perturbação P_p . Nesse caso, a razão entre a aceleração planetária e a aceleração solar pode ser escrita como

$$\frac{P_p}{A_s} = \frac{m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Por outro lado, se o movimento for descrito no referencial planetocêntrico, a atração gravitacional planetária passa a ser o termo principal. Assim, a perturbação do movimento relativo entre o planeta e o satélite é a diferença entre a aceleração solar sofrida pelo planeta e pelo satélite. Essa diferença corresponde, essencialmente, a um efeito de maré gravitacional. Nessa descrição planetocêntrica, a razão entre a perturbação solar e a aceleração principal do planeta é dada aproximadamente por

$$\frac{a_s}{p_p} = \frac{M}{m} \left(\frac{r}{R} \right)^3.$$

A esfera de influência é então definida como uma região na qual a descrição planetocêntrica é mais adequada do que a heliocêntrica. Em outras palavras, o corpo está na esfera de influência do planeta quando a perturbação solar sobre sua órbita planetocêntrica é menor do que a perturbação planetária sobre sua órbita heliocêntrica, ou seja

$$\frac{a_s}{p_p} < \frac{P_p}{A_s}.$$

Substituindo as expressões anteriores, obtém-se

$$\frac{M}{m} \left(\frac{r}{R} \right)^3 < \frac{m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Reorganizando os termos,

$$\left(\frac{r}{R} \right)^5 < \left(\frac{m}{M} \right)^2,$$

e, portanto,

$$\frac{r}{R} < \left(\frac{m}{M} \right)^{2/5},$$

define-se, assim, o raio da esfera de influência do planeta como a distância r que está no interior da região onde a dominância planetocêntrica é dominante, ou seja

$$r_{\text{SOI}} = R \left(\frac{m}{M} \right)^{2/5}. \quad (8)$$

A Equação (8) expressa que a esfera de influência depende da distância orbital do planeta ao Sol e da razão entre a massa do planeta e a massa solar, e que, mesmo que a gravidade solar seja muito superior, existe uma região próxima ao planeta na qual o movimento relativo do satélite é mais bem descrito como uma órbita kepleriana planetocêntrica perturbada pelo Sol.

No caso da Terra, $r_{\text{Sol}} \approx 9,25 \times 10^5$, km, enquanto que a distância média entre a Terra e a Lua é, aproximadamente, $3,84 \times 10^5$, km. Assim, ainda que o Sol seja muito mais massivo que a Terra e exerça uma atração gravitacional significativa sobre a Lua, esta ainda encontra-se na esfera de influência terrestre. Por isso, em uma primeira aproximação, seu movimento pode ser tratado como uma órbita kepleriana em torno da Terra.

A esfera de influência não representa uma fronteira física rígida, nem uma região onde a gravidade de um corpo deixa de existir. Ela é uma ferramenta de aproximação dinâmica cuja significância e importância estão em descrever qual atração gravitacional é mais influente, mesmo que haja uma diferença abrupta nas magnitudes das forças exercidas pelos corpos gravitacionalmente dominantes (Curtis, 2020).

2.2.2 Esfera de Hill

A discussão sobre a esfera de influência conduz a uma segunda questão: se a gravidade possui alcance infinito e se um planeta orbita uma estrela muito mais massiva, até que distância esse planeta consegue capturar um satélite e mantê-lo gravitacionalmente ligado a si? Esta pergunta ajuda a elucidar, por exemplo, o processo de captura que várias das luas de Júpiter podem ter sofrido durante a formação do Sistema Solar (Gaspar *et al.*, 2011; Gaspar *et al.*, 2013). Também é de grande interesse para a engenharia aeroespacial, visto que estabelece um limite sobre até quão distante é possível mirar num corpo celeste e ser possível manter um satélite artificial em órbita estável.

Considere, portanto, um planeta de massa m , orbitando uma estrela de massa M , em uma órbita circular cujo raio é R . Seja r a distância entre o planeta e um satélite natural ou artificial de massa desprezível em comparação com os demais corpos. A aceleração gravitacional exercida pelo planeta sobre o satélite pode ser escrita como

$$a_p = \frac{Gm}{r^2}.$$

Por outro lado, a perturbação solar diferencial cresce com a distância r em relação ao planeta. No referencial girante associado ao movimento orbital do planeta, a expansão do campo solar nas proximidades do planeta conduz, em primeira aproximação, a um termo perturbativo da ordem de

$$a_{\text{pert}} \simeq 3 \frac{GM}{R^3} r.$$

O raio de Hill é definido como a distância na qual a atração gravitacional planetária deixa de conseguir dominar essa perturbação externa. Assim, impõe-se a condição aproximada

$$\frac{Gm}{r_H^2} \simeq 3 \frac{GM}{R^3} r_H,$$

logo, é possível reorganizar os termos e então obtém-se

$$r_H^3 \simeq R^3 \frac{m}{3M},$$

e, consequentemente,

$$r_H = R \left(\frac{m}{3M} \right)^{1/3}. \quad (9)$$

A Equação (9) define o raio de Hill para o caso idealizado de uma órbita circular.

Fisicamente, o raio de Hill representa uma estimativa da região na qual a atração gravitacional do planeta consegue superar os efeitos gravitacionais produzidos pela estrela dominante e a captura de um terceiro objeto consideravelmente menos massivo é possível. Portanto, enquanto a esfera de influência está associada à escolha conveniente do referencial e ao domínio de validade de uma aproximação kepleriana, o raio de Hill está mais diretamente relacionado à possibilidade de retenção gravitacional de satélites ao redor de um planeta.

No caso da Terra, $r_H \approx 1,5 \times 10^6$, km. Esse valor é maior do que a distância média entre a Terra e a Lua, aproximadamente $3,84 \times 10^5$, km. Assim, a Lua encontra-se bem no interior da região de Hill terrestre, o que é compatível com a interpretação de que sua órbita pode permanecer gravitacionalmente ligada à Terra, apesar da intensa influência gravitacional solar. Por via de regra, o raio de Hill sempre é mais amplo do que o raio da esfera de influência.

O raio de Hill, contudo, não deve ser interpretado como uma fronteira rígida ou como uma superfície física na qual a gravidade planetária deixa de atuar. Trata-se de uma estimativa dinâmica para a região de estabilidade gravitacional sob a ótica do Problema de 3 Corpos. Próximo a essa fronteira, as perturbações solares tornam-se cada vez mais relevantes, de modo que órbitas estáveis de longo prazo normalmente exigem que o satélite permaneça significativamente mais próximo do planeta do que o próprio raio de Hill. Assim, o raio de Hill complementa a noção de esfera de influência: enquanto esta indica uma região conveniente para a modelagem de trajetórias como keplerianas, aquele fornece uma estimativa da região em que um planeta pode efetivamente reter corpos orbitando ao seu redor (Murray; Dermott, 1999b).

2.3 O MÉTODO *PATCHED-CONICS*

A formulação exata de uma trajetória interplanetária corresponde a um Problema de N Corpos. Durante uma missão Terra-Marte, por exemplo, uma nave está

sujeita simultaneamente à atração gravitacional da Terra, do Sol, de Marte e, em menor grau, dos demais corpos do Sistema Solar (outros planetas e, em menor grau, as luas de cada planeta). Assim, a descrição rigorosa do movimento exigiria a integração numérica das equações do problema de N corpos ao longo de toda a trajetória. As ideias expostas nessa seção podem ser encontradas em (Curtis, 2020).

Entretanto, embora essa seja a descrição física mais completa, ela não é necessariamente a mais adequada para uma primeira análise de missão. Em trajetórias interplanetárias, as distâncias envolvidas são muito grandes, e as esferas de influência dos planetas tornam-se pequenas quando comparadas à escala heliocêntrica do Sistema Solar. Isso permite decompor a trajetória completa em trechos nos quais apenas um corpo gravitacional dominante é considerado em cada etapa. Essa aproximação é conhecida como método *patched-conics*.

O nome do método decorre do fato de que, no problema de dois corpos, as trajetórias keplerianas são seções cônicas com o corpo atrator localizado em um dos focos. Assim, uma trajetória interplanetária pode ser aproximada pela conexão sequencial de diferentes cônicas, cada uma válida em uma região dinâmica distinta: uma trajetória hiperbólica planetocêntrica de saída, uma órbita elíptica heliocêntrica de transferência e uma trajetória hiperbólica planetocêntrica de chegada. Fora da esfera de influência dos planetas, considera-se que o movimento da nave é governado predominantemente pela gravidade solar; dentro dela, por outro lado, o movimento passa a ser descrito em relação ao planeta correspondente.

Numa primeira aproximação, considera-se que a esfera de influência é pequena quando observada a partir do referencial heliocêntrico. Portanto, a entrada e a saída da esfera de influência podem ser tratadas como ocorrendo praticamente na posição do próprio planeta em sua órbita ao redor do Sol. Por outro lado, no referencial planetocêntrico, essa mesma esfera de influência é suficientemente grande para a nave ser considerada a uma distância praticamente infinita em relação ao planeta de partida ou destino.

Para uma transferência de Hohmann entre dois planetas em órbitas circulares e coplanares, a trajetória heliocêntrica é uma elipse tangente às órbitas dos planetas de origem e de destino. Se R_1 é o raio orbital heliocêntrico do planeta de origem e R_2 o raio orbital heliocêntrico do planeta de destino, a velocidade circular heliocêntrica do planeta de origem é

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}},$$

enquanto a velocidade da nave no ponto de partida da elipse de transferência é obtida pela equação *vis-viva*,

$$V_D = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a_t} \right)},$$

em que

$$a_t = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

é o semieixo maior da elipse de transferência.

Para uma missão partindo de um planeta mais interno para um planeta externo no Sistema Solar, como uma transferência Terra-Marte, tem-se $V_D > V_1$. Assim, a velocidade hiperbólica excedente de partida é dada por

$$v_{\infty,D} = V_D - V_1,$$

equivalentemente,

$$v_{\infty,D} = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \left[\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right].$$

Essa velocidade representa a velocidade que a nave deve possuir em relação ao planeta de origem ao escapar de sua esfera de influência e entrar em trajetória heliocêntrica rumo ao planeta de destino.

No modelo planetocêntrico, essa condição corresponde a uma trajetória hiperbólica de saída. A nave parte, em teoria, de uma órbita circular de estacionamento ao redor do planeta. Se o raio dessa órbita é igual ao raio de periastro q da hipérbole de escape, então a velocidade circular inicial é

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu_1}{q}},$$

onde μ_1 é o parâmetro gravitacional do planeta de origem. A velocidade no periastro da hipérbole de saída é

$$v_p = \sqrt{v_{\infty,D}^2 + \frac{2\mu_1}{q}}.$$

Logo, o incremento de velocidade necessário para inserir a nave na hipérbole de escape é

$$\Delta v_D = v_p - v_c,$$

ou ainda,

$$\Delta v_D = v_c \left[\sqrt{2 + \left(\frac{v_{\infty,D}}{v_c} \right)^2} - 1 \right].$$

Após deixar a esfera de influência do planeta de origem, a nave passa a ser descrita pela cônica heliocêntrica de transferência. Nessa etapa, a influência gravitacional dominante é a solar, e a trajetória pode ser tratada como uma órbita kepleriana em torno do Sol. O tempo de voo, no caso de uma transferência de Hohmann, corresponde a metade do período da elipse de transferência,

$$t_{12} = \pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu}}.$$

Para ocorrer o encontro com o planeta de destino, este deve estar corretamente posicionado no instante de partida. Assim, além da energia da transferência, o método também exige uma condição geométrica de fase: o planeta de destino deve chegar ao ponto de interceptação da órbita de transferência no mesmo instante que a nave. O período de tempo em que as condições necessárias para essa missão são satisfeitas é denominado janela de lançamento e o período de tempo entre janelas consecutivas é denominado tempo sinódico.

Na chegada ao planeta de destino, o procedimento é análogo ao da partida, mas em sentido inverso. A nave cruza a esfera de influência do planeta alvo com uma velocidade heliocêntrica determinada pela órbita de transferência. Subtraindo-se vetorialmente a velocidade heliocêntrica do planeta de destino, obtém-se a velocidade hiperbólica excedente de chegada. Para uma manobra de Hohmann, as velocidades da nave e do planeta de destino são paralelas, e podem ser escritas aproximadamente como

$$v_{\infty,A} = V_2 - V_A,$$

em que V_2 é a velocidade heliocêntrica do planeta de destino e V_A é a velocidade heliocêntrica da nave no ponto de chegada da elipse de transferência. Essa velocidade $v_{\infty,A}$ define a hipérbole de aproximação planetocêntrica.

O comportamento final da nave depende do objetivo da missão. Se não houver manobra de captura, a nave realiza a manobra conhecida como *fly-by*, atravessando a esfera de influência do planeta e saindo com o mesmo módulo de velocidade hiperbólica excedente, embora com a direção alterada pela gravidade do planeta. Se o objetivo for inserir a nave em uma órbita ao redor do planeta, deve-se realizar uma manobra de frenagem próxima ao periastro da hipérbole de chegada.

Nesse caso, a velocidade no periastro da hipérbole de aproximação é

$$v_{p,hip} = \sqrt{v_{\infty,A}^2 + \frac{2\mu_2}{q}},$$

onde μ_2 é o parâmetro gravitacional do planeta de destino e q é o raio de periastro da hipérbole de chegada e adota-se ser aproximadamente igual ao raio da órbita circular heliocêntrica da Terra. Se a órbita de captura desejada possui excentricidade e , a velocidade no periastro dessa órbita é

$$v_{p,cap} = \sqrt{\frac{\mu_2(1+e)}{q}}.$$

Assim, o incremento de velocidade necessário para a captura orbital é

$$\Delta v_A = v_{p,hip} - v_{p,cap},$$

ou seja,

$$\Delta v_A = \sqrt{v_{\infty,A}^2 + \frac{2\mu_2}{q}} - \sqrt{\frac{\mu_2(1+e)}{q}}.$$

O método *patched-conics*, portanto, transforma um problema gravitacional complexo em uma sequência de problemas de dois corpos. Em vez de integrar simultaneamente todas as interações gravitacionais relevantes, divide-se a missão em trechos dominados por corpos centrais distintos: o planeta de origem, o Sol e o planeta de destino. Essa simplificação fornece estimativas satisfatórias para velocidades, tempos de voo, janelas de lançamento, manobras de saída e manobras de chegada.

Apesar de sua utilidade, o método não deve ser interpretado como uma descrição exata da trajetória. A transição entre os referenciais não ocorre de maneira física abrupta, e os efeitos gravitacionais dos corpos envolvidos nunca deixam de existir. O que se faz é substituir uma transição contínua por uma fronteira aproximada, a esfera de influência, na qual as soluções keplerianas são conectadas. Por isso, o método *patched-conics* é especialmente útil em estudos preliminares de missão, nos quais se deseja compreender a arquitetura geral da trajetória antes de recorrer a modelos numéricos utilizando o Problema de N Corpos.

3 METODOLOGIA

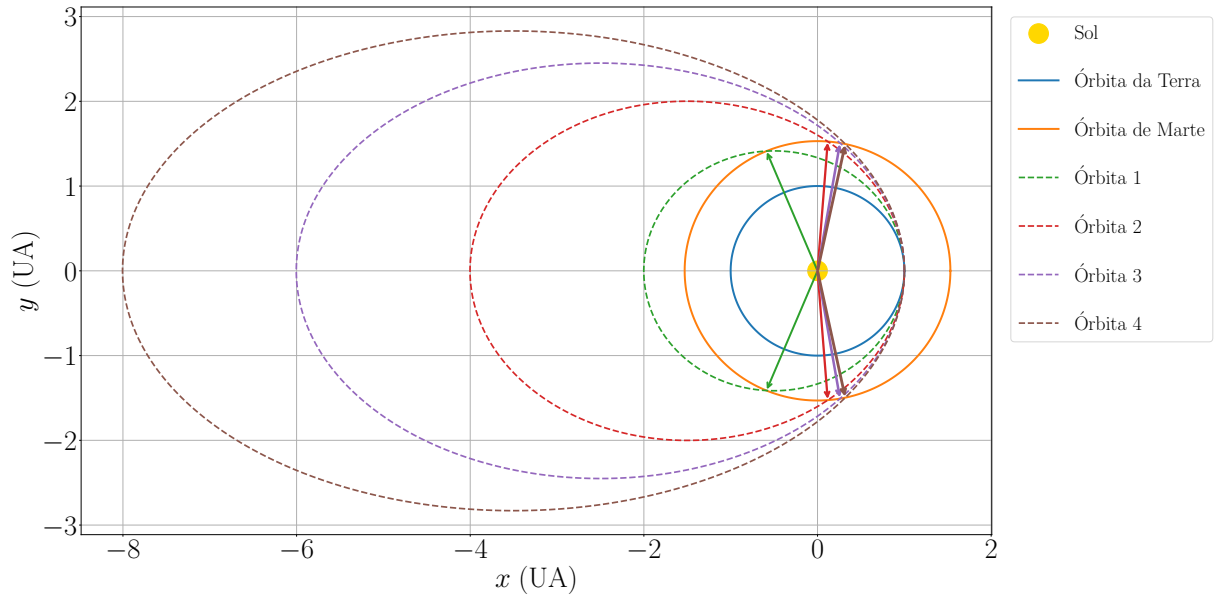
A partir da introdução teórica apresentada no Capítulo 2, foram estabelecidos os fundamentos necessários para a discussão da arquitetura de missões interplanetárias. Em particular, a transferência entre um planeta de origem para outro de órbita mais alta do Sistema Solar foi apresentada, em primeira aproximação, como uma manobra de Hohmann. Entretanto, ao se considerar uma eventual missão tripulada para Marte, algumas limitações dessa abordagem devem ser discutidas. Essas missões podem assumir diferentes objetivos, como uma exploração com retorno, a instalação de uma base científica permanente, a demonstração de domínio tecnológico ou, em uma perspectiva de longo prazo, a ampliação das possibilidades de sobrevivência da espécie humana.

Por isso, embora a transferência de Hohmann seja uma referência fundamental em análises preliminares de missões interplanetárias, seu elevado tempo de voo pode torná-la inadequada para cenários de missões tripuladas. Tendo em vista a preservação do bem-estar e da saúde dos astronautas, trajetórias para Marte em tempos consideravelmente menores são desejáveis, ainda que isso implique órbitas de transferência mais energéticas e maiores requisitos de ΔV . Nesse contexto, o problema de Lambert (Vallado, 2022) constitui uma das formulações mais empregadas para determinar uma trajetória que conecte dois pontos no espaço em um intervalo de tempo previamente estabelecido. A partir dessa solução, podem-se estimar as velocidades de partida e chegada e, conseqüentemente, os incrementos de velocidade associados à missão. Entretanto, neste trabalho será adotado o método *patched-conics*, com o objetivo de construir uma análise preliminar da transferência Terra–Marte e comparar diferentes condições de voo.

A Figura 1 mostra alguns exemplos de órbitas que possuem intersecção com a órbita heliocêntrica de Marte tendo o periastro na órbita heliocêntrica da Terra. É possível verificar que órbitas mais excêntricas tem uma trajetória mais curta para o encontro, conseqüentemente, são rotas mais rápidas para chegar ao destino final.

Entretanto, a existência geométrica de uma intersecção com a órbita de Marte não é suficiente para definir uma missão interplanetária. É necessário que a nave e Marte estejam simultaneamente na região de encontro no instante desejado. Para contornar o excesso de simplificações, uma forma vetorizada e mais robusta foi desenvolvida para este trabalho. Sua finalidade é construir condições iniciais para a simulação numérica de modo que sejam satisfeitas, simultaneamente, a geometria da saída da esfera de influência terrestre, a chegada à esfera de influência de Marte, o tempo total de voo requerido.

Figura 1 – Diferentes órbitas de transferência possíveis entre a Terra e Marte.



Fonte: autor.

Para isso, considera-se o vetor de incógnitas

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \xi \\ Q \\ f_0^M \\ f_{\text{SOI}, \odot} \end{bmatrix},$$

em que Q é o apoastro heliocêntrico da órbita de transferência, ξ é o ângulo polar inicial da nave em relação à Terra, f_0^M é a fase inicial de Marte em sua órbita heliocêntrica e f_{SOI} é a anomalia verdadeira heliocêntrica da nave no instante em que esta alcança a esfera de influência de Marte diferentemente da formulação simplificada, na qual o encontro é tratado diretamente na órbita média de Marte. Outra diferença é a estimativa do ângulo ξ , que determina a posição inicial da nave na órbita de estacionamento terrestre e através dele, a velocidade inicial da nave pode ser calculada analiticamente, ou seja, este único parâmetro define as condições iniciais para iniciar a simulação. No método do *patched-conics* tradicional, ξ é calculado por

$$\xi = \cos^{-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{q_{s/\oplus} v_\infty^2}{\mu_\oplus}} \right) + \frac{3}{2}\pi, \quad (10)$$

$q_{s/\oplus}$ é o periastro geocêntrico da nave e v_∞ é o excesso de velocidade hiperbólica, sendo estimado como

$$v_\infty = v_q - v_\oplus,$$

onde v_q é a velocidade no periastro da elipse heliocêntrica que a nave deve ter para interceptar o alvo e $v_\oplus$ é a magnitude da velocidade heliocêntrica circular da Terra.

No método proposto, entretanto, estas hipóteses não são adotadas. A posição inicial da nave está levemente deslocada, além de que a subtração de velocidades descrita acima seria válida apenas se e somente se as velocidades fossem antiparalelas quando a nave ultrapassasse a esfera de influência, o que é uma hipótese de simplificação útil para um estudo preliminar, mas não fisicamente correta.

Portanto, a posição heliocêntrica inicial da nave é dada por

$$\vec{r}_s(0) = \vec{r}_\oplus(0) + q_{s/\oplus} \begin{bmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

onde $q_\oplus$ é o periastro no sistema planetocêntrico de partida. A posição heliocêntrica da Terra é descrita como uma órbita circular de raio $a_\oplus$, tal que

$$\vec{r}_\oplus(t) = a_\oplus \begin{bmatrix} \cos(\Omega_\oplus t) \\ \sin(\Omega_\oplus t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\Omega_\oplus = \frac{h_\oplus}{a_\oplus^2},$$

é a velocidade angular heliocêntrica da Terra e $h_\oplus$ é o momento angular heliocêntrico da Terra. Portanto, no instante inicial, define-se que a posição da Terra é

$$\vec{r}_\oplus(0) = \begin{bmatrix} a_\oplus \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

é a posição heliocêntrica inicial da Terra. No sistema geocêntrico, a posição da nave, de forma geral é dada por

$$\vec{r}_{s/\oplus} = \frac{a_{s/\oplus}(e_{s/\oplus}^2 - 1)}{1 + e_{s/\oplus} \cos f} \begin{bmatrix} \cos(\xi + f) \\ \sin(\xi + f) \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $e_{s/\oplus}$ é a excentricidade da órbita hiperbólica geocêntrica, v é a anomalia verdadeira geocêntrica e ξ o argumento do perigeu. O argumento do perigeu está relacionado com o ângulo da assíntota por

$$\beta = \xi - \frac{3}{2}\pi.$$

Define-se o momento angular específico geocêntrico por

$$h_{s/\oplus} = \sqrt{\mu_\oplus a_{s/\oplus} (e_{s/\oplus}^2 - 1)}.$$

A anomalia verdadeira na borda da SOI terrestre, $f_{\text{SOI},\oplus}$, é obtida impondo que o raio geocêntrico seja igual a $R_{\text{SOI},\oplus}$:

$$R_{\text{SOI},\oplus} = \frac{a_{s/\oplus} (e_{\oplus}^2 - 1)}{1 + e_{\oplus} \cos f_{\text{SOI},\oplus}},$$

logo,

$$f_{\text{SOI},\oplus} = \arccos \left[\frac{a_{s/\oplus} (e_{\oplus}^2 - 1) / R_{\text{SOI},\oplus} - 1}{e_{\oplus}} \right].$$

A velocidade geocêntrica da nave na borda da esfera de influência é

$$\vec{v}_{s/\oplus}(\Delta t_{\text{SOI},\oplus}) = \frac{\mu_{\oplus}}{h_{\oplus}} \begin{bmatrix} -\sin f_{\text{SOI},\oplus} \\ e_{\oplus} + \cos f_{\text{SOI},\oplus} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A velocidade heliocêntrica de partida na borda da SOI terrestre, $\vec{v}_{\text{dep}}$, é então construída pela soma vetorial entre a velocidade hiperbólica geocêntrica e a velocidade heliocêntrica da Terra no instante correspondente à saída da SOI:

$$\vec{v}_{\text{dep}} = \vec{v}_{\oplus} + \vec{v}_{s/\oplus}(\Delta t_{\text{SOI},\oplus}),$$

onde o tempo de voo hiperbólico geocêntrico é

$$\Delta t_{\text{SOI},\oplus} = \sqrt{\frac{a_{\oplus}^3}{\mu_{\oplus}}} (e_{\oplus} \sinh H_{\text{SOI},\oplus} - H_{\text{SOI},\oplus}),$$

e $H_{\text{SOI},\oplus}$ é a anomalia hiperbólica geocêntrica, definida por

$$H_{\text{SOI},\oplus} = \text{arcosh} \left(\frac{R_{\text{SOI},\oplus} / a_{s/\oplus} + 1}{e_{s/\oplus}} \right).$$

Pela equação da energia mecânica total, dada por

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}, \quad (12)$$

uma órbita heliocêntrica de semieixo maior a e velocidade $|\vec{v}_{\text{dep}}|$ tem energia para estar na posição r_{ene} , onde

$$r_{\text{ene}} = \frac{2a\mu}{\mu + a|\vec{v}_{\text{dep}}|^2}. \quad (13)$$

Por outro lado, a geometria vetorial da saída da SOI terrestre fornece a distância heliocêntrica

$$r_{\text{geo}} = |\vec{r}_{\oplus}(\Delta t_{\text{SOI},\oplus}) + \vec{r}_{s/\oplus}(f_{\text{SOI},\oplus})|. \quad (14)$$

Por definição, ambas as Equações (13) e (14) são equivalentes e esta é a primeira equação do sistema.

$$F_1 = r_{\text{ene}} - r_{\text{geo}} = 0. \quad (15)$$

Essa condição substitui a aproximação simplificada $q_{\oplus} \approx a_{\oplus}$ por uma formulação que combina a imposição energética com a descrição geométrica da órbita.

A distância heliocêntrica inicial da nave, isto é, o periélio da órbita de transferência é definido por

$$q = |\vec{r}_s(0)|,$$

cuj magnitude é

$$q = \sqrt{a_{\oplus}^2 + 2a_{\oplus}q_{\oplus} \cos \xi + q_{\oplus}^2}.$$

O valor do afélio Q da órbita de transferência é uma das incógnitas do sistema, mas pode ser descoberto ao correlacionar as variáveis entre os distintos sistemas de referência, o semieixo maior da transferência heliocêntrica é

$$a = \frac{Q + q}{2}, \quad (16)$$

e a excentricidade é

$$e = 1 - \frac{q}{a}, \quad (17)$$

Como o periélio q permanece próximo ao raio orbital da Terra e varia apenas com a posição inicial da nave, sua contribuição para a variação da geometria orbital é pequena na escala heliocêntrica. Assim, a excentricidade da órbita de transferência passa a ser controlada predominantemente pelo afélio Q , de modo que maiores valores de Q resultam em trajetórias mais excêntricas. O momento angular específico da órbita de transferência é então

$$h = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}.$$

onde μ é o parâmetro gravitacional do Sol.

Como a posição inicial da nave não é tomada exatamente no centro da Terra, mas levemente deslocada devido à posição inicial da nave na órbita de estacionamento, o periastro da órbita de transferência também não coincide necessariamente com o eixo x heliocêntrico. Dessa forma, define-se o argumento do periélio da nave na órbita de transferência por

$$\omega = \arctan \left(\frac{q_{\oplus} \sin \xi}{a_{\oplus} + q_{\oplus} \cos \xi} \right). \quad (18)$$

Com isso, a magnitude do vetor posição da nave ao longo da transferência heliocêntrica $r_s = |\vec{r}_s|$ pode ser escrita pela Equação (6), onde $e < 1$, visto que se trata de uma elipse de transferência. A posição angular heliocêntrica é

$$f = \omega + \nu, \quad (19)$$

onde ν é a anomalia verdadeira heliocêntrica, logo, a posição heliocêntrica da nave é dada por

$$\vec{r}_s(f) = r_s(f) \begin{bmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

A velocidade heliocêntrica da nave é dada no referencial perifocal da transferência por

$$\vec{v}_s(f) = \frac{\mu}{h} \begin{bmatrix} -\sin f \\ e + \cos f \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Como a órbita está rotacionada pelo ângulo ω , a velocidade no referencial heliocêntrico é

$$\vec{v}'_s(f) = \mathcal{R}_z(\omega) \vec{v}_s(f)$$

em que $\mathcal{R}_z(\omega)$ é a matriz de rotação passiva em torno do eixo normal ao plano orbital, (Levi-Civita, 1927; Kostrikin *et al.*, 1997).

O tempo de voo heliocêntrico desde o periastro da transferência até uma anomalia verdadeira f é calculado a partir da anomalia excêntrica E . Para a órbita elíptica, a equação do tempo de voo é

$$E(f, e) = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \left(\frac{f}{2} \right) \right], \quad (22)$$

e, portanto,

$$\Delta t(f) = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [E(f, e) - e \sin E(f, e)].$$

No método desenvolvido, essa expressão é avaliada em $f = f_{\text{SOI}}$, de modo que

$$\Delta t_{\text{SOI}, \sigma} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [E(f_{\text{SOI}, \sigma}, e) - e \sin E(f_{\text{SOI}, \sigma}, e)]. \quad (23)$$

A posição de Marte no instante Δt_{SOI} é obtida assumindo uma órbita heliocêntrica circular e representa o tempo em que a nave está na borda da esfera de influência. O velocidade angular da órbita circular de Marte é

$$\Omega_{\sigma} = \frac{h_{\sigma}}{a_{\sigma}^2},$$

de modo que sua fase no instante de chegada à SOI é

$$\theta_{\sigma} = f_0^M + \Omega_{\sigma} \Delta t_{\text{SOI}, \sigma}.$$

Assim, o espaço de fase de Marte quando a nave está na borda da esfera de influência marciana é

$$\vec{r}_{\sigma}(\Delta t_{\text{SOI}, \sigma}) = a_{\sigma} \begin{bmatrix} \cos \theta_{\sigma} \\ \sin \theta_{\sigma} \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\vec{v}_{\sigma}(\Delta t_{\text{SOI}, \sigma}) = \frac{h_{\sigma}}{a_{\sigma}/\odot} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{\sigma} \\ \cos \theta_{\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A partir desses estados, define-se o estado relativo da nave em relação a Marte no instante de entrada na esfera de influência:

$$\vec{r}_{s/\sigma} = \vec{r}_s(f_{\text{SOI},\sigma}) - \vec{r}_\sigma(\Delta t_{\text{SOI},\sigma}),$$

$$\vec{v}_{s/\sigma} = \vec{v}_s(f_{\text{SOI},\sigma}) - \vec{v}_\sigma(\Delta t_{\text{SOI},\sigma}).$$

Esse estado relativo é usado para reconstruir a hipérbole de chegada areocêntrica.

A energia orbital específica em relação a Marte é

$$\epsilon_\sigma = \frac{1}{2} \left| \vec{v}_{s/\sigma} \right|^2 - \frac{\mu_\sigma}{\left| \vec{r}_{s/\sigma} \right|}.$$

Para a chegada ser hiperbólica, é necessário que

$$\epsilon_\sigma > 0.$$

O momento angular específico da hipérbole de chegada é

$$h_{s/\sigma} = \left| \vec{r}_{s/\sigma} \times \vec{v}_{s/\sigma} \right|.$$

Com isso, a excentricidade da hipérbole areocêntrica é

$$e_{s/\sigma} = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon_\sigma h_{s/\sigma}^2}{\mu_\sigma^2}}.$$

O periastro da hipérbole de chegada é então

$$q_{s/\sigma} = \frac{h_{s/\sigma}^2}{\mu_\sigma (1 + e_{s/\sigma})}.$$

Além de calcular o periastro, também é necessário determinar o tempo restante entre a entrada na SOI de Marte e a passagem pelo periastro da hipérbole. Definindo o módulo do semieixo maior hiperbólico como

$$a_{s/\sigma} = \frac{\mu_\sigma}{2\epsilon_\sigma},$$

a anomalia hiperbólica na entrada da SOI é obtida por

$$H_{\text{SOI},\sigma} = -\text{arcosh} \left[\frac{\left| \vec{r}_{s/\sigma} \right| / a_{s/\sigma} + 1}{e_{s/\sigma}} \right],$$

portanto, o tempo de voo da borda da SOI até o periastro até a posição na SOI é

$$t_{q/\sigma} = \sqrt{\frac{a_{s/\sigma}^3}{\mu_\sigma}} \left[e_{s/\sigma} \sinh H_{\text{SOI},\sigma} - H_{\text{SOI},\sigma} \right]. \quad (24)$$

A segunda equação impõe que a nave esteja exatamente na esfera de influência de Marte no instante Δt_{SOI} :

$$F_2 = |\vec{r}_s(f_{\text{SOI},\sigma}) - \vec{r}_\sigma(\Delta t_{\text{SOI},\sigma})| - R_{\text{SOI},\sigma} = 0. \quad (25)$$

A terceira equação impõe que o tempo total de missão seja igual ao tempo requerido. Como o intervalo total é composto pelo tempo heliocêntrico até a SOI de Marte e pelo tempo areocêntrico da SOI até o periastro, tem-se

$$F_3 = \Delta t_{\text{SOI},\sigma} + \Delta t_{q/\sigma} - \Delta t_{\text{req}} = 0, \quad (26)$$

onde Δt_{req} é o tempo de viagem desejado, sendo este um parâmetro livre .

A quarta equação impõe o alvo de chegada, isto é, que o periastro da hipérbole areocêntrica tenha o valor desejado:

$$F_4 = q_{s/\sigma} - q_{\text{req}} = 0, \quad (27)$$

onde q_{req} é o tempo de viagem desejado, sendo este também um parâmetro livre .

Portanto, o método vetorizado resolve simultaneamente

$$\begin{bmatrix} F_1(Q, \xi) \\ F_2(Q, \xi, f_0^M, f_{\text{SOI}}) \\ F_3(Q, \xi, f_0^M, f_{\text{SOI}}) \\ F_4(Q, \xi, f_0^M, f_{\text{SOI}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

O sistema é resolvido numericamente por mínimos quadrados com restrições de domínio. Em particular, impõe-se que

$$Q > a_\sigma,$$

$$\frac{3\pi}{2} < \xi < 2\pi,$$

$$0 < f_0^M < 2\pi,$$

e

$$0 < f_{\text{SOI},\sigma} < \pi.$$

Essas restrições contribuem para a estabilidade das iterações do método dos mínimos quadrados, evitando que a solução divirja ou convirja para valores sem significado físico. Ressalta-se que apenas o argumento do perigeu ξ e a fase orbital inicial de Marte f_0^M são utilizados como condições iniciais da simulação. O afélio Q e o ângulo $f_{\text{SOI},\sigma}$, por sua vez, são introduzidos como incógnitas auxiliares, necessárias apenas para o sistema ser determinado e não como dados de entrada na simulação.

4 APRESENTAÇÃO DE DADOS

4.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Um estudo de interesse consiste em analisar como determinadas variáveis influenciam a configuração inicial da nave. No problema em questão, são considerados dois parâmetros livres nas condições iniciais da simulação e associados à arquitetura da missão: o tempo de voo até o destino e a altitude inicial da nave em relação ao planeta de partida.

Como a análise depende simultaneamente desses dois parâmetros, mapas de calor tornam-se uma ferramenta adequada para visualizar a sensibilidade das soluções. Para gerar os resultados apresentados a seguir, o sistema de equações (28) foi resolvido para diversas configurações de tempo de voo e altitude inicial. Como a esfera de influência representa uma fronteira aproximada para a troca do corpo central dominante na descrição da trajetória, as altitudes iniciais consideradas nesta análise são expressas como percentuais de r_{SOI} . Nas imagens a seguir, a barra de cores representa a magnitude de cada grandeza e as curvas são curvas de níveis de magnitude constante.

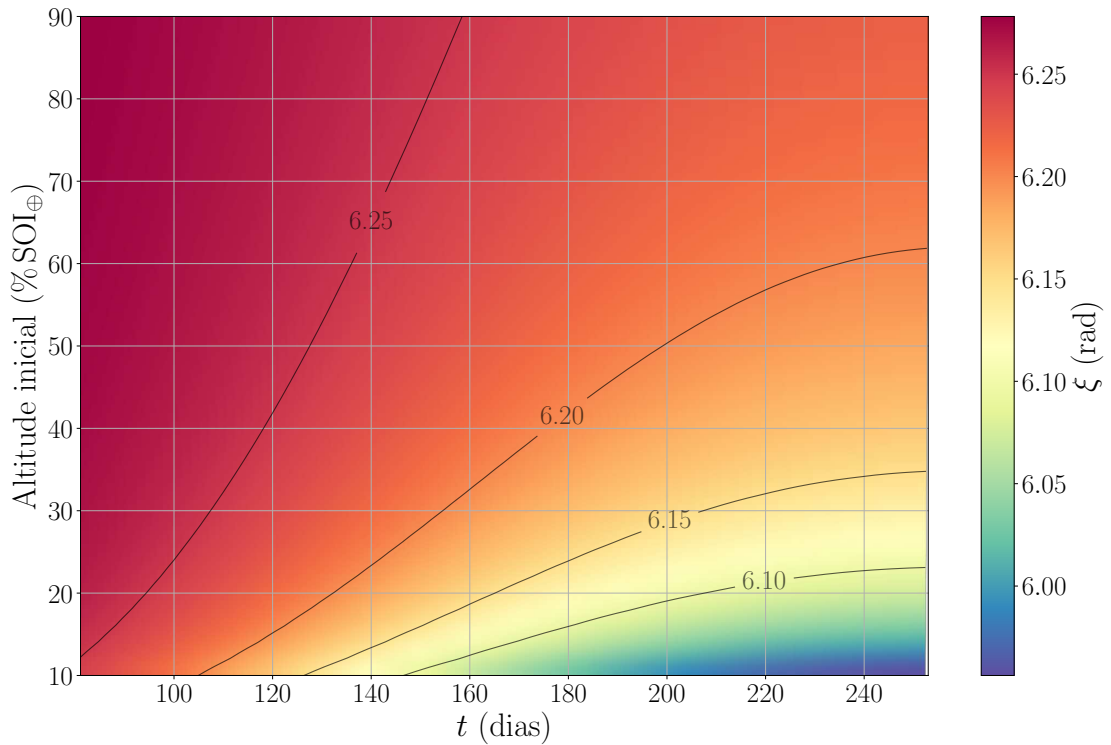
Inicialmente, analisa-se o comportamento da incógnita ξ , apresentado na Figura 2. Observa-se que, em todo o domínio analisado, a posição inicial da nave permanece no quarto quadrante. As curvas de nível indicam que ξ apresenta dependência tanto com a altitude inicial quanto com o tempo de voo desejado, evidenciando a sensibilidade da condição inicial a esses parâmetros.

Essa análise é particularmente relevante porque, como discutido anteriormente, o ângulo ξ define a posição inicial da nave na órbita de estacionamento terrestre e, conseqüentemente, a direção da velocidade após a manobra de partida. Dessa forma, variações em ξ alteram diretamente a configuração inicial do espaço de estados utilizada na simulação numérica.

Outra grandeza relevante para a análise é o afélio Q da órbita de transferência. Como o periélio está associado à posição inicial da nave, sua variação ocorre principalmente devido à incógnita ξ , definida no referencial planetocêntrico. Entretanto, quando comparada à escala heliocêntrica do problema, essa variação é pequena. Assim, as principais alterações na excentricidade e na energia da elipse de transferência passam a depender, majoritariamente, do valor de Q .

No mapa de calor da Figura 3a, observa-se que a variação do afélio com a altitude inicial é pouco significativa, enquanto a dependência com o tempo de viagem é muito mais pronunciada. Esse comportamento também aparece na Figura 3b, na qual se verifica que menores tempos de viagem exigem maiores valores de Q , como

Figura 2 – Análise das variações do ângulo ξ em função do tempo de viagem e altitude inicial.



Fonte: autor.

esperado, uma vez que a órbita de transferência se torna mais excêntrica e energeticamente mais elevada.

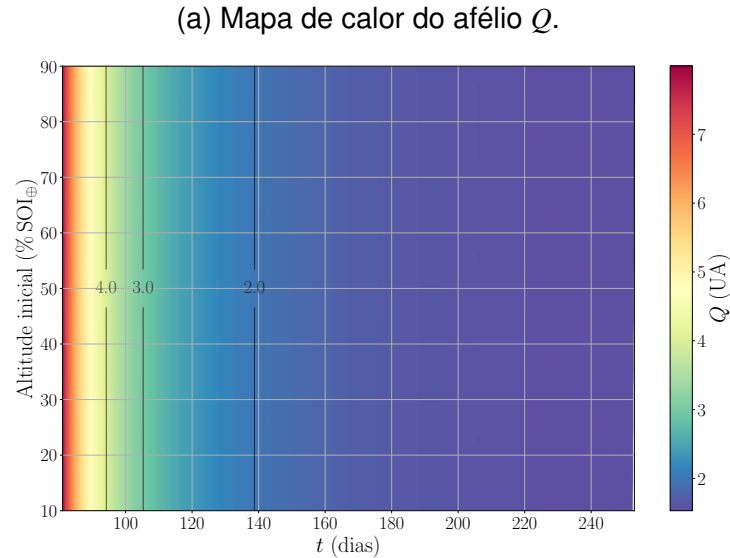
Ainda na Figura 3b, nota-se que, para altitudes muito baixas, menores que 20% da $SOI_{\oplus}$, as curvas da apresentam variações muito pequenas entre si. Embora essas diferenças sejam reduzidas quando expressas em unidades astronômicas, elas ainda podem ser relevantes em um sistema sensível às condições iniciais, como ocorre no Problema de N Corpos. Portanto, mesmo pequenas variações no afélio podem produzir diferenças significativas na evolução orbital consideráveis nas condições de chegada em Marte.

A Figura 4 apresenta o comportamento da fase inicial de Marte, f_0^M , necessária para satisfazer as condições de encontro ao final da transferência. Verifica-se que f_0^M aumenta com o tempo de voo, refletindo a necessidade de ajustar a posição inicial de Marte conforme o planeta avança em sua órbita durante o intervalo de transferência.

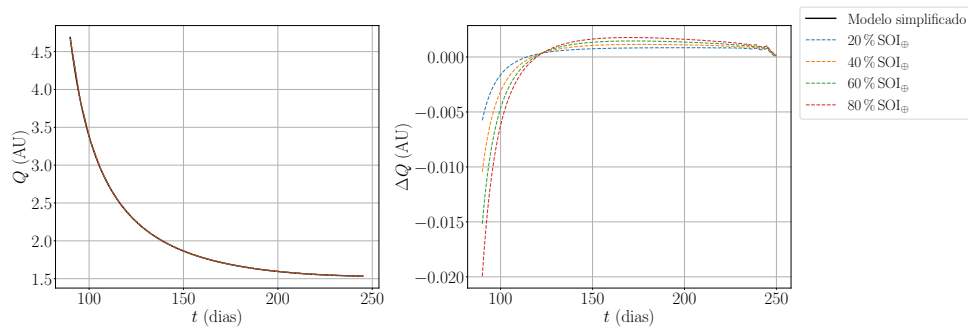
Em comparação com o tempo de voo, a altitude inicial apresenta influência reduzida sobre f_0^M . As curvas de nível apresentam um comportamento praticamente linear, entretanto a inclinação muito mais próxima da vertical indica que a fase inicial de Marte é determinada majoritariamente pela duração da transferência, enquanto que a altitude inicial ainda introduz uma correção na geometria do problema, uma vez

que altera a posição inicial da nave e, portanto, a configuração da missão.

Figura 3 – Análise das variações do afélio Q em função do tempo de viagem e altitude inicial.



(b) Comparação do afélio Q em função do tempo de viagem para várias altitudes constantes do lado esquerdo e a variação do afélio quando comparado com o modelo convencional não vetorizado do lado direito.

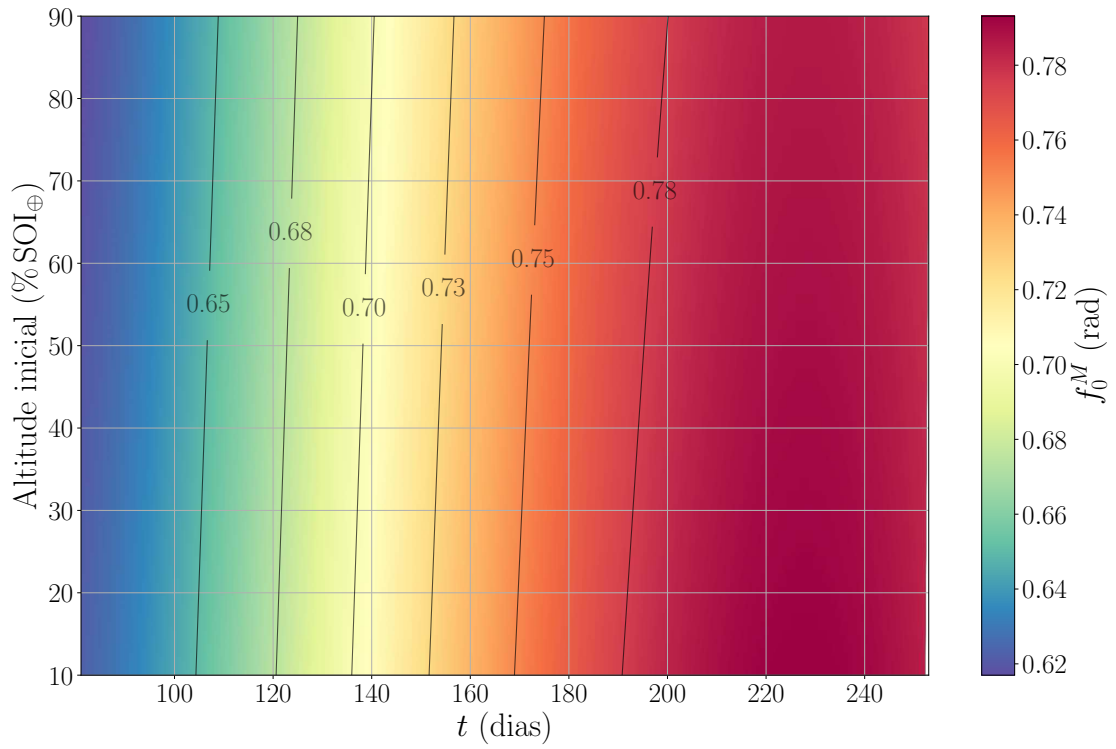


Fonte: autor.

A Figura 5 apresenta o comportamento do incremento de velocidade de partida, ΔV . Observa-se que os valores de maior magnitude ocorrem para tempos de viagem mais curtos, evidenciando que transferências mais rápidas exigem manobras de partida mais energéticas. À medida que o requisito do tempo de voo é relaxado, aceitando tempos de viagem mais longos, o valor de ΔV diminui consideravelmente.

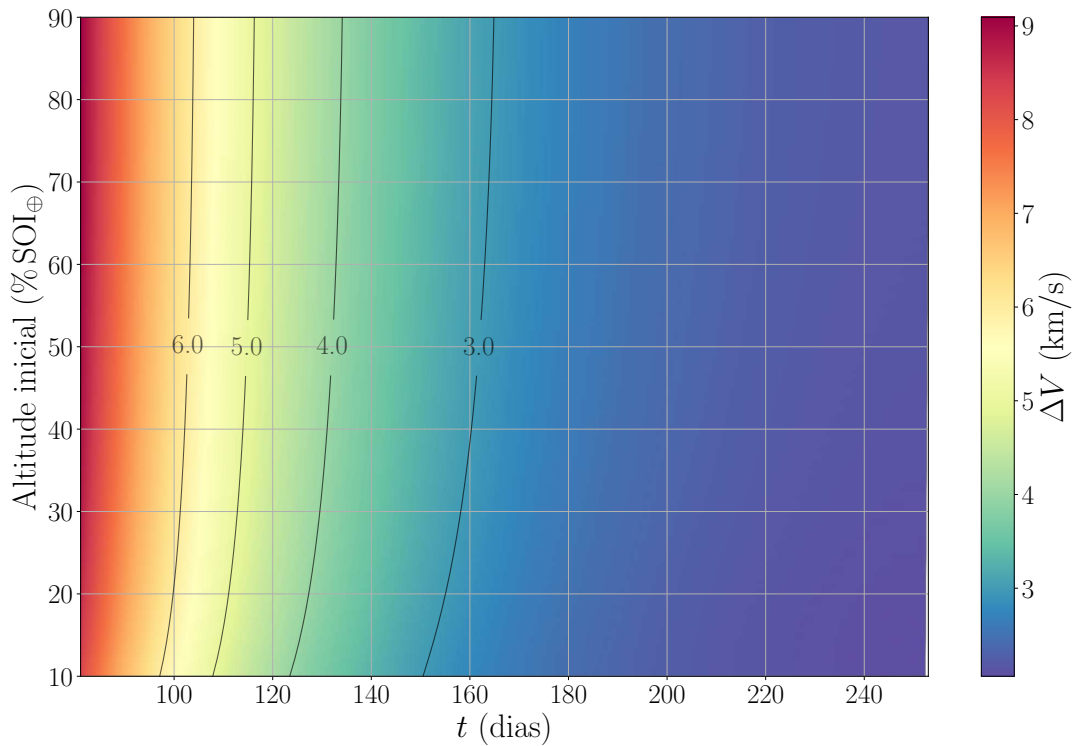
A influência da altitude inicial sobre ΔV é menos pronunciada que a influência do tempo de voo. As curvas de nível apresentam orientação predominantemente vertical, indicando que a variação temporal domina o comportamento da grandeza. Ainda assim, nota-se uma leve dependência com a altitude, especialmente para tempos de voo menores, região na qual pequenas alterações nas condições iniciais produzem diferenças mais perceptíveis no incremento de velocidade requerido.

Figura 4 – Análise das variações da fase inicial de Marte f_0^M em função do tempo de viagem e altitude inicial.



Fonte: autor.

Figura 5 – Análise das variações do incremento de velocidade de partida ΔV em função do tempo de viagem e altitude inicial.



Fonte: autor.

4.2 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Nesta seção, são apresentados os resultados das simulações realizadas com o REBOUND. Serão analisados três tempos de viagem: 105 dias, 150 dias e 210 dias, correspondentes, respectivamente, a aproximadamente 3,5 meses, 5 meses e 7 meses. A escolha desses valores foi feita considerando uma viagem rápida, uma de média duração e uma mais longa.

Após a solução do sistema de equações apresentado no Capítulo 3, apenas o ângulo ξ , associado à hipérbole de partida, e a fase inicial de Marte, f_0^M , são utilizados diretamente para inicializar a simulação. Isso ocorre porque o REBOUND permite definir os corpos de diferentes formas, seja por meio de posição e velocidade em coordenadas cartesianas, seja por elementos keplerianos. Neste trabalho, a nave foi inicializada por posição e velocidade cartesianas, calculadas analiticamente a partir de ξ , enquanto o Sol, a Terra e Marte foram definidos por seus elementos orbitais. Os demais planetas do Sistema Solar não foram incluídos, pois sua influência é secundária para os objetivos deste trabalho.

Embora tenha sido imposto o periastro da hipérbole areocêntrica de chegada, nenhuma das simulações a nave atinge o alvo estabelecido de 50.000 km de altitude em relação à superfície marciana, mesmo utilizando-se das condições iniciais encontradas pelas equações analíticas. Essa diferença pode estar associada às próprias hipóteses do método *patched-conics*, no qual a trajetória é aproximada por trechos de dois corpos e apenas um atrator dominante é considerado em cada região dinâmica. Já na simulação numérica, a nave evolui em um Problema de 4 Corpos, composto pelo Sol, pela Terra, por Marte e por uma partícula de massa desprezível representando a nave.

Outro fator relevante é a sensibilidade da trajetória às condições iniciais. Pequenas variações na posição e na velocidade inicial da nave podem se acumular ao longo do tempo de voo, produzindo diferenças significativas no estado final. Esse comportamento é característico de sistemas dinâmicos sensíveis às condições iniciais, especialmente quando múltiplas interações gravitacionais são consideradas. Portanto, a diferença entre o periastro previsto pelo sistema algébrico e o resultado obtido na integração numérica não invalida a formulação, mas evidencia as limitações da aproximação pelo método *patched-conics* quando comparada a uma simulação de N corpos.

4.2.1 Análise quantitativa

Nesse estudo foram feitas simulações tanto com o método vetorizado, que chamaremos de método vetorizado, quanto o convencional não vetorizado, que chamaremos de método simplificado. A Tabela 1 contém os principais parâmetros utili-

zados para iniciar a simulação, órbita de transferência resultante e as condições de chegada e frenagem em Marte. Os valores de v_p na partida representam a magnitude da velocidade da hipérbole de partida, ou seja, após a aplicação do incremento de velocidade.

Foi considerado que a nave partiria de uma órbita circular com altitude de 50.000 km em relação à superfície terrestre. Portanto, os valores das componentes de posição e velocidade antes e depois da aplicação do impulso ΔV , que passaremos a chamar de ΔV_{dep} , não foram incluídos, mas podem ser facilmente calculados com o valor ξ , fornecido tanto em radianos quanto em graus. O valor da altitude foi assumido como o mesmo em todas as simulações, por isso esse dado não foi incluído na Tabela 1.

Tabela 1 – Comparação entre as simulações simplificada e não simplificada para diferentes tempos de voo.

Parâmetro	Unidade	105 dias		150 dias		210 dias	
		Simplificado	Vetorizado	Simplificado	Vetorizado	Simplificado	Vetorizado
Propriedades da órbita planetocêntrica de partida							
ξ	rad	6,147266	6,146143	5,992499	5,990657	5,852839	5,851140
ξ	deg	352,212	352,148	343,345	343,239	335,343	335,246
v_∞	km/s	6,716777	6,685050	4,195347	4,177311	3,143038	3,133083
v_q	km/s	7,697901	7,670234	5,634139	5,620722	4,901151	4,894772
ΔV_{dep}	km/s	5,038711	5,011043	2,974949	2,961532	2,241960	2,235582
Geometria da transferência heliocêntrica							
f_0^M	rad	0,652319	0,651332	0,724093	0,722912	0,790687	0,789222
f_0^M	deg	37,3751	37,3186	41,4875	41,4198	45,3030	45,2191
Q	AU	3,018096	3,017933	1,864964	1,865492	1,572458	1,573143
a	AU	2,009346	2,009451	1,432780	1,433224	1,286526	1,287040
e	–	0,501844	0,501870	0,301388	0,301605	0,221984	0,222295
f	rad	1,606455	1,601058	2,087144	2,078667	2,698959	2,683167
Chegada e captura em Marte							
<i>closest approach</i>	km	217.031,128	120.425,997	515.935,694	62.851,035	674.546,726	312.189,191
ΔV_{arv}	km/s	12,203191	11,859222	7,396716	6,434448	4,161615	3,827560
ΔV_{tot}	km/s	17,241901	16,870265	10,371665	9,395979	6,403576	6,063142
Tempo da 1ª queima	dias	104,823106	105,168750	149,122917	149,875884	205,098611	207,203662
Tempo da 2ª queima	dias	113,556597	109,671370	175,310954	152,355051	242,722412	220,864079
Tempo de manobra	dias	8,733491	4,502620	26,188037	2,479167	37,623801	13,660417
Tipo de movimento		prógrada	retrógrada	prógrada	prógrada	prógrada	prógrada

A análise quantitativa dos valores da Tabela 1 mostra resultados coerentes com o comportamento esperado para transferências interplanetárias de diferentes energias. Em particular, observa-se que órbitas de transferência associadas a tempos de voo mais curtos apresentam maiores valores de afélio Q e, conseqüentemente, maiores excentricidades. Isso ocorre porque a variação do periélio devido à mudança do ângulo ξ é pequena quando comparada à escala heliocêntrica do problema, fazendo com que as principais alterações na geometria da elipse sejam determinadas pelo valor do afélio Q .

Embora a energia orbital não esteja explicitamente apresentada na Tabela 1, é possível inferir que as transferências mais rápidas são também mais energéticas. Para o problema kepleriano heliocêntrico, a energia mecânica específica, dada pela Equação (12), é constante e depende apenas do semieixo maior a , visto que μ é uma constante. Como o semieixo maior da elipse de transferência é dado pela Equação (16), o aumento de Q implica diretamente o aumento do semieixo maior. Consequentemente, a energia orbital específica torna-se menos negativa, indicando uma órbita heliocêntrica de maior energia.

Outro resultado que também já era esperado é em relação ao ΔV_{arv} , a variação total de velocidade para frear em Marte, e consequentemente ΔV_{tot} , a soma de todas as variações de velocidade em cada possível missão simulada. Espera-se que tempos de voo menores impliquem consequentemente em velocidades maiores, e isto é evidenciado pela desaceleração necessária para estabilizar a nave na altitude desejada. O tempo de voo de 210 dias necessita de uma variação de velocidade total menor da metade do valor necessário para 105 dias

Outro aspecto interessante sobre os resultados quantitativos da Tabela 1 é a sensibilidade do sistema. Notar que a diferença inicial no ângulo ξ ocorre apenas na terceira casa decimal após a vírgula e comparar a diferença gerada no *closest approach* é impressionante. Uma diferença na ordem de 0,001, aproximadamente, tem consequências nada desprezíveis na geometria da hipérbole de chegada no destino, visto que essa grandeza representa o periastro da hipérbole no referencial areocêntrico. Em particular, cita-se o caso de 105 dias em que a diferença aparece não apenas em uma redução no valor de *closest approach* mas também no sentido do movimento, uma tem sentido prógrado e a outra tem movimento retrógrado.

Uma consequência do ponto de vista comercial na aplicação do método vetorizado é a redução no ΔV_{arv} . Isso decorre do fato de que, se o periastro da hipérbole for menor, o raio da órbita circular de estacionamento será menor. Como a velocidade da órbita circular é dada pela Equação (29),

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad (29)$$

isso implica que uma órbita circular com raio menor tem uma velocidade maior e, consequentemente, o impulso ΔV necessário para estacionar a nave será menor. Este fenômeno se dá o nome de efeito Oberth (Oberth, 1972) e seu efeito será posteriormente discutido na próxima seção.

Há a possibilidade de um interesse comercial na melhora da precisão do método, que tem como consequência uma redução na manobra de frenagem, isso implica diretamente em uma variação de massa menor, como previsto pela Equação de Tsiolkovsky, (Anderson Jr., 2020). Essa massa é o quanto de propelente deve ser ejetado para haver essa variação na magnitude do vetor velocidade. Uma consequência direta

de um método mais preciso implica é a redução nos gastos da estrutura da nave, visto que se há menos combustível para ser armazenado, a nave pode ser menor.

4.2.2 Análise qualitativa

Nesta seção serão apresentadas as ilustrações feitas a partir dos dados obtidos na simulação. Expressam não apenas os dados expostos na Tabela 1 de maneira mais visual, mas também complementam-nos, visto que várias características na vizinhança de Marte foram omitidas.

Ao longo da presente subseção serão apresentados os gráficos associados às geometrias das trajetórias em cada trecho do método *patched-conics* tanto para o método simplificado quanto para o método vetorizado, respectivamente. Entretanto, algumas ressalvas devem ser feitas sobre a apresentação dos resultados antes de se iniciar a discussão de resultados.

Ao analisar as trajetórias geocêntricas de partida, as diferenças para todos os casos é muito singelas e contribuem muito pouco para a discussão feita presente neste trabalho. Portanto, apenas os gráficos associados às geometrias do tempo de viagem de 105 dias serão exibidos. Apesar da diferença ser mais expressiva no referencial heliocêntrico, este também contribui muito pouco, visto que a discussão sobre a forma como a excentricidade das órbitas já foi feita na Subseção 4.2.1 e ilustrada na Figura 1, apenas o resultado para 105 dias. Portanto, apenas os gráficos das trajetórias na vizinhança de Marte serão exibidos para todos os tempos de viagem.

A discussão se iniciará com os resultados obtidos para o tempo de viagem de 105 dias. A simulação em ambos os casos se inicia com o impulso ΔV_{dep} já aplicado, consequentemente, a circunferência de linha preta tracejada representa a órbita de estacionamento, mas esta foi gerada a partir das equações paramétricas e não dados obtidos pela simulação.

Na vizinhança da Terra, Figuras 6a e 6b, a integração numérica com o REBOUND tem aproximação muito satisfatória mesmo com ambos os métodos do voo no interior da esfera de influência terrestre. Ao comparar ambas trajetórias, as curvas são visualmente idênticas, sendo indistinguíveis ao olhar para o gráfico que mostra toda a esfera de influência.

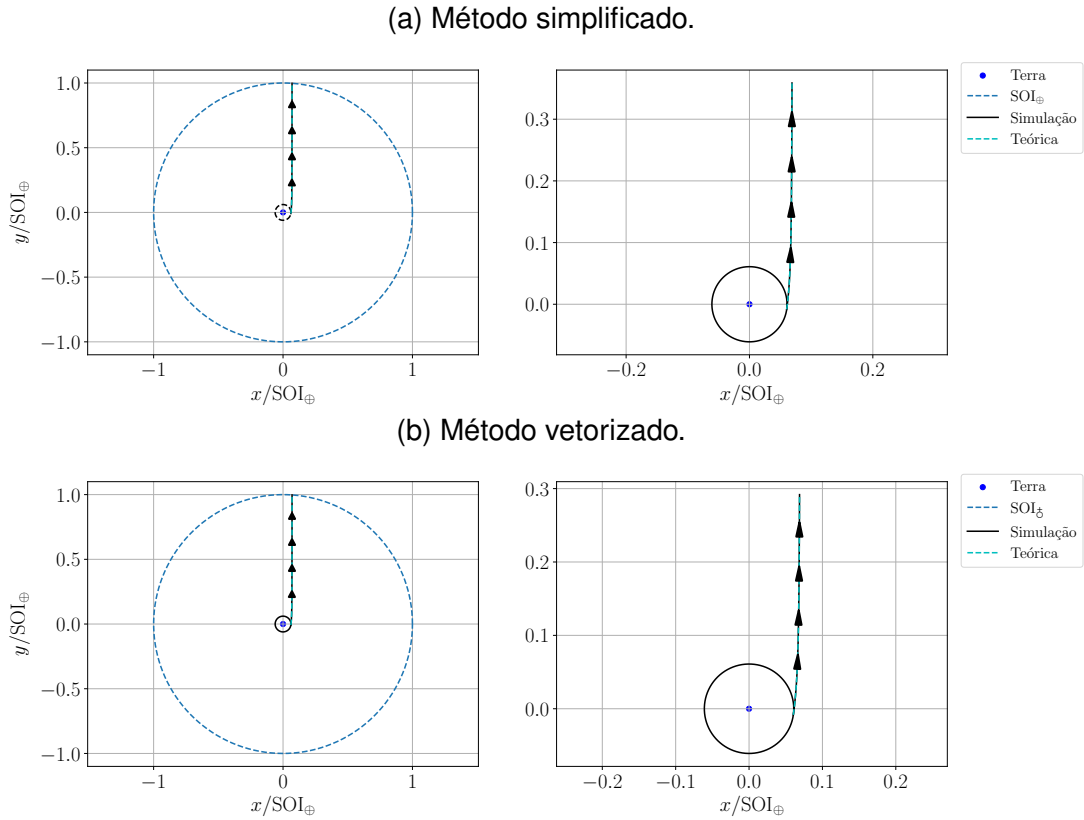
De acordo com as Figuras 7a e 7b são o erro instantâneo percentual, ou seja

$$\varepsilon = 100 \times \frac{r_{\text{sim}}(t) - r_{\text{teo}}(t)}{|r_{\text{teo}}(t)|}.$$

A permanência da nave no interior da esfera de influência dura um pouco menos que 1,6 dias, independente do modelo adotado, um resultado que era esperado. Como esperado, visto que pela Tabela 1 as diferenças entre as condições iniciais são singelas, entretanto, as diferenças se acumulam ao longo da viagem, fazendo com que o resul-

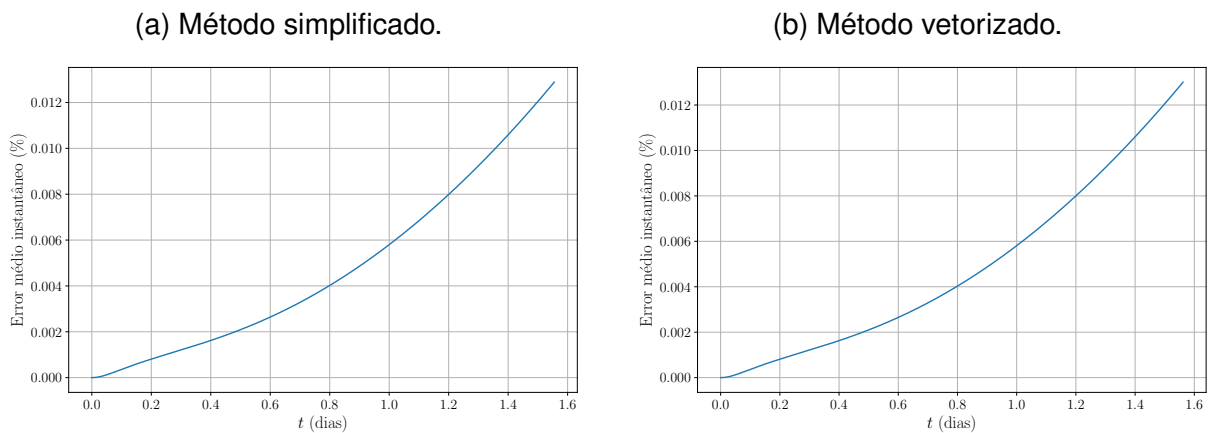
tado final seja evidentemente distinto. Esse resultado valida de forma intuitiva e visual a robustez das hipóteses nas quais é baseado o método do *patched-conics*.

Figura 6 – Trajetória geocêntrica de partida normalizada em relação ao raio da esfera de influência terrestre.



Fonte: autor.

Figura 7 – Erro instantâneo relativo percentual das trajetórias simuladas em relação às suas reconstruções analíticas no sistema geocêntrico.

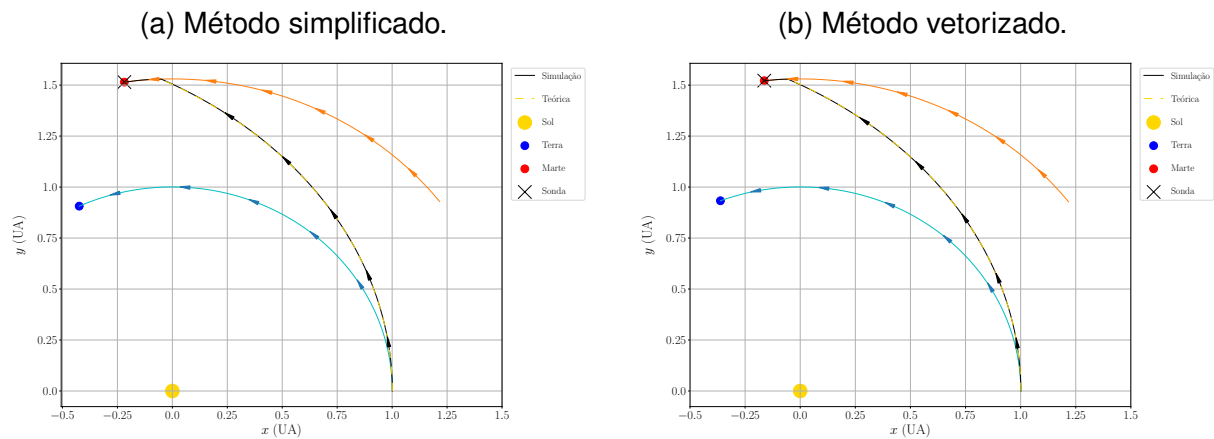


Fonte: autor.

O próximo trecho a ser discutido é a órbita heliocêntrica de transferência, exibida na Figura 8a. Como discutido no Capítulo 3, a Terra é assumida estar alinhada

com o eixo da abscissa a 1 UA de distância. Tanto a órbita da Terra quanto a de Marte foram aproximadas para órbitas circulares ao se considerar o raio médio no tempo de cada uma, assim como discutido em (Curtis, 2020). Para isso os valores de semieixo e excentricidade de cada planeta foram obtidos pela API Horizons do *Jet Propulsion Laboratory* da NASA (Giorgini *et al.*, 1996) em Python.

Figura 8 – Trajetória heliocêntrica de transferência normalizada unidades astronômicas.



Fonte: autor.

Novamente, tanto visualmente quanto quantitativamente, pela Figura 9a, a simulação e a reconstrução analítica tem concordância muito satisfatória entre si, tal que, mesmo após 100 dias, o erro instantâneo entre as trajetórias teórica e simulada ainda são inferiores à 0,1%. Mostrando novamente que, mesmo em um modelo mais simples, o método *patched-conics* tem fundamentação com boa consistência. Sendo muito satisfatório para iniciar uma análise em primeira aproximação de modo a entender melhor os requisitos de missão previamente de ser realizada uma simulação do Problema de N Corpos e maiores gastos computacionais.

Por fim, o último trecho do método *patched-conics*, a trajetória próxima à Marte. Neste gráfico, é possível observar com facilidade o impacto das pequenas diferenças nas condições iniciais da cinemática da nave e da fase orbital marciana exibidas na Tabela 1. Como mencionado anteriormente, para este caso em específico, as diferenças vão além de simplesmente a hipérbole de chegada ter um periastro mais próximo ao destino. Para este caso com duração de 105 dias, até mesmo o sentido de orientação é trocado entre movimento prógrado na Figura 10a e movimento retrógrado na Figura 10b.

Como mencionado anteriormente, agora serão apresentados os gráficos para os tempos de viagem de 150 dias e 210 dias na vizinhança marciana. Ressaltando novamente que os gráficos das trajetórias geocêntricas adicionam pouco à presente discussão e os efeitos da excentricidade no tempo de viagem e energia mecânica total já foram abordados e ilustrados previamente.

Figura 9 – Erro instantâneo relativo percentual das trajetórias heliocêntricas simuladas em relação à sua reconstrução analítica.

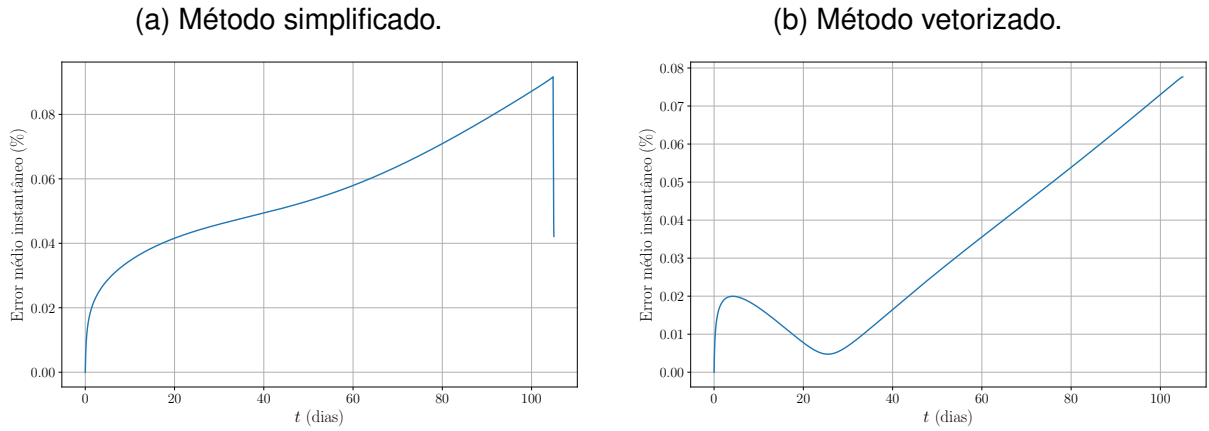
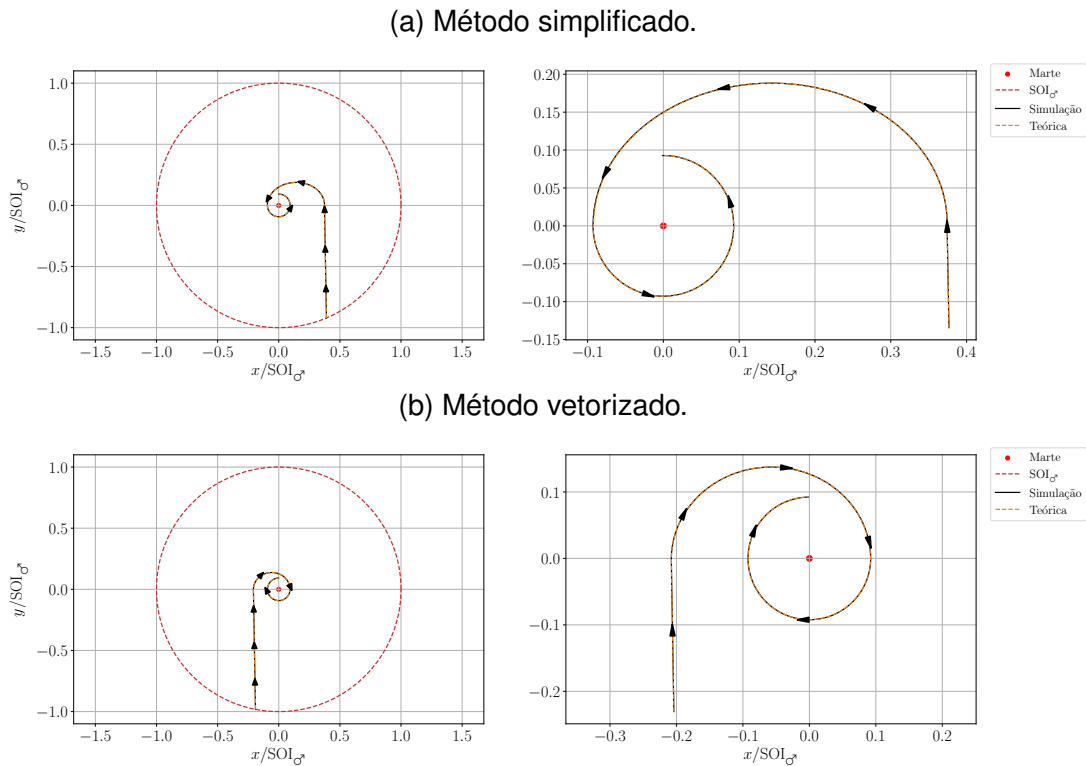


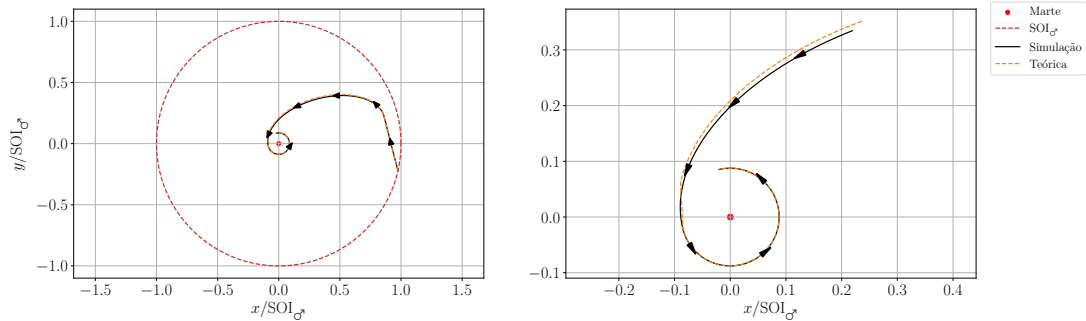
Figura 10 – Trajetória areocêntrica de partida normalizada em relação ao raio da esfera de influência marciana para um tempo de viagem de 105 dias.



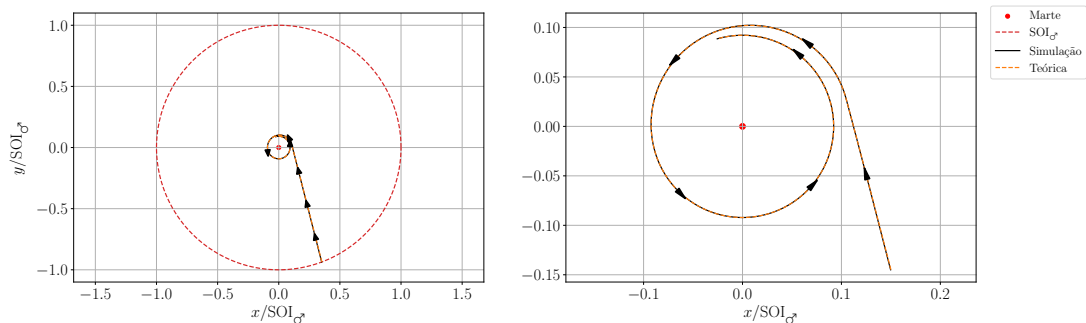
Observa-se que na Figura 11a a precisão do método simplificado é significativamente afetada, ou seja, o periastro da hipérbole areocêntrica ocorre à uma distância muito maior na viagem de 150 dias do que para a viagem de 105 dias. De fato, esta trajetória está quase na borda da esfera de influência. Para um aumento de 45 dias de viagem, a precisão deteriorou-se para abaixo da metade. Entretanto, o método simplificado ainda mantém uma boa precisão em relação à trajetória analítica. De maneira

Figura 11 – Trajetória areocêntrica de partida normalizada em relação ao raio da esfera de influência marciana para um tempo de viagem de 150 dias.

(a) Método simplificado.



(b) Método vetorizado.



Fonte: autor.

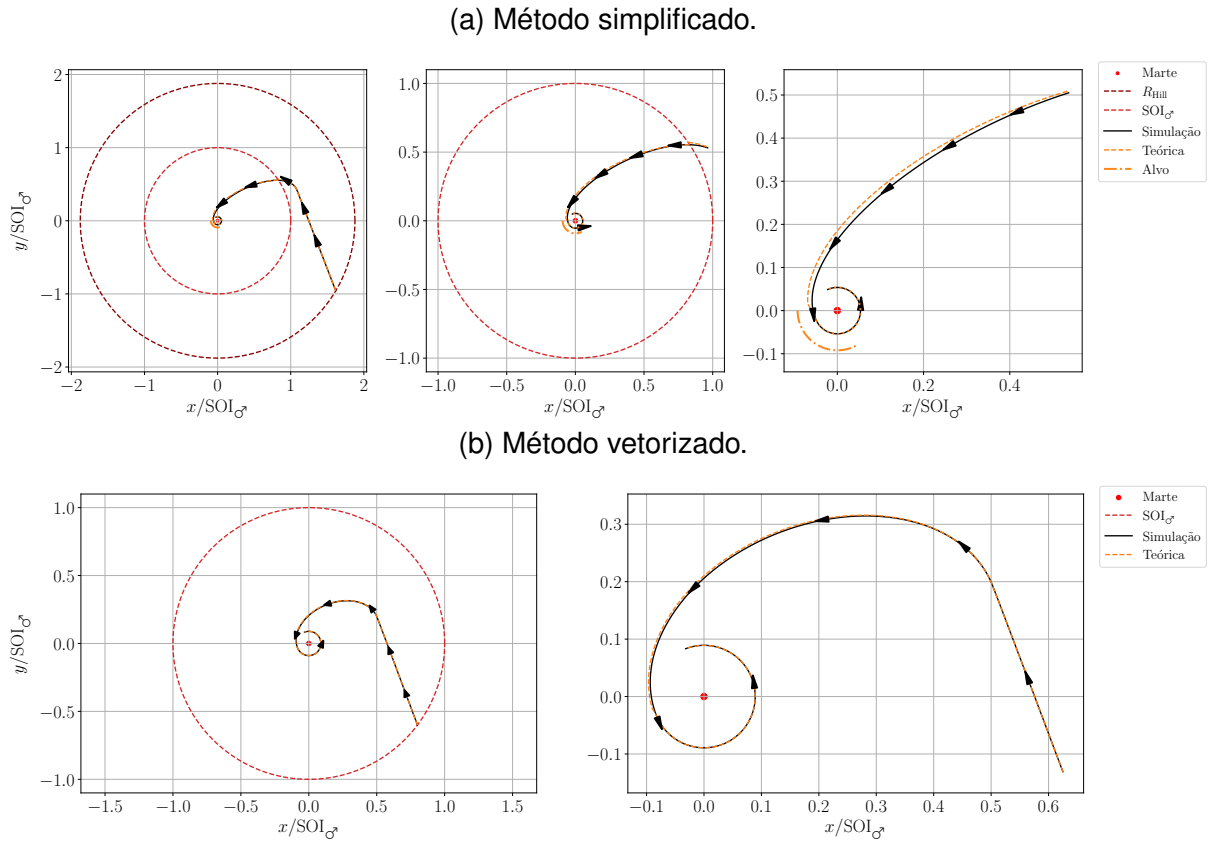
contrária, o método vetorizado melhorou consideravelmente sua precisão. A redução do periastro da hipérbole e portanto um aproveitamento do efeito Oberth contribuiu para uma redução de aproximadamente 0,96 km/s na manobra de frenagem.

A Figura 12a é um caso muito interessante. Nesta simulação a nave não conseguiu adentrar na esfera de influência, e a primeira manobra impulsiva ocorreu fora desta mas ainda no interior da esfera de Hill. Como discutido na Seção 2.2 do Capítulo 2, a esfera de Hill é uma superfície teórica, derivada do Problema de 3 Corpos em que um satélite, natural ou artificial, ainda pode ser capturado pelo corpo celeste de massa intermediária, neste caso o planeta Marte, mas ainda assim este sofre efeitos de perturbação do corpo gravitacionalmente dominante, o Sol.

Uma consequência direta desses efeitos é que a aproximação de órbita kepleriana não pode ser assumida. Isso faz com que, mesmo a manobra impulsiva tendo sido calculada para que fosse alcançada uma altitude de 50.000 km após a manobra Hohmann de transferência, a nave não possui energia suficiente para atingir essa altitude. Isso fica evidenciado no terceiro painel da Figura 12a, onde a linha traço-ponto de raio 50.000 km indica novamente a altitude alvo que não foi atingida. Entretanto, neste caso, a precisão da órbita de estacionamento é consideravelmente maior do que na Figura 11, o que pode comprometer a segurança da missão.

Por fim, a Figura 12b mostra uma característica interessante sobre o método

Figura 12 – Trajetória areocêntrica de partida normalizada em relação ao raio da esfera de influência marciana para um tempo de viagem de 210 dias.



Fonte: autor.

vetorizado. Além da consistência de adentrar na esfera de influência em todos os tempos de viagem analisados neste trabalho, o periastro da hipérbole areocêntrica voltou a ficar mais distante, isso demonstra que em algum ponto entre os períodos de 105 e 210 dias o valor do *closest approach* atinge um mínimo e então volta a aumentar. A investigação desta característica não será abordada neste trabalho, mas pode vir a se tornar um estudo futuro.

Tabela 2 – Tempo de execução dos métodos simplificado, vetorizado e a diferença entre ambos.

Tempo (dias)	Simplificado (s)	Vetorizado (s)	Varição (s)
105	18.40254	17.38441	−1.01813
150	28.68035	23.29148	−5.38887
210	38.46825	32.97639	−5.49186

Com os resultados de cada algoritmo apresentados de forma quantitativa e qualitativa, uma breve discussão sobre o custo computacional e tempo de processamento será brevemente discutida. Ambos os algoritmos tem uma duração similar, com pouca diferença no tempo de execução. O intervalo de tempo adotado foi δt s e o integrador numérico IAS15, (Rein; Spiegel, 2015). A Tabela 2 exhibe os tempos de

execução de cada método, bem como suas diferenças. Nota-se que além de mais preciso, o método vetorizado é mais rápido, mesmo resolvendo o sistema de equações não-lineares. Isso é esperado pois, pelo fato de o método vetorizado ser mais preciso, o periastro da hipérbole de aproximação com Marte é menor. Consequentemente, a elipse de transferência da hipérbole de aproximação para a órbita areocêntrica final tem menor valor de semieixo maior e , portanto, menor tempo de transferência acarretando, também, menor tempo de processamento.

4.3 ANÁLISE DE INCERTEZA NA FASE INICIAL DE MARTE

Na seção passada, verificou-se que o método vetorizado proposto apresenta algumas vantagens na melhoria da precisão. Entretanto, em missões reais, o planeta de destino sofre muitas outras perturbações que não estão presentes neste trabalho. Não obstante, Marte não se encontra no mesmo mesmo plano orbital que a Terra, o plano da eclíptica, portanto a manobra interplanetária seria tridimensional, consequentemente isso torna todo o processo de arquitetura de missão mais complexo. A realidade é muito mais rica que quaisquer experimentos e simulações.

Tendo em mente que possíveis diferenças podem ocorrer entre um modelo relativamente simplificado, não conta com a perturbação gravitacional advinda de outros planetas e suas luas, por exemplo, esta seção irá explorar o efeito que incertezas podem gerar no resultado final. Foi decidido introduzir incertezas na fase inicial de Marte, fazendo bastante sentido. Sistemas de controle de propulsão modernos são bem precisos e apesar de não serem perfeitos, a propagação de incertezas certamente é bem menor que na dinâmica caótica de Marte sem nenhum controlador.

Para isso definiu-se um valor de incerteza base, tal que após ser multiplicado por um número m , gere uma incerteza que altere o espalhamento da interação gravitacional entre a nave e Marte de forma a manter uma mesma condição inicial da nave, ditada pela variável ξ , e possam ser observadas variações consideráveis na trajetória de chegada. A incerteza base foi calculada através da diferença entre o ângulo ξ_{vec} , calculado pelo método vetorizado, e ξ_{sim} , calculado pelo método simplificado, a incerteza aplicada

$$\delta f(m) = m |\xi_{\text{vec}} - \xi_{\text{sim}}|, \quad (30)$$

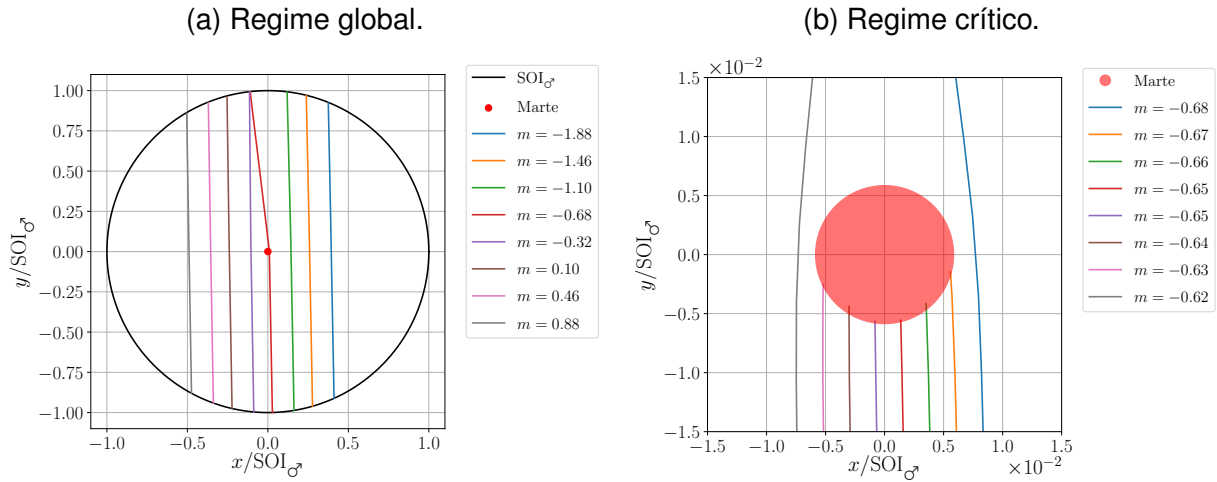
de tal forma que a nova condição inicial da fase marciana é

$$\bar{f}_0^M = f_0^M + \delta f(m), \quad m \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Dois regimes foram domínios da para a variável m . O primeiro será denotado como regime global, visto que os valores permitidos para m são mais amplos e varrem toda a região da esfera de influência marciana. Observou-se que o intervalo $m \in [-2, 1]$ cobre uma região extensa da esfera de influência. Para o regime crítico, restringiu-se

este domínio para $m \in [-0,675, -0,625]$, a fim de investigar condições de proximidade e eventuais colisões com Marte. A Figura 13 mostra de maneira visual a diferenciação entre esses regimes. Para todas as simulações o tempo de viagem escolhido foi de 105 dias. Em cada regime, foram realizadas 1000 simulações nos respectivos domínios.

Figura 13 – Visualização e diferenciação entre os regimes global e crítico.



Fonte: autor.

Em seguida, foram selecionadas oito trajetórias com valores relativamente espaçados de maneira uniforme, a fim de facilitar a visualização dos diferentes comportamentos dinâmicos.

A região crítica é de grande interesse para uma missão deste tipo. Ela não apenas ajuda a assegurar a segurança da missão, mas também formas auxiliares de frenagem como aerocaptura (Falcone *et al.*, 2019; Spilker *et al.*, 2019). Estratégias como essa necessitam que a nave adentre na atmosfera marciana e aproveite-se do arrasto atmosférico a fim de reduzir o ΔV_{arv} da missão. Estudos como (Isoletta *et al.*, 2021) mostram que avanços nessa estratégia ainda são necessários, mas esforços são realizados nesse segmento que pode ter aplicação para outros destinos além de Marte.

Na Figura 13a, observa-se que valores mais abrangentes da variável m produzem uma varredura que cobre grande parte da esfera de influência marciana. É importante notar como a redução do valor de *closest approach* intensifica o espalhamento gravitacional. A trajetória representada pela linha vermelha, por exemplo, apresenta uma deflexão significativamente maior quando comparada às trajetórias mais distantes. Além disso, essa deflexão ocorre na direção de Marte, como esperado devido ao caráter atrativo da interação gravitacional.

A Figura 13a apresenta trajetórias sem a execução de manobra de frenagem, entretanto, de maneira separada, foram feitas algumas simulações com captura, a fim de investigar o efeito Oberth para possíveis trajetórias de uma missão fictícia. A Figura 14 mostra como ocorre a variação de ΔV_{arv} em função do periastro da hipérbole. Como

são realizadas duas manobras impulsivas para estacionar a nave na altitude desejada, o valor de ΔV_{arv} é

$$\Delta V_{\text{arv}} = \Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (32)$$

A variação de velocidade ΔV_1 representa a manobra necessária para a nave sair da órbita hiperbólica e ser capturada por Marte, e posteriormente realizar uma manobra de Hohmann para chegar próximo à altitude de desejada. Essa variação na magnitude da velocidade que deve ser aplicada no periastro da hipérbole e é dada por

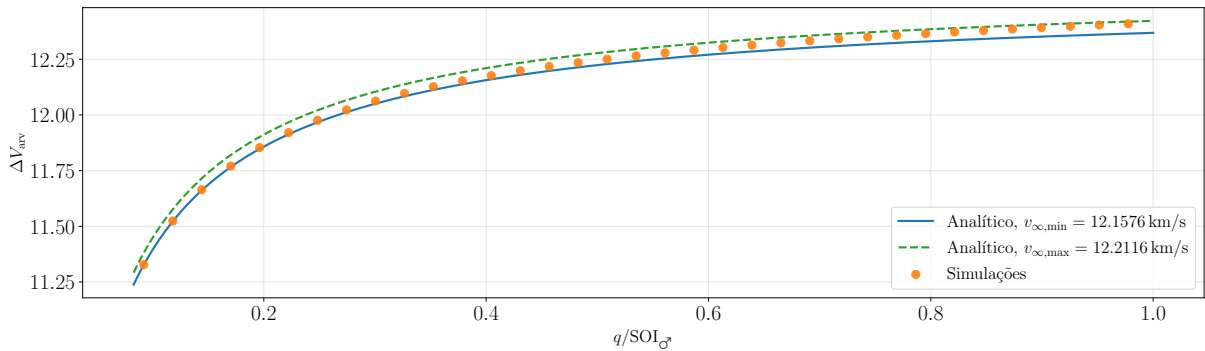
$$\Delta V_1 = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_\sigma}{q}} - \sqrt{\frac{2\mu_\sigma r_c}{q(q+r_c)}}. \quad (33)$$

A segunda variação ΔV_2 na magnitude da velocidade que deve ser aplicada no periastro da elipse para entrar em órbita circular e estacionar a nave. A magnitude de ΔV_2 é dada por

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{2\mu_\sigma q}{r_c(q+r_c)}} - \sqrt{\frac{\mu_\sigma}{r_c}}, \quad (34)$$

onde q é o valor do periastro da hipérbole¹, r_c é o raio da órbita circular desejado e v_∞ é considerada a velocidade que a nave tem ao adentrar na esfera de influência. Como o valor de v_∞ varia de acordo com a posição e velocidade relativa da nave no início do encontro com o alvo, foram utilizados os valores mínimo e máximo de cada simulação a fim de gerar as curvas analíticas limitantes para os valores possíveis de ΔV_{arv} .

Figura 14 – Variação do ΔV_{arv} de frenagem em função do valor do periastro da hipérbole.



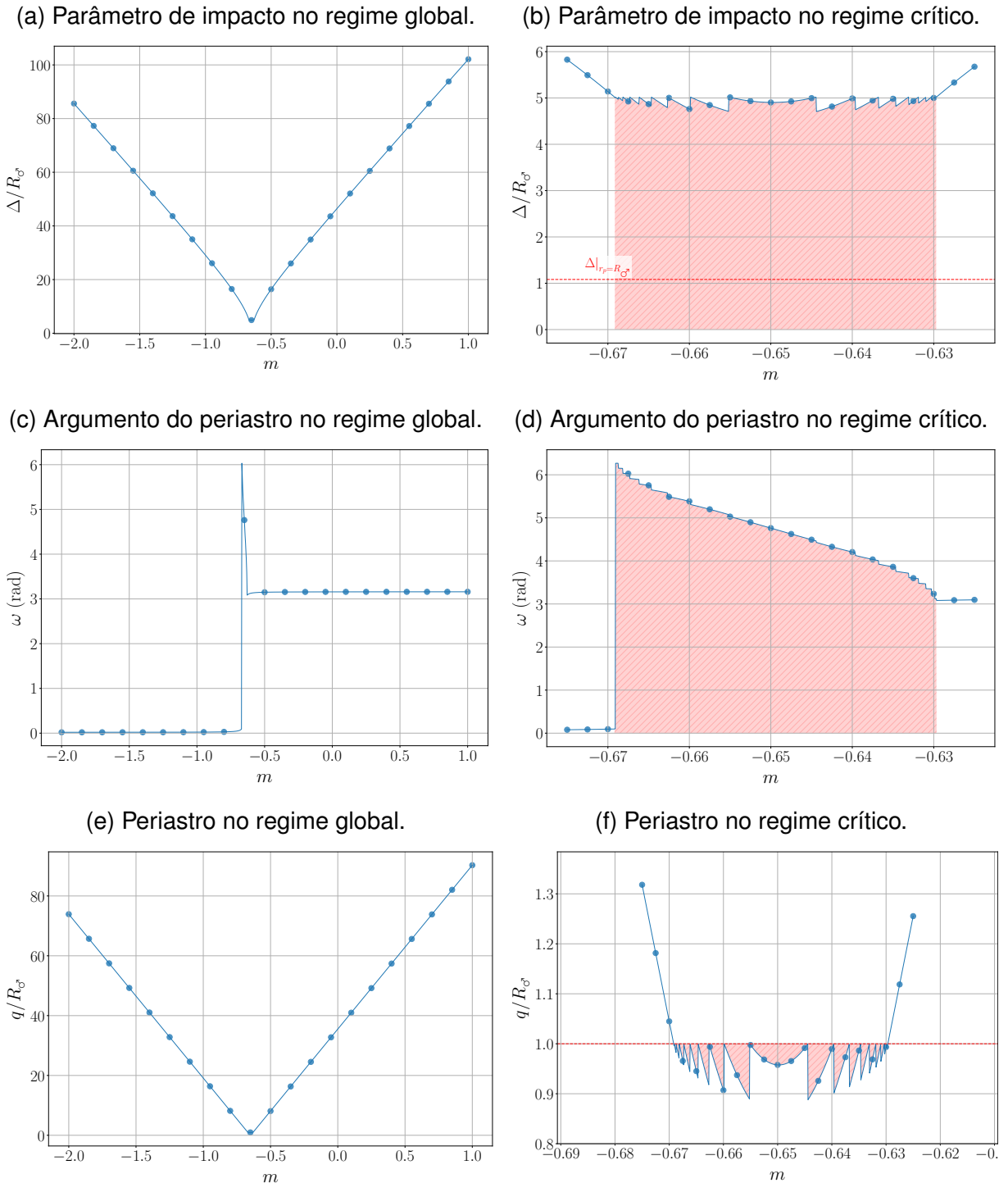
Fonte: autor.

A análise de algumas grandezas dinâmicas torna-se importante tanto para avaliar a segurança da nave contra eventuais colisões quanto para investigar a possibilidade de uma aproximação significativa da atmosfera marciana, condição necessária para a realização de manobras de aerocaptura. Nesse contexto, o parâmetro de

¹ Como está sendo explicitamente informado que a análise ocorre no sistema areocêntrico o subíndice com o símbolo associado à Marte foi omitido para o periastro.

impacto é uma grandeza particularmente relevante. De forma análoga ao seu uso em problemas de espalhamento na teoria cinética e em interações coulombianas, (Gombosi, 1994), ele pode ser interpretado como a distância perpendicular entre a direção assintótica de aproximação (ou afastamento) da partícula e o centro atrator (ou repulsor).

Figura 15 – Análise de algumas grandezas orbitais relevantes para esta etapa do estudo em função do multiplicador m nos regimes global e crítico.



Fonte: autor.

Essa analogia é justificada pela semelhança de ambas as interações se tratem de forças centrais inversamente proporcionais a r^2 . Valores menores do parâmetro de impacto estão associados a aproximações maiores do corpo central, produzindo deflexões da trajetória mais proeminentes. O comportamento do parâmetro de impacto é mostrado na Figura 15a. Observa-se que sua variação com o multiplicador é praticamente linear decrescente até a região do domínio que se encontra o regime crítico e volta a aumentar, o que é esperado, visto que indicador da proximidade do argumento do periastro.

A variação do argumento do periastro ω é exibida na Figura 15c. Essa grandeza é relevante porque caracteriza a orientação da órbita areocêntrica de passagem e permite identificar mudanças na geometria da aproximação da nave em relação a Marte. Essa distinção é importante no planejamento da missão, pois uma órbita de chegada incompatível com a órbita operacional desejada pode exigir manobras corretivas adicionais.

Não obstante, essa orientação pode influenciar na manobra de aerocaptura. Como a atmosfera acompanha, em primeira aproximação, a rotação do planeta, o sentido relativo da passagem modifica a velocidade da nave em relação ao escoamento atmosférico, afetando o arrasto aerodinâmico, a dissipação de energia e as cargas térmicas durante a passagem. Assim, a análise de ω fornece informações relevantes não apenas sobre a geometria da captura, mas também sobre a viabilidade dinâmica de estratégias para redução do custo de ΔV .

Observa-se que, para parte do domínio analisado, ω permanece próximo de zero, indicando que a orientação da linha dos ápices varia pouco nessa região para 105 dias de viagem. Entretanto, em torno da região de regime crítico, ocorre uma descontinuidade para valores próximos a 2π rad, seguida de uma rápida variação para qual ω assume valores próximos de π rad. Esse comportamento indica uma mudança significativa na orientação do periastro da órbita areocêntrica de chegada, associada à alteração da geometria de aproximação da nave.

Por fim, a Figura 15e mostra o valor do periastro da hipérbole, ou *closest approach*. Diferente do parâmetro de impacto, o qual é uma grandeza dá indicativo da proximidade entre a nave e o planeta, o periastro é a magnitude da menor distância orbital entre estes. Como as equações cinemáticas do método *patched-conics* são baseadas no Problema de 2 Corpos em que um deles tem massa desprezível, onde o centro de massa do sistema é o centro de massa do corpo mais massivo, quando o periastro for igual ao raio de Marte, ocorrerá uma colisão, ou seja, quando

$$\frac{q}{R_{\text{M}}} = 1.$$

O parâmetro de impacto Δ e o periastro q são correlacionados pela Equação

(35) abaixo

$$\Delta = q \sqrt{1 + \frac{2\mu_{\odot}}{qv_{\infty}^2}}. \quad (35)$$

O comportamento de ambos é muito similar pelo domínio analisado. A diferença principal ao comparar a Figura 15a com a Figura 15e é que a primeira mostra-se levemente arqueada ao chegar próximo da região crítica, enquanto o o periastro tem um comportamento mais linear, mesmo nas regiões de maior aproximação.

A delimitação da região do domínio do regime crítico estipulada anteriormente corresponde a uma estimativa preliminar baseada nos resultados do regime global, a qual foi posteriormente aprimorada por meio de um ajuste fino. Isso fica evidente no conjunto de gráficos exibidos na Figura 15. Nesses gráficos a região sombreada em vermelho corresponde às simulações que finalizaram em colisão. De 1000 simulações feitas para o regime crítico, 790 simulações resultaram em colisão.

A Figura 15b apresenta a variação do parâmetro de impacto normalizado pelo raio de Marte em função do parâmetro m . Observa-se que os valores de $\Delta/R_{\odot}$ permanecem próximos de 5. A linha tracejada em vermelho corresponde ao valor de parâmetro de impacto normalizado, $\Delta/R_{\odot}$, onde $q/R_{\odot} = 1$ e representa onde haveria colisão por questões puramente geométricas.

Isso entra em conflito com o que se observa na Figura 15f, que mostra o periastro areocêntrico normalizado por $q/R_{\odot}$. Neste gráfico, a linha vermelha contínua demarca exatamente onde a altitude da nave atinge a superfície marciana. Verifica-se que, no regime crítico, os valores $q/R_{\odot}$ ficam abaixo desse limite. Esse comportamento pode indicar as colisões estejam relacionadas ao efeito de focalização gravitacional.

Por fim, a Figura 15d apresenta o comportamento do argumento do periastro ω . Esta região representa as variações abruptas observadas na Figura 15c. A primeira, de fato ocorre uma descontinuidade entre próximo de 0 rad e 2π rad, mas então, observa-se que esta decai monotonicamente até π rad, e não é uma descontinuidade como parece ao olhar a Figura 15c. O que faz bastante sentido.

Para o tempo de viagem estipulado, observa-se que valores mais negativos de m a nave encontra-se mais à direita na Figura 13a. Conforme m torna-se menos negativo e atinge a região de colisão, o primeiro ponto de colisão, de forma idealizada, seria em 2π rad e percorre em sentido horário o quarto e terceiro quadrante, respectivamente, até sair da região crítica. Como mencionado, o domínio de regime crítico foi feito por meio de ajuste fino e resultados do regime global, mas estima-se de maneira mais precisa via interpolação linear que a região onde se iniciam as colisões aconteça no domínio $m \in [-0,66917836, -0,62968217]$.

4.4 SISTEMAS PROPULSIVOS

Na presente seção serão discutidos os resultados apresentados ao longo do Capítulo 4. Essa discussão abrangerá não somente uma revisão e interpretação dos dados obtidos, mas também uma ligação com outras áreas na área de engenharia aeroespacial assim como outras.

Através da equação do foguete de Tsiolkovsky, é possível estimar a variação total de massa de um sistema propulsivo. Atualmente dois tipos de propulsão são os mais utilizados, sendo estes a propulsão química e a propulsão elétrica. Entretanto para o tipo de missão em que foi proposto neste trabalho, ambos os métodos tem problemas de inviabilizam a missão num horizonte de tempo próximo.

A teoria isentrópica descreve que a força de empuxo de um foguete é dada por

$$F = [\rho_e v_e^2 + (P_e - P_{\text{env}})] A_e. \quad (36)$$

onde P_{env} é a pressão do ambiente externo, que para o espaço, numa primeira aproximação é possível considerar $P_{\text{env}} = 0$. O impulso específico é dado por

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}_e g_0}, \quad (37)$$

pela equação de Tsiolkovsky é possível mostrar que a variação total de massa como fração da massa inicial é

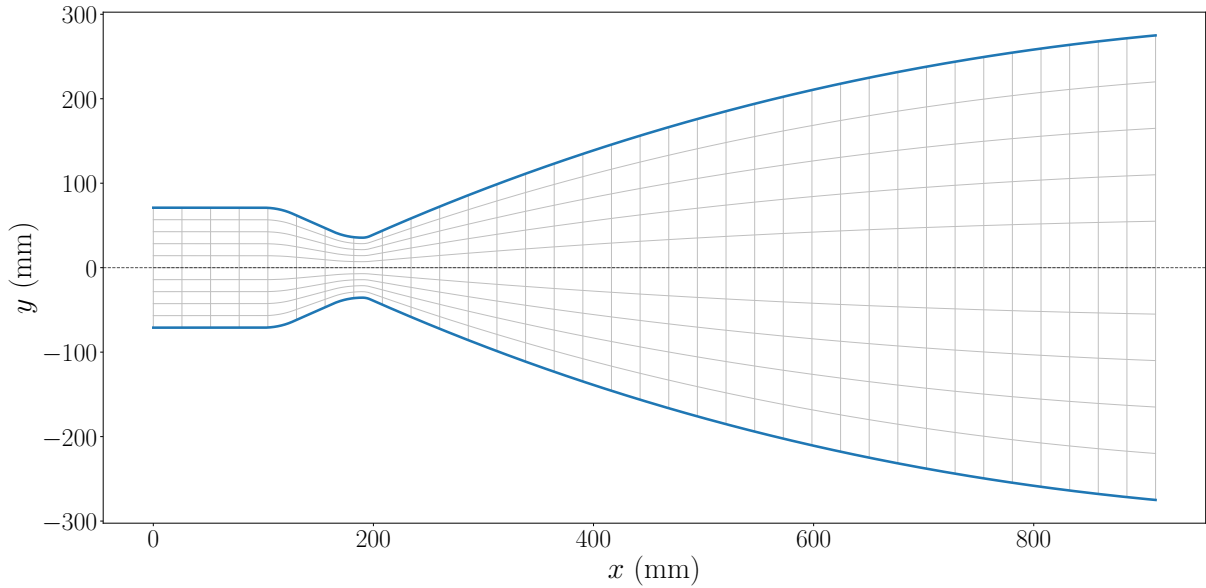
$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp} g_0}} \quad (38)$$

Observa-se, portanto, uma relação inversa entre o impulso específico e a fração de massa consumida durante a missão. Para um mesmo requisito de ΔV , maiores valores de I_{sp} reduzem a quantidade de propelente necessária, uma vez que o motor consegue produzir maior impulso por unidade de peso de propelente consumido. Assim, o impulso específico constitui uma medida direta da eficiência propulsiva do sistema, sendo uma grandeza fundamental para comparar diferentes arquiteturas de propulsão em missões espaciais.

Nas Equações (37) e (36) v_e , ρ_e , P_e e A_e são a velocidade, densidade, pressão estática e área na seção de saída de um bocal convergente-divergente. A área A_e é uma característica de design do sistema propulsivo e uma análise de eficiência e otimização para a implementação completa no foguete merece um estudo específico. Atualmente, o bocal de Rao (Rao, 1958) é um método de otimização muito utilizado para a parametrização de bocais espaciais, e serviu de base para a presente análise, sendo exibido na Figura 16. Para este trabalho considera-se que o raio da entrada é $R_i = 71$ mm, o raio da garganta $R_t = 35.5$ mm e o raio da saída $R_e = 275$ mm.

As outras grandezas, v_e , ρ_e e P_e , por outro lado, são as propriedades físicas que o fluido de trabalho terá após no momento da ejeção. Elas dependem das interações de colisão entre suas moléculas e a superfície do bocal (viscosidade). A teoria

Figura 16 – Bocal de Rao. A malha interna corresponde à valores interpolados para visualização, o real refinamento do modelo é muito maior.



Fonte: autor.

de escoamento compressível pode estimar como ocorrem essas variações em função da constante adiabática $\gamma = C_p/C_v$, sendo C_p o calor específico à pressão constante e C_v o calor específico à volume constante. A equação de estado é dada pela equação dos gases ideais,

$$\frac{P}{\rho} = RT, \quad (39)$$

onde P é a pressão, ρ a densidade, $R = R_u/\bar{M}$ é a constante específica do gás, R_u é a constante universal dos gases, $\bar{M}$ a massa molecular média das moléculas que compõem esse gás e T a temperatura, (Anderson Jr., 2020).

Entretanto, a teoria cinética dos gases demonstra que C_p e C_v dependem da constante específica do gás e do número de graus de liberdade rotacional das moléculas, ou seja, $\gamma = \gamma(n, \bar{M})$ (Gombosi, 1994). Em suma, a massa molecular é um fator determinante para o funcionamento do sistema propulsivo.

Sistemas de propulsão químicos apresentam alto desempenho, mas baixa eficiência (muito empuxo, mas tem gasto excessivo), já sistemas de propulsão elétricos apresentam alta eficiência mas baixo desempenho (pouco gasto, mas pouco empuxo). Isso implica que por um lado, a missão seria extremamente custosa devido à quantidade de combustível e estrutura da nave necessária; por outro, o tempo até acelerar na partida e desacelerar no destino torna esse tipo de propulsão inviável para seres humanos pelas à bordo questões de segurança já discutidas.

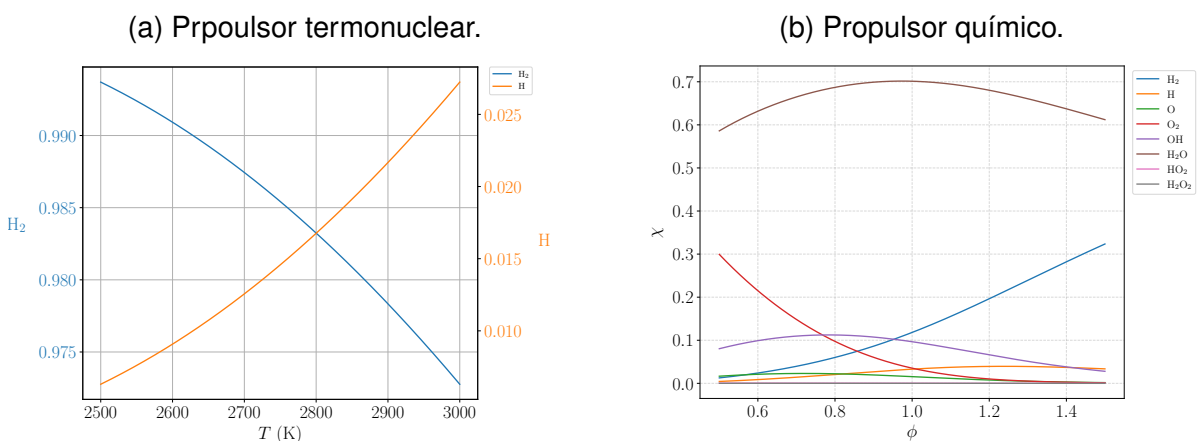
Por outro lado, tecnologias como propulsão nuclear térmica tem o intuito de oferecer um balanço entre essa necessidade (Emrich, 2016). A tecnologia em si não é nova, na década de 1960, motivados pela Guerra Fria, o projeto NERVA (Finseth,

1991) se destaca por ser um protótipo deste tipo de propulsão que serve de base até os dias atuais para designs como (Chang *et al.*, 2015; Chang *et al.*, 2016; Lin; Youinou, 2022).

Este tipo de propulsão consiste em aquecer gás hidrogênio H_2 por um reator de fissão nuclear. Essa se apresenta como uma alternativa que busca um equilíbrio entre os dois sistemas anteriormente citados. Uma das principais adversidades para este tipo de tecnologia é evitar o derretimento do material radioativo, além do custo necessário para o processo de enriquecimento de U-235, (Semenov; Kharitonov, 2023). Por isso, os trabalhos previamente citados utilizam matrizes de combustível consideravelmente diferentes dos usuais, além de chegarem a temperaturas muito superiores.

Uma breve análise será realizada entre um propulsor químico e um nuclear em estado de *frozen flow*, ou seja, as propriedades na entrada do bocal se encontram em estado de equilíbrio e se perpetuam assim por todo o escoamento. Na Figura 17 é apresentada a fração molar de cada gás. Devido à natureza consideravelmente distinta, uma comparação direta da composição de cada um é muito diferente da outra. Se por um lado o propulsor termonuclear sofre apenas os efeitos da dissociação para um estado de equilíbrio (Atkins *et al.*, 2018) e depende da temperatura que possui após sair do reator, o propulsor químico, neste caso considera-se o combustível LOX (*liquid oxygen*), passa por um processo de combustão e os produtos de combustão dependem de razão de equivalência ϕ bem como da entalpia antes da reação de combustão (Turns, 2012).

Figura 17 – Frações molares das espécies da composição de cada gás em diferentes condições.



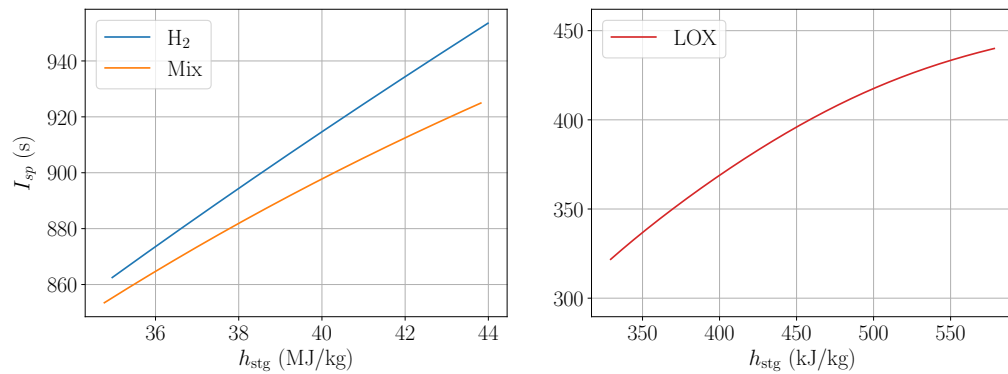
Fonte: autor.

Entretanto, após a combustão, ambos os sistemas podem ser comparados por meio da entalpia de estagnação H_{stg} . Na Figura 17a, observa-se que a quantidade de hidrogênio dissociado é extremamente baixa, sendo necessário utilizar dois eixos, ou a variação seria visivelmente imperceptível. Este não é o caso da Figura 17b, a

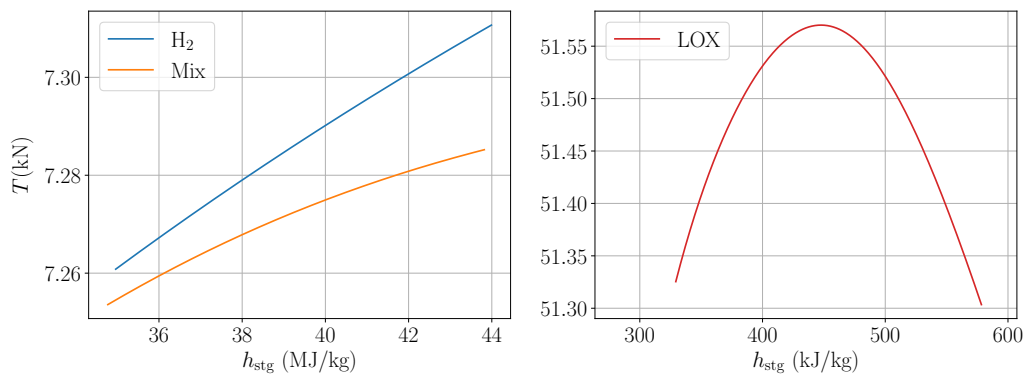
variação da quantidade de H_2O e outros produtos muda drasticamente com diferentes razões de equivalência.

Figura 18 – Impulso específico e empuxo gerados em função da entalpia de estagnação para um propulsor com características similares à Figura 16. Propulsor termonuclear (à esquerda) e um propulsor químico de LOX (à direita).

(a) Impulso específico I_{sp} .



(b) Força de empuxo T .



Fonte: autor.

Pelo resultado da Figura 17, além da comparação entre os propulsores, foi também realizada uma análise dos efeitos que a dissociação pode ter no desempenho de um propulsor termonuclear. Tendo em vista a pequena diferença na concentração de hidrogênio dissociado, espera-se que o efeito seja praticamente desprezível, pois mesmo quando a temperatura do propelente é 3000 K, a fração de hidrogênio dissociado ainda é inferior à 3%.

Entretanto não é isso que se observa nas curvas azul e amarela das Figuras 18a e 18b. A redução observada no impulso específico está associada ao fato de que, em temperaturas elevadas, parte do hidrogênio molecular sofre dissociação, formando hidrogênio atômico. Esse processo é endotérmico, por requerer energia para romper a ligação molecular $H-H$. Assim, uma parcela da energia disponível no gás passa a ser armazenada na forma de energia química associada às espécies dissociadas, em vez de ser convertida integralmente em energia cinética do escoamento durante a expansão no bocal.

Ainda sobre a Figura 18a, nota-se que a curva azul, associada ao H_2 puro, apresenta crescimento monotônico no intervalo analisado, o que é coerente com a ausência de perdas por dissociação molecular no modelo. Este não é o caso para a mistura dissociada e para o propulsor químico, cujas curvas apresentam redução progressiva da taxa de crescimento com o aumento da entalpia. No caso do LOX, essa tendência parece mais acentuada, indicando uma região de menor sensibilidade do empuxo ao aumento de entalpia, embora não se possa afirmar, sem análise adicional, se tal comportamento corresponde a um platô ou a uma mudança de concavidade.

Em relação à Figura 18b, observa-se que o empuxo produzido pelo H_2 puro e pela mistura dissociada apresenta apenas uma pequena variação ao longo do intervalo analisado, permanecendo na ordem de 7,3 kN. Ainda assim, a curva associada ao H_2 puro permanece acima da curva da mistura, o que é consistente com a discussão sobre os efeitos da dissociação molecular na perda de energia disponível é consumida para formação de hidrogênio atômico.

Para o caso do propulsor químico, o comportamento é distinto. Embora o impulso específico não apresente decrescimento no intervalo analisado, o empuxo atinge um ponto de máximo e diminui para maiores valores de entalpia de estagnação. Esse resultado evidencia que o empuxo não depende apenas da velocidade de exaustão, mas também da vazão mássica e do termo de pressão na saída do bocal. Essa perda no empuxo sofrida está associada à redução na quantidade de água formada. Pela Equação (36) a força do propulsor depende da densidade do gás ejetado. Se há a redução na formação de H_2O , reduzindo assim a densidade média da mistura. O mesmo raciocínio se aplica à mistura dissociada.

Tabela 3 – Estimativa da fração de massa propelente para os modelos simplificado e vetorizado para 105 dias.

Tipo de propulsão	I_{sp} (s)	Massa de propelente (%)
Propulsor químico	440.003	97,9842
Propulsor nuclear térmico	924.934	84,3899
Propulsor de íons	5000	29.0764
Propulsão fotônica	c/g_0	0,00563

A Tabela 3 sintetiza os resultados obtidos anteriormente em conjunto da análise de sistemas de propulsão elétrica e fotônica. Apesar de as propulsões iônica e fotônica apresentarem alto I_{sp} , ambas têm pouco empuxo, logo, suas trajetórias não podem ser reduzidas a uma manobra impulsiva como abordado neste trabalho, mas foram calculadas as variações percentuais de massa apenas para fins ilustrativos de como o I_{sp} influencia no percentual de massa de propelente necessária para esta missão. Nesta tabela, encontra-se o impulso específico e os percentuais de massa de propelente são dados. Apesar de sistemas de propulsão elétrica terem um I_{sp} muito

interessante, a vazão mássica é extremamente baixa, fazendo com que a força de empuxo seja muito pequena (Goebel; Katz, 2008).

Sistemas de propulsão relativística especulativa, como aqueles baseados em um *Kugelblitz* (“raio globular”, do alemão, *kugel* para bola/esfera e *blitz* de raio/relâmpago) — isto é, um buraco negro artificial formado, em princípio, pela concentração extrema de radiação eletromagnética. Nesse tipo de conceito, a energia associada ao campo eletromagnético atuaria como fonte gravitacional nas equações de campo de Einstein, (Misner *et al.*, 2017). Baseada na solução de Schwarzschild, propostas de espaçonaves desse tipo consideram o aproveitamento da radiação de Hawking emitida por um buraco negro artificial como fonte de energia ou de empuxo, reduzindo drasticamente a necessidade de propelente convencional, embora à custa de exigências energéticas extremas e estejam muito além das tecnologias atualmente disponíveis (Crane; Westmoreland, 2009; Senovilla, 2015; Lee, 2015).

Outros conceitos de propulsão como o motor de Alcubierre e as pontes de Einstein-Rosen dependem da manipulação da geometria do espaço-tempo, e não de mecanismos clássicos de aceleração por ejeção de massa ou transferência convencional de momento linear (Einstein; Rosen, 1935; Alcubierre, 1994). Apesar de sua relevância como exercício teórico em Relatividade Geral e propulsão avançada, tais sistemas não são diretamente comparáveis aos modelos propulsivos considerados neste trabalho, uma vez que não se enquadram na formulação newtoniana usual baseada em variação de quantidade de movimento. Por esse motivo, embora sejam pertinentes em discussões sobre limites extremos da exploração espacial, esses modelos permanecem fora do escopo quantitativo adotado neste trabalho.

5 ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, são discutidos os resultados obtidos por meio das equações analíticas e das simulações numéricas. Uma missão tripulada a Marte representaria um marco histórico para a exploração espacial, não apenas do ponto de vista tecnológico, mas também por se tratar da primeira ocasião em que seres humanos pisariam em outro planeta. Nesse sentido, tal feito possuiria relevância simbólica comparável a eventos como o voo orbital de Yuri Gagarin ou o pouso de Neil Armstrong na Lua. Apesar do evidente interesse científico, tecnológico e cultural associado a esse objetivo, a realização de uma missão dessa natureza ainda depende de avanços significativos em engenharia, segurança operacional, sistemas de suporte à vida e arquitetura de missão.

Os resultados provenientes do método vetorizado mostraram-se consideravelmente superiores em termos de precisão da interceptação com Marte. Embora esse procedimento apresente maior complexidade quando comparado ao modelo simplificado de *patched-conics*, sobretudo pela necessidade de resolver um sistema de equações algébricas não lineares, sua implementação permanece relativamente acessível com o auxílio de métodos numéricos, como mínimos quadrados ou o algoritmo de Levenberg–Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963). Um ponto relevante para trabalhos futuros consiste em investigar a evolução da precisão desse método em diferentes regimes de tempo de voo, como observado nos casos de 105, 150 e 210 dias, bem como comparar os resultados obtidos por essa formulação com trajetórias de missões reais, tanto para Marte quanto para outros planetas.

Como resultado das simulações, a Tabela 1 apresenta os valores de ΔV requeridos em cada etapa da transferência. Observa-se que a inserção da nave em uma trajetória heliocêntrica de transferência para um tempo de voo de 105 dias exige um ΔV inferior a aproximadamente 5 km/s. Embora esse valor seja elevado em comparação com muitas manobras orbitais convencionais, ele ainda se mostra relativamente moderado quando considerado no contexto de uma missão tripulada interplanetária. A principal parcela do custo propulsivo, entretanto, está associada à inserção da nave em órbita areocêntrica, que requer aproximadamente 12 km/s. Esse resultado evidencia que, para trajetórias de curta duração, a etapa de captura em Marte pode se tornar o principal limitante da arquitetura da missão.

Esse comportamento também ajuda a contextualizar a dificuldade de missões rápidas para Marte. Manobras de perseguição, conhecidas como *chasing maneuvers*, são frequentemente associadas a custos elevados de ΔV , podendo alcançar valores da ordem de 10 km/s (Curtis, 2020), sendo apelidadas muitas vezes de *star wars maneuvers*. Embora o caso analisado neste trabalho não corresponda diretamente a

esse tipo de manobra, a comparação ilustra que reduções significativas no tempo de voo tendem a aumentar substancialmente os requisitos propulsivos, especialmente na etapa de chegada ao planeta de destino.

Apesar dos benefícios potenciais da propulsão nuclear térmica, seu emprego em missões tripuladas ainda exige pesquisas adicionais sobre limites operacionais, segurança do reator, confiabilidade em longo prazo e integração com os demais sistemas da missão. O elevado custo de desenvolvimento e teste de protótipos também constitui um obstáculo importante. Além disso, questões relacionadas ao combustível nuclear, ao enriquecimento de material físsil e à regulamentação do uso de reatores no espaço tornam esse tipo de tecnologia dependente não apenas de investimentos privados, mas também de forte apoio institucional e governamental.

Estratégias como a aerocaptura apresentam-se como alternativas promissoras para reduzir o custo efetivo de propelente em missões interplanetárias, uma vez que parte da variação de velocidade necessária para a inserção orbital pode ser obtida por meio do arrasto atmosférico, e não exclusivamente por propulsão embarcada. Entretanto, essa não é a única maneira de reduzir o requisito propulsivo. Outra possibilidade, menos evidente, mas indicada pelos resultados obtidos, é o aumento do tempo de viagem. Trajetórias mais longas tendem a demandar menores valores de ΔV , reduzindo a fração de massa destinada ao sistema propulsivo. Por outro lado, esse ganho ocorre à custa de maior exposição da tripulação ao ambiente espacial profundo, maior demanda sobre sistemas de suporte à vida e aumento dos riscos associados à confiabilidade da missão.

Como discutido anteriormente, a exposição à radiação ionizante permanece uma das principais adversidades a serem superadas em missões tripuladas de longa duração. Ainda assim, avanços em materiais e estratégias de blindagem, especialmente envolvendo compósitos poliméricos, materiais ricos em hidrogênio e propostas de blindagem ativa, indicam caminhos possíveis para mitigar parte desses efeitos em arquiteturas futuras de exploração espacial (Ferrone *et al.*, 2023; Toto *et al.*, 2024). Dessa forma, a escolha entre trajetórias mais rápidas e mais custosas ou trajetórias mais longas e energeticamente menos exigentes deve ser entendida como um compromisso entre desempenho propulsivo, segurança radiológica, massa total da missão e maturidade tecnológica dos sistemas empregados.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo analisar trajetórias interplanetárias para uma missão hipotética tripulada a Marte, com ênfase na redução do tempo de viagem e na avaliação dos requisitos propulsivos associados. A partir de uma abordagem baseada em mecânica orbital clássica, foram estudadas transferências Terra-Marte por meio de formulações analíticas, do método de *patched-conics* e de simulações numéricas pelo REBOUND, permitindo comparar diferentes níveis de aproximação para o problema.

Os resultados obtidos indicam que trajetórias de curta duração, como o caso de 105 dias, embora atrativas do ponto de vista da redução do tempo de exposição da tripulação ao ambiente espacial, impõem requisitos elevados de ΔV , especialmente na etapa de chegada a Marte. Observou-se que a inserção em trajetória heliocêntrica pode apresentar valores relativamente moderados quando comparada ao custo total da missão, enquanto a captura em órbita areocêntrica se torna uma das etapas mais críticas, exigindo uma parcela significativa do orçamento propulsivo. Esse resultado evidencia que missões rápidas para Marte não são limitadas apenas pela capacidade de partida da Terra, mas principalmente pela viabilidade de reduzir a energia relativa da nave no encontro com o planeta de destino.

A comparação entre o método simplificado e o método vetorizado mostrou que a formulação vetorial apresenta melhor precisão na interceptação com Marte, ainda que à custa de maior complexidade matemática e numérica. A necessidade de resolver sistemas de equações não lineares, entretanto, não representa uma limitação intransponível, uma vez que métodos numéricos consolidados permitem obter soluções de maneira eficiente. Dessa forma, o método vetorizado mostrou-se uma alternativa interessante para refinar a análise de trajetórias interplanetárias no escopo da metodologia do *patched-conics* e adotado neste trabalho. O método pode ser não apenas um passo intermediário de projeto, mas também ter valor educativo no ensino superior.

As simulações numéricas também permitiram avaliar a consistência dos resultados analíticos e observar as limitações inerentes às aproximações utilizadas. O método de *patched-conics*, embora simplificado, mostrou-se útil como ferramenta didática e como primeira aproximação para o estudo de transferências interplanetárias. Ao decompor um problema de múltiplos corpos em trechos dominados por interações de dois corpos, o método permite estabelecer uma conexão direta com conceitos fundamentais da física, como conservação de energia, quantidade de movimento, movimento kepleriano e órbitas cônicas.

Do ponto de vista da arquitetura de missão, os resultados reforçam a existên-

cia de um compromisso entre tempo de viagem, requisito propulsivo, fração de massa e segurança da tripulação. Aumentar o tempo de voo tende a reduzir a demanda de ΔV e, conseqüentemente, o custo efetivo de propelente. Por outro lado, trajetórias mais longas aumentam a exposição à radiação ionizante e os riscos associados à permanência prolongada no espaço profundo. Estratégias como aerocaptura, propulsão nuclear, blindagem radiológica aprimorada e otimização de trajetórias aparecem, portanto, como elementos complementares na busca por missões tripuladas mais viáveis.

Além da análise técnica, este destaca também o potencial didático das viagens interplanetárias como tema integrador para o ensino e a divulgação científica. O estudo de uma missão a Marte permite abordar, em um mesmo contexto, tópicos de mecânica, gravitação, energia mecânica, tecnologia espacial, riscos biológicos, história da ciência e limites da exploração humana. Dessa forma, o problema não se restringe apenas ao cálculo de trajetórias, mas também se apresenta como uma oportunidade para aproximar estudantes de conceitos científicos normalmente tratados de maneira fragmentada.

Como trabalhos futuros, sugere-se o refinamento do modelo por meio da inclusão de excentricidade nas órbitas dos planetas, inserção dos ângulos de latitude do nodo ascendente, inclinação e argumento do periélio reais, modelos mais realistas de propulsão contínua na partida da Terra e captura em Marte. Também seria relevante comparar os resultados obtidos com trajetórias de missões reais. Esses aprimoramentos permitiriam avaliar com maior precisão a acurácia e precisão do método desenvolvido neste trabalho.

Conclui-se, portanto, que a redução do tempo de viagem para Marte é possível do ponto de vista orbital, mas envolve requisitos propulsivos elevados e importantes desafios de engenharia. A análise desenvolvida mostra que não existe uma solução única para o problema, mas sim um conjunto de técnicas e tecnologias que se desenvolvem progressivamente de maneira paralela. O tempo e a história dirão quando se terá a urgência pela demanda de maior esforço no desenvolvimento das tecnologias necessárias. Nesse sentido, o estudo de trajetórias rápidas para Marte contribui tanto para a compreensão dos limites atuais da exploração espacial e limites tecnológicos, quanto a construção de abordagens didáticas capazes de apresentar a complexidade e a beleza da mecânica orbital.

REFERÊNCIAS

- ALCUBIERRE, M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 11, n. 5, p. L73–L77, 1994.
- ALLEN, C.; SANTILLAN, A. An improved model of the galactic mass distribution for orbit computations. , v. 22, p. 255, out. 1991.
- ANDERSON JR., J. D. **Modern Compressible Flow: With Historical Perspective**. 4. ed. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2020. ISBN 9781260570823.
- ASHBY, N. Relativity in the Global Positioning System. **Living Reviews in Relativity**, v. 6, n. 1, p. 1, jan. 2003.
- ATKINS, P.; PAULA, J. de; KEELER, J. **Atkins' Physical Chemistry**. 11. ed. Oxford: Oxford University Press, 2018. ISBN 9780198769866.
- BASNER, M. *et al.* Psychological and behavioral changes during confinement in a 520-day simulated mission to mars. **PLOS ONE**, v. 9, n. 3, p. e93298, 2014.
- BINNEY, J.; TREMAINE, S. **Galactic Dynamics**. 2. ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008. (Princeton Series in Astrophysics).
- BUTKOV, E. **Mathematical physics**. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1968. (Addison-Wesley Series in Advanced Physics).
- CHANCELLOR, J. *et al.* Everything you wanted to know about space radiation but were afraid to ask. **Journal of Environmental Science and Health, Part C**, v. 39, n. 2, p. 113–128, apr. 2021.
- CHANG, S. *et al.* Innovative concept for an ultra-small nuclear thermal rocket utilizing a new moderated reactor. **Nuclear Engineering and Technology**, v. 47, n. 6, p. 678–699, ago. 2015.
- CHANG, S. *et al.* Preliminary conceptual design of a new moderated reactor utilizing an LEU fuel for space nuclear thermal propulsion. **Progress in Nuclear Energy**, v. 91, p. 183–207, ago. 2016.
- COPERNICUS, N. **On the Revolutions**. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1992.
- CRANE, L.; WESTMORELAND, S. **Are Black Hole Starships Possible?** 2009.
- CRISCUOLO, F.; SUEUR, C.; BERGOUIGNAN, A. Human Adaptation to Deep Space Environment: An Evolutionary Perspective of the Foreseen Interplanetary Exploration. **Frontiers in Public Health**, v. 8, p. 119, apr. 2020.
- CURTIS, H. D. **Orbital mechanics for engineering students**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2020. (Elsevier Aerospace Engineering Series).
- DRAKE, F. L.; VAN ROSSUM, G. **Python 3 Reference Manual**. Scotts Valley, CA: CreateSpace, 2009.

DREYER, J. L. E. **History of the Planetary Systems from Thales to Kepler**. Cambridge: Cambridge University Press, 1906.

DURANTE, M.; CUCINOTTA, F. A. Physical basis of radiation protection in space travel. **Reviews of Modern Physics**, v. 83, n. 4, p. 1245–1281, nov. 2011.

DUTKA, J. Eratosthenes' measurement of the earth reconsidered. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 46, p. 55–66, 1993.

EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, v. 354, n. 7, p. 769–822, mar. 1916.

EINSTEIN, A.; ROSEN, N. The Particle Problem in the General Theory of Relativity. **Physical Review**, v. 48, n. 1, p. 73–77, 1935.

EL'YASBERG, P. **Introduction to the theory of flight of artificial Earth satellites**. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1967.

EMRICH, W. J. **Principles of Nuclear Rocket Propulsion**. Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2016. ISBN 9780128044742.

EVANS, J. **The History and Practice of Ancient Astronomy**. New York, NY: Oxford University Press, 1998. ISBN 9780195095395.

FALCONE, G.; WILLIAMS, J. W.; PUTNAM, Z. R. Assessment of Aerocapture for Orbit Insertion of Small Satellites at Mars. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 56, n. 6, p. 1689–1703, nov. 2019.

FERRONE, K. *et al.* A Review of Magnetic Shielding Technology for Space Radiation. **Radiation**, v. 3, n. 1, p. 46–57, 2023.

FINSETH, J. L. **Rover nuclear rocket engine program: overview of rover engine tests**. Huntsville: Final report, 1991.

FRENCH, J. R. The Case for Mars Concept. *In*: MANNED MARS MISSIONS WORKSHOP. **Manned Mars Missions Working Group Papers: Volume 1, Section 1-4**. Huntsville, AL: National Aeronautics and Space Administration, 1986. p. 342–360. NASA-TM-89320-VOL-1; NTRS Document ID: 19870008315.

FRY, R. J. M. Radiation effects in space. **Advances in Space Research**, v. 6, n. 11, p. 261–268, jan. 1986.

GALILEI, G. **Sidereus Nuncius, or The Sidereal Messenger**. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1989. ISBN 9780226279039.

GASPAR, H. S.; WINTER, O. C.; VIEIRA NETO, E. Irregular satellites of jupiter: capture configurations of binary-asteroids. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 415, p. 1999–2008, 2011.

GASPAR, H. S.; WINTER, O. C.; VIEIRA NETO, E. Irregular satellites of jupiter: three-dimensional study of binary-asteroid captures. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 433, p. 36–46, 2013.

GIORGINI, J. D. *et al.* **JPL Horizons On-Line Solar System Data and Ephemeris Computation Service**. Pasadena, CA, 1996. Data available at <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>.

GOEBEL, D. M.; KATZ, I. **Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters**. 1. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 9780470429273.

GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1980. (Addison-Wesley Series in Physics).

GOMBOSI, T. I. **Gaskinetic theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

GOTTLIEB, A. Space Colonization and Existential Risk. **Journal of the American Philosophical Association**, v. 5, n. 2, p. 227–244, jun. 2019. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-the-american-philosophical-association/article/space-colonization-and-existential-risk/B82206D1268B2C9221EEA64B6CB14416>.

HART, D. A. Homo sapiens—A Species Not Designed for Space Flight: Health Risks in Low Earth Orbit and Beyond, Including Potential Risks When Traveling beyond the Geomagnetic Field of Earth. **Life**, v. 13, n. 3, p. 757, mar. 2023.

IRRGANG, A.; WILCOX, B.; TUCKER, E.; SCHIEFELBEIN, L. Milky Way mass models for orbit calculations. , v. 549, p. A137, jan. 2013.

ISOLETTA, G.; GRASSI, M.; FANTINO, E.; TORRE SANGRÀ, D. de la; PELÁEZ, J. Feasibility Study of Aerocapture at Mars with an Innovative Deployable Heat Shield. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 58, n. 6, p. 1752–1761, dec. 2021.

KANAS, N.; MANZEY, D. Human missions to mars: new psychological challenges and research issues. **Acta Astronautica**, v. 55, n. 3-9, p. 297–308, 2004.

KHAN, A.; SAMUEL, H.; PHILLIPS, D.; AL. et. Evidence for a liquid silicate layer atop the Martian core. **Nature**, v. 622, p. 712–717, 2023. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/s41586-023-06586-4>.

KOSTRIKIN, A. *et al.* **Linear algebra and geometry**. Abingdon: Taylor & Francis, 1997.

LEE, J. S. Acceleration of a Schwarzschild Kugelblitz Starship. **Journal of the British Interplanetary Society**, v. 68, p. 105–116, 2015.

LEVENBERG, K. A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 2, n. 2, p. 164–168, 1944.

LEVI-CIVITA, T. o. **The absolute differential calculus: calculus of tensors**. London: Blackie & Son, 1927.

LEWIS, D. Voyaging stars: Aspects of polynesian and micronesian astronomy. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A**, v. 276, n. 1257, p. 133–148, 1974.

LIN, C.; YOUINOU, G. Preliminary conceptual design of fast neutron spectrum nuclear thermal rocket cores using monolithic uranium nitride fuel. **Progress in Nuclear Energy**, v. 149, p. 104237, 2022.

- MARQUARDT, D. W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2017. ISBN 9780691177793.
- MIYAMOTO, M.; NAGAI, R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. , v. 27, p. 533–543, jan. 1975.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN 9780521575973.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN 9780521575973.
- NEWTON, I. **The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy**. Berkeley, CA: University of California Press, 1999. ISBN 9780520088160.
- NOETHER, E. Invariante Variationsprobleme. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1918, n. 2, p. 235–257, jul. 1918.
- OBERTH, H. **Ways to Spaceflight**. Washington, DC, 1972. Translation of *Wege zur Raumschiffahrt*, originally published by R. Oldenbourg Verlag, Munich and Berlin, 1929.
- PETERSEN, N. *et al.* Postflight reconditioning for European Astronauts: A case report of recovery after six months in space. **Musculoskeletal Science and Practice**, v. 27, n. Suppl. 1, p. S23–S31, jan. 2017.
- PLUMMER, H. C. On the problem of distribution in globular star clusters. , v. 71, p. 460–470, mar. 1911.
- PTOLEMY. **Ptolemy's Almagest**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1998. ISBN 9780691002606.
- Python Software Foundation. **Python Programming Language**. [S.l.], 2026. Version 3.12. Disponível em: <https://www.python.org/>.
- RAO, G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. **Journal of Jet Propulsion**, v. 28, n. 6, p. 377–382, 1958.
- REIN, H.; S.-F., L. REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. **Astronomy and Astrophysics**, v. 537, p. A128, jan. 2012.
- REIN, H.; SPIEGEL, D. S. Ias15: A fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 446, n. 2, p. 1424–1437, 2015.
- RUGGLES, C. L. N. **Ancient Astronomy: An Encyclopedia of Cosmologies and Myth**. Santa Barbara, CA: ABC-CLIO, 2005. ISBN 9781851094776.

SANNIGRAHI, P.; GHOSH, G.; MISHRA, S.; SHARMA, V. Post-flight rehabilitation of an astronaut after long duration mission in space: Through the eyes of a flight surgeon. **Indian Journal of Aerospace Medicine**, v. 67, n. 2, p. 64–68, aug. 2023. Published online 2024.

SEMENOV, E. V.; KHARITONOV, V. V. Calculation of the Cost of Enriched Uranium Products in Multi-Stream Cascades of Enrichment Process. **Nuclear Energy and Technology**, v. 9, n. 1, p. 19–25, 2023.

SENOVILLA, J. M. M. Black hole formation by incoming electromagnetic radiation. **Classical and Quantum Gravity**, v. 32, n. 1, p. 017001, 2015.

SPIPKER, T. R. *et al.* Qualitative Assessment of Aerocapture and Applications to Future Missions. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 56, n. 2, p. 536–545, mar. 2019.

TOTO, E.; LAMBERTINI, L.; LAURENZI, S.; SANTONICOLA, M. G. Recent Advances and Challenges in Polymer-Based Materials for Space Radiation Shielding. **Polymers**, v. 16, n. 3, p. 382, 2024.

URNS, S. R. **An Introduction to Combustion: Concepts and Applications**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2012. ISBN 9780073380193.

VALLADO, D. A. **Fundamentals of Astrodynamics and Applications**. 5. ed. Hawthorne, CA: Microcosm Press, 2022. ISBN 9781881883227.

WIENS, R. C.; UDRY, A.; GASDA, P.; AL. *et.* Unexpected aluminum-rich rocks and kaolinite detection in Jezero Crater, Mars. **Communications Earth & Environment**, v. 6, n. 1, p. 45, 2025. Disponível em: <https://nature.com>.