



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Daniel Costa Porto

**Aplicação de métodos multiescala  $FE^2$  e de homogeneização de 1ª ordem em  
estruturas reticuladas fabricadas por FLP-L**

Florianópolis  
2025

Daniel Costa Porto

**Aplicação de métodos multiescala FE<sup>2</sup> e de homogeneização de 1<sup>a</sup> ordem em estruturas reticuladas fabricadas por FLP-L**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador(a): Prof. Adriano Fagali de Souza, Dr.  
Coorientador(a): Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.

Florianópolis

2025

Porto, Daniel Costa

Aplicação de métodos multiescala  $FE^2$  e de  
homogeneização de 1ª ordem em estruturas reticuladas  
fabricadas por FLP-L / Daniel Costa Porto ; orientador,  
Adriano Fagali de Souza, coorientador, Eduardo Alberto  
Fancello, 2025.

105 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Homogeneização numérica. 3.  
Estruturas reticuladas. 4. Função em leito de pó a laser.  
5. Condições de contorno. I. de Souza, Adriano Fagali. II.  
Fancello, Eduardo Alberto. III. Universidade Federal de  
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica. IV. Título.

Daniel Costa Porto

**Aplicação de métodos multiescala FE<sup>2</sup> e de homogeneização de 1ª ordem em estruturas reticuladas fabricadas por FLP-L**

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado, em 15 de dezembro de 2025, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Milton Pereira, Dr.

Instituição UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

Felipe Marin, Dr.

Instituição UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Aurélio da Costa Sabino Netto, Dr.

Instituição IFSC – Instituto Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Insira neste espaço a  
assinatura digital

Prof. Dr. Armando Albertazzi

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Insira neste espaço a  
assinatura digital

Prof. Adriano Fagali de Souza, Dr.

Orientador

Florianópolis, 15 de dezembro de 2025.

Dedico este trabalho a minha família, agradeço o incentivo e auxílio durante toda jornada.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, principalmente, aos meus pais por proporcionarem e incentivarem a minha caminhada acadêmica em todos os momentos.

Grato pelo suporte dado pela minha irmã Deyse Costa Porto nas dificuldades pessoais durante o período de formação.

Agradeço especialmente ao professor Adriano Fagali de Souza pela atenção e dedicação no desenvolvimento deste trabalho e ao professor Eduardo Alberto Fancello pelos conhecimentos valiosos compartilhados em aula e reuniões.

Agradeço também aos amigos do laboratório GPCAM, por todo conhecimento, experiência e momentos de descontração compartilhados nos bastidores deste trabalho.

Por fim, agradeço o suporte técnico das instituições UFSC, CAPES, CNPQ e à Mexichem Indústria de Transformação Plástica Ltda pelo aporte financeiro.

Se algo pode dar errado, dará.  
(Edward Murphy Jr.)

## RESUMO

Este trabalho apresenta um procedimento multiescala para a modelagem mecânica de estruturas reticuladas fabricadas por fusão em leito de pó a laser (FLP-L), combinando homogeneização numérica de 1ª ordem e aplicação do método FE<sup>2</sup> offline. Inicialmente, o aço inoxidável 316L, produzido por FLP-L, foi caracterizado por ensaios de tração instrumentados, permitindo quantificar a anisotropia induzida pelo processo aditivo: verificou-se comportamento praticamente isotrópico no plano horizontal e redução significativa de rigidez na direção vertical de construção. A partir desses dados foram determinados, de forma integrada, os módulos de elasticidade, coeficientes de Poisson e módulos de cisalhamento necessários para a definição do modelo constitutivo anisotrópico coerente com o material fabricado (transversalmente isotrópico). Na etapa numérica, células unitárias periódicas das topologias CBC e CBCz foram construídas, malhadas de forma compatível e submetidas a seis casos canônicos sob condições de contorno KUBC, TUBC e PBC. A partir dos tensores médios de tensão e deformação obtidos em cada caso, calcularam-se os tensores de rigidez homogeneizados, evidenciando forte dependência das propriedades equivalentes com o parâmetro geométrico  $r/l$  e ganhos expressivos de rigidez na direção de reforço da topologia CBCz. Observou-se também o comportamento clássico dos limites: KUBC produzindo maiores rigidezes, TUBC fornecendo limites inferiores e PBC apresentando valores intermediários. A etapa de verificação FE<sup>2</sup> offline demonstrou elevada capacidade preditiva da abordagem homogeneizada. Para o nível geométrico mais refinado, registrou-se erro relativo inferior a 2% no deslocamento global e entre 5% e 8% na tensão  $\sigma_{11}$  recuperada em pontos internos ao domínio quando aplicada a condição PBC. Além disso, verificou-se redução substancial do custo computacional, alcançando aproximadamente 99,6% em relação ao modelo totalmente discreto. Os resultados confirmam que a metodologia desenvolvida fornece representação contínua eficiente e precisa de estruturas reticuladas, ampliando significativamente o potencial de aplicação em componentes solicitados mecanicamente, como insertos e regiões internas de moldes de injeção fabricados por FLP-L.

**Palavras-chave:** Homogeneização numérica, Métodos Multiescalas, Condições de contorno, Estruturas reticuladas, Manufatura aditiva, Fusão em leito de pó a laser.

## ABSTRACT

This work presents a multiscale procedure for the mechanical modeling of lattice structures manufactured by laser powder bed fusion (LPBF), combining first-order numerical homogenization with an offline  $FE^2$  framework. Initially, LPBF 316L stainless steel was characterized through instrumented tensile tests, enabling the quantification of process-induced anisotropy: the material exhibited an almost isotropic response within the horizontal plane and a significant reduction in stiffness along the build (vertical) direction. Based on these results, the elastic moduli, Poisson's ratios, and shear moduli required for defining a constitutive model consistent with the manufactured material (transversely isotropic) were determined. In the numerical stage, periodic representative unit cells of CBC and CBCz topologies were constructed, meshed in a compatible manner, and subjected to six canonical loading cases under KUBC, TUBC, and PBC boundary conditions. From the average stress and strain tensors obtained in each case, the homogenized stiffness tensors were computed, revealing a strong dependence of the equivalent mechanical properties on the geometric parameter  $r/l$ , as well as significant stiffness enhancement in the reinforced direction of the CBCz topology. The classical bounding behavior was also observed: KUBC yielding upper stiffness limits, TUBC representing lower bounds, and PBC consistently providing intermediate values. The  $FE^2$  offline verification confirmed the high predictive capability of the homogenized models. For the finest geometric level, the relative error remained below 2% in global displacement and between 5% and 8% in the recovered internal stress  $\sigma_{11}$  when using PBC. Furthermore, a substantial reduction in computational cost was achieved—approximately 99.6% compared to the fully discrete lattice model. These results demonstrate that the proposed methodology provides an efficient and accurate continuous representation of lattice structures, substantially expanding their applicability in mechanically loaded components such as inserts and internal regions of injection mold tooling manufactured by LPBF.

**Keywords:** Numerical homogenization, Multiscale methods, Boundary conditions, Lattice structures, Additive manufacturing, Laser powder bed fusion.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 - Classificação dos métodos de manufatura aditiva (MA).....                                                                                                                                                         | 17 |
| Figura 2 - Molde de injeção com estruturas reticuladas.....                                                                                                                                                                  | 18 |
| Figura 3 - Descrição do processo de FLP-L.....                                                                                                                                                                               | 23 |
| Figura 4 - Tipos de estruturas reticuladas.....                                                                                                                                                                              | 25 |
| Figura 5 - Aproximação do contínuo.....                                                                                                                                                                                      | 26 |
| Figura 6 - Meio contínuo estrutura reticuladas.....                                                                                                                                                                          | 27 |
| Figura 7 - Representação esquemática de um corpo contínuo B nas configurações indeformada (à esquerda) e deformada (à direita), destacando um ponto material P e uma curva material transportada pelo movimento $\chi$ ..... | 28 |
| Figura 8 - Termos não nulos da matriz de elasticidade na notação de Voigt.....                                                                                                                                               | 32 |
| Figura 9 - Suposição de Taylor (Voigt).....                                                                                                                                                                                  | 41 |
| Figura 10 - Condição de contorno de deslocamento uniforme (KUBC).....                                                                                                                                                        | 42 |
| Figura 11 - Deslocamentos periodicos e Tensões anti-periodicas.....                                                                                                                                                          | 43 |
| Figura 12 - Condição de contorno TUBC.....                                                                                                                                                                                   | 44 |
| Figura 13 - Método de abordagem FE <sup>2</sup> classica.....                                                                                                                                                                | 45 |
| Figura 14- Método de abordagem FE <sup>2</sup> <i>offline</i> .....                                                                                                                                                          | 45 |
| Figura 15 - Diagrama do processo.....                                                                                                                                                                                        | 47 |
| Figura 16 - Preparação das amostras.....                                                                                                                                                                                     | 49 |
| Figura 17 - Agie Charmilles +GF+ eletroerosão a fio.....                                                                                                                                                                     | 50 |
| Figura 18 - Posicionamento dos SG na amostra.....                                                                                                                                                                            | 51 |
| Figura 19 - a) Esquema eletronico do sistema de aquisição de dados. b) Sistema real.....                                                                                                                                     | 52 |
| Figura 20 - Ensaio de tração disposição dos equipamentos.....                                                                                                                                                                | 53 |
| Figura 21 - Diagrama Aboradagem Numérica.....                                                                                                                                                                                | 57 |
| Figura 22 – a) Criação de Instâncias Geométrica. b) Geração de malha C3D4. c) Espelhamento Sequencial da malha Periódica.....                                                                                                | 58 |
| Figura 23 - Identificação e Classificação dos Nós Periódicos.....                                                                                                                                                            | 59 |
| Figura 24 - Malha Periódica e Nã-Peródica.....                                                                                                                                                                               | 60 |
| Figura 25 - Exemplo de implementação das equações canônicas periódicas no Abaqus.....                                                                                                                                        | 62 |
| Figura 26 - Exemplo de Condição de Contorno KUBC.....                                                                                                                                                                        | 63 |
| Figura 27 - Relação de superficies TUBC.....                                                                                                                                                                                 | 64 |
| Figura 28 - Caso Canônicos de Deformação.....                                                                                                                                                                                | 66 |
| Figura 29 - Pseudo-código condições de contorno + casos canônicos.....                                                                                                                                                       | 67 |

|                                                                                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 30 - Quantidade de simulações realizadas. ....                                                                                                                                                   | 67 |
| Figura 31 - Placas discretas e homogêneas. ....                                                                                                                                                         | 71 |
| Figura 32 - Discreto x Homogêneo. ....                                                                                                                                                                  | 72 |
| Figura 33 - Pontos da viga para análise. ....                                                                                                                                                           | 73 |
| Figura 34 - Curvas plano XY direção 0°. ....                                                                                                                                                            | 75 |
| Figura 35 - Curvas plano XY direção 45°. ....                                                                                                                                                           | 75 |
| Figura 36 - Curvas plano XY direção 90°. ....                                                                                                                                                           | 75 |
| Figura 37 - Curvas plano XZ direção 0°. ....                                                                                                                                                            | 76 |
| Figura 38 - Curvas plano XZ direção 45°. ....                                                                                                                                                           | 76 |
| Figura 39 - Curvas plano XZ direção 90°. ....                                                                                                                                                           | 76 |
| Figura 40 - Curvas plano YZ direção 0°. ....                                                                                                                                                            | 77 |
| Figura 41 - Curvas plano YZ direção 45°. ....                                                                                                                                                           | 77 |
| Figura 42 - Curvas plano YZ direção 90°. ....                                                                                                                                                           | 77 |
| Figura 43 - Módulo de elasticidade. ....                                                                                                                                                                | 79 |
| Figura 44 - a), b) e c) O gradiente térmico orienta o crescimento dos grãos, formando a textura cristalográfica e reforçando a anisotropia na direção Z (direção de empilhamento das camadas).<br>..... | 80 |
| Figura 45 - Simulação das estruturas reticuladas CBC e as condições de contorno. ....                                                                                                                   | 83 |
| Figura 46 - Gráficos propriedades mecânicas CBC. ....                                                                                                                                                   | 84 |
| Figura 47 - Gráficos propriedades mecânicas CBCz.....                                                                                                                                                   | 85 |
| Figura 48 - Análise das condições de contorno. ....                                                                                                                                                     | 86 |
| Figura 49 - Módulos de elasticidade e cisalhamento CBC vs CBCz. ....                                                                                                                                    | 88 |
| Figura 50 - Ganho de rigidez em função do ganho de massa.....                                                                                                                                           | 89 |
| Figura 51 - Deslocamento global u1. ....                                                                                                                                                                | 91 |
| Figura 52 - Erro relativo deslocamentos globais u1 e u2. ....                                                                                                                                           | 92 |
| Figura 53 - Deslocamento global u2. ....                                                                                                                                                                | 93 |
| Figura 54 - Campo de tensão recuperados $\sigma_{11}$ .....                                                                                                                                             | 94 |
| Figura 55 - Erro relativo tensão $\sigma_{11}$ P1 e P3.....                                                                                                                                             | 95 |

## **LISTA DE QUADROS**

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| Quadro - 1 Resumo de equações da mecânica do contínuo..... | 33 |
|------------------------------------------------------------|----|

## LISTA DE TABELAS

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 - Especificações Strain Gauges.....                            | 51 |
| Tabela 2 - Equações canônicas periódicas por entidades geométricas..... | 62 |
| Tabela 3 - Parâmetros modelos homogêneo.....                            | 72 |
| Tabela 4 - Dados brutos dos ensaios de tração .....                     | 78 |
| Tabela 5 - Parâmetros modelos transversalmente isotrópico (316L).....   | 82 |
| Tabela 6 – Comparação de custo computacional .....                      | 95 |

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

|       |                                               |
|-------|-----------------------------------------------|
| CBC   | Cúbica de Corpo Centrado                      |
| CBCz  | Cúbica de Corpo Centrado reforço em Z         |
| CC    | Condições de Contorno                         |
| CCC   | Canais de Resfriamento Conformais             |
| FLP   | Fusão em Leito de Pó                          |
| FLP-L | Fusão em Leito de Pó a Laser                  |
| MA    | Manufatura Aditiva                            |
| 3D    | Tridimensionais                               |
| PBC   | Condição de Contorno Periodica                |
| TUBC  | Condição de Contorno de Tração Uniforme       |
| KUBC  | Condição de Contorno de Deslocamento Uniforme |
| MEF   | Método dos Elementos Finitos                  |

## SUMÁRIO

|              |                                                                |           |
|--------------|----------------------------------------------------------------|-----------|
|              | <b>AGRADECIMENTOS .....</b>                                    | <b>6</b>  |
|              | <b>RESUMO.....</b>                                             | <b>8</b>  |
|              | <b>ABSTRACT .....</b>                                          | <b>9</b>  |
|              | <b>LISTA DE FIGURAS.....</b>                                   | <b>10</b> |
|              | <b>LISTA DE QUADROS.....</b>                                   | <b>12</b> |
|              | <b>LISTA DE TABELAS .....</b>                                  | <b>13</b> |
|              | <b>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS .....</b>                    | <b>14</b> |
|              | <b>SUMÁRIO .....</b>                                           | <b>14</b> |
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                        | <b>17</b> |
| 1.1          | JUSTIFICATIVA E CONTRIBUIÇÃO .....                             | 18        |
| 1.2          | OBJETIVO GERAL.....                                            | 19        |
| 1.3          | OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....                                    | 19        |
| 1.4          | ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....                                 | 20        |
| <b>2</b>     | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>                              | <b>22</b> |
| 2.1          | FUSÃO EM LEITO DE PÓ A LASER.....                              | 22        |
| <b>2.1.1</b> | <b>Anisotropia em processos FLP-L .....</b>                    | <b>23</b> |
| 2.2          | ESTRUTURA RETICULADAS ( <i>LATTICE</i> ).....                  | 24        |
| 2.3          | MECÂNICA DO CONTÍNUO .....                                     | 25        |
| <b>2.3.1</b> | <b>Cinemática, Balanço Mecânico e Modelo Constitutivo.....</b> | <b>27</b> |
| 2.3.1.1      | <i>Cinemática das Deformações .....</i>                        | 28        |
| 2.3.1.2      | <i>Balanço Mecânico .....</i>                                  | 29        |
| 2.3.1.3      | <i>Modelo Constitutivo .....</i>                               | 30        |
| <b>2.3.2</b> | <b>Elasticidade Linear.....</b>                                | <b>32</b> |
| 2.4          | MODELAGEM MULTIESCALAS E MÉTODOS DE HOMOGENEIZAÇÃO....         | 33        |
| <b>2.4.1</b> | <b>Homogeneização Assintótica de 1º ordem.....</b>             | <b>34</b> |
| <b>2.4.2</b> | <b>Condição de Hill-Mandel .....</b>                           | <b>37</b> |
| <b>2.4.3</b> | <b>Transições Micro/Macro .....</b>                            | <b>38</b> |
| 2.4.3.1      | <i>Macro para Micro .....</i>                                  | 38        |
| 2.4.3.2      | <i>Micro para Macro .....</i>                                  | 39        |
| 2.4.3.3      | <i>Tensor Constitutivo Homogeneizado.....</i>                  | 39        |
| 2.5          | CONDIÇÕES DE CONTORNO.....                                     | 40        |

|         |                                                                          |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.5.1   | Condições de Contorno KUBC.....                                          | 40        |
| 2.5.2   | Condições de Contorno PBC .....                                          | 42        |
| 2.5.3   | Condições de Contorno TUBC .....                                         | 43        |
| 2.6     | FE <sup>2</sup> OFFLINE .....                                            | 44        |
| 3       | <b>METODOLOGIA.....</b>                                                  | <b>47</b> |
| 3.1     | CALIBRAÇÃO AÇO 316L FABRICADO POR FLP-L.....                             | 48        |
| 3.1.1   | Preparação das Amostras .....                                            | 49        |
| 3.1.2   | Sistema de Medição e Aquisição de Dados.....                             | 50        |
| 3.1.3   | Ensaio de Tração .....                                                   | 53        |
| 3.1.4   | Tratamento dos Dados .....                                               | 53        |
| 3.2     | ABORDAGEM NUMÉRICA: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....                    | 56        |
| 3.2.1   | Construção ERV Periódico.....                                            | 57        |
| 3.2.2   | Discretização de Requisitos de Periodicidade .....                       | 59        |
| 3.2.3   | Aplicação das Condições de Contorno.....                                 | 61        |
| 3.2.3.1 | <i>Condição de Contorno Periódicas .....</i>                             | <i>61</i> |
| 3.2.3.2 | <i>Condição de contorno KUBC.....</i>                                    | <i>63</i> |
| 3.2.3.3 | <i>Condição de Contorno TUBC .....</i>                                   | <i>64</i> |
| 3.2.4   | Formulação dos Casos Canônicos .....                                     | 65        |
| 3.2.5   | Pós processamento e Homogeneização Volumétrica.....                      | 68        |
| 3.3     | APLICAÇÃO DE MÉTODO FE <sup>2</sup> OFFLINE.....                         | 70        |
| 4       | <b>DISCUSSÕES E RESULTADOS.....</b>                                      | <b>74</b> |
| 4.1     | ENSAIOS DE TRAÇÃO.....                                                   | 74        |
| 4.1.1   | Resultados dos ensaios de tração.....                                    | 74        |
| 4.1.1.1 | <i>Módulo de Elasticidade .....</i>                                      | <i>78</i> |
| 4.1.1.2 | <i>Coefficiente de Poisson.....</i>                                      | <i>79</i> |
| 4.1.1.3 | <i>Módulo de Cisalhamento.....</i>                                       | <i>79</i> |
| 4.1.1.4 | <i>Anisotropia dos Dados Experimentais .....</i>                         | <i>80</i> |
| 4.1.2   | Calibração para modelos transversalmente isotrópico .....                | 81        |
| 4.2     | RESULTADO ABORDAGEM NUMÉRICA .....                                       | 82        |
| 4.2.1   | Influência dos Parâmetros Geométricos.....                               | 83        |
| 4.2.2   | Influência das Condições de Contorno nas Propriedades Equivalentes ..... | 86        |
| 4.2.3   | Comparação CBC e CBCz.....                                               | 87        |
| 4.3     | RESULTADOS FE <sup>2</sup> - OFFLINE.....                                | 89        |
| 4.3.1   | Deslocamentos Globais (u1 e u2).....                                     | 90        |

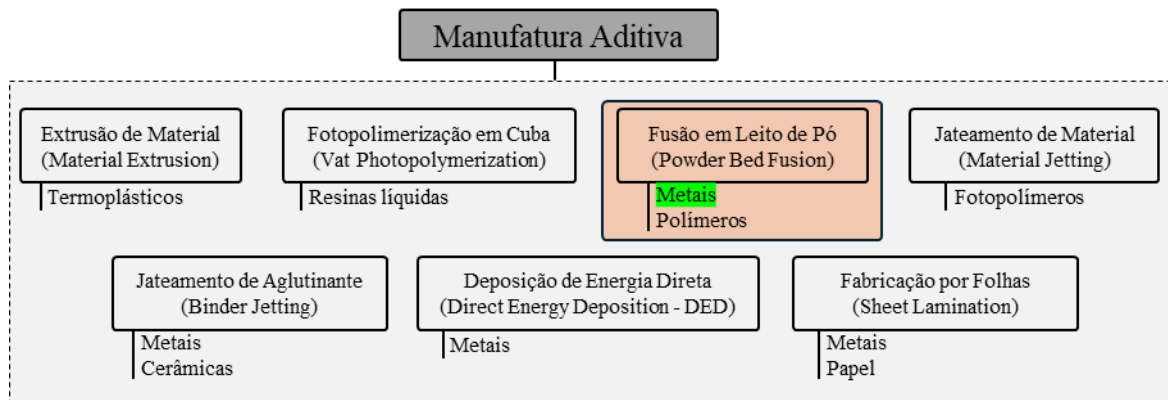
|       |                                                           |     |
|-------|-----------------------------------------------------------|-----|
| 4.3.2 | Tensões Recuperadas na microescala ( $\sigma_{11}$ )..... | 93  |
| 4.3.3 | Custo Computacional.....                                  | 95  |
| 5     | CONCLUSÃO.....                                            | 97  |
| 6     | TRABALHOS FUTUROS .....                                   | 99  |
|       | REFERÊNCIAS.....                                          | 100 |
|       | ANEXO A – TABELA DE DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA .....   | 105 |

## 1 INTRODUÇÃO

Os processos de manufatura aditiva (MA) apresentaram grande evolução nos últimos anos, tanto de caráter técnico quanto de inovações em aplicações (Wohlers; Caffrey, 2015). Tais processos apresentam potencial de construção de peças tridimensionais (3D), adicionando progressivamente camada progressivas de material por meio de comandos numéricos gerados por modelos digitais. Esse método permite a fabricação de produtos com alta complexidade geométrica, muitas vezes inviáveis quando fabricados através de métodos mais tradicionais (DebRoy et al., 2018).

A MA agrupa diversas tecnologias de fabricação que podem ser categorizadas conforme a norma ISO/ASTM 52900 (“Terminology for Additive Manufacturing - General Principles - Terminology”, 2021). De acordo com a norma, existem sete categorias principais, conforme a Figura 1.

Figura 1 - Classificação dos métodos de manufatura aditiva (MA)



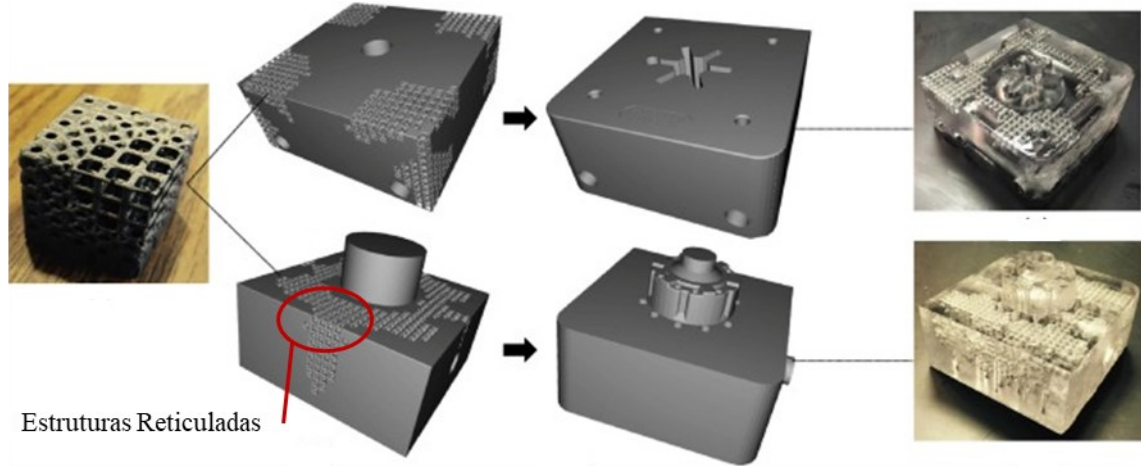
Fonte: Autor

Dentre essas tecnologias, a fusão em leito de pó a laser (FLP-L) tem sido amplamente empregada na indústria de moldes e matrizes, sobretudo pela facilidade de integrar sistemas de resfriamento com canais conformais (canais de resfriamento conformais, CCC). Essa combinação tecnológica aporta ganhos produtivos relevantes (Marques et al., 2015; Mazur et al., 2017).

Todavia, a fabricação de moldes através de FLP-L ainda apresenta custos elevados, que podem inviabilizar a utilização (De Souza et al., 2024; Gotlih et al., 2022; Masoudi et al., 2025). Como alternativa para mitigar os elevados custos, têm sido exploradas estratégias como a manufatura híbrida (Gotlih et al., 2022; Kirchheim et al., 2021; Marin et al., 2021) e o uso de estruturas reticuladas em regiões do ferramental, este visando à redução material e do tempo de

construção (Park et al., 2022; Redeker et al., 2025; Wu; Liu; Tovar, 2017) (Figura 2). Estas estruturas são tipicamente conhecidas pelo termo inglês *lattice*.

Figura 2 - Molde de injeção com estruturas reticuladas.



Fonte:(Wu; Liu; Tovar, 2017)

Todavia, as estruturas reticuladas, por apresentarem regiões de vazio podem resultar em redução de propriedades mecânicas, o que exige que a aplicação, durante a fase de projeto, seja cuidadosamente avaliada quanto à capacidade de suportar as solicitações impostas pelo processo de injeção (Maconachie et al., 2019; Park et al., 2022).

O principal método utilizada para avaliação mecânica é por meio de análises numéricas, em especial o método dos elementos finitos (MEF). Entretanto, quando se deseja representar aspectos geométricos da microestrutura para desta extrair o comportamento mecânico global, os custos computacionais se tornam muito elevados devido ao grande número de nós, principalmente em um contexto de moldes para injeção, onde a quantidade de microestruturas pode ser bastante elevada (Maconachie et al., 2019).

Esse cenário motiva o emprego de abordagens multiescala e técnicas de homogeneização, que permitem representar o domínio reticulado por propriedades efetivas em um meio contínuo equivalente, reduzindo de forma significativa o custo computacional sem perder a fidelidade global da resposta estrutural (Kanbur et al., 2020; Miehe, 2003)

## 1.1 JUSTIFICATIVA E CONTRIBUIÇÃO

A análise estrutural de moldes contendo estruturas reticuladas fabricadas por FLP-L torna-se onerosa quando realizada a partir de modelos totalmente discretos, em razão do grande

número de elementos e nós necessários para representar fielmente a geometria das estruturas reticuladas. Essa limitação dificulta a aplicação dessas estruturas em projetos mecânicos, especialmente em domínios de grande escala, como moldes de injeção. Diante desse cenário, o presente trabalho estuda a aplicabilidade de uma abordagem multiescala fundamentada em técnicas de homogeneização de 1ª ordem, na qual o comportamento da estrutura reticulada é substituído por um meio contínuo equivalente caracterizado por propriedades mecânicas efetivas. Essa estratégia pode reduzir substancialmente o custo computacional, ao mesmo tempo em que preserva de forma satisfatória a precisão das respostas estruturais. Assim, apresenta-se uma alternativa viável para a análise estrutural de moldes fabricados por FLP-L com estruturas reticuladas integradas ao ferramental.

## 1.2 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma abordagem multiescala baseada em homogeneização numérica de 1ª ordem, para obter propriedades mecânicas efetivas de estruturas reticuladas fabricadas em aço inoxidável 316L por FLP-L. Afim de permitir que essas estruturas sejam representadas como meios contínuos equivalentes, com isso viabilizando as análises estruturais em moldes de injeção contendo estruturas reticuladas, reduzindo drasticamente o custo computacional sem perda significativa de precisão.

## 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Diante do objetivo geral, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

- Obter parâmetros de rigidez do aço inoxidável 316L fabricado por FLP-L, avaliando efeitos de anisotropia por meio de ensaios de tração;
- Calibrar os parâmetros constitutivos do material para utilização nos modelos numéricos de microescala;
- Construir a célula unitária representativa da estrutura reticulada cúbica de corpo centrado (CBC) e gerar as respectivas malhas periódicas para análise via MEF;
- Formular e aplicar condições de contorno periódicas (PBC, *Traction Uniform Boundary Conditions*) e condições uniformes (KUBC, *Kinematics Uniform Boundary Conditions* e TUBC, *Periodic Boundary Conditions*) em casos canônicas necessárias para homogeneização numérica no âmbito de uma abordagem multiescala do tipo FE<sup>2</sup>;

- Realizar o cálculo de homogeneização e determinar as propriedades mecânicas efetivas a partir das respostas da célula unitária;
- Validar a abordagem multiescala proposta por meio da comparação entre a resposta mecânica de corpos de prova virtuais contendo a estrutura reticulada discretizada e correspondentes modelos contínuos homogeneizados.

## 1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

**Capítulo 1** – Introdução: Apresenta o contexto da manufatura aditiva por FLP-L, as motivações para o uso de estruturas reticuladas em componentes industriais, as limitações da modelagem totalmente discreta e a justificativa para o emprego de técnicas de homogeneização numérica. São definidos também os objetivos do trabalho e contribuição para a área.

**Capítulo 2** – Fundamentação Teórica: Reúne os conceitos necessários para o desenvolvimento do estudo. São apresentados os princípios do processo FLP-L, descrição das topologias CBC e CBCz, os fundamentos da mecânica do contínuo, a formulação da elasticidade linear, os modelos constitutivos e o papel da anisotropia. Em seguida, introduzem-se os conceitos de homogeneização de 1ª ordem, a condição de Hill–Mandel, as condições de contorno energeticamente consistentes (KUBC, TUBC e PBC) e, por fim, a abordagem FE<sup>2</sup> offline que será utilizada na validação do modelo homogêneo.

**Capítulo 3** – Metodologia: Descreve detalhadamente os procedimentos experimentais e numéricos adotados. Inicialmente, apresenta-se a etapa de caracterização mecânica do aço 316L produzido por FLP-L, incluindo preparação dos corpos de prova, aquisição e tratamento dos sinais dos extensômetros e determinação dos parâmetros constitutivos. Em seguida, descrevem-se a construção do ERV periódico, a discretização compatível com periodicidade, a implementação das condições de contorno, a formulação dos seis casos canônicos e o cálculo do tensor de rigidez equivalente. Finaliza-se com a descrição da aplicação do método FE<sup>2</sup> offline para verificação da representatividade das propriedades homogeneizadas.

**Capítulo 4** – Resultados e Discussões: Apresenta e analisa os resultados experimentais e numéricos. São discutidos o comportamento mecânico do material base, a calibração do modelo constitutivo anisotrópico, os efeitos da variação geométrica nas topologias CBC e CBCz, a influência das condições de contorno no processo de homogeneização e a comparação entre as duas topologias. O capítulo encerra com a validação via FE<sup>2</sup> offline, incluindo análise de erros relativos e avaliação da redução do custo computacional.

**Capítulo 5 e 6** – Conclusões e trabalhos futuros: Sintetiza as principais contribuições do trabalho, destaca os resultados mais relevantes e apresenta perspectivas de continuidade, contemplando aspectos mecânicos, numéricos e aplicados.

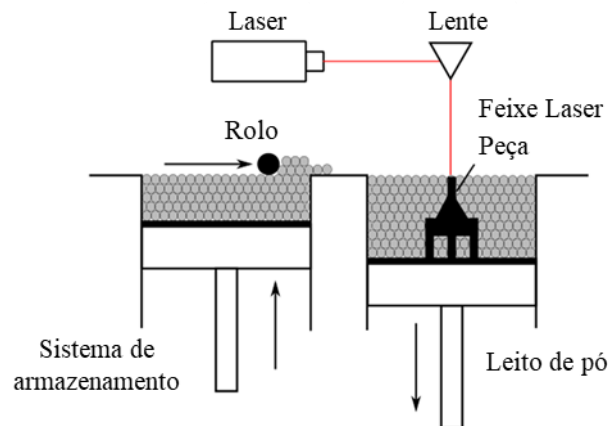
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento do método multiescala adotado neste trabalho. Inicialmente, descreve-se o processo de fusão em leito de pó a laser (FLP-L) e implicações microestruturais, com ênfase na anisotropia. Em seguida, abordam-se as características das estruturas reticuladas do tipo CBC e os conceitos essenciais da mecânica do contínuo aplicados à análise de materiais. Na sequência, são discutidos os princípios da homogeneização de 1ª ordem, as condições de contorno empregadas na microescala e a filosofia da abordagem FE<sup>2</sup> utilizada na modelagem multiescala. Este conjunto de fundamentos estabelece a base conceitual necessária para a metodologia apresentada nos capítulos seguintes.

### 2.1 FUSÃO EM LEITO DE PÓ A LASER

A fusão em leito de pó a laser (FLP-L) é um processo de manufatura aditiva metálica que permite a produção de componentes com geometria complexa por meio da solidificação seletiva de camadas sucessivas de pó metálico. A partir de um modelo digital em CAD (*Computer-Aided Design*), a peça é segmentada em camadas e convertida em comandos que definem a trajetória de varredura do feixe laser. Durante a construção, uma fina camada de pó metálico é espalhada sobre o leito por meio de um rolo ou lâmina de deposição, enquanto o feixe laser funde seletivamente o material conforme o caminho programado, formando um poça de fusão que solidifica rapidamente. Esse ciclo é repetido em cada camada até a obtenção do componente final, como ilustrado esquematicamente na Figura 3, que mostra os principais elementos do processo, incluindo o sistema de alimentação de pó, o mecanismo de espalhamento, o leito de construção e a interação entre o feixe laser e o material (DebRoy et al., 2018; King et al., 2015).

Figura 3 - Descrição do processo de FLP-L.



Fonte: Adaptado (Tepilo; Huang; Patnaik, 2019)

Devido à natureza dirigida da solidificação e aos elevados gradientes térmicos envolvidos, os materiais produzidos por FLP-L apresentam microestruturas características e comportamentos mecânicos particulares diferenciando dos materiais fabricados por processos convencionais (Jagannati et al., 2025; Pitrmuc et al., 2022). Neste trabalho, destaca-se especialmente o fenômeno da anisotropia, que será discutido em detalhe nas seções seguintes.

### 2.1.1 Anisotropia em processos FLP-L

A anisotropia pode ser definida como a variação direcional das propriedades físicas ou mecânicas de um material. Enquanto materiais isotrópicos apresentam comportamento essencialmente independente da direção de carregamento, materiais anisotrópicos respondem de maneira distinta conforme a orientação da solicitação (Nye, 1993; Ting, 2020)

No contexto da fusão em leito de pó a laser (FLP-L), a anisotropia é um fenômeno recorrente e está diretamente associada à maneira como o material solidifica durante o processo. A solidificação dirigida, os elevados gradientes térmicos e a repetição em cada camada induzem microestruturas orientadas que resultam em propriedades mecânicas diferentes entre as direções horizontal e vertical. Diversos fatores contribuem para essa resposta direcional, incluindo a morfologia dos grãos, a formação de fases orientadas, a presença de poros e defeitos distribuídos de forma não uniforme e, sobretudo, a textura cristalográfica. Esta considerada o principal agente responsável pela anisotropia observada em aços inoxidáveis 316L fabricados por FLP-L (Weaver; Rosenthal, 2021).

Assim, avaliar a influência da anisotropia sobre as propriedades mecânicas do aço 316L fabricado por FLP-L é essencial para definir o modelo constitutivo capaz de representar adequadamente o material.

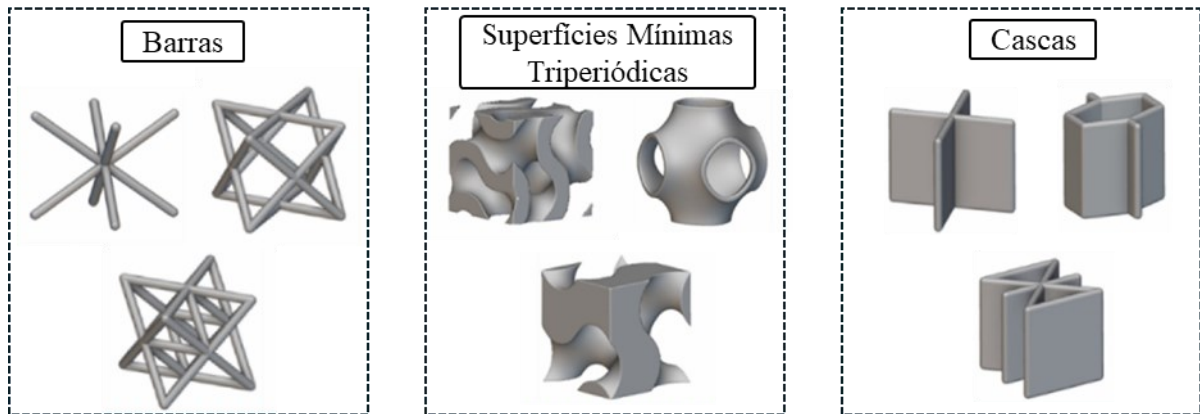
## 2.2 ESTRUTURA RETICULADAS (*LATTICE*)

Estruturas reticuladas são sistemas periódicos formados pela repetição espacial de células unitárias, resultando em materiais arquitetados com propriedades mecânicas controláveis. Em comparação com sólidos maciços, essas estruturas apresentam elevada relação rigidez–massa e permitem ajustar o comportamento mecânico a partir de parâmetros geométricos, como espessura de barras, dimensões da célula unitária ou espessura de paredes. A possibilidade de modular essas variáveis de forma independente torna as estruturas reticuladas particularmente adequadas para aplicações que demandam redução de massa, controle de rigidez ou resposta mecânica direcionada (Gibson; Ashby, 1999).

A fabricação de estruturas reticuladas por FLP-L é especialmente vantajosa, uma vez que o processo camada a camada possibilita a construção de geometrias complexas sem a necessidade de ferramentas adicionais ou etapas intermediárias. Assim, estruturas desse tipo contribuem diretamente para a redução do volume de material e do tempo de construção, fatores que impactam de forma significativa o custo total de peças produzidas por manufatura aditiva metálica (Park et al., 2022; Redeker et al., 2025; Wu; Liu; Tovar, 2017).

De modo geral, as estruturas reticuladas podem ser classificadas em três categorias principais: (i) estruturas baseadas em barras (*strut-based*), constituídas por elementos unidimensionais interligados; (ii) superfícies mínimas triperiódicas (*TPMS — triply periodic minimal surfaces*), que correspondem a superfícies contínuas definidas por expressões matemáticas de curvatura mínima; e (iii) estruturas baseadas em cascas (*shell-based*), compostas por placas ou paredes delgadas distribuídas de forma periódica. A Figura 4 apresenta ilustra exemplos de células unitária dessas categorias (Khan; Riccio, 2024)

Figura 4 - Tipos de estruturas reticuladas.



Fonte: Adaptado (Khan; Riccio, 2024)

Entre as diversas topologias disponíveis, o presente trabalho adota a estrutura CBC, caracterizada por barras conectando os vértices ao centro da célula unitária. Essa topologia é conveniente aos estudos de homogeneização devido à simetria geométrica, comportamento mecânico amplamente documentado, alta relação de rigidez-massa e facilidade de modelagem (Gibson; Ashby, 1999). Nos capítulos seguintes, a célula CBC será utilizada como base para a determinação das propriedades mecânicas efetivas via homogeneização de 1ª ordem.

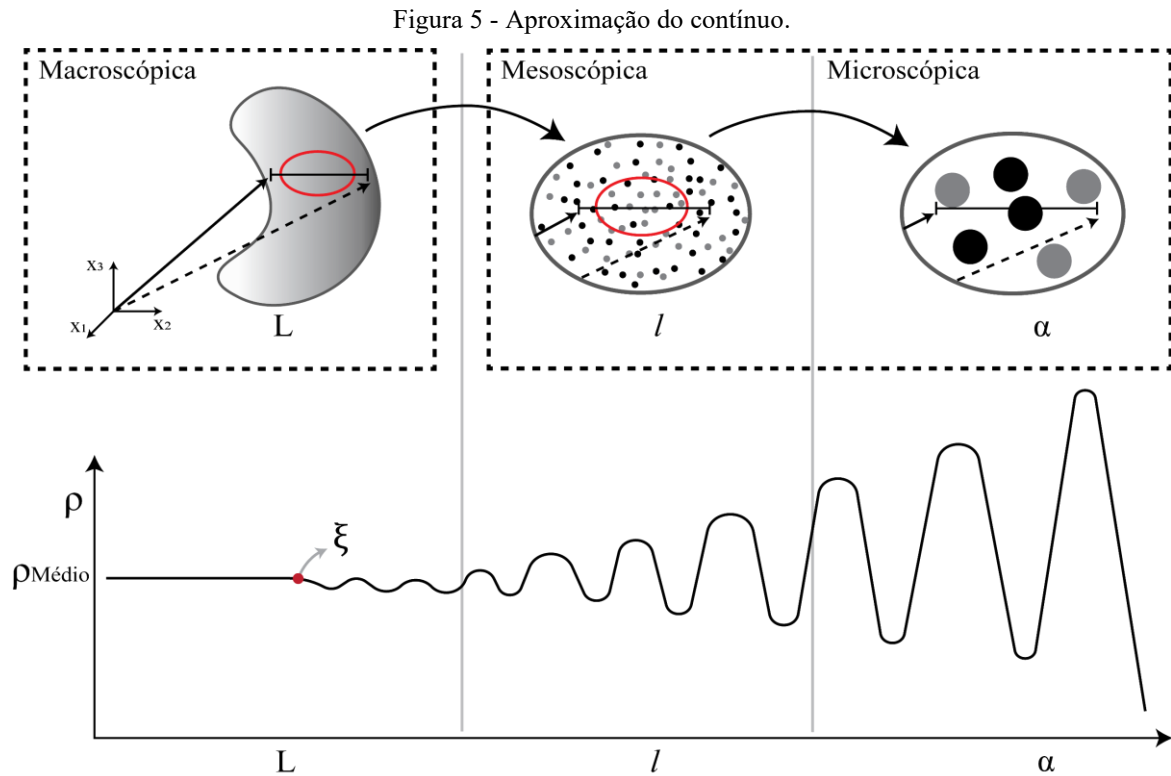
## 2.3 MECÂNICA DO CONTÍNUO

A mecânica do contínuo constitui a base para a formulação matemática do comportamento de corpos deformáveis e tem como principal fundamento a hipótese do contínuo, segundo a qual o material é tratado como se ocupasse o espaço de forma contínua, sem lacunas ou descontinuidades observáveis. Embora a matéria seja estruturalmente discreta em escala atômica, essa discretização não é relevante para a maioria dos fenômenos mecânicos de engenharia, permitindo assumir que grandezas como tensão, deformação e densidade são campos contínuos no espaço<sup>1</sup>.

Na hipótese de meios contínuos é admitida a existência de uma escala sensível ou escala de representatividade, frequentemente denotada por  $\xi$ , que corresponde ao menor volume no qual as propriedades do material apresentam variação suficientemente suave para serem tratadas como médias contínuas. Em sólidos homogêneos, esse volume sensível é usualmente muito menor que o domínio de interesse, justificando a representação clássica em termos de um

<sup>1</sup> Esta seção tem como objetivo unificar a notação e tornar o documento autocontido. Os conceitos apresentados seguem a formulação clássica da mecânica do contínuo, conforme as referências (Gurtin; Fried; Anand, 2010; Irgens, 2008) aos quais o leitor pode recorrer para maior aprofundamento.

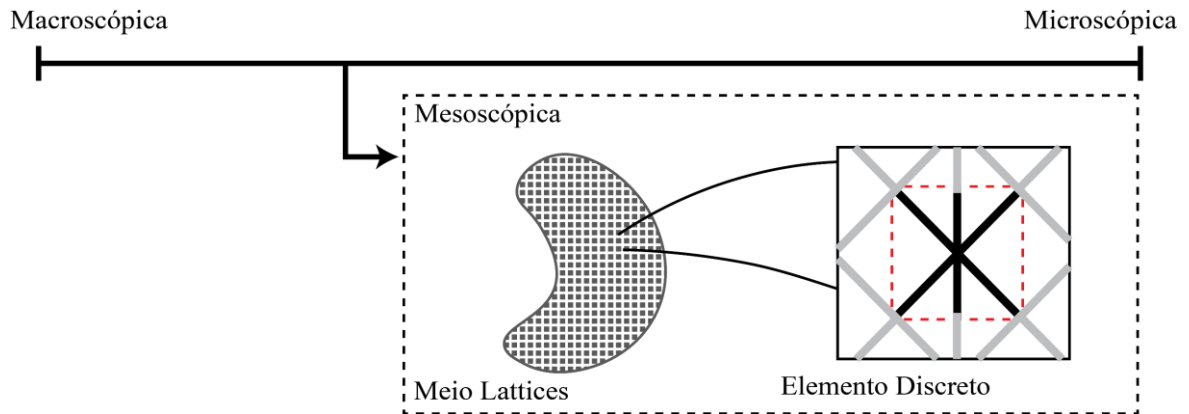
volume diferencial  $dV$ . A Figura 5 ilustra esse conceito: abaixo de  $\xi$ , as propriedades apresentam flutuações; acima desse valor, tendem a um platô que permite a idealização contínua (Bakhvalov; Panasenko, 1989).



Fonte: Autor

No caso de estruturas reticuladas, o material apresenta natureza intrinsecamente discreta, composta por barras, cascas ou superfícies periódicas. Assim, a hipótese do contínuo não pode ser aplicada diretamente, mas torna-se válida quando se realiza uma separação de escalas entre o tamanho característico da célula unitária, aqui denotado por  $\gamma$ , e o tamanho do domínio macroscópico  $L$ . Quando a razão  $\gamma/L$  é suficientemente pequena, o reticulado pode ser adequadamente representado por um meio contínuo equivalente obtido por homogeneização. A Figura 6 ilustra esse raciocínio, comparando a visão microscópica do reticulado com o meio contínuo resultante na macroescala (Torquato, 2013).

Figura 6 - Meio contínuo estrutura reticuladas.



Fonte: Autor

Analogamente ao número de Knudsen empregado em mecânica dos fluidos, diversos autores utilizam relações adimensionais para avaliar a aplicabilidade da hipótese do contínuo em meios periódicos. No contexto das estruturas reticuladas, a condição

$$\frac{\gamma}{L} \ll 1 \quad (1)$$

assegura que o domínio macroscópico é suficientemente maior que a célula unitária, permitindo que as propriedades sejam tratadas como médias periódicas.

Essa fundamentação será essencial para o desenvolvimento da abordagem multiescala adotada neste trabalho, na qual estruturas reticuladas serão representadas como meios contínuos equivalentes obtidos por homogeneização de 1ª ordem.

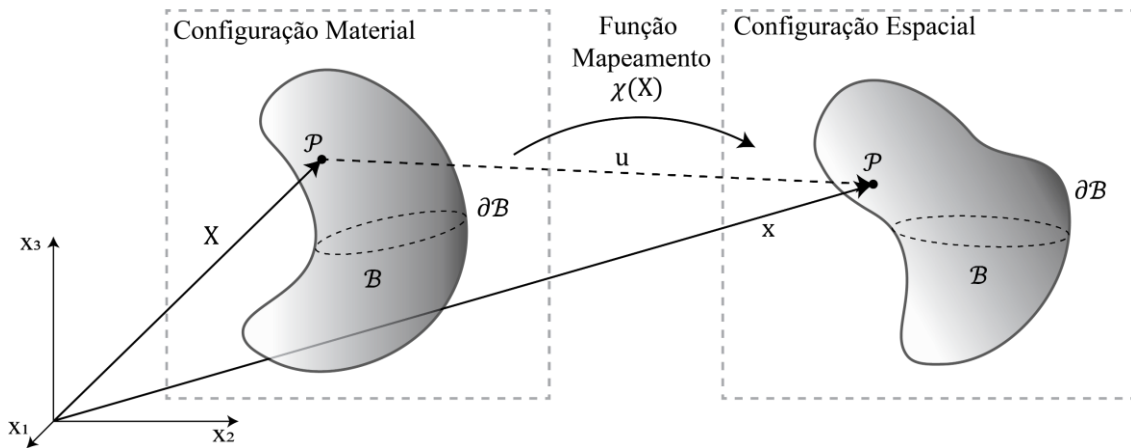
### 2.3.1 Cinemática, Balanço Mecânico e Modelo Constitutivo

A formulação do comportamento mecânico de meios contínuos parte da descrição cinemática das deformações, das relações de equilíbrio mecânico e dos modelos constitutivos que associam tensões e deformações. Nesta seção são apresentados os conceitos clássicos utilizados no desenvolvimento da abordagem multiescala adotada neste trabalho. O objetivo é estabelecer a conexão entre a descrição geral da cinemática e da mecânica do contínuo e as técnicas e/ou métodos empregados nos processos de homogeneização e método FE<sup>2</sup>.

### 2.3.1.1 Cinemática das Deformações

A cinemática descreve a maneira como pontos de um corpo se movem durante uma deformação. Considerando o corpo  $B$  na configuração indeformada, ilustrada à esquerda na Figura 7. Cada ponto material é identificado pela posição inicial  $\mathbf{X}$ . Durante um carregamento, o corpo é levado à configuração deformada, mostrada à direita, na qual o mesmo ponto ocupa a posição atual  $\mathbf{x}$ .

Figura 7 - Representação esquemática de um corpo contínuo  $B$  nas configurações indeformada (à esquerda) e deformada (à direita), destacando um ponto material  $P$  e uma curva material transportada pelo movimento  $\chi$ .



Fonte: Autor

O mapa que relaciona essas posições é dado por:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}), \quad (2)$$

onde  $\chi$  representa o movimento que leva cada ponto da configuração inicial para a configurada atual. Como ilustrado na figura, não apenas os pontos, mas também curvas materiais inteiras são transportadas por esse movimento, evidenciando que a deformação altera distâncias e orientações ao longo do corpo.

O gradiente de deformação,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (3)$$

descreve como vetores materiais são transformados entre as duas configurações e contém todas as informações sobre alongamentos e rotações locais. Em formulações gerais de grandes deformações, derivam-se medidas como o tensor de Green–Lagrange,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (4)$$

apropriado para situações em que há alterações significativas na geometria, como a passagem da configuração indeformada para a deformada ilustrada na Figura 7 (Gurtin; Fried; Anand, 2010).

Contudo, no presente trabalho, tanto no domínio macroscópico quanto na célula unitária, as deformações permanecem pequenas, e o movimento ocorre em torno da configuração inicial. Neste caso a medida de deformação de Green Lagange (4) se reduz a medida de deformação linearizada:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (5)$$

que é a expressão empregada na homogeneização de 1ª ordem e na formulação multiescala utilizada neste trabalho.

### 2.3.1.2 Balanço Mecânico

O comportamento mecânico de um corpo contínuo é governado pelo balanço entre as tensões, forças externas e forças inerciais. Seja  $\boldsymbol{\sigma}$  o tensor de tensões de Cauchy,  $\mathbf{b}$  o vetor de forças de corpo por unidade de volume e  $\rho$  a massa específica do material (Gurtin; Fried; Anand, 2010). Na forma mais geral, a conservação de quantidade de movimento linear (balanço linear) é expressa por:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (6)$$

onde  $\ddot{\mathbf{u}}$  representa a aceleração do material. O termo  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  corresponde às forças inerciais, que são relevantes em problemas dinâmicos, como vibrações, impactos ou carregamentos dependentes do tempo (Gurtin; Fried; Anand, 2010).

A simetria do tensor de tensões,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (7)$$

resulta da conservação da quantidade de movimento angular (balanço angular).

Nos problemas analisados neste trabalho, tanto no domínio macroscópico quanto no elemento representativo de volume (ERV), o carregamento é do tipo quase-estático, sem variação significativa no tempo. Nessas condições, as acelerações são desprezíveis, o que torna válidas as aproximações:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} \approx \mathbf{0}, \mathbf{b} \approx \mathbf{0}, \quad (8)$$

Com isso, o equilíbrio local reduz-se à forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Essa forma simplificada é suficiente para caracterizar o equilíbrio interno do ERV e do modelo homogêneo, permitindo a aplicação direta das condições de contorno utilizadas na homogeneização (KUBC, TUBC e PBC).

### 2.3.1.3 Modelo Constitutivo

O modelo constitutivo descreve como o material desenvolve tensões quando submetido ao estado de deformação, completando as relações cinemáticas e de equilíbrio ao estabelecer a lei que governa a resposta mecânica.

Existem diversos modelos constitutivos, mas neste trabalho adota-se o modelo elástico linear. Nesse modelo, a tensão é proporcional à deformação, relação que pode ser expressa de forma geral por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

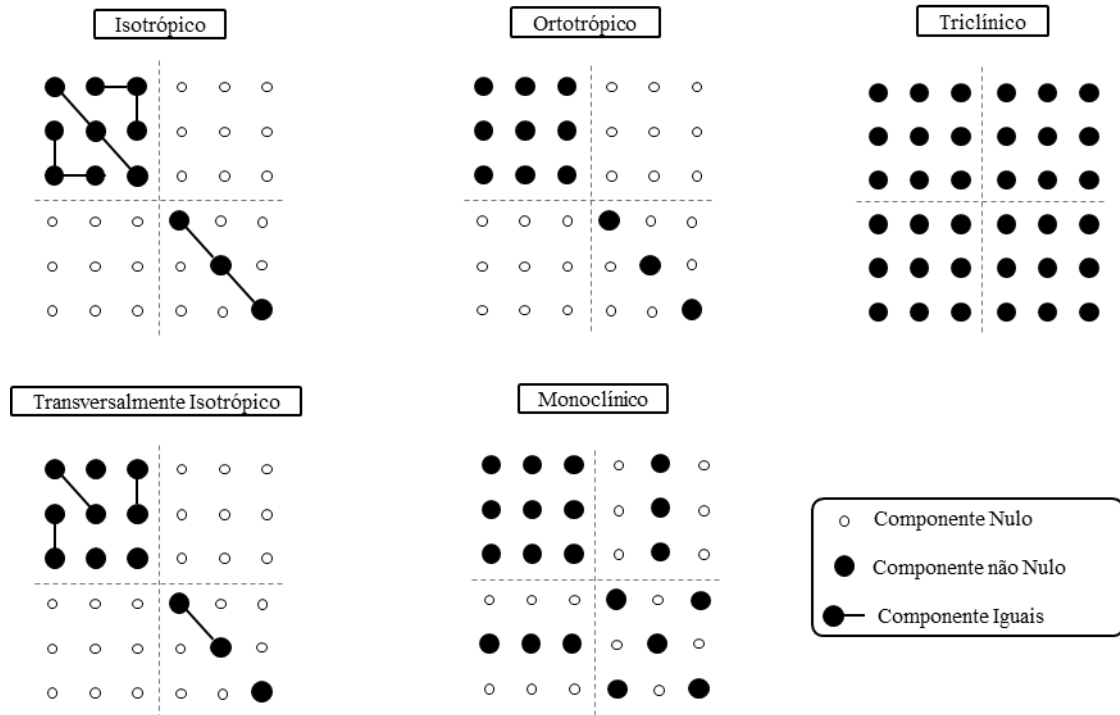
onde  $\mathbb{C}$  é o tensor de rigidez, responsável por mapear a deformação em tensão. A linearidade implica que essa relação é proporcional e independente do histórico de carregamento (Gurtin; Fried; Anand, 2010).

O tensor constitutivo  $\mathbb{C}$  possui simetrias intrínsecas que decorrem diretamente da relação constitutiva e da simetria do tensor de tensões. A primeira é a simetria menor, associada à igualdade  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , o que implica  $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl}$ . A segunda é a simetria maior, resultante da existência de uma função de energia de deformação, que conduz a  $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij}$ . Essas simetrias reduzem significativamente o número de componentes independentes do tensor, mesmo antes de considerar qualquer particularidade do material (Gurtin; Fried; Anand, 2010).

Em materiais de engenharia é comum representar o comportamento elástico por meio de parâmetros familiares, como o módulo de elasticidade  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  e o módulo de cisalhamento  $G$ . Em materiais isotrópicos, esses parâmetros são suficientes para descrever completamente a relação tensão–deformação, pois a rigidez é a mesma em todas as direções.

Quando o material apresenta anisotropia, esses parâmetros deixam de ser únicos e passam a depender da direção. Os parâmetros de engenharia tornam-se conjuntos de valores, que refletem a rigidez nas diferentes direções, conforme a Figura 8 (Abadi, 2012).

Figura 8 - Termos não nulos da matriz de elasticidade na notação de Voigt.



Fonte: Autor

Além da anisotropia do próprio material, estruturas reticuladas introduzem um segundo nível de anisotropia decorrente da geometria periódica da célula unitária. Dessa forma, mesmo quando o material base é isotrópico, a estrutura resultante pode apresentar comportamento anisotrópico na escala macroscópica. Essa combinação é posteriormente capturada pelo processo de homogeneização ao determinar o tensor de rigidez equivalente (Nemat-Nasser; Hori, 1993).

### 2.3.2 Elasticidade Linear

Os conceitos apresentados de cinemática, balanço mecânico e modelo constitutivo permitem formular a teoria da elasticidade linear, amplamente utilizada em problemas de engenharia que envolvem pequenas deformações. Essa teoria baseia-se em duas hipóteses fundamentais.

A primeira é a linearidade geométrica, que assume que os deslocamentos e deformações são suficientemente pequenos para que o gradiente de deslocamentos permaneça próximo do tensor nulo. Nessa condição, é possível utilizar a deformação infinitesimal como medida cinemática, o que lineariza a relação entre deslocamentos e deformações.

A segunda é a linearidade material, que estabelece que o estado de tensão é proporcional ao estado de deformação por meio da relação constitutiva linear já apresentada na seção anterior. Reunindo as hipóteses de pequenas deformações, elasticidade linear e regime quase-estático, o comportamento mecânico é descrito pelo seguinte conjunto de equações governantes conforme o Quadro 1 (Gurtin; Fried; Anand, 2010; Sadd, 2014).

Quadro 1 – Resumo de equações da mecânica do contínuo.

|                                                                                   |                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ | Representa a medida linearizada de deformação obtida a partir do gradiente de deslocamentos. É válida para pequenas deformações e corresponde à aproximação usada em homogeneização de 1ª ordem. |
| $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}$                        | Relaciona tensões e deformações por meio do tensor de rigidez, assumindo proporcionalidade entre as grandezas. É a forma geral da lei de Hooke no regime tridimensional.                         |
| $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$                                   | Expressa o equilíbrio interno do corpo quando os efeitos inerciais são desprezáveis.                                                                                                             |
| $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$                                                       | Representa a simetria intrínseca do tensor de tensões devido ao balanço de momento angular. Essa propriedade reduz o número de componentes independentes do tensor constitutivo.                 |

Fonte: Autor

Embora as equações apresentadas descrevam o comportamento interno do meio contínuo em regime de elasticidade linear, a formulação do problema só se completa com a especificação das condições de contorno. Essas condições determinam como o corpo é carregado ou restrito e são essenciais para garantir a unicidade da solução. No entanto, por desempenharem papel central no processo de homogeneização empregado neste trabalho, especialmente na definição das condições de contorno KUBC, TUBC e PBC, a apresentação detalhada é feita em seção específica mais adiante.

## 2.4 MODELAGEM MULTIESCALAS E MÉTODOS DE HOMOGENEIZAÇÃO

Materiais heterogêneos e estruturas com repetição geométrica apresentam comportamentos determinados simultaneamente por fenômenos em diferentes escalas. Na escala microscópica, variações locais de geometria ou propriedades dão origem a campos de tensão e deformação altamente oscilatórios, enquanto na escala macroscópica o objetivo é descrever o material como um meio contínuo equivalente, dotado de propriedades efetivas. O desafio fundamental em problemas desse tipo é estabelecer uma relação clara entre essas duas descrições, de modo que efeitos relevantes da microestrutura sejam preservados na resposta

global do material ou componente. Esse é precisamente o objetivo dos métodos multiescala e das técnicas de homogeneização (Bensoussan; Lions; Papanicolaou, 1978).

Quando existe separação clara entre o tamanho característico da microestrutura e as dimensões do domínio macroscópico, métodos de homogeneização baseados em expansões assintóticas tornam-se particularmente eficientes. Nessa condição, as grandezas variam lentamente na escala macro, enquanto apresentam flutuações periódicas na escala micro — permitindo substituir a estrutura complexa por um meio contínuo equivalente, sem perda das informações essenciais acerca do comportamento local (Geers; Kouznetsova; Brekelmans, 2010).

No caso de estruturas reticuladas periódicas, esse cenário é ainda mais evidente: a célula unitária funciona como representante típico da microescala, enquanto a estrutura como um todo comporta-se como material contínuo efetivo. Assim, o problema de engenharia passa a ser tratado de forma hierárquica: a microescala fornece as propriedades equivalentes; a macroescala utiliza essas propriedades em um modelo simplificado. Esse caráter bidimensional da descrição — um nível geométrico detalhado e outro contínuo equivalente — caracteriza os métodos multiescala de 1ª ordem amplamente utilizados em problemas estruturais (Kochmann et al., 2023).

A partir dessa estrutura conceitual, introduz-se então a técnica de homogeneização de 1ª ordem, que consiste em representar o campo de deslocamentos como a soma de um termo macroscópico linear e uma flutuação periódica que captura os efeitos da microestrutura. Essa abordagem permite resolver um problema de valor de contorno na célula unitária a partir da inserção da cinemática macroscópica prescrita. Com isso, o problema de valor de contorno definido na microescala permite o cálculo do campo de deformações e tensões neste domínio, cuja média volumétrica (homogeneização) permite capturar o comportamento equivalente do material estabelecendo o elo entre as duas escalas.

Nos tópicos seguintes, apresentam-se os princípios fundamentais que sustentam a homogeneização de 1ª ordem, incluindo o papel da condição de Hill–Mandel e as relações de transição micro/macro empregados no desenvolvimento deste trabalho.

#### **2.4.1 Homogeneização Assintótica de 1º ordem**

Materiais heterogêneos periódicos e estruturas reticuladas apresentam variações geométricas na microescala que influenciam diretamente o comportamento global. A homogeneização de 1ª ordem formaliza essa influência ao explorar a separação entre a escala

microscópica, onde a microestrutura se repete, e a escala macroscópica, onde as grandezas mecânicas variam suavemente. Essa separação é representada pelo parâmetro adimensional

$$\xi = \frac{l}{L} \ll 1, \quad (11)$$

no qual  $l$  é o comprimento característico da célula unitária (ou Elemento Representativo de Volume – ERV) e  $L$  é o comprimento típico do problema macroscópico. Quando  $\xi$  é muito pequeno, considera-se que as variações do campo macroscópico são praticamente constantes dentro de cada ERV, enquanto as variações rápidas são capturadas pela microestrutura periódica.

Nesse cenário, a descrição cinemática passa a depender de duas variáveis: (i)  $\mathbf{X}$  — coordenada macroscópica, associada ao corpo contínuo equivalente — (ii)  $\mathbf{Y}$  — coordenada microscópica, que descreve a posição relativa dentro do ERV.

A relação entre ambas é dada por:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{X}}{\xi}, \quad (12)$$

o que reforça que pequenas variações em  $\mathbf{X}$  produzem variações muito maiores em  $\mathbf{Y}$ . Assim, o deslocamento deve ser escrito como função de ambas as variáveis:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \quad (13)$$

Assumindo que o deslocamento pode ser expandido em potências de  $\xi$ , aplica-se a clássica expansão assintótica de duas escalas

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \xi \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \xi^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \cdots + \xi^n \mathbf{u}^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \quad (14)$$

Aqui:

- $\mathbf{u}^0$  é o termo principal da solução;
- $\mathbf{u}^1$  a  $\mathbf{u}^n$  são termos superiores representam correções que incorporam efeitos de gradientes mais sutis (Bensoussan; Lions; Papanicolaou, 1978).

O presente trabalho faz uso da conhecida expansão linear ou de primeira ordem. Neste caso a expansão (14) preserva apenas os dois primeiros termos:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \xi \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \quad (15)$$

A hipótese fundamental consiste em admitir que o primeiro termo tem um comportamento linear com a variável espacial  $\mathbf{Y}$  da microescala, isto é,

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})\mathbf{Y}, \quad (16)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$  representa a deformação infinitesimal do ponto  $\mathbf{X}$  na macroescala, substituindo (16) em (15) e redefinindo o termo flutuante de primeira ordem:

$$\mathbf{w}_m = \xi \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (17)$$

se tem a expressão final para o deslocamento no interior de um EVR da forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})\mathbf{Y} + \mathbf{w}_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (18)$$

por conveniência o deslocamento  $\mathbf{u}^0(\mathbf{X})$  na solução do problema de valor de contorno no EVR corresponde ao deslocamento de corpo rígido e pode ser tomado como nulo.

Em (18) se tem que:

- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})\mathbf{Y}$  representa o deslocamento afim guiado pelo valor da deformação macroscópica  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .
- $\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  é a flutuação periódica de média nula, responsável por capturar efeitos da microestrutura (Geers; Kouznetsova; Brekelmans, 2010; Kochmann et al., 2023; Stein; Borst; Hughes, 2018).

Essa é a forma clássica da homogeneização de 1ª ordem, e constitui a base matemática para a formulação do ERV e para a aplicação das condições de contorno KUBC, TUBC e PBC apresentadas posteriormente.

### 2.4.2 Condição de Hill-Mandel

A técnica de homogeneização de 1ª ordem requer que as escalas micro e macro sejam energeticamente consistentes. Essa consistência é formalizada pela condição de Hill–Mandel, proposta independentemente por James Hill (1963) e Jean Mandel, e estabelece que o trabalho mecânico realizado na escala macroscópica deve ser exatamente igual ao trabalho médio realizado no interior do ERV (Hill, 1963; Suquet, 1985)

De forma geral, a condição pode ser escrita, no caso de cinemática infinitesimal, como:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\sigma}^M : \boldsymbol{\varepsilon}^M, \quad (19)$$

e o operador  $\langle \bullet \rangle$  denota a média volumétrica no ERV:

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{B_0} (\bullet) dV. \quad (20)$$

Fisicamente, essa condição significa que não há ganho nem perda artificial de energia quando se passa da micro para a macroescala. Toda energia que a microestrutura absorve em média é exatamente a energia introduzida pelo contínuo macroscópico. Essa equivalência é fundamental para garantir que o meio homogêneo efetivo represente adequadamente o comportamento do material real (Saeb; Steinmann; Javili, 2016).

Essa igualdade é válida apenas se o problema do ERV for resolvido com condições de contorno que satisfaçam a condição de Hill–Mandel. Existem três classes de condições que cumprem essa exigência:

- KUBC do termo inglês *Kinematics Uniform Boundary Conditions* que aplica condições cinemáticas lineares nos contornos,
- TUBC do termo inglês *Traction Uniform Boundary Conditions* que aplica condições de força de superfície constantes nos contornos,
- PBC do termo inglês *Periodic Boundary Conditions* que aplica condições cinemáticas periódicas nos contornos.

Essas condições impõem formas específicas à flutuação periódica  $\mathbf{w}_m$  derivada da decomposição cinemática (18). Cada escolha para  $\mathbf{w}_m$  produz um problema de valor de

contorno diferente na microescala, mas todas garantem que a energia seja transferida corretamente entre as escalas.

Além disso, a condição de Hill–Mandel conduz diretamente às relações fundamentais de volume médio que conectam as grandezas micro e macro:

$$\boldsymbol{\sigma}^M = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^M = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (21)$$

Essas expressões são consistentes com a interpretação física do ERV: o contínuo equivalente deve reproduzir a resposta média da microestrutura (Bensoussan; Lions; Papanicolaou, 1978; Geers; Kouznetsova; Brekelmans, 2010).

No caso da elasticidade linear, a relação constitutiva macroscópica resulta naturalmente da média volumétrica do comportamento local:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbb{C}^{\text{Homo}} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (22)$$

onde  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$  é o tensor de rigidez homogeneizado. Esse tensor carrega toda a informação equivalente da microestrutura — incluindo efeitos de anisotropia geométrica da célula reticulada e anisotropia do material base — e constitui um dos principais resultados buscados neste trabalho (Nemat-Nasser; Hori, 1993; Stein; Borst; Hughes, 2018).

### 2.4.3 Transições Micro/Macro

A formulação multiescala empregada neste trabalho requer mecanismos claros para estabelecer como grandezas macroscópicas são aplicadas ao ERV e como a resposta microscópica retorna informações equivalentes para a macroescala. Essa interação entre níveis é denominada transição micro/macro e representa o fechamento natural dos conceitos desenvolvidos na homogeneização de 1ª ordem e na condição de Hill–Mandel (Saeb; Steinmann; Javili, 2016; Stein; Borst; Hughes, 2018).

#### 2.4.3.1 Macro para Micro

O ponto de partida é a decomposição cinemática obtida anteriormente da equação (18). A partir dessa relação, qualquer estado imposto na macroescala é traduzido em um campo de

deslocamentos admissível na microescala. Essa decomposição assegura que o ERV reproduz localmente o estado de deformação homogêneo, mantendo-se compatível com a geometria periódica e com as condições de contorno que preservam a consistência energética.

A escolha das condições de contorno — KUBC, TUBC ou PBC — determina a forma da flutuação  $\mathbf{w}_m$ . Todas essas condições satisfazem a condição de Hill–Mandel, permitindo que o campo microscópico reflita adequadamente o carregamento macroscópico.

Assim, o processo macro  $\rightarrow$  micro consiste em:

1. impor um estado de deformação macroscópico  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$ ;
2. construir o deslocamento no ERV via decomposição afim + flutuação periódica;
3. resolver o problema de valor de contorno na microescala para determinar  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ . Com a média volumétrica deste último se obtém os tensores  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  e  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ .

#### 2.4.3.2 Micro para Macro

Após resolvido o problema na microescala para o estado  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  imposto, obtém-se o campo local de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  e deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dentro do ERV. A passagem para a macroescala é realizada por meio das médias volumétricas, ação formalizada conforme a equação (21), onde o operador de média é dado pela equação (20).

Essa operação mostra como diversas formulações clássicas — como as de Reuss e Voigt — surgem como casos particulares de médias aplicadas a diferentes escolhas de campos microscópicos admissíveis.

Do ponto de vista físico, a média volumétrica traduz a resposta real e heterogênea da microestrutura em grandezas homogêneas equivalentes. Do ponto de vista matemático, resulta diretamente da condição de Hill–Mandel, assegurando que a densidade de energia de deformação realizada na microescala seja igual àquela da macroescala.

Assim, o processo micro  $\rightarrow$  macro se resume a:

1. Dada uma medida de deformação macroscópica  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  calcular os campos da microescala  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ ;
2. Realizar a média volumétrica para obter o valor de tensão macroscópico  $\boldsymbol{\sigma}^M$ ;

#### 2.4.3.3 Tensor Constitutivo Homogeneizado

Com as transições micro/macro definidas, o tensor de rigidez equivalente  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$  pode ser determinado impondo-se seis estados canônicos independentes de deformação macroscópica, um por vez.

Para cada caso:

1. impõe-se um  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{M}}$  unitário;
2. resolve-se o problema microestrutural;
3. computa-se  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{M}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ ;
4. cada par  $(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{M}}, \boldsymbol{\sigma}^{\text{M}})$  preenche uma coluna do tensor  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$ .

No contexto das estruturas reticuladas consideradas neste trabalho, essa etapa é responsável por capturar a anisotropia emergente tanto do material base quanto da geometria da célula unitária. Assim, o tensor  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$  sintetiza o comportamento equivalente da estrutura reticulada, consolidando de forma objetiva os efeitos da microestrutura no modelo macroscópico.

## 2.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A solução do problema microscópico dentro do Elemento Representativo de Volume (ERV) requer a imposição de condições de contorno que satisfaçam a condição de Hill–Mandel e sejam compatíveis com a decomposição cinemática da equação (18).

Diante das condições impostas por Hill–Mandel apenas certos conjuntos de condições de contorno garantem essa equivalência interescala essas condições são; KUBC, TUBC e PBC. Cada uma traduz, de forma distinta, o estado de deformação/tração imposto ao ERV (Saeb; Steinmann; Javili, 2016).

### 2.5.1 Condições de Contorno KUBC

A condição de contorno KUBC pode ser entendida diretamente a partir da decomposição cinemática equação (18). Neste modelo admite-se que a flutuação  $\mathbf{w}_m$  é nula em todo o domínio do ERV, isto é:

$$\mathbf{w}_m = 0 \quad \forall \mathbf{Y} \in B_0. \quad (23)$$

Substituindo  $\mathbf{w}_m = 0$  na equação (18) obtém-se:

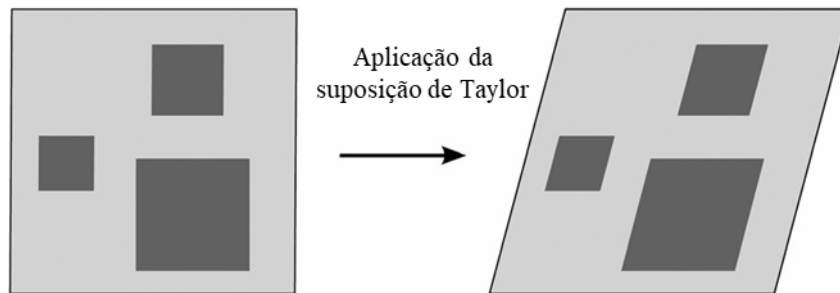
$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}^M \mathbf{Y} \quad (24)$$

Essa expressão implica que todas as partículas do ERV sofrem exatamente a mesma deformação macroscópica:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\varepsilon}^M, \quad \forall \mathbf{Y} \in B_0 \quad (25)$$

Essa hipótese é conhecida na literatura clássica como modelo de Taylor ou hipótese de Voigt, em que a deformação é uniforme em toda a microestrutura. Fisicamente, isso faz com que o ERV se comporte como ilustrado na Figura 9: nenhuma parte pode “relaxar” ou redistribuir deformações internas; toda a microestrutura sofre a mesma deformação (deformação homogênea) imposta pelo valor macroscópico.

Figura 9 - Suposição de Taylor (Voigt).



Fonte: Adaptado (Saeb; Steinmann; Javili, 2016)

Contudo, essa formulação é excessivamente restritiva, pois obriga até as partículas internas do ERV a seguir a deformação afim sem qualquer liberdade. Por isso, uma forma mais coerente consiste em aplicar essa homogeneidade somente na fronteira do ERV, permitindo que as partículas internas desenvolvam flutuações  $\mathbf{w}_m \neq 0$ .

Assim, “relaxando” a suposição de Taylor no interior e mantendo-a apenas na fronteira, chega-se às condições de contorno KUBC propriamente ditas:

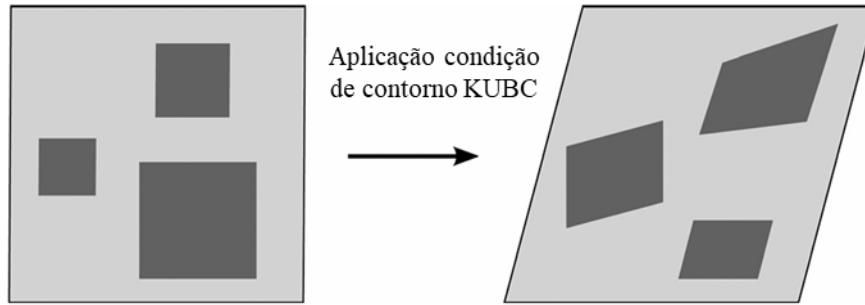
$$\mathbf{u}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\varepsilon}^M \Delta \mathbf{Y}_m, \quad \forall \mathbf{Y} \in \Gamma B_0, \quad (26)$$

onde  $\Gamma B_0$  denota a fronteira do ERV.

Dessa forma:

- as partículas da fronteira estão totalmente controladas pelo campo macroscópico;
- as partículas internas adotam campo flutuante não nulo:  $\mathbf{w}_m \neq 0$ ;

Figura 10 - Condição de contorno de deslocamento uniforme (KUBC).



Fonte: (Saeb; Steinmann; Javili, 2016)

Essa forma modificada aparece na Figura 10 e corresponde à versão “real” da KUBC, frequentemente referida como condição de Dirichlet homogênea no contexto da homogeneização.

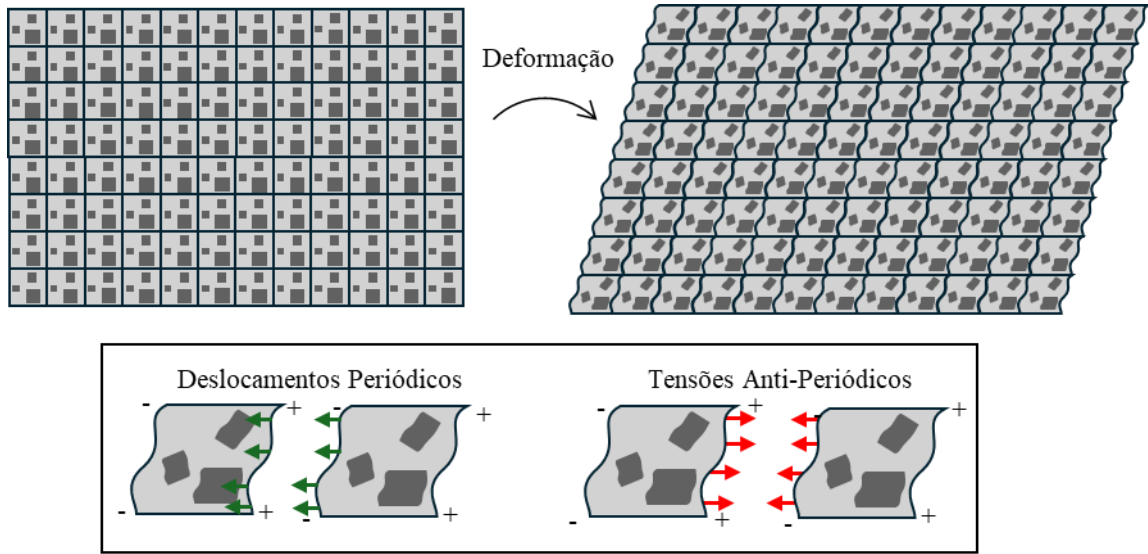
### 2.5.2 Condições de Contorno PBC

Este modelo pressupõe uma geometria periódica, isto é, o meio microestrutural pode ser formado pela repetição dos ERVs adjacentes. A condição cinemática imposta pelo modelo e a continuidade dos deslocamentos flutuantes na fronteira, isto é,

$$\mathbf{u}(\mathbf{Y}^+) - \mathbf{u}(\mathbf{Y}^-) = \boldsymbol{\varepsilon}^M \mathbf{Y}_m^+ - \boldsymbol{\varepsilon}^M \mathbf{Y}_m^- + \mathbf{w}_m - \mathbf{w}_m \quad (27)$$

Quando estas condições são atingidas, as tensões resultantes na microestrutura são antiperiódicas entre ERVs adjacentes (ver Figura 11)

Figura 11 - Deslocamentos periodicos e Tensões anti-periodicas.



Fonte: Autor

### 2.5.3 Condições de Contorno TUBC

É possível aplicar raciocínio semelhante para obter as condições TUBC. Essa condição é derivada do modelo de Reuss — que impõe que todos os pontos da microescala estejam sob o mesmo estado de tensão da macroescala — essa suposição pode ser escrita como:

$$\sigma(\mathbf{X}_m) = \sigma^M, \forall \mathbf{X}_m \in B_0. \quad (28)$$

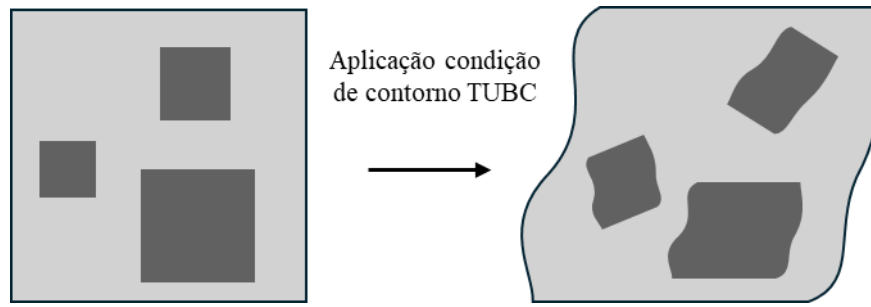
Essa modelo é base para a condição TUBC, que é realmente imposta nas fronteiras. Assim, a forma natural de implementação é impor tração uniforme nas fronteiras do ERV:

$$\sigma(\mathbf{X})\mathbf{n} = \sigma^M\mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma B_0. \quad (29)$$

Neste modelos:

- Não há restrição cinemática na fronteira
- O campo de deslocamento flutuante é determinado de maneira a satisfazer a condição (29).

Figura 12 - Condição de contorno TUBC.



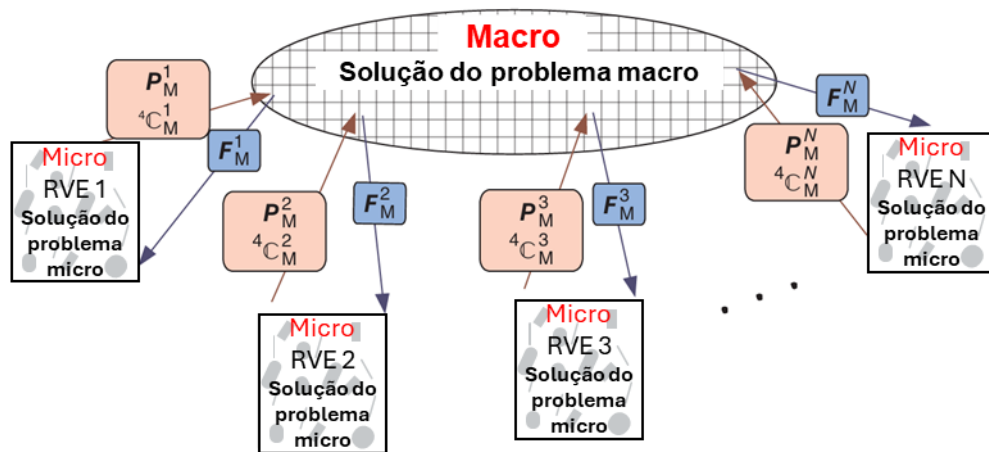
Fonte: Autor

Fisicamente, isso leva à situação ilustrada na Figura 12: a microestrutura pode se deformar de maneiras complexas enquanto equilibra a tração aplicada.

## 2.6 FE<sup>2</sup> OFFLINE

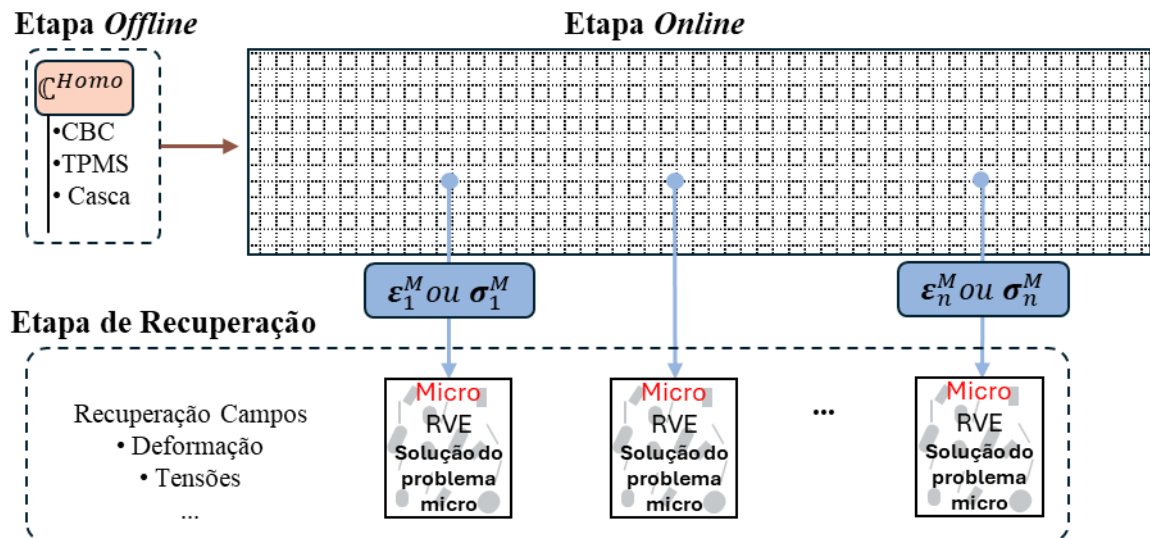
A homogeneização de 1ª ordem permite representar a resposta mecânica de uma microestrutura periódica por meio de um contínuo equivalente, caracterizado por um tensor de rigidez efetivo  $\mathbb{C}^{Homo}$ . Esse tensor sintetiza, no nível macroscópico, os efeitos combinados da geometria e das propriedades constitutivas presentes na microescala. A consistência energética entre os dois níveis é garantida pela condição de Hill–Mandel e, no regime linear elástico, conduz diretamente às relações das equações (21) e (22)(22).

No método FE<sup>2</sup> clássico, tais relações são satisfeitas resolvendo-se, em cada ponto de integração da malha macroscópica, um problema de microescala (ERV) sob condições de contorno energeticamente consistentes (KUBC, TUBC ou PBC). Esse acoplamento direto, embora rigoroso, é computacionalmente caro e exige a implementação completa de um solucionador multiescala dedicado, envolvendo comunicação contínua entre macro e micro, conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13 - Método de abordagem FE<sup>2</sup> classica.

Fonte: Adaptado (Saeb; Steinmann; Javili, 2016)

Então a variante FE<sup>2</sup> *offline* divide o processo em três etapas complementares; offline, online e recuperação conforme a Figura 14.

Figura 14- Método de abordagem FE<sup>2</sup> *offline*.

Fonte: Autor

Na etapa offline, define-se o ERV e escolhe-se uma condição de contorno energeticamente consistente, tipicamente KUBC, PBC ou TUBC. Em seguida, resolvem-se seis casos canônicos independentes no ERV, a partir dos quais se computam as tensões médias ou deformações médias e se monta o tensor efetivo de rigidez do material equivalente.

Na segunda etapa ou *online*, é realizada a análise da estrutura macroscópica, em cada ponto de integração obtém-se o estado de deformação ou tensão macroscópico sem precisar

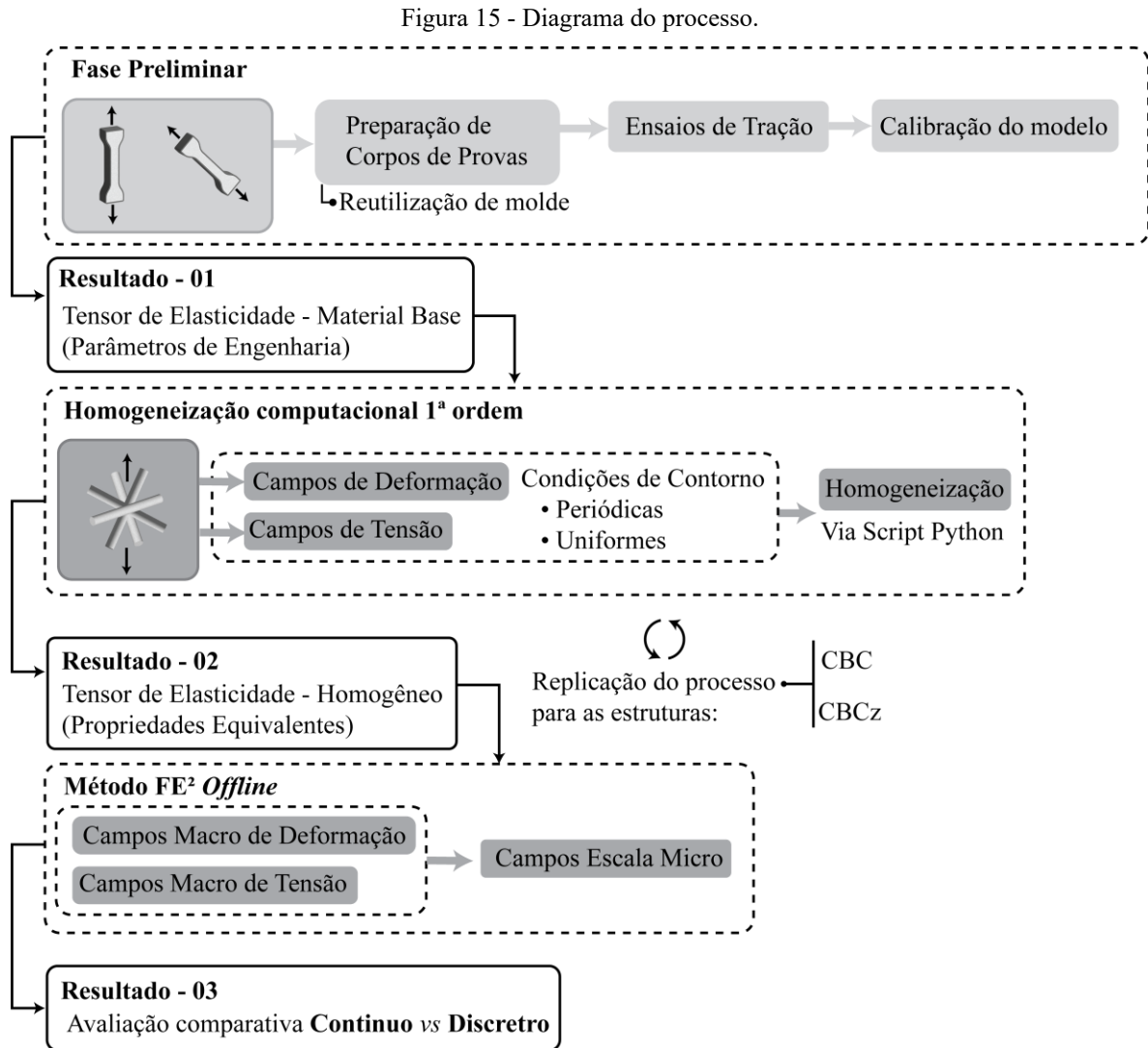
resolver o micro a cada passo, preservando a compatibilidade com as hipóteses da homogeneização.

A terceira fase trata-se da recuperação microestrutural após a solução macro. A ideia é, uma vez conhecida a deformação ou tensão macro, “descer” novamente ao ERV e reconstruir campos locais fisicamente plausíveis, respeitando a mesma condição de contorno adotada na homogeneização.

Em síntese, o  $FE^2$  *offline* preserva rigor matemático e consistência energética, ao mesmo tempo em que elimina o custo de acoplamento do  $FE^2$  clássico. Além disso, permite que toda a etapa *online* seja realizada em softwares comerciais, mantendo apenas a fase de homogeneização no ambiente especializado.

### 3 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho foi organizada de forma a integrar resultados experimentais, modelagem geométrica detalhada e análises numéricas multiescala baseadas em homogeneização de 1ª ordem. A Figura 15 apresenta uma visão geral do processo adotado.



Fonte: Autor

A primeira etapa consiste na calibração do material 316L, com preparação e instrumentação dos corpos de prova, execução dos ensaios de tração e processamento dos sinais. Obtêm-se os parâmetros de engenharia e define-se dos parâmetros do modelo constitutivo para o 316L fabricado por FLP-L. O resultado desta etapa é o tensor de rigidez do material base, utilizado nas células unitárias (Resultado - 01).

A segunda fase abrange o desenvolvimento da estruturas reticuladas e construção de malhas periódicas. Esta preparação estabelece a periodicidade geométrica necessária para aplicação de condições de contorno periódicas. Em sequencias o agrupamentos dos nós e faces da fronteira para aplicação das condições de contorno uniformes do ERV e organiza os conjuntos necessários à imposição consistente das condições de contorno e casos canônicos de macro deformação.

A próxima etapa compreende análises via MEF com imposição de condições de contorno PBC, TUBC e KUBC, visando à obtenção de campos de deformação e de tensão em células unitárias sob seis casos canônicos uniaxiais. As análises por elementos finitos foram realizadas via *Abaqus/Standard* e auxiliadas com o uso de rotinas de programação, na qual a linguagem Python foi utilizada. No pós-processamento são determina os campos para cálculo do tensor de rigidez efetivo  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$  e propriedades equivalentes (módulos de Young, coeficientes de Poisson e módulos de cisalhamento efetivos). O resultado desta etapa é o tensor  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$  (Resposta - 02).

Diante desse encadeamento, os estudos são replicados entre as estruturas reticuladas CBC e CBCz, explorando variações geométricas (tamanho da célula, razão comprimento/raio das barras e densidade relativa) e examinando a sensibilidade das propriedades efetivas às escolhas de condição de contorno.

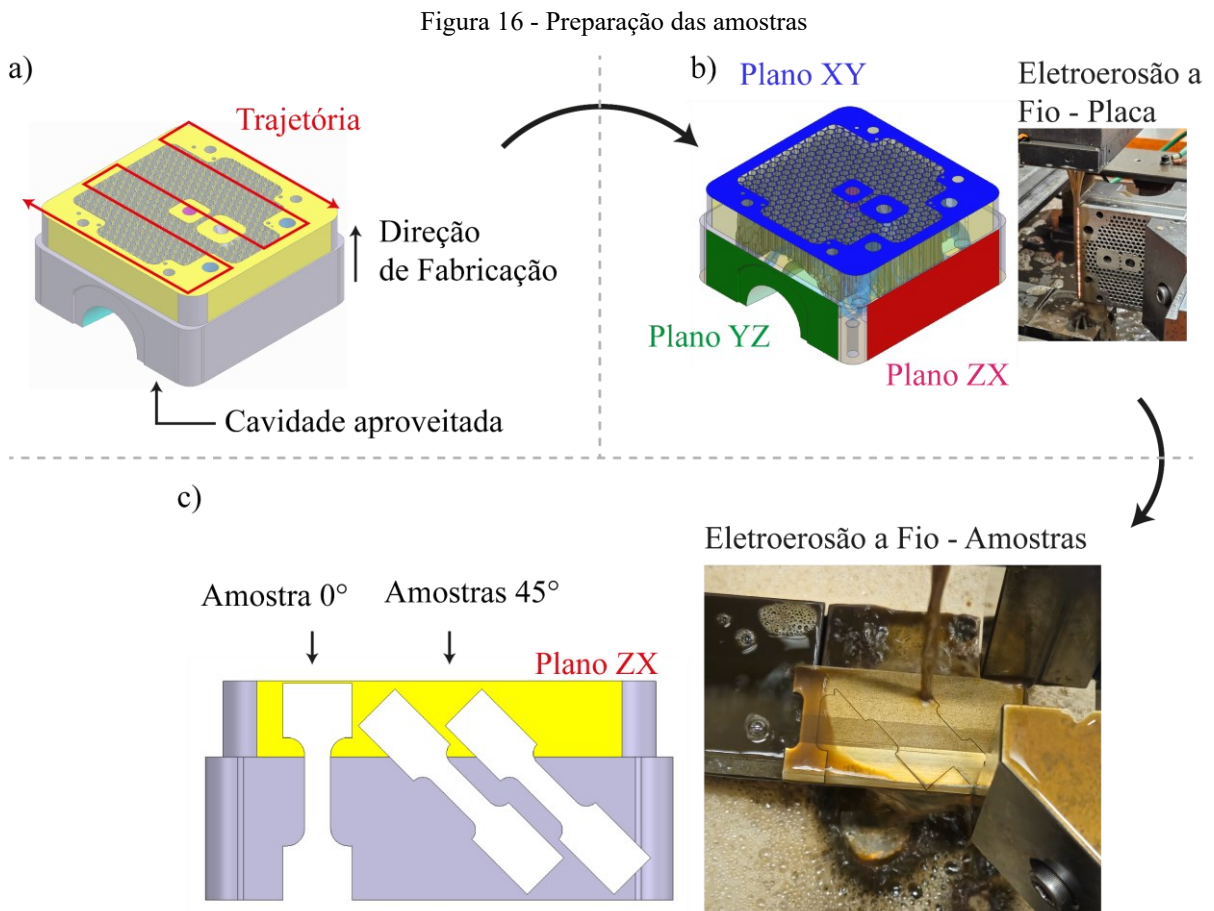
Por fim, realiza-se a verificação através do métodos de  $\text{FE}^2$  *offline* avaliando deslocamentos e tensões, comparando o modelo homogeneizado aplicado o  $\text{FE}^2$  *offline* com o modelos totalmente discretizado onde assume-se que seja mais próximo do comportamento real da estrutura.

### 3.1 CALIBRAÇÃO AÇO 316L FABRICADO POR FLP-L

A primeira etapa da metodologia consiste na caracterização mecânica do material base 316L fabricado por FLP-L. Nessa fase, obtêm-se os parâmetros elásticos necessários para a definição do modelo constitutivo utilizado nas análises numéricas. Esses parâmetros são determinados a partir de ensaios de tração instrumentados com extensômetros (SG) e de procedimentos de processamento dos sinais adquiridos, resultando nas constantes de engenharia empregadas posteriormente na modelagem das células unitárias e na homogeneização de 1ª ordem.

### 3.1.1 Preparação das Amostras

Com o objetivo de obter parâmetros para o modelo constitutivo, foram preparados corpos de prova em direções e planos que permitissem a caracterização do comportamento anisotrópico do material. Além disso, em cada plano, variaram-se os ângulos de orientação entre  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , a fim de avaliar a anisotropia entre as direções principais. As amostras foram extraídas a partir da reutilização de uma cavidade de molde de injeção fabricada por FLP-L, que utilizou um tamanho de ponto de  $100\mu\text{m}$  e comprimento de onda do laser de  $1070\text{nm}$  com tamanho médio de partícula de  $15\text{-}106\mu\text{m}^2$ , conforme ilustrado na Figura 16 a).



Fonte: Autor

Diante do material ainda disponível no molde foram usinadas, via eletroerosão a fio, placas nos três planos principais (Figura 16 b)). Esse processo foi realizado utilizando a máquina Agie Gharmilles +GF+ (Figura 17). Em seguida, os corpos de prova foram obtidos a partir dessas placas, também por eletroerosão a fio (Figura 16 c)).

Figura 17 - Agie Charmilles +GF+ eletroerosão a fio.



Fonte: Autor

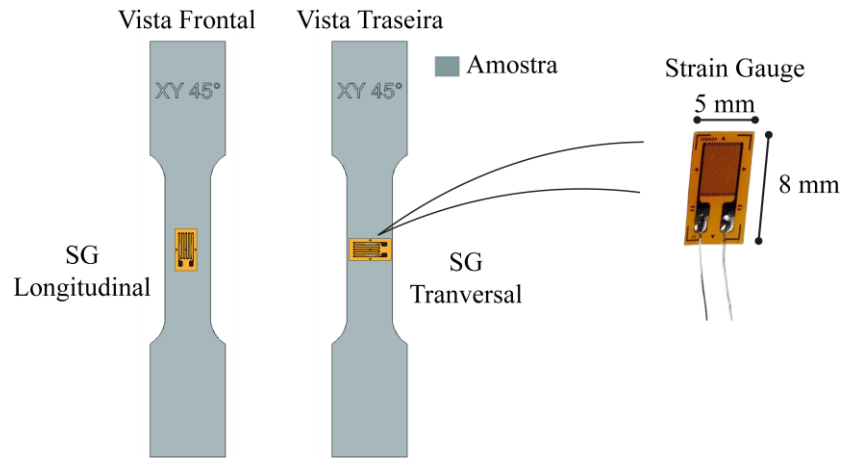
O objetivo inicial era a obtenção de 18 corpos de prova, sendo três em cada um dos três planos principais, totalizando nove amostras distintas, com a adição de uma réplica para cada, logo total de 18 amostras.

Devido às limitações dimensionais do molde, não foi possível aplicar integralmente os critérios geométricos estabelecidos pela norma ASTM E8/E8M para corpos de prova destinados a ensaios de tração. Por essa razão, as amostras foram confeccionadas com geometrias distintas, buscando utilizar o máximo de material disponível no molde, no anexo A são apresentadas as dimensões de cada corpo de prova.

### 3.1.2 Sistema de Medição e Aquisição de Dados

Para capturar os dados durante o ensaio de tração foram utilizados (SG) colados na superfície do corpo de prova. O objetivo foi obter tanto o modelo de elasticidade quanto o coeficiente de Poisson, para tal foi definido a utilização de dois sistemas de  $\frac{1}{4}$  Ponte de Wheastone para capturar simultaneamente as deformações longitudinais e transversais. A Figura 18 mostra o posicionamento dos SG no corpos de prova.

Figura 18 - Posicionamento dos SG na amostra



Fonte: Autor

O SG utilizado apresentava especificações conforme a Tabela 1.

Tabela 1 - Especificações extensômetro

| Strain Gauge BX120-3AA             |             |
|------------------------------------|-------------|
| Resistência                        | 120 Ohms    |
| Fator de Sensibilidade Axial       | 2,00 ~ 2,20 |
| Coefficiente de Dispersão Sensível | 1%          |
| Limite de Deformação               | 2%          |
| Ciclo de Vida                      | 1 milhão    |
| Temperatura de Trabalho            | -30 ~ 80 °C |

Fonte: Autor

A fixação do SG ocorreu através de adesivo Loctite 406 Cianoacrilato.

O procedimento para fixação seguiu os processos abaixo:

1. Lixamento da superfície da amostra (Lixa d'água 400)
2. Limpeza da superfície lixada
3. Aplicação do Adesivo
4. Cura do adesivo (6 ~ 12 horas)

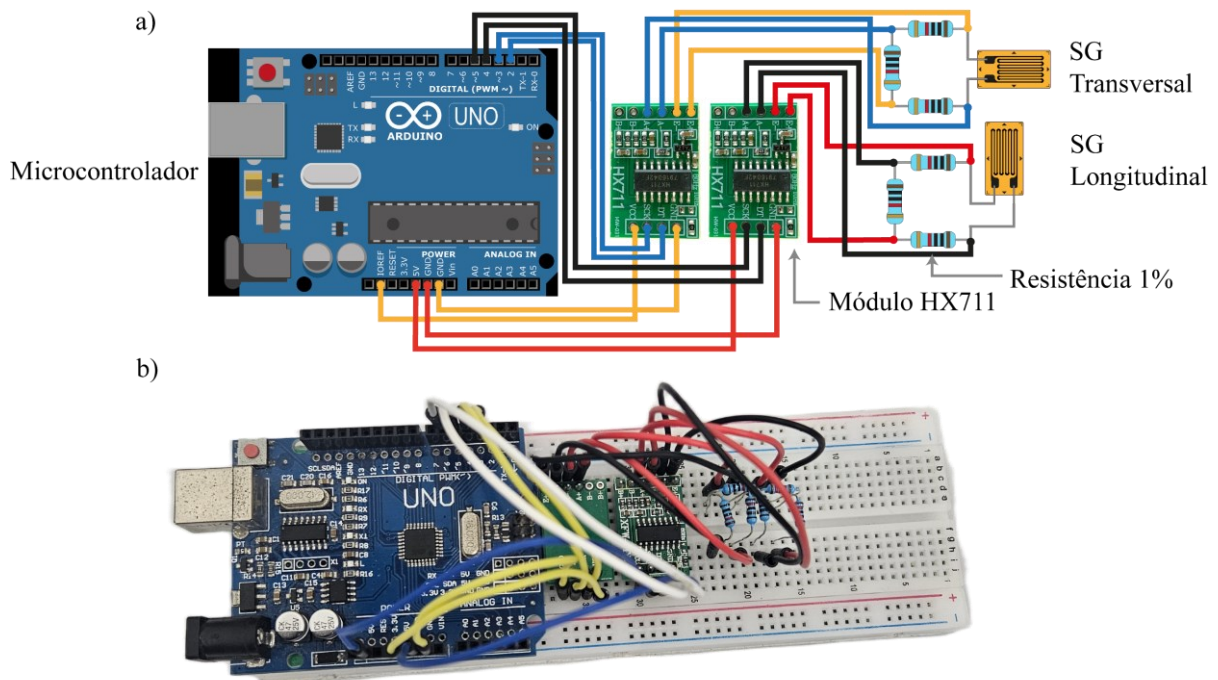
Para realização das leitura do SG foi montado um sistema protótipo para aquisição de sinais. O sistema contia:

1x Arduino UNO com Microcontrolador: ATmega328

- 1x Protoboard 400
- 1x Fonte de alimentação estabilizadora 5 volts
- 2x Módulo Hx711 ADC 24 Bits
- 6x Resistor de precisão 120 ohms 1%

Foi montado o circuito eletrônico conforme o esquema da Figura 19.

Figura 19 - a) Esquema eletrônico do sistema de aquisição de dados. b) Sistema real.



Fonte: Autor

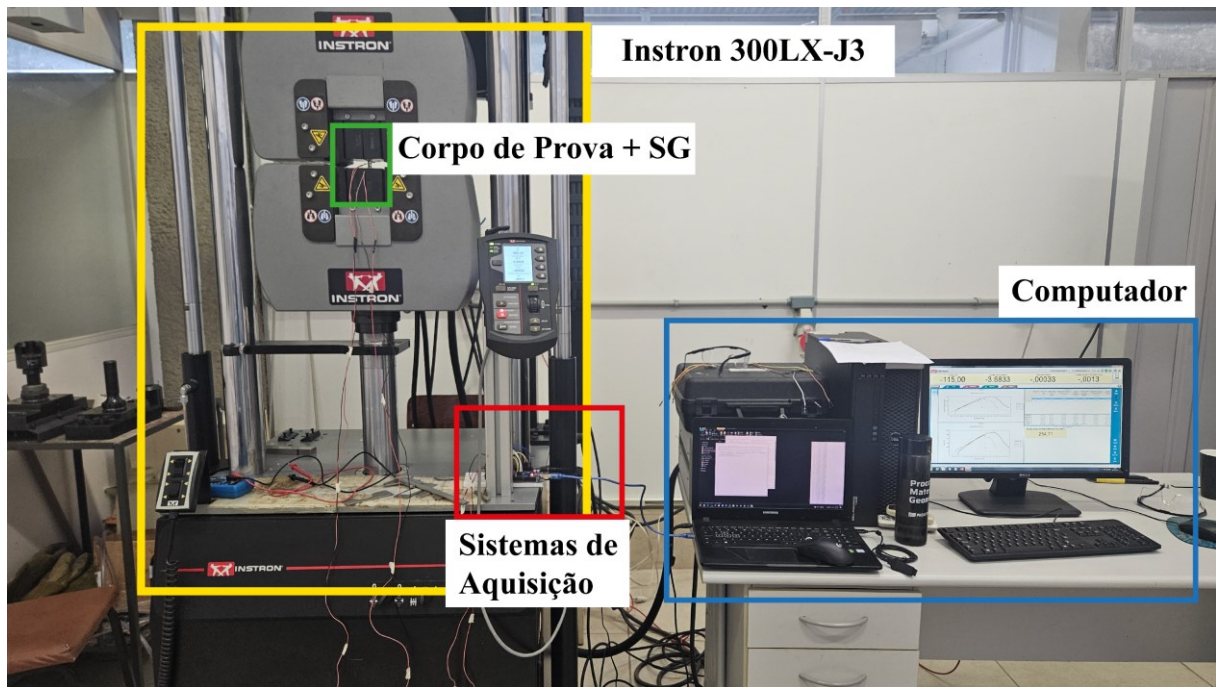
Dessa forma, a variação de resistência elétrica dos SG, era convertida em uma pequena variação de tensão pela Ponte de *Wheatstone*. Essa tensão era então amplificada por módulos HX711, um para cada canal de leitura. Os módulos HX711 apresentam um amplificador com ganho programável de 128 vezes e converte o sinal analógico-digital com ADC (*Analog-to-Digital Converter*) de 24 bits, realizavam a digitalização precisa do sinal analógico.

No microcontrolador, foi desenvolvido um código capaz de realizar a leitura dos dados brutos provenientes do módulo HX711, realizar a conversão da tensão em milivolts, aplicar o zeramento das leituras dos SG, permitir a visualização em tempo real da variação de tensão e armazenar os dados coletados.

### 3.1.3 Ensaios de Tração

Os ensaios de tração foram realizados na máquina Instron 300LX-J3. A Figura 20 apresenta a disposição dos equipamentos no momento do ensaio. Os ensaios foram realizados a uma taxa de deslocamento de 1 mm/min. Alguns ensaios apresentaram falhas durante a execução. Dessa forma, os ensaios realizados estão dispostos o Anexo I

Figura 20 - Ensaio de tração disposição dos equipamentos.



Fonte: Autor

Os dados provenientes dos ensaios de tração foram armazenados por meio de código em Python, posteriormente compilados e analisados.

### 3.1.4 Tratamento dos Dados

A leitura do SG resulta da variação relativa de resistência elétrica da grade metálica quando submetida ao estado deformado. Para pequenas deformações, a relação fundamental é dada por:

$$\frac{\Delta R_{SG}}{R_{SG}} = G_f \epsilon_a, \quad (30)$$

Onde  $\Delta R_{SG}$  são variações de resistência,  $R_{SG}$  a resistência inicial do SG,  $G_f$  é o gauge factor e  $\varepsilon_a$  a deformação axial no alinhamento do SG.

Como o SG responde também à deformação perpendicular à grade, aplica-se a correção padrão para sensibilidade transversal. A resposta elétrica incluindo esse efeito é:

$$\frac{\Delta R_{SG}}{R_{SG}} = G_{f,a}(\varepsilon_a + K \varepsilon_t), \quad (31)$$

sendo  $K$  o fator de sensibilidade transversal. Adotando o estado plano de deformação e usando:

$$\varepsilon_t = -\nu_{SG} \varepsilon_a, \quad (32)$$

obtém-se a forma corrigida:

$$\frac{\Delta R_{SG}}{R_{SG}} = G_f \varepsilon_a (1 - \nu_{SG} K). \quad (33)$$

Para a configuração de  $\frac{1}{4}$  de ponte utilizada, considerando pequenas perturbações, a relação entre a tensão diferencial medida e a variação relativa de resistência é dada por:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{4} \frac{\Delta R_{SG}}{R_{SG}}. \quad (34)$$

Substituindo (33) em (34), chega-se à expressão direta que foi utilizada para converter o sinal elétrico em deformação:

$$\varepsilon = \frac{4}{G_f(1 - \nu_{SG} K)} \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (35)$$

Essa equação é a base do tratamento de dados adotado neste trabalho.

Os módulos de elasticidade das diferentes direções foram obtidos a partir da curva tensão–deformação resultante, o módulo de elasticidade  $E$  em cada direção foi calculado pela regressão linear da região inicial da curva, correspondente ao regime elástico do material.

Esse procedimento fornece o valor de  $E$  diretamente a partir dos dados experimentais, garantindo que os módulos utilizados na modelagem numérica representem fielmente o comportamento medido do material fabricado por FLP-L.

Como não foram realizados ensaios específicos que permitissem obter diretamente os módulos de cisalhamento, esses parâmetros foram estimados a partir de relações analíticas da teoria da elasticidade para materiais anisotrópicos, utilizando as propriedades medidas experimentalmente nas direções principais e nos corpos de prova orientados a  $45^\circ$  (Daniel; Ishai, 2006).

O módulo de cisalhamento associado ao plano 1–2 foi estimado por meio da relação clássica entre o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson nesse plano:

$$G_{12} = \frac{E_x}{2(1 + \nu_{xy})}. \quad (36)$$

Para os planos que envolvem a direção 3, utilizou-se a expressão derivada da transformação das propriedades elásticas sob rotação de  $45^\circ$ , relacionando o módulo aparente  $E_{45^\circ}$  às propriedades principais e ao módulo de cisalhamento buscado:

$$G_{13} = \left[ \frac{4}{E_{45^\circ}} - \left( \frac{1 - 2\nu_{xz}}{E_x} + \frac{1}{E_z} \right) \right]^{-1}. \quad (37)$$

De maneira análoga, o módulo correspondente ao plano 2–3 pode ser obtido por meio da mesma formulação, substituindo-se as propriedades no plano adequado:

$$G_{23} = \left[ \frac{4}{E_{45^\circ}} - \left( \frac{1 - 2\nu_{yz}}{E_y} + \frac{1}{E_z} \right) \right]^{-1}. \quad (38)$$

Essas expressões permitem determinar todos os módulos de cisalhamento necessários ao modelo constitutivo utilizado, mantendo consistência com os parâmetros experimentais previamente obtidos. A definição final do tipo de anisotropia adotado é apresentada posteriormente, juntamente com a discussão dos resultados.

Os coeficientes de Poisson foram obtidos diretamente a partir das medições simultâneas das deformações longitudinal e transversal nos ensaios de tração. Durante cada

ensaio, a deformação transversal  $\varepsilon_{\text{trans}}$  foi registrada por meio de extensômetro biaxial, possibilitando o cálculo de  $\nu$  no regime puramente elástico por:

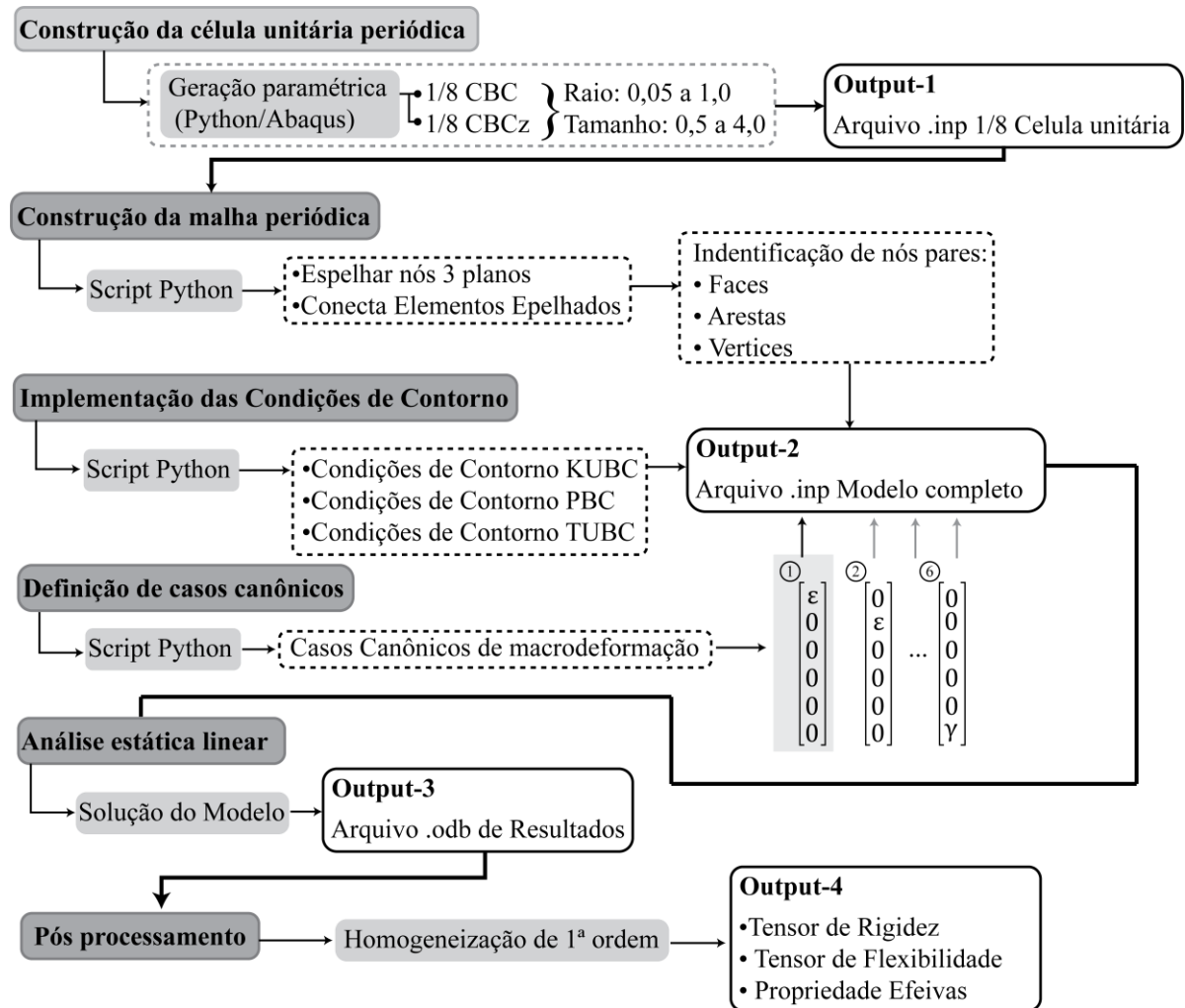
$$\nu = - \frac{\varepsilon_{\text{trans}}}{\varepsilon_{\text{long}}}. \quad (39)$$

Esse procedimento foi repetido para cada orientação analisada, resultando nos coeficientes de Poisson correspondentes às combinações entre as direções principais do material. Os valores obtidos foram posteriormente utilizados em conjunto com os módulos de elasticidade e cisalhamento nas análises numéricas de homogeneização.

### 3.2 ABORDAGEM NUMÉRICA: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A metodologia numérica adotada neste trabalho foi estruturada para implementar a homogeneização de 1ª ordem em células unitárias periódicas representativas das topologias CBC. O processo completo é ilustrado na Figura 21 e compreende: (i) a construção geométrica e a discretização da célula unitária, (ii) a definição das correspondências geométricas necessárias às condições de periodicidade, (iii) a implementação das condições de contorno energeticamente consistentes com a condição de Hill–Mandel (KUBC, TUBC e PBC), (iv) a aplicação dos seis casos canônicos de macrodeformação, (v) a solução estática linear de cada caso no MEF e, por fim, (vi) o pós-processamento para obtenção do tensor de rigidez homogeneizado.

Figura 21 - Diagrama Abordagem Numérica



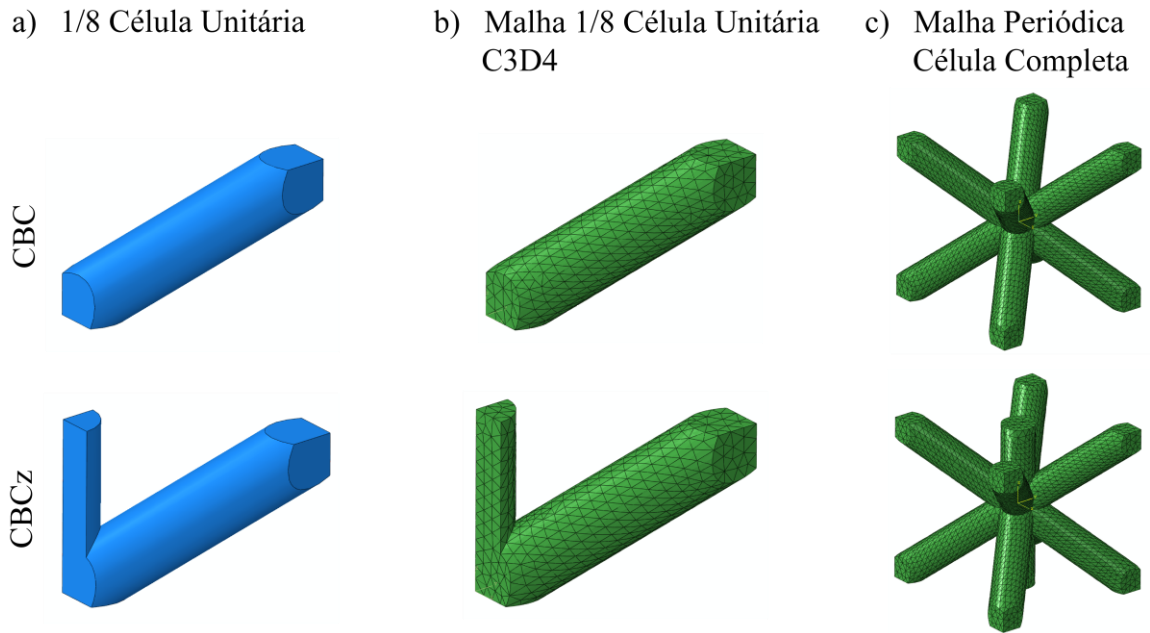
Fonte: Autor

Esse fluxo corresponde à formulação teórica apresentada no capítulo 2, traduzindo-a em uma sequência computacional sistemática para determinar as propriedades efetivas das microestruturas analisadas.

### 3.2.1 Construção ERV Periódico

A célula unitária utilizada neste trabalho representa a menor porção da estrutura reticulada capaz de reproduzir, por repetição periódica, o comportamento mecânico do domínio infinito. Para garantir essa representatividade, a construção geométrica do ERV deve satisfazer duas condições fundamentais: (i) periodicidade espacial e (ii) consistência das correspondências geométricas entre faces, arestas e vértices opostos. Essas condições são essenciais para a aplicação das condições de contorno PBC discutidas na seção 2.5.2.

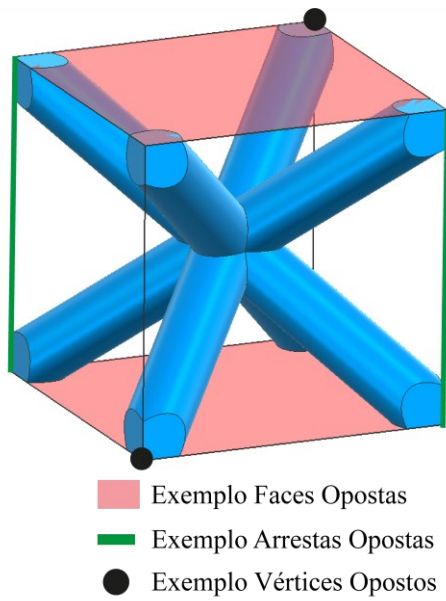
Figura 22 – a) Criação de Instâncias Geométrica. b) Geração de malha C3D4. c) Espelhamento Sequencial da malha Periódica.



Fonte: Autor

Inicialmente, é modelada uma fração da célula (1/8) contendo apenas os elementos necessários para descrever a topologia alvo (CBC e CBCz) Figura 22 a). Essa fração é então reconstruída por espelhamentos sucessivos nos três planos coordenados, resultando em uma célula completa com simetria cúbica e geometria compatível na fronteiras Figura 22 c). O procedimento de espelhamento assegura que cada face, aresta e vértice do ERV possua um correspondente oposto com a mesma posição relativa, garantindo a coincidência nodal — requisito essencial para periodicidade geométrica.

Figura 23 - Identificação e Classificação dos Nós Periódicos



### • Coordenadas dos Nós Pares

#### - Pares internos na face

Face normal à X:  $C_{x+}[+x,y,z] \rightarrow C_{x-}[-x,y,z]$

Face normal à Y:  $C_{y+}[x,+y,z] \rightarrow C_{y-}[x,-y,z]$

Face normal à Z:  $C_{z+}[x,y,+z] \rightarrow C_{z-}[x,y,-z]$

#### - Pares Arestas

Arresta +X+Y:  $C_{x+y+}[+x,+y,z] \rightarrow C_{x-y-}[-x,-y,z]$

Arresta +X-Y:  $C_{x+y-}[+x,-y,z] \rightarrow C_{x-y+}[-x,+y,z]$

Arresta +Z+X:  $C_{z+x+}[+x,y,+z] \rightarrow C_{z-x-}[-x,y,-z]$

Arresta +Z-X:  $C_{z+x-}[-x,y,+z] \rightarrow C_{z-x+}[+x,y,+z]$

Arresta +Y+Z:  $C_{y+z+}[x,+y,+z] \rightarrow C_{y-z-}[x,-y,-z]$

Arresta +Y-Z:  $C_{y+z-}[x,+y,-z] \rightarrow C_{y-z+}[x,-y,+z]$

#### - Pares Vértices

Vértices +X+Y+Z:  $C_{x+y+z+}[+x,+y,+z] \rightarrow C_{x-y-z-}[-x,-y,-z]$

Vértices -X+Y+Z:  $C_{x-y+z+}[-x,+y,+z] \rightarrow C_{x+y-z-}[-x,-y,-z]$

Vértices +X-Y+Z:  $C_{x+y-z+}[+x,-y,+z] \rightarrow C_{x-y+z-}[-x,+y,-z]$

Vértices +X+Y-Z:  $C_{x+y+z-}[+x,+y,-z] \rightarrow C_{x-y-z+}[-x,-y,+z]$

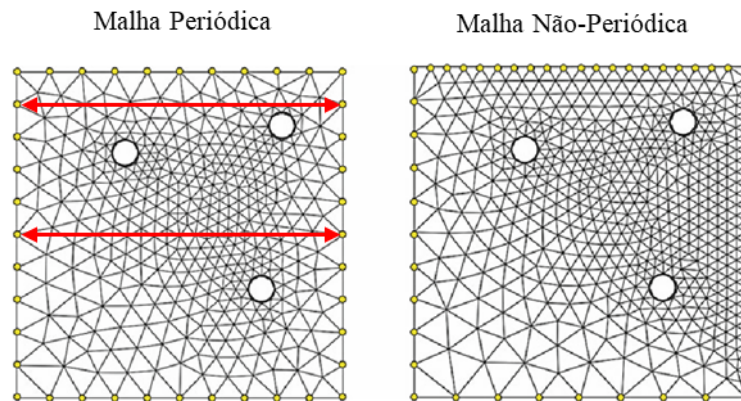
Fonte: Autor

Após a reconstrução, procede-se à identificação dos pares geométricos. Essa etapa consiste em agrupar, para cada fronteira, os nós coincidentes em faces opostas, bem como os pares equivalentes em arestas e os vértices comuns às três direções Figura 23. Esse mapeamento constitui a base para a formulação das condições cinemáticas e de tração (KUBC, TUBC e PBC) implementadas na etapa seguinte da metodologia.

### 3.2.2 Discretização de Requisitos de Periodicidade

A discretização do ERV deve preservar rigorosamente a periodicidade geométrica estabelecida na etapa anterior, pois a consistência entre micro e macro — particularmente sob PBC — depende diretamente da correspondência nodal entre faces opostas Figura 24. Assim, a malha não é apenas uma etapa numérica, mas parte essencial da estrutura mecânica utilizada na homogeneização.

Figura 24 - Malha Periódica e Não-Periódica.



Fonte: (Okereke; Keates, 2018)

Para garantir essa consistência, a discretização foi realizada antes da reconstrução completa da célula unitária periódica, assegurando que cada nó criado no processo possua correspondente único nas faces opostas, utilizando exclusivamente elementos tetraédricos lineares (C3D4).

O critério fundamental adotado é que a malha deve ser periodicamente compatível, isto é:

- nós pertencentes a uma face devem possuir correspondentes com mesma posição relativa na face oposta;
- nós localizados em arestas devem possuir correspondentes nas arestas opostas;
- vértices devem ser compartilhados por todos os espelhamentos;
- o espaçamento entre elementos deve ser idêntico ao longo de direções simétricas.

Essas condições garantem que a relação entre deslocamentos em faces opostas dependa exclusivamente da deformação macroscópica imposta e das flutuações periódicas, conforme a equação (18).

A geração da malha é seguida por uma verificação automática, em que são identificados os conjuntos de nós pertencentes a cada entidade geométrica (faces, arestas e vértices) e respectivos pares opostos. Esse mapeamento é posteriormente utilizado para a formulação das equações de restrição das condições KUBC, TUBC e, especialmente, PBC.

Ao final desse processo, obtém-se um ERV discretizado de forma periodicamente consistente, apto a receber as condições de contorno energeticamente admissíveis segundo Hill–Mandel e preparado para a execução dos casos canônicos de macro deformação.

Por fim, o ERV é discretizado usando elementos tetraédricos lineares (C3D4), assegurando que a malha resultante preserve a periodicidade geométrica Figura 23 c). A discretização periódica garante que diferenças de deslocamento e tensões entre faces opostas dependam exclusivamente da macro deformação imposta, conforme requerido pela homogeneização de 1ª ordem e pela condição de Hill–Mandel.

### 3.2.3 Aplicação das Condições de Contorno

A correta implementação das condições de contorno no ERV é etapa central da homogeneização de 1ª ordem, pois determina como a deformação macroscópica é transferida à microestrutura e garante a consistência energética entre as escalas, conforme a condição de Hill–Mandel. A aplicação dessas condições exige, portanto, tanto a identificação precisa das entidades de fronteira (faces, arestas e vértices em pares opostos) quanto a formulação das equações de restrição que definem o comportamento cinemático admissível em cada caso.

Nas subseções seguintes, apresentam-se as três condições de contorno utilizadas — KUBC, TUBC e PBC — descrevendo-se a fundamentação teórica, significado físico e a implementação no contexto do Método dos Elementos Finitos.

#### 3.2.3.1 Condição de Contorno Periódicas

Após a identificação dos nós de fronteira e os correspondentes em faces, arestas e vértices opostos, procede-se à implementação das condições de contorno PBC. Como discutido na seção 2.5.2, a periodicidade impõe que, para qualquer par de pontos correspondentes  $Y^+$  e  $Y^-$ , o salto de deslocamento entre nós seja determinado exclusivamente pela macro deformação imposta:

$$u(Y^+) - u(Y^-) = \varepsilon^M(Y^+ - Y^-). \quad (40)$$

Essa relação constitui a base da formulação computacional da PBC. Para implementá-la no contexto do MEF, é necessário expressar a equação (40) em termos discretos, para cada tipo de entidade geométrica da fronteira: faces, arestas e vértices. Esse detalhamento é essencial, pois a periodicidade ocorre de maneira diferente conforme a dimensionalidade da entidade.

Tabela 2 - Equações canônicas periódicas por entidades geométricas.

| Equações Canônicas PBC                       |                                                                         |                                                                                                     |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Equações Faces                               | Equações Aristas                                                        | Equações Vértices                                                                                   |
| $u_i^{x+} - u_i^{x-} = L_x \varepsilon_{i1}$ | $u_i^{+x+y} - u_i^{-x-y} = L_x \varepsilon_{i1} + L_y \varepsilon_{i2}$ | $u_i^{+x+y+z} - u_i^{-x-y-z} = L_x \varepsilon_{i1} + L_y \varepsilon_{i2} + L_z \varepsilon_{i3}$  |
| $u_i^{y+} - u_i^{y-} = L_y \varepsilon_{i2}$ | $u_i^{+x-y} - u_i^{-x+y} = L_x \varepsilon_{i1} - L_y \varepsilon_{i2}$ | $u_i^{-x+y+z} - u_i^{+x-y-z} = -L_x \varepsilon_{i1} + L_y \varepsilon_{i2} + L_z \varepsilon_{i3}$ |
| $u_i^{z+} - u_i^{z-} = L_z \varepsilon_{i3}$ | $u_i^{+z+x} - u_i^{-z-x} = L_z \varepsilon_{i3} + L_x \varepsilon_{i1}$ | $u_i^{+x-y+z} - u_i^{-x+y-z} = +L_x \varepsilon_{i1} - L_y \varepsilon_{i2} + L_z \varepsilon_{i3}$ |
|                                              | $u_i^{+z-x} - u_i^{-z+x} = L_z \varepsilon_{i3} - L_x \varepsilon_{i1}$ | $u_i^{+x+y-z} - u_i^{-x-y+z} = +L_x \varepsilon_{i1} + L_y \varepsilon_{i2} - L_z \varepsilon_{i3}$ |
|                                              | $u_i^{+y+z} - u_i^{-y-z} = L_y \varepsilon_{i2} + L_z \varepsilon_{i3}$ |                                                                                                     |
|                                              | $u_i^{+y-z} - u_i^{-y+z} = L_y \varepsilon_{i2} - L_z \varepsilon_{i3}$ |                                                                                                     |

Fonte: Autor

A Tabela 2 apresenta o conjunto completo das equações periódicas utilizadas neste trabalho, derivadas da equação (40) e escritas em componentes. A formulação contempla:

- pares de faces opostas;
- pares de arestas opostas (envolvendo duas direções espaciais);
- pares de vértices (envolvendo três direções simultâneas).

Essas relações garantem que o campo de deslocamentos flutuante  $\mathbf{w}_m$  seja estritamente periódico, de modo que as flutuações se anulem ao se avaliar o salto entre faces.

A implementação dessas equações no *Abaqus/Standard* foi realizada por meio de equações de restrição lineares. Para cada par de nós correspondentes, é criada uma equação que relaciona os graus de liberdade de acordo com os termos da Tabela 2. A macrodeformação é aplicada por meio de pontos de referência (RP), um para cada componente independente, que aparecem nas equações como termos adicionais.

Figura 25 - Exemplo de implementação das equações canônicas periódicas no Abaqus.

Interface Abaqus

Edit Constraint

Name: Eqn-7

Type: Equation

Enter one row of data for each term in the equation

Click mouse button 3 for table options.

| Coefficient | Set Name      | DOF | CSYS ID  |
|-------------|---------------|-----|----------|
| 1           | N_2327_INT_X+ | 3   | (global) |
| -1          | N_9533_INT_X- | 3   | (global) |
| -1          | RP_XP         | 3   | (global) |
| 1           | RP_XM         | 3   | (global) |

OK Cancel

$$u_i^{x+} - u_i^{x-} = L_x \varepsilon_{i1} \rightarrow u_i^{x+} - u_i^{x-} - L_x \varepsilon_{i1} = 0$$

Eixos Principais (X,Y,Z)
Deslocamento do nó
Deformação/Deslocamento Macro

Arquivo .inp

```

** Constraint: Eqn-INT-X-N2327-N9533-DOF3
*Equation
4
N_2327_INT_X+, 3, 1.
N_9533_INT_X-, 3, -1.
RP_XP, 3, -1.
RP_XM, 3, 1.

```

Fonte: Autor

A Figura 25 mostra um exemplo da implementação no Abaqus, evidenciando a equivalência entre a representação gráfica da equação e a forma escrita no arquivo *.inp*.

### 3.2.3.2 Condição de contorno KUBC

As KUBC representam a hipótese de Taylor/Voigt para homogeneização: o campo de deformações interno ao ERV é igual ao campo macroscópico. Essa condição corresponde a assumir  $\mathbf{w}_m = 0$  em toda a microestrutura, resultando em deslocamentos puramente afins conforme a equação (26).

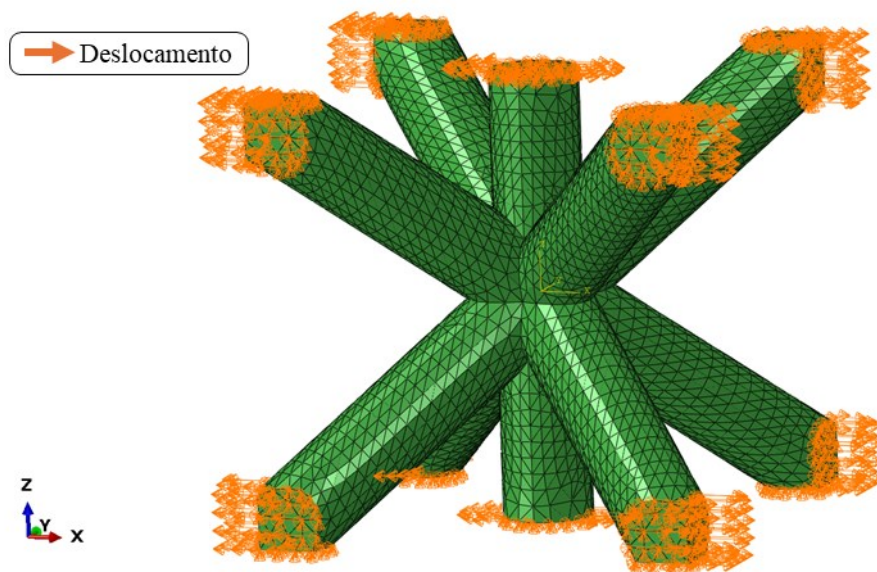
No contexto do MEF, a implementação é realizada impondo-se esse deslocamento afim somente sobre as fronteiras do ERV, liberando todos os nós internos. Assim, para cada nó  $n$  pertencente à fronteira  $\Gamma B_0$  a restrição é:

$$u_i^n = \varepsilon^M Y_i^n, \quad (41)$$

Com  $i$  sendo as direções dos eixos.

Essa formulação reduz a rigidez efetiva e conduz a um limite superior para o módulo homogeneizado, como esperado pela hipótese de Taylor. Em termos físicos, impõe-se que todas as partículas da fronteira acompanhem integralmente a deformação média aplicada ao ERV.

Figura 26 - Exemplo de Condição de Contorno KUBC.



Fonte: Autor

A Figura 26 ilustra a aplicação dos deslocamentos nos nós da fronteira de forma direta.

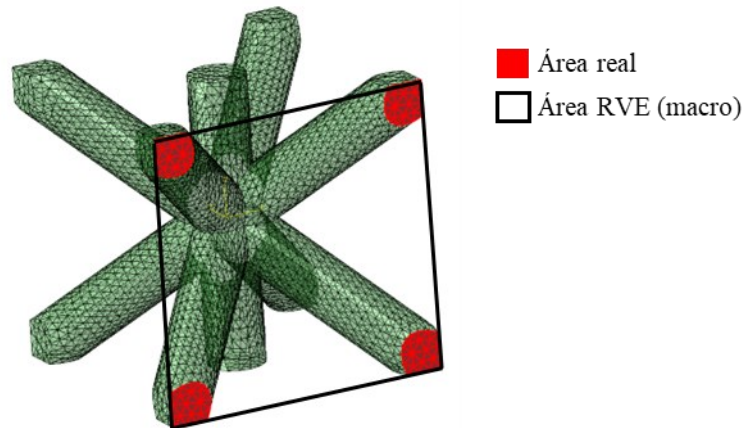
### 3.2.3.3 Condição de Contorno TUBC

As condições de contorno TUBC correspondem à hipótese de Reuss na homogeneização: assume-se que a tensão macroscópica é transmitida de forma uniforme à estrutura. Diferentemente das KUBC, que impõem deslocamentos prescritos na fronteira, as TUBC requerem a aplicação de trações constantes em cada face do ERV.

No entanto, quando o ERV representa estrutura reticulada, como as topologias CBC e CBCz as fronteiras não são superfícies contínuas, mas regiões vazadas compostas apenas pelas terminações das barras. Assim, não é fisicamente coerente aplicar tração uniforme diretamente sobre os nós da fronteira, pois a área do ERV é diferente da área real da estrutura reticulada.

Para tratar de forma equivalente e manter a consistência com a condição de Hill–Mandel, foi utilizado uma relação entre as áreas, correspondente ao contorno contínuo do ERV e área real da célula unitária, conforme ilustrado na Figura 27

Figura 27 - Relação de superfícies TUBC.



Fonte: Autor

Nessa representação, a área real (composta pelas seções transversais das barras) é significativamente menor que a área contínua do ERV. Portanto, para que a potência interna média seja equivalente à potência macroscópica (condição de Hill–Mandel), a tração aplicada à superfície real deve ser amplificada pela razão:

$$\eta = \frac{\dot{A}rea_{ERV}}{\dot{A}rea_{real}}, \quad (42)$$

resultando em:

$$\mathbf{t}_{real} = \eta \boldsymbol{\sigma}^M \mathbf{n}. \quad (43)$$

Aqui:

- $\mathbf{t}_{real}$  é a tração aplicada nas barras que interceptam a fronteira,
- $\boldsymbol{\sigma}^M$  é o tensor de tensões macroscópico desejado,
- $\mathbf{n}$  é o vetor normal da face considerada.

Essa relação assegura que a força total aplicada no contorno real da célula unitária produza o mesmo trabalho virtual que a tração uniforme aplicada na superfície contínua equivalente.

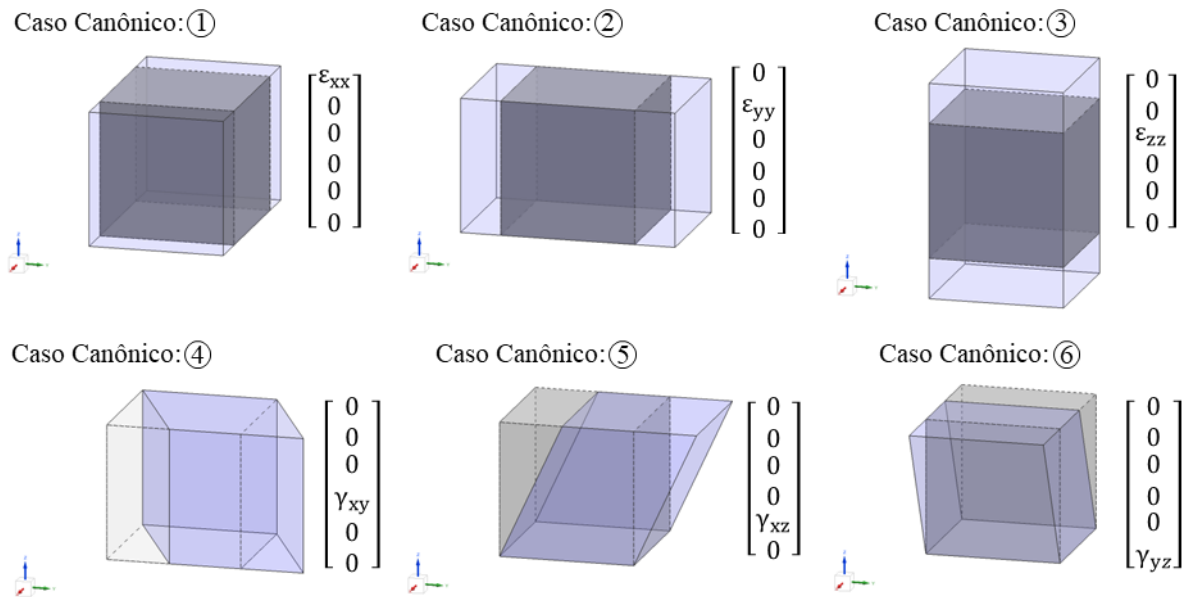
### 3.2.4 Formulação dos Casos Canônicos

Após a definição e implementação das condições de contorno energeticamente consistentes (PBC, KUBC e TUBC), a etapa seguinte consiste na formulação dos casos canônicos de macrocarregamento, utilizados para excitar independentemente as componentes do tensor de rigidez homogeneizado  $\mathbb{C}^{Homo}$ .

Do ponto de vista da homogeneização de 1ª ordem, o caráter linear do problema implica que a relação constitutiva macroscópica pode ser escrita conforme a equação (22) de modo que, para determinar completamente o tensor  $\mathbb{C}^{Homo}$ , é necessário resolver um conjunto mínimo de problemas cuja combinação permita recuperar todas as componentes independentes.

No caso tridimensional com simetria menor e maior preservadas, seis estados independentes de macrodeformação (ou macrotensão, no caso da TUBC) são suficientes para excitar todas as componentes do tensor, resultando nos seis casos canônicos.

Figura 28 - Caso Canônicos de Deformação.



Fonte: Autor

A Figura 28 apresenta esses seis estados elementares, cada um impondo apenas uma componente não nula do vetor de deformações macroscópicas  $\boldsymbol{\epsilon}^M$ .

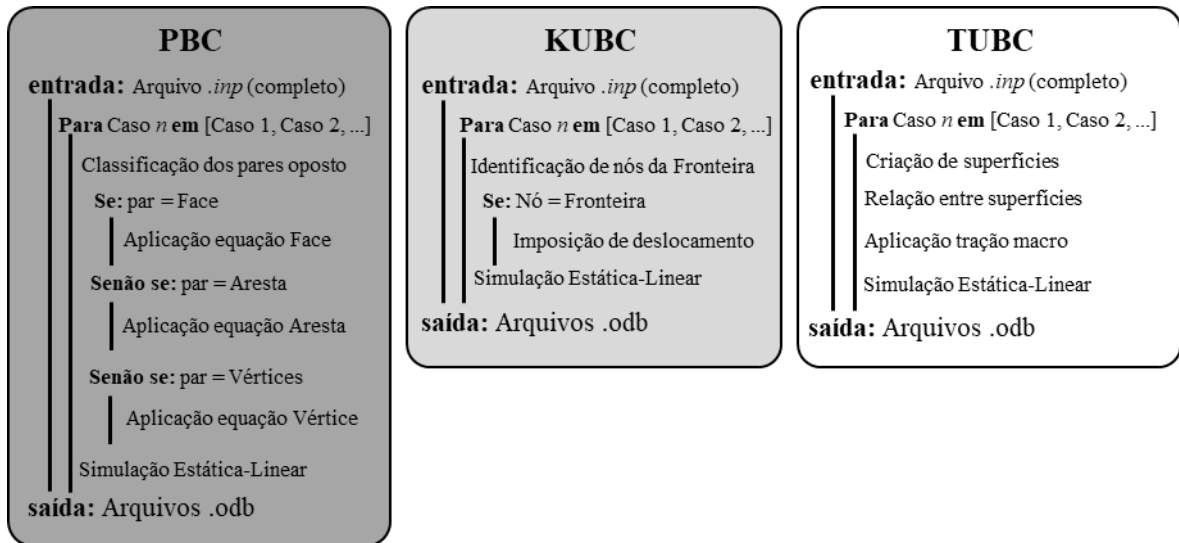
Para cada caso, é conduzida uma análise estática linear independente, a partir da qual obtêm-se:

- campos internos de deformação  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ ;
- campos internos de tensão  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ ;
- grandezas médias  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  e  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ , obtidas por integração volumétrica.

Em seguida, os resultados são organizados externamente (Python) para formar as colunas do tensor de rigidez efetivo.

O processo de execução das análises para cada BC segue a lógica apresentada na Figura 29, onde o script percorre cada caso canônico, aplica as equações, resolve o problema e armazena o arquivo *.odb*.

Figura 29 - Pseudo-código condições de contorno + casos canônicos.



Fonte: Autor

Esse pseudo-código resume a lógica implementada no conjunto de *scripts* Python desenvolvidos para este trabalho, deixando explícitas as diferenças estruturais entre as formulações PBC, KUBC e TUBC.

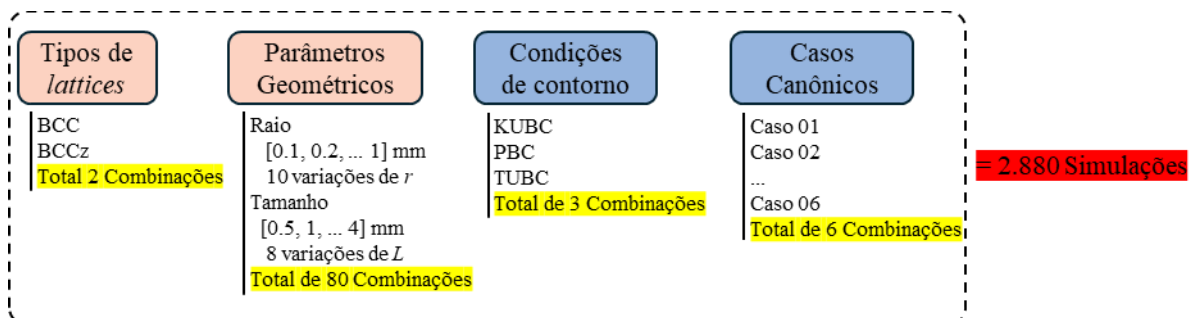
A partir desse fluxo de trabalho e considerando:

- 2 topologias de célula unitária (CBC e CBCz);
- 80 combinações geométricas (variações de célula, raio, tamanho);
- 3 condições de contorno (PBC, KUBC, TUBC);
- 6 casos canônicos independentes;

o número total de modelos numéricos calculados é:

$$2 \times 80 \times 3 \times 6 = 2.880 \text{ simulações.} \quad (44)$$

Figura 30 - Quantidade de simulações realizadas.



Fonte: Autor

Esse conjunto de simulações forma a base completa necessária para calcular o tensor de rigidez efetivo  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$  para cada combinação e investigar a sensibilidade das propriedades efetivas à geometria da célula unitária.

### 3.2.5 Pós processamento e Homogeneização Volumétrica

A partir dos seis casos canônicos resolvidos para cada combinação geométrica e condição de contorno (PBC, KUBC e TUBC), obtêm-se as distribuições internas de tensão  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$  e deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})$  no ERV. Esses campos são então processados para construção do tensor de rigidez efetivo  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$ , conforme os princípios da homogeneização de 1ª ordem discutidos no capítulo 2.4.

Para as condições de contorno PBC e KUBC, a consistência energética da condição de Hill–Mandel garante a equivalências conforme a equação (21) onde  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  e  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  são obtidos por médias volumétricas dos campos internos:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V_{\text{ERV}}} \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \boldsymbol{\sigma}_e V_e, \quad (45)$$

Onde:

- $V_{\text{ERV}}$  é o volume do ERV
- $n_{\text{elem}}$  a quantidade de elementos finitos da célula unitária
- $\boldsymbol{\sigma}_e$  e  $V_e$ , tensor de tensões médio do elemento finito e volume do elemento finito  $e$ , respectivamente.

A média envolve todo o volume do ERV, incluindo vazios, como requerido pela homogeneização geométrica de estruturas celulares.

Como a deformação macroscópica  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{M}}$  é prescrita diretamente (nas PBC e KUBC), para cada caso canônico  $i$  tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{M}} = \varepsilon_i \mathbf{e}_i, \quad (46)$$

onde  $\mathbf{e}_i$  é o vetor unitário que excita apenas a  $i$ -ésima componente da deformação na notação de Voigt.

Aplicando a relação constitutiva macroscópica:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(i)} = \mathbb{C}^{\text{Homo}} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)}, \quad (47)$$

e sabendo que cada caso canônico tem apenas uma componente de macrodeformação diferente de zero:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} = \varepsilon_i \mathbf{e}_i, \quad (48)$$

segue que a  $i$ -ésima coluna do tensor homogeneizado é dada diretamente por:

$$\mathbb{C}_i^{\text{Homo}} = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(i)}}{\varepsilon_i}. \quad (49)$$

Assim, a partir das seis simulações canônicas obtém-se as seis colunas de  $\mathbb{C}^{\text{Homo}}$ , formando o tensor completo.

Para a condição de contorno TUBC, o procedimento é inverso: a grandeza prescrita é a tensão macroscópica e a grandeza média obtida é a deformação:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(i)} = \sigma_i \mathbf{e}_i, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} = \frac{1}{V_{\text{ERV}}} \sum \boldsymbol{\varepsilon}_e V_e. \quad (50)$$

Neste caso, a relação constitutiva macroscópica resulta diretamente no cálculo da matriz de flexibilidade efetiva:

$$\mathbb{S}_i^{\text{Homo}} = \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)}}{\sigma_i}, \quad (51)$$

e o tensor de rigidez efetivo é recuperado pela inversão:

$$\mathbb{C}^{\text{Homo}} = (\mathbb{S}^{\text{Homo}})^{-1}. \quad (52)$$

Com o tensor de rigidez efetivo obtido, calcula-se o tensor de flexibilidade:

$$\mathbb{S}^{\text{Homo}} = (\mathbb{C}^{\text{Homo}})^{-1}. \quad (53)$$

a partir do qual são extraídos os parâmetros equivalentes da estrutura reticulada:

- Módulos de Young

$$E_x = \frac{1}{\mathbb{S}_{11}}, \quad E_y = \frac{1}{\mathbb{S}_{22}}, \quad E_z = \frac{1}{\mathbb{S}_{33}} \quad (54)$$

- Módulos de cisalhamento

$$G_{xy} = \frac{1}{\mathbb{S}_{44}}, \quad G_{xz} = \frac{1}{\mathbb{S}_{55}}, \quad G_{yz} = \frac{1}{\mathbb{S}_{66}} \quad (55)$$

- Coeficientes de Poisson

$$\begin{aligned} v_{xy} &= -\frac{\mathbb{S}_{21}}{\mathbb{S}_{44}}, & v_{xz} &= -\frac{\mathbb{S}_{31}}{\mathbb{S}_{44}}, & v_{yx} &= -\frac{\mathbb{S}_{12}}{\mathbb{S}_{22}}, \\ v_{yz} &= -\frac{\mathbb{S}_{32}}{\mathbb{S}_{22}}, & v_{zx} &= -\frac{\mathbb{S}_{13}}{\mathbb{S}_{33}}, & v_{zy} &= -\frac{\mathbb{S}_{23}}{\mathbb{S}_{33}} \end{aligned} \quad (56)$$

Esses parâmetros sintetizam o comportamento equivalente da estrutura reticuladas sob o regime de pequenas deformações, incorporando simultaneamente:

- a anisotropia induzida pela geometria da célula,
- a condição de contorno adotada,
- e o processo de homogeneização.

### 3.3 APLICAÇÃO DE MÉTODO FE<sup>2</sup> *OFFLINE*

A etapa final da metodologia teve como objetivo verificar a aplicabilidade prática dos parâmetros equivalentes obtidos por homogeneização numérica. Em um cenário ideal, essa validação seria realizada diretamente em um molde de injeção real contendo regiões internamente preenchidas por estruturas reticuladas. No entanto, a análise totalmente discretizada de um molde é inviável do ponto de vista computacional, devido ao elevado

número de células unitárias necessárias para preencher os volumes internos — justamente o problema que a abordagem multiescala busca resolver.

Diante disso, optou-se por um caso estrutural simplificado, porém representativo: uma placa (3D) tracionada, contendo preenchimento reticulado modelado de duas maneiras:

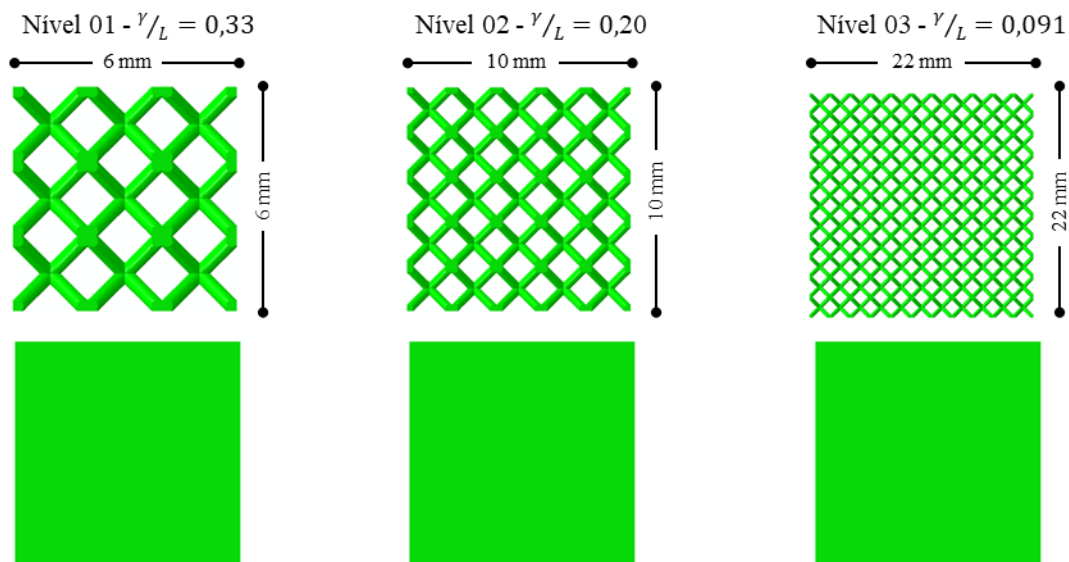
1. modelo totalmente discretizado, no qual as estruturas CBC são explicitamente representadas;
2. modelo contínuo equivalente, no qual a região preenchida é substituída pelo material homogêneo com parâmetro efetivos obtidos no capítulo anterior.

O caso da placa tracionada permite avaliar:

- a consistência global do método,
- a capacidade preditiva dos parâmetros homogeneizados,
- e a sensibilidade a efeitos locais, tais como concentrações de tensão e gradientes de deformação.

Foram considerados três níveis geométricos, variando a quantidade de células unitárias no interior da placa. O aumento do número de repetições altera diretamente a razão geométrica ( $r/l$ ) e, portanto, a densidade relativa do reticulado, conforme ilustrado na Figura 31.

Figura 31 - Placas discretas e homogêneas.

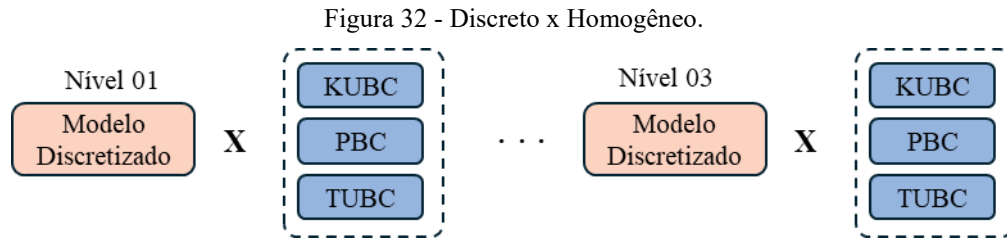


Fonte: Autor

Cada nível geométrico foi modelado de duas formas:

- modelo discreto → referência;
- modelos homogêneos → um para cada condição de contorno (KUBC, PBC e TUBC).

Assim, produziram-se 3 modelos discretos mais 9 modelos homogêneos, conforme a organização da Figura 32.



Fonte: Autor

Cada modelo homogêneo emprega o conjunto de propriedades macroscópicas obtidas via homogeneização sob KUBC, PBC ou TUBC.

As propriedades utilizadas encontram-se resumidas na Tabela 3.

Tabela 3 - Parâmetros modelos homogêneo.

| r/l | BC   | $E_x$ | $E_y$ | $E_z$ | $G_{xy}$ | $G_{xz}$ | $G_{yz}$ | $\nu_{xz}$ | $\nu_{xy}$ | $\nu_{yz}$ |
|-----|------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|
| 0.1 | KUBC | 2.031 | 2.048 | 1.563 | 2.005    | 1.535    | 1.534    | 0.323      | 0.433      | 0.433      |
|     | PBC  | 0.562 | 0.564 | 0.514 | 1.775    | 1.472    | 1.469    | 0.445      | 0.477      | 0.474      |
|     | TUBC | 0.161 | 0.161 | 0.154 | 0.151    | 0.149    | 0.149    | 0.473      | 0.503      | 0.503      |

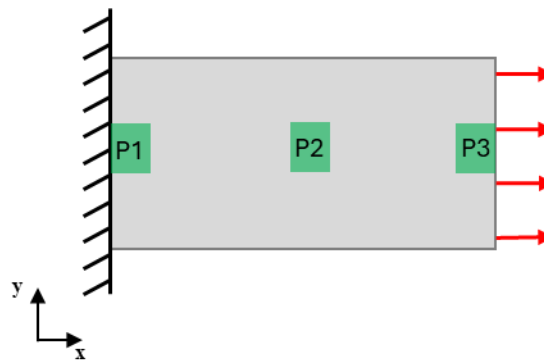
Fonte: Autor

O objetivo é verificar como cada condição de contorno — e, portanto, cada aproximação do comportamento microestrutural — se reflete na resposta estrutural da placa.

A comparação entre modelos discretos e homogêneos foi conduzida a partir de grandezas locais e globais:

- deslocamento total da placa na direção de tração ( $u_x^{\max}$ );
- tensão normal  $\sigma_{11}$  em três pontos representativos (P1, P2, P3), escolhidos para abarcar regiões de:
  - gradiente baixo (centro da placa),
  - gradiente moderado,
  - proximidade da fronteira tracionada.

Figura 33 - Pontos da viga para análise.



Fonte: Autor

Esses pontos permitem avaliar tanto a resposta média quanto a coerência do método em regiões de perturbação local, onde o comportamento da microestrutura tende a se manifestar de forma mais evidente.

Como discutido no capítulo de multiescala, o método  $FE^2$  offline requer o estado de deformação ou tensão no ponto da macroestrutura para permitir a reconstrução dos campos microscópicos equivalentes. Para isso, foi desenvolvido um algoritmo que identifica, ao redor de cada ponto de interesse, um volume representativo equivalente ao volume ocupado pela microestrutura no modelo discreto.

Os elementos da malha homogênea que interceptam essa região são localizados, e calcula-se a média volumétrica desses valores alimentam o ERVs, permitindo recuperar o campo micro (superposição linear no regime elástico) e, assim, comparar diretamente a tensão  $\sigma_{11}$  recuperada com a tensão  $\sigma_{11}$  obtida diretamente no modelo totalmente discretizado.

A partir desse procedimento, torna-se possível avaliar:

- a precisão dos materiais equivalentes obtidos por KUBC, PBC e TUBC;
- a tendencia da solução conforme aumenta o número de células;
- o erro local e global entre modelos discretos e homogêneos;
- e a viabilidade do método multiescala para aplicações reais onde a microestrutura não pode ser representada explicitamente.

## **4 DISCUSSÕES E RESULTADOS**

Nesta seção, são apresentados os resultados dos trabalhos experimentais de calibração dos parâmetros do material 316L fabricado por FLP-L, bem como os resultados obtidos homogeneização numérica de 1ª ordem das estruturas reticuladas e a verificações pelo método FE<sup>2</sup>. Por fim, são discutidos e interpretados os resultados obtidos.

### **4.1 ENSAIOS DE TRAÇÃO**

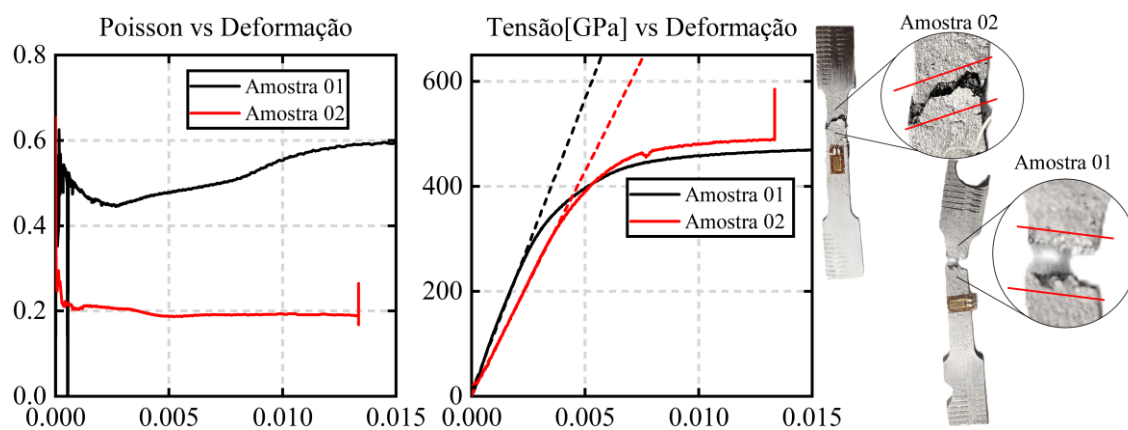
Nesse tópico serão apresentadas as curvas obtidas no ensaio de tração e as propriedades obtidas e as análises feitas com base no comportamentos observados. Em seguida o processo de calibração para o modelos mais conveniente e consequentemente no tensor de rigidez com os parâmetros calibrados.

#### **4.1.1 Resultados dos ensaios de tração**

A Figura 34 à 42 apresentam as curvas tensão–deformação de engenharia obtidas nos ensaios de tração do aço inoxidável 316L processado por FLP-L, para as diferentes orientações de corpos de prova consideradas. As curvas foram construídas a partir das medições de força na máquina de ensaio e das deformações longitudinais fornecidas pelos extensômetros elétricos.

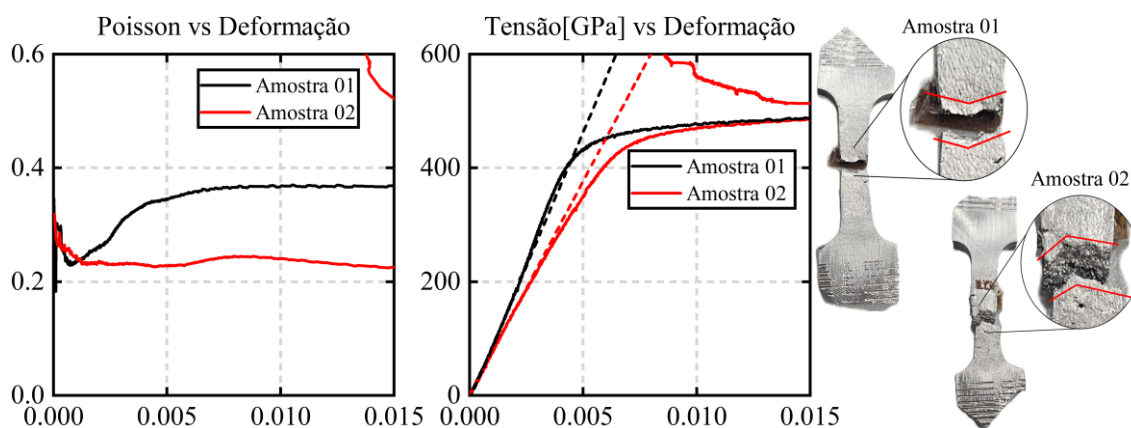
De modo geral, as curvas tensão–deformação apresentaram o comportamento esperado para o aço inoxidável 316L, com trecho inicial aproximadamente linear que foi utilizado para a determinação dos módulos de elasticidade. A partir do limite da região elástica, as curvas mostram apenas o comportamento plástico típico do material, o qual não é o foco desta investigação.

Figura 34 - Curvas plano XY direção 0°.



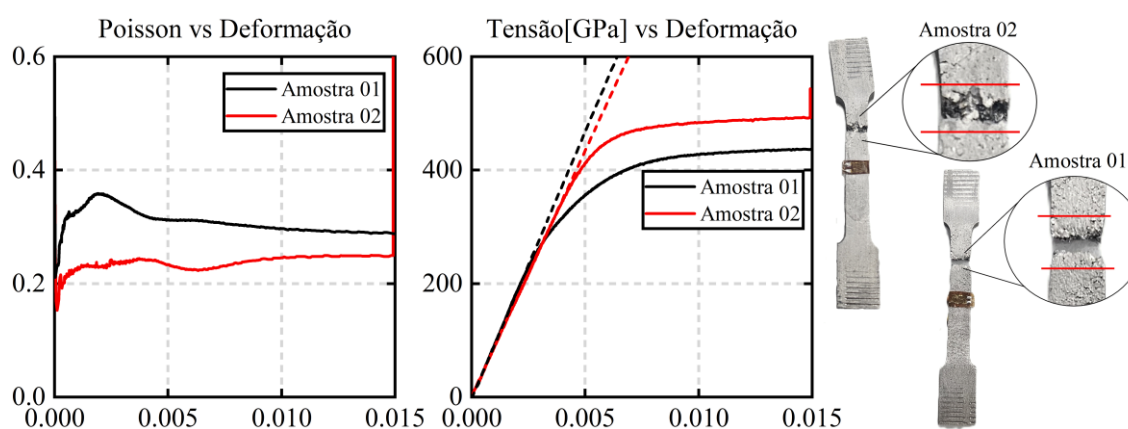
Fonte: Autor

Figura 35 - Curvas plano XY direção 45°.



Fonte: Autor

Figura 36 - Curvas plano XY direção 90°.



Fonte: Autor

Figura 37 - Curvas plano XZ direção 0°.

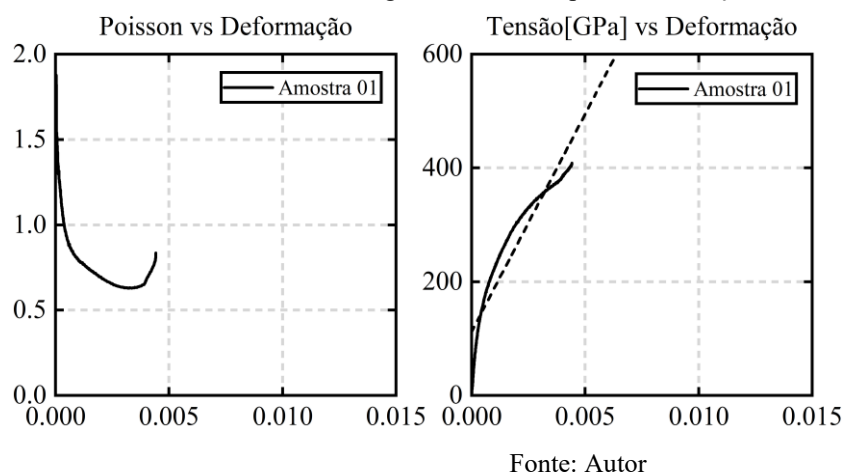


Figura 38 - Curvas plano XZ direção 45°.

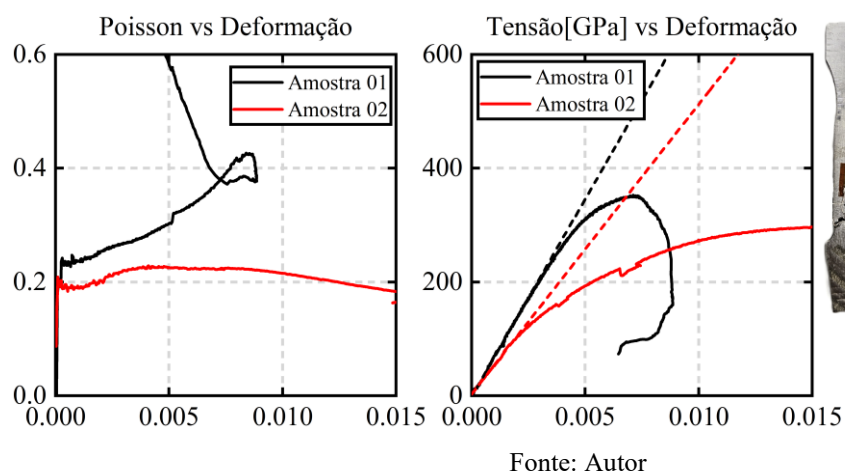


Figura 39 - Curvas plano XZ direção 90°.

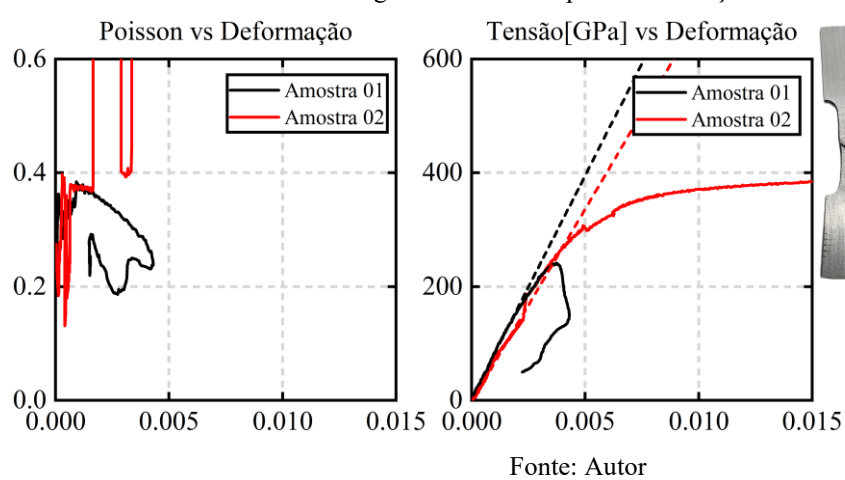


Figura 40 - Curvas plano YZ direção 0°.

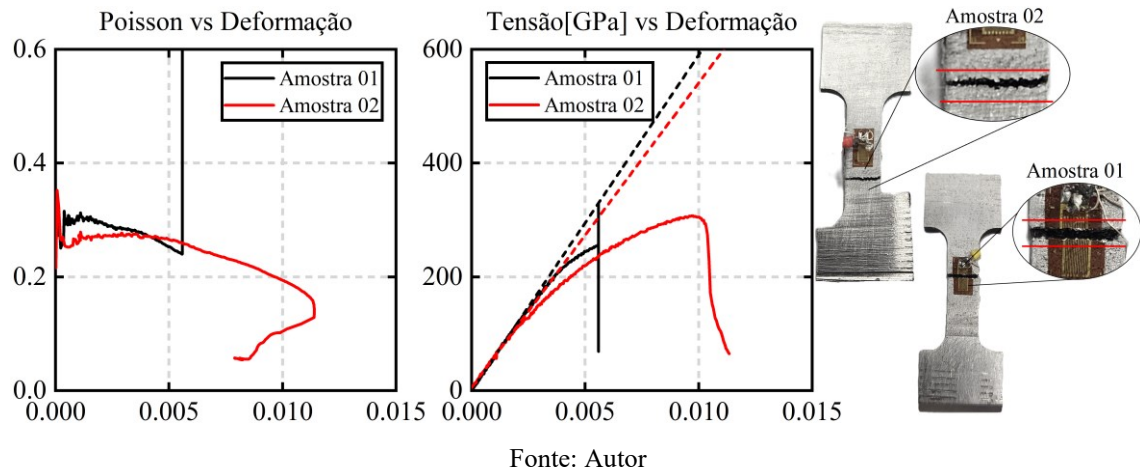


Figura 41 - Curvas plano YZ direção 45°.

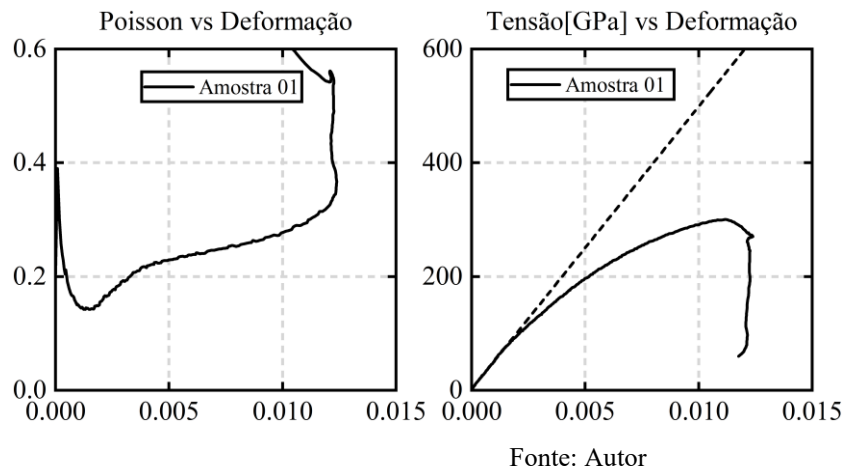
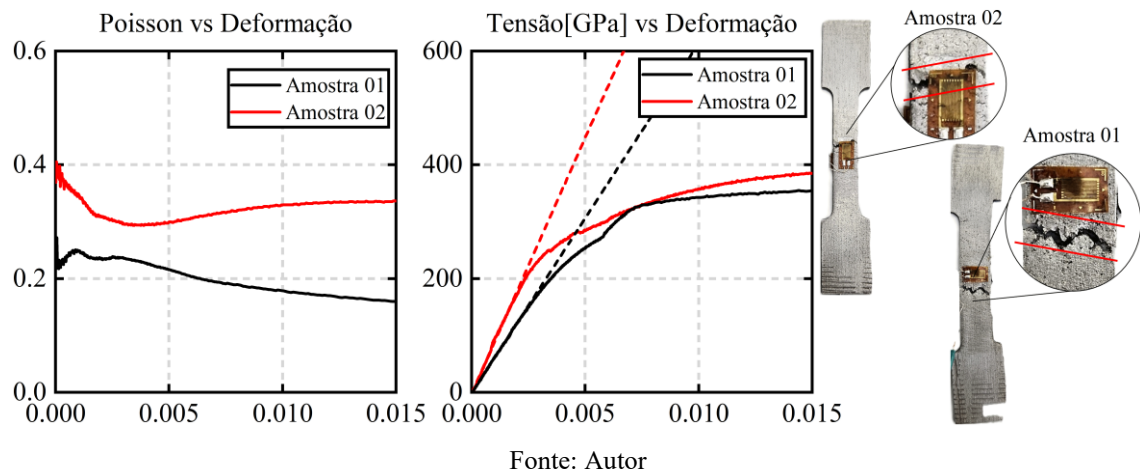


Figura 42 - Curvas plano YZ direção 90°.



#### 4.1.1.1 Módulo de Elasticidade

A partir da região linear das curvas tensão–deformação de cada orientação foram determinados os módulos de elasticidade E, conforme procedimento descrito na metodologia. Os valores médios e respectivos desvios padrão estão resumidos na Tabela 4.

Tabela 4 - Dados brutos dos ensaios de tração.

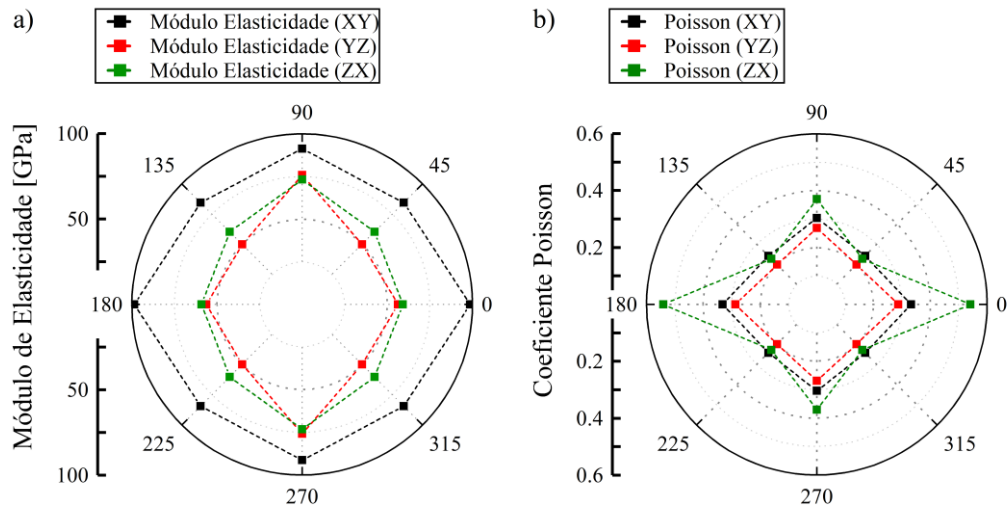
|          | Ângulo | Amostra | M.Elasticidade<br>[GPa] | Média | Poisson | Média | L.Elástico<br>[MPa] | Média  |
|----------|--------|---------|-------------------------|-------|---------|-------|---------------------|--------|
| Plano XY | 0°     | 1       | 111.68                  | 98.41 | 0.45    | 0.33  | 250.56              | 283.51 |
|          |        | 2       | 85.14                   |       | 0.21    |       | 316.46              |        |
|          | 45°    | 1       | 91.94                   | 84.36 | 0.26    | 0.24  | 233.43              | 218.52 |
|          |        | 2       | 76.78                   |       | 0.22    |       | 203.61              |        |
|          | 90°    | 1       | 95.07                   | 91.26 | 0.37    | 0.30  | 229.93              | 245.58 |
|          |        | 2       | 87.45                   |       | 0.24    |       | 261.22              |        |
| Plano YZ | 0°     | 1       | 59.02                   | 56.28 | 0.30    | 0.29  | 131.54              | 121.27 |
|          |        | 2       | 53.53                   |       | 0.27    |       | 111.00              |        |
|          | 45°    | 1       | 49.69                   | 49.69 | 0.20    | 0.20  | 92.45               | 92.45  |
|          |        | 2       | -                       |       | -       |       | -                   |        |
|          | 90°    | 1       | 61.45                   | 75.68 | 0.24    | 0.27  | 148.85              | 155.46 |
|          |        | 2       | 89.90                   |       | 0.30    |       | 162.07              |        |
| Plano ZX | 0°     | 1       | 59.02                   | 59.02 | 0.54    | 0.54  | 131.54              | 131.54 |
|          |        | 2       | -                       |       | -       |       | -                   |        |
|          | 45°    | 1       | 69.43                   | 60.19 | 0.25    | 0.23  | 207.20              | 158.33 |
|          |        | 2       | 50.94                   |       | 0.20    |       | 109.47              |        |
|          | 90°    | 1       | 78.45                   | 73.04 | 0.37    | 0.37  | 154.60              | 141.10 |
|          |        | 2       | 67.63                   |       | -       |       | 127.59              |        |

Fonte: Autor

A comparação entre as orientações permite identificar a presença de anisotropia elástica decorrente do processo camada por camada. As direções situadas no plano das camadas apresentam valores de módulo distintos daqueles medidos em direções que envolvem o eixo de construção. Já as duas direções pertencentes ao plano das camadas apresentaram diferenças irrelevantes, conforme a Figura 43.

Embora a magnitude da variação de E não seja extrema, é suficiente para justificar o uso de um modelo de material anisotrópico na etapa de homogeneização, em vez de assumir comportamento puramente isotrópico para o 316L processado por FLP-L.

Figura 43 - Módulo de elasticidade.



Fonte: Autor

#### 4.1.1.2 Coeficiente de Poisson

Os coeficientes de Poisson foram obtidos a partir da razão entre a deformação transversal e a deformação longitudinal no regime elástico, utilizando os extensômetros biaxiais. Os valores médios para cada orientação encontram-se também apresentados na Tabela 4.

Os resultados indicam que os coeficientes de Poisson apresentam variações entre os diferentes pares de direções analisados. Essas diferenças reforçam a evidência de anisotropia elástica, uma vez que, em um material isotrópico, o valor constante de  $\nu$  seria suficiente para descrever o acoplamento entre deformações transversais e longitudinais.

#### 4.1.1.3 Módulo de Cisalhamento

Os módulos de cisalhamento  $G_{ij}$  não foram medidos diretamente por ensaios dedicados, mas estimados a partir de relações analíticas que combinam os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson determinados experimentalmente, bem como os resultados dos corpos de prova tracionados a 45°. As expressões utilizadas foram apresentadas na Seção 3.1.4.

Esses módulos completam o conjunto de propriedades elásticas necessárias para a definição do modelo constitutivo empregado na homogeneização das estruturas reticuladas,

permitindo avaliar, nas etapas seguintes, como a anisotropia do material base se combina com a anisotropia geométrica das topologias.

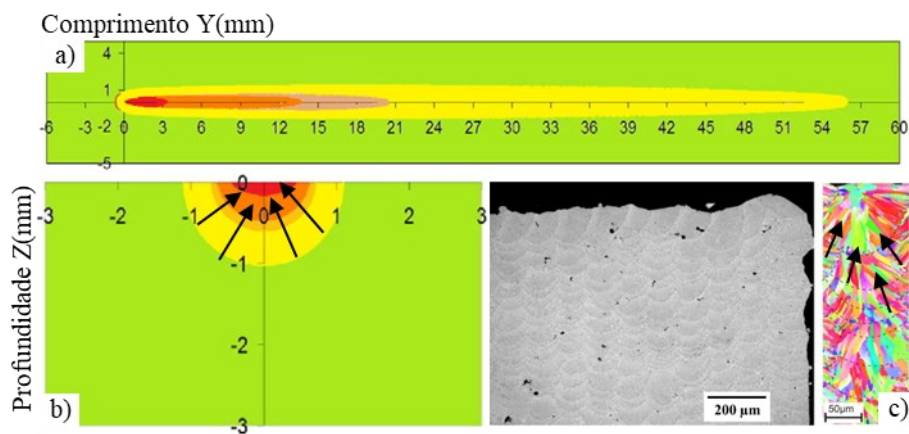
#### 4.1.1.4 Anisotropia dos Dados Experimentais

Os resultados experimentais evidenciam que o 316L fabricado por FLP-L apresenta comportamento elástico direcional, ainda que a magnitude das diferenças entre as orientações seja moderada. Essa anisotropia está diretamente relacionada às características intrínsecas do processo:

- deposição progressiva de camadas, que impõe uma direção preferencial associada ao eixo de construção;
- gradientes térmicos elevados e assimétricos, que geram poças de fusão alongadas e solidificação direcional;

A combinação desses fatores leva à formação de microestrutura com textura preferencial, tanto em termos de morfologia dos grãos quanto de orientação cristalográfica. Essa textura favorece maior rigidez em certas direções e maior complacência em outras, em concordância com as tendências observadas nos valores experimentais de  $E$  e  $\nu$ , esse comportamento é aprofundado nos trabalhos (DebRoy et al., 2018; Nye, 1993).

Figura 44 - a), b) e c) O gradiente térmico orienta o crescimento dos grãos, formando a textura cristalográfica e reforçando a anisotropia na direção Z (direção de empilhamento das camadas).



Fonte: Adaptado (DebRoy et al., 2018)

Do ponto de vista da modelagem, a anisotropia observada justifica o emprego de um modelo elástico com mais de duas constantes independentes na etapa de homogeneização. Nos capítulos seguintes, essas propriedades são organizadas em tensores constitutivos e avaliadas

quanto à capacidade de representar adequadamente o comportamento do material base nas análises multiescala.

#### 4.1.2 Calibração para modelos transversalmente isotrópico

Os resultados experimentais apresentados na Seção anterior evidenciam que o comportamento elástico do 316L fabricado por FLP-L apresenta dependência com a orientação de construção, característica frequentemente observada em processos camadas progressivas. Em particular, as curvas obtidas para os corpos de prova fabricados nas direções X, Y e Z revelam diferenças significativas módulos de elasticidade e entre os coeficientes de Poisson determinados a partir das medições longitudinais e transversais.

Embora os valores obtidos não indiquem anisotropia severa, nota-se que:

- As propriedades determinadas nas direções X e Y são bastante próximas, tanto para o módulo de elasticidade quanto para o coeficiente de Poisson.
- A direção Z apresenta valores distintos e sistematicamente inferiores, o que é consistente com o empilhamento de camadas do processo FLP-L.

Esse conjunto de evidências aponta para simetria material em torno do eixo de construção, situação amplamente documentada na literatura para metais fabricados por FLP-L.

Assim, os resultados experimentais indicam que assumir as direções X e Y como equivalentes, mantendo a direção Z como distinta, é uma aproximação coerente. Essa estrutura de simetria conduz naturalmente ao emprego de um modelo transversalmente isotrópico, discutido previamente no capítulo 2.3, o qual requer apenas cinco constantes independentes no regime elástico.

A seguir, detalha-se o procedimento de calibração de cada grupo de parâmetros.

O módulo de elasticidade foi obtido a partir do trecho linear inicial das curvas tensão–deformação. Como as direções X e Y apresentaram valores muito próximos, foi adotado o valor médio:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E_x + E_y}{2} \quad (57)$$

Para a direção Z, foi mantido o valor medido diretamente.

Os coeficientes de Poisson foram calculados a partir das medições simultâneas de deformação longitudinal e transversal realizadas durante os ensaios. De modo análogo ao

módulo de elasticidade, os coeficientes associados às direções X e Y apresentaram valores semelhantes, levando à adoção das relações médias:

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{yx}}{2}, \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \text{valores experimentais diretos} \quad (58)$$

Os módulos de cisalhamento foram estimados a partir de relações analíticas da Seção 3.1.4, de forma a serem compatíveis com os valores de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson determinados experimentalmente, considerando a simetria entre os planos 2–3 nas observações experimentais:

$$G_{23} = G_{13} \quad (59)$$

A Tabela 5 apresenta os parâmetros elásticos resultantes da calibração experimental, que serão empregados como propriedades de entrada nas análises de microescala da etapa de homogeneização.

Tabela 5 - Parâmetros modelos transversalmente isotrópico (316L).

| Módulo Elasticidade [GPa] |          |          | Coeficiente de Poisson |            |            | Módulo de Cisalhamento [GPa] |          |          |
|---------------------------|----------|----------|------------------------|------------|------------|------------------------------|----------|----------|
| $E_{11}$                  | $E_{22}$ | $E_{33}$ | $\nu_{12}$             | $\nu_{13}$ | $\nu_{23}$ | $G_{12}$                     | $G_{13}$ | $G_{23}$ |
| 91.34                     | 91.34    | 57.19    | 0.29                   | 0.41       | 0.41       | 35.34                        | 17.67    | 17.67    |

Fonte: Autor

## 4.2 RESULTADO ABORDAGEM NUMÉRICA

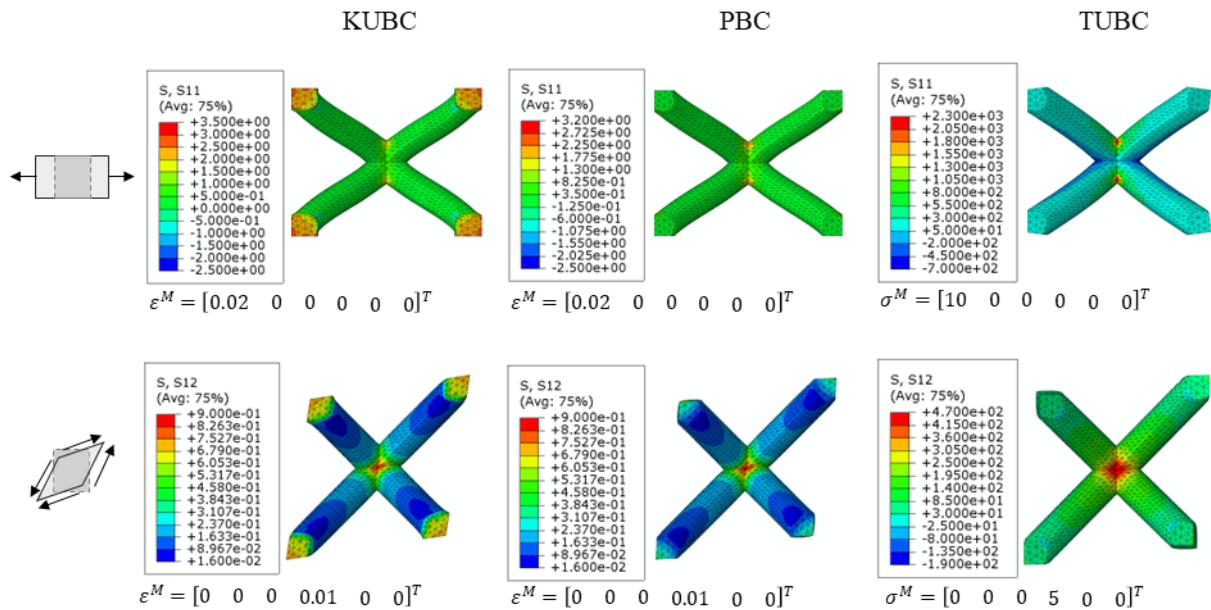
A homogeneização numérica permite avaliar como as propriedades mecânicas equivalentes das estruturas reticuladas evoluem em função da topologia, da geometria e das condições de contorno impostas ao ERV. Os resultados apresentados nesta seção mostram a resposta local e global das células unitárias CBC e CBCz, possibilitando comparar tendências, identificar diferenças relevantes e compreender as condições KUBC, PBC e TUBC.

A Figura 45 apresenta os campos de tensão obtidos para as células CBC e CBCz nos casos canônicos analisados. Embora os valores absolutos não sejam o foco no momento, as distribuições permitem identificar o efeito visual das diferentes condições de contorno no comportamento local do ERV.

As diferenças são facilmente identificáveis visualmente:

- Sob KUBC, as regiões de junção e extremidade exibem concentrações mais intensas, particularmente nos modos axiais.
- Em TUBC, essas concentrações são reduzidas e as barras apresentam comportamento mais próximo a tração/compressão pura.
- Em PBC, os campos respeitam a periodicidade e refletem adequadamente o fluxo de carga esperado para células em repetição infinita.

Figura 45 - Simulação das estruturas reticuladas CBC e as condições de contorno.



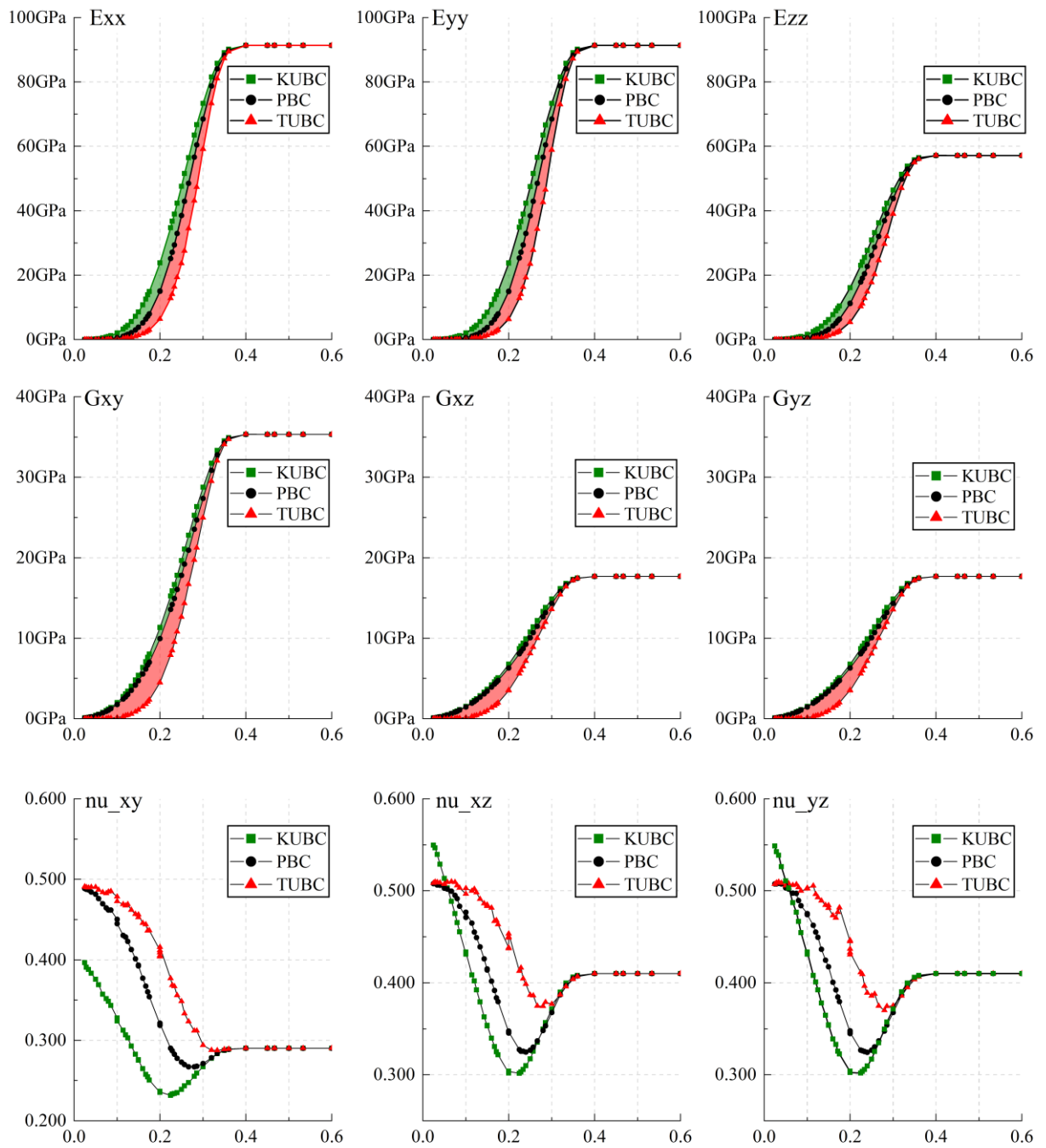
Fonte: Autor

Os resultados do processo de homogeneização das estruturas com a variação de parâmetros geométricos permitem verificar o comportamento das propriedades mecânicas com a variação desse parâmetros como mostram as figuras abaixo.

#### 4.2.1 Influência dos Parâmetros Geométricos.

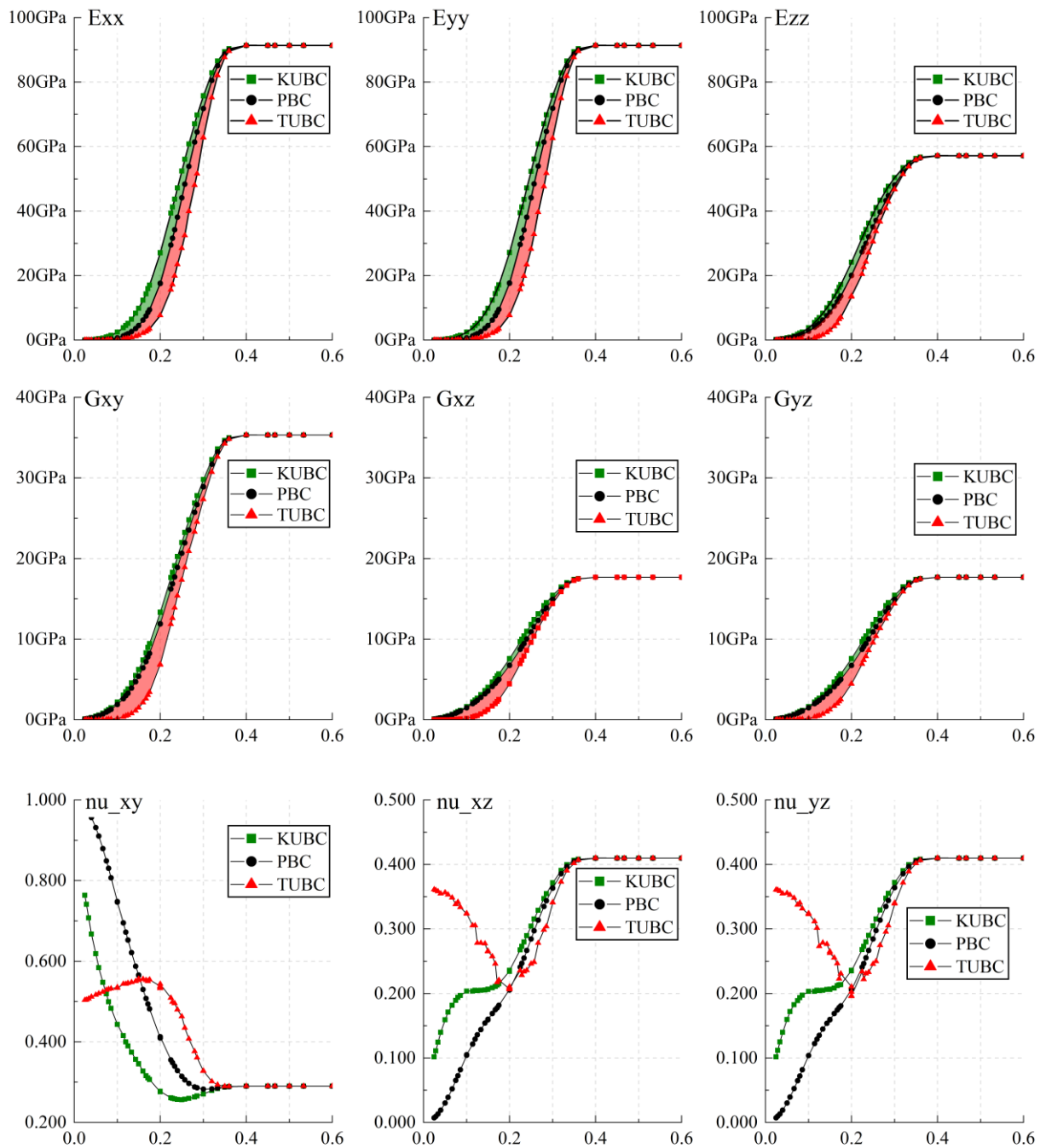
A relação entre o raio  $r$  e o comprimento  $l$  das barras é um dos principais parâmetros que controlam o comportamento mecânico equivalente das estruturas reticulada. As Figura 46 e 47 apresentam a evolução dos módulos de elasticidade, dos módulos de cisalhamento e dos coeficientes de Poisson em função de  $r/l$  para as topologias CBC e CBCz, sob as diferentes condições de contorno. Em todas as propriedades analisadas, verifica-se que a sensibilidade geométrica domina a resposta equivalente.

Figura 46 - Gráficos propriedades mecânicas CBC.



Fonte: Autor

Figura 47 - Gráficos propriedades mecânicas CBCz.



Fonte: Autor

Os módulos  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  aumentam de forma acentuada para baixos valores de  $r/l$ , caracterizando o regime típico de estruturas esbeltas, onde pequenas variações geométricas geram mudanças significativas na rigidez. À medida que a razão  $r/l$  cresce, o comportamento se aproxima progressivamente do limite superior estabelecido pelo material maciço (base), convergindo para o valor do aço 316L na situação em que o volume de vazios do ERV tende a zero.

Essa tendência é observada em todas as condições de contorno, embora com amplitudes distintas. No caso das geometrias mais esbeltas ( $r/l$  baixos), a diferença entre as CC é particularmente elevada, o que confirma que, nessa faixa, a liberdade de deformação da microestrutura intensifica o papel das restrições impostas na fronteira.

Os módulos  $G_{xy}$ ,  $G_{xz}$  e  $G_{yz}$  apresentam tendência semelhante.

Os coeficientes de Poisson apresentam comportamento variáveis para valores muito baixos de  $r/L$ . Nessas geometrias esbeltas, a deformação transversal é fortemente governada pelos mecanismos de flexão, levando a valores que inicialmente se afastam dos limites estabelecidos pelo material base.

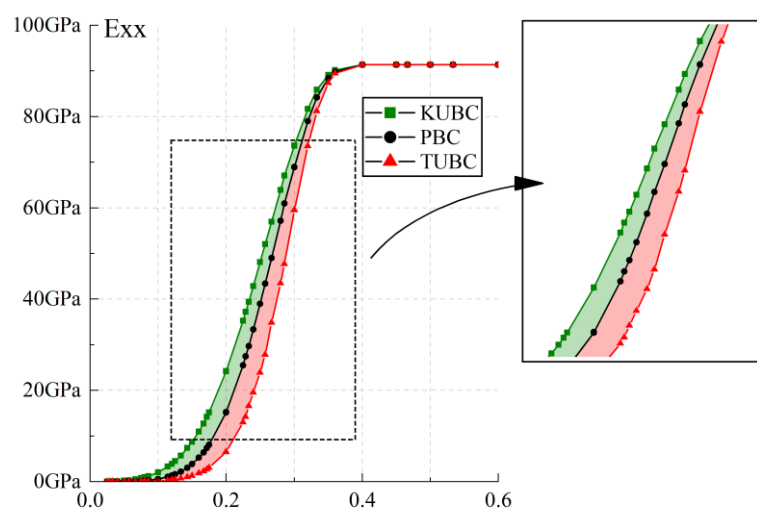
Com o aumento do aspecto, o comportamento se estabiliza e converge para os valores do material maciço, refletindo a transição entre uma célula dominada por modos de deformação estruturais e dominado pelo material sólido.

#### 4.2.2 Influência das Condições de Contorno nas Propriedades Equivalentes

As Figura 46 a 48 apresentam a evolução dos módulos de elasticidade, cisalhamento e coeficientes de Poisson equivalentes obtidos sob KUBC, PBC e TUBC em função da razão geométrica  $r/l$ . Os comportamentos observados refletem diretamente o nível de restrição imposto ao ERV por cada tipo de condição de contorno, conforme previsto teoricamente.

Para as diferenças entre as CC, os resultados mostram que (Figura 48):

Figura 48 - Análise das condições de contorno.



Fonte: Autor

KUBC fornece sempre o limite superior da rigidez equivalente, isso pois com a imposição de deslocamentos lineares com a coordenada é imposto apenas na fronteira, o ERV é impedido de desenvolver flutuações microestruturais na fronteira. Como consequência, a deformação interna é mais homogênea e menor, levando a tensões médias mais elevadas e, portanto, módulos efetivos maiores. Esse padrão aparece em todos os componentes:  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $G_{xy}$ ,  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$  e nos coeficientes de Poisson.

TUBC estabelece o limite inferior da rigidez, em virtude de aplicar trações uniformes, as faces do ERV sofrem deslocamentos livres compatíveis com uma estrutura mais flexível. Isso permite que a microestrutura se deforme com maior liberdade, resultando em tensões médias menores e, por consequência, rigidez reduzida em comparação à KUBC e PBC.

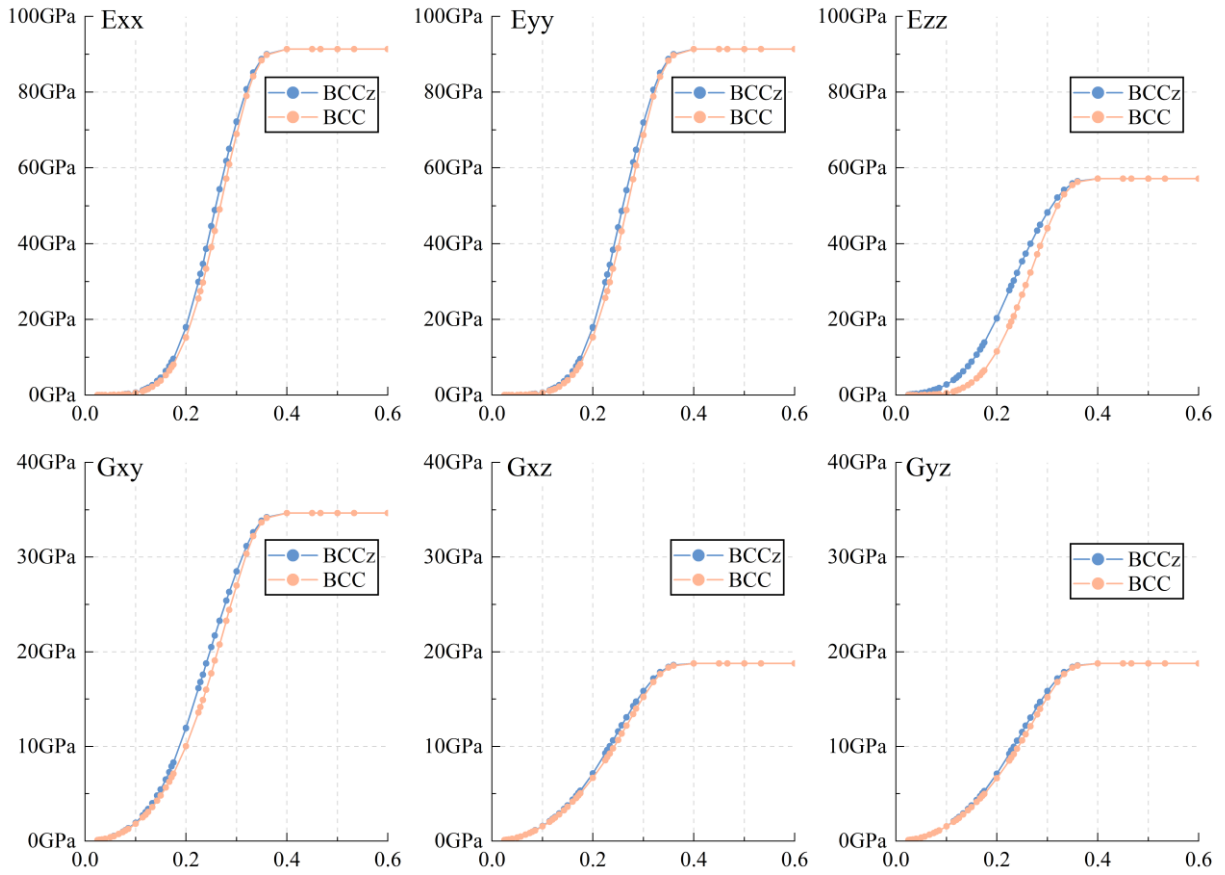
PBC produz resultados intermediários. A condição periódica garante continuidade entre ERVs adjacentes e reproduz de forma mais fiel a situação de arranjo infinito de células unitárias. Assim, os módulos equivalentes obtidos por PBC aparecem sistematicamente entre os limites impostos por KUBC e TUBC, em perfeita concordância com a teoria de Hill–Mandel.

#### 4.2.3 Comparação CBC e CBCz

A comparação entre as topologias CBC e CBCz, sob condições de contorno PBC, permite avaliar de forma direta o efeito estrutural da inclusão dos elementos verticais na variante CBCz. Embora ambas as geometrias compartilhem a mesma base cúbica e apresentem comportamento similar em diversas direções de carregamento, a presença da barra adicional no eixo Z modifica substancialmente os mecanismos de deformação da célula unitária.

A Figura 49 apresenta os módulos elásticos e rígidos efetivos resultantes para as duas topologias, sob condições de contorno PBC, considerando toda a faixa de razões geométricas  $r/l$ . De modo geral, observa-se que, nas direções X e Y, as duas topologias apresentam curvas praticamente coincidentes tanto para os módulos de elasticidade quanto para os módulos de cisalhamento. Esse resultado é esperado, uma vez que o carregamento nessas direções é suportado principalmente pelas diagonais características do CBC, que permanecem idênticas no CBCz. A barra vertical adicionada não contribui significativamente para o transporte de carga nesses planos, e o comportamento mecânico permanece dominado pelas mesmas combinações de flexão, tração e cisalhamento existentes no CBC convencional.

Figura 49 - Módulos de elasticidade e cisalhamento CBC vs CBCz.

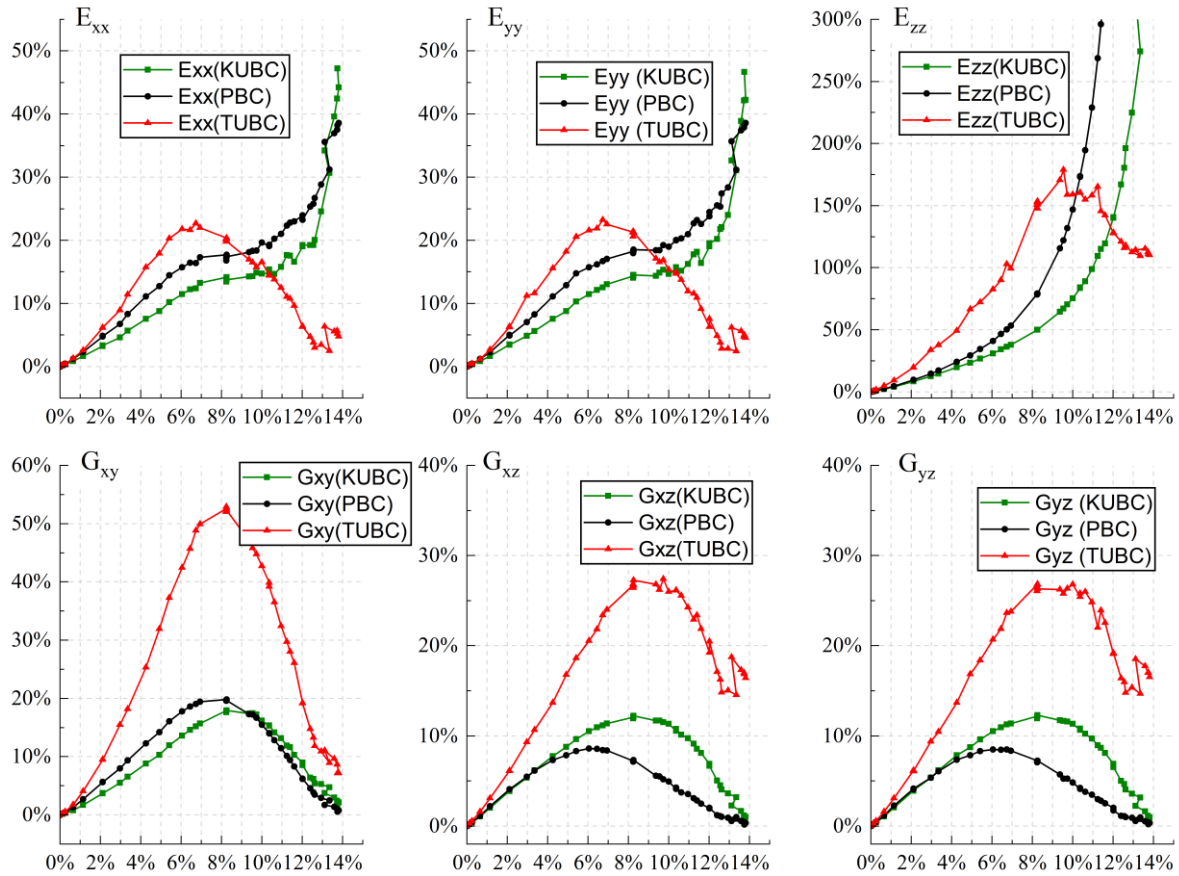


Fonte: Autor

Por outro lado, na direção Z, a diferença entre as topologias torna-se mais evidente. O módulo  $E_z$  do CBCz permanece sistematicamente acima do CBC para toda a faixa de relações  $r/l$ , com maior discrepância na região de estruturas mais esbeltas. Da mesma forma, observa-se melhora nos módulos de cisalhamento  $G_{xz}$  e  $G_{yz}$ , associada ao aumento da resistência da célula a mecanismos de distorção ligados ao eixo vertical.

A Figura 50, que apresenta o ganho relativo de rigidez  $\% = (\mathbb{C}_{\text{CBCz}} - \mathbb{C}_{\text{CBC}})/\mathbb{C}_{\text{CBC}}$ , reforça esses comportamentos. Para o módulo  $E_z$ , os ganhos são expressivos nas menores relações  $r/l$  e decrescem progressivamente até praticamente desaparecer quando a célula se aproxima da condição de sólido quase maciço. Já para os módulos  $E_x$ ,  $E_y$  e  $G_{xy}$ , os ganhos permanecem modestos e tendem rapidamente a zero, refletindo o fato de que, nessas direções, as duas geometrias compartilham praticamente os mesmos mecanismos estruturais. Para os módulos de cisalhamento ligados ao eixo vertical,  $G_{xz}$  e  $G_{yz}$ , o ganho típico situa-se na faixa de 5 a 10% para valores intermediários de  $r/l$ , reduzindo-se também conforme a célula se torna mais densa.

Figura 50 - Ganho de rigidez em função do ganho de massa.



Fonte: Autor

#### 4.3 RESULTADOS FE<sup>2</sup> - OFFLINE

A etapa final desta investigação consistiu em avaliar o desempenho dos modelos homogeneizados quando aplicados em um caso estrutural representativo. O objetivo não é reproduzir a complexidade geométrica de um molde de injeção — o que seria computacionalmente inviável utilizando as estruturas discretizadas —, mas sim verificar, em um problema controlado, o grau de fidelidade das soluções obtidas pelo FE<sup>2</sup> em comparação com o modelo inteiramente discreto.

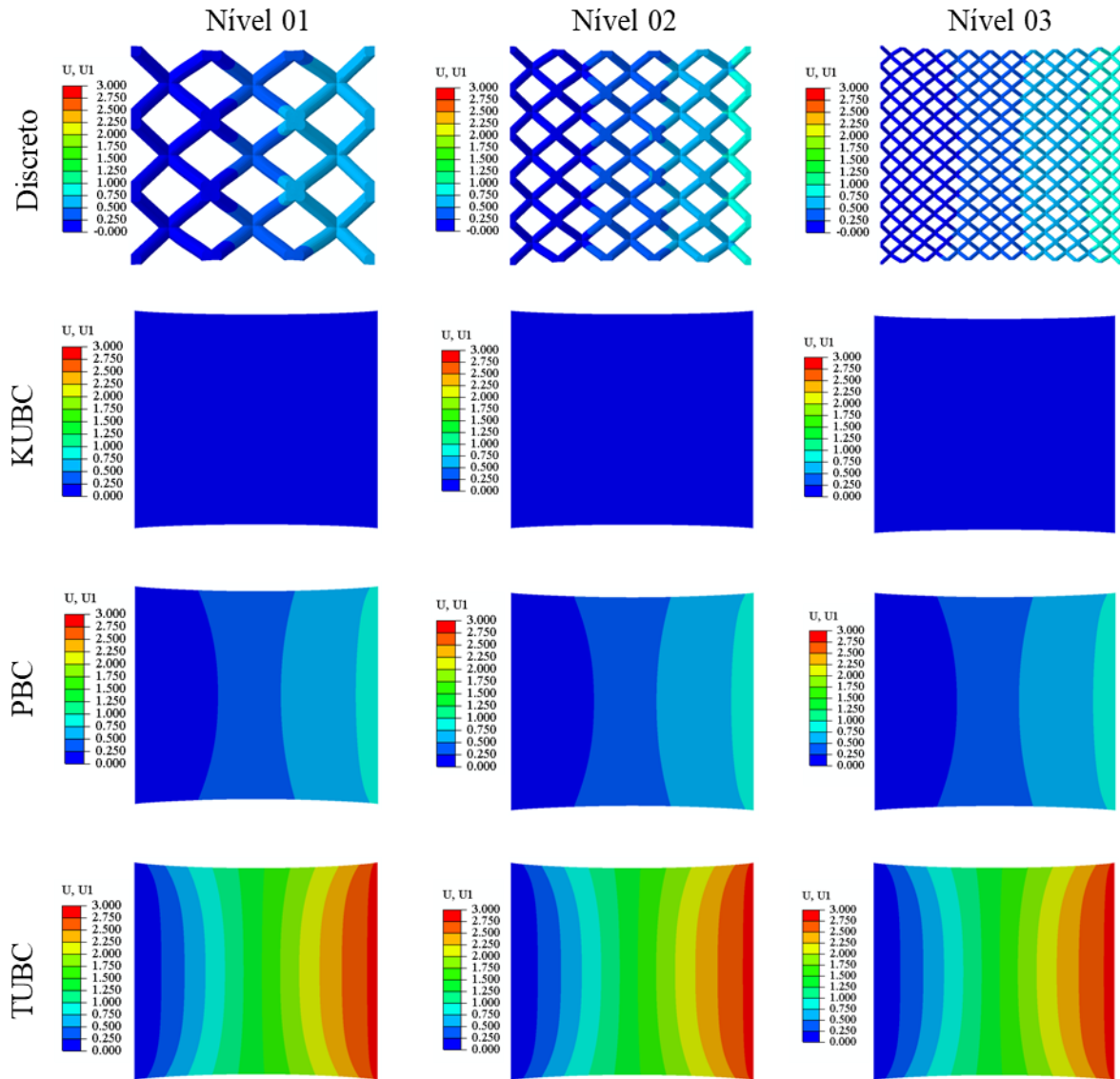
Para isso, utilizou-se uma placa submetida à tração uniaxial, modelada em três níveis geométricos distintos (níveis 1, 2 e 3), cada um contendo quantidades crescentes de células unitárias. Para cada nível foram simulados um modelo totalmente discreto e três modelos contínuos, cada qual baseado nas propriedades homogeneizadas obtidas com KUBC, PBC e TUBC.

A comparação entre os modelos foi realizada considerando:

- deslocamento global na direção de tração ( $u_1$ )
- deslocamento transversal associado ao efeito de Poisson ( $u_2$ )
- a tensão recuperada na microescala ( $\sigma_{11}$ ) em pontos específicos da placa
- custo computacional de cada abordagem.

#### 4.3.1 Deslocamentos Globais ( $u_1$ e $u_2$ )

A Figura 51 apresenta os campos de deslocamentos  $u_1$  para os modelos discretos e contínuos nos três níveis. Em termos qualitativos, observa-se que todos os modelos contínuos reproduzem o padrão esperadamente uniforme da deformação axial, com variações concentradas nas regiões próximas aos apoios e bordas livres. A forma global da deformada é mantida em todos os casos.

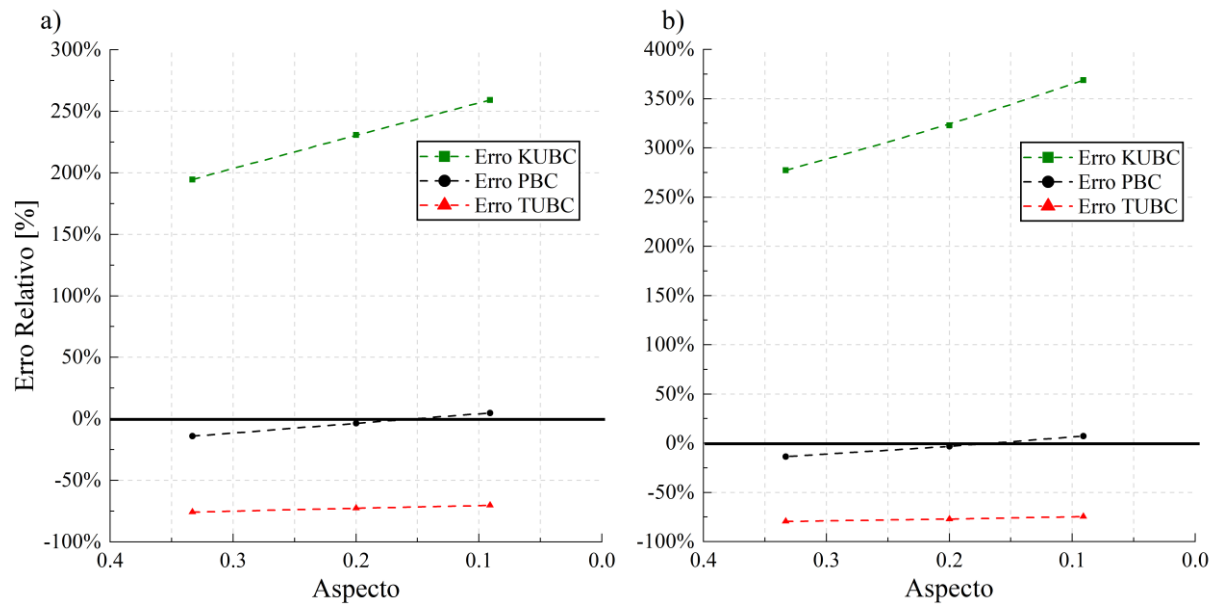
Figura 51 - Deslocamento global  $u_1$ .

Fonte: Autor

Na comparação quantitativa, apresentada na Figura 52 verifica-se que os erros relativos diminuem conforme o número de células aumenta, evidenciando o efeito de separação de escalas previsto pela homogeneização. Cada condição de contorno apresenta um comportamento característico:

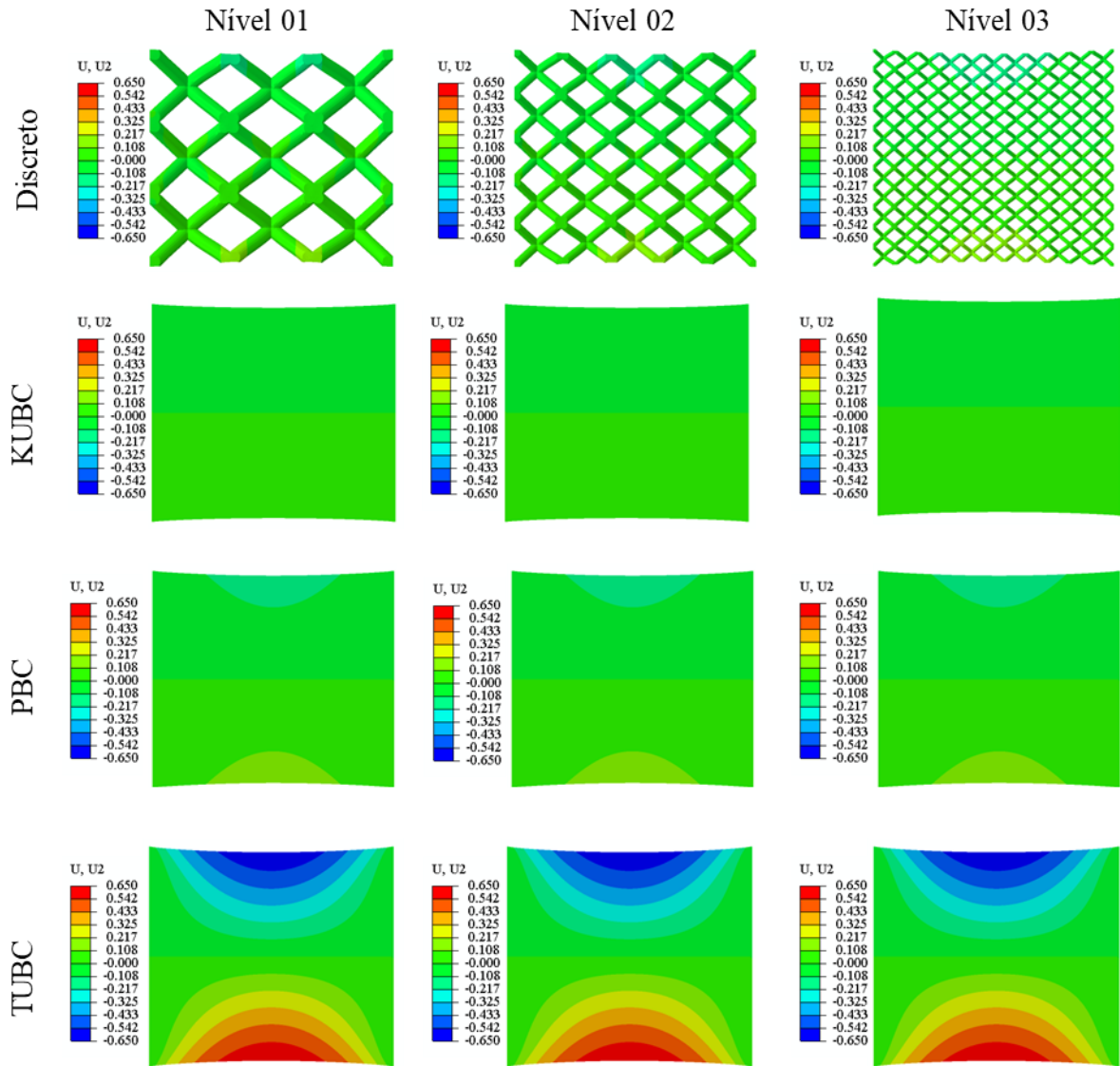
- modelos baseados em KUBC tendem a apresentar deslocamentos menores em relação ao modelo discreto,
- modelos baseados em TUBC resultam em deslocamentos maiores,
- modelos baseados em PBC mantêm erros moderados ao longo dos níveis.

Embora os valores variem entre as condições de contorno, todas convergem para erros menores nos níveis com maior número de células.

Figura 52 - Erro relativo deslocamentos globais  $u_1$  e  $u_2$ .

Fonte: Autor

A Figura 53 mostra os deslocamentos  $u_2$  dos modelos discretos e equivalentes contínuos. O comportamento transversal é dominado pelos coeficientes de Poisson obtidos na etapa de homogeneização, sendo, portanto, um bom indicador da consistência das propriedades equivalentes.

Figura 53 - Deslocamento global  $u_2$ .

Fonte: Autor

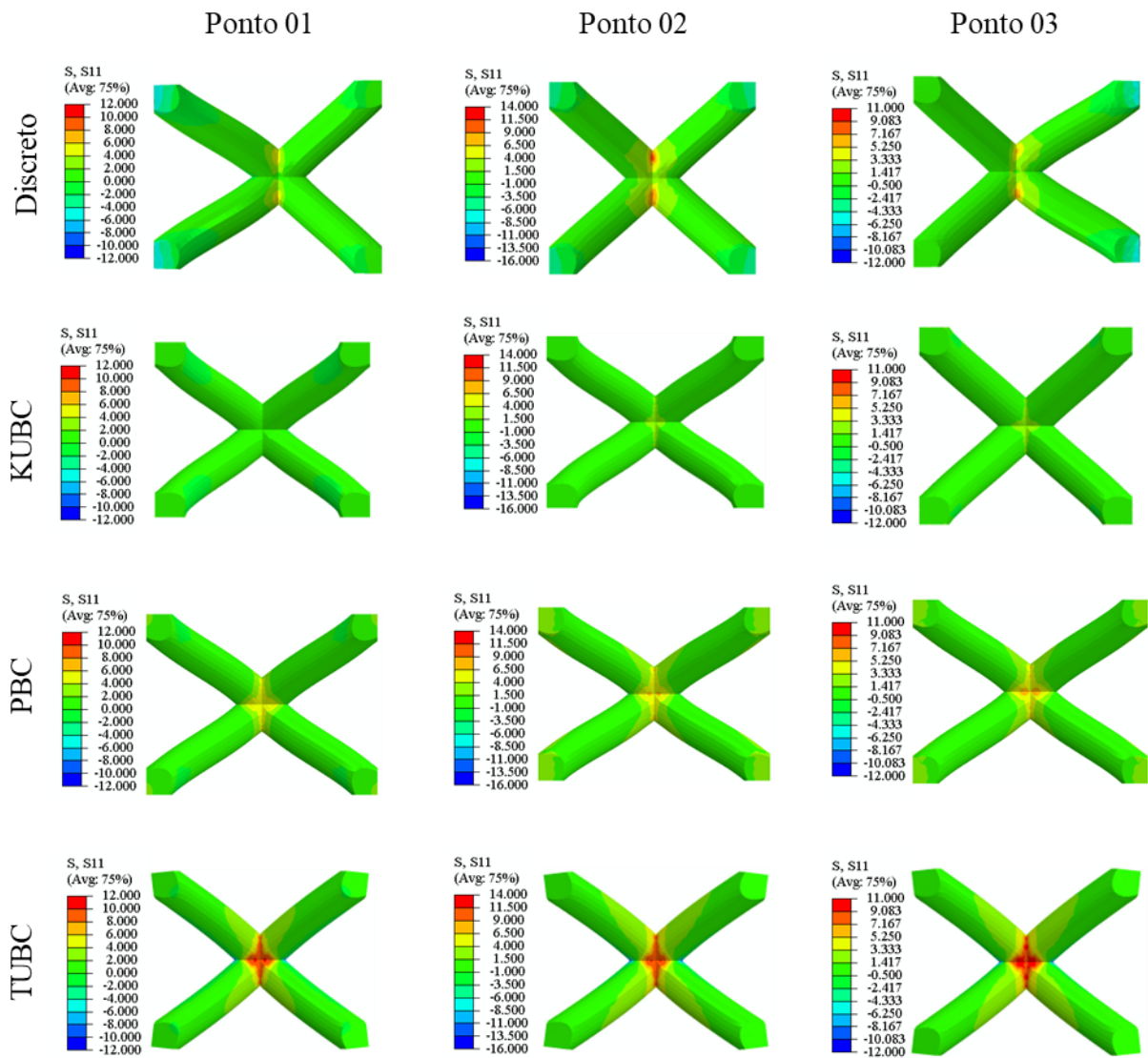
Os campos obtidos pelos modelos contínuos apresentam boa aproximação da curvatura transversal observada nos modelos discretos, especialmente para os níveis mais refinados. A análise quantitativa, ilustrada na Figura 52 revela tendências semelhantes às observadas em  $u_1$ , os erros decrescem com o aumento do número de células e cada condição de contorno mantém um padrão característico de sub ou superestimação da resposta transversal.

#### 4.3.2 Tensões Recuperadas na microescala ( $\sigma_{11}$ )

A capacidade do FE<sup>2</sup> em recuperar campos de tensão é mostrada na Figura 54, que apresenta a tensão axial  $\sigma_{11}$  reconstruída para cada combinação de nível geométrico e condição de contorno. As distribuições obtidas pelos modelos contínuos preservam:

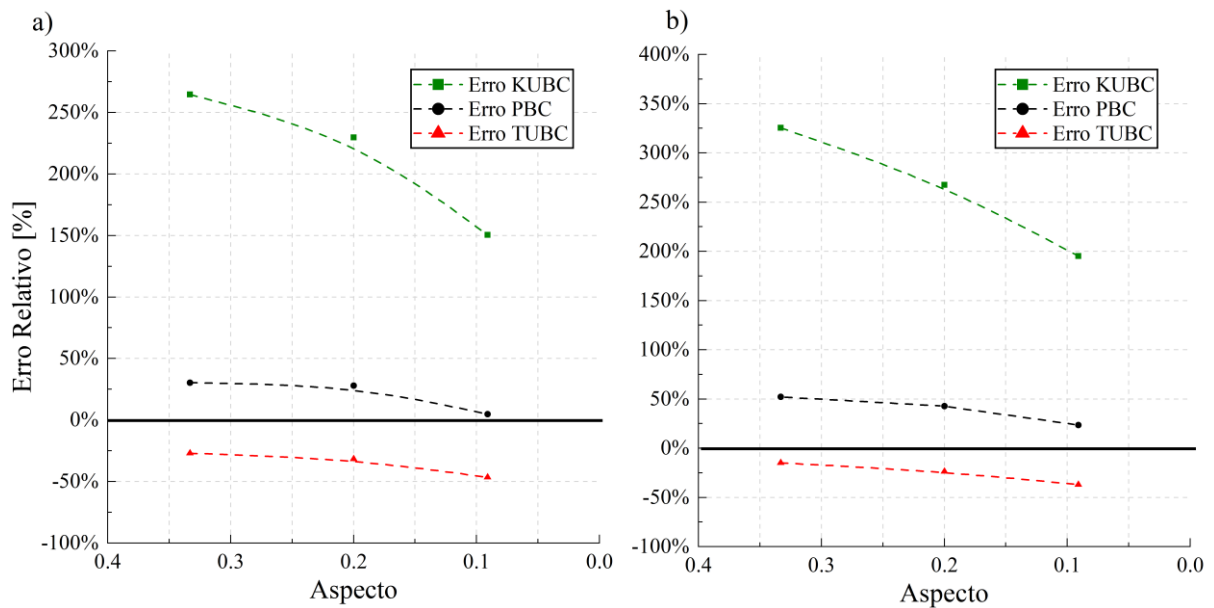
- a localização dos máximos de tensão;
- a simetria do campo;
- a variação suave ao longo da placa.

Figura 54 - Campo de tensão recuperados  $\sigma_{11}$ .



Fonte: Autor

As diferenças mais significativas concentram-se em regiões de maior gradiente ou proximidade de fronteiras, como esperado para técnicas baseadas em homogeneização de 1ª ordem.

Figura 55 - Erro relativo tensão  $\sigma_{11}$  P1 e P3.

Fonte: Autor

A análise quantitativa do erro nos pontos P1 e P3, ilustrada na Figura 55 reforça essa observação.

Os erros são maiores em P1, situado próximo ao contorno, e menores em P3, localizado no interior da placa — onde o princípio de separação de escalas é mais bem satisfeito. Além disso, o erro diminui à medida que o nível geométrico aumenta, indicando que a representatividade volumétrica da célula desempenha papel essencial na qualidade da recuperação microestrutural.

#### 4.3.3 Custo Computacional

Os tempos de processamento estão reunidos na Tabela 6. A simulação discreta torna-se rapidamente inviáveis conforme o número de células aumenta: de aproximadamente 90 segundos no nível 1 para mais de 1600 segundos no nível 3.

Tabela 6 - Comparação de custo computacional.

|          | Discreto (s) | Macro Contínuo (s) | Etapa de Recuperação (s) |
|----------|--------------|--------------------|--------------------------|
| Nível 01 | 88.9         | 5.2                | 19                       |
| Nível 02 | 170.2        | 8.6                | 19                       |
| Nível 03 | 1686         | 24                 | 19                       |

Fonte: Autor

Em contraste, o modelo contínuo cresce apenas de forma moderada (5 segundos para 24 segundos), e a etapa de recuperação micro apresenta custo quase constante (19 segundos), pois depende apenas do tamanho fixo do ERV.

Esse comportamento evidencia o potencial do FE<sup>2</sup> offline em problemas com grande quantidade de células, reduzindo o custo computacional em mais de uma ordem de grandeza ao mesmo tempo em que preserva a fidelidade das respostas globais e locais.

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho desenvolveu, estruturou e avaliou uma abordagem multiescala baseada em homogeneização numérica de 1ª ordem aplicada a estruturas reticuladas fabricadas FLP-L, visando a aplicação em molde de injeção de plásticos. O método proposto buscou estabelecer um caminho sistemático para obtenção de propriedades mecânicas efetivas, capazes de representar meios equivalentes contínuos e reduzir drasticamente o custo computacional associado à modelagem discreta dessas estruturas. Ao longo do estudo, foram realizadas análises experimentais, formulações teóricas, implementações numéricas e validações via FE<sup>2</sup> offline, permitindo discutir de forma integrada o comportamento do material base, o processo de homogeneização e o impacto das condições de contorno (KUBC, PBC e TUBC) sobre os resultados obtidos.

Com base nos resultados apresentados, é possível consolidar as seguintes conclusões objetivas:

- 1. Comportamento mecânico do material base 316L (FLP-L)
  - A partir do ensaios com o material base 316L, foi possível identificar um grau anisotropia moderada entre os planos XY, XZ e YZ, o que possibilitou representá-lo com um modelos elástico linear transversalmente isotrópico.
- 2. Homogeneização numérica das topologias CBC e CBCz
  - As propriedades efetivas aumentam com a razão  $r/L$ , aproximando-se do valor do material denso quando o volume sólido se torna predominante.
  - A razão  $r/l$  se mostrou o parâmetro geométrico dominante: combinações distintas com mesma razão resultam em propriedades equivalentes.
- 3. Influência das condições de contorno (KUBC, PBC, TUBC)
  - Os resultados confirmaram o comportamento teórico clássico:
    - KUBC: maior rigidez (limitante superior)
    - TUBC: menor rigidez (limitante inferior)
    - PBC: comportamento intermediário, fisicamente mais representativo
- 4. Validação via FE<sup>2</sup> offline
  - Deslocamentos globais  $u_1$  e  $u_2$ 
    - KUBC: superestimação elevada (+190% a +320%)
    - TUBC: subestimação consistente (−70% a −80%)
    - PBC: erros moderados (−13% a +5%)
  - Tensão recuperada  $\sigma_{11}$  (P1 e P3)

- KUBC: +11% a 325%
- TUBC: -15% a -45%
- PBC: 23% a 52%
- 5. Ganho computacional
  - Nível 1: redução de 73% no tempo total
  - Nível 2: redução de 84%
  - Nível 3: redução de 97%

O ganho aumenta drasticamente com o número de células, confirmando a escalabilidade do método FE<sup>2</sup>.

Portanto é possível apresentar as seguintes considerações finais:

- A metodologia desenvolvida é robusta, generalizável e extremamente eficiente para modelagem de estruturas reticuladas produzidas por FLP-L.
- As análises indicam que condições de contorno periódicas fornecem o melhor equilíbrio entre precisão e consistência física, especialmente em aplicações com repetição celular e carregamentos homogêneos.
- A abordagem permite substituir modelos discretos inviáveis por representações contínuas validadas, com redução de até 97% no custo computacional, habilitando aplicações reais em componentes de grande porte como insertos de moldes.

## 6 TRABALHOS FUTUROS

A partir dos resultados obtidos e das limitações identificadas ao longo deste trabalho, diversas extensões e aprofundamentos podem ser desenvolvidos para avançar a modelagem multiescala de estruturas reticuladas fabricadas por FLP-L. Entre as principais oportunidades, destacam-se:

### 1. Avaliação de efeitos térmicos e acoplados

Investigar propriedades térmicas efetivas e realizar homogeneização termo–mecânica, incluindo efeitos de condutividade, expansão térmica e tensões residuais relevantes para componentes submetidos a gradientes térmicos.

### 2. Implementação do FE<sup>2</sup> online

Integrar o ERV diretamente nos pontos de Gauss do modelo macroscópico, permitindo capturar heterogeneidades locais, dependência de trajetória de carregamento e variações espaciais da microestrutura.

### 3. Automação e otimização topológica

Desenvolver um fluxo automatizado de geração do ERV, homogeneização e FE<sup>2</sup>, incorporando também rotinas de otimização topológica baseadas nas solicitações mecânicas locais.

### 4. Inclusão de não linearidades

Estender o modelo para regimes elastoplásticos e de grandes deformações, avaliando efeitos de escoamento anisotrópico, endurecimento e instabilidades como flambagem de barras.

### 5. Aplicação em moldes reais de injeção

Aplicar a metodologia em insertos ou regiões de moldes industriais, avaliando ganhos estruturais, redução de massa e desempenho térmico em cenários reais de operação.

## REFERÊNCIAS

ABADI, Mohammad Tahaye. Micromechanical Modeling of Heterogeneous Materials at Finite Strain. *In: Wiley Encyclopedia of Composites. [S.l.]: Wiley, 2012. p. 1–13.*

BAKHVALOV, N. ..; PANASENKO, G. .. Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media : Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials. *[S.l.]: Springer Netherlands, 1989.*

BENSOUSSAN, Alain.; LIONS, J. L. ..; PAPANICOLAOU, George. Asymptotic analysis for periodic structures. *[S.l.]: North-Holland Pub. Co. ; Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier North-Holland, 1978.*

DANIEL, Isaac M. ..; ISHAI, Ori. Engineering mechanics of composite materials. *[S.l.]: Oxford University Press, 2006.*

DE SOUZA, Adriano Fagali *et al.* Alternative materials to shorten injection mold manufacturing and molding cycles. *Polimeros*, v. 34, n. 2, 2024.

DEBROY, T. *et al.* Additive manufacturing of metallic components – Process, structure and properties. *Progress in Materials Science*, v. 92, p. 112–224, mar. 2018.

GEERS, M. G. D.; KOUZNETSOVA, V. G.; BREKELMANS, W. A. M. Multi-scale computational homogenization: Trends and challenges. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 234, n. 7, p. 2175–2182, ago. 2010.

GIBSON, Lorna J. ..; ASHBY, M. F. .. Cellular solids : structure and properties. *[S.l.]: Cambridge University Press, 1999.*

GOTLIH, Janez *et al.* A Holistic Approach to Cooling System Selection and Injection Molding Process Optimization Based on Non-Dominated Sorting. *Polymers*, v. 14, n. 22, 1 nov. 2022.

GURTIN, Morton E. ..; FRIED, Eliot.; ANAND, Lallit. The mechanics and thermodynamics of continua. *[S.l.]: Cambridge University Press, 2010.*

HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 11, n. 5, p. 357–372, set. 1963.

IRGENS, Fridtjov. *Continuum mechanics*. [S.l.]: Springer, 2008.

JAGANNATHI, Venumurali *et al.* Review of tensile anisotropy in laser powder bed fusion 316L stainless steel: Build orientation effects and optimisation using machine learning. *Journal of Materials Research and Technology*, v. 38, p. 5318–5341, set. 2025.

KANBUR, Baris Burak *et al.* Thermal and mechanical simulations of the lattice structures in the conformal cooling cavities for 3D printed injection molds. *Materials Today: Proceedings*, v. 28, p. 379–383, 2020.

KHAN, Numan; RICCIO, Aniello. A systematic review of design for additive manufacturing of aerospace lattice structures: Current trends and future directions. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 149, p. 101021, ago. 2024.

KING, W. E. *et al.* Laser powder bed fusion additive manufacturing of metals; physics, computational, and materials challenges. *Applied Physics Reviews*, v. 2, n. 4, p. 041304, dez. 2015.

KIRCHHEIM, Andreas *et al.* Dynamic conformal cooling improves injection molding: Hybrid molds manufactured by laser powder bed fusion. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 114, n. 1–2, p. 107–116, 1 maio 2021.

KOCHMANN, Dennis M. *et al.* Multiscale Modeling (Spring 2023) mm-mm ms-hrs. nm fs. [S.l.: S.n.].

MACONACHIE, Tobias *et al.* SLM lattice structures: Properties, performance, applications and challenges. *Materials & Design*, v. 183, p. 108137, dez. 2019.

MARIN, Felipe *et al.* A new hybrid process combining machining and selective laser melting to manufacture an advanced concept of conformal cooling channels for plastic injection

molds. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 113, n. 5–6, p. 1561–1576, 8 mar. 2021.

MARQUES, Sabrina *et al.* Design of conformal cooling for plastic injection moulding by heat transfer simulation. *Polímeros*, v. 25, n. 6, p. 564–574, dez. 2015.

MASOUDI, Soroush *et al.* Recent advancement in conformal cooling channels: A review on design, simulation and future trends. *CAD Computer Aided Design*, v. 186–187, 1 out. 2025.

MAZUR, Maciej *et al.* Numerical and experimental evaluation of a conformally cooled H13 steel injection mould manufactured with selective laser melting. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 93, n. 1–4, p. 881–900, 1 out. 2017.

MIEHE, Christian. Computational micro-to-macro transitions for discretized microstructures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 5–6, p. 559–591, jan. 2003.

NEMAT-NASSER, S. ..; HORI, M. Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials. *[S.l.]*: North-Holland, 1993.

NYE, J. F. .. Physical properties of crystals. *[S.l.]*: Oxford Univ., 1993.

OKEREKE, Michael; KEATES, Simeon. *Finite Element Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2018.

PARK, Seong Je *et al.* Lightweight injection mold using additively manufactured Ti-6Al-4V lattice structures. *Journal of Manufacturing Processes*, v. 79, p. 759–766, jul. 2022.

PITRMUC, Zdeněk *et al.* Mechanical and Microstructural Anisotropy of Laser Powder Bed Fusion 316L Stainless Steel. *Materials*, v. 15, n. 2, p. 551, 12 jan. 2022.

REDEKER, Julian *et al.* Cost-Efficient Injection Mold Design: A Holistic Approach to Leveraging Additive Manufacturing's Design Freedom Through Topology Optimization. *Applied Sciences*, v. 15, n. 20, p. 10923, 11 out. 2025.

SADD, Martin H. .. Elasticity : theory, applications, and numerics. *[S.l.]*: Academic Press, 2014.

SAEB, Saba; STEINMANN, Paul; JAVILI, Ali. Aspects of Computational Homogenization at Finite Deformations: A Unifying Review From Reuss' to Voigt's Bound. *Applied Mechanics Reviews*, v. 68, n. 5, 1 set. 2016.

STEIN, Erwin.; BORST, René de.; HUGHES, Thomas J. R. .. Encyclopedia of computational mechanics. *[S.l.]*: John Wiley & Sons, Ltd., 2018.

SUQUET, Pierre. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. *[S.l.: S.n.]*. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/239964434>>.

TEPYLO, Nick; HUANG, Xiao; PATNAIK, Prakash C. Laser-Based Additive Manufacturing Technologies for Aerospace Applications. *Advanced Engineering Materials*, v. 21, n. 11, 25 nov. 2019.

Terminology for Additive Manufacturing - General Principles - Terminology. West Conshohocken, PAASTM International, , 1 jul. 2021.

TING, T. C. -t. .. Anisotropic elasticity : theory and applications. *[S.l.]*: Oxford University Press, 2020.

TORQUATO, Salvatore. Random Heterogeneous Materials. *[S.l.: S.n.]*.

WEAVER, Jordan S.; ROSENTHAL, Idan. Understanding anisotropic tensile properties of laser powder bed fusion additive metals : *[S.l.: S.n.]*.

WOHLERS, Terry T. ..; CAFFREY, Tim. Wohlers report 2015 : 3D printing and additive manufacturing state of the industry annual worldwide progress report. *[S.l.]*: Wohlers Associates, 2015.

WU, Tong; LIU, Kai; TOVAR, Andres. Multiphase topology optimization of lattice injection molds. *Computers and Structures*, v. 192, p. 71–82, 1 nov. 2017.

## ANEXO A – TABELA DE DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA

Aspectos geométricos dos corpos de prova.

| ID | Plano | Grau [°] | Espessura [mm] | Largura [mm] | S. Transversal [mm <sup>2</sup> ] | Nº Ensaio | Arquivo    |
|----|-------|----------|----------------|--------------|-----------------------------------|-----------|------------|
| 1  | YZ    | 0        | 3.65           | 6.55         | 23.9075                           | 3         | GPCAM2-03  |
| 2  | YZ    | 0        | 2.45           | 6.55         | 16.0475                           | 4         | GPCAM 2-04 |
| 3  | YZ    | 45       | 3.75           | 6.65         | 24.9375                           | 1         | GPCAM 2-01 |
| 4  | YZ    | 45       | 3.7            | 6.5          | 24.05                             | 2         | GPCAM 2-02 |
| 5  | YZ    | 90       | 2.2            | 6.7          | 14.74                             | 16        | GPCAM 3-4  |
| 6  | YZ    | 90       | 2.4            | 8.7          | 20.88                             | 17        | GPCAM 3-5  |
| 7  | XZ    | 0        | 2.55           | 6.5          | 16.575                            | 12        | GPCAM 2-12 |
| 8  | XZ    | 0        | 2.25           | 9.9          | 22.275                            | -         | -          |
| 9  | XZ    | 45       | 2.1            | 8.7          | 18.27                             | 13        | GPCAM 3-1  |
| 10 | XZ    | 45       | 2.25           | 6.85         | 15.4125                           | 14        | GPCAM 3-2  |
| 11 | XZ    | 90       | 2.6            | 6.5          | 16.9                              | 6         | GPCAM 2-6  |
| 12 | XZ    | 90       | 2.7            | 6.55         | 17.685                            | 5         | GPCAM 2-5  |
| 13 | XY    | 0        | 3.7            | 6.1          | 22.57                             | 15        | GPCAM 3-3  |
| 14 | XY    | 0        | 4.55           | 6.05         | 27.5275                           | 11        | GPCAM 2-11 |
| 15 | XY    | 45       | 3.9            | 6.05         | 23.595                            | 8         | GPCAM 2-08 |
| 16 | XY    | 45       | 4.9            | 6.05         | 29.645                            | 7         | GPCAM 2-07 |
| 17 | XY    | 90       | 4.5            | 6.05         | 27.225                            | 10        | GPCAM 2-10 |
| 18 | XY    | 90       | 4.9            | 6.05         | 29.645                            | 9         | GPCAM 2-9  |