



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA
E TECNOLÓGICA

Eduardo Sabel

**Materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal em livros didáticos
dos anos iniciais: uma análise epistêmica na perspectiva ontossemiótica**

Florianópolis
2025

Eduardo Sabel

Materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal em livros didáticos dos anos iniciais: uma análise epistêmica na perspectiva ontossemiótica

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Doutor em Educação Científica e Tecnológica

Orientador: Prof. Dr. Everaldo Silveira

Florianópolis
2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

SABEL, EDUARDO

Materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal em livros didáticos dos anos iniciais : uma análise epistêmica na perspectiva ontossemiótica / EDUARDO SABEL ; orientador, Everaldo Silveira, 2025.
182 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Educação Matemática. 3. Materiais Manipulativos. 4. Livros Didáticos. 5. Sistema de Numeração Decimal. I. Silveira, Everaldo. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

Eduardo Sabel

Materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal em livros didáticos dos anos iniciais: uma análise epistêmica na perspectiva ontossemiótica

O presente trabalho em nível de Doutorado foi avaliado e aprovado, em 02 de setembro de 2025, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves, Dr.
Universidade Federal de Pelotas

Profa. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão, Dra.
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Profa. Viviane Beatriz Hummes, Dra.
Universidade Federal de Santa Catarina

Profa. Regina Célia Grando Dra.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Educação Científica e Tecnológica.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Everaldo Silveira, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2025

Dedicatória

Dedico esta pesquisa a todas as crianças que, um dia, sonharam em ser professores; aquelas que viam em um simples quadrinho de giz o presente perfeito para brincar de escola em casa. Dedico às crianças sonhadoras que consideram a escola o seu lugar favorito, e que nelas permaneça viva a crença na educação, para que cresçam e se tornem educadores que valorizem e lutem por uma escola pública de qualidade neste país. Assim como, um dia, eu também fui uma dessas crianças.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais, minha mãe Valtrudes e meu pai José (que nos deixou ano passado), que dedicaram suas vidas, com muito trabalho e sacrifício, para investir na minha educação, mesmo diante de tantas limitações. Foram eles que sempre me incentivaram a continuar estudando e acreditaram em meu potencial. Graças a esse apoio incondicional, me tornei professor e, agora, doutor. Eles são a base da minha trajetória e as pessoas mais importantes que estiveram presentes em todos os momentos difíceis da minha vida. É por eles, e graças a eles, que hoje estou aqui.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores que fizeram parte do meu percurso, desde a educação infantil até a pós-graduação, e que, de alguma forma, contribuíram para que eu seguisse acreditando no caminho da educação e da pesquisa.

Agradeço também aos grupos de pesquisa dos quais fiz parte — o GEPPROFEM e o GPEEM —, espaços que me proporcionaram trocas significativas de ideias, aprendizagens valiosas e oportunidades de crescimento como pesquisador. Abro um parêntese especial para o Grupo Bolha (Eliandra, Karina e Edu), que, durante este doutorado, se consolidou como um espaço de amizade sincera, afeto e cuidado mútuo — uma verdadeira base de apoio emocional e intelectual.

Meu agradecimento especial aos orientadores que tive ao longo dessa jornada, desde o TCC até este doutorado, com destaque ao professor Everaldo Silveira, que dedicou seu tempo e saber para me orientar na escolha e nos caminhos da pesquisa. Agradeço, ainda, aos membros da banca examinadora (Vivi, Regina, Antônio e Tânia) pelas contribuições generosas, que certamente enriquecerão e qualificarão ainda mais esta tese.

Aos amigos, familiares e todas as pessoas queridas que estiveram ao meu lado — especialmente nos momentos difíceis, como a perda do meu pai — deixo minha sincera gratidão. Esta tese não é apenas um trabalho acadêmico, mas parte da minha própria trajetória enquanto sujeito em constante transformação. Tive que superar o luto, a dor, as dúvidas e seguir em frente, afinal, a vida e o trabalho não se separam: somos um só.

Registro, também, meu reconhecimento ao Programa de Bolsas Universitárias UniEDU (FUMDES/SC), pela bolsa de doutorado que foi fundamental para que eu tivesse condições de realizar essa pesquisa com mais qualidade.

Por fim, agradeço a Deus e à espiritualidade que sempre me acompanharam, sustentaram minha fé e guiaram meus passos. É neles que confio para os próximos caminhos que a vida me reserva.

Muito obrigado a todos!

Os rios não bebem sua própria água;
as árvores não comem seus próprios frutos.
O sol não brilha para si mesmo;
e as flores não espalham sua fragrância para si.
Viver para os outros é uma regra da natureza. (...)A
vida é boa quando você está feliz;
mas a vida é muito melhor quando os
outros estão felizes por sua causa" **(Papa Francisco)**

"Ando devagar porque já tive pressa,
e levo esse sorriso porque já chorei demais [...]"
(Almir Sater e Renato Teixeira)

RESUMO

A presente tese teve como objetivo analisar os significados institucionais e os conflitos semióticos em potencial presentes em tarefas sobre o Sistema de Numeração Decimal (SND) em livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (PNLD 2023-2026) que indicam o uso de manipulativos. A motivação da pesquisa partiu dos estudos de Silveira (2014, 2016, 2018, 2021), que discutem criticamente o uso de manipulativos no ensino do SND, revelando a necessidade de aprofundar a análise desse tema sob uma perspectiva epistemológica. O referencial teórico baseou-se no Enfoque Ontossemiótico (EOS) com foco na dimensão epistêmica que consiste em uma ferramenta de análise dos significados institucionais, objetos matemáticos primários e conflitos semióticos em potencial. Metodologicamente, a pesquisa realizou uma análise qualitativa e descritiva sobre cinco coleções de livros didáticos de Matemática mais adotadas no PNLD 2023-2026, abrangendo 25 volumes no total. O *corpus* concentrou-se nos capítulos voltados ao ensino de números e operações, com especial atenção às tarefas que indicavam o uso ou representação de manipulativos. Foram selecionados casos representativos de uso dos Blocos Base Dez (BBD), ábaco, dinheirinho, fichas verdes, palitinhos e objetos do cotidiano. Esses extratos foram analisados a partir dos componentes da dimensão epistêmica na perspectiva ontossemiótica, que são: situações-problema, linguagem, definições, procedimentos, argumentos, proposições, relações e os conflitos semióticos em potencial. Os resultados indicaram que os materiais mais recorrentes são os BBD, o ábaco e o dinheirinho. Identificou-se que, na maioria das tarefas, os significados institucionais mobilizados pelos manipulativos estavam relacionados ao contexto cardinal (representar quantidades) e operacional (envolvendo as operações básicas e suas propriedades). Os manipulativos foram amplamente usados como apoio à representação de quantidades, composição e decomposição numérica, e às operações aritméticas. Em relação aos objetos matemáticos, a análise evidenciou que as tarefas mobilizam principalmente a linguagem matemática (simbólica e natural) e definições relacionadas à base dez, valor posicional e trocas entre ordens. A pesquisa revelou também a presença de conflitos semióticos em potencial associados ao uso inadequado dos manipulativos, com destaque para: a sobreposição dos BBD no Quadro Valor de Lugar (QVL); a ressignificação das peças dos BBD para representar racionais não inteiros; o uso de cores distintas nas anilhas do ábaco; e a tentativa de associar o sistema monetário ao funcionamento estrutural do SND. Tais conflitos evidenciam a necessidade de uma análise crítica e cuidadosa na seleção e uso desses recursos em livros didáticos. Conclui-se que, embora os materiais manipulativos possuam potencial pedagógico relevante, seu uso precisa considerar seus limites representacionais e os aspectos específicos do objeto matemático que se deseja trabalhar. A tese contribui para a discussão científica sobre os manipulativos como objetos de pesquisa e propõe subsídios para professores, autores de livros didáticos e formadores de professores.

Palavras-chave: Materiais Manipulativos. Sistema De Numeração Decimal. Anos Iniciais. PNLD. Enfoque Ontossemiótico.

ABSTRACT

This thesis aimed to analyze the institutional meanings and potential semiotic conflicts present in tasks related to the Decimal Number System (DNS) in primary school mathematics textbooks (PNLD 2023–2026) that recommend the use of manipulatives. The research was motivated by the studies of Silveira (2014, 2016, 2018, 2021), whose critical analyses of manipulatives in teaching DNS highlighted the need for a deeper examination of this topic from an epistemological perspective. The theoretical framework was grounded in the Ontosemiotic Approach (OSA), focusing specifically on the epistemic dimension as an analytical tool for exploring institutional meanings, primary mathematical objects, and potential semiotic conflicts. Methodologically, the study employed a qualitative and descriptive analysis of the five mathematics textbook series most widely adopted in the PNLD 2023–2026, encompassing a total of 25 volumes. The analysis concentrated on chapters dedicated to teaching numbers and operations, with particular attention to tasks that indicated or represented the use of manipulatives. Representative cases involving Base Ten Blocks (BTB), abacus, play money, green chips, sticks, and everyday objects were selected. These excerpts were analyzed using the components of the epistemic dimension within the ontosemiotic perspective, namely: problem situations, language, definitions, procedures, arguments, propositions, relations, and potential semiotic conflicts. The results indicated that the most commonly used materials were Base Ten Blocks, abacus, and play money. In most tasks, the institutional meanings mobilized by the manipulatives were related to the cardinal context (representing quantities) and the operational context (supporting basic operations and their properties). Manipulatives were predominantly used to support the representation of quantities, numerical composition and decomposition, and arithmetic operations. Regarding mathematical objects, the analysis showed that tasks primarily engaged mathematical language (both symbolic and natural) and definitions concerning base ten, positional value, and exchanges between orders. The study also revealed potential semiotic conflicts associated with the inappropriate use of manipulatives. Notable issues included: the overlapping of BTB representations within the Place Value Chart (PVC); the reassignment of BTB pieces to represent non-integer rational numbers; the use of distinct colors in abacus beads; and the attempt to associate the monetary system with the structural functioning of the DNS. Such conflicts underscore the need for a critical and reflective approach to the selection and use of these resources in textbook tasks. In conclusion, although manipulatives hold significant pedagogical potential, their use must account for their representational limitations and the specific mathematical concepts intended for instruction. This research contributes to the scientific discussion of manipulatives as legitimate objects of study in mathematics education and offers practical insights for teachers, textbook authors, and teacher educators.

Keywords: Manipulative materials. Decimal number system. Primary education. PNLD. Ontosemiotic approach.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura geral da pesquisa	26
Figura 2 - Exemplo de situação onde a balança é usada como analogia a uma equação	34
Figura 3 - Exemplos de sólidos geométricos físicos para manipulação	35
Figura 4 - Fichas verdes utilizado no ensino da classe das ordens simples	36
Figura 5 - Material criado para resolver um problema combinatório	37
Figura 6 - Régua, compasso e esquadro	38
Figura 7 - Jogo do Dominó das Frações	38
Figura 8 - Diferentes formas simbólicas para números de 1 a 9	41
Figura 9 - Evolução dos algarismos indo-arábicos	43
Figura 10 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção A Conquista da Matemática	72
Figura 11 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção Ápis Mais Matemática	73
Figura 12 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção Bem-me-quer Mais Matemática	74
Figura 13 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção Aprender Juntos	74
Figura 14 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção Buriti Mais Matemática	75
Figura 15 - Tarefa que usa os BBD no significado cardinal na coleção Bem-me-quer Mais Matemática	77
Figura 16 - Outra forma de organizar as representações dos BBD	79
Figura 17 - Outra forma de indicar os BBD para introduzir a ordem da unidade de milhar presente na coleção Ápis Mais Matemática	80
Figura 18 - Explicação do uso dos BBD para números racionais na forma decimal	82
Figura 19 - Tarefa que usa os BBD para números racionais não inteiros	82
Figura 20 - Tarefa que usa os BBD em situações de agrupamento	86
Figura 21 - Outra tarefa que utiliza os BBD para agrupamentos e trocas de dez	87
Figura 22 - Uso dos BBD para introduzir a ordem da unidade de milhar	88
Figura 23 - Uso dos BBD para auxiliar em uma tarefa de adição	91
Figura 24 - Outro uso dos BBD para auxiliar em uma tarefa de adição	94
Figura 25 - Tarefa anterior citada no uso dos BBD para multiplicação	95
Figura 26 - Uso dos BBD para auxiliar em uma tarefa de multiplicação	95
Figura 27 - Primeira indicação sobre o quadro de ordem	98
Figura 28 - Indicação sobre o uso do Quadro de ordem no livro do 2º ano	99
Figura 29 - Funcionamento de um BBD sobreposto em um QVL	100
Figura 30 - Uso dos BBD fora do QVL	100
Figura 31 - Forma de usar os BBD sobrepostos ao QVL	101
Figura 32 - Tarefa que indica os BBD em um contexto ordinal	102
Figura 33 - Uso dos BBD para sequência das centenas	104
Figura 34 - Tarefa que usa os BBD para as sequências	106
Figura 35 - tarefa que relaciona os BBD com as frações	107
Figura 36 - Tarefa que introduz o ábaco e usa no significado cardinal	111
Figura 37 - Sugestão de como fazer a adição $21 + 6$ usando o ábaco	113
Figura 38 - Outro exemplo de tarefa que usa o ábaco para representar números	114
Figura 39 - Uso do ábaco com todas as anilhas da mesma cor	116
Figura 40 - Tarefa que usa o ábaco para trabalhar o valor relativo	118
Figura 41 - Tarefa que usa o ábaco para introduzir uma nova ordem	120
Figura 42 - Tarefa que trabalha o significado operacional (subtração com reserva)	122
Figura 43 - Tarefa que usa o ábaco para trabalhar a ideia de sucessor	125

Figura 44 - Uso do ábaco para trabalhar sucesso e antecessor	128
Figura 45 - Tarefa que usa o dinheiro para o significado cardinal	132
Figura 46 - Outro caso de uso do dinheiro para o significado cardinal	134
Figura 47 - Uso do dinheirinho para ensinar trocas de dez	135
Figura 48 - Outro exemplo de dinheirinho de papel para ensinar trocas de dez	138
Figura 49 - Tarefa que retoma as fichas verdes e que as utilizam para representar quantidades.....	141
Figura 50 - Tarefa que utiliza as fichas verdes para contar números maiores que mil.....	143
Figura 51 - Tarefa que usa as fichas verdes para números racionais	144
Figura 52 - Tarefa que usa as fichas verdes em quadros rotulados	147
Figura 53 - Comparação de uso das fichas verdes em quadros rotulados	149
Figura 54 - Uso das fichas verdes sobrepostas ao QVL	150
Figura 55 - Uso das fichas verdes fora de quadros rotulados para trabalhar operações	150
Figura 56 - Tarefa que utiliza palitinhos para ensinar os agrupamentos de dez	152
Figura 57 - Uso de ‘amarradinhos’ de palitos para ensinar os agrupamentos de dez.....	154
Figura 58 - Tarefa que usa tampinhas para ensinar os agrupamentos de dez.....	154
Figura 59 - Outro caso das tampinhas para formar os grupos de dez	155
Figura 60 - Tarefa que usa os palitinhos em situações de adição	156

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Contas douradas de Montessori e Material Dourado de Dienes	29
Quadro 2 - Exemplos dos três tipos de categorias para os manipulativos	33
Quadro 3 - Lista de habilidades presentes na BNCC dos Anos Iniciais	54
Quadro 4 - Quadro dos critérios da dimensão epistêmica adaptado à pesquisa	64
Quadro 5 - Representatividade epistêmica do SND	67
Quadro 6 - As cinco coleções de livros didáticos de matemática submetidos ao edital do PNLD (2023-2026) das editoras com mais vendas para os Anos Iniciais	70
Quadro 7 - Os manipulativos nas cinco coleções de livros didáticos	71
Quadro 8 - Análise da tarefa da Figura 15	77
Quadro 9 - Análise da tarefa da Figura 19	83
Quadro 10 - Análise da dimensão epistêmica da tarefa da Figura 20	86
Quadro 11 - Análise da Dimensão epistêmica da tarefa da Figura 22	89
Quadro 12 - Análise da Dimensão epistêmica da tarefa da Figura 23	92
Quadro 13 - Uso dos BBD para auxiliar em uma tarefa de multiplicação	97
Quadro 14 - Análise da dimensão epistêmica da tarefa da Figura 33	104
Quadro 15 - Síntese da análise dos Blocos base dez (BBD)	108
Quadro 16 - Análise da tarefa da Figura 36	111
Quadro 17 - Análise da Dimensão epistêmica da tarefa da Figura 39	116
Quadro 18 - Análise da tarefa da Figura 40	118
Quadro 19 - Análise da tarefa da Figura 41	121
Quadro 20 - Análise da tarefa da Figura 42	123
Quadro 21 - Análise da tarefa da Figura 43	125
Quadro 22 - Síntese da análise do ábaco	130
Quadro 23 - Análise da tarefa da Figura 45	132
Quadro 24 - Análise epistêmica da tarefa da Figura 47	136
Quadro 25 - Análise da tarefa da Figura 49	141
Quadro 26 - Análise da tarefa da Figura 51	145
Quadro 27 - Análise da tarefa da Figura 52	147
Quadro 28 - Análise da tarefa da Figura 56	153
Quadro 29 - Tarefa que usa os palitinhos em situações de adição	156
Quadro 30 - Síntese da análise epistêmica das fichas verdes	158
Quadro 31 - Síntese da análise epistêmica de objetos retirados do cotidiano	158

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EOS	Enfoque Ontossemiótico
LD	Livro didático
SND	Sistema de numeração decimal
CCDM	Conhecimento e Competência Didático-Matemático
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
PPGECT	Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica
GPEEM	Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática
GEPPROFEM	Grupo de Pesquisa em Processos Formativos em Educação Matemática
BBD	Blocos base dez
LD	Livros didáticos
CCDM	Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
QVL	Quadro Valor de Lugar
RELME	Reunião Latino-americana de Matemática Educativa
CIAEM	Conferência Interamericana de Educação Matemática
CIBEM	Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática
ICMT	Conferência Internacional sobre Pesquisa e Desenvolvimento de Livros Didáticos de Matemática
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
PNBE	Programa Nacional Biblioteca na Escola
MEC	Ministério da Educação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	UM POUCO DO CAMINHAR DO PESQUISADOR	16
1.2	O CONTEXTO E OS OBJETIVOS DA PESQUISA.....	19
1.3	A ESTRUTURA GERAL DA TESE	26
2	MATERIAIS MANIPULATIVOS.....	28
2.1	O QUE SÃO MANIPULATIVOS E POR QUE IMPORTAM?	28
2.2	ALGUMAS CATEGORIZAÇÕES POSSÍVEIS	33
3	O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL	40
3.1	BREVE RETRATO HISTÓRICO	40
3.2	SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL ..	44
4	A PESQUISA EM LIVROS DIDÁTICOS	48
4.1	LIVROS DIDÁTICOS NA PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	48
4.2	LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL: O PAPEL DO PNLD E O IMPACTO DA BNCC	51
5	AS ESCOLHAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS.....	56
5.1	ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO: PRESSUPOSTOS E CONCEITOS PRINCIPAIS.....	56
5.2	AS FERREMENTAS DE ANÁLISE DA PESQUISA: A IDONEIDADE EPISTÊMICA E OS CONFLITOS SEMIÓTICOS	62
5.2.1	Componentes e indicadores da dimensão epistêmica	62
5.2.2	A representatividade epistêmica do Sistema de Numeração Decimal nos Anos Iniciais	65
5.3	SISTEMATIZANDO OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	68
6	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	70
6.1	APRESENTANDO AS COLEÇÕES.....	70
6.2	ANÁLISE DAS INDICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES DOS BLOCOS BASE DEZ.....	75
6.2.1	Tarefas representativas sobre o uso dos BBD nos diferentes significados de referência do SND	76
6.2.2	Síntese das tarefas representativas sobre o uso dos BBD.....	108
6.3	ANÁLISE DAS INDICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES DO ÁBACO	109
6.3.1	Tarefas representativas sobre o uso do ábaco nos diferentes significados de referência do SND	110
6.3.2	Síntese das tarefas representativas sobre o uso do ábaco	129
6.4	ANÁLISE DAS INDICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES DO DINHEIRINHO	131
6.4.1	Tarefas do dinheirinho nos diferentes significados do SND	131
6.5	ANÁLISE DAS INDICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES DAS FICHAS VERDES E OBJETOS RETIRADOS DO COTIDIANO.....	139

6.5.1 Tarefas representativas sobre o uso das fichas verdes nos diferentes significados de referência do SND.....	139
6.5.2 Tarefas representativas sobre o uso de objetos do cotidiano nos diferentes significados de referência do SND.....	151
6.5.2 Síntese das tarefas que usam fichas verdes, palitinhos e tampinhas.....	157
7 PRINCIPAIS CONSIDERAÇÕES	160
REFERÊNCIAS.....	168

1 INTRODUÇÃO

Escolho iniciar o presente estudo fazendo um relato pessoal do que vivi até chegar a este momento, pois nenhuma pesquisa surge do vazio. Primeiramente, apresento brevemente os caminhos que influenciaram minhas escolhas até aqui, até se concretizarem nesta tese. Em seguida, exponho o desenho da pesquisa, os objetivos gerais e específicos, os aspectos metodológicos e as justificativas para a realização do presente estudo. Finalizo com um esquema que resume como vejo a estrutura desta pesquisa para, nos capítulos seguintes, abordar os referenciais teóricos.

1.1 UM POUCO DO CAMINHAR DO PESQUISADOR

De tantos momentos que influenciaram para que eu chegasse à escrita deste texto, penso que o mais importante seja o começo de minha escolha profissional, quando ingressei no curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – Campus Blumenau. Fiz parte da primeira turma dele, onde não só tive o privilégio de me graduar, mas onde entrei também em contato com professores que acabariam influenciando minhas escolhas futuras e pelos quais desenvolvi grande admiração.

Ingressei no curso imaginando aprender todos os tipos de conteúdos matemáticos, sem ter a noção das ciências da educação. No começo, resisti a abraçar as discussões pedagógicas, pois imaginava que, como professor de matemática, o que me importava eram as equações e não os textos. Mas o mundo gira! Comecei a dar aulas ainda na metade da graduação, e foi ali, dentro da sala de aula, que entendi que saber matemática não era suficiente para ensiná-la. Nesse momento, me vi confrontado comigo mesmo, desafiado e com medo de não conseguir. Foi quando busquei, então, o apoio de professores da área da educação, cujo acolhimento e ajuda me incentivaram a permanecer envolvido no tipo de debate que ofereciam.

Comecei a procurar espaços para falar de educação e externar minhas inquietações. Então, fui convidado a integrar um grupo de pesquisa em história e filosofia da educação, do qual participei durante a graduação. Suas atividades consistiam em leituras e debates sobre autores como Mario Manacorda, Antônio Gramsci, Saviani, dentre outros historiadores da educação. Ali pude enriquecer minha visão de mundo acadêmico, entendendo que ele não precisava se resumir as provas e as listas de exercícios. Pouco tempo depois, tive aula com outra professora que me apresentou o debate das diferentes metodologias no ensino da matemática,

momento em que minha atenção despertou para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval.

As leituras dessa teoria possibilita muitas explicações sobre aspectos do ensino da matemática, sobre as dificuldades dos alunos em relação à linguagem e sobre como esses temas atravessam a sala de aula. À medida que me aproximava dos últimos semestres da graduação e me sentia completamente envolvido pelas leituras no campo da educação matemática, decidi que meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) consistiria na elaboração e aplicação de uma sequência didática para o estudo de frações, tendo como campo empírico o 6º ano do Ensino Fundamental. Essa experiência me levou a perceber que esse tipo de pesquisa contribuiria com as próximas etapas de minha vida acadêmica quanto à contínua busca de respostas às minhas inquietações. Além disso, todo o processo inicial pelo qual passei, certamente me deixou mais confiante para tentar seguir adiante.

Nesse momento, a partir da escolha pela continuidade da vida acadêmica na pós-graduação, busquei por programas que tivessem grupos e linhas de pesquisa que atendessem às inquietações voltadas à educação matemática. O Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (doravante PPGET), da UFSC, chamou minha atenção pela condução de pesquisas sobre o ensino da matemática, além de ser um programa de excelência, conforme a avaliação da CAPES. Decidi que tentaria enviar um projeto sobre semiótica, por ser um tema que eu já conhecia, mas que pretendia aprofundar. Foi com grande felicidade que ingressei no PPGET e pude dar o primeiro passo para o sonho de continuar a vida acadêmica. No mestrado, aprofundei meus estudos sobre a didática francesa e a semiótica de Duval, e escrevi a dissertação tendo meus alunos de Ensino Médio como participantes dela. Mais uma linda experiência para recordar.

Em meados de 2020, comecei a pensar em quais caminhos eu seguiria após o mestrado. Mesmo com as adversidades causadas pela pandemia de covid-19, meu interesse em continuar com meu objetivo foi maior, de modo que resolvi tentar ingressar no doutorado em 2021. Para isso, comecei a levantar problemáticas da Educação Matemática que eu teria interesse de pesquisar para a escrita da tese. Como já havia estudado a teoria de Duval no TCC e na dissertação, considerei que, para um doutorado de quatro anos, eu gostaria também de olhar para novas abordagens, assim que fui à procura de algo que me despertasse o interesse.

Dentre as leituras que fiz, minha atenção se voltou a alguns trabalhos socializados em eventos acadêmicos que tratavam de materiais manipulativos no ensino de matemática. Em especial, destaco um evento *on-line* em que o professor Dr. Everaldo Silveira apresentou um trabalho sobre o tema. A partir de então, realizei mais algumas leituras acerca dos materiais

manipulativos, ao passo que a curiosidade e o interesse sobre o tema só aumentaram. Por isso, resolvi que tentaria aprofundar meus estudos e fazer desse debate meu foco para a tese. A partir daí, com os estudos e as leituras dos trabalhos do professor Silveira, senti-me instigado em aprofundar suas discussões sobre os manipulativos. Foi um desafio escrever um projeto centrado nesse tema, principalmente por falar de uma matemática pensada para os Anos Iniciais, da qual eu, professor especialista em matemática, sabia pouco. Felizmente, entrei no doutorado e aqui estou!

Integro, desde 2019, o GPEEM (Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática), e em 2023 comecei a participar do GEPPROFEM (Grupo de Pesquisa em Processos Formativos em Educação Matemática). Ambos têm me oportunizado um crescimento para escrever não apenas esta tese e receber as contribuições dos colegas, mas também possibilitado a participação em eventos e o acesso a leituras das quais só tive conhecimento a partir de então. O fato é que todo esse processo implicou também em mudanças em relação à minha forma de ver e pensar as matemáticas, o que gerou uma reviravolta epistemológica em minha pesquisa.

No primeiro ano de doutorado, imaginei que usaria novamente a teoria de Duval como lente de análise. Contudo, minha grande parceira de estudos, a Eliandra (Lia)¹, me apresentou um novo marco teórico chamado Enfoque Ontossemiótico (EOS), e isso mudou tudo. No começo, resisti, mas fui percebendo, com as leituras, que esse referencial poderia contribuir muito mais com esta pesquisa. Desde então, junto da Lia, venho estudando o EOS e ressignificando minhas concepções de objeto matemático, de semiótica, de aprendizagem, de ferramentas de análise e de outros conceitos fundamentais da educação matemática.

Tenho me reconstruído, repensado e mudado de pensamentos várias vezes nesse tempo, o que considero positivo. Tenho muito mais a aprender, mas sinto que já avancei muito em relação ao ponto onde estava ontem. Permito-me seguir nesse caminhar em que vou construindo meu próprio modo de pensar, que vou seguindo com a escrita da tese e, principalmente, vivendo intensamente todo esse período, de um doutor em formação.

¹ Eliandra Moraes Pires, professora de matemática em Florianópolis, ingressou no doutorado na mesma turma que eu, com o mesmo orientador. Seu tema de pesquisa envolve a análise de significados e conflitos produzidos pelos estudantes em sala de aula quando utilizam alguns manipulativos.

1.2 O CONTEXTO E OS OBJETIVOS DA PESQUISA

O ensino de matemática, ao longo do tempo, tem enfrentado diferentes desafios em diferentes contextos, seja no âmbito epistemológico (D’Ambrósio, 2013; Bicudo, 2021), didático (D’amore, 2007; Godino, Batanero e Font, 2003) ou na formação dos professores (Curi, 2011; Gatti, 2017). Nesse sentido, as pesquisas em Educação Matemática têm promovido diferentes discussões com o intuito de contribuir para enfrentar as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem.

Nesses cenários, diferentes tendências, teorias e metodologias têm sido utilizadas pelos professores e pesquisadores. Por exemplo, as práticas de resolução de problemas (Onuchic; Allevato, 2004), as investigações matemáticas (Ponte, 2003), os jogos pedagógicos (Grando, 2000; Smole; Muniz, 2013), a modelagem matemática (Caldeira, 2009; Barbosa, 2004), as tecnologias digitais (Borba; Chiari, 2013), a etnomatemática (D’ambrosio, 2011), além de outras possibilidades apresentadas ao cenário educacional. Um ponto em comum entre os autores que abordam esse debate reside na necessidade de buscar subsídios didáticos e pedagógicos para as aulas de matemática.

É com essa intenção que uma das perspectivas estudadas para auxiliar o ensino da matemática se volta à utilização de materiais manipulativos², que são recursos didáticos amplamente utilizados nas aulas de matemática, sobretudo nos Anos Iniciais (Nacarato; Mengali; Passos, 2014). É no cerne dessa discussão, sobre manipuláveis nos Anos Iniciais, que a presente pesquisa se concentra.

Acerca da contribuição dos manipuláveis, Lorenzato (2006) argumenta sobre as possibilidades de estimular os estudantes a participar e se interessar pelo conteúdo das aulas, potencializando o aprendizado, enquanto Furner, Yahya e Duffy (2005) descrevem como esses materiais podem auxiliá-los a construir uma relação entre o concreto e o abstrato na matemática. Um ponto que estes e outros autores concordam (Björklund, 2014; Uttal, 2003; Carraher; Carraher; Schliemann, 1988; Brown; Mcneil; Glenberg, 2009) é o potencial sobre o uso de tais materiais, que requerem a manipulação do estudante e a problematização do professor para a aprendizagem matemática.

Os professores que lecionam nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental têm recebido incentivos e orientações para o trabalho com esses materiais, inclusive, por meio de livros didáticos de matemática, conforme apontam os estudos de Silveira (2014, 2016, 2018, 2021).

² Neste estudo, utilizaremos os termos “manipulativos”, “manipuláveis” e “materiais manipulativos” como sinônimos.

Logo, considerando o forte impacto que os livros didáticos de matemática têm sobre o trabalho docente (Fan, 2013; Fan; Zhu; Miao, 2013), torna-se evidente a importância de estudar como eles têm indicado e orientado o uso de manipulativos. Silveira salienta que:

Os livros didáticos costumam servir de guias fiéis à maioria dos professores que ensinam matemática. As indicações para se utilizarem materiais manipulativos feitas pelos livros didáticos podem, portanto, ecoar entre esses profissionais. Dessa forma, é importante que se lance um olhar mais criterioso sobre os materiais manipuláveis e sobre o que se deseja a partir deles (Silveira, 2018, p. 18).

O ponto disparador da presente pesquisa surgiu, principalmente, com os estudos de Silveira (2014, 2016, 2018, 2021). Neles, ele apresenta uma série de discussões a respeito de como alguns manipuláveis são representados e indicados em alguns livros didáticos e em materiais de formação de professores. Em suas investigações mais recentes, analisou especificamente as cinco coleções de livros do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático, 2016-2018), refletindo sobre como seu uso pode levar a erros e sobre a aprendizagem dos estudantes. Os materiais analisados são aqueles objetivados pelos livros para ensinar os conceitos do Sistema de Numeração Decimal (SND). Um exemplo disso é o uso de representações dos Blocos base dez (BBD)³, organizados dentro de um Quadro Valor de Lugar (QVL)⁴. No entanto, o autor não considera que este seja o modo mais adequado de se utilizar os BBD, pois essa maneira de sobrepô-los dentro do QVL – uma vez que se aprendeu como funciona o QVL, que multiplica os algarismos em cada ordem por uma potência de dez, ao constatar uma peça dos BBD – pode levar à confusão sobre qual é o número que está sendo referenciado na atividade matemática⁵.

É com base nesses alertas feitos pelas pesquisas supracitadas que esta tese pretende reiterar e aprofundar as discussões sobre a abordagem dos materiais manipuláveis em livros didáticos. Contudo, apresentamos algumas mudanças metodológicas ao longo do processo de investigação, que nos permitiram, igualmente, novos resultados. Nesta pesquisa, analisamos as coleções mais recentes do PNLD (2023-2026), destinadas aos Anos Iniciais. Selecionamos o conjunto das cinco coleções mais vendidas em 2023 (esta é a justificativa da escolha das obras), abrangendo 25 volumes no total. E assim como Silveira (2014, 2016, 2018, 2021) trazia como

³ Conhecidos no Brasil como “Material Dourado”, os BBD são um conjunto de peças (modelos de blocos), em forma de barras, placas e cubos unitários, que representam as quantidades de unidades, dezenas, centenas e milhares. Usaremos o termos no plural, visto que é um conjunto de blocos e portanto, vamos nos referir como ‘os BBD’.

⁴ O QVL é um espaço organizado por um quadro em que cada coluna indica uma ordem numérica (unidades, dezenas, centenas etc.) e que permite que os alunos organizem e representem números, utilizando o princípio do valor posicional do sistema de numeração.

⁵ A discussão será retomada possivelmente ao longo da pesquisa.

foco discussões sobre os equívocos e os erros matemáticos em potencial, temos como objetivo realizar uma análise de natureza epistêmico-semiótica⁶.

O ensino do SND já tem sido alvo de muitas pesquisas que consideram e aportam elementos sobre como os estudantes apresentam diferentes dificuldades de compreensão acerca de nosso sistema de numeração (Kamii, 2001; Teixeira, 1996; Lerner; Sadovsky, 1996; Brandt, 2005). Segundo Toledo e Toledo (1997), “é aconselhável que o professor realize um trabalho mais prolongado [...], com atividades diversificadas sobre agrupamento e trocas, além da familiarização com o valor posicional dos algarismos” (p. 64). Constatamos, assim, que usar manipuláveis para ensinar o SND contribui de forma pedagógica, além de ser uma prática antiga, uma vez que diversos materiais didáticos foram elaborados para esse fim, por autores renomados, como Maria Montessori (1870-1952) e Zoltan Dienes (1916-2014). Inclusive, esses materiais têm sido amplamente utilizados como um recurso para ensinar números e contagem (Silveira; Powell, 2019), assim como estão presentes em orientações para o professor em documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular BNCC (2018), voltadas ao desenvolvimento de um conjunto de habilidades relacionado aos Anos Iniciais (Sabel; Pires; Silveira, 2022).

Outro aspecto a considerar nesta pesquisa é que, quando olhamos para um manipulativo em um LD (Livro Didático), não estamos lidando com o material em si, mas com um modelo visual que o representa. Essa questão implica considerar o papel essencial das representações para a matemática, de modo que tomamos o campo da semiótica como possibilidade para discutir isso. Conforme sublinham De Souza e Moretti (2015), “os objetos ideais, como os matemáticos, são estruturas abstratas, por isso, as semioses são importantes, não só na comunicação com os outros, como também na interação entre elas” (p. 6). Os manipulativos indicados para o ensino do SND, presentes nos LD, se configuram como mais uma representação para os números que, em conjunto com outras linguagens (símbolos, palavras, figuras etc.), mobilizam processos semióticos para o aprendizado.

No intuito de considerar tanto o papel epistêmico quanto o semiótico dos manipuláveis, nos amparamos nos aspectos teórico-metodológicos do Enfoque Ontossemiótico da Instrução e Cognição Matemática (EOS). Esse marco teórico dispõe de ferramentas de análise para identificar não só os conhecimentos objetivados pelos livros, mas também os elementos semióticos que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática. Os conceitos de

⁶ Ao longo do texto, explicaremos como ocorrerá esse tipo de análise.

significado, de objeto matemático e de conflitos semióticos, propostos pelo EOS, são a base da lente de análise desta tese.

Considerando os estudos e as discussões acerca dos materiais manipulativos, esta pesquisa se centrará em suas representações usadas em livros didáticos de matemática dos Anos Iniciais, cuja finalidade seria a de facilitar ou possibilitar, por parte das crianças, a compreensão do SND. Para isso, elencamos o seguinte **objetivo geral** da tese: **Compreender, a partir da dimensão epistêmica, os significados institucionais e os conflitos semióticos em tarefas sobre o SND presentes em livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (PNLD 2023-2026), com indicações de uso de manipulativos.**

Para atendermos ao objetivo geral, decidimos traçar alguns objetivos específicos que deveriam ser alcançados ao longo da pesquisa:

- (i) Identificar e classificar os diferentes tipos de representação de materiais manipulativos presentes em livros didáticos que objetivam caracterizar e ensinar números, sistemas de contagem e operações aritméticas;
- (ii) Entender que significados institucionais sobre o SND são pretendidos pelos livros didáticos por meio do uso de materiais manipulativos;
- (iii) Analisar os objetos matemáticos que emergem a partir das práticas com manipulativos indicadas nos LD;
- (iv) Discutir que incompreensões, ambiguidades e conflitos semióticos podem surgir a partir das representações e indicações dos manipulativos presentes nos livros didáticos.

O primeiro objetivo específico se relaciona com a organização dos dados produzidos a partir da identificação dos diferentes tipos de manipulativos presentes nas coleções, buscando propriedades em comum para categorizá-los. O segundo implica na identificação dos significados institucionais pretendidos para cada tipo de materiais e nas diferentes coleções para entender todas as maneiras que os manipulativos podem auxiliar no ensino do SND. O significado institucional corresponde à delimitação do que é o objeto para as instituições matemáticas e didáticas, considerando, por exemplo, currículos, livros didáticos e história do conceito. O terceiro objetivo específico analisa os diferentes objetos matemáticos envolvidos nas tarefas em que o LD indica o uso de manipuláveis para compreender, de forma criteriosa, a matemática por trás dessas práticas. E o quarto objetivo específico aprofunda e acrescenta novas discussões a partir dos estudos de Silveira (2014, 2016, 2018, 2021) para verificar se os equívocos apontados em suas pesquisas permanecem nessas coleções, além de outros casos possíveis.

No que se refere aos procedimentos metodológicos, por meio de uma abordagem qualitativa e descritiva (Ludke; Andre, 1986), utilizaremos uma das dimensões da Idoneidade Didática, que faz parte do Enfoque Ontossemiótico (EOS), como instrumento de análise. O EOS oferece um conjunto de ferramentas teóricas para se pensar nas práticas matemáticas, promovendo discussões sobre os diferentes significados matemáticos presentes no ensino e valorizando a dimensão epistemológica (científica), ontológica (dos sujeitos) e semiótica (linguagem). Dessa forma, a semiótica é considerada um elemento inseparável dos sujeitos envolvidos, de seus contextos e conhecimentos pessoais, por isso, fala-se em Ontossemiótica.

A idoneidade didática de um processo de ensino-aprendizagem é concebida como o grau em que ele (ou uma parte dele) reúne certas características que permitem avaliar se está adequado para alcançar a adaptação entre os significados pessoais almejados pelos estudantes (aprendizagem) e os significados institucionais pretendidos ou implementados pelo professor (ensino), levando em conta as circunstâncias e os recursos disponíveis (ambiente) (Breda; Font; Pino-Fan, 2018). Trata-se, portanto, de uma avaliação gradual e qualitativa dos processos instrucionais que envolve a articulação coerente das dimensões epistêmica (reflexão dos significados institucionais), ecológica (currículo, normas e metanormas), cognitiva (aprendizagem do estudante), afetiva (motivações, interesses e emoções), interacional (comunicação entre os sujeitos) e mediacional (recursos didáticos) (Godino, *et. al*, 2013). Essas dimensões da idoneidade têm componentes e indicadores próprios, que podem ser usados como eixos ou categorias de análise de livros didáticos. Essa prática já foi utilizada em outras pesquisas (Castillo; Burgos; Godino, 2021; Céspedes; Narravo; Godino, 2022), tendo sido empregada como um guia geral de análise de livros de matemática.

Os autores explicam que cada pesquisa pode determinar qual ou quais dimensões da idoneidade utilizar, dependendo do objetivo da análise. Em nosso caso, a dimensão epistêmica⁷ apresenta os elementos que temos interesse em investigar. A dimensão epistêmica permite avaliar os chamados “objetos matemáticos primários”, que são: situações-problema, linguagem, procedimentos, definições, proposições e argumentos (Font; Godino, 2006). A análise desses elementos representa um olhar para os significados institucionais, ou seja, aquilo que se almeja ensinar do ponto de vista institucional (escolar, científico). Uma análise dessa natureza permite uma visão detalhada dos objetos primários mobilizados em um sistema de práticas e, inclusive, na proposta de ensino em um LD.

⁷Alguns textos chamam a dimensão epistêmica diretamente de Idoneidade Epistêmica. Tendo em vista que no Brasil o termo ‘Idoneidade’ possa ter um sentido diferente do que em espanhol, utilizaremos a expressão dimensão epistêmica.

No que se refere à relevância deste estudo, apoiamo-nos em diferentes autores que defendem a importância da pesquisa com livros didáticos. Fan (2013) explica que a investigação envolvendo a Educação Matemática deve levar em conta os livros didáticos como objetos de estudo e considerar seu impacto significativo nas práticas docentes. Em consonância, Silveira e Powell (2019) argumentam que os livros didáticos, muitas vezes, são a principal fonte de conhecimento matemático, seja para os professores, seja para os estudantes.

Outro fator significativo é que os livros a serem analisados, destinados aos professores dos Anos Iniciais, “muitas vezes não fornecem os entendimentos conceituais que fundamentam muitos dos princípios matemáticos que os professores de formação inicial devem ensinar” (Nicol; Crespo, 2006, p. 30). Além disso, pela forte presença nas escolas públicas, o livro didático também ensina determinados conhecimentos que influenciam a cultura escolar, assim como a própria prática do professor (Gonçalves; Corrêa, 2016),

Nesta pesquisa, os LD serão o veículo para identificar os casos acerca de nosso tema de interesse: as representações e as indicações de manipulativos para auxiliar no ensino do SND. Os extratos escolhidos para a análise vão além da questão de pensar na forma como os materiais (de origem física) se tornam modelos visuais, mas também envolvem as demais linguagens usadas em conjunto com eles. Esse olhar nos conduz às discussões sobre o papel das representações no ensino e aprendizagem da matemática. Compreender os significados pretendidos pelos LD contribui para que os professores de matemática possam organizar e implementar processos de ensino de modo a promover a construção desses conhecimentos (Pino-Fan *et al.*, 2013), além do entendimento de qual conteúdo matemático determinado material possibilita ensinar (Avila, 2019).

Dallemole, Groenwald e Ruiz (2014) apontam que incompreensões conceituais, em algumas situações, têm relação com a não compreensão das diferentes representações de um objeto por parte do estudante. Steinbring (2006), por sua vez, postula que “os signos matemáticos têm ambas as funções semióticas e funções epistemológicas” (p. 133). Próximo a esse sentido, Duval (2004) concede um papel essencial apenas ao uso de diferentes registros de representação semiótica, mas também, ao mesmo tempo, às atividades cognitivas que tais representações cumprem para o funcionamento do pensamento matemático.

Em relação ao estudo de Boni, Laburo e Camargo Filho (2021), os autores sinalizam que muitas pesquisas que estudam as representações na matemática condicionam a construção dos significados com atividades que promovem a troca e a conexão entre as representações. Zaidan (2016) afirma que muitos estudantes sentem dificuldade de entender a linguagem

presente nos LD, levando-nos a lançar um olhar criterioso sobre a forma de comunicação do livro com o estudante.

No caso das representações de manipulativos em LD, temos uma riqueza linguística a ser levada em conta, pois os manipuláveis não são utilizados isolados de outros sistemas de representação. As tarefas que indicam esses materiais são compostas por diferentes tipos de linguagens (língua natural, símbolos, desenhos, quadros etc.). A maneira de explorarmos essas representações é considerá-las como expressões feitas para um determinado ser (estudantes dos Anos Iniciais). Essas representações, presentes nos livros, interagem e influenciam quando o aprendiz lê ou realiza as tarefas, ou então, quando o professor explica as orientações de seu uso.

Desse modo, entendemos que a análise deve considerar os aspectos semióticos, mas também o contexto dos sujeitos para os quais os objetivos do LD conduzem a atividade com o material manipulativo. Portanto, faz-se necessária uma ferramenta que integre essas questões, sendo que o Enfoque Ontossemiótico (EOS) oferece aspectos teóricos e práticos para esse fim. Em particular, estamos considerando a dimensão epistêmica (um dos níveis de análise que compõem a Idoneidade Didática)

Em relação aos aspectos que atribuem originalidade à presente pesquisa, e para além, estamos utilizando um referencial teórico-metodológico pouco explorado para discutir o tema dos manipulativos. Sobre o uso do EOS em educação matemática, estudos têm evidenciado as lacunas acerca da investigação sobre materiais manipulativos. Kaiber *et al.* (2017) apresentam um panorama da utilização do EOS como um suporte teórico em investigações na área, a partir da análise de pesquisas realizadas na América Latina de 2007 a 2017. Seu estudo teve como base de dados os anais da Reunião Latino-Americana de Matemática Educativa (RELME), da Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM) e do Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM). Dos 188 trabalhos levantados, apenas 16 deles se centravam em documentos curriculares ou livros didáticos, enquanto que nenhum versava sobre o uso ou a análise de manipulativos. Além disso, vale destacar que apenas 10 trabalhos foram produzidos no Brasil.

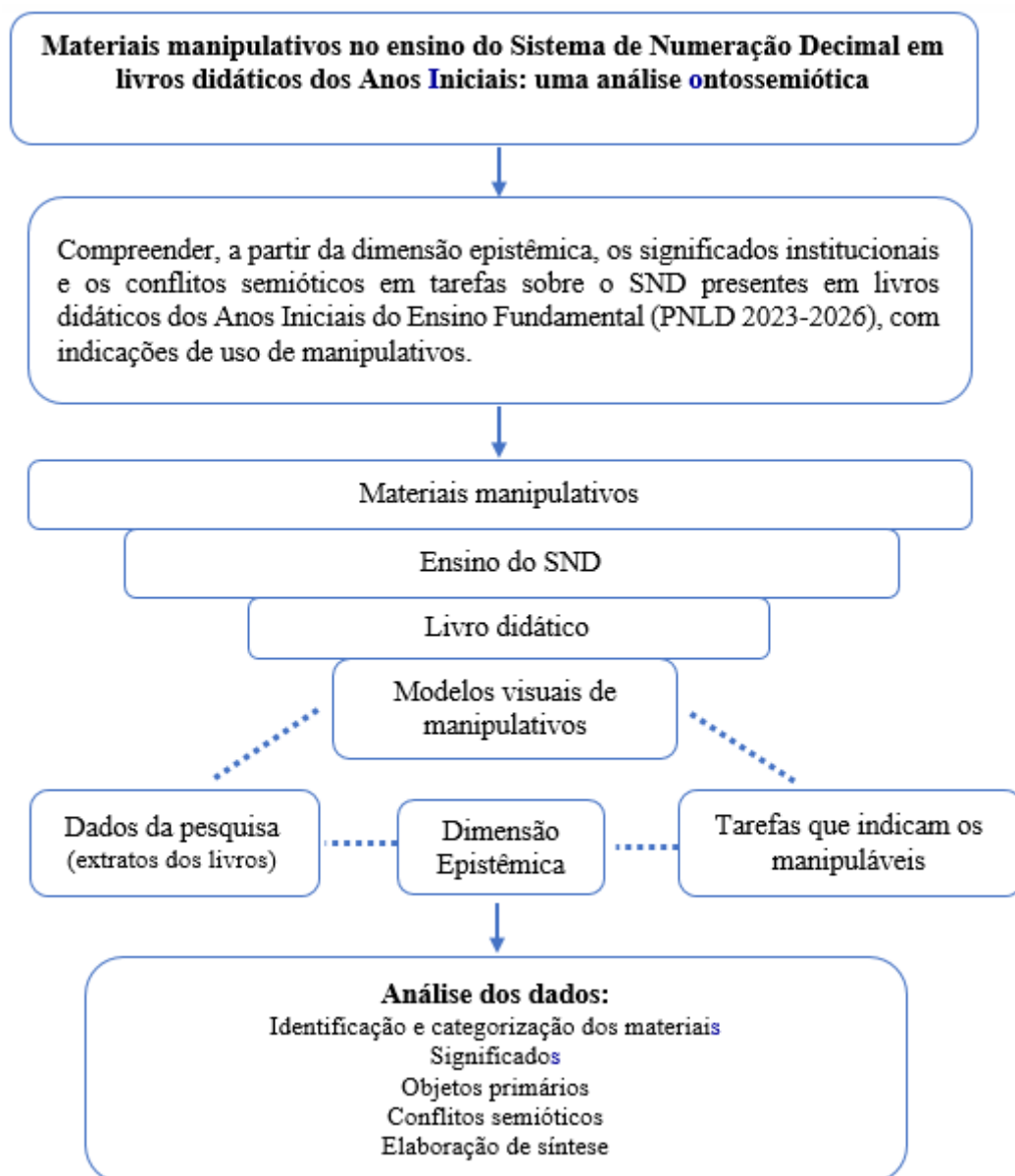
Já Breda, Bolondi e Abreu (2021), através de seu mapeamento, analisaram o desenvolvimento das pesquisas de doutorado no âmbito da abordagem ontossemiótica, no contexto brasileiro. Foram encontradas 16 teses que fizeram uso da EOS como um aporte teórico, duas delas nos Anos Iniciais, mas na perspectiva da formação de professores. Nenhuma das teses se centrou no uso manipulativo ou em sua presença em livros didáticos. Sendo assim, os objetivos deste projeto oferecem problematizações de um tema relevante, mas que ainda

apresenta lacunas, investigado à luz de um arcabouço teórico que possibilita uma análise original.

1.3 A ESTRUTURA GERAL DA TESE

A modo de síntese, apresentamos, a seguir, um esquema para organizar os aspectos teórico-metodológicos da pesquisa em relação ao tema de investigação proposto:

Figura 1 - Estrutura geral da pesquisa



Fonte: elaborada pelo autor.

O esquema apresentado na Figura 1 inicia com o título do projeto e o objetivo geral delimitado. Esse objetivo se conecta aos temas dialogados na pesquisa: no primeiro, partimos dos materiais manipulativos para, em seguida, fazermos um recorte apenas daqueles utilizados no ensino do SND e, por fim, daqueles utilizados nos livros didáticos. Isso dará forma aos objetos de investigação desta pesquisa, isto é, aos modelos visuais que representam esses materiais. A partir disso, damos início aos processos de análise à luz da dimensão epistêmica. Nos capítulos subsequentes, apresentamos os referenciais teóricos, os procedimentos metodológicos e as primeiras análises.

2 MATERIAIS MANIPULATIVOS

Este capítulo está dividido em duas partes: na primeira, discutimos os autores que nos amparam para pensar acerca dos manipuláveis e seu papel na Educação Matemática; na segunda parte, propomos uma categorização para os diferentes tipos de manipulativos e as formas que são utilizados.

2.1 O QUE SÃO MANIPULATIVOS E POR QUE IMPORTAM?

Se partirmos da história e dos grandes nomes da educação, veremos que, desde as contribuições do pedagogo tcheco Comenius (1592-1670), com sua célebre *Didactica Magna*, já encontramos recomendações de se aplicar diferentes tipos de recursos para práticas pedagógicas. Seguindo no tempo, vários educadores (Dienes, 1969; Piaget, 1995; Glasersfeld, 1990; Kamii, 2001; Montessori, 1964) passam a apresentar novos materiais didáticos e perspectivas para o ensino e a aprendizagem da matemática. No conjunto, defendem a importância de se trabalhar com materiais manipuláveis e outros recursos pedagógicos nas aulas da disciplina.

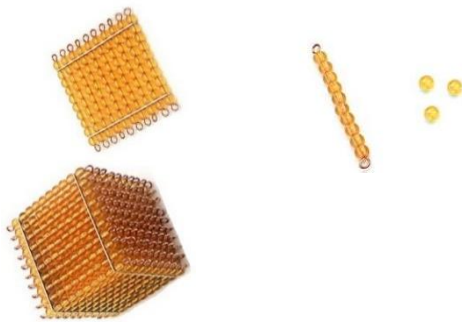
Sobre a história desses materiais, Nacarato (2005) relata que os manipuláveis na educação foram mencionados pela primeira vez por Johann Heinrich Pestalozzi⁸, ainda no século XIX. O pedagogo suíço defendia que a “educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações” (Nacarato, 2005, p. 1). Nacarato (2005) também comenta que, no Brasil, as recomendações para o uso de recursos didáticos na disciplina de matemática surgiram na década de 1920. Tendências como a empírico-ativista, a Escola Nova e o Movimento da Matemática Moderna teriam exercido influência significativa na popularização do uso de materiais manipuláveis (Murari, 2011). Grandes nomes se tornaram famosos pelas obras publicadas acerca do ensino de matemática com manipulativos, como por exemplo, Maria Montessori (1870-1952) e Zoltan Dienes (1916-2014).

Montessori foi uma educadora e pedagoga italiana que desenvolveu diversos estudos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, mas com ênfase na utilização de materiais concretos. Para ela, “o material matemático, em particular, que é apresentado de forma adequada no período sensível, permite à criança compreender verdades fundamentais, e não só

⁸ “Pestalozzi foi um dos pioneiros da pedagogia moderna, influenciando profundamente todas as correntes educacionais; afirmava que a função principal do ensino é levar as crianças a desenvolver suas habilidades naturais e inatas” (Murari, 2011, p. 191).

isso, mas também descobrir novas conexões” (Montessori, 2012, p. 252). Montessori é mundialmente conhecida pela criação de um material manipulativo intitulado *Material das Contas Douradas*, utilizado para o ensino dos agrupamentos do sistema de numeração decimal (semelhante ao Quadro 1). Mais tarde, “este material recebeu algumas adaptações até as contribuições de Dienes (1970), quando houve uma nova apresentação com a forma que hoje conhecemos e chamamos de *Material Dourado*” (Silveira, 2021, p. 8).

Quadro 1 - Contas douradas de Montessori e Material Dourado de Dienes

Material de Montessori	Material de Dienes
	

Fonte: elaborado a partir de Silveira (2021, p. 8).

Dienes, por sua vez, segundo os estudos de Soares e Pinto (2014), na revisão de artigos americanos sobre o matemático húngaro, é considerado “uma lenda no campo da educação matemática, por seu trabalho pioneiro que se estende por 50 anos e por ter influenciado educadores matemáticos que entraram no campo no final dos anos 1960 e 1970” (Soares; Pinto, 2014, p. 5). Dentre seus maiores legados didáticos, estão: os blocos lógicos (objetivados para desenvolver diferentes reflexões e pensamentos lógicos); os materiais algébricos (para o entendimento de propriedades e estruturas); e o material multibases (estruturado para auxiliar na compreensão de números em diferentes bases, e dentre os quais estavam os “Blocos base dez”).

Como o uso e as reflexões sobre manipulativos são alvo de investigação desde o início do século passado, a literatura específica já contém uma vasta variedade de pesquisas sobre o tema e com diferentes pontos de vista (Fiorentini; Miorim, 1990). Um aspecto que vale destacar é que diferentes termos têm sido usados para abordar esses materiais, conforme argumentam Sabel, Pires e Silveira (2022). Em seu estudo, após analisarem um conjunto de trabalhos publicados nos anais do ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) de 2019, relataram que não há “um consenso por parte da comunidade científica sobre como estes

materiais podem ser definidos, caracterizados e classificados de acordo com suas formas de construção e utilização” (Sabel; Pires; Silveira, 2022).

A utilização de materiais manipulativos para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos já era apontada por Behr *et al.* (1983, p. 121) como um importante recurso para a simulação de situações de resolução de problemas. Os autores discutem esse tipo de ‘ajuda manipulativa’ e indicam a necessidade de novas experiências e pesquisas que investiguem o papel da manipulação de materiais na modelação de situações-problema do mundo real. Nesse sentido, apontam:

Os materiais manipulativos são um intermediário entre as situações-problema do mundo real e do mundo das ideias abstratas e os símbolos escritos. Eles representam os símbolos em que podem ser usados para representar algumas situações diferentes de mundo real, sendo que são concretos, no qual envolvem materiais reais (Behr *et al.*, 1983, p. 122).

Matos e Serrazina (1996) entendem que os manipulativos podem ser um objeto real do cotidiano ou um objeto usado para representar uma ideia matemática, definindo-os como sendo “coisas” que o estudante é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) definem tais materiais como objetos feitos para manipular e movimentar, usados para a compreensão de uma situação matemática. Uttal (2003) os entende como um sistema de objetos físicos, cada um: “(a) destinado a ajudar crianças pequenas a aprender conceitos matemáticos e [que] (b) não exige que as crianças usem ou compreendam representações escritas dos mesmos conceitos” (Uttal, 2003, p. 98). Esses autores têm em comum o fato de relacionarem manipulativos com materiais concretos físicos, no sentido que Nacarato (2005) também entende, pensando-os na dimensão material, ou seja, ao que é manipulável e palpável.

Autores como Lorenzato (2006) se referem ao termo “concreto” considerando-o em uma dimensão mais ampla, desde que possua seu conteúdo de significações. Para esse autor, em particular, esses materiais podem ser entendidos de duas formas: “uma delas refere-se ao palpável, manipulável e a outra, mais ampla, inclui também imagens gráficas” (Lorenzato, 2006, p. 22). Essa visão vai ao encontro de Godino, Batanero e Font (2003, p. 19), que distinguem os manipuláveis em dois tipos: “os ‘manipulativos tangíveis’ e os ‘manipulativos gráfico-textuais-verbais’. Os tangíveis seriam os físicos enquanto os gráfico-textuais-verbais envolvem a percepção visual e/ou auditiva; gráficos, símbolos, tabelas, etc.”. Segundo esses autores, imagens também podem ser tomadas como manipulativos quando usadas como modelo visual para estabelecer relações matemáticas.

Avançando nas possibilidades sobre a caracterização dos manipulativos, Ladel e Kortenkamp (2016) introduzem os materiais manipulativos virtuais, criados em sistemas digitais para serem manipulados em telas. Nessa linha, Moyer-Packenham e Bolyard (2016, p. 10) tratam os manipulativos virtuais como: “representações visuais interativas e habilitadas por tecnologia de objetos matemáticos dinâmicos, que permitem que eles sejam manipulados”. Esse tipo de material engloba representações dinâmicas produzidas digitalmente e que podem ser manipuladas pelo mouse (em computadores) ou pelos dedos (na tela dos celulares).

Mesmo com diferentes possibilidades, entendemos a importância, em uma pesquisa acadêmica sobre manipulativos, de os autores apresentarem uma definição clara sobre eles. Nesse sentido, este projeto se apoia em Silveira, Powell e Grando (2025, p. 1), que definem os materiais manipulativos como “quaisquer objetos físicos, pictóricos ou virtuais utilizados como recursos para o ensino de determinado conhecimento”. Portanto, trataremos como manipulativos para o ensino da matemática todos os materiais tangíveis fisicamente, bem como as representações pictográficas e digitais.

A pesquisa com esses materiais, especialmente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tem sido amplamente aceita (Kilpatrick; Swafford; Findell, 2001), e a eficiência deles é defendida por diferentes autores. Fiorentini (1995), por exemplo, explica que os manipuláveis, em aulas de matemática, possibilitam processos de abstração reflexionante, ocasionada pela própria reflexão dos sujeitos acerca de suas atividades, já que o conhecimento ocorre a partir dela para que haja uma tomada de consciência. Para Lorenzato (2006), esses materiais podem ser uma excelente ferramenta que auxilia o estudante a construir seu saber matemático, levando em conta o ambiente social onde o material está inserido.

Por outro lado, existem estudos que olham para esses recursos de forma mais crítica, como o de Silveira (2018, p. 4) que, em seu levantamento de pesquisas, afirma que “muitos pesquisadores apresentam ressalvas e ligam alertas quanto aos limitantes em relação ao uso de manipulativos”. Nacarato (2005), por exemplo, percebe que o material pode agir tanto como um facilitador, quanto como um complicador didático, a depender de como é usado. Nesse sentido, Carraher, Carraher e Schliemann (1988) sugerem que o professor faça uma profunda reflexão sobre o material e que busque as finalidades de ensino, para assim fazer uma conexão com o mundo do estudante.

Martin (2009) e Uttal *et al.* (2009) concordam que, ao escolhermos um material para manipulação, é preciso priorizar aquele desprovido de elementos que possam distrair o estudante. Ou seja, “se o professor escolher contadores com personagens de desenhos animados populares, os alunos podem distrair-se ou se fixar em uma característica do manipulativo”

(Peltier; Vannest, 2017, p. 5), deixando de lado o objetivo principal que seria utilizar o material como auxiliador na compreensão de algum conceito matemático.

Laski *et al.* (2015) consideram que o material escolhido deve guardar a maior semelhança possível com o conceito que quer representar. Para os autores, quanto mais básicos forem os manipuláveis, sem características perceptuais irrelevantes ou referências ao mundo real, mais chances de um maior aprendizado.

Uttal, Scudder e Deloache (1997) alertam que pode ser contraproducente utilizar materiais manipuláveis que não possibilitem aos alunos entender a relação entre o material e o conceito matemático a ser ensinado. Brown, McNeil e Glenberg (2009), na mesma linha, entendem que os alunos precisam compreender, ao usar manipulativos, que não estão adentrando um novo sistema isolado da matemática. Ao contrário, eles precisam saber que estão usando materiais concretos para auxiliar na compreensão de um sistema simbólico-matemático, assim como precisam se conscientizar de que estão estudando esse sistema.

Baroody (1989) considera equivocada a ideia que muitos professores possuem sobre o uso simples de manipulativos ser suficiente para a aprendizagem. Por isso, reitera a importância de outros recursos e metodologias diversas. Enquanto que, na visão de Willingham (2017), a eficiência no uso dos manipuláveis está relacionada ao professor, que encoraja e conduz seu uso, para Uttal (2003), o professor tem o papel determinante de decidir quando e quais materiais usar, assim como de analisar se tais materiais ajudarão ou prejudicarão a aprendizagem do estudante. Assim, o uso rotineiro e pouco reflexivo dos materiais pode reduzir sua relevância como recurso no ensino e aprendizagem da matemática (Clements; McMillen, 1996).

Sabel e Silveira (2023) analisam o papel semiótico dos manipulativos e os classificam como representações auxiliares para aprendizagem matemática, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Os autores apontam que os manipulativos contribuem para mobilizar diferentes pensamentos matemáticos, embora seu papel principal seja o de auxiliar o estudante na compreensão e transição entre outros tipos de representações mais abstratas e simbólicas.

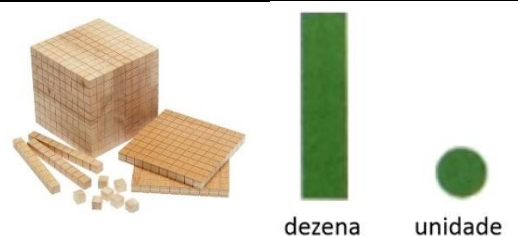
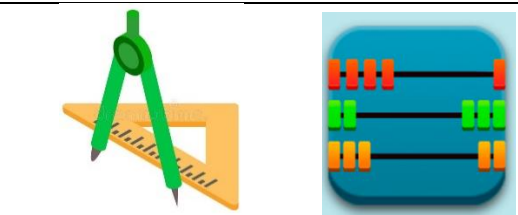
Sendo assim, ainda longe de uma resposta final sobre processos de ensinar e aprender matemática com recursos didáticos manipulativos, buscamos refletir sobre essas perspectivas que oferecem elementos de compreensão acerca do papel desses materiais na educação matemática, especialmente no ensino do SND nos Anos Iniciais. Mesmo que a preocupação desta pesquisa se volte para as representações do uso de manipulativos, e não necessariamente

para o seu uso concreto nas aulas de matemática, é preciso adentrar seus aspectos gerais para, então, investigar seu contexto visual em livros didáticos.

2.2 ALGUMAS CATEGORIZAÇÕES POSSÍVEIS

Silveira, Powel e Grando (2025) também têm contribuído na categorização dos manipulativos, apresentando três possíveis classificações quanto à forma com que os manipuláveis são construídos. São elas: os *materiais didaticamente construídos*, que podem ser físicos ou pictóricos, são criados de forma artificial por educadores com a finalidade específica de ensinar matemática; os *instrumentos culturais herdados da tradição* são centrados em materiais históricos no desenvolvimento da matemática e usados nas escolas para fins pedagógicos; e os *objetos retirados da vida cotidiana*, que são usados para outros fins cotidianos, embora possuam alguma característica que permite extrair ou mobilizar determinado conhecimento matemático. No quadro a seguir, eis alguns exemplos dessas classificações:

Quadro 2 - Exemplos dos três tipos de categorias para os manipulativos

<u>Categoria e descrição dos exemplos</u>	<u>Exemplos de materiais</u>
<u>Materiais didaticamente construídos</u> (Material Dourado e Material Verde presente na Coleção Ápis Mais Matemática)	 dezena unidade
<u>Instrumentos culturais herdados</u> (Ábaco, régua e compasso)	
<u>Objetos retirados da vida cotidiana</u> (Palitinhos e tampinhas de garrafa)	

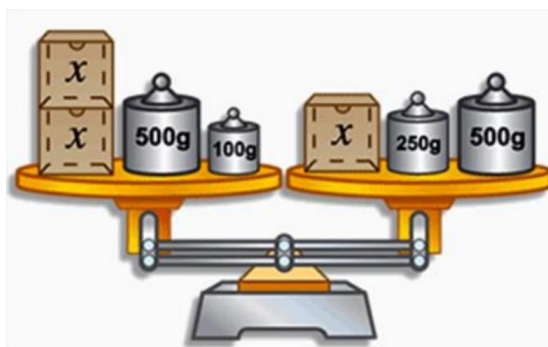
Fonte: elaborado pelo autor, a partir de Silveira, Powell e Grando (2025).

As categorias anteriores dizem respeito à origem dos tipos de manipuláveis. Para avançarmos nessa discussão, criamos outras categorias que se voltam ao tipo de uso que se faz

desses materiais. A ideia dessas novas categorias é olhar para os tipos de função didática (objetivo pedagógico) que ocupam em aulas de matemática. São elas: **Analogias, representar ideias matemáticas, manipular problemas, instrumentos e jogos**. É necessário ainda, deixar claro, que não existe uma intenção de esgotar tal classificação, mas delinear-las e refletir sobre as mesmas.

A primeira categoria são os materiais usados para criar analogias, e os definimos como aqueles que buscam relacionar uma determinada ideia matemática, comparando metaforicamente com alguma situação, estrutura ou experiência. Conforme Nagem e Oliveira (2011) colocam, uma analogia acontece na comparação explícita entre dois elementos e deste modo, “parte-se do pressuposto de que um dos elementos seja considerado familiar (veículo), no qual se buscam semelhanças com o outro elemento, considerado desconhecido (alvo ou conceito)” (p. 1). No caso da matemática, essas analogias acontecem quando partimos de um material manipulativo conhecido dos estudantes, cuja estrutura permite estabelecer relação com uma ideia matemática. Por exemplo, pensemos no caso da utilização de balanças para ensinar a ideia de equação, como proposta na Figura 2:

Figura 2 - Exemplo de situação onde a balança é usada como analogia a uma equação



Fonte: <https://www.matematica.pt/faq/resolver-equacoes.php>

No exemplo acima, temos uma representação pictórica de uma balança, mas também é comum que professores levem balanças físicas na escola para realizar experiências similares (Freire, 2024). Neste caso, a balança é um material manipulativo retirada do cotidiano, produzido originalmente para outros fins, mas que na matemática pode ser usado como uma analogia por possuir semelhança com certas propriedades de uma equação de primeiro grau. O eixo da balança que mantém os pratos em equilíbrio é comparado ao sinal da igualdade, enquanto os valores de cada peso são os demais termos da equação, onde cada prato representa

um lado da igualdade. Para calcular o valor de x , representa-se simbolicamente a expressão (considerando que a balança está equilibrada): $x + x + 500 + 100 = x + 250 + 500$. Veja que observando a balança, a equação e as expressões algébricas não estão explícitas, o mesmo para o sinal de igual. Para resolver essa equação, o professor pode ir manipulando os pesos na balança enquanto realiza as mudanças na expressão simbólica. Deste modo, o êxito nesse tipo de material usado para fins de analogia, reside no professor conseguir criar as conexões entre o objeto de partida (balança) e o alvo (equação).

Os *materiais projetados para representar explicitamente uma ideia ou objeto matemático*, se referem aos manipulativos que possuem características visuais pensadas para representar um objeto ou conceito matemático o mais direto possível. Um exemplo de material que se enquadra nesta categoria, por exemplo, são os Blocos base dez (BBD), uma vez que cada uma de suas peças foi projetada para representar explicitamente um número. No caso da peça da barrinha (dezena), é possível vermos as dez unidades agrupadas, deixando claro qual número corresponde a ela. O mesmo vale para as demais peças cujo valor agregado é visualmente perceptível. Outro exemplo, da geometria, é a utilização de modelos físicos como representações dos sólidos geométricos. Veja o exemplo dos materiais usados no estudo de Silva, Santos e Ibiapino (2016):

Figura 3 - Exemplos de sólidos geométricos físicos para manipulação

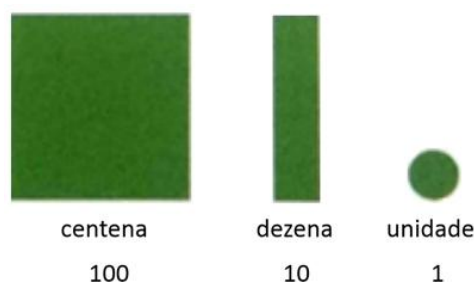


Fonte: Silva, Santos e Ibiapino (2016, p. 5).

Ao manipular esses materiais, os estudantes participantes do estudo de Silva, Santos e Ibiapino (2016) tiveram contato sensorial com as características dos sólidos, como o tipo de base, arestas, vértices, faces, altura, área total, etc. Alguns dos sólidos geométricos são feitos de acrílico, para que o estudante possa visualizar as diagonais internas, ou ainda, enchê-los com água para depois discutir o cálculo de volume e comparar. Por mais que saibamos que os entes geométricos são conceituais e que os sólidos físicos são apenas mais uma representação semiótica (Duval, 2004), esses manipulativos assumem a função de representar, de forma explícita (de modo mais direto possível), os objetos geométricos.

No caso da categoria dos *manipulativos convencionados a representar um determinado objeto*, encontram-se aqueles cujo objeto representado não está explícito, advindo de alguma convenção social. Tomemos como exemplo as Fichas Verdes, presente em livros didáticos e discutido na pesquisa de Silveira (2021):

Figura 4 - Fichas verdes utilizado no ensino da classe das ordens simples



Fonte: Ápis Mais Matemática, 3º ano, (2021, p. 58).

As fichas verdes foram propostas pelo autor da coleção Ápis Mais Matemática e apresentado no manual do professor do livro do 1º ano como um tipo de registro para os BBD. Ele é constituído de fichas de papel nos três formatos apresentados na Figura 4. As fichas circulares correspondem às unidades, as fichas retangulares não quadradas representam as dezenas, e as centenas são representadas pelos quadrados. Não há, no material de recorte, fichas que representem as unidades de milhar.

Diferentemente das peças dos BBD, a ficha verde da dezena não tem tamanho igual a dez unidades, assim como a ficha da centena não tem o tamanho de dez fichas das dezenas. Com exceção da unidade valer um, que é intuitivo, as demais fichas só recebem os valores de 10 e 100, pois, no próprio material, decide-se que estes são os seus valores (ou seja, uma convenção). Olhando para as fichas da centena ou dezena, não estão explícitos seus valores e, portanto, as fichas verdes fazem parte dessa categoria de materiais convencionados a representar um determinado valor.

Quanto aos *manipulativos construídos para modelar ou resolver problemas*, como a nomenclatura atribuída já indica, são usados para reprodução de um tipo de problema ou situação, a fim de proporcionar seu melhor entendimento e auxiliar na compreensão das possibilidades de sua resolução. Diferentemente das categorias anteriores, esse tipo de manipulável é sempre singular, não possuindo exemplos icônicos, já que cada problema ou situação criará uma necessidade de material diferente. Na Figura 5, temos um exemplo

particular sobre a resolução de um problema de combinatória, no trabalho de Silva e Boas (2019):

Figura 5 - Material criado para resolver um problema combinatório



Fonte: Silva e Boas (2019, p. 6).

Essa situação foi propositiva pelo seguinte problema: de quantas maneiras duas crianças podem escolher sentar-se em 5 cadeiras ordenadas? Nesse momento, as autoras levaram o material manipulável como uma forma de auxiliar os estudantes a responder o problema. A ideia era que fizessem todas as combinações possíveis, para encontrar o total de possibilidades, ou ainda que pudessem usufruir do raciocínio combinatório ao desenvolver, de forma intuitiva, o Princípio Multiplicativo que solucionaria a questão. Ao final da experiência, concluíram que “o uso de materiais manipuláveis é uma escolha interessante na aprendizagem do Princípio Multiplicativo, entretanto é necessário que seja utilizado de maneira apropriada” (Silva; Boas, 2019, p. 18).

Outra categoria que apresentamos é a dos manipuláveis usados como instrumentos para realizar tarefas matemáticas. Nessa categoria, estão incluídos os materiais usados como artefatos para executar ações dentro de um contexto matemático. Alguns exemplos são a régua, o compasso, um barbante para medir ou até mesmo um teodolito. O trabalho de Titon, Pereira e May (2022) demonstra alguns manipuláveis para fins de instrumentação matemática:

Figura 6 - Régua, compasso e esquadro



Fonte: Titon, Pereira e May (2022, p. 9).

Os autores realizaram diferentes atividades com uso destes instrumentos para ensinar conceitos do campo da geometria e consideram que por meio da experiência realizada “mostra-se possível e necessária a manipulação e domínio dos instrumentos, concebidos estes como conectores ao sentido do conteúdo e à contextualização do conhecimento” (Titon; Pereira; May, 2022, p. 19). Esse tipo de material já faz parte da cultura das aulas de matemática e deve ser usado de modo a explorar suas potencialidades.

Como última categoria, para além das situações anteriores, temos os manipulativos usados em jogos pedagógicos. Aqui estão presentes os diferentes tipos de jogos, brincadeiras, gincanas e outros tipos de dinâmicas no ensino de matemática, efetivados por meio de algum manipulativo. Um exemplo é o caso do jogo ‘dominó das frações’, presente na pesquisa de Nascimento *et al.* (2016):

Figura 7 - Jogo do Dominó das Frações



Fonte: Nascimento *et al.* (2016, p. 7).

As peças de um dominó convencional são dotadas, normalmente, de uma espessura que lhes dá a forma de paralelepípedo, em que uma das faces é marcada por pontos que indicam

valores numéricos. No jogo pedagógico⁹ “Dominó de frações”, as peças convencionais são substituídas por outras contendo frações equivalentes e representações gráficas. Cada uma delas é um tipo diferente de peça que deve se encaixar na hora do jogo. Nascimento *et al.* consideraram que o jogo “proporcionou a eles [aos estudantes] uma abstração do conceito de fração, levando-os a relacionarem as representações geométricas e algébricas” (Nascimento *et al.*, 2016, p. 9). Esse jogo acontece por meio da manipulação das peças do dominó criadas especificamente para fins matemáticos. Essa categoria de manipuláveis se destoa das demais, já que os materiais em si não buscam representar o objeto matemático. No caso do “Dominó das Frações”, as peças possuem as mesmas representações (simbólicas e geométricas) que teríamos no quadro, mas a manipulação delas em um formato de jogo possibilitou um ambiente de atividade matemática, cujas ideias matemáticas surgem a partir da interação entre estudante, material e professor.

Entendemos que essas categorizações contribuem para enriquecer a discussão científica sobre os manipuláveis, fortalecendo-os como objetos de pesquisa em Educação Matemática. Um ponto a destacar é que as categorias propostas não são, necessariamente, excludentes. No caso, por exemplo, dos sólidos geométricos, enquadrados, *a priori*, como “materiais projetados para representar ostensivamente um objeto matemático específico”, os mesmos podem ser enquadrados como materiais “usados para jogos pedagógicos”, desde que o professor crie um jogo que os use como peças ou algum tipo de dinâmica diferente.

Dessa forma, longe de propor qualquer conclusão que seja definitiva aos objetivos desta tese, buscamos refletir, neste capítulo, sobre essas perspectivas que oferecem elementos de compreensão acerca do papel dos manipulativos na Educação Matemática e algumas de suas categorizações. Vale destacar a importância da discussão aqui proposta sobre os aspectos gerais dos materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da matemática, para, então, investigarmos seu contexto visual em livros didáticos. Para fins de interesse desta tese, os tipos de representações de materiais que nos debruçaremos, ao analisarmos os livros de matemática, poderão ser de qualquer uma das categorias apresentadas anteriormente, desde que destinadas ao ensino do SND.

⁹ Ao falar em jogos pedagógicos, nos referimos aos jogos que são didaticamente construídos e objetivados para ensinar um determinado conhecimento matemático, como é o caso do “Dominó das Frações”. Não estão inclusos os jogos que já fazem parte da cultura popular, como o xadrez, por exemplo.

3 O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Este capítulo está dividido em duas seções: a primeira contém alguns aspectos históricos do SND e suas propriedades que o tornaram o sistema hegemônico no mundo; e a segunda algumas pesquisas que nos ajudam a entender a complexidade do ensino dos números nos Anos Iniciais.

3.1 BREVE RETRATO HISTÓRICO

Ao pensarmos sobre nossa vida cotidiana, pode parecer impossível imaginarmos uma organização social ou econômica sem a presença de um sistema de numeração. Contudo, sistemas para contagem são resultados da construção humana, ou seja, houve um tempo em que eles não existiam. Segundo Ifrah (2005), um número era primeiramente sentido, e, somente na unidade, a dualidade recebia um nome. Desse modo, era difícil estabelecer relações com quantidades maiores, o que limitava a contagem a poucas quantidades.

Em consonância, Almeida (1998) diz que a contagem de animais, nos períodos sem sistema de numeração estabelecia, se dava numa relação biunívoca. Em outras palavras, essa contagem era uma espécie de “correspondência um a um entre dois conjuntos utilizados na técnica dos entalhes, a prática típica do período” (Almeida, 1998, p. 47). Contudo, por diferentes motivos, especialmente para o registro de quantidades maiores, houve a necessidade de os povos desenvolverem formas mais elaboradas de contar, dando origem a diferentes sistemas de numeração (Soares; Pinto, 2014).

Dentre os diferentes sistemas que poderíamos utilizar nos tempos modernos, destacamos aquele que se tornou hegemônico ao redor do globo: o Sistema de Numeração Indo-Árábico, que, na educação escolar, é conhecido por Sistema de Numeração Decimal (Melo, 2017). Não há problema em usar esta última nomenclatura, desde que não deixemos de explorar as questões históricas que estão por trás de sua origem. Segundo Ifrah (2005):

Foi no norte da Índia, por volta do século V da era cristã, que nasceu o ancestral de nosso sistema moderno e que foram estabelecidas as bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje em dia. O que é comprovado por inúmeros documentos e testemunhos, além de ter sido sempre proclamado pelos próprios árabes (a quem, contudo, esta descoberta foi atribuída durante muito tempo por certa tradição). Mas, para isso, foi preciso ainda muito tempo e muita imaginação! (Ifrah, 2005, p. 264-265).

Para avançarmos, é necessário destacar a distinção entre número, numeral e algarismo, e para isso, nos baseamos em Van De Walle (2009). O ‘número’ é uma ideia abstrata que

representa a quantidade de elementos em um conjunto, como por exemplo, o número 5 pode representar a quantidade de maçãs em uma certa cesta. Já quando falamos em ‘numerais’, nos referimos à representação gráfica de um número, o ‘5’ é a forma escrita do número que representa a quantidade de maçãs na cesta. Enquanto o termo ‘algarismo’ se refere cada um dos símbolos que compõem os numerais, como no caso do numeral "543", os algarismos são o 5, o 4 e o 3.

A grande diferença dos numerais apresentados na Índia, em relação a dos outros povos, reside, primeiramente, no fato de que o símbolo não faz relação direta com a quantidade. Para os antigos matemáticos indianos, “as unidades não mais se constituíam por uma mera agregação de símbolos, mas sim designada por um único símbolo, e também a existência de um símbolo especial para os números de um a nove” (SILVA, 2000, p. 394). Como se pode observar na Figura 8, enquanto para os egípcios a representação do novo número se dava por nove pequenos riscos, para o indiano apenas um símbolo era necessário para indicar essa mesma quantidade.

Figura 8 - Diferentes formas simbólicas para números de 1 a 9

Egípcios	I II III IIII II III III IIII
Babilônios	𐎶 𐎵 𐎴 𐎳 𐎲 𐎱 𐎰 𐎯 𐎮
Romanos (Roma Antiga)	I II III IIII V VI VII VIII VIII
Indianos (séc. IIIa.C.)	ॐ ॑ ॒ ॓ ॔ ॕ ॖ ॗ क़ ख़

Fonte: Melo (2017, p. 70), a partir de Ifrah (2005).

No contexto do sistema de numeração egípcio, os números de grande magnitude eram representados mediante agrupamentos de dez em dez. Cada símbolo era repetido apenas até nove vezes, sendo substituído por outro símbolo ao alcançar a décima repetição. No entanto, os numerais de maior valor resultavam em representações extensas, exigindo uma quantidade significativa de desenhos para sua composição, o que tornava as operações aritméticas mais complexas e laboriosas.

O sistema babilônico era mais complexo que o dos egípcios, com base 60, sendo considerado o primeiro sistema posicional (Ifrah, 2005). Ele continha dois símbolos: um para representar a unidade que poderia ser repetida até nove vezes, e outro para o número 10, que se repetia até cinco vezes. Os números eram escritos por meio desses dois símbolos até o 59, tornando-se depois posicional, com a base 60. Um problema desse sistema era a ausência do número zero, dificultando a compreensão do valor de lugar dos números. Ainda hoje se carrega, na contagem das horas, uma herança da base desse antigo sistema de numeração.

Ao olhar para o sistema romano, a familiaridade com nosso conhecimento contemporâneo já é maior, visto que sua numeração ainda é usada em alguns casos, como por exemplo, na contagem dos séculos ou em mostradores de relógios. Esse sistema usa letras maiúsculas do alfabeto para representar algumas quantidades. Seus numerais são constituídos da organização dessas letras que possuem regras internas, levando a diferentes operações que usam adição, subtração e multiplicação do valor da letra e do lugar que ela ocupa no numeral. Além disso, no sistema romano não há uma natureza cumulativa algorítmica, onde os valores são somados ou subtraídos de acordo com regras específicas. Essas características tornam o sistema romano complexo para operações envolvendo números maiores. O objetivo desse sistema, como aponta Ifrah (2005) era destinado a fazer abreviações para anotar e reter números

No caso do sistema indiano, embora seus símbolos fossem mais avançados do que os de outros sistemas contemporâneos, ele ainda representava certas limitações, como a ausência de uma representação direta da quantidade numérica desejada. Isso se evidenciava pelo fato de que esse sistema empregava símbolos distintos para denotar quantidades mais elevadas, como 10, 100, 1000 ou 10000. Ou seja, ainda não havia um sistema posicional, o que implica admitir que o sistema indiano, de certo modo, continuava sendo um sistema cansativo e limitado (Ifrah, 1997).

Os estudiosos que usavam números maiores no sistema indiano, o faziam por extenso, por exemplo, no caso, “para o numeral 8.534, os astrônomos indianos o representam da seguinte maneira, utilizando seus respectivos vocábulos: Quatro, três dezenas, cinco centenas, oito milhares” (Melo, 2017, p. 45). Aqui é possível notar uma noção de valor posicional, mas ainda não é possível notar uma noção simbólica (ela é descrita). Mesmo assim, esse avanço foi importante para que, posteriormente, as palavras fossem substituídas pelos algarismos, criando a ideia do valor posicional.

Como bem discorrem Toledo e Toledo (1997), os indianos representaram um marco importante para a criação do sistema de numeração indo-arábico, embora não possamos desconsiderar que foram os árabes os grandes responsáveis pela popularização desse sistema na Europa, principalmente por questões comerciais. Vale também observar que “os árabes nunca atribuíram a si mesmos a invenção desse sistema, sempre reconhecendo sua dívida para com os hindus, seja pela forma dos numerais como pelas características especiais do valor relativo” (Gundlach, 1992, p. 32).

Sobre a mudança no formato dos algarismos, de acordo com Ifrah (2000, p. 301) isso ocorreu gradativamente devido “as dimensões dos rolos dos pergaminhos nos quais os escribas escreviam, explica a mudança de orientação sofrida por certos algarismos hindus ao passarem

para os manuscritos árabes”. O autor esclarece que a grafia dos algarismos modificada e difundida pelos árabes, implicou que este novo estilo de escrita tornasse popular no mundo, e ao longo de tempo mais algumas adaptações foram feitas, como mostra a Figura 9:

Figura 9 - Evolução dos algarismos indo-arábicos

HINDU 300 a.C.	-	=	≡	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
HINDU 500 d.C.	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯	୦
ÁRABE 900 d.C.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
ÁRABE (ESPANHOLA) 1000 d.C.	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
ITALIANO 1400 d.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ATUAL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Fonte: www.programandomundo.com

O sistema de numeração indo-arábico não se tornou hegemônico simplesmente pela influência comercial ou histórica, pois segundo Ifrah (2000, p. 320) “nossa numeração de posição constitui um sistema perfeito, acabado, porque é mais econômico em signos e permite anotar racionalmente qualquer número, por maior que seja”. Bussi e Sun (2018) reforçam essa ideia dizendo que “a notação do valor posicional é a propriedade mais importante do sistema indo-arábico (2018, p. 8). Ripoll, Rangel e Giraldo (2015, p. 17) corroboram dizendo que a notação posicional “permite que um conjunto finito de algarismos seja suficiente para representar todos os números naturais – o que não ocorre com os sistemas não posicionais”. Os mesmos algarismos que representam o número 123 são usados para o número 321, pois a mudança de posição de cada um deles implica na mudança do seu valor quanto à formação de um novo número. Já em relação a explicação historicamente aceita para a escolha de base dez, segundo Ifrah (1997, p. 19), “a mão é a primeira ‘máquina de contar e de calcular’ de todos os tempos”. sugerindo que a forma do corpo humano parece ter determinado a base numérica tradicional que adotamos.

Portanto, a partir dos estudos mencionados, podemos sintetizar as três grandes vantagens do nosso sistema de numeração que segundo Boyer e Merzbach (2019) o fazem ser, até hoje, o hegemônico na sociedade: a utilização de agrupamentos, que permitiu ultrapassar a simples notação por correspondência unívoca (um a um); a utilização do princípio da base numérica (nesse caso, a base dez), que tornou os agrupamentos regulares com regras específicas; o valor posicional dos algarismos, implicando a economia da notação numérica, e

reaproveitando os mesmos dez algarismos para compor qualquer numérico (Boyer; Merzback, 2019).

Mocrosky, Orlovski e Lidio (2019), inclusive, sugerem trazer para a sala de aula os elementos históricos do SND para que os estudantes percebam sua eficiência em relação a outros sistemas de contagem, a fim de compreenderem motivos que levaram à sua adoção. Como esta tese não objetiva fazer um estudo histórico, e sim, didático, que atravessa a discussão do SND, no tópico seguinte apresentamos estudos cujos resultados nos ajudam a pensar sobre isso.

3.2 SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Diversos estudos, como os de Kamii (2002), Teixeira (1996), Fayol (1996), Brizuela (1998) e Brandt (2005), já investigaram o ensino e a aprendizagem do SND, revelando que os estudantes apresentam dificuldades de compreensão acerca de nosso sistema de numeração.

Brandt e Moretti (2013) relatam os principais obstáculos observados pelas pesquisas sobre o ensino do SND. Para eles, as maiores incompreensões dos estudantes envolvem, além da realização das operações básicas, o não entendimento do remanejamento numérico entre as casas decimais e os motivos que levam o algarismo à esquerda valer dez vezes mais que o da direita. Brandt (2005, p. 31), em sua tese, afirma que “resultados de pesquisa apontam que a compreensão do valor posicional presente no Sistema de Numeração Decimal (SND), não é de fácil apreensão pelas crianças”. Sharma (1993) também chama a atenção acerca do valor posicional e para o fato desta ser a principal propriedade que o difere de outros sistemas, algo que precisa ser compreendido em sua plenitude pelas crianças.

Para Lévy (1993), o SND pode ser visto como uma tecnologia humana, que redistribui “sem descanso as relações entre sujeitos individuais, objetos e coletivos” (p. 10). Contudo, muitos dos processos e argumentos que os estudantes aprendem são carentes de lógica e são frutos apenas de algoritmos decorados (Kamii, 2001). Para Carraher, Carraher e Schiliemann (1995), tais algoritmos ensinados na realização de operações podem ainda promover certos obstáculos para o raciocínio das crianças. Segundo os autores, estes obstáculos envolvem o excesso de memorização em detrimento da compreensão conceitual, a limitação dos algoritmos em valorizar a criatividade em novas estratégias, assim como a desconexão das práticas numéricas do cotidiano.

Van de Walle (2009) concorda que o número é um conceito complexo e multifacetado, cujo ensino envolve muitas ideias, relações e habilidades diferentes. Muitos estudantes

perpassam pelos Anos Iniciais sem compreender, de fato, todo o funcionamento do sistema de numeração. Para enfrentar essas dificuldades, “é necessário tempo e muitas experiências para que as crianças desenvolvam uma compreensão completa de número que será desenvolvida e enriquecida com todos os conceitos numéricos adicionais relacionados ao longo dos anos escolares” (Van de Walle, 2009, p. 144). Também é necessário que o professor de Matemática conheça diferentes abordagens para ensinar fatos e operações fundamentais no SND. O conhecimento dessas abordagens ajudará o professor a tomar decisões didáticas que contribuam na organização de um ambiente para aprender tais conceitos.

Na visão de Godino *et al.* (2009), os números também são ferramentas indispensáveis na nossa vida pessoal e profissional. Por isso, são um tema essencial de estudo na escola desde os primeiros anos de formação da criança, o que requer, dos professores desses Anos Iniciais, ter “clareza sobre as utilizações dos números, os sistemas de numeração, os processos de cálculo, bem como os significados dos números” (Godino *et al.*, 2009, p. 2). Em relação aos estudantes, os autores afirmam que os sujeitos necessitam mobilizar, enunciar e produzir diferentes representações numéricas de forma pertinente.

Fayol (2016) afirma que a questão posicional dos números é um dos principais aspectos que geram problemas na aprendizagem aritmética. Sobre isso, ele explica que “a passagem dos números de um algarismo para os de dois, depois três e, por fim, n algarismos, exige a ativação de um novo mecanismo: o valor posicional dos algarismos. Esse conhecimento não se reduz ao domínio verbal dos números” (Fayol, 2016, p. 32). Segundo Fayol (2016), é interessante realizar um trabalho pedagógico que articule a notação escrita, oral e manipulativa em conjunto para construir a ideia de posição.

A familiaridade com padrões específicos do sistema numérico capacita as crianças a lidarem com uma diversidade de desafios relacionados ao uso de números. Elas concentram-se, conforme delineado por Lerner (2005), em elementos figurativos, antes de compreenderem completamente os princípios do sistema. Isso se traduz na capacidade de comparar números de diferentes magnitudes, executar tarefas que demandam a retenção de quantidades na memória e até mesmo realizar cálculos mentais, mesmo sem a compreensão plena dos fundamentos da multiplicação (Lerner; Sadovsky, 1996).

O processo de aprendizagem do SND não é dado de forma isolada e nem em um único ano escolar. Sua compreensão inicia desde a infância, nas diferentes interações que a criança faz com o mundo (Kramer; Nunes; Corsino, 2011). Todavia, é na educação escolar que o sistema é formalizado, e, nesse sentido, diferentes autores têm proposto caminhos para pensar seu ensino. Sobre isso, Terigi e Wolman (2007) apresentam um resumo das principais propostas

para o ensino do SND, analisando-as criticamente. Eles concluíram que “o ensino tem sido concebido com base no pressuposto de que as crianças têm de compreender o sistema de numeração antes de utilizar, porque o seu uso resulta da aplicação correta dos princípios conceituais que regem o sistema” (p. 14, tradução nossa). Segundo os autores, essa visão reduz as possibilidades criativas dos estudantes interagirem com o SND, ignora os conhecimentos prévios que já possuem do cotidiano e não valoriza a produção de diferentes estratégias de resolução.

Considerando todos os estudos mencionados, podemos resumir alguns elementos comuns sobre aspectos didáticos que demandam atenção: o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND) deve transcender as meras operações básicas dos algoritmos; devemos elucidar, aos estudantes, as propriedades que tornam esse sistema mais flexível em comparação aos demais; os estudantes devem ter uma compreensão abrangente dos conceitos de agrupamento e valor posicional, que constituem a base para a formação de um número.

No cenário atual brasileiro, o ensino está atrelado com as diretrizes propostas na BNCC, que normatizam as aprendizagens essenciais por meio da definição de competências e habilidades que a educação escolar deve promover. O documento do Ensino Fundamental é dividido em cinco unidades temáticas, nas quais está a unidade chamada “Números”, tratando do ensino do SND pretendido. Segundo a BNCC (2018), o ensino dos números tem como finalidade “desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades (Brasil, 2018, p. 26). Especificamente para a etapa dos Anos Iniciais, a expectativa em relação à unidade temática “Números” é que, ao final do 5º ano, os estudantes tenham compreendido o funcionamento do sistema de numeração, suas propriedades, operações, cálculo mental, trabalhando com o conjunto dos Naturais e com os Racionais (não negativos) na forma decimal e fracionária.

Mesmo que a BNCC não seja tema desta pesquisa, é importante termos consciência do seu impacto no ensino e aprendizado do SND. No estudo realizado por Jolandek, Pereira e Mendes (2021), cujo tema foi o processo de implementação da BNCC na visão de professores dos Anos Iniciais, mostraram-se alguns impactos da implementação do documento. Os resultados evidenciaram que “os principais impactos estiveram relacionados ao próprio processo de ensino e aprendizagem, uma vez que há uma resignificação desse processo, até mesmo pela alteração de conteúdos nos currículos” (Jolandek; Pereira; Mendes, 2021, p. 12).

Considerando as discussões apresentadas neste capítulo, mostra-se a complexidade subjacente ao processo de ensino e aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal (SND).

Este se revela não apenas como um conjunto de conceitos simples e intuitivos, mas sim como um conjunto de conhecimentos matemáticos complexos, aberto a múltiplas abordagens investigativas. Nossa intenção é contribuir para essa temática, direcionando nossa atenção de maneira específica para a análise do emprego de materiais manipulativos indicados em livros didáticos para auxiliar no ensino do SND.

4 A PESQUISA EM LIVROS DIDÁTICOS

Iniciamos este capítulo discutindo estudos que têm evidenciado a importância da pesquisa em livros didáticos (LD), bem como algumas perspectivas metodológicas. Na sequência, apresentamos as influências do PNLD e da BNCC no cenário atual dos livros no Brasil.

4.1 LIVROS DIDÁTICOS NA PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para falarmos sobre a importância de se fazer pesquisa com livros didáticos (LD), precisamos primeiramente compreender a sua finalidade. Ao longo dos anos, diferentes terminologias têm sido empregadas para abordá-los, tais como: o material didático, o material curricular, o material escolar, dentre outros (Amaral-Schio *et al.*, 2023). Nesta pesquisa, definimos os livros didáticos conforme a perspectiva de Amaral-Schio *et al.* (2023, p. 30):

Entendemos o livro didático como sendo um material, impresso ou digital, concebido e editado com o objetivo de contribuir para os processos educacionais de ensino e de aprendizagem, composto por saberes de certo componente curricular ou área do conhecimento, propostos a partir das prescrições em vigência no momento de sua elaboração.

O livro didático, a partir da visão abrangente definida anteriormente, incorpora uma rede de atributos e propósitos que, quando considerados em conjunto, formam a singularidade do material. No entanto, salientamos que esses atributos não devem ser analisados de maneira isolada, desvinculados das suas demais características. Assim, Bittencourt (2004) apresenta diferentes perspectivas sobre o LD; são elas: suporte, veículo de valores, mercadoria e produto cultural. Possivelmente, tais dimensões estão sujeitas a reestruturações e novas conexões a partir de influências culturais, sociais e políticas.

Valverde *et al.* (2002) comentam que, embora os sistemas educacionais possam apresentar diferenças, o livro didático é um elemento presente e importante nas escolas, exercendo influência decisiva nas práticas pedagógicas do professor, independentemente do seu país de atuação. Para alguns autores, o LD é um dos principais recursos de apoio aos docentes (Fan *et al.*, 2004; Reys *et al.*, 2003). Essa importância também reflete nos estudantes, que podem usá-lo como apoio, seja na escola ou em casa (Lepik; Grevholm; Viholainen, 2015). Sobre isso, Rezat (2008) concorda que os livros são usados para estudo autogerido quando o aprendiz sentir necessidade, ou seja, não estão exclusivamente atrelados à orientação do

professor. Além disso, Choppin (2004, p. 553) entende que os livros “visam facilitar a memorização do conhecimento e favorecer a aquisição de competências disciplinares”.

Para Chingos e Whitehurst (2012), a escolha de materiais didáticos, como os livros, tem efeitos significativos na aprendizagem. Polikoff (2015) reforça esse ponto ao entender que eles impactam na qualidade da experiência dos alunos em sala de aula. As atividades presentes nos livros didáticos, conforme sugere Gracin (2018), podem influenciar na forma como o estudante desenvolve o pensamento, ou seja, a presença de elementos estruturais ou interpretativos confusos nessas atividades pode impactar negativamente na aprendizagem. Remillard (2005) vai além e diz que os LD também são uma fonte potencial para a aprendizagem dos professores. Dada a forte presença nas escolas, o LD também ensina determinados conhecimentos que influenciam a cultura escolar (Gonçalves; Corrêa, 2016).

Acentuando a importância do LD ensino de matemática, Silveira e Powell (2019) argumentam que os livros didáticos são a principal fonte de conhecimento matemático, seja para os professores, seja para os estudantes. Com isso, cria-se uma demanda de investigação por parte dos educadores da área no intuito de compreender se os conceitos matemáticos, na forma como são apresentados nos livros, possibilitam uma aprendizagem sólida aos estudantes.

No que diz respeito a tal relação de dependência entre o ensino de matemática e os livros didáticos, Valente (2008, p. 141) afirma que:

talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos.

Sobre as pesquisas que olham para o LD de matemática, Fan, Zhu e Miao (2013), em seu levantamento, apontam para quatro caminhos possíveis: (1) o papel do livro didático na educação e no currículo; (2) análise e comparação de texto; (3) o uso do material pelo professor e pelos alunos; e (4) outras áreas (incluindo aqui o estudo de livros didáticos eletrônicos). Os autores adicionam que este ainda é um campo que necessita suscitar mais discussões.

O levantamento de Fan, Zhu e Miao (2013) foi importante para lançar um holofote nas pesquisas com LD de matemática como um tema que extrapola questões educacionais específicas de um país. Mullis *et. al*, (2012), por exemplo, a partir de seu estudo, apontam que, na Alemanha, 86% dos professores utilizam o manual de matemática como base de ensino. Entre os resultados do estudo conduzido por Lepik, Grevholm, e Viholainen, (2015), com 402 professores de matemática do 7º ao 9º ano da Estônia, Finlândia e Noruega, destaca-se que muitos desses professores confirmaram o uso frequente do manual escolar para o planejamento

e preparo de suas aulas. Além disso, a ampla maioria (79% a 92%) utilizava o manual como única fonte de exercícios, em pelo menos, metade das aulas. Essas discussões contribuem para validarmos a importância de pesquisas centradas nos livros didáticos de matemática, não somente para o cenário brasileiro, mas para um olhar global à comunidade da Educação Matemática.

Próximo a isso, Perovano, Guimarães e Litoldo (2022, p. 20) mapearam as perspectivas e possibilidades apresentadas na terceira edição do ICMT¹⁰, especificamente aquelas sobre a análise de livros didáticos de Matemática. Dentre seus resultados, os autores afirmam que a pesquisa com LD contribui para “revelar lacunas entre as prescrições oficiais e o que é proposto pelos autores de livros didáticos, além de salientar aspectos relacionados aos conteúdos e a procedimentos alusivos ao ensino e à aprendizagem da Matemática”. A diversidade de livros, coleções e editoras, bem como as diferentes etapas da escolarização, oferecem aos pesquisadores um vasto repertório de dados que podem ser analisados sob diferentes perspectivas.

Dado esse papel relevante que os LD têm para as aulas de matemática, é importante elaborar discussões que ajudem os professores nos processos de escolha desses materiais. Sobre isso, Van Den Ham e Heinze (2018) investigaram o efeito de diferentes manuais escolares que representam o mesmo currículo nos resultados dos alunos, reanalisando um conjunto de dados longitudinais sobre as competências matemáticas dos alunos do ensino primário do 1º ao 3º ano. Os resultados mostraram que “a escolha de manuais escolares por parte dos professores de matemática tem um efeito substancial nos resultados dos alunos em matemática” (Van Den Ham; Heinze, 2018, p. 2). Os autores ainda sugerem que os manuais escolares devem ser considerados como uma covariável importante na investigação educacional e que a escolha de manuais escolares é um fator relevante para a prática educativa.

No que se refere às lentes teóricas utilizadas na análise de LD, De Lima *et al.* (2021), que analisaram as bases teóricas utilizadas para pesquisar livros didáticos nos anais do ENEM 2019, identificaram que a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, a Teoria dos Campos Conceituais de Vignaud e a Teoria dos Registros de Representações Semiótica de Duval foram as mais empregadas. Essas teorias têm sido usadas para “analisar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática e as condições que possibilitam a aquisição desse conhecimento por parte dos alunos” (De Lima *et al.*, 2021, p. 9). Entendemos que as teorias têm papel fundamental no processo de análise, pois são elas que instrumentalizam

¹⁰ O “International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT)” é um evento temático internacional sobre a pesquisa com livros didáticos.

os pesquisadores a refletir sobre os fenômenos que estudam. A partir das diferentes possibilidades teóricas, cabe ao pesquisador escolher quais aspectos teóricos e analíticos são mais adequados para atender os objetivos de uma determinada pesquisa.

Dentre outros aspectos, os livros didáticos em educação matemática destacam-se pela utilidade essencial dos modelos visuais que representam objetos abstratos e suas operações, conforme observa Fan (2013). Esses elementos são centrais para a presente pesquisa e, por isso, falaremos mais das questões que envolvem as representações da matemática no próximo capítulo.

4.2 LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL: O PAPEL DO PNLD E O IMPACTO DA BNCC

Ao analisarmos o cenário nacional, percebemos que o marco mais importante em relação ao LD no Brasil, inclusive para a atualidade, é o PNLD (Programa Nacional do Livro e do Material Didático), criado em 1985 com o objetivo de selecionar, avaliar e distribuir livros didáticos nas escolas públicas nacionais. Dentre as principais características do programa, destacamos duas: a ideia de tornar o livro reutilizável e a de permitir que a sua escolha seja feita por professores da própria escola, possibilitando um maior espaço para a valorização das especificidades de cada região do país (Brasil, 1985).

Em um primeiro momento, pelo orçamento limitado, o programa distribuía livros apenas para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nos anos seguintes, um aumento nas verbas para o PNDL possibilitou avançar às etapas seguintes da escolarização, especialmente em 1997, quando o FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação) se tornou o setor responsável pelo programa, momento em que os livros alcançaram todas as séries do Ensino Fundamental (Mazzi; Amaral-Schio, 2021).

A partir de 2003, “o PNLD foi expandido para atender os alunos do Ensino Médio e do ensino de jovens e adultos, aumentando de forma considerável seu alcance” (Mazzi; Amaral-Schio, 2021, p. 13), ao passo que, em 2012, as editoras começaram a oferecer livros digitais como apoio aos impressos, aumentando a quantidade de materiais multimídia. Já em 2017, houve uma mudança estrutural no programa, conhecida como o “Novo PNLD”, quando este se juntou ao Programa Nacional da Biblioteca da Escola (PNBE). O programa passou a se chamar Programa Nacional do Livro e do Material Didático, ampliando os tipos de materiais que oferecia, pois, além de livros didáticos e obras literárias, passou a distribuir, às escolas, outras “obras pedagógicas, softwares e jogos educacionais, materiais de reforço e correção de fluxo, materiais de formação e materiais destinados à gestão escolar, entre outros” (Brasil, 2017).

Nesse novo momento do PNLD, incluiu-se a educação infantil, enquanto o ciclo do livro foi ampliado de três para quatro anos. A partir do ano de 2019, a avaliação dos livros do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), antes realizada em parceria com algumas universidades, passou a ser realizada por uma comissão técnica do MEC (Ministério da Educação). Vale destacar que essa comissão, no modelo atual de avaliação, é composta por professores de diferentes universidades-regiões do país bem como professores de distintas instituições desde a educação básica até o ensino superior. O último edital destinado a obras dos Anos Iniciais das escolas públicas municipais, estaduais e federais é o Edital Convocação Nº 01/2021, que resultou no guia final do PNLD (2023-2026).

É importante destacar essa questão temporal, pois os livros que analisamos tem data de 2021, pois são as primeiras edições que foram submetidas pelas editoras para serem analisadas pelas equipes de avaliação do PNLD. Hoje, eles podem ter sofrido alguma alteração, mas a versão que analisamos é referente àquelas que foram enviadas no edital de convocação de 2021. Inclusive, foram enviados exemplares físicos para as escolas, onde conseguimos ter acesso às coleções e ao manual do professor. Ainda que poucas mudanças possam ter sido feitas depois desse processo, é importante esclarecermos esses aspectos.

A importância do PNLD na educação reflete diretamente na condução dos processos de avaliação, escolha e distribuição dos livros didáticos, tendo um impacto importante no trabalho escolar (Soares; Souza, 2011; Mantovani, 2009). Analisar obras que fazem parte do PNLD ajuda a compreender como ocorrem os processos de ensino-aprendizagem, tendo em vista sua amplitude nacional (Tagliani, 2011) e, em particular, as implicações e repercussões diretas na educação matemática (Zúñiga, 2007).

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) opera em ciclos anuais, abrangendo os diversos níveis da Educação Básica. Nas últimas edições, em 2020, foi direcionado aos Anos Finais; em 2021, ao Ensino Médio; em 2022, à Educação Infantil; e em 2023, aos Anos Iniciais. De maneira sucinta, o PNLD se estrutura em quatro etapas distintas: a primeira compreende os editais de convocação e inscrição das editoras; a segunda se concentra na avaliação pedagógica com a análise das obras e a definição das obras aprovadas que irão figurar no Guia do PNLD, produzido ainda nessa etapa; a terceira fase se dedica à aquisição, produção e análise das obras; por fim, a quarta fase se encarrega da distribuição dos materiais. Detalhes específicos de cada fase podem ser encontrados em Mazzi (2018), porém, por não estarem diretamente relacionados aos objetivos deste trabalho, não serão aprofundados aqui.

Por outro lado, um ponto que merece destaque é a implementação e homologação da BNCC em 2018, que influenciou diretamente na elaboração dos livros didáticos de todos os

componentes curriculares. A BNCC surge como resposta à Constituição Federal (artigo 201) (Brasil, 1988) e à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (artigo 26) (Brasil, 1996) ao proporcionar conhecimentos básicos comuns para todo o território nacional. Apesar de a BNCC não ser um currículo, ela tem caráter normativo e, portanto, força de lei, o que a fez superar a importância de outros documentos que já existiam, como as Diretrizes Nacionais da Educação Básica (DCN) (Brasil, 1998b) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998a), considerando o que os alunos devem aprender e alocando os objetivos de aprendizagem ano a ano.

A BNCC está estruturada em conformidade com as fases da educação básica, delineando os conteúdos que os estudantes devem assimilar por meio de objetivos e metas de aprendizado (competências e habilidades). De acordo com Freitas *et al.* (2019, p. 3), existe a evidência de estratégias que refletem predominância da classe dominante, assim como a abordagem neoliberal na educação descrita no documento, e a responsabilização dos professores pelos resultados da educação pública.

O que nos leva a mencionar a BNCC neste capítulo é a imposição que ela gera para a adequação dos materiais a serem utilizados em sala de aula. Com isso, os livros didáticos precisam estar alinhados com as diretrizes do documento, sendo esta, inclusive, uma exigência dos novos editais do PNLD (Nilles; Leite, 2023). Portanto, ao realizarmos uma pesquisa com LD, precisamos levar em conta que ele, atualmente, é elaborado para atender as habilidades e competências presentes na BNCC.

Especificamente para a matemática, Carvalho *et al.* (2023, p. 1) mencionam que “a implementação da BNCC causou mudanças significativas nos livros didáticos e, consequentemente, deve impactar o ensino e aprendizagem de Matemática”. Ainda que não seja nosso foco discutir esse documento, ele atravessa o campo de discussão dos livros didáticos, uma vez que conforme mencionamos, ele é a base para que os autores criem suas coleções e submetam ao PNDL que irá, entre outras análises, verificar se os livros seguem as diretrizes da BNCC.

Estudos como os de Passos e Nacarato (2018), revelam fragilidades e tensões em relação à BNCC e evidenciam tensões entre o discurso oficial das políticas públicas e os princípios defendidos por pesquisadores da Educação Matemática. As autoras denunciam que o processo de elaboração da BNCC foi marcado por práticas antidemocráticas, com a substituição de especialistas da área por representantes de grupos empresariais, o que comprometeu a legitimidade do documento e a diversidade de vozes no debate educacional. Além disso, destacam o alinhamento da BNCC a interesses neoliberais e ao projeto de padronização e

controle das práticas pedagógicas, enfatizando que a lógica da mensuração de resultados desconsidera os contextos socioculturais e os direitos formativos dos estudantes.

Esse movimento, segundo Passos e Nacarato (2018), representa um rompimento com avanços conquistados em políticas anteriores, como o PNAIC (Pacto Nacional da Alfabetização na Idade Certa) e os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), que valorizavam a formação crítica do professor e o letramento matemático em uma perspectiva social e cultural. No contexto dos Anos Iniciais, as autoras apontam que “romper com a proposta de formação continuada do professor alfabetizador iniciada em 2013 [...] substituindo-a por prescrições que engessam seu trabalho, exercida por setores empresariais [...] coloca na berlinda o futuro do ensino da Matemática nos primeiros anos de escolarização” (Passos; Nacarato, 2018, p. 131). A partir dessas discussões, nos colocamos a favor dos autores e dos demais pesquisadores que defendem a necessidade de resistência e de valorização da autonomia profissional, com vistas a uma educação que promova uma formação cidadã e crítica.

Retomando o olhar para os materiais manipulativos, tema central desta pesquisa, Sabel, Pires e Silveira (2022) investigaram na lista de habilidades da BNCC (2018) dos Anos Iniciais, que fazem menção aos manipuláveis, encontrando oito delas. Os códigos das habilidades na BNCC seguem uma estrutura padronizada, composta por letras e números, que indicam o segmento escolar, o ano/série, o componente curricular e o número da habilidade. A habilidade EF01MA07 significa respectivamente Ensino Fundamental, primeiro ano, matemática e habilidade sete. No quadro a seguir, apresentamos as habilidades mencionadas em Sabel, Pires e Silveira (2022):

Quadro 3 - Lista de habilidades presentes na BNCC dos Anos Iniciais

(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo.
(EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
(EF02MA04) Compor e decompor números naturais de até três ordens, com suporte de material manipulável, por meio de diferentes adições.
(EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.
(EF05MA21) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.

Fonte: Sabel, Pires e Silveira (2022, p. 7).

Das oito habilidades dispostas no quadro acima, seis são voltadas ao ensino do SND. Esses dados sugerem, portanto, que os autores de LD de matemática para os Anos Iniciais terão que incorporar em seus textos a indicação a manipulativos, de forma a atender tais habilidades. Contudo, o documento não menciona que materiais usar ou de que forma articular com os conceitos. É nessa escolha que cada livro terá alguma liberdade de indicar e orientar os manipulativos que seus autores considerarem mais adequados.

Por fim, reiteramos que os livros didáticos podem assumir diferentes papéis, seja como referência curricular, cultural e ideológica, fonte de conhecimento metodológico, divulgação científica ou instrumental (Amaral *et al.*, 2023). Seja qual for a natureza do uso, pelo exposto nesta seção, os LD oferecem elementos significativos na investigação de diferentes problemáticas educacionais, e, por isso, são tomados, nesta pesquisa, como veículo para discutir representações e indicações de usos de materiais manipuláveis.

5 AS ESCOLHAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Na primeira seção deste capítulo, apresentaremos o aporte teórico-metodológico escolhido para esta pesquisa, discutindo seus principais conceitos. Para tanto, na seção seguinte, abordaremos o referencial escolhido: as ferramentas de análise do Enfoque Ontossemiótico (EOS), com ênfase na ferramenta da Dimensão Epistêmica. Na sequência, sistematizamos os procedimentos metodológicos que guiaram as análises.

5.1 ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO: PRESSUPOSTOS E CONCEITOS PRINCIPAIS

O marco teórico do Enfoque Ontossemiótico da Instrução e Cognição Matemática, mais conhecido por Enfoque Ontossemiótico (EOS), surgiu no início da década de 1990, na Universidade de Granada (UGR), e foi idealizado por um grupo de pesquisa liderado pelo professor Juan Diaz Godino. Seus estudos foram desenvolvidos em parcerias constantes com outros pesquisadores da Educação Matemática, participantes do grupo de investigação *Teoría de la Educación Matemática* (TEM).

Esses investigadores, inicialmente imbuídos das teorias francesas, dedicaram-se a elaborar uma abordagem teórica que conseguisse integrar as diferentes perspectivas presentes na Educação Matemática (Godino, 2012). Esse interesse culminou na formação do grupo e posterior criação de ferramentas que esclarecessem, comparassem e articulassem teorias, buscando, assim, estabelecer um referencial mais amplo e inclusivo (Kaiber *et al.*, 2017).

Dentre os principais pressupostos que configuram a base do EOS, temos os estudos de: Charles Sanders Peirce, Ludwig Wittgenstein e Friedrich Ludwig Gottlob Frege; a Teoria da Objetivação, de Luis Radford; a Teoria dos Registros das Representações Semióticas, de Raymond Duval; a Teoria de Situações Didáticas, de Guy Brosseau; a Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard; a Teoria de Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud; a Teoria da Genesis Instrumental; e a Etnomatemática (Kaiber *et al.*, 2017). A diversidade de aportes teóricos é um aspecto positivo, embora Godino (2004) aponte que muitos pesquisadores sentem dificuldade para escolher seus referenciais:

Em certos momentos esta diversidade pode ser inevitável, até mesmo enriquecedora, mas o progresso da disciplina e a melhoria das suas aplicações práticas exigem esforços conjuntos para identificar o núcleo firme de conceitos e métodos que devem eventualmente cristalizar - para utilizar a terminologia clássica de Lakatos (1983) - num verdadeiro programa de investigação (Godino, 2004, p. 18, tradução nossa).

Dessa maneira, o EOS se estrutura como um conjunto de ferramentas teóricas integradas que, pela articulação de diferentes perspectivas antropológicas e semióticas, construiu seu próprio modelo para a investigação das práticas de ensino e aprendizagem da matemática (Presmeg, 2014). Godino (2011) explica que o EOS é um marco teórico para a Didática da Matemática que, a partir de diferentes bases teóricas, ofereceu instrumentos teóricos que contribuem para pesquisas em educação na área. Além disso, o autor comenta sobre as fases do EOS, mencionando um primeiro período entre 1993 e 1998, e outro, a partir desse período (Godino, 2004).

Godino (2012) também ressalta que o EOS se trata de um sistema “integrador de diferentes teorias que objetiva superar os dilemas existentes entre os diversos paradigmas que competem entre si, tais como o realismo-pragmatismo, a cognição individual-institucional, o construtivismo-condutismo, entre outros” (Godino, 2012, p. 5, tradução nossa). Dentre os pontos que o EOS se diferencia de outras teorias, cabe destacar dois: (i) exceder a preocupação somente do foco epistemológico ou cognitivista e (ii) realçar os sujeitos envolvidos no processo e suas questões históricas, sociais e afetivas, já que esses elementos também devem ser contemplados nas pesquisas em educação matemática.

As pesquisas iniciais da EOS se detiveram a investigar os diferentes significados que os objetos matemáticos apresentam, conjecturando acerca dos conceitos de significado pessoal e significado institucional (Godino; Batanero, 1994; Godino, 1996; Godino; Batanero, 1998). Em seguida, os pesquisadores iniciaram estudos para desenhar modelos ontológicos e semióticos mais elaborados para descrever as atividades, processos e práticas do ensino de matemática. Esses modelos surgiram pela defesa dos autores de que o problema epistêmico-cognitivo não deve se afastar das questões ontológicas (Godino, 2011). Nessa perspectiva, assume-se a matemática como atividade humana, centrada na resolução de problemas, que tem um tempo-espço determinado num contexto histórico e cultural. Pressupõe-se, ainda, que cada objeto matemático possui uma variedade de significados possíveis, que são construídos dentro dos sistemas de práticas matemáticas. Compreender a noção de objeto, significado e prática matemática é essencial para entender o EOS.

Para falar sobre os significados pessoais e institucionais, precisamos, antes de mais nada, entender o que são os objetos matemáticos dentro desta perspectiva teórica. Para o EOS o “objeto matemático é qualquer entidade ou ente que pode ser referido no discurso matemático” (Godino *et al.*, 2006, p. 121, tradução nossa). Desse modo, existe uma variedade de objetos matemáticos que intervêm nas práticas matemáticas, dos quais o EOS destaca seis,

denominados objetos primários. Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos e Giacomone (2017) sistematizam e distinguem tais objetos em:

Situações-problema – situações de aplicação do objeto no contexto intra ou extra matemático. Um exemplo é introduzir um contexto de empréstimo para ensinar porcentagem.

Linguagens – termos, expressões, notações, e elementos linguísticos nos seus diferentes registros. Por exemplo, uma frase em língua natural, um gesto, um gráfico, uma figura, etc.

Definições – descrição, designação ou definições conceituais, como o caso de definir uma função ou o que é um triângulo.

Procedimentos – algoritmos, operações, estratégias e técnicas matemáticas. A maneira com que operamos os números no nosso sistema de numeração é um exemplo.

Proposições – afirmações sobre declarações acerca dos conceitos empregados na resolução de uma tarefa, como por exemplo, utilizar a relação entre unidades, dezenas e centenas na composição de um número.

Argumentos – enunciados que validam ou explicam as proposições e os procedimentos utilizados para resolver uma tarefa. Por exemplo, justificar que um triângulo é retângulo para poder utilizar o Teorema de Pitágoras.

Essa visão de objeto se sustenta na perspectiva de que os objetos estão nas práticas e seus significados começam na esfera pragmática, relativa ao contexto. No EOS, assume-se “uma visão antropológica e pragmatista da matemática, em que a atividade de resolução de problemas é considerada como um elemento central na construção do conhecimento matemático” (Godino *et al*, 2017, p. 7, tradução nossa). Essa visão epistemológica é operacionalizada com a noção de prática matemática, assumindo a sua relatividade institucional e pessoal.

Para o EOS, a matemática acontece nos conjuntos de práticas das quais emergem os objetos matemáticos. Quando falamos em uma prática matemática, estamos considerando-a como “qualquer ação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a solução obtida a outros, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas” (Godino; Batanero, 1994, p. 334, tradução nossa). É nos diferentes tipos de práticas que os objetos matemáticos adquirem diferentes significados (pessoais ou institucionais).

Para o EOS, o significado de um objeto é um conjunto de práticas que apresenta duas naturezas: a pessoal e a institucional (Godino; Batanero, 1994). A primeira se refere aos significados construídos pelo sistema de práticas pessoais para resolver determinados problemas (Pinho; Blanco, 2017), e a segunda, aos significados que advêm das práticas

institucionais (acadêmicas, escolares e científicas). Na educação escolar ou acadêmica, buscamos ensinar os significados institucionais do objeto matemático, mas o EOS nos alerta que não devemos perder de vista o sujeito individual, a quem nossa atividade pedagógica se dirige (Godino, 2011).

É preciso reconhecer o valor desses dois tipos de significados e que, independentemente de sua natureza e dos conhecimentos matemáticos que carregam, é deles que surgem os conflitos semióticos. Esses conflitos são “diferenças entre os significados atribuídos a uma mesma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições), em interação comunicativa e podem explicar as dificuldades e limitações do ensino e aprendizagem implementados” (Godino, 2002, p. 246, tradução nossa). Um exemplo de conflito surge quando o estudante já possui um significado prévio sobre um determinado objeto de forma equivocada, incompleta ou vivenciada dentro de um contexto específico. Tais significados pessoais (do sujeito), durante o ensino do significado institucional (escolar), podem levar a resistências e obstáculos na aprendizagem, caracterizando, assim, um conflito semiótico. A identificação desses conflitos é importante para as tomadas de decisão do professor em relação a como organizar o ensino de maneira a superá-los e alcançar os significados institucionais pretendidos.

A partir de Godino (2003), Font e Godino (2006) e Gusmão (2006), na perspectiva dos professores que ensinam matemática, podemos classificar os significados institucionais em quatro tipos: o significado institucional de referência diz respeito à definição do objeto matemático a partir do ponto de vista das instituições escolares e científicas, considerando documentos como os currículos, os livros didáticos e a evolução histórica do conceito. Já o significado institucional pretendido está relacionado às intenções pedagógicas do professor, ou seja, às práticas que ele projeta desenvolver em sala de aula. O significado institucional implementado refere-se ao que, de fato, é realizado nas aulas, podendo divergir do planejado. Por fim, o significado institucional avaliado se manifesta nas atividades e instrumentos utilizados para verificar a aprendizagem dos estudantes.

Do ponto de vista discente, os autores também propõem algumas classificações: o significado pessoal global, compreende o conjunto de ações e conhecimentos que o estudante consegue mobilizar em relação ao objeto matemático; o significado declarado, corresponde àquilo que o aluno explicita em suas produções escritas e orais, especialmente em avaliações; e o significado alcançado refere-se às práticas que se alinham ao significado institucional. A distinção entre essas diferentes categorias evidencia a complexidade do processo de construção e análise dos significados atribuídos aos objetos matemáticos no contexto educativo.

Desse modo, no que tange a presente pesquisa com LD, estamos analisando significados institucionais pretendidos. São institucionais, pois são objetos matemáticos constituídos a partir do que as diretrizes curriculares oficiais direcionam para ser ensinado na escola. E são pretendidos pelo caráter intencional que os autores dos LD propõem sobre eles, ou seja, dependerá da figura do professor para que se torne um significado implementado.

Outro conceito importante é o de função semiótica, que segundo o EOS pode ser definida como a capacidade de utilizar signos e símbolos para representar e comunicar conceitos matemáticos (Godino; Batanero; Font, 2008). Isso envolve a compreensão e a manipulação de diferentes sistemas de representação, como símbolos matemáticos, gráficos, diagramas e linguagem natural, para expressar e interpretar ideias matemáticas. A função semiótica também está relacionada à capacidade dos estudantes de reconhecer e interpretar os signos matemáticos em diferentes contextos e de utilizar esses signos de forma significativa para resolver problemas e construir conhecimento matemático.

No intuito de contribuir para a pesquisa dos processos de instrução e cognição da matemática, o EOS se configura para além de um referencial teórico, mas como um conjunto de ferramentas para analisar diferentes contextos da educação matemática. Como explicado por Godino *et al.* (2017), o EOS propõe pelo menos seis tipos de análises: 1) Sistemas de práticas; 2) Configuração de objetos e processos; 3) análises de configuração e trajetórias didáticas; 4) sistemas de normas e metanormas; 5) avaliação da idoneidade didática; 6) Conhecimentos e Competências Didático-Matemático. Cada um deles se volta a um tipo de estudo e possui ferramentas específicas de análise.

O tipo de análise, dos *sistemas de práticas*, investiga as práticas matemáticas (tanto operacionais quanto discursivas) presentes em um processo de ensino. No EOS, os significados de um objeto são construídos por meio de sistema de práticas (institucional ou pessoal). “Esse primeiro nível envolve a identificação, a classificação e a descrição dos tipos de situações problemáticas nas quais o objeto em questão está envolvido, bem como as práticas matemáticas” (Godino *et al.*, 2017, p. 2, tradução nossa). O foco da análise se volta para o estudo dos processos mobilizados por uma pessoa ou instituição que realiza um conjunto de práticas sobre um determinado objeto para desenvolver seus significados.

Nas *configurações de objetos e processos*, a análise se centra nos objetos matemáticos, nos processos que intervêm na realização das práticas e o que emerge delas. Com essas configurações, intenta-se descrever a complexidade das práticas como fator explicativo dos conflitos semióticos produzidos em sua realização. Nesse nível de análise, surge a noção de configuração ontosemiótica (composta por práticas, objetos e processos) que atende à

“necessidade de identificar os objetos e processos envolvidos nas práticas matemáticas que são realizadas para a resolução de situações-problema cuja resolução competente estamos tentando desenvolver nos alunos” (Godino *et al.*, 2017, p. 3, tradução nossa). O reconhecimento explícito de tais objetos e processos permite prever conflitos de aprendizagem, avaliar o conhecimento matemático dos alunos e identificar os diferentes objetos primários (conceitos, linguagem, proposições, procedimentos, argumentos e preposições) que devem ser institucionalizados nos momentos adequados dos processos de estudo.

No caso da análise das *configurações e trajetórias didáticas*, o olhar é para as interações entre professor e estudantes. Leva-se em conta, aqui, as diferentes dimensões que atravessam os processos didáticos, desde o lado epistêmico e cognitivo (institucional e pessoal), até as questões afetivas, mediacionais (recursos didáticos), ecológicas (curriculares) e interacionais. O objetivo é identificar e descrever as interações para refletir sobre sua influência na aprendizagem dos estudantes.

Próximos dessas interações, estão as regras e os acordos que fazem parte do ambiente escolar, tanto explícito quanto implícito, os quais formam o nível de análise dos *sistemas de normas e meta-normas*. Para Godino, Batanero e Font (2008), as práticas matemáticas apresentam fenômenos sociais que influenciam a aprendizagem da disciplina. O objetivo é reconhecer o efeito das normas e metanormas que intervêm nas diversas facetas que caracterizam os processos de estudo da matemática como dos fatores explicativos dos fenômenos didáticos. Inclui-se, aqui, também a dimensão ecológica, que analisa as diretrizes curriculares e demais documentos oficiais que norteiam o trabalho pedagógico.

O quinto nível trata da *idoneidade didática*, caracterizada como uma “síntese final orientada à identificação de potenciais melhoras do processo de estudo em novas implementações” (Godino; Batanero; Font, 2008, p. 26, tradução nossa). É vista como um critério geral, relacionado às circunstâncias contextuais, à adequação e à relevância das ações dos agentes educacionais, ao conhecimento colocado em jogo e aos recursos utilizados em um processo de estudo da matemática (Godino *et. al*, 2013). O sistema de indicadores empíricos identificados em cada uma das facetas constitui um guia para análise e reflexão sistemática que fornece critérios para a melhoria progressiva dos processos de ensino e aprendizagem. A idoneidade didática possui seis dimensões que constituem seus eixos de análise, são elas: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica.

A dimensão epistêmica se preocupa com a construção dos significados institucionais, enquanto a dimensão cognitiva se volta aos conhecimentos pessoais do sujeito. Já a afetiva reflete sobre a questão do interesse, motivação e emoção dos estudantes durante as práticas. As

dimensões mediacional e a interacional estão centradas, respectivamente, nos recursos didáticos usados para o ensino e as formas de interação entre os sujeitos. No caso da dimensão ecológica, centra-se nas conexões entre os conceitos, suas relações curriculares, interdisciplinaridade e questões envolvendo a escola e a comunidade. Cada uma dessas dimensões é como um guia para analisar e discutir, de forma sistemática, critérios que aumentem a idoneidade didática dos sistemas instrucionais. O objetivo é ser uma ferramenta reflexiva para o professor e, como Godino *et al.* (2017) explicam, contribuir na análise de quais aspectos didáticos que podem ser melhorados nas intervenções e atividades matemáticas.

Mais recentemente, com os avanços do EOS, surge o modelo de *conhecimentos e competências didático-matemáticos (CCDM)* (Pino-Fan; Godino, 2015; Godino *et al.*, 2016). Esse nível de análise começou a ser desenvolvido com o intuito de compreender “como o saber docente relativo à matemática e aos aspectos didáticos voltados ao ensino estão relacionados entre si no processo de ensino e aprendizagem” (Araújo; Carvalho, 2021, p. 283). O EOS defende que somente o conhecimento matemático não é suficiente para que os professores organizem, implementem e avaliem os processos de ensino da matemática (Breda; Font; Lima, 2015). É necessário um conhecimento profundo dos modos de ensinar a matemática para diferentes sujeitos, que, nessa perspectiva, formam os conhecimentos e competências¹¹ didático-matemáticos. O CCDM segue as dimensões da idoneidade didática, buscando articular conhecimentos sobre as dimensões epistêmica, cognitiva, afetiva, mediacional, interacional e ecológica. Esses conhecimentos têm sido utilizados pelo EOS, principalmente, no âmbito da pesquisa com formação inicial e continuada (Da Silva *et al.*, 2023).

A partir do conhecimento do EOS, a ferramenta de análise dos dados é a dimensão epistêmica. No tópico seguinte, explicamos os componentes e indicadores dessa ferramenta e suas conexões com os objetivos da presente tese.

5.2 AS FERRAMENTAS DE ANÁLISE DA PESQUISA: A IDONEIDADE EPISTÊMICA E OS CONFLITOS SEMIÓTICOS

5.2.1 Componentes e indicadores da dimensão epistêmica

A dimensão epistêmica da idoneidade didática, como já mencionado na seção anterior, possibilita analisarmos “o grau de representatividade dos significados institucionais implementados, ou pretendidos, com relação a um significado de referência” (Godino;

¹¹ A palavra competência não está relacionada ao seu frequente uso no Brasil, pensando no contexto de BNCC ou outros contextos meritocráticos. O EOS toma como indicador de competência “uma ação eficaz executada em um determinado contexto para um determinado fim” (Font, 2011, p. 18, tradução nossa). Seu uso se refere à capacidade de o professor tomar decisões didáticas para avaliar e melhorar o processo de ensino.

Batanero; Font, 2008, p. 6, tradução nossa). No caso dos LD, a análise permite avaliar se as propostas do livro têm potencial de promover o ensino dos significados institucionais (escolares) pretendidos para uma determinada etapa escolar (Godino; Neto, 2013).

Burgos *et al.* (2020) usaram a dimensão epistêmica da idoneidade para avaliar o significado de proporcionalidade em livros didáticos. De maneira similar, Konic, Godino e Rivas (2010) caracterizaram os significados presentes em um livro ao abordarem tarefas relacionadas à introdução de números decimais. Godino, Fonte e Wilhelmi (2006), por sua vez, analisaram lições sobre adição e subtração presentes em livros didáticos. No contexto do ensino superior, Pino-Fan *et al.* (2013) utilizaram da dimensão epistêmica da idoneidade na investigação do tratamento dado à derivada em livros de matemática usados no bacharelado¹². Esses estudos exemplificam como a dimensão epistêmica da se revela uma ferramenta promissora na análise dos significados associados a diferentes objetos matemáticos.

Quando utilizada em análise de LD, a dimensão epistêmica permite uma visão detalhada dos objetos primários (situações-problema, linguagens, definições, procedimentos, argumentos e proposições) mobilizados em um sistema de práticas (tarefas) para auxiliar no significado institucional pretendido (Castillo; Burgos; Godino, 2021). Além disso, também se observa as relações entre estes objetos e suas representações, bem como os conflitos semióticos em potencial. Godino (2024) explica que:

Devemos analisar relações os significados parciais estudados entre si e com os objetos envolvidos nas práticas correspondentes, bem como com os conteúdos de outras disciplinas com as quais o aluno já está familiarizado. [...] Por sua vez, os conflitos semióticos ajudam a identificarmos aspectos em que podem ocorrer desajustes no processo de produção dos significados (Godino, 2024, p. 239, tradução nossa).

A ferramenta da dimensão epistêmica deve adaptar seus indicadores de análise para o objeto de cada pesquisa. Essa etapa de adaptar os indicadores para atender ao tipo de análise e de objeto investigado é ressaltada por Castillo e Burgos (2021, p. 5) quando mencionam que: “tendo em conta a especificidade dos conhecimentos matemáticos, estes guias devem ser enriquecidos e particularizados de acordo com a disciplina específica a ser ensinada”. O movimento de produção dessa adaptação dos indicadores da dimensão epistêmica é um dos principais elementos da nossa metodologia, pois são esses indicadores que compõem nossa forma de olhar para as tarefas que usam manipulativos.

¹² Na Espanha “Bacharelado” refere-se aos dois últimos anos (não obrigatórios) do ensino secundário, entre 16 e 18 anos, que prepara os estudantes para o ensino superior.

Para produzir os indicadores específicos para analisar o uso de manipulativos em tarefas do SND em livros didático, foi necessário um estudo minucioso da literatura específica apresentada nos capítulos anteriores, tanto sobre os manipulativos quanto o ensino de números e operações. Sem esse estudo prévio, corríamos o risco de comprometer a qualidade científica da pesquisa e por isso, a escolha dos autores que compõem os capítulos teóricos foi importante, de modo que possamos ter elementos suficientes para compreender o objeto que estamos pesquisando: as representações de manipuláveis. No quadro a seguir, apresentamos o quadro que tomamos como referência para análise. Ele está organizado de modo que para cada componente, mostramos o critério geral proposto pelo EOS, e abaixo, a adaptação que atende aos objetivos desta pesquisa:

Quadro 4 - Quadro dos critérios da dimensão epistêmica adaptado à pesquisa

Componentes	Indicadores
Situação-problema	Critério geral: situações de aplicação do objeto no contexto intra ou extra matemático; contextos que possam levar a necessidade do objeto e o coloque em ação.
	Adaptação à pesquisa: situações para introduzir e/ou apresentar os manipulativos; tarefas com a qual utilizam-se os manipulativos para trabalhar um significado do SND.
Linguagem	Critério geral: termos, expressões, notações, e elementos linguísticos nos seus diferentes registros que representam o objeto matemático.
	Adaptação à pesquisa: Expressões, notações, gráficos em seus diversos registros (escritos, orais, gestuais, etc.), com ênfase para as representações dos manipuláveis e o sistema de numeração.
Definição	Critério geral: descrição, designação ou definições conceituais que identifiquem e promovam ideias sobre os objetos.
	Adaptação à pesquisa: Definições e ideais promovidas na resolução de tarefas sobre o SND com uso dos manipuláveis.
Procedimentos	Critério geral: algoritmos, operações, estratégias e técnicas matemáticas que são necessárias para resolver a tarefa.
	Adaptação à pesquisa: Algoritmos, operações e técnicas de cálculo utilizadas nas atividades, com uso direto ou indireto dos manipuláveis.
Proposições	Critério geral: afirmações sobre declarações acerca dos conceitos empregados na resolução de uma tarefa.
	Adaptação à pesquisa: Declarações acerca dos conceitos mobilizados nas atividades do livro sobre o SND a partir dos manipuláveis.

Argumentos	Critério geral: enunciados (explícitos ou implícitos) que validam ou explicam as proposições e os procedimentos utilizados para resolver uma tarefa.
	Adaptação à pesquisa: Justificativas matemáticas levadas em conta na utilização dos manipuláveis.
Relações	Critério geral: relações que articulam os objetos entre si, relacionando as representações e conectando ideias.
	Adaptação à pesquisa: Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições etc.) são relacionados entre si e com os manipuláveis
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial	Critério geral: representações, situações, explicações, dentre outros elementos na tarefa que em que podem levar a desajustes no processo de produção dos significados.
	Adaptação à pesquisa: Possíveis equívocos, ambiguidades e incompreensões que podem surgir pela maneira como os objetos primários e suas relações são propostas nas tarefas em que se utilizaram manipulativos.

Fonte: elaborado pelo autor.

O quadro acima será o principal guia para a análise dos dados desta pesquisa, os quais compreendem diferentes tarefas identificadas em livros didáticos dos anos iniciais, destacando os materiais manipuláveis como ferramentas pedagógicas. Nesse contexto, a dimensão epistêmica, até o momento discutida, se refere, especificamente, às tarefas que contemplam diferentes tipos de uso dos manipulativos. Não buscamos qualificar uma coleção em relação a outra, nem ao menos algum tipo de comparação, pois o foco está nos significados institucionais pretendidos pelas tarefas. Essa abordagem analítica de tarefas já foi adotada por outros pesquisadores supracitados (Godino; Fonte; Wilhelmi, 2006; Morales-Garcia, 2018; Morales; Navales 2021; Castillo; Burgos, 2023), os quais influenciaram em nossas escolhas metodológicas.

5.2.2 A representatividade epistêmica do Sistema de Numeração Decimal nos Anos Iniciais

Para realizarmos uma análise a partir da dimensão epistêmica, devemos ter clareza dos significados de referência, que, segundo Godino (2013), são construídos levando em consideração os diferentes contextos de uso dos objetos matemáticos, bem como as práticas operativas e discursivas associadas. Nesse sentido, nos amparamos nos significados de referência já delineados por outras pesquisas que também utilizaram o EOS para analisar a dimensão epistêmica do SND.

Levamos em conta os seguintes significados de referência para os números Naturais: significado da sequência numérica, significado cardinal, ordinal, simbólico, operacional e de medida (Alcalde; Pérez; Lorenzo, 2014; Cid; Godino; Batanero, 2003; Morales-Garcia, 2018; Rico, 2019). Além disso, incluímos mais dois significados de referência, considerando que, no cenário educacional brasileiro dos anos iniciais, também se trabalha o SND com os números na forma decimal (BNCC, 2018): forma decimal como extensão dos SND e decimais como frações da unidade (Konic; Godino, 2010). Destacamos que, para outras etapas da educação básica, outros significados poderiam ser incorporados, à medida que o estudo de um objeto se aprofunda. Mas, como nosso foco recai sobre os anos iniciais do Ensino Fundamental, delimitamos os oito contextos apresentados.

No caso dos números do SND como *sequência numérica*, temos as tarefas que envolvem completar um termo de uma sequência ou recitá-la. Os números, especialmente os Naturais, podem ser usados para atribuir uma ordem aos elementos de um conjunto, e, para isso, é necessário o conhecimento da sequência numérica dos termos (zero, um, dois, etc.) e dos símbolos (0, 1, 2, etc.), assim como dos ordenamentos organizados, caracterizando uma sequência numérica convencional (Castro; Molina, 2017). Um exemplo seria solicitar ao estudante que liste os números pares entre 1 e 10.

O significado *cardinal* envolve a contagem de elementos de um conjunto, designando um número que representa essa quantidade. Contar requer a noção de diferentes princípios dos Naturais, que, conforme explicam Cid, Godino e Batanero (2003), depende de alguns princípios: princípio da ordem (existe uma sequência certa de recitar os números); princípio de correspondência (cada elemento do conjunto submetido à contagem corresponde a uma palavra numérica distinta); princípio da irrelevância da contagem (a ordem em que os elementos do conjunto são contados não altera a cardinalidade); princípio ordinal-cardinal (o número atribuído ao último elemento contado se refere tanto à posição ordinal desse elemento quanto ao cardinal do conjunto). Ao solicitarmos que um estudante diga quantos palitinhos há sobre a mesa, estamos mobilizando o significado cardinal.

No contexto do uso *ordinal*, os números são empregados para estabelecer alguma ordem entre elementos de uma coleção. Para atribuir essa ordem aos objetos da coleção, são utilizadas palavras para nomear os números ordinais (primeiro, segundo, terceiro, etc.) ou símbolos (1º, 2º, 3º, etc.). Pedir para o estudante dizer qual posição ele ocupa da sua fileira de carteiras, na sala de aula, é um exemplo desse contexto.

No significado *operacional*, os números são usados para realizar operações aritméticas básicas, tais como: adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Essas operações podem ser

conduzidas tanto por meio dos algoritmos tradicionais como também por outras estratégias pessoais desenvolvidas pelo estudante, incluindo o cálculo mental (Ruiz, 2016). Como exemplo ilustrativo desse contexto, podemos solicitar para o estudante calcular o resultado de uma expressão numérica qualquer.

No âmbito do significado de *medida*, o conceito se manifesta em um contexto específico, vinculado a uma determinada grandeza. Uma vez selecionada essa grandeza, a avaliação do ‘tamanho’ do objeto ocorre com base no número de unidades contidas nele (Moreno; Gil; Montoro, 2015). Esse uso particular envolve determinar ou comparar objetos em relação a uma unidade de medida, abarcando aspectos como altura, distância, valor, peso, etc. A título de exemplo, consideremos um estudante que compara dois retângulos para determinar qual deles possui maior comprimento, sendo que a resposta, portanto, dependerá do número associado ao comprimento de cada figura.

Um significado menos comum, mas ainda presente nas práticas sociais, é o *simbólico*, no qual os números são manejados como códigos ou etiquetas para diferentes objetos (Rico *et al.*, 2008). São usos que extrapolam as regras do SND, geralmente, em fins extramatemáticos. Pensemos, por exemplo, nos números colocados nas camisetas de futebol, que servem apenas para codificar os jogadores. Nesse contexto, não há com objetivo de ordenar o mais ou menos importante, muito menos de indicar algum tipo de cardinalidade. Do mesmo modo, são dispostos os números em uma cartela de bingo, que estão ali para marcar as posições entre as linhas e colunas da cartela, para fins de sorteio aleatório. Os números, nesse significado, são, portanto, símbolos codificadores.

Quadro 5 - Representatividade epistêmica do SND

Significados de referência para o SND (anos iniciais)	Descrição
Sequência numérica	Uso da representação numérica para escrever uma sequência de números.
Cardinal	Associação do uso do número para indicar a quantidade de elementos em um conjunto finito.
Ordinal	Números utilizados para indicar a posição de um objeto em um conjunto ordenado.
Operacional	Uso dos números para realizar operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão).
Medida	Entre outros aspectos, o uso dos números para indicar a medida de algo.
Simbólico	Números são usados como etiquetas ou códigos para designar ou codificar objetos.

Fonte: elaborado pelo autor.

5.3 SISTEMATIZANDO OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, apresentamos uma síntese das etapas metodológicas adotadas para a realização da presente pesquisa. Detalhamos os procedimentos utilizados em cada uma das etapas, a fim de fornecer uma compreensão clara e abrangente do processo metodológico adotado. Podemos resumir os procedimentos em três etapas:

Primeira etapa – realizamos uma leitura abrangente dos livros do estudante, com o intuito de identificar a presença de manipulativos nas tarefas relacionadas ao SND. Esse procedimento permitiu o mapeamento dos diferentes tipos de manipuláveis e os contextos nos quais são utilizados. Essa etapa nos enquadra no nível vertical de análise dos livros didáticos (Charalambous *et al.*, 2010), uma vez que nosso interesse se centra em um tema específico das obras, e não nos capítulos em sua íntegra ou no livro como um todo.

Segunda etapa – reunimos as indicações de cada recurso manipulativo presente nas tarefas propostas pelos livros didáticos, visando compreender os significados institucionais do SND mobilizados por elas. Optamos por selecionar exemplos representativos do uso dos manipulativos a fim de evitar redundâncias e saturações, considerando que muitos deles podem se repetir nas diferentes coleções. Essas escolhas de tarefas, representadas pelos extratos dos LD, constituem os dados finais para análise.

Terceira etapa – procedemos à análise de cada um dos casos selecionados, utilizando a abordagem da dimensão epistêmica. Para cada extrato do livro didático, a análise compreendeu, primeiramente, a identificação do significado pretendido com base na representatividade epistêmica do SND (Quadro 5). Em seguida, procedemos à narração da tarefa presente no extrato selecionado, buscando detalhar como o livro espera que o estudante execute a tarefa. Para tanto, levaremos em conta também as orientações contidas no manual do professor para aquela atividade específica. Essa descrição é importante porque implica em nos colocarmos no lugar do sujeito para o qual aquele tipo de utilização de manipulativo foi concebido, abrangendo, assim, o aspecto ontológico do EOS. Nesse mesmo momento, identificaremos os objetos primários que emergem daquela prática almejada pelo livro. A partir disso, temos condições para a análise dos componentes da dimensão epistêmica (Quadro 4) e, por fim, também passamos a ter condições para a reflexão sobre possíveis conflitos semióticos, a fim de pensarmos em sugestões de melhorias.

É importante destacar que não se pretende atribuir juízo de valor às coleções analisadas, tampouco compará-las ou avaliá-las de forma global. Por esse motivo, não se considera problemático o fato de que cada coleção contenha um número distinto de tarefas selecionadas

ou que nem todos os significados institucionais estejam presentes em todas elas. A análise da dimensão epistêmica está restrita à forma como os materiais manipulativos são indicados para o ensino do SND. Ainda que algumas coleções apresentem maior ou menor ocorrência de conflitos semióticos, o foco da investigação recai sobre os tipos de usos propostos para os manipulativos, e não sobre a coleção ou o autor em si.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Iniciamos a presente seção introduzindo as coleções de livros didáticos que fazem parte do escopo da pesquisa e detalhando aspectos gerais de cada obra. Em seguida, realizamos a primeira etapa da leitura abrangente em cada obra para uma análise global dos manipuláveis. Com isso, abordamos os extratos representativos dos diferentes tipos de uso de cada material para analisar os dados com a ferramenta da dimensão epistêmica do EOS e tecer as discussões.

6.1 APRESENTANDO AS COLEÇÕES

Com o intuito de justificar a escolha das coleções que fazem parte do escopo desta pesquisa, esclarecemos que a nossa decisão se volta ao impacto de cada coleção no cenário brasileiro, a partir da quantidade de vendas. As coleções iniciais tomadas como fonte de dados correspondem às cinco mais vendidas do PNLD (2023-2026)¹³, dispostas no quadro a seguir:

Quadro 6 - As cinco coleções de livros didáticos de matemática submetidos ao edital do PNLD (2023-2026) das editoras com mais vendas para os Anos Iniciais

Nome da coleção	Editora	Edição/Ano
A Conquista da Matemática	FDT	1ª Edição, 2021
Ápis Mais Matemática	Ática	1ª Edição, 2021
Bem-me-quer Mais Matemática	Editora do Brasil	7ª Edição, 2021
Aprender Juntos Matemática	SM	1ª Edição, 2021
Buriti Mais Matemática	Moderna	2ª Edição, 2021

Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme já mencionado no capítulo 4, esses livros foram coletados em escolas públicas das cidades de Florianópolis e Gaspar, que gentilmente cederam esses exemplares. Estes livros foram enviados para as escolas para os professores conhecessem, e portanto, são anteriores ao processo de análise do PNLD. As versões que analisados é a que contém o chamado ‘manual do professor’, que popularmente é conhecido pelo formato U. Esses livros têm todo o conteúdo dos livros dos estudantes e redor das páginas, as orientações didáticas que os autores propõem aos docentes.

A partir de uma leitura abrangente de cada coleção, identificamos os diferentes tipos de manipulativos indicados nos volumes para auxiliar no ensino do SND. Três deles estão

¹³ Informações recebidas em março de 2023 diretamente da Coordenação Geral dos Programas do Livro (FNDE/MEC). Os dados também podem ser pesquisados a partir do *link* disponível em: <https://www.gov.br/fnde/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 31 jan. 24.

amplamente presentes nas compilações: os Blocos base dez (BBD), o ábaco e o “dinheirinho” (cédulas de dinheiro fictício). Indubitavelmente, representam a maior parte dos casos de manipulativos usados no ensino do SND, de modo que concentramos a maior parte de nossas reflexões nesses elementos. Além disso, com menor frequência, há outros materiais presentes apenas em algumas coleções, como as Fichas verdes, que aparecem especificamente na coleção *Ápis Mais Matemática*. Há também algumas indicações ao uso de palitinhos, tampinhas e outros materiais do cotidiano, principalmente nas coleções *A Conquista da Matemática* e *Bem-me-quer Mais Matemática*. Apesar de terem uma recorrência muito menor nas obras, são manipulativos de baixo custo, o que facilitaria sua aplicação em escolas com recursos mais restritos.

Tomando em consideração as pesquisas de Silveira (2014, 2016, 2018, 2021) sobre os volumes das coleções do PNLD (2016-2018), notamos algumas diferenças e semelhanças acerca dos tipos de manipulativos identificados. Em relação à semelhança, o autor também reconheceu a predominância dos BBD, ábaco e dinheirinho, que se repetiu novamente. Por outro lado, ao observarmos as coleções analisadas por ele, identificamos a presença de outros tipos de manipuláveis, como as Fichas Sobrepostas e os ‘Amarradinhos’ de palito, que não estão presentes nas coleções atuais. Isso mostra que seus autores têm autonomia para escolher quais materiais serão indicados para ensinar o SND, o que desvela também materiais que acabam se tornando clássicos nas obras. No Quadro 7, apresentamos os tipos de manipulativos identificados em cada coleção (do 1º ao 5º ano), mesmo que as orientações do manual do professor também contribuam na etapa da análise dos dados:

Quadro 7 - Os manipulativos nas cinco coleções de livros didáticos

	A Conquista da Matemática	Ápis Mais Matemática	Bem-me-quer Mais Matemática	Aprender Juntos Matemática	Buriti Mais Matemática
1º ano	Palitinhos BBD Ábaco Dinheirinho	BBD Dinheirinho Barrinhas Palitos	Tampinhas Dinheirinho	BBD Dinheirinho	Dinheirinho
2º ano	Palitinhos BBD Dinheirinho	BBD Fichas verdes	Palitinhos BBD Dinheirinho	BBD Ábaco Dinheirinho	BBD Ábaco Dinheirinho
3º ano	BBD Dinheirinho	BBD Fichas verdes Dinheirinho	Palitinhos BBD Dinheirinho	BBD Ábaco Dinheirinho	BBD Ábaco Dinheirinho
4º ano	BBD Ábaco	BBD Fichas verdes Dinheirinho	BBD Ábaco Dinheirinho	BBD Ábaco Dinheirinho	Ábaco Dinheirinho
5º ano	nenhum	BBD	BBD	BBD	BBD

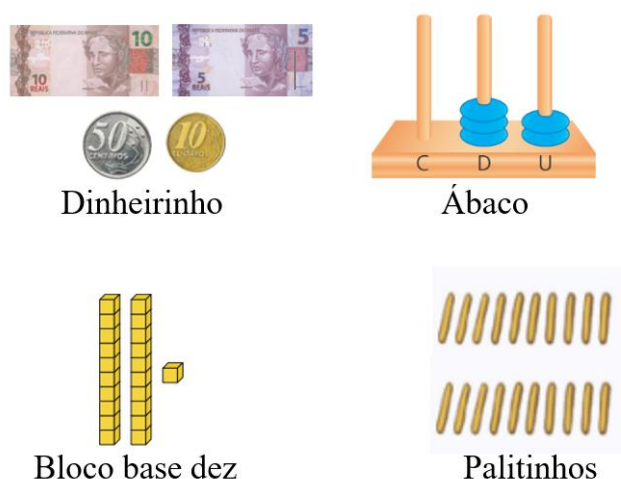
		Fichas verdes Dinheirinho	Ábaco	Ábaco Dinheirinho	Dinheirinho
--	--	------------------------------	-------	----------------------	-------------

Fonte: elaborado pelo autor.

Na sequência, complementamos o Quadro 7, ao descrevermos as primeiras impressões de cada coleção:

A Conquista da Matemática: o primeiro volume dessa coleção é o que apresenta uma maior diversidade de manipuláveis, usados, inicialmente, para representar números em si e, gradativamente, para iniciar algumas propriedades do SND, como o número sucessor, o antecessor e os agrupamentos de dez. No segundo volume, a principal mudança é a ausência do ábaco nas atividades, mesmo nas tarefas sobre valor posicional. Já no volume do 3º ano, os BBD e o dinheirinho são os únicos indicados nas tarefas, estando amplamente presentes. No 4º ano, o ábaco retorna apenas em momentos pontuais para se trabalhar com as ordens da classe simples, embora sejam os BBD que novamente se destacam ao longo da obra. O último volume, do 5º ano, não apresenta qualquer indicação do uso de manipulável, mesmo que, no manual do professor, alguns materiais sejam citados. Já no livro do estudante, não há a presença deles em qualquer uma das tarefas. Vale destacar que nenhum desses volumes dispõe de algum tipo de representação de manipulativo para um possível recorte.

Figura 10 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção A Conquista da Matemática

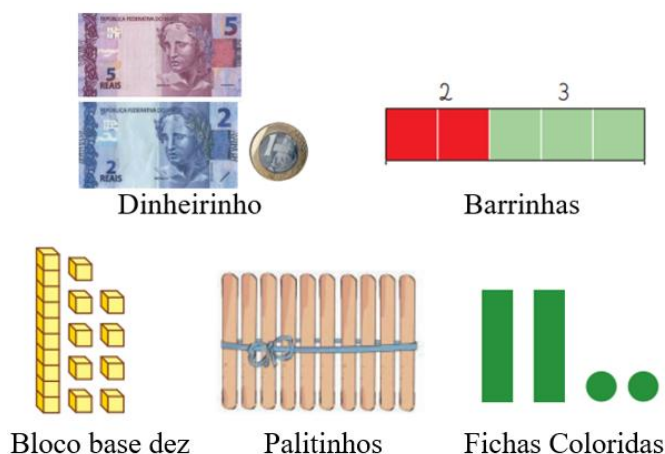


Fonte: extratos da coleção A Conquista da Matemática (2021).

Ápis Mais Matemática: o volume do 1º ano contém indicações de uso dos BBD, dinheirinho, barrinhas coloridas (onde cada cor se relaciona a um número) e, em alguns casos pontuais, palitinhos. Já no 2º ano há a presença dos BBD e a introdução a um material específico dessa coleção, chamado de Fichas coloridas. Esse manipulativo é formado por três tipos de

fichas que representam a unidade, a dezena e a centena (valores convencionados). Para os demais volumes, do 3º, 4º e 5º ano, a coleção indica os BBD, o dinheirinho e as Fichas coloridas durante as tarefas do SND. Uma diferença dessa coleção é a inexistência da indicação do uso do ábaco nos livros do estudante, que sequer é mencionado no ensino do valor posicional. Em relação aos materiais de apoio para o recorte, há o dinheirinho (nos quatro primeiros volumes), as Fichas coloridas (no segundo e terceiro) e os BBD (apenas no primeiro).

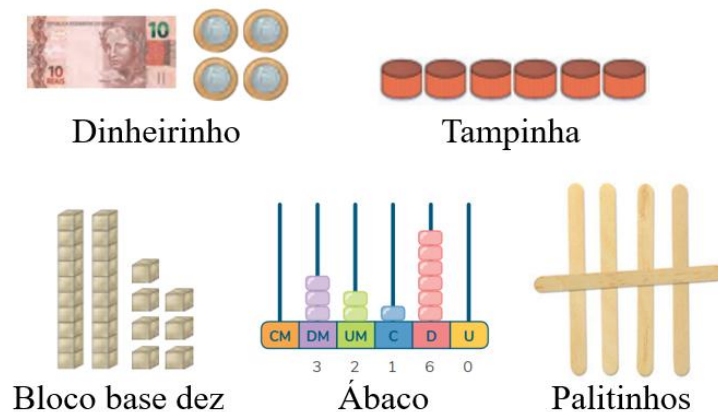
Figura 11 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção Ápis Mais Matemática



Fonte: extratos da coleção Ápis Mais Matemática (2021).

Bem-me-quer Mais Matemática: no primeiro volume dessa coleção, a presença dos manipulativos é escassa, embora sejam indicados, em algum momento, o dinheirinho e as tampinhas. No caso do 2º ano, há também a menção aos palitinhos e a apresentação dos BBD e do dinheirinho, que são usados com recorrência. Já no volume do 3º ano, os BBD predominam, com a continuidade do uso do dinheirinho, enquanto que, no 4º ano, é introduzido o ábaco aos estudantes, incluindo versões feitas com material reciclável. O ábaco segue até o 5º ano, junto com os BBD, enquanto o dinheirinho deixa de ser usado no último volume. Ao longo dos quatro primeiros volumes, essa coleção disponibiliza o dinheirinho de papel para recorte, sendo este o único recurso presente na seção de material de apoio ao estudante.

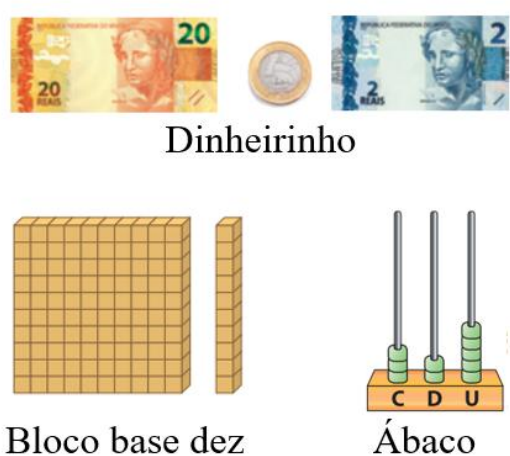
Figura 12 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção Bem-me-quer Mais Matemática



Fonte: extratos da coleção Bem-me-quer Mais Matemática (2021).

Aprender Juntos Matemática: o primeiro material indicado nessa coleção são os BBD, no volume do 1º ano. O dinheirinho também aparece de forma tímida em poucos casos. No 2º ano, dá-se continuidade ao dinheirinho, mas com ênfase nos BBD e a inserção do ábaco. No 3º e 4º ano, há o uso dos mesmos manipulativos, enquanto que, no 5º ano, eles entram em desuso, estando presentes em poucos casos. Diferentes das coleções anteriores, esta não faz uso de indicações de materiais do cotidiano como tampinhas ou palitinhos. Sobre as possibilidades de recorte no material de apoio ao estudante, o único caso são as representações das peças do BDD nos livros do 2º e 3º ano.

Figura 13 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção Aprender Juntos

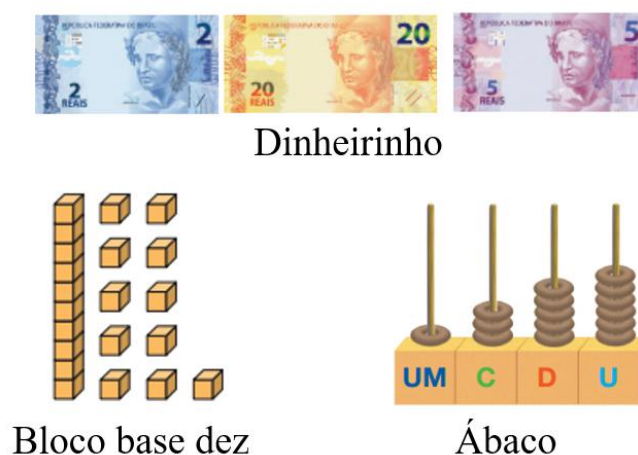


Fonte: extratos da coleção Aprender Juntos (2021).

Buriti Mais Matemática: das cinco coleções, esta é que utiliza menos manipulativos ao longo dos volumes. No 1º ano, há apenas o dinheirinho usado para representar quantidades, sendo o material mais presente em toda a série. Os BBD e o ábaco são apresentados no 2º ano

e, no geral, junto com o dinheirinho, seguem, no 3º ano, de forma menos frequente, chegando ao 4º ano. Já no último volume da coleção, apenas o dinheirinho é indicado. Assim como na coleção *Aprender Juntos*, não há, no livro do estudante, tarefas com tampinhas ou palitinhos, nem outros materiais além dos três já mencionados. Em relação aos materiais de apoio ao estudante, o único caso ocorre no livro do 1º ano, que dispõe de representações numismáticas, de cédulas e moedas, para recorte.

Figura 14 - Diferentes manipulativos ao longo da coleção Buriti Mais Matemática



Fonte: extratos da coleção Buriti Mais Matemática (2021).

Considerando que os três materiais mais presentes nas coleções foram os Blocos base dez, o ábaco e o dinheirinho, as próximas análises foram divididas segundo esses manipulativos. Optamos em fazer essa organização, pois o ponto disparador da pesquisa foi o debate sobre os manipulativos e é partir deles que conectamos o SND e o referencial da dimensão epistêmica. Para cada material apresentamos uma seção identificando os significados institucionais pretendidos e os conflitos semióticos em potencial (quando houver). Feito isso, apresentaremos também exemplos de outros materiais menos presentes, como as Fichas verdes, os palitinhos ou as tampinhas.

6.2 ANÁLISE DAS INDICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES DOS BLOCOS BASE DEZ

Nesta seção, apresentamos as diferentes tarefas que representam o uso dos BBD em situações que envolvem os seis significados institucionais tomados de referência: o cardinal (contagem dos elementos de um conjunto), o operacional (agir nas diferentes operações básicas), o ordinal (posição relativa de um elemento em um conjunto), a medida (números para

indicar a medida de algo), a sequência (construir ou completar sequências numéricas) e o simbólico (etiquetas ou códigos para designar ou codificar objetos).

Por se tratar de um material didaticamente construído, os BBD são um tipo de manipulável didaticamente elaborado para ensinar conceitos específicos, possuindo restrições inerentes a todo material manipulável. Apesar disso, esse fator não compromete a pesquisa, pois auxilia na compreensão dos significados que contribuem para que cada material possa ou não oferecer suporte ao ensino do SND.

Na subseção seguinte, apresentaremos os casos separados de acordo com cada um dos significados, mas sem criar novas subseções, por se tratar do mesmo manipulativo. Por fim, faremos uma síntese das análises sobre os BBD para caracterizarem a representatividade epistêmica que ele apresenta nos volumes, além de seus conflitos e sugestões de melhoria. Essa organização de escrita será igualmente reproduzida nos demais manipuláveis.

6.2.1 Tarefas representativas sobre o uso dos BBD nos diferentes significados de referência do SND

Significado Cardinal

Narração da tarefa: essa tarefa pede que o estudante observe as representações dos BBD e registre no QVL o valor representado, ou seja, a cardinalidade dos conjuntos. Antes da atividade, há um exemplo anterior resolvido apresentado pelo livro como amostra. A tarefa não apresenta nenhuma contextualização, salvo um comando: “registre as quantidades nos quadros”. Vejamos:

Figura 15 - Tarefa que usa os BBD no significado cardinal na coleção Bem-me-quer Mais Matemática

CENTENAS, DEZENAS E UNIDADES COM O MATERIAL DOURADO

1 Observe como registramos as quantidades abaixo.

a)

C	D	U
1	3	5

b)

C	D	U
3	1	5

c)

C	D	U
2	0	6

d)

C	D	U
1	8	0

ATIVIDADES

1 Registre as quantidades nos quadros.

a)

C	D	U
1	2	4

b)

C	D	U
2	4	1

c)

C	D	U
4	1	2

AVALIANDO A APRENDIZAGEM

Você pode utilizar a **atividade 1** desta página como mais um instrumento para avaliar se os alunos são capazes de fazer o registro de contagens.

É importante destacar que somente deverão ser propostas as atividades de registro de contagem no livro após os alunos experimentarem várias situações de contagem com materiais concretos.

Fonte: extratos da coleção Bem-me-quer Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 51).

Quadro 8 - Análise da tarefa da Figura 15

Componentes		Indicadores
OBJETOS	Situação-problema	Propõe ao estudante, baseado em um exemplo anterior, que observe as representações dos BBD e registre ao lado a quantidade representada. Esse registro deverá ser feito mediante o uso de símbolos indo-arábicos organizados em um QVL.
	Linguagem	Representações das peças dos BBD; uso das letras U, D e C referenciando Unidade, Dezena e Centena; registro no QVL com algarismos.
	Definição	Centenas, dezenas e unidades. Números que os cubinhos, as barrinhas e as placas dos BBD representam; valor posicional na representação simbólica.

P R I M Á R I O S	Procedimentos	Identificar a quantidade de unidades, dezenas e centenas representadas nos BBD. Registrar a quantidade correspondente no quadro posicional (C, D e U).
	Proposições	O algarismo que representa a quantidade de placas (centenas) dos BBD deve ser colocado na coluna C do QVL. E, respectivamente, a quantidade de barrinhas nas dezenas (D) e os cubinhos nas unidades (U).
	Argumentos	Cada peça dos BBD tem relação com uma posição no registro simbólico no QVL.
Relações		Esse tipo de tarefa é simples (embora muito recorrente nas coleções) e apresenta poucas relações. O destaque é relacionar as representações pictóricas dos BBD com os valores numéricos simbólicos.
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial		A tarefa não apresenta um conflito em relação ao significado cardinal pretendido, que é matematicamente correto. Todavia, existem aspectos em relação à natureza dos BBD que podem ser repensados para explorar seu potencial ao longo do livro que, com raras exceções, organiza as representações dos BBD sempre de forma decrescente (centena, dezena e unidade). O material pode representar as quantidades com ordens diferentes das peças, sem alterar a forma do registro simbólico no QVL.

Fonte: elaborado pelo autor.

Embora esse caso em específico envolva números com três ordens, esse mesmo formato de tarefa é usado ao longo dos volumes para registrar quantidades com menos ou mais ordens. Essa tarefa é um caso bem representativo acerca da indicação do uso dos BBD, presente não apenas na coleção *Bem-me-quer Mais Matemática*, mas nas demais analisadas. Nessa modalidade de uso, não há nenhum erro ou ambiguidade do ponto de vista matemático, pois dispõe de um valor agregado cujo valor deve ser reconhecido pelos estudantes, uma vez que essas tarefas surgem depois do material já ter sido apresentado, geralmente por meio de um exemplo anterior resolvido.

Um ponto que precisa ser problematizado, mesmo que não configure um erro matemático, é o modo como todas as coleções analisadas (quase que unanimemente) mostram as representações dos BBD da peça, por meio de um valor maior para o menor. Obviamente, no livro, isso ocorre para tornar mais ‘fácil’ o registro simbólico¹⁴ no QVL por parte do estudante. Os BBD podem contribuir na visualização e manipulação de quantidades e, principalmente, na compreensão dos agrupamentos e trocas de dez (Grando, 2015). Diferentemente de um QVL ou de um ábaco, que têm posições de valor relativo, as peças dos BBD podem ser misturadas sem alterar o número a ser registrado. Ou seja, os BBD não têm o

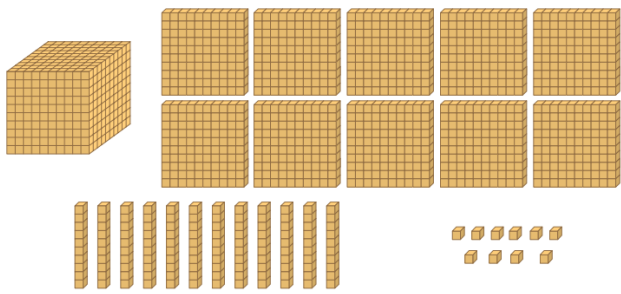
¹⁴ Nessa tese, o termo registro simbólico (ou representação simbólica) de um número se refere aos números representados pelos símbolos indo-arábicos.

objetivo de ser um material posicional, pois se trata de um manipulativo da categoria “didaticamente construído” (conforme explicado na seção 2.2), o que significa dizer que foi cuidadosamente pensado pelos educadores para ensinar uma certa matemática que, no caso, não incluiu o valor posicional. Esse material pode ser usado também espalhamos suas peças sobre a mesa e fazer os agrupamentos livremente.

Não entendemos isso como um conflito semiótico, uma vez que não existe erro matemática ou ambiguidade em usá-lo seguindo a ordem posicional. Como sugestão, as orientações do professor podem sugerir começar com as peças desorganizadas e depois, ver como os alunos a organizam. Mas como nossa pesquisa não é analisando práticas em sala de aula, do ponto de visto epistêmico, a tarefa não possui conflitos. Um exemplo de outro modo de apresentar os BBD constam na coleção *Aprender Juntos*:

Figura 16 - Outra forma de organizar as representações dos BBD

4 Observe as peças do Material Dourado representadas abaixo.



a. Contorne as peças que você usaria para compor o número 1857.

b. Complete as lacunas de acordo com as peças que você contornou no item anterior.

_____ + _____ + _____ + _____ = 1857

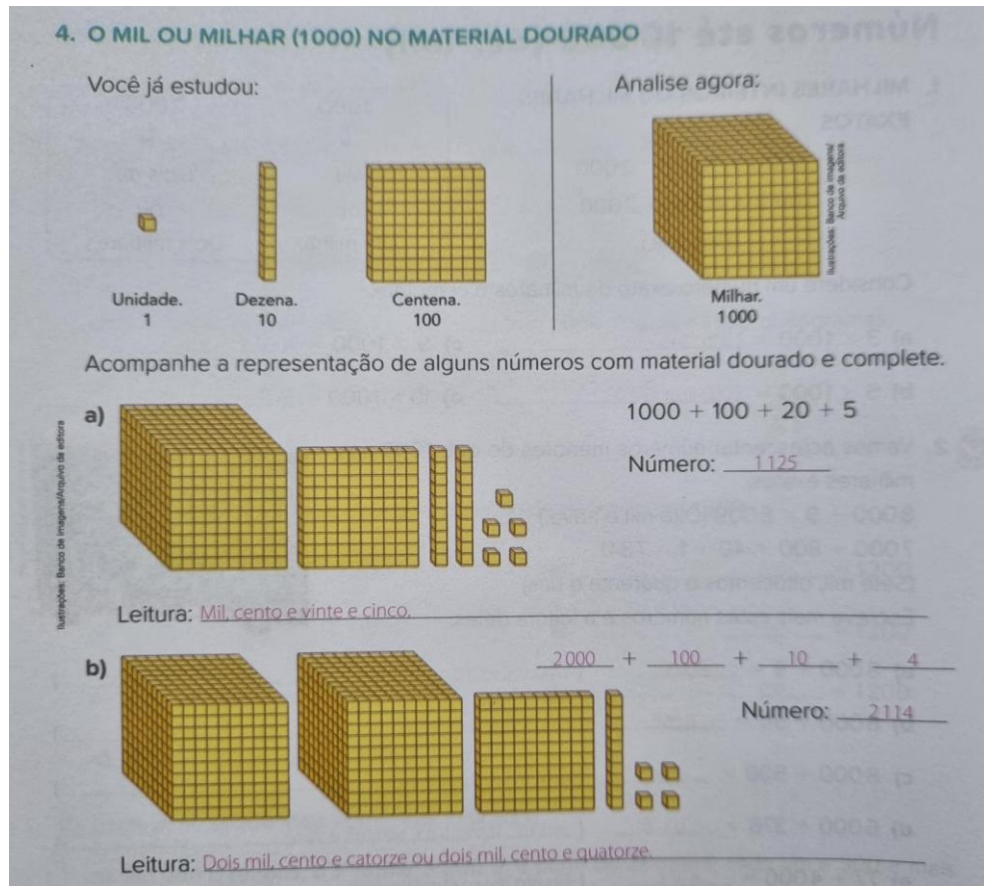
Fonte: Aprender Juntos Matemática, 3º ano (2021, p. 145).

Nesse exemplo, as representações das peças dos BBD são organizadas de um modo não linear, afim de ocupar “duas linhas”. Vemos também que a primeira peça é a de valor maior e que segue decrescendo, embora aqui não haja o registro sendo feito em um QVL, já que a tarefa usa o material para outro fim. Ele inverte a proposta, indicando um número no registro simbólico (1857), e solicita ao estudante que circule as peças que representem esse valor nos BBD. Se quiser, o estudante pode começar circulando a peça menor e depois a maior, ou vice-versa, fugindo de uma relação direta com a questão posicional. Ainda que esse modo de indicação possa ser melhorado, é o mais próximo que as coleções analisadas fazem uso dos BBD sem seguir uma questão de ordem decrescente.

A seguir, apresentamos um caso de outra coleção, que também trabalha o significado cardinal e que tem uma dimensão epistêmica muito similar à tarefa da Figura 17. Por isso, não

produzimos um novo quadro de análise, embora o próximo caso admita alguns detalhes diferentes que gostaríamos de abordar.

Figura 17 - Outra forma de indicar os BBD para introduzir a ordem da unidade de milhar presente na coleção Ápis Mais Matemática



Fonte: Ápis Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 112).

Essa tarefa foi utilizada na coleção Ápis Mais Matemática para introduzir a peça da unidade de milhar do BDD. Ela relembra os estudantes as peças anteriores e define o cubo grande como o milhar para, em seguida, solicitar que ele responda qual número as peças representam. Nessa coleção, as representações dos BDD estão novamente na ordem decrescente. Mas o ponto a seguir discutido aqui é outro: a ausência de uma explicitação de como a peça da unidade de milhar é formada.

Ao analisarmos o cubo do milhar na figura anterior, podemos observar diretamente três faces do cubo, cada uma com cem unidades, o que levaria o estudante a visualizar o número 300. Por outro lado, as orientações do manual do professor alertam a importância de mostrar o material físico na escola para o estudante manusear a peça. Nesse caso, o cubo é visto como um

todo, podendo ser visualizado em 6 faces, que leva a uma percepção imediata de 600 unidades¹⁵. O estudo de Nurnberger-Haag (2018) também alerta sobre a preocupação acerca desse tipo de erro, produzido pela visualização do estudante. Segundo a autora, “tendo em vista que apenas os 600 cubinhos em cada face do cubo de milhar são visíveis, os estudantes podem não entender que esse cubo contém efetivamente 1000” (Nurnberger-Haag, 2018, p. 219, tradução nossa).

Esse conflito também pode ser elucidado do ponto de vista semiótico, uma vez que, tendo apenas a experiência de visualizar a representação dos BBD no livro, sua função semiótica (processo de atribuição de significados dos signos) para o estudante pode ser diferente do que havia sido pensado pelo autor (Parra-Urrea; Pino-Fan, 2017). Na perspectiva do EOS, é preciso compreender como os sujeitos de aprendizagem criam significado das representações, ao contrário de assumir que eles atribuem sempre o mesmo significado que o professor ou o autor. Vale destacar que em nenhuma das cinco coleções há a menção desse conflito de significado em potencial.

Desse modo, entendemos que o conflito independe de usar os BBD fisicamente ou apenas sua representação gráfica nos livros. Uma nova abordagem de seu uso deve levar em consideração essas possíveis incompreensões dos estudantes. E um modo de evitar esses potenciais conflitos é o manual do professor, que deve orientar e mostrar ao estudante a constituição da peça do milhar, de empilhar 10 placas das centenas para formar um cubo. Isso facilitaria a compreensão de que a quantidade de cubinhos da unidade que forma o milhar está além da quantidade que as faces permitem ver. E ainda, o livro do aluno poderia trazer essa explicação sobre esse detalhe no momento de introduzir a unidade do milhar.

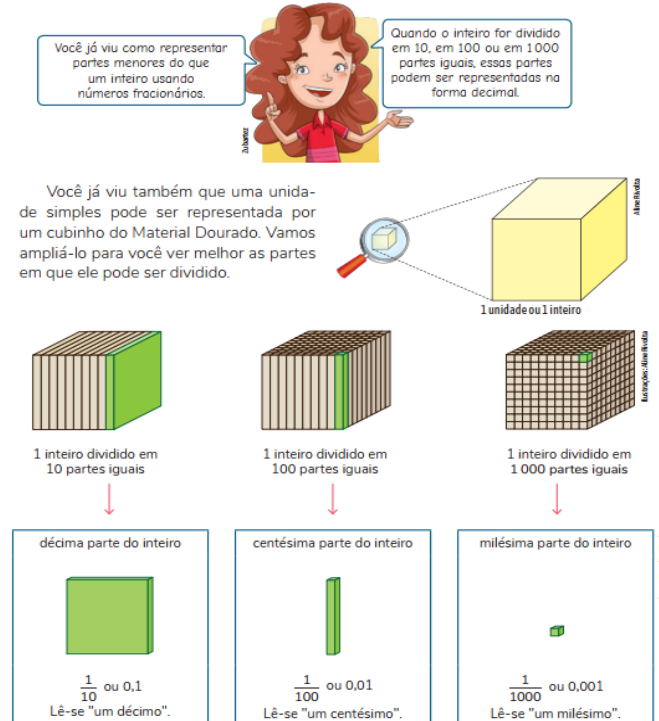
A seguir, para finalizar os casos representativos do significado cardinal, apresentamos a indicação de uso dos BBD para o ensino da representação de número racional na forma decimal. Antes da tarefa em si, existe uma explicação do livro em relação aos BBD:

¹⁵ No entanto, compreendemos que não existe 600 unidades, visto que temos que descontar as arestas. Mas pensando num contexto de anos iniciais, dificilmente uma criança teria esse entendimento.

Figura 18 - Explicação do uso dos BBD para números racionais na forma decimal

DIVIDINDO UM NÚMERO EM 10, 100 OU 1 000 PARTES IGUAIS

Os números decimais são outra forma de representar números fracionários.



Fonte: Bem-me-quer Mais Matemática, 5º ano (2021, p. 153).

Figura 19 - Tarefa que usa os BBD para números racionais não inteiros

Veja ao lado como um número decimal representado com Material Dourado pode ser escrito com algarismos e por extenso:

com algarismos 2,473
por extenso dois inteiros e quatrocentos e setenta e três milésimos

2 Agora escreva os números representados a seguir nessas duas formas.

a)		0,569	→	quinhentos e sessenta e nove milésimos
b)		5,005	→	cinco inteiros e cinco milésimos
c)		3,406	→	três inteiros e quatrocentos e seis milésimos
d)		0,305	→	trezentos e cinco milésimos
e)		0,009	→	nove milésimos
f)		1,034	→	um inteiro e trinta e quatro milésimos

Orientações

Nesta página, inicia-se o trabalho de comparação entre números decimais com milésimos (EF05MA05).

Os alunos poderão usar as peças do Material Dourado para representar os números do quadro, os da **atividade 2** e outros propostos por você ou por eles (EF05MA02).

Fonte: Bem-me-quer Mais Matemática, 5º ano (2021, p. 164).

Narração da tarefa: essa tarefa trabalha com números decimais usando uma representação pictórica que faz referência às peças dos BBD, com cores e aspectos um pouco diferentes. Primeiro, apresenta um exemplo de como um número racional não inteiro na forma decimal (2,473) pode ser representado com as peças dos BBD, respectivamente, 2 cubos grandes, 4 barras, 7 barrinhas e 3 cubinhos. A tarefa em si consiste em preencher um quadro onde uma coluna apresenta as representações dos BBD, enquanto que na outra o estudante deve registrar simbolicamente, e por extenso, os números de cada linha.

Quadro 9 - Análise da tarefa da Figura 19

Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	A partir de uma explicação anterior sobre os novos significados para as peças dos BBD, a tarefa solicita ao estudante observar as representações do material e registrá-lo por escrito e simbolicamente.
	Linguagem	Representação que fazem referência as peças dos BBD; registro simbólico e em linguagem natural; termos como ‘décimo’, ‘centésimo’ e ‘milésimo’; forma decimal.
	Definição	Dividindo o inteiro em dez partes iguais obtemos dez décimos; em cem partes iguais, cem centésimos; mil partes iguais, mil milésimos. Uso da vírgula no numeral indica a separação da parte inteira e da parte decimal; valor posicional das ordens decimais.
	Procedimentos	Observar a disposição das peças dos BBD representadas e indicar o número decimal correspondente. Em seguida, escrever como se lê.
	Proposições	A partir desse novo uso dos BBD, temos: cada cubinho agora representa 0,001, a barra representa 0,01, a placa representa 0,10 e o cubo representa o inteiro.
	Argumentos	O SND se baseia em agrupamentos e divisões sucessivas de dez, e esse princípio se estende para quantidades não inteiras. Os submúltiplos do inteiro são posicionados à direita da vírgula.
Relações		A tarefa relaciona o registro simbólico e escrito de números na forma decimal com sua representação pelos BBD. Neste caso, os BBD são representados por peças com cores distintas e diferentes do original apresentado em tarefas anteriores da coleção.
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial		Para compreender a tarefa, o estudante precisa associar cada peça dos BBD a um valor específico (1;0,1; 0,01; e 0,001). Mas nos livros anteriores (inclusive no livro do 5º ano) os BBD eram utilizados em atividades de números inteiros, onde as peças representavam unidades, dezenas, centenas e o milhar. Ressignificar o valor das peças abre espaço para confusões e ambiguidades de significado.

Fonte: elaborado pelo autor.

Utilizar os BBD para ensinar os números da forma decimal acontece não somente na coleção *Bem-me-quer Mais Matemática*, mas também na coleção *A Conquista da Matemática*. Embora não seja errado comparar matematicamente o bloco do milhar com mil milésimo, uma vez que nele cabem mil cubinhos, é preciso analisá-lo do ponto de vista didático. No caso da coleção *Bem-me-quer*, por exemplo, os BBD são usados apenas até o 4º ano para ilustrar números naturais em diversas tarefas sobre o SND. Ao adentrar o 5º ano e aprofundar a forma decimal de números não inteiros, muda-se o valor que cada peça dos BBD representa: o cubinho passa a ser um milésimo, a barra um centésimo, a centena um décimo e o cubo grande um inteiro.

Esse modo de usar os BBD tem potencial para gerar conflitos semióticos por, ao menos, dois motivos: a mudança de sentido atribuído às peças e a percepção visual enganosa. Os BBD, conforme já mencionado, vem sendo usado para representar e operar com os Naturais, até a ordem do milhar. O sentido de suas peças é reforçado ao longo do tempo, criando uma associação fixa entre a forma das peças e seu valor. Quando ele é reutilizado para representar decimais, esses valores precisam ser “esquecidos”, reinterpretados. Essa mudança pode confundir o estudante, pois ele precisa “desaprender” temporariamente o significado anterior para adotar um novo, o que exige um ajuste cognitivo significativo.

A questão da percepção visual enganosa ocorre, pois, ao observar os BBD (principalmente o físico), o estudante pode ser confundido pelo seguinte motivo: a barrinha, já conhecida por ele como dezena, por exemplo, que visualmente contém 10 cubinhos pode levá-lo a associá-la a um décimo (0,1), uma vez que o “décimo” remete intuitivamente à ideia de 10 partes. No entanto, no contexto decimal, ela representa 0,01, ou seja, um centésimo. Em outras palavras, a peça que era chamada até nesse momento de dezena, agora, ao invés de se tornar um décimo, se torna um centésimo. A placa, que contém 100 cubinhos, pode levar o aluno a pensar em milésimos (1.000 partes), já que o número 100 em inteiros se relaciona ao número 1.000 por agrupamentos no SND. Porém, a placa no contexto decimal, vale 0,1, ou seja, um décimo. Silveira (2021) alerta sobre esse uso de materiais para fins diferentes de sua origem e seus possíveis equívocos:

Muitas vezes, diante da possibilidade de utilizar algum tipo de material manipulativo, formadores de professores e professores regentes, baseados ou não em autores de matérias de formação de professores e/ou livros didáticos, acabam por adotar manipulativos para uma função diferente daquela em que seriam indicados. Nesse caso um material serve a um propósito, mas é utilizado para outro para o qual pode causar algum tipo de confusão (Silveira, 2021, p. 9).

Por essas razões, os BBD não deveria ser indicado nas obras como recurso didático para se trabalhar com números na forma decimal. O autor pode escolher outro material para esse fim, evitando, assim, os dois problemas anteriores que potencialmente levam a conflitos semióticos de significado. Finalizando esse exemplo, iniciaremos, a seguir, a análise dos casos representativos que usam representações dos BBD para trabalhar o significado operacional dos números no SND.

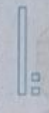
Significado Operacional

A primeira tarefa que apresentamos utiliza representações dos BBD para auxiliar a compreensão dos agrupamentos e as trocas de dez:

Narração da tarefa: essa tarefa dispõe de um enunciado que solicita ao estudante fazer as trocas possíveis em duas situações distintas, nas quais há representações gráficas das peças dos BBD, especificamente em dois conjuntos de cubinhos. Anterior a essa tarefa, o LD explica que, nos BBD, a peça da barrinha é formada por 10 cubinhos, fator importante para que não haja dúvidas do estudante acerca do funcionamento do material. Para iniciar a resolução, ele precisa ter conhecimento que uma barrinha vale o mesmo que os 10 cubinhos, ou seja, a cada 10 unidades (cubinhos), formamos uma dezena (barrinha). No item (a), portanto, o estudante deve agrupar 10 cubinhos e, com isso, desenhar, ao lado da “representação somente com cubinhos”, uma barrinha que represente essa primeira dezena agrupada. Como os dois cubinhos restantes não formam uma dezena completa, não devem ser agrupados dessa forma. Por isso, tais cubinhos são redesenhados ao lado da barrinha. Desse modo, o estudante pode preencher as lacunas, indicando que os 12 cubinhos correspondem a “1 barra” e “2 cubinhos”. A tarefa do item (b) é similar, com a diferença de apresentar dois agrupamentos de 10 cubinhos, obtendo 2 barrinhas ao final, com 3 cubinhos restantes.

Figura 20 - Tarefa que usa os BBD em situações de agrupamento

3 Desenhe as barras e os cubinhos que ficarão depois de fazer todas as trocas possíveis. Em seguida, complete as frases.

a) Representação somente com cubinhos:  troca  Representação após as trocas:

12 cubinhos correspondem a 1 barra e 2 cubinhos

b) Representação somente com cubinhos:  troca  Representação após as trocas:

23 cubinhos correspondem a 2 barras e 3 cubinhos

Orientações

Estimule os alunos a fazer as representações dos números da **atividade 3** utilizando as peças do Material Dourado ou com tiras e quadradinhos – material sugerido na página 135 deste manual para ser reproduzido, caso sua escola não possua Material Dourado.

Proponha também que façam trocas com números fornecidos por você.

Fonte: Bem-me-quer Mais Matemática, 2º ano (2021, p. 145)

Quadro 10 - Análise da dimensão epistêmica da tarefa da Figura 20

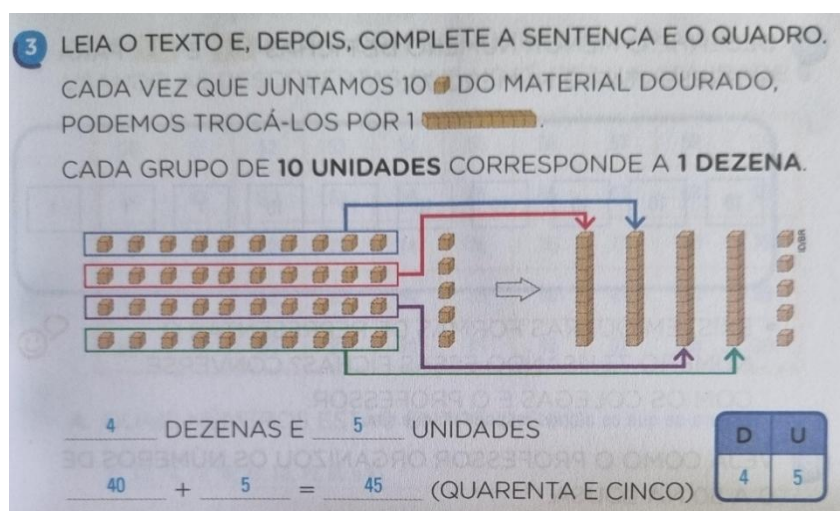
Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	Enunciado que solicita ao estudante completar um quadro com representações gráficas dos BBD e a frase com algarismos.
	Linguagem	Peças dos BBD representadas graficamente; linguagem natural com termos matemáticos, como: “trocas”, “correspondem”, “unidade” e “dezena”; algarismos indo-arábicos.
	Definição	Números que os cubinhos e as barrinhas representam; agrupamento de dez em dez; relação entre unidade e dezena; valor posicional na representação simbólica.
	Procedimentos	Formar grupos de 10 cubinhos para trocá-los por uma barrinha; desenhar a representação final no espaço em branco do quadro; completar as frases.
	Proposições	10 cubinhos equivalem a uma barrinha e, por isso, é possível efetuar as trocas. Embora a tarefa não fale em dezena e unidade, essa questão está por trás dessa proposição.

S	Argumentos	O SND é baseado em agrupamentos de dez, nos quais a permutação de 10 unidades de uma ordem resulta em uma unidade da ordem superior subsequente.
	Relações	A tarefa estimula o estudante a associar a ideia de agrupamentos e trocas de dez, relacionando as representações das peças dos BBD com a representação simbólica. A passagem das representações dos BBD para o registro simbólico, envolve também a questão do valor posicional. Ao invés de falar somente em barrinha e cubinho, poderia aqui já ser incorporado os termos ‘dezenas’ e ‘unidades’.
	Conflitos semióticos epistêmicos em potencial	Não identificamos, na tarefa, qualquer possibilidade de ambiguidade, erro ou contradição de significados promovidos por esse tipo de uso dos BBD. O fato do estudante já ter sido apresentado em situações anteriores aos BBD é importante para que ele consiga efetuar as trocas corretamente,

Fonte: elaborado pelo autor.

Em suma, a tarefa de matemática analisada parece ser uma atividade adequada que utiliza as representações dos BBD corretamente, estimulando os estudantes a compreender a relação entre as representações gráficas e simbólicas dos números, a noção de agrupamento e a troca de unidades. Na Figura 21 a seguir, vemos o mesmo tipo de tarefa em outro LD:

Figura 21 - Outra tarefa que utiliza os BBD para agrupamentos e trocas de dez



Fonte: Aprender Juntos Matemática, 2º ano (2021, p. 33).

Se os componentes da Dimensão epistêmica fossem analisados nessa tarefa, seriam similares ao da tarefa anterior envolvendo a coleção Bem-me-quer Mais Matemática, do 2º ano (2021, p. 145). As principais mudanças residem nos componentes *linguagem* e *relações*, pois aqui também são utilizadas representações gráficas dos BBD para os agrupamentos e as trocas de dez. Contudo, na coleção *Aprender Juntos Matemática*, do 2º ano (2021, p. 33), são mobilizadas as relações entre a escrita do número por extenso, sua decomposição em unidades

e dezenas, além do emprego do QVL como um espaço de registro final. Esse modo de exposição do conteúdo matemático enfatiza o valor posicional, como ocorre com o número 45, formado por 4 (dezenas) e 5 (unidades). Portanto, a utilização dos BBD, em ambas as tarefas, apresenta potencialidades para o ensino do SND.

Outro significado operatório (parcial) do SND presente nos volumes é a introdução de uma nova ordem, com o auxílio dos BBD. Na Figura 22, representamos como as coleções fazem isso, tomando como exemplo a unidade de milhar:

Figura 22 - Uso dos BBD para introduzir a ordem da unidade de milhar

A QUARTA ORDEM DO SND: UNIDADE DE MILHAR

Veja a adição $999 + 1$ representada com o Material Dourado e no quadro de ordens.

C	D	U
9	9	9
+		1

Para resolver, juntamos primeiro as unidades. Veja:

C	D	U
9	9	9
+		1
		0

9 unidades +
+ 1 unidade =
= 10 unidades,
ou seja, 1 dezena

Depois juntamos as dezenas, incluindo a que foi formada ao somar as unidades. Veja:

C	D	U
9	9	9
+		1
	0	0

9 dezenas +
+ 1 dezena =
= 10 dezenas,
ou seja, 1 centena

Para finalizar, somamos as centenas, incluindo a que foi formada ao juntarmos as dezenas.

UM	C	D	U
	9	9	9
	+		1
1	0	0	0

Orientações

Se a escola tiver Material Dourado, proponha aos alunos que formem a unidade de milhar juntando 10 placas e prendendo-as com elástico. Assim, eles poderão compreender que uma unidade de milhar (um cubo grande) é composta de 10 centenas, isto é, 10×100 unidades (EF04MA03). Um erro comum é o aluno contar as unidades que vê somente em cada uma das seis faces do cubo grande e concluir que há apenas 600 unidades, e não 1000.

Fonte: Bem-me-quer Mais Matemática, 4º ano (2021, p. 157-158).

Narração da tarefa: essa tarefa, que busca introduzir a ordem da unidade de milhar, já se encontra resolvida no livro. A intenção é que o estudante leia e acompanhe a resolução, manipulando, se possível, os BBD fisicamente, conforme as orientações presentes no manual do professor. O enunciado inicia com a adição $999 + 1$ e, para isso, dispõe, primeiramente, das representações gráficas dos BBD (placas, barrinhas e cubinhos), enquanto que, ao lado de tais representações, organiza simbolicamente a adição com o QVL. Ao adicionar mais 1 cubinho aos 9 existentes, o livro mostra o agrupamento desses 10 cubinhos e a troca por 1 barrinha (dezena). O mesmo ocorre no QVL, que reproduz essa ideia através do algoritmo na adição, mostrando que, após a troca das dez unidades, acrescenta-se uma unidade da ordem da dezena. O mesmo processo se repete quando temos 10 barrinhas que podem ser trocadas por 1 placa (centena), sempre reproduzindo os passos no algoritmo com o QVL.

Por fim, o livro mostra que passamos a ter 10 placas que devem ser agrupadas, formando uma nova peça dos BBD, que representa o 1000, ou seja, uma unidade de milhar. Nesse momento, o QVL também adiciona a ordem codificada como “UM”, formalizando a posição da ordem das unidades de milhar no SND.

Quadro 11 - Análise da Dimensão epistêmica da tarefa da Figura 22

Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	Situação resolvida pelo livro para o estudante acompanhar. A tarefa envolve ações de completar um quadro com representações gráficas dos BBD e lacunas de uma sentença.
	Linguagem	BBD representado graficamente; expressões em linguagem natural com fins matemáticos: “juntamos”, “quadro de ordens”, “unidade”, “dezena”, “centena” e “unidade de milhar”. Letras U, D, C e UM para designar as ordens do SND. Algarismos indo-arábicos organizados no QVL. Uso de símbolos $+$ e $=$.
	Definição	Números que os cubinhos, as barrinhas, as placas e o cubo representam; agrupamentos de dez; relação entre as quatro primeiras ordens do SND; milhar como dez centenas; valor posicional na representação simbólica.
	Procedimentos	A partir da formação inicial da adição ($999 + 1$) das peças representadas graficamente pelos BBD, agrupar 10 unidades e trocar por uma dezena. Depois disso, fazer o mesmo processo da dezena para a centena e, por fim, da centena para o milhar. Registrar esses procedimentos simbolicamente com o auxílio do QVL.
	Proposições	Ao agrupar dez centenas (10 barrinhas nos BBD), formamos uma unidade de milhar (um cubo grande nos BBD). Depois da centena, a ordem seguinte chama-se unidade de milhar.

	Argumentos	Quando atingimos 10 unidades em uma ordem no SND, o valor absoluto dessa ordem se torna zero, enquanto que a ordem seguinte aumenta em 1.
	Relações	A tarefa realiza a soma de $999 + 1$, relacionando simultaneamente o uso dos BBD com o algoritmo, o que favorece a compreensão do processo. É positiva também a retomada das ordens anteriores (unidade, dezena e centena) durante a própria tarefa.
	Conflitos semióticos epistêmicos em potencial	Em relação ao uso dos BBD, não identificamos conflitos, mas a linguagem simbólica presente nas explicações ao lado da tarefa, isto é, o uso dos símbolos da adição e igualdade na expressão “9 unidades + + 1 unidade = =”, pode confundir o estudante.

Fonte: elaborado pelo autor.

Ao lado da unidade de milhar foi introduzida também a peça do cubo dos BBD. E a maneira como ela é apresentada evidencia a relação da peça do milhar como uma composição de dez centenas, cujo valor, portanto, corresponde a 1000. Embora não mostre como dez placas viram um cubo, essa abordagem é importante para evitar os conflitos já discutidos na tarefa da Figura 17, em que o estudante poderia visualizar apenas 300 unidades.

A fragilidade dessa tarefa reside no componente linguagem, em que a explicação apresentada ao lado das representações dos BBD pode ser confusa, considerando que estamos em um livro do 2º ano. Temos, nas operações feitas no QVL, expressões como “9 unidades + + 1 unidade = = 1 dezena”. Qual o significado de “+ +” ou “= =” aqui? Entendemos que matematicamente existe um sentido na construção dessa escrita, mas sendo esta, uma explicação presente no livro do estudante, pode ser conflituoso. Esse tipo de situação é o que Pires, Silveira e Sabel (2025) discutem quando falam sobre possíveis ambiguidades que os LD podem promover. Para os autores a ambiguidade é um conflito semiótico que surge quando “em um livro didático, os autores deixam a cargo do leitor a realização de determinadas funções semióticas que são básicas para a correta interpretação do texto” (Pires; Silveira; Sabel, 2025, p. 4, no prelo). No caso dos símbolos de adição e igualdade presentes na tarefa anterior, o modo como estão organizadas, sem a devida mediação, abre espaço para tais ambiguidades.

A análise da dimensão epistêmica, em relação ao componente linguagem, deve observar o grau de adequação da forma como a tarefa se comunica com o sujeito para o qual ela foi pensada. É preciso ter cuidado com os termos, expressões e símbolos que uma tarefa apresenta, pois, segundo Godino (2024, p. 188), “a linguagem não é apenas um veículo comunicativo, mas também, por ser composta de signos que são constantemente interpretados, é uma ferramenta de significação”. A partir dessa concepção, a explicação da tarefa anterior é potencialmente problemática, principalmente se considerarmos que, no manual do professor, não são

mencionados os cuidados no momento de interpretar e significar tais expressões com os estudantes.

Avançando nos demais significados operatórios parciais, os BBD são amplamente usados para auxiliar em tarefas que possam envolver as quatro operações básicas. Na Figura 23, consta um caso de uso que trabalha a adição:

Figura 23 - Uso dos BBD para auxiliar em uma tarefa de adição

Adição com reagrupamento

1. As torcidas de 2 times foram assistir a um jogo de futebol feminino. Foram ao estádio 1227 torcedores do time A e 1135 torcedores do time B. Quantos torcedores foram ao estádio?

Para resolver esse problema, você deve juntar 1227 e 1135, efetuando a adição $1227 + 1135$.

Análise com atenção as resoluções apresentadas e faça o que se pede.

- Usando as peças do material dourado.

As imagens não estão representadas em proporção.

Trocamos 10 cubinhos por 1 barrinha, ou seja, 10 unidades por 1 dezena. Essa troca é chamada reagrupamento.

- Complete o algoritmo usual.

UM	C	D	U
1	2	2	7
+ 1	1	3	5
2	3	6	2

7 unidades - 5 unidades - 12 unidades
ou 1 dezena e 2 unidades

1 dezena - 2 dezenas - 3 dezenas
6 dezenas

2 centenas - 1 centena - 3 centenas

1 unidade de milhar - 1 unidade de milhar
2 unidades de milhar

Atividade 1

Peça aos estudantes que leiam e compreendam bem esta atividade, percebendo que se trata de uma situação de adição com a ideia de juntar 1227 torcedores com 1135 torcedores. Solicite a eles que usem concretamente o material dourado, juntando 1 cubo, 2 placas, 2 barrinhas e 7 cubinhos com 1 cubo, 1 placa, 3 barrinhas e 5 cubinhos e, depois, fazendo a troca de 10 cubinhos por 1 barrinha para obter 6 barrinhas e 2 cubinhos.

Atividades de leitura como esta favorecem os componentes essenciais para a alfabetização: Desenvolvimento de vocabulário, Fluência em leitura oral e Compreensão de textos.

Se possível, realize esta atividade na lousa utilizando o desenho de fichas e o registro dos algarismos no algoritmo usual e no algoritmo da decomposição; assim, os estudantes podem perceber que a mesma "troca" feita com o material concreto acontece quando utilizamos os algarismos (ou seja, as 10 unidades viram 1 dezena).

Se julgar pertinente, entregue aos estudantes, em duplas, diferentes adições nas quais haja a necessidade de realizar trocas. Peça a eles que, utilizando o material dourado, efetuem as operações e as registrem no algoritmo usual e no algoritmo da decomposição. Por fim, incentive-os a conversar sobre as trocas que fizeram e os registros correspondentes, além de falarem sobre possíveis dificuldades que podem ter vivenciado.

Fonte: Ápis Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 128).

Narração da tarefa: o enunciado da tarefa dispõe de uma situação contextualizada sobre uma certa quantidade de torcedores em um estádio de futebol, cuja pergunta implica na operação da adição $1227 + 1135$. O livro oferece ao estudante uma possibilidade de resolução utilizando representações gráficas dos BBD, que ilustram os números que estão sendo somados. As peças dos BBD estão organizadas em colunas, nomeadas como: cubos, placas, barras e cubinhos. Primeiramente, o volume sugere o agrupamento das unidades (cubinhos), mostrando

a possibilidade de se formar uma dezena completa, de modo a restar duas unidades. Esse processo é evidenciado trocando 10 cubinhos por uma barra, em suas respectivas colunas. O estudante, então, pode ler a descrição desses passos na figura abaixo da imagem de um menino, que explica, em linguagem natural, esses procedimentos. As representações dos BBD também ilustram a soma 2362 da seguinte forma: duas peças do milhar na coluna “cubos”, três peças da centena na coluna “placas”, seis peças da dezena na coluna “barra” e duas peças das unidades na coluna “cubinhos”. Em seguida, o estudante, após visualizar a adição com os símbolos indo-arábicos, dispostos em um QVL, deve completar os algarismos que faltam no algoritmo tradicional da adição.

Quadro 12 - Análise da Dimensão epistêmica da tarefa da Figura 23

Componentes		Indicadores
OBJETIVOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	A questão apresenta um cenário em que 1.227 fãs do time A e 1.135 fãs do time B vão a um estádio para assistir a uma partida de futebol. A tarefa envolve calcular o número total de fãs presentes.
	Linguagem	BBD representado graficamente e organizado em colunas nomeadas; Expressões em linguagem natural com fins matemáticos: ‘adição’, ‘unidade’, ‘dezena’, ‘centena’ e ‘unidade de milhar’; Letras U, D, C e UM para designar as ordens do SND; Algarismos indo-arábicos organizados no QVL.
	Definição	Agrupamento e troca de dez; valor posicional; algoritmo da adição; relação entre as quatro primeiras ordens do SND.
	Procedimentos	Começar pela soma das unidades (cubinhos) e, ao atingir dez ou mais, reagrupar essas unidades em dezenas (barras). Proceder da mesma forma nas demais ordens para, depois, indicar a quantidade de cada peça dos BBD. A partir desse resultado, completar os algarismos que faltam no algoritmo tradicional.
	Proposições	Ao somar dois números usando o algoritmo da adição, alinhamos os números um abaixo do outro, respeitando a ordem das unidades, dezenas, centenas etc. Começamos somando as unidades e, se o resultado for maior que 9, levamos uma para a próxima ordem. Repetimos esse processo para as dezenas, as centenas e assim por diante, realizando os remanejamentos numéricos de dez, quando necessário.
	Argumentos	10 unidades absolutas de uma ordem formam uma ordem seguinte; propriedades da operação adição.
Relações		Essa tarefa mobiliza os modelos visuais dos BBD e sua representação simbólica no QVL. Aqui reside uma fragilidade, pois as representações desse tipo e as articulações com o QVL levam a crer que só é possível operar a partir das unidades, depois das dezenas, e assim sucessivamente, sendo que os BBD permitem agrupar sem seguir tal ordem.

Conflitos semióticos epistêmicos em potencial	Pela maneira como as representações dos BBD estão dispostas nas colunas nomeadas, cabem os questionamentos exemplificados a seguir: “as 2 barrinhas (que representam 20 unidades), abaixo de uma coluna tarjada como ‘barras’, significam que temos 20 barras?”; ou “desconsideramos o valor agregado das peças e entendemos que há apenas 2 barrinhas ao todo?”.
---	---

Fonte: elaborado pelo autor.

Por meio dessa análise, consideramos que essa modalidade de uso dos BBD envolve diferentes objetos primários relacionados à operação de adição, embora apresente algumas fragilidades. Primeiro, articular diretamente os BBD com o QVL, conforme já comentado em análises anteriores, pode ser problemático. Especificamente nesse caso, vemos que o livro ensina a começar agrupar as unidades dos BBD (seguindo a lógica do algoritmo), mas se o estudante tiver o material em mãos (físico ou pictórico), ele poderá começar a somar optando pela centena ou dezena. Portanto, trata-se de uma relação “forçada”, que poderia ser ao menos mencionada nas orientações do manual do professor.

Uma questão mais complexa que o potencial de comprometer a eficiência da tarefa em relação ao significado operacional do SND é a organização das peças dos BBD em colunas tarjadas, ao lado do nome dos modelos de peças que deverão ser colocadas em seu interior. Na tabela a seguir, consta o problema de não considerar o valor agregado nos modelos de objetos inseridos em cada categoria. Para esclarecer melhor, observemos o número que ela faz referência:

Cubos	Placas	Barrinhas	Cubinhos
10	12	10	7

Para determinar o valor numérico total representado pelas fichas, é possível seguir um raciocínio pautado na decomposição aditiva do número, considerando a equivalência entre cada tipo de ficha e seu valor no Sistema de Numeração Decimal. Assim, ao observarmos, por exemplo, a presença de 10 cubos – sendo cada um associado ao valor de 1000 unidades –, poderíamos interpretar esse trecho como uma multiplicação: 10×1000 10×1000 , resultando em 10.000. O mesmo procedimento se aplicaria às fichas seguintes, levando-nos a calcular $12 \times 100 = 1200$ $12 \times 100 = 1200$, $10 \times 10 = 100$ $10 \times 10 = 100$ e $7 \times 1 = 7$ $7 \times 1 = 7$, totalizando 11.307. Esse tipo de raciocínio se torna possível porque há, abaixo da representação das fichas, uma numeração inserida em uma tarja que parece indicar a quantidade de peças representadas naquela coluna.

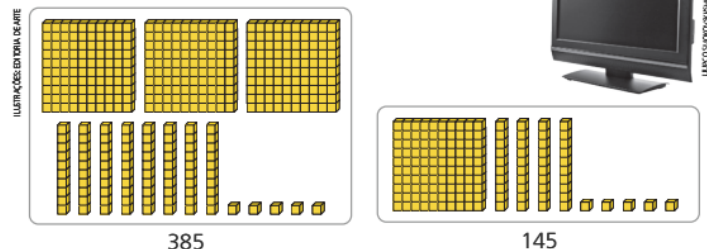
No entanto, essa forma de leitura pode gerar ambiguidades. Ao observarmos, por exemplo, a Figura 23, nota-se a presença de duas barrinhas posicionadas abaixo da tarja com o número 20, categorizada como "barras". Essa configuração suscita dúvidas interpretativas importantes: o número 20 indica a existência de 20 barras, das quais apenas duas estão visivelmente desenhadas como exemplo? Ou o número deve ser desconsiderado, entendendo-se que há, de fato, apenas duas peças representadas? Essa ambiguidade entre o número posicionado na tarja e a quantidade de elementos visíveis pode comprometer a clareza da correspondência entre representação gráfica e valor numérico, especialmente para estudantes em processo de consolidação do raciocínio posicional. A análise ora apresentada está em consonância com os estudos de Silveira (2018), que discutiu este e outros tipos de equívocos no uso dos BBD. Para o autor, “essa confusão poderia ser facilmente evitada se não houvesse rótulos para cada coluna da tabela utilizada” (p. 9). Essa solução resolveria o conflito semiótico em potencial. Na Figura 24, vemos um exemplo que vai ao encontro dessa reflexão:

Figura 24 - Outro uso dos BBD para auxiliar em uma tarefa de adição

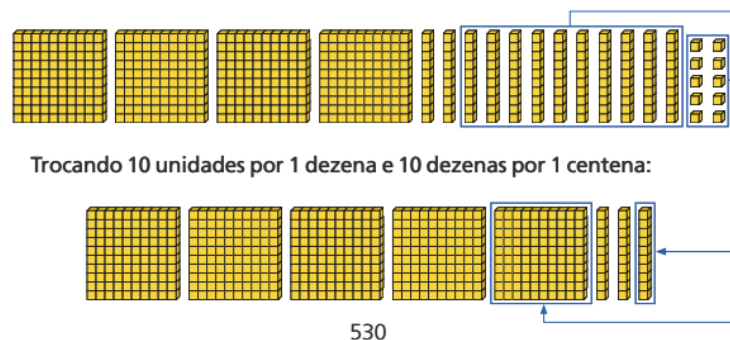
2ª situação: Para comprar um televisor, Valéria guardou 385 reais. Ela ainda precisa de 145 reais. Quanto custa esse aparelho?

Nesse caso, podemos acrescentar 145 reais aos 385 reais que Valéria já tem, ou seja, podemos efetuar a adição $385 + 145$.

Usando o material dourado, temos:



Acrescentando uma quantidade a outra:



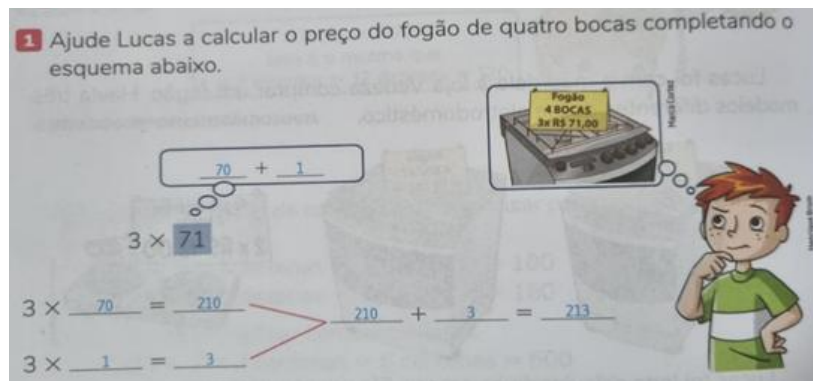
Fonte: A Conquista da Matemática, 3º ano (2021, p. 104).

No caso dessa tarefa, os indicadores da dimensão epistêmica são muito similares ao caso da Figura 23, embora seja possível perceber a ausência das rotulações dos diferentes modelos

dos BBD. Uma vez que o estudante já aprendeu o valor numérico de cada peça, não há a necessidade de colocá-lo em tabelas rotuladas. Entendemos que, ao tarjar as colunas na Figura 23, o autor do livro busca auxiliar os estudantes, mas como Godino, Batanero e Font (2007) argumentam, devemos atentar às possíveis confusões relacionadas às funções semióticas de uma representação. Os autores (2007) explicam que “cada função semiótica implica um ato de semiose por parte de um agente interpretante, que constitui conhecimento e depende das circunstâncias estabelecidas no ato de interpretação” (p. 52, tradução nossa). Desse modo, a função semiótica dos rótulos nas tabelas da Figura 23 pode levar a uma semiose diferente da que o livro espera, o que pode levar a um conflito semiótico em potencial.

A próxima tarefa envolve o uso dos BBD na multiplicação. Nas orientações do manual do professor, menciona-se uma tarefa da página anterior do livro didático, que igualmente iremos apresentar para que a leitura das orientações faça sentido:

Figura 25 - Tarefa anterior citada no uso dos BBD para multiplicação



Fonte: Extratos da coleção Bem-me-quer Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 226).

Figura 26 - Uso dos BBD para auxiliar em uma tarefa de multiplicação

MULTIPLICAÇÃO SEM TROCAS

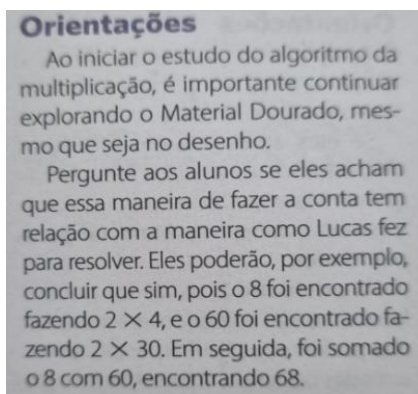
Em cada sala de aula da escola de Carla há 34 carteiras. Quantas carteiras há em 2 salas de aula?
Podemos calcular 2×34 representando com o Material Dourado.

	Dezenas	Unidades
34		
34		
Total:	6	8

Para facilitar armamos a conta

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 2 \\ \hline 8 \rightarrow 2 \text{ vezes } 4 \text{ unidades} \\ + 60 \rightarrow 2 \text{ vezes } 3 \text{ dezenas} \\ \hline 68 \end{array}$$

Em duas salas há 68 carteiras.



Fonte: Extratos da coleção Bem-me-quer Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 227).

Narração da tarefa: a tarefa inicia com uma situação introdutória, em que o contexto de um problema leva à necessidade de calcular a quantidade de cadeiras dispostas em duas salas de aula. O enunciado da situação indica que, em cada uma delas, o número de cadeiras corresponde a 34 unidades. Portanto, a solução requer a multiplicação 2×34 . Para isso, o volume apresenta algumas representações dos BBD como uma forma de auxiliar o cálculo, e assim, a tarefa articula duas formas de resolução: a primeira, que dispõe as peças dos BBD sobrepostos ao QVL; e a segunda, que realiza o cálculo conforme o algoritmo da multiplicação. O QVL apresenta duas linhas, sendo que, na primeira delas, representa o 34 por meio de 3 barrinhas (na posição das dezenas) e 4 cubinhos (na posição das unidades), e na inferior, repete a mesma configuração, com referência à quantidade de vezes que o 34 é multiplicado (duas vezes). A intenção de fazer uso dos BBD aqui, segundo as próprias orientações ao professor, é que o estudante perceba que ele pode multiplicar as unidades (2 repetições de 4 cubinhos que resultam em 8 cubinhos) e as dezenas (2 x 3 barrinhas resultando em 6 barrinhas que representam 60 cubinhos) para obter o resultado 68, da mesma forma que na “conta armada” ao lado. Em relação a essa conta, temos a representação simbólica (com os algarismos) da mesma multiplicação. Nessa representação, inicialmente, deve-se multiplicar os dois pela unidade (2×4) e, depois, pela dezena (2×30). Com o livro, espera-se (inclusive nas orientações dadas ao professor) que o estudante perceba a relação entre essas duas formas de resolver o problema.

Quadro 13 - Uso dos BBD para auxiliar em uma tarefa de multiplicação

Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	Situação-problema que envolve um contexto onde é necessário realizar a operação 2×34 , que é resolvida pelo livro para o estudante acompanhar.
	Linguagem	Representação das peças BBD; QVL sendo usado como espaço para organizar as peças; registro simbólico (algarismos); termos específicos como a palavra “vezes” para indicar a multiplicação; “parcelas” para indicar um dos fatores da operação.
	Definição	Multiplicação definida como uma soma de parcelas iguais. Operação de adição; uso do algoritmo. Valor posicional.
	Procedimentos	Organizar as peças dos BBD dentro do QVL para representar a operação e resolver o cálculo utilizando o algoritmo tradicional. Repetir a configuração das peças e conferir a quantidade de vezes que o número por ele representado está sendo multiplicado. Registrar ao lado, com os símbolos.
	Proposições	O número 34 pode ser decomposto com $30 + 4$ e representado com barrinhas e 4 cubinhos dos BBD.
	Argumentos	QVL com as colunas nomeadas em “dezenas” e “unidades” podem ser usadas como um espaço para sobrepor os BBD.
Relações		A tarefa relaciona o uso do QVL, dos BBD e do algoritmo. Nas orientações ao professor é indicado relacionar o modo utilizado para resolver essa tarefa com a que estava na página anterior.
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial		As peças dos BBD são representadas sobrepostas ao QVL, podendo levar a ambiguidade em relação ao número que está sendo representado. Este livro (e nenhum dos demais) não possui orientação quanto a esse conflito em potencial.

Fonte: elaborado pelo autor.

Nessa tarefa, os BBD são representados sobrepostos ao QVL, nas duas situações. Ao alertar acerca desse problema, Silveira (2014, 2016, 2018, 2021) discorre acerca dessa modalidade de uso como um fator potencial de gerar dúvidas sobre o número que está sendo representado. Na pesquisa, compreendemos o Quadro Valor de Lugar (QVL) como um objeto matemático institucional, uma vez que sua existência ocorre no contexto da matemática escolar. Desse modo, o funcionamento do objeto reside nas normas e regras estabelecidas que regulam os processos de ensino e aprendizagem (Godino *et al.*, 2009).

Portanto, o QVL é um instrumento de aprendizagem para auxiliar os estudantes a compreenderem o valor posicional dos algarismos nas diferentes ordens (unidade, dezena,

centena etc.). Ele ilustra os princípios multiplicativos e aditivos, que são aplicáveis a qualquer sistema numérico posicional.

O QVL, enquanto objeto institucional, é apresentado nas obras como um espaço para colocar os símbolos indo-arábicos, além de auxiliar o estudante a visualizar a questão posicional. Sendo o livro construído sob uma proposta pedagógica, ele precisa seguir uma lógica ao longo de suas tarefas. Nessa obra, percebe-se a mudança na forma de usar o QVL, introduzindo representações dos BBD e fugindo da maneira que vinha sendo apresentado nas tarefas anteriores. Por sua vez, assim como todo objeto matemático, ele está inserido em um determinado sistema semiótico e deve cumprir as propriedades desse sistema (Duval, 2004). Posto isso, ao observarmos a Figura 26, devemos questionar o uso de representações dos BBD sobrepostos ao QVL.

Para elucidar ainda mais o quanto essa modalidade de uso é contraditória nos livros didáticos, apresentamos algumas situações anteriores da mesma coleção sobre o uso do QVL:

Figura 27 - Primeira indicação sobre o quadro de ordem

OBJETIVOS

- Conhecer o significado dos termos unidade e dezena.
- Ler e escrever o nome dos números e representá-los usando algarismos.
- Completar sequências numéricas.
- Comparar e ordenar números.
- Compor e decompor números.
- Identificar números pares e números ímpares.
- Determinar o número de grupos de 10 contidos em uma quantidade.
- Realizar contagens formando grupos de 10.
- Registrar os agrupamentos formados no quadro de ordens.

CONTAGEM POR AGRUPAMENTO

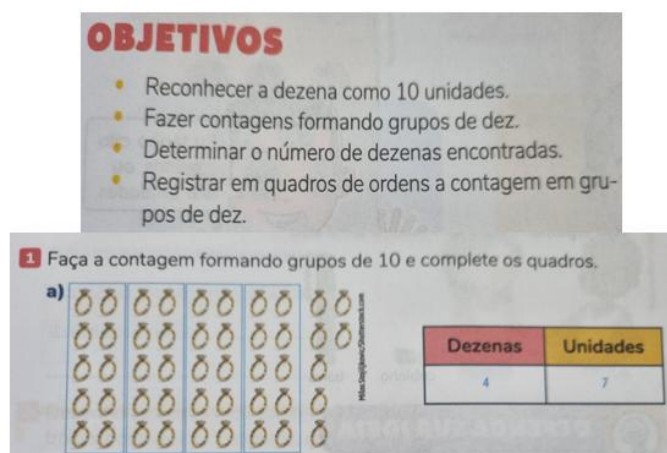
1 AGRUPE OS ANÉIS DE 10 EM 10 PARA FORMAR DEZENAS E REGISTRE O RESULTADO NO QUADRO A SEGUIR.



GRUPOS DE 10 ANÉIS	ANÉIS QUE SOBRARAM
5	0

Fonte: Coleção Ápis Mais Matemática, 1º ano (2021, p. 179).

Figura 28 - Indicação sobre o uso do Quadro de ordem no livro do 2º ano

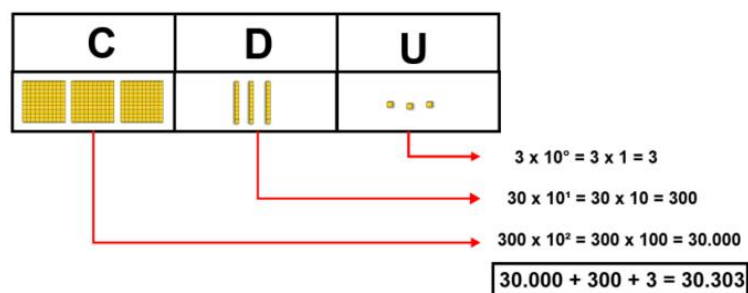


Fonte: Ápis Mais Matemática, 2º ano (2021, p. 143).

Primeiramente, vemos que, dentre os objetivos, consta claramente escrito “registrar os agrupamentos formados no QVL”, o que significa dizer que a intenção da obra é que o QVL seja um espaço para o registro simbólico com algarismos. Na Figura 27, que ilustra o volume do 1º ano, há a primeira aparição de um quadro de ordens, ainda que não contenha as designações de dezena e unidade. Ao longo das demais tarefas, o LD segue com a notação de quadro e o preenche com símbolos indo-arábicos. Já no volume do 2º ano, conforme vemos na Figura 28, o quadro de ordens recebe agora as designações “dezenas” e “unidades”, e segue com os algarismos indo-arábicos dentro do quadro. O algarismo 4, por exemplo, é colocado na coluna da ordem da dezena, representando os quatro grupos de dez anéis, desenhados ao lado. Portanto, nos livros anteriores ao 3º ano, o QVL é utilizado como um campo de registro para a notação posicional dos números segundo o SND. E a primeira vez que isso muda ocorre quando, na Figura 26 (página 93), o LD troca os algarismos por peças dos BBD, indo na contramão dos conhecimentos prévios oferecidos aos estudantes pelo próprio LD nos anos anteriores.

Por esse motivo, questionamos qual seria a intenção didática de sobrepor ao QVL as peças dos BBD dentro de suas colunas e se esse tipo de utilização cria um conflito semiótico epistêmico em potencial. Ao representarmos 3 barrinhas dentro da posição das dezenas, isso pode levar a uma ambiguidade de significado: na primeira, passa-se a considerar que seu valor absoluto agora é 30, o que é incoerente, dada a maneira que o QVL funciona; ou, então, na segunda, considera-se seu valor relativo que passa a ser 300 unidades, considerando que 30 (valor das três barrinhas) x 10 (fator multiplicativo da ordem das dezenas) é igual a 300. A seguir, apresentamos um exemplo discutido em Silveira (2018):

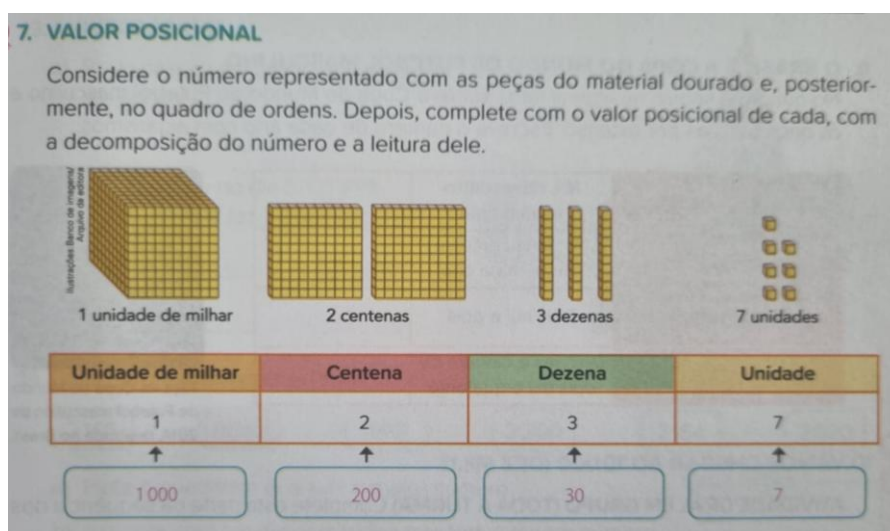
Figura 29 - Funcionamento de um BBD sobreposto em um QVL



Fonte: Silveira (2018, p. 9).

Observamos que o livro didático, a partir da função semiótica (utilização de signos para comunicar ideais matemáticas) das tarefas com os BBD, procuram levar o estudante a considerar apenas o valor relativo, deixando de lado a propriedade posicional e a função primordial de um QVL. Entretanto, essa intenção entra em conflito com os conhecimentos prévios do estudante, que já aprendeu como funciona um QVL quando algarismos se posicionam dentro dele. Talvez esta seja a maior contradição presente nos livros: colocar representação de manipulativos com valor agregado dentro do QVL, que tem sido apresentado nas obras como um espaço para registro com símbolos indo-arábicos. Portanto, a forma de utilização apresentada na Figura 26 (página 93) tem o potencial de um conflito semiótico, por meio da ambiguidade de significados dessas representações. Uma pequena mudança na forma de representar os BBD em tarefas consegue se esquivar de tal conflito, conforme vemos na Figura 30:

Figura 30 - Uso dos BBD fora do QVL



Fonte: Ápis Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 113).

Nesse tipo de atividade, observa-se que o Bloco Base Dez (BBD) é utilizado de forma independente em relação ao Quadro de Valor de Lugar (QVL). A criança manipula os blocos livremente, sem a necessidade de organizá-los previamente em quadros ou tabelas, e determina a quantidade de cada tipo de peça com base na contagem direta. Em seguida, registra esses valores no QVL por meio da numeração indo-arábica convencional. Embora esse uso nos leve novamente à reflexão de que os BBD, por suas características, não exigem uma organização posicional rígida – tampouco depende, necessariamente, da articulação com o QVL –, esse arranjo particular evidencia uma abordagem que evita os conflitos semióticos observados em outras situações. Ao permitir que a criança parta da manipulação concreta para o registro simbólico, sem impor previamente uma estrutura posicional, essa estratégia pode favorecer uma compreensão mais gradual e coerente do valor posicional, minimizando confusões geradas por associações fixas entre posição e quantidade.

Historicamente, antes da criação de sistemas numéricos complexos, Ifrah (200) explica que o ser humano já operava com números por meio de outros mecanismos, como as tábuas de argila, por exemplo. A tábua era sinalizada com divisões em diversas linhas ou colunas paralelas que separavam as ordens de numeração onde se colocavam pedras ou fichas, valendo uma unidade cada uma, da respectiva ordem. E operava-se um modo similar aos algoritmos modernos. É possível entender o QVL como um objeto similar a essas tábuas, pois também segue a lógica posicional e de registro. Por esse motivo, Silveira (2018) apresenta uma forma de sobrepor os BBD ao QVL de modo a evitar conflitos. O autor propõe que deverão ser utilizados apenas os cubinhos que representam unidades, não sendo aproveitadas as demais peças componentes do material. Vejamos:

Figura 31 - Forma de usar os BBD sobrepostos ao QVL

CENTENAS	DEZENAS	UNIDADES
		

Fonte: Silveira (2018, p. 13).

No caso anterior, é representado o número 333. Há 3 unidades na ordem das centenas ($3 \times 100 = 300$), mais 3 unidades nas dezenas ($3 \times 10 = 30$) e mais 3 unidades na ordem das unidades ($3 \times 1 = 3$), totalizando 333. Silveira (2018) menciona que isso pode ser feito, pois “cada cubinho de material dourado equivale a uma unidade. Lembrar, porém, que poderão ser colocados, no máximo, 9 cubinhos em cada ordem” (Silveira, 2018, p. 13). Pelo exposto, constatamos que apenas o caso de sobrepor os BBD no QVL seria algo correto do ponto de

vista matemático, mas, ainda assim, devemos pensar se vale a pena do ponto de vista didático, já que essa utilização “quebra” a lógica de uso do QVL ao longo das obras.

Finalizamos com esse caso as tarefas que representam o significado operacional, mostrando situações problemáticas que podem ser evitadas com pequenas alterações no modo de propor o uso de BBD nas tarefas. As sugestões de melhoria apresentadas não se encerram com esta pesquisa, pois o debate segue aberto para novas reflexões. Contudo, pela ampla presença dos BBD no ensino do significado operacional nas obras, é importante que as pesquisas proponham formas de evitar os conflitos.

Significado Ordinal

O significado ordinal, conforme Konic e Godino (2010), está presente em tarefas onde o objetivo é saber a posição relativa de um elemento em um conjunto discreto e ordenado de objetos. Geralmente, esse significado é trabalhado com representações simbólicas por meio de algarismos: 1º, 2º, 3º e assim por diante. Os BBD em si não apresentam aspectos para pensar em conceitos ordinais, o que explica a quase ausência desse significado. Na sequência, apresentamos a tarefa mais próxima desse significado:

Figura 32 - Tarefa que indica os BBD em um contexto ordinal

2. EM UMA GINCANA, CADA PARTICIPANTE GANHOU UM  PARA REPRESENTAR CADA PONTO OBTIDO. OBSERVE O RESULTADO DESSA GINCANA.

DESENVOLVA A FORMA REPRESENTAR EM PROPOSIÇÃO DE TAMBÉM ENTRE 8.

REGISTRE NO QUADRO QUANTOS PONTOS CADA PARTICIPANTE FEZ. DEPOIS, USE NÚMEROS ORDINAIS PARA INDICAR NO QUADRO A CLASSIFICAÇÃO DE CADA UM.



PARTICIPANTE	PONTUAÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
MATEUS		____ LUGAR
AMANDA		____ LUGAR
GUTO		____ LUGAR
FÁTIMA		____ LUGAR

Fonte: A Conquista da Matemática, 2º ano (2021, p. 25).

A tarefa apresenta quatro crianças, cada uma com uma quantidade de peças dos BBD, que estariam representando a quantidade de pontos de um jogo. O estudante deve completar um quadro, onde precisa colocar a pontuação obtida por cada um e suas posições no *ranking*. Na coluna de “classificação”, os espaços devem ser preenchidos com símbolos indo-arábicos empregados no sentido ordinal, ou seja, 1º, 2º, 3º e 4º. Esse processo faz parte do significado ordinal, mas os BBD, nessa tarefa, servem para o estudante contar os pontos de cada criança,

de modo que sua função é cardinal. Desse modo, não temos tarefas específicas do significado ordinal para analisarmos via elementos da dimensão epistêmica. Nos casos identificamos apenas os que usam uma certa quantidade que deverá ser comparada e, então, atribuída uma noção ordinal entre eles.

Significado Sequencial

Em relação ao uso de representações dos BBD para trabalhar o significado sequencial, encontramos poucas tarefas. Das cinco coleções, os casos estão presentes em *Bem-me-quer Mais Matemática* e *A Conquista da Matemática*. A seguir, apresentamos a maneira como as tarefas em geral têm indicado o BDD para trabalhar com as sequências:

Narração da tarefa: apresenta aos estudantes uma atividade para trabalhar a sequência dos milhares usando os BBD. O estudante deve observar os exemplos iniciais, onde cada cubo grande representa 1.000 unidades. Vale destacar que, nesse ponto do volume em questão, os alunos já estudaram a formação da peça do milhar em tarefas anteriores.

A partir dos exemplos, é preciso completar os espaços em branco com os valores numéricos correspondentes e escrever os números por extenso. Na atividade seguinte, os estudantes precisam responder quantas placas (representando 100 unidades cada) são necessárias para formar diferentes quantidades.

Figura 33 - Uso dos BBD para sequência das centenas

1 Leia os exemplos e complete o que falta.

 1 000 mil	 2 000 dois mil	 3 000 três mil
 4 000 quatro mil	 5 000	 6 000
 _____	 _____	 _____

2 Para representar 1 000 unidades com as peças do Material Dourado são necessárias 10 placas. Quantas placas são necessárias para representar:

a) 2 000 unidades? _____

b) 3 000 unidades? _____

c) 5 000 unidades? _____

Atividade 4

Nesta atividade, apresentamos a representação dos números maiores do que 1 000 utilizando as peças do material dourado, introduzindo a representação dos milhares pelo cubo. Se possível, permita que os estudantes manipulem as peças do material dourado e representem os números desta atividade antes de registrá-los no livro.

Fonte: Bem-me-quer, 3º ano (2021, p. 106).

Quadro 14 - Análise da dimensão epistêmica da tarefa da Figura 33

Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	O enunciado não apresenta uma situação-problema contextualizada. É uma tarefa que solicita seguir o exemplo inicial, completando os quadros em branco a partir da quantidade representada pelos cubos grandes dos BBD. Posteriormente, o estudante deve calcular quantas placas da centena são necessárias para representar outros números indicados.
	Linguagem	Representações dos BBD; representação simbólica indo-arábica; específicos como mil, unidade e placas; escrita por extenso dos números.
	Definição	Cubo representa mil unidades; 10 placas dos BBD equivalem a 1000 unidades também; sequência e escrita dos milhares até 9000.
	Procedimentos	Identificar a quantidade representada pelos BBD para, em seguida, completar os quadros com a escrita simbólica e por extenso. No próximo item, calcular a partir da informação dada (10 placas equivalem a um cubo grande) a quantidade de placas necessárias para formar os números solicitados.
	Proposições	A sequência dos milhares inteiros apresenta um padrão na escrita: dos quatro algarismos que compõem o numeral, os três últimos são sempre zero, enquanto o primeiro é a quantidade de mil's completos (neste caso,

S		é a quantidade de cubos grandes dos BBD). Para o item seguinte, sabemos que um milhar é composto por 10 centenas, pois $10 \times 100 = 1000$.
	Argumentos	Se 1000 unidades dos BBD são 10 placas, então, para formar 2000 unidades, precisamos de: 10 placas (mil) + 10 placas (mil) = 20 placas dos BBD.
	Relações	No primeiro item temos relações entre os BBD com mais duas representações. No segundo item, o enunciado busca estabelecer relações entre os valores das pelas dos BBD, para neste caso, formar o milhar.
	Conflitos semióticos epistêmicos em potencial	Para evitar conflitos é preciso garantir que o estudante já tenha sido apresentado a formação da peça do milhar dos BBD em tarefas anteriores, pois precisa entender a relação entre as placas e o cubo grande.

Fonte: elaborado pelo autor.

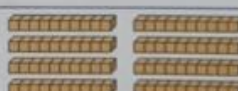
As indicações de uso dos BBD nas obras analisadas, no que se refere às ideias de sequências numéricas, seguem o formato da tarefa anterior. As representações servem para trabalhar a sequência das unidades até 10, depois, das dezenas até 100, das centenas até o milhar, e até a última indicação, de 9000. Nesse último caso, em particular, o trabalho com os BBD só pode ser feito por meio de representações pictóricas nos volumes, já que a caixa com o material físico só contém uma unidade de milhar. Na tarefa acima, consta, nas orientações do professor, a menção sobre manipular as peças físicas antes, o que é importante para garantir que o estudante compreenda porque há mil unidades (conforme já discutido na tarefa da Figura 30). Fora isso, não há conflitos em potencial identificados.

Um ponto a problematizar aqui é que, nessa etapa escolar (5º ano), no estudo dos números maiores que 1000, os BBD não parecem ter uma contribuição significativa. Nessa etapa, o estudante já passou pela formação das unidades, dezenas, centenas e unidade de milhar, logo, já compreende a questão dos agrupamentos e da posição. Se retirarmos da tarefa as representações dos BBD, elas não fariam falta, pois o estudante já compreende a escrita simbólica para formar os numerais. Nesses casos, o manipulável atua apenas como um tipo de representação auxiliar, ou seja, um recurso semiótico que complementa outra representação principal (Sabel; Silveira, 2022). Não estamos dizendo que é errado os BBD estarem presentes nessa tarefa, mas que, como todo manipulativo, com o tempo, ele deve ser deixado de lado para dar espaço ao pensamento abstrato (Fyfe; Nathan, 2019).

A seguir, apresentamos outra tarefa com um fim parecido, mas que explora de forma mais significativa os BBD e, principalmente, apresenta boas orientações de uso ao professor:

Figura 34 - Tarefa que usa os BBD para as sequências

1 Observe que, no Material Dourado, cada  (barra) é formada por 10  (cubinhos). Em seguida, complete.

 ou  10 unidades ou Dez 1 dezena	 2 dezenas ou Vinte 20 unidades
 3 dezenas ou Trinta 30 unidades	 4 dezenas ou Quarenta 40 unidades
 5 dezenas ou Cinquenta 50 unidades	 6 dezenas ou Sessenta 60 unidades
 7 dezenas ou Setenta 70 unidades	 8 dezenas ou Oitenta 80 unidades
 9 dezenas ou Noventa 90 unidades	

Atividade 1
 O Material Dourado é composto de peças de quatro tipos: cubinhos (unidades), barras (dezenas), placas (centenas) e cubos (milhares). Nessa atividade, usamos apenas cubinhos e barras. Caso haja disponibilidade, leve o Material Dourado para a sala de aula, deixe os estudantes manipularem suas peças e solicite-lhes que observem o número de cubinhos que formam uma barra.

Ele foi concebido para que sua forma e estrutura remetam à ideia de que dez unidades podem ser reunidas em um grupo (dezena), facilitando a compreensão do processo de trocas entre elas. Entretanto, como a posição das peças do Material Dourado não obedece necessariamente à ordem seguida na escrita no sistema de numeração decimal, não é possível explorar com ele o fato de esse sistema ser posicional. Por exemplo, ao representar o número 14 com uma barra e quatro cubinhos, eles não precisam estar dispostos na posição correspondente aos algarismos no número 14. Assim, seu uso deve ser complementado com atividades que trabalhem a importância da posição na escrita dos números, como o uso do ábaco vertical.

Fonte: Buriti Mais Matemática, 2º ano (2021, p. 36).

Nesse outro exemplo, comum nas coleções, as representações dos cubinhos e barrinhas dos BBD são usadas para montar a sequência das dezenas completas que antecedem a centena. Aqui o uso dos BBD faz mais sentido, pois o estudante está no 2º ano e ainda está aprendendo o funcionamento dos agrupamentos e das trocas de dez. Além disso, esse uso contribui para introduzir e mostrar como a peça da centena (placa) é formada. E o mais relevante nesse caso são as orientações que constam ao lado da tarefa, presentes no manual do professor.

A orientação explica o que cada peça dos BBD significa e qual a finalidade do material: compreender a ideia de que 10 unidades podem ser reunidas em um grupo (dezena) para, mais adiante, ocorrer o mesmo com a centena. Além disso, é importante o livro chamar a atenção para o fato de que os BBD não têm uma função posicional, o que explica seu uso ser complementado com outros materiais que abordam a posição (o manual indica o ábaco). Portanto, esse modo de orientar o professor sobre o manipulativo da tarefa utilizada trata-se de uma prática que deve ser estimulada ao longo de todas as coleções. Como foram poucos os

casos dos BBD para o significado de sequência, finalizamos com essas situações as tarefas representativas desse significado de referência.

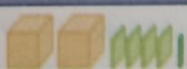
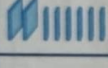
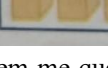
Significado de Medida

Nas cinco coleções analisadas, não identificamos nenhuma tarefa cujo foco se centrasse em trabalhar esse significado de referência. Assim como no significado ordinal, também já era esperada a ausência de tarefas, uma vez que as ideias relacionadas à medida estão geralmente presentes nos capítulos de geometria ou de grandezas e medidas. Contudo, como analisamos as tarefas dos LD nas seções voltadas ao ensino do SND, essa ausência é justificada, sem mencionar que o grande objetivo dos BBD é, de fato, ensinar os agrupamentos e as trocas de dez, além de representar os números.

Um caso excepcional a mencionar acerca do significado de medida é que, no volume do 5º ano, da coleção *Bem-me-quer Mais Matemática*, os BBD são relacionados com a representação fracionária. Vejamos, a seguir, algumas tarefas similares ao exemplo:

Figura 35 - tarefa que relaciona os BBD com as frações

2 Complete o quadro com o que falta. AVALIAÇÃO

	QUANTIDADE	FRAÇÃO	NÚMERO DECIMAL	POR EXTENSO
a)		$\frac{241}{100}$	2,41	dois inteiros e quarenta e um centésimos
b)		$\frac{405}{100}$	4,05	quatro inteiros e cinco centésimos
c)		$\frac{26}{100}$	0,26	vinte e seis centésimos
d)		$\frac{8}{100}$	0,08	oito centésimos
e)		$\frac{302}{100}$	3,02	três inteiros e dois centésimos

Fonte: Bem-me-quer Mais Matemática, 5º ano (2021, p. 162).

As frações também apresentam um sentido voltado à ideia de medida (Silveira, Souza; Powell, 2024), o que explica constarem na análise desse significado de referência. Contudo, no caso acima e em outros poucos similares, percebemos que a ideia do volume não tem relação com o significado de medida. A intenção aqui é o reconhecimento da quantidade representada, ou seja, uma questão de cardinalidade. Por isso, não temos análises da dimensão epistêmica em relação a tarefas sobre a medida e o uso dos BBD.

Significado Simbólico

Não há nenhum uso dos BBD para o significado simbólico. Esse significado comporta um uso social, de modo que não somente os BBD, assim como os demais materiais, carecem de tarefas sobre eles. O significado figurativo remete ao uso específico de símbolos para fins de codificação (senhas, números de cartão de jogos, cartelas de bingo, etiquetas e marcações em geral). Dada a natureza dos materiais ser outra, já esperávamos que não houvesse tarefas a serem analisadas, deste ou dos outros manipuláveis.

6.2.2 Síntese das tarefas representativas sobre o uso dos BBD

Conforme análise inicial presente no Quadro 4, os BBD estão presentes, em ao menos, três volumes de cada coleção. De fato, é o material com maior recorrência nas obras com maior representatividade de tarefas. Em relação aos significados de referência do SND, sua maior presença está no significado operacional, seguido do cardinal. Em relação as sequências numéricas identificamos poucas situações e os significados de medida, simbólico e ordinal, não houve tarefas para analisar a dimensão epistêmica.

No Quadro 16 abaixo, sistematizamos a representatividade epistêmica dos BBD em relação a tarefa analisadas. Não faremos um olhar separado para cada coleção, pois o intuito é compreender seu uso global nos livros e não atribuir um juízo de valor das obras. Na primeira linha temos os principais objetos primários envolvidos em cada significado de referência, em seguida, os conflitos semióticos em potencial e as nossas sugestões de melhoria.

Quadro 15 - Síntese da análise dos Blocos base dez (BBD)

BLOCOS BASE DEZ	
Significado Cardinal	
Principais objetos primários envolvidos	- Situações que solicitam ao estudante indicar a quantidade de um conjunto de peças dos BBD; Representações dos BBD usadas em articulação com o registro simbólico no QVL; Trocas e agrupamentos de dez em dez; Definições de unidade, dezena, centena e relação entre as peças. Dez cubinhos (unidades) formam uma barrinha (dezena), dez barrinhas formam uma placa (centena) e assim por diante.
Conflitos semióticos em potencial	- Falta de clareza na formação da peça do milhar (cubo grande) caso não seja mostrado antes como se constitui a partir de dez placas; Uso das representações dos BBD sempre do mesmo modo, apresentadas sempre da mesma ordem e relacionadas com o QVL; Ressignificação das peças dos BBD para o ensino de números na forma decimal.
	- Garantir que antes de apresentar uma nova peça dos BBD o livro do estudante explica como se forma, bem como nas orientações do professor; Dispor as

Sugestões de melhoria	representações dos BBD de modos diferentes para aproveitar seu potencial nas trocas e agrupamentos; Não mudar o sentido das peças, buscando um outro manipulativo para ensinar os números na forma decimal, fracionária, etc.
Significado Operatório	
Principais objetos primários envolvidos	- Situações que levam ao estudante a operar com as operações básicas ou que explique alguma propriedade da operação; Relação da manipulação dos BBD com o funcionamento do algoritmo tradicional, fazendo alterações na representação do material enquanto ao lado trata-se o registro simbólico; Símbolos matemáticos são introduzidos durante as tarefas; Nas quatro operações básicas os BBD são usados em conjunto com o QVL, as vezes é disposto lado dele e em alguns casos está sobreposto dentro do quadro.
Conflitos semióticos em potencial	- Sobrepor as representações dos BBD no QVL implica em erros tanto do ponto de vista matemáticos quanto didático; Uso recorrente dos BBD para ensinar os procedimentos dos algoritmos tradicionais, sendo que não existe uma relação isomórfica entre eles.
Sugestões de melhoria	- O QVL pode ser usado em atividade de contém os BBD, mas não deve sobrepor o material dentro dos quadros. O único modo de fazer isso é usando apenas as peças do cubinho que possam valor absoluto igual a uma unidade. Os BBD não deve ser o principal material para explicar o funcionamento dos algoritmos, visto que no algoritmo da adição, por exemplo, o estudante começa sempre a operar pela unidade, mas nos BBD ele não tem essa condição.
Significado de Sequência	
Principais objetos primários envolvidos	- Situações que apresentam uma sequência numérica solicitando que o estudante determine os próximos ou complete os números que faltam; Estudo de sequências como as dezenas completas de 10 a 100 ou centenas de 100 a 1000; Representações dos BBD em articulação com outras representações (simbólicas e linguagem natural).
Conflitos semióticos em potencial	Não houve conflito identificado, visto que tiveram poucos casos desse significado.
Sugestões de melhoria	Para números acima de 1000, os BBD podem não ser mais necessário, uma vez que já houve compreensão do sistema decimal. Além disso, os BBD (seja no material físico ou pictórico recortado no final do livro) possui uma quantidade limitada de peças. No caso da Figura 33 (página 102), dificilmente haverá peças do milhar suficientes para compor uma sequência.

Fonte: elaborado pelo autor.

Os demais significados não foram mencionados no quadro acima, dado a ausência de tarefas.

6.3 ANÁLISE DAS INDICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES DO ÁBACO

Nesta seção apresentamos os casos representativos de indicações do ábaco em tarefas referentes ao SND. Diferentemente dos BBD, que estiveram presentes em todas as coleções, o ábaco aparece em menor quantidade de tarefas e em menos obras. As coleções *Aprender Juntos* e *Buriti* são as que o utilizam em mais tarefas e significados, em vista da maior presença dos

BBD em toda a coleção (vide Quadro 6). No caso das coleções *A Conquista da Matemática* e *Bem-me-quer Mais Matemática*, tarefas com o ábaco são indicadas em apenas dois volumes, enquanto que na coleção *Ápis Mais Matemática* não apresenta indicações.

Em relação à representatividade epistêmica, assim como os BBD, o ábaco não contempla todos os significados de referência do SND. Enquanto material herdado da tradição matemática, tem sido indicado nas coleções para representar sobretudo números (com ênfase na questão posicional) e auxiliar no entendimento de propriedades de algumas operações básicas. Desse modo, as tarefas representativas estão, em sua maioria, no significado cardinal (de representar quantidades) e operacional (em particular, a adição, a subtração e a multiplicação).

6.3.1 Tarefas representativas sobre o uso do ábaco nos diferentes significados de referência do SND

Significado Cardinal

Para atribuir significado cardinal ao uso das representações de ábacos, precisamos considerar dois tipos de situações: no primeiro, o ábaco deve ser utilizado para representar uma quantidade, enquanto o estudante deve escrever simbolicamente o número usando algarismos indo-arábicos; no segundo, o estudante deve desenhar um ábaco que represente um número específico. O sentido da cardinalidade nesses contextos está relacionado à ideia de que o ábaco funciona como um instrumento de representação de quantidades. A seguir, veremos o primeiro caso representativo.

Narração da tarefa: o livro apresenta uma introdução ao ábaco para que o estudante compreenda seu funcionamento (caso ainda não conheça) antes de realizar a tarefa. É introduzido como um instrumento que ajuda a representar os números com base no SND (o que ocorre igualmente nas demais coleções). A imagem mostra que cada haste do ábaco corresponde a uma ordem numérica: unidades, dezenas, centenas e milhares. As anilhas do ábaco valem uma unidade, mas a partir do momento que são colocadas em uma determinada posição, elas passam a representar uma potência de dez, correspondente à posição da haste.

Primeiro, o autor explica na tarefa como os números podem ser lidos e registrados com base nas argolas distribuídas no ábaco, depois, dispõe de exemplos de números representados no ábaco e, logo abaixo da figura do ábaco, a representação simbólica com os algarismos. Na tarefa, o estudante deve observar os ábacos apresentados para registrar o número correspondente em algarismos indo-arábicos nos espaços indicados.

Figura 36 - Tarefa que introduz o ábaco e usa no significado cardinal

O ÁBACO

Você sabia que o ábaco é a mais antiga máquina de calcular?

Na China, ele é chamado de *suanpan*, que significa "prato de cálculo", e há registros dele desde o século XIV.

No Japão, no século XVII, o ábaco chinês foi modificado e batizado de *soroban*. Por volta de 1930, ele sofreu sua segunda adaptação para adequar-se às regras do sistema de numeração decimal.

Até hoje esse ábaco é utilizado no Japão, onde são realizados campeonatos de soroban para descobrir quem é o mais rápido para fazer contas.

Há também ábacos criados para uso escolar. Sua representação no papel pode ser útil. Veja ao lado:

Em um ábaco podemos representar números e realizar operações. Veja alguns números que Eduardo representou em ábacos.

1 Descubra que números estão representados nos ábacos.

a)

152493

b)

271040

Orientações

Se desejar trabalhar o ábaco com os alunos, visite o site: http://paje.fe.usp.br/~labmat/edm321/1999/material/_private/abaco.htm (acesso em: 4 ago. 2021).

Explorar com os alunos a questão do valor posicional no ábaco e no sistema de numeração decimal pode colaborar bastante para o entendimento desse tema (EF05MA01).

Fonte: extratos da coleção Bem-me-quer Mais Matemática, 4º ano (2021, p. 39).

Quadro 16 - Análise da tarefa da Figura 36

Componentes		Indicadores
O B J E T	Situação-problema	Explicação sobre o ábaco e sua função (hastes e argolas) de representar números para, depois, nas atividades, realizar a conversão entre a representação no ábaco e os registros simbólicos.
	Linguagem	Representação do ábaco. Letras que codificam as ordens (U, D, C, UM e DM). Algarismos indo-arábicos. Anilhas coloridas.
	Definição	Valor posicional. Escrita simbólica dos números. Funcionamento do ábaco.

O S P R I M Á R I O S	Procedimentos	Partindo das figuras do ábaco na atividade 1 e observando a disposição das anilhas em cada ordem, deve-se converter o número representado para o registro simbólico.
	Proposições	Cada haste representa uma ordem numérica, portanto, se um número apresenta quatro algarismos, irá ocupar até a quarta ordem da direita para a esquerda. Cada haste do ábaco representa uma ordem numérica (UM, D, C e M).
	Argumentos	A quantidade de argolas presentes em uma haste indica o algarismo referente àquela posição no registro simbólico. Cada haste do ábaco representa uma ordem numérica (UM, D, C e M). Correspondência entre a quantidade de argolas e os valores numéricos das ordens.
Relações		A tarefa relaciona dois tipos de representação: o registro no ábaco e o registro simbólico escrito.
Conflitos semióticos e epistêmicos em potencial		O livro usa o ábaco com argolas de cores diferentes, baseado em suas posições (hastes). Esse fato pode levar os estudantes a pensar que as argolas têm valores unitários diferentes, quando o valor absoluto de cada anilha em um ábaco deve ser sempre um.

Fonte: elaborado pelo autor.

A tarefa anterior ilustra um dos usos mais comuns do ábaco nas coleções que o utilizam, ou seja, como forma de representar as quantidades, articulando-o com o registro escrito para enfatizar o conceito do valor posicional. Uma de suas principais propriedades é que cada anilha inserida, em qualquer haste, tem o valor de uma unidade, mas que passa a valer uma potência de dez, de diferentes ordens de grandeza (Silveira, 2021). Logo, uma argola na haste das centenas conta uma unidade de centena, três argolas na casa das dezenas de milhar contam três unidades de dezenas de milhar, e assim por diante.

Ao observar o primeiro exemplo da tarefa, temos o número 1315 representado em um ábaco. Para isso, a imagem mostra um ábaco com uma (1) anilha na posição das unidades de milhar, três (3) na haste das centenas, uma (1) nas dezenas e cinco (5) nas unidades. Nas duas vezes que o 1 aparece no numeral 1315, sua grafia e valor são idênticos entre si. Dessa forma, espera-se que, no ábaco, as anilhas que estão na ordem das unidades de milhar e nas dezenas, também o sejam. Em uma discussão sobre o uso de ábacos coloridos, Silveira (2016), após apresentar o caso do número 333 e sua representação no ábaco, explica que “como todos os algarismos ‘três’ no número 3.333 são idênticos entre si, as anilhas de um ábaco também devem ser. Em contrário, corre-se o risco de que os alunos atribuam valores às anilhas segundo suas cores, e passem a utilizá-las com valor agregado na cor” (Silveira, 2016, p. 236). Portanto,

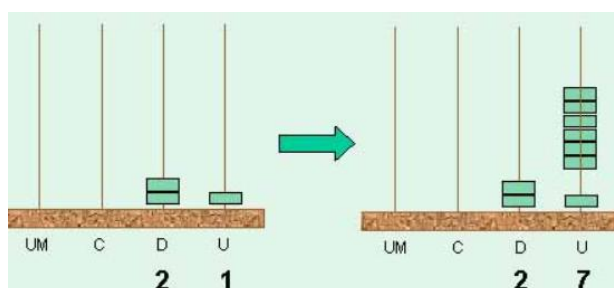
colorir as argolas de acordo com a posição é estragar seu principal objetivo semiótico: o de representar o valor posicional dos algarismos no SND.

Moyer (2001) também discute sobre essa questão ao criticar os apelos físicos e táteis que os manipulativos porventura demonstram. A autora argumenta que “os fabricantes anunciam os manipuladores como materiais que tornarão o ensino e a aprendizagem da matemática ‘divertidos’” (Moyer, 2001, p. 2). Todavia, esses aspectos do material não devem lhes subtrair a eficácia matemática, exatamente o que fazem as diferentes cores das anilhas nos ábacos. Isso vai ao encontro do que Martin (2009) e Uttal *et al.* (2009) defendem. Para eles, ao escolhermos um material para manipulação, é preciso priorizar aquele desprovido de elementos que possam distrair o estudante.

Ao escolhermos um manipulativo para ensinar um objeto matemático, é importante refletirmos sobre seu instrumental e semiótico, ou seja, “é necessário analisar sua eficácia relativa, o espaço e as circunstâncias em que cada manipulativo se revela mais adaptado à função requerida” (Cid; Godino; Batanero, 2003, p. 85, tradução nossa). No caso de colorirmos o ábaco, isso afeta sua função semiótica em relação ao conceito de valor posicional. A função semiótica ocorre na relação de correspondência entre um objeto antecedente (representação) e outro consequente (significado), estabelecida por um sujeito (Godino, 2024). A cor das argolas altera o objeto antecedente que o sujeito deverá interpretar e abre espaço para que significados errôneos sejam produzidos pelo estudante, caracterizando um conflito semiótico em potencial. Vale destacar, que das cinco coleções analisadas nesta tese, a coleção *Bem-me-quer Mais Matemática* é a única que faz uso desse tipo de representação do ábaco, com argolas coloridas

Se observarmos ao lado da tarefa, nas orientações ao professor, existe um *site* sugerido pelo autor para que o docente o acesse, leia suas informações e tenha ideias de como trabalhar com o ábaco. Vejamos:

Figura 37 - Sugestão de como fazer a adição $21 + 6$ usando o ábaco



Fonte: http://paje.fe.usp.br/~labmat/edm321/1999/material/_private/abaco.htm

Percebe-se que, enquanto o *site* mostra um tipo de ábaco de uma só cor, o livro mostra outro, com argolas coloridas. A falta de explicação sobre essa diferença (ou indiferença) reforça o fato de que, para os autores do livro, a cor resulta em um atributo que não interfere no processo.

O exemplo que consta na Figura 36 foi extraído do livro do 4º ano, mas em todos os volumes o ábaco colorido aparece. A seguir, vejamos um exemplo no livro do 5º ano:

Figura 38 - Outro exemplo de tarefa que usa o ábaco para representar números

REPRESENTANDO NÚMEROS NO ÁBACO

AS IMAGENS NÃO ESTÃO PROPORCIONAIS ENTRE SI.

O ábaco é um objeto utilizado pelo ser humano desde a Antiguidade. Ele serve para registrar quantidades e fazer operações com elas.

Cada argola representa uma quantidade, de acordo com a posição em que é colocada no ábaco.

Observe agora outras representações de números em ábacos:

1 Escreva os números que estão representados nos ábacos.

a) 850

b) 5800

c) 8050

Fonte: extratos da coleção Bem-me-quer Mais Matemática, 5º ano (2021, p. 19).

No exemplo superior, o livro descreve o que é o ábaco e representa inicialmente as argolas coloridas para a unidade, a dezena, a centena e a unidade de milhar. Abaixo, coloca mais quatro números representados em ábaco, mas, dessa vez, todos com a cor roxa. Na sequência, solicita que o estudante realize uma tarefa similar à da Figura 36, discutida anteriormente. Vê-se que agora as argolas voltam a ter cores diferentes para cada ordem: vermelho na unidade de milhar, amarelo na centena e azul na dezena. Não há qualquer menção, nas orientações do professor, sobre o porquê as peças mudam de cor ou não nessa tarefa. A partir disso, podemos inferir que a mudança de as argolas serem ora todas da mesma cor, ora separadas pelas ordens, só demonstra o quanto os autores do livro não haviam considerado esse elemento algo relevante, a ponto de usá-lo sem cuidado.

Esse tipo de conflito semiótico surge antes mesmo da prática pedagógica, mas se origina no próprio livro quando “os autores deixam a cargo dos leitores a realização de funções semióticas que não são básicas” (Godino, 2003, p. 6). Inclusive, a falta de orientações aos professores não os prepara para lidar com as possíveis ambiguidades que essas interpretações podem promover.

O modo correto de usar as representações do ábaco em tarefas é, portanto, que todos as anilhas do ábaco tenham sempre a mesma cor, independente da ordem, em todos os volumes da série. Vejamos agora um caso representativo desse uso comum nas demais coleções que optam por não colorir as argolas:

Figura 39 - Uso do ábaco com todas as anilhas da mesma cor

REPRESENTAÇÃO NO ÁBACO

1 FLÁVIA ESTÁ APRENDENDO A REPRESENTAR NÚMEROS USANDO O ÁBACO DE PINOS.

A LETRA U INDICA QUE O PINO REPRESENTA A ORDEM DAS UNIDADES, E A LETRA D INDICA QUE O PINO REPRESENTA A ORDEM DAS DEZENAS.

A PROFESSORA FALOU QUE A LETRA C INDICA A ORDEM DAS CENTENAS E QUE VAMOS APRENDER MAIS SOBRE ESSA ORDEM AINDA NESTE ANO.

AGORA, VEJA O NÚMERO QUE ELA REPRESENTOU NO ÁBACO DE PINOS.

HÁ 2 ARGOLAS NO PINO DAS DEZENAS E 5 ARGOLAS NO PINO DAS UNIDADES. ISSO REPRESENTA 2 DEZENAS E 5 UNIDADES, OU SEJA, 25.

• IDENTIFIQUE O NÚMERO REPRESENTADO NO ÁBACO AO LADO E, DEPOIS, COMPLETE.

HÁ 4 ARGOLAS NO PINO DAS DEZENAS
E 2 ARGOLAS NO PINO DAS UNIDADES.

$40 + 2 = 42$

NO ÁBACO, ESTÁ REPRESENTADO O NÚMERO 42

2 DESENHE ARGOLAS NOS ÁBACOS ILUSTRADOS A SEGUIR PARA REPRESENTAR OS NÚMEROS INDICADOS.

A. 60 B. 47 C. 74

Atividades 1 e 2: Essas atividades permitem aos alunos representar os números no ábaco. Por enquanto, eles vão representar apenas números de dois algarismos; mais adiante, porém, o trabalho será feito com números de três algarismos. Se os alunos construíram o ábaco, amplie as atividades propondo um ditado de números. Você diz o número, e eles o representam no ábaco que construíram. Depois, você representa um número no ábaco para que os alunos digam o número representado.

Fonte: extratos da coleção Aprender Juntos Matemática, 2º ano (2021, p. 39).

Quadro 17 - Análise da Dimensão epistêmica da tarefa da Figura 39

Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	O livro apresenta o uso do ábaco de pinos para representar números nas ordens das unidades, dezenas e centenas. O objetivo é identificar a quantidade de argolas em cada pino para determinar o número representado. Depois, realiza-se o processo inverso.
	Linguagem	Representações do ábaco. Uso de letras para identificar as ordens: U, D e C. Linguagem natural com termos matemáticos, como: “unidade”, “dezena”, “centena” e “ordem”. Algarismos indo-arábicos. Argolas da mesma cor.
	Definição	Valor posicional. Funcionamento do ábaco. Escrita simbólica dos números. Dezena que equivale a dez unidades.
	Procedimentos	Contar as argolas nos pinos indicados em cada ordem para escrever simbolicamente o número. Preencher a lacuna contando quantas argolas há no pino, na ordem das unidades. Desenhar argolas nos pinos do ábaco para representar os números indicados.

I O S	Proposições	A quantidade de argolas no pino das unidades (U) e de argolas no pino das dezenas (D) indica, respectivamente, a quantidade de unidades e dezenas que formam o número.
	Argumentos	O SND é posicional, assim como o funcionamento do ábaco. Cada pino equivale a uma ordem fixa na representação simbólica.
Relações		A tarefa relaciona a conversão entre duas representações em ambos os sentidos: do ábaco ao simbólico e depois do simbólico ao ábaco.
Conflitos semióticos e epistêmicos em potencial		A tarefa não repete a configuração das argolas coloridas, evitando o conflito da relação entre a cor e a posição.

Fonte: elaborada pelo autor.

As demais coleções que usam o ábaco para o significado cardinal seguem um formato de tarefa similar ao caso acima, ativando objetos primários semelhantes. Mas, nessa situação as argolas são sempre da mesma cor, evitando o conflito semiótico discutido anteriormente. A tarefa explorou o ábaco para discutir o valor posicional e a relação com a escrita simbólica com os algarismos indo-arábicos, e também solicitou que os estudantes fizessem o processo inverso (partir do registro com algarismos e desenhar o ábaco). De modo geral, é um modo adequado de usar o ábaco para o significado cardinal. No próximo exemplo, vemos o uso do ábaco usado para ensinar a determinar a quantidade representada a partir da decomposição:

Narração da tarefa: a tarefa apresenta duas representações de números em ábacos com pinos, cada um representando uma classe decimal: dezenas de milhar (DM), unidades de milhar (UM), centenas (C), dezenas (D) e unidades (U). O aluno deve observar os ábacos, identificar o número representado e completar as lacunas com a decomposição desse número em suas diferentes ordens. Além disso, solicita-lhe que escreva o número completo resultante da soma do valor relativo de cada ordem.

Figura 40 - Tarefa que usa o ábaco para trabalhar o valor relativo

4 Observe os números representados em cada ábaco e complete as lacunas.

a.

O número representado tem 3 dezenas de milhar, 9 unidades de milhar, 7 centenas, 5 dezenas e 2 unidades.

$$30\,000 + 9\,000 + 700 + 50 + 2 = 39\,752$$

b.

O número representado tem 2 dezenas de milhar, 3 unidades de milhar, 1 centena, 9 dezenas e 7 unidades.

$$20\,000 + 3\,000 + 100 + 90 + 7 = 23\,197$$

• **Atividade 4:** Essa atividade trabalha com o reconhecimento de números representados no ábaco e com a composição desses números, sendo que todos eles são da ordem das dezenas de milhar. Se achar conveniente, peça aos alunos que leiam, em voz alta, o número representado, para treinar a leitura por extenso dos números.

Fonte: extratos da coleção Aprender Juntos Matemática, 4º ano (2021, p. 22).

Quadro 18 - Análise da tarefa da Figura 40

Componentes		Indicadores
O B J E	Situação-problema	Observar os diferentes números representados pelo ábaco aberto e preencher as lacunas.
	Linguagem	Representação do ábaco. Representação simbólica com algarismos. Termos matemáticos específicos relacionados ao SND, como “dezenas de milhar”, “unidades de milhar”, “centenas”, “dezenas” e “unidades”. Sinais de adição e igualdade.

T O S P R I M Á R I O S	Definição	Valor posicional. Decomposição numérica: um número é composto pela soma do valor relativo de cada ordem. Operação de adição, multiplicação (dentro do valor relativo) e igualdade.
	Procedimentos	Observar o ábaco e contar a quantidade de argolas de cada pino para preencher as lacunas que pedem as quantidades de cada ordem. Em seguida, calcular o valor relativo para a composição numérica e a soma final.
	Proposições	A quantidade absoluta de unidades em cada ordem é multiplicada por potência dez, da direita para a esquerda, respectivamente, por: 1, 10, 100, 1000 e 10000.
	Argumentos	Cada pino equivale a uma ordem específica do SND. Princípio da adição das ordens para compor números.
Relações		Conexão entre os diferentes registros (ábacos, decomposição e número completo).
Conflitos semióticos e epistêmicos em potencial		Não se identificaram conflitos em potencial.

Fonte: elaborada pelo autor.

Essa tarefa tem um caráter introdutório e reforça o entendimento do valor posicional e da decomposição de números no SND. Trabalhar essa relação da representação no ábaco e depois a composição simbólica é favorável para a compreensão da formação do número, de modo que essa tarefa é adequada para o respectivo fim. A pesquisa de Vece, Silva e Curi (2013), ao aplicar tarefas sobre o SND em turmas de 5ª ano dos Anos Iniciais, identificou que muitos estudantes apresentam dificuldades na composição do número na ordem da dezena de milhar, e que “a construção do conceito acerca do valor posicional não é linear, mas, sim, desestruturado na ampliação da grandeza numérica” (Vece; Silva; Curi, 2013, p. 231). A compreensão das crianças acerca das noções de agrupamento e da contagem de agrupamentos é gradativa, e parece desenvolver-se primeiramente com números da ordem das dezenas (Brandt, 2005).

No caso aqui analisado, a tarefa apresenta clareza e auxilia no trabalho com a composição dos números, sendo esse objetivo reforçado nas orientações ao professor. Cabe a ele verificar se o aluno consegue realizar a conexão entre os diferentes registros (ábacos, decomposição e número completo) sem inconsistências, evitando possíveis incompreensões. Não foram identificados conflitos semióticos em potencial.

Significado Operatório

Figura 41 - Tarefa que usa o ábaco para introduzir uma nova ordem

Centenas de milhar inteiras

1 O hodômetro de um veículo mostra quantos quilômetros ele já percorreu. Observe a imagem ao lado.
Após o veículo percorrer mais 1 quilômetro, que número esse hodômetro vai indicar?
Para responder a essa pergunta, vamos representar essa situação usando o ábaco de pinos. Acompanhe a sequência de trocas.

CM DM UM C D U
99 999 + 1

Trocamos 10 unidades por 1 dezena.

Trocamos 10 dezenas por 1 centena.

Trocamos 10 centenas por 1 unidade de milhar.

Trocamos 10 unidades de milhar por 1 dezena de milhar.

Trocamos 10 dezenas de milhar por 1 centena de milhar e obtemos 100 000 (cem mil).

• Agora, complete: Após o carro percorrer mais um quilômetro, o hodômetro vai indicar o número 100 000.

• As atividades desse tema abordam os números da ordem das centenas de milhar e exploram a leitura, a escrita e a representação dos números naturais de maneiras diversas, como representação no ábaco de pinos e no quadro de ordens. O valor posicional também é retomado.

• **Atividade 1:** O foco dessa atividade é identificar a ordem da centena de milhar utilizando a representação no ábaco para mostrar as trocas realizadas quando se acrescenta uma unidade ao número 99 999.

Fonte: extratos da coleção Aprender Juntos Matemática, 5º ano (2021, p. 17).

Quadro 19 - Análise da tarefa da Figura 41

Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	A tarefa propõe uma situação contextualizada, usando o hodômetro de um veículo para explorar, na introdução, a ordem das centenas de milhar inteiras, em particular, o resultado de $99999 + 1$.
	Linguagem	Representação do ábaco. Símbolos indo-arábicos. As argolas desvanecendo (as cores ficam mais claras como se estivessem transparecendo) e circuladas com vermelho indicam que estão sendo trocadas para outro pino. Linguagem natural guiando a explicação, com termos matemáticos: unidade, dezena, centena etc.
	Definição	Valor posicional. Funcionamento das trocas e agrupamentos das argolas do ábaco. Operação da adição. Ordem da centena de milhar.
	Procedimentos	Seguir a leitura da situação apresentada, identificando o número 99999 no ábaco. Em seguida, observar o que acontece quando uma argola é adicionada ao pino das unidades, representando a adição $+ 1$. Acompanhar as trocas a partir dessa soma para obter a representação final.
	Proposições	Cada 10 unidades em uma ordem, resulta em 1 unidade na ordem imediatamente superior.
	Argumentos	Uma nova ordem é inserida quando todas as ordens anteriores atingem seu limite de 9 e, com isso, uma unidade é adicionada à próxima ordem superior.
Relações		Relação entre a soma simbolizada por algarismos e a forma de manipular o ábaco.
Conflitos semióticos e epistêmicos em potencial		Não identificado (desde que o estudante compreenda a função do zero).

Fonte: elaborado pelo autor.

Esse tipo de tarefa que utiliza o ábaco para inserir uma nova ordem está presente em todas as coleções, com exceção da *Ápis Mais Matemática*. Ainda que nas demais tarefas a ordem introduzida seja outra (centenas ou milhares), os objetos primários envolvidos são os que configuram a dimensão epistêmica, sendo semelhantes. Para resolver essa tarefa, o estudante precisa entender previamente o funcionamento das trocas e os agrupamentos de dez, assim como a ideia do valor posicional (conforme mencionado nas orientações ao professor).

O uso do ábaco, nesse tipo de tarefa, contribui não só para uma nova ordem por meio de um numeral, mas também evidencia a função do zero na representação indo-arábica. Vê-se que na explicação da tarefa, quando ocorre a troca de 10 argolas de uma ordem para formar 1 unidade da ordem imediatamente superior, o pino da ordem anterior fica sem argolas. Na posição relativa ao pino sem argolas, no registro simbólico, o zero indicou a ausência de valor

relativo naquela ordem. Compreender esse processo não é simples, como mostra o estudo feito com crianças de Pina e Pinheiro (2024), que após suas análises concluíram que muitos estudantes ainda se confundem ao lidar com o zero em um numeral. Já na pesquisa com estudantes de Vieira, Silva e Possamai (2023, p. 7), as autoras constataram que a leitura e a escrita de números com a presença do zero eram mais difíceis e que, além disso, “alguns estudantes escreviam 1006, apresentando a representação do número cem e do número seis devido à forma como falado, ‘cento e seis’”. No intuito de auxiliar a compreensão do zero, a tarefa anterior conduz o professor a uma forma de contornar essas dificuldades, pois, caso contrário, tais questões implicariam em obstáculos no trabalho com o significado operatório dos números.

A seguir, apresentamos uma nova tarefa agora da coleção *Buriti*, que representa o modo como o ábaco é articulado com as operações:

Narração da tarefa: a tarefa é uma explicação do livro mostrando ao estudante como resolver a subtração $7142 - 3516$. Primeiro, o cálculo é realizado utilizando o ábaco, que ilustra o processo de trocas e subtração passo a passo. Depois, o mesmo cálculo é mostrado usando o algoritmo usual da subtração. O objetivo é mostrar de forma visual (e física se for replicada concretamente) os agrupamentos que ocorrem nas operações e ao mesmo tempo, comparar as duas abordagens:

Figura 42 - Tarefa que trabalha o significado operacional (subtração com reserva)

1 Veja duas maneiras de calcular o resultado de $7142 - 3516$.

Cálculo com o ábaco

Representamos 7142 no ábaco para subtrair 3516.

Não dá para retirar 6 unidades de 2 unidades, nem 5 centenas de 1 centena.

Então, trocamos 1 dezena por 10 unidades e 1 milhar por 10 centenas.

Subtraímos 6 unidades, 1 dezena, 5 centenas e 3 unidades de milhar.

Restam 3 unidades de milhar, 6 centenas, 2 dezenas e 6 unidades.

Cálculo com o algoritmo usual

O algoritmo usual segue a mesma sequência do cálculo com o ábaco. Observe:

Atividade 1

Nesta atividade, é possível dar significado ao algoritmo da subtração por meio da associação de seus diversos passos com as etapas dos procedimentos utilizados para efetuar essas operações no ábaco. A atividade também permite aprimorar a compreensão dos estudantes sobre as operações de adição e subtração.

Sugira a eles que, antes de resolver as subtrações, expliquem as duas maneiras de calcular o resultado da subtração $7142 - 3516$. Incentive-os a propor outros métodos de resolução.

Fonte: extrato da coleção Buriti, 4º ano, (2021, p. 48).

Quadro 20 - Análise da tarefa da Figura 42

Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	Tarefa que apresenta um exemplo de como resolver uma subtração com trocas por meio do ábaco, e em seguida, pelo algoritmo usual.
	Linguagem	Representação do ábaco. Representação simbólica e os passos do algoritmo usual. Símbolos específicos, como: U, D, C e UM. Linguagem natural explicando como trabalhar no ábaco e no algoritmo.
	Definição	Subtração com reserva. Valor posicional. Agrupamento e troca de dez. Funcionamento da operação de subtração no ábaco e no algoritmo.
	Procedimentos	Acompanhar as estratégias de resolução da subtração pelo ábaco, observando o que ocorre no caso da subtração com reserva. Comparar a resolução no algoritmo tradicional.
	Proposições	A subtração começa pela ordem de menor valor, como, no caso dos números naturais, as unidades, seguindo para as dezenas e assim por diante. Quando o número a ser subtraído for maior do que o disponível em uma determinada ordem, é preciso realizar o desagrupamento: uma unidade da ordem imediatamente superior é convertida em 10 unidades na ordem inferior, permitindo que a subtração seja realizada.
	Argumentos	Para realizar a subtração no algoritmo usual, os algarismos são organizados de forma a respeitar a posição das ordens, ou seja, unidade em cima de unidade, dezena em cima da dezena e assim por diante.
Relações		A tarefa ilustra a equivalência entre as representações do ábaco e do registro simbólico no algoritmo escrito, mostrando que o princípio subjacente (o sistema decimal e as trocas) é comum em ambas. E, portanto, o ábaco pode dar uma substância às noções abstratas envolvidas no algoritmo apresentado.
Conflitos semióticos e epistêmicos em potencial		Não foram identificados conflitos em potencial.

Fonte: elaborado pelo autor.

O ábaco é utilizado aqui como uma ferramenta visual para representar os números e ajudar os alunos a compreenderem o processo de subtração, especialmente quando é necessário remanejar dez unidades de outra ordem. O ábaco permite à criança ver quantas unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar existem em um número. Isso reforça o entendimento do sistema decimal posicional. Não é possível subtrair diretamente (por exemplo: não dá para tirar 6 de onde só há 2 disponíveis), uma vez que o ábaco mostra fisicamente o que acontece: troca-se 1 dezena por 10 unidades, ou então, 1 milhar por 10 centenas.

A sequência do cálculo com o ábaco apresentado na tarefa reflete a sequência usada no algoritmo usual e ajuda na transição entre um procedimento concreto (mover as anilhas) e um pensamento mais abstrato. Esse processo, chamado por Fyfe e Nathan (2019) como o “desvanecimento da concretude”¹⁶, tem como pressuposto a ideia de que a compreensão conceitual envolve diferentes estágios de idealização, partindo de situações ou materiais concretos e retirando, gradativamente, aspectos da “concretude”, de modo a tornar o objeto mental. O uso do ábaco, como na tarefa anterior, pode contribuir como um estágio concreto para construir elementos voltados ao estágio mais idealizado (simbólico).

E para que esse uso seja exitoso, vale novamente destacar o papel do professor ao apresentar e utilizar os manipulativos. As práticas com qualquer manipulativo devem considerar situações que “considerem explicitamente os processos, capacidades ou competências matemáticas, juntamente com outras questões como a gestão dos erros dos alunos ou a promoção da comunicação e da representação” (Alsina; Bosch, 2025, p. 15).

Além disso, assim como consta nas orientações ao professor para essa tarefa, é preciso saber associar o mecanismo do ábaco ao funcionamento do algoritmo usual, e ainda, deixar em aberto outras formas de calcular a subtração, pois nem todo o estudante pode precisar do ábaco e adotar outras estratégias de resolução. Nesse sentido, Uttal *et al.* (1997) reforçam que:

Usar manipulações em uma sala de aula sem garantir que os alunos compreendam completamente sua relação com os conceitos matemáticos que estão sendo ensinados pode ser contraproducente. Por um lado, o tempo e o esforço necessários para dominar os manipuladores seria tempo e esforço não dedicados a aprender os conceitos em primeiro lugar. Por outro lado, a justaposição de dois sistemas que as crianças estão aprendendo separadamente pode ser confusa e impedir seu progresso no sistema alvo-matemática. (Uttal; Scudder; DeLoache, 1997, p. 47).

Significado Sequencial

Em relação ao significado sequencial com o uso do ábaco, identificamos tarefas em duas coleções: *A Conquista da Matemática e Aprender Juntos*. Os casos são parecidos, usando o ábaco para representar números antecessores e sucessores de números em uma determinada sequência. A seguir, apresentamos a tarefa mais representativa.

Narração da tarefa: o livro inicia um novo tópico para trabalhar a sucessão de números naturais até 99. Primeiro, solicita que o estudante observe a sequência dos números 50, 51 e 52

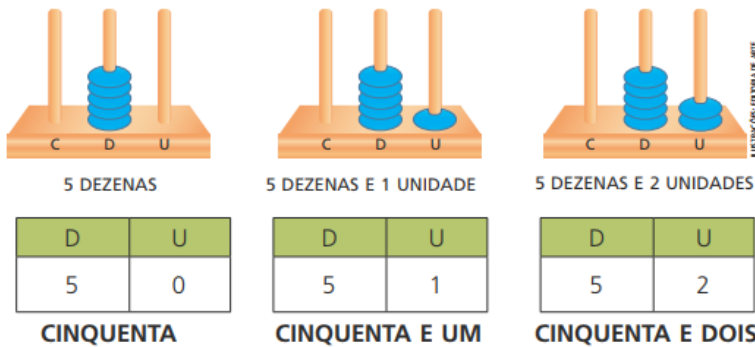
¹⁶ Em inglês, no original, *Concreteness Fading*. Usamos a tradução que consideramos a mais apropriada, pois entendemos que a concretude se relaciona com qualquer característica física ou visual que busque indicar um objeto.

representados simbolicamente no QVL, por escrito e por meio do ábaco. Ele deve completar as sequências e preencher os quadrinhos em branco para, depois, colorir o número que representa a dezena completa daquela linha:

Figura 43 - Tarefa que usa o ábaco para trabalhar a ideia de sucessor

SUCESSÃO DOS NÚMEROS NATURAIS ATÉ 99

1. OBSERVE A SEQUÊNCIA DE NÚMEROS REPRESENTADOS NOS ÁBACOS E FAÇA O QUE SE PEDE.



• COMPLETE ESTA SEQUÊNCIA.

50	51	52							
----	----	----	--	--	--	--	--	--	--

• QUAIS SÃO OS NÚMEROS QUE FALTAM NOS QUADRINHOS ABAIXO? COMPLETE ESTAS SEQUÊNCIAS.

60	61	62							
70	71	72							
80	81	82							
90	91	92							

• PINTA DE VERDE AS DEZENAS EXATAS EM CADA SEQUÊNCIA NUMÉRICA. DEPOIS, PINTA DE AZUL O MAIOR NÚMERO DE CADA SEQUÊNCIA.

BNCC
(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo.
(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos presentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

OBJETIVOS

- Ler números até 100 representados em ábacos de pinos e em Quadros de ordem.
- Completar os números faltantes em sequências numéricas crescentes.
- Reconhecer dezenas exatas.
- Comparar números naturais até 100.
- Reconhecer os números que vêm imediatamente antes ou imediatamente depois de determinado número.
- Realizar adições com apoio da reta numérica.

Fonte: extratos da coleção A Conquista da Matemática, 2º ano (2021, p. 56).

Quadro 21 - Análise da tarefa da Figura 43

Componentes		Indicadores
O B J	Situação-problema	Introdução do livro para explorar a sucessão dos números naturais no intervalo de 50 a 99. Apresenta-se separadamente a sequência das dezenas, quando os três primeiros termos são dados pela tarefa para que se complete o resto.

E T O S P R I M Á R I O S	Linguagem	Representações do ábaco. Símbolos indo-arábicos. QVL. Números por extenso. Termos matemáticos em linguagem natural como unidade, dezena, sequência e maior, assim como as letras D e U.
	Definição	Sequência numérica. Valor posicional. Dezenas completas.
	Procedimentos	Leitura e observação dos exemplos iniciais. Sequência numérica imediatamente posterior ao número inicial dado. Marcação colorida de números em categorias específicas (as dezenas exatas e o maior número da sequência).
	Proposições	O sucessor de um número natural é obtido acrescentando uma unidade, o que, no ábaco, representa uma anilha a mais na haste que a representação da posição das unidades (U).
	Argumentos	As dezenas exatas (que devem ser coloridas de verde) têm o algarismo 0 na posição das unidades. Os maiores números de cada sequência (que devem ser coloridos em azul) são os números que apresentam o algarismo 9 na posição das unidades.
Relações		O ábaco como representação para ser usado ao longo do preenchimento da sequência. Embora não seja obrigatório o estudante usá-lo para responder à tarefa, as orientações dadas ao professor indicam que ele pode ajudar os estudantes.
Conflitos semióticos e epistêmicos em potencial		Não foram identificados conflitos em potencial.

Fonte: elaborado pelo autor.

A indicação do ábaco na tarefa anterior representa o modo como as coleções o utilizam para trabalhar ideias relacionadas a sequências numéricas, principalmente sobre o antecessor e o sucessor. Nesse exemplo em particular, o objetivo era preparar para introduzir a centena (que acontece algumas páginas posteriores). Conforme observam Curi, Santos e Rabelo (2012), é importante garantir a formação das dezenas inteiras até 99, assim como o ordenamento dos números, para que seja possível inserir a próxima ordem (centenas).

Nas orientações ao professor, dentre os objetivos da tarefa, menciona-se: “ler números até 100 representados em ábacos de pinos e no Quadro de Ordens”. Contudo, tanto do ponto de vista matemático quanto didático, o papel do ábaco, nesse tipo de situação, não é claro, uma vez que os estudantes podem completar os espaços em branco das sequências sem a necessidade de usar o manipulativo. Inclusive, as sequências numéricas que devem ser preenchidas pelos estudantes nem chega a precisar de reagrupamento. No caso da sequência que inicia no 50, termina em 59 e no número 60 já aparece na linha seguinte, ou seja, no fim, o estudante só irá manipular a ordem das unidades.

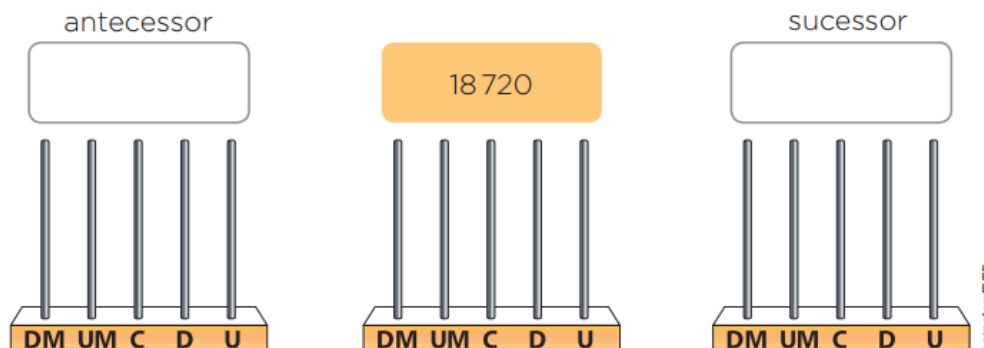
Entendemos que os manipulativos têm muito a contribuir no ensino do SND, porém, seu uso tem que ter uma intencionalidade e fazer sentido para o conceito trabalhado. Além disso, eles devem ser usados para introduzir ideias, mas com o tempo, o estudante precisa operar simbolicamente. Os estudos de Fyfe e Nathan (2019) e Fyfe *et al.* (2014) vão nesse encontro, enfatizando que os manipulativos devem ser o início, mas nunca o fim. Os autores apresentam estudos que relaciona materiais físicos e pictóricos de modo a promover a abstração e chegar à compreensão simbólica. A partir desses autores, Sabel e Silveira (2022) apresentam uma reflexão sobre os processos de abstração que partem de manipulativos e entendem que “as experiências concretas físicas ou pictóricas formam uma base de imagens mentais que o estudante pode recorrer para compreender conceitos futuros (p. 16). A partir de tais compreensões, podemos dizer que o ábaco usado na tarefa anterior é desnecessário, uma vez que no segundo ano, os estudantes já devem ser capazes de completar as sequências do tipo 50 à 59, sem necessitar de um recurso físico.

Ao lermos as orientações disponíveis ao professor, abaixo dos objetivos da tarefa, temos a indicação das habilidades da BNCC (2018) vinculadas a essa parte do livro. Uma delas é a EF01MA07, que menciona o “suporte de material manipulável”. A habilidade deixa em aberto a escolha de qual material será usado para contemplar essa habilidade, sendo que, nesse caso, o autor escolheu indicar o ábaco, embora não apresente orientações de como usá-lo na tarefa. Isso reforça o que Nilles e Leite (2023) explicam sobre os impactos da BNCC (2018) na construção das propostas pedagógicas dos LD, em particular, na obrigação das coleções em contemplar todas as habilidades ao longo dos volumes.

Desse modo, a função do ábaco aqui é, no máximo, agir como uma representação auxiliar (Sabel; Silveira, 2023), ou seja, oferecer uma visualização que complementa a representação principal (que, nesse caso, é a indo-arábica). Não há nenhum erro, ambiguidade ou conflito no uso das representações do ábaco nessa tarefa (e nas outras em relação ao significado sequencial). Mas fica em aberto se tais indicações têm algum potencial didático ou se estão aqui apenas para contemplar as diretrizes da BNCC (2018). De modo similar, a coleção *Aprender Juntos* faz um uso semelhante:

Figura 44 - Uso do ábaco para trabalhar sucesso e antecessor

- 3 Complete os quadros com o que se pede e, depois, represente os números dos quadros nos ábacos.



Fonte: extrato da coleção Aprender Juntos Matemática, 4º ano (2021, p. 13).

A tarefa anterior é destinada ao estudante do 5º ano, durante o ensino de números com cinco algarismos. Embora não haja erros nesse tipo de uso, podemos considerar que os estudantes desse período já tenham compreendido o funcionamento do SND e a ideia de sucessor e antecessor. A diferença aqui é que para identificar o antecessor do 18720, será preciso realizar um reagrupamento, mas ainda assim, não é necessário usar o ábaco neste momento, considerando que a ideia das trocas de dez já vem sendo trabalhada desde o 1º ano.

Conforme propõem Carbonneau *et al.* (2013), o ideal é que, com o tempo, eles deixem os manipulativos de lado conforme “desenvolvem a capacidade de raciocinar abstratamente e [que] possam se beneficiar do ensino que consiste exclusivamente em representações simbólicas” (Carbonneau *et al.*, 2013, p. 4). O estudante do 5º ano já deve ser capaz de identificar o antecessor e o sucessor se precisar do apoio do ábaco (ou de outro material), uma vez que nos anos anteriores já temos tarefas especificamente para trabalhar tais ideias.

Significado Ordinal, de Medida e Simbólico

Assim como no caso dos BBD, não identificamos tarefas que pudessem ser consideradas e projetadas para se trabalhar com o significado ordinal, de medida e simbólico, o que já era esperado. Isso mostra que a representatividade (complexidade) epistêmica do SND que o ábaco proporciona se volta, especificamente, à questão da cardinalidade, às operações e, em menor grau, às sequências.

6.3.2 Síntese das tarefas representativas sobre o uso do ábaco

Conforme a análise inicial constante no Quadro X, os ábacos estão presentes em, ao menos, três volumes de cada coleção. De fato, é o material com maior recorrência e com maior representatividade de tarefas. Em relação aos significados de referência do SND, sua maior presença está no significado operacional, seguido do cardinal. Em relação às sequências numéricas, identificamos poucas situações, enquanto que os significados de medida, simbólico e ordinal não acarretaram tarefas para que pudéssemos analisar a dimensão epistêmica.

No que diz respeito ao **significado cardinal**, o ábaco é mobilizado como um instrumento de representação de quantidades, estabelecendo uma correspondência direta entre a quantidade de argolas e o valor simbólico numérico. A análise denuncia um conflito semiótico importante em coleções que utilizam argolas coloridas para representar diferentes ordens, o que pode induzir os estudantes a atribuir valores às cores e não às posições. Essa prática compromete o principal objetivo semiótico do ábaco: a representação do valor posicional por meio da posição fixa das ordens. Por outro lado, coleções que utilizam argolas unicolors evitam esse tipo de ambiguidade, permitindo uma articulação mais clara entre as diferentes representações do número.

No **significado operatório**, o ábaco é utilizado para reforçar os princípios estruturantes do SND, como a decomposição e a composição numérica com base nas potências de dez. As tarefas analisadas evidenciam o processo de agrupamento e trocas de ordens, sendo particularmente eficazes para representar operações, como a adição e a subtração com reserva. Além disso, destaca-se o potencial do ábaco para explicitar o papel do zero como um marcador de ausência de valor em determinadas ordens, aspecto que configura uma fonte de dificuldade frequente entre os estudantes. Nessas tarefas, a equivalência entre o ábaco e o algoritmo escrito é valorizada, permitindo múltiplas entradas conceituais para o mesmo conteúdo.

Quanto ao **significado sequencial**, o ábaco é utilizado para apoiar a compreensão de sucessores e antecessores, geralmente em sequências numéricas até 99 ou 999. Contudo, a análise evidencia que esse uso é, muitas vezes, superficial e desnecessário, já que os estudantes são capazes de resolver essas tarefas apenas com base na representação simbólica. A inclusão do ábaco, nesse contexto, parece responder mais a uma exigência normativa (como a BNCC) do que a uma necessidade didática real. Nesses casos, o ábaco atua como uma representação acessória, sem protagonismo na construção do conceito. No quadro a seguir, sistematizamos a análise:

Quadro 22 - Síntese da análise do ábaco

ÁBACO	
Significado Cardinal	
Principais objetos primários envolvidos	Situações em que o ábaco está indicando uma quantidade e o estudante deve representar o número simbolicamente com os algarismos. Articulação da representação do ábaco com a escrita com algarismos, enfatizando a questão posicional. A função do zero em um numeral.
Conflitos semióticos em potencial	O autor usa o ábaco com argolas de cores diferentes, baseado em suas posições (hastes). Esse fato pode levar os estudantes a pensar que as argolas têm valores unitários diferentes, considerando que o valor absoluto de cada uma sempre deve ser um.
Sugestões de melhoria	Apresentar o ábaco para o estudante, explicar seu funcionamento e indicar ao professor que faça o mesmo com o material físico. Manter um padrão na forma de representar o ábaco e não colorir as anilhas com cores diferentes. Nos casos em que a escola só tiver ábacos coloridos, é possível, juntar as anilhas da mesma cor em um único ábaco e fazer diversos ábacos cada um de uma cor.
Significado Operatório	
Principais objetos primários envolvidos	Situações em que o ábaco é usado para explicar as trocas e os agrupamentos, assim como o funcionamento dos algoritmos usuais. Uso articulado ao QVL e explicações em linguagem natural. Desenhos de setas e anilhas desvanecendo para indicar a mudança de haste. Argumentos e proposições sobre as regras do SND.
Conflitos semióticos em potencial	Nos casos apresentados não se identificaram conflitos em potencial. Neles, o ábaco tinha apenas uma única cor. Vale destacar que o sucesso das tarefas depende da condução do professor, pois somente observar os desenhos pode não ficar claro para demonstrar como ocorre a troca das anilhas.
Sugestões de melhoria	Garantir que, nas orientações ao professor, esteja claro como usar o ábaco, quais propriedades destacar e como fazer caso não haja material físico na escola. Apenas uma coleção sugeriu o ábaco virtual, o qual poderia ser indicado nas demais coleções diante da ausência do recurso físico.
Significado de Sequência	
Principais objetos primários envolvidos	Abordados por meio de tarefas que envolvem a ordenação de números naturais, especialmente antecessores e sucessores. As tarefas apresentam uma sequência numérica (ou parte dela) expressa de diferentes formas: no ábaco, por extenso e com algarismos indo-arábicos. Depois, é preciso completar a sequência.
Conflitos semióticos em potencial	Embora não haja conflitos em potencial, a função do ábaco, nessas tarefas, não é muito clara. Apesar de o ábaco estar presente, ele não é necessário para resolver as tarefas, pois o aluno pode responder apenas com base na contagem ou no conhecimento simbólico.
Sugestões de melhoria	Indicar o ábaco de modo que seu uso faça sentido e seja necessário para a tarefa. Colocá-lo sem motivo sugere que esteja ali apenas para o cumprimento da diretriz curricular (como a BNCC). Em outras palavras, o material está ali para servir de “enfeite” na tarefa e não para mobilizar o estudante a produzir um pensamento matemático.

Fonte: elaborado pelo autor.

6.4 ANÁLISE DAS INDICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES DO DINHEIRINHO

Apresentamos agora os casos representativos de indicações do dinheirinho em tarefas referentes ao SND. Conforme consta do Quadro 7, está presente em todas as cinco coleções, em diferentes volumes. É constituído por réplicas (em tamanhos reduzidos) das notas da moeda corrente no Brasil. O dinheirinho é um material retirado do cotidiano que, para ser utilizado de forma significativa, deve respeitar a lógica de sua função social, considerando a maneira como é empregado nas situações do dia a dia.

Esse tipo de material manipulativo não se configura como posicional, pois o valor das cédulas não depende de uma posição. Seu valor foi agregado por meio de alguma convenção, ou seja, os modelos das notas, excetuando os numerais impressos, não têm em si atributos físicos que possam identificar o número que representam, salvo se o indivíduo já conhecer a convenção (por exemplo, ao chegar a um país estrangeiro pela primeira vez, não necessariamente uma pessoa saberá o valor de uma cédula vendo apenas sua cor. Será necessário que veja o numeral impresso nela para que saiba o valor que representa) (Silveira, 2021). O valor de cada cédula foi convencionado pelo sistema monetário de cada país ao qual os modelos de cédulas pertencem.

Do mesmo modo que os BBD não são posicionais, uma vez que as notas mantêm seu valor independentemente da forma como são guardadas ou arrumadas, em relação à representatividade epistêmica, esse material também não contempla todos os significados de referência do SND, com destaque para o significado cardinal e operacional.

6.4.1 Tarefas do dinheirinho nos diferentes significados do SND

Significado Cardinal

O critério para classificar as tarefas do significado cardinal é a utilização de imagens das notas ou moedas do dinheirinho como forma de representar quantidades. Isso pode ocorrer em dois sentidos: quando a quantidade já está representada simbolicamente de maneira prévia, como identificar as cédulas que representam o numeral 150, por exemplo, e também inversamente, quando mostram representações do dinheirinho para que o numeral seja escrito por meio dos algarismos. Aqui não estão contempladas as tarefas que se centram em alguma operação matemática ou em conceitos de posição e agrupamento. A seguir, temos a primeira tarefa representativa desse significado.

Narração da tarefa: o livro apresenta uma situação-problema que exige a operação de subtração dos valores R\$ 3664 - R\$ 3350. A resolução obtida utiliza o algoritmo da subtração organizado de duas formas diferentes: primeiro, os algarismos são dispostos em um QVL, enquanto a mesma representação simbólica é posta ao lado, mas sem o quadro. Logo abaixo há uma explicação sobre o passo a passo da resolução da subtração, seguindo a ordem das unidades até as dezenas de milhar. Até esse momento, o estudante pode fazer a leitura dessa situação sem precisar preencher nenhum campo. Em seguida, a tarefa solicita-lhe que circule as cédulas do dinheirinho que correspondem ao valor 214.

Figura 45 - Tarefa que usa o dinheiro para o significado cardinal

3ª situação: Paula e Gilberto estão economizando para comprar um carro. Neste mês, Paula economizou 3564 reais, e Gilberto, 3350 reais. Quantos reais Paula economizou a mais que Gilberto?

Para resolver essa situação, podemos calcular a subtração $3564 - 3350$. Para isso, podemos usar o algoritmo:

UM	C	D	U
3	5	6	4
-	3	3	5
0	2	1	4

ou

3	5	6	4
-	3	3	5
0	2	1	4

- 4 unidades - 0 unidade = 4 unidades
- 6 dezenas - 5 dezenas = 1 dezena
- 5 centenas - 3 centenas = 2 centenas
- 3 unidades de milhar - 3 unidades de milhar = 0 unidades de milhar

Paula tem 214 reais a mais que Gilberto.

- Contorne as cédulas e moedas que representam a quantia que Paula economizou a mais que Gilberto.



OBJETIVOS

- Identificar as ideias de completar e de comparar referentes à operação de subtração.
- Utilizar a reta numérica como apoio para construir fatos relacionados à subtração.
- Efetuar cálculos de subtração, sem troca, utilizando o algoritmo convencional.
- Identificar valores monetários relacionados aos problemas estudados.

Fonte: extratos da coleção A Conquista da Matemática, 3º ano (2021, p. 109).

Quadro 23 - Análise da tarefa da Figura 45

Componentes		Indicadores
O B J	Situação-problema	A tarefa apresenta um contexto em que duas pessoas economizam dinheiro para comprar um carro. Os valores economizados são 3.564 reais para Paula e 3.350 reais para Gilberto. O problema pede que o estudante determine a diferença entre os valores economizados.

E T O S P R I M Á R I O S	Linguagem	Representação das cédulas do dinheirinho. Algarismos indo-arábicos. QVL para resolver a operação. Símbolos da subtração e da igualdade. Letras C, U, D e UM. Termos em linguagem natural (unidades, dezenas, centenas etc.).
	Definição	Funcionamento do algoritmo da subtração. Valor posicional. Valor das cédulas e moedas do Real (R\$). Composição numérica.
	Procedimentos	Após a leitura e compreensão da situação, o estudante deve observar as notas e moedas representadas e circular quais e quantas são necessárias para compor a quantidade 214.
	Proposições	Cada nota e cada moeda do dinheirinho têm um valor convencionado. Para compor o número 214 é preciso selecionar notas que somem duas centenas com duas dezenas e quatro unidades (o que pode acontecer de mais de uma maneira).
	Argumentos	Situações que envolvem a ideia de diferença entre duas quantidades têm relação com a operação de subtração.
Relações		A tarefa em si atribui a conversão entre a representação simbólica (214) e a representação pictórica do dinheirinho.
Conflitos semióticos e epistêmicos em potencial		A tarefa não demonstra erros conceituais e utiliza adequadamente o dinheirinho.

Fonte: elaborado pelo autor.

O uso do dinheirinho, na tarefa anterior, objetiva identificar valores monetários, conforme as orientações do professor ao lado. Embora o contexto da tarefa seja a operação de subtração (significado operacional), o material não é usado durante as explicações do algoritmo, por isso, sua indicação não está diretamente relacionada à ideia da subtração. O estudante deve reconhecer os valores das cédulas e moedas do dinheirinho para poder representar certa quantidade, o que remete à ideia do significado cardinal.

Utilizar o dinheiro para reconhecer e estabelecer relações de quantidade é comum em todas as coleções analisadas. E esse uso é justificado, pois o dinheiro tem uma função social que já faz parte da cultura do estudante. Segundo Godino, é importante fazer emergir, quando possível, práticas matemáticas que se relacionem com a cultura, já que, “apesar dos objetos matemáticos terem uma existência conceitual/mental, quando olhamos para os significados institucionais escolares, seu modo de existência é cultural” (Godino, 2004, p. 72, tradução nossa). Além disso, “estudos mostram que a compreensão profunda e a capacidade de transferir e aplicar conhecimentos a novas situações exigem uma aprendizagem baseada na experiência

direta e concreta” (Ojose; Sexton, 2009, p. 13). O dinheirinho, portanto, pode contribuir nesses aspectos.

É possível identificar outros casos semelhantes ao longo das coleções, como veremos a seguir.

Figura 46 - Outro caso de uso do dinheiro para o significado cardinal

Os decimais e o dinheiro

1 O **real** é a unidade de referência do sistema monetário brasileiro. Ao dividir 1 real em 10 partes iguais, cada parte é **1 décimo de real** ou **10 centavos** (R\$ 0,10).

equivale a



Ao dividir 1 real em 100 partes iguais, cada parte é **1 centésimo de real** ou **1 centavo** (R\$ 0,01).
Represente a quantia em cada caso usando algarismos.

a.



b.



c.



Fonte: extrato da coleção A Conquista da Matemática (2021, p. 46)

No exemplo acima, temos uma configuração epistêmica similar à anterior, envolvendo objetos primários semelhantes. A diferença é que agora os estudantes já estão trabalhando no conjunto dos números racionais. Por causa disso, as tarefas que seguem esse tipo de uso do dinheirinho utilizam as moedas para trabalhar com quantidades menores que um (1). De modo geral, nas coleções, este é o modo que o dinheiro é utilizado para representar quantidades inteiras ou com partes decimais.

Um ponto que chama a atenção é que, no começo da explicação da tarefa, menciona-se que R\$ 1,00 equivale a dez moedas de 10 centavos. Logo em seguida, que R\$ 1,00 pode ser dividido em 100 partes iguais, obtendo 1 centésimo de real (moeda de 1 centavo). A explicação é correta, contudo, existem outras maneiras possíveis de compor um real com moedas. Como não se trata da primeira vez que o livro usa o dinheirinho, consideramos que o estudante já conheceu esse material e que já entende como funciona.

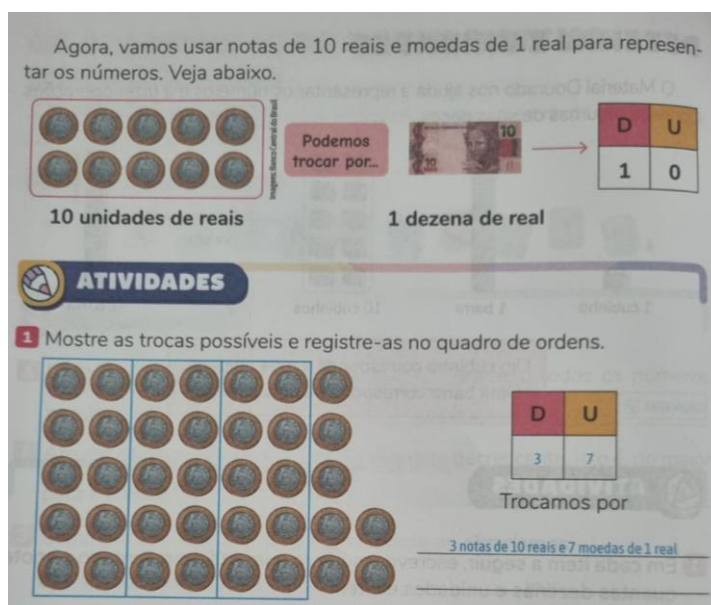
O fato de o autor destacar as repartições do real em 10 e 100 partes pode ter relação com o uso comum do dinheirinho com os agrupamentos e trocas de dez. Essa intencionalidade e suas possíveis implicações didáticas serão exploradas com mais profundidade nas tarefas do significado operacional, na sequência.

Significado Operacional

Aos nos referirmos ao significado operacional com o uso do dinheirinho, estamos considerando as tarefas que indicam esse manipulativo como forma de explicar ou complementar as propriedades do SND e o funcionamento de suas operações. Embora esteja presente em todas as coleções com uma grande quantidade de tarefas, o uso do dinheirinho é, dentre todos os demais manipulativos, o que segue uma mesma linha de abordagem nos livros. Os principais casos são os que o indicam para trabalhar formas de agrupar dezenas e centenas e auxiliar nas operações básicas (com ênfase na adição e subtração). A seguir, o primeiro caso representativo desse significado.

Narração da tarefa: tarefa que inicia apresentando as representações da moeda de R\$ 1,00 e das notas de R\$ 10,00 para mostrar como podem ser feitas as trocas: a cada dez moedas de R\$ 1,00, é possível pegar uma nota de R\$ 10,00. Em seguida, os estudantes devem observar quantas moedas têm, formar grupos de dez e registrar quantas cédulas de R\$ 10,00 conseguiram trocar e quantas moedas sobraram. O registro final é feito no QVL com os algarismos indo-arábicos.

Figura 47 - Uso do dinheirinho para ensinar trocas de dez



Fonte: extrato da coleção Bem-me-quer Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 68).

Quadro 24 - Análise epistêmica da tarefa da Figura 47

Componentes		Indicadores
O B J E T O S P R I M Á R I O S	Situação-problema	A tarefa propõe representar valores monetários utilizando moedas de R\$ 1,00 e cédulas de R\$ 10,00. Os estudantes devem identificar agrupamentos de 10 moedas de R\$ 1,00 e trocá-las por uma cédula de R\$ 10,00, registrando a troca no quadro de ordens (dezenas e unidades).
	Linguagem	Representações das moedas e cédulas. QVL com símbolos U e D. Representações simbólicas indo-arábicas. Termos em linguagem natural (dezenas e unidades).
	Definição	Sistema monetário. Unidade e dezena. Valor posicional no registro simbólico. Trocas e agrupamentos de dez.
	Procedimentos	Contar quantas moedas de R\$ 1,00 há. Agrupar conjuntos de 10 moedas. Para cada grupo de 10, trocar por uma cédula de R\$ 10,00. Preencher o quadro de ordens com a quantidade de dezenas (D) e unidades (U) restantes. Escrever o total após a troca.
	Proposições	Uma nota de R\$ 10,00 equivale a 10 moedas de R\$ 1,00.
	Argumentos	Cada nota de R\$ 10,00 equivale a uma unidade absoluta na posição das D no QVL, assim como cada moeda de R\$ 1,00 equivale a uma unidade na posição U.
Relações		A tarefa relaciona as trocas das cédulas e moedas do Real (R\$) com os agrupamentos e trocas do SND.
Conflitos semióticos e epistêmicos em potencial		Como o Real (R\$) admite outros tipos de cédulas, que já fazem parte da cultura, o estudante já sabe que existem outras formas de agrupamento possíveis e não necessariamente as indicadas pelo autor.

Fonte: elaborado pelo autor.

Para que um material manipulativo seja eficaz no ensino de matemática, é fundamental compreender, conforme a argumentação de Duval (2004), qual objeto matemático o manipulativo é capaz de representar. No caso da Figura 10, apresentamos um exemplo recorrente nos livros analisados, em que o dinheirinho é usado para ensinar os agrupamentos e as trocas de dez do SND. Porém, diferentemente dos BBD, cujas peças são constituídas somente por agrupamentos de potências de dez, as cédulas do dinheirinho apresentam valores que não se enquadram diretamente nesse tipo de organização.

Um problema decorrente do uso do dinheirinho em sala de aula, como aponta Silveira (2021, p. 9), é que a criança precisa "esquecer" a existência de certas cédulas ou moedas reais, pois, durante as trocas propostas, somente valores que se encaixam como potências de dez devem ser utilizados. Isso significa restringir-se, por exemplo, às notas de R\$ 100, R\$ 10 e R\$

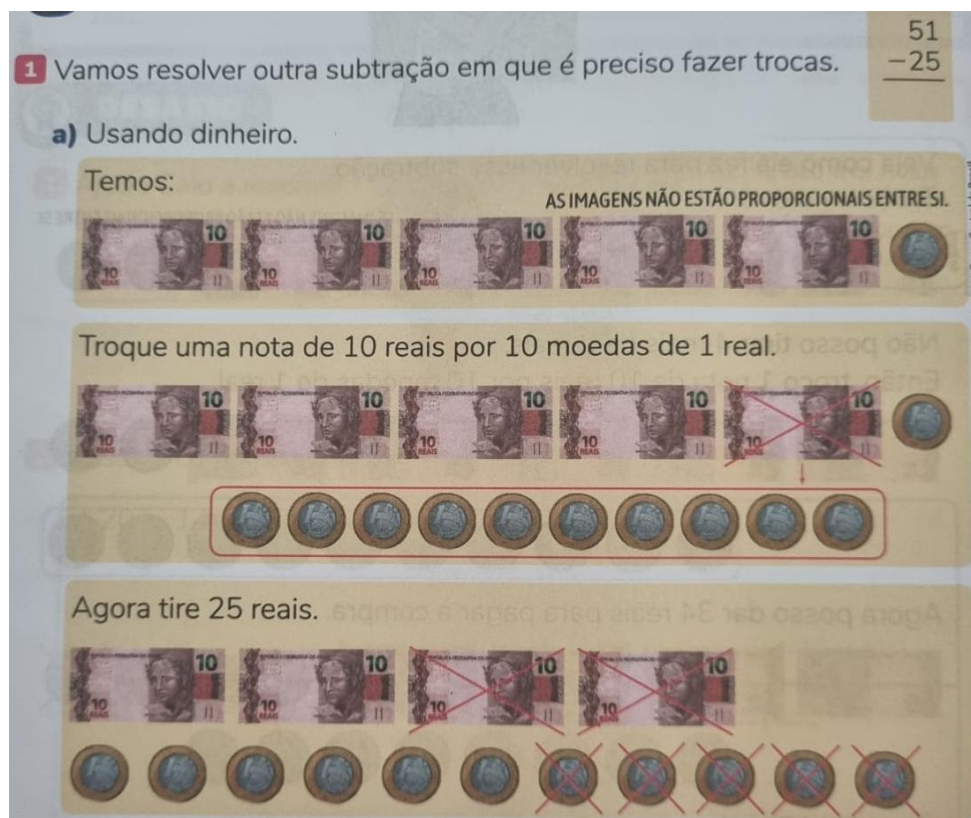
1. No entanto, é difícil para os estudantes desconsiderarem as outras cédulas, já que em sua vivência cotidiana sabem que, por exemplo, cinco notas de R\$ 10 podem ser trocadas por uma nota de R\$ 50, ou duas moedas de R\$ 1 podem ser trocadas por uma nota de R\$ 2 (Silveira, 2021, p. 10). Nesse contexto, o conflito está nos tratamentos semióticos internos vinculados ao material: o modo de funcionamento do dinheirinho – que permite múltiplas formas de equivalência nas trocas – não corresponde à lógica do Sistema de Numeração Decimal (SND), que opera exclusivamente com trocas baseadas em agrupamentos de dez.

O livro oferece exemplos sobre as transações que os estudantes podem realizar, exemplificando a troca de uma nota de 10 por dez moedas de um real. Contudo, trata-se de um conhecimento social que nosso sistema monetário também permite fazer, justamente essa troca por duas notas de 5 ou até mesmo cinco notas de 2 reais. Considerando que todos os estudantes já tenham conhecimentos prévios acerca das diferentes notas (cédulas) e moedas de nosso sistema monetário, eles poderiam optar por realizar agrupamentos diferentes, de acordo com as possibilidades de cada nota.

Portanto, podemos dizer que o dinheirinho (baseado nas cédulas correntes do sistema monetário do país de origem dos estudantes), enquanto manipulativo, e o SND, não são funcionalmente equivalentes. Duval (2017, p. 90, tradução nossa) afirma que “duas representações que pertencem a dois registros diferentes, são ‘funcionalmente equivalentes’ se toda informação de uma pode ser inferida a partir da outra”. A utilização de dinheirinho para ensinar a base dez seria adequada a partir de “uma moeda fictícia que só tivesse notas para as quantias 1, 10, 100 e, quem sabe, 1000. Sendo um dinheirinho fictício, ficaria mais simples para entender que não há como trocar cinco notas de 1 por uma de cinco, pois não há notas de cinco naquela moeda” (Silveira, 2021, p. 10). Assim, qualquer quantidade de 1 a 9 seria representada por uma quantidade equivalente de notas de 1, por exemplo.

A seguir, veremos outro caso semelhante, mas em outra coleção.

Figura 48 - Outro exemplo de dinheirinho de papel para ensinar trocas de dez



Fonte: extrato da coleção Bem-me-quer Mais Matemática, 2º ano (2021, p. 174).

No exemplo acima, temos outra situação em que o dinheirinho é indicado para trabalhar as trocas de dez. A tarefa parte de um cálculo de subtração e usa as notas de 10 e moedas de 1 como uma forma de representar e operar com esses valores. Constata-se que a intencionalidade do uso do dinheirinho, nesse exemplo, é auxiliar o estudante a compreender o processo de troca envolvido na subtração $51 - 25$, apresentada no formato “armado”, conforme o algoritmo tradicional. Ao iniciar a operação pelas unidades, será necessário desagrupar uma dezena, representada na tarefa pela troca de uma cédula de R\$ 10 por dez moedas de R\$ 1 (destacadas em vermelho).

É importante observar que, no cotidiano, essa dezena poderia ser trocada, por exemplo, por duas cédulas de R\$ 5, o que já seria suficiente para realizar a subtração. No entanto, o algoritmo padrão exige que a dezena seja convertida em dez unidades (ou seja, dez objetos de valor 1), independentemente da quantidade necessária para completar a conta. Essa exigência revela o funcionamento operatório do algoritmo, que se baseia em uma decomposição total da ordem superior, e não em trocas mais econômicas ou realistas, como as que ocorrem no uso social do dinheiro.

Nesse momento, assim como no caso anterior, o estudante deve desconsiderar a existência das demais notas do Real (R\$). Godino salienta que “na matemática educativa, especialmente nos primeiros níveis, o ponto de partida são problemas extramatemáticos, relacionados com o ambiente e a vida quotidiana” (Godino, 2004, p. 71, tradução nossa). Desse modo, o autor entende que, ao trazer elementos do cotidiano¹⁷ (como o dinheiro) para o contexto escolar, é preciso refletir como promover, por meio deles, os processos de significação e abstração. Evocar o dinheiro em tarefas para ensinar números, mas não os utilizar do mesmo modo que na vida social, vai na contramão dessas concepções, abrindo espaço para possíveis conflitos semióticos.

Significado Ordinal, de Medida e Simbólico

Não identificamos tarefas que pudessem ser consideradas e projetadas para se trabalhar com o significado ordinal, de medida e simbólico. O principal do material é no contexto do significado operacional, como auxílio em problemas que envolvem as 4 operações básicas, tanto com números naturais, quanto com racionais na forma decimal. Normalmente, isso acontece em tarefas contextualizadas com situações-problema de compra, venda e troco. O uso para ensinar a base dez, como discutido, também é recorrente e é o caso que promove os principais conflitos epistêmicos com o dinheirinho.

6.5 ANÁLISE DAS INDICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES DAS FICHAS VERDES E OBJETOS RETIRADOS DO COTIDIANO

Neste tópico, apresentamos e discutimos alguns casos representativos de materiais menos frequentes nas coleções: as fichas verdes, indicadas apenas na coleção *Ápis Mais Matemática*, e também, palitinhos e tampinhas que aparecem em três coleções, mas de forma pontual. A seguir, apresentamos a análise das fichas verdes e depois das tampinhas e palitinhos para, ao final do tópico, elaborarmos a síntese.

6.5.1 Tarefas representativas sobre o uso das fichas verdes nos diferentes significados de referência do SND

¹⁷ Este cotidiano é questionável na medida que, atualmente, o uso da moeda em papel possivelmente não faz mais parte do cotidiano das crianças. Por exemplo, na atualidade usa-se “PIX” e cartão.

As fichas verdes são um tipo de manipulativo proposto pelo autor da coleção *Ápis Mais Matemática*, e só consta nela. É apresentado no livro do 1º ano e utilizado até o 5º em tarefas referentes ao SND. As fichas verdes, segundo o autor da coleção, são um tipo de registro para os Blocos base dez, uma vez que desenhar as peças dos BBD pode ser uma tarefa difícil para o aluno. Esses dois materiais manipulativos, embora também sirvam ao mesmo propósito, ou seja, para auxiliar na compreensão da base dez, diferem quanto à natureza de sua existência.

As peças dos BBD apresentam valores não convencionados, que são evidentes a partir das divisórias gravadas na madeira. Em outras palavras, uma barra, que parece ter 10 cubinhos colados uns aos outros, provavelmente terá um volume 10 vezes maior do que um cubinho e uma placa, que terão aproximadamente 10 vezes o volume de uma barra. Diferentemente do material dourado, no caso das fichas verdes, os valores das peças passam a existir a partir de uma convenção. Os valores 1, 10 e 100, atribuídos aos três tipos de fichas, são arbitrários, já que a ficha quadrada não contém o tamanho nem a área de 10 retangulares, o mesmo valor ocorrendo na comparação entre as demais fichas.

Além disso, este material está disponível para recorte no livro do estudante para ser manuseado fisicamente (em um espaço chamado de 'Meu Bloquinho'). Ele é constituído de fichas de papel e são nomeadas conforme seus: as circulares correspondem às unidades, as retangulares não quadradas representam as dezenas, já as centenas são representadas pelos quadrados e por fim, a unidade de milhar num formato cúbico. As fichas verdes são especificamente usadas nos significados cardinal e operacional, estando ausentes nos demais.

Ainda que a ficha correspondente ao milhar seja ordinariamente designada 'ficha cúbica', cumpre reconhecer que sua conformação não se equipara, em rigor, a um cubo no sentido geométrico estrito, mas antes se constitui como uma representação bidimensional deste sólido. De modo análogo, a denominada 'ficha quadrada', ao ser destacada do material impresso, adquire uma sutil espessura resultante da própria gramatura do papel, a qual lhe confere certa materialidade e espacialidade. Cumpre enfatizar que tais fichas, tal como figuram nos manuais didáticos, não passam de representações planas e bidimensionais, concebidas para evocar mentalmente objetos tridimensionais paradigmáticos – a exemplo do cubo alusivo a mil unidades ou da placa quadrada alusiva a cem unidades – intimamente vinculados à lógica posicional que rege o Sistema de Numeração Decimal.

Outrossim, reconhecemos que, uma vez destacadas pelos estudantes, essas representações passam a ocupar volume no espaço físico, adquirindo, assim, uma dimensão concreta suscetível de influir nas interpretações cognitivas por parte dos discentes. Não obstante, para os desígnios do presente estudo, optamos deliberadamente por adotar tais

representações tal como concebidas pelo autor do manual analisado, de modo a resguardar a coerência interna do material didático e a propiciar maior organicidade à tessitura da argumentação teórica aqui desenvolvida.

Significado Cardinal

Narração da tarefa: essa tarefa, do 3º ano, retoma as fichas verdes e os respectivos valores associados. Em seguida, menciona a provável escola de uma estudante chamada Laura. E, apesar de parecer que seja algum tipo de continuação, não há menção nas tarefas anteriores deste capítulo. A tarefa dispõe de algumas representações acerca desse material para que o estudante identifique o valor representado e faça a decomposição e a escrita do número.

Figura 49 - Tarefa que retoma as fichas verdes e que as utilizam para representar quantidades

2. USANDO DESENHOS DE FICHAS

Relembre o código para representar números com desenhos de fichas. Use as fichas do **Meu bloquinho**.



Centena.
100 unidades (C)



Dezena.
10 unidades (D)



Unidade.
1 unidade (U)

Agora, considere o número de alunos do período da manhã na escola em que Laura estuda, representado com desenhos de fichas, e complete.



Número: 248

Exemplo de decomposição:
Decomposição: 248 = 200 + 40 + 8

Leitura: Duzentos e quarenta e oito.

Atividade 2

Como os estudantes dessa faixa etária geralmente têm dificuldade em desenhar as peças do material dourado, também apresentamos como recurso os desenhos de fichas para representar as centenas, as dezenas e as unidades.

Requisite a eles que recortem as fichas do *Meu bloquinho* e façam a correspondência entre essas fichas e as peças do material dourado. Incentive-os, ainda, a confeccionar um envelope para guardar as fichas após cada uso, identificando-o com o nome. Assim eles desenvolvem o senso de organização e disciplina.

Para ampliar esta atividade, escreva na lousa mais alguns números, até 999, e peça aos estudantes que os representem com as fichas do *Meu bloquinho* e escrevam a decomposição e a leitura de cada um deles.

Fonte: extratos da coleção *Ápis Mais Matemática*, 3º ano (2021, p. 55).

Quadro 25 - Análise da tarefa da Figura 49

Componentes		Indicadores
OBJETOS	Situação-problema	A tarefa propõe identificar a quantidade de alunos de uma escola que está representada por meio das fichas verdes. O estudante deve completar o número, sua decomposição e sua leitura por extenso.
	Linguagem	Fichas verdes (figuras da centena, dezena e unidade); linguagem natural no enunciado e termos específicos da matemática como ‘decomposição’; símbolos U, D e C; representação simbólica indo-arábica (na resposta).
	Definição	Valor relativo e posicional; decomposição aditiva de um número; leitura e escrita dos números.

P R I M Á R I O S	Procedimentos	Contar a quantidade de fichas de cada valor para obter a quantidade representada: 2 fichas quadrangulares (200) + 4 fichas retangulares (40) + 8 fichas circulares (8) = 248. Pede-se a decomposição e a escrita por extenso.
	Proposições	Cada ficha é convencionada a representar um número. O valor final é a soma dos valores de cada tipo de ficha.
	Argumentos	Embora as fichas não sejam organizadas em um esquema posicional na imagem, o raciocínio subjacente é posicional: 2 centenas, 4 dezenas, 6 unidades.
Relações		A tarefa estabelece uma relação entre a representação pictórica, simbólica e escrita do mesmo número. É importante que, antes do enunciado em si, o autor relembre os estudantes o significado de cada ficha em sua coleção.
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial		Esse tipo de uso das fichas verdes é adequado, de modo que não foram identificados conflitos semióticos em potencial.

Fonte: elaborado pelo autor.

O exemplo anterior elucida um dos modos que a coleção *Ápis Mais Matemática* utiliza para empregar as fichas verdes como um recurso para trabalhar o significado cardinal no SND. Esse material exige estabelecer uma relação mais abstrata entre a forma e a quantidade, uma vez que é do tipo convencionado. Cid, Godino e Batanero (2003) explicam que esse tipo de manipulativo é do tipo não proporcional “pois não são feitos de modo que a dezena tenha dez vezes o tamanho da unidade, por exemplo [...]”. Estes materiais não têm nenhuma relação direta com o número representado” (p. 65, tradução nossa). A vantagem das fichas verdes é que, além de serem disponibilizadas para recorte, podem ser facilmente construídas pelos estudantes para que cada um tenha seu material.

Espera-se que, diante de um conjunto de blocos, a criança seja capaz de identificar a quantidade que representa e logo registrá-la por meio de algarismos do sistema indo-arábico. Embora tenha sido escrito de uma forma bastante simplificada, entendemos que esse processo não seja simples, mas os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem de números e o sistema de numeração não são objetos de estudo nesse texto.

O uso das fichas verdes no significado cardinal também envolve números maiores que mil, já que o autor argumenta que a ficha em forma de cubo representa uma unidade de milhar. Vejamos a Figura 50, a seguir:

Figura 50 - Tarefa que utiliza as fichas verdes para contar números maiores que mil

4. Para simplificar, vamos representar o material dourado com desenhos de fichas.

a) Qual número está representado a seguir?

1 10 100 1000

As imagens não estão representadas em proporção.

b) Como se representa o número 531 com desenhos de fichas? E o número 245?

Fonte: extratos da coleção Ápis Mais Matemática, 5º ano (2021, p. 17).

Não há qualquer conflito em utilizar uma representação cúbica para o milhar (estando claro que não é um cubo em si, apenas uma representação bidimensional). A dimensão epistêmica desse uso é a mesma do caso anterior, acrescentando apenas a definição do milhar e um novo tipo de ficha. Embora esse material seja uma alternativa para as escolas que não dispõem de muitos recursos físicos, é preciso deixar claro que os valores de cada ficha são, na verdade, um acordo, ou seja, uma convenção proposta pelo autor do livro.

As fichas verdes são comparadas diretamente aos BBD, pois até mesmo o enunciado desse exemplo cita o “material dourado” como uma base para pensar as fichas verdes (na página anterior há o uso de representações dos BBD). É fundamental destacar que, embora a representação das fichas apresente retângulos e quadrados que simbolizam, respectivamente, dezenas e centenas, essas fichas coloridas não mantêm a relação de proporcionalidade dos BBD. Estes, por sua vez, permitem que a criança compreenda visualmente a relação entre a unidade, a dezena, a centena e o milhar, uma vez que os tamanhos das peças correspondem de maneira proporcional às quantidades que representam. Por exemplo, a barra da dezena é claramente formada por 10 cubinhos de unidade, enquanto que essa característica facilita a compreensão intuitiva da composição e a decomposição dos números.

Essa distinção entre os materiais proporcionais e não proporcionais é crucial para discutirmos possíveis conflitos de significado. Um exemplo de possível equívoco é a suposição de que 10 fichas retangulares (dezenas) enfileiradas formariam exatamente a ficha quadrada (centena). Na figura anterior, vemos isso ocorrendo, embora a intenção seja a de dizer que 10 fichas retangulares equivalem a 1 ficha quadrada. Logo, o modo como o autor faz essa explicação pode levar à ideia de que o estudante poderia compor a centena pelas fichas da dezena (o que dará errado).

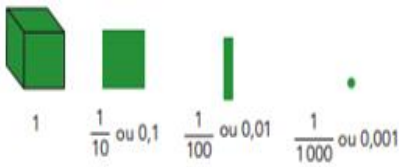
Dessa forma, o professor deve explicitar que a equivalência entre as fichas é simbólica e não necessariamente geométrica, ressaltando que a relação de 10 para 1 está no valor matemático atribuído, e não na sobreposição física das peças. Portanto, é essencial que ele, ao utilizar essas fichas coloridas como um recurso didático, discuta com os alunos o caráter simbólico e convencional desse material.

Outro tipo de abordagem com as fichas verdes é seu uso para representar quantidades racionais na forma decimal. O autor, no livro do 5º ano, ressignifica o valor convencional de cada ficha para que o estudante possa usá-las no intuito de representar números compostos por uma parte inteira e outra fracionária, conforme o exemplo a seguir:

Narração da tarefa: a tarefa solicitada ao estudante diz para observar um número racional na forma decimal usando fichas verdes. Cada ficha corresponde a uma fração decimal específica: a ficha verde do cubo inteiro representa 1 unidade (1); o quadrado representa 1 décimo (0,1); o retângulo representa 1 centésimo (0,01) e o pequeno círculo simboliza 1 milésimo (0,001). No item (a), o aluno deve olhar para cada conjunto de fichas e escrever o número decimal que representa. No item (b), o desafio é representar o número decimal 0,301 usando as fichas, pensando em como decompor esse número em décimos, centésimos ou milésimos para desenhar corretamente.

Figura 51 - Tarefa que usa as fichas verdes para números racionais

2. Verifique como Marcelo representou 1 inteiro, 1 décimo, 1 centésimo e 1 milésimo com desenhos de fichas.



a) Escreva o decimal representado em cada caso.



b) Agora, represente o número 0,301 com desenhos de fichas.



Atividade 2

Como os estudantes desta faixa etária geralmente têm dificuldade de desenhar as peças do material dourado, nesta atividade, recorreremos novamente aos desenhos de fichas para representar o inteiro, o décimo, o centésimo e o milésimo.

Fonte: extratos da coleção Ápis Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 123)

Quadro 26 - Análise da tarefa da Figura 51

Componentes		Indicadores
OBJETIVOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	Situação que introduz os novos valores convencionados das fichas verdes e que solicita ao estudante escrever, por meio de algarismos, quais são os números representados por elas, assim como o procedimento inverso.
	Linguagem	Fichas verdes; linguagem natural e termos específicos como “inteiro”, “décimo”, “centésimo” e “milésimo”. Representação fracionária. Representação simbólica indo-arábica (na resposta).
	Definição	Novos significados das fichas verdes. A vírgula é usada para compor números na notação decimal, que nos permite representar quantidades não inteiras (frações).
	Procedimentos	O estudante deve observar cada conjunto de fichas verdes e associar a quantidade delas a cada tipo com seus valores convencionados. A partir disso, fazer a soma dos valores para compor o número final. No segundo item, o estudante deve representar o número 0,301 com as fichas: três décimos (três cubos pequenos) e um milésimo (um círculo verde).
	Proposições	Cada algarismo da parte decimal ocupa uma posição específica que equivale a frações de dez.
	Argumentos	A notação decimal segue a mesma lógica dos números naturais, com trocas e agrupamentos de dez. A diferença é que, à direita da vírgula, mudamos de múltiplos de 10 para submúltiplos de 10 (fracionais decimais).
Relações		Cada ficha verde é relacionada a um novo grupo de valores representado tanto na forma decimal quanto na fracionária.
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial		Ressignificar as fichas verdes, utilizadas desde o primeiro volume da coleção, e atribuir-lhes novos valores abre espaço para conflitos de significado. Além disso, a tarefa mostra a representação fracionária, mas sem uma maior explicação sobre essa relação.

Fonte: elaborado pelo autor.

A tarefa apresentada ressignifica as fichas verdes, que já vinham sendo utilizadas desde o primeiro volume da coleção com valores convencionados específicos, para representar novas quantidades no contexto dos números decimais. Essa mudança de significado deixa espaço para conflitos de significado. Assim como discutido no caso de usar os BBD para ensinar números racionais da forma decimal, no caso das fichas verdes, especificamente, o aluno precisa “esquecer” os valores previamente atribuídos a elas – valores que foram construídos ao longo de várias atividades anteriores – para então atribuir novos valores.

As fichas verdes não possuem nenhuma relação geométrica entre si, e por isso, fazer a relação da ficha do cubo sendo o inteiro e a ficha circular sendo o milésimo é ainda pior do que

fazer isso com os BBD, que por sua vez, guardam uma relação proporcional entre si. Aqui o sentido das fichas é totalmente convencionado e estabelecido pela mediação do professor com o material proposta pelo autor da coleção. Em vez de reforçar a noção de que cada ficha tem um valor por convenção e que esse valor precisa estar claro para o aluno, a tarefa impõe uma nova atribuição sem qualquer contextualização ou justificativa pedagógica suficiente, o que pode gerar insegurança e dificultar a compreensão do conceito de fração decimal.

Esse processo é complexo, pois já houve uma construção de significado dessas representações por parte dos estudantes, ou seja, já há uma semiose construída das fichas. Podemos entender as fichas verdes como um sistema de signos usado principalmente para representar as quantidades determinadas pelos autores. Elas deixam de ser apenas fichas para assumir o papel de ente matemático no contexto dessas tarefas, de modo que, para alterar sua referência, é preciso que o estudante faça uma nova semiose a partir dele. DeLoache (2000) comenta a respeito disso, argumentando que, “para usar um objeto simbólico como um modelo, mapa ou imagem, deve-se alcançar a representação dual; isto é, deve-se representar mentalmente tanto o próprio símbolo quanto sua relação com seu referente” (p. 329). Conforme apontam Silveira, Powell e Grando (2025), é preciso que as crianças substituam um referente por outro. Isso pode ser acessível para algumas delas, mas não para outras. Nesses casos, o ideal seria utilizar algum material manipulativo ainda não utilizado em outras funções.

Além disso, embora a tarefa apresente a correspondência entre as fichas verdes e suas respectivas representações fracionárias ($1/10$, $1/100$ e $1/1000$), ela não é aprofundada nem discutida conceitualmente. Falta uma explicação mais detalhada sobre a relação entre as frações e os números decimais, o que seria fundamental para consolidar a aprendizagem dos estudantes. Sem essa mediação, o aluno pode não compreender plenamente que $0,1$ é equivalente a $1/10$, por exemplo, nem como essas frações se encaixam no sistema decimal. Em síntese, a tarefa, ao ressignificar as fichas verdes de forma repentina e apresentar a equivalência entre as frações e os decimais de forma superficial, corre o risco de gerar conflitos semióticos e de dificultar a apropriação efetiva dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes.

Significado Operacional

As fichas verdes estão presentes nos cinco livros da coleção *Ápis Mais Matemática*, e também são amplamente usadas no significado operacional. A tarefa a seguir é um extrato representativo desse tipo de uso:

Figura 52 - Tarefa que usa as fichas verdes em quadros rotulados

Adição sem reagrupamento

1. PROBLEMA

Leia com atenção e complete o que estiver faltando.

Em um campeonato de basquete, a equipe Cestinha de Ouro marcou 123 pontos na primeira partida e 121 pontos na segunda. Quantos pontos essa equipe fez nas 2 partidas juntas?

Compreender

A equipe Cestinha de Ouro fez 123 pontos na primeira partida e 121 na segunda. Você quer saber o total de pontos que a equipe fez nas 2 partidas.

Planejar

Para saber o total de pontos, você deve juntar os pontos da primeira partida e os da segunda, ou acrescentar os pontos da segunda partida aos da primeira, ou seja, efetuar a adição $123 + 121$.

Executar

Podemos efetuar a adição de diferentes modos.

- Manipule concretamente as fichas que você recortou do

Meu bloquinho e depois faça o desenho dessas fichas no esquema apresentado.

- Efetue pelo algoritmo usual.

C	D	U
1	2	3
1	2	1
2	4	4

1ª partida: 123
2ª partida: 121
Total: 244

Fichas quadradas	Fichas retangulares	Fichas circulares
		
		
3 unidades	1 unidade	4 unidades
2 dezenas	2 dezenas	4 dezenas
1 centena	1 centena	2 centenas

Atividade 1

A adição sem reagrupamento é apresentada em uma situação-problema nesta atividade. Para resolvê-la, é conveniente levar em consideração as seguintes etapas: *compreender* o problema, *planejar* a solução, *executar* os planos, *verificar* os resultados e, por fim, *responder* ao problema.

Permita aos estudantes manipular concretamente as fichas do *Meu bloquinho* para representar a adição antes de fazer os registros no livro. Enfatize as diferentes maneiras de registrar e efetuar a adição e peça a eles que compartilhem as estratégias utilizadas para completar cada uma.

Neste momento, não é necessário enfatizar o uso da nomenclatura *sem reagrupamento*, ou seja, sem a troca de 10 unidades por 1 dezena ou de 10 dezenas por 1 centena. Depois, quando eles estudarem as adições com reagrupamento, essa nomenclatura passará a ter mais significado para eles.

Fonte: Extratos da coleção Ápis Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 56)

Narração da tarefa: esse caso inicia com um problema que envolve um campeonato de basquete, pois se busca saber quantos pontos o time marcou em duas partidas. Na primeira, o time fez 123 pontos, enquanto que, na segunda, 121 pontos. Como solução, a tarefa indica duas formas diferentes de resolver essa adição: uma delas utilizando as fichas verdes organizadas dentro de um quadro tarjado com o nome de cada ficha, e a outra, usando o algoritmo usual.

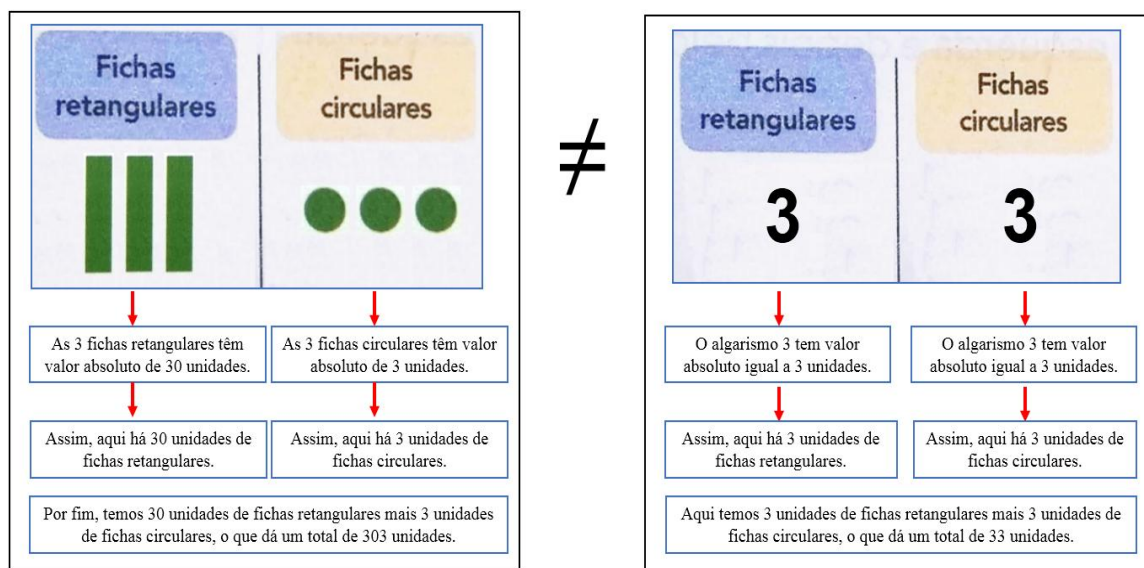
Quadro 27 - Análise da tarefa da Figura 52

Componentes		Indicadores
O B J E	Situação-problema	Problema contextualizado que envolve a operação de adição de duas parcelas, especificamente, $123 + 121$.
	Linguagem	Fichas verdes. Linguagem natural. Quadro que simula um QVL, mas tarjado com o nome de cada ficha. Algarismos indo-arábicos. Termos

T O S P R I M Á R I O S		matemáticos específicos: “total de pontos”, “adição” e “juntar os pontos da primeira partida”.
	Definição	Valor convencionado de cada ficha. Operação de adição. Valor relativo e posicional. Funcionamento do algoritmo usual.
	Procedimentos	Observar as fichas verdes organizadas no quadro e calcular a quantidade de unidades, dezenas e centenas representadas pelas fichas para, em seguida, somar o total.
	Proposições	Ao somar dois números usando as fichas verdes, é possível organizá-las de modo semelhante ao algoritmo, alinhando-as na mesma ordem, uma em cima da outra, para calcular o total de cada uma delas.
	Argumentos	Existem diferentes formas de efetuar a soma de duas parcelas. Cada ficha verde pode ser relacionada a uma ordem do QVL e, conseqüentemente, ao algoritmo usual.
Relações		A tarefa relaciona o registro simbólico com a representação por meio das fichas verdes e com um quadro que cumpre a função de um que segue o valor posicional. Espera-se aqui uma relação direta entre a quantidade de fichas com os algarismos usados no algoritmo.
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial		O uso de fichas verdes organizadas em quadros tarjados abre espaço para conflitos de significado, pois pode ocorrer uma interpretação diferente daquela esperada pelo autor. A ficha quadrada, por exemplo, é convencionada a valer 1 centena. Desse modo, quando se colocam duas fichas quadradas na coluna nomeada “ficha quadrada”, é possível pensar que teremos: 200 (valor de duas fichas quadradas) multiplicado por 100 (pois se pode entender que, dentro da coluna “ficha quadrada”, tudo será multiplicado por 100).

Fonte: elaborado pelo autor.

De forma similar ao conflito presente no uso dos BBD sobrepostos ao QVL, e diferentemente do QVL que apresenta os símbolos C, D e U ou Centena, Dezena e Unidade, neste caso, são substituídos pelos nomes das fichas verdes. Possivelmente, a intenção dos autores está relacionada à possibilidade de auxiliar as crianças na organização dos blocos ou fichas para a contagem. Isso, porém, pode causar conflitos, de modo que Silveira (2021) elucida essa situação:

Figura 53 - Comparação de uso das fichas verdes em quadros rotulados

Fonte: Silveira (2021, p. 19).

Silveira (2021) mostra a comparação entre os dois casos de uso dos quadros tarjados. No quadro que apresenta três fichas retangulares, surge matematicamente o conflito que ocorrer: pode-se entender que temos 3 dezenas (30 unidades) de fichas retangulares, ou seja, $30 \times 10 = 300$. “Uma maneira de usar esse quadro sem conflitos em potencial seria o caso comparado ao lado, onde, no lugar das fichas, são colocados os algarismos indicando as quantidades absolutas de cada uma delas” (Silveira, 2021, p. 19, tradução nossa). Como não se menciona esse possível equívoco nas orientações dadas ao professor, sugerimos evitar, portanto, qualquer tipo de material com valor agregado sobreposto em quadros tarjados. Essa cautela é necessária, pois não temos como prever as diferentes interpretações que cada estudante pode ter.

Nesse mesmo sentido, Thompson e Lambdin (1994) alertam para a possibilidade de que os alunos possam ter múltiplas interpretações acerca de algum material manipulativo. Para eles, é necessário que os professores tenham cuidado ao presumir que os alunos estejam vendo nos manipulativos aquilo que se deseja que vejam. Já Gluck (1991) afirma que prefere não adicionar rótulos às colunas do quadro, pois parecem distrair os alunos. Silveira (2014, 2016, 2018, 2019), Ladel e Kortenkamp (2016, 2016b), por sua vez, afirmam que essas formas de representação são enganosas, pois, quando uma criança compreende o valor posicional, é exatamente isso que desejamos que ela compreenda, fazendo com que tais representações se tornem falsas. Um modo de evitar esse conflito semiótico é utilizar as fichas verdes fora de quadros rotulados, como no exemplo a seguir:

Figura 54 - Uso das fichas verdes sobrepostas ao QVL

	Centenas	Dezenas	Unidades
	C	D	U
de manhã 213			
à tarde 185			
Total 398			

Fonte: extrato da coleção Ápis Mais Matemática, retirado de Silveira (2016, p. 231).

Aqui o conflito é ainda mais evidente, pois as colunas possuem claramente uma relação com o sistema posicional e por consequência, as potências de dez. Nos livros atuais, do PNLD (2023-2026) tal uso não se faz presente, representando uma mudança do autor em relação a como usar esse material. A mudança de postura do autor em relação ao uso do material, que pode ter sido influenciada pelas pesquisas de Silveira (2016, 2018, 2019, 2021).

A importância das discussões que apresentamos nessa tese, reside justamente nisso: o impacto nas mudanças dos autores na elaboração de coleções futuras, evitando os conflitos aqui enunciados. Afinal, conforme Nacarato (2005) argumenta, nenhum material, manipulável representa a salvação para a aprendizagem, porém, a depender da forma como é utilizado pode ser mais ou menos eficaz. Um modo de evitar tal conflito semiótico é utilizar as fichas verdes fora de quadros rotulados, como no exemplo a seguir:

Figura 55 - Uso das fichas verdes fora de quadros rotulados para trabalhar operações

b) $26 - 9$

● Com desenho de fichas.

● Com o algoritmo usual.

Não posso fazer $6 - 9$, pois $6 < 9$.
Faço a troca de **1 dezena** por **10 unidades**.

Ficaram 1 dezena e 16 unidades.
Cortando 9 unidades, restaram 1 dezena e 7 unidades.

D	U	
2	6	
-	9	ou
1	7	17

Subtração: 26 - 9 = 17

Fonte: extratos da coleção Ápis Mais Matemática, 3º ano (2021, p. 95).

Esse exemplo de subtração ($26 - 9$) com fichas verdes é diferente dos anteriores em que elas estavam colocadas dentro de quadros rotulados. A ficha da “dezena” (representada por uma barra vertical com 10 bolinhas) não está dentro de um quadro que a rotula como “dezena”,

evitando, assim, a interpretação de que se trata de “10 fichas de dezena” ou algo semelhante. Ela é apenas uma representação de 10 unidades agrupadas. E essa deveria ser a escolha do professor ao utilizar esse manipulativo, pois, segundo Uttal (2003), ele exerce um papel fundamental na escolha dos recursos didáticos, pois cabe a ele analisar se os materiais manipulativos irão ajudar, prejudicar ou se não farão diferença alguma às crianças em sua tarefa de compreender a matemática. Todavia, se os autores dos livros assim a utilizaram, os professores podem considerar que esse tipo de uso é correto.

Usar as fichas verdes fora de quadros rotulados, além de evitar o conflito de significados em relação ao número que estão representando, não induz também à ideia de que cada ficha deva ser usada sempre em uma mesma ordem. Podemos misturá-las e usá-las de diferentes formas, já que o material não é posicional, e usá-las livremente, considerando, para tanto, os valores convencionados. A partir disso, os estudantes podem realizar trocas conforme a necessidade, sem maiores distrações.

Em paralelo, a tarefa trabalha o algoritmo posicional de subtração (com o quadro acerca do valor de lugar), o que permite a criança conectar as ações de troca de fichas com o procedimento matemático mais abstrato. Isso cria uma ponte importante entre o pensamento concreto (as fichas) e o pensamento simbólico (o algoritmo usual), ajudando a criança a entender que ambos representam a mesma operação (Fyfe; Mcneil, 2019). Desse modo, as fichas verdes podem ser um bom material para auxiliar na compreensão do SND, desde que sejam utilizadas da mesma forma ilustrada no último exemplo.

6.5.2 Tarefas representativas sobre o uso de objetos do cotidiano nos diferentes significados de referência do SND

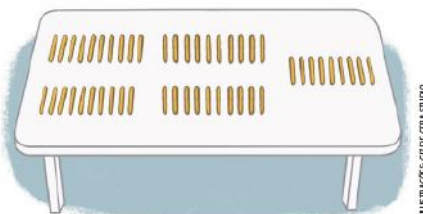
No contexto dos manipulativos, que são objetos retirados do cotidiano, estes são os menos presentes nas obras. O caso identificado foi o uso de representações de palitinhos e tampinhas propositalmente usados em tarefas do SND. Não é surpresa que em todas as coleções é possível encontrar figuras desses e de outros objetos do cotidiano, porém, são casos que utilizam as representações apenas para um papel ilustrativo ou como parte de um cenário. Neste caso, estamos considerando somente as indicações em que esses objetos assumem o papel de auxiliares no ensino do SND.

Significado Cardinal

Narração da tarefa: essa tarefa apresenta uma situação hipotética em que uma professora propõe organizar e contar palitos em grupos de 10, enquanto o estudante deve observar a mesa com os palitos organizados em grupos. O objetivo é que ele perceba 4 grupos de 10 completos e mais 9 unidades e registre o total. Em seguida, com a adição de mais 1 palito entregue por Laura, a professora deve reorganizar os palitos formando mais um grupo completo de 10 deles. O registro final ocorre com a representação simbólica dentro de um QVL.

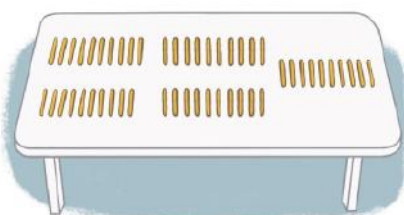
Figura 56 - Tarefa que utiliza palitinhos para ensinar os agrupamentos de dez

1. A PROFESSORA ORGANIZOU OS PALITOS QUE FORAM USADOS NA AULA. OBSERVE.



- ELA CONSEGUIU FAZER QUANTOS GRUPOS COM 10 PALITOS DE SORVETE CADA? 4 grupos.
- QUANTOS PALITOS FICARAM FORA DOS GRUPOS? 9 palitos.
- AO TODO, HÁ QUANTOS PALITOS? 49 palitos.

LAURA ENTREGOU MAIS 1 PALITO PARA A PROFESSORA E ELA FORMOU MAIS UM GRUPO COM 10 PALITOS.



- AGORA, HÁ QUANTOS PALITOS AO TODO? COMPLETE A ADIÇÃO PARA RESPONDER.

$$49 + \underline{1} = \underline{50}$$

- REPRESENTA A QUANTIDADE DE PALITOS NO QUADRO DE ORDENS.

D	U
5	0

Fonte: A Conquista da Matemática, 1º ano (p. 154).

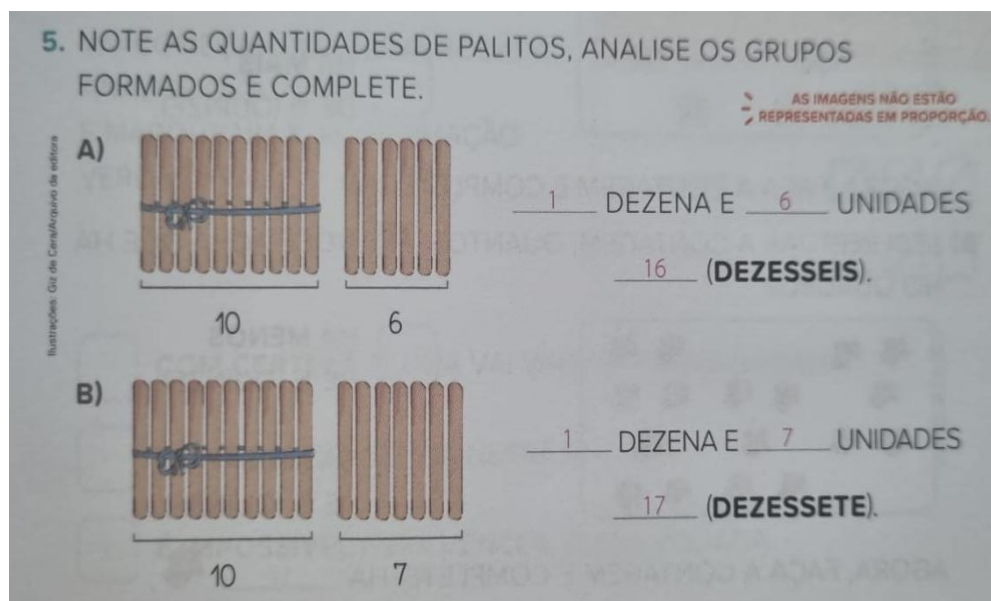
Quadro 28 - Análise da tarefa da Figura 56

Componentes		Indicadores
OBJETIVOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	Situação com palitinhos dispostos em uma mesa, em que algumas perguntas são feitas sobre eles envolvendo contagem e agrupamentos. Outra situação envolvendo tampinhas de garrafa com perguntas similares.
	Linguagem	Representação dos palitinhos e tampinhas. Língua natural conduzindo as perguntas. Símbolos indo-arábicos, QVL, termos como “grupos”, indicando agrupamentos de dez, “ficaram de fora”, indicando unidades não agrupadas, “quadro de ordens”.
	Definição	Agrupamentos de dez. Valor posicional. Relação entre dezenas e unidades.
	Procedimentos	Identificar quantos grupos de dez palitinhos há (obtendo as dezenas) e quantos ficaram avulsos (representando as unidades), e adicionar depois uma unidade a mais, obtendo uma nova dezena completa.
	Proposições	A quantidade de grupos de 10 é representada por um algarismo na posição da D (dezena), no QVL. Como não houve nenhum palitinho sobrando, não houve unidades “soltas” e se registrou o zero na posição da unidade.
	Argumentos	Ao se adicionar mais 1 unidade a um grupo que contém 9 unidades, forma-se uma dezena completa.
Relações		A representação de palitinhos é usada em conjunto com os algarismos indo-arábicos e também com o QVL, no registro final.
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial		Não apresenta conflito em potencial. Para enriquecer o uso dos palitinhos, a tarefa poderia dispô-los inicialmente em grupos avulsos e pedir que o estudante faça o trabalho de agrupá-los de 10 em 10, ao invés de já apresentar os grupos formados.

Fonte: elaborado pelo autor.

Este caso representa bem o modo como se usa materiais retirados do cotidiano em tarefas do significado cardinal, que se voltam para trabalhar a contagem de agrupamentos de dez. Apesar de ser possível realizar a tarefa apenas observando a imagem, sugere-se no manual do professor que, se possível, levar palitinhos e fazer a simulação real da tarefa. A mesma tarefa poderia ser feita com outro tipo de material do cotidiano em que seja possível agrupá-los, como pedrinhas, tampinhas, etc. Estes materiais não possuem um valor agregado e passam a valer uma unidade absoluta cada. Além de usar o material fisicamente, pode ser sugerido fazer desenhos, trabalhando com manipulação pictográfica. Veja um outro exemplo da coleção *Ápis Mais Matemática* que também usa palitinhos e possui uma dimensão epistêmica similar:

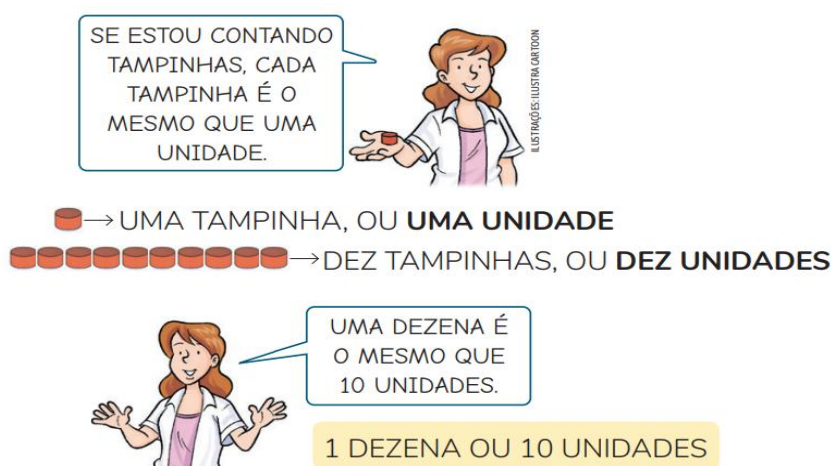
Figura 57 - Uso de ‘amarradinhos’ de palitos para ensinar os agrupamentos de dez



Fonte: extratos da coleção Ápis Mais Matemática, 1º ano (2021, p. 124).

A tarefa apresentada utiliza representações de palitinhos para trabalhar com agrupamentos de 10, enfatizando a construção das dezenas e unidades. Cada dezena é representada por um “amarradinho” de dez palitos, enquanto as unidades não são amarradas. No item A, por exemplo, aparecem 10 palitos agrupados e 6 palitos avulsos, permitindo ao estudante perceber que a quantidade total é composta por 1 dezena e 6 unidades, correspondendo a dezesseis. Essa atividade também estimula a contagem, a decomposição e a composição de números. Além disso, promove a correspondência entre duas representações de um mesmo número: os desenhos dos palitinhos e a representação simbólica com algarismos.

Figura 58 - Tarefa que usa tampinhas para ensinar os agrupamentos de dez

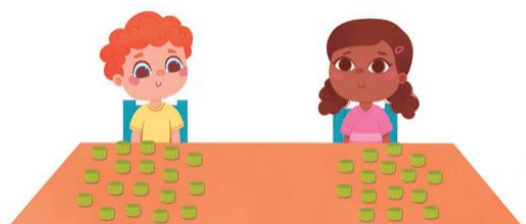


Fonte: extratos da coleção Bem-me-quer Mais Matemática, 1º ano (2021, p. 122).

O exemplo a seguir mostra o uso de tampinhas para comparar a cardinalidade entre dois conjuntos:

Figura 59 - Outro caso das tampinhas para formar os grupos de dez

3 GABRIEL E TALITA JUNTARAM ALGUMAS TAMPINHAS.



A. QUANTAS TAMPINHAS GABRIEL TEM? E TALITA?

B. QUEM TEM MAIS TAMPINHAS? QUANTAS A MAIS?

Fonte: extratos da coleção Aprender Juntos Matemática, 2º ano (2021, p. 54).

Do mesmo modo que no exemplo anterior, o livro sugere que se possível, o professor crie situações com tampinhas físicas sobre a mesa para que os estudantes possam ir contando e comparando. Isso poderia ser feito com qualquer material de valor absoluto de uma unidade, como os cubinhos dos BBD ou as anilhas do ábaco fora das hastes. A ideia nessas tarefas é a contagem por meio de materiais manipulativos, antes de trabalhar somente com os algarismos indo-arábicos. Não identificamos nestes casos conflitos semióticos em potencial.

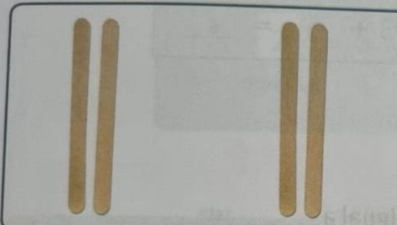
Significado Operacional

Narração da tarefa: apresenta uma situação que envolve a soma de duas parcelas e que utiliza representações de palitinhos. Em cada quadro, há dois grupos de palitos visivelmente separados, de modo que a criança deve contar os palitos de cada grupo, reunir mentalmente as quantidades e completar a operação de adição correspondente. A proposta visa explorar a ideia de adição como combinação de quantidades, utilizando um manipulativo retirado da vida cotidiana.

Figura 60 - Tarefa que usa os palitinhos em situações de adição

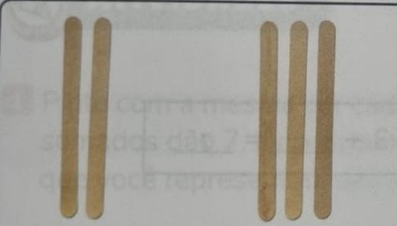
O SINAL DE MAIS

A turma da professora Fátima está juntando palitos para aprender a somar. Veja:



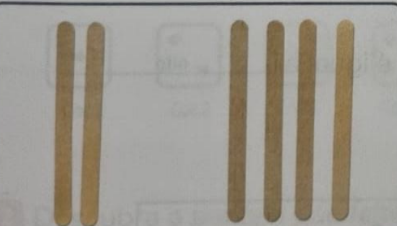
Dois mais dois é igual a quatro.

$2 + 2 = 4$



Dois mais três é igual a cinco.

$2 + 3 = \underline{5}$



Dois mais quatro é igual a seis.

$2 + 4 = \underline{6}$

Fonte: Bem-me-quer Mais Matemática, 2º ano (p. 10).

Quadro 29 - Tarefa que usa os palitinhos em situações de adição

Componentes		Indicadores
OBJETOS PRIMÁRIOS	Situação-problema	A situação apresenta uma situação em que uma professora está juntando palitos para aprender a somar, enquanto que o estudante deve preencher a lacuna com a soma. Para isso, ele pode observar e contar as quantidades de palitinhos dispostas ao lado.
	Linguagem	Representações de palitinhos. Algarismos indo-arábicos. Sinais de igualdade e adição. Língua materna reforçando como se lê a operação “dois mais dois igual a quatro”.
	Definição	Introduzir o sinal de “mais” (adição). Uso do símbolo da igualdade. Contagem como correspondência um a um (1 palito é 1 unidade absoluta).
	Procedimentos	O estudante deve registrar por meio de um algarismo o valor da soma das duas parcelas. Os palitinhos são apresentados como forma de auxiliar na contagem, embora ele possa conseguir fazer sem ou ainda utilizar outras estratégias como por exemplo, contar nos dedos.

O S	Proposições	O sinal da adição separa as duas quantidades (parcelas) que serão somadas, seguidas do sinal de igual.
	Argumentos	Cada palitinho vale 1 unidade. A soma é a quantidade total de palitinhos juntos.
Relações		A ideia é estabelecer para os estudantes do 1º ano a contagem de grupos menores que 10, utilizando a relação entre os símbolos indo-arábicos com uma representação de algo mais concreto para o estudante (palitinhos, nesse caso).
Conflitos semióticos epistêmicos em potencial		Não foram identificados conflitos.

Fonte: elaborado pelo autor.

A tarefa acima é destinada aos estudantes de 1º ano que estejam iniciando o trabalho com a adição e os símbolos indo-arábicos. Nesse caso, o foco se voltou à introdução do símbolo da adição (chamada de “mais”, nesse momento). Os palitinhos, como os demais manipulativos retirados da vida cotidiana, servem para auxiliar a contagem por meio de situações que façam mais sentido ao estudante e que possam ser reproduzidas fisicamente na escola.

Esse tipo de uso contribui para que os estudantes, que ainda apresentam dificuldades, consigam estabelecer a relação entre as quantidades e reconhecer os valores dos algarismos. Não vemos aqui conflitos em potencial. Lerner (2005) salienta que a compreensão da ideia de número passa por um processo construtivo e que “o apoio das operações que partem dos concretos e dos processos de abstração e de tomada de consciência levam à compreensão dos princípios que regem o sistema de numeração decimal” (Lerner, 2005, p. 149). Não identificamos, no uso de palitinhos, nenhum conflito em potencial. Pelo contrário, eles poderiam ser mais explorados nas coleções por meio de outros tipos de significados e com mais diversidade de tarefas.

6.5.2 Síntese das tarefas que usam fichas verdes, palitinhos e tampinhas

As fichas verdes são o único manipulativo específico de uma única coleção, pois foram criadas pelo próprio autor da coleção *Ápis Mais Matemática*. Ele é introduzido desde o primeiro volume e segue sendo retomado nas demais obras em tarefas voltadas ao significado cardinal e operacional. Os demais significados não são trabalhados com este material. O quadro a seguir sintetiza a análise das fichas verdes:

Quadro 30 - Síntese da análise epistêmica das fichas verdes

FICHAS VERDES	
Significado Cardinal	
Principais objetos primários envolvidos	As situações-problema que utilizam as fichas verdes no significado cardinal envolvem a representação de quantidades. Ele é usado para que os estudantes identifiquem números a partir das fichas representadas, considerando os valores convencionados sobre elas. As representações utilizadas em conjunto com as fichas incluem imagens pictóricas dos objetos, a escrita por extenso dos números, o uso de algarismos indo-arábicos em quadros tarjados, ocasionalmente. Os conceitos mobilizados nas tarefas desse significado incluem o valor relativo, a composição de números e o trabalho na base dez.
Conflitos semióticos em potencial	Em algumas tarefas, as mesmas fichas verdes são ressignificadas para representar quantidades com frações decimais, como décimos, centésimos e milésimos. Essa mudança pode ser conflituosa para o estudante, uma vez que ele precisa mudar a construção dos significados das fichas que vêm sendo reforçadas nos anos anteriores.
Sugestões de melhoria	Não é indicado utilizar o mesmo material para dois objetos distintos. Se o autor escolher as fichas verdes como um meio semiótico para pensar os números naturais, deve apresentar outra possibilidade de material para ensinar os racionais.
Significado Operatório	
Principais objetos primários envolvidos	No trabalho com as operações, as fichas verdes são usadas como auxiliares na resolução de problemas que envolvem as operações de adição, subtração e multiplicação. Na divisão, elas não são trabalhadas. Nesses casos, a tarefa inicia geralmente com um enunciado em língua natural, precedido de possíveis formas de resolver o problema com o uso das fichas verdes e os algarismos indo-arábicos. Em muitos casos, as fichas são apresentadas dentro de quadros tarjados com o nome de cada ficha. Os conceitos mobilizados nesse grupo de tarefas envolvem trocas e agrupamentos de 10, decomposição dos números e valor posicional.
Conflitos semióticos em potencial	No caso da organização das fichas verdes dentro de quadros tarjados com o nome de cada ficha, isso abre espaço para o conflito de significados a partir de uma ambiguidade acerca do número que está sendo representado.
Sugestões de melhoria	Não usar representações de manipuláveis que apresentam valor maior que uma unidade dentro de um quadro tarjado ou de valor posicional. As fichas verdes também devem ser trabalhadas sem tal sobreposição.

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 31 - Síntese da análise epistêmica de objetos retirados do cotidiano

OBJETOS DO COTIDIANO (Palitinhos e Tampinhas)	
Significado Cardinal	
Principais objetos primários envolvidos	Embora sejam poucos casos, os palitinhos e as tampinhas, no significado cardinal, aparecem nos livros no formato de tarefas em que as representações desses objetos são apresentadas para o estudante realizar a contagem. A ideia de contar em grupos de 10 é a principal ideia mobilizada. As representações desses manipuláveis são sempre acompanhadas da representação com algarismos, trabalhando a relação símbolo e quantidade. E considerando que seu uso está em livros do 1º e 2º ano, sua utilização é acompanhada de

	explicações em língua natural, com termos simples, próprios da linguagem dos estudantes.
Conflitos semióticos em potencial	Não foram identificados conflitos em potencial.
Sugestões de melhoria	Por serem materiais de fácil acesso nas escolas e sem alto custo, poderiam ser mais utilizados nas coleções.
Significado Operacional	
Principais objetos primários envolvidos	No caso do significado operacional, somente os palitinhos são indicados em situações específicas de adição menores que 10. Seu papel, nessas tarefas, é similar ao significado cardinal, pois os estudantes não precisam, necessariamente, usar os palitinhos, caso já consigam somar diretamente com algarismos. Contudo, podem ajudar os estudantes com mais dificuldade a construir argumentos e realizar procedimentos matemáticos de adição.
Conflitos semióticos em potencial	Não foram identificados conflitos em potencial.
Sugestões de melhoria	Poderiam ser indicados também nas demais coleções em que não são indicados.

Fonte: elaborado pelo autor.

7 PRINCIPAIS CONSIDERAÇÕES

Iniciamos esta pesquisa tendo como motivação os estudos desenvolvidos por Silveira (2016, 2018, 2019, 2021), cujas análises críticas sobre o uso de materiais manipulativos, no ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND), instigaram o aprofundamento da temática, com a proposta de ampliar as reflexões e contribuir com novas perspectivas teóricas e analíticas. Para isso, elencamos o seguinte objetivo geral da tese: compreender, a partir da dimensão epistêmica, os significados institucionais e os conflitos semióticos em tarefas sobre o SND presentes em livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (PNLD 2023-2026), com indicações do uso de manipulativos. Para tal, elaboramos esta tese, entrelaçando diferentes eixos teóricos da Educação Matemática que possibilitaram a construção de uma discussão original sobre as representações de manipulativos em livros didáticos.

Parte-se da premissa de que os manipuláveis, que são amplamente utilizados, não são neutros do ponto de vista didático ou epistêmico. Ao contrário, seu uso envolve decisões teóricas e metodológicas que impactam diretamente a forma como os estudantes constroem os significados matemáticos. Dessa forma, a motivação da pesquisa surge da necessidade de compreender de que maneira os livros didáticos, enquanto instrumentos curriculares amplamente difundidos, orientam e organizam o uso desses recursos nas práticas de ensino do SND.

A discussão sobre os materiais manipulativos constituiu uma parte central da tese, reconhecendo sua relevância histórica e pedagógica no ensino da matemática, em especial, nos Anos Iniciais. Destacamos que o uso de manipulativos remonta a importantes educadores, como Pestalozzi, Montessori e Dienes, que defendiam a mediação concreta como uma estratégia para favorecer a construção do conhecimento matemático. Por outro lado, apresentamos também autores que enfatizam que o uso desses materiais deve ser criterioso, já que seu uso inadequado pode gerar confusões ou dificultar a aprendizagem.

Amparados em Silveira, Powell e Grando (2025), entendemos que os manipulativos podem ser definidos como “quaisquer objetos físicos, pictóricos ou virtuais utilizados como recursos para o ensino de determinado conhecimento” (p. 1). Além disso, propomos algumas categorias possíveis quanto à sua função didática, como: (1) materiais usados para criar analogias; (2) materiais projetados para representar ostensivamente um objeto matemático específico; (3) manipulativos convencionados a representar um determinado objeto; (4) manipulativos construídos para modelar ou resolver problemas; (5) manipuláveis usados como instrumentos para realizar tarefas matemáticas; e (6) manipulativos usados em jogos

pedagógicos (sendo esta não excludente). Entendemos que essas categorizações contribuem para enriquecer a discussão científica sobre os manipuláveis, fortalecendo-os como objetos de pesquisa em educação matemática.

O capítulo dedicado ao SND articulou elementos históricos e epistemológicos ao debate didático contemporâneo. Inicialmente, resgatamos a origem e a evolução dos sistemas de numeração, com destaque para o sistema indo-arábico e suas propriedades fundamentais: a base decimal, os agrupamentos, o valor posicional e ainda, a escrita cifrada. Nesta escrita, os algarismos de 1 a 9 representam, de maneira simbólica e não icônica, as primeiras quantidades, enquanto o zero expressa a ausência de quantidade, assumindo papel fundamental na estrutura posicional do sistema. Em seguida, discorremos sobre algumas dificuldades que a literatura aponta sobre o ensino e a aprendizagem do SND, a partir de diferentes autores. Uma dificuldade importante refere-se ao ensino mecânico das operações aritméticas que, sem a devida compreensão conceitual, pode dificultar a construção de significados matemáticos. O estudo dessa literatura específica foi importante para compreendermos a complexidade de ensino do SND e, com isso, pensar em como os manipulativos podem ser usados como auxiliares.

Em relação aos livros didáticos, discutimos seu papel como um veículo privilegiado de disseminação de conhecimentos e práticas escolares. A partir de uma revisão da literatura nacional e internacional, constata-se que os livros didáticos influenciam significativamente as práticas pedagógicas e que, portanto, devem ser um objeto recorrente de investigação em educação matemática. No Brasil, a elaboração e a organização dos LD estão subordinadas às diretrizes do PNLD e também às habilidades da BNCC. Reconhecemos que esses documentos não são neutros e que carregam concepções políticas dos governos que os elaboraram.

Um exemplo do impacto da BNCC nos LD é que, em sua lista de habilidades específicas para o ensino de números nos Anos Iniciais, indica o uso de manipulativos. Essa menção nas habilidades, no processo de elaboração de um livro que atende às diretrizes, a presença de manipulativos nas tarefas deixa de ser somente uma proposta pedagógica dos autores, tornando-se uma obrigação. Todavia, verificamos que o documento não oferece explicações claras sobre o uso desses recursos, reforçando, assim, a importância de se lançar um olhar crítico sobre o modo como são indicados para auxiliarem no ensino do SND. Embora não seja o foco desta pesquisa, não podemos deixar de mencionar que a BNCC tem sido amplamente criticada e questionada pela comunidade de educadores matemáticos (Passos; Nacarato, 2018) pois, como é sabido, sua estrutura, baseada em competências e habilidades, reforça uma lógica meritocrática e tecnicista, esvaziando o potencial crítico e emancipatório da educação.

No que tange à parte teórico-metodológica, o EOS em particular, a ferramenta da dimensão epistêmica foi escolhida como lente para analisar as representações dos manipulativos. Os componentes que formam a dimensão epistêmica (situações-problema, linguagem, procedimentos, argumentos, proposições e relações) permitiram à pesquisa realizar uma análise aprofundada acerca dos significados institucionais envolvidos nas tarefas didáticas que propuseram o uso de manipulativos. A partir da EOS, tomamos, como referência ao SND, os seguintes significados: cardinal, operacional, sequencial, medida e simbólico. Entendê-los contribuiu para compreendermos as intencionalidades pedagógicas de cada manipulativo em relação aos conceitos do SND.

Além disso, a análise epistêmica, na perspectiva ontossemiótica, incluiu também a identificação de conflitos semióticos em potencial, os quais envolvem erros, ambiguidades, falta de clareza ou incompreensões produzidas pelo modo como as representações dos manipulativos são usadas nas tarefas. Esses conflitos são considerados “em potencial” porque não são observados diretamente em sala de aula, mas identificados como possíveis fontes de incompreensão a partir da análise epistêmica das tarefas do livro didático. Este foi um ponto central nas discussões, pois permitiu problematizarmos as limitações das propostas didáticas presentes nos livros e pensar em formas mais eficazes de representar e indicar o uso dos manipulativos.

Adentrando o texto sobre a apresentação e a discussão dos dados para compor o *corpus* de análise, recorreremos às cinco coleções de matemática mais vendidas para os Anos Iniciais do PNLD (2023-2026). Apesar de estarmos falando de um total de 25 obras (cinco livros de cada coleção, do primeiro ao quinto ano), nosso olhar inicial se restringiu, primeiro, aos capítulos voltados ao ensino de números e operações, e depois, às tarefas contendo indicações e representações de manipulativos. Conforme esperado, muitos tipos de uso se repetem entre as coleções, já que todas seguiram o mesmo edital do PNLD e também as habilidades da BNCC. Desse modo, a escolha final dos dados se resumiu a um conjunto de extratos que chamamos de “casos representativos” sobre o uso de cada material (BBD, ábaco, dinheirinho, fichas verdes e objetos do cotidiano). A partir de um quadro de referência, elaborado com base nos componentes da dimensão epistêmica do EOS, analisamos esses casos para identificar os significados institucionais envolvidos e os conflitos semióticos em potencial.

Dentre os materiais analisados, os Blocos base dez (BBD) se destacam como o manipulativo de maior recorrência, tendo sido indicados pelas cinco coleções, e por isso, a análise dos casos representativos iniciou por eles. Foram amplamente utilizados para o significado cardinal (representando quantidades) e o operacional (no apoio das operações

básicas). De forma pontual, são usados para trabalhar a ideia de sequência (principalmente a sequência de dezenas e centenas inteiras). Já os demais significados não foram contemplados pelas tarefas, o que, por sua vez, não entendemos como algo negativo, visto que cada manipulativo ‘mostra’ apenas uma parte do objeto e que, por isso, dificilmente vão auxiliar em muitos significados.

Um dos principais usos dos BBD esteve relacionado à representação estruturada de quantidades, por meio de unidades (cubinhos), dezenas (barras) e centenas (placas), favorecendo a visualização da base dez como o princípio organizador do sistema. Além disso, foram empregados em tarefas que propunham a construção e a decomposição de números, contribuindo diretamente para o desenvolvimento da compreensão do valor posicional e da composição numérica. E também usados como representação auxiliar para a realização de operações aritméticas simples, sobretudo adições e subtrações com reagrupamentos. Esses usos, quando acompanhados de propostas bem estruturadas e intencionalidade pedagógica, demonstram o potencial dos BBD para favorecer a construção de significados matemáticos mais sólidos no ensino do SND.

Apesar de sua ampla utilização e potencial didático, a análise evidenciou alguns conflitos semióticos em relação ao uso dos BBD. O principal deles ocorre quando os BBD são organizados de forma sobreposta ao Quadro Valor de Lugar (QVL). As peças dos BBD, quando usadas desse modo, criam um conflito semiótico epistêmico em potencial, devido à ambiguidade do número que estão representando. Isso ocorre pela incoerência em colocar um material que tem um valor agregado (diferente de um) dentro de um espaço que só tem existência para garantir que se compreenda que, a depender da posição em que um valor é inserido, ele multiplica uma potência de dez, ou seja, é um espaço posicional. Desse modo, para evitar esse conflito, os BBD podem ser usados em articulação com o QVL, desde que não sobreponham o material nos quadros. O único caso em que essa sobreposição não incorre em equívoco acontece quando usam-se apenas as peças do cubinho que têm valor absoluto igual a uma unidade. Todavia, visto que o QVL antecipa a escrita final do número com os símbolos indo-arábicos, sugerimos que, dentro do quadro, sejam colocados apenas algarismos.

Outro conflito em potencial esteve presente em tarefas que usam os BBD para representar números decimais não inteiros em livros do 5º ano. As coleções que fazem essa indicação usam os BBD em volumes anteriores sempre para trabalhar com a unidade, a dezena, a centena e a unidade de milhar. Com essas mudanças, as peças passam a ter outros valores, como o milésimo, o centésimo e o décimo. A ressignificação das peças para representar objetos diferentes, conforme os autores que apresentamos em nossas análises, exige dos estudantes

rupturas abruptas nos significados atribuídos anteriormente, deixando espaço para possíveis conflitos. Sugerimos, portanto, não mudar o significado atribuído ao longo dos anos aos BBD, e buscar, assim, outro recurso para ensinar os números na forma decimal não inteira e fracionária.

O segundo manipulativo analisado foi o ábaco, presente em quatro das cinco coleções. Embora presente em menor quantidade de tarefas, revelou-se um material com representatividade epistêmica centrada nos significados cardinal e operacional. Suas potencialidades estão especialmente ligadas ao trabalho com o valor posicional dos algarismos e ao reforço das trocas entre ordens, com destaque para as tarefas de adição e subtração com reserva. Em muitos casos, é articulado em tarefas que também utilizam o QVL, mostrando a relação entre a quantidade de anilhas em cada haste com a representação simbólica dos algarismos. Como é mencionado pelo autor nas orientações ao professor, espera-se que sua manipulação auxilie na compreensão do funcionamento dos algoritmos usuais, enfatizando o processo de agrupamentos e reagrupamentos.

Entretanto, foi identificada uma fragilidade recorrente em uma das coleções, que utilizou anilhas coloridas para representar diferentes ordens, o que pode gerar interpretações equivocadas sobre os valores atribuídos às cores, em detrimento da posição. Tarefas desse tipo, quando não acompanhadas de orientações claras do professor, tendem a comprometer a função semiótica primordial do ábaco, tornando-se, assim, um conflito em potencial. Por essa razão, as coleções precisam manter um padrão na forma de representar o ábaco e evitar colorir as anilhas com cores diferentes, conforme Silveira (2016; 2018; 2021) orientam. Nos casos em que a escola só tiver ábacos coloridos, é possível juntar as anilhas da mesma cor em um único ábaco e fazer diversos deles, cada um de uma cor.

O dinheirinho, por sua vez, embora tenha sido indicado para apoiar o ensino de agrupamentos e trocas, mostrou-se um material cuja lógica de funcionamento, baseada em convenções sociais, não coaduna com o funcionamento estruturante do SND. A tentativa de utilizar o sistema monetário real como uma metáfora para a base dez demanda que o estudante ignore valores intermediários (como notas de 2, 5 ou 50 reais), o que pode gerar conflitos de significado. A análise apontou que o uso do dinheirinho para representar trocas de dez unidades por uma dezena, ou de dez dezenas por uma centena, exige um exercício artificial de abstração que se distancia da vivência cotidiana dos estudantes com o dinheiro. Assim, reforça-se a ideia de que o uso desse material, como representação da estrutura posicional, deve ser repensado ou, ao menos, mediado cuidadosamente.

Isso não significa que o dinheiro não seja um material com potencial para ensinar, por exemplo, a resolver situações-problema sobre o sistema monetário brasileiro. Representar quantidades por meio dele, comparando as cédulas e as moedas com o registro simbólico dos algarismos, é algo que pode ser feito para que o estudante aprenda a usar o Real (R\$), embora seu foco não deva se limitar a ensinar a base dez, com as trocas e os agrupamentos. Com esse caso, fica evidente que é preciso considerar a natureza do material ao colocá-lo em uma proposta pedagógica para ensinar matemática.

Em relação aos materiais menos frequentes, como as fichas verdes, os palitinhos e as tampinhas, observou-se que sua presença está restrita a coleções específicas e a tarefas pontuais. As fichas verdes, por exemplo, são específicas da coleção *Ápis Mais Matemática*, tendo sido utilizadas como alternativa aos BBD, mas com um material não proporcional, que exigiu dos estudantes uma abstração maior em relação à correspondência forma-valor. Elas apresentam conflitos semióticos em potencial similares ao caso dos BBD. Primeiro, são usadas em quadros tarjados, implicando no mesmo problema ao sobrepor-las no QVL. Como têm valor agregado, não devem ser sobrepostas em espaços cuja posição possa remeter a algum valor posicional. Em segundo, são ressignificadas para representar quantidades racionais não inteiras e frações, de modo que, por ser um material convencionado que visualmente não guarda relação com o valor atribuído, é arriscado alterar seus significados após anos de uso.

Já os objetos do cotidiano, como as tampinhas e os palitinhos, aparecem com baixa frequência, sendo indicados, de forma geral, como uma alternativa de baixo custo, mas sem a devida exploração didática que valoriza suas potencialidades representacionais. Os ‘amarradinhos’ de palitos, por exemplo, podem ser usados para formar agrupamentos de dez. Contudo, diferentemente dos BBD, cuja barrinha (dezena) não pode ser dividida ou desmembrada em dez cubinhos (unidades), os palitos podem ser usados livremente para compor ou decompor as dezenas. Com isso, entendemos que esse tipo de material poderia estar mais presente nas coleções, tanto pelo custo quanto pelas possibilidades de manipulação.

À luz das análises realizadas ao longo deste trabalho, foi possível atingirmos nossos objetivos específicos. Foram eles: (i) identificar e classificar os diferentes tipos de representação de materiais manipulativos presentes em livros didáticos que objetivam caracterizar e ensinar números, sistemas de contagem e operações aritméticas; (ii) entender que significados institucionais sobre o SND são pretendidos pelos livros didáticos por meio do uso de materiais manipulativos; (iii) analisar os objetos matemáticos que emergem a partir das práticas com manipulativos indicadas nos LD; e (iv) discutir que incompreensões, ambiguidades e conflitos semióticos podem surgir a partir das representações e indicações dos

manipulativos presentes nos livros didáticos. Com o avanço das análises, chegamos a algumas considerações para atingir tais objetivos:

(i) Identificamos que os materiais mais indicados nas coleções são os BBD, o ábaco e o dinheirinho. Outros materiais, como as fichas verdes, estão presentes ao longo de uma coleção específica, enquanto que os objetos do cotidiano, como as tampinhas e os palitinhos, têm baixa recorrência nas obras. Propomos também algumas categorizações para os manipulativos em relação a seu tipo de uso didático, ampliando o debate científico sobre eles.

(ii) Os significados institucionais pretendidos pelos livros didáticos, com o uso dos manipuláveis, foram, na maioria dos casos, referentes ao contexto cardinal e operatório. De forma mais pontual, temos algumas tarefas com o significado sequencial e ordinal. Isso mostra que o principal auxílio dos manipuláveis analisados envolve a representação de quantidades (articulando representações) e tarefas que pretendem criar significações dos algoritmos usuais das operações.

(iii) Em relação aos objetos matemáticos envolvidos nas tarefas, verificamos que a representatividade epistêmica das propostas analisadas tem potencial para mobilizar diferentes objetos primários relacionados ao SND. Dentre eles, destaca-se o componente linguagem, uma vez que os manipuláveis são sempre utilizados em articulação com outras representações (simbólica indo-arábica, linguagem natural, termos matemáticos, QVL e esquemas, em geral). Destaca-se também o objeto primário definições, visto que os manipuláveis são empregados principalmente para mobilizar a base dez, o valor posicional e o valor relativo, além de auxiliar nas trocas e nos agrupamentos entre as ordens.

(iv) Em relação às incompreensões, ambiguidades e conflitos semióticos, identificamos diferentes casos com potencial de conflito. E os motivos são: o uso inadequado de materiais para fins diferentes daqueles para os quais foram criados; a apresentação de características visuais distratoras; e a ressignificação do material para ensinar outros objetos. Esses motivos, já alertados por estudos como Silveira (2018) e Silveira, Powell e Grando (2025), mostram-se presentes nas obras. E diante disso, ao longo das análises, tecemos sugestões de melhorias com o intuito de evitar essas situações.

Desse modo, alcançamos também nosso objetivo geral, pois foi possível compreender, a partir da dimensão epistêmica, os significados institucionais e os conflitos semióticos presentes nas tarefas com manipulativos para ensinar o SND. Podemos reiterar que todos os materiais têm potencial pedagógico e que podem ser usados para enriquecer a representatividade epistêmica dos objetos matemáticos. Porém, seu uso deve considerar quais aspectos do objeto o material consegue representar, de que modo deve ser usado para promover

um pensamento matemático adequado, e ainda, considerar as limitações que esse material apresenta. Ademais, é preciso ter em mente que os manipulativos são, principalmente, iniciadores de ideais, e que, com o tempo, devem ser substituídos por pensamentos mais abstratos.

Espera-se que esta pesquisa tenha contribuído para ampliar as discussões sobre o uso de materiais manipulativos no SND, especialmente no contexto dos livros didáticos dos Anos Iniciais. Ao analisar diferentes coleções a partir de uma perspectiva ontossemiótica, buscamos problematizar como as escolhas representacionais podem influenciar de forma positiva ou negativa na construção de significados matemáticos. Acredita-se que os resultados aqui apresentados possam servir de subsídio para pesquisadores, professores e autores de livros didáticos, oferecendo elementos para uma reflexão crítica e fundamentada acerca do papel dos manipulativos no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Além disso, esta investigação abre espaço para novos desdobramentos e aprofundamentos. Um deles é a necessidade de estudos empíricos em sala de aula para avaliar a prática efetiva com esses materiais, e outro, de explorar a formação docente inicial e continuada no que diz respeito à apropriação crítica dos materiais concretos e à análise didático-epistêmica das tarefas escolares. Dessa forma, espera-se que esta tese não apenas contribua com o campo da Educação Matemática, mas também inspire novas investigações comprometidas com a qualidade do ensino e a formação de sujeitos matematicamente críticos e autônomos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. C. **Origens da matemática**. Curitiba: Champagnat, 1998.

ALSINA, Á.; BOSCH I CASAS, E. Del Gamar a la escuela: Principios sobre el uso de materiales manipulativos en el aula de matemáticas. **Números: Revista de didáctica de las matemáticas**, v. 119, p. 73-89, 2025.

AMARAL, R. B. *et al.* **Livro didático de matemática: compreensões e reflexões no âmbito da Educação Matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2023.

AMARAL-SCHIO, R. B. Livro Didático de Ensino Médio, Geometria e a Presença das Tecnologias. **Renote**, Porto Alegre, v. 16, n. 2, p. 127-137, 2018.

ARAÚJO, A. F. Q.; CARVALHO, J. I. F. Conhecimentos didático-matemáticos de licenciandos e professores de matemática para abordagem da curva normal. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 23, n. 4, p. 273-302, 2021.

AVILA, A. Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. **Educación Matemática**, v. 31, n. 2, p. 22-60, ago. 2019.

BAGNO, M. **Gramática pedagógica do português brasileiro**. São Paulo: Parábola Editorial, 2012.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como. **Por que**, p. 73-80, 2004.

BAROODY, A. J. Um ponto de vista: Os manipuladores não vêm com garantias. **O professor de aritmética**, v. 37, n. 2, p. 4-5, 1989.

BUSSI, M. B. G.; SUN, X. H. **Building the foundation: Whole numbers in the primary grades. The 23rd ICMI study**. Cham: Springer Nature, 2018.

BEHR, M. J. *et al.* Rational number concepts. **Acquisition of mathematics concepts and processes**, v. 91, p. 126, 1983.

BICUDO, M. A. V. (Ed.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora Unesp, 2021.

BITTENCOURT, C. M. F. Autores e editores de compêndios e livros de leitura (1810-1910). **Educação e pesquisa**, v. 30, n. 3, p. 475-491, 2004.

BJÖRKLUND, C. Less is more – mathematical manipulatives in early childhood education. **Early Child Development and Care**, v. 184, n. 3, p. 469-485, 2014.

BONI, K. T.; LABURÚ, C. E.; FILHO, P. S. C. Teoria dos campos conceituais, diversidade representacional e redescrição representacional: convergências teóricas a respeito do papel

das representações para a aprendizagem conceitual. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 26, n. 2, p. 97-112, 2021.

BORBA, M. C.; CHIARI, A. **Tecnologias digitais e educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 2019.

BRAGA, N. H.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Utilização de ferramentas de idoneidade didática para análise do conceito de função em livros didáticos. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, e202127, p. 1-24, 2021.

BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração**. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. Algumas considerações sobre o ensino do sistema de numeração: discussão de atividades à luz da conceitualização e representação semiótica. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 2013.

BRASIL. Decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985. Institui o Programa Nacional do Livro Didático, dispõe sobre sua execução e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, 20 ago. 1985.

BRASIL. Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017. Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro e do Material Didático. **Diário Oficial da União**, Brasília, p. 7, 19 jul. 2017.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. **Educação é a Base**. Brasília: MEC, 2018.

BREDA, A.; BOLONDI, G.; DE ABREU SILVA, R. Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática: um estudo metanalítico das teses produzidas no Brasil. **Revemop**, v. 3, p. e202117, 2021.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255-278, 2018.

BREDA, A.; HUMMES, V.; SILVA, R. S.; SÁNCHEZ, A. El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 69, p. 263-288, 2021.

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; LIMA, Valderez Marina. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 8, n. 2, 2015.

BROWN, M. C.; MCNEIL, N. M.; GLENBERG, A. M. Concretude na educação: problemas reais, soluções potenciais. **Perspectivas do Desenvolvimento Infantil**, v. 3, n. 3, p. 160-164, 2009.

BURGOS, María *et al.* Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, n. 66, p. 40-68, 2020.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria**, v. 2, n. 2, p. 33-54, 2009.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez Editora, 1988.

CARVALHO, G. S.; MEDRADO, J. S.; MATTOS, R. A. L.; FONSECA, L. S. A abordagem da função seno no livro didático do Ensino Médio após a implementação da BNCC. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 14, n. 3, p. 1-23, 2023.

CASTILLO, M. J.; BURGOS, M.; GODINO, J. D. Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. **Educação e Pesquisa**, v. 47, p. 1-21, 2021.

CARBONNEAU, K. J.; MARLEY, S. C.; SELIG, J. P. A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. **Journal of Educational Psychology**, v. 105, n. 2, p. 380-400, 2013.

CASTILLO, M. J.; BURGOS, M. Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad en libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. **PNA**, v. 17, n. 2, p. 171-199, 2023.

CASTRO, E.; MOLINA, M. Números naturales y sistemas de numeración. In: SEGOVIA, I.; RICO, L. (Eds.). **Matemáticas para maestros de Educación Primaria**. Madrid: Pirámide, 2017. p. 47-74.

CÉSPEDES, M. J. C.; NAVARRO, M. B.; GODINO, J. D. Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. **Uniciencia**, Heredia, v. 36, n. 1, p. 1-21, 2022.

CHARALAMBOUS, C. Y. *et al.* Uma análise comparativa da adição e subtração de frações em livros didáticos de três países. **Pensamento e aprendizagem matemática**, v. 12, n. 2, p. 117-151, 2010.

CHINGOS, M. M.; WHITEHURST, G. J. **Escolhendo Cegamente: Materiais Instrucionais, Eficácia do Professor e o Núcleo Comum**. Washington: Brookings Institution, 2012.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

CID, E. *et al.* **Sistemas numéricos y su didáctica para maestros**. Universidad de Granada, 2003.

CLEMENTS, D. H.; MCMILLEN, S. Repensando manipulativos “concretos”. In: **Exploração do espaço e Prática da Medição**. [S.l.]: Editora Herder, 1969.

CURI, E.; SANTOS, C. A. B.; RABELO, M. H. Aprendizagens e dificuldades de alunos de 5º ano com relação ao sistema de numeração decimal. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 2, n. 13, 2012.

CURI, Edda. A Formação Inicial de Professores para Ensinar Matemática: algumas reflexões, desafios e perspectivas. **Rematec**, v. 6, n. 9, p. 123-134, 2011.

DALLEMOLE, J. J.; GROENWALD, C. L. O.; RUIZ, L. M. Registros de representação semiótica e geometria analítica: Uma experiência com futuros professores. **Relime**, Ciudad de México, v. 17, n. 2, jul. 2014.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

D'AMBRÓSIO, U. **Por que se ensina Matemática**. Brasília: SBEM, 2013.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

D'AMORE, B.; FONT, V.; GODINO, J. D. La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. **Paradigma**, v. 28, n. 2, p. 49-77, 2007.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Ápis Mais: Matemática (1º ano)**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2021.

DIENES, Z. P. **Aprendizado moderno da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. **Exploração do espaço e Prática da Medição**. [S.l.]: Editora Herder, 1969.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Santiago de Cali: Universidad del Valle/Instituto de Educación y Pedagogía/ Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, R. **Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations**. Cham: Springer, 2017.

FAN, L. Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. **ZDM Mathematics Education**, v. 45, p. 765-777, 2013.

FAN, L.; CHEN, J.; ZHU, Y.; QIU, X.; HU, J. Uso de livros didáticos dentro e fora das salas de aula de matemática: um estudo de 12 escolas secundárias em Kunming e Fuzhou da China. In: **Como os chineses aprendem matemática: Perspectivas de Insiders**. [S.l.]: Mundial Científico, 2004. p. 228-261.

FAN, L.; ZHU, Y.; MIAO, Z. Textbook research in mathematics education: development status and directions. **ZDM Mathematics Education**, 45, p. 633-646, set. 2013.

FAYOL, M. **A criança e o número**: da contagem à resolução de problemas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FAYOL, M. Numeramento: aquisição das competências matemáticas. **RPEM**, Campo Mourão, v. 5, n. 8, p. 278-291, jan./jun. 2016.

FIorentini, D.; Miorim, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

FIorentini, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 1, p. 1-38, 1995.

Font, V.; Godino, J. D. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 8, n. 1, 2006.

Freire, M. **A paixão de conhecer o mundo**: relatos de uma professora. Belo Horizonte: Paz e Terra, 2024.

Freitas, F. M.; Bertolucci, C. C.; Roveda, C. A.; Silva, J. A. Abrindo a caixa de pandora: as competências da matemática na BNCC. **RPEM**, Campo Mourão, v. 8, n. 17, p. 265-291, jul./dez. 2019.

Furner, J. M.; Yahya, N.; Duffy, M. L. Teach mathematics: strategies to reach all students. **Intervention in School and Clinic**, v. 41, n. 1, p. 16-23, 2005.

Fyfe, E. R.; Nathan, M. J. Making “concreteness fading” more concrete as a theory of instruction for promoting transfer. **Educational Review**, v. 71, n. 4, p. 403-422, 2019.

Gay, M. R. G. (Ed.). **Buriti Mais Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2021.

Giovanni Jr, J. R. **A Conquista da Matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2021.

Glaserfeld, E. An exposition of constructivism: why some like it radical. In: Davis, R. B.; Maher, C. A.; Noddings, N. (Eds.). **Monographs of the journal for research in mathematics education**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1990. p. 19-29.

Gluck, D. H. Helping students understand place value. **The arithmetic teacher**, v. 38, n. 7, p. 10-13, 1991.

Godino, J. D. **Enfoque ontosemiótico en educación matemática**: fundamentos, herramientas y aplicaciones. Andalucía: Editorial Aula Magna, 2024.

Godino, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Paris, v. 22, n. 3, p. 237-284, 2002.

Godino, J. D. Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: XIII CIAEM-IACME, Recife, 2011. **Conferencia**. Recife: [s.n.], 2011.

GODINO, J. D. **Teoría de las funciones semióticas**. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática. Granada: Universidad de Granada/Departamento de Didáctica de la Matemática, 2003.

GODINO, J. D. *et al.* Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas Suitability components and indicators of teachers' education programs in mathematics education. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 1, p. 46-74, 2013.

GODINO, J. D. *et al.* Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. In: II CONGRESO INTERNATIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2017, Granada. **Actas...** Granada: [s.n.], 2017. p. 1-13.

GODINO, J. D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, v. 27, n. 2, p. 221-252, 2006.

GODINO, Juan D.; NETO, Teresa. Actividades de iniciación a la investigación en educación matemática. **UNO, Barcelona**, v. 63, p. 69-76, 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 2, p. 07-37, 2008.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. **Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros**. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática/Facultad de Ciencias de la Educación/Universidad de Granada, 2003.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. D. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, Juan D.; BATANERO, Carmen. Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. In: **Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity: An ICMI Study Book 1. An ICMI Study Book 2. Dordrecht: Springer Netherlands, 1998.**

GODINO, Juan D. *et al.* Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, v. 27, n. 2, p. 221-252, 2006.

GONÇALVES, A. O.; CORRÊA, R. L. T. O livro didático de matemática e cultura escolar em pesquisas: primeiras aproximações. **Revista Diálogo Educacional**, v. 16, n. 49, p. 553-566, 2016.

GUSMÃO, T. C. R. S. **Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontossemiótica**. [Tese de Doutorado em Didáctica de las Matemáticas. Faculdade de Ciências da Educação, Universidade de Santiago de Compostela, Espanha], 2006.

GRACIN, D. G. Requisitos em livros didáticos de matemática: uma análise em cinco dimensões de exercícios e exemplos de livros didáticos. **Revista internacional de educação matemática em ciência e tecnologia**, v. 49, n. 7, p. 1003-1024, 2018.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, 2000.

GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais**. São Paulo: Atual, 1992.

GUSMÃO, T. R. *et al.* Modelo de análise do conhecimento cognitivo e metacognitivo. In: 13ª CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2011.

HIDALGO, J. F. R. Sentido y modos de uso de un concepto. In: Romero, L. R.; Verdejo, A. J. M. (Coords.) **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria**. Madrid: Pirámide, 2016. p. 139-152.

HUMMES, V. B. **Uso combinado del Lesson Study y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas**. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades) – Universitat de Barcelona, 2022.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**. Vol. 1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

IFRAH, G. **The universal history of numbers**. London: Harvill, 2000.

IMENES, L. M. **A numeração indo-arábico**. São Paulo: Scipione, 1992. Coleção Vivendo a Matemática.

JOLANDEK, E. G; PEREIRA, A. L; MENDES, L. O. R. Desafios e impactos da implementação da base nacional comum curricular: o que dizem professores de matemática. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, Mossoró, v. 7, n. 21, 2021.

KAIBER, C. T.; LEMOS, A. V.; PINO-FAN, L. R. Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS): um panorama das pesquisas na América Latina. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, n. 23, 2017.

KALLAI, A. Y.; TZELGOV, J. A generalized fraction: An entity smaller than one on the mental number line. **Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance**, n. 35, p. 1845-1864, 2009.

KAMII, C. **Aritmética: novas perspectivas - Implicações da Teoria de Piaget**. 7. ed. Campinas: Papirus, 2001.

KAMII, C. **A criança e o número**. 29. ed. São Paulo: Papirus, 2002.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. (Eds.). **Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics**. Washington: National Academy Press, 2001.

KONIC, P. M.; GODINO, J. D.; RIVAS, M. A. Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. **Números**, v. 74, p. 57-74, 2010.

KONIC, Patricia M.; GODINO, Juan D.; RIVAS, Mauro A. Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. **Números**, v. 74, p. 57-74, 2010.

KRAMER, S.; NUNES, M. F. R.; CORSINO, P. Infância e crianças de 6 anos: desafios das transições na educação infantil e no ensino fundamental. **Educação e Pesquisa**, v. 37, p. 69-85, 2011.

LADEL, S.; KORTENKAMP, U. Artifact-Centric Activity Theory – A framework for the analysis of the design and use of virtual manipulatives. **International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives**. Cham: Springer, 2016. p. 25-40.

LASKI, E. V.; JOR'DAN, J. R.; DAOUST, C.; MURRAY, A. K. What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science and Montessori Education. **SAGE Open**, v. 5, n. 2, 2015.

LÉVY, P. **O futuro do pensamento na era da informática**. São Paulo: Editora 34, 1993.

LEPIK, M.; GREVHOLM, B.; VIHOLAINEN, A. Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 20, n. 3-4, p. 129-156, 2015.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração decimal um problema didático. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1996.

LERNER, D. ¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. In: ALVARADO, M.; BRIZUELA, B. (Comp.). **Haciendo números**. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia. México: Paidós, 2005.

LIMA, G. L.; SILVA, M. J. F. Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de Licenciatura em Matemática. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 20-20, 2015.

LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Vol. 1. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MCNEIL, N. M.; UTTAL, D. H.; JARVIN, L.; STERNBERG, R. J. Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. **Learning and Instruction**, v. 19, p. 171e184, 2009.

MANTOVANI, K. P. **O Programa Nacional do Livro Didático - PNLD: impactos na qualidade do ensino público**. Dissertação (Mestrado em Geografia Humana) – Universidade de São Paulo, 2009.

MARTIN, T. Uma teoria da aprendizagem fisicamente distribuída: como os ambientes externos e os estados internos interagem na aprendizagem da matemática. **Child Development Perspectives**, n. 3, p. 140-144, 2009.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. **Didática da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MAZZI, L. C.; AMARAL-SCHIO, R. B. Uma trajetória histórica dos livros didáticos: um foco nas políticas públicas implementadas nos séculos XX e XXI. **Intermaths**, Vitória da Conquista, v. 2, n. 1, p. 88-105, 2021.

MAZZI, Lucas Carato. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de Geometria**. 160 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)-Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

MELO, E. C. S. G. **Um pequeno retrato acerca do aprendizado de nosso sistema de numeração decimal**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.

MOCROSKY, L. F.; ORLOVSKI, N.; LIDIO, H. O professor que ensina matemática nos anos iniciais: uma abertura ao contínuo acontecer histórico. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 14, n. 1, p. 221-236, 2019.

MORALES-GARCÍA, Lizzet et al. Idoneidad epistémica de tareas para la enseñanza del sistema de numeración decimal en educación Primaria. **Dissertação de Mestrado**. Universidad Autónoma de Guerrero (México), 2018.

MORENO; M. F.; GIL, F. Y.; MONTORO, A. B. Sentido de la medida. In: FLORES, P.; RICO, L. (Coords.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria**. Madrid: Pirámide, 2015.

MOYER-PACKENHAM, P. S.; BOLYARD, J. J. Revisiting the definition of a virtual manipulative. **International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives**. Cham: Springer, 2016. p. 3-23.

MOYER, Patricia S. Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. **Educational Studies in mathematics**, v. 47, n. 2, p. 175-197, 2001.

MONTESORI, M. **The Montessori method**. New York: Schocken, 1964.

MONTESORI, M. **Psychogeometrie**. Das Studium der Geometrie basierend auf der Psychologie des Kindes. Freiburg: Herder, 2012.

MORALES, L.; NAVARRO, C. Idoneidad epistémica del significado de número natural en libros de textos mexicanos. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1338-1368, dez. 2021.

- MULLIS, I. V. S.; MARTIN, M. O.; FOY, P.; HOOPER, M. **PIRLS 2011 international results in reading**. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Amsterdam, 2012.
- MURARI, C. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 25, n. 41, p. 187-211, 2011.
- NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: tecendo fios entre o ensinar e o aprender. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.
- NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005.
- NAGEM, R. L.; OLIVEIRA, E. F. Analogias e metáforas em livros didáticos de matemática. **Educação & Tecnologia**, v. 9, n. 2, 2011.
- NASCIMENTO, A. M. P.; BRENTANO, E. M. Ensino de Matemática no Curso de Pedagogia: Um Desafio na Formação Continuada em Serviço. **Educação Matemática em Revista**, n. 30, p. 04-12, 2013.
- NAVARRO, M. B.; CÉSPEDES, M. J. C. Criterios de idoneidad emitidos por futuros maestros de primaria en la valoración de videos educativos de matemáticas. **Uniciencia**, Heredia, v. 35, n. 2, p. 291-307, dec. 2021.
- NICOL, C. C.; CRESPO, S. M. Learning to Teach with Mathematics Textbooks: How Preservice Teachers Interpret and Use Curriculum Materials. **Educational Studies in Mathematics**, n. 62, p. 331-355, 2006.
- NILLES, J. H.; LEITE, F. A. O currículo do ensino de ciências no Brasil: um olhar para a BNCC e os livros didáticos. **RBECM**, Passo Fundo, v. 6, ed. esp., p. 116-131, 2023.
- OJOSE, B.; SEXTON, L. The Effect of Manipulative Materials on Mathematics: Achievement of First Grade Students. **The Mathematics Educator**, v. 12, n. 1, p. 3-14, 2009.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.
- PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion; NACARATO, Adair Mendes. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 119-135, 2018.
- PARRA-URREA, Y. E.; PINO-FAN, L. R. Análisis ontosemiótico de libros de texto chilenos: el caso del concepto de función. In: II CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2017, Granada. **Actas...** Granada: [s.n.], 2017.

PELTIER, C.; VANNEST, K. J. Uma meta-análise da instrução do esquema sobre o desempenho na resolução de problemas de alunos do ensino fundamental. **Review of Educational Research**, v. 87, n. 5, p. 899-920, 2017.

PÉREZ, I.; ALCALDE, M.; LORENZO, G. **Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria**. Castelló: Universitat Jaume I, 2014.

PEROVANO, A. P.; GUIMARÃES, D. R.; LITOLDO, B. F. Análise do livro didático de matemática no Third International Conference on Mathematics Textbooks Research and Development: perspectivas e possibilidades de pesquisa. **Alexandria**, Florianópolis, v. 15, n. 2, p. 237-261, nov. 2022.

PIAGET, J. *et al.* **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Trad. de Fernando Becker e Petronilha G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PINHO, M. A. S.; BLANCO, T. F. Média aritmética em livros didáticos: uma análise a partir do enfoque ontosemiótico. **Revista Binacional Brasil-Argentina**, v. 6, n. 1, p. 247-265, 2017.

POLIKOFF, M. S. Quão bem alinhados estão os livros didáticos com os padrões básicos comuns em matemática? **American Educational Research Journal**, v. 52, n. 6, p. 1185-1211, 2015.

PINA, A. *et al.* Sistema Numérico Decimal na Base Nacional Comum Curricular: um olhar para as aprendizagens nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 13, n. 30, p. 139-164, 2024.

PINHEIRO, J. M. L.; SOUZA, A. P. Sistema numérico decimal na base nacional comum curricular: um olhar para as aprendizagens nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 13, n. 30, p. 139-164, jan./abr. 2024.

PINO-FAN, Luis R.; GODINO, Juan D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, v. 36, n. 1, p. 87-109, 2015.

PINO-FAN, L. Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. In: II CONGRESO INTERNATIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2017, Granada. **Actas...** Granada: [s.n.], 2017.

PIRES, E. M.; SILVEIRA E.; SABEL, E. Ambiguidades Em Livros Didáticos de Matemática dos Anos Iniciais: Reflexões Sobre Possíveis Erros dos Estudantes. In. XV Encontro Nacional de Educação Matemática, 2025, Manaus. **Anais...** Manaus: Universidade Federal do Amazonas 2025. No prelo.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em educação**, p. 93-169, 2003.

POST, T. R. O Papel dos Materiais de Manipulação no aprendizado de conceitos matemáticos. In: LINDQUIST, M. M. (Ed.). **Selected Issues in Mathematics Education**. Trad. de Elenisa T. Curti e Maria do Carmo Mendonça. 1981. Mimeografado.

PRESMEG, N. Semiotics in Mathematics Education. In: LERMAN, S. (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. London: Springer, 2014. p. 538-542.

REMILLARD, J. T. Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. **Review of Educational Research**, v. 75, n. 2, p. 211-246, 2005.

REYS, R. *et al.* Avaliando o impacto de materiais curriculares de matemática de séries intermediárias baseados em padrões sobre o desempenho do aluno. **Revista de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 34, n. 1, p. 74-95, 2003.

REZAT, S. Learning mathematics with textbooks. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), **Proceedings:32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 4, pp. 177-184, 2008.

RICO, L. *et al.* Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. **Suma**, n. 58, p. 7-23, 2008.

RIPOLL, C. *et al.* Comparando Grandezas – Parte I. In: 2º SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 2015, Brasília. **Anais...** Brasília: ANPMat, 2015.

RUBINSTEIN, C. *et al.* **Bem-me-quer Mais Matemática**. 7. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2021.

RUIZ, J. F. Sentido y modos de uso de un concepto. In: RICO, L.; MORENO, A. (Eds.). **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria**. Madrid: Pirámide, 2016. p. 139-151.

RUIZ, L. Construcción de los decimales en la escuela primaria. De las fracciones a la notación decimal. In: CHAMORRO, C. (Ed.). **Números, formas y volúmenes en el entorno del niño**. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, 2004. p. 189-234.

SABEL, E.; SILVEIRA, E. Representações auxiliares na aprendizagem matemática: o caso dos materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 18, p. 1-20, 2023.

SABEL, E.; SILVEIRA, E. Processos de Abstração Matemática: reflexões a partir da articulação entre o Desvanecimento da Concretude e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Catarinense de Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 1-17, 2022.

SABEL, E.; PIRES, E. M.; SILVEIRA, E. Materiais Manipulativos: Uma Análise de Definição e Caracterização no Ensino de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. In: XIV ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2022. **Anais...** SBEM, 2022.

SHARMA, M. C. Place value concept: how children learn it and how to teach it. **Math Notebook**, Framingham/USA, v. 10, n. 1-2, p. 02-23, jan-Feb, 1993.

SEMAAN, I. (Ed.). **Aprender Juntos Matemática**. 1. ed. São Paulo: SM Educação, 2021.

SILVA, J. E.; SANTOS, J. J. F.; IBIAPINO, R. P. A geometria espacial trabalhada a partir da construção de sólidos geométricos. In: IX ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande: Realize Eventos e Editora, 2016.

SILVA, J. R. D. Relações entre a Aprendizagem de Pontos Críticos de Funções e os Registros de Representação Semiótica. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 78, p. 153-164, 2023.

SILVA, L. R.; BÔAS, J. V. Contribuições do uso de manipuláveis como estratégia na resolução de problemas sobre o princípio multiplicativo. **Revista Ensino em Foco**, v. 2, n. 4, p. 85-98, 2019.

SILVA, M. C. A Matemática na Índia Medieval. In: **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta do Brasil, 2000.

SILVEIRA, E. Afinal, estamos ensinando matemática errado? In: 10º ANPED SUL, 2014, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: Universidade do Estado de Santa Catarina, 2014.

SILVEIRA, E. Afinal, está certo ou errado? Um estudo sobre indicações de uso de blocos base dez em livros didáticos de matemática no Brasil. In: 7º SIPEM, 2014, Foz do Iguaçu. **Anais...** Foz do Iguaçu: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018..

SILVEIRA, E. Materiais manipuláveis e alguns riscos que envolvem sua utilização. In: SILVEIRA, E. *et al.* (Orgs.). **Alfabetização na perspectiva do letramento**: letras e números nas práticas sociais. Florianópolis: NUP-CED-UFSC, 2016. p. 221-240.

SILVEIRA, E. Um estudo sobre as indicações para o uso de Base *Ten Blocks* e *Green Chips* nos livros didáticos de matemática no Brasil. **O Entusiasta da Matemática**, v. 18, n. 3, p. 469-501, 2021.

SILVEIRA, E.; POWELL, A. Representações e indicações de uso de materiais manipulativos em livros didáticos de primeiro ao quinto ano: serão consistentes? In: XIII ENEM, 2019. **Anais...** ENEM, 2019.

SILVEIRA, E.; SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. Estudo de Frações: superficialidades, parcialidades ou equívocos. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 38, p. e230100, 2024.

SMOLE, Katia Stocco; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental**. Penso Editora, 2013.

SOARES, E. T. P.; PINTO, N. B. Zoltan Dienes e o sistema de numeração decimal (1960-1989). **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 1, p. 71-87, 2014.

- SOARES, J. B.; SOUZA, W. O. Memorial do PNLD: elaboração, natureza e funcionalidade. In: XIX SEMANA DE HUMANIDADES, 2011, Natal. **Anais...** Natal: [s.n.], 2011.
- SOUZA, I. S.; TIAGO, G. M. As possibilidades do ensino de matemática com música no ensino fundamental. **Encontro Nacional de Educação Matemática**, v. 12, p. 1-8, 2016.
- SOUZA, R. N. S.; MORETTI, M. T. Objeto real versus ideal: consequências na constituição de sistemas semióticos para a aprendizagem intelectual. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 6, n. 2, p. 70-85, 2015.
- STEINBRING, H. What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 1-2, p. 133-162, 2006.
- TAGLIANI, D. C. O livro didático como instrumento mediador no processo de ensino aprendizagem de língua portuguesa: a produção de textos. **RBLA**, Belo Horizonte, v. 11, n. 1, p. 135-148, 2011.
- TEIXEIRA, L. R. M. *et al.* As representações simbólicas e os significados construídos por alunos do ensino fundamental sobre a escrita numérica. **Nuances: estudos sobre Educação**, v. 6, n. 6, 1996.
- TERIGI, F.; WOLMAN, S. Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. **Revista Iberoamericana de Educación**, n. 43, p. 59-83, 2007.
- THOMPSON, P. W.; LAMBDIN, D. Research into practice: Concrete materials and teaching for mathematical understanding. **The Arithmetic Teacher**, v. 41, n. 9, p. 556-558, 1994.
- TITON, F. P.; PEREIRA, D. N. R.; MAY, L. Instrumentalização matemática: uso da régua, do compasso, do esquadro e do transferidor nos anos finais do Ensino Fundamental. **Revista Signos**, v. 43, n. 2, 2022.
- TOLEDO, M. **Didática de matemática**: como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.
- UTTAL, D. H. On the relation between play and symbolic thought: the case of mathematics manipulatives. In: SARACHO, O. N.; SPODEK, B. (Eds.). **Contemporary perspectives on play in early childhood education**. Charlotte: Information Age Publishing, 2003. p. 97-114.
- UTTAL, D. H.; O'DOHERTY, K.; NEWLAND, R.; HAND, L. L.; DeLOACHE, J. Dual representation and the linking of concrete and symbolic representations. **Child Development Perspectives**, v. 3, n. 3, 2009, p. 156-159.
- UTTAL, David H.; SCUDDER, Kathryn V.; DELOACHE, Judy S. Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. **Journal of applied developmental psychology**, v. 18, n. 1, p. 37-54, 1997.
- VALENTE, W. Osvaldo Sangiorgi e o movimento da matemática moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educativo**, Curitiba, v. 8, n. 25, 2008.

VALVERDE, G. A. **According to the book:** Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Cham: Springer, 2002.

VAN DEN HAM, A-K.; HEINZE, A. Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. **Studies in Educational Evaluation**, v. 59, p. 133-140, December 2018.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. São Paulo: Penso Editora, 2009.

VECE, J. P.; SILVA, S. D.; CURI, E. Desatando os nós do sistema de numeração decimal: investigações sobre o processo de aprendizagem dos alunos do 5º ano do ensino fundamental a partir de questões do SAEB/Prova Brasil. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 1, 2013.

VIEIRA, G. A.; ZAIDAN, S. Estratégias de ensino de matemática para turmas heterogêneas. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 7, n. 3, 2016.

VIEIRA, R. P.; SILVA, V. C.; POSSAMAI, J. P. Metodologia de investigação nos anos iniciais: tarefas investigativas explorando conteúdos matemáticos. **BOEM**, v. 11, p. e0008, 2023.

ZUNIGA, N. O. C. **Uma análise das repercussões do Programa Nacional do Livro Didático no livro didático de matemática.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

WILLINGHAM, D. T. **A mente leitora:** uma abordagem cognitiva para entender como a mente lê. [S.l.]: John Wiley & Filhos, 2017.