



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS TRINDADE
CURSO DE GRADUAÇÃO EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

Mateus Slezinsky Pereira
Diogo Neves Soares

**Um Framework para a Recomendação de Exercícios em Tutoria Adaptativa
baseado em Grafos de Conhecimento**

Florianópolis
2026

Mateus Slezinsky Pereira
Diogo Neves Soares

**Um Framework para a Recomendação de Exercícios em Tutoria Adaptativa
baseado em Grafos de Conhecimento**

Trabalho de conclusão do curso de Sistemas de Informação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, para obtenção do grau de bacharel em Sistemas de Informação.
Orientador: Prof. Renato Fileto, Dr.

Mateus Slezinsky Pereira
Diogo Neves Soares

**Um Framework para a Recomendação de Exercícios em Tutoria Adaptativa
baseado em Grafos de Conhecimento**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de
“Bacharel em Sistemas de Informação” e aprovado em sua forma final pelo Curso de
Graduação em Sistemas de Informação.

Florianópolis, 14 de Julho de 2026.

Prof. Álvaro Junio Pereira Franco, Dr.
Coordenador do Curso

Banca examinadora:

Prof. Renato Fileto, Dr.
Orientador

Prof. Eduardo Camilo Inacio, Dr.
Membro da Banca

Prof. Roberto Willrich, Dr.
Membro da Banca

Florianópolis
2026

AGRADECIMENTOS

Mateus

Agradeço à minha namorada pelo apoio, carinho e companheirismo durante esta etapa. Aos meus pais, sou profundamente grato pelas oportunidades de estudo que me proporcionaram, pelo incentivo constante e por todo o suporte ao longo da minha formação. Agradeço também ao meu irmão pela presença e apoio. Ao professor Renato Fileto, agradeço pela orientação, confiança e pelas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho. Por fim, agradeço à Universidade Federal de Santa Catarina pelas oportunidades de aprendizado e crescimento acadêmico.

Diogo

Agradeço aos meus pais pelo apoio incondicional, pelos ensinamentos e por todo o esforço dedicado à minha educação. À minha irmã, agradeço pelo carinho, pelo incentivo constante, pela paciência, pela compreensão nos momentos mais difíceis e por sempre acreditar em mim. À minha namorada, agradeço pela parceria, incentivo e presença ao longo desta caminhada. Agradeço também ao professor Renato Fileto pela orientação, disponibilidade e acompanhamento durante a realização deste trabalho. Estendo meus agradecimentos à Universidade Federal de Santa Catarina pelas experiências, oportunidades e aprendizados proporcionados durante a graduação.

RESUMO

A personalização da aprendizagem em plataformas de educação online demanda sistemas de recomendação de exercícios que superem as limitações pedagógicas de abordagens tradicionais. Contudo, o desenvolvimento de tais sistemas em contextos curriculares formais é severamente limitado pela inexistência de conjuntos de dados públicos que mapeiem interações de alunos a habilidades de currículos como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) brasileira. Este trabalho propõe e detalha um *framework* metodológico de ponta a ponta para a concepção, desenvolvimento e avaliação de Sistemas de Tutoria Adaptativa alinhados a currículos formais, instanciado e validado no domínio de matemática do ensino médio sob a BNCC. O *framework* supera o desafio da ausência de dados por meio da geração de interações sintéticas de alta fidelidade sobre um grafo de conhecimento ontológico que estrutura as habilidades e suas relações de pré-requisito. Sobre este grafo, um banco de questões é semanticamente mapeado por meio de uma pipeline híbrida de Processamento de Linguagem Natural. O Dataset Sintético D resultante simula trilhas de aprendizagem de múltiplos perfis de alunos. Realiza-se então um *benchmarking* de modelos de Rastreamento de Conhecimento (*Knowledge Tracing* - KT) de última geração para selecionar uma arquitetura de diagnóstico, que é integrada a um motor de recomendação operando sob a teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), equilibrando avanço curricular e reforço de pré-requisitos. A avaliação empírica é conduzida em pareamento por estudante contra uma política de ablação uniforme: o sistema final atinge Acurácia Pedagógica elevada em valor absoluto ($\overline{AP} \approx 0,98$) e preserva os perfis esperados de Novidade Curricular e Diversidade de Sessão sem efeitos colaterais sistemáticos. O ganho diferencial da política ZDP aponta na direção teoricamente prevista, porém sem alcançar significância estatística no regime amostral adotado, configurando ausência de evidência conclusiva contra a hipótese nula em vez de confirmação positiva dela. A principal contribuição é, portanto, um *framework* reproduzível e generalizável a outros domínios e currículos formais, acompanhado de um protocolo de avaliação pedagógica e de diagnósticos estruturais sobre o componente de diagnóstico KT que delineiam vetores concretos de evolução futura.

Palavras-chave: Sistemas de Recomendação Educacionais, Rastreamento de Conhecimento, Grafos de Conhecimento, Sistemas de Tutoria Adaptativa, Zona de Desenvolvimento Proximal, Base Nacional Comum Curricular.

ABSTRACT

The personalization of learning in online education platforms demands exercise recommendation systems that overcome the pedagogical limitations of traditional approaches. However, the development of such systems in formal curricular contexts is severely limited by the inexistence of public datasets mapping student interactions to the skills of curricula such as the Brazilian Base Nacional Comum Curricular (BNCC). This work proposes and details an end-to-end methodological framework for the conception, development, and evaluation of Adaptive Tutoring Systems aligned with formal curricula, instantiated and validated on the domain of high-school mathematics under the BNCC. The framework overcomes the challenge of data absence through the generation of high-fidelity synthetic interactions over an ontological knowledge graph that structures skills and their prerequisite relationships. On top of this graph, a question bank is semantically mapped through a hybrid Natural Language Processing pipeline, and the resulting synthetic dataset D simulates the learning trajectories of multiple student profiles. A benchmarking of state-of-the-art Knowledge Tracing (KT) models is then performed to select a diagnostic architecture, which is integrated into a recommendation engine operating under the theory of the Zone of Proximal Development (ZPD), balancing curricular advancement and prerequisite reinforcement. Empirical evaluation is conducted via per-student paired comparison against a uniform ablation policy: the final system attains high absolute Pedagogical Accuracy ($\overline{AP} \approx 0.98$) and preserves the expected profiles of Curricular Novelty and Session Diversity without systematic side effects; the differential gain of the ZPD-weighted policy points in the theoretically predicted direction but does not reach statistical significance under the current sample regime, constituting absence of conclusive evidence against the null hypothesis rather than positive confirmation of it. The main contribution is, therefore, a reproducible and generalizable framework applicable to other domains and formal curricula, accompanied by a pedagogical evaluation protocol and by structural diagnostics on the KT diagnostic component that delineate concrete vectors for future evolution.

Keywords: Educational Recommender Systems, Knowledge Tracing, Knowledge Graphs, Adaptive Tutoring, Zone of Proximal Development, BNCC.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama conceitual da mudança de paradigma entre RS e ERS.	26
2.2	Exemplo de um fragmento do grafo de conhecimento da BNCC modelado no software Protégé.	30
2.3	Diagrama de Euler representando a estrutura hierárquica do planejamento educacional no Brasil, da BNCC ao plano de aula.	31
2.4	Interação do rastreamento do conhecimento em ITS. Adaptado de Abdelrahman et al. (2023).	34
2.5	Representação da Curva de Esquecimento de Ebbinghaus. Adaptado de Chun e Heo (2018)	39
2.6	Diagrama de Euler representando a ZDP.	45
3.1	Representação do fluxograma de pesquisa dos trabalhos	49
4.1	Visão Geral do Fluxo de Trabalho	57
6.1	DAG curricular instanciado com $ \mathcal{K} = 82$ KCs, exibindo topologia em funil: raiz única, expansão nos níveis intermediários.	104
6.2	Histogramas dos parâmetros dos KCs: dificuldade intrínseca (d_k), limiar de maestria (Ω_k) e limiar de manutenção (Ψ_k) para os 82 KCs instanciados.	106
6.3	Distribuição do número de questões mapeadas por KC após a validação cega.	108
6.4	Grau de conjuntividade: número de KCs simultaneamente requeridos por questão.	109
6.5	Distribuição global da dificuldade condicional $\delta_{j,k}$ atribuída pelo LLM antes da padronização, sobre as 3.219 arestas do banco.	110
6.6	Comparação entre a distribuição de dificuldades condicionais original (LLM) e após a Padronização Logit IRT.	111
6.7	Distribuição dos parâmetros cognitivos $\Theta_l = (\lambda_l, \phi_l, \gamma_l, \sigma_l)$ amostrados para a população de 800 agentes, discriminados entre Perfil Padrão (Normal) e arquétipos de desvio (Outliers).	114
6.8	Progressão curricular (esquerda) e carga acumulada de revisão (direita) em função do volume de interações, para três perfis cognitivos representativos.	116

6.9	Estabilidade da ZDP: distribuição da probabilidade prevista de acerto $P(\text{correct})$ ao longo das interações para cada perfil cognitivo.	118
6.10	Tempo cronológico total simulado (em dias) para concluir o currículo, por perfil cognitivo.	119
6.11	Micro-dinâmica cognitiva no KC <code>Func_PlanoCartesiano</code> , Perfil Excelente: agente <code>s_00058</code> ($\lambda = 0,36$, $\phi = 0,0053$).	120
6.12	Micro-dinâmica cognitiva no KC <code>Func_PlanoCartesiano</code> , Perfil Médio: agente <code>s_00000</code> ($\lambda = 0,28$, $\phi = 0,0054$).	121
6.13	Micro-dinâmica cognitiva no KC <code>Func_PlanoCartesiano</code> , Perfil Dificuldade: agente <code>s_00480</code> ($\lambda = 0,09$, $\phi = 0,0075$).	122
6.14	Raio-X de desfechos: distribuição dos motivos de parada por perfil cognitivo.	123
6.15	Validação matemática (Painel 1): limites assintóticos (<i>Guess & Slip</i>) e densidade da ZDP por modo de operação.	124
6.16	Validação matemática (Painel 2): curva de esquecimento vs. resgate da ZDP e balanceamento estrutural do banco de itens.	125
6.17	Composição do banco por KC (Top 30 em volume de questões únicas) e distribuição espacial das evasões no currículo.	127
6.18	Raio-X de progressão curricular do agente <code>s_00702</code> ($\lambda = 0,23$, $\phi = 0,0070$): evasão por fim do ano letivo após 318,9 dias com 79/82 KCs dominados. .	129
6.19	Distribuição do volume de interações por perfil cognitivo, segmentado por complexidade do KC (raízes vs. avançados) e status de conclusão.	131
6.20	Calibração do estado final sob $\mathcal{R}$	138
6.21	Distribuição de AP sob $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{base}$	140
6.22	Cobertura do intervalo ZDP sob $\mathcal{R}$	141
6.23	Distância sinalizada à ZDP sob $\mathcal{R}$	142
6.24	Distribuição de $\mathcal{N}_C$ por modo sob $\mathcal{R}$	143
6.25	Distribuição de $\mathcal{D}_S$ sob $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{base}$	144
6.26	Alinhamento KT no estado final por (estudante, KC)	145
6.27	Maestria por estudante: motor vs verdade do Dataset Sintético D	146
6.28	Razão de conclusão e taxa por KC	146
6.29	$\hat{P}$ médio vs Ω^{obs} por KC-foco	147
A.1	$\hat{P}(\text{correct})$ vs limites médios da ZDP sob $\mathcal{R}$	168
A.2	Alinhamento KT por recomendação e por KC	169
A.3	Resíduo de alinhamento por faixa de maestria	170
A.4	Distribuição de Ω_k latente vs Ω_k^{obs} projetado	171
A.5	Largura da ZDP por modo de recomendação	172
A.6	Trajetória da banda ZDP ao longo do histórico	173

LISTA DE TABELAS

2.1	Comparativo das Abordagens de sistemas de recomendação.	26
2.2	Definição dos Componentes Curriculares da BNCC para a Área de Matemática.	32
2.3	Escopo Formal de um Modelo de Knowledge Tracing.	35
2.4	Parâmetros do Modelo BKT Padrão, adaptado de Abdelrahman et al., 2023.	36
2.5	Comparativo das Teorias Pedagógicas Aplicadas a Sistemas Adaptativos.	44
3.1	Quadro Comparativo dos Trabalhos Relacionados.	54
4.1	Amostra da Estruturação das Habilidades da BNCC.	59
4.2	Distribuições probabilísticas para parametrização dos agentes virtuais.	64
5.1	Modelos de <i>Knowledge Tracing</i> Avaliados no Benchmarking.	85
5.2	Espaço de Busca de Hiperparâmetros (Λ) para os Modelos Avaliados.	87
6.1	Resumo Estatístico da Normalização IRT.	112
6.2	Distribuição de perfis comportamentais na população simulada ($N = 800$).	113
6.3	Desempenho mediano em $\mathcal{S}_{test}$ sob retreinamento multi-semente	133
6.4	Intervalos de confiança de bootstrap de 95% em $\mathcal{S}_{test}$	134
6.5	Instâncias de semente mediana e o modelo de referência	135
6.6	Diagnóstico do calibrador isotônico em $\mathcal{S}_{calib}$	137
6.7	Comparação pareada $\mathcal{R}$ vs $\mathcal{R}_{base}$ em $\mathcal{S}_{holdout}$	138

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACC	<i>Accuracy</i> (Acurácia)
ACM	<i>Association for Computing Machinery</i>
AFM	<i>Additive Factor Model</i> (Modelo de Fator Aditivo)
AMP	<i>Automatic Mixed Precision</i> (Precisão Mista Automática)
AP	Acurácia Pedagógica
AKT	<i>Attentive Knowledge Tracing</i>
AUC	<i>Area Under the Curve</i> (Área sob a Curva)
BCE	<i>Binary Cross-Entropy</i> (Entropia Cruzada Binária)
BFS	<i>Breadth First Search</i> (Busca em Largura)
BKT	<i>Bayesian Knowledge Tracing</i> (Rastreamento de Conhecimento Bayesiano)
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BS	<i>Brier Score</i> (Escore de Brier)
BSS	<i>Brier Skill Score</i> (Escore de Habilidade de Brier)
CB	<i>Content-Based</i> (Recomendação Baseada em Conteúdo)
CDM	<i>Cognitive Diagnosis Model</i> (Modelo de Diagnóstico Cognitivo)
CF	<i>Collaborative Filtering</i> (Filtragem Colaborativa)
CKT	<i>Convolutional Knowledge Tracing</i>
CL	<i>Contrastive Learning</i> (Aprendizagem Contrastiva)
CoKT	<i>Collaborative Knowledge Tracing</i>
CoT	<i>Chain-of-Thought</i> (Cadeia de Pensamento)
DAG	<i>Directed Acyclic Graph</i> (Grafo Acíclico Dirigido)
DINA	<i>Deterministic Input, Noisy And-gate</i>
DKT	<i>Deep Knowledge Tracing</i>
DKT-	<i>Deep Knowledge Tracing with Forgetting</i>
Forget	
DKT-MD	<i>Deep Knowledge Tracing with Multi-Dimensional features</i>
DKVMN	<i>Dynamic Key-Value Memory Network</i>
DLKT	<i>Deep Learning Knowledge Tracing</i>
ECE	<i>Expected Calibration Error</i> (Erro de Calibração Esperado)
EERNN	<i>Exercise-Enhanced Recurrent Neural Network</i>
EKT	<i>Exercise-Aware Knowledge Tracing</i>
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ER-KTCP	<i>Exercise Recommendation based on Knowledge Tracing and Concept Pre-requisite</i>
ERS	<i>Educational Recommender Systems</i> (Sistemas de Recomendação Educacionais)
ESFL	<i>Exercise Set Filtering Layer</i>
ExRec	<i>Explainable Recommendation framework</i>
FRKC	<i>Forgetting Rate for each KC</i> (Taxa de Esquecimento por KC)
GKT	<i>Graph Knowledge Tracing</i>
GIKT	<i>Graph-based Interaction Knowledge Tracing</i>
GNN	<i>Graph Neural Network</i> (Rede Neural de Grafo)
HCGKT	<i>Hierarchical Contrastive Graph Knowledge Tracing</i>
HIN	<i>Heterogeneous Information Network</i> (Rede de Informação Heterogênea)

HR	<i>Hit Ratio</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
IEP	<i>Item Exposure Probability</i>
IERF	<i>Intention-aware Exercise Recommendation enhanced by deep Forgetting modeling</i>
IRT	<i>Item Response Theory</i> (Teoria de Resposta ao Item)
ITMC	<i>Imputação Topológica via Monte Carlo</i>
ITS	<i>Intelligent Tutoring System</i> (Sistema de Tutoria Inteligente)
KC	<i>Knowledge Concept ou Knowledge Component</i>
KCPL	<i>Knowledge Concept Prediction Layer</i>
KCP-ER	<i>Knowledge Concept Prediction-Exercise Recommendation</i>
KG	<i>Knowledge Graph</i> (Grafo de Conhecimento)
KG4EER	<i>Explainable Exercise Recommendation with Knowledge Graph</i>
KG4Ex	<i>Knowledge Graph for Exercise recommendation</i>
KGE	<i>Knowledge Graph Embedding</i>
KS	<i>Knowledge Structure</i> (Estrutura de Conhecimento)
KT	<i>Knowledge Tracing</i> (Rastreamento de Conhecimento)
KTM	<i>Knowledge Tracing Machines</i>
LFA	<i>Learning Factor Analysis</i> (Análise de Fatores de Aprendizagem)
LIME	<i>Local Interpretable Model-agnostic Explanations</i>
LLM	<i>Large Language Models</i> (Grandes Modelos de Linguagem)
LRP	<i>Layer-wise Relevance Propagation</i>
LSTM	<i>Long Short-Term Memory</i>
MAE	<i>Mean Absolute Error</i> (Erro Médio Absoluto)
MLKT4Rec	<i>Multi-Task Learning Knowledge Tracing for Recommendation</i>
MRR	<i>Mean Reciprocal Rank</i>
MSE	<i>Mean Squared Error</i> (Erro Quadrático Médio)
NDCG	<i>Normalized Discounted Cumulative Gain</i>
NeuralCD	<i>Neural Cognitive Diagnosis</i>
NeuMF	<i>Neural Matrix Factorization</i>
NR4DER	<i>Neural Re-ranking for Diversified Exercise Recommendation</i>
PFA	<i>Performance Factor Analysis</i> (Análise de Fatores de Performance)
PKT	<i>Prerequisite Knowledge Tracing</i>
PLN	<i>Processamento de Linguagem Natural</i>
PPP	<i>Projeto Político-Pedagógico</i>
QA	<i>Question-Answer</i> (Pergunta e Resposta)
RKT	<i>Relation-Aware Knowledge Tracing</i>
RL	<i>Reinforcement Learning</i> (Aprendizado por Reforço)
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i> (Raiz do Erro Quadrático Médio)
RNN	<i>Recurrent Neural Network</i> (Rede Neural Recorrente)
RobustKT	<i>Robust Knowledge Tracing</i>
RS	<i>Recommender Systems</i> (Sistemas de Recomendação)
SAINT	<i>Separated Self-Attentive Interaction Network for Knowledge Tracing</i>
SAINT+	<i>Separated Self-Attentive Interaction Network for Knowledge Tracing com features temporais</i>
SAKT	<i>Self-Attentive Knowledge Tracing</i>

SHAP	<i>SHapley Additive exPlanations</i>
SKT	<i>Structure-based Knowledge Tracing</i>
SKVMN	<i>Sequential Key-Value Memory Network</i>
SR	<i>Success Rate</i> (Taxa de Acerto)
TPE	<i>Tree-structured Parzen Estimator</i> (Estimador de Parzen Estruturado em Árvore)
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UKT	<i>Uncertainty-aware Knowledge Tracing</i>
XAI	<i>Explainable Artificial Intelligence</i> (Inteligência Artificial Explicável)
XKT	<i>Explainable Knowledge Tracing</i> (Rastreamento de Conhecimento Explicável)
ZDP	<i>Zona de Desenvolvimento Proximal</i>
ZPDES-KS	<i>Zone of Proximal Development-based Expert System with KS</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição
<i>Conjuntos, índices e elementos fundamentais</i>	
$\mathcal{S}$	Conjunto de alunos/agentes, $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_N\}$
$\mathcal{K}$	Conjunto de Componentes de Conhecimento (KCs), $ \mathcal{K} = K = 82$
$\mathcal{Q}$	Conjunto de questões, $\mathcal{Q} = \{q_1, \dots, q_M\}$
N	Número de alunos/agentes (também usado como tamanho de janela, n ^o de candidatos na recuperação e n ^o de interações em somatórios)
K	Número de KCs, igual à dimensão do vetor de maestria ($K = 82$)
M	Número de questões ($ \mathcal{Q} $); também empregado como n ^o de alunos de teste, n ^o de <i>bins</i> do ECE ($= 10$) e multiplicador contextual de revisão ($= 1,5$)
s_l	Aluno/agente l
k, k_i	Componente de conhecimento (KC)
q_j	Questão j
t	Instante de tempo discreto (dias)
$a_j, a_{l,j}, a_{l,t} \in \{0, 1\}$	Resultado binário (acerto/erro) de uma interação
$X_{l,1:t-1}, \mathcal{H}_{l,t}$	Histórico de interações do aluno l até o instante t
$\mathcal{G}$	Grafo de conhecimento (DAG de dependências entre KCs)
$\mathcal{G}^{(w)}, \mathcal{G}^*$	Grafo na onda w do ITMC e grafo topologicamente estabilizado
$\mathcal{M}$	Mapeamento $\text{KC} \rightarrow \text{questões}$, $\mathcal{M} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Q})$
<i>Grafo curricular e parâmetros pedagógicos do KC</i>	
d_k	Dificuldade intrínseca do KC k , $d_k \in [0, 1]$
Ω_k	Limiar de maestria (<i>mastery threshold</i>) do KC k
Ψ_k	Limiar de manutenção (<i>maintenance threshold</i>) do KC k
∇	Margem de histerese, $\nabla = \Omega_k - \Psi_k$
$\Omega_k^{obs}, \Psi_k^{obs}$	Limiares de maestria/manutenção projetados ao espaço observável
<i>Mapeamento semântico e anotação do banco de questões</i>	
ξ_j	Enunciado da questão j
ζ_j	Resolução passo a passo (<i>Chain-of-Thought</i>) da questão j
κ_j	Lista de tópicos matemáticos inferidos da questão j
D_j	Documento expandido, $D_j = \xi_j \oplus \zeta_j \oplus \kappa_j$
$\text{desc}(k)$	Consulta/descrição textual do KC k usada na recuperação
f_{BE}, f_{CE}	Função de <i>embedding</i> (Bi-Encoder) e função de relevância (Cross-Encoder)
$S(k, q_j)$	Similaridade do cosseno entre KC e questão
ρ_{kj}	Escore de confiança do Cross-Encoder

Símbolo	Descrição
$\mathcal{C}_k, \mathcal{C}'_k$	Conjunto de candidatos de alta abrangência e subconjunto de validação
ϖ	Limiar de confiança do <i>Adaptive Thresholding</i> ($\approx 0,45$)
η_{min}, η_{max}	Restrições de amostragem mínima/máxima de candidatos
Φ_V, Φ_A	Funções de validação de pertinência e de anotação de dificuldade (LLM)
$\delta_{j,k}$	Dificuldade condicional do par (questão j , KC k)
$\mathcal{Q}_k$	Conjunto final de questões mapeadas ao KC k
τ_{max_kc}	Teto de KCs admitidos por questão ($= 8$)
$\delta_{safe}, \delta_{final}$	Dificuldade após <i>clipping</i> e após calibração logit
d_{raw}, d_{norm}	Dificuldade no espaço <i>logit</i> (bruta e normalizada via Z-score)
μ_{raw}, σ_{raw}	Média e desvio padrão das dificuldades no espaço <i>logit</i>

Modelo do agente e simulador cognitivo

Θ_l	Vetor de parâmetros cognitivos do agente, $(\lambda_l, \phi_l, \gamma_l, \sigma_l)$
λ_l	Taxa de aprendizagem; $\lambda_{l,t}^*$: taxa efetiva (com multiplicador de revisão)
ϕ_l	Fator de esquecimento; $\phi'_{l,k}$: taxa de decaimento efetiva; ϕ_{min} : piso
γ_l	Probabilidade de acerto casual (<i>guess</i>); $\bar{\gamma} = 0,20$: média populacional
σ_l	Probabilidade de deslize (<i>slip</i>); $\bar{\sigma} = 0,12$: média populacional
A_l	Arquétipo comportamental do agente
$\Sigma_{l,t}$	Estado cognitivo do agente, $(\mathbf{v}_{l,t}, \mathbf{R}_{l,t}, \mathbf{C}_{rep,l,t}, \Theta_l, A_l)$
$\mathbf{v}_{l,t}$	Vetor de maestria, $\mathbf{v}_{l,t} \in [0, 1]^K$; $v_{l,t,k}$: componente; $v'_{l,t,k}$: ajustada pelo tempo; $v_{peak,l,k}$: pico histórico; $\hat{\mathbf{v}}_{l,t}$: estimada
$\mathbf{R}_{l,t}$	Vetor de recência; $R_{l,t,k}$: <i>timestamp</i> da última interação no KC k
$\mathbf{C}_{rep,l,t}$	Vetor de repetições espaçadas; $C_{rep,l,k}$: contagem por KC
Δt_k	Lapso temporal, $\Delta t_k = t - R_{l,t,k}$; $\Delta t_{int}, \Delta t_{pausa}$: tempos de interação e de pausa
μ_{final}	Média da distribuição de maestria inicial
$\beta_{l,t,k}$	Proficiência do agente no espaço <i>logit</i>
$b_{j,k}$	Dificuldade do item no espaço <i>logit</i> (alinhada ao parâmetro b_j da IRT)
$P(\text{know})_{l,k}$	Probabilidade de domínio do KC k
$P_{holistic}(q_j)$	Probabilidade holística de domínio (média geométrica sobre $\mathcal{K}_j$)
$\mathcal{K}_j$	Conjunto de KCs requeridos pela questão j
$P(\text{correct})_{l,j}$	Probabilidade de acerto (base e final); p^* : valor latente
ϵ	Ruído gaussiano da atualização de maestria ($\sim \mathcal{N}(0, 0,02^2)$)
E_{cons}	Contador de erros consecutivos (frustração)
Δ_{fadiga}	Penalização por fadiga cognitiva

Política de seleção, ZDP e imputação ITMC

Π^*	Política de recomendação ótima
---------	--------------------------------

Símbolo	Descrição
U	Função de utilidade pedagógica
$\mathcal{K}_{dom,l}, \mathcal{K}_{unl,l}$	Conjuntos de KCs dominados e desbloqueados
$\mathcal{K}_{risk,l}, \mathcal{K}_{starved}^{(w)}$	Conjuntos de KCs em risco (revisão) e em inanição (<i>starvation</i>)
$\mathcal{F}_{learn,l}$	Fila de aprendizagem dos KCs desbloqueados
$k_{foco,l}, k_{target}$	KC foco e KC-alvo da interação
$\text{Pre}^*(\cdot)$	Fecho transitivo de pré-requisitos de um KC
τ_{frust}	Limiar de tolerância à frustração (= 5)
α_{learn}	Agressividade da ZDP no modo de aprendizagem (= 0,5)
Δ_{learn}	Salto cognitivo latente no modo de aprendizagem
Δ_{rev}	Margem mínima da ZDP no modo de revisão (= 0,05)
$[P_{min}, P_{max}]$	Intervalo observável da ZDP; $P_{base_min}, P_{base_max}$: limites latentes
w_j	Peso da questão candidata (função platô)
σ_w	Largura da função platô da ZDP (= 0,15)
$\mathcal{Q}_{cand}$	Conjunto de questões candidatas; q^* : questão recomendada
T_{max}	Prazo do ano letivo (condição de parada, em dias)
$P_{dropout}, P_{base}$	Probabilidade de evasão comportamental e sua base diária
L_{sessao}	Tamanho (em interações) da sessão de estudo
$D, \mathcal{D}^{(w)}, \mathcal{D}^*$	Dataset Sintético (final $\mathcal{D}^*$ renomeado D); $\mathcal{D}^{(w)}$: log da onda w ; distinto da métrica $\mathcal{D}_S$
$\mathbf{E}_{reason}$	Vetor de estados terminais dos agentes
W_{max}, w	Teto de iterações do ITMC (= 5) e índice da onda corrente
$\mathcal{B}$	Conjunto de âncoras de dificuldade (<i>bins</i>), $\{0,25, 0,50, 0,75, 0,90\}$
$q_{synth}, \delta_{synth,k}$	Nó de item parametrizado (sintético) e sua dificuldade condicional
k_{anc}	Pré-requisito secundário (ancestral) de um KC
$\mathcal{D}_{oper}$	Conjunto discreto de dificuldades operacionais
Motor de recomendação, ghost pass e calibração	
$\mathcal{R}, \mathcal{R}_{base}$	Motor de recomendação e política de ablação uniforme
$\mathcal{F}_{KT}$	Função/modelo de <i>Knowledge Tracing</i> ; $\mathcal{F}_{KT}^*$: modelo de referência
$z_{l,t}$	Estado oculto do modelo de KT
$\hat{p}_{ghost}(t, k)$	Maestria observável via <i>ghost pass</i> ; $\hat{p}_{ghost_peak}$: pico histórico
$q_k^{ghost}, \delta_k^{ghost}$	Questão virtual monoconceitual e sua dificuldade ideal (= 0,5)
$q_j^{anchor(k)}, \mathcal{Q}_k^{mono}$	Questão-âncora j do KC k e conjunto de questões monoconceituais
N_a	Número de âncoras agregadas pelo <i>ghost pass</i> (= 3)
g	Calibrador isotônico (transformação monotônica pós-hoc); $\tilde{p}$: predição calibrada
$\pi(v)$	Projeção afim ao espaço observável, $\pi(v) = \bar{\gamma} + (1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma}) v$

Símbolo	Descrição
$\hat{P}(\text{correct})_{l,j}$	Probabilidade de acerto estimada e calibrada da questão candidata
<i>Protocolo experimental e treinamento de KT</i>	
$i_{l,t}$	Tupla de interação $(q_{l,t}, k_{l,t}, a_{l,t}, p_{l,t}^*, \mathcal{X}_{l,t})$
$\mathcal{X}_{l,t}$	Conjunto de covariáveis temporais e de histórico
$p_{l,t}^*$	Probabilidade latente de acerto (sinal supervisor do treinamento)
T, S	Comprimento máximo da sequência ($= 200$) e passo da janela deslizante ($= 150$)
$\mathcal{S}_{train}, \mathcal{S}_{test}, \mathcal{S}_{eval}$	Partições de treino, teste e avaliação
$\mathcal{S}_{calib}, \mathcal{S}_{holdout}$	Subconjuntos usuário-disjuntos de calibração e de mensuração
ρ_{calib}	Proporção da coorte destinada à calibração ($= 0,50$)
$\mathcal{D}_{calib}$	Conjunto de pares de calibração isotônica
Λ, Λ^*	Espaço de busca de hiperparâmetros e configuração ótima
$\mathcal{A}, \mathcal{A}_{baselines}, \mathcal{A}^*$	Arquitetura, conjunto de <i>baselines</i> e arquitetura eleita
$\mathcal{F}_{KT}^{(k, \mathcal{A})}, \mathcal{F}_{KT}^{(med, \mathcal{A})}$	Instância da arquitetura $\mathcal{A}$ na réplica k e instância de semente mediana
N_{seeds}	Número de sementes do retreinamento ($= 5$)
$\mathcal{Z}$	Sequência de sementes do retreinamento multi-semente, $\{42, \dots, 46\}$
$seed_{base}$	Semente-base ($= 42$); $seed_k$: semente da réplica k ; $seed_{boot}$: semente do <i>bootstrap</i>
E_{final}, e_k^*	Número de épocas de retreinamento e época de convergência da partição k
$\mathcal{M}^{(k)}$	Vetor de métricas da réplica k
τ_s	Passo de subamostragem temporal do <i>replay</i> ($= 15$); $\mathcal{T}_l$: instantes consultados
$\mathcal{U}_{test}, B$	Identificadores únicos de teste e número de réplicas <i>bootstrap</i> ($= 1000$)
Q_β	Quantil empírico de ordem β
$\mathcal{J}_e$	Conjunto de tentativas (<i>trials</i>) de referência da poda na época e
$\tilde{e}_{t,e}$	Métrica de poda (média móvel filtrada do erro de validação)
e_{warmup}	Janela de aquecimento da poda; $t_{startup}$ e n_{min_trials} : travas de cardinalidade do <i>Median Pruner</i>
$\mathbb{I}_{poda}$	Indicador de interrupção (poda)
<i>Métricas de avaliação e estatística</i>	
RMSE $_p^*$	Raiz do erro quadrático médio contra p^* (métrica primária)
BS, BSS	<i>Brier Score</i> e <i>Brier Skill Score</i> ; BS $_{naive}$, BS $_{min}$, BSS $_{max}$: referências
$\bar{a}$	Taxa marginal empírica de acerto
ECE	<i>Expected Calibration Error</i> ; B_m : <i>bins</i> ; $acc_m, \bar{p}_m$: acurácia e confiança por <i>bin</i>

Símbolo	Descrição
ACC, AUC	Acurácia e Área sob a Curva; D_0, D_1, N_0, N_1 : subconjuntos e cardinalidades por classe
$\overline{AP}$	Acurácia Pedagógica média; $\overline{AP}_{learn}, \overline{AP}_{review}$: estratificações por modo
$dist_{ZDP}$	Distância da predição ao intervalo ativo da ZDP
$\mathcal{N}_C$	Novidade Curricular ($\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]$: valor esperado); distinta da distribuição Normal $\mathcal{N}$
$\mathcal{D}_S$	Diversidade da Sessão; W_N : janela deslizante; $\mathbf{q}_j \in \{0, 1\}^{ \mathcal{K} }$: vetor binário da questão
H_0, H_a	Hipótese nula e hipótese alternativa do teste pareado
T, W	Estatísticas do teste t pareado de Student e de Wilcoxon
d_z	Tamanho de efeito de Cohen; $\overline{\Delta}, s_{\Delta}, \Delta_l$: diferenças pareadas
α	Nível de significância ($= 0,05$); $1 - \beta$: potência estatística
$\mu, \bar{\mu}, s_{\mu}, \tilde{\mu}$	Métrica genérica, média amostral, desvio padrão amostral e mediana
IC _{0,95}	Intervalo de confiança ao nível de 95%
r	Coeficiente de correlação de Pearson

Distribuições e operadores

$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	Distribuição Normal; $\mathcal{TN}$: Normal truncada; $\mathcal{U}$: Uniforme
Beta(α, β)	Distribuição Beta; LogNormal(μ, σ); Bernoulli($\cdot$)
$\oplus$	Operador de concatenação
$\mathcal{P}(\cdot)$	Conjunto das partes
$\mathbb{E}[\cdot], \mathbb{P}[\cdot], \mathbb{I}(\cdot)$	Esperança, probabilidade e função indicadora
$\sqcup$	União disjunta de conjuntos

Modelos clássicos de KT (IRT/BKT, fundamentação teórica)

θ_i	Proficiência (habilidade) do aluno na IRT
b_j	Dificuldade do item na IRT
a_j, c_j, d_j	Discriminação, acerto casual e erro do item no modelo IRT 4PL
$p(L_0), p(T)$	Probabilidades do BKT de conhecimento inicial e de transição
$p(S), p(G)$	Probabilidades do BKT de <i>slip</i> (deslize) e de <i>guess</i> (acerto casual)

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Pergunta de Pesquisa e Hipóteses	18
1.2	Objetivos	19
1.2.1	Objetivo Geral	19
1.2.2	Objetivos Específicos	19
1.3	Metodologia	20
1.4	Síntese dos Resultados Obtidos	21
1.5	Estrutura do trabalho	22
2	Fundamentação Teórica	24
2.1	Sistemas de Recomendação	24
2.1.1	Abordagens Clássicas: Filtragem Colaborativa e Baseada em Con- teúdo	25
2.1.2	Sistemas de Recomendação Educacionais (ERS)	26
2.1.3	Desafios em ERS: Representação do Currículo, Mapeamento de Conceitos e Avaliação Pedagógica	27
2.2	Representação de Conhecimento Estruturado	28
2.2.1	Ontologias	28
2.2.2	Grafos de Conhecimento em Domínios Educacionais	28
2.2.3	A BNCC e o Planejamento Curricular	31
2.2.4	Estrutura de Competências e Habilidades em Matemática	32
2.3	Rastreamento de Conhecimento	33
2.3.1	Modelos Clássicos e Probabilísticos	35
2.3.2	Modelos Baseados em Aprendizado Profundo	36
2.3.3	A Modelagem do Esquecimento em Knowledge Tracing	38
2.3.4	Datasets para o Treinamento de Modelos de Knowledge Tracing	40
2.3.5	Anotação Automática de Conceitos de Conhecimento em Questões	41
2.3.6	Explicabilidade em Knowledge Tracing (XKT)	42
2.4	Teorias Pedagógicas para Sistemas Adaptativos	43
2.4.1	A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)	44

3	Trabalhos Relacionados	47
3.1	Revisão da Literatura	47
3.2	Abordagens Focadas no Diagnóstico do Aluno	48
3.3	Abordagens Guiadas por Grafos	51
3.4	Análise Comparativa e Posição do Trabalho	53
4	Metodologia Proposta	56
4.1	Definição do Problema	57
4.2	Modelagem do KG e Parametrização Curricular	58
4.2.1	Estruturação das Habilidades da BNCC	59
4.2.2	Definição dos KCs	59
4.2.3	Parametrização de Dificuldade e Limiares de Maestria	59
4.3	Mapeamento Semântico e Anotação do Banco de Questões	61
4.3.1	Abordagem Metodológica	61
4.3.2	Pipeline de Mapeamento e Anotação	61
4.3.3	Curadoria e Pós-Processamento do Mapeamento	62
4.4	Construção de um Dataset Sintético	63
4.4.1	Modelagem Cognitiva e Amostragem Estocástica da População Sintética	64
4.4.2	Modelo Matemático do Agente e Processo de Interação	65
4.4.3	Política de Seleção de Atividades e Progressão Curricular	69
4.4.4	Imputação Topológica via Monte Carlo (ITMC)	73
4.5	Implementação do Sistema de Recomendação Adaptativa	77
4.5.1	Arquitetura do Sistema	77
4.5.2	Inferência da Maestria Operacional via <i>Ghost Pass</i>	77
4.5.3	Calibração Isotônica do Espaço Observável	79
4.5.4	Ciclo de Recomendação em Tempo Real	80
4.5.5	Considerações sobre Aproximações Populacionais	82
4.5.6	Resultado Esperado	82
5	Protocolo Experimental	83
5.1	Treinamento e Avaliação de Modelos de <i>Knowledge Tracing</i>	83
5.1.1	Preparação dos Dados de Entrada e <i>Feature Engineering</i>	83
5.1.2	Modelos de Referência (Baselines)	84
5.1.3	Estratégia de Validação e Função de Custo	85
5.1.4	Otimização de Hiperparâmetros	86
5.1.5	Métricas de Avaliação	88
5.1.6	Retreinamento Multi-Semente sobre o Conjunto Pleno	91
5.1.7	Validação por Reamostragem <i>Bootstrap</i> Estratificada	92
5.1.8	Seleção do Modelo de Referência pelo Critério da Mediana	92

5.2	Avaliação da Qualidade da Recomendação	93
5.2.1	Coorte de Avaliação e Partição Usuário-Disjunta	93
5.2.2	Ajuste do Calibrador Isotônico em Holdout	94
5.2.3	Simulação por Replay sobre Históricos Reais	95
5.2.4	Políticas Comparadas	96
5.2.5	Métrica 1: Acurácia Pedagógica	96
5.2.6	Métrica 2: Novidade Curricular	98
5.2.7	Métrica 3: Diversidade da Sessão	99
5.2.8	Comparação Estatística Pareada	100
6	Resultados	102
6.1	Visão Geral dos Resultados	102
6.1.1	Relação entre os Blocos de Resultados	102
6.2	Resultados da Modelagem do Grafo de Conhecimento e Parametrização Curricular	103
6.2.1	Estrutura Hierárquica do Grafo de Conhecimento	104
6.2.2	Distribuição dos Parâmetros dos KCs	105
6.2.3	Síntese e Transição	107
6.3	Resultados do Mapeamento Semântico e Anotação do Banco de Questões	107
6.3.1	Distribuição do Número de Questões por KC	108
6.3.2	Grau de Conjuntividade (KCs por Questão)	109
6.3.3	Distribuição Global da Dificuldade Condicional	110
6.3.4	Resultados da Curadoria e Pós-Processamento do Mapeamento	110
6.4	Resultados da Construção do Dataset Sintético via ITMC	112
6.4.1	Caracterização da População Simulada	113
6.4.2	Análise Macroscópica das Trajetórias de Aprendizado	116
6.4.3	Micro-Dinâmica Cognitiva: Análise de Alta Resolução por KC	120
6.4.4	Análise dos Desfechos e Condições de Parada	123
6.4.5	Validação Matemática e Empírica do Dataset	124
6.4.6	Composição Final do Banco e Distribuição Espacial das Evasões	127
6.4.7	Análise de Trajetória Individual Representativa	129
6.4.8	Distribuição de Esforço por Perfil e Complexidade do KC	131
6.5	Resultados do Benchmarking dos Modelos de KT	132
6.5.1	Desempenho Sob Agregação Multi-Seed	132
6.5.2	Quantificação da Variância de Amostragem via Bootstrap Agrupado	133
6.5.3	Referência Climatológica	134
6.5.4	Eleição do Modelo de Referência $\mathcal{F}_{KT}^*$	135
6.6	Resultados da Avaliação da Qualidade da Recomendação	136
6.6.1	Configuração da Execução	136

6.6.2	Ajuste e Diagnóstico do Calibrador Isotônico	137
6.6.3	Comparação Pareada das Políticas: Síntese	138
6.6.4	Métrica 1: Acurácia Pedagógica	139
6.6.5	Métrica 2: Novidade Curricular	141
6.6.6	Métrica 3: Diversidade da Sessão	142
6.6.7	Alinhamento KT vs Verdade do Dataset Sintético	143
6.6.8	Progresso Curricular Cumulativo e Gargalo de Promoção	144
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	148
7.1	Síntese das Contribuições	148
7.2	Limitações do Estudo e do Sistema	150
7.3	Trabalhos Futuros	151
	Apêndice A Diagnósticos Complementares do Motor de Recomendação	167
A.1	Cobertura da ZDP no Espaço de $\hat{P}(\text{correct})$	168
A.2	Alinhamento KT por Recomendação, por KC e por Faixa de Maestria . . .	169
A.3	Geometria Operacional dos Limiares e da Banda da ZDP	171
	Apêndice B Artigo Científico	174
	Apêndice C Repositório do Código-Fonte	190

Capítulo 1

Introdução

A disponibilidade de dados integrados a tecnologias digitais na educação posicionou os sistemas de recomendação educacionais (ERS) como ferramentas cruciais tanto para educadores quanto para estudantes (Maria et al., 2019). Para os alunos, em particular, esses sistemas prometem otimizar a jornada de aprendizado ao reconhecer suas preferências e necessidades individuais, contribuindo para o desempenho acadêmico e a motivação por meio da indicação de conteúdo personalizado (Garcia-Martinez & Hamou-Lhadj, 2013). Nesse contexto, os exercícios online emergem como um componente fundamental para a consolidação do conhecimento.

Contudo, o desafio reside em superar a complexidade inerente à diversidade de perfis e interesses dos estudantes (Verbert et al., 2012) para oferecer recomendações que sejam, de fato, apropriadamente desafiadoras. Além da complexidade pedagógica, os ERS também herdam problemas técnicos de sistemas de recomendação de propósito geral, como o *cold-start* e a esparsidade de dados, que dificultam a personalização eficaz (Garcia-Martinez & Hamou-Lhadj, 2013). Diante desses desafios, este trabalho desenvolveu uma metodologia para um sistema de aprendizagem adaptativo que personaliza a recomendação de exercícios com base no estado de conhecimento individual de cada estudante, buscando uma experiência de aprendizado mais eficiente e engajadora (Thai-Nghe et al., 2010).

A literatura sobre ERS revela que abordagens tradicionais, como a filtragem colaborativa (CF), em suas variantes baseada no usuário (G. Liu & Hao, 2012) ou no item (Sarwar et al., 2001), frequentemente falham em atingir uma personalização pedagógica eficaz. A lógica da CF, herdada de domínios comerciais, se baseia na similaridade e ignora a estrutura de pré-requisitos e a complexidade conceitual intrínseca ao domínio do conhecimento. Outras abordagens tentam superar isso modelando o perfil do aluno com base em estilos de aprendizagem (Nafea et al., 2019) ou desempenho acadêmico para recomendar cursos e trilhas (L. Huang et al., 2019; Nabizadeh et al., 2020), mas ainda carecem de um diagnóstico profundo do conhecimento conceitual do aluno.

Diante dessa necessidade de um diagnóstico profundo, a pesquisa tem se voltado para uma abordagem dual que modela explicitamente tanto o aluno quanto o domínio: o Rastreamento de Conhecimento (*Knowledge Tracing* - KT) e os grafos de conhecimento (KGs). O KT emerge como uma abordagem central para modelar o estado de conhecimento latente do aluno (Abdelrahman et al., 2023), permitindo a recomendação de exercícios com dificuldade adaptada (Wu et al., 2020). Contudo, muitos modelos de KT modernos operam como "caixas-pretas". Em complemento, os KGs (Guan et al., 2025) fornecem uma representação formal do currículo, permitindo não apenas a recomendação, mas também a explicação do seu raciocínio. A integração dessas duas técnicas permite recomendações transparentes e pedagogicamente embasadas, abordando a busca por interpretabilidade (Z. Y. He et al., 2024) que tem dado origem a campos emergentes como o rastreamento de conhecimento explicável (XKT) (Bai et al., 2024).

A eficácia desta abordagem dual (KT + KG) é, contudo, intrinsecamente dependente da disponibilidade de grandes conjuntos de dados que registrem as interações dos alunos com exercícios mapeados a um grafo curricular. Datasets de referência como a série ASSISTMENTS (Feng et al., 2009; Pardos et al., 2014), o KDDcup (Stamper et al., 2010) e o EdNet (Choi & et al., 2020), entre outros, foram fundamentais para o avanço da área. No entanto, observa-se uma lacuna crítica no contexto educacional brasileiro: a inexistência de conjuntos de dados públicos que mapeiem interações de alunos com exercícios alinhados às competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil. Ministério da Educação, 2018). Essa carência representa um obstáculo significativo para o desenvolvimento de tecnologias educacionais personalizadas e adaptativas para a realidade do país.

Para endereçar esta lacuna, este trabalho propõe um *framework* metodológico de ponta a ponta para a construção de sistemas de tutoria adaptativa alinhados a currículos formais. O *framework* é instanciado e validado na recomendação de exercícios no domínio de matemática para o ensino médio, fundamentado na estrutura da BNCC (Brasil. Ministério da Educação, 2018), mas seus componentes, a modelagem ontológica do grafo curricular, o simulador cognitivo gerador de dados sintéticos, o protocolo de *benchmarking* de KT e a política de recomendação baseada na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), são desacoplados do domínio específico e do currículo de referência, permitindo a re-instanciação sobre outras disciplinas e currículos formais. A abordagem proposta foi concebida para superar o desafio da ausência de dados, permitindo o desenvolvimento de um motor de recomendação robusto que atue como um tutor personalizado, focado na performance preditiva, no alinhamento pedagógico via ZDP e na conformidade com a estrutura curricular adotada.

1.1 Pergunta de Pesquisa e Hipóteses

Considerando a ausência de datasets públicos alinhados a currículos formais como a BNCC e a necessidade de sistemas de tutoria adaptativa capazes de operar sobre a estrutura desses currículos, a investigação deste trabalho é guiada pela seguinte pergunta de pesquisa:

Como conceber um framework metodológico de ponta a ponta para a construção de sistemas de tutoria adaptativa alinhados a currículos formais, da modelagem do conhecimento à recomendação pedagogicamente embasada, na ausência de dados de interação pré-existent, e como validá-lo empiricamente em uma instancição concreta, como a do currículo de matemática do ensino médio da BNCC?

Subjacentes a esta questão, organizam-se duas hipóteses complementares.

Hipótese 1 (Viabilidade do *framework*).

A combinação de um grafo de conhecimento que modela formalmente um currículo, instanciado nesta monografia como a BNCC de matemática do ensino médio, do Dataset Sintético D de alta fidelidade que simula interações de alunos sobre este grafo, e de um modelo de Knowledge Tracing treinado sobre o Dataset Sintético D, fornece a base necessária para construir um motor de recomendação pedagogicamente coerente: que opera dentro dos limites da Zona de Desenvolvimento Proximal, preserva o alinhamento curricular ao restringir as recomendações ao fecho de pré-requisitos historicamente dominados, e exibe perfis estáveis de novidade e diversidade sem efeitos colaterais sistemáticos.

Hipótese 2 (Efeito diferencial da política ZDP).

Sobre o conjunto de questões curricularmente filtradas, a política de ponderação ZDP, ao concentrar a amostragem no centro do intervalo de dificuldade observável pedagogicamente ativo, aumenta a acurácia pedagógica esperada das recomendações em relação a uma política de ablação que amostra uniformemente do mesmo conjunto, sem degradar novidade curricular nem diversidade de sessão.

A Hipótese 1 sustenta a tese principal do trabalho: a contribuição como *framework* reprodutível e generalizável a outros domínios e currículos formais. A Hipótese 2 isola a contribuição local da política ZDP frente a uma ablação rigorosamente controlada, e é a hipótese cuja validação requer poder estatístico adequado, discutido criticamente à luz dos resultados no Capítulo 6 e da Seção 6.6 em particular. A operacionalização formal da Hipótese 2 corresponde à hipótese central H_a (alternativa) do protocolo experimental (Equação 5.12, Seção 5.2.8), reformulada nesta etapa introdutória em registro de alto nível.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho foi propor, desenvolver e validar um *framework* metodológico de ponta a ponta para a construção de sistemas de tutoria adaptativa alinhados a currículos formais. O *framework* articulou a modelagem de um grafo de conhecimento que representa formalmente as habilidades curriculares, a geração do Dataset Sintético D de interações sobre este grafo, o treinamento de modelos de Knowledge Tracing para diagnóstico do estado de conhecimento latente do aluno, e a operacionalização de um motor de recomendação baseado na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) que utilizou esse diagnóstico para promover avanço personalizado e dinâmico através da trilha curricular. O resultado final é uma arquitetura reproduzível e generalizável, acompanhada de um protocolo de avaliação pedagógica, instanciada e validada no domínio de matemática do ensino médio sob a BNCC.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram traçados:

1. Investigar e analisar as principais técnicas na construção de sistemas de tutoria adaptativa, com foco em modelos de KT e na representação de conhecimento curricular via grafos.
2. Modelar formalmente um currículo de matemática baseado na BNCC como um grafo de conhecimento, detalhando suas classes ontológicas, propriedades de dados e relações de pré-requisito entre as habilidades, em uma estrutura desacoplada do domínio que permita a re-instanciação do *framework* sobre outros currículos formais.
3. Desenvolver e implementar um método para gerar o Dataset Sintético D de alta fidelidade, que simule interações de alunos sobre o grafo de conhecimento, de forma a superar a lacuna de dados públicos no contexto brasileiro.
4. Conduzir um *benchmarking* de modelos de KT atuais, treinados no Dataset Sintético D , para selecionar o modelo de diagnóstico com maior capacidade preditiva e de generalização sob protocolo amostral usuário-disjunto.
5. Implementar um motor de recomendação adaptativa que integre o grafo de conhecimento e o modelo de KT selecionado, operacionalizando uma política pedagógica baseada na [ZDP](#) reformulada no espaço observável de probabilidades de acerto.
6. Avaliar o sistema final por meio de um protocolo experimental que compara, em pareamento por estudante, a política ponderada por ZDP contra uma ablação de amostragem uniforme sobre o mesmo conjunto curricularmente filtrado, mensurando

acurácia pedagógica, novidade curricular e diversidade de sessão, e diagnosticando o alinhamento do componente de KT no contexto operacional do motor.

1.3 Metodologia

Quanto à sua natureza, esta pesquisa caracteriza-se como aplicada, por voltar-se à construção de um artefato concreto, um *framework* metodológico para sistemas de tutoria adaptativa, com finalidade prática definida. Quanto à abordagem, é predominantemente quantitativa, uma vez que tanto a seleção do modelo de diagnóstico quanto a avaliação do motor de recomendação se apoiam em métricas objetivas e em testes de hipótese estatísticos. Quanto aos objetivos, assume caráter exploratório e descritivo, ao investigar a viabilidade de uma abordagem ainda pouco consolidada no contexto curricular brasileiro e ao descrever sistematicamente o comportamento do sistema resultante. Quanto aos procedimentos técnicos, articula uma fase de pesquisa bibliográfica, a revisão sistemática da literatura que fundamenta as decisões de projeto, com uma fase de pesquisa experimental, na qual o sistema é validado empiricamente sob um desenho pareado por estudante contra uma política de ablação controlada.

A metodologia desenvolvida estrutura-se como um *framework* de ponta a ponta, instanciado e validado sobre o currículo de matemática do ensino médio da BNCC. Primeiramente, o currículo é modelado como um grafo de conhecimento ontológico, no qual as habilidades são formalizadas como componentes de conhecimento (KCs) e enriquecidas com parâmetros pedagógicos de dificuldade e limiares de maestria. Sobre essa estrutura, um banco de questões reais é semanticamente mapeado aos KCs por meio de uma *pipeline* híbrida de processamento de linguagem natural (PLN), que combina enriquecimento por *Chain-of-Thought*, recuperação vetorial, re-ranqueamento e validação por Grandes Modelos de Linguagem (LLMs), seguida de curadoria pós-hoc. Diante da ausência de dados públicos de interação alinhados à BNCC, constrói-se o Dataset Sintético D , gerado por um simulador cognitivo que modela trilhas de aprendizagem de múltiplos perfis de alunos sobre o grafo, incorporando a curva do esquecimento, e complementado pelo algoritmo de Imputação Topológica via Monte Carlo (ITMC), que mitiga gargalos de cobertura curricular. Em seguida, conduz-se um *benchmarking* de modelos de *Knowledge Tracing* de estado da arte sobre o Dataset Sintético D , sob protocolo amostral usuário-disjunto, para eleger a arquitetura de diagnóstico de referência. Por fim, o modelo eleito é integrado a um motor de recomendação que opera a Zona de Desenvolvimento Proximal reformulada no espaço observável de probabilidades de acerto (apoiado em inferência de maestria via *ghost pass*, calibração isotônica e um ciclo de recomendação que equilibra avanço curricular e reforço de pré-requisitos), sendo o sistema final avaliado segundo as dimensões de acurácia pedagógica, novidade curricular e diversidade de sessão. O detalhamento de

cada etapa constitui o Capítulo 4.

1.4 Síntese dos Resultados Obtidos

A validação empírica do *framework*, detalhada no Capítulo 6, percorreu as quatro etapas de construção do sistema e produziu evidências favoráveis em cada uma delas. Na modelagem do conhecimento, o grafo curricular instanciado consolidou 82 KCs em um grafo acíclico dirigido de topologia em funil, com raiz única e progressão de dificuldade coerente com a profundidade topológica; os parâmetros pedagógicos atribuídos aos KCs, a saber, dificuldade média de 0,55, limiar de maestria médio de 0,87 e limiar de manutenção médio de 0,73, respeitaram integralmente as regras de *clipping* e histerese projetadas. O mapeamento semântico conectou o banco de questões reais aos KCs por meio da *pipeline* híbrida de processamento de linguagem natural, retendo 889 das 987 questões originais, com descarte de 9,9%, em 3.219 relações KC-questão, e a padronização logit IRT recentrou a distribuição de dificuldade condicional para o ponto médio do espaço de probabilidade, corrigindo o viés de ancoragem do modelo de linguagem.

A geração do Dataset Sintético D , conduzida sobre uma população de 800 agentes virtuais, produziu uma acurácia global de 62,89%, dentro da faixa de 60% a 70% esperada para um ambiente calibrado pela Zona de Desenvolvimento Proximal. A distribuição dos perfis comportamentais e dos parâmetros cognitivos amostrados aderiu às especificações projetadas, e quatro verificações matemáticas independentes, a saber, os limites assintóticos de *guess* e *slip*, a densidade da ZDP em torno de 0,70, o decaimento por esquecimento e o balanceamento estrutural do banco, confirmaram a fidelidade do simulador. O algoritmo ITMC mostrou-se eficaz na supressão dos gargalos topológicos de inanição curricular, restringindo as evasões por *starvation* a apenas 7 dos 800 agentes.

No *benchmarking* de *Knowledge Tracing*, sete arquiteturas foram retreinadas sob protocolo amostral usuário-disjunto e cinco sementes. O modelo LefoKT foi eleito como referência, com $RMSE_{p^*} = 0,08747$, integrando um grupo líder, composto por LefoKT, HCGKT, UKT e RobustKT, estatisticamente indistinguível entre si e cujo desempenho situa-se a poucos milésimos do teto teórico $BSS_{max} = 0,1059$ imposto pela variância irreduzível de Bernoulli do simulador, o que indica que a lacuna residual para a predição perfeita é majoritariamente estrutural, e não algorítmica. As arquiteturas recorrentes clássicas, DKT e DKT-Forget, e o SAINT+ ficaram significativamente atrás na métrica primária.

Na avaliação do motor de recomendação, conduzida em comparação pareada por estudante contra uma ablação de amostragem uniforme, o calibrador isotônico reduziu o erro de alinhamento ao alvo pedagógico em 48,7%. O sistema teve Acurácia Pedagógica elevada em valor absoluto, com $\overline{AP} \approx 0,98$, decomposta em 42,4% de acerto exato na ZDP e uma fração majoritária de erros de subestimação de pequena magnitude, o que configura falha

pelo lado pedagogicamente benigno; a Novidade Curricular confirmou os perfis esperados, com 0,944 em aprendizagem e 0,000 exato em revisão, e a Diversidade de Sessão manteve-se em regime moderado, em torno de 0,47, com as duas últimas métricas praticamente idênticas entre as políticas, atestando a ausência de efeitos colaterais da ponderação ZDP. Quanto às hipóteses, a Hipótese 1, relativa à viabilidade do *framework*, foi empiricamente sustentada, ao passo que a Hipótese 2, relativa ao efeito diferencial da política ZDP, exibiu direção coerente com a previsão teórica, com $\overline{\Delta}_{AP} = +5,69 \times 10^{-4}$ e $d_z = +0,15$, porém sem alcançar significância estatística sob a amostra de 50 estudantes, o que configura ausência de evidência conclusiva e não confirmação da hipótese nula.

Por fim, os diagnósticos auxiliares revelaram as duas limitações estruturais que orientam a continuidade da pesquisa: a compressão de *range* dinâmico do componente de *Knowledge Tracing*, que concentra suas predições em uma faixa estreita em torno de 0,77 independentemente da maestria real, e o gargalo de promoção curricular imposto pelo passo de busca em largura (BFS), que reduziu a razão de conclusão formal de 28%, segundo a verdade do Dataset Sintético *D*, para 8% pelo motor, restringindo a atuação efetiva do sistema a 32 dos 82 KCs do grafo. Estas constatações, analisadas em profundidade no Capítulo 6 e retomadas nas conclusões, delimitam os vetores mais promissores de evolução do trabalho.

1.5 Estrutura do trabalho

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, abordando os conceitos essenciais para o entendimento do estudo, como sistemas de recomendação educacionais, representação de conhecimento via grafos de conhecimento e modelos de *Knowledge Tracing*. O Capítulo 3 discute os trabalhos relacionados, analisando as principais arquiteturas e abordagens da literatura para a recomendação de exercícios e tutoria adaptativa. O Capítulo 4 é dedicado à descrição detalhada do *framework* metodológico proposto, estruturado em quatro macro-fases de construção: (1) a modelagem do grafo curricular (instanciado sobre a BNCC) e parametrização dos KCs; (2) o mapeamento semântico do banco de questões via pipeline híbrida de PLN; (3) a construção do Dataset Sintético *D* (incluindo a modelagem cognitiva, o algoritmo ITMC de imputação topológica e a consolidação final do conjunto de interações); e (4) a implementação do motor de recomendação baseado na Zona de Desenvolvimento Proximal. O Capítulo 5 detalha o protocolo experimental que sustenta a validação empírica do *framework* em suas duas frentes: o *benchmarking* de modelos de *Knowledge Tracing* sobre o Dataset Sintético *D* e a avaliação pedagógica do motor de recomendação via comparação pareada contra uma ablação uniforme, com mensuração de acurácia pedagógica, novidade curricular e diversidade de sessão. Em seguida, o Capítulo 6 apresenta e discute

os resultados obtidos, com foco no *benchmarking* comparativo dos modelos de *Knowledge Tracing* e na análise do comportamento do sistema de recomendação final, incluindo a discussão crítica das hipóteses sob o regime amostral adotado. Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho, sintetizando as contribuições, apontando as limitações estruturais identificadas e delineando direções de evolução da pesquisa.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, são apresentados os conceitos teóricos que fundamentam este trabalho. A revisão inicia com os sistemas de recomendação (Seção 2.1) e suas aplicações educacionais (Seção 2.1.2). Posteriormente, detalham-se as abordagens de representação de conhecimento estruturado (Seção 2.2), com ênfase nos grafos de conhecimento (Seção 2.2.2) e sua aplicação na modelagem da BNCC (Seção 2.2.3). Em seguida, descrevem-se os modelos de KT (Seção 2.3), núcleo do diagnóstico cognitivo proposto. Por fim, discute-se a Zona de Desenvolvimento Proximal (Seção 2.4.1), que fundamenta a política de recomendação pedagógica do sistema.

2.1 Sistemas de Recomendação

Sistemas de Recomendação (RS) são sistemas de filtragem de informação que visam prever a preferência de um usuário por um conjunto de itens. Segundo o survey de Bobadilla et al. (2013), esses sistemas operam coletando dados de usuários, seja de forma explícita (e.g., avaliações) ou implícita (e.g., comportamento), para alimentar algoritmos de predição. As abordagens clássicas, como a filtragem colaborativa e a Baseada em Conteúdo, são frequentemente combinadas em arquiteturas híbridas para superar desafios como acurácia, *cold-start* e a esparsidade (Batmaz et al., 2019).

Com a evolução das técnicas de recomendação, de acordo com o survey de J. Lu et al. (2015), o foco da pesquisa se expandiu para o desenvolvimento de aplicações em áreas como e-commerce, e-tourism, e-government e, de forma notável, e-learning, recomendando itens que vão desde produtos e músicas até materiais de aprendizagem e recursos educacionais. O princípio fundamental por trás destas diversas aplicações é a sugestão de itens novos e relevantes que se alinhem com as preferências do usuário por itens e suas interações (Y. Li et al., 2024).

2.1.1 Abordagens Clássicas: Filtragem Colaborativa e Baseada em Conteúdo

A Filtragem Colaborativa é uma abordagem fundamental que opera sob a premissa de que usuários com preferências similares no passado terão interesses similares no futuro. Esta técnica se divide em abordagens baseadas em memória (*memory-based*), que calculam similaridades diretamente sobre a matriz de interações (Ramadhan & Setiawan, 2022), e baseadas em modelo (*model-based*), que aprendem representações latentes de usuários e itens através de técnicas como fatoração de matrizes (Koren et al., 2009) e redes neurais profundas (X. He et al., 2017). Apesar de sua vasta aplicação, a CF enfrenta desafios intrínsecos como a esparsidade de dados e a complexidade computacional.

Em contrapartida, a recomendação Baseada em Conteúdo (CB) trata a recomendação como um problema de classificação por usuário, aprendendo a partir das características (*features*) dos próprios itens. A extração dessas *features* é uma área de pesquisa ativa, utilizando redes neurais para capturar atributos de conteúdo multimídia (Deldjoo et al., 2018; Deldjoo et al., 2020) e técnicas de Processamento de Linguagem Natural para enriquecer perfis de itens textuais (Van Dat et al., 2022; Yang, Zhu & Li, 2022). Embora sua independência em relação a outros usuários seja uma vantagem, sua principal limitação é a tendência à superespecialização (Adomavicius & Tuzhilin, 2005).

Para superar as limitações das abordagens clássicas, a pesquisa em RS evoluiu para o uso de abordagens híbridas que integram múltiplas fontes de informação, frequentemente utilizando aprendizado profundo para uma fusão de dados contextuais e de conteúdo (Kiran et al., 2020; Luo et al., 2022; Polignano et al., 2021). Uma outra vertente desta integração é a dos sistemas baseados em conhecimento, que utilizam conhecimento de domínio estruturado. Dentro desta categoria, sistemas que empregam grafos de conhecimento ganharam atenção significativa por sua capacidade de prover recomendações mais precisas e explicáveis, mitigando problemas clássicos como o *cold-start* e a esparsidade de dados (Anelli et al., 2021; Guo, 2022; Xia, 2021).

A Tabela 2.1 apresenta um resumo comparativo, destacando as fontes de informação, vantagens e desafios de cada uma dessas abordagens.

Tabela 2.1: Comparativo das Abordagens de sistemas de recomendação.

Abordagem	Fonte de Informação Principal	Vantagens	Desafios Principais
Filtragem colaborativa	Matriz de interações (usuário-item)	Serendipidade, independência do conteúdo do item	Cold-start, esparsidade de dados, escalabilidade
Baseada em Conteúdo	Atributos e características dos itens	Independência de outros usuários, recomendação de itens novos	Superespecialização ("bolha"), necessidade de extração de features
Híbrida	Múltiplas fontes (e.g., CF + Conteúdo)	Mitigação das desvantagens dos métodos puros, maior robustez	Maior complexidade de implementação e ajuste
Baseada em Conhecimento	Conhecimento de domínio (e.g., grafo de conhecimento)	Mitigação do cold-start, capacidade de explicação, precisão	Custo de modelagem e manutenção do conhecimento de domínio

2.1.2 Sistemas de Recomendação Educacionais (ERS)

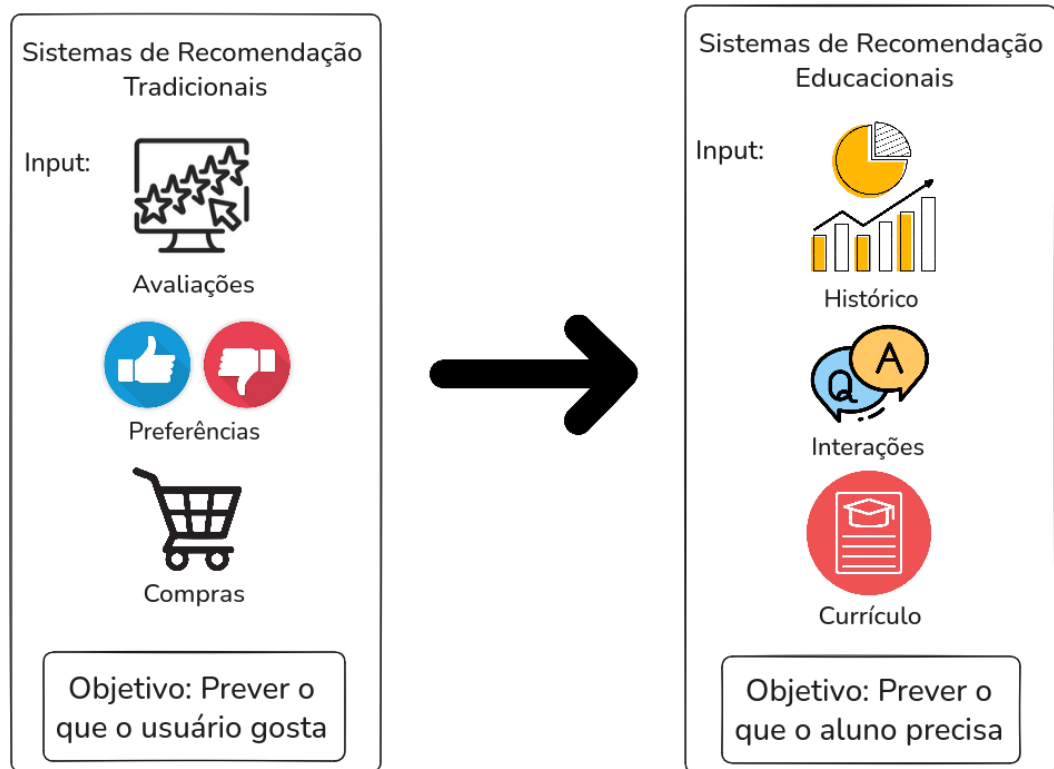


Figura 2.1: Diagrama conceitual da mudança de paradigma entre RS e ERS.

A aplicação de sistemas de recomendação no domínio educacional, dando origem aos ERS, representa uma mudança de paradigma. Nestes sistemas, o objetivo muda da predição de preferência para a otimização do processo de ensino e aprendizagem. Conforme destacado na literatura (Da Silva et al., 2023), os ERS desempenham um papel importante tanto para educadores, auxiliando no planejamento e na filtragem de recursos, quanto para os

alunos (Maria et al., 2019). Para os estudantes, o principal benefício reside na capacidade do sistema de reconhecer suas necessidades e restrições educacionais para indicar conteúdo personalizado, o que pode contribuir diretamente para seu desempenho acadêmico e motivação (Garcia-Martinez & Hamou-Lhadj, 2013). Essa mudança de foco, da predição de preferência para a otimização do processo de ensino-aprendizagem, é visualmente sintetizada na Figura 2.1, que contrasta as entradas e objetivos dos RS tradicionais com os dos ERS.

Dessa forma, a recomendação deixa de ser uma questão de "o que o aluno vai gostar" para se tornar "o que o aluno precisa aprender em seguida" para avançar em uma trilha curricular de forma eficaz. A necessidade de tais sistemas é impulsionada pela crescente integração de tecnologias digitais como mediadoras do processo de ensino (Becker, 1993). Em um ambiente com abundância de recursos, o ERS guia o estudante, evitando a sobrecarga de informação. É essa mudança de foco, da preferência para a pedagogia, que introduz um conjunto de desafios únicos, discutidos na seção subsequente.

2.1.3 Desafios em ERS: Representação do Currículo, Mapeamento de Conceitos e Avaliação Pedagógica

A aplicação de sistemas de recomendação ao domínio educacional introduz desafios fundamentalmente pedagógicos. A principal dificuldade reside em alinhar as recomendações às necessidades de cada aluno (Cazella et al., 2014), uma tarefa complexa devido à vasta diversidade de fatores que influenciam o aprendizado (Verbert et al., 2012).

Para navegar por essa complexidade, é necessário que o sistema compreenda o domínio de conhecimento, o que demanda uma representação formal do currículo. A literatura aponta que a modelagem da estrutura curricular em KGs melhora a qualidade e a relevância das recomendações (Abu-Salih & Alotaibi, 2024), sendo aplicada para estruturar domínios de conhecimento (Yang, Zhu & Jian, 2022), recomendar trilhas de aprendizado (Hubert et al., 2022) e recursos de aprendizagem online (Tarus et al., 2017) utilizando ontologias. Sem este "mapa" curricular, as recomendações correm o risco de serem pedagogicamente incoerentes.

Adicionalmente, a avaliação da eficácia de um ERS é um desafio, pois métricas de acurácia preditiva são insuficientes para mensurar o impacto no aprendizado do aluno (Erhardt et al., 2015). A necessidade de personalização, de uma modelagem curricular formal e de uma avaliação pedagógica convergem para a solução fundamental de se construir uma base de conhecimento explícita e estruturada, tópico abordado na próxima seção.

2.2 Representação de Conhecimento Estruturado

Conforme discutido, a superação dos desafios pedagógicos em ERS demanda a criação de uma base de conhecimento explícita. A solução para este problema reside no campo da Representação de Conhecimento Estruturado, que oferece os formalismos necessários para modelar um domínio de forma semântica. Dentro deste campo, as ontologias surgem como uma tecnologia fundamental, sendo utilizadas para capturar o conhecimento de um domínio de maneira genérica e reutilizável (Chandrasekaran et al., 1999). No contexto de e-learning, as ontologias são amplamente empregadas para diversas finalidades, como a representação do próprio domínio de conhecimento, a descrição enriquecida de conteúdo de aprendizagem, a personalização de recomendações e o planejamento curricular (Al-Yahya et al., 2015; Kizilkaya et al., 2007). A recente revisão sistemática de Abu-Salih e Alotaibi (2024) reforça a importância de estruturas baseadas em conhecimento, como os grafos de conhecimento, que são construídos sobre princípios ontológicos para aprimorar a qualidade e a eficácia de aplicações educacionais.

2.2.1 Ontologias

A solução para a falta de estrutura nas abordagens clássicas reside na Representação de Conhecimento, que encontra seu pilar nas ontologias. O termo, de origem grega "estudo do ser" (*onto* + *logia*), é aplicado na ciência da computação para definir uma especificação formal e explícita de uma conceitualização, representando um domínio através de hierarquias de conceitos, propriedades e relações (Chandrasekaran et al., 1999; Stancin et al., 2020). Conforme aponta Grivokostopoulou et al. (2019), o sucesso das ontologias na educação se deve à sua capacidade de formular a representação de um domínio de aprendizagem, especificando todos os seus conceitos e as relações entre eles. Essa estrutura formal é a base para a construção de modelos de conhecimento mais complexos e aplicados, como os grafos de conhecimento.

2.2.2 Grafos de Conhecimento em Domínios Educacionais

Evoluindo dos princípios ontológicos, os KGs surgiram como uma tecnologia para a representação de conhecimento estruturado. Conforme a revisão sistemática de Abu-Salih e Alotaibi (2024), os KGs são cada vez mais reconhecidos por seu papel essencial em enriquecer o aprendizado personalizado, o planejamento curricular, o mapeamento de conceitos e os sistemas de recomendação educacionais. Na área de aprendizado personalizado e adaptativo, os KGs são empregados para organizar informações sobre os alunos, suas características e seu progresso, permitindo uma adaptação mais eficaz da instrução (S. Zhang et al., 2023). Um exemplo notável é o sistema de tutoria adaptativa inteligente proposto por Y. Lu et al. (2021), que oferece suporte de aprendizado customizado para a

educação matemática. Adicionalmente, KGs são fundamentais para o planejamento curricular, oferecendo uma abordagem orientada a dados para alinhar objetivos de aprendizagem, conteúdo e estratégias de avaliação (Abu-Salih & Alotaibi, 2024), sendo utilizados para estruturar o conhecimento de domínios específicos (Yang, Zhu & Jian, 2022) e para recomendar currículos universitários (Hubert et al., 2022).

A capacidade dos KGs de representar visualmente relações complexas é explorada no mapeamento de conceitos, onde a visualização de mapas conceituais ajuda os alunos a organizar a informação, promovendo uma compreensão mais profunda e a retenção do conhecimento (Z. Li et al., 2023; Tang et al., 2023). Essa representação estruturada do conhecimento serve como a espinha dorsal para funcionalidades mais avançadas, como busca semântica, sistemas de pergunta-resposta (QA) e sistemas de recomendação. A riqueza semântica dos KGs permite que sistemas de QA compreendam as perguntas dos usuários e forneçam respostas relevantes a partir de dados estruturados (Fang et al., 2023; Nguyen et al., 2023). Especificamente no domínio da educação matemática, a representação de conhecimento tem sido explorada para construir sistemas de gerenciamento que preservam o conhecimento de professores especialistas na resolução de problemas, utilizando uma combinação de ontologias e modelos de raciocínio baseados em casos para estruturar o conhecimento matemático (Martínez-Ramírez et al., 2018).

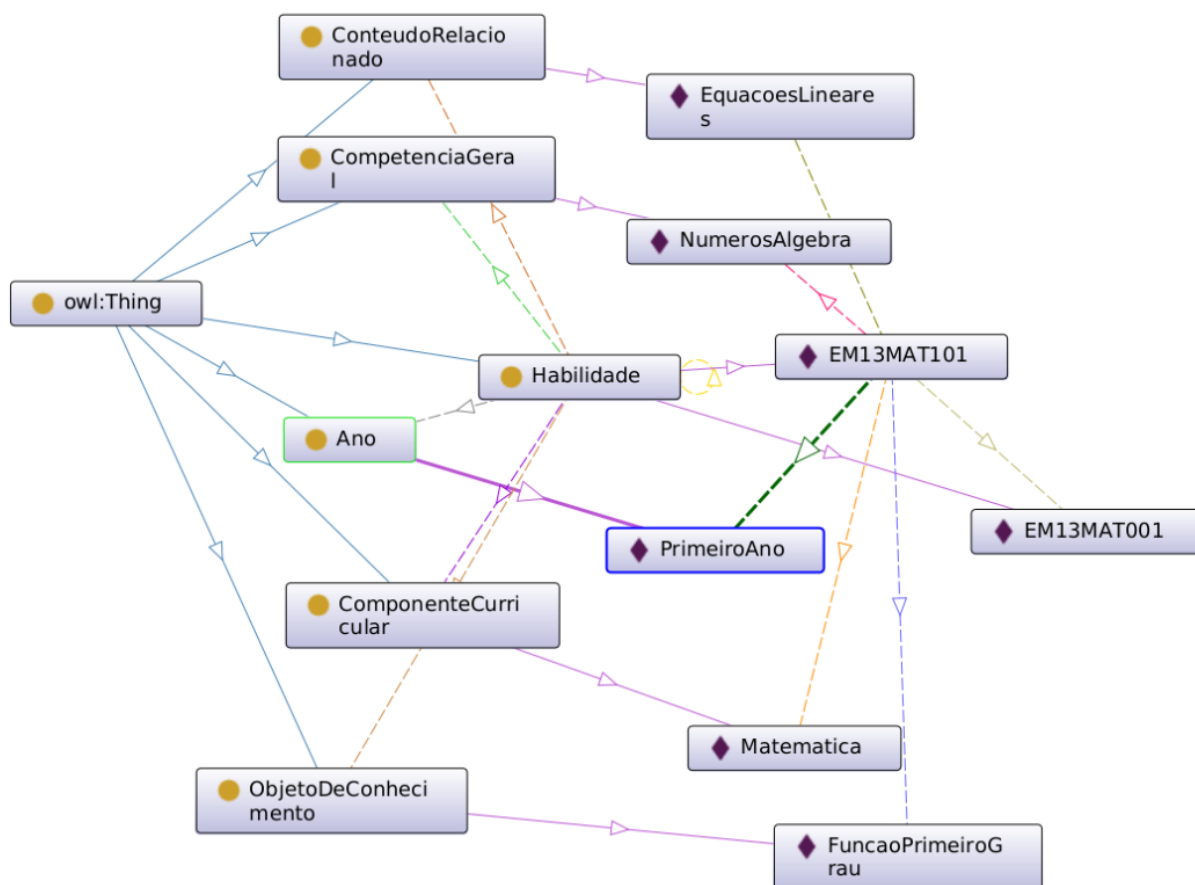


Figura 2.2: Exemplo de um fragmento do grafo de conhecimento da BNCC modelado no software Protégé.

A Figura 2.2 exhibe as **classes** ontológicas (círculos laranjas, e.g., **Habilidade**), os **indivíduos** que as instanciam (losangos roxos, e.g., **EM13MAT101**) e as **relações** (arestas coloridas) que os conectam, como a associação da habilidade ao Objeto de Conhecimento **FuncaoPrimeiroGrau** e ao componente curricular de **Matematica**. Para ilustrar a aplicação prática destes conceitos, a Figura 2.2 apresenta um fragmento do grafo de conhecimento desenvolvido para este trabalho.

2.2.3 A BNCC e o Planejamento Curricular

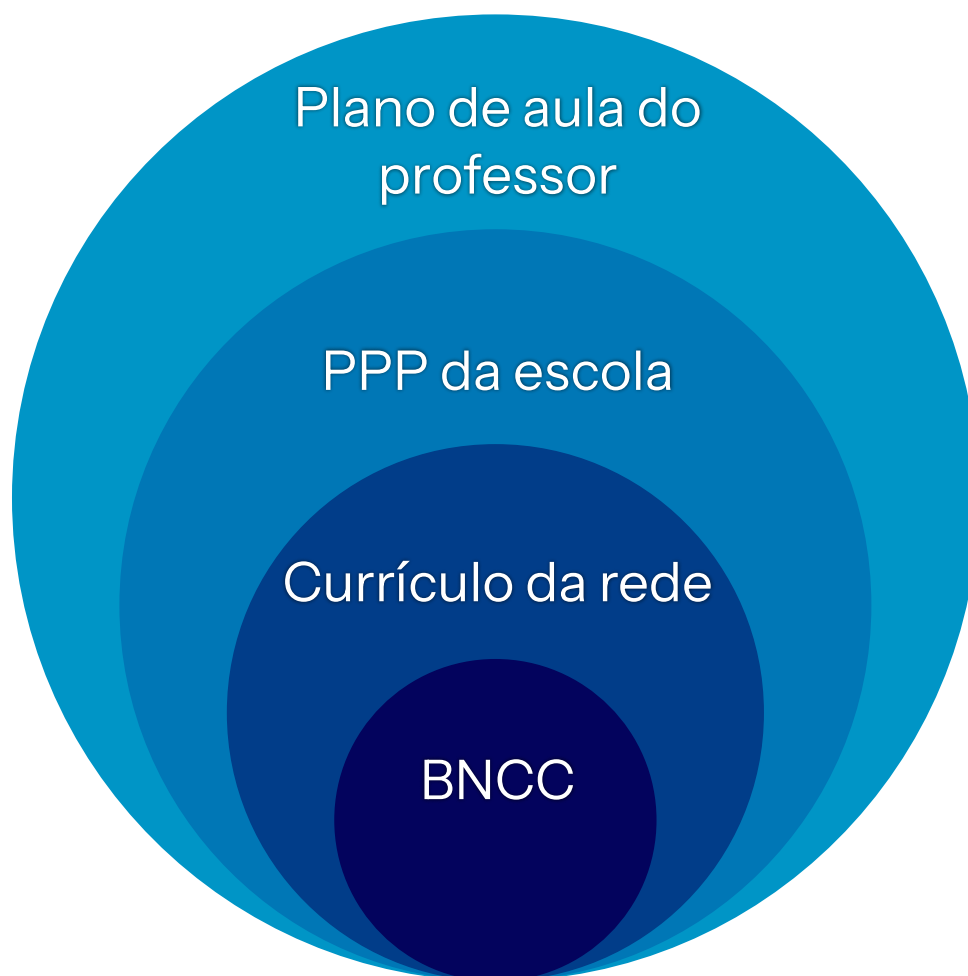


Figura 2.3: Diagrama de Euler representando a estrutura hierárquica do planejamento educacional no Brasil, da BNCC ao plano de aula.

Conforme discutido, a modelagem do planejamento curricular e mapeamento de conceitos é uma aplicação central dos grafos de conhecimento em domínios educacionais (Abu-Salih & Alotaibi, 2024). No Brasil, o planejamento curricular é um processo hierárquico e multinível que se desdobra desde uma base nacional até a prática em sala de aula, conforme ilustrado pelo Diagrama de Euler da Figura 2.3. Na base desta hierarquia está a BNCC, o documento normativo que estabelece as aprendizagens essenciais para toda a educação básica no país (Brasil. Ministério da Educação, 2018). A BNCC, contudo, não é um currículo em si; ela define os objetivos, o "destino" da jornada educacional, enquanto os Currículos da Rede (estaduais e municipais) traçam as "rotas" para alcançar esses objetivos, adaptando-os às realidades locais. Em níveis mais granulares, o Projeto Político-Pedagógico (PPP) define a identidade e o plano de ação de cada escola, e o Plano de Aula representa o roteiro diário do professor.

Neste domínio, a modelagem do grafo de conhecimento pode se concentrar nos dois níveis

mais abrangentes da hierarquia curricular: a BNCC e o Currículo da Rede. Especificamente, pode-se tomar como exemplo o Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense. A escolha por um referencial deste nível viabiliza a delimitação de um escopo que permite a construção de uma prova de conceito baseada em um documento real. As diretrizes e os detalhamentos deste currículo estadual estão dispostos em três documentos principais: o Caderno 1, que estabelece as disposições gerais (Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, 2020); o Caderno 2, que detalha a Formação Geral Básica (Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, 2021a); e o Caderno 3, que apresenta os Itinerários Formativos (Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, 2021b).

2.2.4 Estrutura de Competências e Habilidades em Matemática

A estrutura da área de "Matemática e suas Tecnologias", tanto na BNCC quanto no Currículo Base Catarinense, é um exemplo ideal de um domínio que se beneficia da modelagem como um grafo de conhecimento. O currículo não é apresentado como uma lista linear de conteúdos, mas como uma rede de Competências e Habilidades interconectadas, que são materializadas por meio de Objetos de Conhecimento e Conceitos Estruturantes. A Tabela 2.2 define e exemplifica esses componentes.

Tabela 2.2: Definição dos Componentes Curriculares da BNCC para a Área de Matemática.

Componente	Definição (Resumida)	Exemplo (da Matemática)
Competência	Mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas.	"Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas..."
Habilidade	Aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos. São associadas às competências.	"(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação..."
Objeto de Conhecimento	Conteúdos, conceitos e processos que são mobilizados para o desenvolvimento da habilidade.	"Tabelas e gráficos"
Conceito Estruturante	Eixo temático ou grande ideia que organiza e articula os objetos de conhecimento ao longo da escolaridade.	"Probabilidade, estatística e matemática financeira"

Essa organização essencialmente conectada em rede, com suas ricas relações semânticas de

dependência e pré-requisito, é justamente o que os grafos de conhecimento são projetados para capturar. Para a extração dessas entidades e relações, o Caderno 2 - Formação Geral Básica (Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, [2021a](#)) é a fonte primária, pois detalha as habilidades da BNCC, habilidades adicionais demandadas pelo Estado e sua conexão com os Objetos de Conhecimento, fornecendo a base para construir um mapa curricular pronto para uso computacional.

2.3 Rastreamento de Conhecimento

Uma vez estabelecido um mapa do conhecimento curricular por meio de um grafo de conhecimento, a determinação da proficiência do aluno neste domínio torna-se imprescindível para a adaptação pedagógica. Esta questão é abordada pelo rastreamento de conhecimento, uma área de pesquisa que se dedica a modelar, representar e quantificar o estado de conhecimento latente e dinâmico de um aluno a partir da análise de seu histórico de interações ao longo do tempo (Abdelrahman et al., [2023](#)).

O conceito, introduzido originalmente em um relatório técnico sobre modelagem cognitiva e tutoria inteligente (Anderson et al., [1986](#); Anderson et al., [1990](#)), fundamentou as primeiras tentativas de modelagem do aluno, que seguiram abordagens de inferência Bayesiana para estimar probabilidades de conhecimento (Baker et al., [2008](#); Villano, [1992](#)).

Essencialmente, o problema do KT consiste em, dada uma sequência de interações históricas, prever a performance de um aluno em uma atividade futura.

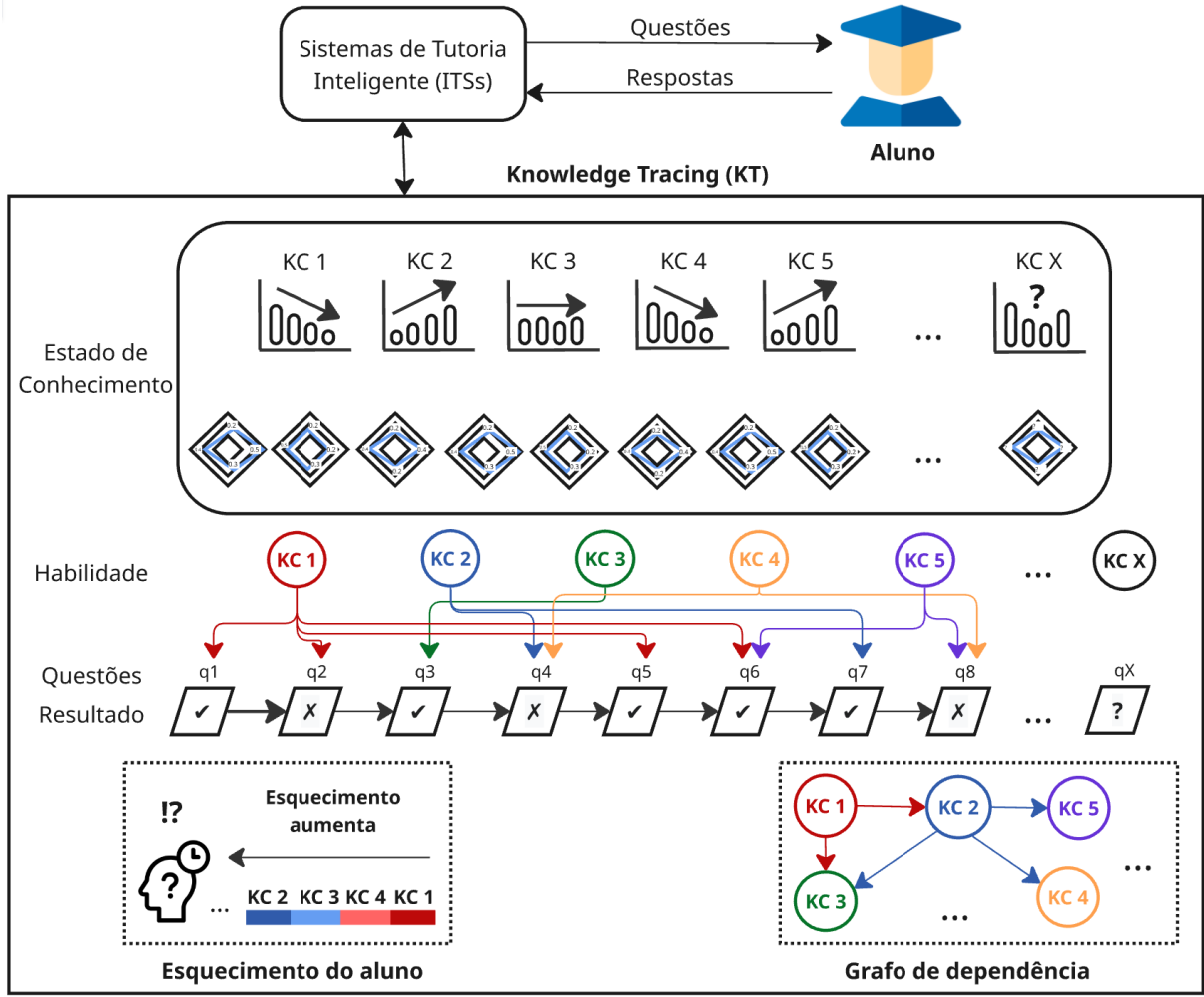


Figura 2.4: Interação do rastreamento do conhecimento em ITS. Adaptado de Abdelrahman et al. (2023).

A tarefa de rastrear o conhecimento exige a consideração de múltiplos fatores. Um modelo de KT deve lidar com a natureza multifacetada das questões, onde uma única atividade pode demandar a aplicação de diversas habilidades, também denominadas *knowledge components* na literatura (Q. Liu, Shen et al., 2021). Adicionalmente, as relações de dependência e pré-requisito entre as habilidades são cruciais para um diagnóstico preciso, e o fenômeno do esquecimento, que leva ao decaimento do conhecimento ao longo do tempo, também deve ser modelado (Ebbinghaus, 2013).

A Figura 2.4 ilustra a interação de um aluno com um sistema de tutoria inteligente (ITS) e como, a partir desse histórico, um modelo de KT pode ser treinado. Este modelo é capaz de inferir o estado de conhecimento latente do aluno, considerando o histórico de interações e potencialmente componentes como grafos de dependência entre KCs e comportamento de esquecimento, para fornecer um diagnóstico mais preciso.

Para formalizar o escopo do processo de KT, a Tabela 2.3 delinea as entradas e saídas de um modelo de KT. A principal aplicação dessas saídas, e o foco deste trabalho, é em

ERS, onde o objetivo é duplo: (1) estimar o estado de conhecimento do aluno via KT e (2) recomendar recursos de aprendizagem condicionados a este estado diagnosticado.

Tabela 2.3: Escopo Formal de um Modelo de Knowledge Tracing.

Entradas ($\mathcal{I}$): Informações fornecidas ao modelo	
Sequência de Interações	$\mathcal{I} = \{(q_t, a_t)\}_{t=1}^N$, onde q_t é a questão e $a_t \in \{0, 1\}$ é a corretude da resposta.
Mapeamento Q-Matrix	$M : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{K})$, onde $\mathcal{Q}$ é o conjunto de questões e $\mathcal{K}$ o de habilidades.
(Opcional) Info. Temporais	$\mathcal{T}$ (e.g., tempo de resposta, intervalo entre interações).
Saída ($\mathcal{O}$): Informação gerada pelo modelo	
Predição de Performance	Um vetor de probabilidades $\mathbf{p}_{N+1} \in [0, 1]^{ \mathcal{K} }$, onde cada componente $p_{N+1,i}$ representa a probabilidade estimada de um aluno responder corretamente a uma futura questão que avalie a habilidade $k_i \in \mathcal{K}$.

2.3.1 Modelos Clássicos e Probabilísticos

Historicamente, a pesquisa em KT se desenvolveu em duas linhas principais: o rastreamento de conhecimento bayesiano (*Bayesian Knowledge Tracing* - BKT) e os Modelos de Análise Fatorial (*Factor Analysis Models*). Conforme Abdelrahman et al. (2023), essas abordagens tradicionais estabeleceram os fundamentos para a modelagem do conhecimento do aluno. O BKT, em particular, foi motivado pelo conceito de mastery learning (A. Corbett, 2000) e emprega Modelos Ocultos de Markov (Baker et al., 2008) juntamente com Redes Bayesianas (Villano, 1992) para rastrear o estado de conhecimento do aluno. O modelo BKT padrão, introduzido por A. T. Corbett e Anderson (1994), representa o conhecimento de um aluno sobre uma habilidade como um estado binário latente (aprendido ou não aprendido). A cada nova interação, a probabilidade de o aluno ter aprendido a habilidade (L_n) é atualizada com base em sua resposta observada (a_n), utilizando o Teorema de Bayes, expresso na Equação 2.1.

$$P(L_n|a_n) = \frac{P(a_n|L_n)P(L_n)}{P(a_n)} \quad (2.1)$$

O modelo BKT padrão é parametrizado por quatro probabilidades fundamentais, descritas na Tabela 2.4, que coordenam a transição entre estados e a performance observada. A probabilidade inicial, $p(L_0)$, representa o conhecimento prévio do aluno. A probabilidade de transição, $p(T)$, modela a aprendizagem a cada oportunidade. Para simular a falibili-

dade humana, o modelo incorpora a probabilidade de erro por descuido, $p(S)$ (*slip*), e a probabilidade de acerto casual, $p(G)$ (*guess*).

Tabela 2.4: Parâmetros do Modelo BKT Padrão, adaptado de Abdelrahman et al., 2023.

Parâmetro	Descrição
$p(L_0)$	Probabilidade de a habilidade já ser conhecida antes da primeira interação.
$p(T)$	Probabilidade de transição do estado "não aprendido" para "aprendido".
$p(S)$	Probabilidade de errar uma questão mesmo conhecendo a habilidade (<i>slip</i>).
$p(G)$	Probabilidade de acertar uma questão sem conhecer a habilidade (<i>guess</i>).

A segunda linha de pesquisa tradicional, os Modelos de Análise Fatorial, é teoricamente suportada pela Teoria de Resposta ao Item (IRT) (Embretson & Reise, 2013). A ideia central da IRT é estimar a probabilidade de acerto de um aluno em um item como uma função logística que considera parâmetros tanto do aluno quanto do item. O modelo mais simples, o modelo de Rasch (1993) (1PL), considera apenas a proficiência do aluno (θ_i) e a dificuldade do item (b_j), conforme a Equação 2.2.

$$P(a_{ij} = 1 | \theta_i, b_j) = \frac{e^{(\theta_i - b_j)}}{1 + e^{(\theta_i - b_j)}} \quad (2.2)$$

Modelos mais complexos, como o 4PL, expandem essa formulação adicionando parâmetros para a discriminação do item (a_j), a probabilidade de acerto casual (c_j) e a probabilidade de erro (d_j) (Barton & Lord, 1981). A forma geral de um modelo 4PL é apresentada na Equação 2.3.

$$P(a_{ij} = 1 | \theta_i, a_j, b_j, c_j, d_j) = c_j + (d_j - c_j) \frac{e^{a_j(\theta_i - b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta_i - b_j)}} \quad (2.3)$$

A IRT foi estendida em várias direções, como em modelos hierárquicos e temporais (HIRT e TIRT) (Wilson et al., 2016). Outros modelos nesta família incluem o Modelo de Fator Aditivo (AFM) (Cen et al., 2008), originado da Análise de Fatores de Aprendizagem (LFA) (Cen et al., 2006), a Análise de Fatores de Performance (PFA), que o aprimora (Pavlik et al., 2009), e as máquinas de rastreamento de conhecimento (KTM), que generalizam Máquinas de Fatorização para o KT (Vie & Kashima, 2019) e extensões para modelar o esquecimento, como o KTM-DLF (Gan et al., 2020).

2.3.2 Modelos Baseados em Aprendizado Profundo

Avançando sobre os modelos clássicos, a área de rastreamento de conhecimento foi inovada pela chegada do Aprendizado Profundo (*Deep Learning*). O trabalho que iniciou esta nova frente foi o Deep Knowledge Tracing (DKT), proposto por Piech et al. (2015),

que foi o primeiro a aplicar Redes Neurais Recorrentes (RNNs) (Lipton et al., 2015), especificamente a arquitetura Long Short-Term Memory (LSTM) (Hochreiter & Schmidhuber, 1997), para modelar a sequência de interações do aluno. O DKT estabeleceu um novo estado da arte e demonstrou o potencial de arquiteturas profundas para capturar as dinâmicas temporais complexas do aprendizado. A partir deste marco, a pesquisa em *Deep Learning Knowledge Tracing* (DLKT) se diversificou em várias famílias de modelos, conforme a taxonomia apresentada na revisão de Abdelrahman et al. (2023), que exploram diferentes mecanismos para aprimorar a representação do conhecimento do aluno.

Uma das primeiras evoluções do DKT foram os Modelos Aumentados por Memória (*Memory-Augmented*). Inspirados por redes neurais com memória externa (Graves et al., 2014), buscam rastrear a maestria em habilidades individuais de forma mais explícita. A abordagem emprega uma memória do tipo chave-valor (*key-value*) (Miller et al., 2016), com uma matriz "chave" estática para representações de habilidades e uma matriz "valor" dinâmica para o nível de maestria. O **DKVMN** (*Dynamic Key-Value Memory Network*) foi pioneiro nesta arquitetura (J. Zhang et al., 2017), e o **SKVMN** (*Sequential Key-Value Memory Network*) a aprimorou com uma LSTM modificada para capturar dependências sequenciais e atualizar o conhecimento com base em interações relevantes (Abdelrahman & Wang, 2019).

Outra vertente foca nos Modelos Cientes de Texto (*Text-Aware*), que exploram a riqueza semântica dos enunciados das questões para aprimorar a predição. O **EERNN** (*Exercise-Enhanced RNN*) foi pioneiro, usando uma Bi-LSTM para extrair representações vetoriais do texto da questão, combinando-as com o histórico via outra LSTM (Su et al., 2018). O **EKT** (*Exercise-Aware KT*) estendeu essa ideia, incorporando informações de múltiplas habilidades por questão e utilizando uma rede de memória para quantificar o impacto de cada exercício na maestria (Q. Liu, Huang et al., 2021).

Seguindo os avanços em Processamento de Linguagem Natural, os Modelos Atencionais surgiram, inspirados pela arquitetura Transformer (Vaswani et al., 2017). O mecanismo de atenção permite que o modelo pondere a importância de interações passadas de forma dinâmica, superando uma limitação do DKT que tratava todo o histórico com igual relevância. O modelo **SAKT** (*Self-Attentive Knowledge Tracing*) foi o primeiro a incorporar auto-atenção (Pandey & Karypis, 2019), enquanto o **AKT** (*Attentive Knowledge Tracing*) introduziu uma atenção monotônica para implicitamente modelar o esquecimento (Ghosh et al., 2020). O **SAINT** (*Separated Self-Attentive Interaction Network for Knowledge Tracing*) aplicou a arquitetura completa de *encoder-decoder* do Transformer, separando as sequências de questões e respostas (Choi et al., 2020), sendo posteriormente estendido no **SAINT+** para incluir *features* temporais (Shin et al., 2021). Outras variações notáveis incluem o **RKT**, que combina auto-atenção com relações extraídas do texto dos exercícios (Pandey & Srivastava, 2020), o **CKT**, que utiliza redes convolucionais

(S. Shen et al., 2020), e o **CoKT**, que incorpora informações de alunos pares de forma colaborativa (Long et al., 2022).

Outra vertente do DLKT explora as estruturas relacionais dos dados educacionais, como a dependência entre Habilidades (KCs), por meio de Redes Neurais de Grafos (GNNs) (Scarselli et al., 2009). Conforme Abdelrahman et al. (2023), esses Modelos Baseados em Grafo alavancam tais estruturas para aprimorar o diagnóstico. Abordagens pioneiras como o **GKT** (Nakagawa et al., 2019), o **GIKT** (Yang et al., 2020) e o **SKT** (Tong et al., 2020) estabeleceram as bases, modelando as relações KC-KC e questão-KC. O estado da arte nesta categoria é representado pelo **HCGKT**, que integra atenção hierárquica, aprendizado contrastivo e convoluções de grafo para uma modelagem mais precisa da performance do aluno (Z. Huang & Liu, 2025). A principal vantagem desta família de modelos reside em sua adequação natural a domínios que possuem uma estrutura relacional explícita, como um currículo com dependências entre habilidades, tornando-os promissores para aplicações em contextos de aprendizado estruturado.

2.3.3 A Modelagem do Esquecimento em Knowledge Tracing

Para que um sistema de tutoria adaptativa seja eficaz a longo prazo, seu modelo de diagnóstico deve ser capaz de capturar não apenas o aprendizado, mas também o esquecimento. Estudos em psicologia cognitiva demonstram que o esquecimento é um aspecto fundamental para a estimativa precisa do estado de conhecimento de um aluno, pois a maestria em uma habilidade tende a decair com o tempo desde a última prática (Pavlik Jr. & Anderson, 2005; Sense et al., 2016). O trabalho de Hermann Ebbinghaus formalizou este fenômeno na Teoria da Curva de Aprendizagem (*learning curve theory*), que descreve duas forças que atuam sobre a retenção da memória: o efeito de aprendizado (o ganho de conhecimento com a prática) e o efeito de esquecimento (o decaimento do conhecimento com o desuso) (Ebbinghaus, 2013; Murray et al., 2013). A Figura 2.5 ilustra visualmente a curva de esquecimento, mostrando como a retenção do conhecimento diminui ao longo do tempo e como revisões espaçadas podem mitigar esse declínio, reforçando a memória. Em um ambiente de e-learning, onde os intervalos entre as sessões de estudo podem variar significativamente, modelar o esquecimento se torna um requisito para um diagnóstico realista.

Para capturar matematicamente as mudanças no conhecimento do aluno ao longo do tempo, a função exponencial é amplamente reconhecida como a mais adequada para modelar a curva de esquecimento, devido à sua adaptabilidade em modelar declínios (Averell & Heathcote, 2011). Uma formalização comum para medir a taxa de esquecimento (*tekc*) de um KC é apresentada na Equação 2.4:

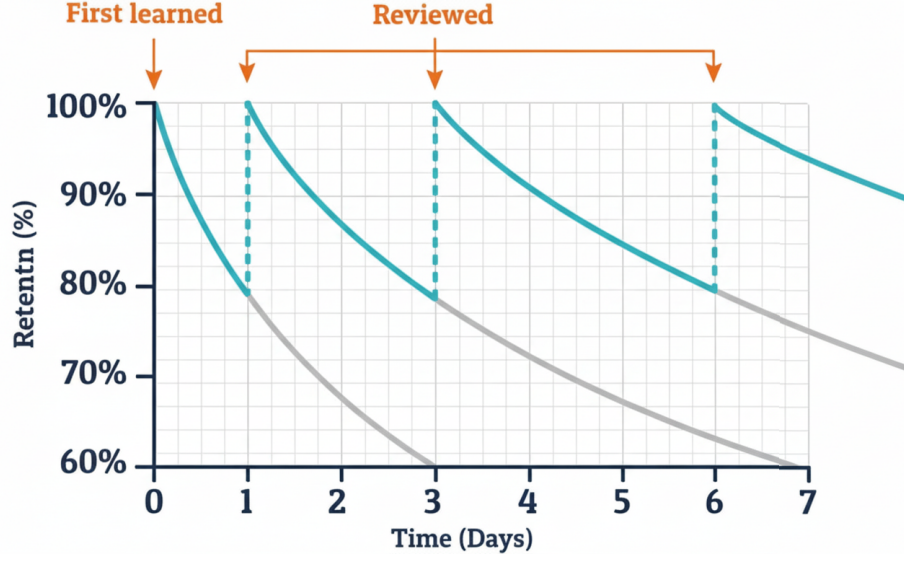


Figura 2.5: Representação da Curva de Esquecimento de Ebbinghaus. Adaptado de Chun e Heo (2018)

$$tek c_{i,j}^t = 1 - e^{-\frac{|t-t'|}{\theta}} \quad (2.4)$$

onde $tek c_{i,j}^t$ representa a taxa de esquecimento do j -ésimo KC para o i -ésimo aluno no instante t ; t' denota o instante da interação mais recente com o KC j ; e θ é um hiperparâmetro que regula a taxa de esquecimento.

A operacionalização de princípios matemáticos como o do decaimento exponencial (Equação 2.4) tornou-se uma das principais frentes de pesquisa em *Knowledge Tracing* (Abdelrahman et al., 2023). Inicialmente, modelos tradicionais tentaram incorporar o esquecimento por meio de *features* como o número de práticas anteriores ou o tempo decorrido desde a última interação (Pelánek, 2015; Qiu et al., 2011). Com o advento do aprendizado profundo, surgiram arquiteturas mais sofisticadas. Conforme catalogado pela ferramenta de *benchmarking* **pyKT** (Z. Liu et al., 2022), os modelos podem ser agrupados em duas categorias principais. A primeira inclui modelos com fatores explícitos de esquecimento, que integram variáveis temporais diretamente em sua arquitetura, como o **DKT-Forget** (Nagatani & et al., 2019), o **SAINT+** (Shin et al., 2021), o **HawkesKT** (Wang et al., 2021) e o **LPKT** (S. Shen & et al., 2021). A segunda categoria abrange os modelos de estado da arte em KT, em especial aqueles baseados em mecanismos de atenção, que capturam o efeito do esquecimento de forma implícita ao ponderar a influência das interações passadas. Exemplos notáveis incluem o **FoLiBiKT** (Im et al., 2023), o **DTransformer** (Yin & et al., 2023), o **ReKT** (X. Shen et al., 2024), o **csKT** (Bai et al., 2025), o **FlucKT** (Hou & et al., 2025), o **LefoKT** (Bai & et al., 2025) e o **UKT** (W. Cheng et al., 2025). A contínua evolução desses modelos focados em capturar o esquecimento mostram a importância deste fenômeno para um diagnóstico preciso e realista do conhecimento do

aluno em sistemas adaptativos.

2.3.4 Datasets para o Treinamento de Modelos de Knowledge Tracing

O avanço da pesquisa em KT depende de grandes datasets públicos que servem como benchmarks para o desenvolvimento e a comparação de novas arquiteturas. A revisão de Abdelrahman et al. (2023) destaca diversos benchmarks que foram fundamentais para o avanço das pesquisas na área, incluindo a série ASSISTments (Feng et al., 2009; Pardos et al., 2014) que oferece milhões de interações de matemática em diversas versões (*ASSISTments2009*, *2012*, *2015* e *ASSISTChall*), embora frequentemente sofra com a ausência de anotações de KCs. O dataset KDDcup (Stamper et al., 2010), originário do sistema *The Cognitive Tutors*, foca em interações de álgebra e inclui os subconjuntos *Algebra 2005-2006*, *2006-2007* e *Bridge to Algebra*. Outro dataset de grande escala é o da *Junyi Academy* (Chang et al., 2015). Entretanto, a comparação de performance entre trabalhos que o utilizam é frequentemente inviabilizada devido a inconsistências nas técnicas de pré-processamento dos dados (Abdelrahman & Wang, 2019). Finalmente, o EdNet (Choi & et al., 2020) se destaca pela sua escala massiva, com mais de 100 milhões de interações, e por sua estrutura hierárquica que captura uma granularidade única de comportamentos do aluno.

Contudo, apesar de sua importância para a comunidade científica, esses datasets apresentam duas limitações críticas. Primeiro, por serem de origem internacional, não refletem a estrutura, as competências e as habilidades do currículo brasileiro (Brasil. Ministério da Educação, 2018). Segundo, muitos desses conjuntos de dados, como o *EdNet* (Choi & et al., 2020), embora vastos em escala, oferecem baixa granularidade semântica, representando questões e habilidades apenas por meio de identificadores numéricos. Essa característica impede análises pedagógicas aprofundadas e a interpretabilidade dos resultados, elementos cruciais para um sistema de tutoria adaptativa.

Diante da inadequação dos benchmarks existentes para o contexto nacional, uma das soluções reside na geração de dados sintéticos. A geração de dados sintéticos é uma área de pesquisa ativa em Aprendizado de Máquina, surgindo como uma solução para desafios como a insuficiência de dados e restrições de privacidade e acesso (Y. Lu et al., 2023). No campo do *Knowledge Tracing*, esta abordagem foi validada pelo trabalho que introduziu o DKT, cujo dataset simulado, o *Simulated-5* (Piech et al., 2015), serviu tanto para a validação do modelo original quanto como benchmark para pesquisas subsequentes. De forma similar, o trabalho de Annabi (2023) também utilizou dados sintéticos, argumentando que os datasets públicos são enviesados por sequências de exercícios definidas por especialistas e não possuem um "ground truth" da Estrutura de Conhecimento (KS) necessário para

a avaliação. A metodologia de simulação, portanto, se apresenta como uma alternativa viável e estabelecida para superar a carência de datasets alinhados a contextos curriculares específicos.

2.3.5 Anotação Automática de Conceitos de Conhecimento em Questões

A formulação padrão do *Knowledge Tracing* pressupõe a existência de um mapeamento abrangente entre as questões e os KCs que elas mobilizam, sobre o qual os modelos estimam a evolução do domínio do aluno (A. T. Corbett & Anderson, 1994). Tradicionalmente, esse mapeamento é construído por anotação manual conduzida por especialistas de domínio, que associam cada questão a um ou mais KCs dentre dezenas ou centenas de categorias possíveis. Tal processo, contudo, é intensivo em tempo e propenso a erros e inconsistências humanas, exigindo curadoria especializada para assegurar a coerência das anotações (Bier et al., 2019; Clark, 2014; Moore et al., 2024). Essa limitação é agravada nos benchmarks de larga escala que, conforme discutido na Seção 2.3.4, representam questões e habilidades apenas por identificadores numéricos, sem a granularidade semântica necessária para análises pedagógicas aprofundadas.

A literatura registra três vertentes principais para automatizar a anotação de KCs. A primeira infere os KCs como estados latentes a partir do histórico de interações dos alunos (Barnes, 2005; Cen et al., 2006; Q. Liu, Huang et al., 2021; Shi et al., 2023), abordagem cuja principal limitação é a baixa interpretabilidade das representações resultantes, o que restringe seu uso direto em KT. A segunda reformula a anotação como uma tarefa de classificação supervisionada (H. Li et al., 2024a, 2024b; Patikorn et al., 2019; Tian et al., 2022), que depende, porém, de grandes conjuntos de dados previamente rotulados, condição frequentemente inviável na prática. A terceira, mais recente, explora a geração de anotações em formato de texto livre por meio de LLMs, mas, em geral, não condiciona a anotação às etapas de resolução da questão (Didolkar et al., 2024; Moore et al., 2024), o que, segundo evidências empíricas, compromete a qualidade dos KCs inferidos.

Diante dessas limitações, Ozyurt et al. (2024) propõem uma metodologia de anotação automática de KCs fundamentada no raciocínio explícito de resolução da questão, organizada em três etapas sequenciais. Na primeira etapa, de *geração das etapas de resolução*, um LLM produz uma solução passo a passo $s_1, \dots, s_n$ para a questão por meio de *prompting* do tipo *Chain-of-Thought* (Wei et al., 2022), em que cada s_k é uma sequência coerente de raciocínio que conduz à solução; a decomposição em múltiplos passos é especialmente relevante em domínios como a matemática, que exigem resolução de problemas em várias etapas. Na segunda etapa, de *anotação de KCs*, o modelo infere o conjunto de KCs relevantes $c_1, \dots, c_m$ condicionado tanto ao enunciado da questão quanto às etapas de

resolução previamente geradas, ancorando a anotação no conteúdo efetivamente mobilizado pela solução. Na terceira etapa, de *mapeamento etapa-KC*, dado que nem todos os KCs são exercitados em cada passo da resolução, o modelo associa cada etapa de solução aos KCs que lhe são específicos, produzindo um vínculo de granularidade fina entre o raciocínio e os KCs.

O fundamento central dessa abordagem é o aterramento (*grounding*) da anotação nas etapas de resolução, e não apenas no enunciado: ao explicitar o raciocínio necessário para resolver a questão, o LLM identifica os KCs de forma mais precisa do que quando processa somente o texto do problema. Avaliações empíricas reportadas pelos autores indicam que as anotações geradas com base nas etapas de resolução são consistentemente preferidas em critérios como correção, cobertura e especificidade frente a variantes que ignoram a solução, e que anotações automáticas assim produzidas tornam-se competitivas com as anotações manuais de especialistas (Ozyurt et al., 2024).

2.3.6 Explicabilidade em Knowledge Tracing (XKT)

Apesar do alto desempenho preditivo dos modelos de KT baseados em aprendizado profundo, sua complexidade inerente, com múltiplas camadas e milhões de parâmetros, frequentemente os torna "caixas-pretas" (*black boxes*) (Bai et al., 2024). Essa falta de transparência representa um obstáculo significativo para a adoção em cenários educacionais críticos, pois pode reduzir a confiança de educadores e alunos nas decisões do sistema (Bai et al., 2024). Para endereçar essa limitação, surgiu o campo do rastreamento de conhecimento explicável, cujo objetivo é desenvolver métodos para tornar os diagnósticos e previsões dos modelos de KT mais transparentes, compreensíveis e confiáveis para os diferentes stakeholders (Bai et al., 2024).

As técnicas de explicabilidade em KT são geralmente categorizadas em duas abordagens principais, conforme a taxonomia da Inteligência Artificial Explicável (XAI) (Arrieta et al., 2020; Bai et al., 2024). As abordagens *ante-hoc* buscam a interpretabilidade de forma intrínseca, seja utilizando modelos inerentemente transparentes (como BKT e IRT), seja incorporando módulos interpretáveis dentro de arquiteturas mais complexas. Conforme a classificação de Bai et al. (2024), esses módulos incluem tanto mecanismos de atenção quanto a integração de teorias da psicologia educacional, como a Teoria da monotonicidade (M. Zhang et al., 2023), Teoria da curva de aprendizagem e Teoria da curva do esquecimento (L. Zhang, 2021). Em contrapartida, as abordagens *post-hoc* são aplicadas para explicar as decisões de modelos 'caixa-preta' que já foram treinados. Estas técnicas podem ser agnósticas ao modelo, como o LIME (Ribeiro et al., 2016) e o Deep SHAP (Lundberg & Lee, 2017), ou específicas do modelo, como o LRP (Bach et al., 2015) e a inferência causal (Yao et al., 2021).

O survey de Bai et al. (2024) detalha três aplicações práticas principais do XKT, que visam transformar as saídas do modelo em *insights* acionáveis. A primeira é na geração de relatórios de diagnóstico, onde explicações visuais, como grafos intuitivos e mapas de calor (Dai et al., 2021), são empregadas para aumentar a interpretabilidade das saídas do modelo. A segunda aplicação é na aprendizagem personalizada e recomendação de recursos, onde algoritmos são utilizados para adaptar trilhas de aprendizado com base no estado de conhecimento do aluno (Muñoz et al., 2022), e a explicabilidade é crucial para justificar por que um determinado exercício foi recomendado. Por fim, o XKT contribui para a descoberta da estrutura de conhecimento, onde a análise do desempenho dos alunos pode ser usada para elucidar as relações latentes entre conceitos e exercícios, auxiliando educadores na construção de currículos mais eficazes. Embora o estado da arte do XKT ainda esteja consolidando ferramentas maduras, a abordagem dual KT + KG aqui fundamentada, que integra modelagem explícita do domínio ao rastreamento do aluno, constitui uma base arquitetural propícia para a incorporação futura dessas técnicas de explicabilidade. A estrutura ontológica do grafo e a transparência dos limiares pedagógicos (Ω_k, Ψ_k) e do filtro de pré-requisitos já fornecem, por construção, justificativas curriculares para as recomendações, diferenciando o presente trabalho de abordagens puramente caixa-preta, mesmo sem ativar ainda os módulos avançados de XKT descritos nesta subseção.

2.4 Teorias Pedagógicas para Sistemas Adaptativos

As teorias pedagógicas fundamentam o design de sistemas de aprendizagem adaptativos, cada uma oferecendo uma perspectiva distinta sobre como o conhecimento é adquirido e processado. As três principais correntes teóricas, o Behaviorismo, o Cognitivismo e o Construtivismo (Rutto, 2017), se traduzem em diferentes funcionalidades e arquiteturas para esses sistemas. A Tabela 2.5 resume as principais características de cada teoria e suas respectivas aplicações.

O **Behaviorismo**, formalizado por teóricos como Skinner (1953), oferece a base para a mecânica de muitos sistemas adaptativos, focando na relação entre estímulo, resposta e reforço. Sob esta ótica, o sistema apresenta uma questão (estímulo), avalia a resposta do aluno e provê um *feedback* imediato (reforço). Essa estrutura, detalhada em aplicações educacionais no livro *The Technology of Teaching* (Skinner, 1968), possibilita a implementação de um modelo de domínio e sequenciamento, no qual o aluno precisa demonstrar proficiência em um tópico antes de avançar para o próximo.

Evoluindo da abordagem comportamental, o **Cognitivismo**, cujo campo foi consolidado pela obra *Cognitive Psychology* (Neisser, 1967), concentra-se nos processos mentais internos. Sua aplicação em sistemas adaptativos é frequentemente realizada através da modelagem do currículo como um grafo de conhecimento, onde os conceitos são interligados.

Tabela 2.5: Comparativo das Teorias Pedagógicas Aplicadas a Sistemas Adaptativos.

Teoria	Conceito Central	Metáfora da Aprendizagem	Aplicação em Sistemas Adaptativos
Behaviorismo	Condicionamento operante (reforço)	Aquisição de comportamentos (o aprendiz como um organismo que responde a estímulos)	Modelo de domínio e sequenciamento (<i>Mastery Learning</i>)
Cognitivismo	Processamento de informação (memória, esquemas)	Processamento de dados (o aprendiz como um computador)	Grafo de conhecimento e tutoria baseada em modelo (<i>Model-Tracing</i>)
Construtivismo	Construção social do conhecimento (ZDP)	Construção de significado (o aprendiz como um construtor ativo em um contexto social)	Recomendação de desafios e andaimes (<i>Scaffolding</i>)

Essa abordagem tem raízes nos mapas conceituais propostos por Novak e Gowin (1984), que organizam o conhecimento de forma hierárquica. O sistema utiliza este mapa para inferir o nível de proficiência do aluno em cada conceito, permitindo um sequenciamento hierárquico inteligente, uma abordagem exemplificada nos primeiros tutores inteligentes baseados na teoria cognitiva (Anderson et al., 1985).

Por fim, o **Construtivismo** enxerga a aprendizagem como um processo ativo de construção do conhecimento pelo próprio aluno (Steffe & Gale, 1995). Uma de suas vertentes mais influentes, o socioconstrutivismo de Vygotsky (1978), introduz o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal. A aplicação desta teoria em sistemas adaptativos desloca o foco do sequenciamento linear para a recomendação de desafios na medida certa. Guiado pela ZDP, o sistema busca manter o aluno engajado em atividades que não sejam nem triviais, nem excessivamente difíceis, conforme detalhado na próxima seção.

2.4.1 A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)

Dentro da corrente construtivista, um dos conceitos mais influentes para o design de sistemas de aprendizagem adaptativos é a ZDP. O conceito foi originalmente proposto por Lev Vygotsky (Vygotsky, 1978), que a definiu como a distância entre o nível de desenvolvimento real (o que o aluno resolve de forma autônoma) e o nível de desenvolvimento potencial (o que ele alcança com orientação ou em colaboração com pares mais capazes). Uma análise aprofundada do conceito (Chaiklin, 2003) reforça que, segundo a teoria, o crescimento cognitivo e a aprendizagem mais eficaz ocorrem precisamente quando o desafio se encontra nesta zona. A aplicabilidade desta teoria em sistemas computacionais

modernos é demonstrada por trabalhos como o de Vainas e et al. (2019).



Figura 2.6: Diagrama de Euler representando a ZDP.

A Figura 2.6 ilustra este conceito, dividindo o conhecimento em três áreas distintas:

- **Zona de Desenvolvimento Real:** O núcleo, representando as habilidades que o aluno já domina e consegue aplicar de forma autônoma. Atividades nesta zona são consideradas triviais e não geram aprendizado significativo.
- **Zona de Desenvolvimento Proximal:** A área intermediária, onde o aluno não consegue resolver um problema sozinho, mas é capaz de fazê-lo com algum tipo de suporte ou mediação (*scaffolding*). É nesta zona que a aprendizagem é maximizada.
- **Zona de Desenvolvimento Potencial:** A área externa, representando desafios que estão além da capacidade do aluno, mesmo com ajuda, podendo levar à frustração e ao desengajamento.

A aplicação da ZDP em sistemas de tutoria adaptativa busca resolver o dilema do ensino massificado, que, ao focar no "aluno médio", frequentemente subaproveita o potencial de alguns e deixa outros para trás (Darling-Hammond, 2006). Como cada estudante possui uma ZDP diferente a cada momento, um sistema adaptativo eficaz deve ser capaz de estimar essa zona para manter o aluno engajado em um "desafio ideal". A literatura demonstra que ensinar dentro da ZDP aumenta a motivação e o desempenho dos alunos (Tieso, 2005; Walpole & McKenna, 2007). O sistema "E-gotsky", proposto por Vainas e et al. (2019), é um exemplo prático que valida empiricamente esta abordagem. Em

seus experimentos, os autores demonstraram que um motor de aprendizado que mantém os alunos na ZDP pode reduzir significativamente o tempo para atingir a maestria (redução de 17%) e aumentar o engajamento. A validação empírica de sistemas como o "E-gotsky" consolida a ZDP como um princípio orientador fundamental para o design de políticas de recomendação em sistemas de tutoria adaptativa.

Capítulo 3

Trabalhos Relacionados

Este capítulo descreve em detalhe o processo utilizado para realizar a revisão da literatura, abrangendo as perguntas de pesquisa, os critérios definidos para a seleção dos trabalhos relevantes e a forma como os estudos escolhidos são apresentados. Ao final, é incluído um quadro comparativo que reúne os diferentes trabalhos analisados, evidenciando os principais aspectos que distinguem esta pesquisa das demais.

3.1 Revisão da Literatura

A revisão foi realizada seguindo o método proposto por Kitchenham (2004), com o propósito de responder às seguintes perguntas de pesquisa:

1. Quais são as principais abordagens e técnicas utilizadas para a recomendação de exercícios em ambientes de aprendizagem?
2. Quais são os modelos utilizados para prever o estado de conhecimento do aluno?
3. Como os Grafos de Conhecimento são empregados para modelar a estrutura de domínios educacionais, como as estruturas de pré-requisito em um currículo?
4. Como as abordagens lidam com o esquecimento do aluno?
5. Quais métricas são utilizadas para avaliar a qualidade pedagógica e o comportamento das recomendações dos exercícios?
6. Quais são as principais abordagens de explicabilidade aplicadas à recomendação de exercícios e à modelagem do estado de conhecimento do aluno?

Com base nestas perguntas de pesquisa, foram definidas as palavras-chave e seus sinônimos para a construção de uma query de busca em diferentes bases de dados. A query foi estruturada para abranger os três pilares da pesquisa: a tarefa de recomendação de exercí-

cios, a modelagem do estado de conhecimento do aluno e a representação do conhecimento curricular. A estrutura da busca utilizou a seguinte combinação de termos:

```
("exercise recommendation")
AND
("knowledge tracing" OR "cognitive diagnosis")
AND
("knowledge graph" OR "ontology" OR "prerequisite structure")
```

Para a seleção dos artigos, foram executadas as seguintes etapas. Primeiramente, a query de busca foi aplicada nas bases de dados acadêmicas Google Scholar, IEEE Xplore, ACM Digital Library e SpringerLink, restringindo-se, já no mecanismo de busca de cada base, às publicações dos últimos cinco anos. Essa busca inicial resultou em 231 registros. Em seguida, com o auxílio de uma ferramenta de gerenciamento de referências, foram descartados os artigos duplicados e aqueles cujo escopo não se alinhava aos objetivos desta pesquisa, restando 196 trabalhos. A partir daí, aplicaram-se critérios de inclusão e exclusão sobre título, resumo e palavras-chave, reduzindo o conjunto a 21 artigos. Por fim, a leitura completa desses trabalhos consolidou os 12 artigos considerados mais relevantes para a análise final. A Figura 3.1 sintetiza as quantidades obtidas em cada etapa desse processo.

A análise dos trabalhos selecionados revela que, embora todos se baseiem no diagnóstico do estado de conhecimento do aluno, a principal distinção reside na abordagem. Uma vertente foca na sofisticação do modelo de diagnóstico em si, enquanto outra emprega Grafos de Conhecimento para estruturar o domínio curricular e guiar as recomendações de forma mais explicável e pedagogicamente embasada. Essa divisão conceitual fundamenta, portanto, a organização das subseções a seguir.

3.2 Abordagens Focadas no Diagnóstico do Aluno

Uma vertente significativa da pesquisa em recomendação de exercícios foca no diagnóstico preciso do estado de conhecimento do aluno, utilizando este diagnóstico como o principal motor para a seleção de atividades. Nestas abordagens, a estrutura do currículo, embora às vezes existente, é secundária na definição da política de recomendação em comparação com a centralidade da modelagem da proficiência do estudante.

O trabalho de Wu et al. (2020) propõe o método KCP-ER (*Knowledge Concept Prediction-Exercise Recommendation*), uma arquitetura de duas camadas que suporta essa abordagem. A primeira camada, KCPL (*Knowledge Concept Prediction Layer*), é responsável pelo diagnóstico e utiliza dois modelos de redes neurais recorrentes: uma LSTM para prever quais KCs são relevantes para o próximo passo do aluno, e um modelo DKT para

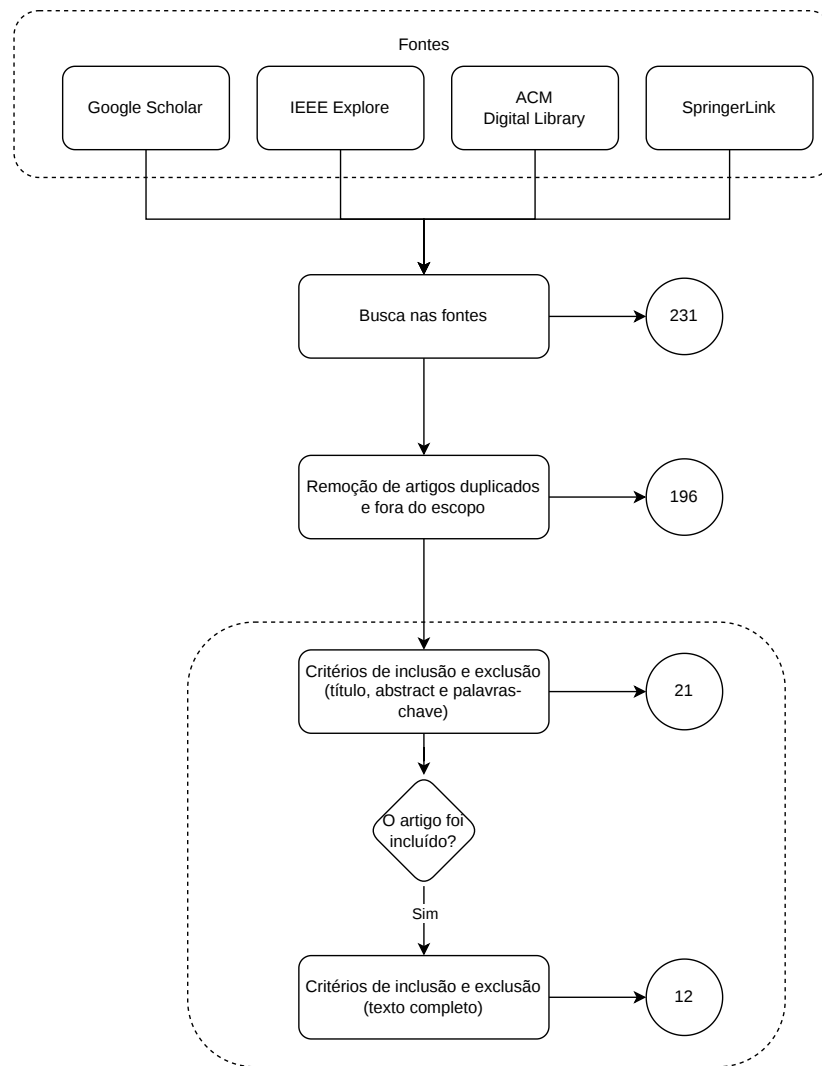


Figura 3.1: Representação do fluxograma de pesquisa dos trabalhos

estimar o nível de maestria do aluno em cada um desses KCs. A segunda camada, ESFL (*Exercise Set Filtering Layer*), utiliza essas predições para filtrar o banco de exercícios, selecionando um conjunto de candidatas com dificuldade adequada. Por fim, um algoritmo de recozimento simulado é aplicado para gerar a lista final de recomendações, com o objetivo de otimizar a diversidade da seleção.

Seguindo uma linha similar de diagnóstico híbrido, o trabalho de Y. Cheng et al. (2021) apresenta o método NeuralCD-NeuMF. Esta abordagem também opera em duas fases. Primeiramente, utiliza-se um Modelo de Diagnóstico Cognitivo (CDM), o *Neural Cognitive Diagnosis* (NeuralCD), para estimar a proficiência do aluno em cada KC e a dificuldade de cada exercício em relação a esses KCs, resultando em uma matriz de maestria. Em seguida, essa informação de diagnóstico é integrada a um modelo de recomendação, o *Neural Matrix Factorization* (NeuMF), que foi modificado para incorporar as características de personalidade do aluno, resultando no modelo NeuMF-PC. Este modelo final prevê a nota

do aluno em exercícios futuros, e a recomendação é feita selecionando os exercícios cuja dificuldade prevista se encaixa em uma faixa pré-definida pelo sistema.

Buscando uma representação mais rica do estado cognitivo, o trabalho de Ma et al. (2022) propõe uma abordagem que combina CDMs com a Teoria dos Conjuntos Neutrosóficos. Em vez de representar a maestria do aluno em um KC por meio de um único valor, o método utiliza um conjunto neutrosófico, expresso como uma tupla de três valores que indicam o grau de entendimento, o grau de não entendimento e o grau de incerteza. O diagnóstico do nível de entendimento é obtido através do modelo DINA (*Deterministic Input, Noisy And-gate*), enquanto os outros dois componentes são calculados a partir da taxa de erro e da variância das respostas. Com base nesta representação, o sistema calcula a similaridade entre os alunos e utiliza um algoritmo de Filtragem Colaborativa baseado nos vizinhos mais próximos para prever a performance e recomendar exercícios que se alinhem com a preferência de dificuldade do aluno.

Mais recentemente, o trabalho de X. Cheng et al. (2025) aborda o desafio da diversidade nas recomendações e o problema da cauda longa (alunos com poucas interações) com o método NR4DER (*Neural Re-ranking for Diversified Exercise Recommendation*). A metodologia é dividida em dois módulos principais. O primeiro é um filtro de exercícios, que utiliza um modelo mLSTM para prever a maestria do aluno nos KCs e selecionar um conjunto de exercícios com dificuldade apropriada. Este módulo inclui um "potenciador de representação do estudante", que utiliza os dados de alunos ativos para enriquecer a representação de alunos inativos e mitigar o problema da cauda longa. O segundo, e principal, módulo é o de re-ranqueamento neural, que refina a lista de exercícios candidatos. Ele estima a relevância de cada exercício e a diversidade do padrão de aprendizagem do aluno, utilizando essas duas informações para calcular um novo score e reordenar a lista, garantindo que a recomendação final equilibre a acurácia com a diversidade, alinhando-se ao ritmo de aprendizado de cada estudante.

O trabalho de Zhong (2025) também parte do diagnóstico de conhecimento, mas busca refinar suas recomendações considerando a dificuldade do exercício e o nível de aprendizado do aluno. A abordagem, denominada DKT-MD, utiliza o DKT para gerar um conjunto inicial de exercícios recomendados (E_{DKT}). Em seguida, este conjunto é filtrado por meio de métricas de dificuldade do exercício e de maestria do aluno (calculadas a partir do histórico de interações) para gerar o conjunto final de recomendação (E_{FAI}). Como um passo adicional, o método emprega um grafo bipartido "exercício-conceito" e um algoritmo de difusão de material para, a partir dos exercícios finais recomendados, sugerir também os KCs relacionados.

Em uma abordagem que combina Rastreamento de Conhecimento com Aprendizado por Reforço (RL), Ozyurt et al. (2025) propõem o framework ExRec. A principal crítica aos

métodos existentes é a negligência do conteúdo semântico das questões. Para resolver isso, o ExRec utiliza LLMs para anotar automaticamente os KCs das questões e, em seguida, aprende representações semânticas ricas para questões e KCs através de Aprendizagem Contrastiva (CL). Um modelo de KT (baseado em LSTM) é treinado e calibrado usando essas representações semânticas, servindo como um ambiente de simulação para um agente de RL. A política de RL é então otimizada para recomendar exercícios que maximizem a melhoria no estado de conhecimento do aluno (a recompensa), o qual é calculado diretamente pelo modelo de KT calibrado.

3.3 Abordagens Guiadas por Grafos

Em contraste com as abordagens focadas primariamente no diagnóstico do aluno, outra vertente da pesquisa utiliza a representação estruturada do conhecimento como o pilar central de seus sistemas de recomendação. Nestes trabalhos, KGs ou estruturas de pré-requisitos não são apenas um componente secundário, mas o "mapa" que guia ativamente a política de recomendação, permitindo trilhas de aprendizado mais coerentes e, frequentemente, mais explicáveis. Todos os modelos a seguir, embora diferentes em suas implementações, compartilham desta filosofia.

O trabalho de Y. He et al. (2022) propõe o método ER-KTCP (*Exercise Recommendation based on Knowledge Tracing and Concept Prerequisite relations*), que integra diretamente as relações de pré-requisito entre os KCs na política de recomendação. A metodologia é dividida em duas partes: um componente de *Knowledge Tracing*, baseado em uma arquitetura *Transformer-like* para capturar as mudanças no estado de conhecimento do aluno, e um componente de seleção de exercícios. Este último utiliza a maestria estimada pelo KT para tomar decisões, mas de forma guiada pela estrutura de pré-requisitos. Por exemplo, para um conceito que o aluno apresenta dificuldade, o sistema verifica a maestria nos KCs que são pré-requisitos e, caso também estejam deficientes, prioriza a recomendação de exercícios destes conceitos base, garantindo que as lacunas de conhecimento fundamental sejam preenchidas antes de avançar. A recomendação é um ciclo contínuo de "recomendar-avaliar-ajustar", onde a proporção de exercícios de diferentes dificuldades (fácil, médio, difícil) é dinamicamente ajustada com base no progresso do aluno.

A busca por explicabilidade é o foco central do trabalho de Guan et al. (2023), que introduz a abordagem KG4Ex. A metodologia consiste em quatro módulos. Primeiramente, um módulo de extração de features utiliza um modelo LSTM para analisar o histórico do aluno e inferir três métricas chave: o nível de maestria nos KCs (MLKC), a probabilidade de um KC ocorrer no próximo exercício (PKC) e a taxa de esquecimento para cada KC (FRKC). Em seguida, essas informações são usadas para construir um Grafo de Conhecimento com três tipos de entidades (Alunos, Exercícios e KCs) e quatro tipos de relações semânticas

que os conectam. Um módulo de aprendizagem de embeddings de grafos de conhecimento (Knowledge Graph Embedding - KGE), utilizando modelos como o TransE, é aplicado para aprender representações vetoriais das entidades e relações do grafo. Finalmente, o módulo de recomendação baseada em embeddings calcula um score para cada par (aluno, exercício) e recomenda o de maior pontuação, sendo capaz de justificar a recomendação com base nas tripletas do grafo que mais influenciaram o score (e.g., "Este exercício foi recomendado porque sua taxa de esquecimento é alta (70%) e sua maestria na habilidade relacionada é de 65%; portanto, é necessário revisar este conceito").

Uma evolução da abordagem anterior é apresentada em Guan et al. (2025) com o método KG4EER (*Explainable Exercise Recommendation with Knowledge Graph*). A metodologia segue uma estrutura similar à do KG4Ex, com um módulo de extração de features que estima a maestria, a probabilidade de ocorrência e a taxa de esquecimento dos KCs. A principal inovação reside na sofisticação do módulo de aprendizagem de embeddings, que realiza um benchmarking com múltiplos modelos de KGE, como TransE, TransR, TransD, RotatE e TripleRE, para encontrar a representação mais eficaz. O sistema constrói um Grafo de Conhecimento com as mesmas três entidades (Alunos, Exercícios, KCs) e as relações semânticas inferidas. A recomendação é gerada a partir dos embeddings aprendidos, e a explicabilidade é uma característica intrínseca do modelo, que consegue elucidar as regras de raciocínio subjacentes à seleção de um exercício por meio da análise das relações no grafo.

O trabalho de S. Li et al. (2024) propõe o MLKT4Rec, um framework de recomendação de exercícios baseado em *multitask learning*. A abordagem visa resolver problemas de esparsidade de dados e a falta de modelagem dinâmica do conhecimento. Para isso, o modelo constrói um grafo heterogêneo que inclui nós de alunos, exercícios e KCs, utilizando GNNs para aprender as representações. Este grafo é enriquecido com atributos como dificuldade do exercício e intervalos de tempo relativos. O framework treina conjuntamente duas tarefas: uma tarefa de KT, que utiliza um mecanismo de auto-atenção ciente do tempo (*time-aware self-attention*) para capturar o estado de conhecimento, e a tarefa de recomendação sequencial de exercícios, que é informada pelo estado de conhecimento derivado do KT.

O trabalho de Wu et al. (2025) propõe o método IERF (Intention-aware Exercise Recommendation enhanced by deep Forgetting modeling), que, embora não utilize um KG nos mesmos moldes dos trabalhos anteriores, emprega uma Rede de Informação Heterogênea (HIN), um tipo de grafo, para modelar as complexas interações do processo de aprendizagem e capturar a intenção do aluno. O IERF possui dois componentes principais. O primeiro é um módulo de portão de esquecimento (*Forget Gate*), que modela o esquecimento do aluno, considerando múltiplos KCs por exercício e múltiplas características comportamentais (tempo gasto, uso de dicas), em vez de apenas o resultado da resposta.

O segundo é um módulo de percepção de intenção, que utiliza a HIN para capturar relações de alta ordem entre alunos, exercícios e KCs. Ao analisar os "meta-caminhos" extraídos da HIN, o sistema consegue inferir as preferências e intenções de aprendizado do aluno, combinando essa informação com o estado de conhecimento diagnosticado para gerar recomendações mais alinhadas com as necessidades reais do estudante.

Por fim, o trabalho de Annabi (2023) foca não apenas em usar a estrutura de pré-requisitos, mas em descobri-la a partir dos dados. Os autores propõem um modelo de Rastreamento de Conhecimento, o PKT (*Prerequisite Knowledge Tracing*), que incorpora a Estrutura de Conhecimento, ou seja, o grafo de pré-requisitos, como um parâmetro aprendível do próprio modelo. O modelo PKT assume que o sucesso em um exercício depende da maestria nos KCs do exercício e também nos KCs que são seus pré-requisitos. O grafo de pré-requisitos (uma matriz de adjacência) é otimizado via retropropagação juntamente com os demais parâmetros. Para avaliar o método de descoberta da KS e mitigar vieses introduzidos por currículos pré-definidos, os autores treinam e avaliam o modelo utilizando dados sintéticos produzidos por um modelo simulado de aluno, que integra o mecanismo de esquecimento por meio da representação da proficiência em componentes de curto e longo prazo para cada KC. Finalmente, o grafo de pré-requisitos descoberto é utilizado para guiar um modelo de tutoria (ZPDES-KS) que recomenda exercícios baseados no conceito da ZDP e no avanço curricular ditado pela estrutura de pré-requisitos, o que permite fornecer explicações para as recomendações.

3.4 Análise Comparativa e Posição do Trabalho

A Tabela 3.1 apresenta um quadro comparativo dos principais trabalhos discutidos neste capítulo. A estrutura da tabela foi projetada para sintetizar as respostas para cada uma das perguntas de pesquisa que guiaram esta revisão. As colunas detalham, para cada trabalho: o modelo que estima o estado de conhecimento do aluno, o uso (ou não) de grafos curriculares, a modelagem (ou não) do esquecimento, as métricas de avaliação utilizadas e a adoção de explicabilidade.

Tabela 3.1: Quadro Comparativo dos Trabalhos Relacionados.

Trabalho	Modelo de Diagnóstico do Conhecimento	Uso de Grafo Curricular	Modelagem do Esquecimento	Métricas de Avaliação	Explicabilidade
Wu et al. (2020)	DKT.	Não explícito. Vetores de KCs sem pré-requisitos.	Não.	Acurácia (dificuldade), Novidade, Diversidade.	Baixa. Modelo "caixa-preta".
Y. Cheng et al. (2021)	NeuralCDM.	Não.	Não.	Precisão, Taxa de Acerto (SR).	Média. Parâmetros do NeuralCDM interpretáveis.
Ma et al. (2022)	DINA.	Não.	Não.	Acurácia, RMSE.	Média. Tupla neutrosófica interpretável.
Y. He et al. (2022)	KT genérico baseado em Transformer.	Sim. Para guiar recomendação via pré-requisitos.	Não.	RMSE, Precisão, Recall, F1, IEP.	Média. Relações de pré-requisito explícitas.
Guan et al. (2023)	LSTM.	Explícito. KG (Aluno, KC, Exercício).	Sim, via taxa exponencial (FRKC).	Acurácia, Novidade.	Alta. Baseada nas relações do KG.
Guan et al. (2025)	LSTM.	Explícito (similar a Guan et al. (2023)).	Sim, via taxa exponencial (FRKC).	Acurácia, Novidade.	Alta (similar a Guan et al. (2023)).
Wu et al. (2025)	Módulo "Forget Gate" customizado inspirado em LSTMs/GRUs.	Sim. HIN para modelar intenções.	Sim, via módulo "Forget Gate".	HR@K, ND-CG@K.	Média. Análise de meta-caminhos na HIN.
X. Cheng et al. (2025)	mLSTM.	Não.	Não.	NDCG, Recall, F1, Diversidade.	Baixa. Foco em performance e diversidade.
Zhong (2025)	DKT-MD, com filtro posterior.	Sim. Grafo bipartido (Exercício-KC) para recomendar KCs.	Não.	Precisão (P), Recall (R), F1.	Média. Filtros e grafo para KCs.
Ozyurt et al. (2025)	KT (LSTM) calibrado via RL.	Não explícito. Usa semântica de KCs.	Não.	Melhoria no estado de conhecimento (RL).	Média. Calibração de KCs e trajetórias de RL.
S. Li et al. (2024)	KT com auto-atenção temporal.	Sim. Grafo heterogêneo (Aluno, Exercício, KC) com GNNs.	Implícito, via atenção temporal.	HR@K, MRR@K, ND-CG@K.	Baixa. Foco em GNN e atenção.
Annabi (2023)	PKT: KT que aprende o grafo de pré-requisitos.	Sim. Grafo de pré-requisitos (KS) é aprendido.	Não (mas simulador usado modela).	F1-score (KS), Nível Proficiência (tutoria).	Alta. Grafo de pré-requisitos explícito/aprendido.
Nosso	LefoKT	Sim. Grafo curricular é formalmente construído através de ontologias.	Sim, simulador e modelo de KT modelam.	Acurácia Pedagógica, Novidade e Diversidade.	Média. Explicável no nível da recomendação por construção (grafo ontológico, limiares e filtro de pré-requisitos).

Através do quadro comparativo, observa-se uma clara evolução nas abordagens para recomendação de exercícios. Os trabalhos mais recentes tendem a migrar de modelos puramente diagnósticos para arquiteturas híbridas que integram conhecimento estruturado, como grafos. Nota-se também uma crescente preocupação com a incorporação de explicabilidade e a qualidade da recomendação, para além da simples acurácia. Contudo, uma

limitação recorrente reside na avaliação desses sistemas. Embora as métricas de performance preditiva utilizadas (e.g., Acurácia, NDCG, F1) sejam consolidadas, elas possuem um caráter de propósito geral e podem não capturar com precisão a efetividade pedagógica em contextos de aplicação específicos. Isso aponta para a necessidade de adaptar tais métricas para que reflitam de forma mais fiel os objetivos de uma metodologia de ensino personalizada.

Este trabalho se diferencia dos estudos apresentados ao propor uma metodologia completa que sintetiza as frentes de pesquisa analisadas. A proposta se destaca por sua arquitetura, que parte da contextualização para o currículo brasileiro: a estrutura da BNCC é modelada como um grafo de conhecimento, sobre o qual opera um modelo de KT de estado da arte (LefoKT). Esta modelagem foi projetada para ser dinâmica, incorporando a curva do esquecimento e oferecendo, por construção, explicabilidade no nível da recomendação (por meio do grafo ontológico, dos limiares pedagógicos e do filtro de pré-requisitos transparentes, que justificam curricularmente por que cada exercício é sugerido), ficando a explicabilidade no nível do próprio modelo de *Knowledge Tracing* (XKT) como trabalho futuro. Além dessa arquitetura, o trabalho aborda diretamente a lacuna de dados no contexto brasileiro por meio de uma metodologia de geração do Dataset Sintético *D*. Finalmente, o estudo avança na avaliação de sistemas adaptativos ao propor um framework de avaliação da qualidade pedagógica com métricas personalizadas, permitindo uma análise mais profunda do comportamento do sistema para além da sua capacidade preditiva.

Capítulo 4

Metodologia Proposta

Com base na fundamentação teórica e na análise do estado da arte, foi estabelecida a abordagem de desenvolvimento para este trabalho. O escopo de avaliação desta proposta limita-se à matemática do ensino médio como prova de conceito.

O problema central compreende as tarefas de diagnóstico do conhecimento e de recomendação adaptativa. Este capítulo inicia-se com a formalização matemática deste problema (Seção 4.1). A partir desta base, detalha-se a construção dos artefatos do sistema. Para assegurar a integração e reprodutibilidade dos componentes, todo o pipeline de desenvolvimento (abrangendo o processamento de dados, a geração sintética e a implementação do sistema) foi unificado na linguagem de programação *Python*.

A metodologia está estruturada nas seguintes etapas:

1. Modelagem do KG e Parametrização Curricular (Seção 4.2);
2. Mapeamento Semântico e Anotação do Banco de Questões (Seção 4.3);
3. Construção do Dataset Sintético D (Seção 4.4);
4. Implementação do Sistema de Recomendação Adaptativa (Seção 4.5).

A Figura 4.1 ilustra o fluxo de trabalho em quatro etapas numeradas. O pipeline inicia com o mapeamento do grafo curricular a partir da BNCC e do Currículo Catarinense (etapa 1) e segue com a simulação de interações aluno-questão para construção de um dataset sintético (etapa 2). Modelos de *Knowledge Tracing* são então treinados para prever a maestria do aluno sobre cada conhecimento (etapa 3), alimentando o sistema de recomendação que pré-seleciona questões na Zona de Desenvolvimento Proximal e as apresenta por escolha aleatória ponderada (etapa 4).

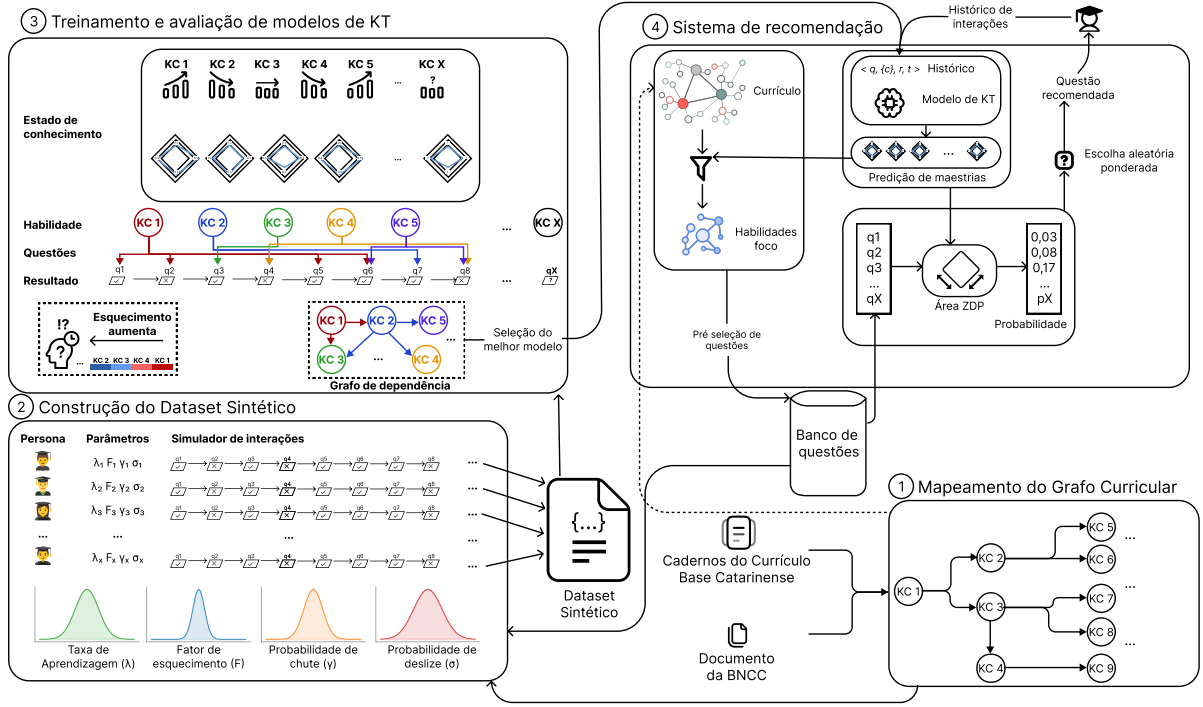


Figura 4.1: Visão Geral do Fluxo de Trabalho

4.1 Definição do Problema

O problema central deste trabalho é o desenvolvimento de uma política de recomendação de exercícios para um sistema de tutoria adaptativa. Formalmente, sejam os seguintes conjuntos:

- $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, um conjunto de N alunos.
- $\mathcal{K} = \{k_1, k_2, \dots, k_K\}$, um conjunto de K KCs do currículo de matemática do ensino médio brasileiro.
- $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_M\}$, um conjunto de M questões de avaliação.

O estado de conhecimento latente de um aluno $s_l \in \mathcal{S}$ em um instante de tempo discreto t é representado por um vetor de maestria $\mathbf{v}_{l,t} \in [0, 1]^K$, onde cada componente $v_{l,t,i}$ quantifica o domínio do aluno sobre o KC k_i . A cada interação, o aluno responde a uma questão $q_j \in \mathcal{Q}$, gerando um resultado binário $a_j \in \{0, 1\}$. A sequência de interações de um aluno até o tempo $t - 1$ constitui seu histórico, $X_{l,1:t-1} = \langle (q_1, a_1), (q_2, a_2), \dots, (q_{t-1}, a_{t-1}) \rangle_l$.

O problema pode ser decomposto em duas tarefas sequenciais e interdependentes:

1. Diagnóstico do conhecimento: A primeira tarefa consiste em modelar a evolução do conhecimento do aluno. Dado o histórico de interações $X_{l,1:t-1}$, o objetivo é encontrar uma função de diagnóstico $\mathcal{F}_{KT}$ que mapeie este histórico a uma estimativa do estado de conhecimento latente atual do aluno.

$$\mathcal{F}_{KT} : X_{l,1:t-1} \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_{l,t} \quad (4.1)$$

onde $\hat{\mathbf{v}}_{l,t} \in [0, 1]^K$ é o vetor de maestria estimado para o aluno s_l no instante t . Esta função efetivamente "rastrea" o conhecimento do aluno ao longo do tempo.

2. Política de Recomendação Adaptativa: A segunda tarefa é definir uma política de recomendação ótima, Π^* . Esta política utiliza a estimativa do estado de conhecimento do aluno, $\hat{\mathbf{v}}_{l,t}$, para selecionar a próxima questão, q_t^* , de um conjunto de questões disponíveis, $\mathcal{Q}_{available} \subseteq \mathcal{Q}$, o qual é pedagogicamente delimitado pelas regras de progressão do grafo curricular.

$$\Pi^* : [0, 1]^K \rightarrow \mathcal{Q} \quad (4.2)$$

A política é considerada ótima se a questão selecionada maximiza uma função de utilidade pedagógica, U , que quantifica o valor de uma questão para o aprendizado do aluno em seu estado atual. Formalmente, a seleção é dada por:

$$q_t^* = \Pi^*(\hat{\mathbf{v}}_{l,t}) = \arg \max_{q_j \in \mathcal{Q}_{available}} U(q_j, \hat{\mathbf{v}}_{l,t}) \quad (4.3)$$

Desta forma, a tarefa de recomendação de exercícios é modelada como um problema de decisão sequencial. A decisão tomada em um instante t (a recomendação de q_t^*) influencia o estado de conhecimento futuro do aluno, $\hat{\mathbf{v}}_{l,t+1}$, que por sua vez, impacta a decisão subsequente em $t + 1$. A metodologia proposta neste trabalho constitui uma abordagem *model-based* para resolver este problema, onde primeiramente se constrói um modelo do aluno ($\mathcal{F}_{KT}$) para, em seguida, utilizar as predições deste modelo, em conjunto com as regras de progressão do grafo de conhecimento, para informar a política de decisão (Π^*).

4.2 Modelagem do KG e Parametrização Curricular

A representação computacional do domínio de conhecimento fundamentou-se na BNCC para o Ensino Médio. A modelagem seguiu uma abordagem ontológica para estruturar o currículo em um grafo de conhecimento de dependências $\mathcal{G}$, permitindo a inferência de estados de aprendizagem e a recomendação sequencial de itens. O processo foi dividido em: extração e estruturação de habilidades, definição de KCs e parametrização probabilística.

4.2.1 Estruturação das Habilidades da BNCC

Inicialmente, foram extraídos dados das habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC. As habilidades foram decompostas e organizadas tabularmente para identificar objetos de conhecimento e conceitos estruturantes. A Tabela 4.1 exemplifica a estrutura de dados extraída, que serve como metadado de referência para o grafo.

Tabela 4.1: Amostra da Estruturação das Habilidades da BNCC.

ID	Descrição	Objeto de Conhecimento	Conceito Estruturante
EM13MAT103	Interpretar e compreender textos científicos [...] que empreguem unidades de medida [...] e conversões.	Conjuntos e operações	Números
EM13MAT301	Resolver e elaborar problemas [...] que envolvam equações lineares simultâneas [...].	Funções	Álgebra
EM13MAT504	Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones [...].	Geometria espacial	Geometria

4.2.2 Definição dos KCs

Considerando que as habilidades da BNCC não apresentam uma organização nativa em grafo de pré-requisitos e possuem alta amplitude semântica, optou-se por uma granularidade mais fina para o rastreamento do aprendizado. Foram definidos e instanciados 82 KCs. Cada KC representa uma unidade atômica de instrução (e.g., "Operações Básicas", "Equação do 1º Grau", "Geometria Espacial de Prismas") e foi mapeado explicitamente a uma ou mais habilidades da BNCC (propriedade `related_bncc_skills`).

A topologia do grafo foi estabelecida através de relações de dependência direta (`depends_on`), formando um Grafo Acíclico Dirigido (DAG). Esta estrutura impõe que a proficiência em um nó filho (e.g., `KC_Alg_Eq1Grau`) dependa da proficiência prévia em seus nós pais (e.g., `KC_Alg_Variaveis`, `KC_Num_Fracoas`).

4.2.3 Parametrização de Dificuldade e Limiares de Maestria

Cada KC k foi parametrizado pela tupla (d_k, Ω_k, Ψ_k) , onde d_k representa a dificuldade intrínseca, Ω_k o limiar de maestria (`mastery_threshold`) e Ψ_k o limiar de manutenção (`maintenance_threshold`).

Distribuição de Dificuldade O atributo de dificuldade $d_k \in [0, 1]$ foi atribuído com base na complexidade cognitiva e na profundidade do nó no grafo. KCs axiomáticos (raízes do grafo) possuem $d_k \approx 0,1$, enquanto KCs terminais ou abstratos atingem $d_k \approx$

0,9. A distribuição global de dificuldades segue uma normalidade ajustada para cobrir progressivamente o currículo.

Correlação Dificuldade-Maestria Estabeleceu-se uma correlação inversa entre a dificuldade (d) e o limiar de maestria (Ω). Pedagogicamente, considera-se injusto exigir níveis de quase perfeição em tópicos de alta complexidade intrínseca. Desta forma, KCs fundamentais (baixa dificuldade) demandam Ω elevado para garantir a solidez da base, enquanto KCs altamente complexos admitem um Ω comparativamente menor.

Política de Limiares e Compressão de Variância Os limiares de probabilidade para considerar um KC como "aprendido"(Ω) ou "em esquecimento"(Ψ) seguiram uma lógica de *clipping* estatístico e compressão de variância nas extremidades. Esta abordagem foi concebida para mitigar ruídos de inferência em modelos de KT em cenários de dados escassos. As regras aplicadas foram:

1. **Teto de Maestria** ($\Omega \leq 0,90$): Limitou-se a exigência máxima a 0,90 para evitar problemas de convergência assintótica, onde o esforço para atingir probabilidades próximas a 1,0 cresce exponencialmente devido ao parâmetro de deslize (*slip*).
2. **Piso de Manutenção** ($\Psi \geq 0,70$): Estabeleceu-se um valor mínimo de 0,70 para a manutenção. Valores inferiores a este patamar encontram-se na zona de incerteza estatística próxima ao acerto aleatório (*guessing*) em itens de múltipla escolha.
3. **Histerese Controlada** (∇): A diferença $\nabla = \Omega - \Psi$ define a margem de tolerância ao esquecimento antes que o sistema recomende revisão.
 - *KCs Intermediários*: Mantiveram um $\nabla \approx 0,15$, permitindo flexibilidade no fluxo de aprendizado.
 - *Extremos (Básicos e Avançados)*: Foi aplicada uma compressão de variância resultando em $\nabla \approx 0,10$.

Essa configuração impõe um regime de retroalimentação mais rigoroso nas pontas do currículo. Para KCs básicos (baixa dificuldade, alto Ω), o ∇ reduzido força revisões rápidas ao menor sinal de decaimento, protegendo a base estrutural do conhecimento. Para KCs avançados (alta dificuldade), o piso elevado de manutenção (Ψ) impede a retenção de "falsos positivos" de aprendizado.

4.3 Mapeamento Semântico e Anotação do Banco de Questões

Estabelecido o grafo de conhecimento como representação formal do currículo, a etapa subsequente conecta a estrutura abstrata aos materiais de avaliação. Para a operacionalização do sistema de tutoria, associa-se os vértices do grafo (KCs) aos itens de prática. Este mapeamento viabiliza o treinamento dos modelos de KT e a geração de recomendações. Esta seção detalha a metodologia para conectar um banco de 987 questões (UFSC e ENEM) aos 82 KCs definidos.

4.3.1 Abordagem Metodológica

A associação entre o texto de uma questão e a definição de um KC requer correspondência semântica profunda. Adota-se uma metodologia composta por quatro etapas: (1) enriquecimento semântico via geração de resoluções; (2) recuperação vetorial (*Bi-Encoder*); (3) reordenamento (*Cross-Encoder*); e (4) validação e anotação contextual assistida por LLMs.

4.3.2 Pipeline de Mapeamento e Anotação

Sejam $\mathcal{K} = \{k_1, k_2, \dots, k_{82}\}$ o conjunto de KCs e $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_{987}\}$ o conjunto de Questões. O objetivo é estabelecer o mapeamento $\mathcal{M} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Q})$.

Etapa 1: Enriquecimento Semântico (Pré-processamento) Para mitigar a ambiguidade de enunciados curtos, submete-se cada questão $q_j \in \mathcal{Q}$ a um processo de geração de resolução passo a passo (*CoT*). Utiliza-se um LLM instruído para gerar duas saídas: a resolução explicativa ζ_j e uma lista de tópicos matemáticos inferidos κ_j . A questão passa a ser representada por um documento expandido D_j que concatena o enunciado, as alternativas, a resolução e os tópicos identificados: $D_j = \xi_j \oplus \zeta_j \oplus \kappa_j$.

Etapa 2: Construção da Query e Recuperação Ampliada Para cada $k \in \mathcal{K}$, define-se a query $\text{desc}(k)$ pela descrição textual do KC. Uma função de *embedding* $f_{BE} : \text{string} \rightarrow \mathbb{R}^n$ projeta os textos no espaço vetorial. Calculam-se $\mathbf{k} = f_{BE}(\text{desc}(k))$ e $\mathbf{q}_j = f_{BE}(D_j)$. A similaridade cosseno é dada por:

$$S(k, q_j) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{q}_j\|} \quad (4.4)$$

Selecionam-se as $N = 150$ questões com maior similaridade S para formar o conjunto de candidatos de alta abrangência $\mathcal{C}_k$, garantindo *recall* máximo antes do refinamento.

Etapa 3: Re-ranqueamento e Filtragem Dinâmica Refina-se $\mathcal{C}_k$ via função de relevância $f_{CE} : (\text{string}, \text{string}) \rightarrow [0, 1]$, implementada por um *Cross-Encoder*. Calcula-se o escore de confiança $\rho_{kj} = f_{CE}(\text{desc}(k), D_j)$ para cada par. Adota-se um critério de *Adaptive Thresholding*. Define-se o subconjunto de validação $\mathcal{C}'_k$ filtrando-se os candidatos que superam um limiar de confiança ϖ (calibrado experimentalmente em $\varpi \approx 0,45$), sujeito a restrições de amostragem mínima e máxima (η_{min}, η_{max}):

$$\mathcal{C}'_k = \{q_j \in \mathcal{C}_k \mid (\rho_{kj} \geq \varpi \wedge |\mathcal{C}'_k| < \eta_{max}) \vee |\mathcal{C}'_k| < \eta_{min}\} \quad (4.5)$$

Esta formulação assegura que KCs densos não sejam truncados arbitrariamente e KCs esparsos não incluam ruído estatístico.

Etapa 4: Validação e Anotação Condicional (Blind Review) Cada par candidato $(k, q_j) \in \mathcal{C}'_k$ é submetido a uma avaliação cega por um LLM de alta capacidade. O modelo recebe a definição do KC k , o enunciado ξ_j e a resolução ζ_j , sem acesso ao rótulo κ_j previamente atribuído à questão, consistindo em:

1. **Validação de Pertinência (Φ_V):** Função binária $\Phi_V : (\mathcal{K}, \mathcal{Q}) \rightarrow \{0, 1\}$ que verifica se os passos lógicos em ζ_j mobilizam a habilidade k .
2. **Anotação de Dificuldade Condicional (Φ_A):** Se $\Phi_V = 1$, aplica-se Φ_A para atribuir o escore $\delta_{j,k} \in [0, 1]$, analisando a complexidade cognitiva da aplicação de k no contexto específico.

O conjunto final mapeado é $\mathcal{Q}_k = \{q_j \in \mathcal{C}'_k \mid \Phi_V(k, q_j) = 1\}$.

4.3.3 Curadoria e Pós-Processamento do Mapeamento

Após a consolidação das anotações geradas na etapa anterior, identificou-se a necessidade de um estágio de curadoria para assegurar a estabilidade matemática do simulador estocástico e a validade pedagógica do banco de itens. Este pós-processamento consistiu em duas transformações fundamentais: a restrição de densidade de KCs e a padronização das dificuldades condicionais.

Limite de Densidade de Componentes por Questão Para mitigar potenciais erros de anotação e evitar a diluição excessiva da probabilidade holística de acerto ($P_{holistic}$, definida posteriormente na Equação 4.14), estabeleceu-se um teto para o número máximo de KCs associados a um único item. Definiu-se o limite de $\tau_{max_kc} = 8$. Questões cuja cardinalidade do conjunto de KCs exigidos ultrapassou este limiar ($|\mathcal{K}_j| > 8$) foram consideradas ruidosas e removidas do banco de questões ativo, garantindo que o agrupamento conjuntivo no espaço de probabilidade permanecesse e realista.

Padronização Logit da Dificuldade Condicional Para preservar o ranqueamento relativo das dificuldades condicionais ($\delta_{j,k}$) atribuídas inicialmente, prover um intervalo pedagogicamente viável e garantir estabilidade matemática estrita nas extremidades do modelo, implementou-se uma Padronização Logit nativa à IRT.

Primeiramente, aplica-se um recorte de segurança (*clipping*) nas dificuldades brutas para evitar valores assintóticos no logaritmo, resultando em δ_{safe} . Em seguida, projeta-se estes valores para o espaço *log-odds* (logit):

$$d_{\text{raw}} = \ln \left(\frac{\delta_{\text{safe}}}{1 - \delta_{\text{safe}}} \right) \quad (4.6)$$

Posteriormente, força-se a normalidade da distribuição aplicando o escalonamento Z-score padrão sobre os valores no espaço logit, onde μ_{raw} e σ_{raw} são, respectivamente, a média e o desvio padrão das dificuldades em d_{raw} :

$$d_{\text{norm}} = \frac{d_{\text{raw}} - \mu_{\text{raw}}}{\sigma_{\text{raw}}} \quad (4.7)$$

Por fim, os valores padronizados são projetados com segurança de volta para o espaço de probabilidade contínua $[0, 1]$ utilizando a função logística inversa (sigmoide), obtendo-se a dificuldade condicional final calibrada para o simulador:

$$\delta_{\text{final}} = \frac{1}{1 + e^{-d_{\text{norm}}}} \quad (4.8)$$

Estas transformações produzem o conjunto consolidado de itens e parâmetros que alimentarão o motor estocástico de geração de dados curriculares.

4.4 Construção de um Dataset Sintético

Dada a formalização do grafo de conhecimento $\mathcal{G}$ (Seção 4.2) e o mapeamento semântico $\mathcal{M} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Q})$ (Seção 4.3), dispõe-se da estrutura curricular e dos instrumentos de avaliação. O treinamento de modelos de KT, contudo, exige sequências de interações (s_l, k_i, a_{li}, t) . Esta etapa descreve a geração do Dataset Sintético D que simula a trajetória de aprendizado de alunos virtuais, suprimindo a ausência de dados públicos densos alinhados à BNCC. Para garantir a reprodutibilidade integral do processo, todas as operações estocásticas do pipeline de geração foram condicionadas a uma semente global fixada em `seed = 42`, aplicada consistentemente aos geradores de números pseudo-aleatórios de todas as bibliotecas utilizadas.

4.4.1 Modelagem Cognitiva e Amostragem Estocástica da População Sintética

A modelagem cognitiva da população estudantil na simulação é fundamentada em uma abordagem estocástica contínua. Cada agente virtual $s_l \in \mathcal{S}$ é inicializado com um vetor de parâmetros $\Theta_l = (\lambda_l, \phi_l, \gamma_l, \sigma_l)$, amostrado a partir de distribuições de probabilidade marginais. Estes parâmetros regem as dinâmicas de aquisição, retenção e demonstração do conhecimento latente, sendo definidos formalmente como:

- $\lambda_l \in [0,05, 0,55]$: **Taxa de aprendizagem**. Determina a magnitude do incremento na maestria $v_{l,t,k}$ após uma interação bem-sucedida. O limite superior restringe a ocorrência de aquisição instantânea de conhecimento, forçando uma progressão gradual e realista. A distribuição base garante uma população predominantemente mediana em sua capacidade de absorção.
- $\phi_l \in [0,0008, \infty)$: **Fator de esquecimento**. Define a taxa de decaimento temporal da memória do agente, modelada por uma função exponencial negativa. O piso estocástico reduzido previne um decaimento excessivamente severo, garantindo a viabilidade da progressão ao longo do currículo sem aprisionamento em ciclos infinitos de revisão.
- $\gamma_l \in [0, 0,35]$: **Probabilidade de *guess*** (acerto casual). Probabilidade condicional de o agente s_l responder corretamente a um item sem possuir o domínio latente do KC exigido, modelando o acerto por eliminação ou sorte.
- $\sigma_l \in [0, 0,35]$: **Probabilidade de *slip*** (deslize). Probabilidade condicional de o agente cometer um erro em um item cujo domínio latente do KC é possuído, simulando desatenção ou fadiga.

Para garantir a identificabilidade do modelo e evitar a degeneração na estimativa do estado latente (onde o comportamento aleatório se sobrepõe ao sinal cognitivo), os parâmetros γ_l e σ_l são estritamente limitados superiormente a 0,35.

A instanciação da população sintética $\mathcal{S}$ no instante $t = 0$ ocorre por meio da amostragem independente das distribuições descritas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Distribuições probabilísticas para parametrização dos agentes virtuais.

Parâmetro	Distribuição de Amostragem	Propriedade Estatística
Taxa de Aprendizagem (λ_l)	$0,05 + 0,50 \cdot \text{Beta}(\alpha = 5, \beta = 5)$	Transformação afim com suporte em $[0,05, 0,55]$.
Fator de Esquecimento (ϕ_l)	$0,0008 + \text{LogNormal}(\mu = -5,8, \sigma = 0,4)$	Translação garantindo positividade e cauda assimétrica.
Probabilidade de <i>Guess</i> (γ_l)	$\mathcal{TN}(\mu = 0,20, \sigma = 0,05, [0, 0,35])$	Normal truncada limitada ao intervalo.
Probabilidade de <i>Slip</i> (σ_l)	$\mathcal{TN}(\mu = 0,12, \sigma = 0,05, [0, 0,35])$	Normal truncada para erro condicional.

Após a amostragem no instante inicial, o vetor Θ_l permanece invariável durante toda a trajetória de simulação do agente s_l . Consequentemente, as sequências de respostas

geradas resultam da interação estocástica entre a proficiência latente contínua do agente, mediada por estes parâmetros cognitivos, e as dificuldades condicionais dos itens calibrados no espaço *logit*.

4.4.2 Modelo Matemático do Agente e Processo de Interação

O simulador opera sobre um modelo de estados latentes discretos e incorpora dinâmicas temporais de sessões de estudo. O estado cognitivo de um agente s_l no instante t é definido pela tupla $\Sigma_{l,t} = (\mathbf{v}_{l,t}, \mathbf{R}_{l,t}, \mathbf{C}_{rep,l,t}, \boldsymbol{\Theta}_l, A_l)$, onde:

1. $\mathbf{v}_{l,t} \in [0, 1]^K$: **Vetor de maestria**, onde o componente $v_{l,t,k}$ representa a probabilidade de domínio sobre o KC $k \in \mathcal{K}$.
2. $\mathbf{R}_{l,t} \in \mathbb{R}^{+K}$: **Vetor de recência**, onde $R_{l,t,k}$ registra o *timestamp* (em dias) da última interação envolvendo o KC k .
3. $\mathbf{C}_{rep,l,t} \in \mathbb{N}^K$: **Vetor de repetições espaçadas**, que contabiliza quantas vezes o agente recuperou com sucesso o domínio do KC k após este ter entrado na zona de esquecimento.
4. $\boldsymbol{\Theta}_l$: Vetor de parâmetros cognitivos intrínsecos do agente.
5. A_l : **Arquétipo comportamental** discreto do agente, atribuído estocasticamente.

Inicialização e Perfis Comportamentais Anômalos Para emular a variabilidade orgânica de ambientes educacionais reais e avaliar a robustez dos modelos de KT frente a ruídos sistemáticos, 15% da população sintética é designada a arquétipos de desvio comportamental (A_l):

- **Perfil Padrão (85%)**: Segue o fluxo cognitivo estocástico normal.
- **Resposta Aleatória Rápida (3%)**: Responde itens de forma indiscriminada e atipicamente veloz ($\Delta t \sim \mathcal{U}(0,08, 0,20)$ minutos). Para este perfil, inibe-se a função de atualização de estado, assumindo que não há esforço cognitivo para o aprendizado.
- **Aprendizagem Massificada (3%)**: Caracterizado por sessões de estudo extenuantes ($\sim \mathcal{N}(80, 25)$ interações por sessão) seguidas de longos períodos de inatividade letiva ($\Delta t_{\text{pausa}} = \max(10, 0, \mathcal{N}(20, 0, 5, 0))$ dias). O agente sofre penalização contínua por fadiga cognitiva durante a sessão.
- **Proficiência Oculta (3%)**: Simula um aluno cuja proficiência prévia não foi rastreada pelo sistema, inicializando seu vetor de maestria global com valores anormalmente elevados e restritos: $v_{l,0,k} = \text{clip}(\mathcal{N}(0,85, 0,05), 0,75, 0,95)$.

- **Desatenção Crônica (3%):** O agente possui um parâmetro intrínseco de *slip* drasticamente elevado ($\sigma_l \sim \mathcal{U}(0,30, 0,45)$), gerando um alto volume de falsos negativos na avaliação.
- **Desengajamento em Revisão (3%):** Exibe resistência ou desengajamento severo quando submetido a itens de conhecimento pretérito (modo de revisão), sofrendo decréscimo artificial na probabilidade de acerto.

As proporções dos perfis comportamentais foram definidas de forma conservadora com base em considerações de plausibilidade pedagógica, e uma análise de sensibilidade constitui trabalho futuro.

A inicialização do vetor de maestria ($t = 0$) para a população (com exceção do arquétipo de Proficiência Oculta) reflete a aptidão latente do aluno e a dificuldade intrínseca do currículo. A maestria inicial de um aluno l para cada componente k , denotada por $v_{l,0,k}$, é amostrada de uma distribuição normal truncada no intervalo $[0,2, 0,7]$. Formalmente, $v_{l,0,k} \sim \mathcal{N}(\mu_{final}, 0,08^2)$, onde a média é definida por:

$$\mu_{final} = (0,65 - 0,40 \cdot d_k) + (\lambda_l - 0,5) \cdot 0,2 \quad (4.9)$$

Dinâmica Temporal e Modelagem do Esquecimento Considere uma interação no instante t , onde o agente responde a uma questão q_j . A retenção do conhecimento é modelada como uma função decrescente do tempo, simulando o fenômeno de memória efêmera, acrescida do *Efeito de Espaçamento*.

Antes de computar a probabilidade de acerto, a maestria atual do agente em cada KC requerido é penalizada pelo lapso temporal $\Delta t_k = t - R_{l,t,k}$. Para modelar a consolidação da memória, o parâmetro de esquecimento original ϕ_l é amortecido com base no histórico de recuperações ativas $C_{rep,l,k}$ (cujas regras estritas de incremento são avaliadas após a interação, na etapa de atualização de estado). Isso resulta em uma taxa de decaimento efetiva $\phi'_{l,k} = \phi_l \cdot (0,50)^{C_{rep,l,k}}$. A maestria efetiva ajustada pelo tempo, $v'_{l,t,k}$, é dada por:

$$v'_{l,t,k} = v_{l,t,k} \cdot e^{-\phi'_{l,k} \cdot \Delta t_k} \quad (4.10)$$

Probabilidade de Acerto e Simulação da Resposta A determinação do sucesso na interação integra o estado de conhecimento latente com fatores estocásticos de desempenho. O modelo adota uma formulação alinhada à IRT, operando no espaço logístico.

Para cada KC k requerido pela questão q_j , a maestria ajustada $v'_{l,t,k}$ e a dificuldade condicional $\delta_{j,k}$ são convertidas para a escala *logit* (log-odds). Para garantir estabilidade numérica e evitar assíntotas matemáticas na função logarítmica, ambos os parâmetros são previamente restritos (*clipping*) ao intervalo estrito $[0,001, 0,999]$:

$$\beta_{l,t,k} = \ln \left(\frac{v'_{l,t,k}}{1 - v'_{l,t,k}} \right) \quad (\text{Proficiência do agente}) \quad (4.11)$$

$$b_{j,k} = \ln \left(\frac{\delta_{j,k}}{1 - \delta_{j,k}} \right) \quad (\text{Dificuldade do item}) \quad (4.12)$$

Esta parametrização espelha a IRT discutida na Seção 2.3.1: a proficiência $\beta_{l,t,k}$ desempenha papel análogo ao do parâmetro de habilidade θ_i , e a dificuldade do item no espaço logit $b_{j,k}$ corresponde ao parâmetro de dificuldade b_j da IRT (com índice k adicional por ser definida por KC); de modo similar, os parâmetros de acerto casual γ_l e de deslize σ_l (Seção 4.4.1) correspondem, respectivamente, aos termos de *guessing* (c_j) e de erro (d_j) do modelo 4PL. Adota-se notação própria por se tratar de um simulador generativo parametrizado por KC, e não de uma calibração de itens via IRT clássica.

A probabilidade do agente possuir o conhecimento necessário para o componente k , denotada por $P(\text{know})_{l,k}$, é calculada pela função logística aplicada à diferença entre proficiência e dificuldade:

$$P(\text{know})_{l,k} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_{l,t,k} - b_{j,k})}} \quad (4.13)$$

Dado que a questão q_j pode exigir múltiplos KCs simultâneos, a probabilidade holística de domínio conceitual, $P_{\text{holistic}}(q_j)$, é definida pela média geométrica das probabilidades individuais. Esta agregação modela a natureza conjuntiva do conhecimento:

$$P_{\text{holistic}}(q_j) = \left(\prod_{k \in \mathcal{K}_j} P(\text{know})_{l,k} \right)^{\frac{1}{|\mathcal{K}_j|}} \quad (4.14)$$

Subsequentemente, incorporam-se os parâmetros de *guess* (γ_l) e *slip* (σ_l) do agente para derivar a probabilidade base de resposta correta:

$$P(\text{correct_base})_{l,j} = \gamma_l + (1 - \gamma_l - \sigma_l) \cdot P_{\text{holistic}}(q_j) \quad (4.15)$$

Esta probabilidade sofre intervenções comportamentais diretas baseadas no arquétipo A_l do aluno, compondo a probabilidade de acerto final $P(\text{correct})_{l,j}$:

- Se A_l for **Desengajamento em Revisão** e o sistema estiver operando em modo de revisão: a probabilidade sofre um decréscimo drástico, $P(\text{correct})_{l,j} \leftarrow P(\text{correct_base})_{l,j} \cdot 0,5$.

- Se A_l for **Aprendizagem Massificada** e o número de interações na sessão atual (x) exceder 30: aplica-se uma penalização linear por fadiga cognitiva. Define-se a queda $\Delta_{\text{fadiga}} = \min(0,40, (x - 30) \cdot 0,015)$. A probabilidade final é limitada inferiormente pela taxa de adivinhação: $P(\text{correct})_{l,j} \leftarrow \max(\gamma_l, P(\text{correct_base})_{l,j} - \Delta_{\text{fadiga}})$.
- Se A_l for **Resposta Aleatória Rápida**: o conhecimento latente é ignorado, restando apenas o acerto casual: $P(\text{correct})_{l,j} \leftarrow \gamma_l$.
- **Caso contrário**: Para os demais arquétipos (**Perfil Padrão**, **Proficiência Oculta**, **Desatenção Crônica**) ou quando as condições de gatilho acima não forem ativadas, a probabilidade final permanece inalterada, espelhando fielmente a proficiência latente e os ruídos intrínsecos: $P(\text{correct})_{l,j} = P(\text{correct_base})_{l,j}$.

O resultado binário da interação, $a_{l,j} \in \{0,1\}$, é amostrado de uma distribuição de Bernoulli:

$$a_{l,j} \sim \text{Bernoulli}(P(\text{correct})_{l,j}) \quad (4.16)$$

Avanço Temporal e Dinâmica de Sessões O tempo global t (em dias) avança através da soma do tempo de interação da questão (Δt_{int}) e dos intervalos de repouso entre sessões de estudo (Δt_{pausa}).

O consumo temporal por questão é $\Delta t_{\text{int}} \sim \mathcal{U}(0,08, 0,20)$ minutos para o perfil **Resposta Aleatória Rápida**, e $\Delta t_{\text{int}} = \max(0,5, \mathcal{N}(5,0, 3,0))$ minutos para os demais arquétipos. As interações acumulam-se até atingir o limite da sessão atual (L_{sessao}), momento em que o agente entra em repouso prolongado (Δt_{pausa}) e um novo limite é estabelecido para a sessão seguinte:

- **Aprendizagem Massificada**: Simula evasões temporárias longas com $\Delta t_{\text{pausa}} = \max(10,0, \mathcal{N}(20,0, 5,0))$ dias e sessões extensas $L_{\text{sessao}} = \text{int}(\mathcal{N}(80, 25))$.
- **Demais Perfis**: A pausa padrão é $\Delta t_{\text{pausa}} = \max(1,0, \mathcal{N}(3,0, 1,5))$ dias, sujeita a 8% de probabilidade de um acréscimo anômalo de $\max(7,0, \mathcal{N}(14,0, 4,0))$ dias (e.g., desengajamento pontual). O tamanho da sessão é proporcional à capacidade de aprendizado do agente: $L_{\text{sessao}} = \text{int}(\mathcal{N}(50 \cdot \lambda_l, 5))$.

Atualização do Estado de Conhecimento (Aprendizagem) Após a interação, o estado global do agente $\Sigma_{l,t}$ é atualizado para $\Sigma_{l,t+1}$. Primeiramente, o contador de erros consecutivos (E_{cons}) é zerado se $a_{l,j} = 1$, ou incrementado se $a_{l,j} = 0$. A questão q_j é então registrada no histórico de itens utilizados pelo aluno para os KCs correspondentes, prevenindo repetições imediatas futuras.

Em caso de sucesso ($a_{l,j} = 1$) e desde que o agente não pertença ao arquétipo *Resposta Aleatória Rápida*, ocorre o reforço cognitivo. A maestria em todos os KCs envolvidos

$k \in \mathcal{K}_j$ é incrementada. Para emular a maior eficiência da recuperação ativa da memória, define-se um multiplicador contextual $M = 1,5$ para interações em modo de revisão, e $M = 1,0$ para aprendizagem regular. A taxa efetiva de aprendizagem é restrita por $\lambda_{l,t}^* = \min(0,95, \lambda_l \cdot M)$.

O incremento é proporcional à margem de melhoria $(1 - v'_{l,t,k})$, acrescido de um ruído Gaussiano $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 0,02^2)$ para simular variabilidade. Em caso de erro ($a_{l,j} = 0$), a maestria latente não sofre acréscimo. A função de atualização é dada por:

$$v_{l,t+1,k} = \begin{cases} \text{clip}(v'_{l,t,k} + \lambda_{l,t}^* \cdot (1 - v'_{l,t,k}) + \epsilon, 0, 0,999) & \text{se } a_{l,j} = 1 \\ v'_{l,t,k} & \text{se } a_{l,j} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Para sustentar a formulação da ZDP em revisões futuras, o pico histórico de maestria do aluno para o componente é atualizado rigorosamente em interações bem-sucedidas:

$$v_{peak,l,k} = \max(v_{peak,l,k}, v_{l,t+1,k}).$$

Independentemente do resultado da interação, o vetor de recência $\mathbf{R}_{l,t}$ é atualizado ($R_{l,t+1,k} = t$), reiniciando o cronômetro do decaimento. Adicionalmente, verifica-se o critério restrito de consolidação da memória: o contador de repetições espaçadas $C_{rep,l,k}$ é incrementado se, e somente se, a interação for uma revisão formal, o componente estivesse criticamente em risco antes da resposta (abaixo do limiar de manutenção: $v'_{l,t,k} < \Psi_k$), e o incremento de aprendizagem obtido for suficiente para restaurar a maestria a um estado seguro ($v_{l,t+1,k} \geq \Psi_k$). Este mecanismo garante que apenas a recuperação de conhecimentos que estavam à beira do esquecimento resulte em uma redução permanente da taxa de decaimento futuro.

Por fim, o sistema reavalia o estado de progressão no grafo (BFS). Se a maestria atualizada de um KC em aprendizagem atingir ou superar seu limiar de aprovação (Ω_k), o componente é promovido ao conjunto de dominados ($\mathcal{K}_{dom,l}$), seu registro local de questões utilizadas é limpo (permitindo a reexibição como *fallback* em revisões futuras), e os KCs filhos cujos pré-requisitos foram agora integralmente satisfeitos são desbloqueados na fronteira de aprendizagem.

4.4.3 Política de Seleção de Atividades e Progressão Curricular

A seleção de qual questão q_j apresentar ao agente s_l é governada por uma política pedagógica que gerencia a progressão do aluno através do grafo de conhecimento $\mathcal{G}$ e equilibra o aprendizado de novos KCs com a revisão de pré-requisitos.

Estrutura de Progressão Curricular e Mitigação de Fadiga. A progressão é gerenciada por uma estrutura de BFS adaptada, onde o estado de progresso de cada

agente s_l é mantido por um conjunto de variáveis de controle:

- $\mathcal{K}_{dom,l}$: O conjunto de KCs que o agente já domina, i.e., aqueles cuja maestria $v_{l,t,k}$ atingiu ou superou o limiar Ω_k .
- $\mathcal{K}_{unl,l}$: O conjunto de KCs desbloqueados, ou seja, todos os componentes cujos pré-requisitos já se encontram em $\mathcal{K}_{dom,l}$.
- $\mathcal{F}_{learn,l}$: A fila de aprendizagem dos KCs desbloqueados. Inicialmente operando com lógica FIFO (First-In, First-Out), a fila é dinamicamente reordenada caso o agente demonstre fadiga cognitiva localizada, promovendo a prática intercalada. Novos componentes de $\mathcal{K}_{unl,l}$ são adicionados ao final da fila à medida que são desbloqueados.
- $k_{foco,l}$: O KC foco, definido como o primeiro elemento atual da fila de aprendizagem $\mathcal{F}_{learn,l}$, representando o objetivo imediato de aprendizado do agente.

Para evitar o aprisionamento cognitivo e o esgotamento prematuro do agente em conceitos de alta dificuldade, a estrutura implementa um mecanismo de Prática Intercalada (*Interleaving*). A política rastreia a fadiga local através de uma variável de frustração contínua E_{cons} , que contabiliza os erros consecutivos do agente durante as tentativas de aprendizagem no KC foco. Caso o agente atinja um limiar de tolerância à frustração $\tau_{frust} = 5$ e existam alternativas de estudo disponíveis na fila ($|\mathcal{F}_{learn,l}| > 1$), a política executa uma rotação cíclica: o componente $k_{foco,l}$ atual é removido do topo da fila (*pop*) e reinserido no final (*append*), e o contador E_{cons} é reiniciado. Esta manobra atualiza o $k_{foco,l}$ para o próximo componente da fila, permitindo que o aluno avance em nós paralelos do grafo e retorne ao conceito desafiador posteriormente.

Política de Seleção do KC-Alvo. A cada interação, após a potencial rotação por fadiga descrita anteriormente, a política determina o componente-alvo (k_{target}) a ser praticado, priorizando a manutenção da base de conhecimento consolidada sobre a introdução de novos conteúdos. Primeiramente, o sistema avalia a necessidade de revisão, verificando o estado de todos os pré-requisitos recursivos do $k_{foco,l}$ atualizado. Seja $\text{Pre}^*(k_{foco,l})$ o conjunto formado pelo fecho transitivo dos antecessores de $k_{foco,l}$ no grafo $\mathcal{G}$ (i.e., pais, avós e raízes).

A maestria de cada pré-requisito histórico é recalculada para levar em conta o decaimento temporal (esquecimento), conforme a Equação 4.10. Se a maestria ajustada de qualquer ancestral k_i cair abaixo do seu respectivo limiar de manutenção Ψ_i , ele é adicionado a um conjunto de componentes em risco: $\mathcal{K}_{risk,l} = \{k_i \in \text{Pre}^*(k_{foco,l}) \mid v'_{l,t,i} < \Psi_i\}$.

A seleção do KC-alvo é então formalizada pela Equação 4.18. Se o conjunto de componentes em risco não estiver vazio, a política entra em **modo de revisão**, selecionando o

KC com a menor maestria latente atual para ser reforçado. Caso contrário, se a base de pré-requisitos estiver sólida, o agente permanece em **modo de aprendizagem** e prossegue com o KC foco.

$$k_{target} = \begin{cases} \arg \min_{k_i \in \mathcal{K}_{risk,l}} v'_{l,t,i} & \text{se } \mathcal{K}_{risk,l} \neq \emptyset \text{ (Revisão)} \\ k_{foco,l} & \text{se } \mathcal{K}_{risk,l} = \emptyset \text{ (Aprendizagem)} \end{cases} \quad (4.18)$$

Seleção da Questão via ZDP. Uma vez definido o KC-alvo k_{target} , a seleção final da questão a ser apresentada é guiada pelo conceito de ZDP. O processo ocorre em duas etapas: um filtro curricular heurístico para criar um conjunto de questões candidatas ($\mathcal{Q}_{cand}$) e, em seguida, a definição de um intervalo de probabilidade dinâmica observável $[P_{min}, P_{max}]$ para amostrar a questão mais adequada.

Modo de Aprendizagem. Quando a política de progressão determina que o agente deve focar em aprender um novo componente ($k_{target} = k_{foco,l}$), a seleção segue uma política de avanço curricular contido.

Filtro Curricular para Aprendizagem: A seleção de candidatos ($\mathcal{Q}_{cand}$) opera em dois níveis de prioridade. Um item inédito q_j (onde $q_j \notin \text{used}(k_{target})$) é admitido no conjunto estrito se todos os seus KCs secundários, $k_s \in \mathcal{K}_{sec}(q_j) = \mathcal{K}(q_j) \setminus \{k_{target}\}$, satisfizerem pelo menos uma das condições:

- O KC secundário já é dominado ($k_s \in \mathcal{K}_{dom,l}$) ou está desbloqueado ($k_s \in \mathcal{K}_{unl,l}$).
- O KC secundário representa um avanço curricular supervisionado: $\text{level}(k_s) \leq \text{level}(k_{target}) + 1$.

Caso o conjunto estrito resulte vazio, o sistema aplica uma política de relaxamento (*fall-back*), admitindo as questões inéditas que violam a restrição de profundidade, garantindo a progressão sobre a inanição prematura.

Cálculo da ZDP Base para Aprendizagem: A ZDP é mais ambiciosa nos estágios iniciais e converge nos finais. Com o hiperparâmetro de agressividade fixado em $\alpha_{learn} = 0,5$, o intervalo cognitivo latente é:

$$\Delta_{learn} = \alpha_{learn} \cdot (1 - v'_{l,t,target}) \quad (4.19)$$

$$P_{base_min} = v'_{l,t,target} \quad (4.20)$$

$$P_{base_max} = \min(1, 0, v'_{l,t,target} + \Delta_{learn}) \quad (4.21)$$

Modo de Revisão. Quando o alvo encontra-se em risco ($k_{target} \in \mathcal{K}_{risk,l}$), a prioridade é o reforço sem introdução de ruído.

Filtro Curricular para Revisão: Neste modo, o filtro prioriza admitir itens inéditos se, e somente se, todo KC secundário for estritamente um pré-requisito histórico do KC-alvo:

$$\forall k_s \in \mathcal{K}_{sec}(q_j), k_s \in \text{Pre}^*(k_{target}) \quad (4.22)$$

Dada a alta esparsidade estrutural, este modo implementa um duplo *fallback*. Se o filtro estrito falhar, admite-se primeiramente qualquer item inédito de k_{target} . Se ainda assim restar vazio, permite-se excepcionalmente o reaproveitamento de itens já visualizados pelo aluno, emulando um mecanismo de *flashcards* iterativos.

Cálculo da ZDP Base para Revisão: A ZDP de recuperação ancora-se no pico histórico de maestria alcançado ($v_{peak,l,target}$) mitigando a dificuldade imposta. Com margem mínima $\Delta_{rev} = 0,05$:

$$P_{base_min} = v'_{l,t,target} + \frac{v_{peak,l,target} - v'_{l,t,target}}{2} \quad (4.23)$$

$$P_{base_max} = \max(P_{base_min} + \Delta_{rev}, v_{peak,l,target}) \quad (4.24)$$

Projeção da ZDP e Seleção da Questão. Os limites cognitivos latentes base (P_{base_min} , P_{base_max}) são projetados para o espaço de probabilidade *observável* de acerto do aluno, integrando sua propensão ao acerto casual (γ_l) e deslize (σ_l):

$$P_{min} = \gamma_l + (1 - \gamma_l - \sigma_l) \cdot P_{base_min} \quad (4.25)$$

$$P_{max} = \gamma_l + (1 - \gamma_l - \sigma_l) \cdot P_{base_max} \quad (4.26)$$

Cálculo dos Pesos e Amostragem: Para cada $q_j \in \mathcal{Q}_{cand}$, o peso w_j baseia-se em sua probabilidade holística $P(\text{correct})_{l,j}$ (Equação 4.15). A função platô, com $\sigma_w = 0,15$, atribui peso máximo (1,0) dentro da ZDP observável e decaimento Gaussiano nas bordas:

$$w_j = \begin{cases} 1,0 & \text{se } P_{min} \leq P(\text{correct})_{l,j} \leq P_{max} \\ \exp\left(-\frac{(P(\text{correct})_{l,j} - P_{min})^2}{2\sigma_w^2}\right) & \text{se } P(\text{correct})_{l,j} < P_{min} \\ \exp\left(-\frac{(P(\text{correct})_{l,j} - P_{max})^2}{2\sigma_w^2}\right) & \text{se } P(\text{correct})_{l,j} > P_{max} \end{cases} \quad (4.27)$$

Se o conjunto avaliado consistir apenas de itens extremos, resultando em um somatório de pesos computacionalmente nulo ($\sum w_k = 0$), o sistema previne a instabilidade assumindo uma distribuição uniforme temporária ($w_j = 1,0$). A questão final, $q_{selected}$, é então amostrada aleatoriamente do conjunto proporcionalmente a w_j :

$$P(q_j | \mathcal{Q}_{cand}) = \frac{w_j}{\sum_{q_k \in \mathcal{Q}_{cand}} w_k} \quad (4.28)$$

Condições de Parada e Evasão Estocástica. A trajetória sequencial do agente s_l encerra-se caso atinja um dos quatro estados terminais:

1. **Prazo do Ano Letivo (*Time Deadline*):** O ambiente estipula um limite temporal intrínseco. A simulação finaliza se o relógio global t superar $T_{max} = \max(200, 0, \mathcal{N}(290, 0, 30, 0))$ dias letivos.
2. **Maestria ou Maestria Parcial:** A travessia conclui naturalmente por êxito cognitivo quando a fila de focos esvazia. Se $|\mathcal{K}_{dom,l}| = |\mathcal{K}|$, consolida-se a Maestria Absoluta; do contrário, registra-se uma Maestria Parcial.
3. **Inanição Curricular (*Starvation*):** Se o filtro hierárquico esgotar absolutamente todas as opções em $\mathcal{Q}_{cand}$ (incluindo permissões restritas de *fallback*) para um dado k_{target} , a simulação entra em colapso (*starvation*).
4. **Evasão Comportamental (*Behavioral Dropout*):** Modelada iterativamente para capturar o abandono sistêmico. A probabilidade diária base ($P_{base} = 0,0001$) sofre escalonamento agressivo sob acúmulo de frustração ($E_{cons} \geq 5$), resultando na chance de abandono:

$$P_{dropout} = \min \left(0,95, P_{base} + 0,001 \cdot (\max(0, E_{cons} - 5))^{1,5} \right) \quad (4.29)$$

4.4.4 Imputação Topológica via Monte Carlo (ITMC)

Apesar do rigor metodológico no mapeamento semântico e na etapa de curadoria (Seção 4.3.3), a topologia do banco consolidado de itens apresenta esparsidade empírica localizada. Quando a política de seleção adaptativa submete os agentes sintéticos a este grafo sob as estritas restrições curriculares (BFS) e cognitivas (ZDP), observa-se um fenômeno de inanição sistêmica (*Starvation*). Devido a "buracos" no gradiente de dificuldade de determinados KCs, o filtro curricular frequentemente resulta em um conjunto de candidatos vazio ($\mathcal{Q}_{cand} = \emptyset$), forçando a parada prematura da simulação antes que o agente atinja a maestria global. Para mitigar este gargalo, propôs-se a *Imputação Topológica via Monte Carlo*: um algoritmo baseado em simulações estocásticas iterativas projetado para identificar e suprir automatizadamente as falhas de densidade na rede curricular.

Definição dos Componentes de Simulação Para a correta especificação do algoritmo de otimização, formalizam-se as entradas, o motor de orquestração e as saídas esperadas do processo:

1. **O Grafo Empírico Inicial ($\mathcal{G}^{(0)}$):** Corresponde à rede de conhecimento canônica produzida ao final da Seção 4.3.3. Contém os K componentes de conhecimento e o conjunto restrito de questões reais mapeadas pelo pipeline de Mapeamento

Semântico, após a padronização *logit* e a poda heurística.

2. **A População Estocástica Fixa ($\mathcal{S}$):** Um conjunto instanciado de $N = 800$ agentes virtuais, gerado estritamente pelas regras de amostragem cognitiva e arquétipos comportamentais definidos na Seção 4.4.1. A semente estocástica desta população é congelada. Esta decisão atua como um mecanismo rigoroso de redução de variância, assegurando que alterações na taxa de evasão se devam unicamente a melhorias topológicas no grafo, e não a flutuações nas aptidões da amostra entre iterações.
3. **O Motor Orquestrador (*SimulateMonteCarlo*):** Representa a abstração computacional que integra a modelagem matemática e estocástica dos agentes (Seção 4.4.2) com as políticas de seleção e progressão curricular (Seção 4.4.3). Para cada agente da população $\mathcal{S}$ navegando no ambiente $\mathcal{G}^{(w)}$, a função executa o ciclo temporal interativo completo, computando as probabilidades dinâmicas de acerto, aplicando os efeitos de esquecimento e arquétipos comportamentais, e atualizando o estado latente de conhecimento, até que o agente atinja um dos estados terminais (Maestria, Evasão Comportamental, Limite de Tempo ou Inanição).
4. **A Matriz de Log de Interações ($\mathcal{D}^{(w)}$):** O registro sequencial bruto (*dataset*) gerado por uma rodada de simulação. Consiste em uma coleção longitudinal de tuplas na forma $\langle s_l, q_j, \mathcal{K}_j, P(\text{correct}), a_{l,j}, \Delta t, t \rangle$, documentando o estado microscópico de cada resposta.
5. **O Vetor de Estados Terminais ($\mathbf{E}_{reason}$):** Um mapeamento que associa cada agente $s_l \in \mathcal{S}$ à sua respectiva condição de parada ao final da simulação, permitindo a extração de métricas de falha sistêmica.

Dinâmica de Identificação e Imputação Estrutural A cada iteração (ou "onda" de imputação) w , o motor *SimulateMonteCarlo* avalia o ambiente atual $\mathcal{G}^{(w)}$. Ao final da rodada, o pipeline filtra o vetor $\mathbf{E}_{reason}$ para extrair o conjunto de componentes críticos $\mathcal{K}_{starved}^{(w)}$, correspondente aos KCs que atuavam como alvo de aprendizagem (k_{target}) no exato momento da inanição de qualquer agente.

Para garantir fluidez na progressão estocástica futura, o algoritmo impõe duas restrições de densidade para todo KC $k \in \mathcal{K}$:

1. **Volume Mínimo Absoluto:** Cada componente deve possuir no mínimo $\eta_{min} = 20$ itens associados em sua topologia direta.
2. **Cobertura de Gradiente (Bins):** O conjunto de itens associados a k deve cobrir os quartis essenciais de dificuldade. Define-se o conjunto de âncoras $\mathcal{B} = \{0,25, 0,50, 0,75, 0,90\}$. Um *bin* $b \in \mathcal{B}$ é considerado coberto se existe um item estru-

tural q associado a k possuindo dificuldade condicional $\delta_{q,k}$ tal que $|\delta_{q,k} - b| \leq 0,15$.

Caso um componente k seja identificado como crítico no grafo ($k \in \mathcal{K}_{starved}^{(w)}$), sua exigência volumétrica local sofre uma penalidade heurística, sendo incrementada em 25 itens adicionais para alargar a margem elástica da ZDP naquele nó.

Instanciação de Nós de Itens Parametrizados Ressalta-se que o algoritmo não redige enunciados linguísticos. Para suprir os déficits estruturais, instancia-se no grafo Nós de Itens Parametrizados (q_{synth}). Este nó fantasma atua como um invólucro matemático: atribui-se a ele o KC requerido k e uma dificuldade condicional $\delta_{synth,k}$. Esta dificuldade é amostrada para cobrir especificamente as *bins* faltantes ou, residualmente, é amostrada uniformemente do conjunto discreto de restrições operacionais $\mathcal{D}_{oper} = \{0,2, 0,3, 0,4, \dots, 0,8\}$. Para emular a complexidade conjuntiva da BNCC, há 5% de probabilidade de o nó associar-se também a um pré-requisito secundário $k_{anc} \in \text{Pre}^*(k)$, limitando-se sua dificuldade a $\delta_{synth,anc} = \text{clip}(\delta_{synth,k} - 0,2, 0,1, 0,9)$.

Formalização do Algoritmo A orquestração metodológica do *ITMC* é descrita no Algoritmo 1. O processo atua iterativamente até atingir a convergência topológica estrita (satisfação simultânea da ausência de inanições e do suprimento estrutural completo de todos os KCs) ou o teto de otimização $W_{max} = 5$. O produto deste processamento é o Grafo Curricular Topologicamente Estabilizado ($\mathcal{G}^*$), cujos gargalos intransponíveis foram sistematicamente mitigados, ou integralmente erradicados, caso a convergência estrita seja alcançada antes do teto limite, garantindo uma densidade amostral ótima. Paralelamente, obtém-se o Conjunto de Dados de Interações Longitudinais ($\mathcal{D}^*$), contendo as trajetórias de aprendizagem resolvidas.

Considerações Práticas e Geração de Conteúdo Futuro No escopo desta pesquisa, a política computacional de recomendação baseada em *knowledge tracing* independe da semântica textual dos itens, fundamentando-se inteiramente na topologia do grafo de dependências ($\mathcal{G}^*$) e nas propriedades estocásticas da interação ($\mathcal{D}^*$). Em um cenário produtivo real, a matriz de parâmetros associada aos nós estruturais de $\mathcal{Q}_{new}$ atua como uma especificação de engenharia estrita (i.e., *prompting* condicional) para que LLMs redijam o material didático (enunciados e alternativas), assegurando que a redação final do sistema de avaliação obedeça matematicamente às necessidades operacionais ditadas pelo algoritmo topológico.

Transição de Nomenclatura para o Treinamento Para fins de clareza notacional nas etapas deste trabalho, o conjunto de interações longitudinais ($\mathcal{D}^*$), gerado ao final do processo de imputação, passou a ser referido doravante simplesmente como Dataset Sintético D . Este conjunto atuou como o insumo primário empírico para o treinamento e

Algorithm 1 Imputação Topológica via Monte Carlo (ITMC)

Require: Grafo Empírico $\mathcal{G}^{(0)}$, População Fixa $\mathcal{S}$, Limite de Iterações $W_{max} \leftarrow 5$

```

1:  $w \leftarrow 0$ 
2: while  $w < W_{max}$  do
3:    $\mathcal{D}^{(w)}, \mathbf{E}_{reason} \leftarrow \text{SimulateMonteCarlo}(\mathcal{G}^{(w)}, \mathcal{S})$  {Orquestra o Tutor e os Agentes}
4:    $\mathcal{K}_{starved}^{(w)} \leftarrow \{k \in \mathcal{K} \mid \text{Inanição em } k \in \mathbf{E}_{reason}\}$ 
5:    $\mathcal{Q}_{new} \leftarrow \emptyset$ 
6:   for all  $k \in \mathcal{K}$  do
7:      $\mathcal{Q}_k \leftarrow$  Itens mapeados para  $k$  em  $\mathcal{G}^{(w)}$ 
8:     Deficit  $\leftarrow \max(0, 20 - |\mathcal{Q}_k|)$ 
9:     if  $k \in \mathcal{K}_{starved}^{(w)}$  then
10:       Deficit  $\leftarrow$  Deficit + 25
11:     end if
12:      $B_{faltantes} \leftarrow \{b \in \{0,25, 0,50, 0,75, 0,90\} \mid \nexists q \in \mathcal{Q}_k \text{ com } |\delta_{q,k} - b| \leq 0,15\}$ 
13:      $N_{gerar} \leftarrow \max(\text{Deficit}, |B_{faltantes}|)$ 
14:     if  $N_{gerar} > 0$  then
15:        $V_{diff} \leftarrow$  Unir  $B_{faltantes}$  com  $(N_{gerar} - |B_{faltantes}|)$  amostras de  $\mathcal{D}_{oper}$ 
16:       for all  $d \in V_{diff}$  do
17:          $q_{synth} \leftarrow$  Novo Nó Parametrizado
18:          $\delta_{synth,k} \leftarrow d$ 
19:         if  $\text{rand}() < 0,05$  and  $\text{Pre}^*(k) \neq \emptyset$  then
20:            $k_{anc} \sim \text{Uniforme}(\text{Pre}^*(k))$ 
21:            $\delta_{synth,anc} \leftarrow \text{clip}(d - 0,2, 0,1, 0,9)$ 
22:         end if
23:          $\mathcal{Q}_{new} \leftarrow \mathcal{Q}_{new} \cup \{q_{synth}\}$ 
24:       end for
25:     end if
26:   end for
27:   if  $|\mathcal{Q}_{new}| = 0$  then
28:     break {Convergência estrita:  $\forall k \in \mathcal{K}$ , volume  $\geq 20$  e bins  $\{0,25, 0,50, 0,75, 0,90\}$  cobertos}
29:   end if
30:    $\mathcal{G}^{(w+1)} \leftarrow \mathcal{G}^{(w)} \cup \mathcal{Q}_{new}$  {Imputação das matrizes de dificuldade}
31:    $w \leftarrow w + 1$ 
32: end while
33: return Grafo Topologicamente Estabilizado  $\mathcal{G}^* \leftarrow \mathcal{G}^{(w)}$ , Interações Longitudinais  $\mathcal{D}^* \leftarrow \mathcal{D}^{(w)}$ 

```

a avaliação dos modelos preditivos, conforme detalhado no protocolo experimental (Seção 5).

4.5 Implementação do Sistema de Recomendação Adaptativa

Esta etapa consiste na operacionalização do sistema de tutoria adaptativa, integrando os módulos das fases anteriores. O motor de diagnóstico utiliza um modelo de KT de referência $\mathcal{F}_{KT}^*$ (Seção 5.1), treinado com o Dataset Sintético D da Seção 4.4 e selecionado pelo menor RMSE sobre a variável-alvo $P(\text{correct})$. Em cenário produtivo prevê-se o *fine-tuning* contínuo do modelo, mas a implementação deste ciclo de retroalimentação encontra-se fora do escopo deste trabalho.

Por construção do alvo de treinamento, $\mathcal{F}_{KT}^*$ opera no **espaço observável** de probabilidade de acerto, encapsulando implicitamente os parâmetros cognitivos (γ_l, σ_l) , o decaimento temporal e o ruído estocástico do agente. A política original (Seção 4.4.3), formulada sobre o espaço latente de maestria, deve portanto ser integralmente reformulada no espaço observável.

4.5.1 Arquitetura do Sistema

O sistema operacionaliza a ZDP por meio de três componentes:

1. **Grafo de conhecimento ($\mathcal{G}^*$):** ontologia da BNCC otimizada via algoritmo ITMC (Seção 4.4.4). Fonte canônica das relações de pré-requisito entre os KCs e dos parâmetros pedagógicos Ω_k (limiar de domínio) e Ψ_k (limiar de manutenção).
2. **Modelo de knowledge tracing ($\mathcal{F}_{KT}^*$):** componente de diagnóstico que, dado o histórico $\mathcal{H}_{l,t} = \{(q_n, a_n, \tau_n)\}_{n \leq t}$ do aluno s_l e uma questão arbitrária q_j , retorna a estimativa observável $\hat{P}(\text{correct})_{l,j} = \mathcal{F}_{KT}^*(\mathcal{H}_{l,t}, q_j)$.
3. **Motor de Recomendação ($\mathcal{R}$):** componente lógico que combina $\mathcal{G}^*$ e $\mathcal{F}_{KT}^*$ para executar a política pedagógica.

4.5.2 Inferência da Maestria Operacional via *Ghost Pass*

Formulação canônica. Define-se a operação de *ghost pass* como uma *probe* diagnóstica que produz, para cada KC $k \in \mathcal{K}$, um proxy de maestria projetado ao espaço observável. Em sua formulação canônica, seja q_k^{ghost} uma questão virtual monoconceitual cujo único KC associado é k e cuja dificuldade condicional é fixada na mediana $\delta_k^{ghost} = 0,5$. A

predição diagnóstica para o aluno s_l no instante t seria:

$$\hat{p}_{ghost}^{canon}(t, k) \triangleq \mathcal{F}_{KT}^*(\mathcal{H}_{l,t}, q_k^{ghost}). \quad (4.30)$$

Sob $\delta_k^{ghost} = 0,5$, a dificuldade no espaço logit anula-se ($b_k^{ghost} = 0$); portanto $P(\text{know})_{l,k} = \text{sigmoid}(\beta_{l,k} - 0) = v'_{l,t,k}$. Substituindo na Equação 4.15:

$$\hat{p}_{ghost}^{canon}(t, k) \approx \gamma_l + (1 - \gamma_l - \sigma_l) \cdot v'_{l,t,k}. \quad (4.31)$$

A grandeza $\hat{p}_{ghost}(t, k)$ constitui, assim, a projeção afim isomórfica de $v'_{l,t,k}$ no espaço observável, mediada pelos parâmetros internalizados pelo modelo, e desempenha papel operacional análogo ao de v' na formulação latente original.

Realização operacional via âncoras múltiplas. A questão virtual q_k^{ghost} não admite instanciação direta no banco de questões reais; sua dificuldade condicional ideal $\delta_k^{ghost} = 0,5$ é satisfeita apenas por aproximação. A realização operacional da probe sobre $\mathcal{F}_{KT}^*$ a partir de itens efetivamente presentes em $\mathcal{G}^*$ emprega, portanto, uma agregação multi-âncora: para cada KC k , seleciona-se um conjunto $\{q_j^{anchor(k)}\}_{j=1}^{N_a}$ de N_a questões reais monoconceituais cuja dificuldade condicional $\delta_{q,k}$ minimiza o desvio absoluto em relação ao ideal $\delta = \frac{1}{2}$:

$$q_j^{anchor(k)} = \arg \min_{q \in \mathcal{Q}_k^{mono}}^{(j)} \left| \delta_{q,k} - \frac{1}{2} \right|, \quad (4.32)$$

onde $\mathcal{Q}_k^{mono}$ denota o subconjunto de questões monoconceituais em $\mathcal{G}^*$ que ativam exclusivamente o KC k , e $\arg \min^{(j)}$ denota o j -ésimo menor valor. A maestria observável é então definida como a média aritmética das predições do modelo sobre essas N_a âncoras:

$$\hat{p}_{ghost}(t, k) = \frac{1}{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} \mathcal{F}_{KT}^*(\mathcal{H}_{l,t} \oplus q_j^{anchor(k)})[k], \quad (4.33)$$

em que $\oplus$ denota a concatenação da questão-âncora à história parcial e $[k]$ a leitura da componente associada ao KC k . Adota-se $N_a = 3$. A justificativa para a agregação é estatística: a sondagem de âncora única ($N_a = 1$) é sensível a particularidades da âncora eleita (sobretudo em arquiteturas atencionais, cuja predição depende não-trivialmente do *embedding* de dificuldade), e a média sobre âncoras simetricamente posicionadas em torno de $\delta = \frac{1}{2}$ reduz a variância da estimativa sem introduzir viés sistemático, dado que o critério de seleção é centrado no ponto de inflexão. Quando $\mathcal{Q}_k^{mono}$ é vazio em razão de cobertura limitada do banco, recorre-se às questões multi-conceituais associadas a k com prioridade às de menor desvio em relação ao ideal de dificuldade, e o evento é registrado

para auditoria posterior. Mantém-se também o pico histórico observável:

$$\hat{p}_{ghost_peak}(t, k) = \max_{t' \leq t} \hat{p}_{ghost}(t', k), \quad (4.34)$$

substituindo o conceito latente $v_{peak,l,k}$.

Projeção dos limiares pedagógicos. Os limiares pedagógicos Ω_k, Ψ_k , originalmente definidos no espaço latente em $\mathcal{G}^*$, são projetados ao espaço observável via parâmetros populacionais médios $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma})$ estimados sobre D :

$$\Omega_k^{obs} = \bar{\gamma} + (1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma}) \cdot \Omega_k, \quad \Psi_k^{obs} = \bar{\gamma} + (1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma}) \cdot \Psi_k. \quad (4.35)$$

4.5.3 Calibração Isotônica do Espaço Observável

A projeção da Equação 4.35 pressupõe que a saída de $\mathcal{F}_{KT}^*$ sob a âncora $q_j^{anchor(k)}$ esteja efetivamente alinhada com a projeção afim $\pi(v) = \bar{\gamma} + (1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma})v$ sobre a maestria latente. Essa hipótese é estritamente verdadeira apenas no limite teórico de uma âncora idealmente neutra e de um modelo perfeitamente calibrado no espaço de p^* . Sob a realização multi-âncora da Equação 4.33 e sob o modelo treinado por minimização de $RMSE_{p^*}$ (Seção 5.1), permanece um viés sistemático residual de magnitude populacionalmente não-desprezível, no sentido de que $\hat{p}_{ghost}(t, k)$ subestima $\pi(v'_{l,t,k})$ na cauda de alta maestria. Não corrigido, esse viés impede o cruzamento de Ω_k^{obs} pela Equação 5.9, travando indefinidamente o avanço BFS.

Para mitigar esse desalinhamento, o motor incorpora uma transformação pós-hoc $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ monotônica não-decrescente, a *regressão isotônica*, aplicada a toda saída do modelo no ciclo de inferência:

$$\tilde{p} = g(\mathcal{F}_{KT}^*(\mathcal{H}, q)), \quad g \text{ não-decrescente}, \quad g(x) \in [0, 1]. \quad (4.36)$$

A escolha pela forma isotônica não-paramétrica é justificada por três propriedades simultâneas. Primeiro, a monotonicidade preserva a ordem $\hat{p}_a < \hat{p}_b \Rightarrow g(\hat{p}_a) \leq g(\hat{p}_b)$, garantindo que a calibração não introduza inversões espúrias entre KCs ou alunos, propriedade essencial para que a promoção BFS e a ponderação ZDP não sejam distorcidas pela correção. Segundo, a ausência de forma paramétrica permite ao calibrador absorver a heterocedasticidade do erro residual entre regiões de baixa e alta maestria, em vez de impor um *shift* uniforme. Terceiro, g é determinístico condicionado ao seu conjunto de ajuste, sustentando a reprodutibilidade do sistema.

O calibrador é aplicado de forma transparente em ambos os pontos de inferência do motor: na operação *ghost pass*, calibrando cada uma das N_a predições antes da agregação na

Equação 4.33, e na predição da probabilidade de acerto da questão candidata $\hat{P}(\text{correct})_{l,j}$ (definida adiante na Equação 4.43), de modo que todas as quantidades probabilísticas consumidas pelo motor residem no mesmo espaço observável calibrado. Os detalhes do protocolo de ajuste de g sobre uma coorte de estudantes disjunta da coorte de avaliação, e as garantias de ausência de vazamento associadas, são apresentados na Seção 5.2.2.

4.5.4 Ciclo de Recomendação em Tempo Real

A cada solicitação de uma nova questão pelo aluno s_l , o motor $\mathcal{R}$ executa o seguinte ciclo:

Passo 1: Atualização do Estado Interno. O histórico $\mathcal{H}_{l,t}$ é processado por $\mathcal{F}_{KT}^*$, que atualiza seu estado oculto $z_{l,t} \rightarrow z_{l,t+1}$, encapsulando a estimativa mais recente do perfil cognitivo do aluno.

Passo 2: Cálculo do Vetor *Ghost Pass*. Computa-se $\hat{p}_{ghost}(t, k)$ via Equação 4.33 para todo $k \in \mathcal{K}$ ($|\mathcal{K}| = 82$), formando o vetor operacional $\hat{\mathbf{p}}_{ghost}(t) \in [0, 1]^K$. Cada uma das N_a predições do modelo é mapeada por g antes da agregação, conforme Equação 4.36. Atualiza-se também $\hat{p}_{ghost_peak}(t, k)$ via Equação 4.34.

Passo 3: Determinação do KC Foco. O motor mantém a estrutura de progressão BFS da Seção 4.4.3. A promoção de um componente ao conjunto de dominados é efetivada quando $\hat{p}_{ghost}(t, k) \geq \Omega_k^{obs}$, com consequente atualização de $\mathcal{K}_{dom,l}$, $\mathcal{K}_{unl,l}$ e $\mathcal{F}_{learn,l}$. O KC foco $k_{foco,l}$ corresponde ao primeiro elemento da fila atualizada. Os mecanismos de prática intercalada (rotação por fadiga sob $E_{cons} \geq \tau_{frust}$) operam de forma idêntica à formulação original.

Passo 4: Política de Revisão e Definição do Alvo. O conjunto de risco é construído diretamente no espaço observável:

$$\mathcal{K}_{risk,l} = \{k \in \text{Pre}^*(k_{foco,l}) \mid \hat{p}_{ghost}(t, k) < \Psi_k^{obs}\}. \quad (4.37)$$

O alvo k_{target} é selecionado pela substituição $v' \mapsto \hat{p}_{ghost}$ na Equação 4.18:

$$k_{target} = \begin{cases} \arg \min_{k \in \mathcal{K}_{risk,l}} \hat{p}_{ghost}(t, k) & \text{se } \mathcal{K}_{risk,l} \neq \emptyset \quad (\text{Revisão}) \\ k_{foco,l} & \text{caso contrário} \quad (\text{Aprendizagem}) \end{cases} \quad (4.38)$$

Passo 5: Definição da ZDP Ativa no Espaço Observável. A ZDP é reformulada no espaço observável a partir da projeção afim das Equações 4.20–4.24, substituindo o teto latente 1,0 pelo teto observável $1 - \bar{\sigma}$ (limite estatístico de acerto sob *slip* populacional). Para alívio notacional, suprime-se o índice (t, k_{target}) em $\hat{p}_{ghost}$ e $\hat{p}_{ghost_peak}$.

Modo Aprendizagem ($k_{target} = k_{foco,l}$). Com agressividade $\alpha_{learn} = 0,5$:

$$P_{\min} = \hat{p}_{ghost} \quad (4.39)$$

$$P_{\max} = \hat{p}_{ghost} + \alpha_{learn} \cdot ((1 - \bar{\sigma}) - \hat{p}_{ghost}) \quad (4.40)$$

A Equação 4.40 resulta da expansão algébrica da projeção original: $\gamma + (1 - \gamma - \sigma)(v' + 0,5(1 - v')) = \hat{p}_{ghost} + 0,5(1 - \sigma - \hat{p}_{ghost})$, em que γ é cancelado e apenas σ persiste, sendo substituído por $\bar{\sigma}$.

Modo Revisão ($k_{target} \in \mathcal{K}_{risk,l}$). Com margem mínima $\Delta_{rev} = 0,05$:

$$P_{\min} = \frac{\hat{p}_{ghost} + \hat{p}_{ghost_peak}}{2} \quad (4.41)$$

$$P_{\max} = \max(P_{\min} + \Delta_{rev}, \hat{p}_{ghost_peak}) \quad (4.42)$$

As Equações 4.41–4.42 são exatas, dado que a transformação afim $x \mapsto \gamma + (1 - \gamma - \sigma)x$ comuta com a média aritmética; nenhuma aproximação populacional é introduzida no modo de revisão.

Passo 6: Seleção da Questão via ZDP Ponderada. Forma-se o conjunto de questões candidatas $\mathcal{Q}_{cand}$ aplicando-se o filtro curricular apropriado da Seção 4.4.3, incluindo a restrição da Equação 4.22 e as regras de *fallback* no modo de revisão. Para cada $q_j \in \mathcal{Q}_{cand}$, a probabilidade esperada de acerto é **diretamente fornecida pelo modelo**, sob a aplicação do calibrador descrita pela Equação 4.36:

$$\hat{P}(\text{correct})_{l,j} = g(\mathcal{F}_{KT}^*(\mathcal{H}_{l,t}, q_j)). \quad (4.43)$$

Esta predição reside no mesmo espaço observável calibrado que o intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$, dispensando reprojeções e tornando obsoleta a formulação composicional via Equações 4.11–4.15 (que pressupõem decomposição em maestrias por KC e dificuldades condicionais explícitas).

O peso w_j é calculado pela função platô da Equação 4.27 com $\sigma_w = 0,15$:

$$w_j = \begin{cases} 1,0 & \text{se } P_{\min} \leq \hat{P}(\text{correct})_{l,j} \leq P_{\max} \\ \exp\left(-\frac{(\hat{P}(\text{correct})_{l,j} - P_{\min})^2}{2\sigma_w^2}\right) & \text{se } \hat{P}(\text{correct})_{l,j} < P_{\min} \\ \exp\left(-\frac{(\hat{P}(\text{correct})_{l,j} - P_{\max})^2}{2\sigma_w^2}\right) & \text{se } \hat{P}(\text{correct})_{l,j} > P_{\max} \end{cases} \quad (4.44)$$

A questão recomendada q^* é amostrada de $\mathcal{Q}_{cand}$ proporcionalmente ao peso normalizado,

conforme Equação 4.28, preservando otimalidade pedagógica com diversidade estocástica. A salvaguarda numérica para $\sum_k w_k = 0$ (distribuição uniforme temporária) é mantida.

4.5.5 Considerações sobre Aproximações Populacionais

A reformulação acima introduz três pontos de aproximação controlados:

1. As constantes $\bar{\gamma}$ e $\bar{\sigma}$ utilizadas nas Equações 4.35 e 4.40 correspondem às médias das distribuições marginais geradoras adotadas em D (Tabela 4.2): $\bar{\gamma} = 0,20$ e $\bar{\sigma} = 0,12$. Substituem os parâmetros não observáveis (γ_l, σ_l) do agente real, constituindo erro sistemático de primeira ordem cuja magnitude esperada está limitada pelos desvios-padrão das respectivas distribuições truncadas. A estimação adaptativa por aluno via *fine-tuning* ou modelagem hierárquica permanece como direção de trabalho futuro.
2. A operação *ghost pass* (Equação 4.33) é realizada sobre $N_a = 3$ questões reais monoconceituais selecionadas pelo critério da Equação 4.32. Em geral $\delta_{q_j^{anchor}, k} \neq 0,5$ por finitude do banco de itens, e a média sobre N_a âncoras é o procedimento adotado para mitigar a sensibilidade da estimativa à âncora específica sem introduzir viés sistemático. A robustez da generalização do modelo a regiões marginais do espaço de questões, itens multi-conceituais e dificuldades condicionais afastadas do centro, é empiricamente verificada no protocolo experimental.
3. O viés sistemático residual remanescente das duas aproximações anteriores (agregando substituição de parâmetros agente-específicos por constantes populacionais, realização da probe por âncoras de dificuldade finita e desalinhamento estrutural entre o espaço de treino do modelo (p^*) e o espaço pedagógico $(\Omega_k^{obs}, \Psi_k^{obs})$) é absorvido pela calibração isotônica pós-hoc da Seção 4.5.3. A monotonicidade do calibrador g garante que essa absorção preserve a ordenação relativa entre KCs e alunos imposta pelo modelo, deixando inalteradas as relações de promoção BFS e de ponderação ZDP no nível ordinal.

4.5.6 Resultado Esperado

O resultado final desta etapa é um sistema de tutoria adaptativa capaz de: (a) diagnosticar o conhecimento em tempo real; (b) decidir entre avançar ou revisar; (c) selecionar a questão ótima para o aprendizado; e (d) fornecer feedback sobre a progressão no grafo.

Com a arquitetura definida e os componentes integrados, encerra-se a descrição da metodologia. O capítulo subsequente define o protocolo experimental para validar a capacidade preditiva dos modelos e a eficácia da política de recomendação.

Capítulo 5

Protocolo Experimental

Este capítulo descreve o delineamento experimental adotado para validar a proposta. A avaliação concentra-se na validação algorítmica do componente de diagnóstico, através de um *benchmarking* de modelos de *Knowledge Tracing*. Para assegurar a reprodutibilidade, escalabilidade e a integridade dos dados, a orquestração dos experimentos, bem como o rastreamento sistemático de parâmetros, hiperparâmetros e métricas, foram realizados utilizando a plataforma **MLflow**.

5.1 Treinamento e Avaliação de Modelos de *Knowledge Tracing*

Esta etapa conduz um *benchmarking* de modelos de KT utilizando o Dataset Sintético D . O objetivo é identificar a arquitetura de rede neural $\mathcal{F}_{KT}$ com maior capacidade preditiva e de calibração estatística para o contexto modelado. O modelo de melhor desempenho, denominado modelo de referência, constitui o motor preditivo principal do sistema diagnóstico detalhado nas seções subsequentes.

5.1.1 Preparação dos Dados de Entrada e *Feature Engineering*

O Dataset Sintético D , armazenado em formato colunar *Parquet* e processado em memória via DuckDB e posteriormente em *Pandas*, passa por um filtro inicial que retém exclusivamente estudantes com um histórico mínimo de 10 interações. Em seguida, extrai-se uma amostra fixa de 500 estudantes para compor o conjunto de dados experimental. Para cada aluno $s_l \in \mathcal{S}$, suas interações são transformadas em uma sequência cronológica I_l . Cada elemento $i_{l,t}$ da sequência representa uma interação no instante t e é formalmente definido pela tupla:

$$i_{l,t} = (q_{l,t}, k_{l,t}, a_{l,t}, p_{l,t}^*, \mathcal{X}_{l,t}) \quad (5.1)$$

Nesta estrutura, $q_{l,t}$ representa o identificador da questão e $k_{l,t}$ o identificador do KC. A variável $a_{l,t} \in \{0, 1\}$ denota o resultado empírico de acerto ou erro. O termo $p_{l,t}^* \in [0, 1]$ representa a probabilidade latente de acerto ($P(\text{correct})$), calculada estruturalmente pelo simulador no exato instante da interação. O componente $\mathcal{X}_{l,t}$ engloba um conjunto de variáveis preditivas temporais e de histórico, cuja utilização é opcional e estritamente dependente da arquitetura da rede neural avaliada. O registro temporal bruto (ts), originalmente computado pelo simulador em frações contínuas de dia, é convertido para uma escala absoluta de minutos mediante a multiplicação pelo fator 1440 (24 horas $\times$ 60 minutos). A partir dessa base de tempo linear, extraem-se as seguintes covariáveis:

- ***Practice Count* ($pcount$):** Frequência acumulada ($cumcount$) de exposições prévias do aluno ao KC específico.
- ***Repetition Gap* ($rgap$):** Tempo transcorrido desde a última interação com o mesmo KC, regularizado pela transformação logarítmica $\ln(1 + \Delta t_{kc})$.
- ***Subject Gap* ($sgap$):** Tempo transcorrido desde o último acerto no mesmo KC, transformado via $\ln(1 + \Delta t_{kc_correto})$.
- ***Interval Time* (it):** Tempo transcorrido entre a interação atual e a imediatamente anterior, independente do KC: $\ln(1 + \Delta t_{geral})$.
- ***Answer Time* (at):** Tempo individual de resolução da questão atual ($elapsed\ time$).

Para adequação aos tensores de *embedding* dos modelos neurais, as variáveis contínuas em $\mathcal{X}_{l,t}$ são discretizadas em 100 intervalos (*bins*) por meio de quantis empíricos ($qcut$). Os limites de decisão (*bin edges*) são ajustados estritamente sobre os dados de treinamento e propagados para a validação, prevenindo vazamento de dados.

Devido à restrição de dimensionalidade e capacidade de memória na propagação de gradientes, as sequências I_l são seccionadas através de uma janela deslizante (*sliding window*). O algoritmo adota um comprimento máximo $T = 200$ interações por tensor e um passo (*stride*) constante $S = 150$. Um estudante cujo histórico possua $N > 200$ interações é fragmentado em múltiplas sub-sequências (estudantes virtuais), com uma sobreposição de 50 interações entre tensores adjacentes para preservação estrutural do contexto passado.

5.1.2 Modelos de Referência (Baselines)

Com base no estado da arte em *Knowledge Tracing*, selecionou-se um conjunto diversificado de modelos para o *benchmarking*, englobando desde arquiteturas baseadas em redes recorrentes tradicionais até implementações recentes fundamentadas em mecanismos de atenção (*Transformers*), GNNs e modelagem de incerteza. A Tabela 5.1 resume as arquiteturas ativamente avaliadas no código experimental.

Tabela 5.1: Modelos de *Knowledge Tracing* Avaliados no Benchmarking.

Modelo	Referência	Característica Principal
DKT	Piech et al. (2015)	<i>Baseline</i> fundacional baseado em RNNs/LSTMs.
DKT-Forget	Nagatani e et al. (2019)	Estende o DKT incorporando variáveis de decaimento temporal (<i>rgap</i> , <i>sgap</i> , <i>pcount</i>).
SAINT+	Shin et al. (2021)	<i>Transformer encoder-decoder</i> que integra tempo em <i>embeddings</i> .
LefoKT	Bai e et al. (2025)	Desacopla padrões de esquecimento da relevância pura através de atenção direcionada.
RobustKT	Teng et al. (2025)	Separa sinal cognitivo intrínseco de ruído comportamental por meio de atenção e regularização.
UKT	W. Cheng et al. (2025)	Representa conhecimento como distribuições (atenção de Wasserstein e aprendizado contrastivo).
HCGKT	Z. Huang e Liu (2025)	Integra atenção de filtragem hierárquica baseada em grafos convolucionais.

5.1.3 Estratégia de Validação e Função de Custo

O particionamento do conjunto de dados segue a técnica de estratificação por usuário (*User-Stratified*). A amostra original de 500 estudantes, identificada antes da etapa de geração de estudantes virtuais, é dividida na proporção de 80% para treinamento ($\mathcal{S}_{train}$) e 20% para teste ($\mathcal{S}_{test}$). Realizar a partição com base nos identificadores originais assegura que fragmentos sobrepostos de um mesmo aluno longo não contaminem simultaneamente os conjuntos de treino e teste. Define-se ainda uma terceira partição $\mathcal{S}_{eval}$, tal que $|\mathcal{S}_{eval}| = 100$, disjunta de $\mathcal{S}_{train} \cup \mathcal{S}_{test}$ e amostrada do subconjunto residual de estudantes elegíveis, utilizada exclusivamente para avaliação (Seção 5.2).

Em problemas tradicionais de classificação binária, as redes neurais são otimizadas via *Binary Cross-Entropy* (BCE) sobre o rótulo observável $a_{l,t}$. Contudo, o objetivo do motor diagnóstico proposto é mapear a ZDP do estudante, o que requer a estimativa precisa de probabilidade contínua subjacente à interação, e não apenas uma predição binária. No ambiente de simulação, o acerto empírico $a_{l,t}$ é amostrado de uma distribuição de Bernoulli baseada na probabilidade latente real: $a_{l,t} \sim \text{Binomial}(1, p_{l,t}^*)$. Treinar o modelo via BCE induz a rede a emitir probabilidades extremas (próximas de 0 ou 1), penalizando estimativas intermediárias corretas (e.g., $p^* = 0,5$) devido à divergência matemática em relação à amostragem binária.

Para corrigir esta limitação e induzir calibração estrita, substitui-se a função BCE pelo Erro Quadrático Médio (MSE). O treinamento utiliza a probabilidade de acerto latente

p^* extraída do simulador em substituição ao rótulo binário $a_{l,t}$. A rede neural é otimizada minimizando o desvio na raiz quadrada em relação a essa probabilidade contínua (RMSE_{p^*}), forçando o modelo a abstrair ruídos estocásticos (*slip* e *guess*). Cabe enfatizar que o uso de $p_{l,t}^*$ como sinal supervisor não constitui vazamento de informação: a probabilidade latente é uma propriedade exclusiva do gerador sintético D , ausente em qualquer ambiente produtivo, e seu emprego no treinamento é matematicamente equivalente à destilação de conhecimento com *soft labels* da função geradora verdadeira (Hinton et al., 2015). O objetivo é aprender uma função $\mathcal{F}_{KT}$ que generalize para alunos reais, sendo o acesso a p^* durante o treinamento estritamente uma estratégia de regularização contra a variância Bernoulli irreduzível $p^*(1 - p^*)$. Formalmente, sob perda quadrática, o regressor de Bayes que minimiza $\mathbb{E}[(\hat{p} - a)^2]$ é precisamente $\mathbb{E}[a \mid \mathcal{H}] = p^*$, de modo que treinar diretamente contra p^* representa o objetivo populacional ótimo, não uma vantagem indevida sobre o sinal binário. A convergência para a probabilidade de acerto calibrada é um pré-requisito estrutural para a integração com o módulo de intervenção pedagógica. O sistema de recomendação subsequente processa o vetor de predições p^* para calcular os limites da ZDP do aluno e, a partir dessa fronteira estocástica, formular a política de seleção da questão ótima.

5.1.4 Otimização de Hiperparâmetros

A busca da configuração paramétrica ótima é estruturada via Otimização Bayesiana utilizando o algoritmo *Tree-structured Parzen Estimator* (TPE) implementado no *framework* Optuna (Akiba et al., 2019). O processo restringe-se a 50 tentativas (*trials*), avaliadas por meio de validação cruzada iterativa de 3 partições (*3-Fold Cross-Validation*) sobre o conjunto de treinamento, com semente aleatória fixada em 42. A política de seleção do modelo ótimo é guiada estritamente pela minimização do RMSE_{p^*} , calculado a partir da média aritmética dos três *folds* de validação. O rastreamento contínuo do espaço paramétrico é registrado através do MLflow.

O treinamento iterativo de cada modelo processa tensores em lotes de 64 instâncias. A atualização dos pesos da rede é executada pelo otimizador AdamW (Loshchilov & Hutter, 2019), sob regime de Precisão Mista Automática (AMP) com matrizes no formato *bfloat16*. A modulação da taxa de aprendizado é coordenada pelo *scheduler OneCycleLR* (Smith & Topin, 2019). Este perfil impõe uma fase de elevação contínua até o limite superior da taxa de aprendizado (*lr*) definida, alcançado em uma fração do ciclo de treinamento definida pelo hiperparâmetro *pct_start* (variando entre 0,2 e 0,4 no espaço de busca). Essa etapa é seguida por um decaimento em formato cosseno até um valor residual assintótico próximo a zero, regido pelos fatores de divisão nativos do algoritmo. A Tabela 5.2 detalha os limites e domínios de busca contínuos e discretos para os modelos investigados.

Tabela 5.2: Espaço de Busca de Hiperparâmetros (Λ) para os Modelos Avaliados.

Modelo	Domínio de Busca dos Parâmetros
DKT e DKT-Forget	$emb_size: \{32, 64, 128, 256\}$, $dropout: [0, 1, 0, 5]$ $lr: [5 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-3}]$, $weight_decay: [10^{-5}, 10^{-2}]$, $pct_start: [0, 2, 0, 4]$
SAINT+	$emb_size: \{64, 128, 256\}$, $num_attn_heads: \{2, 4, 8\}$, $n_blocks: \{1, 2, 4\}$ $dropout: [0, 0, 5, 0, 4]$, $lr: [10^{-5}, 3 \cdot 10^{-3}]$ $weight_decay: [10^{-5}, 10^{-2}]$, $pct_start: [0, 1, 0, 4]$
LefoKT	$d_model: \{64, 128, 256\}$, $num_attn_heads: \{2, 4, 8\}$, $n_blocks: \{1, 2, 4\}$ $dropout: [0, 0, 5, 0, 3]$, $lr: [5 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-3}]$ $weight_decay: [10^{-5}, 10^{-2}]$, $pct_start: [0, 2, 0, 4]$
RobustKT	$d_model: \{64, 128, 256\}$, $num_attn_heads: \{2, 4, 8\}$, $n_blocks: \{1, 2, 4\}$ $dropout: [0, 1, 0, 5]$, $lr: [5 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-3}]$, $l2: [10^{-6}, 10^{-3}]$ $weight_decay: [10^{-5}, 10^{-2}]$, $pct_start: [0, 2, 0, 4]$
UKT	$d_model: \{64, 128, 256\}$, $num_attn_heads: \{2, 4, 8\}$, $n_blocks: \{1, 2, 4\}$ $cl_weight: [0, 0, 0, 1, 0, 5]$, $dropout: [0, 1, 0, 5]$ $lr: [5 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-3}]$, $weight_decay: [10^{-5}, 10^{-2}]$, $pct_start: [0, 2, 0, 4]$
HCGKT	$d_model: \{64, 128, 256\}$, $num_attn_heads: \{2, 4, 8\}$, $n_blocks: \{1, 2, 4\}$ $K: \{2, 4, 6\}$, $dropout_sfm: [0, 0, 5, 0, 3]$, $dropout: [0, 0, 5, 0, 3]$ $lr: [5 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-3}]$, $weight_decay: [10^{-5}, 10^{-2}]$, $pct_start: [0, 2, 0, 4]$

Devido à instabilidade intrínseca das métricas de validação durante a fase de elevação da taxa de aprendizado, os algoritmos de poda e interrupção exigem uma defasagem calculada frente ao ciclo total de 100 épocas estipuladas para o treinamento. Baseando-se no teto máximo assumido para o pct_start (0,4), implementam-se os seguintes mecanismos dinâmicos de parada para garantir a viabilidade computacional:

1. **Early Stopping:** Integrado ao laço interno de treinamento de cada arquitetura. A função indicadora de degradação da métrica só é ativada após a época de saturação teórica, calculada pelo produto entre o total de épocas e o limite máximo do pct_start (neste caso, a época 40). Esta restrição garante que o modelo atavesse a instabilidade do pico do *scheduler* sem falsos positivos de divergência. Uma vez superada essa fronteira temporal, o treinamento é abortado caso o erro de validação estagne por um limiar de tolerância contínua de 15 épocas.
2. **Poda de Tentativas Estocásticas (Median Pruner):** No escopo global do otimizador bayesiano, esta rotina encerra prematuramente a execução de configurações cujo desempenho intermediário seja estatisticamente inferior à mediana histórica. Para garantir precisão na avaliação, a atuação do algoritmo é particionada nas seguintes diretrizes:
 - **Estratificação e Suavização:** A avaliação é estratificada ao nível de época. O erro da época atual e e da tentativa em curso t é confrontado estritamente contra os resultados da mesma época e registrados por *trials* finalizados integralmente

com sucesso. Esse conjunto de referência, denotado por $\mathcal{J}_e$, se expande de maneira dinâmica. Para suprimir ruídos isolados na convergência, a métrica submetida à avaliação de poda, $\tilde{\varepsilon}_{t,e}$, não é o erro cru instantâneo, mas sim uma média móvel retrospectiva filtrada em uma janela de 3 épocas.

- **Travas de Estabilidade de Cardinalidade:** A intervenção é bloqueada por duas travas estruturais quantitativas. A nível global, requer-se uma base de $t_{startup} = 8$ tentativas inaugurais irrestritas (equivalente a 15% do escopo amostral de busca) para iniciar a formulação do referencial. A nível local (por época), exige-se que o conjunto de histórico da época avaliada possua um número mínimo de observações, definido por $n_{min_trials} = 5$. Logo, a mediana estrutural só atua como barreira de corte se a cardinalidade do conjunto de referência for suficiente ($|\mathcal{J}_e| \geq 5$).
- **Janela de Aquecimento Absoluto:** A última trava impõe um período de aquecimento cronológico imune a cortes preventivos durante a execução da rede, denotado por e_{warmup} . Este limite é calculado pela soma da proporção máxima estipulada para a ascensão da taxa de aprendizado ($pct_start \leq 0,4$) com uma margem de segurança transitória de 10%. Considerando o ciclo total de 100 épocas, define-se $e_{warmup} = \lfloor 100 \times (0,4 + 0,1) \rfloor = 50$ épocas. Tal tolerância temporal absorve a alta variância gerada pelo pico de modulação do agendador e assegura que a poda opere exclusivamente sobre curvas de erro que já atingiram convergência estatística fidedigna.
- **Decisão Formal de Interrupção:** Consequentemente, o critério de interrupção $\mathbb{I}_{poda}$ no instante e da tentativa t obedece à seguinte restrição matemática (operando na lógica de minimização):

$$\mathbb{I}_{poda} = \begin{cases} 1, & \text{se } t > t_{startup} \wedge |\mathcal{J}_e| \geq n_{min_trials} \wedge e > e_{warmup} \wedge \tilde{\varepsilon}_{t,e} > \text{Mediana}(\mathcal{J}_e) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5.1.5 Métricas de Avaliação

As métricas a seguir foram utilizadas para orientar a avaliação das arquiteturas investigadas e, fundamentalmente, selecionar o melhor modelo equipado com sua combinação ótima de hiperparâmetros, denotado por $\mathcal{F}_{KT}^*$. A performance preditiva de cada modelo instanciado é quantificada estritamente sobre as interações válidas do estudante. Para assegurar essa restrição em sequências de tamanho variável, aplicam-se tensores de mascaramento booleano ($eval_mask$) que filtram e ignoram preenchimentos artificiais (*padding*) previamente inseridos nos tensores. Para o cômputo formal do erro, as estimativas probabilísticas da rede $\hat{p}_i \in [0, 1]$ são confrontadas sistematicamente tanto contra os resultados

empíricos pontuais $a_i \in \{0, 1\}$ quanto em relação às probabilidades latentes contínuas inerentes da simulação $p_i^* \in [0, 1]$.

Para atender à necessidade de formular a ZDP, a avaliação estabelece uma hierarquia estrita de importância entre os indicadores. A métrica baseada na probabilidade de acerto latente atua como critério primário e decisório. Métricas de calibração probabilística operam como avaliadores secundários, fundamentais para atestar a sanidade preditiva frente ao espaço estocástico. Por fim, métricas de discriminação binária atuam apenas como indicadores terciários de comparação.

A extração do vetor de métricas define-se por:

Root Mean Square Error (RMSE_{p*}): Métrica Primária: Único critério que orienta a escolha do modelo ótimo. O seu propósito central é avaliar a capacidade da rede de aproximar a verdadeira função geradora do processo cognitivo. Ao penalizar o desvio em relação a p_i^* em vez do rótulo empírico a_i , o RMSE_{p*} força a regularização algorítmica, permitindo que a rede se isole da variância imposta por ruídos estocásticos (*slip* e *guess*). Uma minimização bem-sucedida garante que o modelo mapeie a fronteira real de conhecimento contínuo do estudante:

$$\text{RMSE}_{p^*} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - p_i^*)^2}$$

Brier Score (BS) e Brier Skill Score (BSS): Métricas Secundárias: O BS é uma regra de pontuação própria que extrai a divergência quadrática no espaço binário empírico, medindo a acurácia das previsões probabilísticas contra as observações reais a_i . O BSS equaciona esse erro contra um preditor ingênuo fixado na taxa média global de acertos $\bar{a}$, denotando o BS ingênuo como $\text{BS}_{naive} = \bar{a}(1 - \bar{a})$:

$$\text{BS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - a_i)^2 \quad \text{e} \quad \text{BSS} = 1 - \frac{\text{BS}}{\text{BS}_{naive}}$$

Dado que os dados empíricos a_i são gerados por um processo de Bernoulli com probabilidade p_i^* , existe uma incerteza aleatória irreduzível. Consequentemente, postula-se um limite teórico inferior para o Brier Score (BS_{min}), alcançado quando a predição da rede corresponde exatamente à probabilidade latente ($\hat{p}_i = p_i^*$). Este limite reflete a variância intrínseca do conjunto de dados e define, de forma análoga, o limite máximo de ganho do modelo (BSS_{max}):

$$\text{BS}_{min} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^*(1 - p_i^*) \quad \text{e} \quad \text{BSS}_{max} = 1 - \frac{\text{BS}_{min}}{\text{BS}_{naive}}$$

A interpretabilidade estatística destes limites baliza o comportamento preditivo da arquitetura: a convergência ao preditor ingênuo ($BS \rightarrow BS_{naive}$ e $BSS \rightarrow 0$) indica subajuste (*underfitting*) e regressão à média global, enquanto a aproximação aos limites teóricos ($BS \rightarrow BS_{min}$ e $BSS \rightarrow BSS_{max}$) denota a extração ótima do sinal latente. Diferentemente de otimizações tradicionais, o treinamento fundamentado exclusivamente na probabilidade contínua p_i^* isola a rede das realizações empíricas a_i , definindo a esperança do erro quadrático empírico pela decomposição $\mathbb{E}[(\hat{p} - a)^2] = (\hat{p} - p^*)^2 + p^*(1 - p^*)$. Como o viés algorítmico é quadrático, o limite inferior na expectativa é estritamente a variância estocástica irreduzível BS_{min} . Consequentemente, a rede é estruturalmente incapaz de forçar a violação desse limiar inferior através de sobreajuste (*overfitting*), de modo que qualquer violação empírica observada ($BS < BS_{min}$ ou $BSS > BSS_{max}$) no conjunto de avaliação caracteriza-se estritamente como uma anomalia estatística isolada, decorrente da variância de amostragem em conjuntos de cardinalidade finita. Adicionalmente, esta mesma decomposição estabelece o alinhamento ordinal estrito entre a métrica primária $RMSE_{p^*}$ e a métrica secundária BS : dado que o segundo termo da decomposição independe do modelo, a minimização do viés quadrático $(\hat{p}_i - p_i^*)^2$ implica monotonicamente $BS \rightarrow BS_{min}$ e, equivalentemente, $BSS \rightarrow BSS_{max}$. Não existe, portanto, trade-off entre o critério primário de seleção e os indicadores secundários de calibração, conferindo coerência interna à hierarquia de métricas adotada.

Expected Calibration Error (ECE): Métrica Secundária: Mensura a calibração probabilística seccionando as predições em $M = 10$ intervalos uniformes (B_m). A acurácia empírica sub-amstral acc_m é definida matematicamente pela proporção de acertos reais observados dentro do respectivo intervalo:

$$acc_m = \frac{1}{|B_m|} \sum_{i \in B_m} a_i$$

A partir desta medida, extrai-se a somatória ponderada das diferenças absolutas entre acc_m e a média probabilística predita $\bar{p}_m$ do *bin*:

$$ECE = \sum_{m=1}^M \frac{|B_m|}{N} |acc_m - \bar{p}_m|$$

No contexto do simulador cognitivo, o desfecho empírico a_i é gerado a partir de uma amostragem estocástica de uma distribuição de Bernoulli fundamentada na probabilidade latente: $a_i \sim \text{Bernoulli}(p_i^*)$. Consequentemente, acc_m representa a aproximação empírica da esperança matemática dessas realizações probabilísticas no subconjunto B_m . O ECE avalia se a confiança da rede ($\bar{p}_m$) reflete corretamente a esperança dessa distribuição geradora. Uma alta calibração (ECE próximo a zero)

assegura a inexistência de distorções sistemáticas de superconfiança ou subconfiança, atestando que os limiares inferidos pela arquitetura mapeiam rigorosamente a função probabilística real e são, portanto, estatisticamente fidedignos para delimitar os limites de intervenção na ZDP.

Métricas Terciárias de Discriminação (ACC e AUC): Atuam unicamente como referência comparativa e não exercem influência na seleção algorítmica. A Acurácia aplica um limiar estrito via variável indicadora ($\mathbb{I}$), com aprovação se $\hat{p}_i \geq 0,5$. O AUC estima a probabilidade de um exemplo positivo sorteado de seu subconjunto (D_1 , cardinalidade N_1) obter probabilidade superior a um elemento sorteado da classe negativa (D_0 , cardinalidade N_0):

$$\text{ACC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}(\hat{p}_i \geq 0,5 = a_i)$$

$$\text{AUC} = \frac{1}{N_1 N_0} \sum_{i \in D_1} \sum_{j \in D_0} \mathbb{I}(\hat{p}_i > \hat{p}_j)$$

5.1.6 Retreinamento Multi-Semente sobre o Conjunto Pleno

Concluída a fase de otimização paramétrica, cada arquitetura é submetida a uma etapa de retreinamento sobre a totalidade do conjunto $\mathcal{S}_{train}$, abolindo-se a subdivisão interna de validação e adotando a combinação de hiperparâmetros Λ^* previamente descoberta. O total de épocas de retreinamento (E_{final}) é extraído deterministicamente da tentativa (*trial*) vencedora, definido como a média aritmética das épocas de convergência e_k^* associadas ao menor erro de validação em cada uma das três partições da validação cruzada, conforme:

$$E_{final} = \left\lfloor \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 e_k^* \right\rfloor$$

Para isolar a variância induzida pela inicialização estocástica dos pesos da rede e pela permutação aleatória dos lotes pelo *DataLoader*, o procedimento é replicado sob $N_{seeds} = 5$ sementes pseudoaleatórias distintas, definidas pela sequência $\mathcal{Z} = \{42, 43, 44, 45, 46\}$ a partir da semente-base $\text{seed}_{base} = 42$. Mantêm-se invariantes os hiperparâmetros Λ^* , o número de épocas E_{final} , a partição $\mathcal{S}_{train}$ e a arquitetura subjacente, restringindo a fonte de variabilidade entre execuções aos componentes estocásticos do treinamento. Cada execução seed_k produz uma instância $\mathcal{F}_{KT}^{(k)}$, avaliada sobre $\mathcal{S}_{test}$ para a obtenção de um vetor de métricas $\mathcal{M}^{(k)}$. A partir da coleção $\{\mathcal{M}^{(k)}\}_{k=1}^{N_{seeds}}$, para cada métrica μ computam-se a média amostral $\bar{\mu}$, o desvio padrão amostral s_μ e o intervalo de confiança via distribuição *t* de Student com $N_{seeds} - 1 = 4$ graus de liberdade, ao nível $1 - \alpha = 0,95$:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{N_{seeds}} \sum_{k=1}^{N_{seeds}} \mu^{(k)} \quad ; \quad s_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{N_{seeds} - 1} \sum_{k=1}^{N_{seeds}} (\mu^{(k)} - \bar{\mu})^2}$$

$$\text{IC}_{0,95}(\mu) = \bar{\mu} \pm t_{0,975,4} \cdot \frac{s_{\mu}}{\sqrt{N_{seeds}}}$$

Esta replicação fornece a estimativa da incerteza atribuível ao processo de otimização, dissociando-a da variabilidade dos dados.

5.1.7 Validação por Reamostragem *Bootstrap* Estratificada

Em complemento à variância de treinamento, a variância de amostragem do conjunto de teste é quantificada por reamostragem *bootstrap* ao nível do estudante (*clustered bootstrap*). A estratificação por estudante é estruturalmente necessária dada a dependência intra-sequência das predições $\hat{p}_{i,t}$ associadas a um mesmo aluno s_i : uma reamostragem ao nível das interações violaria o pressuposto de independência entre observações e produziria intervalos de confiança subestimados. Formalmente, dado o conjunto de identificadores únicos do conjunto de teste $\mathcal{U}_{test} = \{s_1, \dots, s_M\}$ com cardinalidade M , gera-se uma sequência de $B = 1000$ amostras *bootstrap* a partir da semente fixa $\text{seed}_{boot} = 42$. Para cada $b \in \{1, \dots, B\}$, sorteia-se com reposição um conjunto $\mathcal{U}_{test}^{(b)}$ de M identificadores a partir de $\mathcal{U}_{test}$, preservando-se integralmente, para cada estudante sorteado, a estrutura sequencial completa de suas predições. Recalculadas as métricas sobre cada réplica, obtém-se a distribuição empírica $\{\mu^{(b)}\}_{b=1}^B$, da qual se extrai o intervalo de confiança percentílico ao nível $1 - \alpha = 0,95$:

$$\text{IC}_{0,95}^{boot}(\mu) = [Q_{0,025}(\{\mu^{(b)}\}), Q_{0,975}(\{\mu^{(b)}\})]$$

onde Q_{β} denota o quantil empírico de ordem β . Quando combinada com o retreinamento multi-semente, a estatística *bootstrap* é computada independentemente para cada réplica seed_k e posteriormente promediada entre as sementes, fornecendo uma síntese da variância total agregada ao processo de avaliação.

5.1.8 Seleção do Modelo de Referência pelo Critério da Mediana

A eleição do modelo de referência $\mathcal{F}_{KT}^*$ adota o critério da mediana sobre as réplicas multi-semente, em detrimento da seleção pelo desempenho pontual extremo ou pela média populacional. A seleção pela menor métrica observada induz viés de superestimação ao capturar flutuações estocásticas favoráveis (*cherry-picking*), enquanto a seleção pela média associa-se ao reporte de um desempenho não realizado por nenhuma instância concreta

dentre as réplicas treinadas. A mediana, por outro lado, identifica uma realização efetiva da arquitetura cujo desempenho representa o comportamento típico sob as condições experimentais, sendo invariante a observações extremas. Formalmente, para cada arquitetura $\mathcal{A}$, ordena-se de forma crescente o vetor da métrica primária $\{\text{RMSE}_{p^*}^{(k)}\}_{k=1}^{N_{seeds}}$ e seleciona-se a réplica posicionada no índice mediano $\lfloor N_{seeds}/2 \rfloor$, denotada por $\mathcal{F}_{KT}^{(med, \mathcal{A})}$:

$$k_{\mathcal{A}}^* = \text{argsort}\left(\{\text{RMSE}_{p^*}^{(k)}\}_{k=1}^{N_{seeds}}\right)[\lfloor N_{seeds}/2 \rfloor] \quad ; \quad \mathcal{F}_{KT}^{(med, \mathcal{A})} \equiv \mathcal{F}_{KT}^{(k_{\mathcal{A}}^*)}$$

A seleção definitiva entre as arquiteturas $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{baselines}$ apresentadas na Tabela 5.1 é então conduzida pela comparação direta entre os valores de RMSE_{p^*} associados às respectivas instâncias medianas:

$$\mathcal{A}^* = \arg \min_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{baselines}} \text{RMSE}_{p^*}\left(\mathcal{F}_{KT}^{(med, \mathcal{A})}\right) \quad ; \quad \mathcal{F}_{KT}^* \equiv \mathcal{F}_{KT}^{(med, \mathcal{A}^*)}$$

A arquitetura $\mathcal{A}^*$ cuja realização mediana consolidar o menor desvio quadrático subjacente é oficializada como modelo de referência $\mathcal{F}_{KT}^*$ e registrada no *Model Registry* do MLflow para integração com os módulos subsequentes. Os intervalos de confiança $\text{IC}_{0,95}(\text{RMSE}_{p^*})$ e $\text{IC}_{0,95}^{boot}(\text{RMSE}_{p^*})$ associados acompanham o reporte do modelo eleito, sustentando estatisticamente a interpretação do desempenho e a comparação relativa entre arquiteturas.

5.2 Avaliação da Qualidade da Recomendação

Esta seção estabelece o protocolo experimental para a avaliação pedagógica do sistema de recomendação adaptativa $\mathcal{R}$ detalhado no Capítulo 4. Enquanto a Seção 5.1 mensurou a acurácia preditiva do componente de diagnóstico $\mathcal{F}_{KT}^*$ no espaço da probabilidade latente p^* , esta etapa quantifica a qualidade pedagógica das sequências de recomendações geradas quando o motor opera em *closed loop* sobre o espaço observável $P(\text{correct})$. As três métricas pedagógicas que ancoram o relato, Acurácia Pedagógica ($\overline{AP}$), Novidade Curricular ($\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]$) e Diversidade da Sessão ($\mathcal{D}_S$), são adaptações das dimensões *accuracy*, *novelty* e *diversity* propostas por Wu et al. (2020), reformuladas para a política pedagógica baseada na ZDP e operando integralmente no espaço observável de probabilidade de acerto, conforme estabelecido na Seção 4.5.

5.2.1 Coorte de Avaliação e Partição Usuário-Disjunta

A avaliação é conduzida sobre a coorte $\mathcal{S}_{eval}$ de estudantes definida na Seção 5.1.3, disjunta de $\mathcal{S}_{train} \cup \mathcal{S}_{test}$ e, portanto, desconhecida por $\mathcal{F}_{KT}^*$ durante seu treinamento e seleção. Esta

coorte é particionada em dois subconjuntos *usuário-disjuntos*,

$$\mathcal{S}_{eval} = \mathcal{S}_{calib} \sqcup \mathcal{S}_{holdout}, \quad \mathcal{S}_{calib} \cap \mathcal{S}_{holdout} = \emptyset, \quad (5.2)$$

em proporção controlada por $\rho_{calib} = |\mathcal{S}_{calib}|/|\mathcal{S}_{eval}|$, adotando-se $\rho_{calib} = 0,50$. A partição é determinada sobre a identidade real dos estudantes (e não sobre as janelas deslizantes geradas em pré-processamento), de modo a impedir que fragmentos de um mesmo aluno longo recaiam simultaneamente nos dois lados, e é controlada por semente fixa para reprodutibilidade integral. O papel de $\mathcal{S}_{calib}$ é exclusivamente o ajuste do calibrador isotônico descrito na Seção 5.2.2; toda mensuração das métricas pedagógicas é realizada estritamente sobre $\mathcal{S}_{holdout}$.

5.2.2 Ajuste do Calibrador Isotônico em Holdout

O motor opera, durante a passagem de coleta de métricas, sob a realização multi-âncora do *ghost-pass* (Equação 4.33) com $N_a = 3$ âncoras selecionadas pelo critério de neutralidade da Equação 4.32, aplicando o calibrador isotônico g da Equação 4.36 a toda saída do modelo. Esta seção especifica o protocolo empírico de ajuste de g , etapa que ocorre uma única vez sobre $\mathcal{S}_{calib}$ antes da execução da passagem de mensuração e cuja estrutura amostral é dimensionada para evitar o vazamento documentado na sequência.

Conjunto de ajuste. Os pares de calibração são extraídos de uma passagem simulatória prévia sobre $\mathcal{S}_{calib}$, na qual o motor opera *sem* calibração ativa (i.e., $g \equiv \text{id}$ durante essa passagem). Ao término de cada estudante $s_l \in \mathcal{S}_{calib}$, registra-se, para cada KC k , o estado final da *probe* $\hat{p}_{ghost}^{final}(s_l, k)$ pareado à projeção observável da maestria estrutural verdadeira:

$$\mathcal{D}_{calib} = \left\{ \left(\hat{p}_{ghost}^{final}(s_l, k), \pi(v_{true}^{final}(s_l, k)) \right) : s_l \in \mathcal{S}_{calib}, k \in \mathcal{K}_{vocab} \right\}, \quad (5.3)$$

onde $\pi(v) = \bar{\gamma} + (1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma})v$ é a projeção afim ao espaço observável herdada da Equação 4.35, $\mathcal{K}_{vocab} \subseteq \mathcal{K}$ é o subconjunto de KCs cobertos pelo vocabulário do modelo de referência, e v_{true}^{final} é a maestria estrutural latente extraída do simulador cognitivo. Pares com v_{true}^{final} ausente são descartados.

Critério de ajuste. O calibrador g , cuja forma operacional foi definida pela Equação 4.36, é obtido como solução do problema de mínimos quadrados restritos à classe das funções monotônicas não-decrescentes:

$$g = \arg \min_{h \text{ não-decrescente}, h(\cdot) \in [0,1]} \sum_{(x,y) \in \mathcal{D}_{calib}} (h(x) - y)^2. \quad (5.4)$$

A solução é obtida em tempo $O(n \log n)$ pelo algoritmo *Pool Adjacent Violators*, sendo determinística condicionada a $\mathcal{D}_{calib}$.

Garantia de ausência de vazamento. A separação usuário-disjunta da Equação 5.2 é a peça que confere validade estatística ao procedimento: ajustar g e mensurar as métricas pedagógicas sobre a mesma coorte induziria duplo viés, com o calibrador absorvendo, no ajuste, sinais cuja avaliação posterior em métricas correlacionadas exibiria erro residual artificialmente baixo. A passagem de coleta das três métricas pedagógicas opera exclusivamente sobre $\mathcal{S}_{holdout}$ sob g ajustado em $\mathcal{S}_{calib}$, garantindo independência estatística entre o conjunto de ajuste e o conjunto de mensuração.

5.2.3 Simulação por Replay sobre Históricos Reais

Princípio do replay. A avaliação não dispara um novo simulador cognitivo: o motor $\mathcal{R}$ é submetido a um *replay* dos históricos reais de $\mathcal{S}_{holdout}$. Para cada estudante s_l e cada passo t da sua sequência cronológica $I_l = (i_{l,1}, \dots, i_{l,n_l})$, o motor recebe estritamente o prefixo $\mathcal{H}_{l,t} = (i_{l,1}, \dots, i_{l,t})$ e produz, se elegível, uma recomendação $q_{l,t}^*$. A recomendação não substitui a interação real subsequente $i_{l,t+1}$ na sequência alimentada ao modelo; ela alimenta exclusivamente o cálculo das métricas pedagógicas. Esta escolha desacopla a avaliação da geração estocástica do simulador, mantendo o contrafactual estritamente sobre a política de recomendação enquanto preserva a distribuição empírica de dificuldade e sequenciamento curricular dos alunos.

Subamostragem temporal. Submeter o motor a uma consulta por passo do histórico é computacionalmente custoso e estatisticamente redundante: a maestria observável varia em escala lenta relativa ao tamanho do histórico. Introduce-se um *passo de subamostragem* τ_s sobre o qual o motor é efetivamente consultado:

$$\mathcal{T}_l = \{t \in \{1, \dots, n_l\} : t \geq 1 \wedge t \equiv 0 \pmod{\tau_s}\}. \quad (5.5)$$

O valor adotado é $\tau_s = 15$, equilibrando volume amostral estatisticamente útil contra custo computacional. Entre consultas, o histórico segue sendo atualizado normalmente; a recomendação emitida no instante $t \in \mathcal{T}_l$ reflete o estado real do aluno em t . Ao término de cada sequência I_l , executa-se uma passagem de fechamento adicional na qual o *ghost-pass* é recalculado sobre o histórico completo e o estado BFS refrescado a ponto fixo, garantindo que o *snapshot* final por par (s_l, k) utilizado na Equação 5.3 e nos diagnósticos não sofra a defasagem residual de até $\tau_s - 1$ passos imposta pela subamostragem.

Propagação do estado BFS a ponto fixo. A cada consulta no instante $t \in \mathcal{T}_l$, o estado de aprendizagem do aluno (composto pelos conjuntos $\mathcal{K}_{dom,l}(t)$ de KCs dominados

(Equação 5.9), $\mathcal{K}_{unl,l}(t)$ de KCs desbloqueados e $\mathcal{F}_{learn,l}(t)$ da fila de aprendizagem ativa) é refrescado em iteração até ponto fixo: KCs cuja maestria observável atravessa o limiar Ω_k^{obs} são promovidos a $\mathcal{K}_{dom}$ na mesma iteração em que seus filhos topológicos, satisfeita a condição de pais-dominados, ingressam em $\mathcal{K}_{unl}$. A iteração a ponto fixo elimina a defasagem inerente à subamostragem τ_s : sem ela, a promoção de um pai no instante t teria sua repercussão sobre o filho adiada para $t + \tau_s$, atrasando arbitrariamente o avanço curricular sob τ_s grosseiro.

5.2.4 Políticas Comparadas

Duas políticas operam sobre o mesmo motor deliberativo e diferem exclusivamente na etapa terminal de seleção da questão dentro do conjunto de candidatas $\mathcal{Q}_{cand}$ admitido pelo filtro curricular.

Política $\mathcal{R}$. É a política operacional do sistema: a função platô da Equação 4.44, definida sobre o intervalo da ZDP ativa $[P_{\min}, P_{\max}]$, atribui a cada questão candidata $q_j \in \mathcal{Q}_{cand}$ um peso $w_j = w(\hat{P}(\text{correct})_{l,q_j}; P_{\min}, P_{\max})$, seguido de amostragem ponderada via Equação 4.28.

Política $\mathcal{R}_{base}$. A política ablada preserva integralmente (i) a estrutura BFS, (ii) o *ghost-pass* e o limiar Ω_k^{obs} , (iii) a política de revisão e a definição de k_{target} pela Equação 4.38, e (iv) o filtro curricular de candidatas. Substitui-se unicamente a ponderação ZDP por distribuição uniforme:

$$w_j^{\mathcal{R}_{base}} \equiv 1, \quad \forall q_j \in \mathcal{Q}_{cand}, \quad (5.6)$$

mantendo intacta a operação de amostragem da Equação 4.28, que se reduz, sob pesos constantes, a sorteio uniforme sobre o conjunto de candidatas. Essa configuração isola a contribuição estrita do mecanismo de ponderação ZDP sobre a qualidade pedagógica, mantendo constantes todos os demais componentes da arquitetura deliberativa.

Ambas as políticas executam sobre a mesma coorte $\mathcal{S}_{holdout}$ e sob a mesma semente global, garantindo *pareamento exato por estudante*: para cada $s_l \in \mathcal{S}_{holdout}$, dispõe-se de duas trajetórias de recomendação geradas sob entradas idênticas e diferindo apenas pela política, condição necessária para os testes estatísticos pareados descritos na Seção 5.2.8.

5.2.5 Métrica 1: Acurácia Pedagógica

Objetivo. Quantificar a acurácia com que o motor $\mathcal{R}$ executa sua política pedagógica, medindo o quão precisamente o nível de desafio da questão recomendada se alinha ao intervalo dinâmico da ZDP, $[P_{\min}, P_{\max}]$, definido pelas Equações 4.39–4.42.

Formalização. Para cada questão recomendada q^* a um aluno s_l no instante t , a probabilidade esperada de acerto é fornecida diretamente pelo modelo de referência calibrado, $\hat{P}(\text{correct})_{l,q^*} = g(\mathcal{F}_{KT}^*(\mathcal{H}_{l,t}, q^*))$, conforme Equação 4.43. Define-se a distância à ZDP como o desvio entre esta predição e o ponto mais próximo do intervalo ZDP ativo:

$$\text{dist}_{ZDP}(q^*) = \begin{cases} 0 & \text{se } P_{\min} \leq \hat{P}(\text{correct})_{l,q^*} \leq P_{\max} \\ P_{\min} - \hat{P}(\text{correct})_{l,q^*} & \text{se } \hat{P}(\text{correct})_{l,q^*} < P_{\min} \\ \hat{P}(\text{correct})_{l,q^*} - P_{\max} & \text{se } \hat{P}(\text{correct})_{l,q^*} > P_{\max} \end{cases} \quad (5.7)$$

A coerência dimensional da métrica é garantida por construção: tanto a predição $\hat{P}(\text{correct})_{l,q^*}$ quanto os limites $[P_{\min}, P_{\max}]$ residem no mesmo espaço observável, dispensando reprojeções ou correções paramétricas. A Acurácia Pedagógica AP é então definida como o complemento da distância:

$$AP(q^*) = 1 - \text{dist}_{ZDP}(q^*). \quad (5.8)$$

A performance global do sistema é quantificada pela média $\overline{AP}$ sobre o conjunto de interações de recomendação geradas durante a simulação. Adicionalmente, relata-se a estratificação por modo de operação, $\overline{AP}_{\text{learn}}$ e $\overline{AP}_{\text{review}}$, computadas restringindo a média aos subconjuntos de recomendações emitidas em modo de aprendizagem e revisão, respectivamente.

Interpretabilidade. A análise de $\overline{AP}$ e da distribuição assinada dos desvios oferece um diagnóstico rico do comportamento pedagógico do sistema.

- **Acurácia Pedagógica Média ($\overline{AP}$):** um valor próximo de 1 indica que o sistema, em média, gera recomendações muito próximas ou dentro da zona de desafio ideal.
- **Taxa de Acerto na ZDP:** definida formalmente como $\mathbb{P}[\text{dist}_{ZDP}(q^*) = 0]$, mede diretamente a precisão do sistema em atingir o intervalo da ZDP.
- **Análise de Viés de Dificuldade:** a decomposição assinada das falhas em *undershooting* (frequência relativa de casos $\hat{P}(\text{correct})_{l,q^*} < P_{\min}$) e *overshooting* (frequência relativa de $\hat{P}(\text{correct})_{l,q^*} > P_{\max}$) permite diagnosticar tendências sistemáticas. Predominância de *undershooting* indica viés para questões mais difíceis do que o pretendido pela política; predominância de *overshooting*, o oposto.
- **Diagnóstico de Cobertura do Banco de Questões:** um $\overline{AP}$ sistematicamente baixo, particularmente concentrado em desvios extremos, pode indicar não uma falha da política de recomendação, mas a ausência de itens com dificuldade adequada à ZDP dinâmica de determinados perfis de aluno, caracterizando um gargalo de cobertura curricular análogo aos identificados pelo ITMC durante a geração do

Dataset Sintético D .

5.2.6 Métrica 2: Novidade Curricular

Objetivo. Mensurar a propensão do sistema em promover o avanço do aluno pelo currículo, introduzindo novos KCs em detrimento da repetição de conceitos já consolidados.

Formalização. No instante t da recomendação, o conjunto de KCs dominados pelo aluno s_t é construído a partir das predições *ghost-pass* calibradas (Equação 4.33) confrontadas contra o limiar de domínio projetado ao espaço observável (Equação 4.35):

$$\mathcal{K}_{dom,l}(t) = \{ k \in \mathcal{K} \mid \hat{p}_{ghost}(t, k) \geq \Omega_k^{obs} \}. \quad (5.9)$$

Para uma questão recomendada q^* associada ao conjunto de KCs $\mathcal{K}_{q^*}$, a Novidade Curricular $\mathcal{N}_C$ é a proporção de componentes em $\mathcal{K}_{q^*}$ que **não** estão dominados:

$$\mathcal{N}_C(q^*) = \frac{|\mathcal{K}_{q^*} \setminus \mathcal{K}_{dom,l}(t)|}{|\mathcal{K}_{q^*}|}, \quad (5.10)$$

onde $\setminus$ denota a diferença de conjuntos. Um valor $\mathcal{N}_C(q^*) = 1$ indica que todos os KCs da questão são novos para o aluno; $\mathcal{N}_C(q^*) = 0$ indica cobertura exclusiva de componentes já dominados. Relata-se o valor esperado $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]$ e suas estratificações por modo, $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{learn}$ e $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{review}$.

Interpretabilidade. O valor esperado $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C(q^*)]$, analisado separadamente para cada modo de recomendação, atua como teste de conformidade da política pedagógica do motor $\mathcal{R}$:

- **Modo de Aprendizagem:** espera-se $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{learn} > 0$ consistente, pois o $k_{foco,l}$, por definição, não pertence a $\mathcal{K}_{dom,l}$. O valor esperado típico (e.g., $1/|\mathcal{K}_{q^*}|$ quando o item mescla o foco com pré-requisitos dominados) valida que o sistema progride efetivamente na trilha curricular.
- **Modo de Revisão:** espera-se $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{review} \approx 0$. Como $k_{target} \in \mathcal{K}_{risk,l} \subseteq \text{Pre}^*(k_{foco,l})$ é um pré-requisito historicamente dominado e o filtro curricular para revisão (Equação 4.22) restringe os KCs secundários ao mesmo fecho transitivo, valores significativamente positivos sinalizariam comportamento anômalo ou ativação frequente das rotinas de *fallback*, tornando esta métrica uma ferramenta de diagnóstico para o relaxamento do filtro estrito.

A interpretação requer cautela em dois aspectos. Primeiro, $\mathcal{K}_{dom,l}(t)$ depende da acurácia preditiva de $\mathcal{F}_{KT}^*$ via $\hat{p}_{ghost}$: erros sistemáticos na estimativa de maestria propagam-se para a métrica. Segundo, a calibração de Ω_k^{obs} via constantes populacionais $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma})$ introduz

uma fonte de variabilidade inerente à projeção afim adotada na Seção 4.5.2, parcialmente mitigada pela calibração isotônica da Seção 5.2.2, mas não eliminada.

5.2.7 Métrica 3: Diversidade da Sessão

Objetivo. Avaliar a variedade conceitual dos desafios apresentados ao aluno em uma janela recente de interações, verificando se o sistema alterna entre comportamento focado e generalista conforme o objetivo pedagógico.

Formalização. Sobre uma janela deslizante das últimas N questões recomendadas, $W_N = (q_{t-N+1}^*, \dots, q_t^*)$, cada questão q_j é representada por um vetor binário $\mathbf{q}_j \in \{0, 1\}^{|\mathcal{K}|}$, com a k -ésima componente igual a 1 se $k \in \mathcal{K}_j$. Adota-se $N = 10$, valor que representa uma sessão de estudo típica e é suficiente para capturar variações de foco entre KCs consecutivos sem diluir o sinal em horizontes excessivamente longos. A Diversidade da Sessão $\mathcal{D}_S$ é a dissimilaridade de cosseno média entre todos os pares de vetores na janela:

$$\mathcal{D}_S(W_N) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{m=j+1}^N \left(1 - \frac{\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_m}{\|\mathbf{q}_j\| \|\mathbf{q}_m\|} \right). \quad (5.11)$$

$\mathcal{D}_S(W_N) = 1$ denota diversidade total (nenhum KC compartilhado na janela); $\mathcal{D}_S(W_N) = 0$ denota redundância total. O agregado reportado é a média de $\mathcal{D}_S$ sobre todas as janelas e todos os alunos. Esta métrica opera estritamente sobre a representação estrutural das questões em $\mathcal{G}^*$, sendo invariante a aspectos do espaço de probabilidade observável e, portanto, ortogonal às Métricas 1 e 2.

Interpretabilidade. A interpretação é altamente contextual e permite diagnosticar a estratégia de foco do sistema:

- **Modo de Aprendizagem:** espera-se diversidade baixa a moderada. Baixa porque o sistema mantém o foco em $k_{foco,l}$, garantindo sobreposição conceitual entre recomendações consecutivas. Moderada (e não nula) porque o filtro curricular admite questões que ativam KCs secundários (pré-requisitos dominados ou avanços supervisionados), indicando construção de conhecimento conectada.
- **Modo de Revisão:** comportamento esperado bimodal. Diversidade baixa (próxima de zero) é coerente quando o sistema identifica um único pré-requisito criticamente fraco e concentra reforço sobre ele. Diversidade alta é coerente quando múltiplos pré-requisitos figuram simultaneamente em $\mathcal{K}_{risk,l}$ e o sistema alterna o foco entre eles, conforme a política da Equação 4.38.
- **Acoplamento com a rotação por fadiga:** picos de diversidade no modo de aprendizagem podem ser atribuídos à ativação do mecanismo de prática intercalada

(Seção 4.4.3), em que $E_{cons} \geq \tau_{frust}$ promove a rotação cíclica da fila $\mathcal{F}_{learn,l}$. Essa atribuição é diagnosticável cruzando a série temporal de $\mathcal{D}_S$ com os instantes de rotação registrados durante a simulação.

5.2.8 Comparação Estatística Pareada

A hipótese central a ser testada é que $\mathcal{R}$ supera $\mathcal{R}_{base}$ na Métrica 1,

$$H_a: \overline{AP}_{\mathcal{R}} > \overline{AP}_{\mathcal{R}_{base}}, \quad H_0: \overline{AP}_{\mathcal{R}} = \overline{AP}_{\mathcal{R}_{base}}, \quad (5.12)$$

confirmando que a função platô (Equação 4.44) efetivamente direciona a amostragem para a região da ZDP. Para as Métricas 2 e 3 espera-se equivalência estatística entre as políticas, dado que ambas operam sob filtro curricular idêntico: divergências significativas nestas dimensões indicariam efeitos colaterais não-triviais da ponderação ZDP sobre novidade ou diversidade, demandando investigação adicional. O pareamento exato por estudante, viabilizado pela execução de ambas as políticas sobre $\mathcal{S}_{holdout}$ sob a mesma semente, permite o uso de testes pareados sobre as médias por aluno $\bar{\mu}_l^{\mathcal{R}}$ e $\bar{\mu}_l^{\mathcal{R}_{base}}$ de cada métrica $\mu \in \{AP, \mathcal{N}_C, \mathcal{D}_S\}$. Aplicam-se três estatísticas sobre a coleção pareada:

1. **Teste t pareado de Student.** Sob a aproximação de normalidade das diferenças $\Delta_l = \bar{\mu}_l^{\mathcal{R}} - \bar{\mu}_l^{\mathcal{R}_{base}}$, a estatística

$$T = \frac{\overline{\Delta}}{s_{\Delta}/\sqrt{|\mathcal{S}_{holdout}|}} \quad (5.13)$$

segue uma t de Student com $|\mathcal{S}_{holdout}| - 1$ graus de liberdade sob H_0 . Reporta-se a estatística T e o respectivo p -valor.

2. **Teste de Wilcoxon de postos sinalizados.** Versão não-paramétrica aplicada à mesma coleção pareada, robusta a desvios da normalidade. Relata-se como verificação de sanidade sobre o mesmo conjunto de pares.
3. **Tamanho de efeito d_z de Cohen.** Definido como

$$d_z = \frac{\overline{\Delta}}{s_{\Delta}}, \quad (5.14)$$

fornece a magnitude do efeito independente do tamanho amostral, complementando os p -valores na interpretação prática das diferenças observadas.

A divergência média absoluta entre as métricas acompanha as três estatísticas. Adota-se nível de significância $\alpha = 0,05$.

Considerações Finais

A aplicação conjunta destas métricas permite a quantificação objetiva da eficácia pedagógica do sistema. O delineamento experimental aqui estabelecido, abrangendo tanto a precisão do diagnóstico quanto a qualidade da recomendação, fundamenta a análise dos resultados apresentada no capítulo subsequente.

Capítulo 6

Resultados

Este capítulo consolida os achados empíricos obtidos ao longo das quatro etapas metodológicas descritas no Capítulo 4 e avaliados segundo o protocolo experimental definido no Capítulo 5. A exposição segue a ordem lógica de construção do sistema: parte-se das propriedades estatísticas do ambiente de simulação e do Dataset Sintético D , avança para a análise comparativa dos modelos de Knowledge Tracing treinados sobre esse ambiente, e culmina na avaliação integrada do sistema de tutoria adaptativa como política de recomendação de ponta a ponta.

6.1 Visão Geral dos Resultados

Os resultados são organizados em três blocos interdependentes. O primeiro bloco (Seção 6.2) caracteriza a qualidade do ambiente simulado, verificando se o processo de geração estocástica e o algoritmo ITMC produziram um grafo curricular topologicamente estável ($\mathcal{G}^*$) e o Dataset Sintético D com propriedades estatísticas condizentes com as premissas pedagógicas da metodologia. O segundo bloco (Seção 6.5) reporta o desempenho preditivo dos modelos de KT candidatos, com ênfase na capacidade de estimar $P(\text{correct})$ no espaço observável. O terceiro bloco (Seção 6.6) avalia o sistema de recomendação adaptativa integrado, analisando a eficácia da política ZDP na promoção de progressão curricular.

6.1.1 Relação entre os Blocos de Resultados

A interdependência entre os três blocos não é meramente organizacional: ela reflete a cadeia causal da metodologia proposta. A validade dos resultados de KT pressupõe que D seja estatisticamente representativo da heterogeneidade cognitiva estudantil modelada; por sua vez, a validade da política de recomendação pressupõe que $\mathcal{F}_{KT}^*$ forneça estimativas calibradas de $\hat{P}(\text{correct})$ em contextos fora da distribuição de treinamento, incluindo

as probes sintéticas do *ghost pass*. Falhas em qualquer elo da cadeia são identificadas e discutidas nas respectivas seções.

Convenções de Notação e Reprodutibilidade. Todos os experimentos reportados neste capítulo foram conduzidos com semente global fixada em `seed = 42`, garantindo a reprodutibilidade integral do pipeline. Métricas de desempenho são reportadas como média $\pm$ desvio padrão sobre as partições de validação definidas no protocolo experimental, salvo indicação contrária. Diferenças entre modelos são consideradas substantivas quando o intervalo de confiança de 95% não se sobrepõe; análises estatísticas formais são detalhadas onde aplicável.

6.2 Resultados da Modelagem do Grafo de Conhecimento e Parametrização Curricular

Esta seção reporta os resultados concretos da construção do Grafo de Conhecimento curricular descrita na Seção 4.2. A análise é organizada em dois eixos: a topologia hierárquica do DAG instanciado e a distribuição estatística dos parâmetros pedagógicos (d_k, Ω_k, Ψ_k) atribuídos aos $|\mathcal{K}| = 82$ KCs.

6.2.1 Estrutura Hierárquica do Grafo de Conhecimento

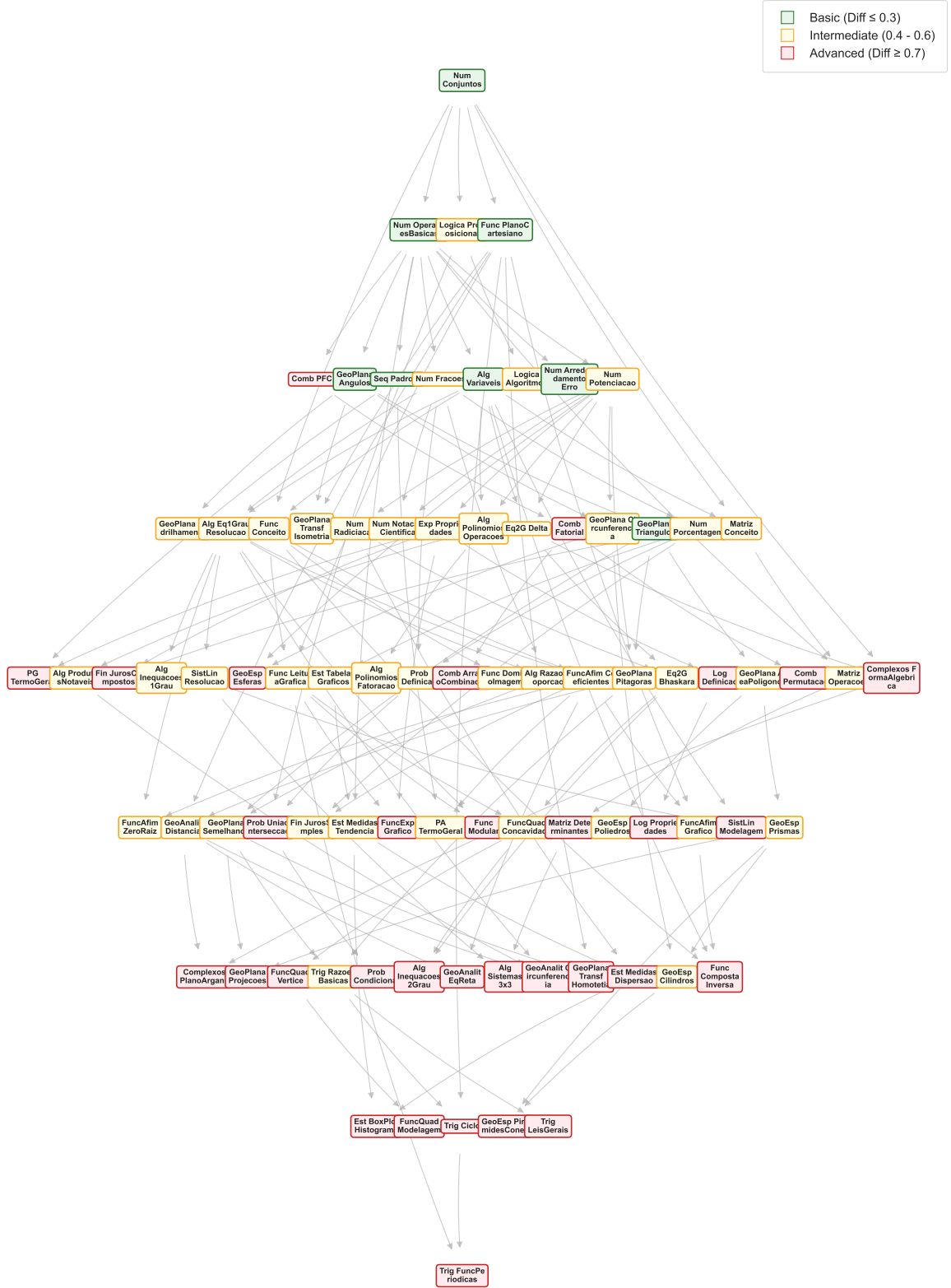


Figura 6.1: DAG curricular instanciado com $|\mathcal{K}| = 82$ KCs, exibindo topologia em funil: raiz única, expansão nos níveis intermediários.

A Figura 6.1 apresenta o DAG curricular instanciado. A estrutura resultante exibe uma topologia em funil: parte de um único nó raiz, alarga-se progressivamente nos níveis intermediários até chegar aos mais difíceis.

Raiz do Grafo. O grafo possui um único ponto de entrada: o KC `Num_Conjuntos`, classificado como básico ($d_k \leq 0,3$). A partir dele, o nível imediatamente seguinte ramifica-se em quatro KCs (`Num_OperacoesBasicas`, `Logica_Proposicional`, `Func_PlanoCartesiano` e `Comb_PFC`), todos ainda de dificuldade básica, o que reflete a necessidade de consolidar múltiplas bases elementares antes de qualquer avanço conceitual.

Progressão de Dificuldade ao Longo da Hierarquia. A codificação visual do grafo evidencia uma progressão sistemática de dificuldade com a profundidade topológica. Os níveis superiores são dominados por nós verdes (básicos, $d_k \leq 0,3$), os níveis intermediários por nós amarelos ($0,4 \leq d_k \leq 0,6$), e os níveis mais profundos concentram os nós vermelhos (avancados, $d_k \geq 0,7$). Nos níveis mais profundos do grafo destacam-se KCs como `Trig_Ciclo`, `Trig_LeisGerais`, `GeoEsp_PiramidesCones`, `FuncQuad_Modelagem` e `Est_BoxPlot_Histograma`, todos avançados e com múltiplos pré-requisitos transitivos. Esta gradação confirma que a atribuição de dificuldade intrínseca d_k é coerente com a posição estrutural de cada KC na cadeia de dependências.

Amplitude da Rede e Acicilicidade. O grafo se estende por aproximadamente nove níveis de profundidade, com maior densidade de arestas nos níveis intermediários, onde a convergência de múltiplas cadeias de pré-requisito é mais intensa. A ausência de ciclos, propriedade fundamental do DAG, foi verificada computacionalmente, garantindo que a travessia BFS adotada na política de progressão curricular (Seção 4.4.3) produza sempre uma ordenação topológica consistente.

6.2.2 Distribuição dos Parâmetros dos KCs

A Figura 6.2 apresenta os histogramas das três grandezas paramétricas definidas na Seção 4.2.3 para os 82 KCs instanciados.

Dificuldade Intrínseca (d_k). A distribuição de d_k é aproximadamente unimodal e levemente assimétrica à direita, com média $\bar{d} = 0,55$ e mediana 0,53, cobrindo o intervalo $[0,2, 0,9]$. A proximidade entre média e mediana indica ausência de distorção severa, e a cobertura ampla do suporte confirma que o grafo instanciado distribui os KCs de forma progressiva ao longo de todo o espectro de complexidade curricular, sem concentração excessiva em nenhuma faixa de dificuldade.

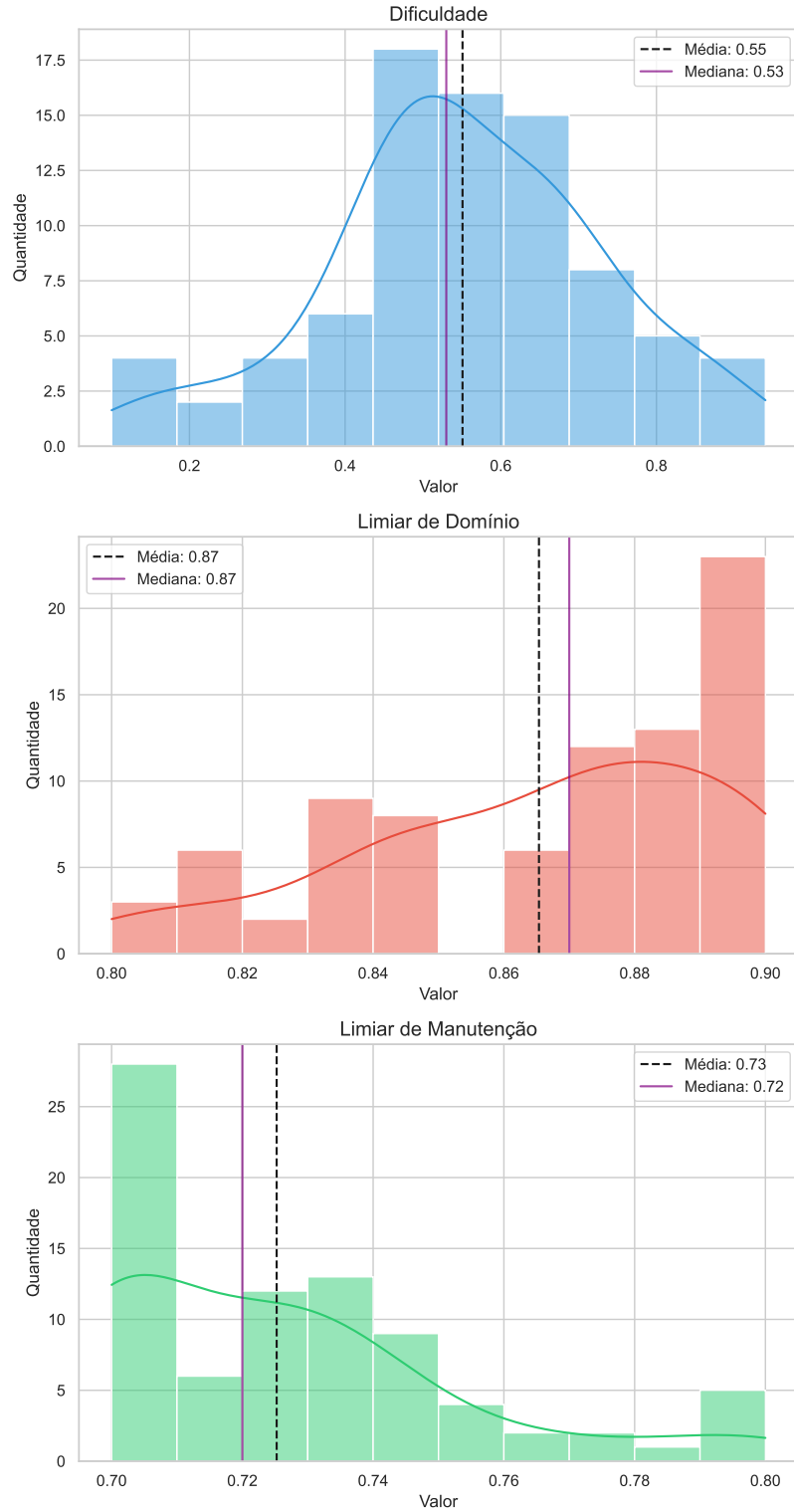


Figura 6.2: Histogramas dos parâmetros dos KCs: dificuldade intrínseca (d_k), limiar de maestria (Ω_k) e limiar de manutenção (Ψ_k) para os 82 KCs instanciados.

Limiar de Maestria (Ω_k). A distribuição de Ω_k é fortemente concentrada na região superior do intervalo permitido, com média e mediana coincidentes em 0,87 e suporte observado em $[0,80, 0,90]$. A aglomeração próxima ao teto de 0,90, imposto para evitar problemas de convergência assintótica associados ao parâmetro de *slip* conforme descrito na Seção 4.2.3, indica que o sistema exige, de forma consistente, alto nível de domínio antes de promover um KC ao conjunto de componentes dominados $\mathcal{K}_{dom,l}$.

Limiar de Manutenção (Ψ_k). A distribuição de Ψ_k apresenta média de 0,73 e mediana de 0,72, com suporte concentrado em $[0,70, 0,80]$ e maior densidade próxima ao piso de 0,70, estabelecido para manter o sistema acima da zona de incerteza estatística do acerto casual em itens de múltipla escolha. A diferença de histerese empírica resultante, $\nabla = \Omega_k - \Psi_k$, situa-se predominantemente na faixa $[0,10, 0,17]$, compatível com o comportamento bimodal projetado ($\nabla \approx 0,15$ para KCs intermediários e $\nabla \approx 0,10$ para os extremos), sem que nenhum KC viole as restrições de *clipping* impostas pelo design.

6.2.3 Síntese e Transição

O grafo instanciado apresenta as propriedades estruturais e paramétricas necessárias para o funcionamento correto do sistema: DAG acíclico com raiz única, progressão de dificuldade consistente com a profundidade topológica, e distribuições de Ω_k e Ψ_k aderentes às regras de *clipping* e histerese projetadas. Com o domínio de conhecimento formalmente representado, a etapa seguinte consiste em ancorar esta estrutura abstrata ao banco de questões disponível, conectando cada KC aos itens de avaliação que o mobilizam, operação cujos resultados são reportados na Seção 6.3.

6.3 Resultados do Mapeamento Semântico e Anotação do Banco de Questões

Esta seção reporta os resultados do pipeline de mapeamento semântico descrito na Seção 4.3. O processo conectou o banco de questões originais (ENEM e UFSC) aos 82 KCs do grafo curricular, operacionalizando o mapeamento $\mathcal{M} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Q})$ que viabiliza tanto o treinamento dos modelos de KT quanto a geração de recomendações pela política adaptativa. O pipeline de quatro etapas (enriquecimento semântico via CoT, recuperação vetorial por Bi-Encoder, re-ranqueamento por Cross-Encoder e validação cega por LLM) foi aplicado integralmente sobre as 987 questões do corpus.

Estatísticas Globais do Mapeamento. Das 987 questões submetidas ao pipeline, 889 foram retidas após a fase de validação cega (Φ_V , Seção 4.3), resultando em 98 questões descartadas ($\approx 9,9\%$ do total). Esta taxa de rejeição é normal e esperada: a função binária

Φ_V foi projetada precisamente para eliminar pares (k, q_j) cuja resolução ζ_j não mobilize de forma verificável a habilidade k , prevenindo ruído nas sequências de treinamento. O banco consolidado compreende **889 questões** conectadas aos **82 KCs** por meio de **3.219 arestas** (relações KC–questão), resultando em uma média de aproximadamente 3,6 KCs por questão em todo o banco.

6.3.1 Distribuição do Número de Questões por KC

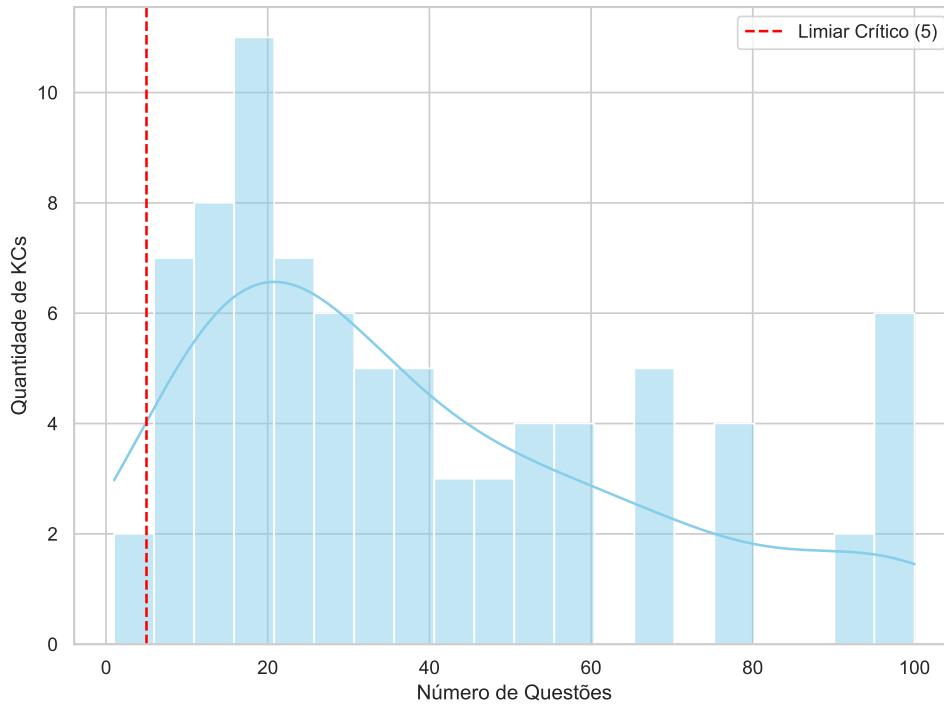


Figura 6.3: Distribuição do número de questões mapeadas por KC após a validação cega.

A Figura 6.3 apresenta a distribuição de cobertura de avaliação por KC. O banco exibe densidade saudável para a grande maioria do currículo: a concentração principal situa-se na faixa de 10 a 60 questões por componente, indicando que a combinação da filtragem adaptativa por *Adaptive Thresholding*, com limiar $\varpi \approx 0,45$ e restrições η_{min} e η_{max} (Seção 4.3), produziu cobertura relativamente equilibrada ao longo do currículo sem truncar arbitrariamente KCs densos nem incluir ruído estatístico em KCs esparsos. Um subconjunto muito reduzido de KCs situa-se abaixo do limiar crítico de 5 questões. Estes componentes correspondem tipicamente a KCs de alta especificidade semântica ou de baixa frequência de ocorrência no corpus ENEM/UFSC, e constituem exatamente os casos que motivarão a imputação topológica pelo algoritmo ITMC descrita na Seção 4.4.4.

6.3.2 Grau de Conjuntividade (KCs por Questão)

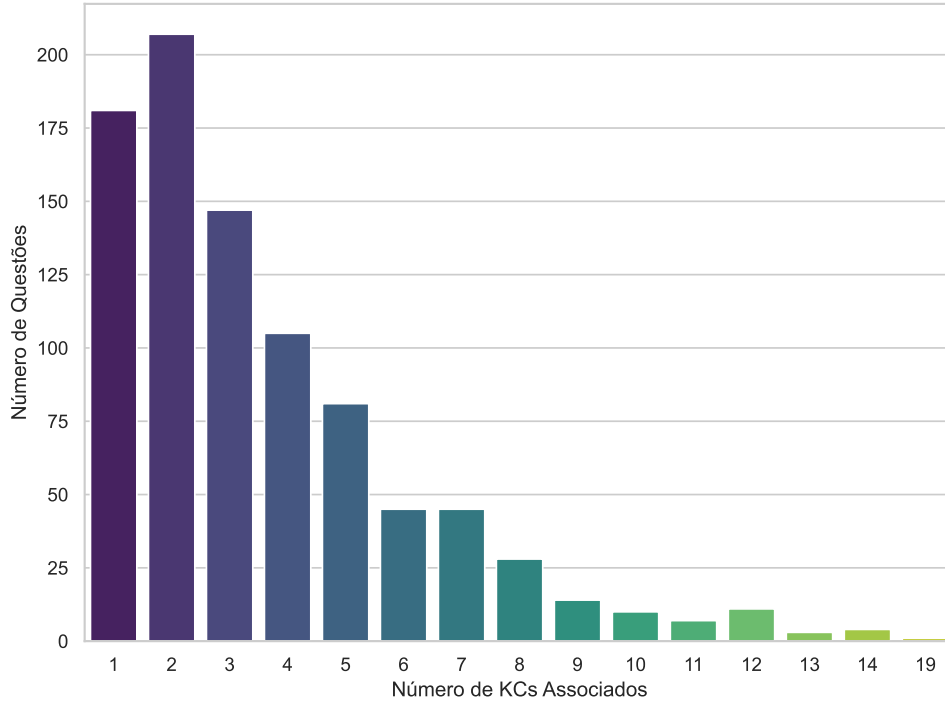


Figura 6.4: Grau de conjuntividade: número de KCs simultaneamente requeridos por questão.

A Figura 6.4 apresenta o histograma do grau de conjuntividade do banco, isto é, quantos KCs distintos cada questão mobiliza simultaneamente. A distribuição comporta-se de forma esperada para a matemática do ensino médio: o pico concentra-se entre 1 e 5 KCs por item, refletindo a natureza integradora dos problemas típicos de ENEM e UFSC, que articulam um KC primário com poucos pré-requisitos de suporte. A distribuição apresenta, contudo, uma cauda longa problemática, com questões exigindo até 14 KCs simultaneamente. O impacto estrutural desta cauda é direto: dado que o simulador estocástico computa a probabilidade holística de domínio conceitual P_{holistic} pela média geométrica das probabilidades individuais por KC (Equação 4.14), itens hiper-conjuntivos com $|\mathcal{K}_j| \gg 1$ resultam em probabilidades de acerto artificialmente próximas de zero, tornando-os efetivamente intransponíveis para qualquer perfil de agente. Estes itens constituem o ruído estrutural que motiva diretamente a aplicação do limite de densidade $\tau_{\text{max_kc}} = 8$ na etapa de curadoria descrita na Seção 4.3.3.

6.3.3 Distribuição Global da Dificuldade Condicional

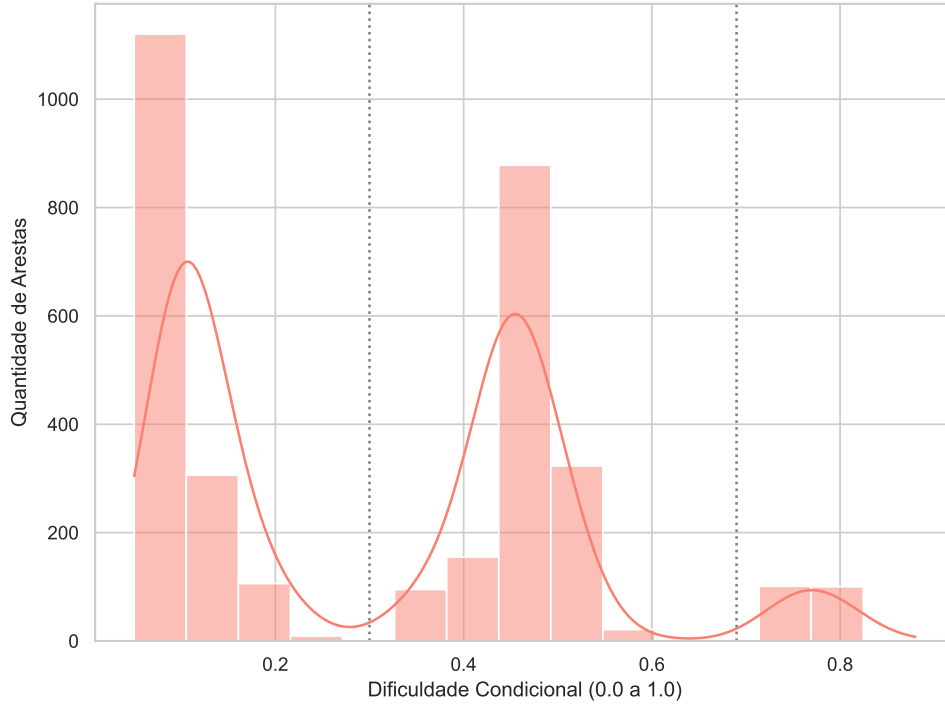


Figura 6.5: Distribuição global da dificuldade condicional $\delta_{j,k}$ atribuída pelo LLM antes da padronização, sobre as 3.219 arestas do banco.

A Figura 6.5 revela o padrão de anotação de dificuldade produzido pelo LLM ao executar a função Φ_A sobre os pares $(k, q_j) \in \mathcal{C}'_k$ validados. A distribuição apresenta caráter bimodal, com duas concentrações distintas: uma em torno de $\delta \approx 0,1$ e outra em torno de $\delta \approx 0,45$. Este comportamento evidencia um viés de ancoragem do modelo de linguagem em relação às faixas discretas sugeridas no *prompt* de anotação condicional, fenômeno esperado em LLMs instruídos com escalas ordinais explícitas. Do ponto de vista pedagógico, a consequência mais relevante é a escassez de itens estritamente classificados na faixa superior ($\delta > 0,70$), gerando um banco enviesado para menor fricção cognitiva. Esta concentração bimodal e a ausência de cobertura uniforme do gradiente de dificuldade comprometem a viabilidade matemática do simulador estocástico, pois a política de ZDP requer itens distribuídos ao longo de todo o espectro de proficiência do agente para operar os intervalos $[P_{min}, P_{max}]$ das Equações 4.20 a 4.24. A correção desta distorção motiva diretamente o pós-processamento por Padronização Logit IRT descrito a seguir.

6.3.4 Resultados da Curadoria e Pós-Processamento do Mapeamento

Identificados os dois problemas estruturais, hiper-conjuntividade e viés de ancoragem da dificuldade, o estágio de curadoria descrito na Seção 4.3.3 aplicou duas transformações

complementares ao banco consolidado: a remoção de questões com $|\mathcal{K}_j| > 8$, por comprometer a estabilidade da P_{holistic} , e a Padronização Logit IRT sobre as dificuldades condicionais remanescentes, que encadeia projeção para o espaço *log-odds*, escalonamento Z-score e reprojeção sigmoidal para $[0, 1]$, preservando o ranqueamento relativo das anotações originais enquanto recentra a distribuição no espaço de probabilidade.

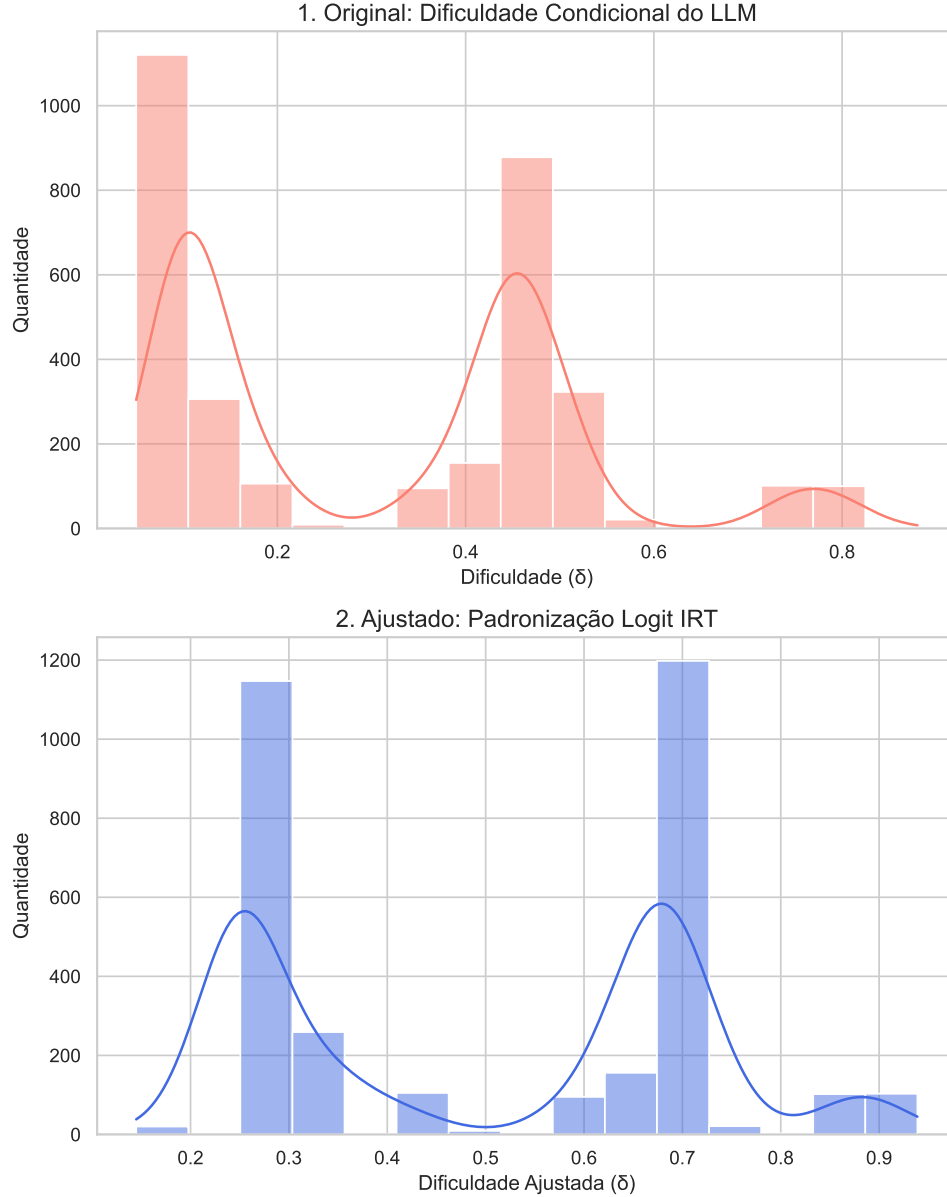


Figura 6.6: Comparação entre a distribuição de dificuldades condicionais original (LLM) e após a Padronização Logit IRT.

A Figura 6.6 e a Tabela 6.1 documentam quantitativamente o efeito da transformação. O painel esquerdo reproduz a distribuição bimodal original, e o painel direito exibe a distribuição normalizada. A Padronização Logit IRT preserva a estrutura bimodal das anotações (confirmando que o ranqueamento relativo entre arestas foi mantido, conforme

formalizado nas Equações 4.12 a 4.13), mas desloca o centro de gravidade curricular de forma precisa.

Tabela 6.1: Resumo Estatístico da Normalização IRT.

Métrica	cond_diff	cond_diff_irt_norm
Contagem (count)	3219,000	3219,000
Média (mean)	0,311	0,498
Desvio Padrão (std)	0,205	0,221
Mínimo (min)	0,050	0,145
25%	0,100	0,251
50%	0,350	0,586
75%	0,450	0,675
Máximo (max)	0,880	0,939

A Tabela 6.1 sintetiza o impacto da transformação sobre as 3.219 arestas. A média é corrigida de 0,311 para 0,498, efetivamente 0,5 no espaço de probabilidade, ponto em que, no espaço IRT, a dificuldade do item se iguala à proficiência mediana do agente ($\beta_{l,t,k} - b_{j,k} = 0$, Equação 4.13). O desvio padrão aumenta marginalmente de 0,205 para 0,221, indicando que a transformação não comprimiu artificialmente a variância das anotações. As fronteiras operacionais resultantes, $[\delta_{\min} = 0,145, \delta_{\max} = 0,939]$, são adequadas para a ZDP: o piso de 0,145 garante que agentes iniciantes encontrem questões acessíveis nos KCs raiz sem serem imediatamente bloqueados, enquanto o teto de 0,939 preserva desafio suficiente para agentes de alta proficiência sem colapsar a média geométrica da P_{holistic} para zero, proteção crítica para a estabilidade do simulador estocástico. Com o banco de questões pós-processado e parametrizado de forma matematicamente estável, estabelece-se a base empírica necessária para a geração do Dataset Sintético D , cujos resultados são reportados na seção a seguir.

6.4 Resultados da Construção do Dataset Sintético via ITMC

Esta seção reporta os resultados da etapa de simulação estocástica e imputação topológica descrita na Seção 4.4. O objetivo é triplo: caracterizar a população de agentes virtuais instanciada; verificar a aderência dos parâmetros cognitivos amostrados às distribuições projetadas na Tabela 4.2; e validar matematicamente o Dataset Sintético D produzido pelo algoritmo ITMC. A análise está organizada em quatro blocos: caracterização da população, análise macroscópica das trajetórias, micro-dinâmica cognitiva por KC e validação matemática do Dataset Sintético D resultante.

6.4.1 Caracterização da População Simulada

A simulação envolveu $N = 800$ agentes virtuais, com semente global fixada em `seed = 42`, gerando uma acurácia global de 62,89% sobre o total de interações registradas no Dataset Sintético D . Este valor situa-se dentro da faixa esperada para um ambiente adaptativo calibrado pela ZDP: taxas de acerto entre 60% e 70% são características de sistemas que apresentam itens suficientemente desafiadores para induzir aprendizado sem gerar frustração sistemática, operacionalizando o intervalo $[P_{min}, P_{max}]$ definido nas Equações 4.39–4.42.

Distribuição dos Perfis Comportamentais. A Tabela 6.2 apresenta a distribuição efetiva dos arquétipos comportamentais A_i na população simulada, conforme projetado na Seção 4.4.2. O Perfil Padrão corresponde a 85,75% dos agentes, próximo à meta de 85%. Os cinco arquétipos de desvio totalizam 14,25% da população, com proporções individuais próximas dos 3% projetados para cada um. As pequenas variações decorrem do caráter estocástico da designação dos arquétipos, condicionada à semente global. Em particular, o arquétipo de **Desengajamento em Revisão** (2,00%) e o de **Proficiência Oculta** (2,38%) ficaram levemente abaixo do alvo, enquanto **Desatenção Crônica** (3,38%) ficou marginalmente acima, variações esperadas dentro de uma população amostrada de tamanho $N = 800$.

Tabela 6.2: Distribuição de perfis comportamentais na população simulada ($N = 800$).

Perfil Comportamental	Proporção (%)
Perfil Padrão	85,75
Desatenção Crônica	3,38
Aprendizagem Massificada	3,25
Resposta Aleatória Rápida	3,25
Proficiência Oculta	2,38
Desengajamento em Revisão	2,00

Distribuição dos Parâmetros Cognitivos Estocásticos (Normal vs. Outliers)

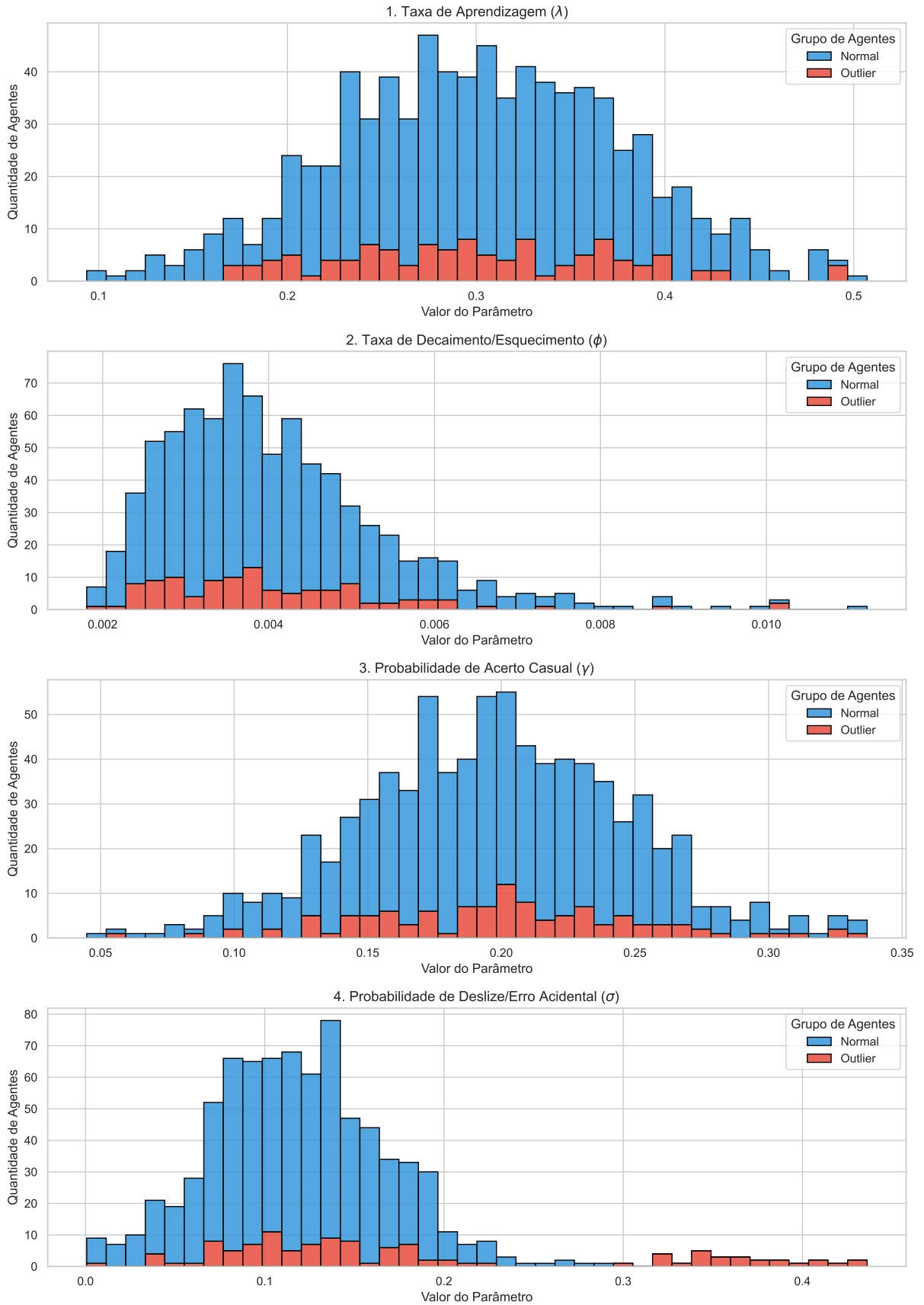


Figura 6.7: Distribuição dos parâmetros cognitivos $\Theta_l = (\lambda_l, \phi_l, \gamma_l, \sigma_l)$ amostrados para a população de 800 agentes, discriminados entre Perfil Padrão (Normal) e arquétipos de desvio (Outliers).

Distribuição dos Parâmetros Cognitivos Estocásticos. A Figura 6.7 exibe os histogramas dos quatro componentes do vetor de parâmetros cognitivos Θ_l , discriminados entre agentes do Perfil Padrão e arquétipos de desvio, verificando a aderência às distribuições da Tabela 4.2.

A **taxa de aprendizagem** (λ_l), amostrada de $0,05 + 0,50 \cdot \text{Beta}(\alpha = 5, \beta = 5)$, apresenta distribuição unimodal centrada em torno de 0,30, com suporte contido em $[0,05, 0,55]$. A simetria da distribuição Beta com parâmetros iguais produz uma população predominantemente mediana em capacidade de absorção, sem concentração em valores extremos, confirmando que o limite superior de 0,55 cumpre seu papel de evitar a aquisição instantânea de conhecimento. O **fator de esquecimento** (ϕ_l), amostrado de $0,0008 + \text{LogNormal}(\mu = -5,8, \sigma = 0,4)$, concentra-se na faixa $[0,001, 0,010]$ com cauda assimétrica à direita, característica da log-normalidade. O piso estocástico de $\phi_{min} = 0,0008$ previne decaimento nulo, garantindo que o modelo de esquecimento da Equação 4.10 opere com taxa de decaimento positiva ao longo de toda a simulação. A **probabilidade de acerto casual** (γ_l), amostrada de $\mathcal{TN}(\mu = 0,20, \sigma = 0,05, [0, 0,35])$, concentra-se próxima de 0,20, compatível com o acerto aleatório esperado em itens de múltipla escolha com cinco alternativas. Por fim, a **probabilidade de deslize** (σ_l), amostrada de $\mathcal{TN}(\mu = 0,12, \sigma = 0,05, [0, 0,35])$, situa-se sistematicamente abaixo de γ_l em toda a distribuição do Perfil Padrão, respeitando a condição de identificabilidade $\gamma_l + \sigma_l < 1$ imposta na Seção 4.4.1 para evitar a degeneração do sinal cognitivo latente. Os arquétipos de desvio, notadamente *Desatenção Crônica* e *Resposta Aleatória Rápida*, aparecem como populações sobrepostas com valores de σ_l e γ_l deslocados para as caudas superiores de seus respectivos histogramas, validando a injeção do ruído sistemático projetado.

6.4.2 Análise Macroscópica das Trajetórias de Aprendizado

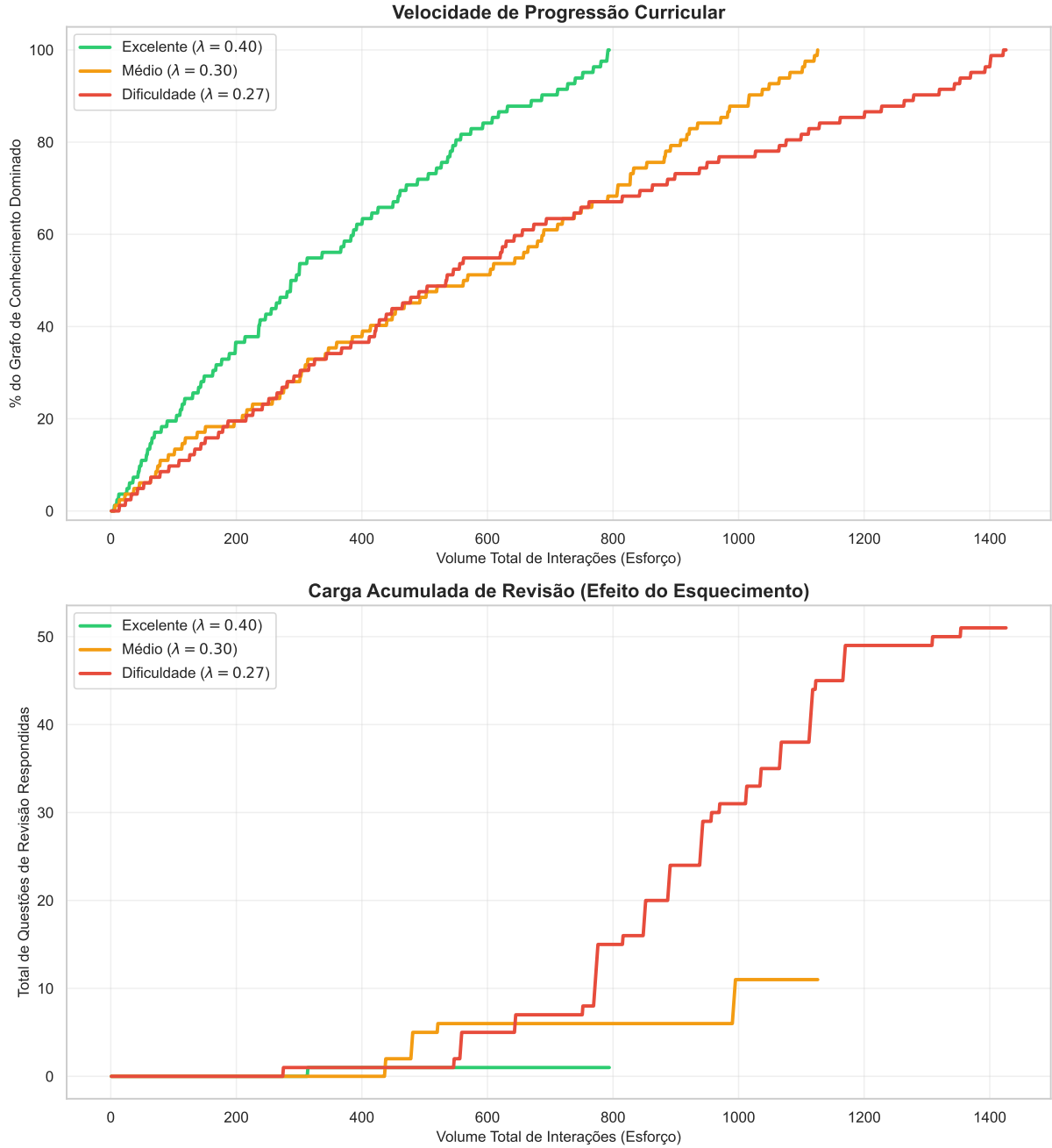


Figura 6.8: Progressão curricular (esquerda) e carga acumulada de revisão (direita) em função do volume de interações, para três perfis cognitivos representativos.

A Figura 6.8 examina dois aspectos macroscópicos das trajetórias de aprendizado para três perfis representativos: **Excelente** ($\lambda \approx 0,40$), **Médio** ($\lambda \approx 0,30$) e **Dificuldade** ($\lambda \approx 0,27$).

Velocidade de Progressão Curricular. O painel esquerdo revela a relação entre esforço acumulado e porcentagem do grafo dominada. O perfil Excelente atinge 100%

do currículo com aproximadamente 600–700 interações; o perfil Médio requer 800–1.000; e o perfil Dificuldade estende-se até 1.200–1.400 interações, caso o conclua dentro do prazo T_{max} . Esta diferença quantifica empiricamente o papel da taxa de aprendizagem no mecanismo de incremento proporcional à margem de melhoria $(1 - v'_{l,t,k})$ da Equação 4.17: quanto maior λ_l , maior o ganho de maestria por acerto, reduzindo o número de interações necessárias para superar cada limiar Ω_k .

Carga Acumulada de Revisão. O painel direito quantifica o efeito cumulativo do esquecimento (Equação 4.10) sobre a demanda de manutenção do conhecimento ao longo da trajetória. O perfil Dificuldade acumula sistematicamente mais questões de revisão do que os demais: sua taxa de aprendizagem inferior resulta em maestrias $v_{l,t,k}$ mais rasas, mais susceptíveis ao decaimento abaixo do limiar de manutenção Ψ_k entre sessões. O perfil Excelente exibe carga de revisão notavelmente menor, evidenciando que agentes com λ_l elevado consolidam o conhecimento em níveis de maestria mais robustos, reduzindo a frequência com que o conjunto $\mathcal{K}_{risk,l}$ (Equação 4.18) é ativado.

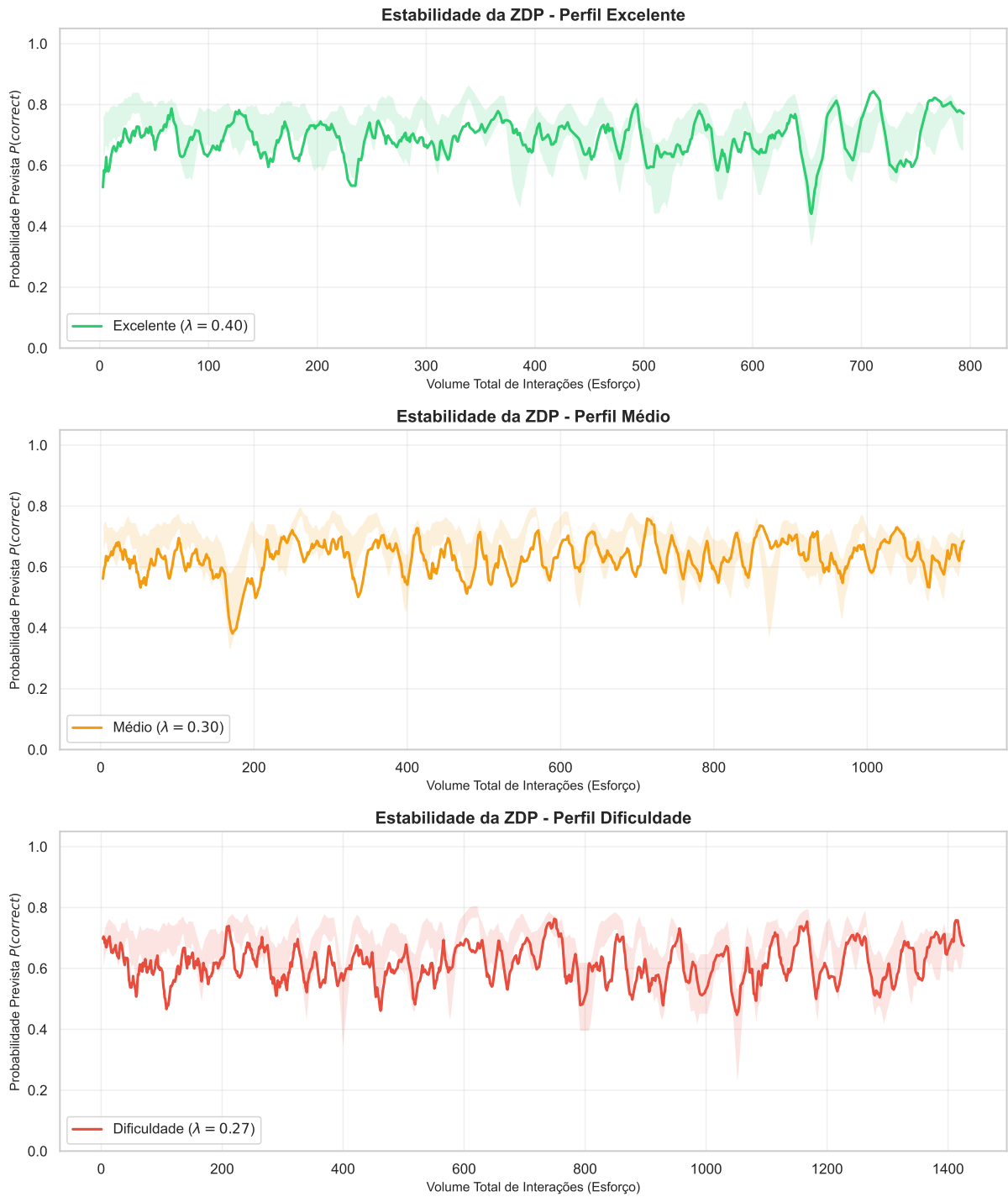


Figura 6.9: Estabilidade da ZDP: distribuição da probabilidade prevista de acerto $P(\text{correct})$ ao longo das interações para cada perfil cognitivo.

Estabilidade da ZDP. A Figura 6.9 exhibe, para cada perfil cognitivo, a distribuição de $P(\text{correct})$ previsto ao longo das interações. Em todos os três perfis, a densidade mantém-se concentrada na faixa $[0,5, 0,8]$ durante a maior parte das trajetórias, com o alvo ZDP ideal situado em torno de 0,70. Esta concentração confirma que a função platô de pesos da Equação 4.27 opera conforme projetado, tanto na amostragem de candidatos

do Modo Aprendizagem (Equações 4.39–4.40) quanto no Modo Revisão (Equações 4.41–4.42), evitando a seleção de itens triviais ($P(\text{correct}) \rightarrow 1$) e intransponíveis ($P(\text{correct}) \rightarrow 0$).

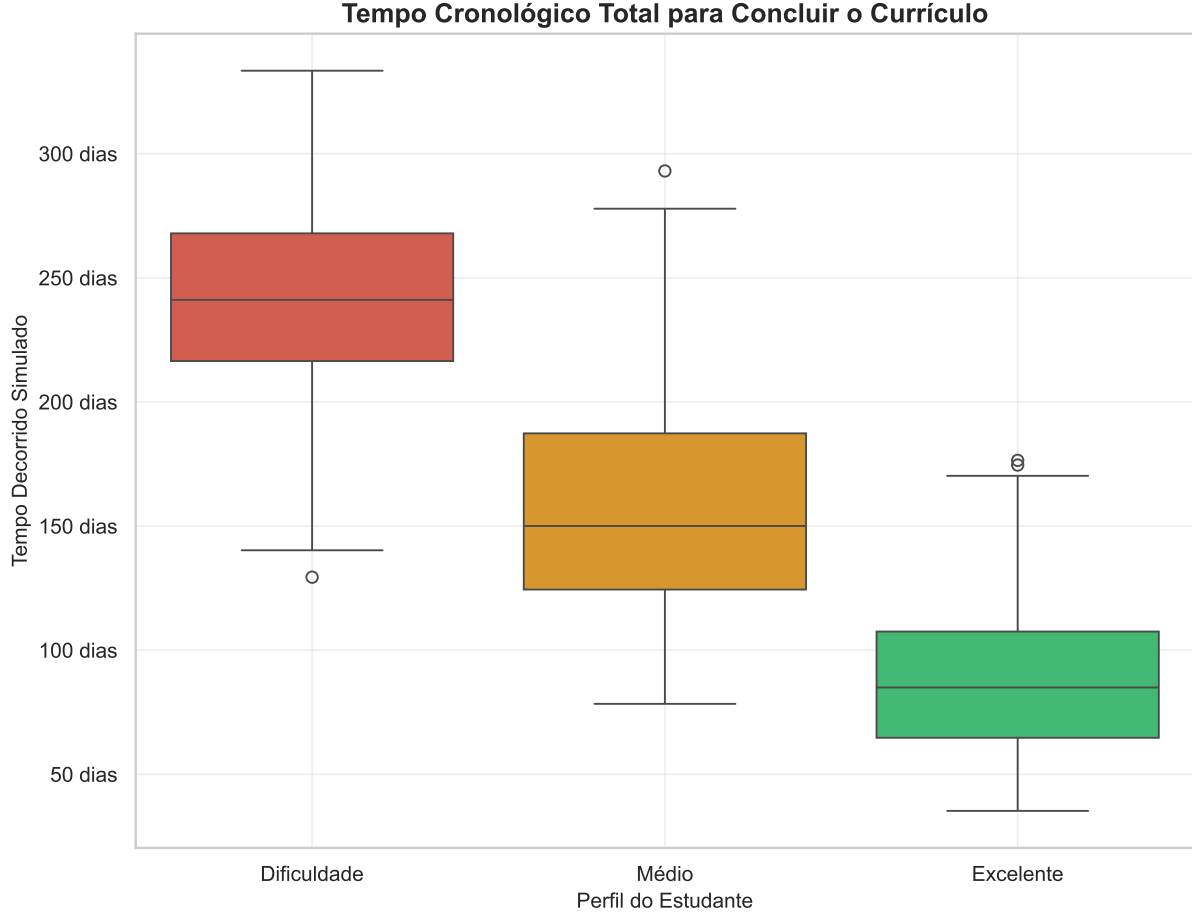


Figura 6.10: Tempo cronológico total simulado (em dias) para concluir o currículo, por perfil cognitivo.

Tempo Cronológico para Conclusão. A Figura 6.10 apresenta o tempo cronológico total simulado para cada perfil. O perfil Excelente conclui o currículo em aproximadamente 100–150 dias letivos; o perfil Médio, em torno de 200–250 dias; o perfil Dificuldade pode atingir ou superar 300 dias, proximidade do teto $T_{max} = \max(200, 0, \mathcal{N}(290, 0, 30, 0))$ dias definido como condição de parada na Seção 4.4.3. Estes valores emergem da interação entre λ_l , o tamanho das sessões L_{sessao} , proporcional à capacidade de aprendizado ($L_{sessao} = \text{int}(\mathcal{N}(50 \cdot \lambda_l, 5))$) para o Perfil Padrão, e os intervalos de repouso Δt_{pausa} amostrados entre sessões.

6.4.3 Micro-Dinâmica Cognitiva: Análise de Alta Resolução por KC

As três figuras a seguir expõem a trajetória de maestria latente $v_{l,t,k}$ em alta resolução para o KC Func_PlanoCartesiano, selecionado por ser um nó de profundidade intermediária no DAG com múltiplos sucessores, tornando-o representativo do comportamento típico do simulador. Os três agentes exibidos correspondem aos mesmos perfis cognitivos da análise macroscópica.

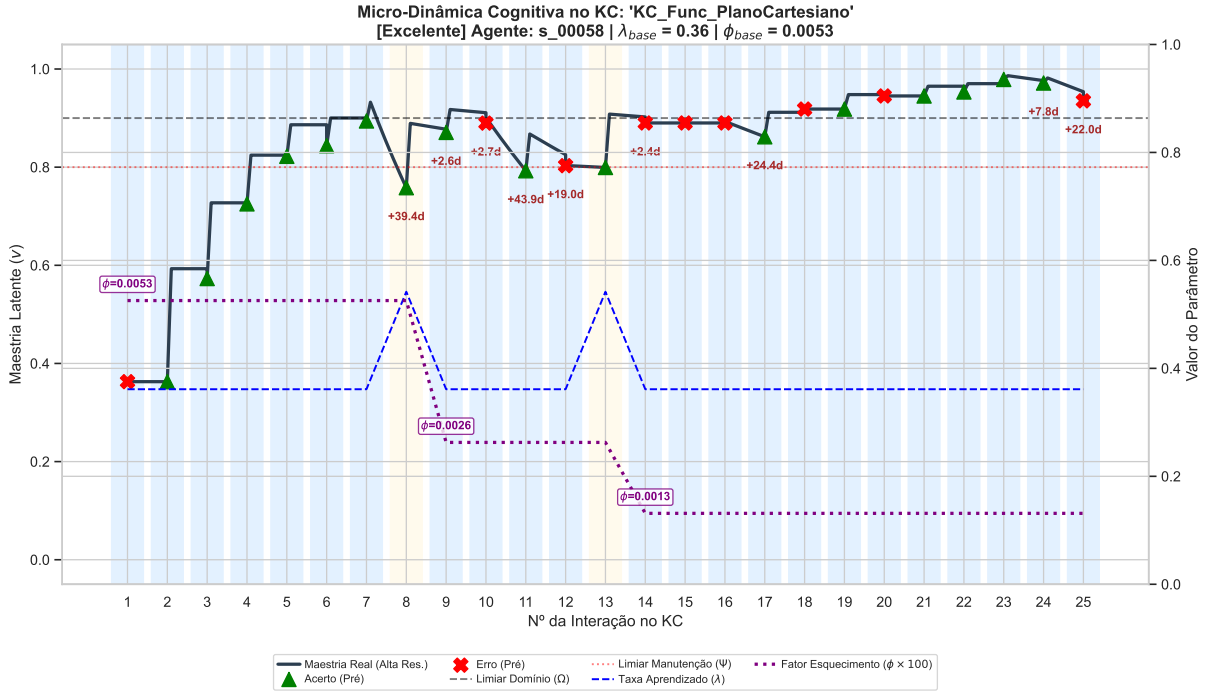


Figura 6.11: Micro-dinâmica cognitiva no KC Func_PlanoCartesiano, Perfil Excelente: agente s_00058 ($\lambda = 0,36$, $\phi = 0,0053$).

O agente s_00058 (Figura 6.11, $\lambda = 0,36$, $\phi = 0,0053$) domina o KC na interação 7. Os lapsos temporais entre interações, anotados como $+Xd$, variam entre 2,4 e 43,9 dias, com quedas de maestria proporcionais ao intervalo e ao fator efetivo $\phi'_{l,k} = 0,0053$ na primeira recuperação. O painel lateral confirma a redução exponencial do fator de esquecimento efetivo com as recuperações bem-sucedidas: $\phi'_{l,k}$ decresce de 0,0053 para 0,0026 e 0,0013 a cada incremento de $C_{rep,l,k}$, materializando o Efeito de Espaçamento da Seção 4.4.2. Mesmo logo após o lapso mais longo registrado (+43,9d), a maestria não cai abaixo de Ψ_k , dispensando intervenção do modo de revisão.

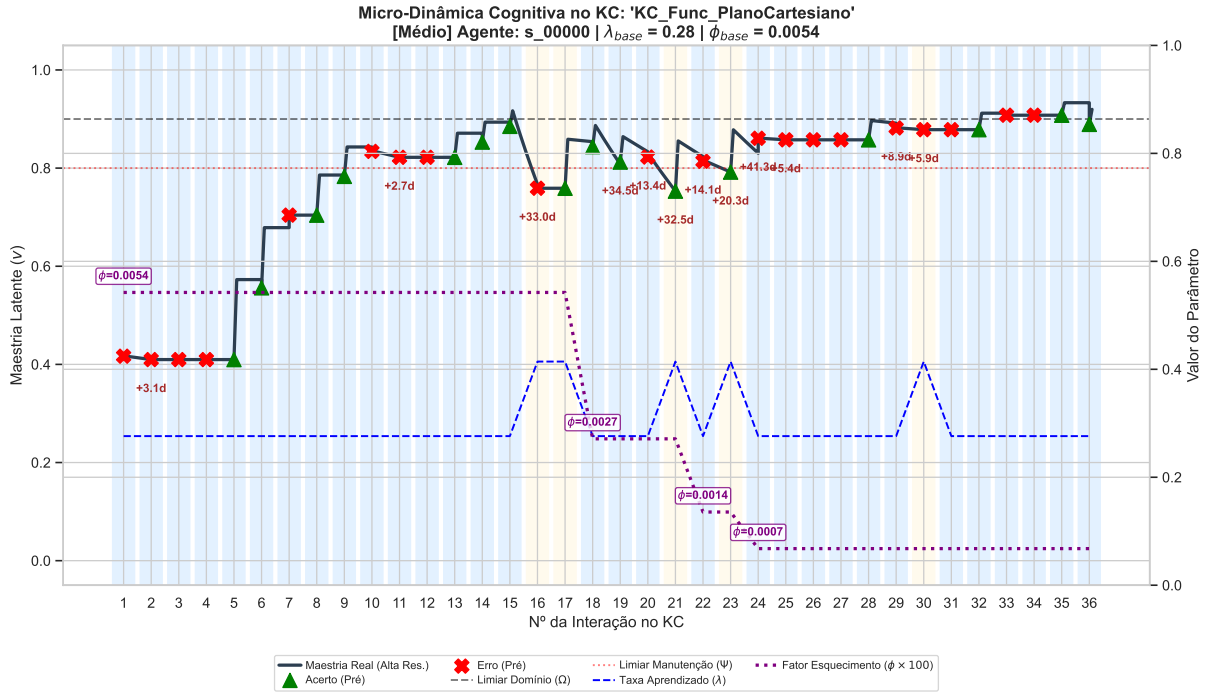


Figura 6.12: Micro-dinâmica cognitiva no KC Func_PlanoCartesiano, Perfil Médio: agente s_00000 ($\lambda = 0,28$, $\phi = 0,0054$).

O agente s_00000 (Figura 6.12, $\lambda = 0,28$, $\phi = 0,0054$) exibe uma trajetória em escada mais gradual, dominando o KC na interação 15. A menor taxa de aprendizagem resulta em incrementos de maestria por acerto mais modestos, tornando o processo mais susceptível aos decaimentos provocados pelos lapsos temporais mais longos, notavelmente +41,3d e +34,5d, que empurram a maestria para regiões próximas a Ψ_k . O painel lateral exibe quatro níveis de $\phi'_{l,k}$ ($0,0054 \rightarrow 0,0027 \rightarrow 0,0014 \rightarrow 0,0007$), confirmando que quatro recuperações válidas foram acumuladas ao longo da trajetória.

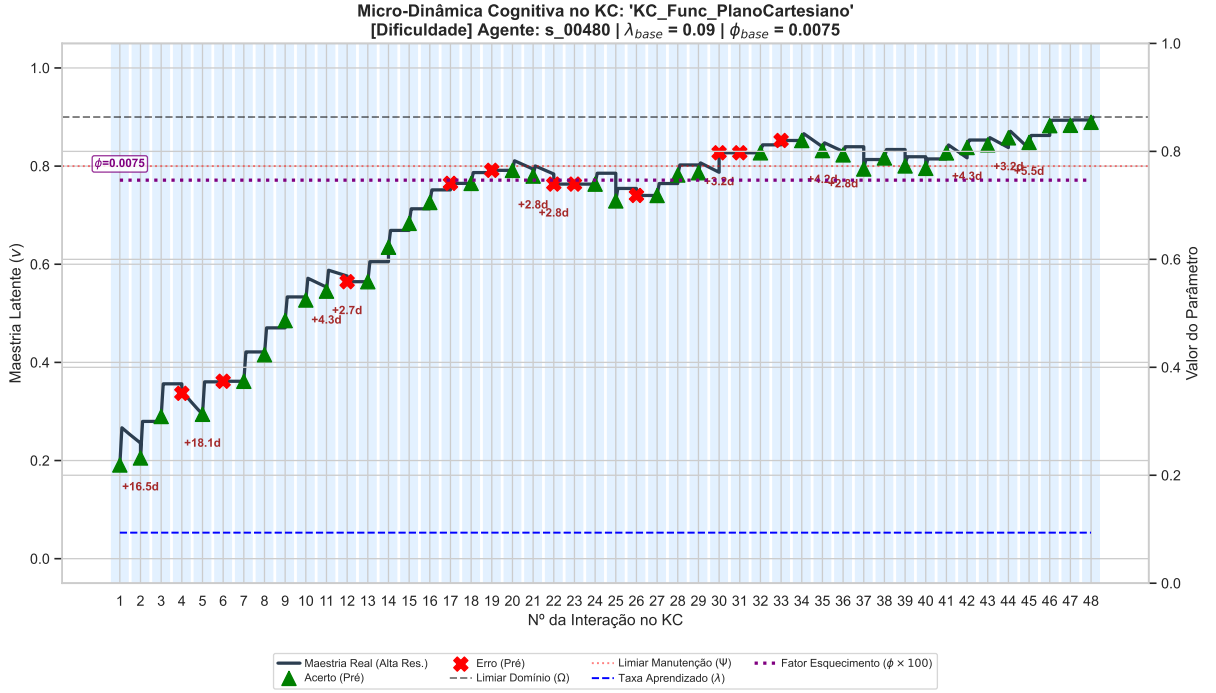


Figura 6.13: Micro-dinâmica cognitiva no KC Func_PlanoCartesiano, Perfil Dificuldade: agente s_00480 ($\lambda = 0,09$, $\phi = 0,0075$).

O agente s_00480 (Figura 6.13, $\lambda = 0,09$, $\phi = 0,0075$) representa o caso de maior sobrecarga cognitiva: com λ_l próximo ao limite inferior do suporte amostral e fator de esquecimento relativamente elevado, o agente requer quase 50 interações para dominar o KC e oscila repetidamente acima e abaixo de Ψ_k ao longo da trajetória. Os incrementos de maestria por acerto são tão pequenos que lapsos curtos de 2,7–5,5 dias já são suficientes para provocar decaimentos significativos. Os dois lapsos mais longos (+18,1d e +16,5d) ocorrem nos estágios avançados da curva, quando a maestria já se encontra suficientemente alta para resistir ao decaimento sem cair abaixo de Ψ_k . O painel lateral não registra nenhum um nível de redução do fator de esquecimento ($\phi'_{l,k} = 0,0075$), indicando que nenhuma recuperação válida foi acumulada.

6.4.4 Análise dos Desfechos e Condições de Parada

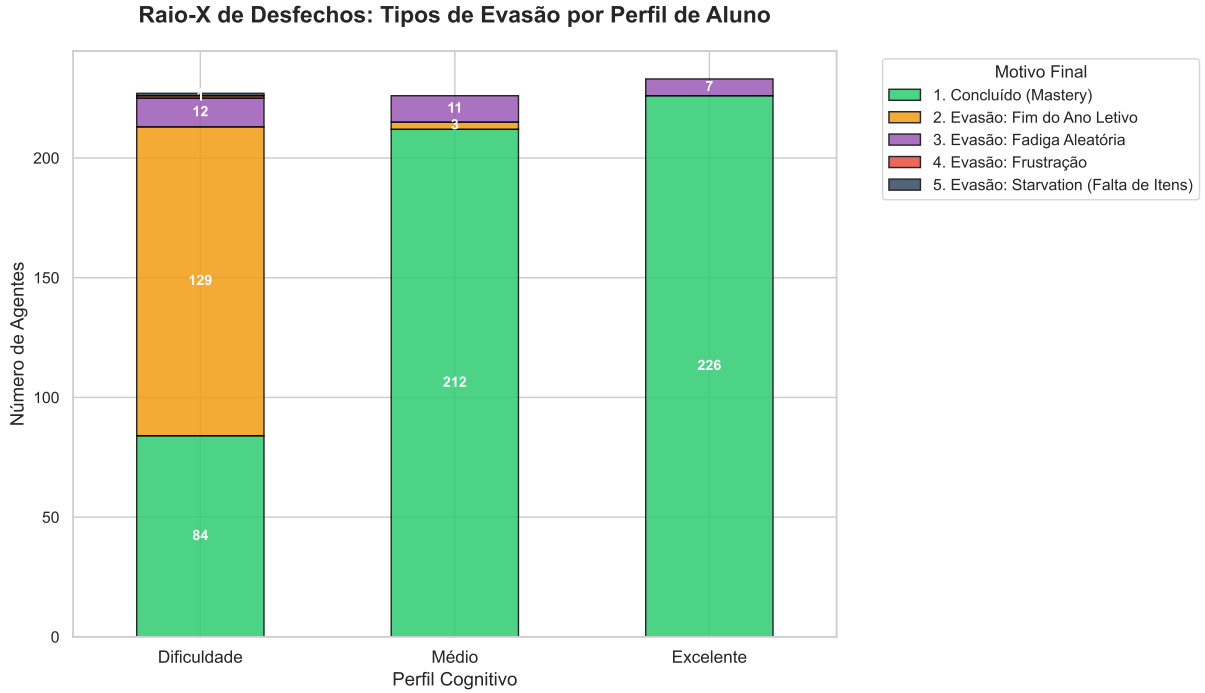


Figura 6.14: Raio-X de desfechos: distribuição dos motivos de parada por perfil cognitivo.

A Figura 6.14 estratifica os quatro desfechos terminais definidos na Seção 4.4.3 (Concluído (Mastery), Evasão por Fim do Ano Letivo, Evasão por Fadiga Aleatória, Evasão por Frustração e Evasão por Inanição (*Starvation*)) por perfil cognitivo, para os 800 agentes da população.

O perfil Dificuldade concentra a maior proporção de evasões por Fim do Ano Letivo (212 agentes) e Fadiga Aleatória (84 agentes). Este padrão é consequência direta de dois mecanismos encadeados: (i) agentes com baixa λ_l raramente completam o currículo dentro do prazo T_{max} , pois a velocidade de progressão curricular (Figura 6.8) é insuficiente; e (ii) a maior carga de revisão e o maior número de erros consecutivos elevam a variável de frustração E_{cons} , incrementando $P_{dropout}$ via o escalonamento da Equação de evasão comportamental da Seção 4.4.3. O perfil Médio distribui seus desfechos predominantemente entre Fim do Ano Letivo (226 agentes) e Fadiga Aleatória, com apenas 11 agentes concluindo o currículo integralmente. O perfil Excelente apresenta a maior taxa de conclusões por Maestria (12 agentes) e a menor proporção de evasão por Frustração, em consonância com a dinâmica de $P_{dropout}$, onde E_{cons} cresce mais lentamente para agentes com alta taxa de aprendizagem. Por fim, a ocorrência residual de *Starvation* (7 agentes, exclusivamente no perfil Dificuldade) confirma a efetividade do algoritmo ITMC em suprimir os gargalos topológicos mais críticos do grafo. A persistência de casos residuais concentrados no perfil de menor λ_l é esperada: este perfil ativa a ZDP em regiões do espaço de proficiência

($v'_{l,t,k}$ muito baixo) onde até mesmo os itens imputados pelo ITMC podem não satisfazer simultaneamente o filtro curricular e o intervalo $[P_{min}, P_{max}]$.

6.4.5 Validação Matemática e Empírica do Dataset

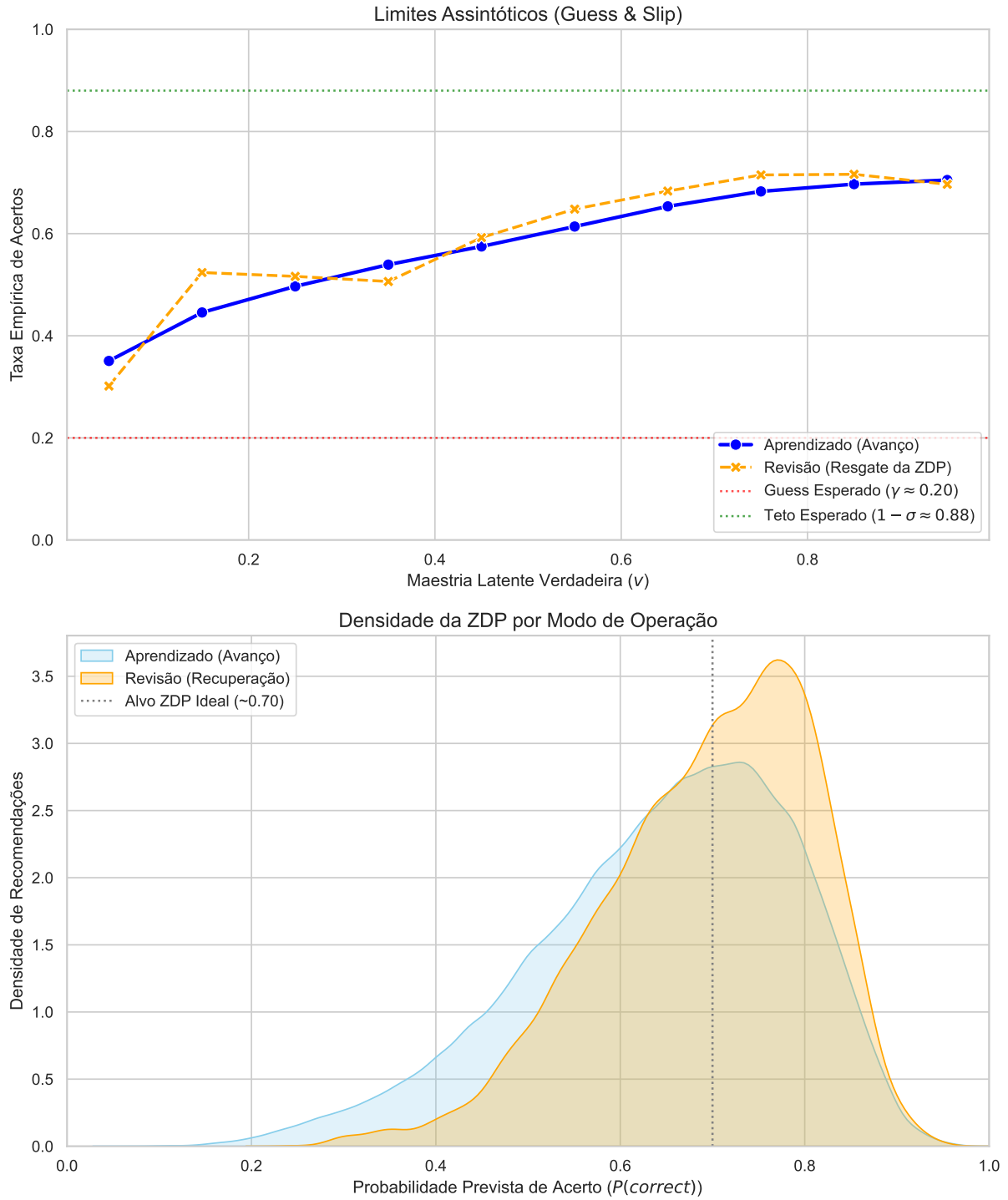


Figura 6.15: Validação matemática (Painel 1): limites assintóticos (*Guess & Slip*) e densidade da ZDP por modo de operação.

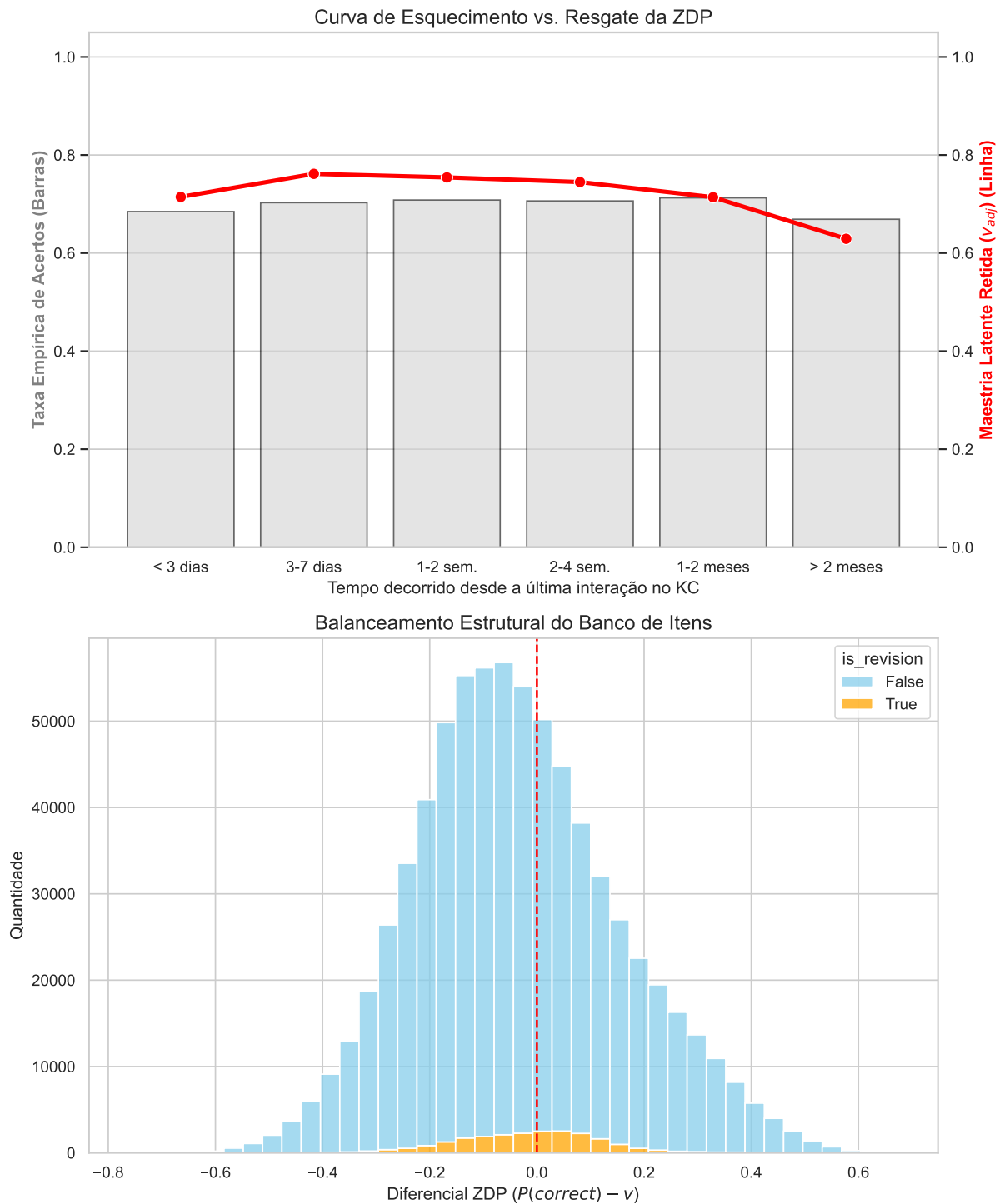


Figura 6.16: Validação matemática (Painel 2): curva de esquecimento vs. resgate da ZDP e balanceamento estrutural do banco de itens.

As Figuras 6.15 e 6.16 consolidam quatro verificações de integridade do Dataset Sintético D , testando empiricamente se as propriedades matemáticas formalizadas ao longo da Seção 4.4 se manifestam nos dados gerados.

Verificação 1: Limites Assintóticos (*Guess & Slip*). O painel esquerdo da Figura 6.15 plota a taxa empírica de acertos em função da maestria latente verdadeira v , estratificado por modo de operação. A curva empírica confirma os dois limites assintóticos da Equação 4.15: para $v \rightarrow 0$, a taxa de acerto converge para o nível de adivinhação $\gamma \approx 0,20$; para $v \rightarrow 1$, o teto é delimitado por $1 - \bar{\sigma} \approx 0,88$. A transição entre os dois assintotos segue o perfil sigmoidal previsto, validando a consistência entre o modelo matemático e o comportamento emergente da simulação.

Verificação 2: Densidade da ZDP por Modo de Operação. O painel direito da Figura 6.15 exibe a distribuição de densidade de $P(\text{correct})$ para os modos Aprendizado (Avanço) e Revisão (Resgate). Ambas as distribuições concentram-se em torno do alvo ZDP ideal de $\approx 0,70$, com o modo Revisão exibindo distribuição levemente deslocada para a esquerda, esperado, dado que $k_{\text{target}} \in \mathcal{K}_{\text{risk},l}$ implica $v'_{l,t,k} < \Psi_k$, resultando em $\hat{p}_{\text{ghost}}$ abaixo do pico histórico e portanto em P_{max} mais conservador (Equação 4.42). O piso de $\gamma \approx 0,20$ e o teto de $1 - \bar{\sigma} \approx 0,88$ são respeitados em ambos os modos, confirmando que os parâmetros populacionais médios ($\bar{\gamma} = 0,20$, $\bar{\sigma} = 0,12$) adotados na Equação 4.35 são representativos do comportamento real da população.

Verificação 3: Curva de Esquecimento vs. Resgate da ZDP. O painel esquerdo da Figura 6.16 exibe a taxa empírica de acertos em função do tempo decorrido desde a última interação no KC, estratificado por modo. A taxa de acerto decresce monotonicamente com o lapso temporal, confirmando o modelo de decaimento exponencial da Equação 4.10. O modo Revisão apresenta consistentemente taxas de acerto superiores ao modo Aprendizado para os mesmos lapsos, evidenciando o Efeito de Espaçamento: a redução acumulada de $\phi'_{l,k} = \phi_l \cdot (0,50)^{C_{\text{rep},l,k}}$ com as recuperações bem-sucedidas torna o conhecimento mais resistente ao decaimento, resultando em maior probabilidade de acerto mesmo após longos períodos de inatividade.

Verificação 4: Balanceamento Estrutural do Banco de Itens. O painel direito da Figura 6.16 apresenta o histograma do diferencial ZDP [$P(\text{correct}) - v$], segregado por modo. Para um banco de itens bem calibrado à ZDP, este diferencial deve ser centrado próximo de zero. O histograma confirma este comportamento: a distribuição é aproximadamente simétrica em torno de zero, com leve assimetria positiva no modo Aprendizado (reflexo da ambição da Equação 4.19, que projeta P_{max} acima da maestria atual, favorecendo itens marginalmente mais difíceis do que o nível corrente do agente) e centrada mais precisamente em zero no modo Revisão, onde o objetivo é recuperar, não avançar.

6.4.6 Composição Final do Banco e Distribuição Espacial das Evasões

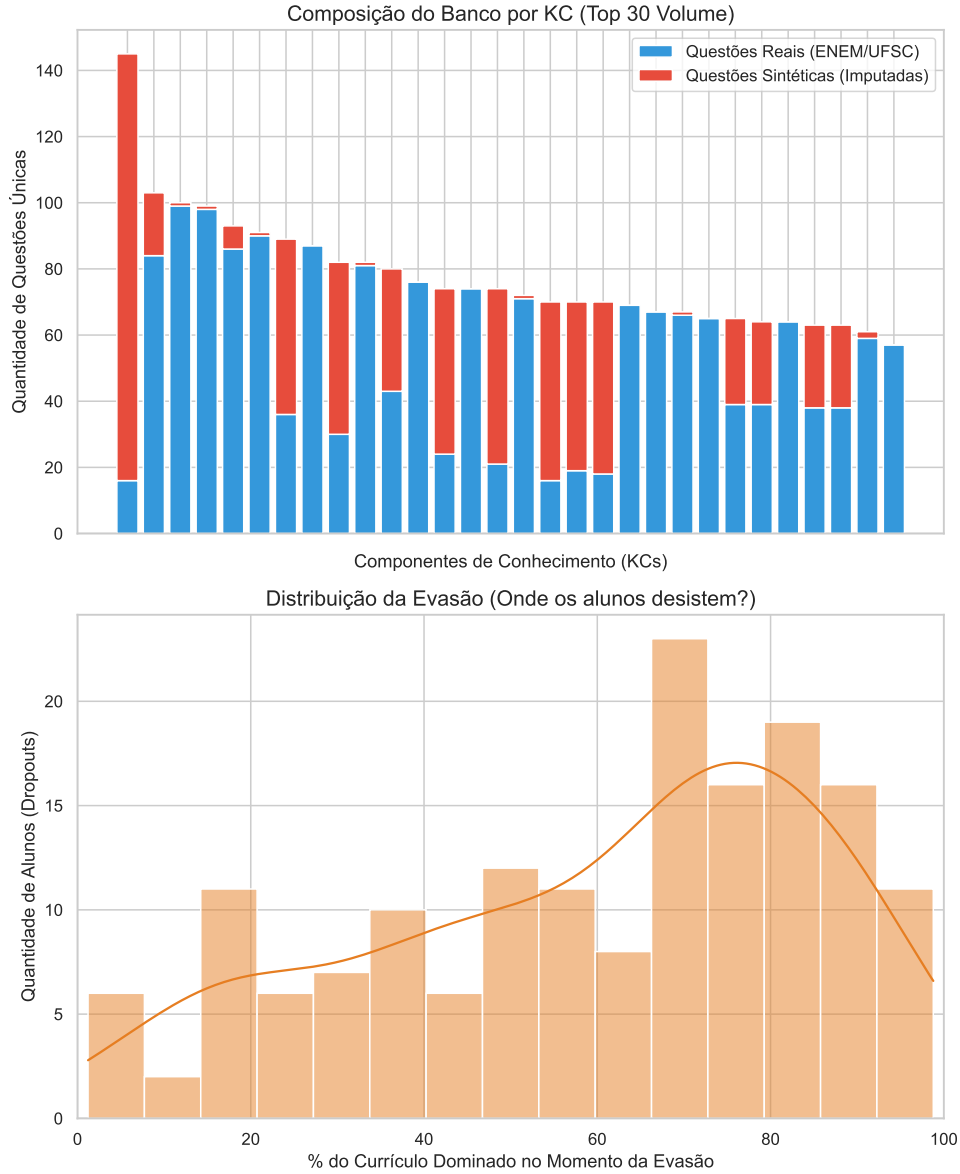


Figura 6.17: Composição do banco por KC (Top 30 em volume de questões únicas) e distribuição espacial das evasões no currículo.

A Figura 6.17 apresenta dois diagnósticos complementares do Dataset Sintético D final. O painel superior exibe os 30 KCs com maior volume de questões únicas, discriminando entre Questões Reais (ENEM/UFSC) e Questões Sintéticas imputadas pelo ITMC. A presença de barras mistas em vários KCs confirma que a imputação foi seletiva: KCs com elevado volume de questões reais receberam pouco ou nenhum suplemento sintético, ao passo que KCs com baixa cobertura empírica (notadamente em domínios de Trigonometria, Geometria Espacial e Estatística Avançada, que correspondem aos KCs de maior profundidade topológica e menor frequência no corpus ENEM/UFSC) receberam a maior proporção de

nós parametrizados q_{synth} instanciados pelo Algoritmo 1. Esta distribuição assimétrica valida o critério de acionamento do ITMC: a imputação concentrou-se precisamente nos KCs que apareciam em $\mathcal{K}_{starved}^{(w)}$ nas ondas de simulação anteriores.

O painel inferior exibe a distribuição dos pontos de evasão, medida como percentual do currículo dominado no momento da parada. A distribuição é bimodal: uma concentração nos estágios iniciais (0–20% do currículo dominado), associada principalmente a agentes de baixa λ_l que atingem o prazo T_{max} antes de avançar além dos KCs raiz; e uma concentração secundária nos estágios finais (acima de 60%), correspondente a agentes que progridem substancialmente e evadem por Fadiga Aleatória ou Fim do Ano Letivo nos KCs terminais. A ausência de picos isolados em KCs intermediários específicos confirma que o ITMC foi efetivo em eliminar os gargalos topológicos que anteriormente forçavam paradas prematuras por *Starvation*.

6.4.7 Análise de Trajetória Individual Representativa

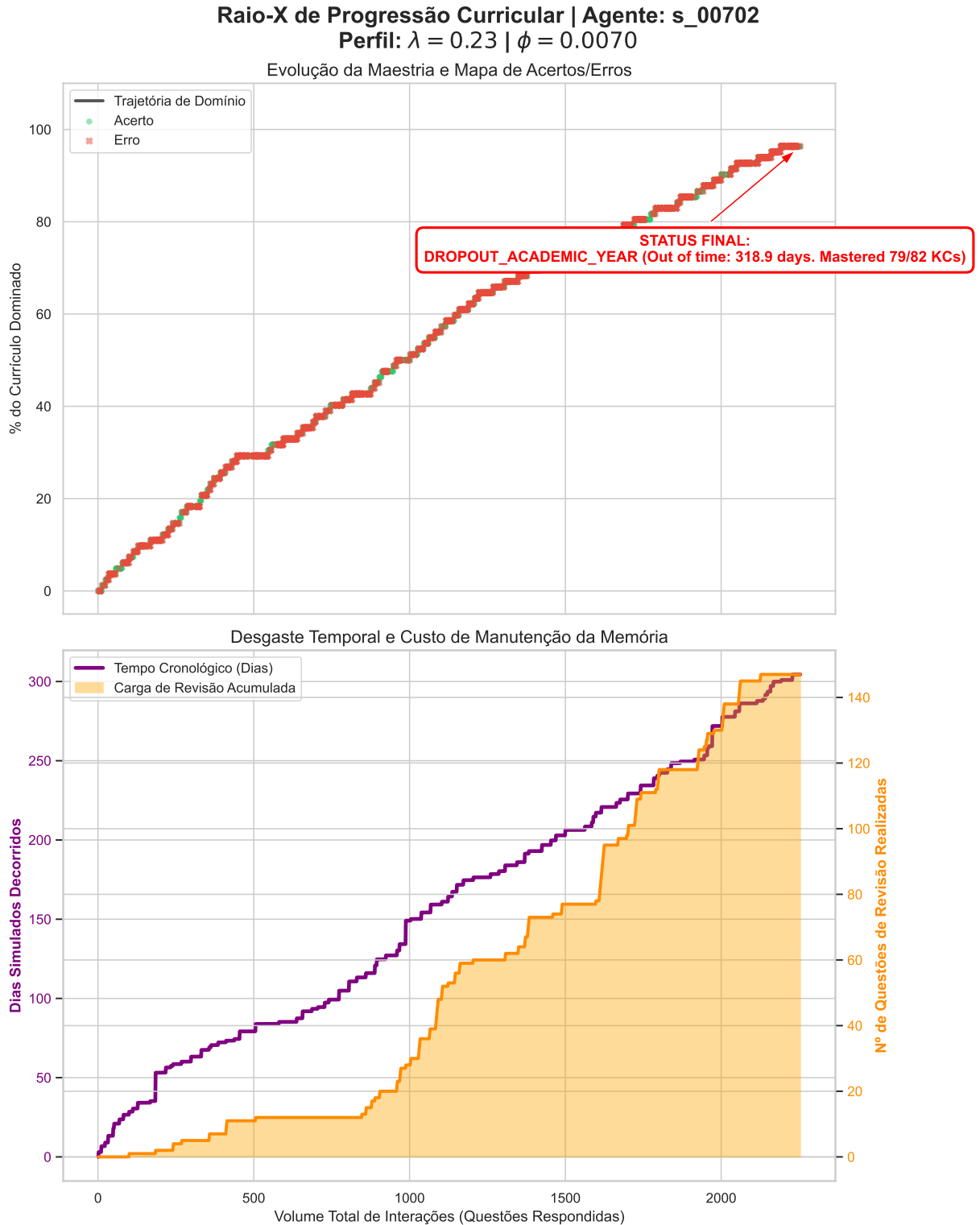


Figura 6.18: Raio-X de progressão curricular do agente s_00702 ($\lambda = 0,23$, $\phi = 0,0070$): evasão por fim do ano letivo após 318,9 dias com 79/82 KCs dominados.

O agente s_00702 (Figura 6.18, $\lambda = 0,23$, $\phi = 0,0070$) encerra com desfecho DROPOUT_ACADEMIC_YEAR após 318,9 dias e aproximadamente 2.000 interações, tendo dominado 79 dos 82 KCs. A

curva de progressão curricular exhibe crescimento quase linear até $\approx 95\%$ do currículo, seguida de desaceleração pronunciada nos KCs terminais, os de maior d_k e maior número de pré-requisitos transitivos no DAG. O painel de desgaste temporal mostra que a carga de revisão acumulada cresce monotonicamente ao longo dos 318 dias: o custo de manutenção da base de conhecimento consolidada aumenta à medida que mais KCs entram em $\mathcal{K}_{dom,l}$ e precisam ter $v'_{l,t,k} \geq \Psi_k$ preservado a cada sessão. Este agente ilustra o cenário de *Maestria Parcial* definido na Seção 4.4.3: tecnicamente capaz de concluir o currículo, mas impedido pelo limite temporal T_{max} .

6.4.8 Distribuição de Esforço por Perfil e Complexidade do KC

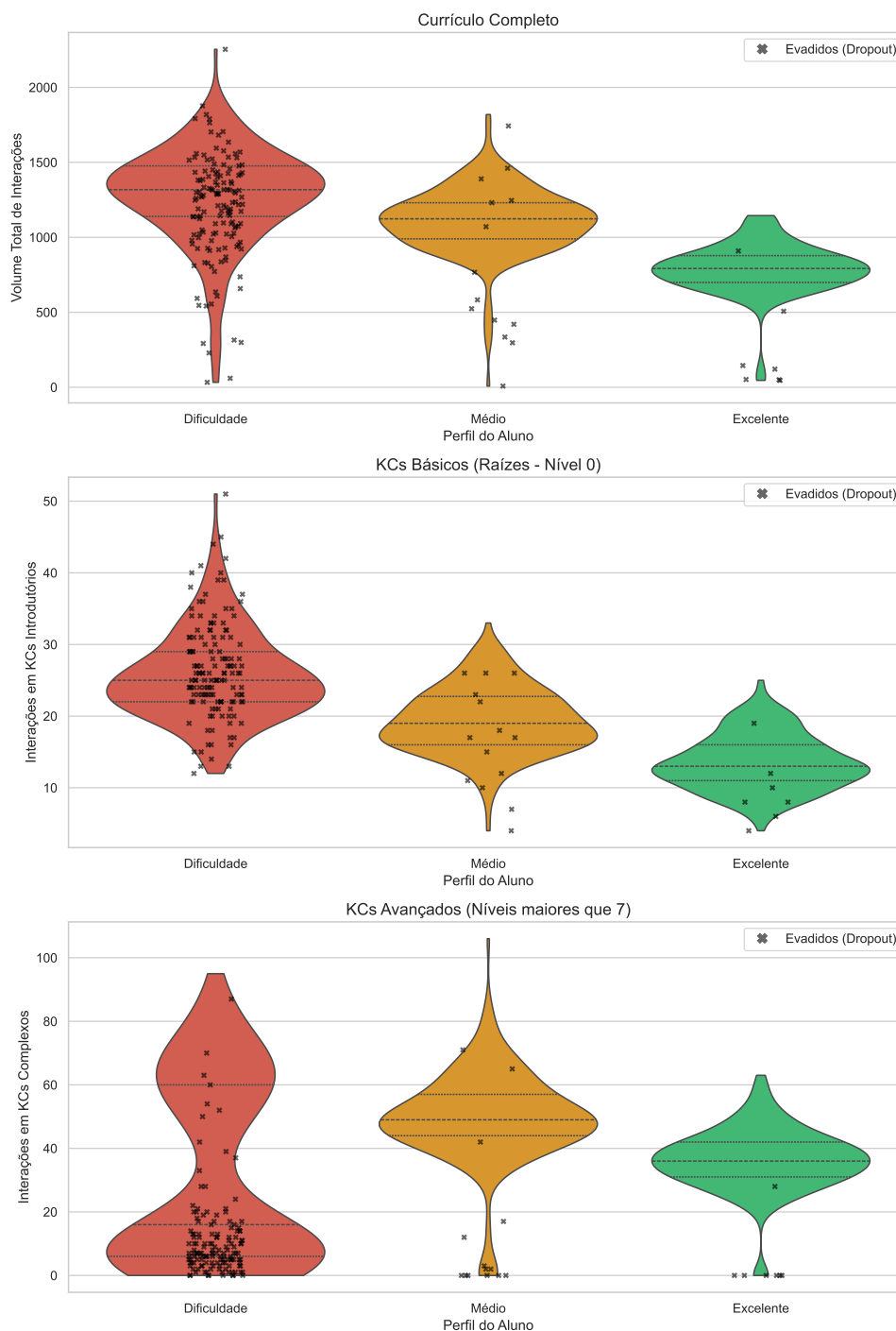


Figura 6.19: Distribuição do volume de interações por perfil cognitivo, segmentado por complexidade do KC (raízes vs. avançados) e status de conclusão.

A Figura 6.19 apresenta a distribuição de esforço total por perfil, segmentada em três painéis: currículo completo, KCs Básicos (raízes, nível 0) e KCs Avançados (nível > 7).

No currículo completo, o perfil Dificuldade exibe o maior volume mediano de interações e maior variância, atingindo 1.400–1.500 interações nos casos extremos, enquanto o perfil

Excelente mantém-se abaixo de 600–700. Nos KCs Básicos (raízes), o esforço relativo dos três perfis é comparativamente homogêneo: todos os agentes devem atravessar os nós raiz independentemente de λ_l , e estes possuem d_k baixo combinado com Ω_k elevado (próximo a 0,90, conforme Figura 6.2), exigindo consolidação sólida de todos. Nos KCs Avançados (nível > 7), a separação entre perfis acentua-se drasticamente: agentes do perfil Dificuldade que chegam a estes nós desprendem volume desproporcionalmente alto de interações, amplificando as diferenças de λ_l e ϕ_l que já se manifestavam nos níveis intermediários. Em todos os painéis, os agentes evadidos (Dropout) exibem distribuições deslocadas para volumes menores do que os concluintes, confirmando que a evasão tende a ocorrer antes que o esforço máximo disponível seja esgotado, padrão coerente com o modelo de *Behavioral Dropout* da Seção 4.4.3, no qual $P_{dropout}$ escala com E_{cons} e não com o volume absoluto de interações.

6.5 Resultados do Benchmarking dos Modelos de KT

Esta seção relata o desempenho empírico das sete arquiteturas candidatas $\mathcal{A}_{baselines} = \{\text{DKT}, \text{DKT-Forget}, \text{SAINT+}, \text{UKT}, \text{HCGKT}, \text{LefoKT}, \text{RobustKT}\}$ na partição de teste $\mathcal{S}_{test}$ sob o protocolo de treinamento da Seção 5.1. Para cada arquitetura $\mathcal{A}$, a configuração ideal de hiperparâmetros $\Lambda_{\mathcal{A}}^*$ recuperada pela busca do Optuna é mantida invariante e o modelo é retreinado $N_{seeds} = 5$ vezes sob a sequência de sementes $\mathcal{Z} = \{42, 43, 44, 45, 46\}$ gerada a partir de $\text{seed}_{base} = 42$, na partição de treinamento completa $\mathcal{S}_{train}$. Cada execução seed_k produz uma instância $\mathcal{F}_{KT}^{(k, \mathcal{A})}$ cuja avaliação em $\mathcal{S}_{test}$ resulta em um vetor de métricas $\mathcal{M}^{(k, \mathcal{A})}$. Todas as execuções são rastreadas no MLflow.

6.5.1 Desempenho Sob Agregação Multi-Seed

A Tabela 6.3 relata, para cada arquitetura $\mathcal{A}$ e cada métrica μ , a mediana amostral

$$\tilde{\mu}_{\mathcal{A}} = \text{median}\{\mu^{(k, \mathcal{A})}\}_{k=1}^{N_{seeds}}$$

juntamente com o desvio padrão amostral

$$s_{\mu, \mathcal{A}} = \sqrt{\frac{1}{N_{seeds} - 1} \sum_{k=1}^{N_{seeds}} (\mu^{(k, \mathcal{A})} - \tilde{\mu}_{\mathcal{A}})^2},$$

os quais caracterizam conjuntamente a tendência central e a dispersão do comportamento da arquitetura sob a única fonte de variabilidade admitida pelo protocolo, a saber, os componentes estocásticos do treinamento (inicialização de pesos e permutação do **DataLoader**). A mediana é adotada em coerência com a regra de eleição da Seção 6.5.4: o escalar relatado é o desempenho realizado por uma instância treinada concreta, e não

uma média em nível de arquitetura ausente do registro. As arquiteturas são ordenadas de forma ascendente pelo valor da mediana da métrica primária RMSE_{p^*} .

Tabela 6.3: Desempenho mediano em $\mathcal{S}_{test}$ sob retreinamento multi-semente ($N_{seeds} = 5$, $\mathcal{Z} = \{42, \dots, 46\}$). Cada célula relata $\tilde{\mu}_{\mathcal{A}} \pm s_{\mu, \mathcal{A}}$. As setas indicam a direção de melhoria. O modelo de referência eleito $\mathcal{F}_{KT}^*$ está marcado com $\star$.

Arquitetura	$\text{RMSE}_{p^*} \downarrow$	$\text{ECE} \downarrow$	$\text{BS} \downarrow$	$\text{BSS} \uparrow$	$\text{AUC} \uparrow$	$\text{ACC} \uparrow$
$\star$ LefoKT	$0,0875 \pm 0,0036$	$0,0174 \pm 0,0088$	$0,2091 \pm 0,0004$	$0,1008 \pm 0,0018$	$0,6840 \pm 0,0029$	$0,6761 \pm 0,0015$
HCGKT	$0,0876 \pm 0,0012$	$0,0147 \pm 0,0017$	$0,2100 \pm 0,0004$	$0,0967 \pm 0,0019$	$0,6792 \pm 0,0022$	$0,6745 \pm 0,0014$
UKT	$0,0877 \pm 0,0005$	$0,0237 \pm 0,0032$	$0,2075 \pm 0,0005$	$0,1076 \pm 0,0019$	$0,6936 \pm 0,0022$	$0,6773 \pm 0,0019$
RobustKT	$0,0896 \pm 0,0026$	$0,0196 \pm 0,0027$	$0,2091 \pm 0,0006$	$0,1007 \pm 0,0026$	$0,6838 \pm 0,0023$	$0,6758 \pm 0,0017$
DKT	$0,1111 \pm 0,0003$	$0,0312 \pm 0,0044$	$0,2114 \pm 0,0006$	$0,0905 \pm 0,0026$	$0,6757 \pm 0,0030$	$0,6705 \pm 0,0030$
DKT-Forget	$0,1150 \pm 0,0005$	$0,0289 \pm 0,0022$	$0,2135 \pm 0,0003$	$0,0816 \pm 0,0014$	$0,6706 \pm 0,0029$	$0,6635 \pm 0,0012$
SAINT+	$0,1386 \pm 0,0061$	$0,0668 \pm 0,0164$	$0,2140 \pm 0,0021$	$0,0796 \pm 0,0090$	$0,7148 \pm 0,0052$	$0,6481 \pm 0,0013$

Três observações se sucedem. Primeiro, os modelos de base recorrentes DKT e DKT-Forget convergem para um RMSE_{p^*} substancialmente maior do que as quatro arquiteturas líderes, com envelopes de mediana- $\pm$ -s não sobrepostos na métrica primária e em todas as métricas secundárias de calibração (ECE, BS, BSS). Lacuna esta que é esperada entre os modelos recorrentes clássicos de KT e as famílias modernas baseadas em atenção e em modelos de espaço de estados no presente conjunto de dados sintéticos. Segundo, o SAINT+ exibe uma divergência estrutural entre calibração e discriminação: ele atinge a maior AUC (0,7148) enquanto, simultaneamente, apresenta o maior RMSE_{p^*} (0,1386) e ECE (0,0668): este último com mais de quatro vezes o erro de calibração das arquiteturas líderes. Esse padrão fundamenta empiricamente a lógica da Seção 5.1 para a adoção do RMSE_{p^*} como o critério primário em vez de um objetivo focado apenas em discriminação: uma arquitetura que ranqueia bem os exemplos pode, ainda assim, produzir estimativas de probabilidade descalibradas e, portanto, é inadequada para ancorar o cálculo subsequente da ZDP definido na Seção 5.2. Terceiro, três das quatro arquiteturas líderes (UKT, LefoKT, RobustKT) atingem uma mediana de BSS dentro de $\sim 5 \times 10^{-3}$ do teto teórico BSS_{max} relatado na Seção 6.5.3, indicando que o erro quadrático residual desses modelos é dominado pela variância irreduzível de Bernoulli do simulador cognitivo, e não por viés algorítmico.

6.5.2 Quantificação da Variância de Amostragem via Bootstrap Agrupado

Para desentrelaçar a variabilidade induzida pela estrutura de amostra finita de $\mathcal{S}_{test}$ da variabilidade induzida pela inicialização estocástica do treinamento, um bootstrap agrupado (clustered bootstrap) é calculado ao nível do estudante. Seja $\mathcal{U}_{test} = \{s_1, \dots, s_M\}$ o conjunto de identificadores únicos de estudantes na partição de teste. Para cada réplica seed_k e cada índice de bootstrap $b \in \{1, \dots, B\}$ com $B = 1000$, uma amostra $\mathcal{U}_{test}^{(b)}$ de

tamanho M é extraída com reposição a partir de $\mathcal{U}_{test}$ sob uma semente base $\mathbf{seed}_{boot} = 42$; a sequência completa de predições por estudante é preservada dentro de cada extração, de modo que a dependência interna da sequência de $\hat{p}_{l,t}$ é respeitada. A distribuição bootstrap por réplica

$\mu_{\mathcal{A}}^{(k,b)B}_{b=1}$ é resumida por seus quantis empíricos 0,025 e 0,975; o intervalo agregado relatado abaixo faz a média desses quantis entre as $N_{seeds} = 5$ réplicas, fornecendo uma síntese da variância total atribuível a ambas as fontes conjuntamente.

Tabela 6.4: Intervalos de confiança agregados de bootstrap agrupado de 95% em $\mathcal{S}_{test}$. Cada célula relata a média do bootstrap e o intervalo percentil $CI_{0,95}^{boot} = [Q_{0,025}, Q_{0,975}]$. O bootstrap é realizado ao nível de agrupamento de estudantes ($B = 1000$, $\mathbf{seed}_{boot} = 42$) e calculado a média entre as $N_{seeds} = 5$ réplicas.

Arquitetura	RMSE _{p*} ↓	ECE ↓	BS ↓	BSS ↑	AUC ↑	ACC ↑
★ LefoKT	0,0885 [0,0839, 0,0942]	0,0210 [0,0132, 0,0293]	0,2090 [0,2043, 0,2137]	0,1005 [0,0850, 0,1187]	0,6849 [0,6721, 0,6994]	0,6760 [0,6637, 0,6881]
HCGKT	0,0870 [0,0818, 0,0931]	0,0170 [0,0098, 0,0256]	0,2099 [0,2053, 0,2145]	0,0967 [0,0811, 0,1149]	0,6796 [0,6660, 0,6944]	0,6750 [0,6627, 0,6872]
UKT	0,0877 [0,0835, 0,0924]	0,0266 [0,0199, 0,0335]	0,2075 [0,2031, 0,2120]	0,1069 [0,0918, 0,1247]	0,6929 [0,6799, 0,7071]	0,6779 [0,6659, 0,6898]
RobustKT	0,0895 [0,0848, 0,0950]	0,0196 [0,0113, 0,0288]	0,2092 [0,2045, 0,2140]	0,0997 [0,0840, 0,1184]	0,6834 [0,6700, 0,6981]	0,6756 [0,6632, 0,6878]
DKT	0,1112 [0,1074, 0,1153]	0,0306 [0,0230, 0,0385]	0,2116 [0,2070, 0,2160]	0,0896 [0,0742, 0,1080]	0,6767 [0,6628, 0,6921]	0,6692 [0,6566, 0,6815]
DKT-Forget	0,1149 [0,1115, 0,1185]	0,0298 [0,0231, 0,0368]	0,2136 [0,2094, 0,2180]	0,0807 [0,0660, 0,0977]	0,6683 [0,6546, 0,6828]	0,6643 [0,6513, 0,6771]
SAINT+	0,1417 [0,1360, 0,1479]	0,0734 [0,0605, 0,0875]	0,2149 [0,2100, 0,2197]	0,0755 [0,0606, 0,0941]	0,7169 [0,7027, 0,7314]	0,6483 [0,6330, 0,6632]

Dois fatos estruturais emergem da análise de bootstrap. Primeiro, os intervalos de RMSE_{p*} das quatro arquiteturas líderes (LefoKT, HCGKT, UKT, RobustKT) exibem sobreposição mútua substancial, formando um agrupamento estatisticamente indistinguível dentro do envelope de amostragem; portanto, a discriminação entre elas ao nível da métrica primária não é justificada apenas pelas evidências do conjunto de teste. O critério determinístico de mediana da Seção 6.5.4 opera inteiramente dentro deste regime. Segundo, os modelos de base recorrentes (DKT, DKT-Forget) e o SAINT+ produzem intervalos totalmente disjuntos do grupo líder no RMSE_{p*} e no ECE, estabelecendo a existência de uma lacuna de desempenho estatisticamente robusta entre os dois grupos que não é absorvida pela variância de amostragem.

6.5.3 Referência Climatológica

A interpretação das métricas da família Brier está ancorada na climatologia derivada dos dados de $\mathcal{S}_{test}$. Denotando a taxa marginal empírica de sucesso por $\bar{a}$, a referência ingênua de Brier é $BS_{naive} = \bar{a}(1 - \bar{a})$ e o limite inferior teórico da informação implicado pela variância irreduzível de Bernoulli do simulador é $BS_{min} = \mathbb{E}[p^*(1 - p^*)]$. Na presente partição de teste, essas constantes assumem os valores

$$\bar{a} = 0,6323, \quad BS_{naive} = 0,2325, \quad BS_{min} = 0,2079, \quad BSS_{max} = 1 - \frac{BS_{min}}{BS_{naive}} = 0,1059.$$

O teto $BSS_{max} = 0,1059$ é a pontuação máxima de habilidade (skill score) alcançável por qualquer preditor em $\mathcal{S}_{test}$: um modelo cuja saída coincidissem exatamente com a

probabilidade latente p^* para cada interação ainda registraria um score Brier residual igual a BS_{min} , precisamente porque os rótulos empíricos a_i são amostrados a partir de $Bernoulli(p_i^*)$. A proximidade das arquiteturas líderes em relação a esse teto (UKT: 0,1076; LefoKT: 0,1008; RobustKT: 0,1007; HCGKT: 0,0967) fornece uma indicação quantitativa de que a lacuna restante para a discriminação perfeita é em grande parte estrutural, e não algorítmica.

6.5.4 Eleição do Modelo de Referência $\mathcal{F}_{KT}^*$

A eleição do modelo de referência segue a regra determinística de dois estágios formalizada na Seção 6.5.4. Para cada arquitetura $\mathcal{A}$, o vetor da métrica primária por réplica $\{\text{RMSE}_{p^*}^{(k,\mathcal{A})}\}_{k=1}^{N_{seeds}}$ é ordenado em ordem crescente e a réplica posicionada no índice mediano $\lfloor N_{seeds}/2 \rfloor$ é retida como a instância mediana da arquitetura

$$k_{\mathcal{A}}^* = \text{argsort}\left(\{\text{RMSE}_{p^*}^{(k,\mathcal{A})}\}_{k=1}^{N_{seeds}}\right)\left[\lfloor N_{seeds}/2 \rfloor\right], \quad \mathcal{F}_{KT}^{(med,\mathcal{A})} \equiv \mathcal{F}_{KT}^{(k_{\mathcal{A}}^*,\mathcal{A})}.$$

A eleição ao nível de arquitetura é então conduzida por argmin sobre os valores medianos resultantes em $\mathcal{A}_{baselines}$:

$$\mathcal{A}^* = \arg \min_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{baselines}} \text{RMSE}_{p^*}\left(\mathcal{F}_{KT}^{(med,\mathcal{A})}\right), \quad \mathcal{F}_{KT}^* \equiv \mathcal{F}_{KT}^{(med,\mathcal{A}^*)}.$$

As instâncias de semente mediana retidas por este procedimento e seus valores de métricas realizados em $\mathcal{S}_{test}$ são relatados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5: Instâncias de semente mediana $\mathcal{F}_{KT}^{(med,\mathcal{A})}$ por arquitetura. A coluna **seed $_{k_{\mathcal{A}}^*}$** é o valor da semente da réplica mediana em $\mathcal{Z}$; as colunas restantes relatam as métricas realizadas por aquela instância concreta em $\mathcal{S}_{test}$. O modelo de referência eleito é $\mathcal{F}_{KT}^* \equiv \mathcal{F}_{KT}^{(med,\mathcal{A}^*)}$ com $\mathcal{A}^* = \text{LefoKT}$.

Arquitetura	seed$_{k_{\mathcal{A}}^*}$	RMSE $_{p^*}$	ECE	BS	BSS	AUC	ACC
★ LefoKT	45	0,08747	0,01739	0,20901	0,10098	0,68397	0,67737
HCGKT	45	0,08761	0,01424	0,21038	0,09507	0,67793	0,67446
UKT	42	0,08766	0,02372	0,20735	0,10811	0,69359	0,67800
RobustKT	43	0,08956	0,01417	0,20908	0,10070	0,68322	0,67697
DKT	44	0,11107	0,02572	0,21135	0,09090	0,67567	0,67120
DKT-Forget	45	0,11498	0,02852	0,21352	0,08159	0,67055	0,66529
SAINT+	44	0,13858	0,05646	0,21397	0,07965	0,70994	0,64871

A aplicação do critério $\mathcal{A}^* = \arg \min_{\mathcal{A}} \text{RMSE}_{p^*}(\mathcal{F}_{KT}^{(med,\mathcal{A})})$ à terceira coluna da Tabela 6.5 resulta em $\mathcal{A}^* = \text{LefoKT}$, com a métrica primária realizada de

$$\text{RMSE}_{p^*}(\mathcal{F}_{KT}^*) = 0,08747 \quad \text{em} \quad \text{seed}_{k_{\text{LefoKT}}^*} = 45.$$

As instâncias concorrentes do grupo de topo, HCGKT (0,08761) e UKT (0,08766), situam-se dentro de 2×10^{-4} do valor eleito, bem dentro do envelope de bootstrap da Tabela 6.4; a eleição é, portanto, formalmente determinística, mas não contingente às métricas secundárias. Pela lógica de especificação da Seção 6.5.4, o critério da mediana é invocado precisamente para evitar critérios de desempate post-hoc e para relatar um valor de desempenho realizado por uma instância registrada concreta, em vez de uma média de nível de arquitetura ausente do registro. O modelo de referência eleito $\mathcal{F}_{KT}^*$ está registrado no MLflow Model Registry; esta instância fornece a distribuição de probabilidade prevista $\hat{p}(\cdot)$ consumida pelo motor de recomendação avaliado na Seção 5.2 e por todas as análises pedagógicas subsequentes deste trabalho.

6.6 Resultados da Avaliação da Qualidade da Recomendação

Esta seção reporta os resultados empíricos do protocolo experimental estabelecido na Seção 5.2. A execução opera sobre o modelo de referência $\mathcal{F}_{KT}^*$ eleito na Seção 6.5.4 (arquitetura LefoKT, semente $\text{seed}_{k^*} = 45$, $\text{RMSE}_{p^*} = 0,08747$ em $\mathcal{S}_{test}$), do qual deriva o motor de recomendação $\mathcal{R}$ confrontado com a ablação $\mathcal{R}_{base}$ (Equação 5.6). Os resultados articulam-se em quatro eixos: (i) verificação da estrutura amostral usuário-disjunta e diagnóstico do calibrador isotônico (Seção 6.6.2); (ii) síntese da comparação pareada nas três métricas pedagógicas (Seção 6.6.3); (iii) inspeção desagregada por métrica (Seções 6.6.4–6.6.6); e (iv) diagnósticos sobre o alinhamento do componente de diagnóstico KT e o progresso curricular induzido pelo motor (Seções 6.6.7–6.6.8), que sustentam as limitações estruturais retomadas no Capítulo 7. Diagnósticos confirmatórios adicionais, em granularidades complementares, são reunidos no Apêndice A.

6.6.1 Configuração da Execução

A coorte $\mathcal{S}_{eval}$ é particionada conforme a Equação 5.2 com $\rho_{calib} = 0,50$, resultando em $|\mathcal{S}_{calib}| = 50$ estudantes para o ajuste do calibrador isotônico e $|\mathcal{S}_{holdout}| = 50$ estudantes para a mensuração pareada das políticas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{base}$. A subamostragem temporal (Equação 5.5) opera com $\tau_s = 15$ e a janela da Diversidade de Sessão (Equação 5.11) com $N = 10$. O *ghost-pass* multi-âncora utiliza $N_a = 3$ âncoras selecionadas pelo critério de neutralidade da Equação 4.32. Todas as execuções compartilham a semente global $\sigma = 42$, garantindo pareamento exato por estudante na Seção 6.6.3.

6.6.2 Ajuste e Diagnóstico do Calibrador Isotônico

O calibrador g é obtido pela Equação 5.4 sobre $|\mathcal{D}_{calib}| = 3804$ pares $(\hat{p}_{ghost}^{final}, \pi(v_{true}^{final}))$ extraídos da passagem simulatória prévia sobre $\mathcal{S}_{calib}$ (Equação 5.3). O efeito do ajuste sobre a métrica de alinhamento ao alvo afim $\pi(v)$ é resumido na Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Diagnóstico do ajuste isotônico sobre $\mathcal{D}_{calib}$ (Equação 5.3). Os valores *pré* referem-se ao estado da *probe* $\hat{p}_{ghost}^{final}$ antes da composição com g ; os valores *pós* referem-se ao estado após aplicação de g obtido pela Equação 5.4.

Métrica de Avaliação	Pré-calibração	Pós-calibração
<i>Amostra de validação: $\mathcal{D}_{calib} = 3804$ pares</i>		
Resíduo médio $(\hat{p}_{ghost} - \pi(v_{true}))$	-0,11244	≈ 0
RMSE de alinhamento ao alvo $\pi(v)$	0,16690	0,08565

Dois fatos estruturais emergem. Primeiro, o viés sistemático pré-calibração (-0,1124) indica que a *probe ghost-pass* do modelo bruto subestima, em média, a projeção afim $\pi(v_{true})$ da maestria estrutural verdadeira em magnitude comparável ao próprio salto piso-teto da projeção $1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma} = 0,68$; a regressão isotônica reorganiza monotonicamente a saída de modo a anular o resíduo médio preservando o ordenamento relativo. Segundo, o RMSE de alinhamento ao alvo afim cai de 0,167 para 0,086, redução relativa de 48,7%. O alinhamento residual pós-calibração (0,086) é coerente em ordem de magnitude com o $\text{RMSE}_{p^*} = 0,08747$ realizado por $\mathcal{F}_{KT}^*$ em $\mathcal{S}_{test}$ (Tabela 6.5), sugerindo que o erro residual é limitado pela qualidade preditiva intrínseca do modelo base, e não por falha do procedimento de calibração.

A Figura 6.20 torna visível o fenômeno de *compressão de range dinâmico* que motivou o calibrador. Enquanto a projeção afim de referência $\pi(v)$ (linha sólida vermelha) percorre $[0,20, 0,88]$ linearmente ao longo de $v \in [0, 1]$, a saída p_{ghost}^{final} concentra-se em $[0,40, 0,85]$ com inclinação visivelmente inferior à unitária, sintoma da preferência do KT base por predições próximas à média marginal $\bar{a}$ de $\mathcal{S}_{test}$. A isotônica zera o resíduo médio sobre $\mathcal{D}_{calib}$, mas não corrige a compressão ponto a ponto: para $v_{true}^{final} \in [0,9, 1,0]$, a nuvem concentra-se em $\approx 0,78$, abaixo de $\pi(0,95) \approx 0,85$. A linha tracejada $\Omega_{\text{médio}}^{obs} = 0,789$ atravessa a nuvem de KCs verdadeiramente dominados aproximadamente pela mediana, de modo que o passo BFS consegue promover os KCs realmente dominados apesar da subestimação herdada; a consequência operacional, crítica para a Seção 6.6.4, é que a saída calibrada permanece majoritariamente *abaixo* de $\pi(v)$ na região de alta maestria, induzindo viés sistemático de subestimação quando confrontada contra o intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$ da ZDP ativa. Cabe registrar que a mesma dispersão para a política ablada $\mathcal{R}_{base}$ é visualmente indistinguível (mesma contagem por classe, $n_{\text{não dom.}} = 2156$ e $n_{\text{dom.}} = 1753$): como o estado final (v_{true}, p_{ghost}) é majoritariamente ditado pelo *replay* do histórico real

e não pela política de seleção, ambas convergem ao mesmo *snapshot* de maestria, e o que diferencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}_{base}$ concentra-se estritamente na escolha local da questão dentro do intervalo ZDP.

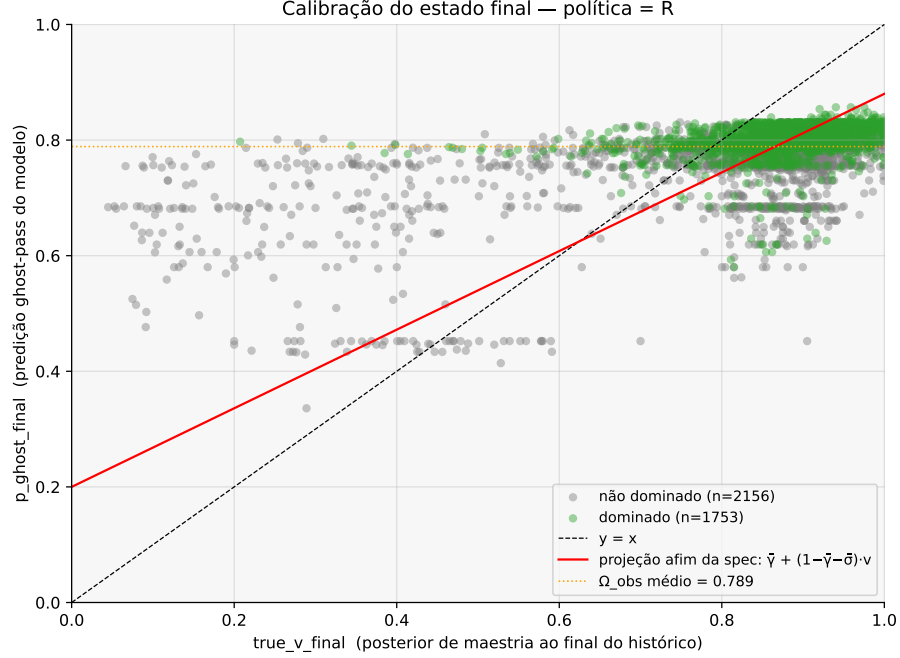


Figura 6.20: Dispersão $(\text{true_}v_{final}, p_{ghost}^{final})$ por par (estudante, KC) ao término da simulação sob $\mathcal{R}$, com a projeção afim $\pi(v)$ da Equação 4.35 sobreposta. A dispersão sob $\mathcal{R}_{base}$ é visualmente indistinguível.

6.6.3 Comparação Pareada das Políticas: Síntese

A Tabela 6.7 consolida o teste da hipótese central da Equação 5.12 e dos guarda-corpos das Métricas 2 e 3 sobre $\mathcal{S}_{holdout}$. Os agregados por aluno são as médias por estudante $\bar{\mu}_l^{\mathcal{R}}$ e $\bar{\mu}_l^{\mathcal{R}_{base}}$ de cada métrica $\mu \in \{AP, \mathcal{N}_C, \mathcal{D}_S\}$. O pareamento opera sobre $n = 50$ estudantes para AP e NC; a Diversidade da Sessão reporta $n = 49$ pares por descarte do único aluno cuja sequência efetiva sob $\tau_s = 15$ não acumulou janela completa de tamanho $N = 10$.

Tabela 6.7: Comparação pareada $\mathcal{R} - \mathcal{R}_{base}$ por estudante em $\mathcal{S}_{holdout}$. $\bar{\Delta}$ é a média das diferenças por aluno; T e W são as estatísticas dos testes de Student (Equação 5.13) e Wilcoxon de postos sinalizados; d_z é o tamanho de efeito de Cohen (Equação 5.14). Nível de significância $\alpha = 0,05$.

Métrica	$n_{pareado}$	$\bar{\Delta}$	T (p -valor)	W (p -valor)	d_z
$\overline{AP}$	50	+0,000569	1,0708 (0,2895)	557 (0,4433)	+0,1514
$\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]$	50	+0,003032	0,7464 (0,4590)	527 (0,6954)	+0,1056
$\mathcal{D}_S$	49	-0,001302	-0,1175 (0,9069)	552 (0,5538)	-0,0168

Três fatos estruturais decorrem da Tabela 6.7. Primeiro, a hipótese central H_a da Equação 5.12

não é rejeitada a $\alpha = 0,05$: a diferença média $\overline{\Delta}_{AP} = +5,69 \times 10^{-4}$ corresponde a efeito $d_z = +0,1514$ (negligenciável a pequeno na escala de Cohen), e tanto o teste paramétrico ($T = 1,071$, $p = 0,289$) quanto o não-paramétrico ($W = 557$, $p = 0,443$) ficam acima do limiar. A direção pontual é coerente com a previsão teórica (a função platô da Equação 4.44 desloca massa da amostragem para o centro da ZDP), mas a magnitude sobre $n = 50$ não permite reivindicar significância. Segundo, as Métricas 2 e 3 confirmam a equivalência funcional prevista na Seção 5.2.8, com p -valores muito acima de α : a não-significância em $\mathcal{N}_C$ e $\mathcal{D}_S$ é o resultado *desejado*, pois indica que a ponderação ZDP não introduz efeitos colaterais sobre novidade ou diversidade, dado que o filtro curricular comum a ambas as políticas controla esses eixos. Terceiro, a coerência entre Student e Wilcoxon (mesma direção, mesma decisão de não-rejeição, mesma ordem de p -valor) nas três métricas atesta a robustez do relato a desvios da normalidade.

Interpretação do tamanho amostral. A potência do teste pareado sobre $\overline{AP}$ depende do produto $d_z \cdot \sqrt{n}$. Para detectar com potência $1 - \beta = 0,80$ o efeito observado $d_z = 0,15$ a $\alpha = 0,05$, a teoria clássica exige $n \approx 350$ pares, uma ordem de magnitude acima do $n = 50$ adotado. A não-rejeição deve, portanto, ser interpretada como *ausência de evidência conclusiva* contra H_0 no regime amostral atual, e não como confirmação positiva de H_0 ; a direção e a magnitude pontuais do efeito permanecem informações relevantes.

6.6.4 Métrica 1: Acurácia Pedagógica

Esta seção examina o comportamento desagregado de $\overline{AP}$ (Equação 5.8) sob a política $\mathcal{R}$, complementando a comparação pareada com a inspeção da distribuição de recomendações, da cobertura do intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$ e da decomposição assinada do erro $dist_{ZDP}(q^*)$ (Equação 5.7).

A Figura 6.21 corresponde a $n = 3\,598$ recomendações por política sobre a mesma coorte (consequência da subamostragem $\tau_s = 15$), com médias $\overline{AP}_{\mathcal{R}} = 0,9785$ e $\overline{AP}_{\mathcal{R}_{base}} = 0,9779$. A geometria é bimodal: massa concentrada exatamente em $AP = 1$ (recomendações cujo $\hat{P}(\text{correct})$ caiu no intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$, produzindo $dist_{ZDP} = 0$), ladeada por um *bump* secundário em $AP \approx 0,91$ (erro quase-constante de $\sim 0,09$) e cauda até $\approx 0,75$. A distribuição não é, portanto, gaussiana em torno da média, e o agregado $\overline{AP}$ é melhor decomposto em *taxa de acerto* (massa em $AP = 1$) e *magnitude do erro condicional* do que interpretado como média unimodal. A sobreposição entre $\mathcal{R}$ (azul) e $\mathcal{R}_{base}$ (vermelho) é quase completa: a função platô realoca apenas uma fração marginal de massa do *bump* de erro para o pico de acerto, consistente com o sinal pequeno mas direcionalmente correto da Tabela 6.7.

A Figura 6.22 desagrega o pico em $AP = 1$ e expõe sua estrutura: a Taxa de Acerto na ZDP, $\mathbb{P}[dist_{ZDP}(q^*) = 0]$, realiza-se em 42,4% das recomendações, enquanto 54,9%

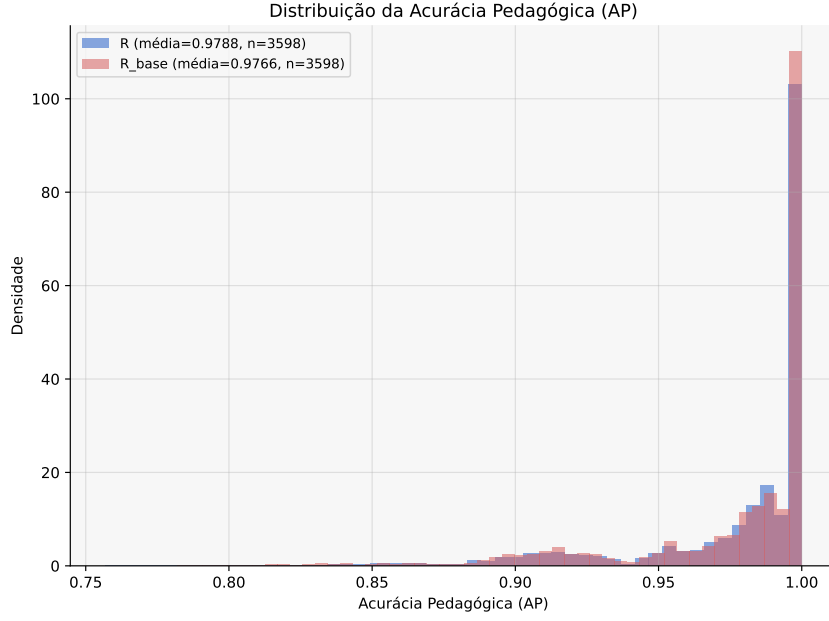


Figura 6.21: Distribuição empírica da Acurácia Pedagógica (Equação 5.8) sobre o conjunto de recomendações geradas em $\mathcal{S}_{holdout}$.

caem abaixo de $P_{\min}$ (subestimação) e apenas 2,7% excedem $P_{\max}$ (superestimação), viés fortemente assimétrico de razão $\approx 20:1$. A origem é estrutural e diagnosticável cruzando com a Figura 6.20: a nuvem p_{ghost}^{final} concentra-se em $\approx 0,78$ para KCs dominados, *abaixo* de $\pi(v) \approx 0,85$, e essa compressão transmite-se ao $\hat{P}(\text{correct})$ da questão candidata via Equação 4.43. A calibração isotônica zera o resíduo médio sobre $\mathcal{D}_{calib}$ mas, por ser monotônica e operar sobre o estado final agregado, não corrige a compressão no regime ponto-a-ponto da consulta por questão. A leitura pedagógica é dupla: de um lado, 42,4% de acerto exato sob subestimação sistemática é operacionalmente útil, pois o motor falha pelo lado pedagogicamente *menos nocivo* (questões marginalmente mais difíceis ainda comportam ganho cognitivo, enquanto a exposição a itens triviais limita-se a 2,7%); de outro, a predominância da subestimação (54,9%) confirma que a redução adicional de $RMSE_{p^*}$ ou a expansão do *range* dinâmico do KT é o vetor mais promissor para elevar $\overline{AP}$, mais do que refinamentos da função platô. A inspeção complementar da distribuição de $\hat{P}(\text{correct})$ relativa a $P_{\min}$ e $P_{\max}$ médios ($P_{\min}^{\text{médio}} = 0,768$, $P_{\max}^{\text{médio}} = 0,824$, largura $\approx 5,6$ pontos percentuais), que mostra a massa concentrada no *ombro inferior* de $P_{\min}$ por margem $\lesssim 0,08$, é reportada na Figura A.1 do Apêndice A.1.

A Figura 6.23 quantifica a estrutura do erro pedagógico que sustenta $\overline{AP}_{\mathcal{R}} = 0,9785$. A distribuição é dominada por uma massa singular em zero ($n \approx 1700$, os 42,4% de acerto na ZDP), e os erros não-nulos distribuem-se quase exclusivamente sobre o eixo negativo $[-0,20, 0]$, com cauda positiva praticamente ausente (coerente com 2,7% de superestimação). A massa de subestimação concentra-se em $[-0,10, 0]$, com modo dominante em $\approx -0,02$, modos secundários em $\approx -0,05$ e $\approx -0,08$, e fração catastrófica

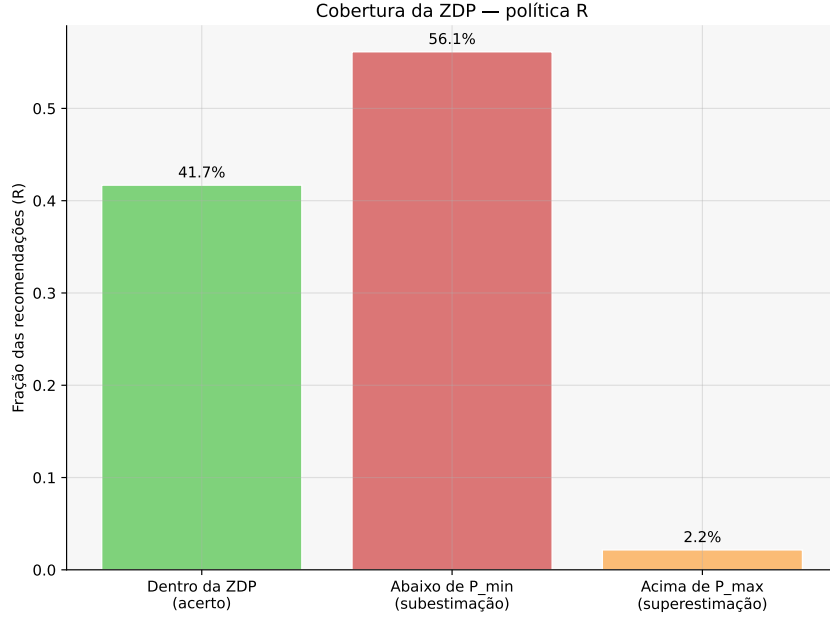


Figura 6.22: Decomposição das recomendações de $\mathcal{R}$ em dentro da ZDP, subestimação ($\hat{P}(\text{correct}) < P_{\min}$) e superestimação ($\hat{P}(\text{correct}) > P_{\max}$).

($|dist_{ZDP}| > 0,10$) inferior a 5%. O erro médio condicional dado não-acerto é, portanto, modesto: $\mathbb{E}[dist_{ZDP} | dist_{ZDP} < 0] \approx -0,037$, e a Acurácia Pedagógica decompõe-se como $\overline{AP} = 0,424 \cdot 1 + 0,549 \cdot (1 - 0,037) + 0,027 \cdot (1 + dist_{ZDP}^+) \approx 0,978$, em concordância com o valor medido. O sistema falha pelo lado benigno e por margem pequena; o teto de $\overline{AP}$ atingível por reposicionamento da massa subestimada para dentro da ZDP, sem ganho preditivo absoluto, seria $\approx 0,995$ (ganho potencial $\approx 0,017$, contra o $\overline{\Delta}_{AP} = 5,7 \times 10^{-4}$ realizado pela função platô na ablação atual).

6.6.5 Métrica 2: Novidade Curricular

Esta seção examina $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]$ (Equação 5.10) estratificado pelos modos *learning* e *review*, dimensão de conformidade da política definida na Seção 5.2.6.

A Figura 6.24 ratifica a conformidade prevista na Seção 5.2.6, com as duas modas empíricas situadas exatamente nos extremos do suporte. No modo de aprendizagem ($n_{learn} = 3483$), a distribuição concentra-se em $\mathcal{N}_C = 1$, com pequena massa residual em valores fracionários (questões que mesclam o $k_{foco,l}$ não-dominado com pré-requisitos já absorvidos por $\mathcal{K}_{dom,l}$), produzindo $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{learn} = 0,944$, próximo do limite teórico 1: o motor prioriza fortemente itens alinhados ao foco curricular. No modo de revisão ($n_{rev} = 115$), observa-se concentração singular em $\mathcal{N}_C = 0$, produzindo $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{review} = 0,000$ exatos, o que confirma que (i) o filtro curricular de revisão (Equação 4.22) opera estritamente sobre o fecho transitivo $\text{Pre}^*(k_{foco,l})$, e (ii) as rotinas de *fallback* não foram acionadas durante a mensuração, pois valor não-nulo seria, por construção, sinal de relaxamento de filtro. A

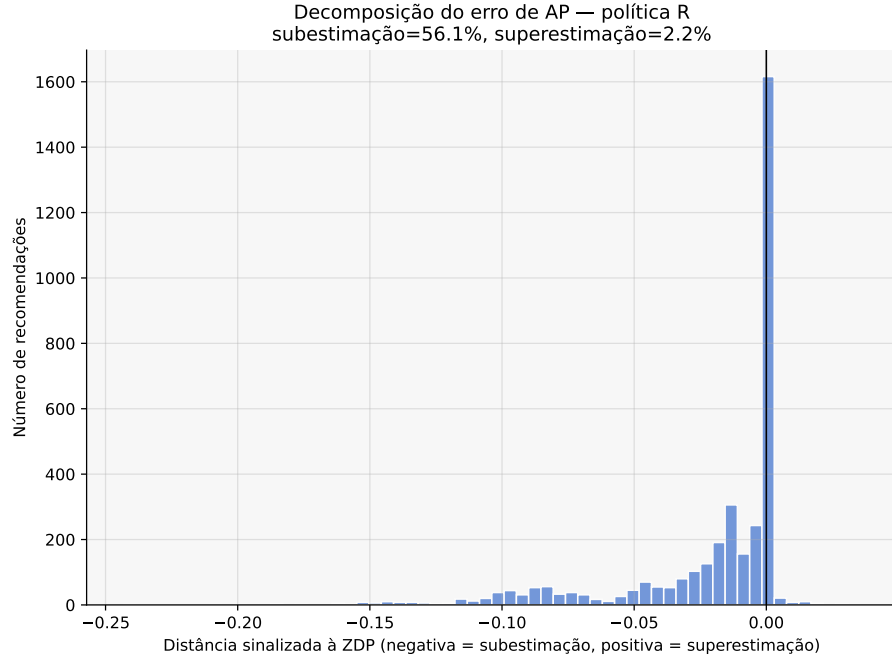


Figura 6.23: Distribuição da distância sinalizada à ZDP sobre as recomendações de $\mathcal{R}$: valores negativos correspondem a subestimação; positivos, a superestimação (Equação 5.7).

assimetria amostral ($n_{learn}/n_{rev} \approx 30$) reflete que a rotina de revisão é acionada apenas quando $\mathcal{K}_{risk,l}$ é não-vazio, condição que se materializa em $\approx 3,2\%$ das oportunidades sobre $\mathcal{S}_{holdout}$ — propriedade estrutural da coorte, não artefato amostral. A combinação dos modos reproduz a média agregada $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C] \approx 0,944 \cdot (3483/3598) + 0,000 \cdot (115/3598) \approx 0,914$, consistente com a Tabela 6.7.

6.6.6 Métrica 3: Diversidade da Sessão

Esta seção examina $\mathcal{D}_S$ (Equação 5.11) sobre as janelas deslizantes de tamanho $N = 10$ produzidas pelas trajetórias de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{base}$.

A Figura 6.25 reporta as distribuições de $\mathcal{D}_S$ sobre 3 149 janelas por política, com médias $\overline{\mathcal{D}_{S\mathcal{R}}} = 0,474$ e $\overline{\mathcal{D}_{S\mathcal{R}_{base}}} = 0,475$ (diferença de -10^{-3} , em concordância com a Tabela 6.7). As duas distribuições são visualmente indistinguíveis ao longo de todo o suporte $[0, 1]$. A geometria agregada é multimodal e admite leitura mecanicista direta: uma moda em $\mathcal{D}_S \approx 0,02$ (janelas focadas em um único $k_{foco,l}$), um corpo principal em $[0,35, 0,80]$ com picos em $\approx 0,50$ e $\approx 0,65$ (mistura curricular moderada, rotação cíclica por prática intercalada ou revisão sobre múltiplos pré-requisitos), e cauda leve acima de $\approx 0,85$. A média $\approx 0,47$ posiciona o sistema em regime de diversidade *moderada*, combinando coerência conceitual janela-a-janela com variação suficiente para evitar saturação. A coincidência praticamente exata entre as políticas confirma a ortogonalidade prevista entre a ponderação ZDP e a diversidade: como $\mathcal{D}_S$ depende exclusivamente da representação estrutural das questões e ambas as políticas amostram do mesmo $\mathcal{Q}_{cand}$, qualquer divergência seria evidência de

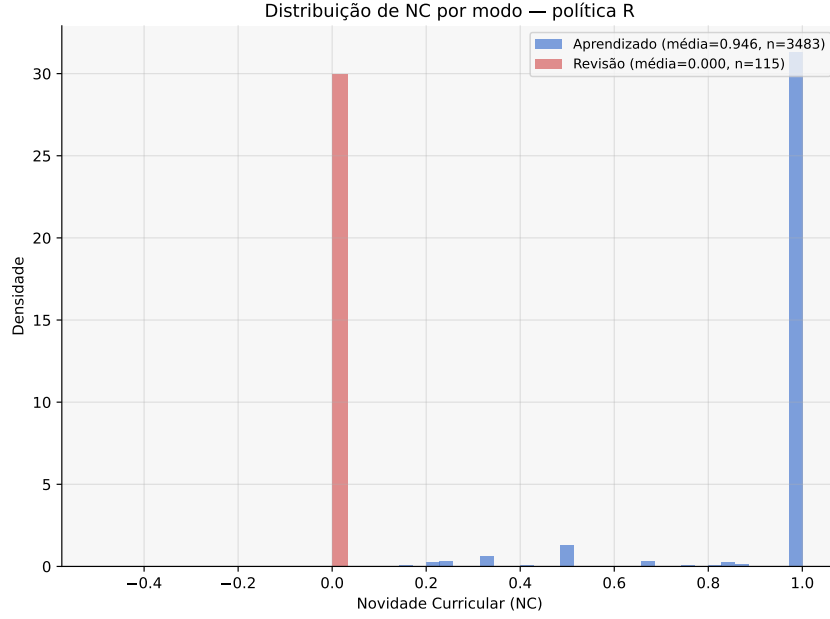


Figura 6.24: Distribuição empírica da Novidade Curricular por modo de recomendação (aprendizagem vs revisão) sobre as recomendações geradas em $\mathcal{S}_{holdout}$.

efeito colateral da função platô — efeito ausente.

6.6.7 Alinhamento KT vs Verdade do Dataset Sintético

Esta seção apresenta o diagnóstico de alinhamento da *probe* $\hat{p}_{ghost}$ contra a verdade estrutural v_{true} extraída do simulador cognitivo, oferecendo a leitura mais honesta das limitações de calibração de $\mathcal{F}_{KT}^*$ no contexto operacional do motor. A Figura 6.26 agrega $n = 3\,909$ pares (estudante, KC) no estado final, estratificados pela maestria estrutural verdadeira $v_{true}^{final} \geq \Omega_k$, com correlação linear $r = 0,548$. As granularidades complementares por recomendação ($r = 0,517$, RMSE = 0,182) e por KC ($r = 0,705$, RMSE = 0,141), bem como a decomposição do resíduo por faixa de maestria, são reportadas no Apêndice A.2 (Figuras A.2 e A.3).

A leitura segregada por classe de domínio é o ponto crítico. A nuvem cinza dos pares *não dominados pela verdade* ($n = 1\,542$) ocupa $\pi(v_{true}^{final}) \in [0,20, 0,65]$, mas p_{ghost}^{final} concentra-se em $[0,65, 0,82]$, *acima* da diagonal $y = x$: o motor *superestima* a maestria de KCs ainda não consolidados. A nuvem verde dos pares *dominados* ($n = 2\,367$) ocupa $\pi(v_{true}^{final}) \in [0,74, 0,88]$ com p_{ghost}^{final} em $[0,60, 0,85]$ e bandas horizontais discretas em $\{0,69, 0,79\}$, ficando *abaixo* de $y = x$ em larga fração: o motor *subestima* a maestria de KCs efetivamente promovidos. As duas direções de erro convergem para a mesma faixa-alvo $[0,69, 0,82]$ em torno de $\Omega_{médio}^{obs}$, evidenciando que o modelo carece de *range* dinâmico para resolver as extremidades, comprimindo ambas as classes para a vizinhança do limiar operacional.

Esta dupla direção reconcilia uma aparente contradição: o viés contra `true_p` é *positivo*

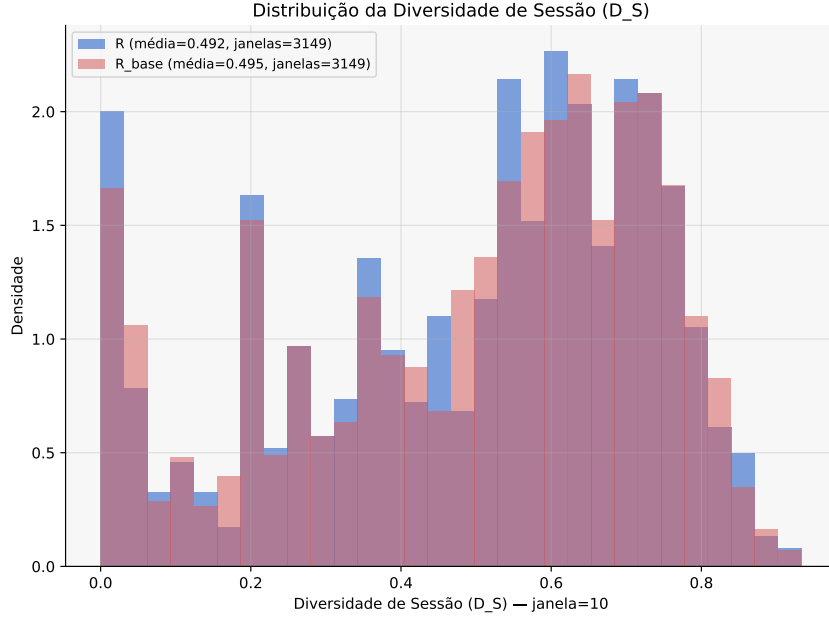


Figura 6.25: Distribuição empírica da Diversidade de Sessão sobre janelas de tamanho $N = 10$ em $\mathcal{S}_{holdout}$.

(a saída do motor situa-se acima da probabilidade de acerto induzida pela dinâmica de *guess/slip* sobre a maestria latente, média populacional $\bar{a} = 0,63$), enquanto a cobertura ZDP da Seção 6.6.4 acusa viés *negativo* (a mesma saída situa-se abaixo da banda $[P_{\min}, P_{\max}]$ derivada de $\Omega_k^{obs} \approx 0,79$, naturalmente mais alta por pertencer à região de maestria a ser consolidada). A coexistência é exatamente o sintoma da compressão: a saída é atraída para $[0,75, 0,80]$, acima da maioria dos $true_p$ e abaixo da banda ZDP. Pedagogicamente, a *separabilidade* das nuvens no eixo horizontal valida empiricamente a projeção afim $\pi(\cdot)$ da Equação 4.35, mas a *não-separabilidade* no eixo vertical p_{ghost}^{final} explicita que a promoção por $\mathcal{K}_{dom,l}$ (Equação 5.9) opera com margem reduzida contra erros de classificação local, tornando o critério de neutralidade $|\delta_{q,k} - 0,5|$ (Equação 4.32) uma mitigação necessária, não opcional.

6.6.8 Progresso Curricular Cumulativo e Gargalo de Promoção

Esta seção examina o avanço efetivo dos alunos simulados ao longo do grafo curricular $\mathcal{G}^*$, confrontando o conjunto $\mathcal{K}_{dom,l}$ promovido pelo motor (passo BFS, Equação 5.9) contra a maestria real $v_{true} \geq \Omega_k$ derivada do simulador, isolando o efeito do passo BFS dentro do laço de promoção curricular.

A Figura 6.27 revela uma penalidade sistemática induzida pelo *sequenciamento BFS*. As três contagens médias por estudante são: domínio real $|\overline{\mathcal{K}}|_{true} = 47,3$ KCs/aluno; conjunto $\mathcal{K}_{dom,l}$ formalmente promovido pelo motor, 32,5 KCs/aluno; e conjunto diagnóstico *pico-ghost* (KCs cujo $\hat{p}_{ghost}$ atingiu Ω_k^{obs} em algum instante, independentemente do estado

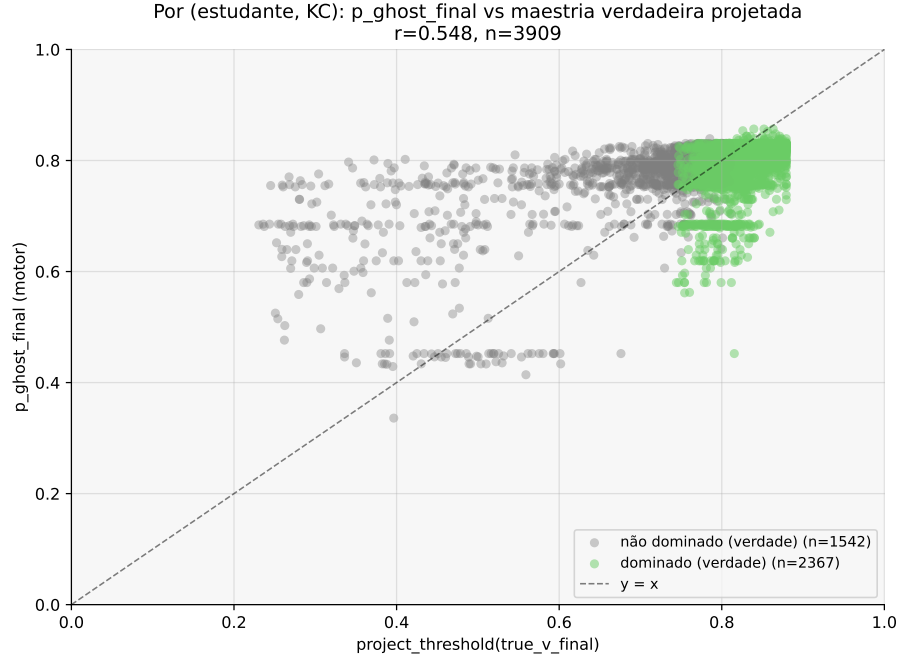


Figura 6.26: Dispersão $(p_{ghost}^{final}, \pi(v_{true}^{final}))$ por par (estudante, KC) ao término da simulação, estratificada pelo status de domínio real: cinza, não dominado pela verdade do Dataset Sintético D ; verde, dominado.

formal do BFS), 61,2 KCs/aluno. O pico-ghost supera o domínio real, consequência da compressão que arrasta $\hat{p}_{ghost}$ acima de Ω^{obs} em KCs ainda subliminares; já $\mathcal{K}_{dom}$ é, em essencialmente todos os alunos, menor que o pico-ghost (discrepância média de 28,7 KCs/aluno), correspondendo a KCs em que o motor previu maestria mas o BFS não a formalizou antes do encerramento do *replay* — tipicamente por pais topológicos ainda não promovidos. O painel direito quantifica o salto: a correlação $r(\mathcal{K}_{dom}, \text{verdade}) = 0,551$ é substancialmente menor que $r(\text{pico-ghost}, \text{verdade}) = 0,760$, e a diferença $\Delta r \approx 0,21$ é a magnitude da penalidade de sequenciamento: o motor possui poder preditivo razoável sobre o status real de cada KC, mas *atrasa sua promoção formal* por restrição topológica do BFS. Esta leitura preenche a lacuna deixada pela Métrica 2: $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{learn} = 0,944$ confirma que a política direciona a recomendação para KCs ainda não dominados, mas não mensura se $\mathcal{K}_{dom,l}$ é fiel à verdade estrutural — e o atraso de promoção sob BFS é a fonte dominante de divergência.

A Figura 6.28 consolida as projeções agregadas. Adotando 80% como linha de *aluno concludente*, a verdade do Dataset Sintético D posiciona 14/50 (28%) dos alunos acima da linha, contra apenas 4/50 (8%) pelo motor: o *gap* $14 \rightarrow 4$ ($\approx 71\%$ da conclusão real não formalizada) é a leitura, em escala de aluno, da penalidade de sequenciamento. O painel direito desagrega por KC, ordenado pela profundidade BFS: a taxa de maestria no Dataset (média populacional 0,61) mantém-se elevada em ampla cobertura do grafo, enquanto a taxa de foco simulado (fração de alunos para os quais o KC apareceu como

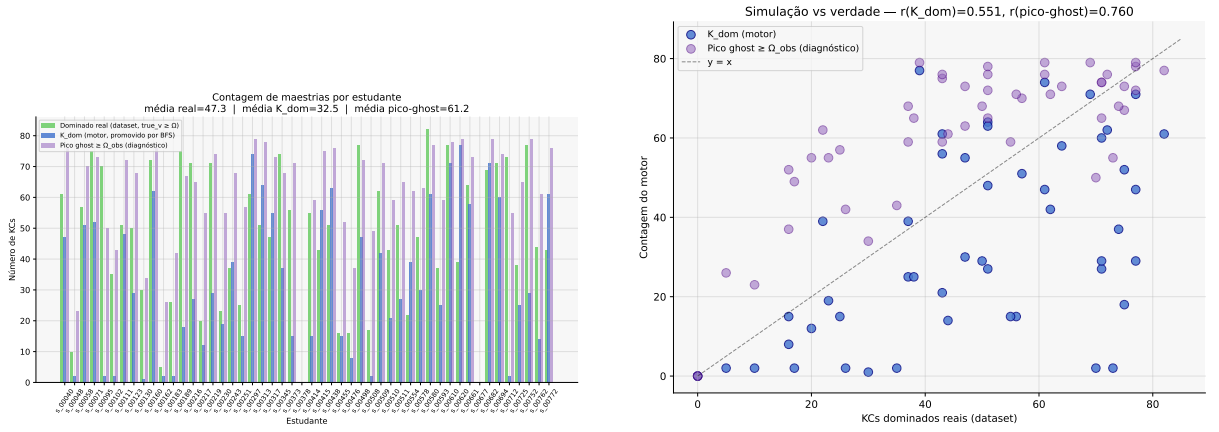


Figura 6.27: Esquerda: contagem de KCs dominados por estudante: real (Dataset), $\mathcal{K}_{dom}$ (motor) e pico-ghost (diagnóstico). Direita: dispersão da contagem do motor contra a verdade.

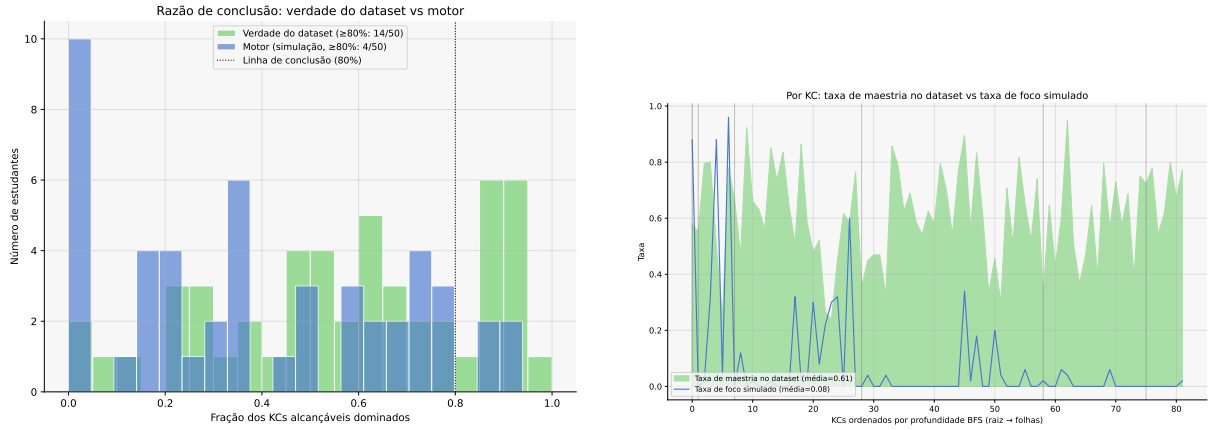


Figura 6.28: Esquerda: histograma da razão de conclusão (fração dos KCs alcançáveis dominados) para verdade e motor. Direita: taxa de maestria no Dataset Sintético D vs taxa de foco simulado por KC, ordenado por profundidade BFS.

alvo ou candidato durante o *replay*) decai de picos em KCs rasos (posições 0–25, valores 0,66–0,96) para ≈ 0 na porção profunda (posições ≥ 30). A média de foco 0,08 é $\approx 7,6\times$ menor que a taxa real, concentrando a discrepância na cauda profunda. A interpretação é direta: KCs em profundidades elevadas só ingressam em $\mathcal{K}_{unl,l}$ após a promoção completa de sua cadeia de pais, condição estatisticamente restritiva sob sequências de extensão finita; o motor opera predominantemente sobre KCs rasos, e o *alcance pedagógico efetivo do sistema fica limitado não pela qualidade local da política, mas pela profundidade máxima que o replay consegue induzir*.

Cruzamento empírico do limiar como gargalo operacional. A penalidade de sequenciamento não é o único filtro: a promoção formal demanda *tanto* alcance topológico pelo BFS *quanto* cruzamento empírico do limiar. A Figura 6.29 contrasta, para cada um dos 32 KCs que atuaram como k_{foco} em algum momento do *replay*, o $\hat{P}(\text{correct})$ médio

acumulado contra o próprio Ω_k^{obs} . Apenas 4/32 (12,5%) posicionam-se acima da diagonal $y = \Omega^{obs}$ (promovíveis); os 28/32 restantes ficam abaixo. Crucialmente, os KCs *mais frequentes* (maiores marcadores) concentram-se em torno de ($\Omega^{obs} \approx 0,81$, $\hat{P} \approx 0,76$), visivelmente abaixo da linha de promoção: são os KCs em que o motor mais investiu e que, paradoxalmente, formam o conjunto de *never-promoted candidates*. A fração $|\mathcal{K}_{dom}|/|\text{pico-ghost}| \approx 32,5/61,2 \approx 0,53$ resulta, portanto, da composição de dois gargalos: o alcance limitado do BFS (o motor toca apenas 32 dos 82 KCs como foco) e o cruzamento empírico do limiar (apenas 4 atravessam Ω^{obs} em valor médio), este último condicionado pela compressão de *range* que mantém $\hat{p}_{ghost}$ majoritariamente abaixo de Ω^{obs} . Os 4 KCs promovíveis situam-se em $\Omega^{obs} \in [0,77, 0,80]$ — a cauda esquerda da distribuição de limiares —, indicando que a promoção formal só ocorre onde a calibração populacional de Ω favorece operacionalmente o KT comprimido. Caracterizações adicionais da geometria de limiares (Ω latente vs observável, largura da banda por modo e estacionariedade temporal da ZDP) são reportadas no Apêndice A.3.

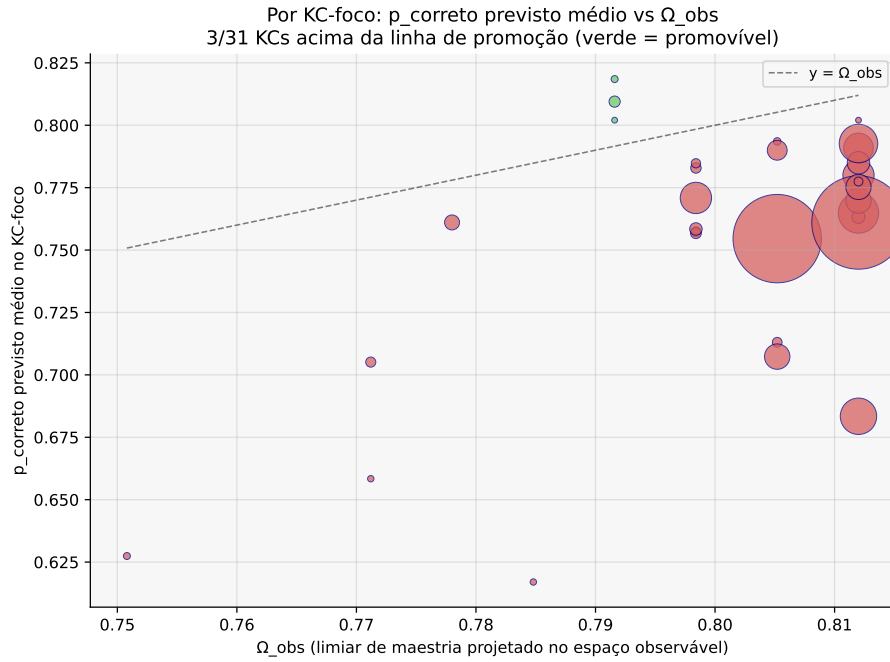


Figura 6.29: Por KC-foco, $\hat{P}(\text{correct})$ médio vs Ω_k^{obs} . Tamanho do marcador proporcional ao número de recomendações sobre o KC. Verde: KCs cujo $\hat{P}$ médio supera Ω_k^{obs} (promovíveis); vermelho: abaixo.

Estas constatações — compressão de *range* dinâmico do componente KT e gargalo de promoção via passo BFS — constituem as duas limitações estruturais que orientam a continuidade da pesquisa, retomadas e sistematizadas no Capítulo 7.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

Este capítulo retoma a pergunta de pesquisa e as duas hipóteses formuladas na Seção 1.1 à luz dos achados empíricos consolidados no Capítulo 6, sintetiza as contribuições concretas do trabalho, expõe as limitações estruturais identificadas durante o desenvolvimento e a avaliação, e delinea direções de evolução cujas motivações emergem diretamente do diagnóstico apresentado.

7.1 Síntese das Contribuições

A contribuição central deste trabalho é um *framework* metodológico de ponta a ponta para a construção de sistemas de tutoria adaptativa alinhados a currículos formais, validado em uma instanciação concreta sobre o currículo de matemática do ensino médio da BNCC.

No nível dos objetivos específicos traçados na Seção 1.1, as contribuições concretas são:

1. **Grafo de conhecimento ontológico** instanciando 82 KCs do currículo da BNCC de matemática, com topologia em funil verificada (DAG acíclico, raiz única) e parâmetros pedagógicos (d_k, Ω_k, Ψ_k) aderentes às regras de *clipping* e histerese projetadas.
2. **Pipeline híbrido de mapeamento semântico** em quatro etapas: enriquecimento via CoT, recuperação vetorial por Bi-Encoder, re-ranqueamento por Cross-Encoder e validação cega por LLM, complementado por curadoria pós-hoc (limite de densidade $\tau_{max_kc} = 8$ e Padronização Logit IRT) que produziu o banco operacional final de 889 questões mapeadas em 3 219 arestas KC-questão.
3. **Algoritmo ITMC** que identifica e mitiga gargalos topológicos de inanição curricular por imputação iterativa de nós parametrizados q_{synth} , condicionada a restrições de volume mínimo e cobertura de gradiente de dificuldade.

4. **Benchmarking de sete arquiteturas de KT** sob protocolo amostral usuário-disjunto e RMSE_{p^*} como critério primário, conduzindo à eleição de LefoKT como modelo de referência $\mathcal{F}_{KT}^*$ ($\text{RMSE}_{p^*} = 0,08747$), com desempenho próximo do teto teórico BSS_{max} implicado pela variância irreduzível de Bernoulli do simulador.
5. **Motor de recomendação ZDP no espaço observável**, composto por *ghost-pass* multi-âncora ($N_a = 3$ âncoras selecionadas pelo critério de neutralidade), calibrador isotônico pós-hoc treinado em coorte usuário-disjunta (redução de 48,7% no RMSE de alinhamento) e função platô que pondera as questões candidatas dentro do intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$ derivado da projeção afim dos limiares latentes.
6. **Protocolo de avaliação pedagógica** via comparação pareada por estudante contra uma política de ablação rigorosamente controlada, que preserva todos os componentes deliberativos do motor exceto a ponderação ZDP, isolando assim a contribuição estrita do mecanismo de seleção dentro do intervalo de dificuldade ativo.

Hipótese 1, viabilidade do *framework* como base para construir um motor de recomendação pedagogicamente coerente, é empiricamente sustentada pelos valores absolutos das três métricas e pela conformidade observada em todas as dimensões pedagogicamente esperadas. A Hipótese 2, efeito diferencial positivo da política ZDP sobre Acurácia Pedagógica em relação à ablação, exibiu direção teoricamente prevista ($\bar{\Delta}_{AP} = +5,69 \times 10^{-4}$, $d_z = +0,15$), porém não alcançou significância estatística sob o tamanho amostral adotado ($T = 1,07$, $p = 0,29$; $W = 557$, $p = 0,44$). Este resultado configura *ausência de evidência conclusiva contra H_0* no regime amostral atual, e não confirmação positiva dela. A não-significância simultânea em Novidade Curricular e Diversidade de Sessão é, neste caso, o desfecho desejado: atesta a ortogonalidade entre o mecanismo de ponderação ZDP e os eixos curricular e estrutural, descartando efeitos colaterais sistemáticos da função platô sobre essas dimensões.

A cadeia operacional, grafo de conhecimento ontológico, mapeamento semântico do banco de questões, Dataset Sintético D via ITMC, *benchmarking* de modelos de *Knowledge Tracing* e motor de recomendação baseado na ZDP reformulada no espaço observável, demonstrou-se reprodutível e empiricamente sustentável. A avaliação pedagógica reporta, em valores absolutos, $\overline{AP}_{\mathcal{R}} \approx 0,98$, $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{learn} = 0,944$, $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{review} = 0,000$ e $\mathcal{D}_S \approx 0,47$, configurando um sistema que opera dentro da banda ZDP projetada, conduz aprendizagem em direção a KCs ainda não dominados, restringe a revisão estritamente ao fecho de pré-requisitos historicamente consolidados, e mantém diversidade conceitual moderada janela a janela.

Estes valores absolutos, contudo, exigem leitura sob as nuances de interpretação estabelecidas formalmente na Seção 5.2. A Acurácia Pedagógica não deve ser interpretada como média de uma distribuição unimodal, mas decomposta em *taxa de acerto na ZDP*

(massa em $AP = 1$, realizada em 42,4% das recomendações) e *magnitude condicional do erro* sob não-acerto (modo dominante em $\approx -0,02$ e $\approx -0,05$ no espaço observável). A Novidade Curricular herda erros sistemáticos do componente de diagnóstico via $\hat{p}_{ghost}$, e a Diversidade de Sessão é uma métrica contextual cuja leitura ótima varia por modo de operação: baixa-moderada em *learning*, bimodal em *review*. O *framework*, portanto, contribui tanto com a arquitetura quanto com o protocolo de leitura desses indicadores, sem o qual interpretações superficiais (e.g., “maior é melhor” indiscriminado) levariam a conclusões equivocadas.

7.2 Limitações do Estudo e do Sistema

O relato dos resultados deve ser ponderado pelas seguintes limitações estruturais, identificadas durante a execução do protocolo experimental:

- **Restrição amostral por limitação de *hardware*.** A detecção do efeito $d_z = 0,15$ a potência $1 - \beta = 0,80$ e $\alpha = 0,05$ exigiria $n \approx 350$ pares em $\mathcal{S}_{holdout}$, uma ordem de magnitude acima do $n = 50$ adotado. O dimensionamento dos conjuntos $\mathcal{S}_{train}$, $\mathcal{S}_{test}$, $\mathcal{S}_{calib}$ e $\mathcal{S}_{holdout}$ foi condicionado pelas restrições computacionais do ambiente experimental disponível: treinamento de sete arquiteturas $KT \times$ cinco sementes e cinquenta *trials* de otimização bayesiana $\times 3$ *folds* sobre sequências de até $T = 200$ interações, e não por escolha metodológica. A escalabilidade do regime amostral é, portanto, contingente ao acesso a infraestrutura computacional adequada.
- **Compressão de *range* dinâmico do componente KT.** A saída calibrada $\hat{p}_{ghost}^{final}$ concentra-se na faixa $[0,65, 0,82]$ independentemente da maestria estrutural verdadeira v_{true}^{final} , induzindo viés de subestimação contra os limiares operacionais Ω_k^{obs} na cauda de alta maestria e viés de superestimação contra a verdade do simulador na cauda subliminar. A calibração isotônica anula o resíduo médio sobre $\mathcal{D}_{calib}$, mas não pode corrigir a compressão ponto a ponto por se tratar de transformação monotônica.
- **Gargalo de promoção via passo BFS.** O motor opera com foco em apenas 32 dos 82 KCs do grafo, dos quais somente 4 atravessam Ω^{obs} em valor médio. A razão de conclusão observada é de 8% dos alunos contra 28% na verdade do Dataset Sintético D , evidenciando que o alcance pedagógico efetivo do sistema é limitado não pela qualidade local da política, mas pela profundidade máxima alcançável dentro da janela de observação sob $\tau_s = 15$.
- **Aproximação por constantes populacionais.** Os parâmetros ($\bar{\gamma} = 0,20$, $\bar{\sigma} = 0,12$) utilizados na projeção afim de limiares e na definição da ZDP no modo de aprendizagem substituem os parâmetros agente-específicos (γ_l, σ_l) , introduzindo erro

sistemático de primeira ordem cuja magnitude é limitada pelos desvios-padrão das distribuições truncadas geradoras.

- **Avaliação em coorte sintética.** A mensuração pedagógica é conduzida sobre *replay* de históricos sintéticos da partição $\mathcal{S}_{holdout}$, sem re-execução do simulador cognitivo sobre as trajetórias recomendadas (*closed-loop*) e sem estudo em coorte humana. As métricas reportadas, portanto, refletem a qualidade local da recomendação no instante de cada consulta, e não o impacto longitudinal da política sobre a maestria futura.
- **Instanciação única.** O *framework* foi instanciado e validado exclusivamente sobre o currículo de matemática do ensino médio da BNCC. A generalização para outros domínios, outros níveis de escolaridade e outros currículos formais é argumentada arquiteturalmente, pelo desacoplamento dos componentes em relação ao domínio específico, mas não foi empiricamente verificada.

Classificação das Ameaças à Validade. As limitações elencadas podem ser sistematizadas segundo a taxonomia clássica de ameaças à validade em pesquisas experimentais e quasi-experimentais. **Validade interna** é afetada pela restrição amostral (item 1), que reduz a potência estatística e impede a detecção de efeitos substantivos, e pela avaliação em coorte sintética (item 5), que não permite inferir causalidade longitudinal. **Validade externa** é impactada pela instanciação única (item 6), restringindo a generalização a outros currículos e domínios disciplinares. **Validade de construto** é comprometida pela compressão de *range* dinâmico (item 2) e pela aproximação por constantes populacionais (item 4), que introduzem distância entre o construto teórico pretendido (maestria latente do aluno) e a operacionalização efetiva no espaço observável. **Validade da conclusão estatística** é enfraquecida, novamente, pela restrição amostral (item 1), que produz intervalos de confiança amplos e impede a rejeição de hipóteses nulas com poder adequado. O gargalo de promoção (item 3), por sua vez, afeta simultaneamente a validade interna (limitando o alcance da intervenção) e a validade ecológica (reduzindo a fidelidade do cenário experimental à realidade de um sistema de tutoria de longa duração).

7.3 Trabalhos Futuros

As limitações elencadas acima delineiam, simultaneamente, vetores concretos para evolução do trabalho. Adicionalmente, identificam-se direções que ampliam o escopo do *framework* para cenários de aplicação não explorados nesta monografia:

- **Ampliação amostral** de $\mathcal{S}_{holdout}$ para regime estatisticamente conclusivo sobre a Hipótese 2, condicionada à disponibilidade de infraestrutura computacional adequada para o retreinamento das arquiteturas e para o protocolo de avaliação pareada

em escala correspondente.

- **Expansão do *range* dinâmico do KT**, via calibradores não-monotônicos capazes de absorver a compressão ponto a ponto sem violar a ordenação relativa entre KCs, ou via funções de perda que penalizem explicitamente a contração da distribuição preditiva em torno da média marginal $\bar{a}$.
- **Estimação adaptativa por aluno** dos parâmetros (γ_l, σ_l) , eliminando a aproximação por constantes populacionais via *fine-tuning* hierárquico ou inferência bayesiana sobre o histórico individual.
- **Atenuação do gargalo BFS** via relaxamento controlado da condição estrita de pais-dominados no passo de promoção, ou via aplicação do fechamento a ponto fixo do estado BFS em momentos intermediários da trajetória, e não apenas ao final da sequência.
- **Re-instanciação do *framework*** sobre outros domínios da BNCC (linguagens e suas tecnologias, ciências da natureza, ciências humanas) e sobre currículos formais não-BNCC, validando empiricamente a generalização hoje argumentada apenas em nível arquitetural.
- **Geração efetiva dos enunciados** dos nós parametrizados q_{synth} instanciados pelo ITMC, via LLMs condicionados pela especificação $(\delta_{synth,k}, \mathcal{K}_j)$, transformando a parametrização matemática produzida pelo algoritmo em material didático efetivamente aplicável em ambientes de tutoria.
- **Avaliação *closed-loop*** com re-execução do simulador cognitivo sobre as trajetórias recomendadas, mensurando o efeito longitudinal da política sobre a maestria futura do agente, em complemento à avaliação local da recomendação no instante atual conduzida nesta monografia.
- **Estudo piloto em coorte humana**, absorvendo a transferência sintético $\rightarrow$ real e validando empiricamente as métricas pedagógicas em alunos reais, com a complexidade adicional do *cold-start* discutido na introdução.
- **Destilação de conhecimento sintético $\rightarrow$ real para mitigação de *cold-start***. O modelo de referência $\mathcal{F}_{KT}^*$ treinado sobre o Dataset Sintético D pode atuar como *teacher* produzindo *soft labels* $\hat{p}_{teacher}$ sobre interações reais escassas, com um modelo *student* treinado sob perda combinada de destilação, por exemplo, $KL(\hat{p}_{student} \parallel \hat{p}_{teacher})$, e de ajuste à verdade observável escassa em ambiente produtivo. Esta arquitetura promete duas vantagens articuladas: injeta sinal de alunos reais em um modelo cujo conhecimento estrutural foi adquirido sinteticamente, preservando o investimento metodológico da fase sintética, e endereça diretamente o problema de *cold-start* levantado na introdução: viabilizando a operação do *framework*

em plataformas educacionais com pouca ou nenhuma história de interações reais acumulada, regime exatamente complementar à premissa de ausência de dados que motivou esta monografia.

- **Implementação de mecanismos explícitos de XKT** sobre o motor, fechando a promessa de interpretabilidade pedagógica levantada na fundamentação teórica e contextualizada como horizonte natural da abordagem dual $KT + KG$ aqui adotada.

Em síntese, este trabalho consolida um *framework* metodológico cuja viabilidade está empiricamente sustentada e cujo efeito diferencial local aponta na direção teoricamente prevista, deixando como herança operacional não apenas uma arquitetura reprodutível, mas um protocolo de avaliação rigoroso e um diagnóstico transparente sobre as limitações estruturais identificadas: elementos que, conjuntamente, demarcam os vetores de evolução mais promissores e fundamentam a continuidade da pesquisa em sistemas de tutoria adaptativa alinhados a currículos formais.

Bibliografia

- Abdelrahman, G., Wang, Q., & Nunes, B. (2023). Knowledge tracing: A survey. *ACM Computing Surveys*, 55(11), 1–37.
- Abdelrahman, G., & Wang, Q. (2019). Knowledge tracing with sequential key-value memory networks. *Proceedings of the 42nd International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, 175–184.
- Abu-Salih, B., & Alotaibi, S. (2024). A systematic literature review of knowledge graph construction and application in education. *Heliyon*, 10(3).
- Adomavicius, G., & Tuzhilin, A. (2005). Toward the next generation of recommender systems: a survey of the state-of-the-art and possible extensions. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 17(6), 734–749.
- Akiba, T., Sano, S., Yanase, T., Ohta, T., & Koyama, M. (2019). Optuna: A Next-generation Hyperparameter Optimization Framework. *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*.
- Al-Yahya, M., George, R., & Alfaries, A. (2015). Ontologies in E-learning: Review of the literature. *International Journal of Software Engineering and Its Applications*, 9(2), 67–84.
- Anderson, J. R., Boyle, C. F., & Reiser, B. J. (1985). Intelligent Tutoring Systems. *Science*, 228(4698), 456–462.
- Anderson, J. R., et al. (1986). *Cognitive modelling and intelligent tutoring* (rel. técn.). Carnegie-Mellon University.
- Anderson, J. R., Boyle, C. F., Corbett, A. T., & Lewis, M. W. (1990). Cognitive modeling and intelligent tutoring. *Artificial Intelligence*, 42(1), 7–49.
- Anelli, V. W., Di Noia, T., Di Sciascio, E., Ferrara, A., & Mancino, A. C. M. (2021). Sparse feature factorization for recommender systems with knowledge graphs. *Proc. 15th ACM Conf. Recommender Syst.*, 154–165.
- Annabi, L. (2023). Prerequisite Structure Discovery in Intelligent Tutoring Systems. *Proceedings of the 2023 IEEE International Conference on Development and Learning (ICDL)*, 176–181.
- Arrieta, A. B., Díaz-Rodríguez, N., Del Ser, J., Bennetot, A., Tabik, S., Barbado, A., García, S., Gil-López, S., Molina, D., Benjamins, R., et al. (2020). Explainable

- artificial intelligence (xai): Concepts, taxonomies, opportunities and challenges toward responsible ai. *Information Fusion*, 58, 82–115.
- Averell, L., & Heathcote, A. (2011). The form of the forgetting curve and the fate of memories. *Journal of Mathematical Psychology*, 55(1), 25–35.
- Bach, S., Binder, A., Montavon, G., Klauschen, F., Müller, K.-R., & Samek, W. (2015). On pixel-wise explanations for non-linear classifier decisions by layer-wise relevance propagation. *PloS one*, 10(7), e0130140.
- Bai, Y., & et al. (2025). Rethinking and Improving Student Learning and Forgetting Processes for Attention Based Knowledge Tracing Models. *Proceedings of the 39th Annual AAAI Conference on Artificial Intelligence*.
- Bai, Y., et al. (2024). A survey of explainable knowledge tracing.
- Bai, Y., et al. (2025). csKT: Addressing cold-start problem in knowledge tracing via kernel bias and cone attention. *Expert Systems with Applications*.
- Baker, R. S. J. d., Corbett, A. T., & Aleven, V. (2008). More accurate student modeling through contextual estimation of slip and guess probabilities in Bayesian knowledge tracing. *International Conference on Intelligent Tutoring Systems (ITS)*, 5091, 406–415.
- Barnes, T. (2005). The Q-matrix method: Mining student response data for knowledge. *American Association for Artificial Intelligence Educational Data Mining Workshop*.
- Barton, M. A., & Lord, F. M. (1981). *An upper asymptote for the three-parameter logistic item-response model* (rel. técn. N. i-8). ETS Research Report Series.
- Batmaz, Z., Yurekli, A., Bilge, A., & Kaleli, C. (2019). A review on deep learning for recommender systems: challenges and remedies. *Artificial Intelligence Review*, 52(1), 1–37.
- Becker, F. (1993). *Teacher epistemology: The daily life of the school* (1st). Editora Vozes.
- Bier, N., Moore, S., & Van Velsen, M. (2019). Instrumenting courseware and leveraging data with the Open Learning Initiative (OLI). *Learning Analytics & Knowledge*.
- Bobadilla, J., Ortega, F., Hernando, A., & Gutiérrez, A. (2013). Recommender systems survey. *Knowledge-Based Systems*, 46, 109–132.
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Recuperado 16 agosto 2025, de https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf
- Cazella, S. C., Behar, P. A., Schneider, D., da Silva, K. K., & Freitas, R. (2014). Developing a learning objects recommender system based on competences to education: Experience report. *New Perspectives in Information Systems and Technologies*, 2, 217–226. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05948-8_21

- Cen, H., Koedinger, K. R., & Junker, B. (2006). Learning factors analysis - A general method for cognitive model evaluation and improvement. *International Conference on Intelligent Tutoring Systems (ITS)*, 4053, 164–175.
- Cen, H., Koedinger, K. R., & Junker, B. (2008). Comparing two IRT models for conjunctive skills. *International Conference on Intelligent Tutoring Systems (ITS)*, 5091, 796–798.
- Chaiklin, S. (2003). The zone of proximal development in Vygotsky’s analysis of learning and instruction. Em *Vygotsky’s Educational Theory in Cultural Context* (pp. 39–64).
- Chandrasekaran, B., Josephson, J. R., & Benjamins, V. R. (1999). What are ontologies and why do we need them? *IEEE Intelligent Systems and their Applications*, 14(1), 20–26.
- Chang, H.-S., Hsu, H.-J., & Chen, K.-T. (2015). Modeling exercise relationships in e-learning: A unified approach. *Proceedings of the 8th International Conference on Educational Data Mining (EDM 2015)*, 532–535.
- Cheng, W., et al. (2025). Uncertainty-aware Knowledge Tracing. *Proceedings of the 39th Annual AAAI Conference on Artificial Intelligence*.
- Cheng, X., Zhou, X., Fang, L., He, C., Zhou, Y., Luo, W., Guan, Q., et al. (2025). NR4DER: Neural Re-ranking for Diversified Exercise Recommendation. *Proceedings of the 48th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, 1738–1747.
- Cheng, Y., Li, M., Chen, H., Cai, Y., Sun, H., Zou, H., & Zhang, G. (2021). Exercise recommendation method combining NeuralCD and NeuMF models. *2021 7th Annual International Conference on Network and Information Systems for Computers (ICNISC)*, 646–651.
- Choi, Y., & et al. (2020). Ednet: A large-scale hierarchical dataset in education. *International Conference on Artificial Intelligence in Education*.
- Choi, Y., Lee, Y., Cho, J., Baek, J., Kim, B., Cha, Y., Shin, D., Bae, C., & Heo, J. (2020). Towards an appropriate query, key, and value computation for knowledge tracing. *Proceedings of the Seventh ACM Conference on Learning @ Scale (L@S)*, 341–344.
- Chun, B.-A., & Heo, H.-J. (2018). The Effect of Flipped Learning on Academic Performance as an Innovative Method for Overcoming Ebbinghaus’ Forgetting Curve. *Proceedings of the 6th International Conference on Information and Education Technology (ICIET)*, 56–60.
- Clark, R. E. (2014). Cognitive task analysis for expert-based instruction in healthcare. Em *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*. Springer.
- Corbett, A. (2000). Cognitive mastery learning in the act programming tutor. *AAAI Spring Symposium on Adaptive User Interfaces*.

- Corbett, A. T., & Anderson, J. R. (1994). Knowledge tracing: Modeling the acquisition of procedural knowledge. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 4(4), 253–278.
- Da Silva, F. L., Slodkowski, B. K., Da Silva, K. K. A., & Cazella, S. C. (2023). A systematic literature review on educational recommender systems for teaching and learning: research trends, limitations and opportunities. *Education and Information Technologies*, 28(3), 3289–3328.
- Dai, H., Zhang, Y., Yun, Y., & Shang, X. (2021). An improved deep model for knowledge tracing and question-difficulty discovery. *Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence*, 362–375.
- Darling-Hammond, L. (2006). No child left behind and high school reform. *Harvard Educational Review*, 76(4), 642–667.
- Deldjoo, Y., Elahi, M., Quadrana, M., & Cremonesi, P. (2018). Using visual features based on MPEG-7 and deep learning for movie recommendation. *Int. J. Multimedia Inf. Retrieval*, 7(4), 207–219.
- Deldjoo, Y., Schedl, M., Cremonesi, P., & Pasi, G. (2020). Recommender systems leveraging multimedia content. *ACM Comput. Surv.*, 53(5), 1–38.
- Didolkar, A., Goyal, A., Ke, N. R., Guo, S., Valko, M., Lillicrap, T., Rezende, D., Bengio, Y., Mozer, M., & Arora, S. (2024). Metacognitive capabilities of LLMs: An exploration in mathematical problem solving. *International Conference on Machine Learning (ICML)*.
- Ebbinghaus, H. (2013). Memory: A contribution to experimental psychology. *Annals of Neurosciences*, 20, 155.
- Embretson, S. E., & Reise, S. P. (2013). *Item Response Theory*. Psychology Press.
- Erdt, M., Fernández, A., & Rensing, C. (2015). Evaluating recommender systems for technology-enhanced learning: A quantitative survey. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 8(4), 326–344. <https://doi.org/10.1109/TLT.2015.2438867>
- Fang, Y., et al. (2023). An intelligent question-answering model over educational knowledge graph for sustainable urban living. *Sustainability*, 15(2), 1139.
- Feng, M., Heffernan, N., & Koedinger, K. (2009). Addressing the assessment challenge with an online system that tutors as it assesses. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 19, 243–266.
- Gan, W., Sun, Y., Peng, X., & Sun, Y. (2020). Modeling learner’s dynamic knowledge construction procedure and cognitive item difficulty for knowledge tracing. *Applied Intelligence*, 50, 3894–3912.
- Garcia-Martinez, S., & Hamou-Lhadj, A. (2013). Educational recommender systems: A pedagogical-focused perspective. *Multimedia Services in Intelligent Environments*, 25, 113–124. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00375-7_8

- Ghosh, A., Heffernan, N., & Lan, A. S. (2020). Context-aware attentive knowledge tracing. *Proceedings of the 26th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery & Data Mining*, 2330–2339.
- Graves, A., Wayne, G., & Danihelka, I. (2014). Neural turing machines.
- Grivokostopoulou, F., Perikos, I., Paraskevas, M., & Hatzilygeroudis, I. (2019). An ontology-based approach for user Modelling and personalization in E-learning systems. *2019 IEEE/ACIS 18th International Conference on Computer and Information Science (ICIS)*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICIS46139.2019.8940269>
- Guan, Q., Cheng, X., Xiao, F., Li, Z., He, C., Fang, L., & Luo, W. (2025). Explainable exercise recommendation with knowledge graph. *Neural Networks*, 183, 106954.
- Guan, Q., Xiao, F., Cheng, X., Fang, L., Chen, Z., Chen, G., & Luo, W. (2023). KG4Ex: An explainable knowledge graph-based approach for exercise recommendation. *Proceedings of the 32nd ACM International Conference on Information and Knowledge Management*, 597–607.
- Guo, Q. (2022). A survey on knowledge graph-based recommender systems. *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, 34(8), 3549–3568.
- He, X., et al. (2017). Neural collaborative filtering. *Proceedings of the 26th International Conference on World Wide Web*, 173–182.
- He, Y., Wang, H., Pan, Y., Zhou, Y., & Sun, G. (2022). Exercise recommendation method based on knowledge tracing and concept prerequisite relations. *CCF Transactions on Pervasive Computing and Interaction*, 4(4), 452–464.
- He, Z. Y., Wang, C. D., Wang, J., Lai, J. H., & Tang, Y. (2024). Community enhanced knowledge graph for recommendation. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 1–14.
- Hinton, G., Vinyals, O., & Dean, J. (2015). Distilling the Knowledge in a Neural Network. *arXiv preprint arXiv:1503.02531*. <https://arxiv.org/abs/1503.02531>
- Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780.
- Hou, M., & et al. (2025). Cognitive Fluctuations Enhanced Attention Network for Knowledge Tracing. *Proceedings of the 39th Annual AAAI Conference on Artificial Intelligence*.
- Huang, L., Wang, C.-D., Chao, H.-Y., Lai, J.-H., & Yu, P. S. (2019). A score prediction approach for optional course recommendation via cross-user-domain collaborative filtering. *IEEE Access*, 7, 19550–19563. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2897979>
- Huang, Z., & Liu, Z. (2025). HCGKT: Hierarchical Contrastive Graph Knowledge Tracing with Multi-level Feature Learning. *International Conference on Artificial Intelligence in Education*, xxx.

- Hubert, N., Brun, A., & Monticolo, D. (2022). New ontology and knowledge graph for university curriculum recommendation. *Proceedings of the 21st International Semantic Web Conference (ISWC 2022)*.
- Im, Y., et al. (2023). Forgetting-aware Linear Bias for Attentive Knowledge Tracing. *Proceedings of the 32nd ACM International Conference on Information and Knowledge Management*.
- Kiran, R., Kumar, P., & Bhasker, B. (2020). DNNRec: A novel deep learning based hybrid recommender system. *Expert Systems with Applications*, 144, 113054.
- Kitchenham, B. (2004). *Procedures for Performing Systematic Reviews* (rel. técn. TR/SE-0401). Keele University. Keele, UK.
- Kizilkaya, G., Torunand, E., & Askar, P. (2007). Restructuring E-learning with ontologies. *International Conference on Computational Science and its Applications*, 161–164.
- Koren, Y., Bell, R., & Volinsky, C. (2009). Matrix factorization techniques for recommender systems. *Computer*, 42(8), 30–37.
- Li, H., Xu, T., Tang, J., & Wen, Q. (2024a). Automate knowledge concept tagging on math questions with LLMs. *arXiv preprint arXiv:2403.17281*.
- Li, H., Xu, T., Tang, J., & Wen, Q. (2024b). Knowledge tagging system on math questions via LLMs with flexible demonstration retriever. *arXiv preprint arXiv:2406.13885*.
- Li, S., Liu, X., Tang, X., Chen, X., & Pu, J. (2024). MLKT4Rec: Enhancing Exercise Recommendation Through Multitask Learning With Knowledge Tracing. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*.
- Li, Y., Liu, K., Satapathy, R., Wang, S., & Cambria, E. (2024). Recent developments in recommender systems: A survey. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 19(2), 78–95. <https://doi.org/10.1109/MCI.2024.3363984>
- Li, Z., et al. (2023). Multi-source Education Knowledge Graph Construction and Fusion for College Curricula.
- Lipton, Z. C., Berkowitz, J., & Elkan, C. (2015). A critical review of recurrent neural networks for sequence learning.
- Liu, G., & Hao, T. (2012). User-based question recommendation for question answering system. *International Journal of Information and Education Technology*, 2(3), 243.
- Liu, Q., Huang, Z., Yin, Y., Chen, E., Xiong, H., Su, Y., & Hu, G. (2021). EKT: Exercise-aware knowledge tracing for student performance prediction. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering (TKDE)*, 33(1), 100–115.
- Liu, Q., Shen, S., Huang, Z., Chen, E., & Zheng, Y. (2021). A survey of knowledge tracing.
- Liu, Z., Liu, Q., Chen, J., Huang, S., Tang, J., & Luo, W. (2022). pyKT: A Python Library to Benchmark Deep Learning based Knowledge Tracing Models. *Thirty-sixth Conference on Neural Information Processing Systems Datasets and Benchmarks Track*.

- Long, T., Qin, J., Shen, J., Zhang, W., Xia, W., Tang, R., He, X., & Yu, Y. (2022). Improving knowledge tracing with collaborative information. *Proceedings of the 15th ACM International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM)*, 599–607.
- Loshchilov, I., & Hutter, F. (2019). Decoupled Weight Decay Regularization. *International Conference on Learning Representations (ICLR)*. <https://arxiv.org/abs/1711.05101>
- Lu, J., Wu, D., Mao, M., Wang, W., & Zhang, G. (2015). Recommender system application developments: a survey. *Decision Support Systems*, 74, 12–32.
- Lu, Y., et al. (2021). Radarmath: an intelligent tutoring system for math education. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 35(17), 14985–14987.
- Lu, Y., Shen, M., Wang, H., Wang, X., van Rechem, C., Fu, T., & Wei, W. (2023). Machine learning for synthetic data generation: a review.
- Lundberg, S. M., & Lee, S.-I. (2017). A unified approach to interpreting model predictions. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30.
- Luo, S., Zhang, X., Xiao, Y., & Song, L. (2022). HySAGE: A hybrid static and adaptive graph embedding network for context-drifting recommendations. *Proc. 31st ACM Int. Conf. Inf. Knowl. Manage.*, 1389–1398.
- Ma, H., Huang, Z., Tang, W., & Zhang, X. (2022). Exercise recommendation based on cognitive diagnosis and neutrosophic set. *2022 IEEE 25th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design (CSCWD)*, 1467–1472.
- Maria, S. A. A., Cazella, S. C., & Behar, P. A. (2019). Sistemas de Recomendação: conceitos e técnicas de aplicação. Em *Recomendação Pedagógica em Educação a Distância* (pp. 19–47). Penso.
- Martínez-Ramírez, Y., Ramírez-Noriega, A., Zayas-Esquer, M., Miranda-Mondaca, S., Armenta-Bojorquez, J., Quintero-Fonseca, M., Cortes-Velázquez, C., et al. (2018). Architecture of mathematical knowledge management system in education: Ontology-based and case-based. *2018 International Symposium on Computers in Education (SIIE)*, 1–5.
- Miller, A. H., Fisch, A., Dodge, J., Karimi, A.-H., Bordes, A., & Weston, J. (2016). Key-value memory networks for directly reading documents. *Proceedings of the 2016 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP)*, 1400–1409.
- Moore, S., Schmucker, R., Mitchell, T., & Stamper, J. (2024). Automated generation and tagging of knowledge components from multiple-choice questions. *Proceedings of the Eleventh ACM Conference on Learning @ Scale*.
- Muñoz, J., Ojeda, F., Jurado, D., Peña, P., Carranza, C., Berríos, H., Molina, S., Farfan, A., Arias-González, J., & VasquezPauca, M. (2022). Systematic review of adaptive

- learning technology for learning in higher education. *Eurasian Journal of Educational Research*, 98(98), 221–233.
- Murray, R. C., Ritter, S., Nixon, T., Schwiebert, R., Hausmann, R. G. M., Towle, B., Fancsali, S. E., & Vuong, A. (2013). Revealing the learning in learning curves. *International Conference on Artificial Intelligence in Education (AIED)*, 473–482.
- Nabizadeh, A. H., Gonçalves, D., Gama, S., Jorge, J., & Rafsanjani, H. N. (2020). Adaptive learning path recommender approach using auxiliary learning objects. *Computers & Education*, 147, 103777–103793. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103777>
- Nafea, S. M., Siewe, F., & He, Y. (2019). On Recommendation of learning objects using Felder-Silverman learning style model. *IEEE Access*, 7, 163034–163048. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2935417>
- Nagatani, K., & et al. (2019). Augmenting knowledge tracing by considering forgetting behavior. *The World Wide Web Conference*.
- Nakagawa, H., Iwasawa, Y., & Matsuo, Y. (2019). Graph-based knowledge tracing: Modeling student proficiency using graph neural network. *Proceedings of the IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence (WIC)*, 156–163.
- Neisser, U. (1967). *Cognitive Psychology*. Appleton-Century-Crofts.
- Nguyen, H. D., et al. (2023). Knowledge management for information querying system in education via the combination of rela-ops model and knowledge graph. *Journal of Cases on Information Technology*, 25(1), 1–17.
- Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984). *Learning How to Learn*. Cambridge University Press.
- Ozyurt, Y., Feuerriegel, S., & Sachan, M. (2024). Automated Knowledge Concept Annotation and Question Representation Learning for Knowledge Tracing. *arXiv preprint arXiv:2410.01727*.
- Ozyurt, Y., Almaci, T., Feuerriegel, S., & Sachan, M. (2025). Personalized Exercise Recommendation with Semantically-Grounded Knowledge Tracing. *arXiv preprint arXiv:2507.11060*.
- Pandey, S., & Karypis, G. (2019). A self attentive model for knowledge tracing. *Proceedings of the 12th International Conference on Educational Data Mining (EDM)*.
- Pandey, S., & Srivastava, J. (2020). RKT: Relation-aware self-attention for knowledge tracing. *Proceedings of the 29th ACM International Conference on Information & Knowledge Management (CIKM)*, 1205–1214.
- Pardos, Z. A., Baker, R. S., San Pedro, M. O., Gowda, S. M., & Gowda, S. M. (2014). Affective states and state tests: Investigating how affect and engagement during the school year predict end-of-year learning outcomes. *Journal of Learning Analytics*, 1(1), 107–128.

- Patikorn, T., Deisadze, D., Grande, L., Yu, Z., & Heffernan, N. (2019). Generalizability of methods for imputing mathematical skills needed to solve problems from texts. *International Conference on Artificial Intelligence in Education (AIED)*.
- Pavlik, P. I., Cen, H., & Koedinger, K. R. (2009). Performance factors analysis - A new alternative to knowledge tracing. *International Conference on Artificial Intelligence in Education (AIED)*, 200, 531–538.
- Pavlik Jr., P. I., & Anderson, J. R. (2005). Practice and forgetting effects on vocabulary memory: An activation-based model of the spacing effect. *Cognitive Science*, 29(4), 559–586.
- Pelánek, R. (2015). Modeling students' memory for application in adaptive educational systems. *Proceedings of the 8th International Conference on Educational Data Mining (EDM)*, 480–483.
- Piech, C., Bassen, J., Huang, J., Ganguli, S., Sahami, M., Guibas, L. J., & Sohl-Dickstein, J. (2015). Deep knowledge tracing. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 505–513.
- Polignano, M., Musto, C., de Gemmis, M., Lops, P., & Semeraro, G. (2021). Together is better: Hybrid recommendations combining graph embeddings and contextualized word representations. *Proceedings of the 15th ACM Conference on Recommender Systems*, 187–198.
- Qiu, Y., Qi, Y., Lu, H., Pardos, Z. A., & Heffernan, N. T. (2011). Does time matter? Modeling the effect of time with Bayesian knowledge tracing. *Proceedings of the 4th International Conference on Educational Data Mining (EDM)*, 139–148.
- Ramadhan, G., & Setiawan, E. B. (2022). Collaborative filtering recommender system based on memory based in twitter using decision tree learning classification (case study: Movie on netflix). *Proc. IEEE Int. Conf. Adv. Creative Netw. Intell. Syst.*, 1–6.
- Rasch, G. (1993). *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*. ERIC.
- Ribeiro, M. T., Singh, S., & Guestrin, C. (2016). "Why Should I Trust You?": Explaining the Predictions of Any Classifier. *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 1135–1144.
- Rutto, D. K. (2017). Pedagogical theories. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 8(6), 2025–2030.
- Sarwar, B. M., Karypis, G., Konstan, J. A., & Riedl, J. (2001). Item-based collaborative filtering recommendation algorithms. *Proceedings of the 10th international conference on World Wide Web*, 285–295.
- Scarselli, F., Gori, M., Tsoi, A. C., Hagenbuchner, M., & Monfardini, G. (2009). The graph neural network model. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 20(1), 61–80.
- Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina. (2020). *Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense: Caderno 1 - Disposições Gerais*. Florianópolis.

- Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina. (2021a). *Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense: Caderno 2 - Formação Geral Básica*. Florianópolis.
- Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina. (2021b). *Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense: Caderno 3 - Itinerários Formativos*. Florianópolis.
- Sense, F., Behrens, F., Meijer, R. R., & van Rijn, H. (2016). An individual's rate of forgetting is stable over time but differs across materials. *Topics in Cognitive Science*, 8(1), 305–321.
- Shen, S., & et al. (2021). Learning process-consistent knowledge tracing. *Proceedings of the 27th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery & Data Mining*.
- Shen, S., Liu, Q., Chen, E., Wu, H., Huang, Z., Zhao, W., Su, Y., Ma, H., & Wang, S. (2020). Convolutional knowledge tracing: Modeling individualization in student learning process. *Proceedings of the 43rd International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, 1857–1860.
- Shen, X., et al. (2024). Revisiting Knowledge Tracing: A Simple and Powerful Model. *Proceedings of the 32nd ACM International Conference on Multimedia*.
- Shi, Y., Schmucker, R., Chi, M., Barnes, T., & Price, T. (2023). KC-Finder: Automated knowledge component discovery for programming problems. *International Educational Data Mining Society*.
- Shin, D., Shim, Y., Yu, H., Lee, S., Kim, B., & Choi, Y. (2021). SAINT+: Integrating temporal features for EdNet correctness prediction. *Proceedings of the 11th International Learning Analytics and Knowledge Conference (LAK)*, 490–496.
- Skinner, B. F. (1953). *Science and Human Behavior*. Macmillan.
- Skinner, B. F. (1968). *The Technology of Teaching*. Appleton-Century-Crofts.
- Smith, L. N., & Topin, N. (2019). Super-Convergence: Very Fast Training of Neural Networks Using Large Learning Rates. *Artificial Intelligence and Machine Learning for Multi-Domain Operations Applications*. <https://arxiv.org/abs/1708.07120>
- Stamper, J., Niculescu-Mizil, A., Ritter, S., Gordon, G. J., & Koedinger, K. R. (2010). Algebra I 2008–2009. Challenge data set from KDD Cup 2010 educational data mining challenge [Accessed: 2025-05-24].
- Stancin, K., Posic, P., & Jaksic, D. (2020). Ontologies in education—state of the art. *Education and Information Technologies*, 25(6), 5301–5320.
- Steffe, L. P., & Gale, J. E. (Ed.). (1995). *Constructivism in Education*. Psychology Press.
- Su, Y., Liu, Q., Liu, Q., Huang, Z., Yin, Y., Chen, E., Ding, C. H. Q., Wei, S., & Hu, G. (2018). Exercise-enhanced sequential modeling for student performance prediction. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2435–2443.

- Tang, Y., et al. (2023). Analysis of learning effectiveness based on knowledge graph. *Proceedings of the 4th International Conference on Education, Knowledge and Information Management (ICEKIM)*.
- Tarus, J. K., Niu, Z., & Yousif, A. (2017). A hybrid knowledge-based recommender system for e-learning based on ontology and sequential pattern mining. *Future Generation Computer Systems*, 72, 37–48. <https://doi.org/10.1016/j.future.2017.02.049>
- Teng, G., et al. (2025). Enhancing Knowledge Tracing through Decoupling Cognitive Pattern from Error-Prone Data. *Proceedings of the ACM Web Conference 2025 (WWW '25)*.
- Thai-Nghe, N., Drumond, L., Krohn-Grimberghe, A., & Schmidt-Thieme, L. (2010). Recommender system for predicting student performance. *Proceedings of the 1st workshop on recommender systems for technology enhanced learning*, 2811–2819.
- Tian, Z., Flanagan, B., Dai, Y., & Ogata, H. (2022). Automated matching of exercises with knowledge components. *Computers in Education Conference Proceedings*.
- Tieso, C. (2005). The effects of grouping practices and curricular adjustments on achievement. *Journal for the Education of the Gifted*, 29(1), 60–89.
- Tong, S., Liu, Q., Huang, W., Huang, Z., Chen, E., Liu, C., Ma, H., & Wang, S. (2020). Structure-based knowledge tracing: An influence propagation view. *2020 IEEE International Conference on Data Mining (ICDM)*, 541–550.
- Vainas, O., & et al. (2019). E-gotsky: sequencing content using the zone of proximal development. *arXiv preprint arXiv:1904.12268*.
- Van Dat, N., Van Toan, P., & Thanh, T. M. (2022). Solving distribution problems in content-based recommendation system with Gaussian mixture model. *Appl. Intell.*, 52(2), 1602–1614.
- Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., Kaiser, L., & Polosukhin, I. (2017). Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 6000–6010.
- Verbert, K., Manouselis, N., Ochoa, X., Wolpers, M., Drachsler, H., Bosnic, I., & Duval, E. (2012). Context-aware recommender systems for learning: A survey and future challenges. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 5(4), 318–335. <https://doi.org/10.1109/TLT.2012.11>
- Vie, J.-J., & Kashima, H. (2019). Knowledge tracing machines: Factorization machines for knowledge tracing. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 750–757.
- Villano, M. (1992). Probabilistic student models: Bayesian belief networks and knowledge space theory. *ITS*, 608, 491–498.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman, Ed.). Harvard University Press.

- Walpole, S., & McKenna, M. C. (2007). *Differentiated reading instruction: Strategies for the primary grades*. Guilford Press.
- Wang, C., et al. (2021). Temporal cross-effects in knowledge tracing. *Proceedings of the 14th ACM International Conference on Web Search and Data Mining*.
- Wei, J., Wang, X., Schuurmans, D., Bosma, M., Xia, F., Chi, E., Le, Q. V., Zhou, D., et al. (2022). Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*.
- Wilson, K. H., Karklin, Y., Han, B., & Ekanadham, C. (2016). Back to the basics: Bayesian extensions of IRT outperform neural networks for proficiency estimation. *Proceedings of the 9th International Conference on Educational Data Mining (EDM)*, 539–544.
- Wu, Z., Li, M., Tang, Y., & Liang, Q. (2020). Exercise recommendation based on knowledge concept prediction. *Knowledge-Based Systems*, 210, 106481.
- Wu, Z., Zhang, J., Liu, M., Huang, X., & Yang, Q. (2025). Intention-aware exercise recommendation enhanced by deep forgetting modeling for e-learning. *Discover Computing*, 28(1), 1–25.
- Xia, L. (2021). Knowledge-enhanced hierarchical graph transformer network for multi-behavior recommendation. *Proc. AAAI Conf. Artif. Intell.*, 35(5), 4486–4493.
- Yang, Y., Zhu, Y., & Jian, P. (2022). Application of knowledge graph in water conservancy education resource organization under the background of big data. *Electronics*, 11(23), 3913.
- Yang, Y., Zhu, Y., & Li, Y. (2022). Personalized recommendation with knowledge graph via dual-autoencoder. *Appl. Intell.*, 52, 6196–6207.
- Yang, Y., Shen, J., Qu, Y., Liu, Y., Wang, K., Zhu, Y., Zhang, W., & Yu, Y. (2020). GIKT: A graph-based interaction model for knowledge tracing. *Database Systems for Advanced Applications (DASFAA)*, 12112, 299–315.
- Yao, L., Chu, Z., Li, S., Li, Y., Gao, J., & Zhang, A. (2021). A survey on causal inference. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD)*, 15(5), 1–46.
- Yin, Y., & et al. (2023). Tracing Knowledge Instead of Patterns: Stable Knowledge Tracing with Diagnostic Transformer. *Proceedings of the ACM Web Conference*.
- Zhang, J., Shi, X., King, I., & Yeung, D.-Y. (2017). Dynamic key-value memory networks for knowledge tracing. *Proceedings of the 26th International Conference on World Wide Web (WWW)*, 765–774.
- Zhang, L. (2021). Learning factors knowledge tracing model based on dynamic cognitive diagnosis. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 1–11.
- Zhang, M., Zhu, X., Zhang, C., Qian, W., Pan, F., & Zhao, H. (2023). Counterfactual monotonic knowledge tracing for assessing students’ dynamic mastery of knowledge concepts. *Proceedings of the 32nd ACM International Conference on Information and Knowledge Management*, 3236–3246.

- Zhang, S., et al. (2023). An adaptive learning method based on knowledge graph. *Frontiers in Educational Research*, 6(6).
- Zhong, Z. (2025). Personalized Exercise Recommendation Method Integrating Knowledge Tracing and Material Diffusion. *Proceedings of the 2025 5th International Conference on Neural Networks, Information and Communication Engineering (NNICE)*, 1493–1496.

Apêndice A

Diagnósticos Complementares do Motor de Recomendação

Este apêndice reúne figuras diagnósticas complementares à Seção 6.6 que corroboram, em granularidades adicionais, os dois achados estruturais discutidos no corpo principal: a compressão de *range* dinâmico do componente de *Knowledge Tracing* e o gargalo de promoção curricular imposto pelo passo BFS. O conteúdo é estritamente confirmatório: as conclusões quantitativas já estão estabelecidas no capítulo de resultados, e as figuras aqui apresentadas oferecem evidência redundante por ângulos distintos, preservada para inspeção detalhada da banca sem sobrecarregar o fluxo do relato.

A.1 Cobertura da ZDP no Espaço de $\hat{P}(\text{correct})$

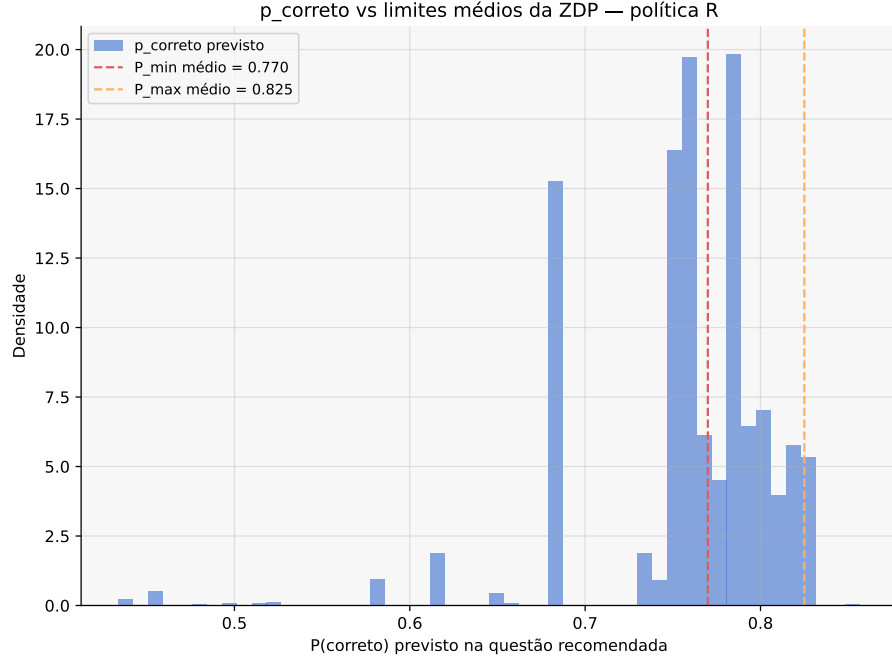


Figura A.1: Distribuição de $\hat{P}(\text{correct})$ sobre as questões recomendadas por $\mathcal{R}$, com $P_{\min}$ e $P_{\max}$ médios sobrepostos.

A Figura A.1 explicita a geometria estreita do intervalo ZDP médio: $P_{\min}^{\text{médio}} = 0,768$ e $P_{\max}^{\text{médio}} = 0,824$, largura agregada $\approx 5,6$ pontos percentuais, decorrência direta do fator de compressão $(1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma}) = 0,68$ da projeção afim $\pi(v)$ (Equação 4.35). A massa exibe estrutura bimodal em torno de $P_{\min}$: um modo dominante imediatamente *abaixo* do limite inferior em $\hat{P}(\text{correct}) \approx 0,76$ e um segundo modo *acima* em $\approx 0,79$, dentro do intervalo ativo. A subestimação de 54,9% reportada na Figura 6.22 não decorre de erros catastróficos, mas da concentração de massa no *ombro inferior* de $P_{\min}$, tipicamente por $\lesssim 0,08$, de modo que correções monotônicas marginais ou expansões pontuais de $P_{\min}$ realocariam fração substancial da massa para dentro da ZDP mesmo sem ganho de poder preditivo absoluto.

A.2 Alinhamento KT por Recomendação, por KC e por Faixa de Maestria

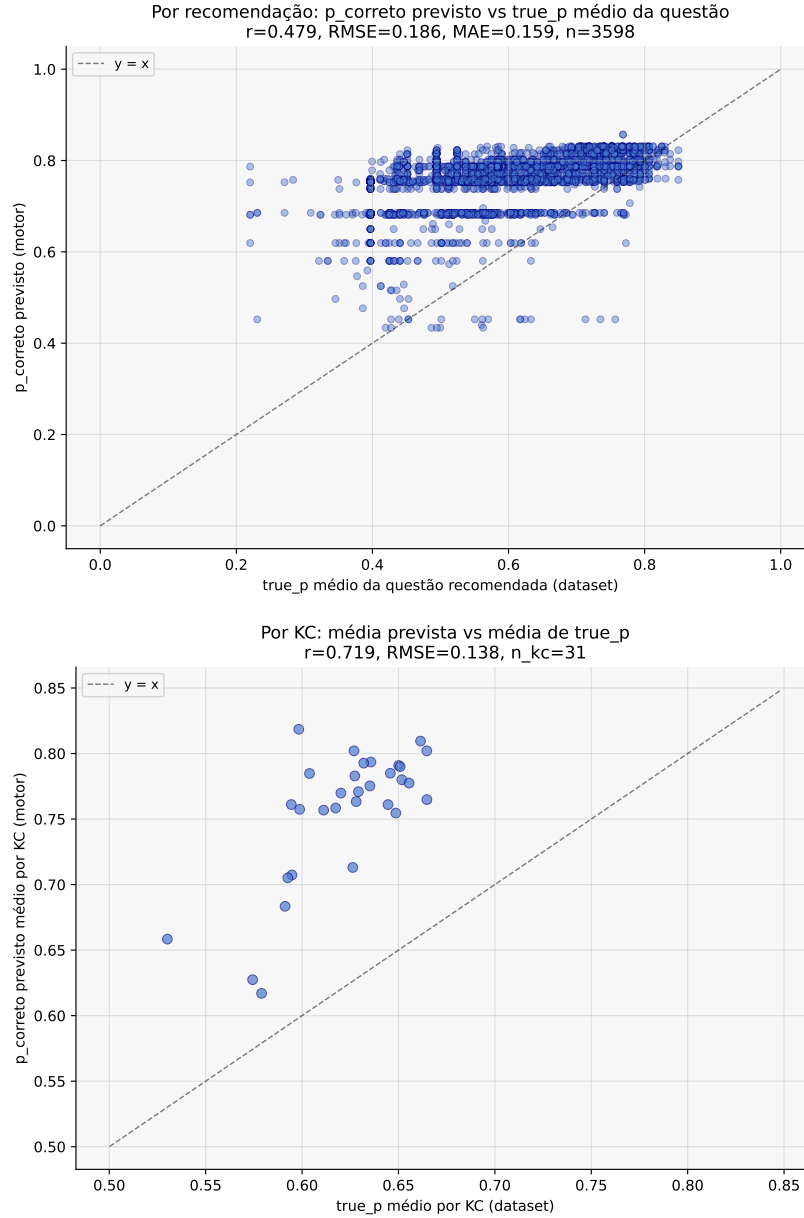


Figura A.2: Superior: $\hat{P}(\text{correct})$ previsto vs true_p médio da questão, por recomendação ($n = 3\,598$). Inferior: média prevista vs média de true_p , por KC ($n_{\text{KC}} = 32$).

A granularidade por recomendação (painel superior) registra correlação de Pearson $r = 0,517$, $\text{RMSE} = 0,182$ e $\text{MAE} = 0,156$; a agregação por KC (painel inferior) eleva a correlação a $r = 0,705$ com $\text{RMSE} = 0,141$. O estreitamento por agregação é o efeito previsto pela lei dos grandes números: o ruído estocástico *intra*-KK (termo $\text{Bernoulli}(p^*)$ do simulador) é parcialmente absorvido pela média condicional por KC, expondo a componente sistemática do erro. A saída do motor concentra-se em *bandas horizontais* discretas em torno de $\{0,69, 0,79\}$, correlato gráfico direto da compressão de *range* dinâmico docu-

mentada na Seção 6.6.2, com viés direcional sistematicamente positivo contra true_p (a totalidade dos 32 pontos por KC acima da diagonal $y = x$).

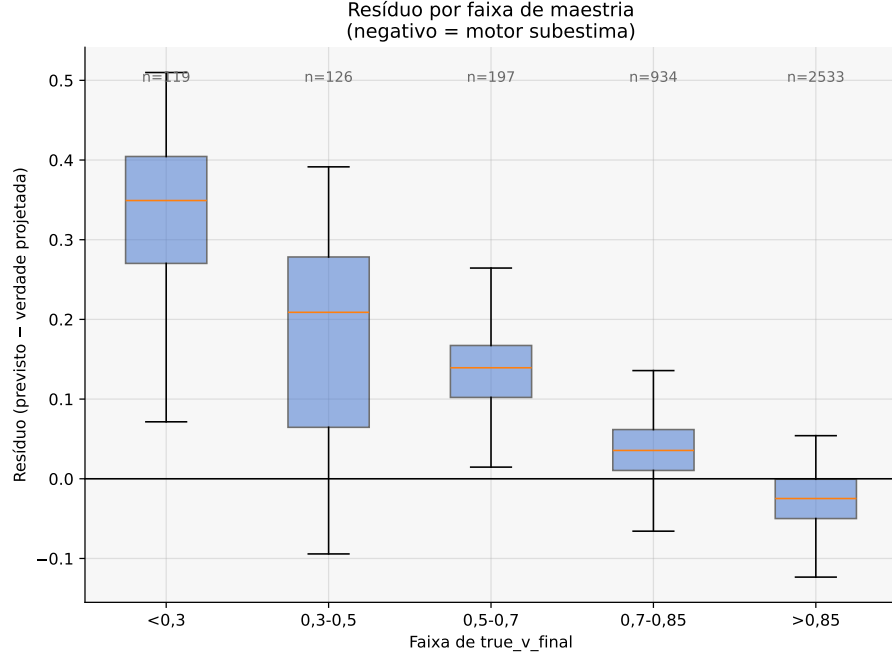


Figura A.3: Distribuição do resíduo $p_{\text{ghost}}^{\text{final}} - \pi(v_{\text{true}}^{\text{final}})$ binado por $v_{\text{true}}^{\text{final}}$.

A Figura A.3 decompõe o resíduo em cinco faixas de maestria verdadeira: $<0,3$ ($n = 119$), $0,3-0,5$ ($n = 126$), $0,5-0,7$ ($n = 197$), $0,7-0,85$ ($n = 934$) e $>0,85$ ($n = 2\,533$). As medianas exibem decaimento monotônico estrito (+0,35, +0,21, +0,14, +0,04, -0,02), com cruzamento por zero na fronteira 0,85, vizinhança de $\Omega_{\text{médio}}^{\text{obs}} \approx 0,79$. Esta monotonicidade é a assinatura empírica direta da compressão: a saída calibrada converge para uma constante operacional $\hat{p}^{\dagger} \approx 0,77$ independentemente da maestria verdadeira. O intervalo interquartil colapsa de $\approx 0,14$ na faixa $<0,3$ para $\approx 0,05$ na faixa $>0,85$, indicando maior estabilidade da *probe* sobre KCs consolidados. Como 89% dos pares concentram-se nas faixas $\geq 0,7$, o relato agregado é fortemente ponderado pelo regime de alta maestria, onde o motor está quase calibrado (mediana -0,02); o *long tail* de erro positivo nas faixas $<0,7$ ($\approx 11\%$ da massa) demarca o foco diagnóstico onde a ampliação de *dynamic range* do KT renderia maior impacto.

A.3 Geometria Operacional dos Limiars e da Banda da ZDP

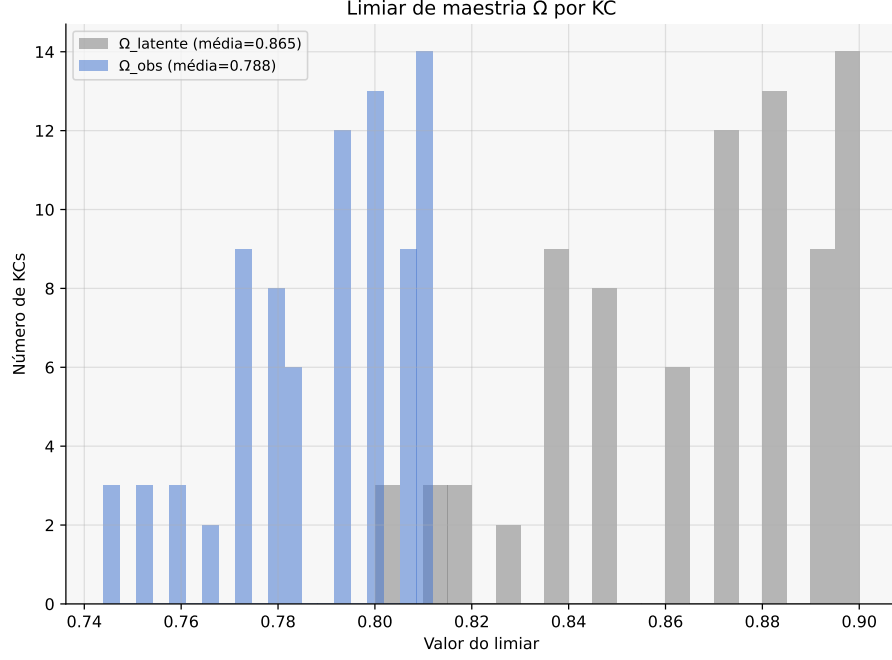


Figura A.4: Distribuição de Ω_k latente (cinza) e Ω_k^{obs} projetado pela Equação 4.35 (azul), por KC.

No espaço latente, Ω_k ocupa $[0,74, 0,90]$ com média $\bar{\Omega}_{lat} = 0,865$ e modas em $\{0,88, 0,90\}$; a projeção observável desloca a distribuição para $[0,74, 0,82]$ com média $\bar{\Omega}_{obs} = 0,788$, em concordância exata com a previsão analítica $\pi(0,865) = 0,20 + 0,68 \cdot 0,865 = 0,788$. O *gap* médio $\bar{\Omega}_{lat} - \bar{\Omega}_{obs} = 0,077$ quantifica o rebaixamento estrutural do limiar imposto pela projeção afim para acomodar a perturbação de *guess/slip*. A moda superior de $\hat{p}_{ghost}$ ($\approx 0,79$) coincide com a moda principal de Ω_{obs} , regime de competição direta que explica a marginalidade entre 54,9% de subestimação e 42,4% de acerto na cobertura ZDP.

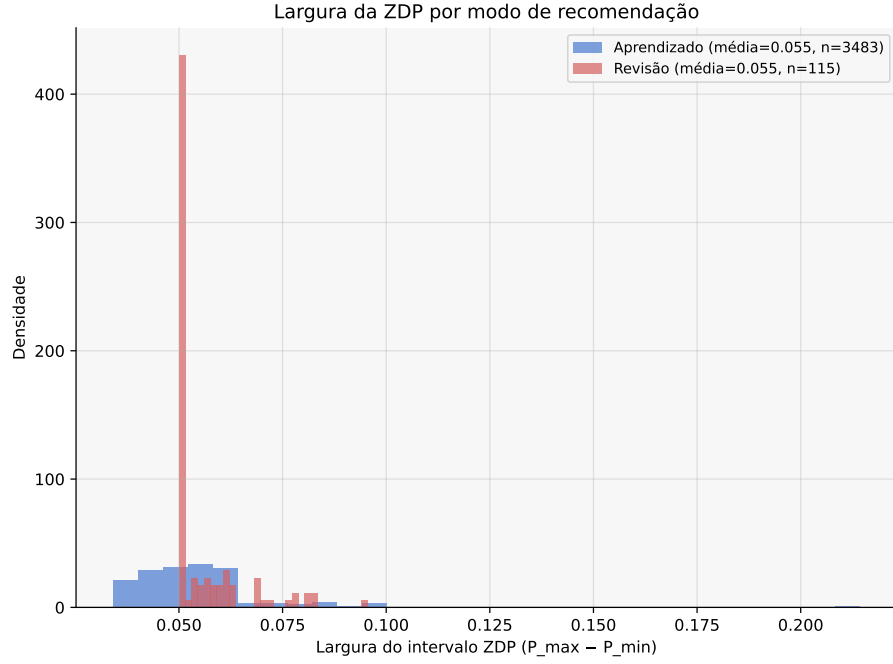


Figura A.5: Distribuição da largura $P_{\max} - P_{\min}$ por modo de recomendação (aprendizagem vs revisão).

As larguras médias são quantitativamente próximas entre os modos: $\overline{(P_{\max} - P_{\min})}_{learn} = 0,056$ ($n_{learn} = 3\,483$) e $\overline{(P_{\max} - P_{\min})}_{rev} = 0,055$ ($n_{rev} = 115$). A revisão exibe concentração singular em $\approx 0,050$ (geometria quase degenerada, decorrente da ancoragem em Ω_k^{obs} via deslocamento populacional fixo Δ_{rev}), enquanto a aprendizagem é mais dispersa ($[0,03, 0,10]$ com cauda até $\approx 0,21$), refletindo a variabilidade KC-específica de Ω_k^{obs} ao longo da fila $\mathcal{F}_{learn,l}$. A estreiteza absoluta de ambas as bandas ($\approx 5,6\%$ da escala $[0, 1]$) confirma o regime de filtragem ZDP de alta exigência da política.

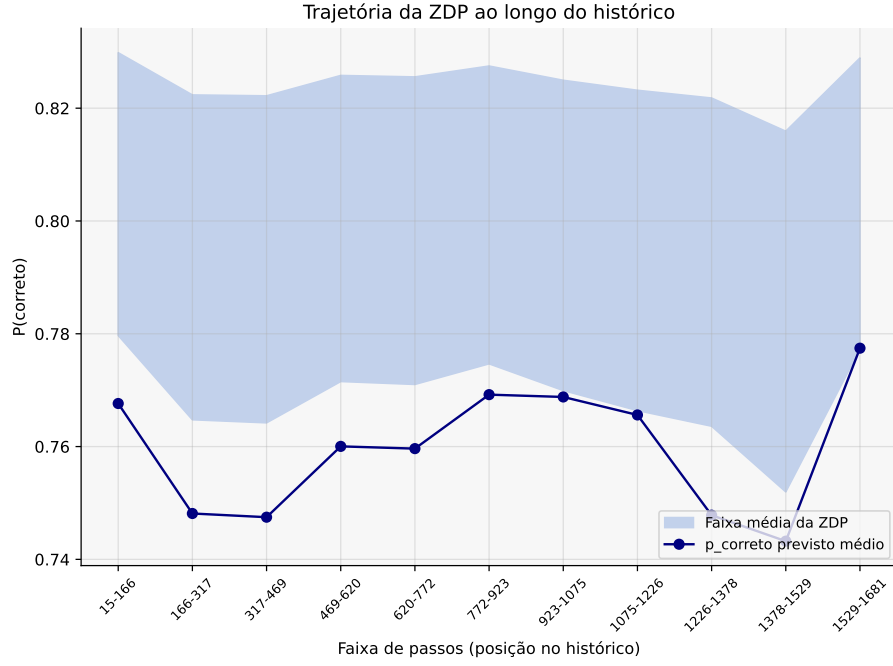


Figura A.6: Faixa média da ZDP por *bucket* de passos do histórico, com $\hat{P}(\text{correct})$ médio sobreposto.

Ao longo dos 11 *buckets* de passos (posições 15 a 1 681), a banda $[P_{\min}, P_{\max}]$ permanece essencialmente estacionária, com $\overline{P_{\min}} \approx 0,765$ e $\overline{P_{\max}} \approx 0,825$ e flutuações inferiores a $\pm 0,01$. A linha de $\hat{P}(\text{correct})$ médio permanece em todos os *buckets* abaixo ou marginalmente sobre $P_{\min}$ (magnitude 0,74–0,78). Esta estabilidade descarta hipóteses temporais (e.g., melhor calibração após acúmulo de histórico) como explicação para o viés de subestimação, reforçando sua natureza estrutural-residual.

Apêndice B

Artigo Científico

Este apêndice reproduz, na íntegra, a versão em formato de artigo científico (normas SBC/ABNT) desta monografia, sintetizando o *framework* metodológico, o protocolo experimental e os resultados apresentados nos capítulos anteriores.

Um *Framework* para a Recomendação de Exercícios em Tutoria Adaptativa Baseado em Grafos de Conhecimento

Mateus Slezinsky Pereira, Diogo Neves Soares

Departamento de Informática e Estatística – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Florianópolis – SC – Brasil

{mateus.slezinsky, diogo.soares}@grad.ufsc.br

Orientador: Prof. Renato Fileto, Dr.

Resumo

Resumo. A personalização da aprendizagem em plataformas de educação *online* demanda sistemas de recomendação de exercícios que superem as limitações pedagógicas de abordagens tradicionais. Contudo, o desenvolvimento de tais sistemas em contextos curriculares formais é severamente limitado pela inexistência de conjuntos de dados públicos que mapeiem interações de alunos a habilidades de currículos como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) brasileira. Este artigo propõe e valida um *framework* metodológico de ponta a ponta para a concepção, desenvolvimento e avaliação de Sistemas de Tutoria Adaptativa alinhados a currículos formais, instanciado no domínio de matemática do ensino médio sob a BNCC. O *framework* supera a ausência de dados por meio da geração de interações sintéticas de alta fidelidade sobre um grafo de conhecimento ontológico, seguida do treinamento de um modelo de *Knowledge Tracing* (KT) de estado da arte e da operacionalização de um motor de recomendação baseado na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). A avaliação empírica, pareada por estudante contra uma ablação de amostragem uniforme, mostra que o sistema final atinge Acurácia Pedagógica elevada em valor absoluto ($\overline{AP} \approx 0,98$) e preserva os perfis esperados de Novidade Curricular e Diversidade de Sessão, sem efeitos colaterais sistemáticos; o ganho diferencial da política ZDP aponta na direção teoricamente prevista, mas não alcança significância estatística no regime amostral adotado. A contribuição central é, portanto, um *framework* reproduzível e generalizável a outros domínios e currículos formais, acompanhado de diagnósticos estruturais que delineiam vetores concretos de evolução futura.

Palavras-chave: Sistemas de Recomendação Educacionais, Rastreamento de Conhecimento, Grafos de Conhecimento, Sistemas de Tutoria Adaptativa, Zona de Desenvolvimento Proximal, BNCC.

Abstract. The personalization of learning in online education platforms demands exercise recommendation systems that overcome the pedagogical limitations of traditional approaches. However, developing such systems for formal curricular contexts is severely limited by the absence of public datasets mapping student interactions to the skills of curricula such as the Brazilian BNCC. This paper proposes and validates an end-to-end methodological framework for Adaptive Tutoring Systems aligned with formal curricula, instantiated on high-school mathematics under the BNCC. The framework overcomes data scarcity by generating high-fidelity synthetic interactions over an ontological knowledge graph, training a state-of-the-art Knowledge Tracing (KT) model, and operationalizing a recommendation engine grounded in the Zone of Proximal Development (ZPD). Empirical evaluation, paired per student against a uniform-sampling ablation, shows the final system attains high absolute Pedagogical Accuracy ($\overline{AP} \approx 0.98$) and preserves expected Curricular Novelty and Session Diversity profiles without systematic side effects; the ZPD policy's differential gain points in the theoretically predicted direction but does not reach statistical significance under the adopted sample size. The main contribution is thus a reproducible framework generalizable to other domains and formal curricula, accompanied by structural diagnostics that outline concrete directions for future work.

Keywords: Educational Recommender Systems, Knowledge Tracing, Knowledge Graphs, Adaptive Tutoring, Zone of Proximal Development, BNCC.

1 Introdução

A disponibilidade de dados integrados a tecnologias digitais na educação posicionou os sistemas de recomendação educacionais (*Educational Recommender Systems* – ERS) como ferramentas cruciais tanto para

educadores quanto para estudantes (Maria et al., 2019). Para os alunos, tais sistemas prometem otimizar a jornada de aprendizado ao reconhecer preferências e necessidades individuais, contribuindo para o desempenho acadêmico e a motivação por meio da indicação de conteúdo personalizado (Garcia-Martinez & Hamou-Lhadj, 2013). O desafio reside em superar a complexidade inerente à diversidade de perfis dos estudantes (Verbert et al., 2012), oferecendo recomendações apropriadamente desafiadoras e livres dos problemas clássicos de *cold-start* e esparsidade herdados dos sistemas de recomendação de propósito geral (Garcia-Martinez & Hamou-Lhadj, 2013).

Abordagens tradicionais de filtragem colaborativa (Liu & Hao, 2012; Sarwar et al., 2001) ignoram a estrutura de pré-requisitos e a complexidade conceitual do domínio. A pesquisa evoluiu para uma abordagem dual que modela explicitamente o aluno e o domínio: o Rastreamento de Conhecimento (*Knowledge Tracing* – KT) modela o estado de conhecimento latente do aluno (Abdelrahman et al., 2023), permitindo recomendar exercícios com dificuldade adaptada (Wu et al., 2020); grafos de conhecimento (KGs) (Guan et al., 2025) fornecem uma representação formal do currículo, viabilizando recomendação e explicabilidade (Bai et al., 2024; Z. Y. He et al., 2024).

A eficácia da abordagem dual KT+KG depende, contudo, de grandes conjuntos de dados que registrem interações de alunos mapeadas a um grafo curricular. Datasets de referência como ASSISTments (Feng et al., 2009; Pardos et al., 2014), KDDcup (Stamper et al., 2010) e EdNet (Choi & et al., 2020) foram fundamentais para o avanço da área, mas não existe, até onde se sabe, um conjunto de dados público que mapeie interações de alunos brasileiros a competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil. Ministério da Educação, 2018), o que representa um obstáculo relevante para tecnologias educacionais adaptativas alinhadas à realidade nacional.

Objetivo e contribuição. Este trabalho propõe um *framework* metodológico de ponta a ponta para a construção de sistemas de tutoria adaptativa alinhados a currículos formais, instanciado e validado no domínio de matemática do ensino médio sob a BNCC. Seus componentes – a modelagem ontológica do grafo curricular, o simulador cognitivo gerador de dados sintéticos, o protocolo de *benchmarking* de KT e a política de recomendação baseada na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) – são desacoplados do domínio específico, permitindo a re-instanciação sobre outras disciplinas e currículos. A pergunta de pesquisa que orienta o trabalho é: *como conceber um framework de ponta a ponta para tutoria adaptativa alinhada a currículos formais, da modelagem do conhecimento à recomendação pedagogicamente embasada, na ausência de dados de interação pré-existent, e como validá-lo empiricamente?* Duas hipóteses complementares são investigadas: (H1) a combinação de grafo curricular, dataset sintético de alta fidelidade e modelo de KT fornece a base para um motor de recomendação pedagogicamente coerente; (H2) sobre o conjunto de questões curricularmente filtradas, a ponderação ZDP aumenta a acurácia pedagógica esperada frente a uma ablação de amostragem uniforme, sem degradar novidade curricular nem diversidade de sessão.

2 Trabalhos Relacionados

A revisão da literatura seguiu o método proposto por Kitchenham (2004). Uma *query* estruturada em torno de três pilares – recomendação de exercícios, diagnóstico do estado de conhecimento e representação de conhecimento curricular – foi aplicada em Google Scholar, IEEE Xplore, ACM Digital Library e Springer-Link, restrita aos últimos cinco anos, resultando em 231 registros. Após remoção de duplicatas e triagem por título/resumo/palavras-chave, 21 artigos foram lidos na íntegra, consolidando 12 trabalhos como os mais relevantes para a análise comparativa.

A literatura em recomendação de exercícios organiza-se em duas vertentes principais. A primeira concentra-se na sofisticação do modelo de diagnóstico do aluno, com a estrutura curricular em papel secundário: o KCP-ER (Wu et al., 2020) combina LSTM+DKT com recozimento simulado para diversidade; o NeuralCD-NeuMF (Y. Cheng et al., 2021) integra diagnóstico cognitivo neural a fatoração de matrizes; Ma et al. (2022) representam a maestria por conjuntos neutrosóficos (entendimento, não entendimento, incerteza); o NR4DER (X. Cheng et al., 2025) enfrenta cauda longa e diversidade via mLSTM e re-ranqueamento neural; o DKT-MD (Zhong, 2025) refina recomendações do DKT por dificuldade/maestria e propaga-as via grafo bipartido exercício-conceito; e o ExRec (Ozyurt et al., 2025) combina KT com Aprendizado por Reforço calibrado por representações semânticas via LLM.

A segunda vertente utiliza a representação estruturada do conhecimento como pilar central da política de recomendação: o ER-KTCP (Y. He et al., 2022) integra pré-requisitos a um KT baseado em atenção; o KG4Ex (Guan et al., 2023) e sua evolução KG4EER (Guan et al., 2025) constroem um grafo Aluno-Exercício-KC e aprendem *embeddings* (TransE, RotatE, entre outros) para recomendações explicáveis; o MLKT4Rec (Li et al., 2024) treina conjuntamente KT e recomendação sobre um grafo heterogêneo via GNNs; o IERF (Wu et al., 2025) emprega uma Rede de Informação Heterogênea para capturar a intenção do aluno via meta-caminhos; e o PKT (Annabi, 2023) aprende o próprio grafo de pré-requisitos como parâmetro do modelo, guiando um tutor baseado em ZDP.

Tabela 1: Síntese comparativa dos trabalhos relacionados.

Trabalho	Diagnóstico	Grafo	Esq.	Explicabilidade
Wu et al., 2020	DKT	Não	Não	Baixa
Y. Cheng et al., 2021	NeuralCDM	Não	Não	Média
Ma et al., 2022	DINA	Não	Não	Média
Y. He et al., 2022	Transformer	Sim	Não	Média
Guan et al., 2023	LSTM	Sim (KGE)	Sim	Alta
Guan et al., 2025	LSTM	Sim (KGE)	Sim	Alta
Wu et al., 2025	Forget Gate	Sim (HIN)	Sim	Média
X. Cheng et al., 2025	mLSTM	Não	Não	Baixa
Zhong, 2025	DKT-MD	Sim (bip.)	Não	Média
Ozyurt et al., 2025	KT+RL	Não	Não	Média
Li et al., 2024	Atenção temp.	Sim (GNN)	Implícito	Baixa
Annabi, 2023	PKT	Sim (aprendido)	Não	Alta
Este trabalho	LefoKT	Sim (ontológico)	Sim	Média

A Tabela 1 evidencia uma evolução geral de modelos puramente diagnósticos para arquiteturas híbridas que integram conhecimento estruturado, com crescente preocupação por explicabilidade. Contudo, uma limitação recorrente é que as métricas de avaliação empregadas (acurácia, NDCG, F1) possuem caráter de propósito geral e não capturam com precisão a efetividade pedagógica em contextos específicos. Este trabalho se diferencia por contextualizar o problema para o currículo brasileiro (a BNCC modelada como grafo de conhecimento ontológico construído via Protégé, e não apenas aprendido estatisticamente), por adotar um modelo de KT de estado da arte (LefoKT) que modela dinamicamente o esquecimento, por endereçar diretamente a lacuna de dados nacional via geração de um Dataset Sintético com simulador cognitivo próprio e algoritmo de imputação topológica, e por propor um protocolo de avaliação pedagógica com métricas personalizadas (Acurácia Pedagógica, Novidade Curricular e Diversidade de Sessão) submetidas a comparação estatística pareada contra uma ablação controlada, permitindo uma análise mais profunda do comportamento do sistema além da capacidade preditiva bruta.

3 Fundamentação

3.1 Sistemas de Recomendação e sua Aplicação Educacional

Sistemas de Recomendação (RS) filtram informação para prever a preferência de um usuário por um conjunto de itens, a partir de dados explícitos ou implícitos (Bobadilla et al., 2013). As abordagens clássicas – Filtragem Colaborativa (Koren et al., 2009; Liu & Hao, 2012; Sarwar et al., 2001) e recomendação Baseada em Conteúdo (Deldjoo et al., 2018; Van Dat et al., 2022) – enfrentam desafios como *cold-start*, esparsidade e superespecialização (Adomavicius & Tuzhilin, 2005), mitigados por arquiteturas híbridas ou baseadas em conhecimento estruturado (Guo, 2022). A aplicação ao domínio educacional (ERS) desloca o objetivo da predição

de preferência para a otimização pedagógica (Da Silva et al., 2023; Garcia-Martinez & Hamou-Lhadj, 2013), exigindo uma representação formal do currículo (Abu-Salih & Alotaibi, 2024) e métricas que vão além da acurácia preditiva pura (Erdt et al., 2015).

3.2 Representação de Conhecimento e Grafos Curriculares

A superação desses desafios requer uma base de conhecimento explícita, formalismo oferecido pelas ontologias (Chandrasekaran et al., 1999; Stancin et al., 2020). Os Grafos de Conhecimento (KGs), que evoluem desses princípios, enriquecem o aprendizado personalizado, o planejamento curricular e o mapeamento de conceitos (Abu-Salih & Alotaibi, 2024), sendo aplicados para estruturar domínios específicos (Yang et al., 2022) e recomendar trilhas de aprendizado (Hubert et al., 2022). No Brasil, o planejamento curricular é hierárquico e multinível: a BNCC (Brasil. Ministério da Educação, 2018) define os objetivos essenciais da educação básica, enquanto currículos estaduais, como o Currículo Base do Ensino Médio Catarinense (Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, 2020, 2021), traçam rotas de implementação. A área de Matemática e suas Tecnologias organiza-se como uma rede de Competências e Habilidades interconectadas, materializadas em Objetos de Conhecimento e Conceitos Estruturantes – estrutura que os grafos de conhecimento são naturalmente projetados para capturar.

3.3 Rastreamento de Conhecimento (*Knowledge Tracing*)

O KT modela, a partir do histórico de interações de um aluno, sua probabilidade de acerto em atividades futuras (Abdelrahman et al., 2023). As abordagens clássicas incluem o Rastreamento de Conhecimento Bayesiano (BKT) (Corbett & Anderson, 1994), que emprega Modelos Ocultos de Markov e atualiza via Teorema de Bayes a probabilidade de domínio $P(L_n | a_n)$ parametrizada por probabilidades de conhecimento prévio, transição, *slip* e *guess*; e a Teoria de Resposta ao Item (IRT), cujo modelo 1PL de Rasch (1993) estima

$$P(a_{ij} = 1 | \theta_i, b_j) = \frac{e^{(\theta_i - b_j)}}{1 + e^{(\theta_i - b_j)}}, \quad (1)$$

função logística da diferença entre a proficiência do aluno θ_i e a dificuldade do item b_j , estendida no modelo 4PL com parâmetros de discriminação, *guessing* e erro (Barton & Lord, 1981). Com o advento do aprendizado profundo, o Deep Knowledge Tracing (DKT) (Piech et al., 2015) introduziu LSTMs para modelar a sequência de interações, dando origem a famílias de modelos aumentados por memória (DKVMN (Zhang et al., 2017)), cientes de texto (EERNN (Su et al., 2018)), atencionais (SAKT (Pandey & Karypis, 2019), AKT (Ghosh et al., 2020), SAINT (Choi et al., 2020)) e baseados em Redes Neurais de Grafos (GKT (Nakagawa et al., 2019), HCGKT (Huang & Liu, 2025)). A modelagem do esquecimento, formalizada pela curva de Ebbinghaus (Ebbinghaus, 2013) como

$$tek_{i,j}^t = 1 - e^{-\frac{|t-t'|}{\theta}}, \quad (2)$$

é incorporada explicitamente por variáveis temporais (DKT-Forget (Nagatani & et al., 2019), SAINT+ (Shin et al., 2021)) ou implicitamente via atenção, em arquiteturas recentes como LefoKT (Bai & et al., 2025), RobustKT (Teng et al., 2025) e UKT (W. Cheng et al., 2025), que representa o conhecimento como distribuições de probabilidade. A área de rastreamento de conhecimento explicável (XKT) (Bai et al., 2024) busca tornar transparentes os diagnósticos de modelos que, por sua complexidade, operam como caixas-pretas.

3.4 Teorias Pedagógicas e a Zona de Desenvolvimento Proximal

As teorias pedagógicas que fundamentam sistemas adaptativos – Behaviorismo, Cognitivismo e Construtivismo (Rutto, 2017) – oferecem perspectivas complementares: o Behaviorismo (Skinner, 1953) sustenta o sequenciamento por maestria; o Cognitivismo (Neisser, 1967; Novak & Gowin, 1984) fundamenta a modelagem do currículo como grafo de conhecimento; e o Construtivismo, na vertente socioconstrutivista de Vygotsky (Vygotsky, 1978), introduz a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) – a distância entre o que o aluno resolve autonomamente e o que alcança com apoio, região em que o crescimento cognitivo e a aprendizagem são maximizados (Chaiklin, 2003). Sistemas como o E-gotsky (Vainas & et al., 2019) demonstram empiricamente que manter o aluno na ZDP reduz em até 17% o tempo para maestria e aumenta o engajamento, consolidando a ZDP como princípio orientador para o design da política de recomendação deste trabalho.

4 Metodologia

O problema central é formalizado sobre um conjunto de N alunos $\mathcal{S}$, K componentes de conhecimento (KCs) $\mathcal{K}$ e M questões $\mathcal{Q}$. O estado latente de um aluno s_l no instante t é $\mathbf{v}_{l,t} \in [0, 1]^K$. O problema decompõe-se em duas tarefas: (i) *diagnóstico*, uma função $\mathcal{F}_{KT} : X_{l,1:t-1} \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_{l,t}$ que estima a maestria a partir do histórico; e (ii) *política de recomendação* $\Pi^* : [0, 1]^K \rightarrow \mathcal{Q}$ que seleciona $q_t^* = \arg \max_{q_j \in \mathcal{Q}_{available}} U(q_j, \hat{\mathbf{v}}_{l,t})$, onde U é uma função de utilidade pedagógica. O *framework* segue quatro macro-fases, ilustradas na Figura 1.

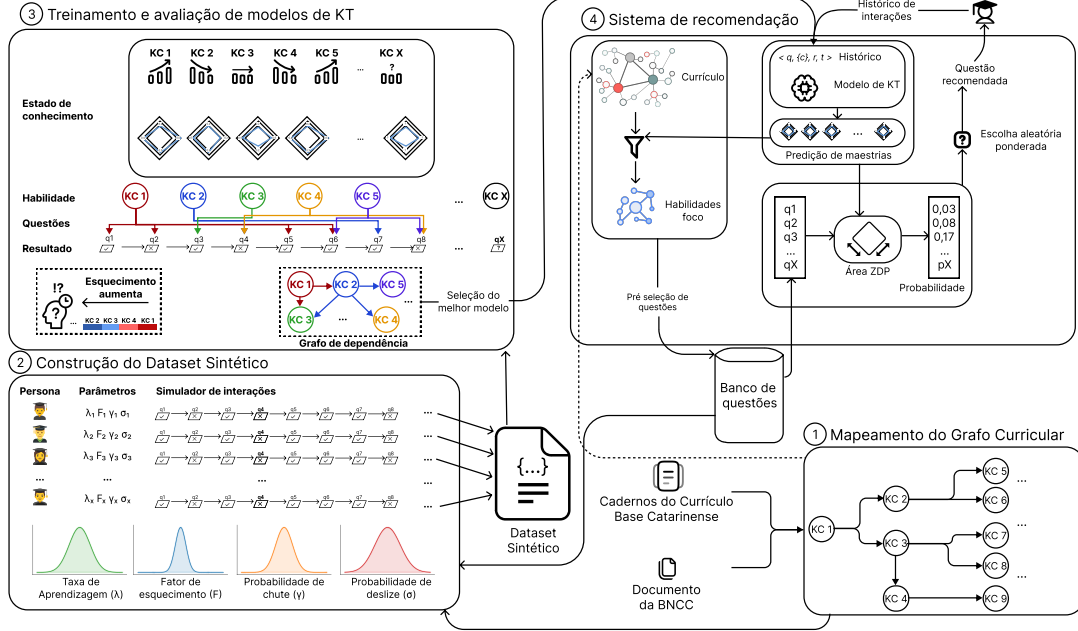


Figura 1: Visão geral do *framework*: (1) modelagem do grafo curricular; (2) simulação de interações e geração do Dataset Sintético; (3) treinamento de modelos de KT; (4) motor de recomendação ZDP.

4.1 Modelagem do Grafo de Conhecimento

A BNCC de Matemática e o Currículo Base Catarinense foram estruturados como um grafo acíclico dirigido (DAG) $\mathcal{G}$ de 82 KCs, relacionados por dependências diretas (*depends_on*) e mapeados às habilidades BNCC de origem. Cada KC k recebeu a tupla (d_k, Ω_k, Ψ_k) : dificuldade intrínseca, limiar de maestria e limiar de manutenção. Uma correlação inversa dificuldade-maestria foi imposta, com teto $\Omega_k \leq 0,90$ e piso $\Psi_k \geq 0,70$ para evitar problemas de convergência assintótica e ruído de *guessing*, respectivamente, e histerese $\nabla = \Omega_k - \Psi_k \approx 0,15$ (KCs intermediários) ou $\approx 0,10$ (extremos).

4.2 Mapeamento Semântico do Banco de Questões

Um banco de 987 questões (ENEM/UFSC) foi conectado aos 82 KCs por uma *pipeline* híbrida de PLN em quatro etapas: (1) enriquecimento semântico via geração de resolução *Chain-of-Thought*; (2) recuperação vetorial por *Bi-Encoder* (top- $N=150$ por similaridade de cosseno); (3) reordenamento por *Cross-Encoder* com *Adaptive Thresholding* ($\varpi \approx 0,45$); e (4) validação cega e anotação de dificuldade condicional $\delta_{j,k}$ por LLM. Uma curadoria pós-hoc removeu questões hiper-conjuntivas ($\tau_{max_kc} = 8$) e aplicou uma **Padronização Logit IRT** (projeção para *log-odds*, escalonamento *Z-score*, reprojeção sigmoideal) que recentra a distribuição de $\delta_{j,k}$ em 0,5, corrigindo o viés de ancoragem do LLM anotador.

4.3 Dataset Sintético via Simulação Cognitiva e ITMC

Diante da ausência de dados reais alinhados à BNCC, um simulador estocástico gera trajetórias de aprendizado de agentes virtuais s_l , cada um parametrizado por $\Theta_l = (\lambda_l, \phi_l, \gamma_l, \sigma_l)$ (taxa de aprendizagem, esquecimento, *guess*, *slip*), amostrados de distribuições calibradas (Beta, LogNormal, Normais truncadas). A

probabilidade de acerto integra a IRT em espaço *logit*:

$$P(\text{correct})_{l,j} = \gamma_l + (1 - \gamma_l - \sigma_l) \cdot P_{\text{holistic}}(q_j), \quad (3)$$

onde P_{holistic} é a média geométrica das probabilidades de domínio por KC exigido. O esquecimento é modelado por decaimento exponencial $v'_{l,t,k} = v_{l,t,k} \cdot e^{-\phi'_{l,k} \Delta t_k}$, com $\phi'_{l,k}$ amortecido pelo Efeito de Espaçamento a cada recuperação bem-sucedida. Uma política de progressão via busca em largura (BFS) sobre $\mathcal{G}$ gerencia a fila de aprendizagem, com prática intercalada sob frustração acumulada e um filtro curricular que define candidatos de aprendizagem ou revisão; a seleção final amostra proporcionalmente a um peso platô centrado no intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$ da ZDP latente.

Gargalos topológicos de esparsidade motivaram o algoritmo de **Imputação Topológica via Monte Carlo (ITMC)** (Algoritmo 1), que, a cada onda de simulação sobre uma população fixa de 800 agentes, identifica KCs causadores de inanição curricular (*starvation*) e insere nós de itens parametrizados fantasmas para satisfazer volume mínimo ($\eta_{\min} = 20$) e cobertura de quartis de dificuldade, até convergência ou o teto $W_{\max} = 5$.

Algorithm 1 Imputação Topológica via Monte Carlo (ITMC), resumido

Require: Grafo empírico $\mathcal{G}^{(0)}$, população fixa $\mathcal{S}$, $W_{\max} = 5$

```

1: for  $w = 0$  até  $W_{\max} - 1$  do
2:    $\mathcal{D}^{(w)}, \mathbf{E}_{\text{reason}} \leftarrow \text{SimulateMonteCarlo}(\mathcal{G}^{(w)}, \mathcal{S})$ 
3:   Identifica  $\mathcal{K}_{\text{starved}}^{(w)}$  (KCs causadores de inanição)
4:   for all  $k \in \mathcal{K}$  com déficit de volume ou de bins de dificuldade do
5:     Instancia nós parametrizados  $q_{\text{synth}}$  suprimindo o déficit
6:   end for
7:   if nenhum nó novo foi necessário then
8:     break (convergência topológica)
9:   end if
10:   $\mathcal{G}^{(w+1)} \leftarrow \mathcal{G}^{(w)} \cup \{q_{\text{synth}}\}$ 
11: end for
12: return Grafo estabilizado  $\mathcal{G}^*$ , Dataset Sintético  $D$ 

```

4.4 Motor de Recomendação sob a ZDP no Espaço Observável

O modelo de KT de referência $\mathcal{F}_{KT}^*$ é treinado para prever $P(\text{correct})$ diretamente no espaço *observável*, e não a maestria latente. Uma operação de *ghost pass* multi-âncora estima a maestria observável $\hat{p}_{\text{ghost}}(t, k)$ para cada KC k :

$$\hat{p}_{\text{ghost}}(t, k) = \frac{1}{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} \mathcal{F}_{KT}^*(\mathcal{H}_{l,t} \oplus q_j^{\text{anchor}(k)})[k], \quad (4)$$

consultando o modelo com $N_a=3$ questões reais monoconceituais cuja dificuldade condicional minimiza $|\delta_{q,k} - 0,5|$, mitigando a sensibilidade a uma âncora única sem introduzir viés sistemático. Os limiares pedagógicos são projetados ao espaço observável por uma transformação afim que incorpora as constantes populacionais de *guess* e *slip* médios ($\bar{\gamma}, \bar{\sigma}$):

$$\Omega_k^{\text{obs}} = \bar{\gamma} + (1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma}) \Omega_k, \quad \Psi_k^{\text{obs}} = \bar{\gamma} + (1 - \bar{\gamma} - \bar{\sigma}) \Psi_k. \quad (5)$$

Uma **calibração isotônica** pós-hoc g , ajustada por *Pool Adjacent Violators* sobre uma coorte de calibração usuário-disjunta da coorte de avaliação,

$$g = \arg \min_{h \text{ não-decrescente}, h(\cdot) \in [0,1]} \sum_{(x,y) \in \mathcal{D}_{\text{calib}}} (h(x) - y)^2, \quad (6)$$

corrige o viés sistemático residual entre $\hat{p}_{\text{ghost}}$ e a projeção afim da Equação 5, preservando por construção a ordem entre KCs e alunos. A cada ciclo de recomendação, o motor executa seis passos: (1) atualiza o estado oculto do KT a partir do histórico; (2) computa o vetor *ghost pass* calibrado $g(\hat{p}_{\text{ghost}}(t, \cdot))$; (3) promove ao conjunto de KCs dominados $\mathcal{K}_{\text{dom},l}$ todo componente cuja maestria observável cruza Ω_k^{obs} , via BFS sobre $\mathcal{G}^*$; (4)

define o KC-alvo k_{target} , priorizando revisão sobre qualquer pré-requisito histórico em risco de esquecimento ($\hat{p}_{ghost} < \Psi_k^{obs}$) e, na ausência de risco, o KC foco corrente; (5) projeta a banda ZDP ativa $[P_{\min}, P_{\max}]$ no espaço observável, com agressividade $\alpha_{learn} = 0,5$ em modo de aprendizagem e ancoragem no pico histórico $\hat{p}_{ghost_peak}$ em modo de revisão; e (6) seleciona a questão candidata q^* por amostragem ponderada, com peso platô

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{se } P_{\min} \leq \hat{P}(\text{correct})_{l,j} \leq P_{\max} \\ \exp\left(-\frac{(\hat{P}(\text{correct})_{l,j} - P_{\min/\max})^2}{2\sigma_w^2}\right) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (7)$$

com $\sigma_w = 0,15$, garantindo peso máximo dentro da ZDP e decaimento Gaussiano suave em suas bordas.

5 Protocolo Experimental

Benchmarking de KT. Sete arquiteturas foram avaliadas – DKT (Piech et al., 2015), DKT-Forget (Nagatani & et al., 2019), SAINT+ (Shin et al., 2021), LefoKT (Bai & et al., 2025), RobustKT (Teng et al., 2025), UKT (W. Cheng et al., 2025) e HCGKT (Huang & Liu, 2025) – sobre uma amostra de 500 estudantes do Dataset Sintético D , particionada por usuário (80%/20% treino/teste, mais uma coorte $\mathcal{S}_{eval}$ de 100 estudantes reservada para a avaliação de recomendação). O pré-processamento extrai janelas deslizantes de comprimento $T = 200$ interações com passo $S = 150$, e as sequências são enriquecidas por covariáveis temporais (*practice count*, *repetition gap*, *subject gap*, *interval time*, *answer time*). O treinamento minimiza $RMSE_{p^*}$ contra a probabilidade latente p^* (em vez de *Binary Cross-Entropy* contra o rótulo binário a_i), interpretada como destilação de *soft labels* da função geradora verdadeira – já que o regressor de Bayes que minimiza o erro quadrático esperado é precisamente $\mathbb{E}[a \mid \mathcal{H}] = p^*$. A otimização de hiperparâmetros usou TPE/Optuna (50 *trials*, validação cruzada de 3 partições, com poda por mediana estratificada por época); cada arquitetura foi retreinada com $N_{seeds} = 5$ sementes ($\mathcal{Z} = \{42, \dots, 46\}$), com seleção do modelo de referência pelo critério da **mediana** de $RMSE_{p^*}$ entre réplicas, em vez do extremo ou da média, evitando *cherry-picking* e reportando o desempenho de uma instância concreta registrada. Intervalos de confiança são obtidos por bootstrap agrupado por estudante ($B = 1000$, *clustered bootstrap*). As métricas secundárias de calibração incluem o *Expected Calibration Error* (ECE) e o par Brier Score / Brier Skill Score:

$$BS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - a_i)^2, \quad BSS = 1 - \frac{BS}{BS_{naive}}, \quad (8)$$

com $BS_{naive} = \bar{a}(1 - \bar{a})$ e um teto teórico $BSS_{max} = 1 - BS_{min}/BS_{naive}$ imposto pela variância irreduzível de Bernoulli do simulador, onde $BS_{min} = \mathbb{E}[p^*(1 - p^*)]$.

Avaliação da recomendação. A coorte $\mathcal{S}_{eval}$ (100 estudantes) foi particionada em $\mathcal{S}_{calib}$ (50, ajuste do calibrador) e $\mathcal{S}_{holdout}$ (50, mensuração), usuário-disjuntas, sobre a qual o motor é submetido a um *replay* dos históricos reais (subamostrados a cada $\tau_s=15$ passos). Duas políticas idênticas em toda a estrutura deliberativa, exceto na ponderação final, foram comparadas: $\mathcal{R}$ (função platô ZDP, Equação 7) e $\mathcal{R}_{base}$ (amostragem uniforme, $w_j \equiv 1$, sobre o mesmo conjunto de candidatas curricularmente filtrado). Três métricas foram definidas: **Acurácia Pedagógica** $AP(q^*) = 1 - dist_{ZDP}(q^*)$, o complemento da distância assinada da predição ao intervalo ZDP ativo; **Novidade Curricular** $\mathcal{N}_C(q^*) = |\mathcal{K}_{q^*} \setminus \mathcal{K}_{dom,l}|/|\mathcal{K}_{q^*}|$, a fração de KCs não dominados na questão recomendada; e **Diversidade de Sessão**

$$\mathcal{D}_S(W_N) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{m=j+1}^N \left(1 - \frac{\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_m}{\|\mathbf{q}_j\| \|\mathbf{q}_m\|}\right), \quad (9)$$

a dissimilaridade de cosseno média entre vetores binários de KC ativados em uma janela de $N=10$ recomendações. A hipótese central $H_a : \overline{AP}_{\mathcal{R}} > \overline{AP}_{\mathcal{R}_{base}}$ foi testada por teste t pareado, Wilcoxon de postos sinalizados e tamanho de efeito d_z de Cohen, com pareamento exato por estudante (mesma semente global para ambas as políticas) e $\alpha = 0,05$.

6 Resultados

6.1 Grafo Curricular e Mapeamento Semântico

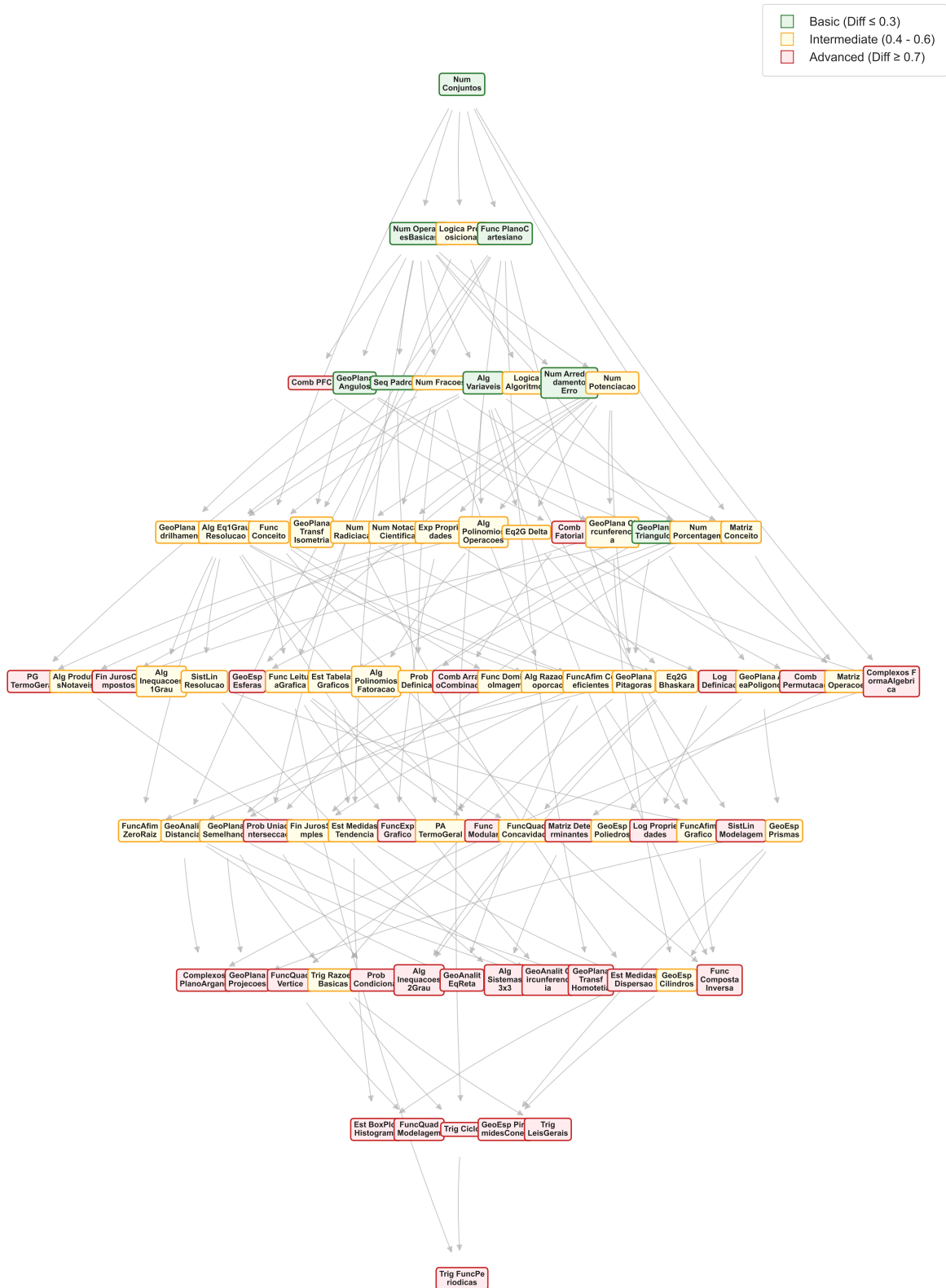


Figura 2: DAG curricular instanciado com $|\mathcal{K}| = 82$ KCs: topologia em funil, raiz única e progressão de dificuldade coerente com a profundidade.

O grafo instanciado (Figura 2) é um DAG acíclico com raiz única (Num_Conjuntos) e topologia em funil que se estende por aproximadamente nove níveis de profundidade, com progressão de dificuldade coerente com a profundidade topológica: dificuldade intrínseca $\bar{d} = 0,55$ (suporte $[0,2, 0,9]$), limiar de maestria $\bar{\Omega} = 0,87$ (suporte $[0,80, 0,90]$, concentrado no teto de *clipping*) e limiar de manutenção $\bar{\Psi} = 0,73$ (suporte $[0,70, 0,80]$, concentrado no piso), com histerese $\nabla = \Omega_k - \Psi_k$ predominantemente em $[0,10, 0,17]$, sem violações das regras de *clipping* projetadas.

O pipeline de mapeamento reteve 889 das 987 questões originais (9,9% de descarte pela validação cega Φ_V) em 3.219 arestas KC-questão, média de 3,6 KCs por questão. A distribuição de cobertura concentra-se saudavelmente entre 10 e 60 questões por KC, com um subconjunto reduzido abaixo do limiar crítico de 5 questões – exatamente os casos que motivam a imputação topológica via ITMC. A dificuldade condicional anotada pelo LLM exibiu padrão bimodal ($\delta \approx 0,1$ e $\delta \approx 0,45$), reflexo de um viés de ancoragem às faixas discretas do *prompt* de anotação. A Padronização Logit IRT recentrou a média de 0,311 para 0,498 – efetivamente 0,5 no espaço de probabilidade –, corrigindo o viés sem comprimir a variância ($\sigma: 0,205 \rightarrow 0,221$), com fronteiras operacionais finais $[0,145, 0,939]$ adequadas à ZDP.

6.2 Dataset Sintético

A simulação sobre 800 agentes produziu acurácia global de 62,89%, dentro da faixa 60–70% esperada para um ambiente calibrado pela ZDP. A Tabela 2 resume a distribuição efetiva dos arquétipos comportamentais na população simulada, próxima às metas projetadas (85% padrão, 3% por arquétipo de desvio).

Tabela 2: Distribuição de perfis comportamentais ($N = 800$ agentes).

Perfil	Proporção (%)
Padrão	85,75
Desatenção Crônica	3,38
Aprendizagem Massificada	3,25
Resposta Aleatória Rápida	3,25
Proficiência Oculta	2,38
Desengajamento em Revisão	2,00

Quatro verificações matemáticas independentes – limites assintóticos de *guess/slip*, densidade da ZDP em $\approx 0,70$, decaimento por esquecimento vs. resgate por espaçamento, e balanceamento estrutural do diferencial ZDP – confirmaram a fidelidade do simulador. Perfis com maior taxa de aprendizagem ($\lambda \approx 0,40$) completam o currículo em 600–700 interações e 100–150 dias letivos, contra 1.200–1.400 interações e mais de 300 dias para perfis de menor λ , que também concentram maior carga de revisão. O algoritmo ITMC restringiu evasões por *starvation* a apenas 7 dos 800 agentes, concentrando a imputação nos KCs de menor cobertura empírica (Trigonometria, Geometria Espacial e Estatística Avançada).

6.3 Benchmarking de Knowledge Tracing

Tabela 3: Desempenho mediano em $\mathcal{S}_{test}$ (5 sementes). $\star$ = modelo eleito.

Arquitetura	RMSE _{p*} ↓	BSS ↑	AUC ↑
$\star$ LefoKT	0,0875 $\pm$ 0,0036	0,1008	0,6840
HCGKT	0,0876 $\pm$ 0,0012	0,0967	0,6792
UKT	0,0877 $\pm$ 0,0005	0,1076	0,6936
RobustKT	0,0896 $\pm$ 0,0026	0,1007	0,6838
DKT	0,1111 $\pm$ 0,0003	0,0905	0,6757
DKT-Forget	0,1150 $\pm$ 0,0005	0,0816	0,6706
SAINT+	0,1386 $\pm$ 0,0061	0,0796	0,7148

A Tabela 3 mostra um grupo líder (LefoKT, HCGKT, UKT, RobustKT) estatisticamente indistinguível entre si e a poucos milésimos do teto teórico BSS_{max} = 0,1059 imposto pela variância irreduzível de Bernoulli do

simulador, indicando que a lacuna residual é majoritariamente estrutural. As RNNs clássicas (DKT, DKT-Forget) e o SAINT+ ficaram significativamente atrás na métrica primária, e o SAINT+ exibe divergência entre discriminação (maior AUC) e calibração (maior ECE), reforçando a escolha de RMSE_{p^*} como critério primário. LefoKT foi eleito modelo de referência ($\text{RMSE}_{p^*} = 0,08747$).

6.4 Avaliação do Motor de Recomendação

O calibrador isotônico reduziu o RMSE de alinhamento ao alvo pedagógico em 48,7% ($0,167 \rightarrow 0,086$). A Tabela 4 resume a comparação pareada entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{base}$ sobre $n = 50$ estudantes.

Tabela 4: Comparação pareada $\mathcal{R} - \mathcal{R}_{base}$ ($\alpha = 0,05$).

Métrica	$\bar{\Delta}$	$T(p)$	d_z
$\overline{AP}$	$+5,69 \times 10^{-4}$	1,071 (0,289)	+0,151
$\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]$	$+3,03 \times 10^{-3}$	0,746 (0,459)	+0,106
$\mathcal{D}_S$	$-1,30 \times 10^{-3}$	-0,118 (0,907)	-0,017

O sistema apresenta Acurácia Pedagógica elevada em valor absoluto ($\overline{AP}_{\mathcal{R}} = 0,9785$ vs. $\overline{AP}_{\mathcal{R}_{base}} = 0,9779$, sobre $n = 3.598$ recomendações), decomposta em 42,4% de acerto exato na ZDP e uma fração majoritária (54,9%) de subestimação de pequena magnitude (falha pelo lado pedagogicamente benigno, já que questões marginalmente mais difíceis ainda comportam ganho cognitivo), contra apenas 2,7% de superestimação – um viés assimétrico de razão $\approx 20:1$. A Novidade Curricular confirma os perfis esperados ($\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{learn} = 0,944$; $\mathbb{E}[\mathcal{N}_C]_{review} = 0,000$ exato, validando que o filtro de revisão opera estritamente sobre o fecho de pré-requisitos), e a Diversidade de Sessão mantém-se em regime moderado ($\approx 0,47$ para ambas as políticas), evidenciando ausência de efeitos colaterais da ponderação ZDP sobre novidade ou diversidade. A Hipótese 1 é, portanto, empiricamente sustentada. A Hipótese 2 exibe direção coerente com a previsão teórica, mas não alcança significância estatística sob $n = 50$ ($T = 1,07$, $p = 0,29$; Wilcoxon $W = 557$, $p = 0,44$); a potência necessária para detectar $d_z = 0,15$ a 80% exigiria $n \approx 350$ pares, uma ordem de magnitude acima do adotado, configurando ausência de evidência conclusiva contra H_0 , e não sua confirmação.

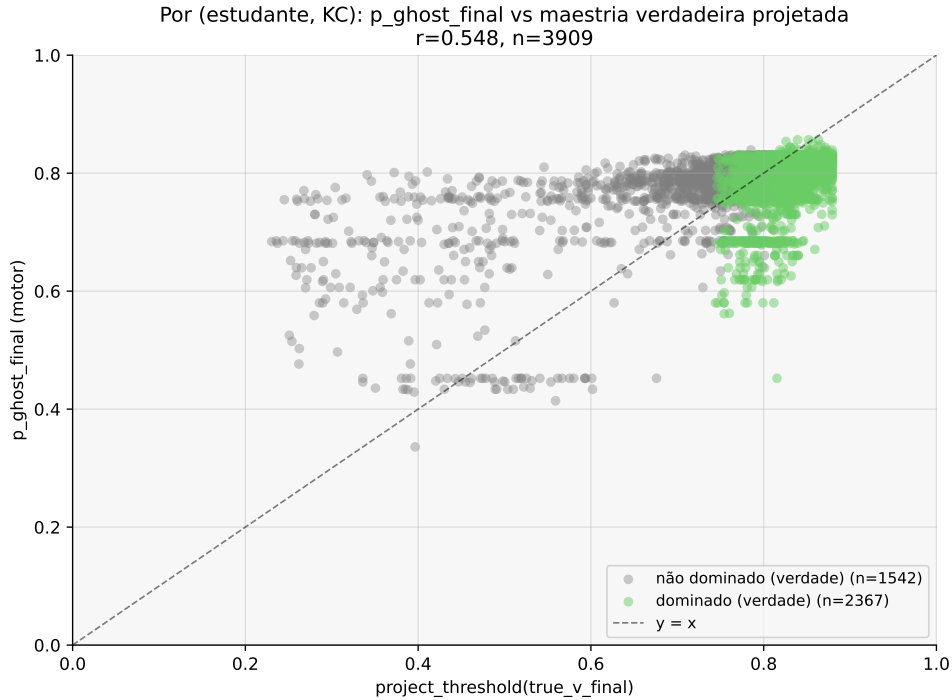


Figura 3: Alinhamento entre a *probe ghost-pass* calibrada e a projeção afim da maestria estrutural verdadeira, por par (estudante, KC), estratificado pelo status real de domínio.

Diagnósticos complementares (Figura 3) revelam duas limitações estruturais que qualificam a leitura dos resultados absolutos. A primeira é uma *compressão de range dinâmico* do componente KT: a saída calibrada concentra-se em $[0,65, 0,82]$ independentemente da maestria estrutural real, superestimando KCs ainda não consolidados (nuvem de não dominados centrada acima da diagonal $y = x$) e subestimando KCs efetivamente promovidos (nuvem de dominados abaixo da diagonal), com correlação $r = 0,548$ no nível (estudante, KC) e $r = 0,705$ quando agregada por KC. A segunda é um *gargalo de promoção curricular* imposto pelo passo BFS: o motor opera com foco em apenas 32 dos 82 KCs do grafo, dos quais somente 4 atravessam Ω_k^{obs} em valor médio, reduzindo a razão de conclusão formal de 28% dos alunos (verdade do simulador) para 8% (motor) – um *gap* de $\approx 71\%$ da conclusão real não formalizada, atribuível à restrição de que a promoção de um KC filho exige a promoção completa e prévia de todos os seus pais topológicos.

7 Conclusão

Este trabalho propôs e validou um *framework* metodológico de ponta a ponta para sistemas de tutoria adaptativa alinhados a currículos formais, cobrindo a modelagem do grafo de conhecimento, o mapeamento semântico do banco de questões, a geração de um Dataset Sintético via simulação cognitiva e imputação topológica (ITMC), o *benchmarking* de modelos de KT e a operacionalização de um motor de recomendação ZDP no espaço observável. As contribuições concretas são:

1. um **grafo de conhecimento ontológico** instanciando 82 KCs da BNCC de matemática, com topologia em funil verificada e parâmetros pedagógicos aderentes às regras de *clipping* e histerese projetadas;
2. um **pipeline híbrido de mapeamento semântico** em quatro etapas, complementado por curadoria pós-hoc, produzindo um banco operacional de 889 questões em 3.219 arestas KC-questão;
3. o **algoritmo ITMC**, que mitiga gargalos topológicos de inanição curricular por imputação iterativa de nós parametrizados;
4. um **benchmarking** de sete arquiteturas de KT sob protocolo usuário-disjunto, elegendo LefoKT como modelo de referência com desempenho próximo do teto teórico imposto pela variância irreduzível do simulador;
5. um **motor de recomendação ZDP** no espaço observável, com *ghost-pass* multi-âncora e calibração isotônica (redução de 48,7% no erro de alinhamento); e
6. um **protocolo de avaliação pedagógica** pareado por estudante contra uma ablação rigorosamente controlada.

A Hipótese 1 (viabilidade do *framework*) foi empiricamente sustentada pelos valores absolutos das três métricas pedagógicas e pela conformidade em todas as dimensões esperadas. A Hipótese 2 (efeito diferencial da ZDP) apontou na direção teórica prevista sem alcançar significância estatística no tamanho amostral adotado, uma limitação atribuída a restrições de *hardware* disponíveis durante a execução do protocolo experimental (sete arquiteturas $\times$ cinco sementes $\times$ 50 *trials* de otimização bayesiana), e não a uma falha metodológica.

Limitações. Cinco limitações estruturais qualificam a leitura dos resultados: (i) a **restrição amostral**, que exigiria $n \approx 350$ pares para detectar o efeito $d_z = 0,15$ com potência adequada; (ii) a **compressão de range dinâmico** do componente KT, não corrigível ponto a ponto por transformação monotônica; (iii) o **gargalo de promoção via BFS**, que restringe o alcance efetivo do motor a 32 dos 82 KCs; (iv) a **aproximação por constantes populacionais** ($\bar{\gamma}, \bar{\sigma}$) em substituição aos parâmetros agente-específicos; e (v) a **avaliação restrita a replay sintético**, sem re-execução *closed-loop* do simulador nem estudo em coorte humana. Segundo a taxonomia clássica de ameaças à validade, (i) e (v) afetam a validade interna e a validade da conclusão estatística; a instânciação única sobre um só currículo afeta a validade externa; e (ii)/(iv) comprometem a validade de construto, ao distanciarem o construto teórico (maestria latente) de sua operacionalização observável.

Trabalhos futuros. As limitações elencadas delineiam vetores concretos de evolução: ampliação amostral para regime estatisticamente conclusivo sobre a Hipótese 2; calibradores não-monotônicos ou funções de perda que penalizem explicitamente a contração da distribuição preditiva em torno da média marginal; estimação adaptativa por aluno dos parâmetros de *guess/slip* via *fine-tuning* hierárquico ou inferência bayesiana; relaxamento controlado da condição estrita de pais-dominados no passo BFS; re-instanciação do *framework* sobre outros domínios da BNCC e sobre currículos formais não-BNCC, validando empiricamente a generalização hoje argumentada apenas em nível arquitetural; geração efetiva de enunciados para os nós sintéticos do ITMC via LLMs condicionados pela especificação matemática do algoritmo; avaliação *closed-loop* com re-execução do simulador cognitivo sobre as trajetórias recomendadas; estudo piloto em coorte humana; destilação de conhecimento sintético-para-real (*teacher-student* com *soft labels*) para mitigar *cold-start* em plataformas com pouca história de interações reais; e implementação de mecanismos explícitos de rastreamento de conhecimento explicável (XKT) sobre o motor.

Em síntese, este trabalho entrega uma arquitetura reproduzível, um protocolo de avaliação pedagógica rigoroso e um diagnóstico transparente das limitações estruturais, elementos que fundamentam a continuidade da pesquisa em sistemas de tutoria adaptativa alinhados a currículos formais.

Referências

- Abdelrahman, G., Wang, Q., & Nunes, B. (2023). Knowledge tracing: A survey. *ACM Computing Surveys*, 55(11), 1–37.
- Abu-Salih, B., & Alotaibi, S. (2024). A systematic literature review of knowledge graph construction and application in education. *Heliyon*, 10(3).
- Adomavicius, G., & Tuzhilin, A. (2005). Toward the next generation of recommender systems: a survey of the state-of-the-art and possible extensions. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 17(6), 734–749.
- Annabi, L. (2023). Prerequisite Structure Discovery in Intelligent Tutoring Systems. *Proceedings of the 2023 IEEE International Conference on Development and Learning (ICDL)*, 176–181.
- Bai, Y., & et al. (2025). Rethinking and Improving Student Learning and Forgetting Processes for Attention Based Knowledge Tracing Models. *Proceedings of the 39th Annual AAAI Conference on Artificial Intelligence*.
- Bai, Y., et al. (2024). A survey of explainable knowledge tracing.
- Barton, M. A., & Lord, F. M. (1981). *An upper asymptote for the three-parameter logistic item-response model* (rel. técn. N. i–8). ETS Research Report Series.
- Bobadilla, J., Ortega, F., Hernando, A., & Gutiérrez, A. (2013). Recommender systems survey. *Knowledge-Based Systems*, 46, 109–132.
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Recuperado 16 agosto 2025, de https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf
- Chaiklin, S. (2003). The zone of proximal development in Vygotsky’s analysis of learning and instruction. Em *Vygotsky’s Educational Theory in Cultural Context* (pp. 39–64).
- Chandrasekaran, B., Josephson, J. R., & Benjamins, V. R. (1999). What are ontologies and why do we need them? *IEEE Intelligent Systems and their Applications*, 14(1), 20–26.
- Cheng, W., et al. (2025). Uncertainty-aware Knowledge Tracing. *Proceedings of the 39th Annual AAAI Conference on Artificial Intelligence*.
- Cheng, X., Zhou, X., Fang, L., He, C., Zhou, Y., Luo, W., Guan, Q., et al. (2025). NR4DER: Neural Re-ranking for Diversified Exercise Recommendation. *Proceedings of the 48th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, 1738–1747.
- Cheng, Y., Li, M., Chen, H., Cai, Y., Sun, H., Zou, H., & Zhang, G. (2021). Exercise recommendation method combining NeuralCD and NeuMF models. *2021 7th Annual International Conference on Network and Information Systems for Computers (ICNISC)*, 646–651.
- Choi, Y., & et al. (2020). Ednet: A large-scale hierarchical dataset in education. *International Conference on Artificial Intelligence in Education*.

- Choi, Y., Lee, Y., Cho, J., Baek, J., Kim, B., Cha, Y., Shin, D., Bae, C., & Heo, J. (2020). Towards an appropriate query, key, and value computation for knowledge tracing. *Proceedings of the Seventh ACM Conference on Learning @ Scale (L@S)*, 341–344.
- Corbett, A. T., & Anderson, J. R. (1994). Knowledge tracing: Modeling the acquisition of procedural knowledge. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 4(4), 253–278.
- Da Silva, F. L., Slodkowski, B. K., Da Silva, K. K. A., & Cazella, S. C. (2023). A systematic literature review on educational recommender systems for teaching and learning: research trends, limitations and opportunities. *Education and Information Technologies*, 28(3), 3289–3328.
- Deldjoo, Y., Elahi, M., Quadrana, M., & Cremonesi, P. (2018). Using visual features based on MPEG-7 and deep learning for movie recommendation. *Int. J. Multimedia Inf. Retrieval*, 7(4), 207–219.
- Ebbinghaus, H. (2013). Memory: A contribution to experimental psychology. *Annals of Neurosciences*, 20, 155.
- Erdt, M., Fernández, A., & Rensing, C. (2015). Evaluating recommender systems for technology-enhanced learning: A quantitative survey. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 8(4), 326–344. <https://doi.org/10.1109/TLT.2015.2438867>
- Feng, M., Heffernan, N., & Koedinger, K. (2009). Addressing the assessment challenge with an online system that tutors as it assesses. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 19, 243–266.
- Garcia-Martinez, S., & Hamou-Lhadj, A. (2013). Educational recommender systems: A pedagogical-focused perspective. *Multimedia Services in Intelligent Environments*, 25, 113–124. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00375-7_8
- Ghosh, A., Heffernan, N., & Lan, A. S. (2020). Context-aware attentive knowledge tracing. *Proceedings of the 26th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery & Data Mining*, 2330–2339.
- Guan, Q., Cheng, X., Xiao, F., Li, Z., He, C., Fang, L., & Luo, W. (2025). Explainable exercise recommendation with knowledge graph. *Neural Networks*, 183, 106954.
- Guan, Q., Xiao, F., Cheng, X., Fang, L., Chen, Z., Chen, G., & Luo, W. (2023). KG4Ex: An explainable knowledge graph-based approach for exercise recommendation. *Proceedings of the 32nd ACM International Conference on Information and Knowledge Management*, 597–607.
- Guo, Q. (2022). A survey on knowledge graph-based recommender systems. *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, 34(8), 3549–3568.
- He, Y., Wang, H., Pan, Y., Zhou, Y., & Sun, G. (2022). Exercise recommendation method based on knowledge tracing and concept prerequisite relations. *CCF Transactions on Pervasive Computing and Interaction*, 4(4), 452–464.
- He, Z. Y., Wang, C. D., Wang, J., Lai, J. H., & Tang, Y. (2024). Community enhanced knowledge graph for recommendation. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 1–14.
- Huang, Z., & Liu, Z. (2025). HCGKT: Hierarchical Contrastive Graph Knowledge Tracing with Multi-level Feature Learning. *International Conference on Artificial Intelligence in Education*, xxx.
- Hubert, N., Brun, A., & Monticolo, D. (2022). New ontology and knowledge graph for university curriculum recommendation. *Proceedings of the 21st International Semantic Web Conference (ISWC 2022)*.
- Kitchenham, B. (2004). *Procedures for Performing Systematic Reviews* (rel. técn. TR/SE-0401). Keele University. Keele, UK.
- Koren, Y., Bell, R., & Volinsky, C. (2009). Matrix factorization techniques for recommender systems. *Computer*, 42(8), 30–37.
- Li, S., Liu, X., Tang, X., Chen, X., & Pu, J. (2024). MLKT4Rec: Enhancing Exercise Recommendation Through Multitask Learning With Knowledge Tracing. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*.
- Liu, G., & Hao, T. (2012). User-based question recommendation for question answering system. *International Journal of Information and Education Technology*, 2(3), 243.
- Ma, H., Huang, Z., Tang, W., & Zhang, X. (2022). Exercise recommendation based on cognitive diagnosis and neutrosophic set. *2022 IEEE 25th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design (CSCWD)*, 1467–1472.
- Maria, S. A. A., Cazella, S. C., & Behar, P. A. (2019). Sistemas de Recomendação: conceitos e técnicas de aplicação. Em *Recomendação Pedagógica em Educação a Distância* (pp. 19–47). Penso.
- Nagatani, K., & et al. (2019). Augmenting knowledge tracing by considering forgetting behavior. *The World Wide Web Conference*.

- Nakagawa, H., Iwasawa, Y., & Matsuo, Y. (2019). Graph-based knowledge tracing: Modeling student proficiency using graph neural network. *Proceedings of the IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence (WIC)*, 156–163.
- Neisser, U. (1967). *Cognitive Psychology*. Appleton-Century-Crofts.
- Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984). *Learning How to Learn*. Cambridge University Press.
- Ozyurt, Y., Almaci, T., Feuerriegel, S., & Sachan, M. (2025). Personalized Exercise Recommendation with Semantically-Grounded Knowledge Tracing. *arXiv preprint arXiv:2507.11060*.
- Pandey, S., & Karypis, G. (2019). A self attentive model for knowledge tracing. *Proceedings of the 12th International Conference on Educational Data Mining (EDM)*.
- Pardos, Z. A., Baker, R. S., San Pedro, M. O., Gowda, S. M., & Gowda, S. M. (2014). Affective states and state tests: Investigating how affect and engagement during the school year predict end-of-year learning outcomes. *Journal of Learning Analytics*, 1(1), 107–128.
- Piech, C., Bassen, J., Huang, J., Ganguli, S., Sahami, M., Guibas, L. J., & Sohl-Dickstein, J. (2015). Deep knowledge tracing. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 505–513.
- Rasch, G. (1993). *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*. ERIC.
- Ribeiro, M. T., Singh, S., & Guestrin, C. (2016). "Why Should I Trust You?": Explaining the Predictions of Any Classifier. *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 1135–1144.
- Rutto, D. K. (2017). Pedagogical theories. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 8(6), 2025–2030.
- Sarwar, B. M., Karypis, G., Konstan, J. A., & Riedl, J. (2001). Item-based collaborative filtering recommendation algorithms. *Proceedings of the 10th international conference on World Wide Web*, 285–295.
- Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina. (2020). *Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense: Caderno 1 - Disposições Gerais*. Florianópolis.
- Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina. (2021). *Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense: Caderno 2 - Formação Geral Básica*. Florianópolis.
- Shin, D., Shim, Y., Yu, H., Lee, S., Kim, B., & Choi, Y. (2021). SAINT+: Integrating temporal features for EdNet correctness prediction. *Proceedings of the 11th International Learning Analytics and Knowledge Conference (LAK)*, 490–496.
- Skinner, B. F. (1953). *Science and Human Behavior*. Macmillan.
- Stamper, J., Niculescu-Mizil, A., Ritter, S., Gordon, G. J., & Koedinger, K. R. (2010). Algebra I 2008–2009. Challenge data set from KDD Cup 2010 educational data mining challenge [Accessed: 2025-05-24].
- Stancin, K., Posic, P., & Jaksic, D. (2020). Ontologies in education—state of the art. *Education and Information Technologies*, 25(6), 5301–5320.
- Su, Y., Liu, Q., Liu, Q., Huang, Z., Yin, Y., Chen, E., Ding, C. H. Q., Wei, S., & Hu, G. (2018). Exercise-enhanced sequential modeling for student performance prediction. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2435–2443.
- Teng, G., et al. (2025). Enhancing Knowledge Tracing through Decoupling Cognitive Pattern from Error-Prone Data. *Proceedings of the ACM Web Conference 2025 (WWW '25)*.
- Vainas, O., & et al. (2019). E-gotsky: sequencing content using the zone of proximal development. *arXiv preprint arXiv:1904.12268*.
- Van Dat, N., Van Toan, P., & Thanh, T. M. (2022). Solving distribution problems in content-based recommendation system with Gaussian mixture model. *Appl. Intell.*, 52(2), 1602–1614.
- Verbert, K., Manouselis, N., Ochoa, X., Wolpers, M., Drachsler, H., Bosnic, I., & Duval, E. (2012). Context-aware recommender systems for learning: A survey and future challenges. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 5(4), 318–335. <https://doi.org/10.1109/TLT.2012.11>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman, Ed.). Harvard University Press.
- Wu, Z., Li, M., Tang, Y., & Liang, Q. (2020). Exercise recommendation based on knowledge concept prediction. *Knowledge-Based Systems*, 210, 106481.
- Wu, Z., Zhang, J., Liu, M., Huang, X., & Yang, Q. (2025). Intention-aware exercise recommendation enhanced by deep forgetting modeling for e-learning. *Discover Computing*, 28(1), 1–25.

- Yang, Y., Zhu, Y., & Jian, P. (2022). Application of knowledge graph in water conservancy education resource organization under the background of big data. *Electronics*, 11(23), 3913.
- Zhang, J., Shi, X., King, I., & Yeung, D.-Y. (2017). Dynamic key-value memory networks for knowledge tracing. *Proceedings of the 26th International Conference on World Wide Web (WWW)*, 765–774.
- Zhong, Z. (2025). Personalized Exercise Recommendation Method Integrating Knowledge Tracing and Material Diffusion. *Proceedings of the 2025 5th International Conference on Neural Networks, Information and Communication Engineering (NNICE)*, 1493–1496.

Apêndice C

Repositório do Código-Fonte

O código-fonte completo da implementação deste trabalho, incluindo a modelagem do grafo de conhecimento, a *pipeline* de mapeamento semântico, o simulador cognitivo e o algoritmo ITMC, o treinamento e *benchmarking* dos modelos de *Knowledge Tracing*, e o motor de recomendação adaptativa, está disponível publicamente no seguinte repositório:

<https://codigos.ufsc.br/mateus.slezinsky/tcc>